

Algebraic Topology: An Introduction

by

WILLIAM S. MASSEY
Yale University

Harcourt, Brace & World, Inc.
New York — Chicago — San Francisco — Atlanta 1967

Group Theory and Three-Dimensional Manifolds

by

JOHN STALLINGS

Yale University Press
New Haven and London 1971

У. Масси | Дж. Столлингс

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

Введение

Перевод с английского
М. С. Кушельмана

Под редакцией
А. В. Чернавского

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1977

Книга, в которой объединены две монографии, может служить хорошим введением в алгебраическую топологию. В первой ее части, написанной У. Масси, подробно рассматриваются фундаментальная группа и основные понятия топологии — накрывающие пространства, двумерные многообразия, CW-комплексы, приводятся многочисленные примеры и устанавливаются связи с теорией групп. Во второй части, написанной Дж. Столлингсом, развиваются приложения фундаментальной группы к трехмерным многообразиям, обсуждаются дальнейшие связи с теорией групп, в частности дается теория концов групп.

Книга рассчитана на студентов старших курсов, специализирующихся в области топологии. Написанная современным языком и содержащая большое число примеров, она интересна и специалистам-математикам.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В первоначальном изложении топологии, которое дал Пуанкаре в «*Analysis Situs*», фундаментальной группе и накрывающим было уделено столько же внимания, сколько и гомологиям. Дальнейшее развитие этой науки оказалось в значительной мере развитием теории гомологий, и в силу этого во всех учебниках о фундаментальной группе сообщается теперь лишь несколько общих фактов. Между тем фундаментальная группа и накрытия — это, несомненно, лучший путь для ознакомления неспециалистов с топологией, особенно ввиду непосредственной близости его к ряду вопросов анализа и алгебры.

Известный американский тополог У. Масси впервые написал вводный курс алгебраической топологии в форме книги о фундаментальной группе. Ограничив себя этой темой, он тем не менее постарался познакомить читателя-студента также и с современным стилем математического мышления, прежде всего с языком универсальных задач. Кроме того, много внимания в книге уделено раскрытию связей фундаментальной группы с теорией групп. Приведены, например, доказательства таких трудных в алгебраическом изложении теорем, как теоремы Куроша и Грушко. Это, несомненно, сделало книгу интересной и для изучающих теорию групп.

К этой книге прилагается перевод небольшой книжки более молодого американского тополога Дж. Столлинга. Она естествен-

но продолжает на более современном уровне изучение связей между фундаментальной группой и теорией групп. Хотя все необходимое для ее понимания содержится в книге Масси, но читается она трудно и местами, возможно, доступна лишь специалистам. С другой стороны, в ней собраны и изящно изложены важные факты из топологии трехмерных многообразий и теории групп, в том числе полученные недавно (лемма Дена, теорема о сфере, концы групп и др.). Кроме того, приведены теоретико-групповые построения автора, к которым он пришел от задач топологии трехмерных многообразий и которые, по-видимому, являются началом нового изучения алгебраических конструкций, возникающих в топологии. Несомненно, и топологи и алгебраисты смогут найти здесь для себя новые темы для размышления.

А. В. Чернавский

У. Масси

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ. ВВЕДЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот учебник предназначен для того, чтобы облегчить знакомство с алгебраической топологией, тем, кто начинает ее изучать. Основные рассматриваемые нами вопросы — двумерные многообразия, фундаментальная группа и накрывающие пространства, а также та теория групп, которая нужна для этих вопросов. Предполагается, что читатель владеет теорией групп лишь в пределах обычного курса алгебры и общей топологией в объеме односеместрового курса.

Обсуждаемые здесь вопросы «стандартны» в том смысле, что в хорошо известных учебниках им посвящено несколько коротких разделов или глав. Я полагаю, что настоящая книга является первым учебником, где эти вопросы рассматриваются непосредственно, без лишнего определений, терминов и т. д., зато с большим числом примеров и упражнений — именно это позволяет изучить предмет.

Результаты, изложенные в этой книге, используются, кроме алгебраической топологии, и в некоторых других областях математики, таких, как дифференциальная геометрия, теория групп Ли, теория римановых поверхностей и теория узлов. В процессе исследования рассматриваемых здесь вопросов выявляется замечательная связь алгебры и топологии, которая обогащает каждый из этих разделов математики возможностью интерпретации в другом разделе. Такая взаимосвязь между различными разделами математики ломает зачастую искусственное ее деление на различные «области» и подчеркивает существенное единство этой науки.

Несомненно, некоторые специалисты будут шокированы тем, что учебник, назначение которого — быть введением в алгебраическую топологию, не содержит даже упоминания о гомологической теории. Разумеется, теория гомологий и когомологий составляет суть алгебраической топологии. Однако эта теория трудна для

студента, изучающего топологию впервые, и для систематического ее изучения требуется непростой аппарат. Лишь после нескольких месяцев лекционных занятий и самостоятельного изучения можно дать интересные применения, показывающие, что этот аппарат был развит не напрасно. Поэтому я считаю, что студенту легче понять и оценить теорию гомологий после того, как он изучил фундаментальную группу и примыкающие к ней вопросы, представленные в этой книге.

По всей вероятности, гл. I, в которой обсуждаются двумерные многообразия, покажется наименее строгой частью книги. Конечно, было бы нетрудно провести уже здесь достаточно строгие рассуждения. Однако они были бы довольно скучными и утомительными, содержали бы многословные доказательства очевидных и наглядных фактов. Кроме того, основные теоремы в других главах не основываются на результатах гл. I, которые скорее можно считать примерами, иллюстрациями и применениями результатов дальнейших глав.

В гл. II приведены определение и основные свойства фундаментальной группы и гомоморфизма фундаментальных групп, индуцированного непрерывным отображением. Общие методы определения структуры фундаментальной группы пространства развиты позже, в гл. IV, после введения в гл. III некоторых существенных теоретико-групповых понятий.

В гл. III и IV делается акцент на таком способе введения определенных математических структур, как решение «задач универсального отображения», и это делается по двум причинам. Во-первых, по-видимому, подавляющее большинство эффективных методов определения структуры фундаментальной группы значительного числа пространств состоит в использовании теоремы Зейфферта — ван Кампена (гл. IV); наиболее удачная формулировка этой замечательной теоремы основана на понятии задачи универсального отображения. Во-вторых, метод характеристики различных математических структур в виде решений задач универсального отображения принадлежит к тому ряду действительно объединяющих математических принципов, которые были введены в 1945 г., и его следует применять как можно раньше в процессе преподавания математики студентам.

Глава V содержит достаточно полное обсуждение накрывающих пространств. На всем ее протяжении подчеркивается связь между накрывающими пространствами и фундаментальной группой.

В гл. VI и VII приведены топологические доказательства нескольких хорошо известных теорем из теории групп, главным образом теоремы Нильсена—Шрейера о подгруппах свободной группы, теоремы Куроша о подгруппах свободного произведения групп и теоремы Грушко о разложении конечно порожденной груп-

пы в свободное произведение. Эти теоремы относятся к разделу теории групп, первоначальное развитие которого было во многом стимулировано комбинаторной топологией. Я считаю, что доказательства этих теорем, использующие фундаментальные группы и накрывающие пространства определенных комплексов малых размерностей, значительно легче для понимания, чем чисто алгебраические доказательства. Я надеюсь, что унифицирующая обработка этих теорем методами, по существу геометрическими, делает этот раздел теории групп менее громоздким и легче усваиваемым.

Глава VIII довольно краткая и имеет описательный характер; в ней не доказываются ни одной теоремы. Цель ее — помочь студенту совершить переход к изучению более трудных вопросов алгебраической топологии.

Хотя триангуляция 2-многообразий используется в гл. I, а CW-комплексы Уайтхеда вводятся в последней главе, в этой книге нет систематического изучения симплициальных комплексов. Это может удивить читателя, так как большинство курсов по алгебраической топологии начинаются именно с обсуждения этих вопросов. Однако трудно увидеть, как они могут существенно упростить изложение. По-моему, любое такое обсуждение даже обязательно было бы неясным. Одна из тенденций алгебраической топологии примерно последних 15 лет состояла именно в переходе от симплициальных комплексов к CW-комплексам как главному объекту изучения.

Некоторые разделы не обязательны для понимания дальнейшего изложения теории, и их можно опустить или не слишком обращать на них внимание в сокращенном курсе лекций и при первом чтении книги; перечислим их:

глава I, разделы 9—13,
глава II, разделы 7, 8,
глава III, раздел 7,
глава IV, раздел 6,
глава V, разделы 10—12,
глава VI, раздел 8,
глава VII, разделы 5, 6.

Более краткий курс можно построить также на основе материала, помещенного в первых пяти главах, за исключением указанных разделов.

Эта книга возникла из лекций, которые читались в Йельском университете в течение нескольких лет. Очень приятно выразить признательность моим слушателям. Мне очень помогали их вопросы, критические замечания и предложения. Я приношу глубокую благодарность моим коллегам за многочисленные обсуждения

идей, изложенных в этой книге. Подавляющее большинство теорем и определений можно найти в хорошо известных учебниках и статьях, опубликованных в математических журналах. Особо отмечу учебники Зейферта и Трельфалля [3], Керекьярто [4] и Рейдемейстера [6] ¹⁾. В большинстве случаев я пытаюсь отметить тех, кому, как я полагаю, следует приписывать ту или иную идею или теорему. Разработка представленных здесь вопросов началась в основном в прошлом веке, и в ней принимали участие многие математики из разных стран, так что в моей попытке указать авторов неизбежны ошибки. Я приношу свои извинения тем, чьи имена по оплошности не приводятся; я надеюсь, что они поймут меня и простят.

У. Масси

Нью-Хейвен, Коннектикут

¹⁾ Литературу см. в конце гл. I. — *Прим. перев.*

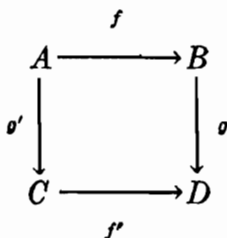
ЗАМЕЧАНИЯ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Требования к читателю. Для чтения этой книги предполагается, что студент владеет стандартными понятиями теории групп: группа, подгруппа, нормальная подгруппа, гомоморфизм, факторгруппа, класс смежности, абелева группа и циклическая группа. Кроме того, предполагается, что он знает достаточно много примеров и проделал достаточное количество упражнений, чтобы почувствовать истинный смысл этих понятий. Для тех, кто не знаком с перестановками и группами преобразований, приведены соответствующие приложения. Большинство дополнительных вопросов, нужных в теории групп, развиты в тексте, в особенности в гл. III.

Необходимые сведения из теоретико-множественной топологии можно почерпнуть из односеместрового курса по этому предмету. Так как в большинстве учебников, предназначенных для чтения такого курса, факторпространства либо рассматриваются кратко, либо целиком опускаются, мы предлагаем их короткое обсуждение. Нет необходимости знать области алгебры, отличные от теории групп; в частности, из теории колец, полей, модулей и векторных пространств не понадобится ничего.

Терминология и обозначения. Так как большая часть терминологии и обозначений в современных математических книгах этого уровня стандартна, сделаем лишь некоторые пояснения. В теории групп всюду применяется мультипликативная форма записи (за некоторыми стандартными исключениями, такими, как аддитивная группа целых чисел). Гомоморфизм одной группы в другую называется *эпиморфизмом*, если он является «отображением на», *мономорфизмом*, если он взаимно однозначен (т. е. его ядро состоит лишь из единицы), и *изоморфизмом*, если взаимно однозначен и является «отображением на». Говорят, что диаграмма

групп и гомоморфизмов



коммутативна, если оба возможных гомоморфизма одной группы из этой диаграммы в другую совпадают. В приведенной выше диаграмме два гомоморфизма из группы A в группу D , а именно gf (гомоморфизм g следует после гомоморфизма f) и $f'g'$. Таким образом, требование коммутативности диаграммы эквивалентно условию $gf = f'g'$. Заметим, что коммутативность диаграммы не имеет ничего общего с коммутативностью самих групп в диаграмме. Например, наша диаграмма может быть коммутативной, даже если группы A , B , C и D не абелевы.

В теории множеств символ

$$\prod_{i \in I} S_i$$

означает произведение (или декартово произведение) семейства множеств S_i , $i \in I$. Элемент x декартова произведения — это функция, ставящая в соответствие каждому индексу $i \in I$ элемент $x_i \in S_i$. Элемент $x_i \in S_i$ называется также *координатой* элемента x , соответствующей индексу $i \in I$.

Если A — подмножество множества B , то существует однозначно определенное *отображение включения* множества A в B : каждому элементу $x \in A$ оно ставит в соответствие сам этот элемент x . В символах: если $i: A \rightarrow B$ — отображение включения, то $i(x) = x$ для любого элемента $x \in A$. Если C — другое множество и $f: B \rightarrow C$ — любая функция, то $f|A$ обозначает *сужение* функции f на подмножество A , т. е. $(f|A)(a) = f(a) \in C$ для любого $a \in A$.

На протяжении всей книги применяются следующие обозначения:

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, положительных и отрицательных,

$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел,

$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

Через $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) для любого целого числа $n > 0$ обозначается множество всех n -векторов $(x_1, \dots, x_n)$, составленных из действительных (соответственно комплексных) чисел;

$\mathbf{R}^n$ — обычное евклидово n -пространство, наделенное обычной топологией. Если $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка в $\mathbf{R}^n$, то норма, или абсолютное значение, вектора x , обозначаемое через $|x|$, определяется как обычно:

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Пользуясь этими обозначениями, определим следующие стандартные подмножества евклидова n -пространства для любого $n > 0$:

$$\begin{aligned} E^n &= \{x \in \mathbf{R}^n: |x| \leq 1\}, \\ U^n &= \{x \in \mathbf{R}^n: |x| < 1\}, \\ S^{n-1} &= \{x \in \mathbf{R}^n: |x| = 1\}. \end{aligned}$$

Эти подмножества называются *замкнутым n -мерным диском*, или *шаром*, *открытым n -мерным диском*, или *шаром*, и $(n-1)$ -мерной *сферой* соответственно. В каждом из них топология вводится как в подпространстве пространства $\mathbf{R}^n$. Иногда те же названия соответственно присваиваются гомеоморфным топологическим пространствам.

Если a и b — действительные числа, $a < b$, то для открытого, полуоткрытого и замкнутого интервалов с концами a и b употребляются стандартные обозначения:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbf{R}: a < x < b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbf{R}: a < x \leq b\}, \\ [a, b] &= \{x \in \mathbf{R}: a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

Говорят, что два пространства имеют один и тот же *топологический тип*, если они гомеоморфны.

Ссылки. Ссылка на теорему или лемму III.8.4 означает ссылку на теорему или лемму 4 из разд. 8 гл. III; если написано просто теорема 8.4, то теорема находится в разд. 8 той же главы, где эта ссылка встретилась.

В конце каждой главы помещена краткая библиография. Числа в квадратных скобках в тексте относятся к таким же числам в библиографии.

Об изучении этой книги. Упражнения и примеры составляют неотъемлемую часть текста; без них намного труднее достичь пони-

мания предмета. Большинство утверждений приводятся без доказательства, детали некоторых доказательств опущены. Восполнение недостающих деталей рассматривайте как упражнения, проверяющие, на самом ли деле вы поняли те или иные идеи.

Помните, что при изучении любого предмета путь от незнания к знанию не прям, а почти всегда извилист. Видимо, изучать что-либо надо способом последовательного приближения к истине. Следовательно, первая попытка одолеть некоторые трудные теоремы в этой книге, вероятно, будет не совсем успешной. Однако не падайте духом. Вернитесь к упражнениям, примерам, попробуйте продвинуться немного дальше, и можно быть уверенным, что за ваше упорство вы будете вознаграждены более глубоким пониманием изучаемых идей.

Глава I

ДВУМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Введение

Топологическое понятие поверхности, или двумерного многообразия,— это математическая абстракция представления о поверхности, сделанной из бумаги, листа металла, пластмассы или какого угодно другого тонкого материала. Поверхность, или двумерное многообразие,— это топологическое пространство с теми же локальными свойствами, что и у плоскости в евклидовой геометрии. Разумный клоп, ползущий по поверхности, не может отличить ее от плоскости, если его поле зрения ограничено.

В более высоких размерностях аналогом поверхности является n -мерное многообразие, представляющее собой топологическое пространство с теми же локальными свойствами, что и у евклидова n -пространства. Так как многообразия часто встречаются и применяются во многих других областях математики, они составляют один из важнейших классов топологических пространств. Мы определим и дадим примеры n -мерных многообразий для любого положительного целого числа n , но большую часть этой главы мы посвятим случаю $n = 2$. Для компактных 2-многообразий есть классификационная теорема, так что о 2-многообразиях известно несравнимо больше, чем о многообразиях более высоких размерностей. Кроме того, существуют просто вычислимые инварианты, позволяющие установить, гомеоморфны ли между собой два любых данных компактных 2-многообразия. Этот факт можно считать некоторой идеальной теоремой. Подавляющее большинство исследований в топологии направлено на то, чтобы найти аналогичные классификационные теоремы в других ситуациях. К сожалению, такой теоремы нет для компактных 3-многообразий, и логики показали, что для n -многообразий, $n \geq 4$, мы не можем даже надеяться на получение такого полного результата. Тем не менее теория многообразий высоких размерностей в настоящее время и, вероятно, надолго представляет довольно активную область математических исследований.

Материал, излагаемый в этой главе, особенно в разд. 2—8, нам понадобится в дальнейшем.

2. Определение и примеры n -многообразий

Пусть n — положительное целое число; n -мерным многообразием называется хаусдорфово пространство (т. е. пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_2), каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную открытому n -мерному диску $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < 1\}$. Ради краткости мы, как правило, будем говорить n -многообразие.

Примеры

2.1. Очевидно, что евклидово n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$ есть n -мерное многообразие. Легко доказать, что n -мерная единичная сфера

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: |x| = 1\}$$

есть n -многообразие. Для точки $x = (1, 0, \dots, 0)$ множество $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n: x_1 > 0\}$ является окрестностью с требуемыми свойствами. Это можно увидеть, проектируя ортогонально на гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, определенную соотношением $x_1 = 0$. Для любой другой точки $x \in S^n$ существует вращение, переводящее x в точку $(1, 0, \dots, 0)$. Это вращение — гомеоморфизм сферы S^n на себя; следовательно, x также имеет окрестность требуемого вида.

2.2. Если M^n — любое n -мерное многообразие, то любое его открытое подмножество также будет n -мерным многообразием. Доказательство получается сразу.

2.3. Если M есть m -мерное многообразие, а N есть n -мерное многообразие, то произведение $M \times N$ есть $(m + n)$ -мерное многообразие. Это следует из того, что $U^m \times U^n$ гомеоморфно U^{m+n} . Для доказательства заметим, что для любого положительного целого числа k диск U^k гомеоморфен $\mathbb{R}^k$, а произведение $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{m+n}$.

Помимо 2-сферы S^2 читатель легко может дать примеры подмножеств евклидова 3-пространства $\mathbb{R}^3$, являющихся 2-многообразиями, например поверхности вращения и др.

Как показывают эти примеры, n -мерное многообразие может быть связным или несвязным, компактным или некомпактным. В любом случае n -многообразие всегда локально компактно.

Не совсем очевидно, что связное многообразие не обязано удовлетворять второй аксиоме счетности (т. е. не обязано иметь счетную базу). Простейший пример — трансфинитная прямая (называемая также «прямой Александрова») ¹⁾. Обычно такие многообразия считаются патологическими, и мы ограничимся рассмотрением многообразий со счетной базой.

Отметим, что в нашем определении требовалось, чтобы многообразие удовлетворяло аксиоме отделимости Хаусдорфа. Это необходимо потребовать именно в определении, так как нельзя вывести

¹⁾ См. Келли Дж., Общая топология, изд-во «Наука», М., 1968, стр. 222.

из других условий, наложенных на многообразие. Предлагаем читателю построить примеры нехаусдорфовых пространств, каждая точка которых имеет открытую окрестность, гомеоморфную U^n , где $n = 1$ или $n = 2$.

3. Ориентируемые и неориентируемые многообразия

Связные n -многообразия для $n > 1$ подразделяются на два класса: ориентируемые и неориентируемые. Попытаемся объяснить различие между ними, не стремясь к математической точности.

Прежде всего рассмотрим случай $n = 2$. Ориентацию евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$ или, более общим образом, любой малой области в плоскости можно задать различными способами. Например, можно указать, какая из двух возможных систем координат на плоскости должна считаться правосторонней, а какая — левосторонней. Другой способ: задать, какое направление вращения в плоскости вокруг некоторой точки должно считаться положительным, а какое — отрицательным. Представим себе, что разумный клоп (или некоторое двумерное существо) вынужден передвигаться в плоскости; однажды он решает выбрать ориентацию в какой-нибудь точке плоскости, и в то время, когда он переходит с одного места на другое, он переносит эту ориентацию вместе с собой. Если два таких клопа согласовали ориентацию в данной точке плоскости и один из них отправился в длительное путешествие в некоторую отдаленную точку плоскости и случайно вернулся в исходную точку, то мнение обоих клопов о выборе ориентации будет одно и то же.

Аналогичные рассуждения применимы к любому связному двумерному многообразию, так как каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную окрестности точки в плоскости. Здесь также наши два гипотетических клопа договариваются о выборе ориентации в данной точке. Однако теперь может оказаться, что после того, как один из них вернулся из длительного путешествия к некоторой далекой точке на многообразии, они обнаружат, что между ними нет больше согласия в выборе ориентации. Это явление может встретиться, даже если оба клопа все время тщательно заботились о точной проверке положительной ориентации.

Простейшим примером двумерного многообразия, иллюстрирующим это явление, служит хорошо известный лист Мёбиуса. Возможно, читатель знает, что для получения листа Мёбиуса достаточно склеить концы длинного узкого прямоугольного листа бумаги, повернув один из концов на 180° (рис. 1.1). Математически лист Мёбиуса — это топологическое пространство, описываемое следующим образом. Обозначим через X прямоугольник

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: -10 \leq x \leq +10, -1 < y < +1\}.$$

Построим факторпространство пространства X , отождествляя точки $(10, y)$ и $(-10, -y)$ для $-1 < y < +1$. (Сведения о факторпространствах см. в приложении А.) Заметим, что две границы прямоугольника, соответствующие $y = +1$ и $y = -1$, не включаются. Этот факт решающий; в противном случае получившееся факторпространство не могло бы быть многообразием (оно было

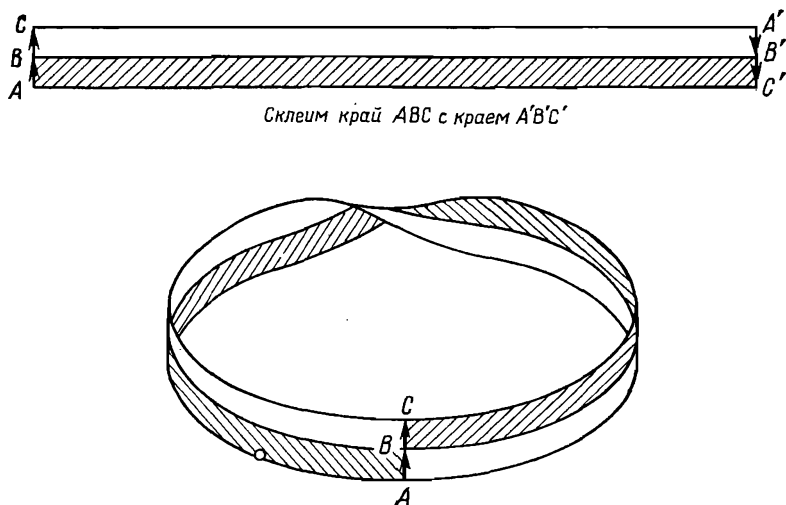


Рис. 1.1. Построение листа Мёбиуса.

бы «многообразием с краем»; к этому понятию мы обратимся позднее в этой главе). Можно также определить некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, гомеоморфное только что описанному факторпространству.

Итак, мы определили лист Мёбиуса; средняя линия прямоугольника после склеивания, или отождествления, двух концов становится окружностью. Предоставляем читателю убедиться в том, что если наш воображаемый клоп отправляется в путь из любой точки этой окружности с определенным выбором ориентации и переносит ориентацию вместе с собой, то при однократном обходе окружности он должен вернуться в исходную точку с обратной ориентацией. Путь на многообразии, обладающий описанным свойством, мы будем называть путем, *меняющим ориентацию*. Замкнутый путь, не обладающий этим свойством, мы будем называть путем, *сохраняющим ориентацию*. Например, любой замкнутый путь в плоскости является путем, сохраняющим ориентацию.

2-многообразие называется *ориентируемым*, если каждый замкнутый путь сохраняет ориентацию; связное 2-многообразие назы-

вается *неориентируемым*, если существует по крайней мере один путь, меняющий ориентацию.

Рассмотрим ориентируемость 3-многообразий. Можно определить ориентацию евклидова 3-пространства или его малой области, указывая, какую систему координат считать правосторонней, а какую — левосторонней. Другой способ — указать, какой тип винтовой нарезки или винтовой линии следует считать правосторонним, а какой — левосторонним. Теперь можно охарактеризовать замкнутый путь в 3-многообразии как путь, *сохраняющий ориентацию* или *меняющий ее*, в зависимости от того, изменится ли у путешественника, который отправляется по этому пути и возвращается в исходную точку, первоначальный выбор того, что считать правым, а что — левым. Если наша Вселенная неориентируема, то астронавт, совершающий путешествие вдоль некоторого пути, меняющего ориентацию, должен возвратиться на Землю с переставленными правой и левой сторонами его тела: его сердце должно быть с правой стороны его грудной клетки и т. д.

Существует трехмерное обобщение листа Мёбиуса, которое служит в то же время простейшим примером неориентируемого 3-многообразия. Пусть

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: -10 \leq x \leq +10, -1 < y < +1, \\ -1 < z < +1\}.$$

Построим факторпространство пространства X , отождествляя точки $(10, y, z)$ и $(-10, -y, z)$ для $-1 < y < +1$ и $-1 < z < +1$. Это пространство можно рассматривать как произведение обычного двумерного листа Мёбиуса и открытого интервала $\{z \in \mathbb{R}: -1 < z < +1\}$. В любом случае после отождествления отрезок $-10 \leq x \leq +10$ оси x становится окружностью, и мы предлагаем читателю самому убедиться в том, что эта окружность в получившемся 3-многообразии является путем, меняющим ориентацию.

Чтобы дать аналогичные определения для n -мерных многообразий, прежде всего надо уметь различать два вида систем координат в евклидовом n -пространстве. Это можно сделать следующим образом. Если заданы две системы координат, то любая точка x имеет координаты $(x_1, \dots, x_n)$ и $(x'_1, \dots, x'_n)$ соответственно, и эти координаты связаны уравнениями

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.1)$$

Здесь a_{ij} и b_i — действительные числа, не зависящие от выбора точки x . Хорошо известно, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Назовем две системы координат *системами одного и того же класса*, если этот определитель больше нуля. В силу обычных свойств определителя системы (1.3.1) — это отношение принадлежности одному и тому же классу является отношением эквивалентности между системами координат в $\mathbf{R}^n$ и существует точно два класса эквивалентности. Для того чтобы задать ориентацию в $\mathbf{R}^n$, надо выбрать один из этих двух классов систем координат. Выбранную систему координат можно охарактеризовать, например, как «положительную» или «правостороннюю».

Как только выбран класс систем координат, путь в связном n -мерном многообразии, сохраняющий или меняющий ориентацию, по существу определяется тем же способом, что и в двумерных и трехмерных многообразиях. Единственная разница состоит в том, что у нас нет геометрической интуиции, которая руководила бы нами в случае высоких размерностей. Конечно, для математической строгости необходимо более подробное рассмотрение.

Так или иначе, но для связных n -мерных многообразий можно определить понятия ориентируемости и неориентируемости. Евклидово n -пространство $\mathbf{R}^n$ и n -сфера S^n дают примеры ориентируемых n -многообразий. Легко определить n -мерное обобщение листа Мёбиуса, которое является неориентируемым n -мерным многообразием. Оно гомеоморфно произведению обычного двумерного листа Мёбиуса и $(n-2)$ -мерного открытого диска U^{n-2} .

В оставшейся части этой главы мы будем рассматривать в основном двумерные многообразия, поэтому не будем глубже вдаваться в эти вопросы.

4. Примеры компактных связных 2-многообразий

Связное 2-многообразие будем называть для краткости *поверхностью*. Простейшим примером компактной поверхности служит 2-сфера S^2 ; другой важный пример — *тор*. Грубо говоря, тор — это любая поверхность, гомеоморфная поверхности бублика или массивного кольца. Точнее его можно определить несколькими способами, например следующими:

- (а) Любое топологическое пространство, гомеоморфное произведению двух окружностей $S^1 \times S^1$.

- (b) Любое топологическое пространство, гомеоморфное подмножеству

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: [(x^2 + y^2)^{1/2} - 2]^2 + z^2 = 1\}$$

пространства $\mathbb{R}^3$. [Это множество получается вращением окружности $(x - 2)^2 + z^2 = 1$ в плоскости xz вокруг оси z .]

- (c) Пусть X — единичный квадрат в плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Тогда тором будет любое пространство, гомеоморфное факторпространству пространства X , полученному отождествлением противоположных сторон квадрата X согласно следующим правилам. Точки $(0, y)$ и $(1, y)$ отождествляются для $0 \leq y \leq 1$, а точки $(x, 0)$ и $(x, 1)$ — для $0 \leq x \leq 1$.

С помощью диаграммы на рис. 1.2 удобно показать, как следует провести отождествление. Отождествляемым сторонам при-

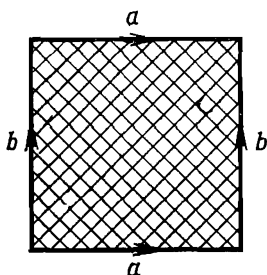


Рис. 1.2. Построение тора.

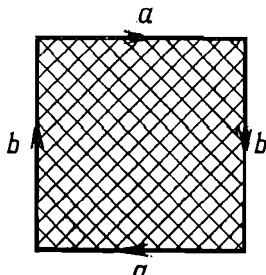


Рис. 1.3. Построение проективной плоскости из квадрата.

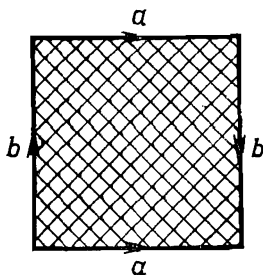


Рис. 1.4. Построение бутылки Клейна из квадрата.

писывается одна и та же буква алфавита, и отождествление осуществляется так, чтобы направления, указанные стрелкой, были согласованы.

Предоставляем читателю доказать, что топологические пространства, описанные в (a), (b) и (c), на самом деле гомеоморфны. Читатель должен также уяснить себе, что тор ориентируем.

В качестве другого примера компактной поверхности рассмотрим *действительную проективную плоскость* (для краткости называемую *проективной плоскостью*). Это компактная неориентируемая поверхность. Так как она не гомеоморфна никакому подмножеству евклидова 3-пространства, то представить себе проективную плоскость намного труднее, чем 2-сферу или тор.

Определение. Факторпространство 2-сферы S^2 , получаемое отождествлением каждой пары диаметрально противоположных

точек, называется *проективной плоскостью*. Любое пространство, гомеоморфное этому пространству, мы также будем называть проективной плоскостью.

Читателям, знакомым с проективной геометрией, поясним, почему эта поверхность называется действительной проективной плоскостью. Напомним, что в проективной геометрии на плоскости точка имеет «однородные» координаты (x_0, x_1, x_2) , где x_0, x_1 и x_2 — действительные числа и по крайней мере одно из них не равно нулю. Термин «однородные» означает, что (x_0, x_1, x_2) и (x'_0, x'_1, x'_2) представляют одну и ту же точку тогда и только тогда, когда существует такое действительное число λ (обязательно не равное 0), что

$$x_i = \lambda x'_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Если интерпретировать (x_0, x_1, x_2) как обычные евклидовы координаты точки в $\mathbb{R}^3$, то (x_0, x_1, x_2) и (x'_0, x'_1, x'_2) представляют одну и ту же точку в проективной плоскости тогда и только тогда, когда они лежат на одной и той же прямой, проходящей через начало координат. Следовательно, можно интерпретировать точку проективной плоскости как прямую, проходящую через начало координат в $\mathbb{R}^3$. Следующий вопрос: как ввести топологию во множество всех прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^3$? Может быть, самый легкий путь — заметить, что каждая прямая, проходящая через начало координат в $\mathbb{R}^3$, пересекает единичную сферу S^2 по паре диаметрально противоположных точек, а это и ведет к определению, данному выше.

Обозначим через $H = \{(x, y, z) \in S^2: z \geq 0\}$ замкнутую верхнюю полусферу сферы S^2 . Ясно, что для каждой пары диаметрально противоположных точек в S^2 по крайней мере одна лежит в H . Если обе точки лежат в H , то они находятся на экваторе, являющемся границей для H . Следовательно, можно было определить проективную плоскость¹⁾ как факторпространство пространства H , получаемое отождествлением диаметрально противоположных точек на границе пространства H . Очевидно, что H гомеоморфно замкнутому единичному диску

$$E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$$

в плоскости $\mathbb{R}^2$. Поэтому факторпространство диска E^2 , получаемое отождествлением диаметрально противоположных точек границы, будет проективной плоскостью. Диск E^2 можно заменить любым гомеоморфным пространством, например квадратом. Итак, проективная плоскость получается отождествлением противоположных сторон квадрата, как показано на рис. 1.3. Предлагаем сравнить эту конструкцию с построением тора на рис. 1.2.

Легко видеть, что проективная плоскость неориентируема; в самом деле, она содержит подмножество, гомеоморфное листу Мёбиуса.

¹⁾ Для строгого обоснования этого утверждения можно воспользоваться предложением 4.2 в приложении А. Оно применимо, так как естественное отображение сферы S^2 в проективную плоскость замкнуто и H — замкнутое подмножество в S^2 .

Опишем сейчас, как с помощью так называемой связной суммы строить новые примеры компактных поверхностей. Пусть S_1 и S_2 — непересекающиеся поверхности. Их *связная сумма*, обозначаемая через $S_1 \# S_2$, образуется вырезанием малого круга из каждой поверхности и затем склеиванием этих двух поверхностей вдоль границ кругов. Точнее, выберем такие подмножества $D_1 \subset S_1$ и $D_2 \subset S_2$, что D_1 и D_2 — замкнутые диски (т. е. они гомеоморфны $\bar{E}^2$). Пусть S'_i — дополнение внутренней части диска D_i в S_i для $i = 1, 2$. Рассмотрим некоторый гомеоморфизм h граничной окружности диска D_1 на границу диска D_2 . Тогда $S_1 \# S_2$ есть факторпространство пространства $S'_1 \cup S'_2$, получаемое отождествлением точек x и $h(x)$ для всех x на границе диска D_1 . Ясно, что $S_1 \# S_2$ — поверхность. Представляется правдоподобным и можно доказать строго, что топологический тип поверхности $S_1 \# S_2$ не зависит от выбора дисков D_1, D_2 и гомеоморфизма h .

Примеры

4.1. Если S_2 есть 2-сфера, то связная сумма $S_1 \# S_2$ гомеоморфна S_1 .

4.2. Если S_1 и S_2 — торы, то их связная сумма $S_1 \# S_2$ гомеоморфна поверхности кирпича, сквозь который просверлены два отверстия. (Разумеется, при этом предполагается, что отверстия расположены на таком расстоянии, что их границы не касаются и не пересекаются.)

4.3. Если S_1 и S_2 — проективные плоскости, то их связная сумма $S_1 \# S_2$ представляет собой бутылку Клейна, т. е. гомеоморфна поверхности, получаемой отождествлением противоположных сторон квадрата, как показано

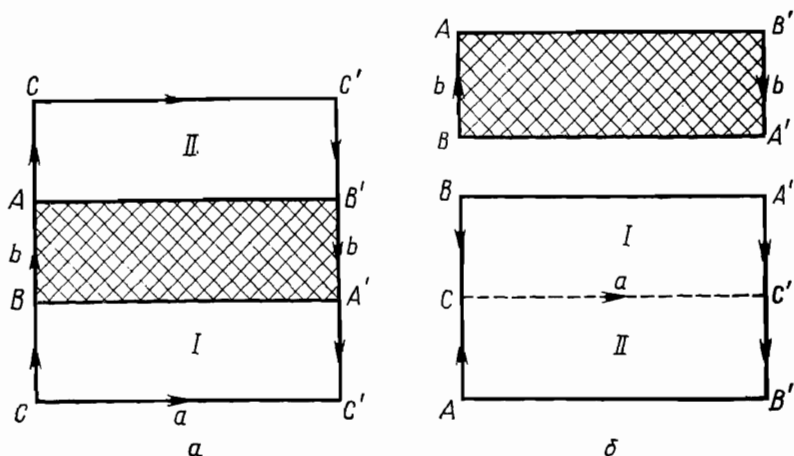


Рис. 1.5. Бутылка Клейна — объединение двух листов Мёбиуса.

на рис. 1.4. Пользуясь техникой «разрезания и склеивания», можно доказать это следующим образом. Если S_i — проективная плоскость, а D_i — такой замкнутый диск, что $D_i \subset S_i$, то дополнение S'_i внутренней части диска D_i

гомеоморфно листу Мёбиуса (включая границу). Действительно, если представить S_1 как пространство, полученное отождествлением диаметрально противоположных точек, лежащих на границе единичного диска E^2 в $\mathbb{R}^2$, то можно выбрать диск D_1 так, чтобы при отождествлении он стал образом множества $\{(x, y) \in E^2 : |y| \geq 1/2\}$, и тогда утверждение очевидно. Отсюда следует, что $S_1 \# S_2$ получается склеиванием двух листов Мёбиуса вдоль их границ. С другой стороны, на рис. 1.5 видно, как разрезать бутылку Клейна, чтобы получить два листа Мёбиуса. Сделаем разрезы вдоль прямых AB' и BA' ; при отождествлении этот разрез станет окружностью.

Рассмотрим теперь некоторые свойства операции взятия связанных сумм.

Из наших определений ясно, что между $S_1 \# S_2$ и $S_2 \# S_1$ нет различий, т. е. операция взятия связанной суммы коммутативна. Нетрудно показать, что многообразия $(S_1 \# S_2) \# S_3$ и $S_1 \# (S_2 \# S_3)$ гомеоморфны. Следовательно, операция взятия связанной суммы коммутативна и ассоциативна на множестве гомеоморфных типов компактных поверхностей. Кроме того, из примера 4.1 вытекает, что для этой операции сфера служит единичным, или нейтральным, элементом. Но не торопитесь с выводом о том, что относительно этой операции множество гомеоморфных типов компактных поверхностей образует группу: здесь нет обратной операции. Оно образует лишь так называемую полугруппу.

Связная сумма двух ориентируемых многообразий снова ориентируема. С другой стороны, если какое-нибудь из многообразий S_1 и S_2 неориентируемо, то их сумма $S_1 \# S_2$ также неориентируема.

5. Формулировка классификационной теоремы для компактных поверхностей

В предыдущем разделе мы показали, как построить примеры компактных поверхностей, образуя связанные суммы различного количества торов и (или) проективных плоскостей. Наша основная теорема утверждает, что этими примерами исчерпываются все возможности. На самом деле она утверждает даже еще больше, а именно, что нет необходимости рассматривать поверхности, в представление которых в виде связанных сумм входят одновременно и торы и проективные плоскости.

Теорема 5.1. *Любая компактная поверхность гомеоморфна либо сфере, либо связанной сумме торов, либо связанной сумме проективных плоскостей.*

В качестве подготовки доказательства опишем так называемую «каноническую форму» для связанной суммы торов или проективных плоскостей.

Вспомним наше представление тора как квадрата с отождествленными противоположными сторонами (см. рис. 1.2). Аналогич-

ное представление связной суммы двух торов можно получить следующим образом. Каждый из торов T_1 и T_2 представим в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, как

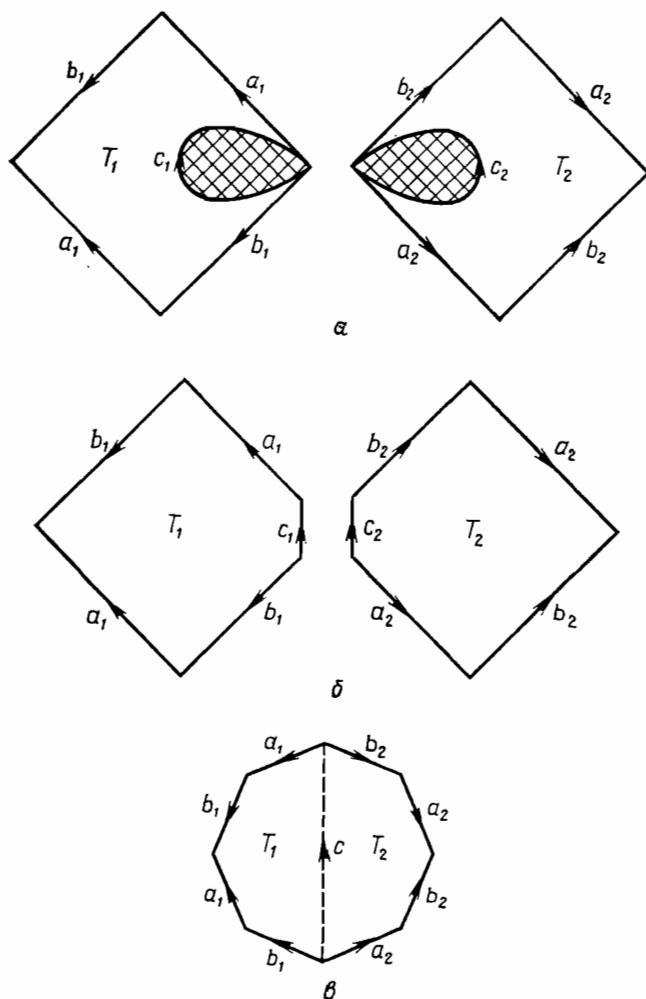


Рис. 1.6. a — два непересекающихся тора T_1 и T_2 ; b — непересекающиеся торы с вырезанными областями; v — после склеивания.

показано на рис. 1.6, a . Заметим, что все четыре вершины каждого квадрата отождествляются с единственной точкой соответствующего тора. Чтобы образовать связную сумму торов, сначала

надо вырезать круглую дыру в каждом из них, и сделать это можно любым способом. Удобно вырезать области, заштрихованные на диаграммах. Границы дыр обозначены c_1, c_2 и их отождествление указано стрелками. Дополнение к дырам в этих двух торах также можно представить в виде многоугольников на рис. 1.6, б, поскольку при указанном отождествлении края две граничные точки отрезка $c_i, i = 1, 2$, также отождествляются. Отождествляя далее отрезки c_1 и c_2 , получаем восьмиугольник на рис. 1.6, в, в котором стороны попарно отождествлены. Заметим, что все восемь вершин этого восьмиугольника отождествляются с единственной точкой в $T_1 \# T_2$.

Этот восьмиугольник с попарно отождествленными сторонами и является «канонической формой» связной суммы двух торов.

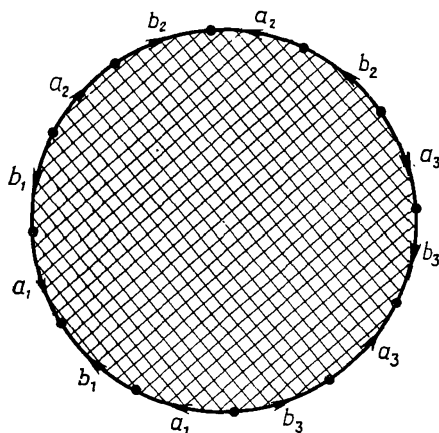


Рис. 1.7. Связная сумма трех торов получается попарным отождествлением [сторон двенадцатиугольника.]

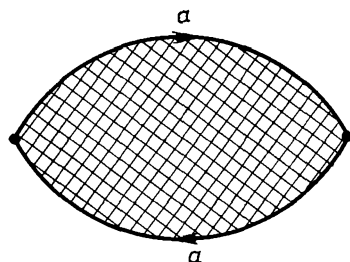


Рис. 1.8. Проективная плоскость получается в результате отождествления краев двуугольника.

Повторяя наши рассуждения, можно показать, что связной суммой трех торов будет факторпространство, получаемое из двенадцатиугольника на рис. 1.7 отождествлением сторон, обозначенных одними и теми же буквами. Теперь должно быть ясно, как по индукции доказать, что связная сумма n торов гомеоморфна факторпространству, полученному из $4n$ -угольника попарным отождествлением сторон по некоторому правилу, точное описание которого оставляем читателю.

Проведем аналогичное построение для связной суммы проективных плоскостей. Проективную плоскость мы рассматривали как факторпространство, образованное из круглого диска отождествлением диаметрально противоположных точек его границы.

Выберем в качестве вершин пару диаметрально противоположных точек на границе диска. Тогда окружность, служащая границей диска, делится ими на два отрезка. Поэтому можно считать, что проективная плоскость получается из двуугольника отождествлением его краев (рис. 1.8).

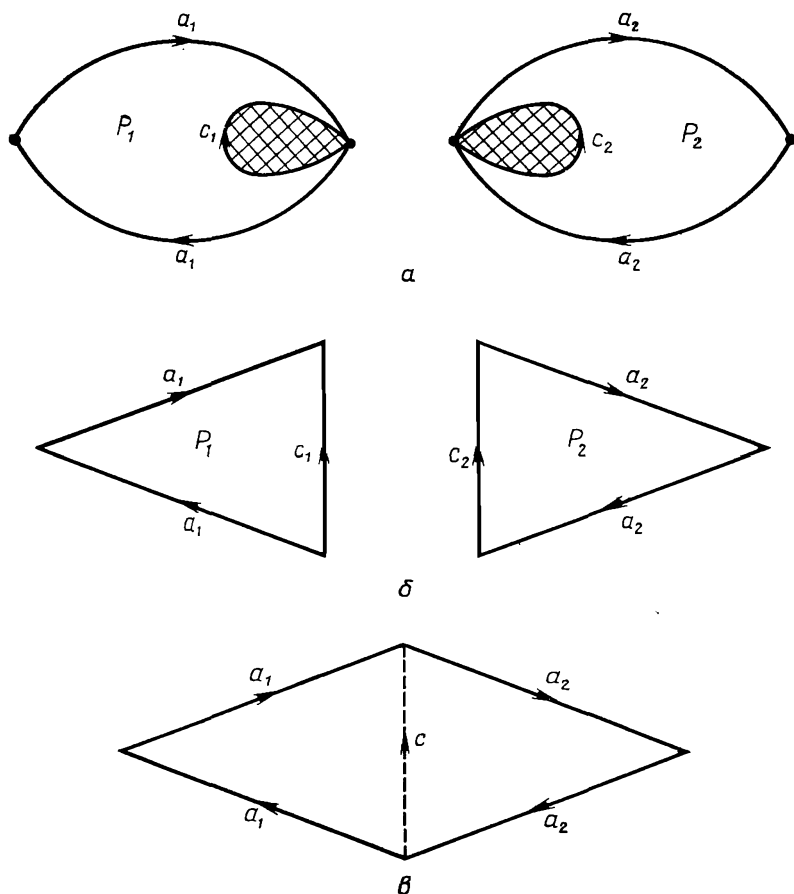


Рис. 1.9. *a* — две непересекающиеся проективные плоскости P_1 и P_2 ; *b* — непересекающиеся проективные плоскости с вырезанными областями; *v* — после склеивания.

На рис. 1.9 показано, как представить связную сумму двух проективных плоскостей в виде квадрата с попарно отождествленными сторонами. В основном способ тот же, что и для представления связной суммы двух торов в виде факторпространства восьмиугольника (рис. 1.6). Повторяя рассуждения, видим, что связная

сумма трех проективных плоскостей есть факторпространство, полученное из шестиугольника попарным отождествлением его сторон, как указано на рис. 1.10. Применяя далее очевидную индукцию, можно доказать, что для любого целого положительного числа n связная сумма n проективных плоскостей является факторпространством $2n$ -угольника, полученным попарным отождествлением его сторон согласно определенному правилу. Заметим, что все вершины этого многоугольника отождествляются с одной точкой.

Остается еще представить сферу в виде факторпространства многоугольника с попарно отождествленными сторонами. Это

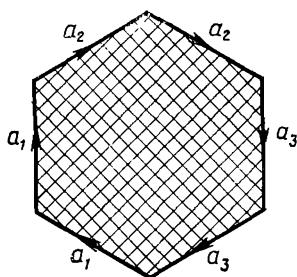


Рис. 1.10. Построение связной суммы трех проективных плоскостей попарным отождествлением сторон шестиугольника.

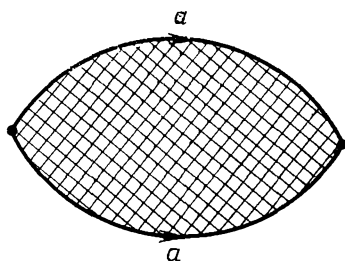


Рис. 1.11. Сфера — факторпространство двуугольника с отождествленными краями.

можно сделать, как указано на рис. 1.11. Сферу можно представить себе кошелеком, застегнутым на молнию; когда молния не застегнута, кошелек можно сделать плоским.

Итак, мы показали, как представить каждую из компактных поверхностей, о которых шла речь в теореме 5.1, в виде факторпространства многоугольника с попарно отождествленными сторонами. Теперь опишем довольно очевидный и удобный способ обозначения того, какие именно стороны должны отождествляться в таком многоугольнике. Рассмотрим диаграмму, указывающую, как происходит отождествление сторон; начиная с определенной вершины, будем двигаться вдоль границы многоугольника, последовательно обозначая его стороны буквами. Если направление стрелки на стороне *совпадает* с направлением нашего движения, то этой стороне припишем букву без степени (или со степенью $+1$). Если же стрелка на стороне указывает направление, *противоположное* нашему, то этой стороне припишем букву со степенью -1 . На-

пример, отождествления на рис. 1.7 и 1.10 точно указываются символами

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1} \text{ и } a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 a_3$$

В каждом случае мы начинали двигаться от нижней вершины диаграммы и обходили границу против часовой стрелки. Ясно, что такое обозначение указывает отождествление однозначно; с другой стороны, написав символ, соответствующий данной диаграмме, можно начать движение из любой вершины и двигаться вдоль границы как по, так и против часовой стрелки.

Подведем итог нашим результатам, выписав символы, соответствующие каждой из поверхностей в теореме 5.1:

(а) сфера: aa^{-1} .

(б) связная сумма n торов:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}.$$

(с) связная сумма n проективных плоскостей:

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n.$$

Упражнение

5.1. Пусть P — многоугольник с четным числом сторон. Предположим, что стороны его попарно отождествлены в соответствии с каким угодно символом. Докажите, что полученное факторпространство будет компактной поверхностью.

6. Триангуляция компактных поверхностей¹

Для того чтобы доказать теорему 5.1, надо предположить, что данная поверхность триангулируема, т. е. разбивается на треугольники, правильно примыкающие друг к другу. Легко видеть, что поверхность земного шара разбивается на треугольные области и что такое же разбиение пригодно и для других компактных поверхностей, а также в общем случае.

Определение. Триангуляция компактной поверхности S состоит из конечного семейства замкнутых подмножеств $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, покрывающего S , и семейства гомеоморфизмов $\varphi_i: T'_i \rightarrow T_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, где каждое множество T'_i есть треугольник в плоскости $\mathbf{R}^2$ (т. е. компактное подмножество в $\mathbf{R}^2$, ограниченное тремя различными прямыми). Подмножества T_i называются «треугольниками». Подмножества треугольников T_i , являющиеся образами вершин и ребер треугольников T'_i при отображении φ_i , также

называются «вершинами» и «ребрами» соответственно. Наконец, требуется, чтобы любые два различных треугольника T_i и T_j либо

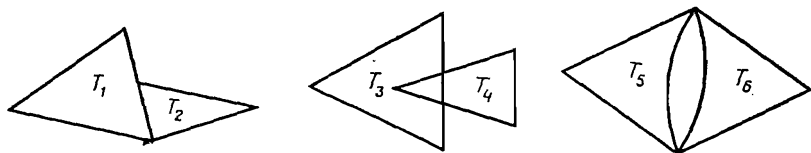


Рис. 1.12. Некоторые типы пересечений, запрещенных при триангуляции.

не имели ни одной общей точки, либо имели единственную общую вершину, либо пересекались по одному ребру.

Условия этого определения поясняются на рис. 1.12, где указаны три *запрещенных* типа пересечений треугольников.

Представляется правдоподобным, что для любой заданной компактной поверхности S должна существовать триангуляция. Строгое доказательство этого факта (данное впервые Радо в 1925 г.) требует сильной формы теоремы Жордана. Хотя эта теорема нетрудна, доказательство ее довольно утомительно, и поэтому здесь мы его не приводим.

Триангулированную поверхность можно рассматривать как поверхность, построенную склеиванием по определенному правилу различных треугольников: это напоминает составление разрезной картинки-загадки. Так как два различных треугольника не могут иметь одних и тех же вершин, можно полностью определить триангуляцию поверхности, перечисляя вершины, а затем составляя список троек вершин, являющихся вершинами треугольников. Такой список треугольников с точностью до гомеоморфизма полностью определяет поверхность с данной триангуляцией.

Примеры

6.1. Поверхность обыкновенного тетраэдра в евклидовом 3-пространстве гомеоморфна сфере S^2 ; кроме того, четыре треугольника, составляющие эту поверхность, удовлетворяют всем условиям, наложенным на триангуляцию сферы S^2 . В этом случае четыре вершины и каждая тройка вершин образуют множество вершин треугольника. Этим свойством не обладает никакая триангуляция никакой другой поверхности.

6.2. На рис. 1.13 указана триангуляция проективной плоскости, рассматриваемой в виде пространства, полученного из диска отождествлением диаметрально противоположных точек его границы. Вершины занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и в триангуляции 10 треугольников:

124	245
235	135
156	126
236	346
134	456

6.3. На рис. 1.14 показана триангуляция тора, представленного в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами. В триангуляции 9 вершин и 18 треугольников:

124	245	235
356	361	146
457	578	658
689	649	479
187	128	289
239	379	137

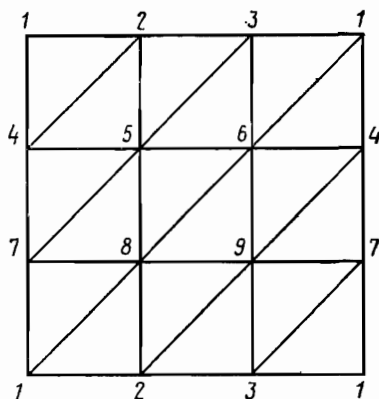
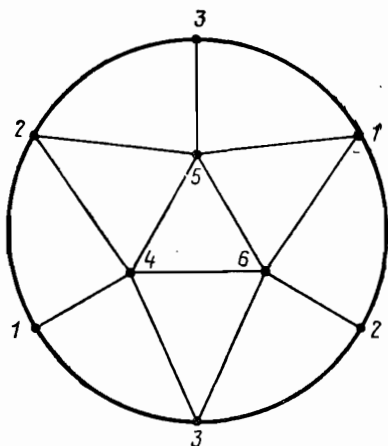


Рис. 1.13. Триангуляция проективной плоскости.

Рис. 1.14. Триангуляция тора.

Обсуждение триангуляций закончим замечанием о том, что любая триангуляция компактной поверхности удовлетворяет следующим двум условиям:

- (1) Каждое ребро триангуляции является ребром точно двух треугольников.
- (2) Пусть v — вершина триангуляции. Тогда множество всех треугольников с вершиной v можно расположить в циклическом порядке $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, T_n = T_0$, так что T_i и T_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, n-1$, обладают общим ребром.

Справедливость условия (1) вытекает из того, что каждая точка на ребре должна иметь открытую окрестность, гомеоморфную открытому диску U^2 . Это оказалось бы невозможным, если бы ребро принадлежало лишь одному треугольнику или более чем двум. Строгое доказательство последнего утверждения увело бы нас очень далеко, но справедливость его не подлежит сомнению.

Условие (2) можно доказать так. Из условия (1) легко следует, что множество всех треугольников с вершиной v можно разбить на несколько таких непересекающихся подмножеств, что треугольники в каждом подмножестве расположены в описанном выше циклическом порядке. Однако если этих подмножеств больше одного, то нарушается требование о том, что точка v имеет окрестность, гомеоморфную U^2 . Строго доказать последнее утверждение мы не пытаемся.

7. Доказательство теоремы 5.1

Пусть S — компактная поверхность. Для доказательства теоремы 5.1 покажем, что поверхность S гомеоморфна многоугольнику, стороны которого отождествлены в соответствии с одним из символов, указанных в конце разд. 5.

Первый шаг. На основании изложенного в предыдущем разделе можно предположить, что поверхность S триангулирована. Обозначим через n число треугольников в триангуляции. Мы утверждаем, что можно так упорядочить треугольники $T_1, T_2, \dots, T_n$, что треугольник T_i имеет общее ребро e_i по крайней мере с одним из треугольников $T_1, \dots, T_{i-1}$, $2 \leq i \leq n$. Чтобы доказать это утверждение, обозначим через T_1 какой-нибудь треугольник; в качестве T_2 выберем любой треугольник, имеющий общее ребро с T_1 , в качестве T_3 выберем любой треугольник, имеющий общее ребро с T_1 или с T_2 , и т. д. Если на некотором шаге нельзя будет продолжать этот выбор, то получатся два множества треугольников $\{T_1, \dots, T_k\}$ и $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$, обладающие тем свойством, что ни один из треугольников первого множества не имеет общего ребра и общей вершины ни с одним из треугольников второго множества¹⁾. Но тогда поверхность S разбивается на два непересекающихся непустых замкнутых множества, что противоречит предположению о ее связности.

Воспользуемся теперь упорядоченностью треугольников $T_1, \dots, T_n$ и ребер $e_2, \dots, e_n$ и построим некоторую «модель» поверхности S в евклидовой плоскости; этой моделью будет многоугольник с попарно отождествленными сторонами. Вспомним, что для каждого треугольника T_i существует обычный (т. е. расположенный в евклидовой плоскости) треугольник T'_i и гомеоморфизм φ_i , переводящий T'_i в T_i . Можно предположить, что треугольники $T'_1, \dots, T'_n$ попарно не пересекаются; если это не так, то можно перенести некоторые из них в другие части плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть

$$T' = \bigcup_{i=1}^n T'_i;$$

¹⁾ На основании условия (2). — Прим. перев.

тогда T' — компактное подмножество в $\mathbf{R}^2$. Определим отображение $\varphi: T' \rightarrow S$, положив $\varphi|T'_i = \varphi_i$; очевидно, что отображение φ непрерывно и является отображением на. Так как множество T' компактно и пространство S хаусдорфово, то φ — замкнутое отображение, и, следовательно, пространство S наделено фактортопологией, определенной отображением φ (см. приложение А, разд. 1). Это утверждение представляет собой строгую математическую формулировку нашей интуитивной идеи о том, что поверхность S получается в результате склеивания треугольников $T_1, T_2, \dots$ вдоль их сторон, выбранных нужным образом.

Многоугольник, о котором шла речь выше, будет факторпространством пространства T' . Рассмотрим любое из ребер e_i , $2 \leq i \leq n$. По предположению e_i — ребро треугольника T_i и некоторого другого треугольника T_j , $1 \leq j \leq n$. Поэтому $\varphi^{-1}(e_i)$ состоит из ребра, принадлежащего треугольнику T'_i , и ребра, принадлежащего треугольнику T'_j . отождествим эти два ребра треугольников T'_i и T'_j , отождествляя между собой точки, отображаемые в одну и ту же точку на e_i (грубо говоря, склеим треугольники T'_i и T'_j). Такое отождествление произведем для каждого из ребер $e_2, e_3, \dots, e_n$. Обозначим получившееся факторпространство пространства T' через D . Ясно, что отображение $\varphi: T' \rightarrow S$ индуцирует отображение ψ пространства D на S и что пространство S наделено фактортопологией, индуцированной отображением ψ (так как D компактно, S хаусдорфово, а отображение ψ замкнуто).

Мы утверждаем, что топологически D есть замкнутый диск. Доказательство опирается на два факта.

- (а) Пусть E_1 и E_2 — непересекающиеся пространства, являющиеся замкнутыми топологическими дисками (т. е. каждое из них гомеоморфно E^2), а A_1 и A_2 — такие подмножества множеств ∂E_1 и ∂E_2 соответственно, что каждое из них гомеоморфно замкнутому интервалу $[0, 1]$. Пусть $h: A_1 \rightarrow A_2$ — некоторый гомеоморфизм. Построим факторпространство объединения $E_1 \cup E_2$, отождествляя точки, переходящие друг в друга при отображении h . Тогда это факторпространство также будет топологически замкнутым диском. Читатель может принять этот довольно правдоподобный факт на веру или же провести доказательство, используя те же аргументы, что и в разд. II. 4. Интуитивно это означает, что если склеивать два диска вдоль общего отрезка их границ, то в результате склейки получится снова диск.
- (б) При построении факторпространства D пространства T' можно осуществить все отождествления либо сразу, либо последовательно: провести отождествление, соответствующее

щее сначала ребру e_2 , затем — e_3 и т. д. Это утверждение вытекает из леммы 2.4 приложения А (см. применение (а) этой леммы).

Теперь с помощью этих фактов докажем, что D — диск. Пространства T'_1 и T'_2 топологически эквивалентны диску. Поэтому по (а) факторпространство объединения $T'_1 \cup T'_2$, полученное отождествлением точек $\varphi^{-1}(e_2)$, снова является диском. Факторпространство объединения этого диска с T'_3 , получаемое отождествлением, соответствующим ребру e_3 , также является диском, и т. д.

Ясно, что пространство S получается из диска D отождествлением определенных пар ребер, принадлежащих краю диска D .

Пример

7.1. На рис. 1.15 иллюстрируется довольно наглядный пример. Поверхность куба триангулирована следующим образом: каждая грань куба своей диагональю разбивается на два треугольника. Образовавшийся диск

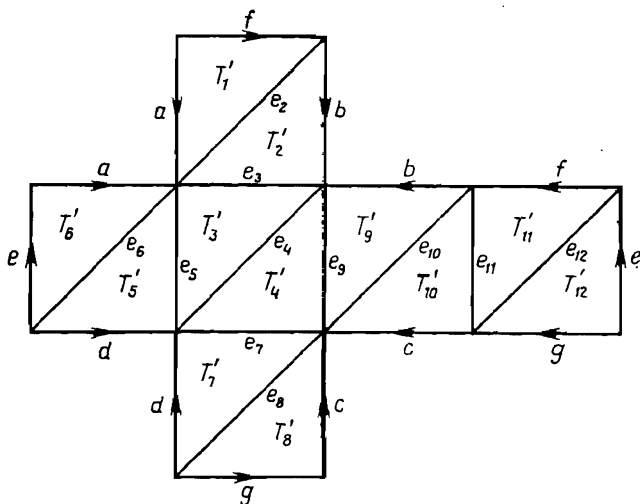


Рис. 1.15. Пример, иллюстрирующий первый шаг доказательства теоремы 5.1.

D можно считать диаграммой, зависящей, разумеется, от упорядочения треугольников и от выбора ребер $e_2, \dots, e_{12}$. Отождествляемые между собой ребра диска D обозначены одними и теми же буквами. На этом шаге можно забыть о ребрах $e_2, e_3, \dots, e_{12}$. Поэтому вместо многоугольника рис. 1.15 столь же успешно можно было взять многоугольник, изображенный на рис. 1.16.

Упражнения

Проведите указанный выше процесс для каждой из поверхностей, триангуляция которых дана ниже. (Замечание. Эти примеры понадобятся нам в дальнейшем.)

7.1.	124 367 698 289 238	236 347 678 578 135	134 469 457 358	246 459 259 125		
7.2.	123	234	341	412		
7.3.	123 136	234 246	345 356	451 416	512 526	
7.4.	124 713 126	235 134 237	346 245	457 356	561 467	672 571
7.5.	123 156 167 172	256 268 275 283	341 357 374 385	451 468 476 485		

Второй шаг. Уничтожение пар смежных ребер первого типа. Итак, построен многоугольник D , из которого попарным отожде-

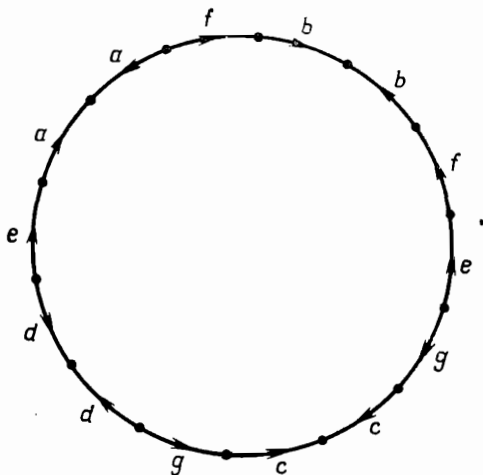


Рис. 1.16. Упрощенный вариант многоугольника, указанного на рис. 1.15.

ствлением ребер образована данная поверхность S . Эти отождествления можно указать с помощью соответствующего символа; например на рис. 1.16 отождествления описываются символом

$$aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e.$$

Пару ребер, которую обозначает буква, встречающаяся в символе с *обоими* показателями $+1$ и -1 , будем называть парой *первого типа*; пару, не удовлетворяющую этому условию, будем называть парой *второго типа*. Например, на рис. 1.16 все семь пар — первого типа.

Покажем, что пару смежных ребер первого типа можно уничтожить, если в символе участвуют по крайней мере четыре ребра. Это легко увидеть на последовательности диаграмм, изображенных на рис. 1.17. Процесс можно продолжать до тех пор, пока

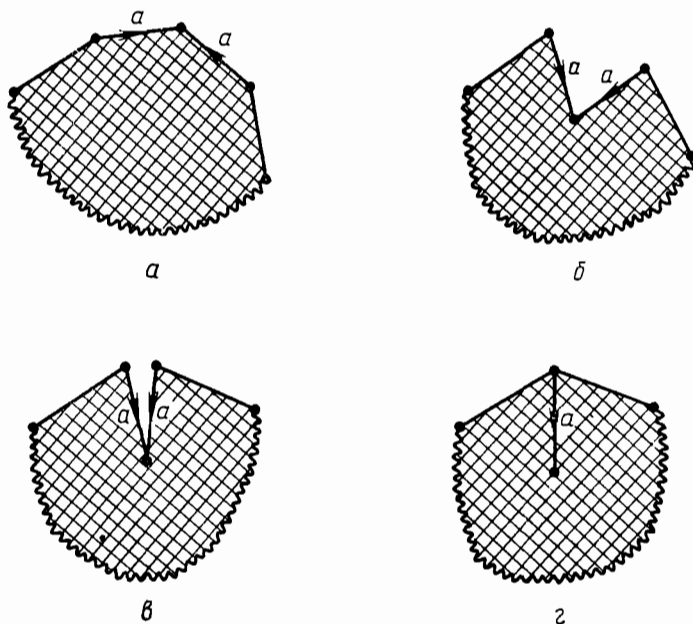


Рис. 1.17. Уничтожение пары смежных ребер первого типа.

все такие пары не окажутся уничтоженными или пока не получится многоугольник лишь с двумя сторонами. В последнем случае этот многоугольник, символом которого будет aa или aa^{-1} , должен быть либо проективной плоскостью, либо сферой, и доказательство закончено. В противном случае переходим к третьему шагу.

Третий шаг. Преобразование к многоугольнику, у которого все вершины должны быть отождествлены с одной точкой. Хотя ребра нашего многоугольника должны быть отождествлены попарно, вершины могут отождествляться по одной, по две, по три и т. д. Две вершины многоугольника назовем *эквивалентными*, если они

должны быть отождествлены. Например, читатель легко может проверить, что на рис. 1.16 восемь различных классов эквивалентности вершин. Некоторые классы эквивалентности содержат лишь по одной вершине, другие классы — по две или по три.

Предположим, что второй шаг мы совершили столько раз, сколько это оказалось возможным. Мы хотим доказать, что наш многоугольник можно преобразовать в другой, у которого все вершины принадлежат одному классу эквивалентности.

Допустим, что различных классов эквивалентности вершин по крайней мере два. Тогда у многоугольника должна быть смежная пара неэквивалентных вершин. Обозначим эти вершины через

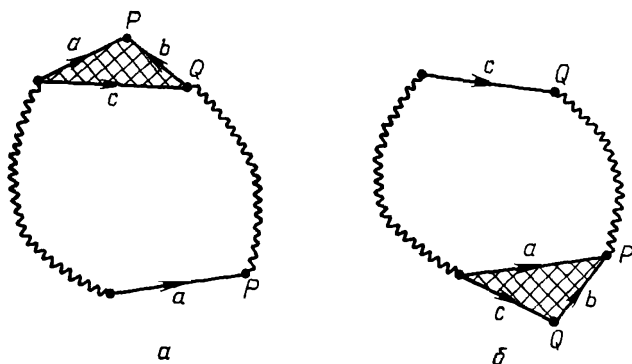


Рис. 1.18. Третий шаг доказательства теоремы 5.1.

P и Q . На рис. 1.18 объяснено, как следует поступать. Так как P и Q неэквивалентны и мы уже совершили второй шаг, то ребра a и b отождествляться *не* должны. Сделаем разрез из вершины Q до вершины ребра a , отличной от P , вдоль прямой, обозначенной через c . После этого склеим два ребра, обозначенные буквой a . В результате получится новый многоугольник, у которого по сравнению со старым в классе эквивалентности вершины P на одну вершину меньше, а в классе эквивалентности вершины Q — на одну вершину больше. Если окажется возможным, снова совершим второй шаг. Затем совершим третий шаг, чтобы еще уменьшить количество вершин в классе эквивалентности вершины P , а потом снова второй. Такое чередование второго и третьего шагов производим до тех пор, пока полностью не уничтожим класс эквивалентности вершины P . Если остается больше одного класса эквивалентности, то процедуру можно повторить и, таким образом, уменьшить количество этих классов еще на один. Продолжая так дальше, мы в конце концов построим многоугольник, все вершины которого отождествлены с одной.

Четвертый шаг. Как сделать любые два ребра второго типа смежными. Докажем, что нашу поверхность можно преобразовать так, что любые два ребра второго типа будут смежными. Предположим, что у нас два несмежных ребра второго типа, как, например, на рис. 1.19, а. Разрежем вдоль штриховой линии, обозна-

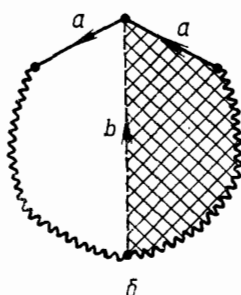
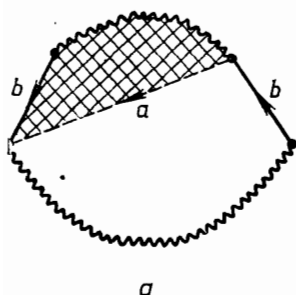


Рис. 1.19. Четвертый шаг доказательства теоремы 5.1.

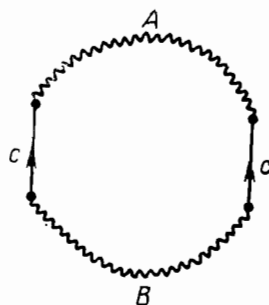


Рис. 1.20. Пара ребер первого типа.

ченной через a , и склеим вдоль b . Как видно из рис. 1.19, б, указанные два ребра становятся смежными.

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все пары ребер второго типа не станут смежными. Если нет пар смежных ребер первого типа, то процесс заканчивается, так как в этом случае символ многоугольника должен иметь вид $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$ и, следовательно, S — связная сумма n проективных плоскостей.

Допустим, что на этом же этапе есть по крайней мере одна пара ребер первого типа, каждое из которых обозначено буквой c . Мы утверждаем, что существует по крайней мере еще одна пара ребер первого типа; эта пара такова, что обе пары отделены друг от друга, т. е. при обходе границы многоугольника ребра из этих пар встречаются поочередно (так что символ должен иметь вид $c \dots d \dots c^{-1} \dots d^{-1} \dots$, где точками обозначены остальные буквы символа).

Для доказательства этого утверждения предположим, что ребра, обозначенные буквой c , не отделены друг от друга никакой парой первого типа. Тогда наш многоугольник имеет вид, указанный на рис. 1.20. Здесь буквы A и B обозначают каждая целую последовательность ребер. Любое ребро из A должно быть отождествлено с некоторым другим ребром также из A (это относится и к B), и ни одно ребро из A не должно отождествляться с ребром из B . Но это противоречит тому, что при выполнении третьего шага начальная и конечная вершины любого из ребер, обозначенных буквой c , должны быть отождествлены.

Пятый шаг. Пары первого типа. Пусть есть две отделенные друг от друга пары первого типа (рис. 1.21). Покажем, что можно преобразовать многоугольник следующим образом: при обходе вдоль периметра полученного многоугольника все четыре ребра, входящие в эти пары, следуют друг за другом непосредственно.

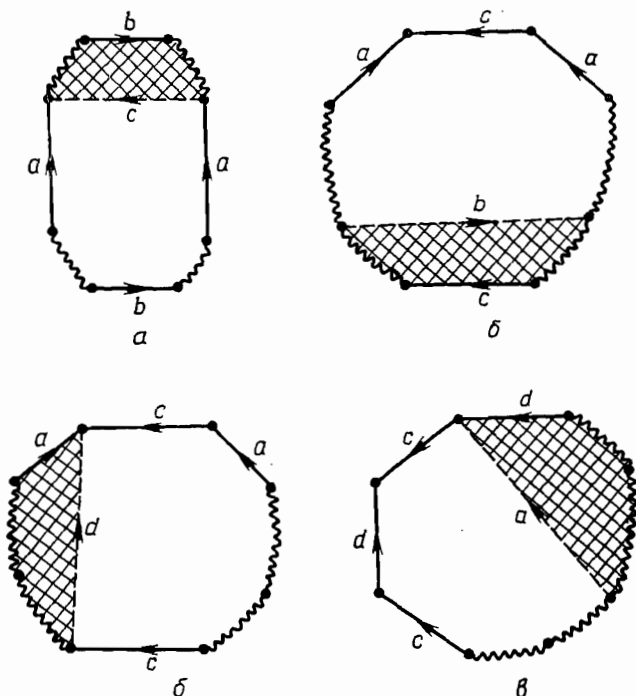


Рис. 1.21. Пятый шаг доказательства теоремы 5.1.

Сначала, чтобы получить рис. 1.21, б, разрежем многоугольник вдоль c и склеим вдоль b . Затем, чтобы получить, как нам и нужно, рис. 1.21, в, разрежем вдоль d и склеим вдоль a .

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все пары первого типа не расположатся в примыкающие друг к другу группы, состоящие из четырех ребер, как, например, группа $cdc^{-1}d^{-1}$ на рис. 1.21, в. Если нет ни одной пары второго типа, то нужный результат достигнут, так как в этом случае символ должен иметь вид

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1},$$

и поверхность, описываемая данным символом, представляет собой связную сумму n торов.

Остается случай, когда на этом этапе есть пары обоих типов. Тогда основой для дальнейших действий служит следующая довольно неожиданная лемма.

Лемма 7.1. *Связная сумма тора и проективной плоскости гомеоморфна связной сумме трех проективных плоскостей.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что связная сумма двух проективных плоскостей гомеоморфна бутылке Клейна (см. пример 4.3). Поэтому мы должны доказать, что связная сумма

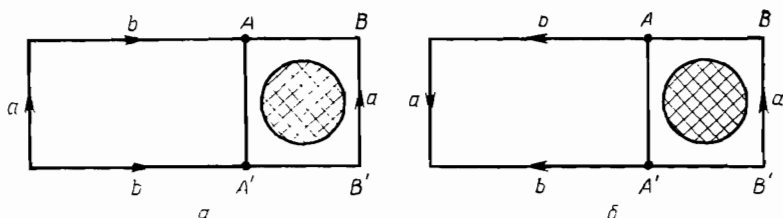


Рис. 1.22. a — тор с дырой; b — бутылка Клейна с дырой.

проективной плоскости и тора гомеоморфна связной сумме проективной плоскости и бутылки Клейна. Для того чтобы это сделать, удобно дать иную конструкцию связной суммы любой поверхности S и тора или бутылки Клейна. Тор и бутылку Клейна можно представить в виде прямоугольников, у которых противоположные стороны отождествлены так, как показано на рис. 1.22. Чтобы получить связную сумму, вырежем сначала диск, заштрихованный на диаграмме, а затем сделаем такую же дыру в S и приклеим границу дыры в торе или бутылке Клейна к границе дыры в S .

Вместо того чтобы за один шаг приклеивать полностью тор или бутылку Клейна, можно сделать это в два этапа: на первом приклеиваем часть тора или бутылки Клейна, являющуюся образом при отождествлении прямоугольника $ABB'A'$, на втором — остальную часть тора или бутылки Клейна. На первом этапе получается связная сумма поверхности S и открытого цилиндра. Такой цилиндр гомеоморфен сфере с двумя дырами. Поэтому пространство, получающееся на первом этапе, гомеоморфно первоначальной поверхности S , у которой сделаны две дыры.

На втором этапе границы этих двух дыр соединяем трубкой, оставшейся от тора или бутылки Клейна. Разница между этими двумя случаями в том, что в случае тора ориентации границ этих дыр, перенесенные с поверхности S на трубку, согласованы, а в случае бутылки Клейна — нет. Это иллюстрируется на рис. 1.23, где S — лист Мёбиуса.

Мы утверждаем, что пространства, указанные на рис. 1.23 (т. е. связанная сумма листа Мёбиуса с тором и с бутылкой Клейна соответственно), гомеоморфны. Чтобы увидеть это, представим себе, что каждое из этих топологических пространств разрезается вдоль прямой AB . В обоих случаях в результате получается связанная сумма тора и прямоугольника, пара противоположных сторон

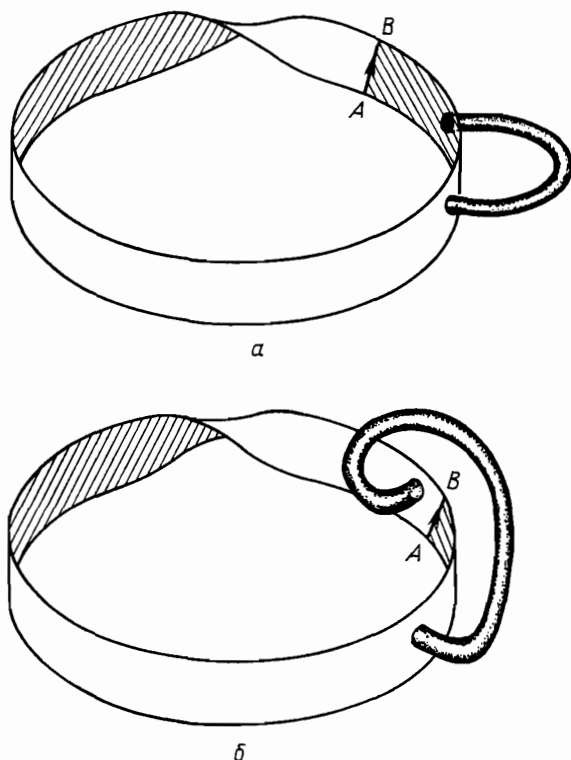


Рис. 1.23. a — связанная сумма листа Мёбиуса с тором; b — связанная сумма листа Мёбиуса с бутылкой Клейна.

которого отождествлена так, как показано на рис. 1.24. Следовательно, эти два пространства гомеоморфны.

Как установлено ранее, склеивание границы диска с границей листа Мёбиуса дает проективную плоскость. Так как два пространства на рис. 1.23 гомеоморфны, то гомеоморфны и пространства, образованные приклеиванием диска к границе каждого из них, т. е. связанная сумма проективной плоскости и тора гомеоморфна связанной сумме проективной плоскости и бутылки Клейна, что и требовалось доказать.

Ясно, что этой леммой учитывается случай, оставшийся при доказательстве теоремы 5.1. Например, предположим, что после завершения пятого шага многоугольник имеет m ($m > 0$) пар второго типа, ребра каждой из которых смежны, и n ($n > 0$) четверок, каждая из которых состоит из таких двух пар, что каждая пара является парой первого типа и разделена другой. Тогда эта поверхность есть связная сумма m проективных плоскостей

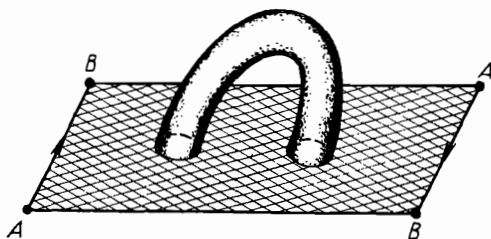


Рис. 1.24. Результат разрезания пространств, указанных на рис. 1.23, вдоль прямой AB .

и n торов, гомеоморфная по доказанной лемме связной сумме $m + 2n$ проективных плоскостей. На этом доказательство теоремы 5.1 заканчивается.

Упражнение

7.6. Провести каждый из упомянутых выше шагов для примеров, данных в упражнениях 7.1—7.5.

Ясно, что описанный процесс можно осуществлять в обратном направлении; всякий раз, когда есть три пары второго типа, можно заменять их одной парой второго типа и двумя парами первого типа. Другими словами, можно применять лемму 7.1 к любой связной сумме, где слагаемыми служат три или более проективных плоскостей. В результате получается следующая новая форма теоремы 5.1, которая иногда может оказаться предпочтительней.

Теорема 7.2. Любая компактная ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере или связной сумме торов. Любая компактная неориентируемая поверхность гомеоморфна связной сумме либо проективной плоскости, либо бутылки Клейна и некоторой компактной ориентируемой поверхности.

8. Эйлерова характеристика поверхности

Хотя мы показали, что любая компактная поверхность гомеоморфна сфере, сумме торов или сумме проективных плоскостей, мы не знаем, различаются ли эти связанные суммы топологически. Возможно, существуют такие целые положительные числа m и n ($m \neq n$), что сумма m торов гомеоморфна сумме n торов. Чтобы показать, что этого случиться не может, введем числовой инвариант, называемый *эйлеровой характеристикой*.

Прежде всего определим эйлерову характеристику триангулированного пространства. Пусть M — компактная поверхность с триангуляцией $\{T_1, \dots, T_n\}$. Пусть

v — количество вершин в M ,

e — количество ребер в M ,

t — количество треугольников в M (в нашем случае $t=n$).

Тогда число

$$\chi(M) = v - e + t$$

называется *эйлеровой характеристикой поверхности M* .

Пример

8.1. На рис. 1.25 предлагаются стандартные методы триангуляции сферы, тора и проективной плоскости, причем количество треугольников может быть любым. Для таких триангуляций читателю предлагается проверить, что эйлерова характеристика сферы, тора и проективной плоскости равна 2, 0 и 1 соответственно. Проверьте также, что эйлерова характеристика не зависит от количества вертикальных и горизонтальных прямых на диаграммах сферы и тора и от количества радиальных прямых и концентрических окружностей на диаграмме проективной плоскости.

Рассмотрение этих и других примеров наводит на мысль, что $\chi(M)$ зависит лишь от M , а не от выбранной на M триангуляции. Мы дадим метод доказательства этого утверждения. Для доказательства разобьем M на любые многоугольники, а не только на треугольники. Многоугольники могут иметь любое количество n сторон и вершин, $n \geq 1$ (см. рис. 1.26). Может случиться, что ребро не разбивает многоугольник на части, как, например, на рис. 1.27. В любом случае требуется, чтобы каждая открытая область, лежащая внутри многоугольника, была гомеоморфна открытому диску, а внутренность каждого ребра гомеоморфна открытому интервалу прямой (замыкание каждого ребра должно быть гомеоморфно замкнутому интервалу или окружности). Наконец, требуется, чтобы количество вершин, ребер и многоугольных областей было конечным. Как и прежде, эйлерова характеристика такого разбиения компактной поверхности M задается формулой

$$\chi(M) = (\text{количество вершин}) - (\text{количество граней}) + (\text{количество областей}).$$

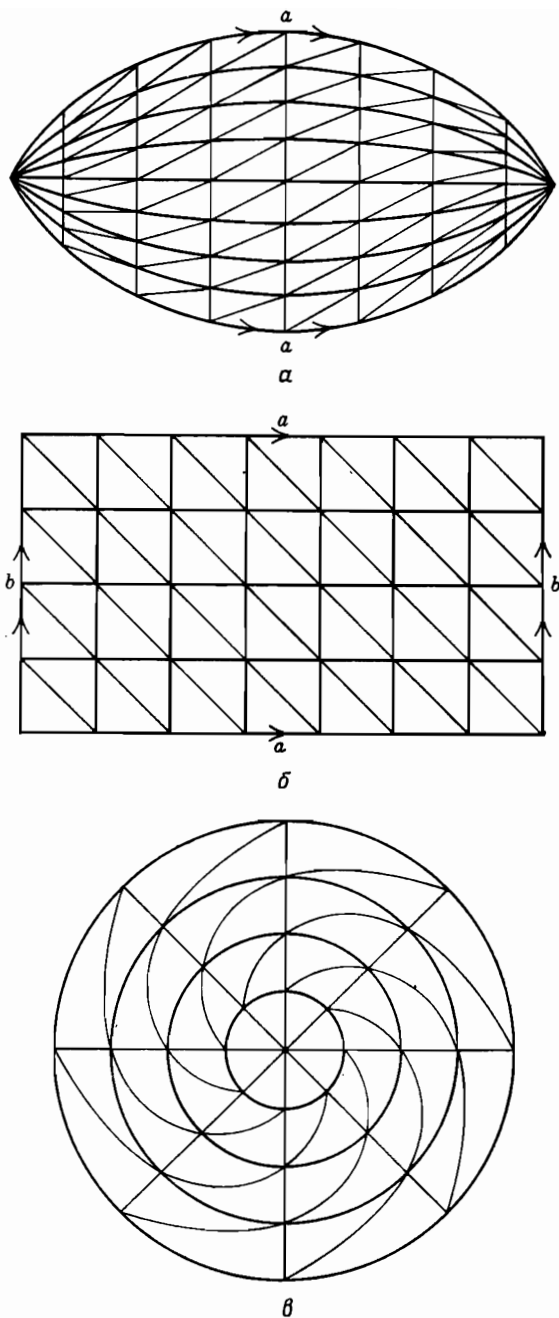
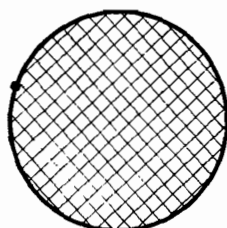


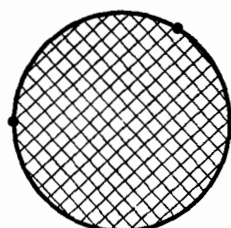
Рис. 1.25. Вычисление эйлеровой характеристики по триангуляции. *a* — сфера; *б* — тор; *в* — проективная плоскость.

Легко видеть, что эйлерова характеристика инвариантна относительно следующих преобразований:

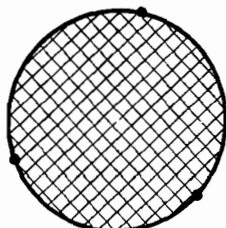
- (а) разбиение ребра на два добавлением новой вершины во внутренней точке (обратно, если ровно два ребра примыкают друг к другу в данной вершине, можно выкинуть вершину и объединить эти два ребра в одно);



а



б



в

Рис. 1.26. а — одноугольник; б — двуугольник; в — треугольник.

- (б) разбиение n -угольника, $n \geq 1$, на два соединением двух его вершин новым ребром (обратно, удаляя ребро, можно объединить две области в одну);
- (с) введение нового ребра и новой вершины так, как изображено на рис. 1.27 (обратно, удаление такого ребра вместе с такой вершиной).

Теперь для доказательства инвариантности эйлеровой характеристики покажем, что любую триангуляцию (или разбиение) поверхности M можно перевести в любую другую с помощью конечной последовательности преобразований типа (а), (б) и (с). Пусть

$$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\},$$

$$\mathcal{T}' = \{T'_1, T'_2, \dots, T'_n\}$$

— две триангуляции данной поверхности. Легко видеть, что если пересечение любого ребра триангуляции $\mathcal{T}$ с любым ребром три-

ангуляции $\mathcal{T}'$ состоит из конечного числа точек и замкнутых интервалов, то переход от триангуляции $\mathcal{T}$ к триангуляции $\mathcal{T}'$ можно осуществить за конечное число указанных выше преобразований; детали оставляются читателю. Однако может оказаться, что ребро из $\mathcal{T}$ пересекается с ребром из $\mathcal{T}'$ в бесконечном числе точек, как, например, кривые

$$\{(x, y): y=0; -1 \leq x \leq +1\}, \\ \left\{ (x, y): y=x \sin \frac{1}{x}; 0 < |x| \leq 1 \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

в плоскости xy . Ясно, что в этом случае нельзя перейти от триангуляции $\mathcal{T}$ к триангуляции $\mathcal{T}'$ конечным числом наших преобразований.

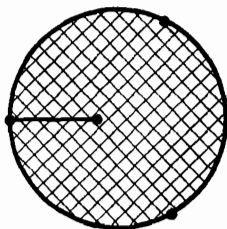


Рис. 1.27. Допустимый тип ребра.

Но кажется правдоподобным, что всегда можно избежать такой ситуации, слегка «сдвигая» одно из ребер. Это на самом деле так и можно доказать строго. Доказательства мы здесь не приводим по нескольким причинам: (а) подробное доказательство запутанно и утомительно; (б) эйлерову характеристику можно определить для более общих пространств, чем поверхности, и ее инвариантность можно доказать с привлечением теории гомологий; в этой более общей ситуации то доказательство, которое мы имеем

в виду, не годится; (с) с помощью эйлеровой характеристики мы будем отличать друг от друга компактные поверхности; в следующей главе, используя фундаментальную группу, мы сумеем сделать это со всей строгостью.

Предложение 8.1. Пусть S_1 и S_2 — компактные поверхности. Эйлеровы характеристики этих поверхностей и их связной суммы $S_1 \# S_2$ связаны формулой

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Доказательство. Доказательство довольно простое. Предположим, что поверхности S_1 и S_2 триангулированы. Их связную сумму построим, выкидывая из каждого пространства внутренность какого-нибудь треугольника и отождествляя затем ребра и вершины, находящиеся на границе этих двух треугольников. Справедливость доказываемой формулы проверяется пересчетом количества вершин, ребер и треугольников до и после построения связной суммы.

Применяя формулу и очевидную индукцию, начинающуюся с известных результатов для сферы, тора и проективной плоскости,

получаем для эйлеровых характеристик всех возможных компактных поверхностей следующие значения:

<i>Поверхность</i>	<i>Эйлерова характеристика</i>
Сфера	2
Связная сумма n торов	$2-2n$
Связная сумма n проективных плоскостей	$2-n$
Связная сумма проективной плоскости и n торов	$1-2n$
Связная сумма бутылки Клейна и n торов	$-2n$

Заметим, что эйлерова характеристика ориентируемой поверхности всегда четна, в то время как для неориентируемой поверхности она может быть как нечетной, так и четной.

Предполагая, что эйлерова характеристика топологически инвариантна, и применяя теорему 5.1, приходим к важному результату.

Теорема 8.2. *Компактные поверхности S_1 и S_2 гомеоморфны тогда и только тогда, когда они обе либо ориентируемы, либо неориентируемы и их эйлеровы характеристики равны.*

Это замечательная топологическая теорема: она сводит проблему классификации компактных поверхностей к определению ориентации и эйлеровой характеристики, а обе эти задачи решаются довольно легко. Кроме того, из теоремы 5.1 ясно, что представляют собой все возможные компактные поверхности.

Такая полная классификация класса топологических пространств встречается довольно редко. Известно, что для компактных 3-многообразий соответствующей теоремы нет, а для 4-многообразий можно доказать, что, грубо говоря, такой результат невозможен.

Закончим раздел введением некоторой стандартной терминологии. Поверхность, являющаяся связной суммой n торов или n проективных плоскостей, называется поверхностью *рода n* , при этом сфера — поверхность *рода 0*. Род g и эйлерова характеристика χ компактной поверхности связаны формулой

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi) & \text{в ориентируемом случае} \\ 2 - \chi & \text{в неориентируемом случае.} \end{cases}$$

Упражнения

8.1. Свыше 2000 лет известно, что существует лишь пять правильных полиэдров, а именно правильные тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икоса-

эдр. Докажите это, рассматривая такие разбиения сферы на n -угольники (n фиксировано), что в каждой вершине пересекаются точно m граней (m фиксировано и $m, n \geq 3$). Используйте при доказательстве тот факт, что $\chi(S^2) = 2$.

8.2. Покажите, что для любой триангуляции компактной поверхности

$$\begin{aligned} 3t &= 2e, \\ e &= 3(v - \chi), \\ v &\geq \frac{1}{2}(7 - \sqrt{49 - 24\chi}). \end{aligned}$$

Какие минимальные значения могут принимать числа v , e и t в случае сферы, тора и проективной плоскости? (Здесь t , e и v означают количество треугольников, ребер и вершин соответственно.)

8.3. На сколько кусков делят сферу n таких ее больших окружностей, что никакие три из них не пересекаются в общей точке?

8.4.

(а) Стороны правильного восьмиугольника попарно отождествлены так, что получается компактная поверхность. Докажите, что эйлерова характеристика этой поверхности ≥ -2 .

(б) Докажите, что любую поверхность (как ориентируемую, так и неориентируемую) с эйлеровой характеристикой ≥ -2 можно получить подходящим попарным отождествлением сторон правильного восьмиугольника.

8.5. Докажите, что нельзя так разбить поверхность сферы, чтобы каждая из областей была шестиугольником и две различные области пересекались не более чем по одному ребру.

8.6. Пусть S_1 — сумма m торов, $m \geq 1$, а S_2 — сумма n проективных плоскостей, $n \geq 1$. Предположим, что в каждой из этих поверхностей сделано по дыре и затем они склеены вдоль границ этих дыр. Какая получится поверхность?

8.7. Какая поверхность представляется правильным 10-угольником, у которого ребра попарно отождествлены в соответствии с символом

$$abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}?$$

{Указание. Как отождествляются вершины при обходе вдоль границы многоугольника?}

8.8. Какая поверхность представляется $2n$ -угольником, у которого ребра попарно отождествлены в соответствии с символом

$$a_1a_2 \dots a_na_1^{-1}a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1}a_n?$$

8.9. Какая поверхность представляется $2n$ -угольником, у которого ребра попарно отождествлены в соответствии с символом

$$a_1a_2 \dots a_na_1^{-1}a_2^{-1} \dots a_{n-1}^{-1}a_n^{-1}?$$

{Указание. Случаи с четным и нечетным n рассмотреть отдельно.}

Замечание. Результаты упражнений 8.8 и 8.9 дают еще одну «нормальную форму» представления компактной поверхности в виде факторпространства многоугольника.

9. Многообразия с краем

Понятие многообразия с краем слегка обобщает понятие многообразия.

Определение. n -мерным многообразием с краем называется такое хаусдорфово пространство, что каждая его точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную либо открытому диску U^n , либо пространству

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U^n: x_1 \geq 0\}.$$

Множество точек, имеющих открытую окрестность, гомеоморфную U^n , называется *внутренностью* многообразия, а множество точек p , имеющих такую открытую окрестность V , что существует гомеоморфизм h окрестности V на $\{x \in U^n: x_1 \geq 0\}$ и $h(p) = (0, 0, \dots, 0)$, называется *краем (или границей)* многообразия.

Примеры

9.1. Замкнутый диск, или шар,

$$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\}$$

есть n -мерное многообразие с краем. Его край — сфера S^{n-1} , а внутренность — открытый диск U^n .

9.2. Другой пример — «полупространство»

$$\{x \in \mathbb{R}^n: x_1 \geq 0\}.$$

9.2. Лист Мёбиуса — двумерное многообразие с краем.

9.4. Дальнейшие примеры двумерных многообразий с краем получаются, если из двумерных многообразий выкинуть то или иное количество малых открытых дисков. ■

Весьма правдоподобно и можно доказать строго, что множество граничных точек не пересекается с множеством внутренних точек. Легко видеть, что множество внутренних точек открыто и всюду плотно; следовательно, множество граничных точек замкнуто. Множество граничных точек n -мерного многообразия является $(n-1)$ -мерным многообразием. Внутренность n -мерного многообразия является некомпактным n -многообразием.

Читатель должен заметить, что термины «внутренность» и «граничные точки» в предыдущем абзаце употреблялись в некотором смысле, отличном от того, какой им обычно придается в теоретико-множественной топологии. Однако к путанице это почти не приводит.

Из примеров видно, что многообразие с краем может быть компактным или некомпактным, связным или несвязным. Некомпактное многообразие с краем может иметь или не иметь счетную базу открытых множеств. В любом случае оно всегда локально компактно. Заметим, что край связного многообразия может быть

несвязным, край некомпактного многообразия может быть компактным.

Понятия ориентируемости и неориентируемости для многообразий с краем вводятся точно так же, как и для многообразий. Например, лист Мёбиуса — неориентируемое многообразие с краем, а цилиндр

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

— ориентируемое многообразие с краем.

Ориентируемость многообразия с краем существенно зависит от ориентируемости его внутренности, рассматриваемой как некомпактное многообразие. Заметим, что каждая компонента края n -многообразия является $(n - 1)$ -многообразием, которое может быть либо ориентируемым, либо неориентируемым. Встречаются оба случая. Можно показать, что каждая компонента края ориентируемого многообразия должна быть ориентируемой. С другой стороны, неориентируемое многообразие может иметь в крае как ориентируемые, так и неориентируемые компоненты. Например, если P^2 — проективная плоскость, а I — замкнутый единичный интервал, то $P^2 \times I$ — неориентируемое 3-многообразие с краем. Край этого многообразия состоит из двух компонент: $P^2 \times \{0\}$ и $P^2 \times \{1\}$. Если из внутренности многообразия $P^2 \times I$ выкинуть малый открытый трехмерный диск, то получится многообразие с краем, состоящим из трех компонент: $P^2 \times \{0\}$, $P^2 \times \{1\}$ и 2-сферы, являющейся границей выкинутого диска. Таким образом, две компоненты края этого многообразия неориентируемы, а одна — ориентируема.

Упражнения

9.1. Докажите, что произведение многообразия и многообразия с краем есть многообразие с краем. Что является краем произведения?

9.2. Пусть P — многоугольник. Предположим, что определенные, но не все пары ребер этого многоугольника отождествлены. Докажите, что полученное факторпространство есть компактное связное 2-многообразие с краем.

Замечание к терминологии. В силу наших определений, каждое n -многообразие (как определено в разд. 1) есть n -многообразие с краем (как определено в настоящем разделе). Для удобства примем следующее соглашение. Когда речь идет о многообразии с краем, будем считать, что край непуст; в противном случае, т. е. когда край пуст, будем употреблять только одно слово — «многообразие». Так как мы в основном будем рассматривать двумерный случай, то связное двумерное многообразие с (непустым) краем мы будем называть *поверхностью с краем*. Отдельно слово «поверхность» будет, как и прежде, означать 2-многообразие с пустым краем.

10. Классификация компактных связных 2-многообразий с краем

Мы уже упоминали о том, что если в компактной поверхности выбрать конечное число попарно непересекающихся замкнутых дисков и выкинуть их внутренности, то получится поверхность с краем. Количество компонент края равно числу выбранных дисков.

Обратно, предположим, что M — компактная поверхность с краем и что край состоит из k компонент, $k \geq 1$. Каждая компонента края — это компактное, связное 1-многообразие, т. е. окружность. Ясно, что если взять k замкнутых дисков и приклеить край i -го диска к i -й компоненте края поверхности M , то получится компактная поверхность M^* . Очевидно, что топологический тип поверхности M^* зависит только от топологического типа поверхности M . Не столь очевидно, но также верно обратное (в некотором смысле) утверждение: топологический тип поверхности с краем M зависит только от количества компонент края и топологического типа поверхности M^* , образованной в результате приклеивания диска к каждой компоненте края.

Можно выразить это и иначе. Если начать с компактной поверхности M^* и строить поверхность с краем, выкидывая внутренности k замкнутых попарно непересекающихся дисков, то неважно, где расположены эти диски. В результате мы придем к топологически тому же самому многообразию с краем независимо от расположения выбранных дисков. Этот результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 10.1. Пусть M_1 и M_2 — компактные поверхности с краем и их границы содержат одинаковое количество компонент. В этом случае M_1 и M_2 гомеоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны поверхности M_1^* и M_2^* (образованные в результате приклеивания диска к каждой компоненте края).

Доказательство. Наметим в общих чертах доказательство необходимости условия. Оно существенно опирается на классификационную теорему для компактных поверхностей. Как в теореме 5.1, доказательство состоит в том, что показывается гомеоморфность поверхностей M_1 и M_2 многоугольнику, у которого отождествлены определенные пары ребер, т. е. M_1 и M_2 приводятся к так называемой «нормальной форме». Прежде всего подробно объясним, что здесь служит нормальными формами.

- (а) *Нормальная форма для сферы с k дырами.* Сфера представляется многоугольником с двумя ребрами, у которого ребра отождествляются в соответствии с символом aa^{-1} . Вырежем в таком многоугольнике k дыр, как показано на рис. 1.28, а

для случая $k = 4$. Затем сделаем разрезы $c_1, c_2, \dots, c_k$ из некоторой вершины, лежащей на границе многоугольника, до соответствующих компонент края $B_1, B_2, \dots, B_k$. Расширим каждый разрез так, чтобы построить многоугольник, изображенный на рис. 1.28, б. В общем случае мы

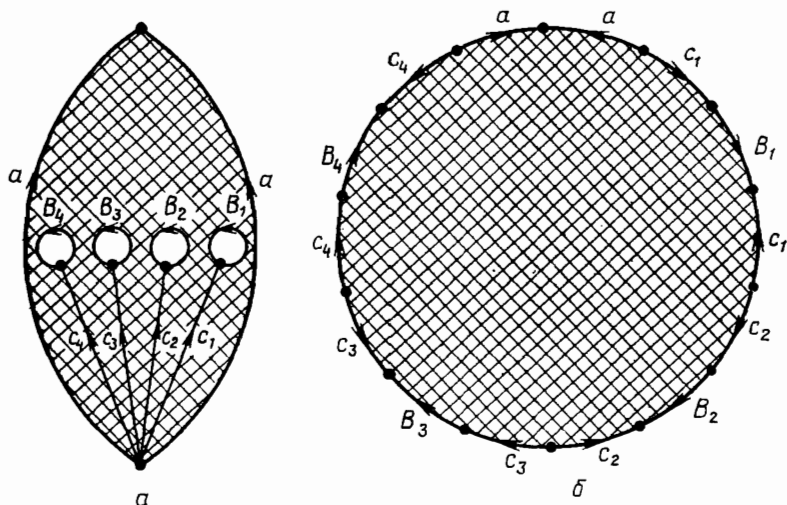


Рис. 1.28. Сфера с четырьмя дырами.

получим многоугольник, у которого ребра отождествлены в соответствии с символом

$$aa^{-1}c_1B_1c_1^{-1}c_2B_2c_2^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1}.$$

- (b) *Нормальная форма для связной суммы n торов с k дырами.* Диаграммы рис. 1.29 иллюстрируют случай $n = 2$ и $k = 4$. В этом случае построение совершенно аналогично построению в случае сферы с дырами. В результате получается многоугольник с $4n + 3k$ ребрами, которые должны быть отождествлены в соответствии с символом

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1}.$$

- (c) *Нормальная форма для связной суммы n проективных плоскостей с k дырами.* Предлагаем читателю проверить, что в этом случае получается многоугольник с $2n + 3k$ ребрами, которые отождествляются согласно символу

$$a_1a_1 \dots a_na_n c_1B_1c_1^{-1} \dots c_kB_kc_k^{-1}.$$

Заметим, что во всех приведенных построениях в качестве путей $c_1, \dots, c_k$, по которым происходит разрезание, можно

выбрать отрезки прямых, пересекающиеся лишь в одной точке — в крае каждого отрезка.

Рассмотрим теперь триангуляцию компактных поверхностей с краем. Определение триангуляции в точности то же, что и в разд. 6

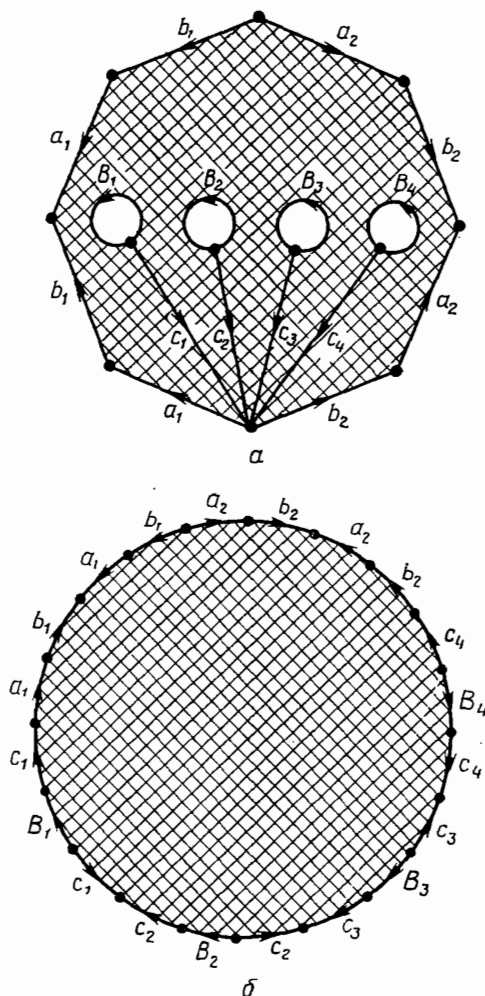


Рис. 1.29. Ориентируемая поверхность рода 2 с четырьмя дырами.

для случая компактных поверхностей. Однако между этими двумя случаями есть существенное различие, которое мы хотим подчеркнуть. В случае триангуляции поверхности каждое ребро служит

стороной в точности двух треугольников, а в случае триангуляции поверхности с краем найдется ребро, принадлежащее только одному треугольнику. Такое ребро будет лежать в крае. Теорема, которую мы примем без доказательства, состоит в том, что каждую компактную поверхность с краем можно триангулировать (доказательство см. Альфорс и Сарио [1, гл. 1, разд. 8]).

Пусть M — компактная поверхность с краем и на ней задана триангуляция. Мы утверждаем, что триангуляцию можно выбрать удовлетворяющей следующим условиям. Если ребро *целиком* не принадлежит краю, то его вершины не могут обе одновременно

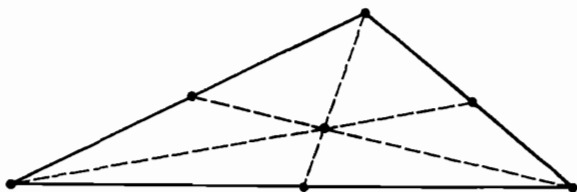


Рис. 1.30. Барицентрическое разбиение треугольника

принадлежать краю; ни в одном треугольнике более чем одно ребро не принадлежит краю. Если эти условия не выполняются, то можно разбить каждое ребро на два, а каждый треугольник на шесть треугольников, как это показано на рис. 1.30. Такое разбиение называется *барицентрическим*. Для него указанные условия выполнены. Строя, если необходимо, барицентрическое разбиение еще раз, будем считать, что наша триангуляция удовлетворяет даже более сильному условию. Пусть T_i и T_j — треугольники, у которых по одному ребру принадлежит краю. Тогда T_i и T_j или не пересекаются, или у них есть одна общая вершина, принадлежащая краю.

Обозначим через $B_1, \dots, B_k$ компоненты края. Если T — треугольник, имеющий непустое пересечение с одной из компонент B_i , то в T содержится ровно два не принадлежащих B_i ребра, у каждого из которых по одной вершине лежит в B_i . Если e — ребро, не принадлежащее целиком B_i и пересекающееся с B_i по одной вершине, то e — общая сторона двух треугольников, каждый из которых имеет с B_i непустое пересечение. Отсюда следует, что треугольники, имеющие с B_i непустое пересечение, и ребра, пересекающиеся с B_i по одной вершине, можно расположить в один или более циклов, где ребра и треугольники чередуются:

$$T_1, e_1, T_2, e_2, \dots, T_n, e_n, T_{n+1} = T_1;$$

при этом каждое ребро e_j принадлежит T_j и T_{j+1} , а каждый треугольник T_j содержит ребра e_{j-1} и e_j . Легко показать, что каждой

компоненте края B_i соответствует лишь один такой цикл. Из условий, которым удовлетворяет триангуляция поверхности M , ясно, что объединение всех треугольников $T_1, T_2, \dots, T_n$, имеющих непустое пересечение с B_i , гомеоморфно плоскому многоугольнику с дырой (см. рис. 1.31 для $n = 17$). Каждой компоненте края B_i , $1 \leq i \leq k$, соответствует один такой многоугольник P_i .

Обозначим заново через $T_1, \dots, T_l$ треугольники данной триангуляции поверхности M , не содержащиеся ни в одном из многоугольников P_i , $1 \leq i \leq k$. Теперь, используя эти k многоугольников и l треугольников, проведем процесс, описанный на первом

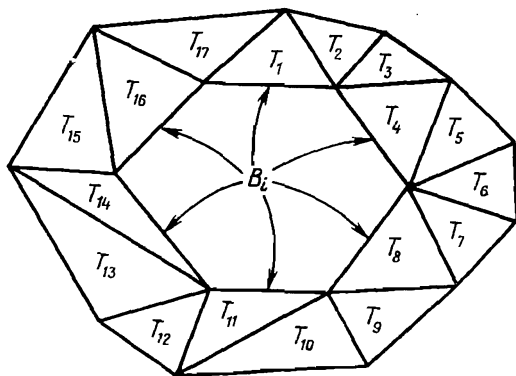


Рис. 1.31. Треугольники в окрестности компоненты края B_i .

шаге доказательства теоремы 5.1 (разд. 7). В результате получится единственный плоский многоугольник, имеющий k дыр и такой, что внешние его ребра должны быть попарно отождествлены (см., например, рис. 1.29, а).

К этому многоугольнику с дырами можно применить оставшиеся шесть шагов доказательства теоремы 5.1, однако с одной оговоркой. На каждом шаге необходимо делать определенные разрезы и склейки. При этом предполагается, что разрезы проводятся так, чтобы они не задевали ни одной дыры. Ясно, что это можно сделать всегда. Ясно также, что на всех шести шагах количество дыр не меняется.

В результате получится один из трех типов многоугольников, указанных на рис. 1.32. Для удобства на каждом чертеже положено $k = 4$. Диаграмма а соответствует сфере с дырами, б — связной сумме проективных плоскостей с дырами и в — связной сумме торов с дырами. В каждом случае все вершины, лежащие на крае многоугольника, должны быть отождествлены с одной.

Чтобы завершить доказательство, сделаем разрезы $c_1, c_2, \dots, c_k$, которые начинаются в начальной вершине, лежащей на крае многоугольника, и заканчиваются на крае каждой из дыр. Расширяя разрезы, получаем многоугольник в нормальной форме, к чему мы и стремились. Мы должны быть уверены в том, что любые два разреза пересекаются лишь по начальной вершине. Если число k очень велико (например, $k = 10^{10}$) и дыры расположены как попало, то сразу может быть не ясно, как проводить раз-

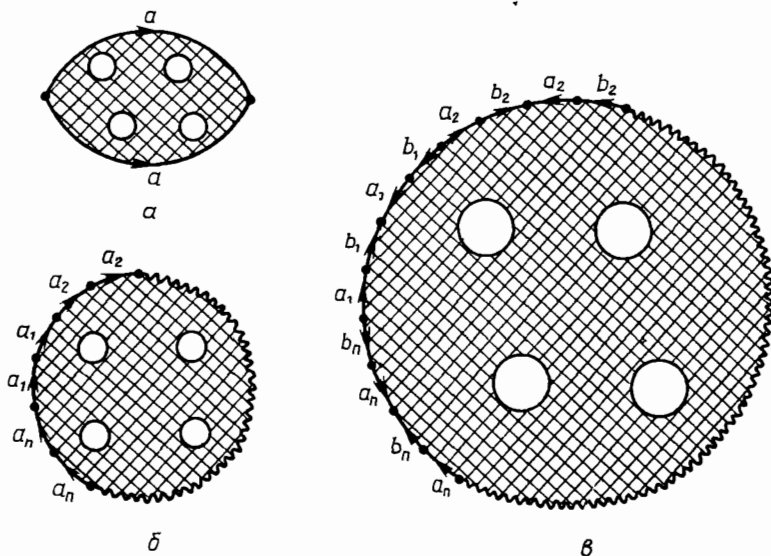


Рис. 1.32. Возможные типы поверхностей с краем при $k = 4$.

резы. Чтобы обойти эту трудность, предлагается следующая индуктивная процедура. Сделайте разрез от начальной вершины до ближайшей дыры. Расширьте разрез — получится многоугольник, у которого количество сторон увеличилось на три, а количество дыр уменьшилось на единицу по сравнению с прежним. В построенном многоугольнике снова сделайте разрез от начальной вершины до ближайшей дыры и расширьте его — в новом многоугольнике количество сторон увеличится на три, а количество дыр уменьшится на единицу по сравнению с прежним. Повторите этот процесс k раз, т. е. пока не будет сделано необходимое количество разрезов. Ясно, что в результате получится многоугольник одного из трех возможных нормальных типов. Доказательство теоремы закончено.

11. Эйлерова характеристика поверхности с краем

Эйлерова характеристика триангулированной¹ поверхности с краем определяется точно тем же способом, что и поверхности без края. Чтобы показать, что она не зависит от триангуляции, можно привести точно такую же аргументацию, что и в разд. 8. С помощью эйлеровой характеристики можно дать полное множество инвариантов для классификации компактных поверхностей с краем.

Теорема 11.1. *Две компактные поверхности с краем гомеоморфны тогда и только тогда, когда у них одинаковое количество компонент края, обе одновременно ориентируемы или неориентируемы и имеют одну и ту же эйлерову характеристику.*

Доказательство. Пусть M — компактное связное 2-многообразие с краем или без него. Предположим, что на M задана триангуляция и что, выкидывая внутренность одного треугольника, целиком содержащегося внутри M , мы образуем новую поверхность с краем M' . Ясно, что край поверхности M' имеет на одну компоненту больше, чем край поверхности M , и

$$\chi(M') = \chi(M) - 1,$$

т. е. эйлерова характеристика уменьшается на единицу.

Отсюда вытекает, что если из триангулированной поверхности M^* (без края) выкинуть внутренности k попарно непересекающихся треугольников, то получится поверхность с краем, причем

$$\chi(M) = \chi(M^*) - k.$$

Согласно теореме 5.1, эта процедура приводит к поверхности M с краем, состоящим из k компонент. Следовательно, эйлерова характеристика поверхности M однозначно определяется эйлеровой характеристикой поверхности M^* и обратно. Также ясно, что M и M^* одновременно ориентируемы или нет. Теперь теорема следует из теорем 5.1 и 10.1.

Определение. Род компактной поверхности с краем M определяется как род компактной поверхности M^* , получаемой заклеиванием диском каждой компоненты края поверхности M .

Упражнения

11.1. Докажите, что эйлерова характеристика компактной поверхности с краем, состоящим из k компонент, не превосходит $2 - k$.

11.2. Выведите формулу для рода компактной поверхности с краем в терминах ее эйлеровой характеристики и количества компонент края (ориентируемый и неориентируемый случай разберите отдельно).

11.3. Составьте список всех компактных поверхностей M , с краем или без него, для которых $-2 \leq \chi(M) \leq +2$.

12. Модели компактных поверхностей с краем в евклидовом 3-пространстве

Много конкретных моделей поверхностей с краем можно построить следующим образом. Вырежем из бумаги диск и несколько длинных прямоугольных лент и приклеим оба конца каждой ленты к границе диска. Приклеивать концы лент к границе диска можно в любом порядке и при желании некоторые из лент можно закрутить на 180° . Понятно, что концы лент, приклеенные к границе диска, не должны перекрываться. Эта процедура показана на рис. 1.34—1.36.

Мы утверждаем, что *таким образом можно получить модели всех компактных поверхностей с краем*. Приведем относительно простое доказательство. Если M — компактная поверхность с краем и M' строится из M приклеиванием двух концов прямоугольной ленты в любом месте края поверхности M , то

$$\chi(M') = \chi(M) - 1.$$

Это можно проверить, предполагая, что поверхность M подходящим образом триангулирована, триангуляция ленты показана

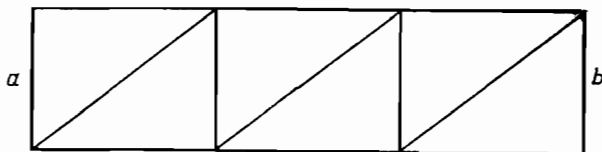


Рис. 1.33. Триангуляция ленты.

на рис. 1.33. отождествим ребра a и b с двумя ребрами, принадлежащими триангуляции края поверхности M , и пересчитаем вершины, ребра и треугольники до и после отождествления.

Покажем, как получить любую компактную ориентируемую поверхность с краем, состоящим из k компонент, $k \geq 1$. Сначала приклеим $k - 1$ лент к краю (без закручивания), как изображено на рис. 1.34 для $k = 4$. В результате получим ориентируемую поверхность с краем, состоящим из k компонент, эйлерова характеристика которой равна $2 - k$. Заметим, что при данном числе компонент края эта эйлерова характеристика максимальна.

Теперь присоединим несколько пар лент так, чтобы число компонент края осталось тем же, а эйлерова характеристика уменьшилась до желаемого значения (см. рис. 1.35). Здесь на две ленты больше по сравнению с моделью на рис. 1.34, и, таким образом, эйлерова характеристика уменьшилась на 2, а число компонент края не изменилось. Можно повторно присоединять такие «скре-

щенные» пары лент и уменьшать эйлерову характеристику на любое четное число.

Для построения неориентируемой поверхности с краем, состоящим из k компонент, начнем так же, как и раньше. Присоединим

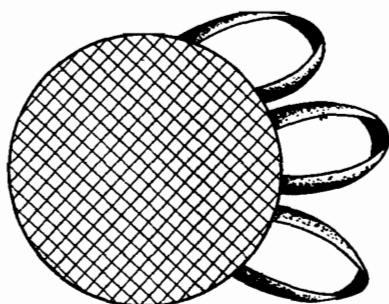


Рис. 1.34. Приклеивание лент к диску.

$k - 1$ лент (см. рис. 1.34) и получим ориентируемую поверхность с краем, состоящим из k компонент, и с эйлеровой характеристикой $2 - k$. Если присоединить ленту, закручивая ее на 180° , как показано на рис. 1.36, то эйлерова характеристика уменьшится

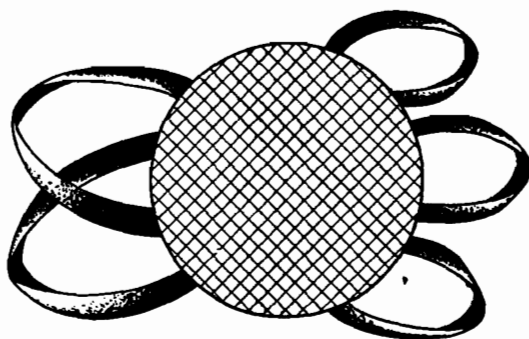


Рис. 1.35. Приклеивание лент к диску (ориентируемый случай, более высокий род).

на единицу, при этом число компонент края не изменится, и мы получим неориентируемую поверхность с краем. Присоединяя много таких закрученных на 180° лент, можно уменьшить эйлерову характеристику до любого наперед заданного числа.

Из всего сказанного должно быть ясно, как построить этим методом модель любой компактной поверхности с краем. Отсюда

следует, что любую такую поверхность, ориентируемую или нет, можно гомеоморфно вложить в евклидово 3-пространство (вспом-

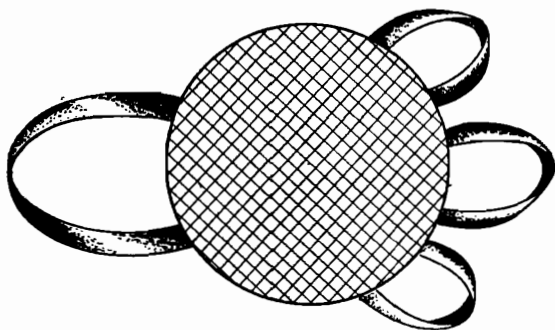


Рис. 1.36. Приклеивание лент к диску (неориентируемый случай).

ним, что для компактных 2-многообразий без края соответствующее утверждение *не* верно).

Упражнения

12.1. Какие компактные поверхности с краем гомеоморфны подмножествам плоскости $\mathbb{R}^2$? Ответ дайте в терминах эйлеровой характеристики, количества компонент края и ориентируемости.

12.2. Какие компактные поверхности с краем можно построить следующим образом? Возьмем замкнутый диск D и несколько малых замкнутых по-

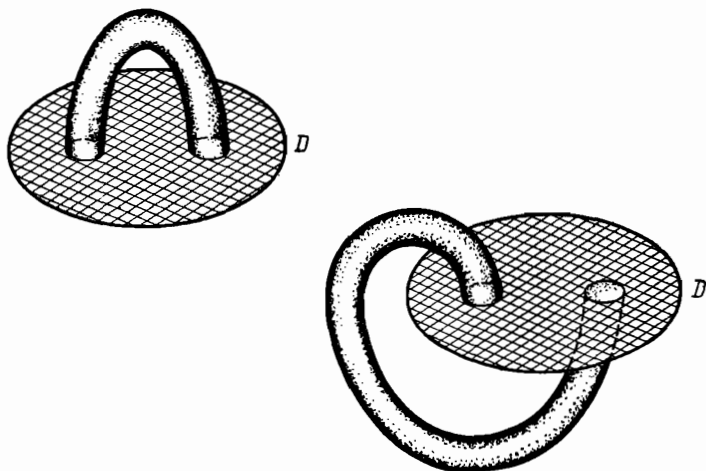


Рис. 1.37. Способы приклеивания трубки к диску D с двумя дырами.

парно непересекающихся дисков, принадлежащих внутренности диска D . Сделаем дыры в D , выкидывая внутренности этих малых дисков. Выберем некоторые пары дыр и границы этих дыр в каждой паре соединим трубками.

Эти трубки могут приклеиваться к диску двумя различными способами, указанными на рис. 1.37.

12.3. Какие получатся компактные поверхности с краем, если проделать все так же, как в предыдущем примере, но начать не с диска, а с листа Мёбиуса?

12.4. Пусть M_1 и M_2 — компактные поверхности с краем. Построим новую поверхность с краем $M_1 \# M_2$, называемую *связной суммой вдоль края*. Для этого на границе поверхности M_i выберем подмножества e_i , каждое из которых гомеоморфно замкнутому интервалу $[0,1]$, $i = 1, 2$, и склеим M_1 и M_2 по этим подмножествам, т. е. выберем гомеоморфизм из e_1 на e_2 и образуем факторпространство пространства $M_1 \cup M_2$, отождествляя точки отрезка e_1 с образами их на e_2 .

- Выразите эйлерову характеристику поверхности с краем $M_1 \# M_2$ через эйлеровы характеристики поверхностей с краем M_1 и M_2 .
- Из скольких компонент состоит край поверхности $M_1 \# M_2$?
- Докажите, что любую компактную поверхность с краем можно получить как итерированную связную сумму с краем, пользуясь лишь экземплярами следующих четырех поверхностей: (a) замкнутый диск, (b) кольцо (т. е. диск с одной дырой), (c) лист Мёбиуса, (d) тор с одной дырой.

13. Замечания о некомпактных поверхностях

Существует очень много различных некомпактных поверхностей, и многие из теорем о них довольно сложны, поэтому мы дадим лишь краткое введение в эту тему. Прежде всего множество некомпактных поверхностей разобьем на два больших класса: один класс образуют поверхности, имеющие в своей топологии счетную базу, другой класс — поверхности, не имеющие счетной базы. Стандартный пример связной поверхности, не имеющей счетной базы открытых множеств, принадлежит Прюферу (см. Радо [7]; этот пример приведен также в книгах Неванлинны Р., Униформизация, ИЛ, М., 1955, стр. 58, и Спрингера Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, М., 1960, стр. 68).

Обычно такие поверхности считаются патологическими и их не рассматривают; в большинстве работ предполагается, что есть счетная база открытых множеств. В теореме Радо [7] утверждается, что поверхность можно триангулировать тогда и только тогда, когда ее топология имеет счетную базу (доказательство приведено в книге Альфорса и Сарии [1]). Под триангуляцией некомпактной поверхности подразумевается то же, что и под триангуляцией компактной поверхности, за исключением того, что число треугольников триангуляции бесконечно, и требуется, чтобы каждая точка имела окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом треугольников.

Существование триангуляции для поверхности, имеющей счетную базу, очень важно, и многие известные результаты доказы-

ваются лишь при использовании этого факта. В оставшейся части главы мы будем рассматривать только такие поверхности ¹⁾.

Приведем примеры некомпактных поверхностей.

- (a) Любое открытое подмножество компактной поверхности. Уже это приводит к слегка озадачивающим примерам. Рассмотрим, например, дополнение к любому конечному подмножеству или, более общо, дополнение к любому компактному вполне несвязному подмножеству (например, канторову множеству) поверхности.
- (b) Поверхность лестницы бесконечной длины с бесконечным числом перекладин.
- (c) Рассмотрим следующие три семейства параллельных прямых в евклидовом 3-пространстве: прямые, параллельные оси x и проходящие через точки в плоскости yz с целочисленными координатами; прямые, параллельные оси y и проходящие через точки в плоскости xz с целочисленными координатами; прямые, параллельные оси z и проходящие через точки в плоскости xy с целочисленными координатами. Представим себе, что все эти прямые немного «утолщены» так, что они стали похожи на стержни; поверхность получившегося тела некомпактна.
- (d) Конструкцию предыдущих двух примеров можно несколько видоизменить, беря другое связное множество прямых и кривых в $\mathbb{R}^3$ и каждую из них немного утолщая. Поверхность получившегося тела часто оказывается 2-многообразием.
- (e) Операция взятия связной суммы применима также и к некомпактным поверхностям; в этом случае возможностей намного больше, так как можно строить бесконечные связные суммы. Например, можно начать с евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и сделать в ней маленькие круглые дыры, центр каждой из которых находится в точке с целочисленными координатами. Затем каждую из дыр заполнить листом Мёбиуса, приклеивая границу листа Мёбиуса к границе дыры. Ясно, как можно видоизменить эту процедуру: евклидову плоскость заменить другой некомпактной поверхностью, а вместо листа Мёбиуса взять любую поверхность со связным краем.
- (f) Пусть M — компактная поверхность, отличная от сферы или проективной плоскости, а $(\tilde{M}, p)$ — накрытие поверхности M (см. гл. V), соответствующее некоторой подгруппе группы $\pi(M)$ бесконечного индекса. Тогда $\tilde{M}$ — некомпактная поверхность. Если же поверхность M некомпактна, то *любое* ее накрытие некомпактно.

Комбинируя указанные методы, можно построить еще и другие примеры. Ясно, что возможности огромны.

Так как для компактных поверхностей известна классификационная теорема, естественно поставить вопрос о существовании удовлетворительной классификационной теоремы для некомпактных многообразий. Ответ зависит от того, что понимать под словом «удовлетворительная»; классификационная теорема есть, но она не так легко применяется к проблемам, возникающим при изучении некомпактных поверхностей. Если вдаваться в подроб-

¹⁾ Можно доказать, что поверхность метризуема тогда и только тогда, когда она имеет счетную базу открытых множеств. Аналогично паракомпактность эквивалентна существованию счетной базы.

ности, то это уведет слишком далеко, и потому мы приведем лишь идею этой теоремы.

Пусть M — некомпактная поверхность. Как обычно, под *компактификацией* поверхности M мы понимаем компактное хаусдорфово пространство X , содержащее M в качестве открытого всюду плотного подпространства. Две компактификации X и Y считаются эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм h из X на Y , что $h|_M$ — тождественное отображение. Приведем некоторые примеры.

(1) Так как поверхность M локально компактна, всегда можно образовать одноточечную компактификацию Александрова. Это единственная «минимальная» компактификация, поскольку добавляется лишь одна точка. Так как M — вполне регулярное пространство, можно также осуществить компактификацию Стоуна — Чеха. В некотором смысле она будет максимальной компактификацией.

(2) Предположим, что M — открытое подмножество компактной поверхности M' . Тогда его замыкание $\overline{M}$ в M' является компактификацией для M .

(3) Пусть M' — компактная поверхность с краем, а M — ее внутренность. Тогда M' является компактификацией для M .

Чтобы сформулировать нашу следующую теорему, введем еще одно определение. Пусть X — топологическое пространство, а A — некоторое его подпространство. Подпространство A *не разбивает* X , если для любого открытого связного подмножества U пространства X дополнение $U - A$ связно. Например, любое конечное подмножество поверхности M не разбивает M ; любая кривая в $\mathbb{R}^3$ не разбивает $\mathbb{R}^3$.

Теорема 13.1. Пусть M — некомпактная поверхность. Существует компактификация M^* поверхности M , обладающая такими свойствами:

- (1) пространство M^* локально связно;
- (2) дополнение $\beta(M) = M^* - M$ вполне несвязно;
- (3) $\beta(M)$ не разбивает M^* .

Кроме того, любые две компактификации поверхности M , обладающие этими тремя свойствами, эквивалентны.

Доказательство существования и единственности компактификации M^* довольно длинное; отсылаем читателя к книге Альфорса и Сарно [1, гл. I, разд. 6], где приведен также список более ранних работ.

Пример

13.1. Пусть X — компактное связное 2-многообразие, а A — его замкнутое вполне несвязное подмножество. Например, A может быть конечным или гомеоморфным замкнутому подмножеству канторова множества. Можно строго доказать, что X — компактификация для $M = X - A$, обладающая всеми тремя свойствами, сформулированными в теореме 13.1. Следовательно, можно положить $M^* = X$, $\beta(M) = A$. Вообще говоря, M^* поверхностью не будет.

Пространство $\beta(M)$ называется *идеальной границей* или *множеством концов пространства M* ; его точки называются *граничными компонентами* или *концами*. Справедлива теорема, утверждающая, что $\beta(M)$ — компактное метрическое пространство.

На приведенных выше примерах мы вкратце покажем, как строится пространство $\beta(M)$. Для каждой точки $x \in A = \beta(M)$ можно найти как угодно малую открытую окрестность U , представляющую собой открытый двумерный диск, граница замыкания которой есть окружность, не пересекающая A . Для всех таких окрестностей U точки x в X рассмотрим подмножества $U \cap M$. Семейство этих подмножеств в M можно описать *внутренним образом* (т. е. без привлечения) пространства $M^* = X$ на основе нескольких простых свойств. Следовательно, точке идеальной границы $\beta(M)$ поставлено в соответствие семейство открытых связных подмножеств в M , обладающее требуемыми свойствами. В нашем примере множество $U \cap M$ гомеоморфно диску с выкинутыми точками, а его граница есть окружность. В общем случае эти два свойства не всегда выполняются: множество $U \cap M$ может быть и не быть гомеоморфным подмножеству диска, может быть и не быть ориентируемым. Вообще назовем точку $x \in \beta(M)$ *планарной*, если для всех ее достаточно малых открытых окрестностей U пересечение $U \cap M$ гомеоморфно подмножеству плоскости; аналогично точку x назовем *ориентируемой*, если для всех достаточно малых U пересечение $U \cap M$ ориентируемо. Обозначим через $\beta'(M)$ подмножество ориентируемых точек в $\beta(M)$, а через $\beta''(M)$ — подмножество планарных точек в $\beta(M)$. Можно показать, что как $\beta'(M)$, так и $\beta''(M)$ — открытые подмножества компактного вполне несвязного метрического пространства $\beta(M)$. Очевидно, что $\beta'(M) \supset \beta''(M)$.

Так как пространство $\beta(M)$ и подпространства $\beta'(M)$ и $\beta''(M)$ определены внутренним образом, то они являются топологическими инвариантами многообразия M . Удивительно, что в совокупности с несколькими простыми свойствами они характеризуют M . Прежде всего опишем эти свойства.

Определения. (а) Некомпактная поверхность M называется поверхностью *конечного рода*, если существует такая компактная поверхность $A \subset M$ с краем, что дополнение $M - A$ гомеоморфно

подмножеству плоскости $\mathbb{R}^2$. Ее род определяется как род поверхности A . В противном случае M — поверхность *бесконечного рода*. (Определение рода поверхности с краем см. в разд. 8.)

(b) Некомпактная неориентируемая поверхность M называется *конечно неориентируемой*, если существует такое компактное подмножество $A \subset M$, что дополнение $M - A$ ориентируемо, в противном случае M называется *бесконечно неориентируемой*.

Ясно, что неориентируемая поверхность конечного рода конечно неориентируема, но не наоборот.

(c) Конечно неориентируемая поверхность называется поверхностью *четного или нечетного типа* неориентируемости в зависимости от того, четного или нечетного рода каждое достаточно большое компактное подмножество A , являющееся поверхностью с краем. (Это определение имеет смысл, так как связная сумма проективной плоскости и тора гомеоморфна связной сумме трех проективных плоскостей; более общо, если «прибавить» ориентируемую поверхность к неориентируемой, то по mod 2 род не изменится.)

Очевидно, что только что описанные свойства поверхности топологически инвариантны.

Теорема 13.2. Пусть M_1 и M_2 — некомпактные поверхности одинакового рода и одинакового типа ориентируемости (в соответствии с только что введенными определениями (a), (b) и (c)). В этом случае M_1 и M_2 гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм из $\beta(M_1)$ на $\beta(M_2)$, переводящий $\beta'(M_1)$ и $\beta''(M_1)$ в $\beta'(M_2)$ и $\beta''(M_2)$ соответственно.

Эта теорема принадлежит Керекьярто; доказательство ее можно найти в статье Ричардса [8], который дополнил эту теорему следующим образом:

Теорема 13.3. Пусть X — вполне несвязное компактное метрическое пространство, а U и V — открытые его подмножества, $U \supset V$. Тогда существует такая некомпактная поверхность M , что пространство $\beta(M)$ гомеоморфно X при гомеоморфизме, отображающем $\beta'(M)$ на U и $\beta''(M)$ на V .

Нетрудно показать, что M может быть любого наперед заданного рода и любого типа ориентируемости, совместимого с требованием о том, чтобы $\beta'(M)$ и $\beta''(M)$ были гомеоморфны U и V соответственно.

В заключение рассмотрим различные свойства некомпактных 2-многообразий.

В предыдущем разделе мы доказали, что каждая компактная поверхность с краем гомеоморфна некоторому подмножеству

евклидова 3-пространства. Такой же результат справедлив и для некомпактных поверхностей.

Теорема 13.4. *Каждое некомпактное 2-многообразие гомеоморфно некоторому подмножеству в $\mathbb{R}^3$.*

Заметим, что данное некомпактное 2-многообразие может оказаться гомеоморфным как замкнутому, так и незамкнутому подмножеству в $\mathbb{R}^2$. Например, плоскость xy в $\mathbb{R}^3$ и открытый единичный диск в плоскости xy гомеоморфны. Однако можно доказать, что неориентируемая поверхность негомеоморфна никакому замкнутому подмножеству в $\mathbb{R}^3$.

Эта теорема является частным случаем теоремы Хирша [11, теорема 4.6]. Работа Хирша опирается на результаты Уайтхеда [9]. В частности, Уайтхед доказал, что каждая триангулированная некомпактная поверхность M имеет *остов*, т. е. замкнутое подмножество $L \subset M$, представимое в виде объединения некоторой системы ребер этой триангуляции, и существуют как угодно малые окрестности U множества L , гомеоморфные M . Кроме того, требуется, чтобы для каждой такой окрестности U нашлась такая меньшая окрестность V множества L , чтобы точки из окрестности V при этом гомеоморфизме оставались неподвижными. В некоторых случаях существование остова почти очевидно. Например, для открытого листа Мёбиуса остовом служит центральная окружность. В других случаях существование остова не кажется столь правдоподобным.

ПРИМЕЧАНИЯ

Определение связной суммы двух многообразий

В разд. 4 определена связная сумма 2-многообразий. При определении связной суммы двух ориентируемых n -многообразий, $n > 2$, необходимо соблюдать осторожность. Мы должны знать, сохраняет или меняет ориентацию гомеоморфизм h из нашего определения. Существенным поводом для такого различия является то, что любая ориентируемая поверхность допускает гомеоморфизмы на себя, меняющие ориентацию, тогда как в более высоких размерностях существуют ориентируемые многообразия, не допускающие такого гомеоморфизма. Пример 3-многообразия, обладающего этим свойством, дан Зейфертом и Трельфаллем [3, стр. 320]. Примером 4-многообразия с этим свойством служит комплексная проективная плоскость.

Триангуляция многообразий

В раннюю пору развития топологии, по-видимому, было принято на веру, что все поверхности и все многообразия более высоких размерностей можно триангулировать. Первое строгое доказательство триангулируемости поверхностей опубликовано Радо [7] в статье о римановых поверхностях. Радо указал необходимость требования, чтобы топология поверхности имела счетную базу, и привел пример (принадлежащий Приюферу) поверхности, не

имеющей такой счетной базы. Доказательство Радо, данное в книге Альфорса и Сарии [1, гл. I], существенно использует сильную форму теоремы Жордана о кривой. Триангулируемость 3-многообразий доказана Мойзом (Affine structures in 3-manifolds, V: the triangulation theorem and Hauptvermutung, *Ann. Math.*, 56 (1952), 96—114).

До сих пор неизвестно, можно ли триангулировать все многообразия более высоких размерностей¹⁾.

Модели неориентируемых поверхностей в евклидовом 3-пространстве

Ни одно замкнутое подмножество евклидова n -пространства не гомеоморфно неориентируемому $(n - 1)$ -многообразию. Этот результат, впервые доказанный голландским математиком Брауэром в 1912 г., в настоящее время можно легко вывести из нескольких общих теорем теории гомологий. Этот факт серьезно препятствует развитию нашей геометрической интуиции относительно компактных неориентируемых поверхностей, поскольку их нельзя гомеоморфно вложить в евклидово 3-пространство. Однако в евклидовом 3-пространстве можно построить модели таких поверхностей, снабдив их «особенностями», или «самопересечениями». Можно даже дать математическую теорию таких моделей, рассматривая понятие погружения многообразий. Непрерывное отображение f компактного n -многообразия M^n в m -мерное евклидово пространство R^m назовем *топологическим погружением*, если каждая точка из M^n имеет окрестность, гомеоморфно отображаемую при отображении f на ее образ. (Определение *дифференцируемого погружения* аналогично; требуется, чтобы f было дифференцируемым отображением и его якобиан всюду имел максимальный ранг.) Обычная модель бутылки Клейна в R^3 является погружением бутылки Клейна в 3-пространство. В 1901 г. Вернер Бой (Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche, *Nach. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen (Math. Phys. Kl.)*, 1901, pp. 20—33; см. также *Math. Ann.*, 57 (1903), 173—184) построил погружение проективной плоскости в R^3 . Одно из этих погружений приведено Гильбертом и Кон-Фоссеном в [2, стр. 322—326]. Так как любая компактная неориентируемая поверхность гомеоморфна связной сумме ориентируемой поверхности и проективной плоскости или бутылки Клейна, то теперь легко построить погружение остальных компактных неориентируемых поверхностей в R^3 .

Обычное погружение бутылки Клейна в R^3 намного проще любого из погружений проективной плоскости, полученных Боем. Множество особых точек этого погружения бутылки Клейна состоит из окружности двойных точек, тогда как для погружений Боя проективной плоскости это множество очень сложно. Возникает вопрос: существует ли такое погружение проективной плоскости в R^3 , что множество особых точек состоит из несвязных окружностей двойных точек? Ответ на этот вопрос отрицателен по крайней мере в слу-

¹⁾ В настоящее время вопрос о триангуляции многообразий и связанный с ним вопрос о комбинаторной эквивалентности различных триангуляций одного и того же многообразия решены для размерностей больших 4 и 5 соответственно. Оказалось, что существуют многообразия, не имеющие триангуляций (правда, с естественной оговоркой, что эти триангуляции локально должны быть комбинаторно эквивалентны триангуляциям евклидова пространства), и существуют многообразия (например, произведение окружности с комбинаторно неэквивалентными триангуляциями. Заключительный шаг в получении этих результатов, в котором участвовало большое число топологов, был сделан Р. Керби и Л. Зибенманом (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 742—749). Недавно построены также триангуляции многообразий (размерности больше 4), не удовлетворяющие сформулированному выше локальному требованию. — *Прим. ред.*

чае дифференцируемых погружений; доказательство требует, по-видимому, довольно сложной техники алгебраической и дифференциальной топологии.

Дальнейшую информацию о погружениях компактных поверхностей в R^3 можно найти в интересной статье Филлипса (Turning a surface inside out, *Sci. Amer.*, 214 (1966), 112—120).

Библиографические примечания

Первое доказательство классификационной теоремы для компактных поверхностей принадлежит Брахане (*Ann. Math.*, 23 (1922), 144—168). Однако, Зейферт и Трельфалль [3, стр. 362] приписывают его Дену и Хегору, и статьи Браханы нет даже в библиографии, приведенной в их книге. Несуществование алгоритма для классификации компактных триангулируемых 4-многообразий доказано советским математиком А. А. Марковым (Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, 300—306). Применение эйлеровой характеристики при доказательстве теоремы о пяти красках можно найти в книге Р. Куранта и Г. Роббинса, Что такое математика?, изд-во «Просвещение», М., 1967. Мы также рекомендуем превосходные чертежи в книгах Кэрса [5, стр. 28] и Гильберта и Кон-Фоссена [2, стр. 306], иллюстрирующие, как разрезать связную сумму двух или трех торов, чтобы получить многоугольник, противоположные стороны которого должны попарно отождествляться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Книги

1. Альфорс, Сарно (Ahlfors L. V., Sario L.), Riemann surfaces, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1960, Chapter I.
2. Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, Гостехиздат, М., 1951, гл. VI.
3. Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, Гостехиздат, М., гл. VI.
4. Керекьярто (Kerekjarto B.), Vorlesungen über Topologie, Berlin: J. Springer, 1923. Chapters IV and V.
5. Кэрнс (Cairns S. S.), Topology, New York: Ronald, 1961, Chapter II.
6. Рейдемейстер (Reidemeister K.), Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1932, Chapter V.

Статьи

7. Радо (Radó T.), Über den Begriff der Riemannschen Fläche, *Acta Litt. Sci. Szeged.*, 2 (1925), 101—121.
8. Ричардс (Richards I.), On the classification of noncompact surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106 (1963), 259—269.
9. Уайтхед (Whitehead J. H. C.), The immersion of an open 3-manifold in Euclidean 3-space, *Proc. London Math. Soc.*, 11 (1961), 81—90.
10. Фрейденталь (Freudenthal H.), Über die Enden topologischer Räume und Gruppen, *Math. Zeit.*, 33 (1931), 692—713.
11. Хирш (Hirsch M.), On imbedding differentiable manifolds in Euclidean space, *Ann. Math.*, 73 (1961), 566—571.

Глава II

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

1. Введение

Для произвольного топологического пространства X и любой точки $x_0 \in X$ мы определим группу, называемую *фундаментальной группой* пространства X и обозначаемую через $\pi(X, x_0)$. (На самом деле выбор точки x_0 не имеет обычно первостепенного значения и поэтому часто ее не указывают в обозначении.) Фундаментальная группа определяется довольно простой интуитивной процедурой, использующей замкнутые пути в X . Из определения будет ясно, что это топологический инвариант пространства X , т. е. если два пространства гомеоморфны, то их фундаментальные группы изоморфны. Это позволяет доказывать негомеоморфность двух пространств: достаточно показать, что их фундаментальные группы не изоморфны. Например, таким образом можно различать компактные поверхности.

Фундаментальная группа не только дает информацию о пространствах, но оказывается часто полезной при изучении непрерывных отображений. Как мы увидим позже, любое непрерывное отображение пространства X в пространство Y индуцирует гомоморфизм фундаментальной группы X в фундаментальную группу Y . Определенные топологические свойства непрерывного отображения найдут свое отражение в свойствах этого индуцированного гомоморфизма. Следовательно, можно доказывать факты, относящиеся к непрерывным отображениям, изучая индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп.

Смысл сказанного можно подытожить следующим образом. При помощи фундаментальной группы топологические проблемы, возникающие при изучении пространств и непрерывных отображений, иногда можно свести к чисто алгебраическим проблемам, касающимся групп и гомоморфизмов. Основная стратегия во всей алгебраической топологии состоит в том, чтобы найти методы сведения топологических проблем к вопросам чистой алгебры, после этого остается надеяться, что их смогут решить алгебраисты.

В настоящей главе дается лишь основное определение и изучаются свойства фундаментальной группы и индуцированного

гомоморфизма, а также выясняется строение фундаментальных групп для нескольких очень простых пространств. В следующих главах мы разовьем более общие методы нахождения фундаментальных групп, рассматривая некоторые более интересные пространства.

2. Основные обозначения и терминология

Как обычно, если a и b — действительные числа, $a < b$, то $[a, b]$ обозначает замкнутый интервал действительной прямой между точками a и b . Для краткости положим $I = [0, 1]$. Заметим, что для любых двух замкнутых интервалов $[a, b]$ и $[c, d]$ можно указать единственные *линейные* гомеоморфизмы

$$h_1, h_0: [a, b] \rightarrow [c, d],$$

для которых

$$\begin{aligned} h_0(a) &= c, & h_0(b) &= d, \\ h_1(a) &= d, & h_1(b) &= c. \end{aligned}$$

Эти два гомеоморфизма различают, называя h_0 гомеоморфизмом, *сохраняющим ориентацию*, а h_1 — *меняющим ориентацию*.

Путем в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение некоторого замкнутого интервала в X . Образы концов интервала называются *концевыми точками* пути; говорят, что путь *соединяет* свои концевые точки. Одна из концевых точек (ясно, какая) называется *начальной*, другая — *конечной*.

Пространство X называется *линейно связным*, если любые две точки в X можно соединить путем. Линейно связное пространство связно, но обратное не верно. *Линейно связные компоненты* пространства X — это его максимальные линейно связные подмножества (по аналогии с его обычными компонентами). Заметим, что линейно связные компоненты пространства X не обязательно должны быть замкнутыми множествами. Пространство называется *локально линейно связным*, если для каждой его точки найдется база, состоящая из линейно связных окрестностей (по аналогии с обычной локальной связностью).

Упражнение

2.1. Докажите, что связное и локально линейно связное пространство линейно связно.

Определение. Пусть $f_0, f_1: [a, b] \rightarrow X$ — такие два пути в X , что $f_0(a) = f_1(a)$, $f_0(b) = f_1(b)$ (т. е. оба пути имеют одну и ту же начальную и конечную точки). Говорят, что эти два пути *экви-*

валентны, и пишут $f_0 \sim f_1$, если существует такое непрерывное отображение

$$f: [a, b] \times I \rightarrow X,$$

что

$$\left. \begin{aligned} f(t, 0) &= f_0(t) \\ f(t, 1) &= f_1(t) \end{aligned} \right\} t \in [a, b],$$

$$\left. \begin{aligned} f(a, s) &= f_0(a) = f_1(a) \\ f(b, s) &= f_0(b) = f_1(b) \end{aligned} \right\} s \in I.$$

Заметим, что в этом определении можно было бы заменить I любым другим замкнутым интервалом. В качестве упражнения предлагаем проверить, что введенное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Другими словами, два пути эквивалентны, если один из них непрерывно деформируется в другой в пространстве X , причем во время деформации общие концевые точки остаются неподвижными.

Второе наше основное определение — *произведение* двух путей. Произведение двух путей определяется только тогда, когда конечная точка первого пути совпадает с начальной точкой второго. В этом случае путь-произведение составлен из двух путей: сначала проходит первый, а затем второй путь. Точнее, пусть

$$f: [a, b] \rightarrow X \quad \text{и} \quad g: [b, c] \rightarrow X$$

— два пути и $f(b) = g(b)$ (здесь $a < b < c$). Тогда произведение $f \cdot g$ определяется формулой

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, b], \\ g(t), & t \in [b, c]. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Ясно, что оно отображает $[a, c]$ в X . В нашем определении фигурирует довольно неуклюжее требование о том, чтобы области определения путей f и g были интервалами $[a, b]$ и $[b, c]$ соответственно. Это требование можно опустить, изменяя области определения путей f и g с помощью сохраняющего ориентацию линейного гомеоморфизма. В самом деле, в дальнейшем нас будут интересовать не сами пути, а их классы эквивалентности. Говоря о классе эквивалентности, мы имеем в виду только что определенную эквивалентность путей, а также следующее отношение эквивалентности: если $f: [a, b] \rightarrow X$ и $g: [c, d] \rightarrow X$ — такие пути, что $g = fh$, где $h: [c, d] \rightarrow [a, b]$ — сохраняющий ориентацию линейный гомеоморфизм, то f и g считаются эквивалентными. Вместо того чтобы рассматривать пути, областью определения которых служат любые замкнутые интервалы, и вводить сохра-

няющие ориентацию линейные гомеоморфизмы между двумя такими интервалами, технически проще потребовать, чтобы все пути были функциями, определенными на одном фиксированном интервале, а именно на интервале $I = [0, 1]$. В результате простая формула (2.2.1), дающая произведение двух путей, заменяется более сложной. Кроме того, становится совсем не очевидным, что произведение классов путей ассоциативно. Во всяком случае, читатель должен помнить, что для исследования этих вопросов можно применять различные альтернативные подходы.

3. Определение фундаментальной группы пространства

Начиная отсюда будем понимать под *путем* в X непрерывное отображение $I \rightarrow X$. Если f и g — такие пути в X , что конечная точка пути f совпадает с начальной точкой пути g , то произведение $f \cdot g$ определяется формулой

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Два пути f_0 и f_1 будут называться *эквивалентными* ($f_0 \sim f_1$), если выполняется условие эквивалентности, введенное в разд. 2.

Лемма 3.1. *Отношение эквивалентности и произведение совместимы, т. е. если $f_0 \sim f_1$ и $g_0 \sim g_1$, то $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$ (при этом, разумеется, предполагается, что конечная точка пути f_i совпадает с начальной точкой пути g_i , $i = 0, 1$).*

Доказательство предоставляем читателю. При доказательстве подобных лемм может пригодиться следующий факт. Пусть A и B — такие замкнутые подмножества топологического пространства X , что $X = A \cup B$. Если f — такая функция на X , что сужения $f|_A$ и $f|_B$ непрерывны, то функция f непрерывна. Доказательство легкое и оставляется читателю. Мы будем использовать этот факт без дополнительных объяснений.

Из леммы 3.1 вытекает, что произведение путей определяет произведение классов эквивалентности путей (при условии, что конечная точка первого пути совпадает с начальной точкой второго). Это и есть то произведение классов эквивалентности, которое нам было нужно. Заметим, что произведение путей в общем случае неассоциативно, т. е. $(f \cdot g) \cdot h \neq f \cdot (g \cdot h)$ (предполагается, что произведения определены). Однако для классов путей справедлива

Лемма 3.2. *Произведение классов эквивалентности путей ассоциативно.*

Доказательство. Достаточно доказать следующее. Пусть f , g и h — такие пути, что конечная точка пути f совпадает с начальной точкой пути g , а конечная точка пути g — с начальной точкой пути h . Тогда

$$(f \cdot g) \cdot h \sim f \cdot (g \cdot h).$$

Для доказательства рассмотрим отображение $F: I \times I \rightarrow X$, определенное формулой

$$F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}, \\ g(4t-1-s), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}, \\ h\left(1 - \frac{4(1-t)}{2-s}\right), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Это отображение непрерывно, $F(t, 0) = [(f \cdot g) \cdot h](t)$ и $F(t, 1) = [f \cdot (g \cdot h)](t)$. Из рис. 2.1 видно, как определено отображение F .

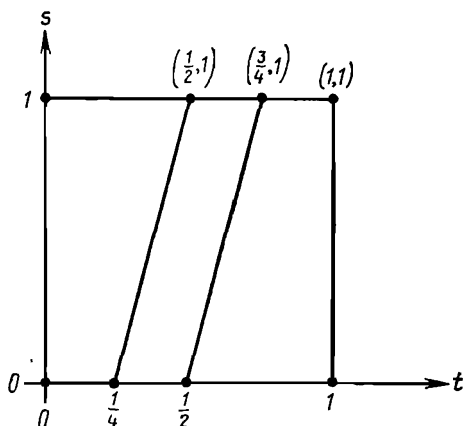


Рис. 2.1. Доказательство ассоциативности.

Для любой точки $x \in X$ обозначим через ε_x класс эквивалентности постоянного отображения отрезка I в точку $x \in X$. Этот класс путей обладает следующим фундаментальным свойством.

Лемма 3.3. Пусть α — класс эквивалентности путей, для которых x — начальная точка, а y — конечная. Тогда $\varepsilon_x \cdot \alpha = \alpha$ и $\alpha \cdot \varepsilon_y = \alpha$.

Доказательство. Пусть $e: I \rightarrow X$ — такое постоянное отображение, что $e(I) = x$, а $f: I \rightarrow X$ — некоторый представитель класса α . Для доказательства первого равенства доста-

точно показать, что $e \cdot f \sim f$. Определим отображение $F: I \times I \rightarrow X$ формулой

$$F(t, s) = \begin{cases} x, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}s, \\ f\left(\frac{2t-s}{2-s}\right), & \frac{1}{2}s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда, как и требуется, $F(t, 0) = f(t)$ и $F(t, 1) = (e \cdot f)(t)$. Определение отображения F показано на рис. 2.2. Доказательство равенства $\alpha \cdot \varepsilon_y = \alpha$ аналогично и оставляется читателю.

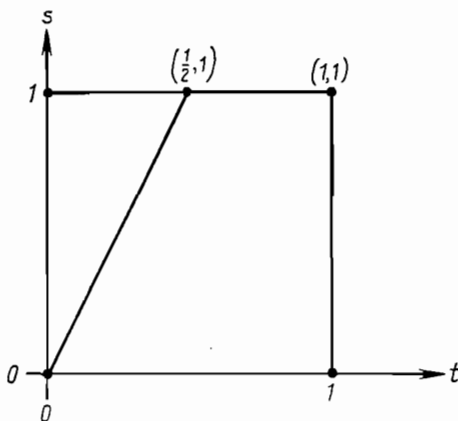


Рис. 2.2. Доказательство существования единиц.

Для любого пути $f: I \rightarrow X$ обозначим через $\bar{f}$ путь, определенный формулой

$$\bar{f}(t) = f(1 - t), \quad t \in I.$$

Путь $\bar{f}$ получается при прохождении пути f в противоположном направлении.

Лемма 3.4. Пусть α и $\bar{\alpha}$ — классы эквивалентности путей f и $\bar{f}$ соответственно. Тогда

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = \varepsilon_x, \quad \bar{\alpha} \cdot \alpha = \varepsilon_y,$$

где x и y — начальная и конечная точки пути f соответственно.

Доказательство. Для доказательства первого соотношения достаточно показать, что $f \cdot \bar{f} \sim e$, где e — постоянный путь

в точке x . Определим отображение $F: I \times I \rightarrow X$ формулой

$$F(t, s) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}s, \\ f(s), & \frac{1}{2}s \leq t \leq 1 - \frac{1}{2}s, \\ f(2-2t), & 1 - \frac{1}{2}s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда $F(t, 0) = x$ и $(f \cdot \bar{f})(t) = F(t, 1)$. На рис. 2.3 показано, как выбрано отображение F . Деформацию пути $f \cdot \bar{f}$ в постоянный

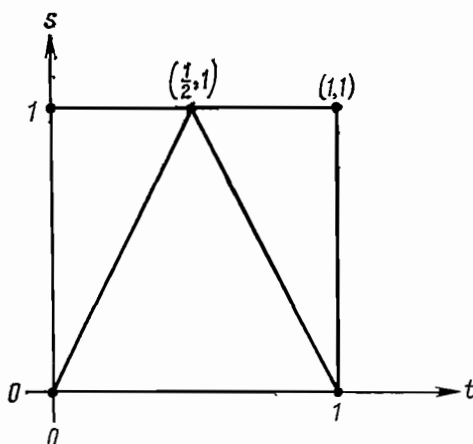


Рис. 2.3. Доказательство существования обратного класса.

путь e можно также объяснить с помощью простой механической модели.

Представим себе путь f в виде эластичной нити в пространстве X , соединяющей точки x и y , и выберем по ней направление от x к y ; тогда $\bar{f}$ — та же самая нить, но проходимая в противоположном направлении (от y к x), а путь $f \cdot \bar{f}$ — две эти нити, связанные в точке y . Получившуюся двойную нить можно стянуть в точку x , поскольку теперь точка y не концевая, так что мы не обязаны держать нить закрепленной в точке y .

Доказательство соотношения $\bar{\alpha} \cdot \alpha = \varepsilon_y$ аналогично и представляется читателю.

Имея в виду свойство класса $\bar{\alpha}$, описанное в лемме 3.2, мы будем обозначать начиная с этого момента класс $\bar{\alpha}$ через α^{-1} . Легко видеть, что класс α^{-1} определяется однозначно. Следовательно, если $f_0 \sim f_1$, то $\bar{f}_0 \sim \bar{f}_1$.

Все только что доказанные леммы можно суммировать следующим образом: множество всех классов эквивалентности путей пространства X удовлетворяет аксиомам группы, если только определено произведение двух классов.

Определение. Путь называется *замкнутым*, или *петлей*, если его начальная и конечная точки совпадают. В таком случае говорят о петле в этой точке.

Пусть x — любая точка в X ; мы видим, что множество классов всех петель в точке x образует группу. Эта группа называется *фундаментальной группой* или *группой Пуанкаре* пространства X в точке x и обозначается через $\pi(X, x)$.

Исследуем, как группа $\pi(X, x)$ зависит от точки x . Пусть x и y — две точки пространства X , а γ — класс путей с начальной точкой x и конечной y (следовательно, точки x и y принадлежат одной и той же компоненте линейной связности пространства X). Используя класс γ , определим отображение $u: \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$ соответствием $\alpha \rightarrow \gamma^{-1}\alpha\gamma$. Ясно, что это гомоморфизм. Беря вместо γ класс γ^{-1} , можно определить гомоморфизм $v: \pi(X, y) \rightarrow \pi(X, x)$. Легко проверить, что композиции гомоморфизмов vu и uv тождественно отображают на себя группы $\pi(X, x)$ и $\pi(X, y)$ соответственно. Следовательно, u и v — взаимно обратные изоморфизмы. Таким образом, доказана

Теорема 3.5. Если пространство X линейно связно, то для любых двух точек $x, y \in X$ группы $\pi(X, x)$ и $\pi(X, y)$ изоморфны.

Значение этой теоремы очевидно; например, вопрос о том, какими теоретико-групповыми свойствами обладает группа $\pi(X, x)$ (является ли она абелевой, конечной, нильпотентной, свободной и т. д.), не зависит от выбора точки x и, следовательно, зависит лишь от X , при условии что пространство X линейно связно.

С другой стороны, мы должны помнить, что между $\pi(X, x)$ и $\pi(X, y)$ нет канонического, или естественного, изоморфизма: каждому выбору класса путей, соединяющих точку x с y , будет соответствовать свой изоморфизм группы $\pi(X, x)$ на $\pi(X, y)$, и в общем случае различные классы таких путей будут давать различные изоморфизмы.

Упражнения

3.1. Каким условиям должны удовлетворять два класса γ и γ' путей, соединяющих точку x с y , чтобы они давали один и тот же изоморфизм группы $\pi(X, x)$ на группу $\pi(X, y)$?

3.2. Пусть X — линейно связное пространство. При каких условиях справедливо следующее утверждение: для любых двух точек $x, y \in X$ все классы путей, соединяющих x с y , дают один и тот же изоморфизм группы $\pi(X, x)$ на $\pi(X, y)$?

3.3. Пусть $f, g: I \rightarrow X$ — два пути с начальной точкой x_0 и конечной x_1 . Докажите, что $f \sim g$ тогда и только тогда, когда произведение $f \cdot \bar{g}$ эквивалентно постоянному пути в x_0 (путь $\bar{g}$ определяется так же, как в лемме 3.4).

Фундаментальные группы различных пространств мы будем вычислять дальше в этой главе и в гл. IV.

4. Действие непрерывного отображения на фундаментальную группу

Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, а $f_0, f_1: I \rightarrow X$ — пути в X . Легко видеть, что если f_0 и f_1 эквивалентны, то эквивалентны также пути φf_0 и φf_1 , представляемые композицией отображений. Следовательно, если через α обозначить класс путей, содержащий f_0 и f_1 , то через $\varphi_*(\alpha)$ имеет смысл обозначить класс путей, содержащий пути φf_0 и φf_1 . Класс $\varphi_*(\alpha)$ есть образ класса α во множестве классов путей пространства Y , и легко проверить, что отображение φ_* , определенное соответствием $\varphi \rightarrow \varphi_*(\alpha)$, обладает следующими свойствами:

- (а) если α и β — такие классы путей в X , что произведение $\alpha \cdot \beta$ определено, то $\varphi_*(\alpha \cdot \beta) = (\varphi_*\alpha) \cdot (\varphi_*\beta)$;
- (б) $\varphi_*(\varepsilon_x) = \varepsilon_{\varphi(x)}$ для любой точки $x \in X$;
- (в) $\varphi_*(\alpha^{-1}) = (\varphi_*\alpha)^{-1}$.

На основании этих свойств будем называть отображение φ_* «гомоморфизмом» или «гомоморфизмом, индуцированным отображением φ »¹⁾.

Если $\psi: Y \rightarrow Z$ — также непрерывное отображение, то легко проверяется свойство

$$(d) (\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*.$$

И, наконец, если $\varphi: X \rightarrow X$ — тождественное отображение, то

- (е) $\varphi_*(\alpha) = \alpha$ для любого класса $\alpha \in X$, т. е. φ_* — тождественный гомоморфизм.

Теперь отметим, что на основании перечисленных свойств непрерывное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм $\varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$, и если φ — гомеоморфизм, то φ_* — изоморфизм. Этот индуцированный гомоморфизм чрезвычайно важен при изучении фундаментальной группы.

¹⁾ Это не настоящий гомоморфизм, так как все множество классов путей пространств X и Y не составляет группы (см. абзац перед определением петли). — Прим. перев.

Предостережение. Если φ — взаимно однозначное отображение, то это вовсе не значит, что φ_* тоже взаимно однозначно; если φ — отображение на, то это вовсе не значит, что φ_* — тоже отображение на. Позднее мы приведем соответствующие примеры.

Упражнение

4.1. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, а γ — класс путей в X , соединяющих точку x_0 с x_1 . Докажите коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y, \varphi(x_0)) \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ \pi(X, x_1) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y, \varphi(x_1)). \end{array}$$

Здесь изоморфизм u определяется формулой $u(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma$, а изоморфизм v определяется аналогично с заменой γ на $\varphi_*(\gamma)$. (Замечание: Частный случай, когда $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$, отметим особо; в этом случае $\varphi_*(\gamma)$ — элемент группы $\pi(Y, \varphi(x_0))$).

Для дальнейшего изучения индуцированного гомоморфизма φ_* введем важное понятие *гомотопии* непрерывных отображений.

Определение. Два непрерывных отображения $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$ называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $\varphi: X \times I \rightarrow Y$, что для $x \in X$

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), \\ \varphi(x, 1) &= \varphi_1(x). \end{aligned}$$

Гомотопность отображений φ_0 и φ_1 мы будем обозначать через $\varphi_0 \simeq \varphi_1$. Предоставляем читателю убедиться в том, что гомотопия есть отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений $X \rightarrow Y$. Классы эквивалентности при этом отношении называются *гомотопическими классами* отображений.

Чтобы лучше представить себе геометрическую суть этого определения, запишем $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ для любой точки $(x, t) \in X \times I$. Тогда для всех $t \in I$

$$\varphi_t: X \rightarrow Y$$

— непрерывное отображение. Будем считать, что параметр t — время. Тогда в момент времени $t = 0$ мы получаем отображение φ_0 , и при изменении t меняется непрерывно отображение φ_t , так что в момент $t = 1$ мы получаем отображение φ_1 . По этой причине

о гомотопии часто говорят как о непрерывной деформации отображения ¹⁾.

Определение. Два отображения $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$ называются *гомотопными относительно подмножества* $A \subset X$, если существует такое непрерывное отображение $\varphi: X \times I \rightarrow Y$, что

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), & x \in X, \\ \varphi(x, 1) &= \varphi_1(x), & x \in X, \\ \varphi(a, t) &= \varphi_0(a) = \varphi_1(a), & a \in A, t \in I.\end{aligned}$$

Заметим, что из последнего условия вытекает равенство $\varphi_0|_A = \varphi_1|_A$.

Теорема 4.1. Пусть $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$ — отображения, гомотопные относительно подмножества $\{x\}$. Тогда

$$\varphi_{0*} = \varphi_{1*}: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi_0(x)),$$

т. е. гомоморфизмы, индуцированные этими отображениями, совпадают.

Доказательство очевидно.

К сожалению, выделение при определении гомотопии одной какой-то точки x во многих случаях оказывается слишком обременительным. Этого можно не делать, но тогда формулировки теорем усложняются. Мы отложим это до разд. 8.

Сейчас дадим применения некоторых из наших результатов.

Определение. Подмножество A топологического пространства X называется его *ретрактом*, если существует такое непрерывное отображение $r: X \rightarrow A$ (называемое *ретракцией*), что $r(a) = a$ для любой точки $a \in A$.

Как мы вскоре увидим, требование о том, чтобы подмножество A было ретрактом пространства X , довольно сильное. Простым примером ретракта пространства служит «центральная окружность» листа Мёбиуса. (Как в этом примере построить ретракцию?)

¹⁾ Читатель, знакомый с компактно-открытой топологией функциональных пространств, сразу же распознает, что два отображения $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$ гомотопны тогда и только тогда, когда их можно соединить путем в пространстве всех непрерывных функций $X \rightarrow Y$ (при этом X и Y должны удовлетворять определенным предположениям). Действительно, в наших обозначениях отображение $t \rightarrow \varphi_t$ будет путем, соединяющим в этом пространстве точки φ_0 и φ_1 .

Пусть $r: X \rightarrow A$ — ретракция, а $i: A \rightarrow X$ — отображение включения. Для любой точки $a \in A$ рассмотрим индуцированные гомоморфизмы

$$\begin{aligned} i_*: \pi(A, a) &\rightarrow \pi(X, a), \\ r_*: \pi(X, a) &\rightarrow \pi(A, a). \end{aligned}$$

Так как ri — тождественное отображение, то r_*i_* — тождественный гомоморфизм группы $\pi(A, a)$, обладающий свойствами (d) и (e), перечисленными в начале раздела. Отсюда следует, что i_* — *мономорфизм*, а r_* — *эпиморфизм*. Кроме того, условие $r_*i_* = \text{id}$ налагает сильные ограничения на подгруппу $i_*\pi(A, a)$ группы $\pi(X, a)$.

Этот результат нам понадобится позднее для доказательства того, что некоторые подпространства не являются ретрактами.

Упражнения

4.2. Покажите, что ретракт хаусдорфова пространства должен быть замкнутым подмножеством.

4.3. Докажите, что если A — ретракт пространства X , $r: X \rightarrow A$ — ретракция, $i: A \rightarrow X$ — включение и $i_*\pi(A)$ — нормальная подгруппа группы $\pi(X)$, то $\pi(X)$ можно представить в виде прямой суммы подгрупп $\text{Im } i_*$ и $\text{Ker } r_*$ (определение прямой суммы группы см. в разд. III.2).

4.4. Пусть A — подпространство пространства X , а Y — непустое топологическое пространство. Докажите, что $A \times Y$ — ретракт произведения $X \times Y$ тогда и только тогда, когда A — ретракт пространства X .

4.5. Докажите, что отношение «быть ретрактом» транзитивно, т. е. если A — ретракт пространства B , а B — ретракт пространства C , то A — ретракт пространства C .

Теперь введем понятие *деформационного ретракта*. Подпространство A называется деформационным ретрактом пространства X , если существует ретракция $r: X \rightarrow A$, гомотопная тождественному отображению $X \rightarrow X$. Точное определение формулируется так:

Определение. Подмножество A пространства X называется *деформационным ретрактом*¹⁾ для X , если существуют такая ретракция $r: X \rightarrow A$ и такая гомотопия $f: X \times I \rightarrow X$, что

$$\left. \begin{aligned} f(x, 0) &= x \\ f(x, 1) &= r(x) \end{aligned} \right\} x \in X, \\ f(a, t) &= a, \quad a \in A, \quad t \in I.$$

Теорема 4.2. Если A — деформационный ретракт пространства X , то для любой точки $a \in A$ отображение включения $i: A \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм группы $\pi(A, a)$ на группу $\pi(X, a)$.

¹⁾ Некоторые авторы определяют этот термин более слабыми условиями.

Доказательство. Как и выше, $r_* i_*$ — тождественное отображение группы $\pi(A, a)$. Мы докажем теорему, если сможем показать, что $i_* r_*$ — тождественное отображение группы $\pi(X, a)$. Но это следует из того, что композиция ir гомотопна тождественному отображению $X \rightarrow X$ (относительно $\{a\}$), и из теоремы 4.1.

Теорему 4.2 мы будем использовать двумя различными способами. С одной стороны, на протяжении всей оставшейся части книги она будет применяться для доказательства того, что два пространства имеют изоморфные фундаментальные группы. С другой стороны, с ее помощью доказывается, что какое-то подпространство не является деформационным ретрактом пространства; достаточно показать, что их фундаментальные группы не изоморфны. В частности, мы докажем, что некоторые ретракты не являются деформационными ретрактами.

Определение. Топологическое пространство X называется *стягиваемым в точку*, если существует такая точка $x_0 \in X$, что $\{x_0\}$ — деформационный ретракт пространства X .

Определение. Топологическое пространство X называется *односвязным*, если оно линейно связно и $\pi(X, x) = \{1\}$ для какой-нибудь (следовательно, для любой) точки $x \in X$.

Следствие 4.3. Если пространство X стягиваемо в точку, то оно односвязно.

Примеры

4.1. Подмножество X плоскости или, в более общем случае, евклидова n -пространства $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий любые две точки из X , целиком принадлежит X . Мы утверждаем, что любое выпуклое подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ стягиваемо в точку. Для доказательства выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и определим отображение $f: X \times I \rightarrow X$ формулой

$$f(x, t) = (1 - t)x + tx_0$$

для любой точки $(x, t) \in X \times I$ (т. е. точка $f(x, t)$ лежит на отрезке, соединяющем x и x_0 , и делит его в отношении $(1 - t): t$). Отображение f непрерывно, $f(x, 0) = x$ и $f(x, 1) = x_0$, что и требуется. Более общо, определим подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ *звездное относительно точки* $x_0 \in X$, т. е. такое, что для любой точки $x \in X$ отрезок, соединяющий точки x_0 и x , целиком принадлежит X . Тогда точно таким же способом показывается, что если пространство X звездно относительно x_0 , то оно стягиваемо в точку x_0 .

4.2. Мы утверждаем, что единичная $(n - 1)$ -сфера S^{n-1} является деформационным ретрактом замкнутого единичного n -мерного диска E^n , из которого удалено начало координат. Для доказательства определим отображение $f: X \times I \rightarrow X$, где

$$X = E^n - \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| \leq 1\},$$

формулой

$$f(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{|x|}.$$

(Рекомендуем читателю сделать чертеж, чтобы проследить за всем происходящим в случаях $n = 2$ и $n = 3$.) Отображение f непрерывно, $f(x, 0) = x$, $f(x, 1) = x/|x| \in S^{n-1}$, и если $x \in S^{n-1}$, то $f(x, t) = x$ для всех $t \in I$. В частности, при $n = 2$ окружность края диска является деформационным ретрактом этого диска с выколотой точкой.

Упражнения

4.6. Пусть x_0 — любая точка в плоскости $\mathbb{R}^2$. Найдите окружность C в $\mathbb{R}^2$, являющуюся деформационным ретрактом для $\mathbb{R}^2 - \{x_0\}$. Что будет n -мерным аналогом этой ситуации?

4.7. Найдите окружность C , являющуюся деформационным ретрактом листа Мёбиуса.

4.8. Пусть T — тор, а X — дополнение к точке в T . Найдите подмножество в X , гомеоморфное восьмерке (т. е. объединению двух окружностей с одной общей точкой) и являющееся деформационным ретрактом для T .

4.9. Обобщите упражнение 4.8 на произвольные компактные поверхности. Пусть S — компактная поверхность, а X — дополнение к точке в S ; найдите такое подмножество $A \subset X$, что (а) A гомеоморфно объединению конечного числа окружностей и (б) A — деформационный ретракт пространства X . [Указание. Рассмотрите представление поверхности S в виде пространства, полученного попарным отождествлением сторон некоторого многоугольника.]

4.10. Пусть x и y — различные точки односвязного пространства X . Докажите, что существует единственный класс путей в X с начальной точкой x и конечной y .

4.11. Пусть X — топологическое пространство и X_n для любого натурального числа $n > 0$ обозначает его линейно связанное подпространство, содержащее базисную точку $x_0 \in X$. Предположим, что система X_n «растет» (т. е. $X_n \subset X_{n+1}$ для всех n),

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

и для любого компактного подмножества $A \subset X$ найдется такое натуральное число n , что $A \subset X_n$. (Пример: каждое пространство X_n открыто.) Обозначим через $i_n: \pi(X_n) \rightarrow \pi(X)$ и $j_{mn}: \pi(X_m) \rightarrow \pi(X_n)$, $m < n$, гомоморфизмы, индуцированные отображениями включения. Докажите утверждения: (а) для любого $\alpha \in \pi(X)$ найдется такое натуральное число n и такой элемент $\alpha' \in \pi(X_n)$, что $i_n(\alpha') = \alpha$; (б) если $\beta \in \pi(X_m)$ и $i_m(\beta) = 1$, то найдется такое число $n \geq m$, что $j_{mn}(\beta) = 1$. (Замечание. Из этих двух утверждений следует, что $\pi(X)$ — прямой предел последовательности групп $\pi(X_n)$ и гомоморфизмов j_{mn} . В дальнейшем мы приведем примеры, в которых будут выполнены предположения этого упражнения.) Если гомоморфизмы $j_{n,n+1}$ являются мономорфизмами для всех n , то докажите, что каждый гомоморфизм i_n — также мономорфизм и группа $\pi(X)$ представима в виде объединения своих подгрупп $i_n\pi(X_n)$.

5. Фундаментальная группа окружности — бесконечная циклическая группа

Обозначим через S^1 единичную окружность в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$ (или, что то же, в комплексной плоскости $\mathbb{C}$). Пусть $f: I \rightarrow S^1$ — замкнутый путь, обходящий окружность только один раз и определенный

формулой

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Обозначим класс эквивалентности пути f через α .

Теорема 5.1. *Фундаментальная группа $\pi(S^1, (1, 0))$ является бесконечной циклической группой, порожденной классом α .*

Доказательство. Пусть $g: I \rightarrow S^1$, $g(0) = g(1) = (1, 0)$, — замкнутый путь в S^1 . Сначала докажем, что класс пути g принадлежит классу эквивалентности α^m для некоторого целого числа m (m может быть положительным, отрицательным или нулем).

Пусть

$$U_1 = \left\{ (x, y) \in S^1: y > -\frac{1}{10} \right\},$$

$$U_2 = \left\{ (x, y) \in S^1: y < +\frac{1}{10} \right\}.$$

U_1 и U_2 — связные открытые подмножества окружности S^1 , каждое из которых немного больше полуокружности, и $U_1 \cup U_2 = S^1$. Очевидно, что как U_1 , так и U_2 гомеоморфны открытому интервалу действительной прямой и потому стягиваемы. Если $g(I) \subset U_1$ или $g(I) \subset U_2$, то ясно, что путь g эквивалентен постоянному пути и, следовательно, принадлежит классу эквивалентности α^0 . Мы этот случай отложим и начиная с этого момента будем считать, что $g(I) \not\subset U_1$ и $g(I) \not\subset U_2$.

Мы утверждаем, что можно разбить единичный отрезок на замкнутые интервалы $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$, где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, так, чтобы выполнялись следующие условия:

- (а) $g([t_i, t_{i+1}]) \subset U_1$ или $g([t_i, t_{i+1}]) \subset U_2$ для $0 \leq i < n$;
- (б) $g([t_{i-1}, t_i])$ и $g([t_i, t_{i+1}])$ не содержатся в одном и том же открытом множестве U_j , $j = 1$ или $j = 2$.

Это утверждение можно доказать так: $\{g^{-1}(U_1), g^{-1}(U_2)\}$ — открытое покрытие компактного метрического пространства I ; пусть ε — лебегово число¹⁾ этого покрытия.

Разобьем как угодно единичный интервал, лишь бы длина отрезков разбиения была меньше ε . При таком разбиении условие

¹⁾ ε называется *лебеговым числом* покрытия метрического пространства X , если любое подмножество в X диаметра меньше ε содержится в каком-нибудь множестве покрытия. Существует теорема о том, что любое открытое покрытие компактного метрического пространства имеет лебегово число. Читатель может либо доказать ее в качестве упражнения, либо найти доказательство в учебнике по общей топологии.

(а) выполняется, но может не выполняться условие (b). Если g переводит два последовательных интервала в одно и то же множество U_j , то объединим эти интервалы в один, склеивая их по общей точке. Процесс объединения интервалов продолжаем до тех пор, пока не будет выполняться условие (b).

Обозначим через β класс эквивалентности пути g , а через β_i — класс эквивалентности пути $g| [t_i, t_{i+1}]$ для $1 \leq i \leq n$. Тогда очевидно, что β можно представить в виде произведения

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_n.$$

Каждый сомножитель β_i есть класс путей в U_1 или U_2 . В силу условия (b) ясно, что $g(t_i) \in U_1 \cap U_2$. Пересечение $U_1 \cap U_2$ состоит из двух компонент, одна из которых содержит точку $(1, 0)$, а другая — точку $(-1, 0)$. Для каждого индекса i , $0 < i < n$, выберем класс γ_i путей в $U_1 \cap U_2$ с начальной точкой $g(t_i)$ и конечной точкой либо $(1, 0)$, либо $(-1, 0)$ в зависимости от того, какая из компонент $U_1 \cap U_2$ содержит $g(t_i)$. Пусть

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \beta_1 \gamma_1, \\ \delta_i &= \gamma_{i-1}^{-1} \beta_i \gamma_i \quad \text{для } 1 < i < n, \\ \delta_n &= \gamma_{n-1}^{-1} \beta_n. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\beta = \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n, \quad (2.5.1)$$

где каждый сомножитель δ_i — это класс путей в U_1 или U_2 с начальной и конечной точками в множестве из двух точек $\{(1, 0), (-1, 0)\}$. Так как U_1 и U_2 односвязны, то $\delta_i = 1$ для любого индекса i , если δ_i — класс замкнутых путей. Можно предположить, что все такие классы δ_i в формуле (2.5.1) опущены, и, изменяя, если надо, обозначения, считать $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ классами незамкнутых путей.

Так как множество U_1 односвязно, существует единственный класс η_1 путей в U_1 с начальной точкой $(1, 0)$ и конечной $(-1, 0)$ (см. упражнение 4.10). Точно так же η_1^{-1} — единственный класс путей в U_1 с начальной точкой $(-1, 0)$ и конечной $(1, 0)$. Аналогично через η_2 обозначим единственный класс путей в U_2 с начальной точкой $(-1, 0)$ и конечной $(1, 0)$. Отметим, что $\eta_1 \eta_2 = \alpha$.

Таким образом, для каждого значения индекса i

$$\delta_i = \eta_1^{\pm 1} \quad \text{или} \quad \delta_i = \eta_2^{\pm 1}.$$

Учитывая это, в формуле (2.5.1) можно вычеркнуть некоторые члены, например если $\delta_i = \eta_1$ и $\delta_{i+1} = \eta_1^{-1}$, то $\delta_i \delta_{i+1}$ вычеркиваем.

После того как все, какие можно, пары вычеркнуты, останутся только три случая:

$$\beta = 1,$$

$$\beta = \eta_1 \eta_2 \eta_1 \eta_2 \dots \eta_1 \eta_2,$$

$$\beta = \eta_2^{-1} \eta_1^{-1} \eta_2^{-1} \eta_1^{-1} \dots \eta_2^{-1} \eta_1^{-1}.$$

Во втором случае $\beta = \alpha^m$ для некоторого целого числа $m > 0$, тогда как в первом $\beta = \alpha^m$ для некоторого целого числа $m < 0$. Таким образом, во всех случаях $\beta = \alpha^m$.

Отсюда следует, что $\pi(S^1)$ — циклическая группа. Однако приведенное рассуждение ничего не говорит о том, каков порядок

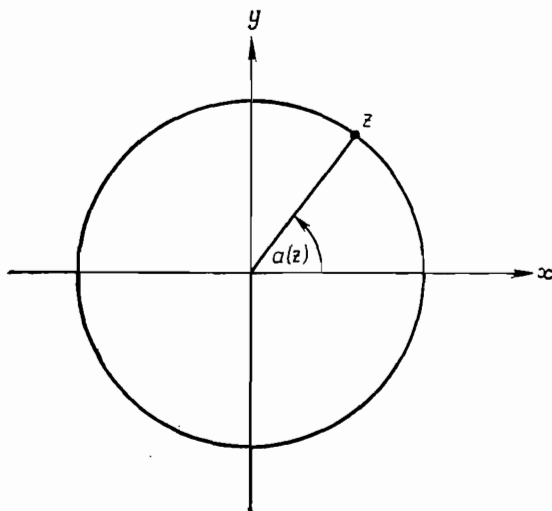


Рис. 2.4. Определение $a(z)$.

этой группы. Для доказательства бесконечности группы $\pi(S^1)$ введем понятие *степени* класса замкнутого пути в S^1 . Грубо говоря, степень — это целое число, показывающее, сколько раз путь наматывается на окружность.

Удобно определять степень пути, считая S^1 единичной окружностью в комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}.$$

Так как произведение и частное любых двух комплексных чисел с модулем 1 снова имеют модуль 1, то S^1 — группа, групповая операция в которой — обычное умножение. Если $z \in S^1$, то через $a(z)$ обозначим *аргумент* вектора z , т. е. угол в радианах, отсчитываемый против часовой стрелки от положительной части действительной оси до вектора z (см. рис. 2.4). Таким образом, для любого

вектора $z \in S^1$ аргумент $a(z)$ — действительное число; однако оно определено не однозначно. Если θ — значение аргумента $a(z)$, то для любого целого числа k число $\theta + 2k\pi$ будет в равной степени подходящим значением аргумента. Это можно выразить иначе следующим образом. Если $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, то θ — значение аргумента $a(z)$. Отметим, что если θ_1 и θ_2 — значения аргументов $a(z_1)$ и $a(z_2)$ соответственно, то $\theta_1 + \theta_2$ есть значение аргумента $a(z_1 z_2)$, а $\theta_1 - \theta_2$ есть значение аргумента $a(z_1/z_2)$.

Пусть $h: I \rightarrow S^1$ — замкнутый путь, $h(0) = h(1) = 1$. Выберем разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

единичного интервала так, чтобы для $t', t'' \in [t_{i-1}, t_i]$

$$|h(t') - h(t'')| < 1. \quad (2.5.2)$$

Существование такого разбиения можно доказать, опираясь на равномерную непрерывность функции h или на существование лебегова числа некоторого покрытия интервала I . Пусть θ_i для каждого значения индекса i , $1 \leq i \leq n$, будет однозначно определенным значением аргумента функции $h(t_i)/h(t_{i-1})$, удовлетворяющим неравенству

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2}.$$

Возможность выбора такого θ_i следует из неравенства $|h(t_i) - h(t_{i-1})| < 1$, представляющего собой частный случай неравенства (2.5.2). Теперь определим степень функции h формулой

$$\deg h = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \theta_i.$$

Это целое число, так как $\sum_{i=1}^n \theta_i$ — значение аргумента комплексного числа

$$\prod_{i=1}^n \frac{h(t_i)}{h(t_{i-1})} = \frac{h(t_n)}{h(t_0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Чтобы определение степени было корректным, надо показать, что оно не зависит от выбора разбиения интервала I . Так как любые два разбиения имеют общее подразбиение, достаточно выяснить, что произойдет при переходе к общему подразбиению. Любое подразбиение данного разбиения можно получить серией последовательных подразбиений, при которых на каждом шаге к предыдущему подразбиению добавляется лишь одна точка. Поэтому

достаточно проверить только случай разбиения интервала $[t_{i-1}, t_i]$ точкой s так, что $t_{i-1} < s < t_i$. Тогда надо заметить θ_i на $\theta'_i + \theta''_i$, где

$$\begin{aligned}\theta'_i &= a \left(\frac{h(s)}{h(t_{i-1})} \right), \\ \theta''_i &= a \left(\frac{h(t_i)}{h(s)} \right)\end{aligned}$$

и $|\theta'_i| < \pi/2$, $|\theta''_i| < \pi/2$. Ясно, что как θ_i , так и $\theta'_i + \theta''_i$ будут значениями аргумента комплексного числа $h(t_i)/h(t_{i-1})$ и потому должны отличаться на число, кратное 2π . Но так как все три значения по модулю меньше $\pi/2$, то это возможно, лишь когда $\theta_i = \theta'_i + \theta''_i$. Следовательно, определение степени функции h не зависит от выбора разбиения.

Далее докажем, что если $h \sim g$, то $\deg h = \deg g$. Так как $h \sim g$, то существует такое непрерывное отображение $F: I \times I \rightarrow S^1$, что

$$\begin{aligned}F(t, 0) &= h(t), \\ F(t, 1) &= g(t), \\ F(0, s) &= F(1, s) = 1.\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

Выберем такие разбиения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ и $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ единичного интервала, что F отображает каждый из прямоугольников $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ в подмножество окружности S^1 , имеющее диаметр < 1 , т. е. если (t, s) и (t', s') принадлежат $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$, то

$$|F(t, s) - F(t', s')| < 1.\tag{2.5.4}$$

Пусть

$$\begin{aligned}\theta'_i &= a \left(\frac{F(t_i, s_{j-1})}{F(t_{i-1}, s_{j-1})} \right), \quad |\theta'_i| < \frac{\pi}{2}, \\ \theta''_i &= a \left(\frac{F(t_i, s_j)}{F(t_{i-1}, s_j)} \right), \quad |\theta''_i| < \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Мы хотим доказать, что

$$\sum_{i=1}^n \theta'_i = \sum_{i=1}^n \theta''_i.$$

Тогда, применив это рассуждение последовательно для $j=1, 2, \dots, n$, получим $\deg h = \deg g$. Итак, положим

$$\varphi_i = a \left(\frac{F(t_i, s_j)}{F(t_i, s_{j-1})} \right), \quad |\varphi_i| < \frac{\pi}{2}, \quad i=0, 1, \dots, n.$$

Выбор значения φ_i , удовлетворяющего неравенству $|\varphi_i| < \pi/2$, возможен в силу выполнения условия (2.5.4). Числа $\theta_i'' - \theta_i'$ и $\varphi_i - \varphi_{i-1}$ являются значениями аргумента комплексного числа

$$\frac{F(t_i, s_i) F(t_{i-1}, s_{j-1})}{F(t_{i-1}, s_j) F(t_i, s_{j-1})}$$

и потому отличаются на число, кратное 2π . В силу ограничений, наложенных на модуль, это целое число равно нулю, т. е.

$$\theta_i'' - \theta_i' = \varphi_i - \varphi_{i-1}.$$

Теперь суммируем от $i = 1$ до $i = n$:

$$\sum \theta_i'' - \sum \theta_i' = \sum \varphi_i - \varphi_{i-1} = \varphi_n - \varphi_0.$$

Из соотношений (2.5.3) вытекает, что $\varphi_n = \varphi_0 = 0$. Поэтому $\sum \theta_i'' = \sum \theta_i'$.

Таким образом, любому элементу $\beta \in \pi(S^1)$ можно поставить в соответствие однозначно определенное целое число — его степень. Предлагаем читателю проверить непосредственным вычислением, что для любого целого числа m отображение $h_m: I \rightarrow S^1$, определенное формулой

$$h_m(t) = \cos 2\pi m t + i \sin 2\pi m t,$$

имеет степень m . Поэтому $\pi(S^1)$ — группа бесконечного порядка, и, следовательно, она бесконечная циклическая, что и требовалось доказать.

Замечание. Основная идея нашего изложения понятия степени элемента $\pi(S^1)$ будет усовершенствована и обобщена в гл. V при рассмотрении фундаментальной группы накрывающего пространства.

Из теоремы 5.1 вытекает, что фундаментальная группа любого пространства с окружностью в качестве деформационного ретракта является бесконечной циклической группой. Примерами таких пространств служат лист Мёбиуса, диск с выколотой точкой, плоскость с выколотой точкой, область на плоскости, ограниченная двумя концентрическими окружностями, и т. д. (см. упражнения в предыдущем разделе).

Упражнения

5.1. Докажите, исходя из определений, что отображение $\pi(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$, определенное соответствием $\beta \rightarrow \deg \beta$, есть гомоморфизм группы $\pi(S^1)$ в аддитивную группу целых чисел.

5.2. Дайте прямое доказательство (следуя в основном первой части доказательства теоремы 5.1) того, что если $\beta \in \pi(S^1)$ и $\deg \beta = 0$, то $\beta = 1$. (Замечание. Это иной способ доказательства теоремы 5.1.)

функций $g_1, \dots, g_n$) в евклидово n -пространство. Если мы сумеем найти подмножество X евклидова n -пространства, гомеоморфное E^n и такое, что функция h определена в X и $h(X) \subset X$, то из теоремы Брауэра получим, что функция h в X имеет неподвижную точку; легко видеть, что любая неподвижная точка функции h служит решением системы (2.6.1).

Теорему Брауэра можно обобщить для некоторых подмножеств функциональных пространств и затем применить для доказательства теорем существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными; для определенных типов нелинейных уравнений это один из самых мощных методов доказательства теорем существования.

Доказательство теоремы 6.1 (для $n \leq 2$). Сначала докажем, что для любого целого числа $n > 0$ из существования непрерывного отображения $f: E^n \rightarrow E^n$, не имеющего непо-

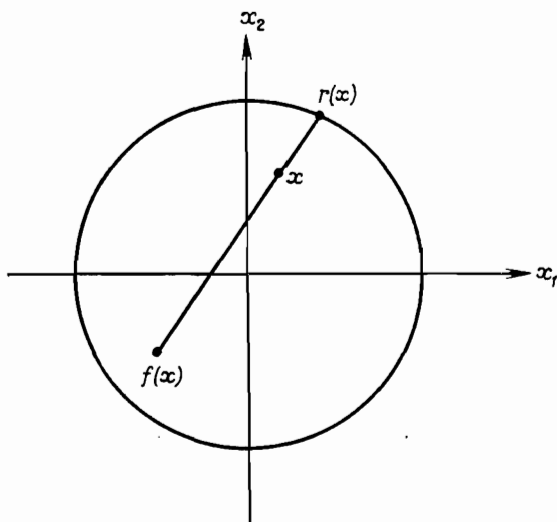


Рис. 2.5. Доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке.

движных точек, следует, что $(n-1)$ -сфера $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x|=1\}$ является ретрактом для E^n . Это делается с помощью следующей простой геометрической конструкции. Для любой точки $x \in E^n$ через $r(x)$ обозначим точку пересечения $(n-1)$ -сферы S^{n-1} с лучом, соединяющим точки $f(x)$ и x . На рис. 2.5 показан случай $n=2$. Используя векторные обозначения, легко написать формулу, выражающую $r(x)$ через $f(x)$. Из этой формулы видно,

что r — непрерывное отображение из E^n в S^{n-1} . Если $x \in S^{n-1}$, то $r(x) = x$. Поэтому r — требуемая ретракция.

Теперь мы придем к противоречию, если сумеем доказать, что S^{n-1} не является ретрактом для E^n . При $n = 1$ это ясно, так как множество E^1 связно, а S^0 нет. При $n = 2$ вспомним уже известные нам факты о фундаментальной группе ретрактов. Так как группа $\pi(S^1)$ — бесконечная циклическая, а группа $\pi(E^2)$ — тривиальная, то S^1 не может быть ретрактом для E^2 (см. обсуждение вопросов, связанных с ретрактами, в разд. 4).

7. Фундаментальная группа произведения пространств

В этом разделе мы докажем, что фундаментальная группа произведения двух пространств естественным образом изоморфна прямому произведению их фундаментальных групп, т. е.

$$\pi(X \times Y) \approx \pi(X) \times \pi(Y).$$

(Определение прямого произведения групп см. в разд. III.2.)

Пусть X , Y и A — топологические пространства, а $f: A \rightarrow X \times Y$ — отображение. Для любой точки $a \in A$ через $(f_1(a), f_2(a))$ обозначим координаты точки $f(a)$. Тогда f_1 и f_2 отображают A в X и Y соответственно, и хорошо известно, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны оба отображения f_1 и f_2 . Это основное свойство топологии прямого произведения. Следовательно, существует естественное взаимно однозначное соответствие между непрерывными отображениями $f: A \rightarrow X \times Y$ и парами непрерывных отображений $f_1: A \rightarrow X$, $f_2: A \rightarrow Y$. Обозначим через $p: X \times Y \rightarrow X$ и $q: X \times Y \rightarrow Y$ проекции пространства-произведения на его сомножители; тогда $f_1 = pf$ и $f_2 = qf$.

Применим эти рассуждения к случаю $A = I$ (где I — единичный интервал). Тогда получим, что существует естественное взаимно однозначное соответствие между путями $f: I \rightarrow X \times Y$ в пространстве-произведении и парами путей $f_1: I \rightarrow X$, $f_2: I \rightarrow Y$ в сомножителях. Как и прежде, $f_1 = pf$ и $f_2 = qf$. Это естественное соответствие обладает следующими очевидными, но важными свойствами:

- если $f, g: I \rightarrow X \times Y$ — пути с одной и той же начальной и конечной точками, то $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ (здесь $g_1 = pg$, $g_2 = qg$);
- пусть $f, g: I \rightarrow X \times Y$ — такие пути, что конечная точка пути f совпадает с начальной точкой пути g , и пусть $h = f \cdot g$; тогда $h_1 = f_1 \cdot g_1$ и $h_2 = f_2 \cdot g_2$, где $h_1 = ph$ и $h_2 = qh$.

Свойства (а) и (b) можно свести вместе, сказав, что естественное соответствие $f \leftrightarrow (f_1, f_2)$ совместимо с отношением эквивалентности между путями и произведением путей. Проверку справедливости этого утверждения предоставляем читателю.

Теперь применим эти рассуждения к изучению фундаментальной группы $\pi(X \times Y, (x, y))$ пространства-произведения. Пусть $p_*: \pi(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi(X, x)$, $q_*: \pi(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi(Y, y)$ — гомоморфизмы, индуцированные проекциями p и q . Из свойства (а) вытекает, что соответствие $\alpha \rightarrow (p_*\alpha, q_*\alpha)$ задает взаимно однозначное отображение множества $\pi(X \times Y, (x, y))$ в $\pi(X, x) \times \pi(Y, y)$, а из (b) вытекает, что это отображение сохраняет произведение, т. е. является изоморфизмом групп. Перечисленные результаты соберем в следующей теореме.

Теорема 7.1. *Фундаментальная группа $\pi(X \times Y, (x, y))$ пространства-произведения естественным образом изоморфна прямому произведению фундаментальных групп $\pi(X, x) \times \pi(Y, y)$ пространств-сомножителей. Их изоморфизм определяется сопоставлением с любым элементом $\alpha \in \pi(X \times Y, (x, y))$ упорядоченной пары $(p_*\alpha, q_*\alpha)$, где $p: X \times Y \rightarrow X$ и $q: X \times Y \rightarrow Y$ — проекции пространства-произведения на его сомножители.*

Очевидно, что теорему можно распространить на произведение любого конечного числа пространств.

Упражнения

7.1. Опишите структуру фундаментальной группы тора.

7.2. Докажите, что для любой точки $x_0 \in S^1$ подмножество $S^1 \times \{x_0\}$ является ретрактом произведения $S^1 \times S^1$, но не является его деформационным ретрактом.

7.3. Обобщите теорему 7.1, чтобы получить описание фундаментальной группы произведения бесконечного множества топологических пространств.

7.4. Пусть $i: X \rightarrow X \times Y$ и $j: Y \rightarrow X \times Y$ — отображения, определенные формулами $i(x) = (x, y_0)$ и $j(y) = (x_0, y)$, где $(x_0, y_0) \in X \times Y$ — фиксированная точка. Докажите, что соответствие $(\beta, \gamma) \rightarrow (i_*\beta) \cdot (j_*\gamma)$ задает изоморфизм группы $\pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ на $\pi(X \times Y, (x_0, y_0))$. [Указание. Докажите, что этот изоморфизм — обратный к изоморфизму, описанному в теореме 7.1.] В качестве следствия выведите, что элементы $i_*\beta$ и $j_*\gamma$ коммутируют, т. е. $(i_*\beta)(j_*\gamma) = (j_*\gamma)(i_*\beta)$.

7.5. Предположим, что G — топологическое пространство, $\mu: G \times G \rightarrow G$ — непрерывное отображение и $e \in G$ — такая точка, что $\mu(x, e) = \mu(e, x) = x$ для всех $x \in G$. (Важный пример: G — топологическая группа, e — единичный элемент и $\mu(x, y)$ для любых $x, y \in G$ есть произведение элементов x и y .) Пусть $i: G \rightarrow G \times G$ и $j: G \rightarrow G \times G$ определены так же, как в упражнении 7.4: $i(x) = (x, e)$, $j(x) = (e, x)$ для всех $x \in G$. Докажите, что $\mu_*[(i_*\beta)(j_*\gamma)] = \beta \cdot \gamma$ для всех $\beta, \gamma \in \pi(G, e)$. [Указание. Используйте упражнение 7.4 и рассмотрите сначала случай $\beta = 1$ или $\gamma = 1$; затем заметьте, что в $\pi(G, e) \times \pi(G, e)$ выполняется равенство $(\beta, \gamma) = (\beta, 1)(1, \gamma)$.] В качестве следствия выведите, что $\pi(G, e)$ — абелева группа.

7.6. Пусть G , e и μ те же, что в упражнении 7.5. Дополнительно предположим, что существует такое непрерывное отображение $c: G \rightarrow G$, что $\mu(x, c(x)) = \mu(c(x), x)$ для всех $x \in G$. (Важный пример: G — топологическая группа и $c(x) = x^{-1}$.) Докажите, что $c_*(\beta) = \beta^{-1}$ для всех $\beta \in \pi(G, e)$.

8. Гомотопический тип и гомотопическая эквивалентность пространств

Прежде чем приступить к доказательству нашей следующей теоремы, мы должны ввести предварительные понятия и некоторые результаты относительно топологии определенных подмножеств плоскости. Топологическое пространство называется *замкнутым диском*, если оно гомеоморфно множеству

$$E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\},$$

и *открытым диском*, если оно гомеоморфно множеству

$$U^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}.$$

Граница замкнутого диска — это его подмножество, соответствующее окружности S^1 при гомеоморфизме диска на E^2 ; можно доказать, что оно не зависит от выбора гомеоморфизма.

Рассмотрим несколько элементарных свойств дисков.

- (а) Любое компактное выпуклое подмножество E плоскости с непустой внутренностью является замкнутым диском.

Доказательство. Гомеоморфизм между E и E^2 можно выбрать так. Возьмем точку x_0 , принадлежащую внутренности множества E . Проведем в плоскости любой луч из точки x_0 ; его пересечение с E должно быть замкнутым интервалом с x_0 в качестве одной из концевых точек. Отобразим линейно этот интервал на единичный, расположенный на луче, параллельном нашему и выходящем из начала координат. Если проделать это с каждым лучом, выходящим из точки x_0 , то получим взаимно однозначное отображение из E в E^2 , которое, как можно доказать, непрерывно в обоих направлениях.

- (b) Пусть E_1 и E_2 — замкнутые диски с границами B_1 и B_2 соответственно. Тогда любое непрерывное отображение $f: B_1 \rightarrow B_2$ можно продолжить до непрерывного отображения $F: E_1 \rightarrow E_2$. Если f — гомеоморфизм, то и отображение F можно выбрать так, чтобы оно было гомеоморфизмом.

Доказательство. Из определения замкнутого диска ясно, что утверждение достаточно доказать в случае $E_1 = E_2 = E^2$ и $B_1 = B_2 = S^1$. Предоставляем это читателю.

- (с) Пусть E_1 — замкнутый диск, E_2 — факторпространство диска E_1 , построенное отождествлением замкнутого сег-

мента, принадлежащего границе диска E_1 , с точкой. Тогда факторпространство E_2 — также замкнутый диск.

Доказательство. На основании свойства (b) достаточно доказать это утверждение в частном случае замкнутого диска и сегмента, расположенного на его границе. Мы вольны выбрать этот частный случай так, как нам удобно. В качестве диска E_1 возьмем часть плоскости xy , ограниченную трапецией

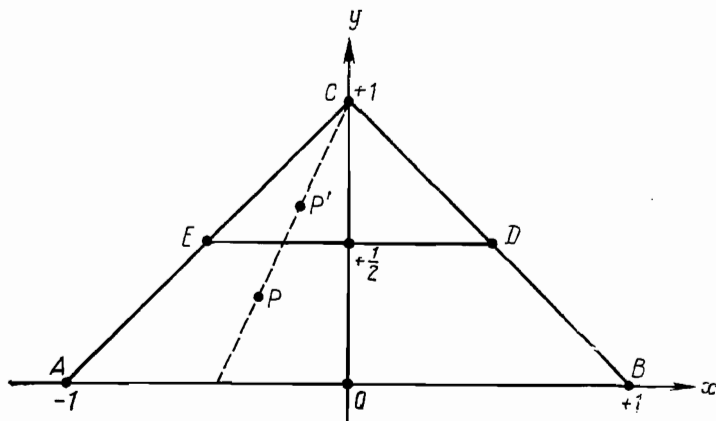


Рис. 2.6. Доказательство свойства (c).

$ABDE$, как показано на рис. 2.6, а в качестве диска E_2 — часть плоскости, ограниченную треугольником ABC . Определим отображение $f: E_1 \rightarrow E_2$ так, чтобы отрезок DE , принадлежащий границе диска E_1 , отображался в вершину C диска E_2 , а на всем оставшемся множестве отображение f было взаимно однозначным. Тогда доказательство будет закончено, если мы покажем, что пространство E_2 наделено фактортопологией, определенной отображением f .

Зададим отображение f условием, что для любой точки $P \in E_1$ три точки P , $P' = f(P)$ и $C = (0, 1)$ лежат на одной прямой и ордината точки P' в два раза больше ординаты точки P . Если (x, y) и (x', y') — координаты точек P и P' соответственно, то

$$x' = x \left(\frac{2y-1}{y-1} \right),$$

$$\left(0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right)$$

$$y' = 2y,$$

или

$$x = x' \left(\frac{y' - 2}{2y' - 2} \right), \quad (0 \leq y' < 1)$$

$$y = \frac{1}{2} y'.$$

Из первой пары формул следует, что отображение f непрерывно, а из второй, — что оно взаимно однозначно всюду, за исключением отрезка DE ; очевидно, что весь отрезок DE отображается в точку C . Так как пространство E_1 компактно, а пространство E_2 хаусдорфово, то f — замкнутое отображение, и, следовательно, топология в E_2 совпадает с фактортопологией.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы сформулировать и доказать ключевую лемму. Обозначим через D замкнутый диск, через B — его границу и через $g: I \rightarrow B$ — непрерывное отображение, при котором I наматывается на окружность ровно один раз, т. е. $g(0) = g(1) = d_0 \in B$, и g гомеоморфно отображает открытый интервал $(0, 1)$ на $B - \{d_0\}$. Пусть X — некоторое топологическое пространство.

Лемма 8.1. *Непрерывное отображение $f: B \rightarrow X$ можно продолжить до отображения $D \rightarrow X$ тогда и только тогда, когда петля $fg: I \rightarrow X$ эквивалентна постоянной петле в базисной точке $f(d_0)$.*

Доказательство. Сначала предположим, что отображение $f: B \rightarrow X$ можно продолжить до непрерывного отображения $F: D \rightarrow X$. Рассмотрим единичный квадрат $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ и зададим непрерывное отображение h границы этого квадрата в B формулами

$$h(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.8.1)$$

$$h(x, 1) = h(0, y) = h(1, y) = d_0$$

для $x \in I, y \in I$. На основании свойства (b) можно продолжить h до непрерывного отображения H единичного квадрата. Тогда из существования композиции отображений FN следует, что петля fg эквивалентна постоянному пути.

Теперь предположим, что петля fg эквивалентна постоянному пути. По определению это означает, что существует непрерывное отображение G единичного квадрата в X , для которого

$$G(x, 0) = f(g(x)),$$

$$G(x, 1) = G(0, y) = G(1, y) = f(d_0).$$

Так как G отображает верхнюю и две боковые стороны этого квадрата в единственную точку $f(d_0)$, то G индуцирует непрерывное отображение факторпространства квадрата (построенное отождествлением этих сторон с одной точкой) в X . По свойству (с) это факторпространство будет замкнутым диском, который можно взять в качестве D , а естественное отображение границы квадрата на факторпространство можно выбрать в качестве отображения h в формулах (2.8.1). Ясно, что индуцированное отображение диска D в X и будет требуемым продолжением отображения f .

При применении леммы 8.1 удобно допускать следующую вольность в терминологии. Будем говорить, что отображение $f: B \rightarrow X$ представляет класс эквивалентности петли fg .

Чтобы сформулировать теорему, предположим, что $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения, а $\varphi: X \times I \rightarrow Y$ — гомотопия, связывающая φ_0 и φ_1 , т. е. $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$ и $\varphi(x, 1) = \varphi_1(x)$. Возьмем базисную точку $x_0 \in X$. Отображения φ_0 и φ_1 индуцируют гомоморфизмы

$$\varphi_{0*}: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, \varphi_0(x_0)),$$

$$\varphi_{1*}: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, \varphi_1(x_0)).$$

Обозначим через γ гомотопический класс пути $t \rightarrow \varphi(x_0, t)$, $0 \leq t \leq 1$, в Y . Класс γ определяет изоморфизм $u: \pi(Y, \varphi_0(x_0)) \rightarrow \pi(Y, \varphi_1(x_0))$ по формуле

$$u(\alpha) = \gamma^{-1} \alpha \gamma, \quad \alpha \in \pi(Y, \varphi_0(x_0)).$$

Теорема 8.2. При сделанных предположениях диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & \pi(Y, \varphi_0(x_0)) \\ & \nearrow \varphi_{0*} & \downarrow u \\ \pi(X, x_0) & & \pi(Y, \varphi_1(x_0)) \\ & \searrow \varphi_{1*} & \end{array}$$

коммутативна.

Эта теорема естественно обобщает теорему 4.1.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \pi(X, x_0)$; надо доказать, что

$$\varphi_{1*}(\alpha) = \gamma^{-1}(\varphi_{0*}(\alpha))\gamma.$$

Выберем замкнутый путь $f: I \rightarrow X$, представляющий класс α , и рассмотрим отображение

$$g: I \times I \rightarrow Y,$$

определенное формулой

$$g(x, y) = \varphi(f(x), y).$$

Тогда для $x, y \in I$

$$g(x, 0) = \varphi_0(f(x)),$$

$$g(x, 1) = \varphi_1(f(x)),$$

$$g(0, y) = g(1, y) = \varphi(x_0, y).$$

Следовательно, отображение g на нижней стороне квадрата представляет $\varphi_{0*}(\alpha)$, на верхней $\varphi_{1*}(\alpha)$, а на двух боковых γ . При обходе границы квадрата отображение g представит класс $(\varphi_{0*}\alpha) \gamma (\varphi_{1*}\alpha)^{-1} \gamma^{-1}$. По лемме 8.1

$$(\varphi_{0*}\alpha) \gamma (\varphi_{1*}\alpha)^{-1} \gamma^{-1} = 1.$$

Отсюда вытекает требуемое соотношение (умножаем это равенство справа на $\gamma (\varphi_{1*}\alpha)$ и затем слева на γ^{-1}).

Определение. Два подпространства X и Y называются пространствами *одного и того же гомотопического типа*, если существуют такие непрерывные отображения (называемые *гомотопическими эквивалентностями*) $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$, что $gf \simeq \text{id}: X \rightarrow X$ и $fg \simeq \text{id}: Y \rightarrow Y$.

Очевидно, что гомеоморфные пространства являются пространствами одного и того же гомотопического типа, но обратное не верно.

Упражнение

8.1. Докажите, что если A — деформационный ретракт пространства X , то включение $i: A \rightarrow X$ будет гомотопической эквивалентностью. (В самом деле, первое из условий в определении деформационного ретракта, данном в разд. 4, здесь излишне; выкидывание этого условия ведет к понятию «деформационного ретракта в слабом смысле». Можно доказать, что для достаточно «хороших» пространств эти два понятия совпадают.)

Теорема 8.3. Если $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то для любой точки $x \in X$ гомоморфизм $f_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, f(x))$ является изоморфизмом.

Доказательство. Так как $gf \simeq \text{id}: X \rightarrow X$, получаем диаграмму (коммутативную по теореме 8.2)

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi(Y, f(x)) \\ & \searrow g_* & \downarrow f_* \\ & & \pi(X, gf(x)) \end{array}$$

Здесь u — изоморфизм, индуцированный некоторым путем, соединяющим точки x и $gf(x)$. Следовательно, f_* — мономорфизм, g_* — эпиморфизм.

Применяя те же рассуждения к гомотопии $fg \simeq \text{id}: Y \rightarrow Y$, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi(Y, f(x)) & & \\ g_* \downarrow & \searrow u & \\ \pi(X, gf(x)) & \longrightarrow & \pi(Y, fgf(x)) \end{array}$$

Здесь g_* — мономорфизм. Так как g_* — эпиморфизм и мономорфизм, то g_* — изоморфизм. Так как

$$g_* l_* = u,$$

а g_* и u — изоморфизмы, то f_* — изоморфизм.

С помощью этой теоремы мы сможем находить фундаментальные группы некоторых пространств и доказывать, что определенные пространства не являются пространствами одного и того же гомотопического типа (и, следовательно, не гомеоморфны).

Упражнение

8.2. Предположим, что G , μ и e удовлетворяют предположениям упражнения 7.5. Воспользуйтесь леммой 8.1 для непосредственного доказательства того, что $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$ при всех $\alpha, \beta \in \pi(G, e)$. [Указание. В качестве D возьмите квадрат и выберите отображение из B в G , представляющее $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Чтобы определить требуемое продолжение, используйте существование отображения μ .] Выведите отсюда, что группа $\pi(G, e)$ абелева.

ПРИМЕЧАНИЯ

Фундаментальная группа введена великим французским математиком Анри Пуанкаре в 1895 г. (*Analysis Situs*, *J. Ecole Polytechn.*, 1 (1895), 1—121). Понятие двух пространств одного и того же гомотопического типа введено в 1935—1936 гг. Витольдом Гуревичем в серии работ, состоящей из четырех статей, которые появились в *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*. В этих статьях Гуревич также ввел многомерные аналоги фундаментальной группы, называемые *гомотопическими группами*. С 1935 г. эти идеи Гуревича играют значительную роль в алгебраической топологии.

Читателя, интересующегося доказательством теорем существования в анализе с помощью теорем о неподвижной точке, мы отсылаем к книге Кронин (*Mathematical Surveys*, № 11, *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, Providence: American Mathematical Society, 1964).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, Гостехиздат, М., 1938, гл. VII.
2. Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, изд-во «Мир», М., 1967, гл. II и V.
3. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, изд-во «Наука», М., 1973.
4. Хилтон П., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, изд-во «Мир», М., 1966, гл. VI.

Глава III

СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ И СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

1. Введение

В предыдущих главах мы ввели фундаментальную группу пространства и определили ее строение в некоторых простейших случаях. Для более сложных случаев необходим более широкий словарь и лучшее знание теории групп, чтобы уметь описывать строение фундаментальной группы и пользоваться ее свойствами. Настоящая глава восполняет такую необходимость. Сначала рассмотрим случай абелевых групп, так как он проще. Затем обсудим общий случай необязательно абелевых групп. Результаты вполне аналогичны абелевому случаю, но возможности шире и в меньшей степени доступны интуиции.

Здесь вводятся три основных теоретико-групповых понятия: свободная группа, свободное произведение групп и представление групп посредством образующих и соотношений. Эти понятия используются на протяжении всей оставшейся части книги. Определения свободной группы и свободного произведения групп приводят к широко применяемому математическому понятию — так называемой «задаче универсального отображения», основной в гл. IV.

2. Слабое произведение абелевых групп

Возможно, читатель уже знаком с понятием *произведения*, или *прямого произведения*, или *декартова произведения* двух групп; определение довольно просто, и мы его здесь повторим. Пусть G_1 и G_2 — группы. Их *произведением*, обозначаемым через $G_1 \times G_2$, называется множество всех упорядоченных пар (g_1, g_2) , где $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, в котором операция умножения задана правилом

$$(g_1, g_2) (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2).$$

Легко проверить, что $G_1 \times G_2$ — группа.

Аналогично определяется для любого положительного целого числа n произведение n групп $G_1, \dots, G_n$; оно обозначается

$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ или

$$\prod_{i=1}^n G_i.$$

Тем же способом можно определить произведение бесконечной последовательности групп $G_1, G_2, G_3, \dots$, обозначаемое

$$\prod_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Каждый раз получается группа, являющаяся как множество декартовым произведением групп как множеств, причем умножение определено покомпонентно. Читатель, возможно, вспомнит здесь, что в теории множеств корректно определено декартово произведение *любого* (непустого) множества множеств; нет необходимости ограничиваться случаем счетного числа множеств. Аналогично можно определить произведение *любого* (непустого) множества групп $\{G_i: i \in I\}$, где I — некоторое множество индексов, счетное или нет (здесь I не обозначает единичный интервал). Сначала надо построить теоретико-множественное произведение, а затем покомпонентно определить умножение: для любых элементов $g, g' \in \prod_{i \in I} G_i$ и любого индекса $i \in I$ зададим i -ю компоненту произведения gg' формулой

$$(gg')_i = (g_i)(g'_i),$$

т. е. i -я компонента произведения равна произведению i -х компонент сомножителей.

Пусть $\{G_i: i \in I\}$ — множество групп и $G = \prod_{i \in I} G_i$ — их произведение.

Определение. *Слабым произведением*¹⁾ множества $\{G_i: i \in I\}$ называется подгруппа произведения G , состоящая из всех элементов $g \in G$, для которых g_i — тривиальный элемент группы G_i для всех, кроме конечного числа, индексов i . Очевидно, что если $\{G_i: i \in I\}$ — конечное множество групп, то их произведение и слабое произведение совпадают.

Если G — произведение или слабое произведение множества $\{G_i: i \in I\}$, то для каждого индекса $i \in I$ существует *естествен-*

¹⁾ В случае когда каждая группа G_i абелева и групповая операция — сложение, слабое произведение обычно называется «прямой суммой». В этом определении мы не требуем, чтобы любые две группы из множества $\{G_i\}$ были неизоморфны. Может даже встретиться случай, когда все группы этого множества изоморфны некоторой заданной группе.

ный мономорфизм $\varphi_i: G_i \rightarrow G$, определенный по следующему правилу: для любого элемента $x \in G_i$ и любого индекса $j \in I$

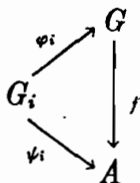
$$(\varphi_i x)_j = \begin{cases} x, & \text{если } j = i, \\ 1, & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

Приведем теорему, характеризующую слабое произведение G и мономорфизмы φ_i в случае, когда все группы G_i абелевы.

Теорема 2.1. Если $\{G_i: i \in I\}$ — множество абелевых групп и G — их слабое произведение, то для любой абелевой группы A и любого множества гомоморфизмов

$$\psi_i: G_i \rightarrow A, \quad i \in I,$$

существует единственный гомоморфизм $f: G \rightarrow A$, такой, что для любого индекса $i \in I$ диаграмма



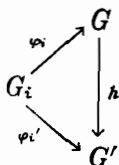
коммутативна.

Доказательство. Если заданы отображения ψ_i , определим f по следующему правилу: для любого элемента $x \in G$ пусть $f(x)$ будет произведением элементов $\psi_i(x_i)$ при всех $i \in I$. Так как $x_i = 1$ для всех, кроме конечного числа, индексов i , то это произведение конечно, а так как все группы абелевы, то порядок сомножителей несуществен. Следовательно, элемент $f(x)$ определен корректно и нетрудно проверить, что f — гомоморфизм, превращающий нашу диаграмму в коммутативную. Очевидно, что f — единственный гомоморфизм, обладающий этим свойством.

Теперь докажем, что теорема 2.1 действительно характеризует слабое произведение абелевых групп.

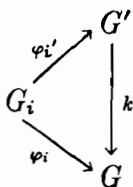
Предложение 2.2. Пусть $\{G_i\}$ и $\varphi_i: G_i \rightarrow G$ те же, что в теореме 2.1; пусть G — любая абелева группа, а $\varphi'_i: G_i \rightarrow G'$ — любое множество таких гомоморфизмов, что справедливо заключение теоремы 2.1, только G и φ_i заменены на G' и φ'_i соответственно. Тогда существует единственный изоморфизм $h: G \rightarrow G'$, такой,

что для любого индекса $i \in I$ диаграмма

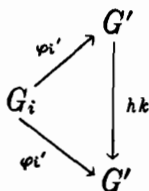
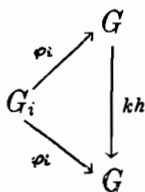


коммутативна.

Доказательство. Существование гомоморфизма $h: G \rightarrow G'$, превращающего диаграмму в коммутативную, обеспечивается теоремой 2.1. Так как по предположению теорема 2.1 также справедлива для G' и $\varphi_{i'}$, то существует единственный гомоморфизм $k: G' \rightarrow G$, такой, что для любого индекса $i \in I$ диаграмма



коммутативна. Отсюда следует, что для любого индекса $i \in I$ коммутативны диаграммы



Однако эти две диаграммы должны остаться коммутативными, если в первой заменить отображение kh тождественным отображением $G \rightarrow G$, а во второй — отображение hk тождественным отображением $G' \rightarrow G'$. Теперь, используя утверждение о единственности в теореме 2.1, заключаем, что kh и hk — тождественные отображения. Следовательно, h и k — взаимно обратные изоморфизмы.

Попробуем осмыслить характеризацию слабого произведения, данную теоремой 2.1. В качестве претендента на какое-то «произведение» абелевых групп G_i можно рассмотреть любую другую абелеву группу A с определенными гомоморфизмами $\psi_i: G_i \rightarrow A$; тогда в этой теореме утверждается, что среди всех претендентов слабое произведение G «наиболее свободно» в том смысле, что существует гомоморфизм группы G в A , коммути-

рующий с φ_i и ψ_i для всех i . Здесь слова «наиболее свободно» употребляются в значении «удовлетворяет как можно меньшему числу соотношений», и общая философия состоит в том, что если некоторые соотношения выполняются в группе G , то они также будут выполняться в любом ее гомоморфном образе; разумеется, в этом образе могут выполняться еще и дополнительные соотношения. Те же рассуждения применимы и для других алгебраических объектов, таких, как кольца и т. д.

Как мы увидим, аргументация, использованная при доказательстве предложения 2.2, почти дословно переносится на многие другие случаи.

В силу того что слабое произведение G множества $\{G_i\}$ абелевых групп полностью характеризуется свойствами мономорфизмов $\varphi_i: G_i \rightarrow G$, сформулированными в теореме 2.1, можно было бы пренебречь тем фактом, что G — подгруппа группы $\prod_{i \in I} G_i$, и вместо

этого сосредоточить внимание на группе G и гомоморфизмах φ_i . Кроме того, так как каждое отображение φ_i есть мономорфизм, можно отождествить группы G_i с их образами в G при отображениях φ_i и, если это удобно, рассматривать φ_i как отображения включения. В этом случае, называя G слабым произведением подгрупп G_i , подразумевают, что каждое отображение φ_i есть отображение включения.

3. Свободные абелевы группы

Пусть S — подмножество группы G . Говорят, что S порождает G , если каждый элемент группы G можно записать в виде произведения положительных и отрицательных степеней элементов из S . Множество S называют *порождающим* множеством, а его элементы — *образующими* группы G . (Эквивалентное условие состоит в том, что S не содержится ни в одной собственной подгруппе группы G .) Например, если G — циклическая группа порядка n ,

$$G = \{x, x^2, x^3, \dots, x^n = 1\},$$

то множество $S = \{x\}$ порождает G .

Если S порождает G , то некоторые произведения элементов из S могут совпасть с единичным элементом группы G . Например,

(а) если $x \in S$, то $xx^{-1} = 1$,

(б) если G — циклическая группа порядка n , порожденная одним элементом x , то $x^n = 1$.

Такое равенство произведения элементов из S единице (а также левую часть равенства) называют *соотношением* между элементами порождающего множества S . Грубо говоря, можно различить два типа соотношений между образующими: *тривиальные соотноше-*

ния (такие, как в примере (а)), непосредственно вытекающие из аксиом группы, так что не важно, что выбрано в качестве G и S , и нетривиальные соотношения (такие, как в примере (b)), не вытекающие из аксиом группы, а определяемые конкретным выбором группы G и множества S .

Эти понятия естественным образом приводят к следующему определению. Пусть S — множество образующих группы G . Группа G называется *свободно порожденной множеством S* или *свободной над S* , если между элементами из S не существует нетривиальных соотношений. Например, если G — бесконечная циклическая группа, состоящая из всех положительных и отрицательных степеней элемента x , то G — свободная группа над множеством $S = \{x\}$.

Эти понятия также наводят на мысль, что можно полностью описать группу, перечисляя элементы порождающего множества S и нетривиальные соотношения между ними.

Описанные идеи как бы витали среди специалистов по теории групп в течение длительного времени. К сожалению, когда они формулируются так, как это сделано выше, они теряют математическую точность. Например, какой точный смысл вкладывается в понятие нетривиального соотношения? Оно не может быть элементом группы G в силу того, что все соотношения, рассматриваемые как элементы группы G , равны единице. Точно так же, при каких условиях два соотношения должны считаться одинаковыми? Например, в циклической группе порядка n соотношения

$$\begin{aligned}x^n &= 1, \\x^{n+1}x^{-1} &= 1\end{aligned}$$

должны считаться одинаковыми или разными?

Мы хотели бы подчеркнуть, что для математиков нелегко было найти совершенно удовлетворительный и точный путь разрешения этих вопросов. К счастью, в последние годы такой путь все же был найден. Он обладает тем преимуществом, что применим не только к группам, но также и к другим алгебраическим объектам, например кольцам, и даже ко многим ситуациям в других областях математики. И как часто случается в математике, окончательно принятый способ кажется неочевидным и обходным¹⁾. Этот способ определения исходит из следующих довольно простых наблюдений.

(1) Предположим, что S — множество образующих группы G и $f: G \rightarrow G'$ — эпиморфизм, т. е. G' — гомоморфный образ груп-

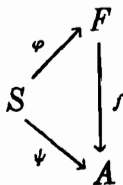
¹⁾ Аналогичная ситуация встречается, когда в анализе дают точное определение предела. Язык ε , δ , ставший сегодня стандартным, кажется довольно далеким от нашего интуитивного представления о том, как переменная величина стремится к своему пределу.

пы G . Тогда $f(S)$ будет множеством образующих для G' . Кроме того, любое соотношение между элементами из S выполняется также и для элементов из $f(S)$. Таким образом, группа G' удовлетворяет по крайней мере тем же соотношениям, что и G (и, кроме того, еще некоторым).

(2) Предположим, что S — множество образующих группы G и $f: G \rightarrow G'$ — гомоморфизм. Тогда f полностью определяется его сужением на множество S . Однако мы не утверждаем, что любое отображение $g: S \rightarrow G'$ можно продолжить до гомоморфизма $f: G \rightarrow G'$ (хотелось бы, чтобы читатель сам построил контрпример). Интуитивно причина ясна: для данного отображения $g: S \rightarrow G'$ могут выполняться нетривиальные соотношения между элементами из S , которые не выполняются между элементами из $g(S)$.

Сейчас мы дадим точное определение свободной абелевой группы над данным множеством S ; в разд. 5 рассмотрим случай общих (т. е. необязательно абелевых) групп. Случай абелевых групп обсуждается сначала, так как он проще.

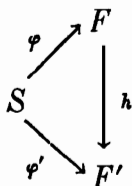
Определение. Пусть S — произвольное множество. Свободной абелевой группой над множеством S называется абелева группа F вместе с такой функцией $\varphi: S \rightarrow F$, что для любой абелевой группы A и любой функции $\psi: S \rightarrow A$ существует такой единственный гомоморфизм $f: F \rightarrow A$, что диаграмма



коммутативна.

Прежде всего покажем, что это определение на самом деле характеризует свободные абелевы группы над данным множеством S .

Предложение 3.1. Пусть F и F' — свободные абелевы группы над множеством S , заданные вместе с функциями $\varphi: S \rightarrow F$ и $\varphi': S \rightarrow F'$ соответственно. Тогда существует такой единственный изоморфизм $h: F \rightarrow F'$, что диаграмма



коммутативна.

Доказательство. Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 2.2; предоставляем его читателю.

Следует подчеркнуть, что пока мы дали только определение; вовсе не ясно, существует ли свободная абелева группа F над данным множеством S . Более того, если даже F существует, отображение φ , быть может, необязательно взаимно однозначно или F не порождается подмножеством $\varphi(S)$ в смысле определения, данного в начале этого раздела. Мы ответим на все эти вопросы, доказав существование группы F и полностью выяснив ее строение.

Упражнение

3.1. Докажите, исходя из определения, что $\varphi(S)$ порождает F . [Указание. Исследуйте подгруппу F' группы F , порожденную множеством $\varphi(S)$.]

В качестве первого шага рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что $\{S_i: i \in I\}$ — семейство непустых подмножеств множества S , попарно непересекающихся и таких, что

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

Для каждого индекса $i \in I$ пусть F_i будет свободной абелевой группой над множеством S_i , заданной вместе с функцией $\varphi_i: S_i \rightarrow F_i$. Обозначим через F слабое произведение групп F_i для всех $i \in I$, а через $\eta_i: F_i \rightarrow F$ — естественный мономорфизм. Так как S_i попарно не пересекаются, можно определить функцию $\varphi: S \rightarrow F$ формулой

$$\varphi|S_i = \eta_i \varphi_i.$$

Предложение 3.2. При сделанных предположениях F — свободная группа над множеством S , заданная вместе с функцией $\varphi: S \rightarrow F$.

Грубо говоря, это предложение означает, что слабое произведение любого множества свободных абелевых групп является свободной абелевой группой.

Доказательство. Пусть A — абелева группа, заданная вместе с функцией $\psi: S \rightarrow A$. Надо доказать, что существует единственный гомоморфизм $f: F \rightarrow A$, для которого $\psi = f\varphi$. Для каждого индекса i через $\psi_i: S_i \rightarrow A$ обозначим сужение функции ψ на подмножество S_i . Так как F_i — свободная абелева группа на множестве S_i , то существует такой единственный гомоморфизм

$f_i: F_i \rightarrow A$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & F_i \\ \nearrow \varphi_i & & \downarrow f_i \\ S_i & & A \\ \searrow \psi_i & & \end{array} \quad (3.3.1)$$

коммутативна. Учитывая основное свойство слабого произведения групп (теорема 2.1), видим, что существует такой единственный гомоморфизм $f: F \rightarrow A$, что для любого индекса i диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ \nearrow \eta_i & & \downarrow f \\ F_i & & A \\ \searrow f_i & & \end{array} \quad (3.3.2)$$

коммутативна. Эти две диаграммы можно объединить в одну:

$$\begin{array}{ccccc} S_i & \xrightarrow{\varphi_i} & F_i & \xrightarrow{\eta_i} & F \\ & \searrow \psi_i & \downarrow f_i & \nearrow f & \\ & & A & & \end{array} \quad (3.3.3)$$

Так как $\varphi \mid S_i = \eta_i \varphi_i$, то для любого индекса i коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S_i & \xrightarrow{\varphi_i \mid S_i} & F \\ \searrow \psi_i & & \nearrow f \\ & & A \end{array} \quad (3.3.4)$$

И, наконец, так как $\psi_i \mid S_i$ для всех i и $S = \bigcup S_i$, то $\psi = f\varphi$.

Для доказательства единственности предположим, что $f: F \rightarrow A$ — любой гомоморфизм, обладающий требуемым свойством. Так как $\eta_i: F_i \rightarrow F$ — *мономорфизм*, то существует такой единственный гомоморфизм $f_i: F_i \rightarrow A$, что диаграмма (3.3.2) коммутативна. Отсюда следует коммутативность диаграммы (3.3.1) для каждого индекса i :

$$f_i \varphi_i = f \eta_i \varphi_i = f(\varphi \mid S_i) = \psi \mid S_i = \psi_i.$$

Так как F_i — свободная абелева группа над $\dot{S}_i$ (вместе с функцией φ_i), то каждый гомоморфизм f_i единствен. В силу того что для каждого индекса i диаграмма (3.3.2) коммутативна и F — слабое произведение групп F_i , гомоморфизм f единствен. Доказательство закончено.

Теперь применим эту теорему. Предположим, что

$$S = \{x_i: i \in I\}.$$

Для каждого индекса i обозначим через S_i подмножество $\{x_i\}$, состоящее только из одного элемента, и пусть F_i — бесконечная циклическая группа, состоящая из всех положительных и отрицательных степеней элемента x_i :

$$F_i = \{x_i^n: n \in \mathbb{Z}\}.$$

Обозначим через $\varphi_i: S_i \rightarrow F_i$ отображение включения, т. е. $\varphi_i(x_i) = x_i^1$. Ясно, что F_i — свободная абелева группа над множеством S_i . Таким образом, выполняются все предположения предложения 3.2. Поэтому заключаем, что свободная абелева группа над любым множеством S является слабым произведением множества бесконечных циклических групп, причем мощность этого множества равна мощности множества S .

Так как F — слабое произведение групп F_i , то любой элемент $g \in F$ имеет следующий вид: для любого индекса i компонента g_i равна $x_i^{n_i}$, где $n_i \in \mathbb{Z}$ и $n_i = 0$ для всех (кроме конечного числа) индексов i . Кроме того, функции φ_i определяются так: для любого индекса $j \in I$

$$(\varphi x_i)_j = \begin{cases} x_i^1, & \text{если } i = j, \\ x_i^0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Из этой формулы ясно, что φ — взаимно однозначное отображение.

Так как отображение φ взаимно однозначно, можно, если угодно, отождествить каждый элемент $x_i \in S$ с его образом $\varphi(x_i) \in F$. Тогда S станет подмножеством в F и каждый элемент $g \neq 1$ группы F можно записать в виде

$$g = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_k}^{n_k}, \quad (3.3.5)$$

где все индексы $i_1, i_2, \dots, i_k$ различны, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ — целые числа, все не равные нулю. Эта запись элемента g единственна с точностью до порядка сомножителей. Кроме того, каждое такое произведение элементов x_i представляет единственный элемент $g \neq 1$ группы F . Отсюда следует, что F порождается своим подмножеством $S = \varphi(S)$.

Отождествление S и $\varphi(S)$ — это обычное явление при изучении свободных абелевых групп. Когда оно сделано, $\varphi: S \rightarrow F$ становится отображением включения и зачастую о нем даже не упоминают.

При другом подходе к свободным абелевым группам определяют абелеву группу F как свободную группу над ее подмножеством $\{x_i: i \in I\} \subset F$ (т. е. как группу, удовлетворяющую тому условию, что каждый элемент $g \neq 1$ в ней представляется единственным образом в виде (3.3.5) с дополнительной оговоркой, что представление (3.3.5) единственно с точностью до порядка сомножителей). В самом деле, этот подход был бы, вероятно, легче того, который мы избрали. Однако, следуя ему, мы могли бы оказаться в невыгодном положении при переходе к неабелевым группам и другим интересующим нас ситуациям.

Одну из причин, почему так важны свободные абелевы группы, выясняет следующее предложение.

Предложение 3.3. *Любая абелева группа является гомоморфным образом свободной абелевой группы, т. е. для данной абелевой группы A существует свободная абелева группа F и эпиморфизм $f: F \rightarrow A$.*

Доказательство. Доказательство очень простое. Пусть $S \subset A$ — множество образующих группы A (например, можно было бы взять $S = A$), а F — свободная группа над множеством S , заданная вместе с функцией $\varphi: S \rightarrow F$. Обозначим через $\psi: S \rightarrow A$ отображение включения. По определению существует такой гомоморфизм $f: F \rightarrow A$, что $f\varphi = \psi$. Отсюда вытекает, что гомоморфизм f должен быть эпиморфизмом, поскольку множество S выбрано в качестве множества образующих группы A .

Это предложение позволяет придать точный смысл понятию «нетривиального соотношения между элементами из S », упомянувшемуся ранее. Предположим, что A , S , F , f имеют только что описанный смысл, и определим любой элемент $r \neq 1$ ядра отображения f как нетривиальное соотношение между элементами множества S . Если $\{r_i: i \in I\}$ — любое множество этих соотношений и r — элемент подгруппы группы F , порожденной элементами r_i , то говорят, что соотношение r есть *следствие* соотношений r_i . Отсюда вытекает, что r можно представить в виде произведения элементов r_i и обратных к ним. Если множество $\{r_i: i \in I\}$ порождает ядро отображения f , то с точностью до изоморфизма группа A полностью определяется множеством образующих S и множеством соотношений $\{r_i: i \in I\}$, т. е. группа A изоморфна факторгруппе группы F по подгруппе, порожденной элементами r_i .

Ясно, что если S и S' — множества одинаковой мощности, а F и F' — свободные абелевы группы над S и S' соответственно,

то F и F' изоморфны. Покажем, что верно и обратное утверждение, по крайней мере в случае конечных множеств. Для этого введем следующее обозначение. Если G — любая группа и n — любое положительное число, то через G^n обозначим подгруппу группы G , порожденную множеством $\{g^n: g \in G\}$. Если группа G абелева, то множество $\{g^n: g \in G\}$ всегда будет подгруппой.

Лемма 3.4. Пусть F — свободная абелева группа над множеством, состоящим из k элементов. Тогда факторгруппа F/F^n является конечной группой порядка n^k .

Доказательство. Доказательство предоставляем читателю; оно не трудно, если использовать описанную выше точную структуру свободных абелевых групп.

Следствие 3.5. Пусть S и S' — конечные множества, содержащие различное число элементов, а F и F' — свободные абелевы группы над S и S' соответственно. Тогда F и F' неизоморфны.

Доказательство. Любой изоморфизм между F и F' должен был бы индуцировать изоморфизм между факторгруппами F/F^n и F'/F'^n , что в силу леммы 3.4 невозможно.

Упражнение

3.2. Докажите, что следствие остается верным, если S — конечное множество, а S' — бесконечное.

Пусть F — свободная абелева группа над множеством S . Мощность множества S называется *рангом* группы F . Мы доказали, что две свободные абелевы группы изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же ранг, по крайней мере в случае, когда одна из них конечного ранга.

Закончим этот раздел об абелевых группах кратким обсуждением структуры конечно порожденных абелевых групп. Пусть A — абелева группа; легко видеть, что множество всех элементов группы A , имеющих конечный порядок, образует подгруппу, называемую *подгруппой кручения* группы A . Если подгруппа кручения состоит из единственного элемента 1, то A называется *абелевой группой без кручения*. С другой стороны, если каждый элемент из A имеет конечный порядок, то A называется *группой кручения*. Если T — подгруппа кручения, то очевидно, что факторгруппа A/T — группа без кручения. Ясно, что если A и A' изоморфны, то изоморфны и их подгруппы кручения T и T' , и их факторгруппы без кручения A/T и A'/T' . Обратное утверждение, вообще говоря, неверно; если $T \approx T'$ и $A/T \approx A'/T'$, то необязательно $A \approx A'$. Для абелевых групп, порожденных конечным подмножеством, справедлива следующая теорема, полностью описывающая их структуру.

Теорема 3.6. (а) *Предположим, что A — конечно порожденная абелева группа, а T — ее подгруппа кручения. Тогда T и A/T также конечно порождены и группа A изоморфна прямому произведению $T \times A/T$. Таким образом, структура группы A полностью определяется ее подгруппой кручения T и ее факторгруппой без кручения A/T .* (б) *Каждая конечно порожденная абелева группа без кручения является свободной абелевой группой конечного ранга.* (с) *Каждая конечно порожденная абелева группа T , совпадающая со своей подгруппой кручения, изоморфна произведению $C_1 \times \dots \times C_n$ конечных циклических групп C_i порядка e_i , где e_i — делитель числа e_{i+1} для $i = 1, 2, \dots, n-1$. Кроме того, целые числа $e_1, e_2, \dots, e_n$ определяются однозначно группой кручения T и полностью определяют ее структуру.*

Числа $e_1, e_2, \dots, e_n$ называются коэффициентами кручения группы T . Более общо, если T — подгруппа кручения группы A , они называются коэффициентами кручения группы A . Аналогично ранг свободной группы A/T называется рангом группы A . Применяя эту терминологию, можно подытожить теорему 3.6, заявив, что ранг и коэффициенты кручения составляют полный набор инвариантов конечно порожденной абелевой группы. В теореме 3.6 утверждается, что каждая конечно порожденная абелева группа представляет собой прямое произведение циклических групп. Отметим, что конечно порожденная группа кручения есть группа конечного порядка.

Здесь будет уместно несколько пояснить упоминающиеся в теореме 3.6 изоморфизмы. Эти изоморфизмы не являются естественными и не определены однозначно. Обычно в каждом случае для рассматриваемого изоморфизма существует много различных выборов, и они одинаково хороши.

Теорема 3.7. *Пусть F — свободная абелева группа над множеством S , а F' — ее подгруппа. Тогда F' — свободная абелева группа над множеством S' , мощность которого не больше мощности множества S .*

Хотя доказательства теорем 3.6 и 3.7 нетрудны, мы их не приводим, так как, строго говоря, они связаны с изучением линейной алгебры и модулей над областью главных идеалов.

Упражнения

3.3. Приведите пример абелевой группы без кручения, не являющейся свободной.

3.4. Пусть абелева группа A равна произведению двух циклических групп порядков 12 и 18 соответственно. Какие коэффициенты кручения у группы A ? (Не забудьте, что коэффициенты кручения должны удовлетворять условию делимости.)

3.5. Приведите пример, показывающий, что в теореме 3.7 подмножество $S \subset F$ и подгруппа $F' \subset F$ могут не пересекаться даже и тогда, когда мощности множеств S и S' равны.

4. Свободные произведения групп

Свободное произведение групп совершенно аналогично слабому произведению абелевых групп в случае, когда перемножаемые абелевы группы заменяются любыми группами. (Подчеркнем, что группы, рассматриваемые в этом разделе, могут быть как абелевыми, так и неабелевыми, если только не оговаривается противное.)

Определение. Пусть $\{G_i: i \in I\}$ — множество групп и для каждого индекса i задан гомоморфизм φ_i группы G_i в фиксированную группу G . Группа G называется *свободным произведением* групп G_i (по отношению к гомоморфизмам φ_i), если выполняется следующее условие: для любой группы H и любых гомоморфизмов

$$\psi_i: G_i \rightarrow H, \quad i \in I,$$

существует такой единственный гомоморфизм $f: G \rightarrow H$, что для любого индекса $i \in I$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \varphi_i & \downarrow f \\ G_i & & \\ & \searrow \psi_i & \downarrow \\ & & H \end{array}$$

коммутативна.

Справедливо утверждение о единственности свободных произведений.

Предложение 4.1. Пусть G и G' — свободные произведения множества групп $\{G_i: i \in I\}$ (по отношению к гомоморфизмам $\varphi_i: G_i \rightarrow G$ и $\varphi'_i: G_i \rightarrow G'$ соответственно). Тогда существует такой единственный изоморфизм $h: G \rightarrow G'$, что для любого индекса $i \in I$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \varphi_i & \downarrow h \\ G_i & & \\ & \searrow \varphi'_i & \downarrow \\ & & G' \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Доказательство почти дословно повторяет доказательство предложения 2.2.

Хотя мы определили свободные произведения групп и доказали их единственность, мы не доказали, что они всегда существуют. Покажем сейчас, что каждый из гомоморфизмов φ_i в определении свободного произведения групп является мономорфизмом и свободное произведение порождается объединением образов $\varphi_i(G_i)$, а также подробнее исследуем алгебраическое строение свободного произведения.

Теорема 4.2. Для любого множества групп $\{G_i: i \in I\}$ существует их свободное произведение.

Доказательство. Определим слово над группами G_i как конечную последовательность $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_k для всех $k = 1, 2, \dots, n$ принадлежит одной из групп G_i , любые два последовательных члена этой последовательности принадлежат разным группам и ни один член не является единичным элементом никакой из групп G_i . Число n назовем длиной слова. Введем также пустое слово, т. е. единственное слово длины 0. Множество всех слов обозначим через W .

Теперь для каждого индекса i определим действие слева группы G_i на множестве W (см. приложение В). Пусть $g \in G_i$ и $(x_1, \dots, x_n) \in W$; требуется определить $g(x_1, \dots, x_n)$.

Случай 1: $x_1 \notin G_i$. Тогда если $g \neq 1$, то

$$g(x_1, \dots, x_n) = (g, x_1, \dots, x_n).$$

Действие g на пустом слове зададим аналогичной формулой, т. е. $g(\) = g$. Если $g = 1$, то

$$g(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Случай 2: $x_1 \in G_i$. Тогда

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} (gx_1, x_2, \dots, x_n), & \text{если } gx_1 \neq 1, \\ (x_2, \dots, x_n), & \text{если } gx_1 = 1. \end{cases}$$

(Если $gx_1 = 1$ и $n = 1$, то понятно, что $g(x_1)$ — пустое слово.)

Мы должны проверить, что для введенного действия группы G_i на W выполняются требования, предъявляемые к левым операциям, т. е. для любого слова w

$$\begin{aligned} 1w &= w, \\ (gg')w &= g(g'w). \end{aligned}$$

Эта проверка тривиальна.

Ясно, что каждая из групп G_i действует эффективно ¹⁾. Следовательно, каждый элемент g группы G можно рассматривать как перестановку множества W , а G_i — как подгруппу группы перестановок множества W (см. приложение В). Обозначим через G подгруппу группы всех перестановок множества W , порожденную объединением всех G_i . Тогда G содержит любую группу G_i в качестве своей подгруппы. Пусть

$$\varphi_i: G_i \rightarrow G$$

обозначает отображение включения.

Любой элемент, принадлежащий G , можно представить в виде конечного произведения элементов из различных подгрупп G_i . Если два последовательных сомножителя в этом произведении принадлежат одной и той же подгруппе G_i , то очевидно, что их можно заменить одним. Таким образом, любой элемент $g \neq 1$ группы G можно представить в виде конечного произведения элементов из всех подгрупп G_i в *редуцированном виде*, т. е. так, что никакие два последовательных сомножителя не принадлежат одной и той же группе и ни один из сомножителей не является единичным элементом. Мы утверждаем, что *представление в редуцированном виде любого элемента $g \neq 1$ группы G единственно*: если

$$g = g_1 g_2 \dots g_m = h_1 h_2 \dots h_n$$

— два представления в редуцированном виде, то $m = n$ и $g_i = h_i$ для $1 \leq i \leq m$. Чтобы это увидеть, рассмотрим действие перестановок $g_1 g_2 \dots g_m$ и $h_1 h_2 \dots h_n$ на пустом слове; результатом будут слова $(g_1, g_2, \dots, g_m)$ и $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ соответственно. Наше утверждение вытекает из того, что эти два слова должны совпадать.

Ясно, как получить элемент, обратный к элементу из G , записанному в редуцированном виде, и произведение двух элементов в редуцированном виде.

Теперь легко проверить, что в действительности G — свободное произведение групп G_i по отношению к гомоморфизмам φ_i . Для этого предположим, что H — любая группа, а $\psi_i: G_i \rightarrow H$, $i \in I$, — любое множество гомоморфизмов. Определим следующим образом функцию $f: G \rightarrow H$. Представим любой элемент $g \neq 1$ в редуцированном виде

$$g = g_1 g_2 \dots g_m, \quad g_k \in G, \quad 1 \leq k \leq m,$$

и положим

$$f(g) = (\psi_{i_1} g_1) (\psi_{i_2} g_2) \dots (\psi_{i_m} g_m).$$

¹⁾ То есть никакой элемент $g \in G$, кроме единичного, не оставляет на месте всех элементов множества W . — *Прим. ред.*

Разумеется, мы считаем, что $f(1) = 1$. Ясно, что f — гомоморфизм, который все требуемые диаграммы делает коммутативными. Также очевидно, что f — единственный гомоморфизм, обладающий этим свойством. Теорема доказана.

Так как гомоморфизмы $\varphi_i: G_i \rightarrow G$ являются мономорфизмами, обычно каждую группу G_i отождествляют с ее образом при отображении φ_i и рассматривают ее как подгруппу свободного произведения. В этом случае φ_i становится отображением включения и обычно отпадает необходимость явно его упоминать.

Из доказательства теоремы 4.2 следует запомнить два важнейших факта:

- (а) любой элемент $g \neq 1$ свободного произведения можно представить единственным образом как произведение в редуцированном виде элементов из групп G_i ;
- (б) правила перемножения таких произведений в редуцированном виде (и перехода к обратному элементу) очевидны и естественны.

Эти факты позволяют уяснить строение свободного произведения групп.

Пример

4.1. Пусть G_1 и G_2 — циклические группы порядка 2, $G_1 = \{1, x_1\}$ и $G_2 = \{1, x_2\}$. Тогда любой элемент $g \neq 1$ их свободного произведения можно единственным образом записать в виде произведения x_1 и x_2 с чередующимися x_1 и x_2 . Например,

$$x_1, x_1x_2, x_1x_2x_1, x_1x_2x_1x_2, \dots$$

или

$$x_2, x_2x_1, x_2x_1x_2, x_2x_1x_2x_1, \dots$$

Отметим, что элементы x_1x_2 и x_2x_1 различны и имеют бесконечный порядок. Отметим также существенное отличие в этом случае прямого произведения групп G_1 и G_2 от их свободного произведения. Прямое произведение здесь будет абелевой группой порядка 4, тогда как свободное произведение — неабелева группа с элементами бесконечного порядка.

Обозначение. Свободное произведение групп $G_1, G_2, \dots, G_n$ обозначим через $G_1 * G_2 * \dots * G_n$ или через

$$\prod_{1 \leq i \leq n}^* G_i.$$

Свободное произведение семейства групп $\{G_i: i \in I\}$ обозначается через

$$\prod_{i \in I}^* G_i.$$

Упражнения

4.1. Предположим, что $\{G_i: i \in I\}$ — множество групп, содержащее более чем одну группу, и каждая из групп состоит более чем из одного элемента. Докажите, что свободное произведение этих групп неабелево, содержит элементы бесконечного порядка и его центр состоит только из единичного элемента.

4.2. Пусть G'_i для каждого индекса i обозначает подгруппу группы G_i (нормальную или нет). Докажите, что свободное произведение множества групп $\{G'_i: i \in I\}$ можно рассматривать как подгруппу свободного произведения групп G_i .

4.3. Пусть $\{G_i: i \in I\}$ и $\{G'_i: i \in I\}$ — два множества групп с одним и тем же множеством индексов I . Предположим, что для каждого индекса $i \in I$ задан гомоморфизм $f_i: G_i \rightarrow G'_i$. Докажите, что существует такой единственный гомоморфизм $f: G \rightarrow G'$ свободного произведения первого множества групп в свободное произведение второго, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\varphi_i} & G \\ f_i \downarrow & & \downarrow f \\ G'_i & \xrightarrow{\varphi'_i} & G' \end{array}$$

коммутативна¹ для всех i . Покажите, что если f_i для всех i является мономорфизмом (соответственно эпиморфизмом), то f — мономорфизм (соответственно эпиморфизм).

4.4. Пусть G и H — конечные абелевы группы порядков m и n соответственно, $m > 1$ и $n > 1$. Докажите, что единственные элементы их свободного произведения $G * H$, имеющие конечный порядок, — это элементы из G и H и все сопряженные с ними. [Указание. Пусть $x \in G * H$ и $x^q = 1$. Представьте x в виде редуцированного слова от элементов из G и H ; затем проведите индукцию по длине слова.] Выведите отсюда, что максимальный порядок любого элемента группы $G * H$ (конечного порядка) равен $\max(m, n)$.

4.5. Пусть $\{G_i: i \in I\}$ — множество абелевых групп, а G — их свободное произведение по отношению к гомоморфизмам $\varphi_i: G_i \rightarrow G$. Обозначим через $G' = G/[G, G]$ факторгруппу группы G по ее коммутаторной подгруппе² и через $\varphi'_i: G_i \rightarrow G'$ композицию гомоморфизма φ_i с естественным гомоморфизмом $G \rightarrow G'$. Докажите, что G' — слабое произведение групп $\{G'_i\}$ по отношению к гомоморфизмам φ'_i (т. е. справедливо предложение 2.1).

4.6. Пусть G, H, G' и H' — циклические группы порядков m, n, m' и n' соответственно. Если $G * H$ и $G' * H'$ изоморфны, то $m = m'$ и $n = n'$ или $m = n'$ и $n = m'$. [Указание. Применим к $G * H$ и $G' * H'$ упражнение 4.5; мы видим, что если «прокоммутировать»³ $G * H$ и $G' * H'$, то получатся конечные абелевы группы порядков mn и $m'n'$ соответственно. Теперь можно применить упражнение 4.4.]

4.7. Пусть H и H' — сопряженные подгруппы группы G . Докажите, что если f — такой гомоморфизм группы G в некоторую другую группу, что $f(H) = 1$, то и $f(H') = 1$.

¹ Эта терминология и обозначения объясняются в следующем разделе перед формулировкой предложения 5.3.

² То есть построить факторгруппы этих групп по их коммутаторным подгруппам. — *Прим. перев.*

4.8. Пусть G — свободное произведение множества групп $\{G_i: i \in I\}$, причем $G_i \neq \{1\}$ для любого индекса i . Докажите, что для любых двух различных индексов $i, i' \in I$ подгруппы G_i и $G_{i'}$ группы G не сопряжены. [Указание. Примените упражнение 4.7. Для построения гомоморфизма f группы G в другое свободное произведение с нужными свойствами используйте упражнение 4.3.]

4.9. Пусть $G = G_1 * G_2$ и N — наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащая G_1 . Докажите, что факторгруппа G/N изоморфна G_2 . [Указание. Используйте упражнение 4.3. Пусть $G'_1 = \{1\}$, $G'_2 = G_2$, $f_1: G_1 \rightarrow G'_1$ — тривиальный гомоморфизм и $f_2: G_2 \rightarrow G'_2$ — тождественное отображение. Докажите, что N — ядро индуцированного гомоморфизма $f: G \rightarrow G'$.]

4.10. Предположим, что G допускает два различных разложения в свободное произведение

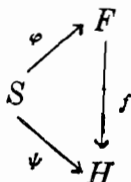
$$G = G_0 * \left(\prod_{i \in I}^* G_i \right) = H_0 * \left(\prod_{i \in I}^* H_i \right)$$

с одним и тем же множеством индексов I . Пусть G_i и H_i для каждого индекса $i \in I$ обозначают сопряженные подгруппы группы G . Докажите, что G_0 и H_0 изоморфны. [Указание. Доказательство аналогично доказательству утверждения в упражнении 4.9.]

5. Свободные группы

Читатель, возможно, уже догадался, что определение свободной группы совершенно аналогично определению свободной абелевой группы.

Определение. Пусть S — произвольное множество. Свободной группой над множеством S (или свободной группой, порожденной S) называется группа F вместе с такой функцией $\varphi: S \rightarrow F$, что для любой группы H и любой функции $\psi: S \rightarrow H$ существует единственный гомоморфизм $f: F \rightarrow H$, для которого диаграмма



коммутативна.

Точно так же, как и в предыдущих случаях, это определение полностью характеризует свободную группу. Чтобы быть вполне точными, сформулируем

Предложение 5.1. Пусть F и F' — свободные группы над множеством S , заданные вместе с функциями $\varphi: S \rightarrow F$ и $\varphi': S \rightarrow F'$ соответственно. Тогда существует такой единственный изомор-

физм $h: F \rightarrow F'$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \nearrow \varphi & \downarrow h \\ S & & F' \\ & \searrow \varphi' & \end{array}$$

коммутативна.

Остается доказать, что для любого данного множества S существует свободная группа над множеством S , и установить ее основные свойства. Мы сделаем это точно таким же методом, как и в случае свободных абелевых групп.

Предположим, что

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i,$$

где подмножества S_i непусты и не пересекаются. Пусть F_i для каждого индекса i обозначает свободную группу над множеством S_i , заданную вместе с функцией $\varphi_i: S_i \rightarrow F_i$, а F — свободное произведение групп F_i по отношению к гомоморфизмам $\eta_i: F_i \rightarrow F$ (вспомним, что, как было доказано, η_i на самом деле мономорфизмы!). Так как подмножества S_i не пересекаются, можно определить функцию $\varphi: S \rightarrow F$ по правилу

$$\varphi|_{S_i} = \eta_i \varphi_i.$$

Предложение 5.2. При сделанных предположениях F — свободная группа над множеством S по отношению к функции $\varphi: S \rightarrow F$.

За исключением очевидных изменений, доказательство этого предложения то же, что и предложения 3.2. Поэтому нет необходимости еще раз подробно проводить его. Это предложение можно переформулировать так: свободное произведение любого множества свободных групп является свободной группой.

Применим это предложение для доказательства существования свободных групп; это делается так же, как и в случае применения предложения 3.2 для доказательства существования свободных абелевых групп. Подробно это делается так. Пусть $S = \{x_i: i \in I\}$ — произвольное непустое множество и $S_i = \{x_i\}$ для всех i . Обозначим через F_i бесконечную циклическую группу, порожденную x_i :

$$F_i = \{x_i^n: n \in \mathbb{Z}\},$$

и пусть $\varphi: S_i \rightarrow F_i$ — отображение включения. Тогда легко видеть, что F_i — свободная группа над множеством S_i по отно-

шению к отображению φ_i (как мы увидим позже, этот случай, т. е. когда S состоит из одного элемента, единственный, при котором свободная группа над S и свободная абелева группа над S совпадают). Все предположения предложения 5.2 выполняются, следовательно, F — свободная группа над множеством S по отношению к функции $\varphi: S \rightarrow F$. Отметим, что F — свободное произведение бесконечных циклических групп. На основании того, что мы уже знаем о свободных произведениях, заключаем, что *каждый элемент $g \neq 1$ свободной группы F можно представить единственным образом в виде*

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_k$ — такие элементы из S , что любые два соседних элемента различны и $n_1, n_2, \dots, n_k$ — отличные от нуля целые числа, положительные или отрицательные. Такое представление элемента g называется *редуцированным словом*, построенным на элементах множества S . Чтобы не выделять отдельные случаи, будем считать, что единичный элемент представляется *пустым словом*. Правила построения обратных элементов и произведений редуцированных слов очевидны.

Отсюда ясно, что функция $\varphi: S \rightarrow F$ взаимно однозначна и F порождается подмножеством $\varphi(S)$ в ранее определенном смысле.

Часто удобно рассматривать S как подмножество в F , а φ — как отображение включения. Тогда о φ можно вообще не упоминать.

Упражнения

5.1. Докажите, что свободная группа над непустым множеством S абелева тогда и только тогда, когда состоит из одного элемента.

5.2. Докажите, что центр свободной группы над множеством, содержащим более одного элемента, состоит только из единичного элемента.

5.3. Пусть g и h — два элемента свободной группы над множеством S , состоящим более чем из одного элемента. Дайте необходимое и достаточное условие того, что g и h сопряжены, в терминах их представлений в виде редуцированных слов. [Указание. Рассмотрите циклические переставки множителей редуцированного слова.]

Закончим этот раздел исследованием связи между свободными группами и свободными абелевыми группами. Вспомним, что если x и y — любые два элемента группы G , то $[x, y]$ обозначает элемент $x y x^{-1} y^{-1} \in G$, называемый *коммутатором* элементов x и y (именно в данном порядке). $[G, G]$ означает подгруппу группы G , порожденную всеми коммутаторами: она называется *коммутаторной подгруппой* и, как легко проверить, является нормальной. Факторгруппа $G/[G, G]$ абелева. Обратно, если N — такая нормальная подгруппа группы G , что G/N абелева, то $N \supset [G, G]$.

Предложение 5.3. Пусть F — свободная группа над множеством S по отношению к функции $\varphi: S \rightarrow F$, а $\pi: F \rightarrow F/[F, F]$ — естественная проекция группы F на факторгруппу. Тогда $F/[F, F]$ — свободная абелева группа над S по отношению к функции $\pi\varphi: S \rightarrow F/[F, F]$.

Доказательство представляет собой хорошее упражнение на использование определений и фактов, сформулированных в предыдущем абзаце.

Следствие 5.4. Если F и F' — свободные группы над конечными множествами S и S' , то F и F' изоморфны тогда и только тогда, когда S и S' содержат одинаковое число элементов.

Доказательство. Любой изоморфизм группы F на F' индуцирует изоморфизм факторгрупп $F/[F, F]$ и $F'/[F', F']$. Используя предыдущее предложение и следствие 3.5, придем к противоречию. Этим доказывается необходимость условия, сформулированного в следствии. Доказательство достаточности тривиально.

Упражнение

5.4. Докажите, что следствие 5.4 остается в силе, если S — конечное, а S' — произвольное множества.

Если F — свободная группа над множеством S , то мощность множества S называется *рангом* группы F . Из следствия 5.4 следует, что ранг — инвариант группы, по крайней мере в случае свободных групп конечного ранга. Можно также доказать, что ранг свободной группы будет инвариантом даже тогда, когда он выражается бесконечным кардинальным числом. Доказательство представляет собой упражнение скорее из арифметики кардинальных чисел, нежели из теории групп, и мы его не приводим.

Если F — свободная группа над множеством S по отношению к функции $\varphi: S \rightarrow F$, то φ — взаимно однозначное отображение, и потому обычно удобно считать S подмножеством в F , а φ — отображением включения; об этом мы уже упоминали. При таком соглашении S называется *базисом* группы F . Другими словами, базис группы F — это такое подмножество $S \subset F$, что F — свободная группа над S по отношению к отображению включения $S \rightarrow F$. Свободная группа имеет много различных базисов.

В гл. VI и VII мы докажем несколько важных теорем о свободных группах.

6. Представление групп с помощью образующих и соотношений

Начнем с результата, аналогичного предложению 3.3, но относящегося к произвольным группам.

Предложение 6.1. *Любая группа является гомоморфным образом свободной группы. Точнее если S — любое множество образующих группы G , а F — свободная группа над S , то отображение включения $S \rightarrow G$ определяет единственный эпиморфизм группы F на G .*

Доказательство такое же, как и у предложения 3.3. Предложение 6.1 позволяет придать точный математический смысл выражению «нетривиальное соотношение между образующими»; это делается так же, как и для абелевых групп. Между абелевым случаем и этим есть одно небольшое различие, а именно в абелевом случае ядром гомоморфизма может быть любая подгруппа, а в неабелевом — только *нормальная* подгруппа. Поэтому случай неабелевых групп мы изложим полностью.

Пусть S — множество образующих группы G , F — свободная группа над S по отношению к отображению $\varphi: S \rightarrow F$, $\psi: S \rightarrow G$ — отображение включения и $f: F \rightarrow G$ — единственный гомоморфизм, для которого $f\varphi = \psi$. Любой элемент $r \neq 1$ ядра группы F по определению является *соотношением* между образующими из S для группы G . Как уже было доказано, r можно представить единственным образом в виде редуцированного слова от элементов из S . Так как каждый элемент из S есть также элемент из G , то редуцированное слово можно рассматривать как произведение в G ; однако в G это произведение редуцируется к единичному элементу. Таким образом, благодаря этой схеме, состоящей во введении свободной группы F над множеством S , мы дали соотношению r «право на жизнь». Если $\{r_j\}$ — любой набор соотношений, то соотношение r называется *следствием* соотношений r_j , если r содержится в *наименьшей нормальной подгруппе* группы F , содержащей все соотношения r_j . В случае когда каждое соотношение является следствием множества соотношений $\{r_j\}$, ядро гомоморфизма f полностью определяется множеством $\{r_j\}$; оно совпадает с пересечением всех *нормальных подгрупп* группы F , содержащих множество $\{r_j\}$. В этом случае с точностью до изоморфизма группа G полностью определяется множеством образующих S и множеством соотношений $\{r_j\}$, так как она изоморфна факторгруппе группы F по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей множество $\{r_j\}$. Такое множество соотношений называется *полным*.

Определение. Копредставлением ¹⁾ группы G называется пара $(S, \{r_j\})$, состоящая из множества образующих группы G и полного множества соотношений между ними. Копредставление называется *конечным*, если S и $\{r_j\}$ — конечные множества; группа G называется *конечно копредставимой*, если она имеет по крайней мере одно конечное копредставление.

Подчеркнем, что любая группа допускает много различных копредставлений, которые могут быть совершенно непохожими друг на друга. И обратно, зачастую почти невозможно определить, изоморфны ли две группы, заданные разными копредставлениями $(S, \{r_j\})$ и $(S', \{r'_k\})$.

Примеры

6.1. Циклическая группа порядка n допускает копредставление с одной образующей x и одним соотношением x^n .

6.2. Позже мы докажем, что фундаментальная группа бутылки Клейна допускает (среди других) два различных копредставления:

(а) две образующие a и b и одно соотношение $baba^{-1}$;

(б) две образующие a и c и одно соотношение a^2c^2 .

В этом случае связь между двумя копредставлениями очень проста: $c = ba^{-1}$, или $b = ca$. Точнее обозначим через $F(a, b)$ и $F(a, c)$ свободные группы над множествами $\{a, b\}$ и $\{a, c\}$ соответственно. Определим гомоморфизмы $f: F(a, b) \rightarrow F(a, c)$ и $g: F(a, c) \rightarrow F(a, b)$ условиями

$$\begin{aligned} f(a) &= a, & f(b) &= ca, \\ g(a) &= a, & g(c) &= ba^{-1}. \end{aligned}$$

Непосредственно из определения свободной группы вытекает, что эти условия однозначно определяют гомоморфизмы. Вычисляем:

$$\begin{aligned} g[f(a)] &= a, & g[f(b)] &= b, \\ f[g(a)] &= a, & f[g(c)] &= c. \end{aligned}$$

Таким образом, gf — тождественное отображение группы $F(a, b)$ на себя, а fg — тождественное отображение группы $F(a, c)$ на себя, так что f и g — взаимно обратные изоморфизмы. Далее проверяем, что

$$\begin{aligned} a^2c^2 &= c^{-1}[f(baba^{-1})]c, \\ baba^{-1} &= (ba^{-1})[g(a^2c^2)](ba^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, нормальная подгруппа группы $F(a, b)$, порожденная элементом $baba^{-1}$, и нормальная подгруппа группы $F(a, c)$, порожденная элементом a^2c^2 , переходят друг в друга при изоморфизмах f и g . Поэтому f и g индуцируют изоморфизмы соответствующих факторгрупп.

¹⁾ В оригинале “presentation” — представление. Чтобы не путать два значения русского слова (второе широко используемое его значение — гомоморфизм в известную группу, например перестановок или линейных преобразований) и чтобы подчеркнуть двойственность этих значений, переводчик книги Кроуэлла и Фокса [1] предложил термин «копредставление», который получил распространение. Говорят также «задание группы». — Прим. перев.

Отметим, что суть приведенных рассуждений содержится в простых вычислениях:

- (а) если $b = ca$, то $baba^{-1} = ca^2c$ и $a^2c^2 = c^{-1}[baba^{-1}]c$;
 (б) если $c = ba^{-1}$, то $a^2c^2 = a^2ba^{-1}ba^{-1}$ и $baba^{-1} = (ba^{-1})(a^2c^2)(ba^{-1})^{-1}$.

6.3. Рассмотрите два копредставления групп:

- (а) две образующие a и b и одно соотношение a^3b^{-2} ;
 (б) две образующие x и y и одно соотношение $xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}$.

Мы утверждаем, что эти копредставления задают изоморфные группы. Связь между двумя парами образующих выражается системой уравнений

$$\begin{aligned} a &= yx, & b &= y^2x, \\ x &= aba^{-1}, & y &= ba^{-1}. \end{aligned}$$

Предоставляем читателю провести подробные вычисления. В разд. IV.6 мы увидим, что это копредставление является копредставлением фундаментальной группы некоторой окружности, заузленной в евклидовом 3-пространстве.

При работе с группами, заданными копредставлениями, зачастую удобно выбрать менее формальный подход. Проиллюстрируем нашу мысль на примере 6.3. Группа G в копредставлении (а) будет факторгруппой свободной группы F с двумя образующими a и b по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей элемент a^3b^{-2} . Обозначим образы образующих a и b в группе G теми же символами a и b . Тогда в группе G будет $a^3b^{-2} = 1$, или $a^3 = b^2$. При вычислениях, проводимых с элементами группы G (т. е. с произведениями степеней элементов a и b), можно там, где удобно, использовать уравнение $a^3 = b^2$.

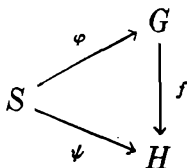
Упражнение

6.4. Предположим, что группы G_1 и G_2 заданы своими копредставлениями. Покажите, как получить копредставления прямого произведения $G_1 \times G_2$, свободного произведения $G_1 * G_2$ и коммутаторной факторгруппы $G_1/[G_1, G_1]$.

7. Задачи универсального отображения

В предыдущих разделах настоящей главы мы определили и изучили следующие алгебраические объекты: слабые произведения абелевых групп, свободные абелевы группы, свободные произведения групп и свободные группы. В каждом из этих случаев алгебраический объект представлял собой систему, состоящую из двух объектов и отображения между ними, например $\varphi: S \rightarrow G$. Система характеризовалась некоторой треугольной диа-

граммой, например



Читатель помнит, что объект H и отображение ψ в этой диаграмме или выбирались совершенно произвольными, или могли удовлетворять лишь незначительным ограничениям. И, наконец, требовалось существование единственного отображения f , превращающего диаграмму в коммутативную.

Обычно на такую характеристику системы $\varphi: S \rightarrow G$ ссылаются, заявляя, что эта система (или просто объект G) служит решением «задачи универсального отображения». В следующей главе мы увидим другой важный пример задачи универсального отображения. В последние годы определение или характеристика математических объектов как решения задачи универсального отображения стало делом довольно обычным. Например, один из наиболее известных современных алгебраистов Шевалле написал учебник по алгебре [11], в котором задачи универсального отображения составляют одну из главных тем.

Если математический объект определяется или характеризуется как решение задачи универсального отображения, то можно доказать (методом, применяемым при доказательстве предложения 2.2), что с точностью до изоморфизма этот объект единствен. На самом деле уже сам изоморфизм определяется однозначно!

Другой вопрос — существование объекта, удовлетворяющего данной задаче универсального отображения. Читатель заметит, что из четырех обсуждаемых в этой главе случаев по крайней мере в трех даны различные конструкции для доказательства существования решения. Однако в каждом случае труд, затраченный на доказательство существования, вознаграждается глубоким проникновением в структуру рассматриваемого математического объекта.

Для доказательства существования решений задач универсального отображения есть довольно общий метод (см. Бурбаки [9] и Самюэль [10]). Но он абсолютно не раскрывает математическую структуру решения, а является чистым доказательством существования.

Приведем два примера характеристики математических объектов как решений задач универсального отображения. Они служат для иллюстративных целей и в последующих главах не используются.

Примеры

7.1. Свободное коммутативное кольцо с единицей. Пусть $Z[x_1, x_2, \dots, x_n]$, как обычно, означает кольцо всех полиномов с целочисленными коэффициентами от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Каждый ненулевой элемент кольца можно единственным образом представить в виде конечной линейной комбинации с целочисленными коэффициентами мономов $x_1^{k_1} x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}$, где $k_1, k_2, \dots, k_n$ — неотрицательные целые числа. Это кольцо можно рассматривать как свободное коммутативное кольцо с единицей, порожденное множеством $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Сформулируем точнее: пусть $\varphi: S \rightarrow Z[x_1, \dots, x_n]$ — отображение включения. Тогда для любого коммутативного кольца R (с единицей) и любой функции $\psi: S \rightarrow R$ существует такой единственный кольцевой гомоморфизм $f: Z[x_1, \dots, x_n] \rightarrow R$ (с $f(1) = 1$), что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Z[x_1, \dots, x_n] & \\ \varphi \nearrow & & \downarrow f \\ S & & R \\ \psi \searrow & & \end{array}$$

коммутативна.

7.2. Компактификация Стоуна — Чеха. Для любого тихоновского пространства определяется некоторое компактное хаусдорфово пространство $\beta(X)$, содержащее X в качестве всюду плотного подмножества; оно называется компактификацией Стоуна — Чеха пространства X . Пусть $\varphi: X \rightarrow \beta(X)$ — отображение включения. Тогда получаем следующую характеристику: для любого компактного хаусдорфова пространства Y и любого непрерывного отображения $\psi: X \rightarrow Y$ существует такое единственное непрерывное отображение $f: \beta(X) \rightarrow Y$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \beta(X) & \\ \varphi \nearrow & & \downarrow f \\ X & & Y \\ \psi \searrow & & \end{array}$$

коммутативна. Подробное обсуждение можно найти в книге: Келли Дж., Общая топология, изд-во «Наука», М., 1968, стр. 206.

Точную аксиоматическую формулировку общей задачи универсального отображения и дальнейшие примеры см. в книгах Бурбаки [9] и Самюэль [10].

ПРИМЕЧАНИЯ

Определение свободных групп, свободных произведений и т. д.

Понятия свободной абелевой группы, свободной группы, свободного произведения групп и т. д. довольно старые. Основное различие между современным подходом к ним и более старыми состоит в способе задания этих

алгебраических объектов. Раньше они определялись в тех понятиях, которые сейчас считаются лишь некоторыми из характеристических свойств. Например, свободная группа над множеством S определялась как множество классов эквивалентности «слов», составленных из элементов множества S . С логической точки зрения против такой процедуры не может быть возражений. Однако с точки зрения общих представлений невыгодно, что определение каждого вида свободного объекта требует особого искусства и воображения и попросту может оказаться трудной проблемой. Идея определения свободного объекта как решения задачи универсального отображения, которая понемногу развивалась со времени второй мировой войны и непосредственно после нее, кажется одной из важных объединяющих идей в современной математике.

Эlegantное доказательство существования свободных произведений групп (теорема 4.2), которое оказалось проще уже известного, принадлежит Вандер-Вардену (*Amer. J. Math.*, 70 (1948), 527—528). В более поздней статье (*Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* (series A), 69 (1966), 78—83) Ван-дер-Варден показал, как применяется основная идея приема, использованного при доказательстве теоремы 4.2, в доказательстве существования решений задач универсального отображения во многих других алгебраических ситуациях.

Различные уровни абстракции в математике

На первых порах материал этой главы может показаться читателю несколько странным. Причина, по-видимому, состоит в том, что уровень абстракции, принятый здесь, выше, чем в тех разделах математики, которые читатель изучал раньше.

Чтобы пояснить это высказывание, попытаемся кратко описать уровни абстракции, которые, на наш взгляд, естественно различать в математике.

Самый низкий уровень абстракции принят в средней школе и на первых годах обучения в высшей школе. Этот уровень характеризуется изучением немногих очень простых математических объектов, таких, как целые, рациональные, действительные и комплексные числа, евклидова плоскость и др. Следующий уровень абстракции принимается, когда выделяются некоторые общие свойства различных конкретных математических объектов, и выделенные свойства рассматриваются сами по себе. Это приводит к изучению таких абстрактных и общих математических систем, как группы, кольца, поля, векторные пространства и т. д. Обычно изучающие математику переходят к этому уровню абстракции спустя некоторое время своих занятий в высшей школе.

Материал данной главы представляет собой введение в следующий, еще более высокий уровень абстракции. Как было указано в примере 4.1, слабое прямое произведение двух абелевых групп G_1 и G_2 и их свободное произведение $G_1 * G_2$ — совершенно различные типы групп. Однако между слабым прямым произведением абелевых групп и свободным произведением произвольных групп можно провести аналогию. Чтобы понять ее, надо рассмотреть категорию всех абелевых групп и категорию всех (т. е. необязательно абелевых) групп соответственно. Это характерно для следующего уровня абстракции: одновременное рассмотрение всех математических систем (например, групп, колец, топологических пространств) определенного вида и исследование свойств такого множества математических систем.

История математики примерно в последние два столетия характеризуется изучением математических систем высоких уровней абстракции. По-видимому, эта тенденция сохранится и в будущем. Однако следует подчеркнуть, что такой ход развития не имеет своей целью абстракцию ради нее самой. Скорее он вынуждает математиков отыскивать аналогии между явлениями, казалось бы, совсем далекими друг от друга.

Представление групп с помощью образующих и соотношений

Подчеркнем, что определение группы с помощью образующих и соотношений во многом довольно неудовлетворительно, так как некоторые из наиболее естественных проблем, возникающих в связи с копредставлениями групп, очень трудны или же вообще неразрешимы. Дальнейшее обсуждение этого вопроса можно найти в учебнике Куроша [2] или Ротмана [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, изд-во «Мир», М., 1967, гл. III и IV.
2. Курош А. Г., Теория групп, изд-во «Наука», М., 1967, гл. IX и X.
3. Рейдемейстер (Reidemeister K.), Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1932, Chapter II.
4. Ротман (Rotman J. J.), The theory of groups, Boston: Allyn and Bacon, 1965, Chapter 11.
5. Скотт (Scott W. R.), Group theory, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964, Chapter 8.
6. Холл М., Теория групп, изд-во «Мир», М., 1962, гл. 7 и 17.
7. Шенкман (Schenkman E.), Group theory, Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1965, Chapter V.
8. Шпехт (Specht W.), Gruppentheorie (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band LXXXII), Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer-Verlag, 1956, Chapters 2.1 and 2.2.

Задачи универсального отображения

9. Бурбаки Н., Теория множеств, изд-во «Мир», М., 1965.
10. Самюэль (Samuel P.), On universal mappings and free topological groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54, (1948), 591—598.
11. Шевалле (Chevalley C.), Fundamental concepts of algebra, New York: Academic Press, 1956.

Глава IV

ТЕОРЕМА ЗЕЙФЕРТА — ВАН КАМПЕНА О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ ДВУХ ПРОСТРАНСТВ. ПРИМЕНЕНИЕ

1. Введение

Пока мы определили строение фундаментальной группы лишь для некоторых пространств (например, для стягиваемых пространств, для окружности). Чтобы иметь возможность применять фундаментальную группу в более широком круге задач, надо определить ее строение для большего числа пространств. Для этого в настоящей главе мы разовьем довольно общий аппарат.

Пусть требуется определить фундаментальную группу линейно связного пространства X , представляемого в виде объединения двух своих линейно связных подпространств U и V , фундаментальные группы которых известны. Выберем базисную точку $x_0 \in U \cap V$; естественно ожидать, что между группами $\pi(U, x_0)$, $\pi(V, x_0)$ и $\pi(X, x_0)$ должна быть определенная связь. В основной теореме этой главы (полученной независимо Зейфертом и ван Кампеном) утверждается, что если U и V — открытые множества и их пересечение $U \cap V$ линейно связно, то группа $\pi(X, x_0)$ полностью определяется следующей диаграммой групп и гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc} & \pi(U) & \\ \nearrow \varphi_1 & & \\ \pi(U \cap V) & & \\ \searrow \varphi_2 & & \\ & \pi(V) & \end{array} \quad (4.1.1)$$

Здесь отображения φ_1 и φ_2 индуцированы отображениями включения. Способ определения группы $\pi(X, x_0)$ с помощью этой диаграммы можно приблизительно описать так. Диаграмму можно дополнить до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi(U) & & \\ & \nearrow \varphi_1 & & \searrow \psi_1 & \\ \pi(U \cap V) & \longrightarrow & & \longrightarrow & \pi(X) \\ & \searrow \varphi_2 & & \nearrow \psi_2 & \\ & & \pi(V) & & \end{array} \quad (4.1.2)$$

Все стрелки здесь означают гомоморфизмы, индуцированные отображениями включения, а базисная точка x_0 опущена. Тогда в теореме Зейферта — ван Кампена утверждается, что $\pi(X)$ — группа, обладающая *наибольшей возможной свободой*, которую можно использовать для того, чтобы замкнуть диаграмму (4.1.1) до коммутативной диаграммы (4.1.2). Как обычно, выражению «наибольшая возможная свобода» будет придан точный смысл в рамках некоторой задачи универсального отображения.

На самом деле мы сформулируем и докажем более общий вариант теоремы, в котором в качестве пространства X возьмем объединение необязательно двух, но любого числа линейно связных открытых подмножеств. Этот более общий вариант теоремы доказывается ненамного труднее, а в некоторых ситуациях именно его и приходится применять. После завершения доказательства теоремы Зейферта — ван Кампена мы сформулируем несколько следствий и с их помощью определим строение фундаментальных групп различных компактных поверхностей и некоторых других пространств. В последнем разделе покажем, как применять эти методы для различения некоторых узлов.

2. Формулировка и доказательство теоремы Зейферта — ван Кампена

Прежде всего дадим точную формулировку теоремы. Пусть U и V — такие линейно связные открытые подмножества пространства X , что $X = U \cup V$ и пересечение $U \cap V$ непусто и линейно связно. Для всех рассматриваемых фундаментальных групп выберем базисную точку $x_0 \in U \cap V$.

Теорема 2.1. Пусть H — любая группа, ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 — такие гомоморфизмы, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi(U) & \\
 \varphi_1 \nearrow & & \searrow \rho_1 \\
 \pi(U \cap V) & \xrightarrow{\rho_3} & H \\
 \varphi_2 \searrow & & \nearrow \rho_2 \\
 & \pi(V) &
 \end{array}$$

коммутативна. Тогда существует такой единственный гомоморфизм $\sigma: \pi(X) \rightarrow H$, что три диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & \pi(X) & \\ \psi_1 \nearrow & \downarrow \sigma & \\ \pi(U) & & H \\ \rho_1 \searrow & & \\ & & \end{array} & \begin{array}{ccc} & \pi(X) & \\ \psi_2 \nearrow & \downarrow \sigma & \\ \pi(V) & & H \\ \rho_2 \searrow & & \\ & & \end{array} & \begin{array}{ccc} & \pi(X) & \\ \psi_3 \nearrow & \downarrow \sigma & \\ \pi(U \cap V) & & H \\ \rho_3 \searrow & & \\ & & \end{array} \end{array}$$

коммутативны. (Здесь гомоморфизмы φ_i и ψ_i , $i = 1, 2, 3$, индуцированы отображениями включения.)

Методом, описанным в гл. III, можно доказать, что этой теоремой группа $\pi(X)$ характеризуется с точностью до изоморфизма. Точную формулировку и доказательство этого факта предоставляем читателю.

Дадим теперь обобщение теоремы Зейферта — ван Кампена. Это обобщение заключается в том, что пространство X покрывается любым числом открытых подмножеств, а не только двух, как в теореме 2.1. Разумеется, все открытые множества должны быть линейно связными и пересечение любого конечного числа их также должно быть линейно связным и содержать базисную точку. Итак, предположим, что

- (a) X — линейно связное топологическое пространство и $x_0 \in X$;
- (b) $\{U_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — покрытие пространства X такими линейно связными открытыми множествами, что $x_0 \in U_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$;
- (c) для любых двух индексов $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ существует такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = U_\lambda$ (т. е. семейство множеств $\{U_\lambda\}$ замкнуто относительно конечных пересечений).

Рассмотрим фундаментальные группы этих различных множеств с базисной точкой x_0 . Для краткости мы будем в обозначениях опускать базисную точку.

Если $U_\lambda \subset U_\mu$, то через

$$\varphi_{\lambda\mu}: \pi(U_\lambda) \rightarrow \pi(U_\mu)$$

обозначим гомоморфизм, индуцированный отображением включения. Аналогично для любого индекса λ отображение

$$\psi_\lambda: \pi(U_\lambda) \rightarrow \pi(X)$$

индуцировано отображением включения $U_\lambda \rightarrow X$. Отметим, что если $U_\lambda \subset U_\mu$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(U_\lambda) & & \pi(X) \\ \varphi_{\lambda\mu} \downarrow & \searrow \psi_\lambda & \\ \pi(U_\mu) & & \nearrow \psi_\mu \end{array}$$

коммутативна.

Теорема 2.2. При сделанных предположениях группа $\pi(X)$ удовлетворяет следующему условию универсального отображения. Пусть H — любая группа и $\rho_\lambda: \pi(U_\lambda) \rightarrow H$ — любой набор гомоморфизмов, определенных для всех $\lambda \in \Lambda$ так, что если $U_\lambda \subset U_\mu$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(U_\lambda) & & H \\ \varphi_{\lambda\mu} \downarrow & \searrow \rho_\lambda & \\ \pi(U_\mu) & & \nearrow \rho_\mu \end{array}$$

коммутативна. Тогда существует такой единственный гомоморфизм $\sigma: \pi(X) \rightarrow H$, что для любого индекса $\lambda \in \Lambda$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \pi(X) & \\ \nearrow \psi_\lambda & \downarrow \sigma & \\ \pi(U_\lambda) & & H \\ \searrow \rho_\lambda & & \end{array}$$

Кроме того, это условие универсального отображения характеризует $\pi(X)$ с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство последнего утверждения теоремы — дело стандартное, и его мы предоставляем читателю. Мы докажем сейчас остальные утверждения теоремы. Применения теоремы даны в разд. 3—6.

Лемма 2.3. Группа $\pi(X)$ порождена объединением образов $\psi_\lambda [\pi(U_\lambda)]$, $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \pi(X)$; выберем петлю $f: I \rightarrow X$, представляющую α . Возьмем целое число n настолько большим, чтобы число $1/n$ было меньше лебегова числа открытого покрытия $\{f^{-1}(U_\lambda): \lambda \in \Lambda\}$ компактного метрического пространства I . Разобьем интервал I на замкнутые подинтервалы $J_i = [i/n, (i+1)/n]$, $0 \leq i \leq n-1$. Для каждого подинтервала J_i выберем такой индекс $\lambda_i \in \Lambda$, что $f(J_i) \subset U_{\lambda_i}$. Рассмотрим в $U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i}$ путь g_i , соединяющий точку x_0 с точкой $f(i/n)$, $1 \leq i \leq n-1$. Обозначим через $f_i: I \rightarrow X$ путь, представленный композицией

$$I \xrightarrow{h_i} J_i \xrightarrow{j|J_i} X,$$

где h_i — единственный сохраняющий ориентацию линейный гомеоморфизм. Тогда $f_0 \cdot g_1^{-1}$, $g_1 \cdot f_1 \cdot g_2^{-1}$, $g_2 \cdot f_2 \cdot g_3^{-1}$, $\dots$, $g_{n-2} \cdot f_{n-2} \cdot g_{n-1}^{-1}$, $g_{n-1} \cdot f_{n-1}$ — замкнутые пути, каждый из которых содержится целиком в одном из открытых множеств U_λ и произведение их в указанном порядке эквивалентно f . Следовательно,

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_{n-1},$$

где

$$\alpha_i \in \psi_{\lambda_i}[\pi(U_{\lambda_i})], \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Лемма доказана.

Замечание. Предположения этой леммы можно было немного ослабить. Действительно, важно лишь, чтобы $\{U_\lambda\}$ было таким открытым покрытием пространства X , что все множества U_λ и пересечение любых двух из них линейно связны. Линейная связность пересечения трех множеств не имеет значения.

Доказательство теоремы 2.2. Пусть H — любая группа и $\rho_\lambda: \pi(U_\lambda) \rightarrow H$, $\lambda \in \Lambda$, — множество гомоморфизмов, удовлетворяющих условиям теоремы. Мы должны показать, что существует единственный гомоморфизм $\sigma: \pi(X) \rightarrow H$, превращающий для всех $\lambda \in \Lambda$ диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \pi(X) & \\ \psi_\lambda \nearrow & \downarrow \sigma & \\ \pi(U_\lambda) & & H \\ \rho_\lambda \searrow & & \end{array}$$

в коммутативную. Если такой гомоморфизм σ существует, то в силу леммы 2.3 он единствен и должен определяться по сле-

дующему правилу. Пусть $\alpha \in \pi(X)$. Тогда по лемме 2.3

$$\alpha = \psi_{\lambda_1}(\alpha_1) \cdot \psi_{\lambda_2}(\alpha_2) \cdot \dots \cdot \psi_{\lambda_n}(\alpha_n), \quad (4.2.1)$$

где $\alpha_i \in \pi(U_{\lambda_i})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому если гомоморфизм σ существует, то

$$\sigma(\alpha) = \rho_{\lambda_1}(\alpha_1) \cdot \rho_{\lambda_2}(\alpha_2) \cdot \dots \cdot \rho_{\lambda_n}(\alpha_n). \quad (4.2.2)$$

Наша стратегия состоит в том, чтобы взять уравнение (4.2.2) в качестве определения гомоморфизма σ . Чтобы определение было корректным, мы должны показать, что оно не зависит от выбора представления элемента α в виде (4.2.1). Ясно, что в этом случае σ будет гомоморфизмом и диаграмма, указанная в условии теоремы, будет коммутативной.

Для доказательства независимости σ от способа представления α в виде (4.2.1) достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 2.4. Пусть $\beta_i \in \pi(U_{\lambda_i})$, $i = 1, 2, \dots, q$, и

$$\psi_{\lambda_1}(\beta_1) \cdot \psi_{\lambda_2}(\beta_2) \cdot \dots \cdot \psi_{\lambda_q}(\beta_q) = 1.$$

Тогда

$$\rho_{\lambda_1}(\beta_1) \cdot \rho_{\lambda_2}(\beta_2) \cdot \dots \cdot \rho_{\lambda_q}(\beta_q) = 1.$$

Доказательство. Выберем замкнутые пути

$$f_i: \left[\frac{i-1}{q}, \frac{i}{q} \right] \rightarrow U_{\lambda_i},$$

представляющие β_i для $i = 1, 2, \dots, q$. Ясно, что произведение

$$\prod_{i=1}^q \psi_{\lambda_i}(\beta_i)$$

представляется замкнутым путем $f: [0, 1] \rightarrow X$, определенным равенствами

$$f \left| \left[\frac{i-1}{q}, \frac{i}{q} \right] \right. = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

По предположению путь f эквивалентен постоянному пути. Следовательно, существует такое непрерывное отображение

$$F: I \times I \rightarrow X,$$

что для любых $s, t \in I$

$$F(s, 0) = f(s),$$

$$F(s, 1) = F(0, t) = F(1, t) = x_0.$$

Обозначим через ε лебегово число открытого покрытия $\{F^{-1}(U_\lambda): \lambda \in \Lambda\}$ компактного метрического пространства $I \times I$ (метрика на $I \times I$ вводится как на подмножестве евклидовой пло-

скости). Разобьем квадрат $I \times I$ на малые прямоугольники диаметра $< \varepsilon$. Для этого выберем числа

$$s_0 = 0, s_1, s_2, \dots, s_m = 1, \\ t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n = 1$$

так, чтобы выполнялись условия:

- (a) $s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m$ и $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$;
- (b) дроби $1/q, 2/q, \dots, (q-1)/q$ содержатся среди чисел $s_1, s_2, \dots, s_m$;
- (c) если разбить единичный квадрат $I \times I$ на прямоугольники вертикальными и горизонтальными прямыми $s = s_i$ ($i = 0, 1, \dots, m$), $t = t_j$ ($j = 0, 1, \dots, n$), то длина диагонали каждого прямоугольника будет меньше ε . Ясно, что такое разбиение возможно.

Обозначим вершины, ребра и прямоугольники получившегося разбиения следующим образом.

Вершины:

$$v_{ij} = (s_i, t_j), \quad 0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Подинтервалы в $I = [0, 1]$:

$$J_i = [s_{i-1}, s_i], \quad 1 \leq i \leq m, \\ K_j = [t_{j-1}, t_j], \quad 1 \leq j \leq n.$$

Прямоугольники:

$$R_{ij} = J_i \times K_j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Горизонтальные ребра:

$$a_{ij} = J_i \times [t_j], \quad 1 \leq i \leq m, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Вертикальные ребра:

$$b_{ij} = \{s_i\} \times K_j, \quad 0 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

На рис. 4.1 указан один из прямоугольников разбиения и обозначены его вершины и ребра. Введем также обозначения для некоторых путей:

$$A_{ij}: J_i \rightarrow X, \quad A_{ij}(s) = F(s, t_j), \quad s \in J_i, \\ B_{ij}: K_j \rightarrow X, \quad B_{ij}(t) = F(s_i, t), \quad t \in K_j.$$

Допуская небольшую вольность в обозначениях, можно записать

$$A_{ij} = F \mid a_{ij}, \\ B_{ij} = F \mid b_{ij}.$$

Для каждого прямоугольника R_{ij} выберем такое открытое множество $U_{\lambda(i, j)}$, что

$$F(R_{ij}) \subset U_{\lambda(i, j)}.$$

Возможность такого выбора обеспечивается условием (с). Каждая вершина v_{ij} является вершиной четырех прямоугольников

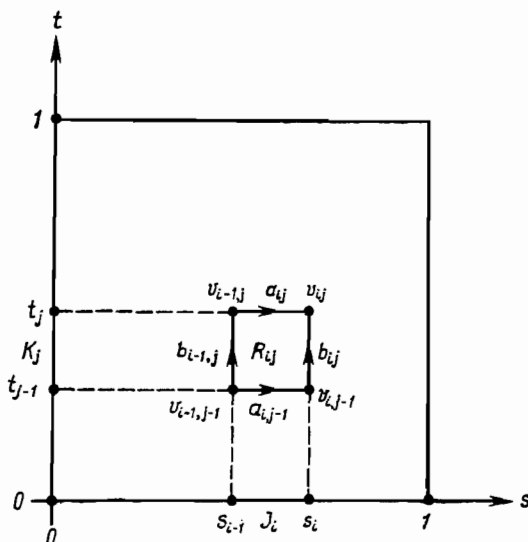


Рис. 4.1. Обозначения, используемые при доказательстве леммы 2.4.

R_{kl} для некоторых значений индексов k и l ; обозначим через $U_{\mu(i, j)}$ пересечение открытых множеств $U_{\lambda(k, l)}$ для этих же значений индексов k и l . Тогда $U_{\mu(i, j)}$ — открытое множество из данного покрытия и

$$F(v_{ij}) \in U_{\mu(i, j)}.$$

Выберем путь

$$g_{ij}: I \rightarrow U_{\mu(i, j)}$$

с начальной точкой x_0 и конечной $F(v_{ij})$; если $F(v_{ij}) = x_0$, то потребуем, чтобы путь g_{ij} был постоянным.

Введя эти необходимые обозначения, докажем теперь

Утверждение. Пусть U_λ и U_μ — два множества из заданного открытого покрытия пространства X и

$$h: I \rightarrow U_\lambda \cap U_\mu, \quad h(0) = h(1) = x_0,$$

— петля в точке x_0 . Пусть $\alpha \in \pi(U_\lambda, x_0)$ и $\beta \in \pi(U_\mu, x_0)$ — классы эквивалентности одной и той же петли h в двух разных группах. Тогда $\rho_\lambda(\alpha) = \rho_\mu(\beta)$.

Доказательство утверждения. По предположению множество $U_v = U_\lambda \cap U_\mu$ принадлежит покрытию и h представляет элемент $\gamma \in \pi(U_v, x_0)$. Ясно, что

$$\alpha = \varphi_{v\lambda}(\gamma), \quad \beta = \varphi_{v\mu}(\gamma).$$

Следовательно,

$$\rho_\lambda(\alpha) = \rho_\lambda \varphi_{v\lambda}(\gamma) = \rho_v(\gamma),$$

$$\rho_\mu(\beta) = \rho_\mu \varphi_{v\mu}(\gamma) = \rho_v(\gamma),$$

откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Это утверждение позволяет несколько отклониться от принятых обозначений. Элемент $\rho_\lambda(\alpha) = \rho_\mu(\beta) \in H$ можно обозначить через $\rho(h)$; неважно, где взят класс эквивалентности петли h — в группе $\pi(U_\lambda)$ или в группе $\pi(U_\mu)$.

Приняв это соглашение, положим

$$\alpha_{ij} = \rho[(g_{i-1,j}A_{ij})(g_{ij})^{-1}],$$

$$\beta_{ij} = \rho[(g_{i,j-1}B_{ij})(g_{ij})^{-1}].$$

Здесь $(g_{ij})^{-1}$ означает путь $t \rightarrow g_{ij}(1-t)$. Отметим, что как α_{ij} , так и β_{ij} — корректно определенные элементы группы H .

Мы утверждаем, что для каждого прямоугольника R_{ij} в группе H выполняется соотношение

$$\alpha_{i,j-1}\beta_{ij} = \beta_{i-1,j}\alpha_{ij}. \quad (4.2.3)$$

Для доказательства отметим эквивалентность между (незамкнутыми) путями в $U_{\lambda(i,j)}$:

$$A_{i,j-1}B_{ij} \sim B_{i-1,j}A_{ij}.$$

Эта эквивалентность следует из леммы II.8.1, примененной к отображению $F|_{R_{ij}}: R_{ij} \rightarrow U_{\lambda(i,j)}$, и упражнения II.3.3. В результате получаем эквивалентность между замкнутыми путями в $U_{\lambda(i,j)}$:

$$g_{i-1,j-1}A_{i,i-1}(g_{i,j-1})^{-1}g_{i,j-1}B_{ij}(g_{ij})^{-1} \sim \\ \sim g_{i-1,j-1}B_{i-1,j}(g_{i-1,j})^{-1}g_{i-1,j}A_{ij}(g_{ij})^{-1}. \quad (4.2.4)$$

Если в обеих частях соотношения (4.2.4) перейти к классам эквивалентности в $\pi(U_{\lambda(i,j)})$, а затем применить гомоморфизм $\rho_{\lambda(i,j)}$, то получим уравнение (4.2.3). (Примечание. Так как произведение путей не ассоциативно, то, строго говоря, в (4.2.4) должны стоять скобки. Однако в конечном счете они не играют роли.)

На этом заканчивается доказательство соотношения (4.2.8) и, следовательно, леммы 2.4.

3. Одно из применений теоремы 2.1

Предположим, что, как и в формулировке теоремы 2.1, пространство X можно представить в виде объединения таких открытых множеств U и V , что U , V и $U \cap V$ линейно связны. Пусть φ_i и ψ_i обозначают то же, что и в разд. 2.

Теорема 3.1. Если пересечение $U \cap V$ односвязно, то $\pi(X)$ — свободное произведение групп $\pi(U)$ и $\pi(V)$ по отношению к гомоморфизмам $\psi_1: \pi(U) \rightarrow \pi(X)$ и $\psi_2: \pi(V) \rightarrow \pi(X)$.

Доказательство. Теорема непосредственно следует из теоремы 2.1. Если $\pi(U \cap V) = \{1\}$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi(U) & \\
 \nearrow & & \searrow \rho_1 \\
 \pi(U \cap V) & \xrightarrow{\rho_3} & H \\
 \searrow & & \nearrow \rho_2 \\
 & \pi(V) &
 \end{array}$$

коммутативна для любого выбора ρ_1 и ρ_2 ; таким образом, эти два гомоморфизма совершенно произвольны, тогда как гомоморфизм ρ_3 определен однозначно. Аналогично диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi(X) & \\
 \nearrow \psi_1 & & \downarrow \sigma \\
 \pi(U \cap V) & & H \\
 \searrow \rho_3 & &
 \end{array}$$

коммутативна для любого выбора σ ; требование коммутативности не налагает никаких условий на σ . Остальные два условия на σ в теореме 2.1 точно такие же, какие были в определении свободного произведения двух групп.

Приведем несколько примеров, в которых применяется эта теорема. В свою очередь эти примеры применяются дальше для изучения других примеров.

Примеры

3.1. Пусть X — такое пространство, что $X = A \cup B$, $A \cap B = \{x_0\}$, A и B гомеоморфны окружности S^1 (см. рис. 4.2). Пространство X можно представлять себе в виде кривой в форме восьмерки.

Если бы A и B были открытыми подмножествами в X , то для определения строения группы $\pi(X)$ можно было бы применить теорему 3.1, взяв $U = A$ и $V = B$. К сожалению, A и B не открыты.

Однако с небольшим видоизменением ее все же можно применить. Выберем такие точки $a \in A$ и $b \in B$, что $a \neq x_0$ и $b \neq x_0$. Пусть $U = X - \{b\}$ и $V = X - \{a\}$. Тогда U и V гомеоморфны окружности с двумя «усами». Ясно, что A и B — деформационные ретракты множеств U и V соответственно, а пересечение $U \cap V = X - \{a, b\}$ стягиваемо и, следовательно, односвязно. Поэтому $\pi(X)$ — свободное произведение групп $\pi(U)$ и $\pi(V)$, или, что эквивалентно, групп $\pi(A)$ и $\pi(B)$ (так как $\pi(A) \approx \pi(U)$ и $\pi(B) \approx \pi(V)$). Так как A и B — окружности, то $\pi(A)$ и $\pi(B)$ — бесконечные циклические группы. Следовательно, $\pi(X)$ — свободное произведение двух

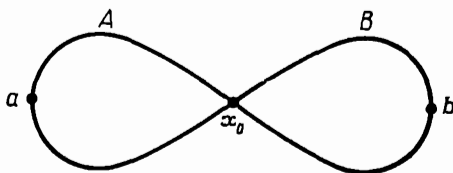


Рис. 4.2. Пример 3.1: кривая в форме восьмерки.

бесконечных циклических групп; в силу предложения III.5.2 $\pi(X)$ — свободная группа с двумя образующими. В качестве образующих можно взять классы α и β петель в точке x_0 , оббегающих по одному разу множества A и B соответственно.

3.2. Пусть E^2 — замкнутый единичный диск в плоскости, a и b — различные его внутренние точки и $Y = E^2 - \{a, b\}$. Легко найти подмножество $X \subset Y$, представимое в виде объединения двух окружностей, пересекающихся лишь в одной точке, как в примере 3.1, и такое, что X — деформационный ретракт для Y (см. рис. 4.3). Следовательно, $\pi(Y) \approx \pi(X)$ и $\pi(Y)$ — свободная группа с двумя образующими. В качестве образующих можно взять классы α и β петель в точке x_0 , оббегающих по одному разу «дыры» a и b соответственно.

Существует экспериментальная физическая проверка этого результата, обращенная к нашей геометрической интуиции. Возьмем кусок фанеры или другого жесткого и легкого материала, имеющий форму круглого диска, и в точках a и b закрепим небольшие вертикальные колышки. Возьмем длинный шнур и прикрепим, скажем, кнопками, оба его конца к диску в точке x_0 . Любой элемент $\neq 1$ фундаментальной группы Y можно представить единственным образом в виде «редуцированного слова» от α и β ; для любого такого редуцированного слова можно выбрать путь в Y , представляющий его, и уложить шнур на диск в виде этого пути. Теперь, сдвигая шнур по диску, можно экспериментально проверить, эквивалентен ли наш путь постоянному. Конечно, при этом не допускается, чтобы шнур проходил над концами колышков.

3.3. Такие же рассуждения применимы и в том случае, когда Y — открытый диск без двух точек, вся плоскость без двух точек или сфера без трех точек, а также если вместо двух изолированных точек из диска выкидываются малые круглые диски, открытые или замкнутые.

3.4. Пусть X будет объединением n окружностей, пересекающихся в одной точке, $n > 2$, т. е.

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

где каждое множество A_i гомеоморфно S^1 и $A_i \cap A_j = \{x_0\}$, если $i \neq j$. Пространство X имеет вид « n -лепестковой розы» на плоскости (в случае $n=4$

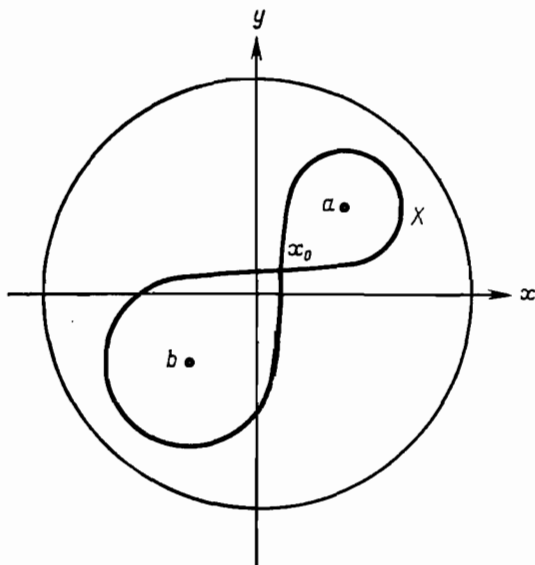


Рис. 4.3. Пример 3.2: диск с двумя дырами.

см. рис. 4.4). Докажем индукцией по n , что $\pi(X)$ — свободная группа с n образующими $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, где элемент α_i представляется петлей, обходящей окружность A_i один раз. Для $n=2$ это уже доказано. Чтобы провести

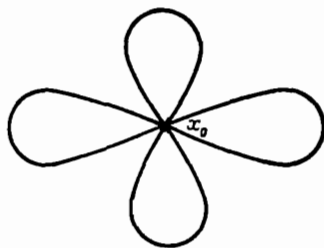


Рис. 4.4. Пример 3.4 для случая $n=4$.

индукцию, применим теорему 3.1 следующим образом. Выберем такую точку $a_i \in A_i$, что $a_i \neq x_0$. Пусть

$$U = X - \{a_n\},$$

$$V = X - \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}.$$

Тогда U и V — открытые множества, $A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$ — деформационный ретракт для U , A_n — деформационный ретракт для V и пересечение $U \cap V$ стягиваемо. Поэтому на основании теоремы 3.1 заключаем, что $\pi(X, x_0)$ —

свободное произведение групп $\pi(U)$ и $\pi(V)$, или, что эквивалентно, групп $\pi(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$ и $\pi(A_n)$.

Чтобы завершить индукцию, воспользуемся предложением III.5.2.

3.5. Доказанный в упражнении 3.4 результат можно применить в следующем примере. Пусть Y — пространство, полученное выкидыванием из (открытого или замкнутого) диска или из плоскости n точек. Используя те же рассуждения, что и в примере 3.2, заключаем, что $\pi(Y)$ — свободная группа с n образующими $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Грубо говоря, элемент α_i представляется петлей, обходящей один раз i -ю дыру.

Предоставляем читателю самому построить, как в примере 3.2, физическую модель, показывающую, что $\pi(Y)$ — свободная группа с n образующими.

Эти примеры иллюстрируют одно важное обстоятельство: чтобы применить теорему Зейферта — ван Кампена в каждом конкретном случае, обычно приходится использовать свойства деформационных ретрактов. Для дальнейших ссылок дадим сейчас строгую формулировку этого принципа. Пусть $\{U_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — открытое покрытие пространства X , для которого выполняются все предположения теоремы 2.2. Пусть $\{A_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — семейство подмножеств пространства X , удовлетворяющее следующим условиям:

- (a) $x_0 \in A_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$;
- (b) $A_\lambda \subset U_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и отображение включения индуцирует изоморфизм $\pi(A_\lambda, x_0) \approx \pi(U_\lambda, x_0)$;
- (c) если $U_\lambda \subset U_\mu$, то $A_\lambda \subset A_\mu$.

Пусть $\psi'_\lambda: \pi(A_\lambda) \rightarrow \pi(X)$ и $\phi'_{\lambda\mu}: \pi(A_\lambda) \rightarrow \pi(A_\mu)$ обозначают гомоморфизмы, индуцированные отображениями включения.

Лемма 3.2. При сделанных предположениях теорема 2.2 остается в силе, если заменить $\pi(U_\lambda)$ на $\pi(A_\lambda)$, ψ_λ на ψ'_λ для каждого индекса λ и $\phi_{\lambda\mu}$ на $\phi'_{\lambda\mu}$ для каждой такой пары (λ, μ) , что $U_\lambda \subset U_\mu$.

Доказательство. Доказательство очевидно.

Практически наиболее общий случай — это случай, когда A_λ — замкнутое подмножество пространства X для всех λ и деформационный ретракт для U_λ .

Предоставляем читателю точно сформулировать частные случаи леммы 3.2, соответствующие теоремам 2.1 и 3.1.

Упражнения

3.1. Докажите следующее обобщение теоремы 3.1. Пусть $\{W\} \cup \{V_i: i \in I\}$ — покрытие пространства X открытыми линейно связными подмножествами, обладающее такими свойствами: (a) W — собственное подмножество в V_i для всех $i \in I$; (b) $V_i \cap V_j = W$ для любых двух различных индексов $i, j \in I$; (c) множество W односвязно; (d) $x_0 \in W$. С помощью теоремы 2.2 докажите, что $\pi(X, x_0)$ — свободное произведение групп $\pi(V_i, x_0)$

(по отношению к гомоморфизмам $\psi_i: \pi(V_i) \rightarrow \pi(X)$, индуцированным отождествлениями включения).

3.2. Пусть

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

где каждое множество A_i гомеоморфно S^1 , будет таким пространством, что $A_i \cap A_j = \{x_0\}$ для любых двух различных индексов $i, j \in I$, и пусть топология на X удовлетворяет аксиоме отделимости и следующему условию: подмножество B пространства X замкнуто (открыто) тогда и только тогда, когда $B \cap A_i$ — замкнутое (открытое) подмножество для всех $i \in I$. Пусть α_i для каждого индекса i будет образующей бесконечной циклической группы $\pi(A_i, x_0)$. Используйте результат упражнения 3.1 для доказательства того, что $\pi(X, x_0)$ — свободная группа над множеством $\{\alpha_i: i \in I\}$.

3.3. Приведите пример компактного хаусдорфова пространства

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

где каждое множество A_i гомеоморфно S^1 , $A_i \cap A_j = \{x_0\}$ для $i \neq j$, но X не удовлетворяет условию предыдущего упражнения. [Указание. Пространство, обладающее требуемыми свойствами, лежит в евклидовой плоскости.] Будет ли $\pi(X, x_0)$ свободной группой над множеством $\{\alpha_i\}$, как в упражнении 3.2?

3.4. Пусть Y — дополнение множества

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2: x — \text{целое число}\}$$

в плоскости $\mathbb{R}^2$. Докажите, что $\pi(Y)$ — свободная группа над счетным множеством образующих.

3.5. Пусть X — такое хаусдорфова пространство, что $X = A \cup B$, где A и B гомеоморфны тору и $A \cap B = \{x_0\}$. Каково строение группы $\pi(X, x_0)$?

3.6. Пусть M_1 и M_2 — непересекающиеся связные n -многообразия. Докажите, что следующий способ построения связной суммы $M_1 \# M_2$ эквивалентен построению в разд. 1.4 для случая $n = 2$. Выберем точки $m_i \in M_i$ и их открытые окрестности U_i на $\mathbb{R}^n$, для которых существуют такие гомеоморфизмы h_i из U_i на $\mathbb{R}^n$, что $h_i(m_i) = 0$, $i = 1, 2$. Определим $M_1 \# M_2$ как факторпространство пространства $(M_1 - \{m_1\}) \cup (M_2 - \{m_2\})$, полученное отождествлением точек $x_1 \in U_1 - \{m_1\}$ и $x_2 \in U_2 - \{m_2\}$, если

$$h_1(x_1) = \frac{h_2(x_2)}{|h_2(x_2)|^2}.$$

3.7. Пусть M_1 и M_2 — связные n -многообразия, $n > 2$. Докажите, что $\pi(M_1 \# M_2)$ — свободное произведение групп $\pi(M_1)$ и $\pi(M_2)$.

4. Другое применение теоремы 2.1

Пусть выполнены предположения теоремы 2.1, т. е. U, V и $U \cap V$ — линейно связные открытые подмножества пространства X , $X = U \cup V$ и $x_0 \in U \cap V$.

Теорема 4.1. Предположим, что множество V односвязно. Тогда $\psi_1: \pi(U) \rightarrow \pi(X)$ — эпиморфизм и его ядром служит наименьшая нормальная подгруппа группы $\pi(U)$, содержащая множество $\varphi_1[\pi(U \cap V)]$.

Отметим, что эта теорема полностью описывает группу $\pi(X)$: она изоморфна факторгруппе группы $\pi(U)$ по указанной в теореме нормальной подгруппе.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow \varphi_1 & \pi(U) \\
 \pi(U \cap V) & \xrightarrow{\psi_1} & \pi(X) \\
 & \searrow \varphi_2 & \pi(V)
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & \searrow \psi_1 & \\
 & \nearrow \psi_2 &
 \end{array}$$

Так как $\pi(V) = \{1\}$, то ψ_2 — тривиальный гомоморфизм и образ гомоморфизма φ_1 содержится в ядре гомоморфизма ψ_1 . Ясно также, что ψ_1 — эпиморфизм; это следует из леммы 2.3 и можно доказать непосредственно, исходя из теоремы 2.1.

Итак, осталось доказать, что ядро гомоморфизма ψ_1 совпадает с *наименьшей* нормальной подгруппой группы $\pi(U)$, содержащей образ гомоморфизма φ_1 (вообще говоря, оно могло бы быть и *наибольшей* нормальной подгруппой, содержащей образ гомоморфизма φ_1). Для этого возьмем $H = \pi(U)/N$, где N — наименьшая нормальная подгруппа группы $\pi(U)$, содержащая образ гомоморфизма φ_1 , и обозначим через $\rho_1: \pi(U) \rightarrow H$ естественный гомоморфизм группы $\pi(U)$ на ее факторгруппу. Пусть $\rho_2: \pi(V) \rightarrow H$ и $\rho_3: \pi(U \cap V) \rightarrow H$ — тривиальные гомоморфизмы. Тогда выполняются все предположения теоремы 2.1. Следовательно, существует гомоморфизм $\sigma: \pi(X) \rightarrow H$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi(X) & \\
 \psi_1 \nearrow & & \downarrow \sigma \\
 \pi(U) & & H \\
 \rho_1 \searrow & &
 \end{array}$$

коммутативна. Отсюда следует, что

$$\text{Ker } \psi_1 \subset \text{Ker } \rho_1 = N.$$

Мы уже знаем, что $N \subset \text{Ker } \psi_1$, так что можем заключить, что $\text{Ker } \psi_1 = N$. Теорема доказана.

В следующем разделе мы объединим эту теорему с нашими предыдущими результатами и построим фундаментальные группы различных компактных связных 2-многообразий.

Упражнение

4.1. Предполагая выполненными условия теоремы 2.1 и используя ее обозначения, докажите следующие утверждения:

- (a) Если φ_2 — изоморфизм, то и ψ_2 — изоморфизм.
- (b) Если φ_1 и φ_2 — эпиморфизмы, то ψ_3 — также эпиморфизм и $\text{Ker } \psi_3$ — наименьшая нормальная подгруппа группы $\pi(U \cap V)$, содержащая $\text{Ker } \varphi_1$ и $\text{Ker } \varphi_2$.
- (c) Если $\pi(U \cap V)$ — циклическая группа с образующей α , то группа $\pi(X)$ изоморфна факторгруппе свободного произведения групп $\pi(U)$ и $\pi(V)$ по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей $(\varphi_1\alpha)(\varphi_2\alpha)^{-1}$.
- (d) Группа $\pi(X)$ изоморфна факторгруппе свободного произведения $\pi(U) * \pi(V)$ по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей $\{(\varphi_1\alpha)(\varphi_2\alpha)^{-1} : \alpha \in \pi(U \cap V)\}$.

- (e) Пусть даны копредставления групп $\pi(U)$ и $\pi(V)$, а также множество образующих группы $\pi(U \cap V)$; покажите, как получить копредставление группы $\pi(X)$, исходя из этих данных и зная гомоморфизмы φ_1 и φ_2 . Докажите, что если $\pi(U)$ и $\pi(V)$ имеют конечные копредставления и группа $\pi(U \cap V)$ конечно порождена, то $\pi(X)$ имеет конечное копредставление.

5. Строение фундаментальной группы компактной поверхности

Покажем на примерах, как использовать теорему 4.1 для определения строения фундаментальной группы различных компактных связных 2-многообразий.

Примеры

5.1. Тор T . Так как $T = S^1 \times S^1$, то по теореме II.7.1

$$\pi(T) \approx \pi(S^1) \times \pi(S^1)$$

есть произведение двух бесконечных циклических групп, т. е. свободная абелева группа с двумя образующими. Мы выведем сейчас этот результат из теоремы 4.1. Этот простой случай послужит хорошим введением для остальных примеров.

Представим тор в виде пространства, полученного из квадрата отождествлением его противоположных сторон, как показано на рис. 4.5. При таком отождествлении стороны a и b становятся окружностями, пересекающимися в точке x_0 . Пусть y — центр квадрата и $U = T - \{y\}$. Обозначим через V образ внутренности квадрата при указанном отождествлении. Тогда U и V — открытые множества, U , V и $U \cap V$ линейно связны, а V односвязно (V гомеоморфно открытому диску). Поэтому можно применить теорему 4.1 и заключить, что

$$\psi_1: \pi(U, x_1) \rightarrow \pi(T, x_1)$$

— эпиморфизм, а его ядром служит наименьшая нормальная подгруппа, содержащая образ гомоморфизма

$$\varphi_1: \pi(U \cap V, x_1) \rightarrow \pi(U, x_1).$$

Так как граница квадрата есть деформационный ретракт квадрата без одной точки, то объединение двух окружностей a и b будет деформационным ретрак-

том множества U . Поэтому $\pi(U, x_1)$ — свободная группа с двумя образующими. Точнее $\pi(U, x_0)$ — свободная группа с двумя образующими α и β , где α и β представляются окружностями a и b соответственно. Следовательно, $\pi(U, x_1)$ — свободная группа с двумя образующими

$$\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta, \quad \beta' = \delta^{-1}\beta\delta,$$

где δ — класс эквивалентности пути d , соединяющего точку x_0 с x_1 (см. рис. 4.5). Ясно, что пересечение $U \cap V$ имеет гомотопический тип окружности. Поэтому $\pi(U \cap V, x_1)$ — бесконечная циклическая группа, порожденная классом эквивалентности γ петли c , оббегающей один раз вокруг точки y . Из рис. 4.5 ясно также, что

$$\varphi_1(\gamma) = \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}.$$

Следовательно, группа $\pi(T, x_1)$ изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими α' и β' по нормальной подгруппе, порожденной элементом $\alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}$. Беря вместо точки x_1 точку x_0 , видим, что группа $\pi(T, x_0)$ изоморфна факторгруппе свободной группы с образующими α и β по нормальной подгруппе, порожденной элементом $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Все сказанное означает как раз, что мы имеем копредставление группы $\pi(T)$ (см. разд. III.6). В этом случае легко определить строение группы $\pi(T)$, исходя из ее копредставления. С одной стороны, образующие α и β коммутируют; отсюда следует, что $\pi(T)$ — коммутативная группа, и потому наименьшая нормальная подгруппа свободной группы с образующими α и β , содержащая $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, содержит также и коммутаторную подгруппу. С другой стороны, очевидно, что эта нормальная подгруппа сама содержится в коммутаторной. Следовательно, эти две подгруппы совпадают. Таким образом, на основании предложения III.5.3 заключаем, что $\pi(T)$ — свободная абелева группа с образующими α и β .

5.2. Действительная проективная плоскость P_2 . С помощью теоремы 4.1 докажем, что $\pi(P_2)$ — циклическая группа порядка 2. Представим P_2 в виде двуугольника с отождествленными противоположными ребрами, как показано на рис. 4.6. При таком отождествлении ребро a становится окружностью. Пусть y — центр двуугольника, $U = P_2 - \{y\}$, V — образ внутренности двуугольника при указанном отождествлении. Тогда выполняются все условия, позволяющие применить теорему 4.1. В этом случае окружность a будет деформационным ретрактом множества U ; поэтому $\pi(U, x_0)$ — бесконечная циклическая группа, порожденная классом α петли a . Группа $\pi(U, x_1)$ — также бесконечная циклическая, но порождена элементом $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$, где δ то же, что и в примере 5.1. Наконец, $\pi(U \cap V, x_1)$ будет бесконечной циклической группой с образующей γ — классом петли c , оббегающей один раз точку y . Ясно, что

$$\varphi_1(\gamma) = \alpha'^2.$$

Поэтому $\pi(P_2, x_1)$ — факторгруппа бесконечной циклической группы, порожденной элементом α' , по подгруппе, порожденной α'^2 , или, что эквивалентно, $\pi_2(P_2, x_0)$ — факторгруппа бесконечной циклической группы, порожденной α , по подгруппе, порожденной α^2 . Следовательно, $\pi(P_2)$ — циклическая группа порядка 2.

5.3. *Связная сумма n торов.* Метод, используемый в этом примере, совершенно аналогичен методам предыдущих примеров, но окончательный результат выглядит иначе и сложнее. Представим M , сумму n торов, в виде $4n$ -уголь-

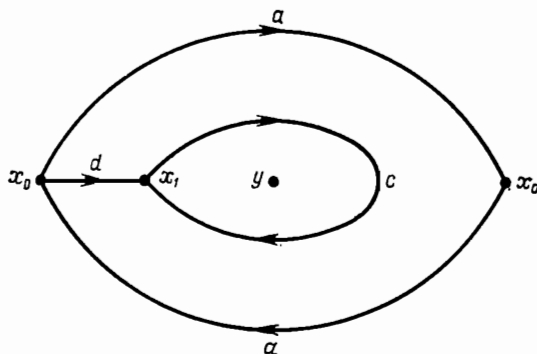


Рис. 4.6. Определение фундаментальной группы проективной плоскости.

ника с попарно отождествленными сторонами, как показано на рис. 4.7. При этом отождествлении ребра $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ становятся окружностями на M и любые две из них пересекаются только в базисной точке x_0 .

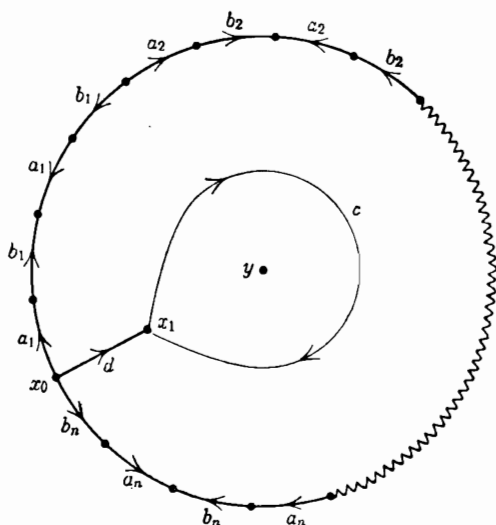


Рис. 4.7. Определение фундаментальной группы ориентируемой поверхности рода n .

Как и раньше, пусть $U = M - \{y\}$ — дополнение центра y , а V — образ внутренней многоугольника при отождествлении; V — открытый диск в M . Объединение $2n$ окружностей $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ есть деформационный

ретракт множества U ; следовательно, $\pi(U, x_0)$ — свободная группа с $2n$ образующими $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n$, где α_i и β_i — классы окружностей a_i и b_i соответственно. Как и раньше, $\pi(U \cap V, x_1)$ будет бесконечной циклической группой с образующей γ — классом окружности c и

$$\varphi_1(\gamma) = \prod_{i=1}^n [\alpha'_i, \beta'_i],$$

где через $[\alpha'_i, \beta'_i]$ обозначен коммутатор $\alpha'_i \beta'_i \alpha_i'^{-1} \beta_i'^{-1}$,

$$\alpha'_i = \delta^{-1} \alpha_i \delta,$$

$$\beta'_i = \delta^{-1} \beta_i \delta.$$

Таким образом, $\pi(M, x_0)$ — факторгруппа свободной группы с образующими $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ по нормальной подгруппе, порожденной элементом $\prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$, т. е. $\pi(M, x_0)$ задается копредставлением, состоящим из обра-

зующих $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n\}$ и одного соотношения $\prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$.

В случае $n > 1$ нет простого инвариантного описания этой группы. Однако легко видеть, что если прокоммутировать группу $\pi(M, x_0)$ (т. е. взять фак-

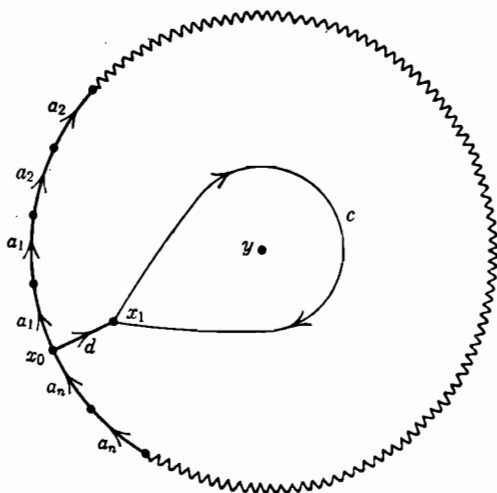


Рис. 4.8. Определение фундаментальной группы неориентируемой поверхности рода n (первый метод).

торгруппу по ее коммутаторной подгруппе), то получится свободная абелева группа с $2n$ образующими. Это вытекает из того, что единственное соотношение свободной группы с образующими $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ содержится в ее коммутаторной подгруппе. Отсюда следует, что при $m \neq n$ связная сумма m

торов и связная сумма n торов имеют неизоморфные фундаментальные группы. Поэтому у них разный гомотопический тип. Этот результат сильнее дока-

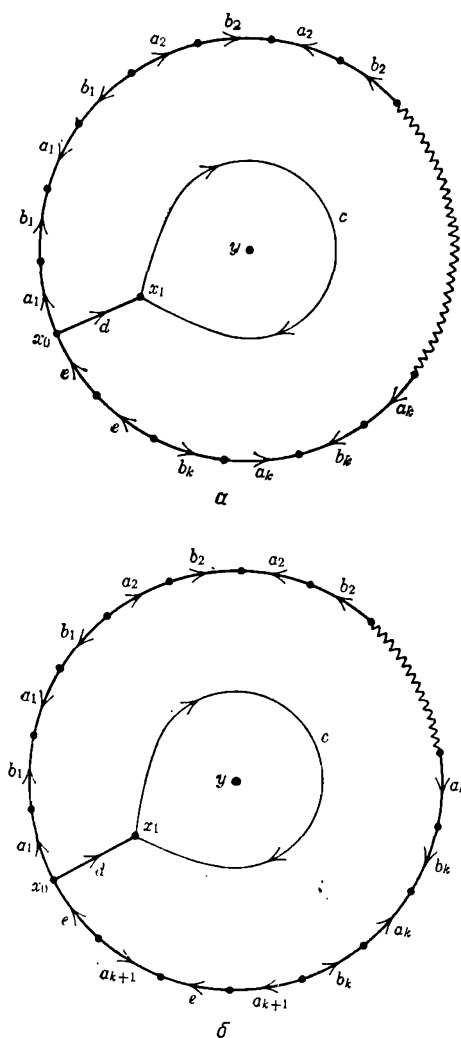


Рис. 4.9. Определение фундаментальной группы неориентируемой поверхности рода n (второй метод): a — n нечетно,

$$k = \frac{1}{2}(n-1); \quad б — n \text{ четно, } k = \frac{1}{2}(n-2).$$

занного в гл. I, где выяснено, что указанные пространства негомеоморфны (при этом предполагалась топологическая инвариантность эйлеровой характеристики).

5.4. *Связная сумма n проективных плоскостей.* Связную сумму M n проективных плоскостей можно получить попарным отождествлением сторон $2n$ -угольника, как показано на рис. 4.8. Производя точно такую же процедуру, как и раньше, находим, что фундаментальная группа $\pi(M, x_0)$ задается копредставлением, состоящим из образующих

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\},$$

где α_i — класс окружности a_i , и одного соотношения

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2.$$

В случае $n > 1$ снова нет простого инвариантного описания группы. Если ее прокоммутировать, то получим абелеву группу, копредставление которой состоит из n образующих и одного соотношения. Читатель, знакомый с теорией конечно порожденных абелевых групп, легко сможет вычислить ранг и коэффициенты кручения этой группы, приводя некоторую целочисленную матрицу к каноническому виду. Мы проделаем это, воспользовавшись геометрическими соображениями.

Применяя теорему 1.7.2, видим, что M , неориентируемая поверхность рода n , имеет следующее представление:

- (а) если n — нечетное число, то поверхность M гомеоморфна связной сумме ориентируемой поверхности рода $(n - 1)/2$ и проективной плоскости;
- (б) если n — четное число, то поверхность M гомеоморфна связной сумме ориентируемой поверхности рода $(n - 2)/2$ и бутылки Клейна.

Это приводит к представлению M в виде $2n$ -угольника с попарно отождествленными сторонами, как показано на рис. 4.9. В случае (а) группа $\pi(M, x_0)$ задается копредставлением с образующими

$$\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k, \varepsilon\}$$

и одним соотношением

$$[\alpha_1, \beta_1] [\alpha_2, \beta_2] \dots [\alpha_k, \beta_k] \varepsilon^2,$$

а в случае (б) группа $\pi(M, x_0)$ задается копредставлением с образующими

$$\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k, \alpha_{k+1}, \varepsilon\}$$

и одним соотношением

$$[\alpha_1, \beta_1] [\alpha_2, \beta_2] \dots [\alpha_k, \beta_k] \alpha_{k+1} \varepsilon \alpha_{k+1}^{-1} \varepsilon.$$

Используя это копредставление, легко определить строение прокоммутированной группы

$$\frac{\pi(M)}{[\pi(M), \pi(M)]}.$$

В случае (а) она совпадает с прямым произведением свободной абелевой группы с $2k$ образующими $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k\}$ и циклической группы порядка 2 (порожденной элементом ε), т. е. является абелевой группой ранга $2k = n - 1$ с одним коэффициентом кручения, равным 2. В случае (б) она совпадает с прямым произведением свободной абелевой группы с $2k + 1$ образующими $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k, \alpha_{k+1}\}$ и циклической группы порядка 2 (порожденной элементом ε), т. е. является абелевой группой ранга $2k + 1 = n - 1$ с одним коэффициентом кручения, равным 2.

Наши результаты о прокоммутированных фундаментальных группах сформулируем вместе следующим образом.

Предложение 5.1. Если M — связная сумма n торов, то прокоммутурированная фундаментальная группа $\pi(M)/[\pi(M), \pi(M)]$ является свободной абелевой группой ранга $2n$. Если M — связная сумма n проективных плоскостей, то прокоммутурированная фундаментальная группа имеет ранг $n - 1$ и один коэффициент кручения, равный 2.

Из этого предложения следует, что компактное связное ориентируемое 2-многообразие никогда не имеет тот же гомотопический тип, что и компактное связное неориентируемое 2-многообразие, поскольку прокоммутурированная фундаментальная группа неориентируемого многообразия всегда содержит элемент порядка 2, тогда как в ориентируемом случае каждый элемент бесконечного порядка. Из предложения 5.1 также следует, что при $m \neq n$ связная сумма m проективных плоскостей и связная сумма n проективных плоскостей имеют разные гомотопические типы.

Эти результаты слегка улучшают результаты гл. I, полученные с помощью эйлеровой характеристики.

Упражнения

5.1. Воспользовавшись результатами разд. I.10—I.12, докажите, что фундаментальная группа компактной связной поверхности с краем является свободной группой. Как в ориентируемом, так и в неориентируемом случаях выразите ранг этой фундаментальной группы через эйлерову характеристику поверхности и число компонент края.

5.2. Покажите, как геометрически получить два различных копредставления фундаментальной группы бутылки Клейна, о которых шла речь в примере из разд. III.6.

5.3. Рассмотрим копредставление фундаментальной группы бутылки Клейна с двумя образующими a и b и одним соотношением $baba^{-1}$. Докажите, что подгруппа, порожденная элементом b , будет нормальной, а соответствующая факторгруппа — бесконечной циклической. Докажите также, что подгруппа, порожденная элементом a , будет бесконечной циклической.

5.4. Тот факт, что связная сумма трех проективных плоскостей гомеоморфна связной сумме тора и проективной плоскости, порождает два разных копредставления фундаментальной группы (как в упражнении 5.2). Докажите алгебраически, что эти копредставления задают изоморфные группы.

5.5. Покажите, как для любого целого числа $n > 2$ построить пространство, фундаментальная группа которого является циклической группой порядка n .

5.6. Докажите, что копредставление фундаментальной группы компактной неориентируемой поверхности рода n состоит из $2n$ образующих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и одного соотношения $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} \dots \alpha_n^{-1}\alpha_n$ (см. упражнение I.8.8).

5.7. Докажите, что копредставление фундаментальной группы компактной ориентируемой поверхности рода n состоит из $2n$ образующих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и одного соотношения $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{2n}\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} \dots \alpha_{2n}^{-1}$ (см. упражнение I.8.9).

6. Применение к теории узлов

По определению *узел* — это простая замкнутая кривая в евклидовом 3-пространстве. Узел является математической абстракцией обыкновенного узла, сделанного из куска веревки, концы которой сращены, так что ее уже невозможно развязать.

Необходимо определить, в каком случае два узла должны считаться эквивалентными или неэквивалентными. При этом было бы очень желательно дать такое определение, чтобы оно соответствовало обычному пониманию того, когда два узла из двух разных кусков веревки считаются одинаковыми. В результате попыток, делавшихся на протяжении многих лет, выработалось следующее наиболее приемлемое

Определение. Два узла K_1 и K_2 , содержащиеся в $\mathbb{R}^3$, называются *эквивалентными*, если существует такой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, что $h(K_1) = K_2$.

Очевидно, что если K_1 и K_2 эквивалентны в смысле этого определения, то h гомеоморфно отображает $\mathbb{R}^3 - K_1$ на $\mathbb{R}^3 - K_2$. Поэтому $\mathbb{R}^3 - K_1$ и $\mathbb{R}^3 - K_2$ имеют изоморфные фундаментальные группы. Следовательно, если для двух узлов K_1 и K_2 в $\mathbb{R}^3$ группы $\pi(\mathbb{R}^3 - K_1)$ и $\pi(\mathbb{R}^3 - K_2)$ окажутся неизоморфными, то узлы K_1 и K_2 будут неэквивалентными. Это наиболее общий способ различения узлов. Фундаментальная группа $\pi(\mathbb{R}^3 - K)$ называется *группой узла* K .

Мы покажем, как применить теорему Зейферта — ван Кампена для определения копредставления групп некоторых узлов, а затем обсудим вопрос, как доказывать, что группы этих узлов неизоморфны.

В некоторых случаях удобно представлять узел вложенным не в $\mathbb{R}^3$, а в 3-сферу

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4: |x| = 1\}.$$

Различие небольшое, так как сфера S^3 гомеоморфна одноточечной компактификации Александрова пространства $\mathbb{R}^3$; это можно доказать с помощью стереографической проекции (см. Ньюман, *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge: The University Press, 1951, pp. 64—65).

Упражнение

6.1. Пусть K — узел в $\mathbb{R}^3$. Представим S^3 в виде одноточечной компактификации пространства $\mathbb{R}^3$. Докажите, что группы $\pi(\mathbb{R}^3 - K)$ и $\pi(S^3 - K)$ изоморфны. [Указание. Воспользуйтесь теоремой 4.1.]

Рассмотрим класс узлов, называемых *торическими*, так как они лежат на торе, вложенном в S^3 стандартным образом (т. е.

тор получается вращением окружности вокруг прямой в ее плоскости). Вспомним, что тор можно рассматривать как пространство с отождествленными противоположными сторонами единичного квадрата

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

или как пространство, построенное из всей плоскости $\mathbb{R}^2$ отождествлением двух точек (x, y) и (x', y') тогда и только тогда, когда числа $x - x'$ и $y - y'$ целые. Пусть $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ — отображение отождествления, а L — прямая в $\mathbb{R}^2$, проходящая через начало

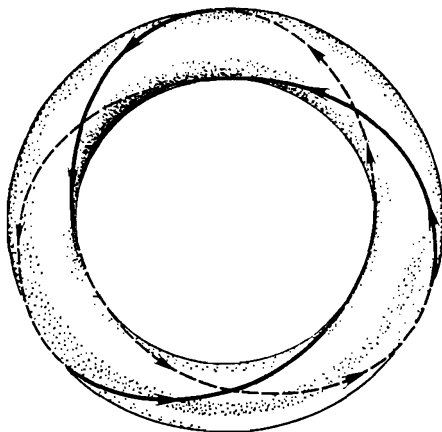


Рис. 4.10. Торический узел типа $(2,3)$.

координат с угловым коэффициентом m/n , где $1 < m < n$ и m, n — взаимно простые целые числа. Нетрудно видеть, что образ

$$K = p(L)$$

будет простой замкнутой кривой, лежащей на торе T . Если теперь предположить, что тор T стандартно вложен в $\mathbb{R}^3$, то получим

$$K \subset T \subset \mathbb{R}^3$$

и K — узел в $\mathbb{R}^3$, называемый *торическим узлом типа (m, n)* . Эти узлы и будут основным объектом нашего изучения (см. рис. 4.10 для $m = 2, n = 3$).

Мы будем также рассматривать *незаузленные окружности* в $\mathbb{R}^3$, т. е. любой узел, эквивалентный обычной окружности, лежащей в плоскости в $\mathbb{R}^3$.

Для начала найдем копредставления группы торического узла типа (m, n) и группы незаузленной окружности. Первый шаг — разложить 3-сферу S^3 на два куска так, чтобы можно было вос-

пользоваться теоремой Зейферта — ван Кампена. Пусть

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3: x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2 + x_4^2\},$$

$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3: x_1^2 + x_2^2 \geq x_3^2 + x_4^2\}.$$

Ясно, что A и B — замкнутые подмножества сферы S^3 , $A \cup B = S^3$ и

$$A \cap B = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3: x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}; x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2} \right\}.$$

Отсюда следует, что $A \cap B$ — тор; в самом деле, $A \cap B$ — декартово произведение окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1/2$ (в плоскости (x_1, x_2)) и окружности $x_3^2 + x_4^2 = 1/2$ (в плоскости (x_3, x_4)).

Мы утверждаем, что A и B — полнотория (т. е. гомеоморфны произведению диска на окружность). Докажем это, непосредственно выписывая формулу, задающую гомеоморфизм. Пусть

$$D = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$S^1 = \left\{ (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2: x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

— замкнутый диск и окружность, оба радиуса $\sqrt{2}/2$. Определим отображение

$$f: D \times S^1 \rightarrow A$$

формулой

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, \sqrt{2}x_3[1 - (x_1^2 + x_2^2)]^{1/2}, \sqrt{2}x_4[1 - (x_1^2 + x_2^2)]^{1/2}).$$

Очевидно, что это отображение непрерывно. Предоставляем читателю проверить, что оно взаимно однозначно и является отображением на A , следовательно, гомеоморфизмом. Аналогично для множества B . Отсюда ясно, что тор $A \cap B$ представляет собой общий край двух полноторий A и B .

Предоставляем читателю проверить, что при стереографической проекции тор $A \cap B$ соответствует стандартному тору в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим группу незаузленной окружности K в S^3 . В качестве незаузленной окружности можно взять «центральную линию» полнотория A :

$$K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A: x_1 = x_2 = 0\}.$$

Тогда K — единичная окружность в плоскости (x_3, x_4) . Ясно, что край полнотория A является деформационным ретрактом для

$A — K$; следовательно, B — деформационный ретракт для $S^3 — K$. Ясно также, что центральная линия полнотория B

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in B: x_3 = x_4 = 0\}$$

есть деформационный ретракт для B . Поэтому центральная линия полнотория B — это деформационный ретракт для $S^3 — K$. Таким образом, $S^3 — K$ имеет гомотопический тип окружности и группа K — бесконечная циклическая. Итак, мы доказали

Предложение 6.1. *Группа незаузеленной окружности в $\mathbb{R}^3$ — бесконечная циклическая.*

Теперь рассмотрим торический узел K типа (m, n) в S^3 . Узел K можно представить в виде подмножества тора $A \cap B \subset S^3$. Для определения фундаментальной группы пространства $S^3 — K$ удобно применить теорему Зейферта — ван Кампена, используя равенство

$$S^3 — K = (A — K) \cup (B — K).$$

Пространства $A — K$, $B — K$ и $(A — K) \cap (B — K)$ линейно связны, но, к сожалению, множества $A — K$ и $B — K$ не открыты в $S^3 — K$. Как обойти эту трудность, ясно: чтобы получить открытые множества того же гомотопического типа, что A и B , надо немного расширить A и B .

Точнее, обозначим через N трубчатую окрестность узла K радиуса ε . Число $\varepsilon > 0$ можно выбрать достаточно малым, чтобы множество $S^3 — N$ было деформационным ретрактом для $S^3 — K$. Точный смысл выражения «достаточно малое» зависит от выбора целых чисел m и n . Пусть U и V будут $\varepsilon/2$ -окрестностями множеств A и B соответственно. Ясно, что U и V гомеоморфны произведению открытого диска на окружность, A и B — деформационные ретракты для U и V соответственно, а пересечение $U \cap V$ — «утолщенный» тор, т. е. оно гомеоморфно произведению множества $A \cap B$ и открытого интервала $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$. Теперь можно воспользоваться равенством

$$S^3 — N = (U — N) \cup (V — N)$$

и для получения копредставления группы $\pi(S^3 — N) \approx \pi(S^3 — K)$ применить теорему Зейферта — ван Кампена.

Во-первых, $U — N$ и $V — N$ имеют гомотопический тип окружности; в самом деле, центральные линии полноторий A и B являются их деформационными ретрактами. Поэтому их фундаментальные группы — бесконечные циклические.

Во-вторых, пространства $(U — N) \cap (V — N) = (U \cap V) — N$ и $(A — K) \cap (B — K) = (A \cap B) — K$ имеют один и тот же гомотопический тип. В самом деле, деформационным ретрактом этих пространств служит множество $(A — N) \cap (B — N) = (A \cap B) —$

— N . Легко видеть, что $(A \cap B) - K$ есть подмножество тора $A \cap B$, гомеоморфное произведению окружности и открытого интервала. Это узкая полоска, закручивающаяся вокруг тора наподобие ленты. Ее фундаментальная группа — бесконечная циклическая.

Наконец, мы должны определить гомоморфизмы

$$\varphi_1: \pi(U \cap V - N) \rightarrow \pi(U - N),$$

$$\varphi_2: \pi(U \cap V - N) \rightarrow \pi(V - N).$$

Здесь подробности мы оставляем читателю. Результат состоит в том, что один из этих гомоморфизмов имеет степень m , а другой — степень n . (Говорят, что гомоморфизм одной бесконечной циклической группы в другую имеет степень m , если образ образующей первой группы является m -й степенью образующей второй группы.) Если скомбинировать этот результат с упражнением 4.1 (с), то получим

Предложение 6.2. *Копредставление группы G торического узла типа (m, n) состоит из двух образующих α , β и одного соотношения $\alpha^m \beta^n$.*

Остается доказать, что эти группы неизоморфны для различных значений пар (m, n) . Для доказательства воспользуемся методом О. Шрейера. Рассмотрим в группе торического узла элемент $\alpha^m = \beta^{-n}$. Этот элемент коммутирует с α и β и потому с каждым элементом; следовательно, он принадлежит центру. Обозначим через N подгруппу, порожденную этим элементом; очевидно, она нормальна. Рассмотрим факторгруппу G/N . Пусть α' и β' означают классы элементов α и β в G/N . Очевидно, что группа G/N порождена элементами α' и β' и имеет следующее копредставление:

образующие α' , β' , соотношения α'^m, β'^n .

Отсюда следует, что G/N — свободное произведение циклической группы порядка m (порожденной α') и циклической группы порядка n (порожденной β'). Нетрудное доказательство этого факта оставляется читателю.

Теперь применим упражнение III.4.1 для вывода того, что центр группы G/N равен $\{1\}$. Так как образ центра группы G содержится в центре группы G/N , то N совпадает со всем центром группы G . Следовательно, факторгруппа группы G по ее центру — это свободное произведение двух циклических групп (порядков m и n). Применяя результат упражнения III.4.6, заключаем, что целые числа m и n полностью определяются (с точностью до их порядка) группой G . Таким образом, мы доказали

Предложение 6.3. Если торические узлы типов (m, n) и (m', n') эквивалентны, то $m = m'$ и $n = n'$ или $m = n'$ и $n = m'$. При $m, n > 1$ ни один торический узел не эквивалентен незаузленной окружности.

Итак, с помощью торических узлов мы построили бесконечное семейство неэквивалентных узлов.

Разумеется, большинство узлов — не торические. Настоящий раздел можно рассматривать как краткое введение в теорию узлов. Читатель, желающий ближе познакомиться с этой темой, может прочитать книги Кроуэлла и Фокса [4] и Нойвирта [5].

ПРИМЕЧАНИЯ

По-видимому, теорема, близкая к теореме 2.1, впервые была доказана в 1931 г. Зейфертом (Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, *Ber. Sächs. Akad. Wiss.*, 83 (1931), 26—66). Немного позже была открыта и независимо доказана ван Кампеном аналогичная теорема (On the connection between the fundamental groups of some related spaces, *Amer. J. Math.*, 55 (1933), 261—267). Однако в американских книгах и статьях на эту теорему ссылаются как на теорему ван Кампена. Разумеется, формулировка теоремы как решения задачи универсального отображения появилась позже. Наме изложение основано на статье Кроуэлла [3], которая, по-видимому, навеяна лекциями Фокса в Принстоне; см. их совместный учебник [4].

Читатель, знакомый с теорией симплициальных комплексов, легко может вывести зейфертов вариант теоремы Зейферта — ван Кампена (сформулированный в разд. 5.2 книги Зейферта и Трельфалла [2]) из теоремы 2.1 и леммы 3.2 данной главы. Для этого надо использовать свойства *регулярной окрестности* подкомплекса симплициального комплекса, изложенные в общих чертах в разд. II.9 книги Эйленберга и Стинрода (Foundations of algebraic topology, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1951).

Свободные произведения с объединенными подгруппами

Пусть $\{W\} \cup \{V_i: i \in I\}$ — такое покрытие пространства X линейно связными открытыми множествами, что $V_i \cap V_j = W$, если $i \neq j$, и $x_0 \in W$ (см. упражнение 3.1). Предположим, что для каждого индекса i гомоморфизм $\pi(W, x_0) \rightarrow \pi(V_i, x_0)$ является *мономорфизмом*. Тогда фундаментальная группа, определяемая теоремой 2.2, имеет строение, хорошо изученное специальными по теории групп; она называется «свободным произведением с объединенной подгруппой». Это факторгруппа свободного произведения групп $\pi(V_i)$, полученная отождествлением различных подгрупп, соответствующих группе $\pi(W, x_0)$ при заданных мономорфизмах. Каждый элемент такого свободного произведения с объединенной подгруппой представляется единственным образом «словом в каноническом виде». Хотя такие группы занимали и занимают видное место в теории групп, до сих пор в топологии они играют второстепенную роль. Дальнейшую информацию об этих группах можно найти в учебниках по теории групп, приведенных в списке литературы к гл. III.

Гипотеза Пуанкаре

Из вычислений, продланных в настоящей главе, следует, что любая односвязная компактная поверхность гомеоморфна 2-сфере S^2 . В начале 1900-х гг. Пуанкаре выдвинул гипотезу о том, что аналогичное утверждение

справедливо и для 3-многообразий, а именно что компактное односвязное 3-многообразие гомеоморфно 3-сфере S^3 . Несмотря на значительные усилия многих выдающихся математиков, до сих пор неизвестно, справедлива ли эта гипотеза. Легко привести примеры компактных односвязных 4-многообразий, негомеоморфных S^4 (например, $S^2 \times S^2$). Однако для всех целых чисел $n > 3$ существует аналог гипотезы Пуанкаре, а именно что компактное n -многообразие, имеющее гомотопический тип n -сферы, гомеоморфно сфере S^n . Эта обобщенная гипотеза Пуанкаре для $n > 4$ была доказана в 1960 г. Смейлом (см. *Ann. Math.*, 74 (1961), 391—406)¹). Случай $n = 4$ остается открытым.

До тех пор пока не решена классическая гипотеза Пуанкаре (случай $n = 3$), мы не можем даже надеяться получить классификационную теорему для компактных 3-многообразий.

Гомотопический и топологический типы компактных многообразий

На основании вычисления фундаментальных групп компактных поверхностей, проведенного в данной главе, мы выяснили следующий факт: если две компактные поверхности негомеоморфны, то они имеют разный гомотопический тип. Известно, что аналогичное утверждение для компактных 3-многообразий неверно; существуют довольно простые примеры компактных трехмерных многообразий одного и того же гомотопического типа, но не гомеоморфных между собой (так называемые пространства линзы). Доказательство этого факта явилось кульминационным моментом работы математиков ряда стран в течение нескольких лет. Детали довольно сложны.

По-видимому,² в более высоких размерностях такие примеры неизвестны³).

Фундаментальная группа некомпактной поверхности

Фундаментальная группа любой некомпактной поверхности (со счетной базой) представляет собой свободную группу со счетным или конечным множеством образующих. Любая односвязная некомпактная поверхность гомеоморфна плоскости $\mathbb{R}^2$. Доказательство этих фактов можно найти в книге Альфорса и Сарио [4] (см. также упражнения в разд. VI.5).

Набросок доказательства того, что любая конечно копредставимая группа может быть фундаментальной группой компактного 4-многообразия

Сначала заметим, что фундаментальная группа пространства $S^1 \times S^3$ — бесконечная циклическая. Следовательно, при построении связной суммы n экземпляров пространства $S^1 \times S^3$ мы получим ориентируемое компактное

¹) Русский перевод см. в сб. *Математика*, 5:3 (1962), 139—155.— *Прим. ред.*

²) В настоящее время этот вопрос выяснен достаточно полно. Работа С. П. Новикова (*Изв. АН СССР*, 30 (1966), 207—246) о топологической инвариантности классов Понтрягина вместе с предшествующими работами Милнора сразу показала, что имеются негомеоморфные, но гомотопически эквивалентные многообразия в высоких размерностях. Д. Сулливан проверил, что здесь можно взять гомотопический тип комплексного пространства. Из работы Керби и Зибемана (см. прим. ред. на стр. 67) следует, что второе многообразие можно взять даже нетриангулируемым (с учетом оговорки о локальном характере триангуляций, см. то же прим.).— *Прим. ред.*

4-многообразии, фундаментальная группа которого — свободная группа с n образующими (см. упражнение 3.7).

Теперь предположим, что M — компактное ориентируемое 4-многообразие и C — простая гладкая замкнутая кривая в M ; можно показать, что любая достаточно малая замкнутая трубчатая окрестность N кривой C гомеоморфна $S^1 \times E^3$ (это утверждение было бы неверным, если бы многообразие M было неориентируемым). Кроме того, край окрестности N гомеоморфен $S^1 \times S^2$ и пространство $S^1 \times S^2$ есть край 4-многообразия $E^2 \times S^2$. Обозначим через M' дополнение к внутренности окрестности N и построим факторпространство пространства $M \cup (E^2 \times S^2)$, отождествляя соответствующие точки края окрестности N и края пространства $E^2 \times S^2$; полученное факторпространство обозначим через M_1 . Легко видеть, что M_1 — компактное ориентируемое 4-многообразие; процедура получения M_1 из M часто называется «перестройкой».

Какова фундаментальная группа пространства M_1 ? Ответить на этот вопрос можно, дважды применяя теорему Зейферта — ван Кампена. Во-первых, $M = M' \cup N$ и пересечение $M' \cap N$ гомеоморфно $S^1 \times S^2$. Легко видеть, что гомоморфизм $\pi(M' \cap N) \rightarrow \pi(N)$ (индуцированный включением) является изоморфизмом; следовательно, на основании упражнения 4.1 (а) гомоморфизм $\pi(M') \rightarrow \pi(M)$ также является изоморфизмом. Во-вторых, $M_1 = M' \cup (E^2 \times S^2)$ и $M' \cap (E^2 \times S^2) = M' \cap N$. Так как пространство $E^2 \times S^2$ односвязно, то применима теорема 4.1, и можно заключить, что $\pi(M') \rightarrow \pi(M_1)$ — эпиморфизм, ядро которого совпадает с наименьшей нормальной подгруппой, содержащей образ гомоморфизма $\pi(M' \cap N) \rightarrow \pi(M')$; но очевидно, что образы гомоморфизмов $\pi(M' \cap N) \rightarrow \pi(M')$ и $\pi(C) \rightarrow \pi(M)$ эквивалентны. (Примечание. На самом деле, применяя теорему Зейферта — ван Кампена, каждый раз необходимо ссылаться на лемму 3.2, так как множества M' и N не открыты в M .)

Подведем итог: группа $\pi(M_1)$ естественно изоморфна факторгруппе группы $\pi(M)$ по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей образ гомоморфизма $\pi(C) \rightarrow \pi(M)$. Другими словами, мы «уничтожаем» элемент α группы $\pi(M)$, представляемый замкнутым путем C . Если группа $\pi(M)$ задана некоторым копредставлением, то копредставление группы $\pi(M_1)$ состоит из того же множества образующих, что и копредставление группы $\pi(M)$, и одного дополнительного соотношения, а именно α .

Нетрудно показать, что любой элемент $\alpha \in \pi(M)$ можно представить замкнутым гладким путем C без самопересечений, как и требуется в предыдущих рассуждениях. На самом деле это утверждение справедливо для любого n -мерного многообразия M при $n \geq 3$. В многообразиях размерности $n \geq 3$ есть достаточно «места» для того, чтобы малыми деформациями избавиться от самопересечений любого замкнутого пути.

Пусть G — группа, заданная копредставлением, состоящим из n образующих $x_1, x_2, \dots, x_n$ и k соотношений $r_1, r_2, \dots, r_k$. Предположим, что M — связная сумма n экземпляров пространства $S^1 \times S^3$; тогда $\pi(M)$ — свободная группа с n образующими, которые мы также обозначим через $x_1, \dots, x_n$. Проплывем k раз перестройку многообразия M , уничтожая последовательно элементы $r_1, r_2, \dots, r_k$. В результате получим компактное ориентируемое 4-многообразие M_k , для которого $\pi(M_k) \approx G$, что и требуется¹⁾.

Это построение использовано А. А. Марковым в его доказательстве того, что не может существовать алгоритма для решения вопроса, гомеоморфны ли два данных компактных ориентируемых триангулируемых 4-многообразия. Доказательство Маркова опирается на факт несуществования общего алгоритма для выяснения того, задают ли два данных копредставления изоморф-

¹⁾ Этот результат принадлежит Зейферту и Трельфаллю [2, стр. 208, упр. 4].

ные группы (см. Proceedings of International Congress of Mathematicians, 1958, pp. 300—306; см. также статью Буне, Хакена и Познапу в Contribution to Mathematical Logik, Nord Holland Publication Company, Amsterdam, 1968, pp. 37—74).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфорс, Сарно (Ahlfors L. V., Sario L.), Riemann surfaces, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1960, chapter I.
2. Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, Гостехиздат, М., 1938, гл. 7.
3. Кроуэлл (Crowell R. H.), On the van Kampen theorem, *Pac. J. Math.*, 9 (1959), 43—50.
4. Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, изд-во «Мир», М., гл. V, добавление III.
5. Нойвирт (Neuwirth L. P.), Knot groups (Annals of Mathematics Studies No. 56), Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1965.
6. Хилтон П., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, изд-во «Мир», М., 1966, гл. VI.

Глава V

НАКРЫВАЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Введение

Предположим, что X — топологическое пространство; *накрывающее пространство* пространства X состоит из пространства $\tilde{X}$ и непрерывного отображения p пространства $\tilde{X}$ на X , удовлетворяющего довольно сильным требованиям правильности. Точное определение дано ниже. Теория накрывающих пространств важна не только в топологии, но также в таких связанных с ней разделах математики, как дифференциальная геометрия, теория групп Ли и теория римановых поверхностей.

Теория накрывающих пространств тесно связана с изучением фундаментальной группы. Много основных вопросов, касающихся пространств, можно свести к чисто алгебраическим вопросам, касающимся фундаментальных групп. Практически нельзя дать законченное изложение одной из этих тем без привлечения другой.

2. Определение и некоторые примеры накрывающих пространств

В настоящей главе мы будем предполагать, что, если не оговорено противное, *все пространства линейно связны и локально линейно связны* (определение см. в разд. II.2). Этого предположения мы больше повторять не будем. Кроме того, необходимо еще потребовать, чтобы все рассматриваемые здесь пространства удовлетворяли аксиомам отделимости.

Определение. Пусть X — топологическое пространство. *Накрывающим пространством* для X , или *накрытием*, называется пара, состоящая из пространства $\tilde{X}$ и непрерывного отображения $p: \tilde{X} \rightarrow X$, удовлетворяющих следующему условию: для каждой точки $x \in X$ найдется такая линейно связная открытая окрестность U , что каждая компонента связности множества $p^{-1}(U)$ при отображении p топологически отображается на U (в частности, предполагается, что множество $p^{-1}(U)$ не пусто). Любая такая открытая окрестность U называется *элементарной окрестностью*.

Отображение p называется *отображением накрытия*; часто его называют *проекцией*.

Чтобы пояснить определение, рассмотрим несколько примеров. Обсуждение некоторых из них будет неформальным, чтобы выработать интуицию в вопросах, относящихся к накрывающим пространствам; такое обсуждение часто бывает полезнее более строгого и формального.

Примеры

2.1. Пусть отображение $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ определено формулой

$$p(t) = (\sin t, \cos t)$$

для любого элемента $t \in \mathbb{R}$. Тогда пара $(\mathbb{R}, p)$ будет накрывающим пространством единичной окружности S^1 . В качестве элементарной окрестности можно взять любой открытый интервал окружности S^1 . Этот пример — один из наиболее простых и важных.

2.2. Введем на плоскости $\mathbb{R}^2$ полярные координаты (r, θ) . Тогда единичная окружность S^1 задается условием $r = 1$. Для любого целого, положительного или отрицательного, числа n определим отображение $p_n: S^1 \rightarrow S^1$ уравнением

$$p_n(1, \theta) = (1, n\theta).$$

Отображение p_n накручивает окружность саму на себя n раз. Легко видеть, что при $n \neq 0$ пара (S^1, p_n) будет накрывающим пространством окружности S^1 . И снова любой открытый интервал в S^1 можно взять в качестве элементарной окрестности.

2.3. Если X — любое пространство и $i: X \rightarrow X$ — тождественное отображение, то пара (X, i) служит тривиальным примером накрывающего пространства для X . Аналогично, если f — гомеоморфизм из Y на X , то пара (Y, f) — накрывающее пространство для X ; это тоже довольно тривиальный пример. Позже в этой главе мы докажем, что если пространство X односвязно, то любое накрывающее пространство для X совпадает с одним из этих тривиальных накрывающих пространств. Поэтому нетривиальные примеры накрывающих пространств надо искать над неодносвязными пространствами.

2.4. Если $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , а $(\tilde{Y}, q)$ — накрывающее пространство для Y , то $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$ — накрывающее пространство для $X \times Y$ (отображение $p \times q$ определяется формулой $(p \times q)(x, y) = (px, qy)$). Доказательство оставляем читателю. Ясно, что если U и V — элементарные окрестности точек $x \in X$ и $y \in Y$ соответственно, то $U \times V$ — элементарная окрестность точки $(x, y) \in X \times Y$.

Используя этот результат и примеры 2.1 и 2.2, читатель может построить примеры накрывающих пространств для тора $T = S^1 \times S^1$. В частности, плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, цилиндр $\mathbb{R} \times S^1$ и сам тор могут быть накрывающими пространствами для тора. Рекомендуем читателю попытаться представить себе на рисунках, как в каждом случае устроена проекция p .

2.5. В разд. I.4 проективная плоскость P определялась как факторпространство 2-сферы S^2 . Обозначим через $p: S^2 \rightarrow P$ естественное отображение. Легко видеть, что (S^2, p) — накрывающее пространство для P . В качестве элементарной окрестности любой точки $x \in P$ можно взять открытый диск, содержащий x .

2.6. Пусть S — компактная ориентируемая поверхность рода 2. Покажем, как строить для S различные накрывающие пространства. Можно рассматривать S как факторпространство компактной ориентируемой поверхности M рода 0 с краем, состоящим из четырех окружностей C'_1, C''_1, C'_2 и C''_2 .

Естественное отображение $M \rightarrow S$ попарно отождествляет окружности, лежащие на крае (см. рис. 5.1): C'_i и C''_i склеиваются в одну окружность C_i при гомеоморфизме h_i , отображающем C'_i на C''_i , $i = 1, 2$. Можно представить

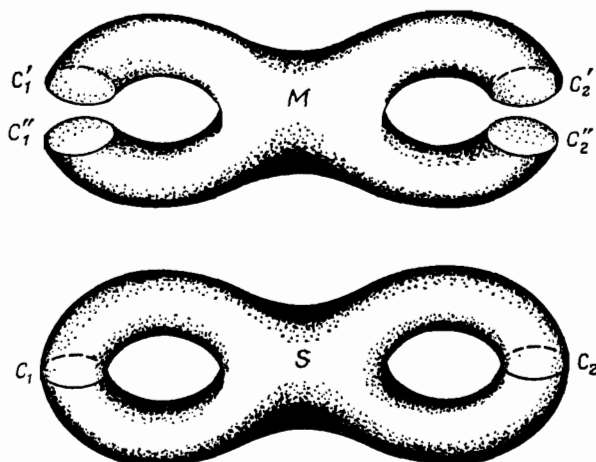


Рис. 5.1. Поверхность рода 2 как факторпространство поверхности с краем.

себе, что поверхность M получается из S разрезанием вдоль окружностей C_1 и C_2 .

Пусть D — конечное множество $\{1, 2, \dots, n\}$ с дискретной топологией, а $q: M \times D \rightarrow M$ — проекция произведения на первый сомножитель. Пространство $M \times D$ можно представлять себе как n непересекающихся экземпляров пространства M , каждый из которых отображением q гомеоморфно переводится на M . Опишем, как получить такое факторпространство произведения $M \times D$, что оно будет связным 2-многообразием $\tilde{S}$ и отображение q будет индуцировать отображение $p: \tilde{S} \rightarrow S$ факторпространств, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M \times D & \longrightarrow & \tilde{S} \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ M & \longrightarrow & S \end{array}$$

будет коммутативной. При этом окажется, что $(\tilde{S}, p)$ — накрывающее пространство для S . Отождествления, которые перевели $M \times D$ в S , имеют следующий вид: окружность $C'_i \times \{j\}$ отождествляется с окружностью $C''_i \times \{k\}$ при гомеоморфизме, переводящем точку (x, j) в точку $(h_i(x), k)$, где $i = 1$ или $i = 2$, а j и k — положительные целые числа $\leq n$. Такое попарное отождествление окружностей можно производить различными способами, лишь бы получающееся пространство $\tilde{S}$ было связным. Например, в случае $n = 3$ можно было бы отождествить

$$\begin{array}{l} C'_1 \times \{1\} \text{ с } C''_1 \times \{2\}, \\ C'_1 \times \{2\} \text{ с } C''_1 \times \{3\}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} C'_1 \times \{3\} &\subset C''_1 \times \{1\}, \\ C'_2 \times \{1\} &\subset C''_2 \times \{2\}, \\ C'_2 \times \{2\} &\subset C''_2 \times \{1\}, \\ C'_2 \times \{3\} &\subset C''_2 \times \{3\}. \end{aligned}$$

Предоставляем читателю построить другие примеры и доказать, что в каждом случае действительно получается накрывающее пространство. Очевидно, что можно было применить аналогичную процедуру для получения пространств, накрывающих поверхности более высокого рода.

2.7. Пусть X — подмножество плоскости, состоящее из двух окружностей, касающихся друг друга в некоторой точке:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y): (x-1)^2 + y^2 = 1\}, \\ C_2 &= \{(x, y): (x+1)^2 + y^2 = 1\}, \\ X &= C_1 \cup C_2. \end{aligned}$$

Приведем два различных примера накрывающих пространств для X . В первом примере через $\tilde{X}$ обозначим множество таких точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, что либо x , либо y (либо и x , и y) — целые числа; $\tilde{X}$ — объединение горизонтальных и вертикальных прямых. Зададим $p: \tilde{X} \rightarrow X$ формулой

$$p(x, y) = \begin{cases} (1 + \cos(\pi - 2\pi x), \sin 2\pi x), & \text{если } y \text{ — целое число,} \\ (-1 + \cos 2\pi y, \sin 2\pi y), & \text{если } x \text{ — целое число.} \end{cases}$$

Отображение p накручивает каждую горизонтальную прямую на окружность C_1 , а каждую вертикальную — на окружность C_2 .

Во втором примере для любого целого числа n обозначим через D_n окружность $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x-1)^2 + (y-3n)^2 = 1\}$, а через L — вертикальную прямую $\{(x, y): x = 0\}$. Окружности D_n попарно не пересекаются, и каждая из них касается прямой L . Положим

$$\tilde{X}' = L \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D_n \right)$$

и зададим отображение $p': \tilde{X}' \rightarrow X$ следующим образом. Пусть p' с помощью вертикального смещения отображает гомеоморфно каждую окружность D_n на C_1 , а прямую L накручивает на окружность C_2 в соответствии с формулой

$$p'(0, y) = \left(-1 + \cos \frac{2\pi y}{3}, \sin \frac{2\pi y}{3} \right).$$

Тогда $(\tilde{X}', p')$ — накрывающее пространство для X .

2.8. Этот пример предназначен для читателей, немного знакомых с теорией функций комплексного переменного. Как обычно, пусть

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

— показательная функция комплексного переменного z . Эта функция задает отображение $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$, где $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Мы утверждаем, что $(\mathbb{C}, \exp)$ — накрывающее пространство для $\mathbb{C} - \{0\}$ и что для любой точки $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ открытый диск

$$U_z = \{w \in \mathbb{C}: |w - z| < |z|\}$$

может служить элементарной окрестностью. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что любая компонента V прообраза диска

U_z при отображении $\exp$ гомеоморфно переводится этим отображением на U_z , т. е. что существует такая непрерывная функция $f: U_z \rightarrow V$, что для любой точки $w \in U_z$

$$\exp[f(w)] = w$$

и для любой точки $v \in V$

$$f(\exp v) = v.$$

В книгах по комплексному переменному такая функция f называется «ветвью логарифмической функции в диске U_z » и требуемые факты доказываются при выводе свойств логарифма.

Вспомним, что если $z = x + iy$, то $\exp z = (\exp x)(\cos y + i \sin y)$, где $\exp x = e^x$ — более привычный вид действительной показательной функции $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \{t \in \mathbb{R}: t > 0\}$. Из этой формулы следует, что если $C = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $C - \{0\} = \{r \in \mathbb{R}: r > 0\} \times S^1$ (воспользуемся полярными координатами), то $\exp: C \rightarrow C - \{0\}$ можно считать отображением $p \times q: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \{r \in \mathbb{R}: r > 0\} \times S^1$, где $p(x) = e^x$ и $q(y) = (\cos y, \sin y)$. Сравните с примерами 2.1, 2.3 и 2.4.

2.9. Приведем еще один пример из теории функций комплексного переменного. Для любого целого числа $n \neq 0$ зададим $p_n: C \rightarrow C$ формулой $p_n(z) = z^n$. Тогда $(C - \{0\}, p_n)$ — накрывающее пространство для $C - \{0\}$. Доказательство приводится в книгах по комплексному переменному при выяснении существования и свойств разных «ветвей» функции $\sqrt[n]{z}$; ситуация аналогична примеру 2.8. Отметим, что из области определения и из множества значений функции p_n обязательно надо выкинуть нуль, в противном случае мы не получим накрывающего пространства. Как и в примере 2.8, можно рассмотреть $C - \{0\} = \{r \in \mathbb{R}: r > 0\} \times S^1$ и представить накрывающее пространство $(C - \{0\}, p_n)$ в виде декартова произведения двух накрывающих пространств.

Для того чтобы лучше разъяснить понятие накрывающего пространства, приведем несколько примеров пространств, похожих на накрывающие, но не являющихся ими.

Определение. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если для каждой точки $x \in X$ найдется такая открытая окрестность V , что множество $f(V)$ открыто и f топологически отображает V на $f(V)$.

Легко доказать, что если $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , то p — локальный гомеоморфизм (доказательство вытекает из того, что в локально линейно связном пространстве компоненты линейной связности открытого множества открыты). Также нетрудно доказать, что отображение включения открытого подмножества топологического пространства во все пространство является локальным гомеоморфизмом и, наконец, что композиция двух локальных гомеоморфизмов снова является локальным гомеоморфизмом. Таким способом можно построить много примеров локальных гомеоморфизмов.

С другой стороны, легко построить примеры локальных гомеоморфизмов, которые будут отображениями на, но не дадут накрывающего пространства. Например, пусть p отображает открытый

интервал $(0, 10)$ на окружность S^1 по формуле

$$p(t) = (\cos t, \sin t).$$

В этом случае p — локальный гомеоморфизм, но пара $((0, 10), p)$ не образует накрывающего пространства для S^1 . (Какие точки окружности S^1 не имеют элементарных окрестностей?) Более общо, если $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X и V — связное открытое собственное подмножество в $\tilde{X}$, то $p|_V$ — локальный гомеоморфизм, но пара $(V, p|_V)$ не образует накрывающего пространства для X . Важно всегда помнить это различие между локальными гомеоморфизмами и отображениями накрытия.

Отметим, что локальный гомеоморфизм — открытое отображение (см. определение в приложении А). В частности, если $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , то p — открытое отображение.

Приведем лемму, которая позволит дать много новых примеров накрывающих пространств.

Лемма 2.1. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , A — линейно связное и локально линейно связное подпространство пространства X и $\tilde{A}$ — компонента линейной связности множества $p^{-1}(A)$. Тогда $(\tilde{A}, p|_{\tilde{A}})$ — накрывающее пространство для A .

Доказательство получается сразу. Два накрывающих пространства, описанные в упражнении 2.7, можно также построить, применяя эту лемму к пространствам $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \times S^1$, накрывающим тор $S^1 \times S^1$ (см. пример 2.4; в качестве A выбираем подмножество $A = (S^1 \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times S^1)$ тона $S^1 \times S^1$, где $x_0 \in S^1$).

Закончим этот раздел формулировкой двух основных задач теории накрывающих пространств:

- (а) Дать необходимое и достаточное условия того, что два накрывающих пространства $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$ для X изоморфны (по определению они изоморфны тогда и только тогда, когда существует такой гомеоморфизм h пространства $\tilde{X}_1$ на $\tilde{X}_2$, что $p_2 h = p_1$).
- (б) Для данного пространства X определить с точностью до изоморфизма все возможные накрывающие пространства.

Как мы увидим далее, удовлетворительное решение этих задач получается в терминах фундаментальных групп рассматриваемых пространств.

Упражнения

2.1. Докажите эквивалентность следующих четырех условий на топологическое пространство:

- (а) компоненты линейной связности любого открытого подмножества открыты;
- (б) каждая точка имеет базу, состоящую из множества линейно связных открытых окрестностей;
- (с) каждая точка имеет базу, состоящую из множества линейно связных окрестностей (не предполагается, что они открыты);
- (д) для каждой точки x и каждой ее окрестности U найдется такая ее окрестность V , что $V \subset U$ и любые две точки из V можно соединить дугой, лежащей в U .

Таким образом, любое из этих условий можно взять в качестве определения локальной линейной связности.

2.2. Докажите, что если $f: X \rightarrow Y$ — локальный гомеоморфизм и $A \subset X$, то $f|_A$ — локальный гомеоморфизм из A на $f(A)$.

2.3. Докажите, что если пространство X компактно и $f: X \rightarrow Y$ — локальный гомеоморфизм, то для любой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ конечно. Если к тому же предположить, что Y — связное хаусдорфово пространство, то f отображает X на Y .

2.4. Предположим, что пространства X и Y линейно связны и локально линейно связны, X компактно и Y хаусдорфово. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — локальный гомеоморфизм; докажите, что (X, f) — накрывающее пространство для Y .

3. Поднятие путей в накрывающее пространство

В этом разделе мы докажем несколько простых лемм, ключевых по отношению ко многим результатам настоящей главы. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X и $g: I \rightarrow \tilde{X}$ — путь в $\tilde{X}$; тогда pg — путь в X . Если $g_0, g_1: I \rightarrow \tilde{X}$ и $g_0 \sim g_1$, то $pg_0 \sim pg_1$. Поставим обратный вопрос: если $f: I \rightarrow X$ — путь в X , существует ли такой путь $g: I \rightarrow \tilde{X}$, что $pg = f$? Если $g_0, g_1: I \rightarrow \tilde{X}$ и $pg_0 \sim pg_1$, будет ли $g_0 \sim g_1$? Мы увидим, что ответы на оба вопроса утвердительные, и в этом одно из основных свойств накрывающих пространств.

Лемма 3.1. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ и $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Тогда для любого пути $f: I \rightarrow X$ с начальной точкой x_0 существует такой единственный путь $g: I \rightarrow \tilde{X}$ с начальной точкой $\tilde{x}_0$, что $pg = f$.

Доказательство. Если бы путь f содержался в элементарной окрестности U , то проблемы не возникало бы. В самом деле, если V — компонента линейной связности множества $p^{-1}(U)$, содержащая точку $\tilde{x}_0$, то, поскольку p топологически отображает V на U , в V должен быть единственный путь g с требуемыми свойствами.

Разумеется, в общем случае путь f не содержится в элементарной окрестности. Однако всегда можно представить его в виде произведения конечного числа «коротких» путей, каждый из которых содержится в элементарной окрестности, и затем к каждому из коротких путей применить рассуждения предыдущего абзаца.

Эту процедуру подробнее можно описать так. Пусть $\{U_i\}$ — покрытие пространства X элементарными окрестностями; тогда $\{f^{-1}(U_i)\}$ — открытое покрытие компактного метрического пространства I . Выберем целое число n настолько большим, чтобы дробь $1/n$ была меньше лебегова числа этого покрытия. Разобьем интервал I на замкнутые подинтервалы $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$, $\dots$, $[(n-1)/n, 1]$. Заметим, что f отображает каждый такой подинтервал в элементарную окрестность в X . Теперь, начиная с $[0, 1/n]$, последовательно определим на этих подинтервалах g .

Единственность поднятого пути g вытекает из следующей более общей леммы.

Лемма 3.2. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X и Y — связное и локально связное пространство. Тогда для любых непрерывных отображений $f_0, f_1: Y \rightarrow \tilde{X}$, для которых $pf_0 = pf_1$, множество $\{y \in Y: f_0(y) = f_1(y)\}$ либо пусто, либо совпадает со всем Y .

Доказательство. Так как пространство Y связно, достаточно доказать, что указанное в лемме множество открыто и замкнуто одновременно. Сначала докажем, что оно замкнуто. Пусть y — точка из замыкания этого множества,

$$x = pf_0(y) = pf_1(y)$$

и U — элементарная окрестность точки x . Используя непрерывность отображений pf_0 и pf_1 и локальную связность пространства Y , можно построить такую связную окрестность W точки y , что $pf_0(W) \subset U$ и $pf_1(W) \subset U$. Так как множества $f_0(W)$ и $f_1(W)$ связны, то каждое из них должно содержаться в одной компоненте множества $p^{-1}(U)$, а так как множество W пересекается с множеством, указанным в лемме, то $f_0(W)$ и $f_1(W)$ должны содержаться в одной и той же компоненте множества $p^{-1}(U)$. Пусть V — эта компонента. Так как p топологически отображает V на U , то $f_0(y) = f_1(y)$.

Аналогично можно показать, что каждая точка множества $\{y \in Y: f_0(y) = f_1(y)\}$ является внутренней.

Лемма 3.3. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X и $g_0, g_1: I \rightarrow \tilde{X}$ — пути в $\tilde{X}$, начинающиеся в одной и той же точке. Если $pg_0 \sim pg_1$, то $g_0 \sim g_1$; в частности, g_0 и g_1 имеют одну и ту же конечную точку.

Доказательство. Рассуждение здесь в основном то же, что и в лемме 3.1. Пусть $\tilde{x}_0$ — начальная точка путей g_0 и g_1 . Из условия $pg_0 \sim pg_1$ вытекает существование такого отображения $F: I \times I \rightarrow X$, что

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= pg_0(s), \\ F(s, 1) &= pg_1(s), \\ F(0, t) &= pg_0(0) = p(\tilde{x}_0), \\ F(1, t) &= pg_0(1). \end{aligned}$$

Применяя рассуждения, использующие лебегово число и т. д., можно найти такие числа $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ и $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, что F отображает каждый малый прямоугольник $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ в некоторую элементарную окрестность пространства X . Докажем, что существует такое единственное отображение $G: I \times I \rightarrow \tilde{X}$, что $pG = F$ и $G(0, 0) = \tilde{x}_0$. Сначала зададим G на малом прямоугольнике $[0, s_1] \times [0, t_1]$ так, чтобы выполнялись требуемые свойства; это можно сделать, так как F отображает указанный малый прямоугольник в элементарную окрестность точки $p(\tilde{x}_0)$. Затем продолжим отображение G последовательно на прямоугольники $[s_{i-1}, s_i] \times [0, t_1]$ для $i = 2, 3, \dots, n$, чтобы оно совпадало на общих сторонах двух соседних прямоугольников. Таким образом, отображение G задано на всей полосе $I \times [0, t_1]$. Затем определим G на прямоугольниках полосы $I \times [t_1, t_2]$ и т. д.

Единственность отображения G гарантируется леммой 3.2. Аналогично, в силу единственности, которая утверждается в лемме 3.1, $G(s, 0) = g_0(s)$, $G(0, t) = \tilde{x}_0$, $G(s, 1) = g_1(s)$ и G отображает $\{1\} \times I$ в такую точку $\tilde{x}_1$, что

$$p(\tilde{x}_1) = pg_0(1) = pg_1(1).$$

Следовательно, как и требуется, G определяет эквивалентность между путями g_0 и g_1 .

В качестве следствия этих результатов о поднятии путей докажем, что справедлива

Лемма 3.4. Если $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , то множества $p^{-1}(x)$ для всех $x \in X$ имеют одинаковую мощность.

Доказательство. Пусть x_0 и x_1 — любые две точки из X . Выберем путь f в X с начальной точкой x_0 и конечной x_1 . С помощью этого пути определим отображение $p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$. Выберем любую точку $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ и поднимем путь f до пути $g \in \tilde{X}$, начинающегося в точке y_0 и такого, что $pg = f$. Обозначим

через y_1 конечную точку пути g . Тогда нужное отображение определяется соответствием $y_0 \rightarrow y_1$. С помощью пути $\bar{f}$, обратного к f (т. е. $\bar{f}(t) = f(1-t)$), аналогично определяем отображение $p^{-1}(x_1) \rightarrow p^{-1}(x_0)$. Ясно, что построенные отображения взаимно обратны; следовательно, каждое из них взаимно однозначно и является отображением на.

Кардинальное число — общая мощность множеств $p^{-1}(x)$, $x \in X$, — называется *числом листов* накрывающего пространства $(\tilde{X}, p)$. Например, накрытие может быть n -листное или бесконечнолистное.

4. Фундаментальная группа накрывающего пространства

Из леммы 3.3 вытекает следующий фундаментальный результат.

Теорема 4.1. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ и $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Тогда гомоморфизм $p_*: \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$, индуцированный проекцией $p: \tilde{X} \rightarrow X$, является мономорфизмом.

Эта теорема сразу получается из леммы 3.3, если пути g_0 и g_1 в ней взять замкнутыми.

Теорема 4.1 приводит к такому вопросу. Предположим, что $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_1$ — точки в $\tilde{X}$ и $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$. Как соотносятся образы гомоморфизмов

$$p_*: \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi(X, x_0),$$

$$p_*: \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \rightarrow \pi(X, x_0)?$$

Ответ очень прост. Выберем класс γ путей в $\tilde{X}$, соединяющих точку $\tilde{x}_0$ с $\tilde{x}_1$; он определяет изоморфизм $u: \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ по формуле $u(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma$. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi(X, x_0) \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_*} & \pi(X, x_0) \end{array}$$

коммутативна (см. упражнения в разд. III.4). Здесь $v(\beta) = (p_*\gamma)^{-1}\beta(p_*\gamma)$. Но $p_*(\gamma)$ — замкнутый путь, и потому он определяет элемент группы $\pi(X, x_0)$. Итак, образы групп $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ и $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ при отображении p_* являются сопряженными подгруппами группы $\pi(X, x_0)$.

Возникает следующий вопрос: может ли *каждая* подгруппа из класса подгрупп, сопряженных с подгруппой $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, получаться как образ $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ для некоторого выбора точки $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$? Ответ на этот вопрос *утвердительный*. Для доказательства заметим, что любая подгруппа из этого класса сопряженных подгрупп имеет вид $\alpha^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)]\alpha$ для некоторого элемента $\alpha \in \pi(X, x_0)$. Выберем замкнутый путь $f: I \rightarrow X$, представляющий элемент α . Применяя лемму 3.1, найдем путь $g: I \rightarrow \tilde{X}$, начинающийся в точке $\tilde{x}_0$ и накрывающий f . Обозначим через $\tilde{x}_1$ конечную точку пути g . Тогда, как легко видеть,

$$p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = \alpha^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)]\alpha.$$

Подведем итог доказанных только что результатов.

Теорема 4.2. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X и $x_0 \in X$. Тогда для $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ подгруппы $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ образуют класс подгрупп, сопряженных с $\pi(X, x_0)$.

Читатель, желающий сам привести примеры к этой теореме, может вернуться к примерам накрывающих пространств, данным в разд. 2.

Упражнение

4.1. Рассмотрите, что получится, если в утверждении теоремы 4.2 перейти от «базисной точки» x_0 к новой базисной точке $x_1 \in X$.

Класс сопряженных подгрупп группы $\pi(X, x_0)$ является алгебраическим инвариантом накрывающего пространства $(\tilde{X}, p)$. Позже мы докажем, что с точностью до изоморфизма он полностью определяет накрывающее пространство!

5. Поднятие отображений в накрывающее пространство

В разд. 3 мы изучили «поднятие» путей из пространства X в накрывающее пространство $\tilde{X}$. Сейчас исследуем аналогичный вопрос для отображений любого пространства Y в X . Введем обозначение: если X и Y — топологические пространства, $x \in X$ и $y \in Y$, то через $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ будем обозначать такое непрерывное отображение из X в Y , что $f(x) = y$. Используя это обозначение, можно четко сформулировать наш основной вопрос. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, $y_0 \in Y$ и $\varphi: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$. При каких условиях существует отображение $\tilde{\varphi}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, превращающее диа-

грамму

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\
 & \nearrow \tilde{\varphi} & \downarrow \varphi \\
 (Y, y_0) & & \\
 & \searrow \varphi & \\
 & & (X, x_0)
 \end{array}$$

в коммутативную? Если такое отображение $\tilde{\varphi}$ существует, говорят, что φ можно *поднять* до отображения $\tilde{\varphi}$ или что $\tilde{\varphi}$ — *поднятие* отображения φ .

Легко вывести необходимое условие существования такого поднятия $\tilde{\varphi}$, рассматривая фундаментальные группы пространств, участвующих в диаграмме. В самом деле, если предположить, что $\tilde{\varphi}$ существует, то получается следующая коммутативная диаграмма групп и индуцированных гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\
 & \nearrow \tilde{\varphi}_* & \downarrow \varphi_* \\
 \pi(Y, y_0) & & \\
 & \searrow \varphi_* & \\
 & & \pi(X, x_0)
 \end{array}$$

Так как φ_* — мономорфизм, то существование гомоморфизма $\tilde{\varphi}_*: \pi(Y, y_0) \rightarrow \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, при котором диаграмма коммутативна, в точности эквивалентно тому, что образ гомоморфизма φ_* содержится в образе гомоморфизма $\tilde{\varphi}_*$. Это и есть необходимое условие. Замечательно, что оно также и достаточное.

Теорема 5.1. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , Y — связное и локально линейно связное пространство, $y_0 \in Y$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ и $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Для данного отображения $\varphi: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ поднятие $\tilde{\varphi}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ существует тогда и только тогда, когда $\varphi_* \pi(Y, y_0) \subset p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

Доказательство. Необходимость уже доказана; осталось доказать достаточность. Для этого построим отображение $\tilde{\varphi}$. Покажем, что если $\tilde{\varphi}$ существует, то фактически есть лишь один способ его построения. Предположим, что $\tilde{\varphi}$ существует; пусть y — любая точка в Y . Так как пространство Y линейно связно,

можно выбрать путь $f: I \rightarrow Y$ с начальной точкой y_0 и конечной y . Рассмотрим пути φf и $\tilde{\varphi} f$ в X и $\tilde{X}$ соответственно. Путь $\tilde{\varphi} f$ есть поднятие пути φf , а $\tilde{\varphi}(y)$ — конечная точка пути $\tilde{\varphi} f$.

Исходя из этого, зададим отображение $\tilde{\varphi}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ так. Для данной точки $y \in Y$ выберем путь $f: I \rightarrow Y$ с начальной точкой y_0 и конечной y . Тогда φf — путь в X с начальной точкой x_0 . Применяя лемму 3.1, получаем путь $g: I \rightarrow \tilde{X}$, начальной точкой которого служит $\tilde{x}_0$ и для которого $pg = \varphi f$. Теперь положим

$\tilde{\varphi}(y)$ — конечная точка пути g .

Чтобы определение было корректным, надо показать, что $\tilde{\varphi}(y)$ не зависит от выбора пути f . На основании леммы 3.3 путь f можно заменить эквивалентным, при этом определение $\tilde{\varphi}(y)$ не изменится; иными словами, $\tilde{\varphi}(y)$ зависит только от класса эквивалентности α пути f . Предположим, что α и β — два различных класса эквивалентности путей в Y , соединяющих точку y_0 с y . Тогда $\alpha\beta^{-1}$ — класс петли в точке y_0 , т. е. $\alpha\beta^{-1} \in \pi(Y, y_0)$, и потому, в силу предположений теоремы, $\varphi_*(\alpha\beta^{-1}) \in p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Таким образом, существует класс петель в точке $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, проектирующийся на $(\varphi_*\alpha)(\varphi_*\beta)^{-1}$, или, если любой путь, представляющий элемент $(\varphi_*\alpha)(\varphi_*\beta)^{-1}$, «поднимается» до пути в пространстве $\tilde{X}$, начинающегося в точке $\tilde{x}_0$, этот последний путь будет петлей в точке $\tilde{x}_0$. Следовательно, если два пути, представляющие элементы $\varphi_*\alpha$ и $\varphi_*\beta$ соответственно, поднимаются в $\tilde{X}$ до путей, начинающихся в точке $\tilde{x}_0$, то поднятые пути имеют одну и ту же конечную точку.

Теперь докажем, что так определенная функция $\tilde{\varphi}$ непрерывна. Пусть $y \in Y$ и U — произвольная окрестность точки $\tilde{\varphi}(y)$. Мы должны показать, что существует такая окрестность V точки y , что $\tilde{\varphi}(V) \subset U$. Выберем элементарную окрестность U' точки $p\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$ так, что $U' \subset p(U)$. Пусть W — компонента линейной связности множества $p^{-1}(U')$, содержащая $\tilde{\varphi}(y)$, а U'' — такая элементарная окрестность точки $\varphi(y)$, что $U'' \subset p(U \cap W)$. Легко показать, что компонента линейной связности множества $p^{-1}(U'')$, содержащая $\tilde{\varphi}(y)$, содержится в U . Так как отображение φ непрерывно, можно выбрать окрестность V так, что $\varphi(V) \subset U''$. Кроме того, так как пространство Y локально линейно связно, окрестность V можно выбрать линейно связной. Предоставляем читателю самому проверить, что выбранная так окрестность V обладает требуемыми свойствами.

Из нашего способа определения $\tilde{\varphi}$ очевидно, что выполняется соотношение коммутативности $r\tilde{\varphi} = \varphi$.

Замечания. 1. На основании леммы 3.2 отображение $\tilde{\varphi}$ единственно. Единственность $\tilde{\varphi}$ ясна также из доказательства теоремы.

2. Эта теорема прекрасно иллюстрирует общий метод алгебраической топологии. Чисто топологический вопрос (существование непрерывного отображения, удовлетворяющего определенным условиям) сводится к вопросу чисто алгебраическому. В алгебраической топологии в большинстве случаев, в которых применим этот подход, детали намного сложнее, чем в теореме 5.1.

Упражнения

5.1. Пусть G — топологическое пространство с непрерывным умножением $\mu: G \times G \rightarrow G$, обладающим единицей e , т. е. $\mu(e, x) = \mu(x, e) = x$ для любого элемента $x \in G$ (см. упражнение II.7.5). Пусть $(\tilde{G}, p)$ — накрывающее пространство для G и $\tilde{e} \in \tilde{G}$ — такая точка, что $p(\tilde{e}) = e$. Докажите, что существует такое единственное непрерывное умножение $\tilde{\mu}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$, что $\tilde{e}$ — единица (т. е. $\tilde{\mu}(\tilde{e}, y) = \tilde{\mu}(y, \tilde{e}) = y$ для любого элемента $y \in \tilde{G}$) и p коммутирует с умножением в $\tilde{G}$ и G (т. е. $\mu(px, py) = p\tilde{\mu}(x, y)$). [Указание. Примените теорему 5.1 вместе с результатами примера 2.4 и упражнения из разд. II.7.] Предположим, что G — линейно связное и локально линейно связное пространство. Докажите, что если умножение μ ассоциативно, то ассоциативно также и умножение $\tilde{\mu}$.

5.2. Пусть G — связная и локально линейно связная топологическая группа с единицей e , $(\tilde{G}, p)$ — накрывающее пространство для G и $\tilde{e} \in \tilde{G}$ — такой элемент, что $p(\tilde{e}) = e$. Докажите существование такого единственного непрерывного умножения $\tilde{\mu}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$, что $\tilde{G}$ — топологическая группа с единицей $\tilde{e}$ и p — гомоморфизм. [Указание. Для того чтобы показать существование обратного элемента в $\tilde{G}$, используйте результаты упражнений 5.1 и II.7.6.] Докажите также, что ядро гомоморфизма p есть дискретная нормальная подгруппа группы $\tilde{G}$, которая, следовательно, содержится в центре этой группы.

5.3. Примените упражнение 5.2 к случаю $G = S^1$, рассматривая S^1 как мультипликативную группу комплексных чисел с модулем 1. Примеры накрывающих пространств для S^1 описаны в разд. 2.

5.4. Докажите, что если в упражнениях 5.1 и 5.2 умножение в группе G коммутативно, то коммутативно и умножение в группе $\tilde{G}$.

6. Гомоморфизмы и автоморфизмы накрывающих пространств

Мы хотим получить информацию о множестве пространств, накрывающих данное пространство X . Как мы увидим, достичь этого можно, рассматривая гомоморфизмы и автоморфизмы накрывающих пространств для X . Такой способ согласуется со следующим полумистическим принципом, который, видимо, служит

путеводной нитью во многих современных математических исследованиях: всякий раз, когда мы хотим получить информацию о некотором классе математических объектов, как правило, полезно рассматривать также подходящий класс допустимых отображений и автоморфизмов этих объектов.

Определение. Пусть $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$ — накрывающие пространства для X . Гомоморфизмом пространства $(\tilde{X}_1, p_1)$ в $(\tilde{X}_2, p_2)$ называется непрерывное отображение $\varphi: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, превращающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

в коммутативную.

Заметим, что композиция двух гомоморфизмов снова является гомоморфизмом и, если $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , тождественное отображение $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ есть также гомоморфизм.

Определение. Гомоморфизм φ из $(\tilde{X}_1, p_1)$ в $(\tilde{X}_2, p_2)$ называется *изоморфизмом*, если существует такой гомоморфизм ψ из $(\tilde{X}_2, p_2)$ в $(\tilde{X}_1, p_1)$, что обе композиции $\psi\varphi$ и $\varphi\psi$ — тождественные отображения. Если существует изоморфизм одного накрывающего пространства на другое, то эти пространства называются *изоморфными*. *Аutomорфизм* — это изоморфизм накрывающего пространства на себя; он может быть или не быть тождественным отображением.

Обычно в литературе автоморфизмы накрывающих пространств называются *преобразованиями накрытия*, или *скольжениями*. Заметим, что гомоморфизм накрывающих пространств является изоморфизмом тогда и только тогда, когда это гомеоморфизм в обычном смысле. Очевидно, что множество автоморфизмов накрывающего пространства $(\tilde{X}, p)$ образует группу относительно композиции отображений. Эту группу мы будем обозначать через $A(\tilde{X}, p)$.

Установим основные свойства гомоморфизмов и автоморфизмов накрывающих пространств.

Лемма 6.1. Пусть φ_0 и φ_1 — гомоморфизмы из $(\tilde{X}_1, p_1)$ в $(\tilde{X}_2, p_2)$. Если существует такая точка $x \in \tilde{X}_1$, что $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$, то $\varphi_0 = \varphi_1$.

Эта лемма — частный случай леммы 3.2.

Следствие 6.2. Группа $A(\tilde{X}, p)$ действует без неподвижных точек на пространстве $\tilde{X}$, т. е. если $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$ и $\varphi \neq 1$, то φ не имеет неподвижных точек.

Лемма 6.3. Пусть $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$ — накрывающие пространства для X и $\tilde{x}_i \in \tilde{X}_i$, $i = 1, 2$, — такие точки, что $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Гомоморфизм φ пространства $(\tilde{X}_1, p_1)$ в $(\tilde{X}_2, p_2)$, для которого $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, существует тогда и только тогда, когда $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subset p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.

Эта лемма — частный случай теоремы 5.1.

Следствие 6.4. Если выполнены предположения леммы 6.3, то изоморфизм φ пространства $(\tilde{X}_1, p_1)$ на $(\tilde{X}_2, p_2)$, для которого $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, существует тогда и только тогда, когда $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.

Это утверждение непосредственно вытекает из леммы 6.3, определения изоморфизма и следствия 6.2.

Следствие 6.5.! Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X и $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$, где $x_0 \in X$. Автоморфизм $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$, для которого $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, существует тогда и только тогда, когда $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_2)$.

Это частный случай следствия 6.4.

Теорема 6.6. Два накрывающих пространства $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда для любых двух точек $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$, для которых $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$, подгруппы $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ и $p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ принадлежат одному и тому же классу сопряженных подгрупп в $\pi(X, x_0)$.

Доказательство. Теорема непосредственно вытекает из следствия 6.4 и теоремы 4.2.

Из этой теоремы следует, что класс сопряженных подгрупп, о котором шла речь в теореме 4.2, с точностью до изоморфизма полностью определяет накрывающее пространство.

Лемма 6.7. Пусть $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$ — накрывающие пространства для X , а φ — гомоморфизм первого пространства во второе. Тогда $(\tilde{X}_1, \varphi)$ — накрывающее пространство для $\tilde{X}_2$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что любая точка $x \in X$ имеет открытую линейно связную окрестность U ,

элементарную одновременно для обоих накрывающих пространств. Такую окрестность можно получить, выбирая открытые элементарные окрестности U_1 и U_2 точки x из пространств $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$ соответственно и затем беря в качестве U ту компоненту линейной связности пересечения $U_1 \cap U_2$, которая содержит x .

Докажем, что φ отображает $\tilde{X}_1$ на $\tilde{X}_2$. Пусть y — любая точка из $\tilde{X}_2$; надо показать, что существует точка $x \in \tilde{X}_1$, для которой $\varphi(x) = y$. Выберем базисную точку $x_1 \in \tilde{X}_1$ и положим $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_0 = p_1(x_1) = p_2(x_2)$. Выберем в $\tilde{X}_2$ путь f с начальной точкой x_2 и конечной y , и пусть $g = p_2 f$ — образ этого пути в X . По лемме 3.1 в $\tilde{X}_1$ существует единственный путь h с начальной точкой x_1 , для которого $p_1 h = g$. Пусть x — конечная точка пути h . Тогда пути φh и f имеют одну и ту же начальную точку и $p_2 \varphi h = g = p_2 f$. Следовательно, в силу утверждения о единственности в лемме 3.1, $\varphi h = f$. Поэтому $\varphi(x) = y$, что и требовалось доказать.

Теперь должно быть ясно, как выбрать элементарную окрестность любой точки $z \in \tilde{X}_2$. Возьмем окрестность U точки $x = p_2(z)$, элементарную для обоих накрывающих пространств, и обозначим через W компоненту множества $p_2^{-1}(U)$, содержащую z . Легко доказать, что W обладает требуемыми свойствами.

Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X и пространство $\tilde{X}$ односвязно. Если $(\tilde{X}', p')$ — любое другое накрывающее пространство для X , то по лемме 6.3 существует гомоморфизм φ пространства $(\tilde{X}, p)$ на $(\tilde{X}', p')$, а по только что доказанной лемме $(\tilde{X}, \varphi)$ — накрывающее пространство для $\tilde{X}'$; иными словами, $\tilde{X}$ может служить накрывающим пространством для любого пространства, в свою очередь накрывающего X . По этой причине такое односвязное накрывающее пространство, как $(\tilde{X}, p)$, называется *универсальным* накрывающим пространством. В силу теоремы 6.6, любые два универсальных накрывающих пространства для X изоморфны.

Упражнения

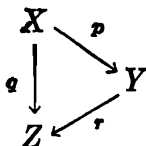
6.1. Докажите, что если X — односвязное пространство и $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , то p — гомеоморфизм из $(\tilde{X}, p)$ на X .

6.2. Определите (с точностью до изоморфизма) все накрывающие пространства для каждого из следующих пространств: окружность S^1 , проективная плоскость P , подмножество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Из каждого класса изоморфных пространств выделите и точно покажите накрывающее пространство $(\tilde{X}, p)$. [Указание. Рассмотрите пример в разд. 2.]

6.3. Пусть X — топологическое пространство с абелевой фундаментальной группой. Если $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$ — накрывающие пространства для X ,

то положим $(\tilde{X}_1, p_1) \geq (\tilde{X}_2, p_2)$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм из $(\tilde{X}_1, p_1)$ на $(\tilde{X}_2, p_2)$. Докажите, что это отношение транзитивно и рефлексивно, и если $(\tilde{X}_1, p_1) \leq (\tilde{X}_2, p_2)$ и $(\tilde{X}_2, p_2) \leq (\tilde{X}_1, p_1)$, то пространства (X_1, p_1) и (X_2, p_2) изоморфны. Наконец, докажите, что относительно этой частичной упорядоченности система пространств $(\tilde{X}, p)$, накрывающих X , имеет наименьшую верхнюю и наибольшую нижнюю грани. (Примечание. Этот результат не верен, если не выполнено предположение о коммутативности группы $\pi(x)$.)

6.4. Пусть



— коммутативная диаграмма пространств и непрерывных отображений. Предположим, что (X, p) — накрывающее пространство для Y и (X, q) — накрывающее пространство для Z . Докажите, что (Y, r) — накрывающее пространство для Z . [Указание. Пусть $U \subset Z$ — элементарная окрестность для накрывающего пространства (X, q) и V — компонента линейной связности множества $r^{-1}(U)$. Примените лемму 2.1 к множеству V , считая его подпространством в Y .]

6.5. Пусть X — пространство, имеющее универсальное накрывающее пространство. Если (X_1, p_1) — накрывающее пространство для X , а (X_2, p_2) — накрывающее пространство для X_1 , то $(X_2, p_1 p_2)$ — накрывающее пространство для X .

7. Действие группы $\pi(X, x)$ на множестве $p^{-1}(x)$

Для того чтобы дальше изучать группу автоморфизмов накрывающего пространства $(\tilde{X}, p)$, определим для любой точки $x \in X$ действие группы $\pi(X, x)$ на множестве $p^{-1}(x)$, т. е. превратим $\pi(X, x)$ в группу операторов, действующих справа на $p^{-1}(x)$. Определение довольно естественно и просто; оно вытекает из лемм 3.1 и 3.3 о поднятии путей.

Определение. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X и $x \in X$. Для любой точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ и любого элемента $\alpha \in \pi(X, x)$ определим $\tilde{x} \cdot \alpha \in p^{-1}(x)$ следующим образом. В силу лемм 3.1 и 3.3, существует такой единственный класс $\tilde{\alpha}$ путей в $\tilde{X}$, начинающихся в точке $\tilde{x}$, что $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$. По определению $\tilde{x} \cdot \alpha$ — конечная точка этих путей класса $\tilde{\alpha}$.

Предоставляем читателю проверить формулы

$$(\tilde{x} \cdot \alpha) \cdot \beta = \tilde{x} \cdot (\alpha \cdot \beta), \quad (5.7.1)$$

$$\tilde{x} \cdot 1 = \tilde{x}. \quad (5.7.2)$$

Эти формулы в точности выражают условие того, что $\pi(X, x)$ — группа правых операторов, действующих на множестве $p^{-1}(x)$ (см. приложение В). Мы утверждаем, что группа $\pi(X, x)$ действует на множестве $p^{-1}(x)$ транзитивно. Для доказательства предположим, что $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$; так как пространство $\tilde{X}$ линейно связно, существует класс $\tilde{\alpha}$ путей в $\tilde{X}$ с начальной точкой $\tilde{x}_0$ и конечной $\tilde{x}_1$. Пусть $\alpha = p_*(\tilde{\alpha})$. Тогда α — класс эквивалентности петель, и очевидно, что $\tilde{x}_0 \cdot \alpha = \tilde{x}_1$, что и требовалось доказать.

Таким образом, $p^{-1}(x)$ — однородное правое $\pi(X, x)$ -пространство (см. определение в приложении В). Из определения немедленно вытекает, что для любой точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ изотропная подгруппа, соответствующая этой точке, есть в точности подгруппа $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ группы $\pi(X, x)$. Следовательно, будучи правым $\pi(X, x)$ -пространством, множество $p^{-1}(x)$ изоморфно пространству классов смежности $\pi(X, x)/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ и число листов накрывающего пространства равно индексу подгруппы $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$.

Итак, мы получили важный результат, устанавливающий связь между группой автоморфизмов накрывающего пространства и действием группы $\pi(X, x)$ на $p^{-1}(x)$:

Предложение 7.1. Для любого автоморфизма $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$, любой точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ и любого элемента $\alpha \in \pi(X, x)$

$$\varphi(\tilde{x} \cdot \alpha) = (\varphi\tilde{x}) \cdot \alpha,$$

т. е. каждый элемент $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$ индуцирует автоморфизм множества $p^{-1}(x)$, рассматриваемого как правое $\pi(X, x)$ -пространство.

Доказательство. Доказательство просто. Поднимем класс α до класса $\tilde{\alpha}$ путей в $\tilde{X}$, начинающихся в точке $\tilde{x}$, для которого $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$; тогда $\tilde{x} \cdot \alpha$ — конечная точка путей из класса $\tilde{\alpha}$.

Рассмотрим класс $\varphi_*(\tilde{\alpha})$ путей в $\tilde{X}$. Начальной точкой этих путей будет $\varphi(\tilde{x})$, а конечной — $\varphi(\tilde{x} \cdot \alpha)$. Заметим, что

$$p_*[\varphi_*(\tilde{\alpha})] = (p\varphi)_*(\tilde{\alpha}) = p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha,$$

т. е. $\varphi_*(\tilde{\alpha})$ — поднятие класса α . Следовательно, по определению $(\varphi\tilde{x}) \cdot \alpha$ — конечная точка путей класса $\varphi_*(\tilde{\alpha})$, т. е. $(\varphi\tilde{x}) \cdot \alpha = \varphi(\tilde{x} \cdot \alpha)$, что и требуется.

Теперь можно полностью описать строение группы автоморфизмов $A(\tilde{X}, p)$.

Теорема 7.2. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X . Тогда группа автоморфизмов $A(\tilde{X}, p)$ естественно изоморфна группе автоморфизмов множества $p^{-1}(x)$, $x \in X$, рассматриваемого как правое $\pi(\tilde{X}, x)$ -пространство.

Доказательство. Если φ — любой автоморфизм пространства $(\tilde{X}, p)$, то сужение $\varphi|_{p^{-1}(x)}$ есть автоморфизм множества $p^{-1}(x)$, рассматриваемого на основании предложения 7.1 как правое $\pi(\tilde{X}, x)$ -пространство. Кроме того, из следствия 6.2 вытекает, что каждый автоморфизм φ полностью определяется его сужением $\varphi|_{p^{-1}(x)}$. Другими словами, отображение $\varphi \rightarrow \varphi|_{p^{-1}(x)}$ есть мономорфизм группы $A(\tilde{X}, p)$ в группу автоморфизмов правого $\pi(\tilde{X}, x)$ -пространства $p^{-1}(x)$. Далее, из леммы 2.1 приложения В и из следствия 6.5 вытекает, что отображение $\varphi \rightarrow \varphi|_{p^{-1}(x)}$ — эпиморфизм группы $A(\tilde{X}, p)$ на группу автоморфизмов множества $p^{-1}(x)$. Теорема доказана.

Следствие 7.3. Для любых точек $x \in X$ и $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ группа автоморфизмов $A(\tilde{X}, p)$ изоморфна факторгруппе $N[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})]/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$, где через $N[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})]$ обозначен нормализатор подгруппы $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ в группе $\pi(\tilde{X}, x)$.

Это следствие получаем, сопоставляя теорему 2.2 приложения В с теоремой 7.2.

Особенно важен случай накрывающих пространств, для которых $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ — нормальная подгруппа группы $\pi(\tilde{X}, x)$. (Заметим, что это условие не зависит от выбора точки $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.) Такое накрывающее пространство называется *регулярным*.

Следствие 7.4. Если $(\tilde{X}, p)$ — регулярное накрывающее пространство для X , то для любых точек $x \in X$ и $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ группа $A(\tilde{X}, p)$ изоморфна факторгруппе $\pi(\tilde{X}, x)/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$.

Это вытекает из следствия 7.3, так как здесь $N[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})] = \pi(\tilde{X}, x)$.

Применим следствие 7.4 к универсальным накрывающим пространствам:

Следствие 7.5. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — универсальное накрывающее пространство для X . Тогда группа $A(\tilde{X}, p)$ изоморфна группе $\pi(X)$ и порядок группы $\pi(X)$ равен числу листов универсального накрывающего пространства $(\tilde{X}, p)$.

Примеры

7.1. Рассмотрим пространство $(\mathbb{R}, p)$, накрывающее окружность S^1 по формуле $p(t) = (\sin t, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$ (см. пример 2.4). Так как действительная прямая $\mathbb{R}$ стягиваема, то она односвязна. Поэтому $(\mathbb{R}, p)$ — универсальное накрывающее пространство для S^1 , и применимо следствие 7.5. Определим группу автоморфизмов этого пространства. В силу периодичности функций $\sin t$ и $\cos t$, сдвиг $T_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданный формулой $T_n(t) = t + 2\pi n$, является автоморфизмом для любого целого числа n . Кроме того, ясно, что если x — любая точка из S^1 , а t_1, t_2 — любые две точки из $p^{-1}(x)$, то существует такое целое число n , что $T_n(t_1) = t_2$. Таким образом, каждый автоморфизм накрывающего пространства $(\mathbb{R}, p)$ будет таким сдвигом (см. лемму 6.1 и следствие 6.2). Очевидно, что группа всех таких сдвигов $\{T_n: n \in \mathbb{Z}\}$ — бесконечная циклическая группа. На самом деле во второй половине доказательства этого факта в разд. II.5 используются в неявном виде некоторые идеи теории накрывающих пространств. Действительно, аргумент $a(z)$ любой точки $z \in S^1$ неявно указывает точку пространства $(\mathbb{R}, p)$, накрывающего S^1 , и рассуждение, проведенное при определении степени замкнутого пути на S^1 , означает поднятие такого пути из S^1 в накрывающее пространство $(\mathbb{R}, p)$.

7.2. Пусть $p: S^2 \rightarrow P$ будет естественным отображением 2-сферы на ее факторпространство — проективную плоскость; тогда (S^2, p) — накрывающее пространство для P (см. пример 2.5), и так как сфера S^2 односвязна, то (S^2, p) — универсальное накрывающее пространство. Так как оно двулистно, то фундаментальная группа $\pi(P)$ и группа автоморфизмов должны быть обе порядка 2. Ясно, что группа автоморфизмов порождена антиподальным отображением $T: S^2 \rightarrow S^2$, заданным формулой $T(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

Упражнения

7.1. Пусть $p: \tilde{G} \rightarrow G$ — непрерывный гомоморфизм топологических групп, а $(\tilde{G}, p)$ — накрывающее пространство для G . (Разумеется, предполагаем, что G и $\tilde{G}$ связны и локально линейно связны.) Пусть K обозначает ядро отображения p ; тогда K — дискретная подгруппа группы $\tilde{G}$, содержащаяся в центре (см. упражнения в разд. 5). Для каждого элемента $k \in K$ определим отображение $\varphi_k: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ формулой $\varphi_k(x) = x \cdot k = k \cdot x$. Докажите, что соответствие $k \rightarrow \varphi_k$ задает изоморфизм из K на $A(\tilde{G}, p)$.

7.2. Определите группу автоморфизмов накрывающих пространств, описанных в примерах 2.2, 2.4, 2.7—2.9.

8. Регулярные накрывающие пространства и факторпространства

Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X ; так как p — открытое отображение, то X наделено фактортопологией, индуцированной отображением p (см. приложение А). Поэтому можно считать, что пространство X получено из $\tilde{X}$ отождествлением определенных точек: для любой точки $x \in X$ все точки множества $p^{-1}(x)$ должны быть отождествлены. Вспомним, что группа автоморфизмов $A(\tilde{X}, p)$ переставляет между собой точки множества $p^{-1}(x)$. Однако в общем случае факторпространство

$\tilde{X}/A(\tilde{X}, p)$ не обязательно будет естественно гомеоморфным пространству X , так как могут быть такие различные точки $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$, что не найдется автоморфизма $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$, для которого $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$; другими словами, группа автоморфизмов $A(\tilde{X}, p)$ не обязательно действует транзитивно на $p^{-1}(x)$. В самом деле, справедлива

Лемма 8.1. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X . Группа автоморфизмов $A(\tilde{X}, p)$ действует транзитивно на $p^{-1}(x)$, $x \in X$, тогда и только тогда, когда $(\tilde{X}, p)$ — регулярное накрывающее пространство для X .

Эта лемма непосредственно вытекает из теоремы 4.2 и следствия 6.5.

В результате мы видим, что если $(\tilde{X}, p)$ — регулярное накрывающее пространство для X , то пространство X естественно гомеоморфно факторпространству $\tilde{X}/A(\tilde{X}, p)$. Это ведет к такому довольно естественному вопросу. Пусть Y — топологическое пространство и G — группа его гомеоморфизмов. Пусть $p: Y \rightarrow Y/G$ — естественное отображение пространства Y на его факторпространство. При каких условиях (Y, p) будет регулярным накрывающим пространством для Y/G с $A(Y, p) = G$? Сразу же ясно, что должны быть удовлетворены несколько необходимых условий. Например, если $(\tilde{X}, p)$ — регулярное накрывающее пространство для X , то $A(\tilde{X}, p)$ действует на $\tilde{X}$ без неподвижных точек (следствие 6.2). Далее, орбита любой точки $\tilde{x} \in \tilde{X}$ при действии группы $A(\tilde{X}, p)$ (т. е. множество точек $\{\varphi(\tilde{x}) : \varphi \in A(\tilde{X}, p)\}$) есть дискретное замкнутое подмножество пространства $\tilde{X}$. На самом деле выполнено даже более сильное условие: каждая точка $\tilde{x} \in \tilde{X}$ обладает такой окрестностью U , что множества $\varphi(U)$, где $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$, попарно не пересекаются (в качестве U можно взять какую-нибудь компоненту прообраза подходящей элементарной окрестности в X). Группу гомеоморфизмов, удовлетворяющую этим условиям, называют *вполне разрывной*. Заметим, что вполне разрывная группа гомеоморфизмов не имеет неподвижных точек. Оказывается, что перечисленные необходимые условия являются также и достаточными.

Предложение 8.2. Пусть Y — связное и локально линейно связное топологическое пространство и G — вполне разрывная группа его гомеоморфизмов. Обозначим через $p: Y \rightarrow Y/G$ естественную проекцию пространства Y на его факторпространство. Тогда (Y, p) — регулярное накрывающее пространство для Y/G и $G = A(Y, p)$.

Доказательство. Пусть $x \in Y/G$; надо показать, что x имеет элементарную окрестность. Выберем такую точку $y \in Y$, что $p(y) = x$. По предположению существует такая окрестность N точки y , что множества $\varphi(N)$, $\varphi \in G$, не пересекаются. Так как пространство Y локально линейно связно, найдется такая открытая линейно связная окрестность V точки y , что $V \subset N$. Пусть $U = p(V)$. Мы утверждаем, что U — элементарная окрестность точки x . Так как p — открытое отображение (см. разд. 1 приложения А), то U — открытое множество, и очевидно, что оно линейно связно. Ясно, что p отображает V на U взаимно однозначно и непрерывно, а так как отображение p открыто, то p — гомеоморфизм из V на U . Если W — любая компонента множества $p^{-1}(U)$, отличная от V , то существует такое отображение $\varphi \in G$, что $W = \varphi(V)$. Так как φ — гомеоморфизм из V на W и $p = p\varphi$, то p гомеоморфно отображает W на U . Поэтому U — элементарная окрестность точки x и (Y, p) — накрывающее пространство для Y/G . Очевидно, что каждый элемент $\varphi \in G$ будет автоморфизмом пространства (Y, p) ; следовательно, $G \subset A(Y, p)$. Предположение о том, что G — собственная подгруппа группы $A(Y, p)$, влечет за собой, что $A(Y, p)$ имеет элементы с неподвижными точками. Следовательно, $G = A(Y, p)$. Наконец, из леммы 8.1 вытекает, что (Y, p) — регулярное накрывающее пространство для Y/G .

Теперь приведем несколько простых примеров к этой теореме.

Примеры

8.1. Пусть $Y = \mathbb{R}$ — действительная прямая; для каждого целого числа n зададим отображение $\varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $\varphi_n(x) = x + n$. Положим $G = \{\varphi_n: n \in \mathbb{Z}\}$. Тогда G — вполне разрывная группа гомеоморфизмов прямой $\mathbb{R}$; в самом деле, если U — открытый интервал $(x - 1/3, x + 1/3)$, где $x \in \mathbb{R}$, то окрестности $\varphi_n(U)$ не пересекаются. Следовательно, в силу предложения 8.2 $\mathbb{R}$ — регулярное накрывающее пространство для $\mathbb{R}/G$. Из результатов разд. 4 приложения А вытекает, что пространство $\mathbb{R}/G$ гомеоморфно факторпространству замкнутого единичного интервала $[0, 1]$, полученному отождествлением концевых точек этого интервала. Следовательно, $\mathbb{R}/G$ — окружность. Снова мы доказали, что универсальным накрывающим пространством окружности служит действительная прямая и что группа автоморфизмов — бесконечная циклическая (см. пример 7.1).

8.2. Пусть $Y = S^n$ — единичная n -сфера в евклидовом $(n+1)$ -пространстве и $T: S^n \rightarrow S^n$ — антиподальное отображение, определенное формулой $T(x) = -x$ для всех $x \in S^n$. Ясно, что T^2 — тождественное преобразование, и потому группа G гомеоморфизмов сферы S^n , порожденная отображением T , будет циклической группой порядка 2. Очевидно, что G — вполне разрывная группа гомеоморфизмов; поэтому S^n — накрывающее пространство для проективного действительного n -пространства S^n/G . Так как сфера S^n односвязна, она служит универсальным накрывающим пространством, и фундаментальная группа действительного проективного n -пространства будет циклической группой порядка 2 (см. пример 7.2, в котором $n = 2$).

Упражнения

8.1. Пусть Y — хаусдорфово пространство и G — такая конечная группа гомеоморфизмов пространства Y , что каждый элемент $\varphi \neq 1$ группы G не имеет неподвижных точек. Докажите, что G — вполне разрывная группа гомеоморфизмов.

8.2. Пусть Y — топологическая группа и G — дискретная подгруппа группы Y . Докажите, что существует такая окрестность U единицы, что множества $g \cdot U$ для $g \in G$ попарно не пересекаются. (Примечание. $g \cdot U = \{g \cdot x: x \in U\}$.) [Указание. Выберите такую окрестность V единицы, что $V \cap G = \{1\}$. Докажите, что существует такая окрестность U единицы, что $\{x \cdot y^{-1}: x, y \in U\} \subset V$.]

8.3. Пусть Y — топологическая группа и G — ее дискретная подгруппа. Пусть через Y/G обозначено пространство классов смежности $\{G \cdot y: y \in Y\}$ с топологией факторпространства и $p: Y \rightarrow Y/G$ — естественная проекция. Докажите, что (Y, p) — регулярное накрывающее пространство для Y/G с $A(Y, p) = G$, где G действует на Y умножением слева. [Указание. Используйте результат упражнения 8.2 и предложение 8.2.] Обратите внимание на то, что пример 8.1 служит частным случаем этого упражнения.

Закончим этот раздел двумя примерами, иллюстрирующими некоторые возможности, возникающие из предложения 8.2. В первом примере показывается, что факторпространство Y/G не обязательно хаусдорфово, даже если пространство Y удовлетворяет всем аксиомам отделимости. А именно мы приводим пример, в котором Y — евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$, а G — бесконечная циклическая вполне разрывная группа ее гомеоморфизмов.

Примеры

8.3. Рассмотрим простую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в плоскости (x, y)

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin x.$$

Легко видеть, что интегральными кривыми этой системы будут кривые

$$y = \sec x + C$$

для различных значений постоянной интегрирования C и вертикальные прямые

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$$

для всех целых чисел n . Можно считать, что эта система дифференциальных уравнений описывает движение частицы в плоскости; t — время, (x, y) — координаты частицы в момент t . Частица должна перемещаться вдоль одной из интегральных кривых. Вдоль какой именно — зависит от начального положения частицы.

Используя эту систему дифференциальных уравнений, определим действие аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел на евклидовой плоскости.

Для любого действительного числа t и любой точки (x, y) плоскости определим $t \cdot (x, y)$ как положение частицы в момент t , если в момент 0 она находилась в точке (x, y) . Ясно, что

$$\begin{aligned}s \cdot [t \cdot (x, y)] &= (s + t) \cdot (x, y), \\ 0 \cdot (x, y) &= (x, y).\end{aligned}$$

Отображение $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, заданное соответствием $(t, (x, y)) \rightarrow t \cdot (x, y)$, непрерывно (и даже дифференцируемо). Это утверждение вытекает из стандартных теорем о дифференциальных уравнениях. Ясно, что описанное действие прямой $\mathbf{R}$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ не имеет неподвижных точек.

Теперь рассмотрим действие подгруппы $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ на плоскости; оно не дает нужной пример.

Докажем, что действие подгруппы $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{R}^2$ вполне разрывно. Пусть для любой точки $P = (x, y)$ кривая C будет единственной интегральной кривой, проходящей через эту точку. Предположим, что C_1 и C_2 — близкие интегральные кривые, находящиеся по разные стороны от C , и T_0 — гладкая кривая, проходящая через точку P и ортогональная ко всем интегральным кривым, расположенным между C_1 и C_2 . Для любого действительного числа t обозначим $T_t = t \cdot T_0$. Пусть U — окрестность точки P , ограниченная кривыми $T_{-1/2}$, $T_{+1/2}$, C_1 и C_2 . Тогда, как легко видеть, образы последовательных «сдвигов» окрестности U

$$\{n \cdot U: n \in \mathbf{Z}\}$$

попарно не пересекаются.

Докажем, что получающееся факторпространство нехаусдорфово. Рассмотрим точки

$$P_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right), \quad P_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

и покажем, что их образы в факторпространстве $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ не имеют непересекающихся окрестностей. Для этого достаточно показать, что для любых окрестностей N_1 точки P_1 и N_2 точки P_2 найдется точка в N_1 , эквивалентная при действии группы $\mathbf{Z}$ какой-нибудь точке в N_2 . Возьмем любое малое число $a > 0$. Очевидно, что точки $(\pi/2 - a, 0)$ и $(-\pi/2 + a, 0)$ принадлежат одной и той же интегральной кривой. Сколько времени частица из точки $(-\pi/2 + a, 0)$ перемещается вдоль этой интегральной кривой в точку $(\pi/2 - a, 0)$? Ясно, что достаточно вычислить, сколько времени перемещается проекция этой частицы на ось x из первой точки во вторую. Так как $dx/dt = \cos^2 x$, то время перемещения равно

$$I_a = \int_{-\pi/2+a}^{\pi/2-a} \frac{dx}{\cos^2 x} = [\operatorname{tg} x]_{-\pi/2+a}^{\pi/2-a} = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - a \right).$$

Из этой формулы можно сделать несколько выводов:

- (1) время, затраченное на описанное перемещение частицы, непрерывно зависит от a ;
- (2) при $a \rightarrow 0$ это время I_a стремится к $+\infty$;
- (3) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много таких значений a , что $0 < a < \varepsilon$ и I_a — целое число.

Вспомним, что точки $(\pi/2 - a, 0)$ и $(-\pi/2 + a, 0)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда I_a — целое число.

Отсюда сразу получаем доказываемое утверждение (а именно: образы точек $(\pi/2, 0)$ и $(-\pi/2, 0)$ в факторпространстве $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ не имеют непересекающихся окрестностей. — *Перев.*)

8.4. Приведем пример ¹⁾ такого действия без неподвижных точек бесконечной циклической группы гомеоморфизмов хорошего пространства, что

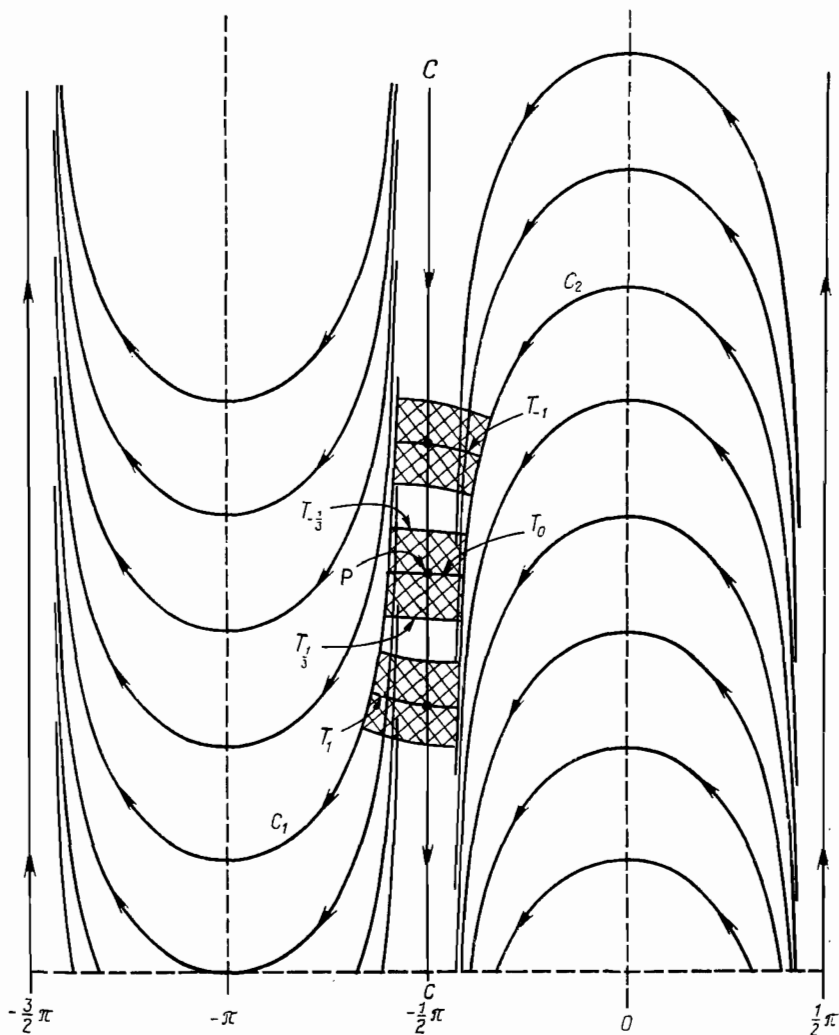


Рис. 5.2. Диаграмма для примеров 8.3 и 8.4.

«орбита» каждой точки — замкнутое дискретное подпространство, но действие не является вполне разрывным! Этот пример иллюстрирует силу требования в предложении 8.2, чтобы группа G была вполне разрывной.

¹⁾ Этот пример предложил автору Ауслендер.

Рассмотрим только что описанное действие группы Z на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Любой элемент группы Z отображает бесконечную ленту

$$S = \left\{ (x, y): -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

на себя. Построим факторпространство ленты S , отождествляя точки $(\pi/2, y)$ и $(-\pi/2, -y)$ для любого действительного числа y . Это факторпространство будет листом Мёбиуса без края (некомпактной поверхностью). Кроме того, как легко видеть, действие группы Z на S совместимо с отождествлением, и потому она действует также и на факторпространстве. Ясно, что Z действует на открытом листе Мёбиуса без неподвижных точек и орбита любой точки x (т. е. множество всех точек $n \cdot x$ при $n \in \mathbb{Z}$) есть дискретное замкнутое подмножество. С помощью рассуждений предыдущего примера, из которых вытекало, что получающееся факторпространство нехаусдорфово, можно показать, что для точки $(\pi/2, 0)$ (отождествляемой с точкой $(-\pi/2, 0)$) нельзя найти такой окрестности U , чтобы множества $n \cdot U$ для $n \in \mathbb{Z}$ попарно не пересекались. Следовательно, действие группы Z на листе Мёбиуса не является вполне разрывным.

9. Применение: теорема Улама — Борсука для 2-сфер

Пусть, как обычно, через S^n обозначена единичная n -сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: |x| = 1\}.$$

Для любых положительных целых чисел m и n назовем отображение $f: S^m \rightarrow S^n$ *антиподальным*, если $f(-x) = -f(x)$ для любой точки $x \in S^m$.

Приведем теорему, принадлежащую польским математикам Борсуку и Уламу; из нее вытекает много интересных следствий.

Теорема 9.1. *Не существует непрерывного антиподального отображения $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$ ($n > 0$).*

Мы докажем эту теорему лишь для $n \leq 2$. Сначала сформулируем и докажем несколько интересных следствий.

Следствие 9.2. *Пусть $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — такое непрерывное отображение, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in S^n$. Тогда найдется точка $x \in S^n$, для которой $f(x) = 0$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $f(x) \neq 0$ для всех $x \in S^n$. Положим для $x \in S^n$

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

Тогда g — непрерывное антиподальное отображение $S^n \rightarrow S^{n-1}$, что противоречит теореме 9.1.

Следствие 9.3. *Пусть $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Тогда найдется точка $x \in S^n$, для которой $f(x) = f(-x)$. В частности, отображение f не является взаимно однозначным.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $f(x) \neq f(-x)$ для всех $x \in S^n$. Положим $g(x) = f(x) - f(-x)$. Тогда $g(-x) = -g(x)$ и $g(x) \neq 0$ для всех x , что противоречит следствию 9.2.

Следствие 9.4. Ни одно подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфно сфере S^n .

Это с очевидностью вытекает из следствия 9.3.

Существует еще одна интересная интерпретация следствия 9.3. Если $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, то можно записать

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

где $f_1(x), \dots, f_n(x)$ — непрерывные действительные функции на S^n . Поэтому можно переформулировать следствие 9.3 так: пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ — непрерывные действительные функции на S^n ; существует такая точка $x \in S^n$, что $f_i(x) = f_i(-x)$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Например, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — температура и атмосферное давление в некоторый момент времени в любой точке x поверхности Земли, меняющиеся непрерывно при перемещении точки x по поверхности Земли, то на ней существуют пары антиподальных точек, в которых одновременно одинаковая температура и одинаковое давление! Это утверждение есть полностью топологическая теорема; формулировка и доказательство содержат только топологические предположения.

Доказательство теоремы 9.1 (для $n \leq 2$). Случай $n = 1$ тривиален, так как окружность S^1 связна, а S^0 нет. Поэтому переходим к случаю $n = 2$. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует непрерывное антиподальное отображение $f: S^2 \rightarrow S^1$. Рассмотрим факторпространства пространств S^2 и S^1 , полученные отождествлением диаметрально противоположных точек. Это действительная проективная плоскость P_2 и действительная проективная прямая, гомеоморфная S^1 . Обозначим через $p_2: S^2 \rightarrow P_2$ и $p_1: S^1 \rightarrow S^1$ естественные отображения каждой из сфер на свои факторпространства. Так как f — антиподальное отображение, то оно индуцирует такое непрерывное отображение $g: P_2 \rightarrow S^1$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \downarrow p_2 & & \downarrow p_1 \\ P_2 & \xrightarrow{g} & S^1 \end{array}$$

коммутативна. Заметим, что (S^2, p_2) и (S^1, p_1) — двулистные накрывающие пространства P_2 и S^1 соответственно; это вытекает

из предложения 8.2 (где G — циклическая группа порядка 2). Теперь мы получим противоречие, используя индуцированный гомоморфизм

$$g_*: \pi(P_2) \rightarrow \pi(S^1)$$

фундаментальных групп.

С одной стороны, так как $\pi(P_2)$ — циклическая группа порядка 2, а $\pi(S^1)$ — бесконечная циклическая группа, то из чисто алгебраических соображений этот гомоморфизм должен быть тривиальным.

С другой стороны, обозначим через α класс эквивалентности путей на сфере S^2 , в котором концевые точки путей антиподальны. Так как f — антиподальное отображение, то концевые точки путей класса $f_*(\alpha)$ антиподальны на S^1 . Пути классов $p_{2*}(\alpha)$ и $p_{1*}f_*(\alpha)$ будут петлями на P_2 и S^1 соответственно, и потому эти классы будут элементами фундаментальных групп $\pi(P_2)$ и $\pi(S^1)$ соответственно. Мы утверждаем, что $p_{2*}(\alpha) \neq 1$ и $p_{1*}f_*(\alpha) \neq 1$; это вытекает из того, что $\pi(P_2, x_0)$ и $\pi(S^1, y_0)$ действуют нетривиально на множествах $p_2^{-1}(x_0)$ и $p_1^{-1}(x_0)$ соответственно (см. разд. 7). В силу коммутативности приведенной выше диаграммы

$$g_*p_{2*}(\alpha) = p_{1*}f_*(\alpha).$$

Следовательно, g_* переводит $p_{2*}(\alpha)$ в $p_{1*}f_*(\alpha)$, а это противоречит тому, что g_* — тривиальный гомоморфизм.

Ясно, что для доказательства теоремы Брауэра о неподвижной точке (см. гл. II) и теоремы Борсука — Улама в случаях $n > 2$ нужен аналог фундаментальной группы в более высоких размерностях. По существу фундаментальная группа — это одномерный инвариант пространства и для таких целей иметь лишь ее одну недостаточно. Одна из основных задач алгебраической топологии состоит в том, чтобы развить полную теорию многомерных аналогов фундаментальной группы и использовать их для доказательства теорем типа теорем Брауэра и Борсука — Улама.

Упражнение

9.1. Обобщите рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы Борсука — Улама, в следующем направлении. Пусть X и Y — связные и локально линейно связные пространства, G — вполне разрывная группа гомеоморфизмов каждого из пространств, действующая слева на X и Y , $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное G -эquivariantное отображение (определение см. в приложении В), $p: X \rightarrow X/G$ и $q: Y \rightarrow Y/G$ — естественные отображения и, наконец, $g: X/G \rightarrow Y/G$ — отображение, индуцированное отображением f . Докажите, что гомоморфизм $g_*: \pi(X/G) \rightarrow \pi(Y/G)$ индуцирует изоморфизм факторгрупп $\pi(X/G)/p_*\pi(X) \approx \pi(Y/G)/q_*\pi(Y)$.

10. Теорема существования для накрывающих пространств

Мы доказали, что с точностью до изоморфизма пространство $(\tilde{X}, p)$, накрывающее X , определяется классом подгрупп, сопряженных с подгруппой $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ группы $\pi(X, x)$. Возникает следующий вопрос. Пусть X — топологическое пространство, и пусть дан класс сопряженных подгрупп в группе $\pi(X, x)$. Существует ли пространство $(\tilde{X}, p)$, накрывающее X и такое, что $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ принадлежит данному классу? Мы покажем, что при некоторых дополнительных предположениях относительно X на этот вопрос можно ответить утвердительно.

Прежде всего покажем, что эту задачу достаточно рассматривать для частного случая, в котором данный класс сопряженных подгрупп состоит из тривиальной подгруппы в $\pi(X, x)$.

Лемма 10.1. Пусть X — топологическое пространство, имеющее универсальное накрывающее пространство. Тогда для любого класса сопряженных подгрупп группы $\pi(X, x)$ существует такое пространство $(\tilde{X}, p)$, накрывающее X , что $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ принадлежит этому классу.

Доказательство. Пусть (Y, q) — универсальное накрывающее пространство для X , тогда Y односвязно. В силу изложенного в разд. 7, действие справа группы $\pi(X, x)$ транзитивно на множестве $q^{-1}(x)$, и так как пространство Y односвязно, то это действие не имеет неподвижных точек. Группа автоморфизмов $A(Y, q)$ изоморфна группе $\pi(X)$ и действует транзитивно без неподвижных точек слева на множестве $q^{-1}(x)$. Выберем точку $y \in q^{-1}(x)$ и подгруппу G группы $\pi(X, x)$, принадлежащую данному классу сопряженных подгрупп. Определим подгруппу H группы $A(Y, q)$ следующим образом: $\varphi \in H$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\alpha \in G$, что $\varphi(y) = y \cdot \alpha$. Легко видеть, что соответствие « $\varphi \longleftrightarrow \alpha$ тогда и только тогда, когда $\varphi(y) = y \cdot \alpha$ » устанавливает изоморфизм между G и H .

Так как H — подгруппа группы $A(Y, q)$, то она вполне разрывная группа гомеоморфизмов пространства Y . Обозначим через $\tilde{X}$ факторпространство Y/H , через $r: Y \rightarrow \tilde{X}$ естественную проекцию и через $p: \tilde{X} \rightarrow X$ отображение, индуцированное отображением $q: Y \rightarrow X$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow q & \searrow r & \\ & \tilde{X} = \frac{Y}{H} & \\ & \swarrow p & \\ X & & \end{array}$$

коммутативна. По предположению (Y, q) — накрывающее пространство для X , а по предположению 8.2 (Y, r) — накрывающее пространство для $\tilde{X}$. Отсюда легко следует, что $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X (см. упражнение 6.4). Так как $(\tilde{X}, p)$ накрывает X , то группа $\pi(X, x)$ действует справа на множестве $p^{-1}(x)$. Пусть $\tilde{x} = r(y) \in p^{-1}(x)$. Из нашего построения пространства $\tilde{X}$ ясно, что изотропная подгруппа группы $\pi(X, x)$, соответствующая точке $\tilde{x}$, совпадает с группой G . Но это эквивалентно утверждению о том, что $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}) = G$ (см. разд. 7).

Теперь исследуем вопрос: существует ли универсальное накрывающее пространство для данного топологического пространства X ? Сначала выведем довольно простое необходимое условие. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — универсальное накрывающее пространство для X , x — произвольная точка из X , $\tilde{x}$ — некоторая точка из $p^{-1}(x)$, U — элементарная окрестность точки x и V — компонента множества $p^{-1}(U)$, содержащая точку $\tilde{x}$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi(V, \tilde{x}) & \rightarrow & \pi(\tilde{X}, \tilde{x}) \\ (p|V)_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi(U, x) & \xrightarrow{i_*} & \pi(X, x) \end{array}$$

коммутативна. Так как $p|V$ — гомеоморфизм из V на U , то $(p|V)_*$ — изоморфизм. Заметим, что по предположению $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{1\}$. Из этих двух условий и из коммутативности диаграммы вытекает, что i_* — тривиальный гомоморфизм, т. е. $\text{Im } i_* = \{1\}$. Таким образом, пространство X обладает следующим свойством: для каждой точки $x \in X$ найдется такая окрестность U , что гомоморфизм $\pi(U, x) \rightarrow \pi(X, x)$ тривиален. Пространство, обладающее этим свойством, называется *полулокально односвязным*¹⁾. Это определение можно сформулировать еще и так: пространство X полулокально односвязно тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ найдется такая окрестность U , что любую петлю в U можно стянуть в этом пространстве в точку.

Приведем пример связного и локально линейно связного, но не полулокально односвязного пространства. Пусть для любого

¹⁾ Название довольно длинное и неуклюжее, однако оно точно описывает нужное свойство, промежуточное между обычной односвязностью и настоящей локальной односвязностью (которая в нашей книге не рассматривается). К тому же этот термин уже употреблялся в течение нескольких лет.

положительного целого числа n

$$C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n} \right\},$$

т. е. C_n — окружность радиуса $1/n$ с центром в точке $(1/n, 0)$. Обозначим через X объединение окружностей C_n для всех положительных целых чисел n . Пространство X не будет полулокально односвязным: точка $(0, 0)$ не имеет окрестности требуемого вида.

К счастью, большинство топологических пространств, фигурирующих в задачах из тех областей математики, где возникают накрывающие пространства, полулокально односвязны. Например, этим свойством обладают все многообразия и многообразия с краем.

Теперь докажем, что это необходимое условие существования универсального накрывающего пространства также и достаточно.

Теорема 10.2. Пусть X — связное, локально линейно связное и полулокально односвязное топологическое пространство. Тогда для любого класса сопряженных подгрупп группы $\pi(X, x)$ существует пространство $(\tilde{X}, p)$, накрывающее X и соответствующее данному классу сопряженных подгрупп (т. е. такое, что $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ принадлежит данному классу сопряженных подгрупп).

Доказательство. На основании леммы 10.1 достаточно доказать, что X имеет универсальное накрывающее пространство. Это мы сделаем прямым построением. Для того чтобы обосновать наше построение, попытаемся описать, как бы к нему пришел тополог старой школы.

Предположим на минуту, что X имеет универсальное накрывающее пространство $(\tilde{X}, p)$. Выберем базисную точку $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ и положим $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Так как пространство $\tilde{X}$ линейно связно, то для любой точки $y \in \tilde{X}$ существует класс α путей с начальной точкой $\tilde{x}_0$ и конечной y . В силу того что пространство $\tilde{X}$ односвязно, этот класс единствен. Рассмотрим функцию, ставящую в соответствие точке y класс $p_*(\alpha)$ в X . Из лемм 3.1 и 3.3 вытекает, что этой функцией определяется взаимно однозначное отображение пространства $\tilde{X}$ на множество классов путей в X , для которых x_0 — начальная точка. Следовательно, можно отождествить точки пространства $\tilde{X}$ с классами путей в X , начинающихся в точке x_0 . Это простое замечание лежит в основе следующей конструкции.

Выберем базисную точку $x_0 \in X$ и определим $\tilde{X}$ как множество классов путей в X , начинающихся в точке x_0 . Зададим отображение $p: \tilde{X} \rightarrow X$, положив $p(\alpha)$ равным конечной точке путей класса α . Покажем, как ввести топологию на множестве $\tilde{X}$, чтобы оно

стало односвязным пространством и чтобы пара $(\tilde{X}, p)$ накрывала X .

Из наших предположений следует, что топология на X имеет базу, состоящую из открытых множеств U , обладающих такими свойствами: U — линейно связное множество и гомоморфизм $\pi(U) \rightarrow \pi(X)$ (индуцированный отображением включения) тривиален. Иными словами, каждая петля в U эквивалентна (в X) постоянному пути. Для краткости такое открытое множество U будем называть *базисным*. Заметим, что если x и y — любые две точки базисного открытого множества U , то любые два пути f и g в U с начальной точкой x и конечной y эквивалентны (в X).

Для любого класса α путей в $\tilde{X}$ и любого базисного открытого множества U , содержащего точку $p(\alpha)$, обозначим через (α, U) множество таких классов β путей в $\tilde{X}$, что $\beta = \alpha \cdot \alpha'$ для некоторого класса α' путей в U . Тогда (α, U) — подмножество в $\tilde{X}$. Введем в $\tilde{X}$ топологию, выбирая в качестве базы открытых множеств семейство всех множеств вида (α, U) . Для того чтобы семейство множеств вида (α, U) могло быть базой некоторой топологии на $\tilde{X}$, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие: если $\gamma \in (\alpha, U) \cap (\beta, V)$, то найдется такое открытое множество W , что $(\gamma, W) \subset (\alpha, U) \cap (\beta, V)$. Легко показать, что это условие выполняется: в качестве W возьмем любое открытое базисное множество, для которого $p(\gamma) \in W \subset U \cap V$.

Прежде чем продолжать доказательство того, что $(\tilde{X}, p)$ — универсальное накрывающее пространство для X , сделаем два простых замечания:

- а) пусть $\alpha \in \tilde{X}$ и U — базисная открытая окрестность точки $p(\alpha)$; тогда $p|(\alpha, U)$ — взаимно однозначное отображение из (α, U) на U ;
- б) пусть U — любое открытое базисное множество и x — любая точка в U ; тогда

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda} (\alpha_{\lambda}, U),$$

где $\{\alpha_{\lambda}\}$ — множество классов всех путей в X с начальной точкой x_0 и конечной точкой x ; множества (α_{λ}, U) попарно не пересекаются.

Доказательство этих двух фактов просто; оставляем его читателю.

Заметим, что из (б) вытекает непрерывность отображения p . Следовательно, по (а) $p|(\alpha, U)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает (α, U) на U . Мы утверждаем, что $p|(\alpha, U)$ — открытое отображение из (α, U) на U . В самом деле, любое открытое подмножество множества (α, U) можно представить в виде объе-

динения множеств (β, V) , где $V \subset U$, и открытость отображения $p | (\alpha, U)$ вытекает из (а). Итак, p отображает (α, U) гомеоморфно на U . Так как множество U линейно связно, то линейно связно и (α, U) . Поскольку множества (α_λ, U) , фигурирующие в (b), попарно не пересекаются, любое базисное открытое множество $U \subset X$ обладает всеми свойствами элементарной окрестности.

Далее, покажем, что пространство $\tilde{X}$ линейно связно. Обозначим через $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ класс эквивалентности постоянного пути в точке x_0 . Теперь достаточно для любой точки $\alpha \in \tilde{X}$ найти путь, соединяющий $\tilde{x}_0$ и α . Выберем путь $f: I \rightarrow X$, принадлежащий классу α . Для любого действительного числа $s \in I$ зададим отображение $f_s: I \rightarrow X$ формулой $f_s(t) = f(st)$, $t \in I$. Тогда $f_1 = f$ и f_0 — постоянный путь в точке x_0 . Обозначим через α_s класс эквивалентности пути f_s . Мы утверждаем, что отображение $I \rightarrow \tilde{X}$, заданное соответствием $s \rightarrow \alpha_s$, непрерывно, т. е. является путем в $\tilde{X}$. Чтобы это доказать, мы должны проверить, что для любого числа $s_0 \in I$ и любой базисной окрестности U точки $f(s_0)$ найдется такое действительное число $\delta > 0$, что если $|s - s_0| < \delta$, то $\alpha_s \in (\alpha_{s_0}, U)$. Выберем δ так, чтобы $f(s) \in U$ для всех s , для которых $|s - s_0| < \delta$. Так как отображение f непрерывно, такое число δ существует. Следовательно, соответствие $s \rightarrow \alpha_s$ задает путь в $\tilde{X}$ с начальной точкой $\tilde{x}_0$ и конечной α .

Наконец, покажем, что пространство $\tilde{X}$ односвязно. Группа $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ — изотропная группа точки $\tilde{x}_0$ относительно действия группы $\pi(X, x_0)$ на множестве $p^{-1}(x_0)$ (см. разд. 7). Таким образом, мы должны определить $\tilde{x}_0 \cdot \alpha$ для любого элемента $\alpha \in \pi(X, x_0)$. Выберем петлю $f: I \rightarrow X$, принадлежащую классу α , и способом, изложенным в предыдущем абзаце, определим в $\tilde{X}$ путь $s \rightarrow \alpha_s$ с начальной точкой $\tilde{x}_0$ и конечной α . Очевидно, что этот путь будет поднятием пути f . Следовательно, $\tilde{x}_0 \cdot \alpha = \alpha$ по определению действия группы $\pi(X, x_0)$ на множестве $p^{-1}(x_0)$. Поэтому $\tilde{x}_0 \cdot \alpha = \tilde{x}_0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$. Отсюда заключаем, что изотропная подгруппа состоит лишь из одного элемента 1, что и требовалось доказать.

Упражнение

10.1. Докажите, что для любого положительного целого числа n существуют некомпактная поверхность S и вполне разрывная группа G гомоморфизмов S , для которых G — свободная абелева группа ранга $2n$, а S/G — компактная ориентируемая поверхность рода n .

11. Индуцированное накрытие подпространства

Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , A — связное и локально линейно связное подпространство пространства X и $\tilde{A}$ — компонента линейной связности множества $p^{-1}(A)$. Тогда, в силу леммы 2.1, $(\tilde{A}, p|_{\tilde{A}})$ — накрывающее пространство для A . Естественнo спросить: Какому классу сопряженных подгрупп группы $\pi(A)$ соответствует это накрывающее пространство? При каких условиях множество $p^{-1}(A)$ связно, т. е. $\tilde{A} = p^{-1}(A)$? Мы увидим, что ответы на эти вопросы относительно просты. Введем обозначения: $\tilde{a} \in \tilde{A}$, $a = p(\tilde{a})$, $p' = p|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$, и пусть $i: A \rightarrow X$ — отображение включения.

Предложение 11.1. В принятых обозначениях

$$p'_*\pi(\tilde{A}, \tilde{a}) = i_*^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})].$$

Доказательство. Сначала докажем, что $p'_*\pi(\tilde{A}, \tilde{a}) \subset i_*^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})]$. Это непосредственно вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi(\tilde{A}, \tilde{a}) & \longrightarrow & \pi(\tilde{X}, \tilde{a}) \\ p'_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi(A, a) & \xrightarrow{i_*} & \pi(X, a) \end{array}.$$

Теперь покажем, что $p'_*\pi(\tilde{A}, \tilde{a}) \supset i_*^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})]$. Пусть $\alpha \in i_*^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})]$, т. е. найдется элемент $\beta \in \pi(\tilde{X}, \tilde{a})$, для которого $i_*(\alpha) = p_*(\beta)$. Выберем петлю $f: I \rightarrow A$, представляющую класс α . По лемме 3.1 существует такой единственный путь $g: I \rightarrow \tilde{A}$ с начальной точкой $\tilde{a}$, что $pg = f$. В силу единственности, путь g должен принадлежать классу $\beta \in \pi(\tilde{X}, \tilde{a})$, т. е. g — петля. Пусть $\gamma \in \pi(\tilde{A}, \tilde{a})$ — класс эквивалентности пути g . Тогда $p'_*(\gamma) = \alpha$, что и требовалось доказать.

Предложение 11.2. Если выполнены сформулированные выше предположения, то множество $p^{-1}(A)$ связно (т. е. $\tilde{A} = p^{-1}(A)$) тогда и только тогда, когда подгруппа $i_*\pi(A, a)$ пересекается с каждым классом смежности подгруппы $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})$.

Доказательство. Будем рассуждать, как в разд. 7. Множество $p^{-1}(a)$ — однородное правое $\pi(\tilde{X}, a)$ -пространство, а $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})$ — изотропная подгруппа точки $\tilde{a}$. Аналогично мно-

жество $p'^{-1}(a) = \tilde{A} \cap p^{-1}(a)$ — однородное правое $\pi(A, a)$ -пространство с изотропной подгруппой $p_*\pi(\tilde{A}, \tilde{a})$ точки $\tilde{a}$. Из определения действия групп $\pi(X, a)$ и $\pi(A, a)$ на этих двух множествах видно, что для любых точек $x \in p'^{-1}(a)$ и $\alpha \in \pi(A, a)$

$$x \cdot \alpha = x \cdot (i_*\alpha).$$

Теперь заметим, что если множество $p^{-1}(A)$ связно, то $p^{-1}(a) = p'^{-1}(a)$. Обратно, если $p^{-1}(a) = p'^{-1}(a)$, то множество $p^{-1}(A)$ связно. Докажем это. Если x — любая точка в $p^{-1}(A)$, обозначим через $f: I \rightarrow A$ путь, начинающийся в $p(x)$ и кончающийся в a . По лемме 3.1 существует такой путь $g: I \rightarrow \tilde{X}$, что $pg = f$ и x — его начальная точка. Тогда конечной точкой пути g будет точка $p^{-1}(a) = p'^{-1}(a)$, т. е. точка из A . Так как pg — путь в A , то g — путь в $p^{-1}(A)$. Таким образом, мы доказали, что каждую точку из $p^{-1}(A)$ можно соединить с некоторой точкой из $\tilde{A}$ путем, лежащим в $p^{-1}(A)$. Следовательно, множество $p^{-1}(A)$ связно.

Исследуем, при каких условиях $p^{-1}(a) = p'^{-1}(a)$. Будучи однородным правым $\pi(X, a)$ -пространством, множество $p^{-1}(a)$ изоморфно пространству классов смежности $\pi(X, a)/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})$; аналогично множество $p'^{-1}(a)$ изоморфно пространству $\pi(A, a)/p'_*\pi(\tilde{A}, \tilde{a})$ как правое $\pi(A, a)$ -пространство (см. разд. 2 приложения В). Рассуждая, как в начале доказательства предложения, видим, что отображение включения $p'^{-1}(a) \rightarrow p^{-1}(a)$ эквивалентно отображению пространств

$$\frac{\pi(A, a)}{p'_*\pi(\tilde{A}, \tilde{a})} \rightarrow \frac{\pi(X, a)}{p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})},$$

индуцированному отображением $i_*: \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$. Следовательно, $p'^{-1}(a) = p^{-1}(a)$ тогда и только тогда, когда это отображение пространств классов смежности является отображением на. Отсюда сразу вытекает справедливость доказываемого предложения.

Теперь, придерживаясь введенных обозначений, рассмотрим некоторые частные случаи этой теоремы и примеры.

Примеры

11.1. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — регулярное накрывающее пространство для X , тогда $(\tilde{A}, p')$ — регулярное накрывающее пространство для A . В самом деле, если $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})$ — нормальная подгруппа группы $\pi(X, a)$, то $i_*^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{a})]$ — нормальная подгруппа группы $\pi(A, a)$. Заметим, что группу автоморфизмов накрывающего пространства $(\tilde{A}, p')$ можно рассматривать как подгруппу группы автоморфизмов пространства $(\tilde{X}, p)$. В этом случае множество $p^{-1}(A)$

связно тогда и только тогда, когда гомоморфизм факторгрупп

$$\frac{\pi(A, a)}{p'_* \pi(\tilde{A}, \tilde{a})} \rightarrow \frac{\pi(X, a)}{p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{a})},$$

индуцированный отображением i_* , есть эпиморфизм (он всегда мономорфизм). Может оказаться, что $(\tilde{A}, p')$ — регулярное накрывающее пространство для A , даже если $(\tilde{X}, p)$ не является регулярным накрывающим пространством для X .

11.2. Пусть $(\tilde{X}, p)$ — универсальное накрывающее пространство для X . Тогда $p'_* \pi(\tilde{A}, \tilde{a})$ — ядро гомоморфизма i_* . Следовательно, пространство $\tilde{A}$ односвязно тогда и только тогда, когда i_* — мономорфизм. В силу предложения 11.2. $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ тогда и только тогда, когда i_* — эпиморфизм. Таким образом, $p^{-1}(A)$ — односвязное пространство, накрывающее A , тогда и только тогда, когда i_* — изоморфизм группы $\pi(A)$ на $\pi(X)$.

11.3. Пусть $i_*: \pi(A) \rightarrow \pi(X)$ — тривиальный гомоморфизм, т. е. $\text{Im } i_* = \{1\}$. Тогда $(\tilde{A}, p)$ — тривиальное накрывающее пространство для A , т. е. p' — гомеоморфизм пространства $\tilde{A}$ на A . Следовательно, $p^{-1}(A)$ распадается на компоненты линейной связности, каждая из которых гомеоморфно переводится на A отображением p . В частности, это верно в случае, когда A — открытое линейно связное множество: если гомоморфизм $i_*: \pi(A) \rightarrow \pi(\tilde{X})$ тривиален, то A — элементарная окрестность в $\tilde{X}$ для *любого* пространства $(\tilde{X}, p)$, накрывающего X . Этот факт мотивирует определение топологии на $\tilde{X}$ в конструкции, использованной при доказательстве теоремы 10.2.

11.4. Если $i_*: \pi(A) \rightarrow \pi(X)$ — эпиморфизм (и множество A связно. — *Ред.*), то множество $p^{-1}(A)$ связно для любого пространства $(\tilde{X}, p)$, накрывающего X .

11.5. Если $i_*: \pi(A) \rightarrow \pi(X)$ — изоморфизм, то для *любого* пространства $(\tilde{A}, p')$, накрывающего A , существует пространство $(\tilde{X}, p)$, накрывающее X и такое, что $(\tilde{A}, p')$ изоморфно накрывающему пространству $(p^{-1}(A), p(p^{-1}A))$ (при условии, что пространство X полуплокально односвязно). Другими словами, при этих условиях каждое накрывающее пространство для A можно рассматривать как часть некоторого накрывающего пространства для X , лежащую над A . Следовательно, существует естественное взаимно однозначное соответствие между накрывающими пространствами для X и для A .

11.6. Пусть $X = S^1 \times S^1$ — тор и $(\mathbb{R}^2, p)$ универсально накрывает X по формуле

$$p(x, y) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi y, \sin 2\pi y)$$

для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Пусть A — подмножество тора $S^1 \times S^1$, состоящее из всех точек (u, v) , для которых $u = (1, 0)$ или $v = (1, 0)$. Тогда A — объединение двух окружностей, пересекающихся лишь в одной точке, и $\pi(A)$ — свободная группа с двумя образующими. В гл. IV мы доказали, что $i_*: \pi(A) \rightarrow \pi(X)$ — эпиморфизм и его ядро — коммутаторная подгруппа группы $\pi(A)$. В этом случае $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ — объединение горизонтальных прямых $y = m$ и вертикальных прямых $x = n$, где m, n — целые числа. Таким образом, $(\tilde{A}, p)$ есть по существу накрывающее пространство, соответствующее накрытию из первой части примера 2.7. Из предложения 11.1 вытекает, что $(\tilde{A}, p)$ — регулярное накрывающее пространство для A , соответствующее коммутаторной подгруппе группы $\pi(A)$.

Этот пример можно было бы видоизменить в нескольких направлениях: (а) вместо универсального накрытия тора можно было бы взять любое дру-

гое накрытие; (b) вместо пространства $X = S^1 \times S^1$ можно было бы взять произведение n экземпляров окружности S^1 , а вместо A — подмножество в X , состоящее из всех точек, у которых $n - 1$ координат равны $(1, 0)$. Тогда A — объединение n окружностей с одной общей точкой. Детали оставляем читателю.

11.7. Пусть X — компактное множество, совпадающее с замыканием области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной ориентируемой поверхностью A рода 2 (вложенной в $\mathbb{R}^3$ стандартным образом); см. рис. 5.3. Из рисунка видно, что объединение двух окружностей a и b служит для X деформационным ретрактом. Следовательно, $\pi(X)$ — свободная группа, порожденная классами эквивалентности петель a и b . В гл. IV мы показали, что $\pi(A)$ — группа, порожденная

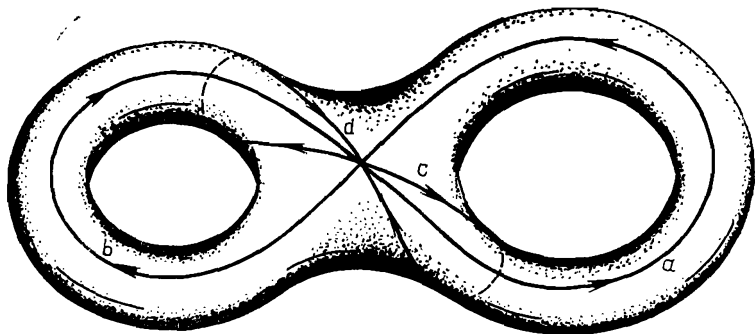


Рис. 5.3. Диаграмма для примера 11.7.

классами эквивалентности четырех петель a , b , c и d , связанных одним соотношением. Следовательно, $i_*: \pi(A) \rightarrow \pi(X)$ — эпиморфизм и его ядро — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая классы эквивалентности путей c и d . Если пространство $(\tilde{X}, p)$ покрывает X , то к индуцированному покрывающему A пространству $(\tilde{A}, p')$ можно применить предложения 11.1 и 11.2. Так как объединение окружностей a и b служит деформационным ретрактом для X , то в силу примера 11.5 задача построения покрывающего пространства для X эквивалентна задаче построения пространства, покрывающего объединение двух окружностей с одной общей точкой. А такие покрывающие пространства сравнительно легко представить себе наглядно; предоставляем читателю самому построить примеры.

12. Топологические свойства покрывающих пространств

В этом разделе мы рассмотрим несколько не совсем очевидных топологических фактов о покрывающих пространствах, которые иногда оказываются полезными. В оставшейся части главы будем предполагать, что все рассматриваемые пространства связны и локально линейно связны.

Предложение 12.1. Пусть X — полулокально односвязное пространство со счетной базой открытых множеств. Тогда любое

накрывающее пространство для X также имеет счетную базу открытых множеств.

Доказательство. Сначала сделаем два простых замечания, которые нам понадобятся при доказательстве:

- (а) число компонент линейной связности любого открытого подмножества пространства X не более чем счетно;
- (б) пусть U — такое линейно связное открытое подмножество пространства X , что естественный гомоморфизм $\pi(U) \rightarrow \pi(X)$ тривиален; если $x_0, x_1 \in U$, то любые два пути в U , соединяющие x_0 и x_1 , эквивалентны (в X).

Сначала покажем, что фундаментальная группа пространства X счетна. Для этого заметим, что из наших предположений вытекает, что X — пространство Линделёфа, т. е. что любое открытое покрытие пространства X имеет счетное подпокрытие. Следовательно, можно выбрать такое счетное покрытие $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ пространства X , что каждое множество U_i линейно связно и естественный гомоморфизм $\pi(U_i) \rightarrow \pi(X)$ тривиален.

Если пересечение $U_i \cap U_j$ непусто, то число его компонент не более чем счетно. (См. замечание (а).) Выберем в каждой компоненте пересечения $U_i \cap U_j$ точку. Проделаем это для всех пар (i, j) , для которых $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Назовем такие точки *выделенными*. Их число не более чем счетно.

Для каждой пары различных выделенных точек, лежащих в одном и том же множестве U_i , выберем соединяющий их путь в U_i . Такой путь будем называть *выделенным*. Число выделенных путей не более чем счетно. Из замечания (б) вытекает, что все выделенные пути, соединяющие две точки, эквивалентны между собой.

Возьмем в качестве базисной точки некоторую выделенную точку x_0 . Мы закончим доказательство, показав, что замкнутый путь, представляющий любой элемент группы $\pi(X, x_0)$, эквивалентен произведению конечного числа выделенных путей. Пусть

$$f: I \rightarrow X$$

— петля, представляющая элемент $\alpha \in \pi(X, x_0)$. Используя лебегово число, легко доказать существование такого разбиения единичного отрезка $I = [0, 1]$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1,$$

что для каждого отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ путь $f([t_i, t_{i+1}])$ содержится в одном из открытых множеств U_j . Сформулируем это точнее. Для $i = 1, 2, \dots, n$ выберем такое открытое множество $U_{a(i)}$, что

$$f([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{a(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Можно считать, что $U_{a(i)}$ и $U_{a(i+1)}$ различны; если они совпадают, можно объединить два отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ и $[t_i, t_{i+1}]$ в один $[t_{i-1}, t_{i+1}]$, выкидывая из разбиения точку t_i .

Обозначим через α_i класс эквивалентности пути $f| [t_{i-1}, t_i]$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда α_i — класс путей множества $U_{a(i)}$ и

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Каждая точка $f(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, лежит в некоторой компоненте пересечения $U_{a(i)} \cap U_{a(i+1)}$; обозначим эту компоненту через C_i . Выберем класс β_i путей в C_i , соединяющих точку $f(t_i)$ с выделенной точкой в C_i . Тогда

$$\alpha = \alpha_1 \beta_1 \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \beta_2^{-1} \alpha_3 \dots \alpha_{n-1} \beta_{n-1} \beta_{n-1}^{-1} \alpha_n;$$

последовательные пути

$$\alpha_1 \beta_1, \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2, \dots, \beta_{n-2}^{-1} \alpha_{n-1} \beta_{n-1}, \beta_{n-1}^{-1} \alpha_n$$

соединяют выделенные точки в множествах $U_{a(1)}, U_{a(2)}, \dots, U_{a(n)}$; следовательно, каждый из этих путей эквивалентен выделенному (по замечанию (b)). Итак, мы показали, что α можно представить в виде произведения классов эквивалентности выделенных путей.

Упражнение

12.1. Докажите, что если X — полулокально односвязное компактное пространство, то его фундаментальная группа конечно порождена.¹

Так как группа $\pi(X)$ счетна, то любая ее подгруппа имеет счетный индекс, и потому любое накрывающее пространство для X имеет счетное число листов. Таким образом, для завершения доказательства предложения 12.1 достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 12.2. Пусть X — полулокально односвязное пространство со счетной базой открытых множеств. Если $(\tilde{X}, p)$ накрывает X и имеет счетное число листов, то $\tilde{X}$ также имеет счетную базу открытых множеств.

Доказательство. Выберем для X такую счетную базу открытых множеств $U_1, U_2, U_3, \dots$, что каждое множество U_i линейно связно и $\pi(U_i) \rightarrow \pi(X)$ — тривиальный гомоморфизм. Легко показать, что такая база существует. В силу примера 11.3, для каждого целого числа i множество $p^{-1}(U_i)$ состоит из счетного числа компонент, каждая из которых отображением p гомеоморфно отображается на U_i ; обозначим эти компоненты через $U_{i1}, U_{i2}, \dots$. Тогда $\{U_{ij}\}$ — счетное семейство открытых множеств, и легко показать, что оно служит базой топологии на $\tilde{X}$.

Теперь докажем предложение, касающееся топологии накрывающих пространств, которое нам понадобится в дальнейшем (пока его можно пропустить).

Исследуем такую задачу. Пусть пространство $(\tilde{Y}, p)$ покрывает Y . Как обычно, предположим, что Y и $\tilde{Y}$ связны и локально линейно связны. Кроме того, предположим, что Y — регулярное хаусдорфово пространство (т. е. удовлетворяет аксиоме отделимости T_3 Александрова и Хопфа). Отсюда вытекает, что и $\tilde{Y}$ удовлетворяет той же аксиоме отделимости.

Пусть $\{X_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — семейство компактных, локально линейно связных, связных и односвязных хаусдорфовых пространств, и $\{f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — семейство непрерывных отображений. Из наших предположений следует, что каждое отображение f_λ можно поднять (различными способами) до отображений $f_{\lambda i}: X_\lambda \rightarrow \tilde{Y}$ так, что $f_\lambda = p f_{\lambda i}$. Обозначим через $\{f_{\lambda i}: i \in M_\lambda\}$ множество всех таких поднятий для f_λ .

Нашу задачу можно теперь сформулировать так: пусть Y имеет сильнейшую топологию, в которой все отображения f_λ непрерывны (т. е. множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда $f_\lambda^{-1}(U)$ открыто в X_λ для всех λ); имеет ли $\tilde{Y}$ сильнейшую топологию, в которой непрерывны все отображения $f_{\lambda i}$? Следующая лемма, по существу принадлежащая Дж. Уайтхеду, показывает, что при небольших дополнительных предположениях ответ утвердительный.

Лемма 12.3. *Пусть выполнены указанные выше предположения, и пусть либо $(\tilde{Y}, p)$ — регулярное покрывающее пространство для Y , либо пространство Y полулокально односвязно. Если Y имеет сильнейшую топологию, в которой все отображения f_λ непрерывны, то $\tilde{Y}$ имеет сильнейшую топологию, в которой непрерывны все отображения $f_{\lambda i}$.*

Доказательство. Условимся о терминологии. Как обычно, под элементарной окрестностью точки в Y мы понимаем такую линейно связную открытую окрестность U , что каждая компонента множества $p^{-1}(U)$ отображением p топологически отображается на U . Под базисной открытой окрестностью V точки в Y мы понимаем такую линейно связную открытую окрестность, что $\bar{V}$ содержится в некоторой элементарной окрестности U . Условие регулярности пространства Y гарантирует, что каждая точка из Y содержится в произвольно малых базисных окрестностях. Если V — базисная окрестность в Y , то каждую компоненту W множества $p^{-1}(V)$ назовем базисной окрестностью в $\tilde{Y}$.

Идея состоит в том, чтобы сначала доказать эту лемму для случая, когда $(\tilde{Y}, p)$ — регулярное покрывающее пространство, а затем для другого случая. Поэтому предположим, что $(\tilde{Y}, p)$ —

регулярное накрывающее пространство для Y , и обозначим группу автоморфизмов пространства $(\tilde{Y}, p)$ через G .

Сформулируем два утверждения, которые нам понадобятся при доказательстве.

Утверждение 1. Подмножество $A \subset \tilde{Y}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap \bar{W}$ замкнуто для каждой базисной окрестности W в $\tilde{Y}$ (определение базисной окрестности дано выше).

Утверждение 2. Если X — компактное пространство, $f: X \rightarrow \tilde{Y}$ — непрерывное отображение и W — базисная окрестность в $\tilde{Y}$, то непусто лишь конечное число множеств

$$\{f^{-1}\varphi^{-1}(\bar{W}) : \varphi \in G\}.$$

Доказательство утверждения 1. Так как базисные окрестности покрывают $\tilde{Y}$, то $\tilde{Y} - A$ можно представить в виде объединения подмножеств $W - A$ для всех базисных окрестностей W . Очевидно, что множество $W - A = W - (A \cap \bar{W})$ открыто. Следовательно, $\tilde{Y} - A$ открыто, а A замкнуто.

Доказательство утверждения 2. Пусть $V = p^{-1}(W)$, тогда V — базисная окрестность в Y , и потому в Y найдется такая элементарная окрестность U , что $\bar{V} \subset U$. Обозначим через $\tilde{U}$ компоненту множества $p^{-1}(U)$, содержащую $\bar{W}$, и пусть для любого элемента $\varphi \in G$

$$U_\varphi = f^{-1}\varphi^{-1}(\tilde{U}).$$

Множества U_φ попарно не пересекаются. Заметим, что

$$C = \bigcup_{\varphi \in G} f^{-1}\varphi^{-1}(\bar{W}) = f^{-1}p^{-1}(\bar{V})$$

— замкнутое подмножество пространства X и, следовательно, оно компактно. Кроме того, $\{U_\varphi : \varphi \in G\}$ — открытое покрытие множества C , из которого можно выделить конечное. Единственный случай, когда это можно было бы сделать, это случай, когда все, кроме конечного числа множеств $f^{-1}\varphi^{-1}(\bar{W})$, пусты.

Приступим к доказательству леммы. Пусть A — такое подмножество пространства $\tilde{Y}$, что $f_{\lambda i}^{-1}(A)$ — замкнутое подмножество пространства X_λ для каждого отображения $f_{\lambda i}$; надо доказать, что A замкнуто. Из утверждения 1 вытекает, что достаточно доказать следующее: если для любого подмножества $A \subset \tilde{Y}$ и любой базисной окрестности W в $\tilde{Y}$ множество $f_{\lambda i}^{-1}(A)$ замкнуто для любого отображения $f_{\lambda i}$, то пересечение $\bar{W} \cap A$ замкнуто.

Заменяя, если необходимо, A на $A \cap \bar{W}$, видим, что это достаточно доказать в частном случае $A \subset \bar{W}$; мы так и сделаем. Пусть $p(A) = B \subset Y$. Так как p отображает множество $\bar{W}$ на его образ гомеоморфно, то достаточно доказать, что B замкнуто. Для этого надо показать, что множество $f_\lambda^{-1}(B)$ замкнуто для всех $\lambda \in \Lambda$. Легко видеть, что

$$f_\lambda^{-1}(B) = \bigcup_i f_{\lambda i}^{-1}(B). \quad (5.12.1)$$

Выберем какое-нибудь значение j индекса i ; тогда

$$\bigcup_i f_{\lambda i}^{-1}(A) = \bigcup_{\varphi \in G} f_{\lambda j}^{-1} \varphi^{-1}(A).$$

Согласно утверждению 2, множество $f_{\lambda j}^{-1} \varphi^{-1}(\bar{W})$ непусто лишь для конечного числа $\varphi \in G$; следовательно, и $f_{\lambda j}^{-1} \varphi^{-1}(A)$ непусто лишь для конечного числа $\varphi \in G$. Таким образом, в правой части равенства (5.12.1) стоит лишь *конечное* объединение замкнутых множеств, а потому множество слева замкнуто, что и требовалось.

Теперь докажем лемму в случае, когда $(\tilde{Y}, p)$ не является регулярным накрывающим пространством, в этом случае мы предполагаем, что Y полулокально односвязно. Следовательно, существуют универсальное накрывающее пространство $(\hat{Y}, q)$ для Y и такое отображение $r: \hat{Y} \rightarrow \tilde{Y}$, что $(\hat{Y}, r)$ накрывает $\tilde{Y}$. Тогда пространство $\tilde{Y}$ наделено фактортопологией, определяемой отображением r . По только что доказанному накрывающее пространство $\hat{Y}$ имеет сильнейшую топологию, в которой поднятые отображения $X_\lambda \rightarrow \hat{Y}$ непрерывны. Осталось применить к отображению $r: \hat{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ лемму 2.4 из приложения А.

Пример

12.1. Любая компактная поверхность M является факторпространством диска D , ограниченного многоугольником в плоскости, при отображении

$$f: D \rightarrow M,$$

попарно отождествляющим определенные стороны диска D . Если $(\tilde{M}, p)$ — накрывающее пространство для M , то существуют поднятия

$$f_i: D \rightarrow \tilde{M}, \quad p f_i = f,$$

отображения f . Тогда по лемме 12.3 $\tilde{M}$ имеет сильнейшую топологию, в которой все отображения f_i непрерывны. Заметим, что образы $f_i(D)$ покрывают $\tilde{M}$. Каждый такой образ называется *фундаментальной областью* в $\tilde{M}$. (См. также пример 2.6.)

Упражнения

12.2. Пусть X — связное и локально линейно связное пространство, а $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X . Докажите, что если X обладает любым из следующих свойств, то этим же свойством обладает и $\tilde{X}$:

- (a) хаусдорфовость,
- (b) регулярность,
- (c) полная регулярность,
- (d) локальная компактность.

12.3. Пусть X — связное и локально линейно связное пространство, а $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X . Докажите, что $\tilde{X}$ компактно тогда и только тогда, когда X компактно и накрытие конечнолистно.

12.4. Пусть X — связное, локально линейно связное, полулокально односвязное сепарабельное метрическое пространство. Докажите, что любое пространство, накрывающее X , также сепарабельное метрическое. [Указание. Воспользуйтесь метризационной теоремой Урысона и Тихонова: пространство является сепарабельным метрическим тогда и только тогда, когда оно регулярно и имеет счетную базу открытых множеств.]

ПРИМЕЧАНИЯ

Разветвленные накрывающие пространства

Риманова поверхность так называемой «многозначной» аналитической функции обычно не служит накрывающим пространством для области определения этой функции из-за наличия «точек ветвления». Это пример «разветвленного накрывающего пространства». Для ознакомления с общей теорией разветвленных накрывающих пространств можно посмотреть статью Фокса (Covering spaces with singularities, в книге *Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of S. Lefschetz*, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1957, стр. 243—257); см. также статью Микаэля в *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam* (ser. A), 66 (1963), 629—633. Вообще о разветвленных накрывающих пространствах, по-видимому, известно немного.

Накрывающие пространства без каких-либо предположений о локальной связности

Естественно спросить, можно ли ослабить или совсем опустить предположение о локальной линейной связности, которое прошло через всю эту главу. Этот вопрос рассматривался несколькими авторами. Например, в книге Шевалле [3] предположение о локальной линейной связности сводится к обычной локальной связности. Вот другие работы, в которых исследуется этот вопрос:

- Банашевский (Banaschewski B.), *Math. Nachr.*, 15 (1956), 175—180;
- Дугунджи (Dugundji J.), *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 36 (1950), 141—143;
- де Ламадрид и Дженс (Gil de Lamadrid J., Jans J. P.), *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), 710—715;
- Ли (Lee C. N.), *Duke Math. J.*, 24 (1957), 547—554;
- Новосад (Novosad R. S.), *Trans. Amer. Math. Soc.*, 79 (1955), 216—228;
- Лабкин (Lubkin S.), *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104 (1962), 205—238.

В свою очередь эти авторы ссылаются на более ранние статьи по рассматриваемому вопросу. Большинство статей краткие и в них не пытаются перестроить всю теорию при ослабленных предположениях.

До сих пор не доказано, что идеи, развиваемые в этих работах, важны, так как пространства, возникающие в тех ситуациях, где теория накрывающих пространств находит естественное применение, удовлетворяют всем локальным условиям, которые можно было бы пожелать. Конечно, может оказаться, что когда-нибудь в будущем у кого-то возникнет необходимость в применении теории накрывающих пространств к пространствам, локально устроенным плохо.

Читателю будет интересен пример, принадлежащий Зиману, приведенный на стр. 244 книги Хилтона и Уайли [2]. Этот пример показывает необходимость условия в теореме 5.1 о том, чтобы пространство Y было локально связным.

Частичное упорядочение классов изоморфизмов пространств, накрывающих данное пространство

В упражнении 6.3 показано, что если X — пространство, фундаментальная группа $\pi(X)$ которого абелева, то существует естественное частичное упорядочение классов изоморфизмов пространств, накрывающих X : по определению $(\tilde{X}_1, p_1) \geq (\tilde{X}_2, p_2)$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм из $(\tilde{X}_1, p_1)$ на $(\tilde{X}_2, p_2)$. При таком частичном упорядочении классы изоморфизмов накрывающих пространств образуют решетку, изоморфную решетке всех подгрупп группы $\pi(X)$.

Этот результат остается в силе, если немного ослабить предположение о фундаментальной группе $\pi(X)$ пространства X , а именно если предположить, что группа $\pi(X)$ гамильтонова, т. е. каждая подгруппа группы $\pi(X)$ нормальна. Сведения о структуре гамильтоновых групп можно найти в книге М. Холла, Теория групп, ИЛ, М., 1962, стр. 213.

Если мы попытаемся распространить этот результат на более общие группы, то столкнемся с серьезными затруднениями. Например, может оказаться, что существуют такие накрывающие X пространства $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$, что $(\tilde{X}_1, p_1) \geq (\tilde{X}_2, p_2)$ и $(\tilde{X}_2, p_2) \geq (\tilde{X}_1, p_1)$, но $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$ не изоморфны. Такое могло бы встретиться в следующей ситуации. Выберем некоторую базисную точку $x \in X$ и предположим, что найдутся такие точки $x_1, x'_1 \in \in p_1^{-1}(x)$ и $x_2, x'_2 \in p_2^{-1}(x)$, что

(а) подгруппы $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, x_1)$ и $p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, x_2)$ не будут сопряженными подгруппами группы $\pi(X, x)$;

(б) между подгруппами выполняются соотношения включения

$$p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, x_1) \supset p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, x'_2),$$

$$p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, x_2) \supset p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, x'_1).$$

Наше утверждение о $(\tilde{X}_1, p_1)$ и $(\tilde{X}_2, p_2)$ вытекает теперь из результатов разд. 6.

Построение группы, имеющей четыре подгруппы с этими свойствами, составляет петрудную алгебраическую задачу, а в гл. VII мы покажем, что любую группу можно «реализовать» как фундаментальную группу некоторого связного, локально линейно связного и полулокально односвязного пространства X .

Накрывающие пространства как расслоения

Читатель, знакомый с теорией расслоенных пространств или пучков, распознает в накрывающем пространстве (как мы его определили) локально тривиальное расслоенное пространство с дискретным слоем. Поэтому теорию накрывающих пространств можно рассматривать как часть общей теории

расслоенных пространств. Можно также считать, что пространство $(\tilde{X}, p)$, накрывающее X , является расслоенным пучком со структурной группой $\pi(X)$ и слоем — дискретным однородным пространством $\pi(X)/p_*\pi(\tilde{X})$. Тогда регулярные накрывающие пространства соответствуют главным расслоениям. Этот вопрос обсуждается в книге Н. Стипрода, Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953, в частности разд. 13, 14.

Высшие гомотопические группы накрывающего пространства

Для любого пространства X и любой точки $x_0 \in X$ через $\pi_n(X, x_0)$ обозначается множество всех гомотопических классов отображений $(S^n, y_0) \rightarrow (X, x_0)$; здесь $y_0 \in S^n$ и все гомотопии производятся относительно базисной точки y_0 (определение относительной гомотопии см. в разд. II.4). Заметим, что если $n = 1$, то $\pi_1(X, x_0) = \pi(X, x_0)$ — фундаментальная группа. В множестве $\pi_n(X, x_0)$ для $n > 1$ можно естественным образом ввести сложение, так что $\pi_n(X, x_0)$ станет абелевой группой, называемой n -й гомотопической группой пространства X . Мы утверждаем, что если пространство $(\tilde{X}, p)$ накрывает X , то для любой точки $x \in X$ и любого целого числа $n > 1$ проекция p индуцирует изоморфизм группы $\pi_n(\tilde{X}, x)$ на группу $\pi_n(X, p(x))$. Доказательство заключается в простом применении теоремы 5.1. Если $\varphi: (S^n, y_0) \rightarrow (X, p(x))$ — любое непрерывное отображение, то существует такое единственное отображение $\tilde{\varphi}: (S^n, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, x)$, что $p\tilde{\varphi} = \varphi$. Далее, два таких отображения $\varphi_0, \varphi_1: (S^n, y_0) \rightarrow (X, p(x))$ гомотопны (относительно y_0) тогда и только тогда, когда гомотопны соответствующие поднятые отображения $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1: (S^n, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, x)$.

Этот результат часто оказывается полезным при изучении высших гомотопических групп.

Нахождение всех накрывающих пространств с конечным числом листов

Вообще говоря, у нас, вероятно, нет надежд на то, чтобы найти эффективную процедуру для перечисления всех пространств, накрывающих данное пространство X (или, что эквивалентно, для перечисления всех классов сопряженных подгрупп группы $\pi(X)$). Однако если фундаментальная группа $\pi(X)$ конечно задана, то для любого целого числа n есть эффективная процедура нахождения всех n -листных накрывающих пространств для X . Эта процедура иллюстрируется в § 58 книги Зейферта и Трельфалля [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, Гостехиздат, М., 1938, гл. 8.
2. Хилтон П., Уайли С., Теория гомотий. Введение в алгебраическую топологию, изд-во «Мир», М., 1966, гл. 6.
3. Шевалле К., Теория групп Ли, ИЛ, М., 1948, гл. II, разд. VI—X.

Глава VI

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И НАКРЫВАЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА ГРАФА. ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ГРУПП

1. Введение

Граф — это топологическое пространство, состоящее из множества точек, называемых *вершинами*, и множества *ребер*. Каждое ребро гомеоморфно либо отрезку прямой и соединяет две различные вершины, либо окружности и соединяет какую-нибудь вершину саму с собой. Предполагается, что два различных ребра либо не пересекаются, либо пересекаются по общей концевой точке.

Графы встречаются всюду: например, графами можно считать схемы, используемые инженерами. На языке графов можно сформулировать много задач из различных областей математики и связанных с нею дисциплин, особенно задачи комбинаторной природы. В результате за прошедшее столетие выросла обширная теория. Следует, однако, подчеркнуть, что эта теория касается главным образом комбинаторных свойств графа, т. е. свойств, связанных с соотношениями между ребрами и вершинами. Топологическими свойствами графов скорее вообще пренебрегают. По теории графов имеется несколько учебников; см. Берж [1], Оре [2].

В этой главе мы будем изучать фундаментальную группу и накрывающие пространства графа; таким образом, мы будем обращать больше внимания на топологические свойства графов. Затем применим полученные результаты к теории групп и докажем некоторые классические теоремы. Хотя эти теоретико-групповые результаты можно доказать чисто алгебраическим путем, топологические доказательства, которые мы дадим, более прозрачны. В действительности многие доказываемые нами теоремы были открыты при рассмотрении фундаментальной группы и накрывающих пространств графа.

Если граф имеет лишь конечное множество вершин и ребер, то топологизация его не составляет проблемы: существует один довольно очевидный способ ввести на нем топологию. Для бесконечного графа дело намного сложнее. Мы рассмотрим эту задачу подробно, так как пространство, накрывающее конечный граф, вполне может оказаться бесконечным графом.

Граф, как мы его определили, является одномерным CW-комплексом. Таким образом, материал, изложенный в настоящей главе, можно считать введением в теорию CW-комплексов Уайтхеда.

2. Определение и примеры

Граф — это пара, состоящая из хаусдорфова пространства X и его подпространства X^0 (называемого «множеством вершин пространства X »), удовлетворяющая таким условиям:

- (a) X^0 — дискретное замкнутое подпространство пространства X (точки пространства X^0 называются вершинами);
- (b) $X - X^0$ можно представить в виде объединения открытых непересекающихся подмножеств e_i , каждое из которых гомеоморфно открытому интервалу действительной прямой (множества e_i называются *ребрами*);
- (c) граница $\bar{e}_i - e_i$ каждого ребра e_i есть подмножество множества X^0 , состоящее либо из одной, либо из двух точек; если $\bar{e}_i - e_i$ состоит из двух точек, то пара $(\bar{e}_i, e_i)$ гомеоморфна паре $([0, 1], (0, 1))$; если $\bar{e}_i - e_i$ состоит из одной точки, то пара $(\bar{e}_i, e_i)$ гомеоморфна паре $(S^1, S^1 - \{1\})$, где S^1 — единичная окружность в плоскости;
- (d) пространство X наделено так называемой слабой топологией: подмножество $A \subset X$ замкнуто (открыто) тогда и только тогда, когда пересечение $A \cap \bar{e}_i$ замкнуто (открыто) для всех ребер e_i .

Условие (d), несомненно, наиболее трудно для понимания. Оно автоматически удовлетворяется в том случае, когда X имеет конечное число ребер. Следовательно, оно представляет интерес лишь тогда, когда X имеет бесконечное число ребер. Это условие мы объясним на нескольких примерах.

Примеры

2.1. Для любого целого числа $n > 0$ обозначим через C_n окружность в плоскости (x, y) с центром $(1/n, 0)$ и радиусом $1/n$. Она касается оси y в начале координат. Пусть X — объединение окружностей C_n для всех $n > 0$, а $X^0 = \{(0, 0)\}$, т. е. имеется лишь одна вершина. Тогда условия (a), (b) и (c) выполняются, а (d) нет. Читателю предлагаем найти множество A , не замкнутое в X , но такое, что пересечение $A \cap \bar{e}_i$ замкнуто для всех ребер e_i .

2.2. Воспользуемся полярной системой координат (r, θ) и зададим для каждого целого числа $n > 0$ множество

$$e_n = \left\{ (r, \theta): \theta = \frac{1}{n}; 0 < r < 1 \right\}.$$

Пусть

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{e}_n,$$

где $\bar{e}_n$ — замыкание множества e_n в топологии плоскости. Пусть X^0 состоит из начала координат и точек $(r, \theta) = (1, 1/n)$ для $n > 0$. Снова условия (a), (b) и (c) выполняются, а (d) нет.

2.3. Пусть $X = \mathbb{R}$ — действительная прямая, а X^0 — подмножество точек с целочисленными координатами. Тогда выполняются все условия (a)—(d). Проверку условия (d) оставляем читателю в качестве упражнения.

2.4. Для каждого целого числа n , положительного или отрицательного, обозначим

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = n\},$$

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = n\}.$$

A_n — это вертикальные, а B_n — горизонтальные прямые на плоскости. Пусть X — объединение всех этих прямых, а X^0 — множество точек их пересечения, т. е. множество точек плоскости с целочисленными координатами. Тогда выполняются все условия (a)—(d).

В примерах 2.1 и 2.2 на множестве X можно задать новую топологию, при которой будет выполняться условие (d). В примере 2.1 топология на каждой окружности C_n остается той же, а множество $A \subset X$ считается замкнутым тогда и только тогда, когда пересечение $A \cap C_n$ замкнуто в C_n для всех n . В примере 2.2 можно проделать то же самое, беря вместо окружностей C_n ребра $\bar{e}_n$. Читатель может убедиться в том, что пространство X в каждом случае хаусдорфово.

Предлагаем читателю построить примеры графов с конечным числом вершин и ребер. Можно доказать, что каждый конечный граф гомеоморфен подмножеству евклидова 3-пространства. Этот факт нам не понадобится, и мы его доказывать не будем.

Заметим, что если X — пространство графа, то придать этому пространству структуру графа можно несколькими различными способами. Например, если $X = [0, 1]$, то можно взять $X^0 = \{0, 1/2, 1\}$ или $X^0 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$, т. е. единичный отрезок можно разбить на два или на три отрезка. Вообще если X^0 и X'^0 — два различных множества вершин на пространстве X , то пару (X, X'^0) будем называть *разбиением* пары (X, X^0) , если $X^0 \subset X'^0$. Ясно, что любой граф можно разбить, вставляя новые вершины в некоторые или во все ребра.

Упражнения

2.1. Пусть X — граф и Y — топологическое пространство. Докажите, что функция $f: X \rightarrow Y$ непрерывна тогда и только тогда, когда сужение $f|_{\bar{e}_i}$ непрерывно для каждого ребра e_i из X .

2.2. Пусть X — граф и I — единичный отрезок $[0, 1]$. Докажите, что подмножество $A \subset X \times I$ замкнуто (открыто) тогда и только тогда, когда пересечения $A \cap (\bar{e} \times I)$ и $A \cap (v \times I)$ замкнуты (открыты) для каждого ребра e и каждой вершины v из X .

2.3. Пусть X — граф и Y — топологическое пространство. Докажите, что функция $f: X \times I \rightarrow Y$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f|_{\bar{e} \times I}$ и $f|_{v \times I}$ непрерывны для всех ребер e и вершин v из X .

3. Основные свойства графов

Как видно на простых примерах, граф может быть как *связным*, так и *несвязным*. В самом деле, в нашем определении нет ничего, что препятствовало бы существованию вершин, являющихся изолированными точками, т. е. точками, не принадлежащими замыканию ни одного из ребер.

Мы будем называть граф *конечным*, если он состоит из конечного числа ребер и вершин. Конечный граф компактен, так как он представляет собой объединение конечного числа компактных подмножеств. Обратно, если граф компактен, то он конечен; доказательство очевидно. Граф называется *локально конечным*, если каждая его вершина инцидентна лишь конечному числу ребер (вершина v называется *инцидентной* ребру e , если $v \in \bar{e}$). Граф локально компактен тогда и только тогда, когда он локально конечен; снова доказательство очевидно. Заметим, что если бы в определении графа мы не предусмотрели условия (d), то, как показывает пример 2.1, эти утверждения были бы неверны.

Подмножество A графа (X, X^0) называется *подграфом*, если пара (A, A^0) , где $A^0 = A \cap X^0$, образует граф. Это происходит тогда и только тогда, когда A есть в точности объединение некоторого набора вершин и замкнутых ребер графа X . Отсюда следует, что A — замкнутое подмножество в X .

Докажем лемму, показывающую, что локально граф является настолько «хорошим», насколько этого можно было бы пожелать.

Лемма 3.1. *Каждая точка графа имеет базисное семейство стягиваемых окрестностей.*

Доказательство. Лемма очевидна для внутренних точек ребер и для изолированных вершин. Пусть v — изолированная вершина, а U — открытое множество, содержащее v . Надо указать некоторую стягиваемую окрестность V точки v , принадлежащую множеству U . Для каждого ребра e , инцидентного v , множество $U \cap \bar{e}$ есть открытая окрестность точки v в $\bar{e}$. Выберем V так, чтобы $V \cap \bar{e}$ было открытой стягиваемой окрестностью точки v в $\bar{e}$, $V \cap \bar{e} \subset U \cap \bar{e}$, и для любого ребра e' , неинцидентного v , множество $V \cap \bar{e}'$ было пустым. В силу (c) такой выбор возможен. По условию (d) V — открытое множество. Осталось доказать, что оно стягиваемо. Для любого ребра e , инцидентного v , выберем стягивающую гомотопию

$$\varphi_e: (V \cap \bar{e}) \times I \rightarrow V \cap \bar{e}$$

так, что для любых $x \in V \cap \bar{e}$ и $t \in I$

$$\varphi_e(x, 0) = x,$$

$$\varphi_e(x, 1) = v,$$

$$\varphi_e(v, t) = v.$$

Зададим отображение $f: V \times I \rightarrow V$ формулой

$$f|_{(V \cap \bar{e}) \times I} = \varphi_e.$$

Непрерывность отображения f вытекает из того, что каждое из отображений φ_e непрерывно и граф наделен слабой топологией (т. е. выполняется условие (d)); см. упражнение 2.3.

Из леммы следует, что граф локально линейно связан и полу-локально односвязен. Таким образом, к графам применима вся теория накрывающих пространств. Если граф связан, то он линейно связан. В частности, любые две вершины связного графа можно соединить путем.

Ребро графа *ориентируется* тем, что на нем помещается стрелка, указывающая выбор положительного направления вдоль этого ребра. Каждое ребро имеет две возможные ориентации. Этой интуитивной идее можно придать точный смысл. По определению ребро e гомеоморфно открытому интервалу $(0, 1)$.

Будем называть два гомеоморфизма

$$h_0, h_1: e \rightarrow (0, 1)$$

эквивалентными, если композиция $h_0 h_1^{-1}: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ монотонно возрастает. Легко видеть, что существуют два класса эквивалентности гомеоморфизмов $e \rightarrow (0, 1)$. *Ориентировать* ребро e значит выбрать один из этих классов эквивалентности.

Пусть e — ребро графа, инцидентное двум вершинам. Предположим, что ребро e ориентировано; ясно, что понимать под его *начальной* и *конечной* вершинами. Для полноты дадим точные математические определения этих понятий. По предположению пара $(\bar{e}, e)$ гомеоморфна паре $([0, 1], (0, 1))$. Можно выбрать гомеоморфизм $h: \bar{e} \rightarrow [0, 1]$ так, чтобы сужение $h|_e$ принадлежало классу эквивалентности, которым задается ориентация ребра e . Тогда начальной вершиной ребра e будет точка $h^{-1}(0)$, а конечной — точка $h^{-1}(1)$.

Если ребро e инцидентно лишь одной вершине (т. е. пара $(\bar{e}, e)$ гомеоморфна паре $(S^1, S^1 - \{1\})$), мы договоримся считать эту вершину и начальной, и конечной.

Путем из ребер в графе назовем конечную последовательность *ориентированных* ребер $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ($n \geq 1$), в которой конечная вершина ребра e_{i-1} служит начальной вершиной ребра e_i для $1 < i \leq n$. Путь $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ называется *редуцированным*,

если ни для какого числа $i = 2, 3, \dots, n$ ребра e_{i-1} и e_i не представляют одно и то же ребро с противоположными ориентациями. Обычно нас интересуют лишь редуцированные пути из ребер, и, если явно не оговорено противное, мы будем считать, что все пути из ребер редуцированы. Если $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ — путь из ребер, то начальная вершина ребра e_1 называется *начальной вершиной пути*, а конечная вершина ребра e_n — *конечной вершиной пути*. Говорят, что такой путь *соединяет* свою начальную и конечную вершины; путь из ребер называется *замкнутым*, если его начальная и конечная вершины совпадают. Замкнутый путь из ребер также называется *циклом*.

Упражнения

3.1. Докажите, что любое компактное подмножество графа содержится в конечном подграфе.

3.2. Докажите, что граф связан тогда и только тогда, когда каждую пару его вершин можно соединить путем из ребер.

3.3. Докажите, что объединение и пересечение любого множества подграфов данного графа X также являются подграфами.

3.4. Пусть X — граф, не являющийся локально конечным, и v — вершина графа X , инцидентная бесконечному числу ребер. Докажите, что v не имеет счетной базы окрестностей. Отсюда выведите, что если граф метризуемый, то он локально конечный.

✓ 4. Деревья

Дерево — это связный граф, не содержащий ни одного замкнутого (редуцированного) пути из ребер. Например, деревом будет граф, состоящий из одного ребра e и двух вершин, инцидентных ему, а также граф, состоящий только из одной вершины и не имеющий ребер. Граф в примере 2.3 есть дерево, то же верно и для графа в примере 2.2, если на нем задана слабая топология, как объяснено в разд. 2. С другой стороны, любой граф, содержащий ребро e , инцидентное только одной вершине (т. е. $\bar{e}$ гомеоморфно S^1), деревом не является.

Предоставляем читателю доказать следующие два свойства деревьев:

- (а) любой связный подграф дерева также является деревом;
- (б) в любом дереве любые две различные вершины можно соединить единственным редуцированным путем из ребер.

Докажем основную теорему о топологии деревьев.

Теорема 4.1. *Любое дерево стягиваемо.*

Доказательство. Сначала индукцией по числу ребер докажем теорему для конечных деревьев. Теорема очевидна в случаях, когда дерево не имеет ребер (т. е. это граф, состоящий из единственной вершины) и когда у него в точности одно ребро.

Предположим, что теорема доказана для всех деревьев, имеющих менее n ребер, и пусть T — дерево с n ребрами, $n > 1$. Мы утверждаем, что в T найдется вершина v , инцидентная лишь одному ребру из T . Это утверждение доказывается методом от противного: если каждая вершина в конечном связном графе инцидентна двум или более ребрам, то легко построить замкнутый путь из ребер. Итак, пусть e — то единственное ребро, которому инцидентна вершина v , и пусть $T' = T - (e \cup \{v\})$. Легко доказать, что T' — связный подграф графа T . Следовательно, T' — дерево. По предположению индукции T' стягиваемо. Для завершения доказательства остается показать, что T' — деформационный ретракт графа T . Описание очевидной деформационной ретракции мы оставляем читателю.

Теперь предположим, что T — любое дерево. Выберем некоторую вершину $v_0 \in T$ и определим стягивающую гомотопию

$$f: T \times I \rightarrow T$$

так, что $f(x, 0) = x$, $f(x, 1) = v_0$ и $f(v_0, t) = v_0$ для любых $x \in T$ и $t \in I$. Отображение f построим последовательными шагами. Для каждой вершины $v \in T$ выберем конечный связный подграф $T(v)$ графа T , содержащий вершины v_0 и v . Так как граф T связен, такой выбор возможен. Выберем в $T(v)$ путь $t \rightarrow f(v, t)$, $0 \leq t \leq 1$, с начальной точкой v и конечной v_0 . Положим $f(v_0, t) = v_0$ для всех t . Таким образом определена функция f на множестве $T^0 \times I$, где T^0 — множество вершин дерева T .

Пусть e — любое ребро из T ; покажем, как распространить отображение f на $\bar{e} \times I$. Пусть v_1 и v_2 — вершины, инцидентные ребру e . Тогда $T(v_1) \cup T(v_2) \cup e$ — конечный связный подграф дерева T и, следовательно, дерево. На основании первой части доказательства это конечное дерево стягиваемо и потому односвязно. Множество $\bar{e} \times I$ гомеоморфно квадрату. На двух его сторонах $\{v_1\} \times I$ и $\{v_2\} \times I$ отображение f уже определено. Ясно, как определить f на остальных двух сторонах квадрата: на стороне $\bar{e} \times \{0\}$ должно быть

$$f(x, 0) = x,$$

а на стороне $\bar{e} \times \{1\}$

$$f(x, 1) = v_0.$$

Итак, четыре стороны квадрата $\bar{e} \times I$ отображены в односвязное пространство $T(v_1) \cup T(v_2) \cup e$. На основании леммы II.8.1 заключаем, что отображение f можно распространить на внутренность этого квадрата.

Применяя указанную процедуру к каждому ребру дерева T , можно продолжить отображение $f: T^0 \times I \rightarrow T$ до отображения $f: T \times I \rightarrow T$. Осталось доказать, что так определенное отобра-

жение непрерывно. Но это следует из того, что оно непрерывно на $\tilde{e} \times I$ и T для каждого ребра e имеет слабую топологию (см. упражнение 2.3).

Замечание. Во второй части доказательства вершина v_0 была выбрана произвольно, так что на самом деле мы доказали немного более сильный результат, а именно *дерево T можно гомотопически стянуть в любую наперед заданную вершину v_0 так, что при этом образ точки v_0 останется неподвижным.* Это замечание нам понадобится в доказательстве теоремы 5.2.

Любой граф содержит подграфы, являющиеся деревьями, например подграф, состоящий из единственной вершины. Множество всех таких деревьев, содержащихся в данном графе, частично упорядочено по включению.

Теорема 4.2. Пусть X — некоторый граф; тогда любое дерево ¹⁾, содержащееся в X , содержится в максимальном дереве в X .

Доказательство. Если X — конечный граф, то существует лишь конечное число его подграфов, и теорема очевидна. Чтобы справиться со случаем бесконечного графа X , привлечем лемму Цорна. Для этого надо доказать такое утверждение: пусть $\{T_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — семейство деревьев, содержащихся в X , линейно упорядоченное по включению; тогда объединение

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$$

есть подграф графа X , являющийся также деревом. Доказательство оставляем читателю.

Теперь справедливость теоремы вытекает непосредственно из леммы Цорна.

Следующая теорема позволяет глубже пропикнуть в природу максимальных деревьев в графе.

Теорема 4.3. Пусть X — связный граф и T — его подграф, являющийся деревом. Это дерево максимально тогда и только тогда, когда оно содержит все вершины графа X .

Доказательство. Предположим, что T — максимальное дерево, не содержащее всех вершин графа X . Так как граф X связен, в нем найдется путь $(e_1, \dots, e_n)$ из ребер, начальная вершина которого содержится в T , а конечная — нет. Легко показать, что начальная вершина одного из ребер, встречающихся при движении вдоль этого пути, скажем e_i , должна содержаться

¹⁾ В этой теореме предполагается, что все рассматриваемые деревья в графе X являются его подграфами.

в T , а конечная — нет. Следовательно, $\bar{e}_i$ не содержится в T . Однако $T \cup \bar{e}_i$ — связный подграф графа X и, как легко доказать, дерево. А это противоречит максимальной T . Итак, необходимость условия доказана.

Чтобы доказать достаточность, предположим, что T содержит все вершины графа X . Если e — любое его ребро, не содержащееся в T , то вершины ребра e содержатся в T , и потому $T \cup e$ — связный подграф графа X . Легко видеть, что $T \cup e$ содержит замкнутый путь из ребер; следовательно, $T \cup e$ не дерево. Так как эти рассуждения применимы к любому ребру e не из дерева T , то T — максимальное дерево.

5. Фундаментальная группа графа

Теперь мы подготовлены к доказательству одной из основных теорем настоящей главы.

Теорема 5.1. *Фундаментальная группа любого связного графа X свободна.*

Теорема очевидна, если X — дерево, так как в этом случае фундаментальная группа тривиальна (тривиальную группу можно считать свободной группой с пустым множеством образующих). В случае когда X не дерево, мы докажем теорему, сформулированную более явно.

Сначала заметим, что хотя путь из ребер в графе несколько отличается от пути, определенного в гл. II, между этими двумя понятиями есть довольно очевидная связь. Путь из ребер $(e_1, \dots, e_n)$ в графе X , соединяющий вершины v_0 и v_1 , следующим образом определяет единственный класс эквивалентности путей в топологическом пространстве X , соединяющих точки v_0 и v_1 . Для каждого ориентированного ребра e_i выберем отображение $f_i: I \rightarrow \bar{e}_i$ так, что $f_i| (0, 1)$ — гомеоморфизм интервала $(0, 1)$ на e_i , обратный к которому принадлежит классу эквивалентности, определяемому ориентацией ребра e_i . Обозначим через α_i класс эквивалентности пути f_i . Тогда произведение $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ определяется однозначно путем $(e_1, \dots, e_n)$ из ребер.

В оставшейся части главы, рассматривая пути из ребер и ассоциированные с ними классы эквивалентности путей, мы позволим себе удобства ради несколько отклониться от обычной терминологии.

Из контекста обычно будет ясно, что имеется в виду, и ошибки не возникнет.

Пусть X — связный граф, v_0 — его вершина и T — максимальное дерево в X , содержащее v_0 . Обозначим через $\{e_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ множество ребер графа X , не содержащихся в T . Для каждого из ребер e_λ выберем определенную ориентацию и обозначим через

a_λ и b_λ начальную и конечную вершины ребра e_λ (конечно, может оказаться, что $a_\lambda = b_\lambda$). Каждому ребру e_λ поставим в соответствие элемент $\alpha_\lambda \in \pi(X, v_0)$ по такому правилу. В графе T существуют единственный редуцированный путь из ребер A_λ , соединяющий v_0 с a_λ , и единственный путь из ребер B_λ , соединяющий v_0 с b_λ . Тогда α_λ — класс эквивалентности, определенный путем из ребер $(A_\lambda, e_\lambda, B_\lambda)$. Если $a_\lambda = v_0$, опускаем A_λ , аналогично если $b_\lambda = v_0$, опускаем B_λ .

Теорема 5.2. *Фундаментальная группа $\pi(X, v_0)$ — свободная группа с множеством образующих $\{\alpha_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$.*

Доказательство. Сначала докажем для случая, когда множество индексов Λ содержит лишь один элемент, т. е. когда только одно ребро графа X не содержится в максимальном дереве T . Обозначим это ребро через e_1 . Так как X не дерево, то в X существует замкнутый путь из ребер, и ясно, что любой такой путь должен включать ребро e_1 . Выберем на e_1 ориентацию. Тогда в графе X должен быть редуцированный замкнутый путь из ребер, начинающийся с ребра e_1 , т. е. путь вида $(e_1, \dots, e_n)$. Выбирая среди всех таких путей «кратчайший», получаем *простой* замкнутый путь из ребер, т. е. такой, в котором ни одна вершина и ни одно ребро не встречаются дважды. Обозначим этот простой замкнутый путь через $(e_1, \dots, e_m)$. Пусть

$$C = \bigcup_{i=1}^m \bar{e}_i.$$

Тогда C — подграф графа X , гомеоморфный окружности.

Рассмотрим дополнение $X - C$. Пусть $\{Y_i\}$ — множество его компонент. Каждое множество $\bar{Y}_i$ будет подграфом дерева T и потому деревом, причем $\bar{Y}_i$ пересекается с C ровно по одной вершине. На основании замечания, сделанного после доказательства теоремы 4.1, каждое из деревьев $\bar{Y}_i$ можно стянуть в эту вершину. Отсюда вытекает, что C — деформационный ретракт графа X и, следовательно, отображение включения $C \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Таким образом, $\pi(X)$ — бесконечная циклическая группа. Оставляем читателю проверку того, что она порождается, как указано в теореме 5.2.

Для доказательства общего случая применим общую формулу теоремы Зейферта — ван Кампена.

Для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ выберем некоторую точку $x_\lambda \in e_\lambda$. Множество $\{x_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ замкнуто и дискретно, поскольку пространство X наделено слабой топологией. Обозначим через U дополнение к $\{x_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ в X . Тогда T — деформационный ретракт множества U , так что U стягиваемо. Пусть для любого

индекса λ

$$V_\lambda = U \cup \{x_\lambda\}.$$

Тогда $Y_\lambda \supset U$ для всех λ и, если $\lambda \neq \mu$,

$$V_\lambda \cap V_\mu = U.$$

Ясно, что $T \cup e_\lambda$ — деформационный ретракт для V_λ , и потому фундаментальная группа $\pi(V_\lambda, v_0)$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом α_λ .

Теперь применим теорему IV.2.2 к открытому покрытию пространства X , состоящему из множеств V_λ и U . Тогда $\pi(X, v_0)$ — свободное произведение групп $\pi(V_\lambda, v_0)$ (см. упражнение IV.3.1).

Упражнения

5.1. Пусть T — треугольник в плоскости $\mathbb{R}^2$ с вершинами a, b и c . (а) Докажите, что замкнутый отрезок $\overline{ab}$ есть деформационный ретракт треугольника T . (б) Докажите, что объединение двух замкнутых отрезков $\overline{ab}$ и $\overline{bc}$ есть деформационный ретракт треугольника T .

5.2. Пусть S — компактная поверхность с краем, на которой задана триангуляция. Докажите, что существует конечный связный граф $X \subset S$, состоящий из ребер и вершин заданной на S триангуляции, являющийся деформационным ретрактом поверхности S и имеющий ту же эйлерову характеристику, что и S . Выведите отсюда, что $\pi(S)$ — свободная группа с $1 - \chi(S)$ образующими. [Указание. Пусть T — такой треугольник из заданной триангуляции, что по крайней мере одно из его ребер содержится в крае поверхности S . Покажите, что $S - T$ — деформационный ретракт поверхности S . (Рассмотрите отдельно случаи, когда одна и когда две стороны треугольника T принадлежат краю.) Используйте результат предыдущего упражнения. Повторяя последовательно эту процедуру стягивания S на $S - T$, можно избавиться от всех треугольников. В результате останется как раз нужный граф X .]

5.3. Пусть X — связный граф, Y — его связный подграф и v — некоторая вершина подграфа Y . Докажите, что можно так выбрать образующие $\{a_i\}$ группы $\pi(Y, v)$ и $\{b_j\}$ группы $\pi(X, v)$, что $\pi(X, v)$ и $\pi(Y, v)$ будут свободными группами над $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ соответственно и образ множества $\{a_i\}$ при гомоморфизме $i_*: \pi(Y, v) \rightarrow \pi(X, v)$ будет подмножеством множества $\{b_j\}$. В частности, i_* — мономорфизм. [Указание. Выберите максимальное дерево в Y и расширьте его до максимального дерева в X .]

5.4. Пусть S и S' — компактные поверхности с краем, S' содержится во внутренней поверхности S , каждая компонента связности множества $S - S'$ пересекается с краем поверхности S и существует такая триангуляция поверхности S , что S' можно представить в виде объединения некоторых ее треугольников. Докажите, что можно так выбрать образующие $\{a_i\}$ группы $\pi(S', x)$ и $\{b_j\}$ группы $\pi(S, x)$, что $\pi(S', x)$ и $\pi(S, x)$ будут свободно порожденными группами над $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ соответственно и образ множества $\{a_i\}$ при гомоморфизме $i_*: \pi(S', x) \rightarrow \pi(S, x)$ будет подмножеством множества $\{b_j\}$. [Указание. Проведите процесс сжимания треугольников, описанный в упражнении 5.2, так, чтобы сначала сжать все треугольники из $S - S'$, а затем из S' . Этим способом мы сводим задачу к упражнению 5.3.]

Замечание. Можно показать, что предположение о существовании на S определенной триангуляции всегда автоматически выполняется.

5.5. Пусть S — некомпактная поверхность с заданной триангуляцией. Докажите, что существует последовательность $S_1, S_2, S_3, \dots$ компактных поверхностей с краем, содержащихся в S и обладающих такими свойствами:

- (а) для всех n поверхность S_n содержится во внутренней части поверхности S_{n+1} ;
- (б)
$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$
;
- (с) каждая компонента множества $S_{n+1} - S_n$ пересекается с краем поверхности S_{n+1} ;
- (д) каждую поверхность S_n можно триангулировать так, что S_{n-1} будет объединением треугольников данной триангуляции.

[Указание. Построим поверхность S_n индукцией по n . В качестве S_1 возьмем какой-нибудь треугольник из данной триангуляции. Предположим, что поверхности $S_1, S_2, \dots, S_n$, обладающие свойствами (а) — (д), построены. Построим S_{n+1} , присоединяя к S_n треугольники и куски треугольников. Чтобы поверхность S_{n+1} обладала свойством (с), выберем ее так, чтобы замыкание каждой компоненты множества $S - S_{n+1}$ было некомпактным. Так как любая триангуляция поверхности S состоит из счетного числа треугольников, то нетрудно удовлетворить условию (б).]

5.6. Используйте упражнения 5.4 и 5.5 для доказательства того, что фундаментальная группа некомпактной поверхности (которую можно триангулировать) есть свободная группа с конечным или счетным множеством образующих. [Указание. Заметим, что если в конструкции упражнения 5.5 C — компактное подмножество поверхности S , то найдется такое целое число n , что $C \subset S_n$. Следовательно, можно применить результат упражнения II.4.11.]

5.7. Предположим, что S — некомпактная триангулируемая односвязная поверхность. Докажите, что если конструкция упражнения 5.5 применима к S , то каждая поверхность S_n гомеоморфна единичному диску E^2 . [Указание. Используйте упражнение 5.6 и классификационную теорему из разд. I.10 для компактных поверхностей с краем.]

Замечание. Доказываемая в упражнении гомеоморфность поверхности S_n диску E^2 вытекает из того, что поверхность S гомеоморфна плоскости $\mathbb{R}^2$. Доказательство опирается на классическую теорему Шейфлиса.

✓ 6. Эйлерова характеристика конечного графа

Точно так же, как в случае компактного 2-многообразия, эйлерову характеристику конечного графа X (обозначаемую через $\chi(X)$) положим равной разности числа вершин графа X и числа его ребер. Оставляем читателю проверку того, что эйлерова характеристика инвариантна относительно разбиения.

Предложение 6.1. Если T — конечное дерево, то $\chi(T) = 1$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по числу ребер в дереве. Если всего 0 ребер и 1 вершина или 1 ребро и 2 вершины, то утверждение очевидно. Для проведения шага индукции можно рассуждать, как в первой части доказательства теоремы 4.1. Подробности оставляем читателю.

Теорема 6.2. Пусть X — конечный связный граф. Тогда фундаментальная группа $\pi(X)$ есть свободная группа с $1 - \chi(X)$ образующими.

Доказательство. Пусть T — максимальное дерево в графе X , а $e_1, \dots, e_k$ — ребра, не содержащиеся в T . В силу предложения 6.1

$$\chi(X) = 1 - k.$$

С другой стороны, по теореме 5.2 $\pi(X)$ — свободная группа с k образующими. Отсюда вытекает теорема.

Следствие 6.3. Если два конечных связных графа X и Y имеют один и тот же гомотопический тип, то $\chi(X) = \chi(Y)$, т. е. эйлера характеристика графа является гомотопическим инвариантом.

Утверждение, обратное этому следствию, также справедливо, но нам оно не понадобится.

Следствие 6.4. Если X — конечный связный граф и $\chi(X) = 1$, то X — дерево.

Следствие 6.5. Если X — конечный связный граф, то $\chi(X) \leq 1$.

Заметим, что если не предполагать связность графа X , то число $\chi(X)$ может быть произвольно большим.

7. Пространства, накрывающие граф

Как было отмечено ранее в этой главе, связный граф обладает достаточно хорошими локальными свойствами, так что к нему целиком применима теория накрывающих пространств. Покажем, что любое накрывающее граф пространство естественным образом является графом.

Теорема 7.1. Пусть X — связный граф с множеством вершин X^0 , (Y, p) — накрывающее его пространство и $Y^0 = p^{-1}(X^0)$. Тогда Y — граф с множеством вершин Y^0 .

Доказательство. Ясно, что Y^0 — замкнутое дискретное подмножество пространства Y . Пусть e — ребро графа X . Тогда по лемме V.2.1 каждая компонента множества $p^{-1}(e)$ будет накрывающим пространством для e . Так как множество e односвязно, то каждая компонента множества $p^{-1}(e)$ отображается на e гомеоморфно и в силу локальной связности она открыта в $p^{-1}(e)$. Следовательно, выполняется условие (b) из разд. 2. Легко проверить также условие (c); если множество $\bar{e}$ гомеоморфно отрезку $[0, 1]$, то каждая компонента множества $p^{-1}(\bar{e})$ отображается гомеоморфно. Если множество $\bar{e}$ гомеоморфно окружности

S^1 , то применяем все, что мы знаем о возможных накрытиях окружности. Наконец, условие (d) непосредственно следует из леммы V.12.3, поскольку существует такое соответствующее любому ребру e_i отображение $f_i: I \rightarrow X$, что $f_i(I) = \bar{e}_i$ и f_i гомеоморфно отображает открытый интервал $(0, 1)$ на e_i .

Опишем простой способ, как указать на чертеже всю информацию, относящуюся к пространству, накрываемому граф. Пусть X — связный граф, лучше конечный. Пометим ребра графа буквами $a, b, c, \dots$, снабдим каждое ребро ориентацией и укажем ее стрелкой. Вершины пометим буквами $U, V, W, \dots$ и т. д. Пусть граф $(\tilde{X}, p)$ накрывает X . Отображение p на диаграмме графа $\tilde{X}$ укажем так. Ребра множества $p^{-1}(a)$ пометим буквами $a_1, a_2, a_3, \dots$ и на каждом из них поместим стрелку, указывающую ориентацию, согласованную с ориентацией ребра a при отображении p . Проделаем то же с ребрами из $p^{-1}(b)$, $p^{-1}(c)$ и т. д. Вершины из множества $p^{-1}(U)$ пометим буквами U_1, U_2, U_3 и т. д.

Примеры

7.1. На рис. 6.1, *a* показан простой граф, помеченный буквами так, как указано выше, а на рис. 6.1, *b* и *в* два различных накрывающих пространства этого графа, также помеченных буквами. Хотя оба накрытия являются 6-листными и регулярными, они не изоморфны. Можно доказать, что группа автоморфизмов накрытия на рис. 6.1, *b* — циклическая группа порядка 6, а группа автоморфизмов накрытия на рис. 6.1, *в* — неабелева группа порядка 6. Предлагаем читателю попытаться обнаружить в каждом случае эти различные автоморфизмы. На данном примере видно, как важны стрелки, указывающие ориентации ребер. Заметим, что из этих диаграмм легко вывести, как действует группа $\pi(X, V)$ на множестве вершин $p^{-1}(V)$.

7.2. На рис. 6.2 показано накрытие графа, изображенного на рис. 6.1, *a*, отличное от предыдущих. Рекомендуем читателю доказать, что группа автоморфизмов этого накрываемого пространства состоит из одной лишь единицы.

Непосредственно из теоремы 7.1 вытекает очень важный теоретико-групповой результат:

Теорема 7.2. *Любая подгруппа свободной группы свободна.*

Доказательство. Пусть F — свободная группа над множеством S и F' — ее подгруппа. Построим такой связный граф X , что $\pi(X) \approx F$. Это можно сделать так. Пусть X имеет одну вершину, а множество его ребер находится во взаимно однозначном соответствии с элементами множества S , т. е. X представляет собой объединение окружностей, попарно пересекающихся в одной точке — вершине графа X . Снабдим X слабой топологией. Из теории накрывающих пространств известно, что существует пространство $(\tilde{X}, p)$, накрывающее X и такое, что

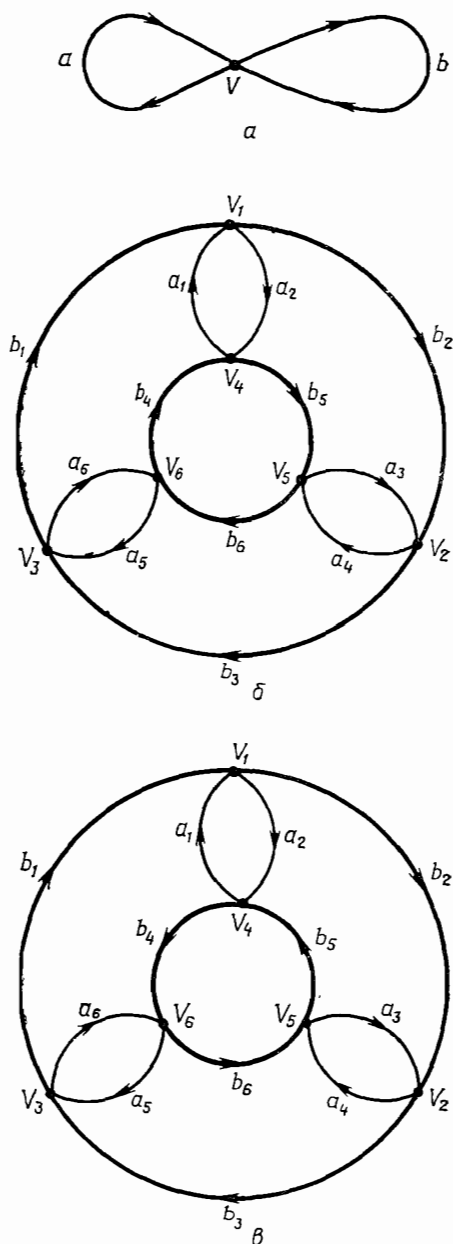


Рис. 6.1. Пример 7.1: два различных 6-листных регулярных покрывающих пространства графа. a — база; b — первое накрытие; $в$ — второе накрытие.

$\pi(\tilde{X}, p) \approx F'$. По теореме 7.1 пространство $\tilde{X}$ является графом. Следовательно, F' — свободная группа.

Позже мы займемся вопросом описания множества свободных образующих подгруппы F' , а сейчас остановимся на конечно порожденных свободных группах.

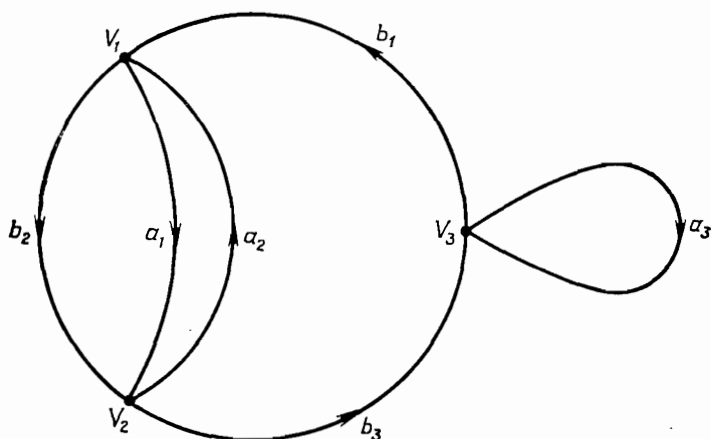


Рис. 6.2. Пример 7.2: 3-листное нерегулярное накрывающее пространство графа.

Теорема 7.3. Пусть F — свободная группа с k образующими, $k \geq 1$, и F' — ее подгруппа индекса n . Тогда F' — свободная группа с $n(k-1) + 1$ образующими.

Доказательство. Пусть X — такой конечный граф, что $\pi(X) \approx F$. Тогда по теореме 6.2

$$\chi(X) = 1 - k.$$

Пусть $\tilde{X}$ — накрывающее пространство графа X , соответствующее подгруппе F' . Тогда $\tilde{X}$ есть n -листное накрытие и потому

$$\chi(\tilde{X}) = n \cdot \chi(X) = n - nk.$$

Таким образом, F' — свободная подгруппа с

$$1 - \chi(\tilde{X}) = 1 - n + nk$$

образующими.

При сравнении с теорией свободных абелевых групп или конечных групп этот результат кажется парадоксальным. Если $k > 1$, то при возрастании индекса число образующих также возрастает. С другой стороны, для конечных групп чем больше индекс под-

группы, тем меньше ее порядок. Если A — свободная абелева группа с k образующими, то любая ее подгруппа конечного индекса есть также свободная абелева группа ранга k .

8. Образующие элементы подгруппы свободной группы

В предыдущем разделе, используя то, что любое накрывающее граф пространство является графом и фундаментальная группа графа свободна, мы доказали, что каждая подгруппа свободной группы свободна. Однако в нашей теореме о фундаментальной группе графа в действительности доказывается большее: дается явное описание множества образующих фундаментальной группы. Естественно ожидать, что этим более точным результатом можно воспользоваться для определения образующих некоторой подгруппы свободной группы. Покажем, как это сделать.

Так как выбор образующих фундаментальной группы графа связан с выбором максимального дерева, наша первая задача состоит в том, чтобы показать, как выбором определенных элементов фундаментальной группы графа X определяется максимальное дерево графа $\tilde{X}$, накрывающего X .

Пусть F — свободная группа над множеством S и F' — ее подгруппа. Мы хотим найти такое множество S' образующих группы F' , что F' — свободная группа над S' . Как и в доказательстве теоремы 7.2, предположим, что X — связный граф с одной вершиной v_0 и $\pi(X, v_0) \approx F$; ребра графа X находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества S . Предполагается, что на каждом ребре задана ориентация. Пусть граф $(\tilde{X}, p)$ накрывает X так, что $p_* \pi(\tilde{X}, v_1) = F'$ для некоторой вершины v_1 графа $\tilde{X}$. Для определения образующих фундаментальной группы $\pi(\tilde{X}, v_1)$ мы собираемся применить теорему 5.2. Пусть T — максимальное дерево в $\tilde{X}$. Каждой вершине v графа $\tilde{X}$ соответствует в дереве T единственный редуцированный путь γ_v из ребер, начинающийся в v_1 и заканчивающийся в v . Обозначим через $p_*(\gamma_v)$ путь из ребер в X , представляющий собой образ пути γ_v при проекции p ; этот путь замкнут в X и ассоциированный с ним класс эквивалентности путей есть элемент группы $\pi(X, v_0)$, который мы также обозначим через $p_*(\gamma_v)$. Приведем несколько результатов относительно этого множества классов замкнутых путей.

(1) Множество классов $\{p_*(\gamma_v): v \text{ — вершина из } \tilde{X}\}$ замкнутых путей из ребер полностью определяет дерево T (очевидно).

(2) Каждый класс смежности $F' \cdot \alpha$ подгруппы F' содержит точно один из классов $p_*(\gamma_v)$. (Это легко следует из рассуждений, приведенных в гл. V.)

(3) Множество $\{p_*(\gamma_v): v — \text{вершина из } \tilde{X}\}$ является *системой Шрейера* в свободной группе $F = \pi(X, v_0)$. Под *системой Шрейера* в свободной группе F с множеством образующих S понимается непустое подмножество группы F , удовлетворяющее такому условию. Предположим, что элемент $g \neq 1$ принадлежит системе Шрейера. Представим g в виде редуцированного слова от образующих группы:

$$g = s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_k^{n_k}.$$

Пусть

$$g' = \begin{cases} gs_k, & n_k < 0, \\ gs_k^{-1}, & n_k > 0. \end{cases}$$

Тогда мы требуем, чтобы элемент g' также принадлежал этой системе (элемент g' можно представлять себе как редуцированное слово, полученное из g зачеркиванием его последней буквы). Заметим, что 1 принадлежит каждой системе Шрейера.

Предоставляем читателю доказать, что множество $\{p_*(\gamma_v): v — \text{вершина из } \tilde{X}\}$ есть система Шрейера в F ; доказательство не трудно.

Обратно, если G — такая система Шрейера в свободной группе F , что каждый класс смежности F' -а подгруппы F' состоит не более чем из одного элемента из G , то в $\tilde{X}$ существует единственное дерево T , содержащее v_1 и такое, что

$$\{p_*(\gamma_v): v — \text{вершина из } T\} = G,$$

где через γ_v обозначен единственный класс путей из ребер в T , соединяющих вершину v_1 с вершиной v . Если каждый класс смежности F' -а подгруппы F' содержит элемент из G , то это единственное дерево T является максимальным деревом накрытия $\tilde{X}$.

Эти результаты, каждый из которых легко проверяется, показывают, что можно установить естественное взаимно однозначное соответствие между максимальными деревьями накрытия $\tilde{X}$ и такими системами Шрейера G в группе F , что каждый класс смежности подгруппы F' содержит точно один элемент из G . Применим это взаимно однозначное соответствие для нахождения множества образующих подгруппы F' . В наших обозначениях множество образующих группы $\pi(\tilde{X}, v_1)$ строится так. Пусть e — ребро накрытия $\tilde{X}$, не содержащееся в T ; ориентируем ребро e так, чтобы его ориентация была согласована с ориентацией ребра $p(e)$ при проекции p , и обозначим через v и v' его начальную и конечную вершины. Тогда $\gamma_v e (\gamma_{v'})^{-1}$ — типичная образующая группы $\pi(\tilde{X}, v_1)$, и, беря типичную образующую, соответствующую каждому ребру накрытия $\tilde{X}$, не лежащему в дереве T , мы получим полную систему

образующих. С помощью изоморфизма p_* строим множество свободных образующих подгруппы F' . Далее,

$$p_* [\gamma_v e (\gamma_{v'})^{-1}] = (p_* \gamma_v) (p_* e) (p_* \gamma_{v'})^{-1}. \quad (6.8.1)$$

Здесь $(p_* \gamma_v)$ и $(p_* \gamma_{v'})$ — элементы из G , а $(p_* e)$ — образующая группы F (т. е. элемент множества S). Так как (6.8.1) представляет элемент подгруппы F' , то $(p_* \gamma_v)$, $(p_* e)$ и $(p_* \gamma_{v'})$ принадлежат одному и тому же классу смежности подгруппы F' .

Представим (6.8.1) в более удобной алгебраической форме. Для любого элемента $a \in F$ обозначим через $\Phi(a)$ тот единственный элемент из G , который принадлежит тому же классу смежности подгруппы F' , что и a . Тогда правая часть в (6.8.1) принимает вид

$$gs [\Phi(gs)]^{-1}, \quad (6.8.2)$$

где $g \in G$, $s \in S$. Таким образом, мы показали, что подгруппа F' группы F есть свободная группа, порожденная элементами вида (6.8.2). Вообще говоря, не каждый элемент вида (6.8.2) будет свободной образующей подгруппы F' , задаваемой формулой (6.8.1). Предлагаем читателю проверить, что возможны лишь две альтернативы: для любых элементов $g \in G$ и $s \in S$ либо $gs [\Phi(gs)]^{-1} = 1$, либо $gs [\Phi(gs)]^{-1}$ — одна из образующих, задаваемых формулой (6.8.1). Итак, мы доказали, что справедлива

Теорема 8.1. Пусть F — свободная группа над множеством S , F' — ее подгруппа и G — система Шрейера, содержащая точно один элемент из каждого класса смежности подгруппы F' . Тогда F' — свободная группа над множеством

$$\{gs [\Phi(gs)]^{-1}: g \in G, s \in S, gs [\Phi(gs)]^{-1} \neq 1\}.$$

Пример

8.1. Пусть F — свободная группа над множеством S , состоящим из двух элементов: $S = \{s_1, s_2\}$, а F' — ее коммутаторная подгруппа. В этом случае граф X имеет вид восьмерки и состоит из двух окружностей, пересекающихся в одной точке; накрытие $\tilde{X}$ будет графом, состоящим из вертикальных прямых $x = m$ и горизонтальных прямых $y = n$, где m и n пробегает все целые числа (см. пример 2.4). Проекция $p: \tilde{X} \rightarrow X$ накручивает каждую горизонтальную прямую на окружность s_1 , а каждую вертикальную прямую — на окружность s_2 . В примере V.11.6 доказано, что $(\tilde{X}, p)$ — покрывающее пространство для X , соответствующее коммутаторной подгруппе $\pi_1(X)$.

Факторгруппа F/F' — свободная абелева группа с двумя образующими s_1 и s_2 . Следовательно, в качестве представителей классов смежности можно взять элементы $s_1^m s_2^n$, где m и n — целые числа. Ясно, что эти элементы образуют систему Шрейера. Соответствующее максимальное дерево в графе $\tilde{X}$ состоит из объединения осей x и всех вертикальных прямых $x = m$. Элементы вида $gs [\Phi(gs)]^{-1}$ здесь таковы:

$$(s_1^m s_2^n) s_1 (s_1^{m+1} s_2^n)^{-1}, \quad (6.8.3)$$

$$(s_1^m s_2^n) s_2 (s_1^m s_2^{n+1})^{-1}. \quad (6.8.4)$$

Они получаются, если положить $g = s_1^m s_2^n$ и $s = s_1$ или $s = s_2$. Нетрудно видеть, что элемент, задаваемый формулой (6.8.4), есть единица, а элемент, задаваемый формулой (6.8.3), равен $s_1^m s_2^n s_1 s_2^{-n} s_1^{-m-1}$. Таким образом, мы доказали, что коммутаторная подгруппа свободной группы с двумя образующими $\{s_1, s_2\}$ есть свободная группа с образующими $s_1^m s_2^n s_1 s_2^{-n} s_1^{-m-1}$, где (m, n) пробегает все пары целых чисел $\neq (0, 0)$.

Советуем читателю как следует изучить этот пример, поскольку он довольно нагляден и хорошо иллюстрирует общий случай. В частности, предлагаем убедиться в том, что полученные нами образующие коммутаторной подгруппы в точности соответствуют образующим фундаментальной группы графа $\tilde{X}$, найденным с помощью теоремы 5.2. Советуем также рассмотреть другие максимальные деревья в графе $\tilde{X}$ и построить соответствующие системы Шрейера в группе F .

Упражнения

8.1. Найдите какое-нибудь множество свободных образующих коммутаторной подгруппы свободной группы с n образующими $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$.

8.2. Пусть F — свободная группа с двумя образующими s_1 и s_2 . Сколько подгрупп индекса 2 имеет группа F ? [Указание. Каждая подгруппа индекса 2 нормальна и факторгруппа по ней — циклическая порядка 2.] Для каждой подгруппы индекса 2 найдите множество свободных образующих. Интерпретируйте результаты на языке графов.

8.3. Пусть F — свободная группа, N — нетривиальная нормальная подгруппа бесконечного индекса. Докажите, что группа N не является конечно порожденной.

8.4. Пусть F — свободная группа с двумя образующими a и b , а S_3 — симметрическая группа степени 3, рассматриваемая как множество всех перестановок множества $\{1, 2, 3\}$. Зададим эпиморфизм $f: F \rightarrow S_3$ равенствами $f(a) = (1, 2)$, $f(b) = (1, 2, 3)$, где $(1, 2)$ и $(1, 2, 3)$ — циклические перестановки. С помощью теоремы 8.1 постройте множество свободных образующих ядра отображения f . Интерпретируйте результаты на языке накрывающего графа пространства.

8.5. Пусть F — свободная группа с двумя образующими a и b , а H — циклическая группа порядка 6 с образующей x . Зададим эпиморфизм $f: F \rightarrow H$ равенствами $f(a) = x^3$ и $f(b) = x^2$. С помощью теоремы 8.1 постройте множество свободных образующих ядра отображения f и интерпретируйте результаты на языке накрывающего графа пространства. Сравните накрывающие пространства в упражнениях 8.4 и 8.5 (они оба 6-листные регулярные накрытия кривой, имеющей форму восьмерки) с накрывающим пространством из примера 7.1.

8.6. Пусть F — свободная группа с двумя образующими a и b . Зададим действие группы F на множестве $\{1, 2, 3\}$ так: a — транспозиция $(1, 2)$, b — циклическая перестановка $(1, 2, 3)$ (считается, что элементы группы F действуют справа). Пусть F' — изотропная подгруппа элемента 1, т. е. множество элементов группы F , оставляющих элемент 1 неподвижным. С помощью теоремы 8.1 постройте множество свободных образующих группы F' и интерпретируйте свои результаты на языке графов. [Указание. Используйте результаты разд. 2 приложения В.] Сравните с примером 7.2.

ПРИМЕЧАНИЯ

Большинство из представленных в этой главе результатов по свободным группам относится к 1920-м гг.; они в основном принадлежат трем лицам: немецким математикам Рейдемейстеру, Шрейеру и датскому математику Нильсену. Большинство статей Рейдемейстера и Шрейера опубликовано в журнале *Hamburger Abhandlungen*, а затем эти результаты собраны Рейдемейстером в его книге [6].

Теорема Куратовского о вложении графов в плоскость

Одна из наиболее известных теорем по топологии графов доказана в 1930 г. польским топологом К. Куратовским.

В разд. 2 мы упоминали о том, что каждый конечный граф можно топологически вложить в евклидово 3-пространство. Но не каждый такой граф можно вложить в плоскость. Приведем два примера.

- (а) Пусть X — граф с пятью вершинами, десятью ребрами, причем каждую пару различных вершин соединяет одно ребро.
- (б) Пусть Y — граф с шестью вершинами $\{a, b, c, a', b', c'\}$, девятью ребрами и каждую вершину, отмеченную буквой со штрихом, с каждой вершиной, отмеченной буквой без штриха, соединяет одно ребро.

Оставляем читателю проверить, что ни X , ни Y нельзя вложить в плоскость (используйте теорему Жордана о кривой). В теореме Куратовского утверждается, что любой конечный граф, который нельзя вложить в плоскость, содержит подграф, гомеоморфный либо графу X , либо графу Y . Доказательство этой теоремы приведено в книге Бержа [1, гл. 21], а также в статье Дирака и Шустера (*A theorem of Kuratowski*, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet.* (ser. A), 57 (1954), 343—348). В этой статье кратко рассматривается проблема вложения в плоскость счетных графов. Иные условия возможности вложения в плоскость конечного графа исследуются в статье Маклейна (*A structural characterization of planar combinatorial graphs*, *Duke Math. J.*, 3 (1937), 460—472). Клейтор обобщил теорему Куратовского на широкий класс компактных метрических пространств (*Peanian continua not imbeddable in a spherical surface*, *Ann. Math.*, 38 (1937), 631—646).

Слабая топология для графа

Согласно данному в разд. 2 определению, граф является одномерным CW-комплексом в смысле Уайтхеда (*Combinatorial homotopy*, I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 213—246). Подробно CW-комплексы обсуждаются в гл. VII.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Теория графов

1. Берж К., Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.
2. Оре О., Теория графов, изд-во «Наука», М., 1968.

Топология

3. Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, Гостехиздат, М., 1938, гл. 7 и 8.
4. Хилтон П., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, изд-во «Мир», М., 1966, гл. 6.

Теория групп

5. Курош А. Г., Теория групп, изд-во «Наука», М., 1967, гл. IX.
6. Рейдемейстер (Reidemeister K.), Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1932. Chapters 3 and 4.
7. Ротман (Rotman J. J.), The theory of groups, Boston: Allyn and Bacon, 1965. Chapter 11.
8. Скотт (Scott W. R.), Group theory, Englewood Cliffs, [N.J.: Prentice Hall, 1964. Chapter 8.
9. Холл М., Теория групп, изд-во «Мир», М., 1962, гл. 7.
10. Шенкман (Schenkman E.), Group theory, Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1965, Chapter V.
11. Шпехт (Specht W.), Gruppentheorie (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band LXXXII). Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer-Verlag, 1956, Chapter 2.1.

Глава VII

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА ПРОСТРАНСТВ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

1. Введение

В гл. IV мы нашли фундаментальные группы компактных связных 2-многообразий. Вернемся к этому в свете предыдущей главы.

Пусть M — компактное связное 2-многообразие. Можно считать, что многообразие M получено попарным отождествлением ребер некоторого многоугольника. Обозначим через X подмножество многообразия M , являющееся образом ребер при этом отождествлении. Тогда X — объединение окружностей, попарно пересекающихся лишь в одной точке; таким образом, X можно считать конечным графом с одной вершиной. Кроме того, можно считать, что многообразие M получается «приклеиванием» диска к этому графу X . Если пересмотреть результаты гл. IV, можно заметить, что отображение включения графа X в многообразие M индуцирует эпиморфизм $\pi(X) \rightarrow \pi(M)$; ядро этого эпиморфизма порождено тем элементом группы $\pi(X)$, который «уничтожается» приклеиванием диска.

В настоящей главе мы обобщим эти результаты. Взяв произвольный связный граф X , мы построим новое пространство Y , приклеивая к X любое количество дисков. Мы докажем, что отображение включения графа X в пространство Y индуцирует эпиморфизм $\pi(X) \rightarrow \pi(Y)$; ядро этого эпиморфизма порождено в точности теми элементами группы $\pi(X)$, которые «уничтожаются» приклеиванием различных дисков. Таким образом, группа $\pi(Y)$ имеет копредставление, состоящее из одной образующей для каждой образующей группы $\pi(X)$ и одного соотношения для каждого приклеиваемого диска.

Пространство Y можно еще увеличить, приклеивая к нему шары или диски высоких размерностей; мы увидим, что эта процедура уже не оказывает никакого действия на фундаментальную группу. В некотором смысле это отрицательный результат. Он означает, что фундаментальная группа является топологическим инвариантом именно «малой размерности» и приводит к необходимости иметь аналогичные топологические инварианты в высших размерностях.

Указанная процедура приклеивания дисков высоких размерностей ведет к важному понятию CW-комплекса, принадлежащему Уайтхеду. CW-комплекс — это пространство, построенное приклеиванием к некоторому графу клеток последовательно все более высоких размерностей. Опыт показывает, что для целей алгебраической топологии категория CW-комплексов — одна из наиболее полезных категорий топологических пространств. CW-комплексы обладают достаточно хорошими локальными свойствами, так что мы избавляемся от многих патологических ситуаций, но они достаточно общи, чтобы охватывать большинство пространств, необходимых для рассмотрения в алгебраической топологии.

В качестве побочного результата мы докажем, что любая группа изоморфна фундаментальной группе некоторого разумно построенного пространства, в частности пространства, получаемого приклеиванием к графу дисков (т. е. 2-мерного CW-комплекса). Наконец, в разд. 5 и 6 мы используем эти идеи в топологических доказательствах хорошо известных теорем из теории групп.

2. Приклеивание 2-клеток к пространству

Предположим, что X^* — хаусдорфово пространство, построенное из своего линейно связного подпространства X приклеиванием обычных двумерных дисков. Точнее предположим, что существует такое замкнутое подмножество $X \subset X^*$, что $X^* - X$ можно представить в виде объединения непересекающихся открытых подмножеств e_λ^2 , $\lambda \in \Lambda$, каждое из которых гомеоморфно открытому диску U^2 плоскости $\mathbb{R}^2$. Каждое подпространство e_λ^2 называется «открытой 2-клеткой». Кроме того, предположим, что для каждой клетки e_λ^2 существует так называемое «характеристическое отображение», т. е. непрерывное отображение

$$f_\lambda: E^2 \rightarrow e_\lambda^2,$$

где, как обычно, $E^2 = \{x \in \mathbb{R}^2: |x| \leq 1\}$, f_λ гомеоморфно отображает открытый диск U^2 на e_λ^2 и $f_\lambda(S^1) \subset X$. Наконец, будем считать, что пространство X^* наделено «слабой» топологией: подмножество A пространства X^* замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap X$ и $f_\lambda^{-1}(A)$ замкнуты для всех $\lambda \in \Lambda$.

Как уже упоминалось во введении, любое компактное связное 2-многообразие можно считать полученным приклеиванием одной 2-клетки к некоторому графу X . Конечно, когда пространство X^* получается из X приклеиванием конечного числа 2-клеток, как в случае компактного 2-многообразия, оно автоматически имеет слабую топологию. Условие о том, что пространство X^* должно обладать слабой топологией, представляет интерес лишь тогда, когда приклеивается бесконечно много 2-клеток.

Основная наша цель — вывести соотношение между фундаментальными группами пространств X и X^* . Для этого мы введем следующее обозначение. Зафиксируем замкнутый путь $\varphi: I \rightarrow S^1$, представляющий образующую фундаментальной группы $\pi(S^1, (1, 0))$, т. е. путь φ обегает окружность S^1 в точности один раз. Для каждого диска e_λ через α_λ обозначим класс пути $f_\lambda \varphi$. Выберем базисную точку $x_0 \in X$ и для каждого диска e_λ рассмотрим класс β_λ путей в X , начинающихся в точке x_0 и заканчивающихся в точке $f_\lambda(1, 0)$. Тогда $\gamma_\lambda = \beta_\lambda \alpha_\lambda \beta_\lambda^{-1}$ — элемент группы $\pi(X, x_0)$.

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях гомоморфизм $\pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X^*, x_0)$ является эпиморфизмом и его ядро совпадает с наименьшей нормальной подгруппой, содержащей множество $\{\gamma_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$.*

Доказательство. Докажем теорему для трех случаев.

Случай 1. Предположим, что множество Λ состоит из одного элемента, т. е. пространство X^* получается из X приклеиванием к последнему одной клетки, которую для простоты обозначим через e^2 :

$$X^* = X \cup e^2.$$

Возьмем какую-нибудь точку $y \in e^2$ и положим $U = X^* - \{y\}$, $V = e^2$. Тогда U и V — открытые множества и множество V стягиваемо. Кроме того, X — деформационный ретракт множества U . Поэтому можно применить теорему IV.4.1. Подробности аналогичны построению фундаментальной группы компактного пространства, приведенному в разд. IV.5, и потому оставляем их читателю.

Случай 2. Предположим, что множество Λ конечно. Можно считать, что клетки $\{e_\lambda^2: \lambda \in \Lambda\}$ добавляются к X не все сразу, а последовательно, одна за другой, и доказывать теорему индукцией по числу элементов множества Λ . При проведении индукции необходимо использовать случай 1.

Случай 3. Осталась последняя возможность: Λ — бесконечное множество. Для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ выберем какую-нибудь точку $y_\lambda \in e_\lambda^2$. Тогда $A = \{y_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — замкнутое дискретное подмножество пространства X^* (так как X^* обладает слабой топологией). Для каждого подмножества $S \subset A$, для которого множество $A - S$ конечно или пусто, обозначим через U_S дополнение к S в пространстве X^* , т. е.

$$U_S = X^* - S.$$

Тогда U_S — открытое линейно связное подмножество пространства X^* , а

$$\{U_S: A - S \text{ есть конечное подмножество в } A\}$$

— открытое покрытие пространства X^* , удовлетворяющее предположениям обобщенной теоремы Зейферта — ван Кампена (теорема IV.2.2) (в силу того, что $U_S \cap U_T = U_{S \cup T}$). Заметим, что если $A - S = \{x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_k}\}$, то деформационным ре-трактом дополнения $U_S = X^* - S$ будет подпространство $X \cup \cup e_{\lambda_1}^2 \cup e_{\lambda_2}^2 \cup \dots \cup e_{\lambda_k}^2$, которое охватывается случаем 2. Таким образом, остается доказать, что применение в этой ситуации теоремы IV.2.2 дает нужный результат. Это мы оставляем читателю.

Следствие 2.2. *Для любой группы G существует такое линейно связное пространство Y , что группа $\pi(Y)$ изоморфна группе G . Если группа G имеет копредставление, состоящее из конечного числа образующих и соотношений, то можно потребовать, чтобы пространство Y было компактным.*

Доказательство. Выберем какое-нибудь копредставление группы G , т. е. представим G в виде факторгруппы свободной группы F . Возьмем связный граф X , для которого $\pi(X) \approx F$ (см. гл. VI). Добавим к нему 2-клетки так, чтобы получить пространство Y , как описано в предыдущей теореме. Присоединение клеток «уничтожает» все элементы-соотношения, и потому $\pi(Y) \approx G$.

В разд. 4 мы увидим, что пространство Y является CW-комплексом и, следовательно, обладает многими хорошими свойствами.

3. Приклеивание к пространству клеток высокой размерности

В этом разделе мы будем предполагать, что пространство X^* получается из пространства X приклеиванием к последнему клеток размерности > 2 . Точные предположения аналогичны предположениям предыдущего раздела: существует такое линейно связное замкнутое подпространство $X \subset X^*$, что $X^* - X$ есть объединение непересекающихся открытых подмножеств e_λ^n , $\lambda \in \Lambda$, каждое из которых гомеоморфно открытому n -мерному диску U^n в $\mathbb{R}^n$. Каждое подпространство e_λ^n называется «открытой n -клеткой». Предполагается также, что для каждой n -клетки e_λ^n существует характеристическое отображение

$$f_\lambda: E^n \rightarrow \bar{e}_\lambda^n,$$

непрерывное и переводящее U^n гомеоморфно в e^n , а S^{n-1} в X (здесь $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\}$). Если число клеток e_λ^n бесконечно, то предполагается, что пространство X^* наделено слабой топологией.

Теорема 3.1. Если $n > 2$, то отображение включения пространства X в X^* индуцирует изоморфизм группы $\pi(X)$ на группу $\pi(X^*)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1, только теперь детали доказательства легче, так как все рассматриваемые гомоморфизмы являются изоморфизмами, а не эпиморфизмами. Причина различия между этой теоремой и теоремой 2.1 такова: дополнение к точке в U^n имеет гомотопический тип $(n-1)$ -сферы S^{n-1} , а для $n > 2$ пространство S^{n-1} односвязно, в то время как для $n = 2$ фундаментальная группа сферы S^{n-1} — бесконечная циклическая.

4. CW-комплексы

Процедура присоединения клеток к пространству, описанная в разд. 2 и 3, естественным образом приводит к важному понятию CW-комплекса. Грубо говоря, CW-комплекс — это пространство X , которое можно построить следующим образом. Начнем с некоторого графа X^1 (не обязательно связного) и присоединим к нему какое-то множество 2-клеток, как описано в разд. 2; в результате получим пространство X^2 . Затем, как описано в разд. 3, присоединим к X^2 какое-то множество 3-клеток; получим пространство X^3 и т. д. Тогда

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$$

есть CW-комплекс.

Более точное описание таково. Структура CW-комплекса на некотором хаусдорфовом пространстве X определяется возрастающей последовательностью

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

замкнутых подпространств пространства X , удовлетворяющей следующим условиям:

- (а) пространство X^0 дискретно;
- (б) для $n > 0$ пространство X^n получается из пространства X^{n-1} приклеиванием некоторого множества n -клеток, как описано в разд. 3;
- (с) $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$;

- (d) пространство X и каждое из его подпространств X^n наделены слабой топологией, т. е. подмножество A пространства X (или X^n) замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap e^q$ замкнуто для каждой q -клетки e^q .

Множество X^n называется n -остовом пространства X .

Подчеркнем, что для некоторых значений n наличие n -клеток не обязательно, т. е. $X^n = X^{n-1}$. Возможно также, что $X = X^n$, т. е. не существует клеток размерности $> n$. В этом случае пространство X называется *конечномерным*. Если X — конечномерный CW-комплекс и n — такое наименьшее число, что $X = X^n$, то пространство X называется n -мерным. CW-комплекс не обязательно должен быть связным.

Вообще говоря, хаусдорфово пространство не всегда допускает структуру CW-комплекса. Например, пространство, не являющееся локально связным или нормальным, не может быть никаким CW-комплексом. Обычно если пространство допускает какую-то структуру CW-комплекса, то оно допускает очень много различных таких структур.

Подпространство Y некоторого CW-комплекса X называется *подкомплексом* комплекса X , если Y можно представить в виде объединения клеток комплекса X и для любой q -клетки e^q , принадлежащей Y , замыкание $\bar{e}^q$ также принадлежит Y . В этом случае n -остов Y^n определяется как

$$Y^n = X^n \cap Y.$$

Можно показать, что подпространство Y является CW-комплексом и что оно замкнуто в X . Примером подкомплекса служит n -остов X^n для любого целого числа n . Объединение и пересечение любого множества подкомплексов являются подкомплексами.

Примеры

4.1. Наш первый пример — бесконечномерное действительное проективное пространство. Определим n -мерное действительное проективное пространство P_n как факторпространство сферы S^n , полученное отождествлением любых двух диаметрально противоположных точек x и $-x$. Если рассматривать R^n как подмножество пространства R^{n+1} , состоящее из всех точек $(x_1, \dots, x_{n+1})$, для которых $x_{n+1} = 0$, то сфера S^{n-1} — подмножество сферы S^n . Это ведет к естественному вложению факторпространств $P_{n-1} \subset P_n$ для всех $n > 0$. Определим бесконечномерное действительное проективное пространство P как объединение

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n,$$

наделенное слабой топологией (подмножество $A \subset P$ замкнуто тогда и только тогда, когда $P^n \cap A$ замкнуто для всех n). Предоставляем читателю проверить, что пространство P_n получается из P_{n-1} приклеиванием (в смысле разд. 3) единственной n -клетки (P_2 получается из P_1 известным приклеиванием

диска). Таким образом, на P задана структура CW-комплекса с одной клеткой в каждой размерности и n -остов пространства P есть n -мерное действительное проективное пространство P_n .

4.2. Некоторая триангуляция 2-мерного многообразия (с краем или без) очевидным образом задает на нем структуру 2-мерного CW-комплекса. Более общо: разбиение 2-многообразия не обязательно на треугольники, а на любые многоугольники, описанное в разд. 1.8, задает на нем структуру 2-мерного CW-комплекса. Наконец, обычное представление компактной поверхности как результат попарного отождествления сторон некоторого многоугольника также приводит к CW-комплексу с одной 0-клеткой, или вершиной, и одной 2-клеткой. Апалогичные соображения применимы и к триангулируемым многообразиям высших размерностей.

В этом кратком введении мы не можем дать больше подробностей о CW-комплексах. Читателю, интересующемуся ими, рекомендуем первую статью Уайтхеда [2] по этому вопросу, а также книги Хилтона [3] и Ху [4]. Там доказывается, что CW-комплексы обладают следующими свойствами:

- (а) CW-комплекс является паракомпактным хаусдорфовым пространством и, следовательно, нормальным.
- (б) CW-комплекс локально стягиваем. Это означает, что для любой точки x и любой ее окрестности U найдется такая ее окрестность V , что $V \subset U$ и V стягиваема. Это условие влечет за собой локальную линейную связность, полулокальную односвязность и многое другое; это — сильное условие. При выполнении его, в частности, применима вся теория накрывающих пространств.
- (с) Любое пространство, накрывающее CW-комплекс, снова является CW-комплексом.
- (d) Любое компактное подмножество CW-комплекса пересекает лишь конечное число клеток и содержится в некотором конечном подкомплексе.

Мы описали здесь CW-комплекс как пространство, построенное вполне определенным образом. Обычное определение отличается от нашего: пространство X разлагается в открытые n -клетки e_n^i для $n = 0, 1, 2, \dots$ с определенными условиями на это разложение. В этом случае *доказывается*, что любой CW-комплекс можно построить описанным нами методом.

Результаты гл. VI и разд. 2 и 3 непосредственно применимы к фундаментальной группе CW-комплекса. В частности, справедлива

Теорема 4.1. Пусть X — связный CW-комплекс. Отображение включения 2-остова X^2 в X индуцирует изоморфизм группы $\pi(X^2)$ на $\pi(X)$.

Теорема вытекает из теоремы 3.1 и свойства (d), приведенного выше; см. упражнение II.4.11.

1-остов X^1 любого CW-комплекса — это граф; следовательно, применимы результаты гл. VI. Теорему 2.1 можно использовать для непосредственного установления связи между группами $\pi(X^1)$ и $\pi(X^2)$.

В следующих двух разделах нам понадобится лемма о фундаментальной группе некоторых CW-комплексов.

Лемма 4.2. Пусть X будет CW-комплексом, представимым в виде объединения связанных подкомплексов $\{A_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$. Предположим, что существует непустое дерево T , являющееся подкомплексом 1-остова X^1 и такое, что $A_\lambda \cap A_\mu = T$ для любых двух различных индексов λ и μ . Тогда для любой вершины $v \in T$ фундаментальная группа $\pi(X, v)$ есть свободное произведение групп $\pi(A_\lambda, v)$ относительно гомоморфизмов $\varphi_\lambda: \pi(A_\lambda, v) \rightarrow \pi(X, v)$, индуцированных отображениями включения.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда комплекс X и, следовательно, подкомплексы A_λ одномерны. Если использовать результаты разд. VI.5, то в этом случае лемма становится очевидной; надо лишь выбрать максимальное дерево в X , содержащее данное дерево T , и применить к X и подкомплексам A_λ теорему VI.5.2.

Далее рассмотрим случай 2-мерного комплекса X . Мы должны доказать, что для любой группы H и любого множества гомоморфизмов $\psi_\lambda: \pi(A_\lambda) \rightarrow H$ существует единственный гомоморфизм $\sigma: \pi(X) \rightarrow H$, для которого $\sigma\varphi_\lambda = \psi_\lambda$ при всех λ . Пусть A_λ^1 и X^1 обозначают 1-остовы комплексов A_λ и X , а $j_\lambda: \pi(A_\lambda^1) \rightarrow \pi(A_\lambda)$ и $j: \pi(X^1) \rightarrow \pi(X)$ — гомоморфизмы, индуцированные отображениями включения. Тогда для каждого индекса λ диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \pi(A_\lambda^1) & \xrightarrow{j_\lambda} & \pi(A_\lambda) & \xrightarrow{\psi_\lambda} & H \\ \downarrow \varphi_\lambda^1 & & \downarrow \varphi_\lambda & & \\ \pi(X^1) & \xrightarrow{j} & \pi(X) & & \end{array}$$

коммутативна. В силу сказанного выше, существует единственный гомоморфизм $\sigma': \pi(X^1) \rightarrow H$, для которого

$$\psi_\lambda j_\lambda = \sigma' \varphi_\lambda^1 \quad (7.4.1)$$

при всех $\lambda \in \Lambda$. По теореме 2.1 гомоморфизм j (соответственно j_λ) — эпиморфизм и образующие его ядра взаимно однозначно соответствуют 2-клеткам комплекса X (соответственно подкомплекса A_λ). Пусть e_i^2 — любая 2-клетка комплекса X , а γ_i — соответствующая этой клетке образующая ядра эпиморфизма j . Выберем такой индекс λ , что $e_i^2 \subset A_\lambda$; тогда γ_i — также образующая ядра эпиморфизма j_λ . Из (7.4.1) и мономорфности отображе-

ния ϕ_λ^1 вытекает, что $\sigma'(\gamma_i) = 0$. Так как это верно для каждой 2-клетки e_i^2 , то существует единственный гомоморфизм $\sigma: \pi(X) \rightarrow H$, для которого $\sigma' = \sigma j$. Легко проверить, что гомоморфизм σ обладает требуемыми свойствами.

Наконец, исследуем общий случай. Теперь мы рассматриваем 2-мерные остовы комплекса X и подкомплексов A_λ и применяем теорему 4.1. Детали те же, что и в проведенном рассуждении, иногда даже проще. Мы оставляем их читателю.

По-видимому, эту лемму можно было бы доказать, строя такие открытые окрестности U_λ подкомплексов A_λ , что каждый подкомплекс A_λ служит деформационным ретрактом для U_λ , а затем применяя лемму IV.3.2. Однако приведенное доказательство кажется проще.

5. Теорема Куроша о подгруппе

Предположим, что G — свободное произведение некоторого семейства групп

$$G = \prod_{\lambda \in \Lambda}^* G_\lambda.$$

В упражнениях в разд. III.4 указывалось, что если для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ выбрать подгруппу G'_λ группы G_λ , то свободное произведение

$$G' = \prod_{\lambda \in \Lambda}^* G'_\lambda$$

можно считать подгруппой группы G . Естественно спросить, можно ли считать свободным произведением каждую подгруппу группы G . Как показывают простые примеры, ответ определенно отрицательный. В то же время известная теорема Куроша показывает, что он довольно близок к утвердительному:

Теорема 5.1. Пусть H — подгруппа свободного произведения $G = \prod^* G_\lambda$. Тогда подгруппа H сама есть свободное произведение

$$H = F * \left(\prod_{\nu}^* H_{\nu} \right),$$

где F — свободная группа и каждая подгруппа H_{ν} сопряжена в G с некоторой подгруппой одного из свободных сомножителей G_λ .

Доказательство. Приведем топологическое доказательство, используя результаты и методы гл. V — VII. Для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ пусть X_λ обозначает 2-мерный CW-комплекс с единственной вершиной v_λ , для которого

$$\pi(X_\lambda, v_\lambda) = G_\lambda.$$

Пусть v_0 — точка, не принадлежащая ни одному из пространств X_λ ; для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ соединим вершину v_0 с вершиной v_λ ребром e_λ . Обозначим через X объединение всех пространств X_λ , всех ребер e_λ и вершины v_0 и наделим X слабой топологией. Тогда X — связный 2-мерный CW-комплекс и $\pi(X, v_0)$ можно отождествить со свободным произведением G , указанным в условии теоремы (см. лемму 4.2). Пусть $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее пространство для X , соответствующее подгруппе H . Как указывалось в разд. 4, пространство $\tilde{X}$ естественным образом является CW-комплексом. Выберем такую вершину $\tilde{v}_0 \in p^{-1}(v_0)$, что

$$p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{v}_0) = H.$$

Доказательство будет закончено, если мы покажем, что группа $\pi(\tilde{X}, \tilde{v}_0)$ — свободное произведение определенных подгрупп; это мы сделаем с помощью леммы 4.2. Чтобы провести доказательство для общего случая, потребуются довольно сложные обозначения. Читателю надо тщательно разобраться в них, чтобы они не затмили по существу простое доказательство. Быть может, читатель лучше поймет детали, если разберется в относительно простом частном случае, например когда $\Lambda = \{1, 2, 3\}$, G_λ для всех λ — свободная абелева группа с двумя образующими, X_λ — тор, H — подгруппа конечного индекса в G и $(\tilde{X}, p)$ — накрывающее конечнолистное пространство.

Для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ обозначим через

$$\{\tilde{X}_{\lambda\mu}: \mu \in M_\lambda\}$$

множество компонент слоя $p^{-1}(X_\lambda)$. По лемме V.2.1 пространство $(\tilde{X}_{\lambda\mu}, p|_{X_{\lambda\mu}})$ накрывает X_λ . Каждое пространство $\tilde{X}_{\lambda\mu}$ есть 2-мерный CW-комплекс; выберем максимальное дерево $T_{\lambda\mu}$ в 1-остове комплекса $\tilde{X}_{\lambda\mu}$. Обозначим через Y объединение всех деревьев $T_{\lambda\mu}$ вместе со всеми ребрами $p^{-1}(\bar{e}_\lambda)$ для всех $\lambda \in \Lambda$; это — связный граф, содержащийся в 1-остове комплекса X . Пусть T — максимальное дерево в Y , содержащее каждое из деревьев $T_{\lambda\mu}$; существование таких максимальных деревьев доказать не трудно¹⁾.

Теперь мы готовы применить лемму 4.2 для нахождения фундаментальной группы $\pi(\tilde{X}, \tilde{v}_0)$. Рассмотрим покрытие пространства X подкомплексами Y и $\tilde{X}_{\lambda\mu} \cup T$ для всех пар (λ, μ) . Каждый из них связан, содержит вершину $\tilde{v}_0$ и пересечение любых двух из них совпадает с деревом T . Следовательно, по лемме 4.2 группа

¹⁾ Один из способов — построить из Y новый граф Y' , сводя каждое из деревьев $T_{\lambda\mu}$ к вершине $v'_{\lambda\mu}$. Пусть $q: Y \rightarrow Y'$ — естественное отображение. Выберем максимальное дерево $T' \subset Y'$ и затем положим $T = q^{-1}(T')$.

$\pi(\tilde{X}, \tilde{v}_0)$ есть свободное произведение групп $\pi(Y, v_0)$ и $\pi(\tilde{X}_{\lambda\mu} \cup T, \tilde{v}_0)$. По теореме VI.5.1 группа $\pi(Y)$ свободна, и $\tilde{X}_{\lambda\mu}$ — деформационный ретракт пространства $\tilde{X}_{\lambda\mu} \cup T$ (см. теорему VI.4.1). Таким образом, $\pi(\tilde{X}_{\lambda\mu} \cup T) \approx \pi(\tilde{X}_{\lambda\mu})$. Ясно, что при мономорфизме

$$\rho_*: \pi(\tilde{X}, \tilde{v}_0) \rightarrow \pi(X, v_0)$$

группа $\pi(\tilde{X}_{\lambda\mu} \cup T, \tilde{v}_0)$ отображается в группу, сопряженную подгруппе группы $\pi(\tilde{X}_\lambda \cup \tilde{e}_\lambda, v_0) = G_\lambda$; как устроено это сопряжение, зависит от выбора максимального дерева T . Доказательство закончено.

Для многих целей в формулировке теоремы 5.1 необходимо дать более точное описание свободных сомножителей H_v и некоторые указания о том, до какой степени однозначно они определяются подгруппой H . Для формулировки такого уточненного варианта теоремы 5.1 удобно использовать понятие *двойного класса смежности*. Вспомним, что для любого элемента $g \in G$ двойным классом смежности подгрупп H и G_λ называется множество

$$HgG_\lambda = \{hgx: h \in H, x \in G_\lambda\},$$

причем любые два двойных класса смежности подгрупп H и G_λ либо не пересекаются, либо совпадают, точно так же, как и обычные классы смежности (см. Холл [9, стр. 25] или Курош [9, стр. 53]).

Теорема 5.2. Пусть выполнены предположения теоремы 5.1. Тогда для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ существует множество представителей

$$\{\beta_{\lambda\mu}: \mu \in M_\lambda\},$$

по одному из каждого двойного класса смежности подгрупп H и G_λ , причем

$$H = F * \left[\prod_{\lambda \in \Lambda}^* \prod_{\mu \in M_\lambda}^* (H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1}) \right],$$

где, как и в теореме 5.1, F — свободная группа.

Ясно, что это более точная форма теоремы 5.1, так как содержит указание относительно числа сомножителей H_v в теореме 5.1 и способа их определения. Заметим, что если α и β — элементы одного и того же двойного класса смежности подгрупп H и G_λ , то подгруппы $H \cap \alpha G_\lambda \alpha^{-1}$ и $H \cap \beta G_\lambda \beta^{-1}$ сопряжены в H . Поэтому кажется правдоподобным, что $\beta_{\lambda\mu}$ должны быть представителями различных двойных классов смежности.

Следует подчеркнуть, что некоторые или все подгруппы $H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1}$ в теореме 5.2 могут состоять лишь из единицы, даже если H — собственная подгруппа группы G . Примеры приведены ниже в упражнениях.

Доказательство. Повторим доказательство теоремы 5.1, останавливаясь подробнее на деталях. Будем придерживаться тех же обозначений, что и в доказательстве теоремы 5.1, лишь иногда немного усложняя их.

Пусть $Y_\lambda = X_\lambda \cup \bar{e}_\lambda$ для всех λ ; тогда Y_λ — подкомплекс комплекса X , содержащий базисную точку v_0 . Обозначим через

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi(\tilde{Y}_{\lambda\mu} \cup T, \tilde{v}_{\lambda\mu}) & \xrightarrow{u_{\lambda\mu}} & \pi(\tilde{Y}_{\lambda\mu} \cup T, \tilde{v}_0) \\
 & \nearrow j_{\lambda\mu} & \downarrow \varphi_{\lambda\mu} & & \downarrow \varphi_{\lambda\mu} \\
 \pi(\tilde{Y}_{\lambda\mu}, \tilde{v}_{\lambda\mu}) & \xrightarrow{i_{\lambda\mu}} & \pi(\tilde{X}, \tilde{v}_{\lambda\mu}) & \xrightarrow{u_{\lambda\mu}} & \pi(\tilde{X}, \tilde{v}_0) \\
 \downarrow p_{\lambda\mu*} & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\
 \pi(Y_\lambda, v_0) & \xrightarrow{i_\lambda} & \pi(X, v_0) & \xrightarrow{w_{\lambda\mu}} & \pi(X, v_0)
 \end{array}$$

Рис. 7.1. Коммутативная диаграмма, используемая при доказательстве теоремы 5.2.

$\{\tilde{Y}_{\lambda\mu}: \mu \in M_\lambda\}$ множество компонент слоя $p^{-1}(Y_\lambda)$, где $\tilde{Y}_{\lambda\mu} \supset \supset \tilde{X}_{\lambda\mu}$ для всех μ . Можно считать, что каждый подкомплекс $Y_{\lambda\mu}$ получается из $\tilde{X}_{\lambda\mu}$ присоединением «усов»; число их равно числу листов пространства $(\tilde{X}_{\lambda\mu}, p | \tilde{X}_{\lambda\mu})$, накрывающего комплекс X_λ . В каждом подкомплексе $\tilde{Y}_{\lambda\mu}$ выберем вершину $\tilde{v}_{\lambda\mu}$ так, чтобы $p(\tilde{v}_{\lambda\mu}) = v_0$; для каждого индекса λ существует точно один такой индекс $\mu \in M_\lambda$, что можно выбрать $\tilde{v}_{\lambda\mu} = \tilde{v}_0$, но мы не настаиваем на таком выборе. Хотя все вершины $v_{\lambda\mu}$ с фиксированным индексом λ различны, они не обязательно различны для различных λ_1 и λ_2 .

Далее теорема доказывается с помощью коммутативной диаграммы на рис. 7.1. Такая диаграмма существует для каждой пары индексов (λ, μ) . В этой диаграмме $p_{\lambda\mu} = p | \tilde{Y}_{\lambda\mu}$ и все гомоморфизмы i_λ , $i_{\lambda\mu}$, $j_{\lambda\mu}$ и $\varphi_{\lambda\mu}$ индуцированы отображениями включения. Для каждой вершины $\tilde{v}_{\lambda\mu}$ обозначим через $\alpha_{\lambda\mu}$ единственный класс путей в дереве T с начальной вершиной $\tilde{v}_0$ и конечной $\tilde{v}_{\lambda\mu}$ и положим

$$\beta_{\lambda\mu} = p_*(\alpha_{\lambda\mu}) \in \pi(X, v_0).$$

Изоморфизмы $u_{\lambda\mu}$ и $w_{\lambda\mu}$ зададим формулами

$$u_{\lambda\mu}(x) = \alpha_{\lambda\mu} x \alpha_{\lambda\mu}^{-1},$$

$$w_{\lambda\mu}(y) = \beta_{\lambda\mu} y \beta_{\lambda\mu}^{-1}.$$

Заметим, что $j_{\lambda\mu}$ — изоморфизм, $w_{\lambda\mu}$ — внутренний автоморфизм и все гомоморфизмы в этой диаграмме — мономорфизмы.

По построению

$$\pi(X, v_0) = G, \quad p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{v}_0) = H, \quad i_\lambda\pi(Y_\lambda, v_0) = G_\lambda.$$

Пусть $p_*\Phi_{\lambda\mu}\pi(\tilde{Y}_{\lambda\mu} \cup T, v_0) = H_{\lambda\mu} \subset H$. Тогда, как показано в доказательстве теоремы 5.1, H — свободное произведение группы F и всех подгрупп $H_{\lambda\mu}$ (которые были обозначены через H_λ).

Применим к диаграмме на рис. 7.1 предложение V.11.1; получим

$$i_\lambda p_{\lambda\mu} \pi(\tilde{Y}_{\lambda\mu}, \tilde{v}_{\lambda\mu}) = [p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{v}_{\lambda\mu})] \cap G_\lambda.$$

Поддействуем на обе части этого соотношения изоморфизмами $u_{\lambda\mu}$ и $w_{\lambda\mu}$ и учтем все соотношения коммутативности диаграммы на рис. 7.1; тогда

$$H_{\lambda\mu} = H \cap (\beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1}).$$

Для завершения доказательства надо проверить, что $\{\beta_{\lambda\mu}: \mu \in M_\lambda\}$ — множество представителей двойного класса смежности HxG_λ . Рассмотрим, как в разд. V.7, действие справа группы $G = \pi(X, v_0)$ на множестве $p^{-1}(v_0)$. Подгруппа H — это изотропная подгруппа, соответствующая точке v_0 ; можно обычным способом отождествить точки слоя $p^{-1}(v_0)$ с классами смежности Hx . Рассмотрим действие подгруппы G_λ на слое $p^{-1}(v_0)$, или, что эквивалентно, на пространстве классов смежности G/H . Для любого индекса $\mu \in M_\lambda$ группа G_λ транзитивно переставляет точки множества $\tilde{Y}_{\lambda\mu} \cap p^{-1}(v_0)$. Следовательно, множество компонент $\{\tilde{Y}_{\lambda\mu}: \mu \in M_\lambda\}$ взаимно однозначно соответствует множеству двойных классов смежности HxG_λ , и любой выбор путей $\beta_{\lambda\mu} \in G$, для которого $\tilde{v}_0 \cdot \beta_{\lambda\mu} = \tilde{v}_{\lambda\mu} \in \tilde{Y}_{\lambda\mu}$ при всех $\mu \in M_\lambda$, есть выбор представителей для этих двойных классов смежности.

Предложение 5.3. Пусть в теореме 5.1 $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$, $G = G_1 * G_2 * \dots * G_n$ и H — подгруппа группы G индекса $k < \infty$. Тогда ранг свободного сомножителя F в теореме 5.1 задается формулой

$$\text{rank } F = 1 + k(n-1) - \sum_{\lambda=1}^n c_\lambda,$$

где через c_λ обозначено число различных двойных классов смежности HxG_λ для $\lambda = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Вспомним, что в доказательстве теоремы 5.1 $F \approx \pi(Y)$, где Y — граф, содержащийся в $\tilde{X}$. Если $\chi(Y)$ — эйлерова характеристика графа Y , то по теореме VI.6.2

$$\text{rank } F = 1 - \chi(Y).$$

Следовательно, надо найти $\chi(Y)$. Комплекс X имеет $n+1$ вершин, так что комплекс $\tilde{X}$ имеет $k(n+1)$ вершин. Так как граф Y содержит все вершины комплекса $\tilde{X}$, то Y имеет $k(n+1)$ вершин. Теперь считаем ребра графа Y — это ребра, проектирующиеся на одно из ребер e_λ комплекса X , и ребра, лежащие в одном из деревьев $T_{\lambda\mu}$. Очевидно, что ребер первого типа, т. е. проектирующихся на некоторое ребро e_λ , всего kn . Мы утверждаем, что ребер второго типа всего

$$nk - \sum_{\lambda=1}^n c_\lambda.$$

Для доказательства заметим, что c_λ для $1 \leq \lambda \leq n$ обозначает число компонент $\{X_{\lambda\mu} : \mu \in M_\lambda\}$, или, иначе, число деревьев $T_{\lambda\mu}$, $\mu \in M_\lambda$. Так как эйлерова характеристика каждого дерева $T_{\lambda\mu}$ равна $+1$, то эйлерова характеристика объединения $\bigcup_{\mu \in M_\lambda} T_{\lambda\mu}$ равна c_λ . Очевидно, что в этом множестве всего k вершин и потому $k - c_\lambda$ ребер. Теперь, суммируя по $\lambda = 1, 2, \dots, n$, получаем наше утверждение. Из него следует формула

$$\chi(Y) = (1-n)k + \sum_{\lambda=1}^n c_\lambda$$

из которой в свою очередь следует формула для ранга группы F .

Предложение 5.4. Пусть выполнены все предположения теоремы 5.2. Тогда если $H \cap \beta G_v \beta^{-1} \neq \{1\}$ для любых $\beta \in G$ и $v \in \Lambda$, то в точности одна из подгрупп $H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1}$, фигурирующих в заключении теоремы 5.2, сопряжена в H с пересечением $H \cap \beta G_v \beta^{-1}$.

Доказательство. Так как $\{\beta_{v\mu} : \mu \in M_v\}$ — полная система представителей двойных классов смежности HxG_v , существует в точности один такой индекс $\mu \in M_v$, что β и $\beta_{v\mu}$ принадлежат одному и тому же двойному классу смежности. Как было отмечено ранее, отсюда следует, что $H \cap \beta G_v \beta^{-1}$ и $H \cap \beta_{v\mu} G_v \beta_{v\mu}^{-1}$ — сопряженные подгруппы группы H . Если бы подгруппа $H \cap \beta G_v \beta^{-1}$ была сопряжена с двумя подгруппами $H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1}$, то последние были бы сопряженными между собой. Применяя к группе H упражнение III.4.8, видим, что это невозможно.

Это предложение можно интерпретировать так. Рассмотрим семейство

$$\{H \cap \beta G_\lambda \beta^{-1} : \lambda \in \Lambda, \beta \in G, H \cap \beta G_\lambda \beta^{-1} \neq \{1\}\}$$

подгрупп группы H . Как и любое семейство подгрупп группы H , это семейство распадается на различные классы сопряженности. Тогда среди групп $H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1}$, фигурирующих в заключении теоремы 5.2, существует точно один представитель каждого класса сопряженности. Поэтому, хотя подгруппы $H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1}$ из разложения группы H в свободное произведение в теореме 5.2 ни в коем случае не являются ни каноническими, ни однозначно определенными, классы сопряженности этих подгрупп однозначно определены и канонические. Отсюда легко следует, что для двух различных разложений группы H в свободное произведение описанного в теореме 5.2 типа свободные сомножители F должны быть изоморфными (см. упражнение III.4.10). В случае когда индекс группы H конечен, это утверждение также следует из предложения 5.3.

Из всего этого легко вывести, что любые два разложения произвольной группы в свободное произведение обладают изоморфными подразложениями, и если существует свободное разложение данной группы G на неразложимые сомножители, то любые два таких разложения изоморфны. Подробности см. в книгах Куроша [8, § 34] и Шпехта [10, стр. 189].

Упражнения

5.1. Пусть в теореме 5.2 H — нормальная подгруппа группы G . Докажите, что каждый из свободных сомножителей $H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1}$ сопряжен (в G) с подгруппой $H \cap G_\lambda$ и $H \cap G_\lambda$ — нормальная подгруппа группы G_λ . Что можно сказать о свободных сомножителях $H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1}$ группы H , если G_λ — простая группа для каждого индекса λ ?

5.2. Пусть $G = G_1 * G_2$ и N — наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащая группу G_2 . Докажите, что N — свободное произведение семейства подгрупп $\{gG_2g^{-1} : g \in G_1\}$. (См. упражнение III.4.9.)

5.3. Пусть в теореме 5.2 каждая из подгрупп G_λ бесконечна и подгруппа H имеет конечный индекс в G . Докажите, что $H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1} \neq \{1\}$ для всех пар (λ, μ) .

5.4. Докажите, что в теореме 5.2 можно так выбрать представителей $\beta_{\lambda\mu}$, что для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ найдется такой индекс $\mu \in M_\lambda$, что $\beta_{\lambda\mu} = 1$. [Указание. В доказательстве теоремы 5.2 возьмите $\tilde{v}_{\lambda\mu} = \tilde{v}_0$, если $\tilde{v}_0 \in \tilde{Y}_{\lambda\mu}$.]

5.5. Пусть в теореме 5.2 H — коммутаторная подгруппа группы G . Докажите, что для любого индекса λ группа $H \cap G_\lambda$ — коммутаторная подгруппа группы G_λ . [Указание. Очевидно, что коммутаторная подгруппа группы G_λ содержится в $H \cap G_\lambda$. Чтобы доказать обратное включение, предположим, что $\mu \in M_\lambda$ — такой индекс, что $\tilde{v}_0 \in \tilde{Y}_{\lambda\mu}$ и $\tilde{v}_{\lambda\mu} = \tilde{v}_0$, как в предыдущем упражнении. Докажите, что $(\tilde{Y}_{\lambda\mu}, r_{\lambda\mu})$ — регулярное покрывающее пространство для Y_λ и группу автоморфизмов накрытия $(\tilde{Y}_{\lambda\mu}, r_{\lambda\mu})$ можно считать подгруппой группы автоморфизмов накрытия $(\tilde{Y}, p)$; см. пример V.11.1. По предположению последняя группа автоморфизмов абелева, а потому абелева и первая группа.]

5.6. Пусть в теореме 5.2 каждая из подгрупп G_λ абелева и H — коммутаторная подгруппа группы G . Докажите, что $H \cap \beta_{\lambda\mu} G_\lambda \beta_{\lambda\mu}^{-1} = \{1\}$ для всех пар (λ, μ) и потому группа H свободна. Вычислите ранг группы H в частном случае $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$, как в предложении 5.3, причем G_λ — конечная абелева группа для всех λ . [Указание. Для нахождения индекса коммутаторной подгруппы H в этом частном случае используйте упражнение III.4.5.]

5.7. Докажите, что пересечение любых двух свободных сомножителей группы снова есть свободный сомножитель. Точнее, если G_1, G_2, G'_1 и G'_2 — такие подгруппы группы G , что $G = G_1 * G_2 = G'_1 * G'_2$, то $G_1 \cap G'_1$ — свободный сомножитель группы G . [Указание. Примените теорему 5.2, рассматривая $H = G'_1$ как подгруппу группы $G_1 * G_2$; используйте вариант теоремы 5.2, предложенный в упражнении 5.4.]

6. Теорема Грушко

Одна из важнейших теорем о свободных группах и свободных произведениях групп — теорема, принадлежащая советскому математику И. Грушко (1940). Вспомним, что если $\{G_\lambda\}$ и $\{G'_\lambda\}$ — два семейства групп с одним и тем же множеством индексов Λ и для каждого $\lambda \in \Lambda$ задан гомоморфизм $f_\lambda: G_\lambda \rightarrow G'_\lambda$, то существует единственный гомоморфизм

$$f: \prod_{\lambda}^* G_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda}^* G'_\lambda,$$

продолжающий гомоморфизмы f_λ (см. упражнение III.4.3). Для краткости мы будем говорить, что f — свободное произведение семейства гомоморфизмов $\{f_\lambda\}$. По существу в теореме Грушко утверждается, что любой эпиморфизм свободной группы (т. е. свободного произведения бесконечных циклических групп) на произвольное свободное произведение групп будет таким свободным произведением гомоморфизмов. Точная формулировка теоремы такова:

Теорема 6.1. Пусть

$$\varphi: F \rightarrow \prod_{\lambda}^* G_\lambda$$

— эпиморфизм свободной группы F на произвольное свободное произведение групп. Тогда существует разложение группы F в свободное произведение

$$F = \prod_{\lambda}^* F_\lambda,$$

причем $\varphi(F_\lambda) \subset G_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Мы дадим здесь топологическое доказательство, принадлежащее Джону Столлингу; рассмотрим лишь случай, когда множе-

ство индексов Λ конечно и F — свободная группа конечного ранга. Метод доказательства Столлинга работает также и в общем случае, но некоторые детали более сложны.

Начнем с построения топологического аналога гомоморфизма

$$\varphi: {}^1F \rightarrow \prod_{\lambda} {}^*G_{\lambda}.$$

Для каждого индекса λ обозначим через B_{λ} такой 2-мерный CW-комплекс с единственной вершиной v_{λ} , что $\pi(B_{\lambda}, v_{\lambda}) = G_{\lambda}$. Можно считать, что комплексы B_{λ} для различных λ попарно не пересекаются. Обозначим через Y факторпространство пространства $\bigcup_{\lambda} B_{\lambda}$, полученное отождествлением всех вершин v_{λ} с одной вершиной v . Тогда Y будет 2-мерным CW-комплексом с единственной вершиной, и по лемме 4.2

$$\pi(Y, v) = \prod_{\lambda} {}^*G_{\lambda}.$$

Пусть $\{y_{\tau}\}$ — базис свободной группы F . Для каждого индекса τ элемент $\varphi(y_{\tau})$ имеет единственное представление в виде редуцированного слова в свободном произведении $\prod {}^*G_{\lambda}$

$$\varphi(y_{\tau}) = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Выберем для каждого индекса τ некоторую окружность S_{τ} . Разобьем n вершинами окружность S_{τ} на n сегментов. Обозначим сегменты в том порядке, в каком они следуют по окружности, через $W_1, W_2, \dots, W_n$. Таким образом, окружность S_{τ} становится графом с n вершинами и n ребрами. Зададим непрерывное отображение $f: S_{\tau} \rightarrow Y$ так, что $f|W_i$ — замкнутый путь, представляющий элемент $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, в некотором комплексе B_{λ} . Продолжаем это для каждого индекса τ и обозначим через X объединение всех окружностей S_{τ} с начальными вершинами, отождествленными с одной. Тогда X — конечный связный граф, $\pi(X) = F$ и отображениями $S_{\tau} \rightarrow Y$ определяется такое единственное непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, что индуцированный гомоморфизм $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ эквивалентен заданному гомоморфизму φ .

С каждым ребром W_i графа S_{τ} можно однозначно сопоставить такой индекс λ , что $f(W_i) \subset B_{\lambda}$. Обозначим через A_{λ} подграф графа X , состоящий из всех вершин и всех ребер W_i , сопоставленных с индексом λ (в общем случае граф A_{λ} не связан). Тогда f отображает A_{λ} в B_{λ} и $\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}$ — множество всех вершин графа X .

Для доказательства теоремы мы построим конечный связный двумерный CW-комплекс X' , содержащий граф X в качестве деформационного ретракта, и отображение $f': X' \rightarrow Y$, продолжаю-

щее f . Тогда $\pi(X') \approx \pi(X) = F$ и $f'_*: \pi(X') \rightarrow \pi(Y)$ — заданный гомоморфизм φ . Более того, комплекс X' будет объединением связанных подкомплексов A'_λ , для которых $A'_\lambda \supset A_\lambda$ и $f'(A'_\lambda) \subset B_\lambda$, и найдется дерево T , содержащее все вершины комплекса X' , содержащееся в каждом подкомплексе A'_λ и такое, что для любых двух различных индексов λ и μ

$$A'_\lambda \cap A'_\mu = T.$$

Из леммы 4.2 вытекает, что $\pi(X')$ — свободное произведение групп $\pi(A'_\lambda)$; следовательно, можно положить $F_\lambda = \pi(A'_\lambda)$, и теорема будет доказана.

Прежде чем давать прямое доказательство Столлинга возможности всегда провести такое построение, проиллюстрируем его в частном случае. Пусть $G = G_1 * G_2$, где G_1 — циклическая группа порядка 2 с образующей a , а G_2 — циклическая группа порядка 3 с образующей b . Пусть F — свободная группа с двумя образующими x и y . Зададим гомоморфизм $\varphi: F \rightarrow G$ формулами $\varphi(x) = aba$, $\varphi(y) = ababa$. Оставляем читателю проверку того, что φ — эпиморфизм.

В этом примере пространство X есть объединение двух окружностей, одна из которых разбивается на три, а другая — на пять сегментов. Можно считать, что пространство X вложено в плоскость, как показано на рис. 7.2. (Почему на рис. 7.2 пространство X изображено несимметрично, станет ясным несколько позже.) Ребра комплекса X , отображаемые в B_1 и B_2 , удобно представлять себе окрашенными в разные цвета, например в оранжевый и зеленый. Тогда A_1 — подкомплекс комплекса X , состоящий из всех оранжевых ребер $a_1, a_2, \dots, a_5$, а A_2 — подкомплекс комплекса X , состоящий из всех зеленых ребер b_1, b_2 и b_3 . Вершины $v_0, \dots, v_6$ считаются окрашенными и в оранжевый, и в зеленый цвета. Стрелка на ребре указывает, как оно отображается, чтобы представлять элемент $a \in \pi(B_1) = G_1$ или $b \in \pi(B_2) = G_2$.

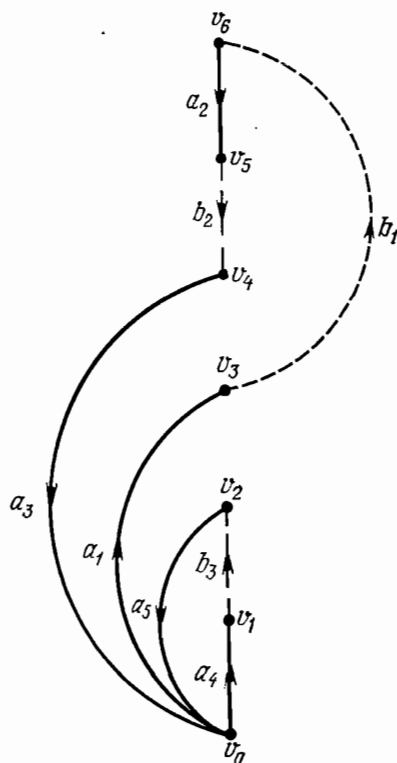


Рис. 7.2. Комплекс X .

Комплекс X' показан на рис. 7.3. К сожалению, его нельзя вложить в плоскость, поэтому на рисунке изображены два его куска, которые надо склеить вдоль указанной линии. Комплекс X' получается из графа X присоединением ребер $c_1, c_2, \dots, c_6$ и 2-клеток $e_1, e_2, \dots, e_6$; ни одной новой вершины не добавляется. 2-клетки

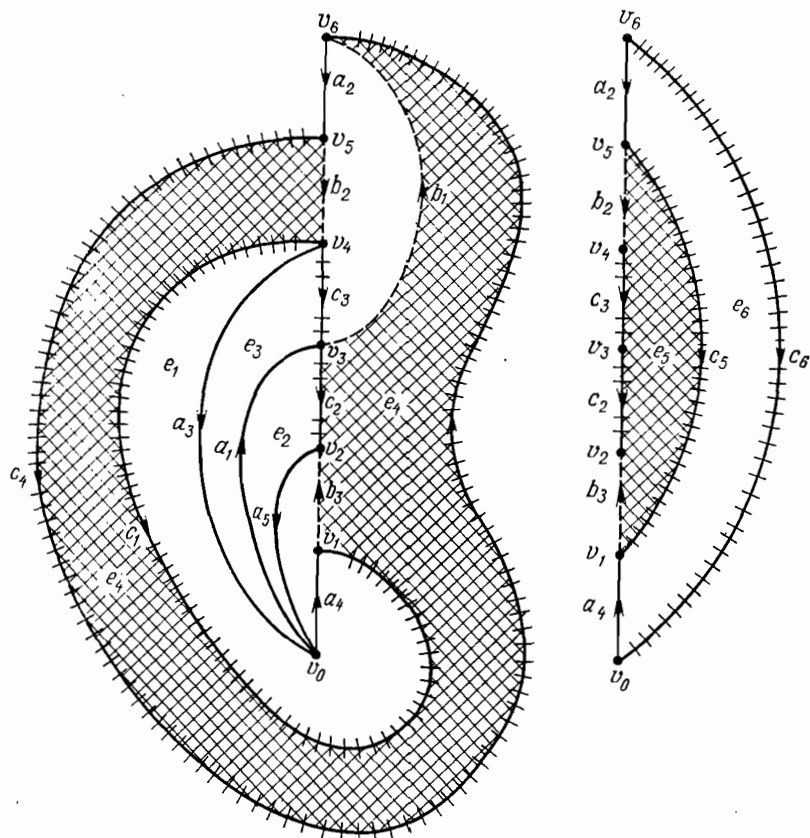


Рис. 7.3. Комплекс X' . Два куска надо склеить вдоль прямой v_0v_6 .

e_4 и e_5 окрашены в зеленый, а 2-клетки e_1, e_2, e_3 и e_6 — в оранжевый цвета. Новые ребра $c_1, \dots, c_6$ окрашены как в зеленый, так и в оранжевый цвета. Отображение $f: X \rightarrow Y$ продолжается до непрерывного отображения $f': X' \rightarrow Y$ следующим образом: каждое из ребер c_i отображается в общую базисную точку комплексов B_1 и B_2 , оранжевые 2-клетки отображаются в B_1 , а зеленые 2-клетки отображаются в B_2 . В каждом из этих шести случаев легко про-

верить, что в действительности отображение f' можно непрерывно продолжить на каждую 2-клетку (воспользуйтесь леммой II.8.1 и соотношениями $a^2 = 1$, $b^3 = 1$). Ясно, что X — деформационный ретракт комплекса X' , оранжевый подкомплекс A'_1 и зеленый подкомплекс A'_2 оба связны и $A'_1 \cap A'_2$ состоит из ребер $c_1, c_2, \dots, c_6$, т. е. является деревом, содержащим все вершины. Следовательно, по лемме 4.2

$$F = \pi(X) \approx \pi(X') \approx \pi(A'_1) * \pi(A'_2),$$

и потому $f'(A'_1) \subset B_1$ и $f'(A'_2) \subset B_2$. Таким образом, в этом частном случае теорема справедлива.

Рассмотренный пример очень хорошо иллюстрирует стратегию доказательства в общем случае. Мы последовательно присоединяем к X ребра $c_1, c_2, \dots$ так, чтобы соединить вершины и построить дерево. Далее, мы присоединяем последовательно 2-клетки $e_1, e_2, \dots$ так, чтобы ребро c_i было частью границы клетки e_i , а граф X был деформационным ретрактом комплекса X' . Наконец, всю конструкцию надо провести так, чтобы отображение f можно было непрерывно продолжить на каждую 2-клетку e_i и чтобы она отображалась в один из подкомплексов B_λ .

Теперь докажем строго, что такую конструкцию можно осуществить всегда. Сначала введем некоторую терминологию. Зафиксируем на все время доказательства CW-комплекс Y , представляющий собой объединение подкомплексов B_λ , $\lambda \in \Lambda$. Систему, состоящую из конечного связного двумерного CW-комплекса K , множества подкомплексов C_λ , $\lambda \in \Lambda$, и непрерывного отображения $f: K \rightarrow Y$, назовем *системой Столлингса*, если

$$(a) \quad K = \bigcup_{\lambda} C_{\lambda};$$

(b) для любой пары различных индексов μ и ν

$$C_{\mu} \cap C_{\nu} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_{\lambda};$$

(c) $f(C_{\lambda}) \subset B_{\lambda}$ для любого индекса λ и

(d) f для всех n отображает n -остов комплекса K в n -остов комплекса Y .

Мы всегда будем предполагать, что в любой такой системе Столлингса определенным образом выбрана базисная точка для K , являющаяся вершиной пересечения $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$. Заметим, что мы не требуем связности ни подкомплексов C_{λ} , ни их пересечения.

Удобно считать каждый индекс λ окрашенным в свой цвет, как и в частном примере, приведенном выше. В связи с этим путь в K назовем *монокроматическим*, если он целиком лежит в одном подкомплексе C_{λ} . Путь в 1-остове комплекса K будем называть *петлей*, если обе его концевые точки находятся в одной и той же

вершине, и *шнурком*, если его концевые точки — вершины в различных компонентах пересечения $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$. Шнурок $g: I \rightarrow K$ будем называть *связывающим*, если найдется такой индекс λ , что $g(I) \subset C_{\lambda}$ и путь $fg: I \rightarrow Y$ эквивалентен в B_{λ} постоянному пути. Заметим, что связывающий шнурок всегда монокроматичен. Это определение связывающего шнурка можно перефразировать так: обозначим через η класс эквивалентности пути g в C_{λ} , а через $f_{\lambda}: C \rightarrow B_{\lambda}$ — сужение отображения f на комплекс C_{λ} ; требуется, чтобы $f_{\lambda*}(\eta) = 1$ в группе $\pi(B_{\lambda})$.

Далее, опишем основную конструкцию, которую всегда можно осуществить в любой системе Столлинга, если задан связывающий шнурок. Пусть $K, \{C_{\lambda}: \lambda \in \Lambda\}$ и $f: K \rightarrow Y$ — система Столлинга, и $g: I \rightarrow C_{\mu}$ — связывающий шнурок цвета μ . Пусть D обозначает 2-мерный замкнутый диск, граничная окружность которого разбита на два сегмента c_1 и c_2 , пересекающихся лишь по концевым точкам. отождествим c_1 с единичным интервалом I так, что g отображает c_1 в C_{μ} .

Обозначим через K' факторпространство объединения $K \cup D$, полученное отождествлением каждой точки $t \in c_1$ с ее образом $g(t) \in K$. Тогда K' будет CW-комплексом, содержащим K в качестве подкомплекса, а также дополнительное ребро c_2 и дополнительную 2-клетку D . Очевидно, что K — деформационный ретракт для K' . Пусть C'_{μ} — объединение комплекса C_{μ} и замкнутой 2-клетки D (с заданными отождествлениями); а C'_{λ} для любого индекса $\lambda \neq \mu$ — объединение комплекса C_{λ} и ребра c_2 (концевые точки ребра c_2 отождествлены с концевыми точками пути g). Ясно, что $\bigcap_{\lambda} C'_{\lambda}$ получается из $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$ приклеиванием дуги c_2 , соединяющей две различные компоненты множества $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$.

Продолжим отображение $f: K \rightarrow Y$ до отображения $f': K' \rightarrow Y$ следующим образом: f' отображает дугу c_2 в единственную вершину v комплекса Y и продолжается затем до непрерывного отображения 2-клетки D в B_{μ} . Это последнее продолжение всегда возможно, в силу предположения о том, что путь $fg: I \rightarrow B_{\mu}$ эквивалентен постоянному пути (см. лемму II.8.1). Ясно, что $K', \{C'_{\lambda}: \lambda \in \Lambda\}, f': K' \rightarrow Y$ снова есть система Столлинга.

Эту конструкцию можно использовать для того, чтобы всякий раз, когда существует связывающий шнурок, соединять две компоненты множества $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$. Теперь поставим вопрос о существовании связывающего шнурка.

Лемма 6.2. Пусть $K, \{C_{\lambda}: \lambda \in \Lambda\}, f: K \rightarrow Y$ — такая система Столлинга, что $f_{*}: \pi(K) \rightarrow \pi(Y)$ — эпиморфизм. Если пересечение $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$ несвязно, то связывающий шнурок существует.

Доказательство. Для каждой компоненты пересечения $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$ выберем в качестве базисной точки некоторую вершину.

Рассмотрим любую петлю или шнурок g , начальная и конечная точки которого расположены в этих базисных точках. Из результатов гл. VI легко следует, что любая такая петля или шнурок эквивалентны произведению путей, каждый из которых обегает единственное ребро. Таким образом, эти петля или шнурок эквивалентны произведению монохроматических путей. Группируя пути в максимальные монохроматические блоки, видим, что

$$g \sim g_1 g_2 \dots g_n,$$

где каждый путь g_i монохроматичен, и для всех i пути g_i и g_{i+1} окрашены в разные цвета. Следовательно, концевые точки каждого пути g_i должны принадлежать $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$; для начальной точки пути g_1 и конечной точки пути g_n это выполняется по предположению. Пусть для $1 \leq i < n$ путь h_i из ребер в $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$ соединяет конечную точку пути g_i с той базисной точкой, которая принадлежит компоненте пересечения $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$, содержащей этот путь. Тогда

$$g \sim (g_1 h_1) (h_1^{-1} g_2 h_2) \dots (h_{n-1}^{-1} g_n).$$

Каждое произведение в скобках монохроматично, и его концевые точки находятся среди выбранных базисных точек. Следовательно, оно является петлей или шнурком. Итак, мы доказали, что каждая петля и каждый шнурок в системе Столлинга эквивалентны произведению монохроматических петель и шнурков, концевые точки которых принадлежат множеству выбранных базисных точек, и соседние сомножители этого произведения окрашены в разные цвета.

Мы утверждаем, что в K существует шнурок g , класс эквивалентности η которого таков, что $f_*(\eta) = 1$ в группе $\pi(Y)$. В самом деле, так как комплекс K связан, а пересечение $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$ не связано, в K существует шнурок h , концевые точки которого находятся в различных компонентах множества $\bigcap_{\lambda} C_{\lambda}$. Обозначим через θ класс пути h . Так как $f_*: \pi(K) \rightarrow \pi(Y)$ — эпиморфизм, в K существует петля k , начинающаяся и заканчивающаяся в начальной точке пути h , а ее класс эквивалентности $\xi \in \pi(K)$ удовлетворяет уравнению $f_*(\xi) = f_*(\theta)$. Тогда $k^{-1}h = g$ — нужный шнурок, поскольку $f_*(\xi^{-1}\theta) = 1$.

По доказанному выше можно считать, что

$$g \sim g_1 g_2 \dots g_n \quad (7.6.1)$$

есть произведение монохроматических петель и шнурков. Обозначим через η_i для $i = 1, \dots, n$ класс эквивалентности монохроматической петли или шнура g_i в (7.6.1).

Мы утверждаем, что *существует шнурок $g \sim g_1 g_2 \dots g_n$, представляющий $\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$, для которого выполнены следующие три условия:*

- (a) $f_*(\eta) = 1$;
- (b) для всех i монохроматические петли или шнуры g_i и g_{i+1} окрашены в разные цвета;
- (c) если g_i — петля для любого индекса i , то $f_*(\eta_i) \neq 1$.

Мы уже показали, как удовлетворить условиям (a) и (b). Чтобы удовлетворить условию (c), просто выкинем из произведения любую петлю g_i , для которой $f_*(\eta_i) = 1$. Так как g_i — петля, то концевые точки ее совпадают, и $g_1 \dots g_{i-1} g_{i+1} \dots g_n$ остается однозначно определенным произведением путей. После исключения из произведения $g_1 g_2 \dots g_n$ любой такой петли g_i можно объединить g_{i-1} и g_{i+1} , так как они окрашены в один и тот же цвет. В любом случае после конечного числа таких редукций мы получим нужный шнурок g . Число сомножителей n должно оставаться ≥ 1 , так как концевые точки пути g различны и при наших редукциях не меняются.

Рассмотрим любой шнурок $g \sim g_1 g_2 \dots g_n$, удовлетворяющий трем перечисленным условиям. Мы имеем в $\pi(Y)$ уравнение

$$1 = f_*(\eta) = (f_*\eta_1)(f_*\eta_2) \dots (f_*\eta_n).$$

Для всех i элементов $f_*(\eta_i)$ и $f_*(\eta_{i+1})$ принадлежат различным свободным сомножителям $\pi(B_\lambda)$ и $n \geq 1$. Поэтому найдется такой индекс i , что $f_*(\eta_i) = 1$; иначе в свободном произведении

$$\prod_{\lambda}^* \pi(B_\lambda)$$

было бы представление единицы в виде редуцированного слова длины ≥ 1 . Теперь g_i не может быть петлей, потому что от тривиальных петель мы избавились. Следовательно, g_i — шнурок. Он монохроматичен по построению и связывающий, так как $f_*(\eta_i) = 1$ в группе $\pi(Y)$. Поскольку $\pi(Y)$ — свободное произведение, то, как и требуется, для некоторого цвета λ должно быть $f_*(\eta_i) = 1$ в группе $\pi(B_\lambda)$.

На этом доказательство леммы 6.2 заканчивается.

Теперь можно закончить доказательство теоремы 6.4. Рассмотрим систему Столлинга X , $\{A_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$, $f: X \rightarrow Y$, построенную в начале доказательства, так что $f_*: \pi(X) \rightarrow \pi(Y)$ представляет заданный эпиморфизм ϕ . В этой системе пересечение $\bigcap_{\lambda} A_\lambda$ состоит из вершин конечного графа X . Если оно не связно, то, в силу

леммы 6.2, существует связывающий шнурок. Осуществляя основную конструкцию, получаем систему Столлинга $X^1, \{A_\lambda^1\}, f^1: X^1 \rightarrow Y$, в которой X — деформационный ретракт комплекса X^1 , f^1 — продолжение отображения f и число компонент пересечения $\bigcap_\lambda A_\lambda^1$ на 1 меньше числа компонент пересечения $\bigcap_\lambda A_\lambda$, так как две вершины последнего соединены дугой. Если множество $\bigcap_\lambda A_\lambda^1$ не связно, повторяем этот процесс и получаем новую систему Столлинга $X^2, \{A_\lambda^2\}, f^2: X^2 \rightarrow Y$, и т. д.

Этот процесс должен закончиться через конечное число шагов, поскольку множество $\bigcap_\lambda A_\lambda$ имеет конечное число компонент, и через конечное число шагов соответствующее пересечение будет связным. Таким образом, если $\bigcap_\lambda A_\lambda$ имеет $n + 1$ компонент, то через n шагов мы получим систему Столлинга $X^n, \{A_\lambda^n\}, f^n: X^n \rightarrow Y$, для которой пересечение $\bigcap_\lambda A_\lambda^n$ связно; ясно, что это пересечение должно быть деревом. Если положить $X' = X^n$, $A'_\lambda = A_\lambda^n$, $f' = f^n$, то обещанная выше система построена.

Теорема Грушко доказана.

Упражнения

6.1. Предположим, что $G = G_1 * \dots * G_k$. Пусть n — минимальное число образующих группы G , а n_i — минимальное число образующих группы G_i , $1 \leq i \leq k$. Докажите, что $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Выведите, что группа, порожденная n элементами, не может быть свободным произведением более чем n нетривиальных сомножителей и каждую конечно порожденную группу можно разложить в свободное произведение конечного числа неразложимых сомножителей.

6.2. Докажите, что свободная группа ранга n не может быть порождена менее чем n элементами.

6.3. Пусть F и G — свободные группы ранга n и $\varphi: F \rightarrow G$ — эпиморфизм. Докажите, что φ — изоморфизм. Выведите отсюда такие следствия: (а) если G — свободная группа ранга n и $a_1, \dots, a_n \in G$ — любые n элементов, порождающие ее, то $\{a_1, \dots, a_n\}$ — базис группы G ; (б) если G — свободная группа конечного ранга и N — собственная нормальная подгруппа группы G , то группы G/N и G не изоморфны.

6.4. Пусть $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n — подгруппа в G , для всех n группа G_n — собственная подгруппа группы G_{n+1} и группа G_n порождена не более чем m элементами. Если $G = H_0 * H$, где H_0 — конечно порожденная группа, то H_0 порождена менее чем m элементами, а группа H не является конечно порожденной (Шпехт [10]). [Указание. Докажите последовательно следующие утверждения: 1) группа G не является конечно порожденной; 2) группа H не является конечно порожденной; 3) найдется такое целое число n_0 , что $H_0 \subset G_{n_0}$. Примените теорему Куроша о подгруппе для того, чтобы получить разложение G_0 в свободное произведение. Воспользуйтесь упражнением 6.1.]

ПРИМЕЧАНИЯ

CW-комплексы

Введение и систематическое применение CW-комплексов в топологии принадлежит Уайтхеду [2]. Хотя раньше использовались и другие виды комплексов, специалисты пришли к выводу, что CW-комплексы имеют много преимуществ (ср. Милнор [1]).

Теорема Куроша о подгруппе

В приложении к тому II книги Куроша [8] приведено шесть различных доказательств теоремы Куроша о подгруппе. Этой теореме посвящены также статьи Маклейна (A proof of the subgroup theorem for free products, *Mathematika*, 5 (1958), 13—19), Дея (Schreier's systems in free products, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 7 (1965), 64—79) и Хиггинса (Presentations of groupoids, with applications to groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 60 (1964), 7—20). За образец приведенного здесь доказательства теоремы взято доказательство Бэра и Леви (Freie Produkte und ihre Untergruppen, *Compositio Mathematica*, 3 (1936), 391—398). Наша формулировка теоремы в большей степени отвечает подходу, принятому в ряде более поздних книг и статей.

Теорема Грушко

Доказательство теоремы Грушко, приведенное здесь, принадлежит Столлингсу (A topological proof of Grushko's theorem of free products, *Math. Zeitschr.*, 90 (1965), 1—8). В книге Шпехта [10] указаны некоторые следствия этой теоремы для теории групп. Чисто алгебраическое доказательство, более короткое, чем в стандартных учебниках, можно найти в статье Линдона (Grushko's theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 (1965), 822—826).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

CW-комплексы

1. Милнор (Milnor J.), On spaces having the homotopy type of a CW-complex, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 (1959), 272—280.
2. Уайтхед (Whitehead J. H. C.), Combinatorial homotopy, I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 213—245.
3. Хилтон (Hilton P. J.), An introduction to homotopy theory (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, № 43), Cambridge: The University Press, 1953, Chapter VII.
4. Ху Сы-чэянь (Hu S. T.), Elements of General Topology, San Francisco: Holden-Day, 1964, Chapter IV.

Фундаментальная группа комплекса

5. Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, Гостехиздат, М., 1938, гл. 7.
6. Рейдемейстер (Reidemeister K.), Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1932, Chapters 5 and 6.
7. Хилтон П., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, изд-во «Мир», М., 1966, гл. 6.

Теория групп

8. Курош А. Г., Теория групп, изд-во «Наука», М., 1967, гл. IX и X.
9. Холл М., Теория групп, изд-во «Мир», М., 1962, гл. 17.
10. Шпехт (Specht W.), Gruppentheorie (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band LXXXII), Berlin — Göttingen — Heidelberg: Springer-Verlag, 1956, Chapter 2.2.

Глава VIII

ЭПИЛОГ

Предыдущие главы ввели читателя лишь в небольшой круг вопросов алгебраической топологии. В этой главе мы дадим некоторые советы тем, кто будет продолжать дальнейшее ее изучение.

В разд. II.6 и V.9 упоминалось, что одна из целей алгебраической топологии — определить в высших размерностях аналоги фундаментальной группы так, чтобы можно было доказывать утверждения типа теоремы Брауэра о неподвижной точке и теоремы Борсука — Улама. Как мы увидим, таких аналогов несколько. Опишем один из них, наиболее тесно связанный с фундаментальной группой, а именно гомотопические группы Гуревича (о которых упоминалось в примечаниях к гл. II и IV). Эти группы определяются довольно просто. Для любого положительного целого числа n через

$$I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: 0 \leq x_i \leq 1 \text{ для } i = 1, 2, \dots, n\}$$

обозначим единичный n -мерный куб, а через $\dot{I}^n$ — его край

$$\dot{I}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n: x_i = 0 \text{ или } x_i = 1 \text{ для всех } i\}.$$

Для любого топологического пространства X и любой базисной точки $x_0 \in X$ через $\pi_n(X, x_0)$ обозначается множество всех относительно гомотопических классов отображений $f: I^n \rightarrow X$, для которых $f(\dot{I}^n) = x_0$. Говоря «относительный гомотопический класс», мы подразумеваем, что все гомотопии рассматриваются относительно края $\dot{I}^n$ (определение см. в разд. II.4). Если f и g — такие два отображения $I^n \rightarrow X$, что $f(\dot{I}^n) = g(\dot{I}^n) = x_0$, то их сумму $f + g$ зададим формулой

$$(f + g)(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{при } 0 \leq x_1 \leq 1/2, \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \text{при } 1/2 \leq x_1 \leq 1. \end{cases}$$

Можно показать, что эта формула задает сложение в множестве гомотопических классов $\pi_n(X, x_0)$, так что $\pi_n(X, x_0)$ превра-

щается в группу, называемую n -й гомотопической группой пространства X ; доказательство почти такое же, как и приведенное в разд. II.3 для фундаментальной группы. В самом деле, при $n = 1$ гомотопическая группа, как она определена выше, есть фундаментальная группа $\pi(X, x_0)$. Также без особых трудностей можно показать, что при $n > 1$ группа $\pi_n(X, x_0)$ абелева.

Группа $\pi_n(X, x_0)$ является аналогом фундаментальной группы $\pi(X, x_0)$ и в других отношениях. Например, любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$, определенный следующим образом: если отображение $f: I^n \rightarrow X$ представляет гомотопический класс $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$, то отображение $f \circ f$ представляет гомотопический класс $f_*(\alpha) \in \pi_n(Y, f(x_0))$. Этот индуцированный гомоморфизм f_* обладает свойствами, описанными в разд. II.4 для случая $n = 1$. Другим примером аналогии между $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi(X, x_0)$ служит такое свойство: любой класс γ путей в X с начальной точкой x и конечной y задает изоморфизм группы $\pi_n(X, x)$ на группу $\pi_n(X, y)$; таким образом, если пространство X линейно связно, то структура группы $\pi_n(X, x_0)$ не зависит от выбора базисной точки x_0 .

Однако аналогию между фундаментальной группой и высшими гомотопическими группами нельзя продолжать слишком далеко. Например, для высших гомотопических групп нет разумного аналога теоремы Зейферта — ван Кампена. В результате задача определения групп $\pi_n(X)$ для нестягиваемого пространства X либо трудна, либо вообще невозможна. Подавляющее большинство высших гомотопических групп $\pi_n(X)$ неизвестно даже в относительно простом случае, когда X есть k -сфера, $k > 1$; определение этих групп — одна из важных нерешенных проблем алгебраической топологии.

Хотя с 1935 г., когда гомотопические группы в высших размерностях были введены Гуревичем, они имели и имеют громадное теоретическое значение для алгебраической топологии, они не слишком полезны в таких теоремах, как теорема Брауэра о неподвижной точке или теорема Борсука — Улама. В таких теоремах обычно используются *гомологические* или *когомологические группы*. Эти группы обладают многими свойствами, похожими на только что приведенные свойства гомотопических групп Гуревича, но по сравнению с последними у них есть одно важное преимущество: для широкого класса топологических пространств их алгебраическая структура вычислима. Гомологические группы были введены Пуанкаре приблизительно в 1895 г.

К сожалению, определение гомологических или когомологических групп пространства X в некоторых случаях бывает сложнее, чем приведенное выше определение гомотопических групп Гуревича. Действительно, известно несколько различных способов

определения гомологических и когомологических групп пространства X . Если пространство X компактно и хорошо устроено локально (например, многообразие или CW-комплекс), то эти различные определения приводят к изоморфным группам. Для некомпактных пространств или же для пространств, в некотором смысле локально патологических (например, не локально связных или не полулокально односвязных), различные определения могут привести к неизоморфным группам. Для любой пары (X, G) , состоящей из топологического пространства X и абелевой группы G (называемой «группой коэффициентов»), каждое из этих различных определений ставит в соответствие некоторой последовательности абелевых групп

$$H_n(X, G), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

называемых *гомологическими группами* пространства X (с группой коэффициентов G), другую последовательность абелевых групп

$$H^n(X, G), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

называемых *когомологическими группами* пространства X (с группой коэффициентов G). Выбор в качестве группы G аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$ или конечной циклической группы $\mathbb{Z}_k$ для многих целей очень важен. Как и в случае гомотопических групп Гуревича, непрерывное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизмы гомологических групп

$$\varphi_*: H_n(X, G) \rightarrow H_n(Y, G), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и когомологических групп

$$\varphi^*: H^n(Y, G) \rightarrow H^n(X, G), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Заметим, что индуцированные гомоморфизмы гомологических и когомологических групп направлены в противоположные стороны. Эти индуцированные гомоморфизмы гомологических и когомологических групп обладают свойствами, в точности аналогичными свойствам индуцированных гомоморфизмов фундаментальной группы, описанным в разд. II.4. В частности, если два отображения $\varphi_0, \varphi_1: X \rightarrow Y$ гомотопны, то они индуцируют *одинаковые* гомоморфизмы. Отсюда следует, что если $\varphi: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то индуцированные гомоморфизмы φ_* и φ^* будут изоморфизмами. Таким образом, пространства одного и того же гомотопического типа имеют изоморфные гомотопические и когомологические группы.

До сих пор мы подчеркивали сходство гомологических и когомологических групп с гомотопическими группами Гуревича (включая и фундаментальную группу). Теперь укажем наиболее важные различия между ними.

- (а) В определении гомологических и когомологических групп не требуется никакого выбора базисной точки. Это часто приводит к значительным упрощениям.
- (b) Гомологические и когомологические группы $H_n(X, G)$ и $H^n(X, G)$ определяются для всех $n \geq 0$, тогда как гомотопические группы $\pi_n(X, x_0)$ определяются лишь для $n > 0$. (Часто удобно и естественно определять $H_n(X, G) = H^n(X, G) = \{0\}$ для всех $n < 0$; естественным образом можно также определить множество $\pi_0(X, x_0)$, не снабжая его групповой структурой, но разумного способа определения $\pi_n(X, x_0)$ для $n < 0$ не видно.)
- (с) Гомологические и когомологические группы любого пространства абелевы, тогда как фундаментальная группа часто бывает неабелевой. Это означает, что вся техника и аппарат теории абелевых групп (особенно теории конечно порожденных абелевых групп) применима в теории гомологий и когомологий, которая поэтому выгодно отличается от теории фундаментальных групп, представленной в этой книге.

Как упоминалось выше, определения гомологических и когомологических групп пространства слишком сложны для того, чтобы воспроизводить их здесь. Однако можно описать структуру этих групп для $n = 0$ и $n = 1$. Пусть X — пространство, состоящее из k компонент. Тогда каждая из групп $H_0(X, G)$ и $H^0(X, G)$ изоморфна прямой сумме k экземпляров группы коэффициентов G . Таким образом, структура этих 0-мерных групп зависит лишь от числа связных компонент пространства X . Если оно линейно связно, то группа $H_1(X, \mathbb{Z})$ естественным образом изоморфна прокоммутированной фундаментальной группе $\pi(X)/[\pi(X), \pi(X)]$. Напомним, что в разд. VI.5 мы пользовались прокоммутированной фундаментальной группой различных компактных поверхностей, таким образом, на самом деле мы рассматривали там одномерные гомологические группы этих поверхностей. Если пространство X линейно связно, то одномерная когомологическая группа $H^1(X, G)$ естественным образом изоморфна группе всех гомоморфизмов группы $\pi(X)$ в группу коэффициентов G . Более общим образом, можно показать, что одномерные группы $H_1(X, G)$ и $H^1(X, G)$ полностью определяются фундаментальными группами различных компонент пространства X .

Помимо этих общих результатов о группах $H_n(X, G)$ и $H^n(X, G)$ для $n = 0$ или $n = 1$ можно отметить различные частные результаты для больших значений n . Приведем три примера таких результатов.

- (а) Если пространство X состоит из одной точки, то

$$H_n(X, G) = H^n(X, G) = \begin{cases} G, & \text{если } n = 0, \\ \{0\}, & \text{если } n \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что то же справедливо и для стягиваемого пространства X .

- (b) Если M — компактное связное ориентируемое n -многообразие, то

$$H_n(M, G) = H^n(M, G) = G$$

и для $q > n$

$$H_q(M, G) = H^q(M, G) = 0.$$

В частности, это справедливо, когда M есть n -сфера S^n . Это позволяет применить гомологические группы для доказательства того, что сфера S^n не является ретрактом $(n+1)$ -мерного шара E^{n+1} ; метод доказательства аналогичен методу, которым в разд. II.6 доказывалось, что окружность S^1 не является ретрактом диска D^2 . Как было указано в разд. II.6, из этого факта легко следует теорема Брауэра о неподвижной точке.

- (c) Если X есть n -мерный CW-комплекс, как он определялся в разд. VII.4, то $H_q(X, G)$, $H^q(X, G)$ равны нулю для $q > n$. Это наводит на мысль о связи между гомологической теорией и теорией размерности.

Для гомологических и когомологических групп существует аналог теоремы Зейферта — ван Кампена, так называемая теорема Майера — Виеториса. В принципе эту теорему можно применить для определения гомологических и когомологических групп многих пространств.

Для широкого класса пространств (например, конечных CW-комплексов) когомологические группы пространства полностью определяются его гомологическими группами и обратно. Поэтому при решении многих задач с равным успехом можно работать как с гомологическими, так и с когомологическими группами. Однако для когомологических групп пространства можно ввести дополнительную структуру, так называемые «когомологические операции». Эта дополнительная структура необходима при решении определенных задач. Например, один из способов доказательства обобщенной теоремы Борсука — Улама (формулировку см. в разд. V.9) состоит в использовании когомологических операций, называемых « $\cup$ -произведениями».

Попытаемся указать несколько главных проблем, к которым применима теория гомологий и когомологий. Прежде всего это общие проблемы теории гомотопий.

- (a) *Гомотопическая классификация отображений.* Даны два пространства X и Y ; можно ли что-нибудь сказать о множе-

стве всех гомотопических классов непрерывных отображений из X в Y ? Даны два отображения f и g пространства X в Y ; можно ли связать с f и g некоторый вид алгебраических инвариантов, помогающих определить, гомотопны ли f и g ?

- (b) *Продолжение непрерывных отображений.* Пусть X и Y — топологические пространства, A — замкнутое подмножество в X и $f: A \rightarrow Y$ — непрерывное отображение; существует ли продолжение отображения f до отображения всего X , т. е. существует ли такое непрерывное отображение $g: X \rightarrow Y$, что $g|_A = f$?
- (c) *Гомотопический тип пространств.* Найти необходимые и/или достаточные условия для того, чтобы два пространства были пространствами одного и того же гомотопического типа.

Для решения этих проблем была проделана огромная работа и при этом развита мощная техника, включающая гомологические и когомологические группы. Полученные результаты нашли применение в других областях математики. Общая стратегия заключается в том, чтобы проблемы в теории гомотопий попытаться свести к проблемам в алгебре.

Другая обширная группа проблем возникает при изучении многообразий. Существуют три общих типа многообразий: топологические многообразия, определенные в гл. I, кусочно-линейные, или комбинаторные, многообразия (т. е. многообразия с некоторым классом триангуляций) и дифференцируемые многообразия (т. е. многообразия с некоторой дополнительной структурой, определенной так, что имеет смысл понятие дифференцируемой функции). В каждой из этих трех категорий многообразий одна из основных проблем — это проблема классификации. Например, в гл. I обсуждалась проблема классификации для двумерных многообразий. Две другие основные проблемы таковы: Каждое ли топологическое многообразие допускает кусочно-линейную структуру, т. е. триангуляцию? Каждое ли кусочно-линейное многообразие допускает дифференцируемую структуру? Ответ на первый вопрос неизвестен, за исключением случая размерности $n \leq 3$ (см. примечания к гл. I). Ответ на второй вопрос утвердительный для размерностей < 8 и отрицательный для размерностей ≥ 8 . Первый пример триангулируемого многообразия, не допускающего никакой дифференцируемой структуры, был дан М. Кервером. Если такое многообразие вложено в евклидово пространство, то его нельзя повсюду «сгладить» так, чтобы не было «углов».

Одни из самых замечательных результатов в топологии многообразий — доказательство Смейла обобщенной гипотезы Пуанкаре

(см. примечания к гл. IV) и исследование Кервером и Милнором различных дифференцируемых структур на сферах. Кервер и Милнор вычислили количества N различных дифференцируемых структур на n -сфере S^n для n от 5 до 15:

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16 256

Они доказали, что для любого целого числа n множество различных дифференцируемых структур на S^n конечно. Интересно отметить, что доказательство этих результатов в значительной степени опирается на теорию гомотопий.

Алгебраическая топология — это быстро растущая дисциплина, протягивающая свои ветви в различные области математики. Изложение большинства полученных в последние годы результатов — довольно сложная задача; для исследователей, работающих в алгебраической топологии, еще не настало время для того, чтобы отшлифовать детали и сложить их в стройную теорию. Многие определения и доказательства вряд ли покажутся читателю оправданными. Построение ясного и удобочитаемого изложения различных частей этой дисциплины — одна из больших задач на будущее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Теория гомологий и когомологий

1. Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, Гостехиздат, М., 1938.
2. Семинар Картана (Séminaire Henri Cartan) 1. 1948/49. Topologie Algébrique. 2nd edition, Paris: Secrétariat Mathématique, 1955.
3. Семинар Картана (Séminaire Henry Cartan) 3. 1950/51. Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux. 2nd edition, Paris: Secrétariat Mathématique, 1955.
4. Спеньер Э., Алгебраическая топология, изд-во «Мир», М., 1971.
5. Стиррод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, ИЛ, М., 1956.
6. Стиррод, Эпштейн (Steenrod N. E., Epstein D. B. A.), Cohomology operations, Annals of Mathematics Studies, № 50, Princeton: Princeton University Press, 1962.
7. Уоллес (Wallace A. N.), An introduction to algebraic topology, New York: Pergamon Press, 1957.
8. Хилтон П., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, изд-во «Мир», М., 1966.
9. Шуберт (Schubert H.), Topologie, Stuttgart: B. G. Teubner, 1964.

Теория гомотопий

10. Семинар Картана (Séminaire Henri Cartan) 2. 1949/50. Espaces fibrés et homotopie. 2nd edition, Paris: Secrétariat Mathématique, 1956.

11. Стинрод Н., Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.
12. Хилтон (Hilton P. J.), An introduction to homotopy theory (Cambridge Tracts, № 43), Cambridge: The University Press, 1953.
13. Хилтон (Hilton P. J.), Homotopy theory and duality, New York: Gordon and Breach, 1965.
14. Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, изд-во «Мир», М., 1964.

Дифференциальная топология

15. Манкрес (Munkres J. R.), Elementary differential topology, Annals of Mathematics Studies № 54, Princeton: Princeton University Press 1963.
16. Смейл (Smale S.), A survey of some recent developments in differential topology, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 131—145. (Русский перевод: *УМН*, 19:1 (1964), 123—138.)
17. Уолл (Wall C. T. C.), Survey article, topology of smooth manifolds, *J. London Math. Soc.*, 40 (1965), 1—20.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ФАКТОРТОПОЛОГИЯ, ИЛИ ТОПОЛОГИЯ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ

1. Определения и основные свойства

Понятие фактортопологии, или топологии отождествления, придает точность нашему интуитивному пониманию процесса образования нового топологического пространства посредством отождествления в данном топологическом пространстве определенных точек. Оно также соответствует представлению о «склеивании» или «сшивании» двух или большего числа пространств. Оно дает важный способ образования новых топологических пространств из некоторого заданного множества топологических пространств.

Определение. Пусть X — топологическое пространство, Y — некоторое множество и $f: X \rightarrow Y$ — отображение пространства X на Y . *Фактортопология на множестве Y , задаваемая отображением f* (называемая также *топологией отождествления на Y , задаваемая отображением f*), определяется следующим образом: множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ — открытое подмножество пространства X .

Разумеется, надо проверить, что так определенные открытые множества удовлетворяют аксиомам топологии; это мы оставляем читателю. Обращаем внимание читателя на два таких факта:

- (а) фактортопология — *сильнейшая* топология на Y , в которой отображение f непрерывно; фактически с этой целью и вводят фактортопологию;
- (б) подмножество A множества Y замкнуто в фактортопологии тогда и только тогда, когда $f^{-1}(A)$ замкнуто в X .

Примеры

1.1. Пусть X — замкнутый интервал $[0, 2\pi]$, Y — единичная окружность $x^2 + y^2 = 1$. Определим f формулой $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Легко проверить, что обычная топология окружности Y совпадает с топологией отождествления, задаваемой отображением f . Этот пример соответствует тому, что при сварке друг с другом двух концов тонкого провода получается круглое кольцо.

1.2. Аналогичный пример: пусть Y — цилиндр

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

а X — прямоугольник

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}.$$

Определим $f: X \rightarrow Y$ формулой

$$f(x, y) = (\cos x, \sin x, y).$$

Тогда обычная топология на Y также совпадает с топологией отождествления, индуцированной отображением f . Мы можем представлять себе, что цилиндр образован из прямоугольника склеиванием друг с другом противоположных сторон.

1.3. Пусть R — отношение эквивалентности (т. е. рефлексивное, симметричное и транзитивное) на топологическом пространстве X , X/R — множество всех классов эквивалентности и $f: X \rightarrow X/R$ — естественное отображение, ставящее в соответствие каждой точке из X ее класс эквивалентности. Тогда естественно ввести на X/R фактортопологию, задаваемую отображением f ; наделенное этой топологией пространство X/R обычно называется *факторпространством пространства X по модулю R* .

Приведем простой пример. Пусть $X = \mathbb{R}$ — действительная прямая и $\mathbb{R}/R$ — отношение эквивалентности « $x \equiv y \pmod R$ тогда и только тогда, когда число $x - y$ целое». Тогда факторпространство X/R гомеоморфно окружности.

1.4. Изложим другой подход к отношениям эквивалентности. Пусть $\mathcal{U}$ — *разложение*, или *разбиение*, топологического пространства X , т. е. семейство непустых попарно непересекающихся множеств, покрывающих X . Если R — отношение эквивалентности на X , то множество классов эквивалентности образует такое разложение, или разбиение. Обратно, любое разбиение определяет отношение эквивалентности: по определению x и y эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же элементу разбиения.

Пусть $f: X \rightarrow \mathcal{U}$ — естественное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ единственный элемент семейства $\mathcal{U}$, содержащий x . Тогда естественно ввести на $\mathcal{U}$ топологию факторпространства (фактортопологию), задаваемую отображением f ; наделенное этой топологией $\mathcal{U}$ называется *пространством разбиения* (или *разложением*).

1.5. Пусть X — топологическое пространство, G — группа, действующая на X слева (см. определение в приложении В). Это действие группы G на X определяет отношение эквивалентности: точки x и y эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g \in G$, что $g \cdot x = y$. Предоставляем читателю проверить, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Получающееся факторпространство обозначается обычно через X/G . Каждый класс эквивалентности называется *орбитой*. В большинстве случаев налагают дополнительное требование: для любого элемента $g \in G$ отображение $X \rightarrow X$, определенное соответствием $x \rightarrow g \cdot x$, должно быть непрерывным. Отсюда следует, что это отображение является гомеоморфизмом пространства X на себя (так как $x \rightarrow g^{-1} \cdot x \rightarrow$ обратное отображение). Если G — топологическая группа, обычно налагают более сильное условие: отображение $G \times X \rightarrow X$, определенное соответствием $(g, x) \rightarrow g \cdot x$, должно быть непрерывным.

Примеры групп, действующих на пространствах, можно найти в гл. V (группа автоморфизмов накрывающего пространства).

Здесь целесообразно сделать предостережение: если X и Y — топологические пространства и f — непрерывное отображение из X на Y , то это вовсе не значит, что Y имеет фактортопологию, задаваемую отображением f . Легко построить контрпримеры.

Однако если f — замкнутое¹⁾ или открытое отображение, то пространство Y обязательно имеет фактортопологию. Доказательство легкое.

Если Y имеет фактортопологию, задаваемую отображением $f: X \rightarrow Y$, то условие о замкнутости или открытости отображения f часто бывает полезным предположением. В связи с этим отметим эквивалентные формы таких условий:

- (а) отображение f замкнуто тогда и только тогда, когда для любого замкнутого подмножества A пространства X множество $f^{-1}f(A)$ замкнуто;
- (б) отображение f открыто тогда и только тогда, когда для любого открытого подмножества U пространства X множество $f^{-1}f(U)$ открыто.

Еще раз подчеркнем, что здесь предполагается, что пространство Y наделено фактортопологией.

Например, если G — группа, действующая на пространстве X слева и такая, что для любого ее элемента g отображение $X \rightarrow X$, определенное соответствием $x \rightarrow g \cdot x$, непрерывно, то естественное отображение $X \rightarrow X/G$ открыто. Если G — конечная группа, то естественное отображение $X \rightarrow X/G$ также и замкнуто. Доказательство оставляем читателю.

Вероятно, читателю уже знакома топология подпространства и произведения пространств и он знает теоремы об этих топологиях. Хотелось бы, чтобы для факторпространств были справедливы апалогичные теоремы. К сожалению, это не так. Например, любое произведение хаусдорфовых пространств и любое подпространство хаусдорфова пространства снова хаусдорфовы. Однако совершенно неверно, что факторпространство хаусдорфова пространства хаусдорфово. В самом деле, если X — замкнутый интервал $[0, 1]$, а $\mathcal{U}$ — разложение пространства X , состоящее из трех множеств $\{0\}$, $(0, 1)$ и $\{1\}$, то пространство разложения $\mathcal{U}$ состоит лишь из трех элементов и очевидно, что его топология не хаусдорфова. Этот пример иллюстрирует одну из наиболее общих проблем, возникающих в связи с факторпространствами: пространство X может удовлетворять всем аксиомам отделимости, какие мы только пожелаем, но его факторпространство не обязано удовлетворять какой-нибудь из них.

¹⁾ Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *замкнутым*, если образ любого замкнутого множества при отображении f замкнут. Определение открытых отображений аналогично. Непрерывное отображение может не быть ни открытым, ни замкнутым, открытым, но не замкнутым, замкнутым, но не открытым, одновременно открытым и замкнутым. Читателю советуем построить примеры, иллюстрирующие все четыре возможности. Открытое отображение иногда называется *внутренним*.

Предложение 1.1. Пусть пространство Y надлено фактортопологией, задаваемой отображением $f: X \rightarrow Y$. Если пространство X компактно, связно или линейно связно, то таково же и пространство Y .

Это предложение — частный случай хорошо известного факта, утверждающего, что непрерывный образ компактного, связного или линейно связного пространства снова компактен, связан или линейно связен.

2. Обобщение топологии факторпространства

Задание фактортопологии является частным случаем следующей более общей конструкции. Пусть Y — множество, $\{X_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство топологических пространств и $\{f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y: \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство отображений. В этой ситуации естественно наделить Y сильнейшей топологией, в которой все отображения f_λ непрерывны. Эта топология задается так: множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда $f_\lambda^{-1}(U)$ открыто для всех $\lambda \in \Lambda$. По-другому: множество $A \subset Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда $f_\lambda^{-1}(A)$ замкнуто для всех $\lambda \in \Lambda$.

Второй важный частный случай этого общего построения — образование так называемой (по Бурбаки) «топологической суммы» семейства пространств. Если в приведенном определении каждое из отображений $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y$ взаимно однозначно, образы $f_\lambda(X_\lambda)$ попарно не пересекаются и их объединение покрывает Y , то Y называется топологической суммой семейства $\{X_\lambda\}$ (по отношению к отображениям f_λ). Легко проверить, что при этих предположениях каждое из пространств X_λ отображается на свой образ в Y топологически и каждый такой образ $f_\lambda(X_\lambda)$ открыт в Y .

Еще один пример — задание слабой топологии на CW-комплексе (см. гл. VII).

Заметим, что для описанной общей конструкции топологии на Y существует двойственный процесс, а именно: пусть X — множество, $\{Y_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — семейство топологических пространств и $\{f_\lambda: X \rightarrow Y_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство отображений; естественно наделить множество X слабой топологией, в которой все отображения f_λ непрерывны. Псевдобаза этой топологии образована всеми множествами вида $f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$, где U_λ — произвольное открытое подмножество пространства Y_λ . Приведем два наиболее общих и важных примера этого способа введения топологии.

(а) X — декартово произведение пространств Y_λ ,

$$X = \prod_{\lambda} Y_{\lambda},$$

а f_λ — проекция пространства-произведения на сомножитель Y_λ . В этом случае описанная общая конструкция задания топологии на X приводит к обычной топологии произведения пространств.

- (b) Множество индексов Λ состоит из одного элемента; следовательно, существует лишь одно пространство Y_λ ; обозначим его через Y . Предположим, что X — подмножество в Y , а $f: X \rightarrow Y$ — отображение включения. Если применить в этом случае описанный выше общий процесс, то получим на X топологию подпространства. Таким образом, известные приемы образования подпространств и произведения пространств представляют собой частные случаи общего метода введения топологии.

Не только эти два общих метода введения топологии двойственны друг другу, но и процедуры образования подпространств и факторпространств, а также произведений и топологических сумм в некотором смысле двойственны друг другу.

Лемма 2.1. Пусть $\{X_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — семейство топологических пространств, $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y$ — семейство отображений и пространство Y наделено сильнейшей топологией, в которой все отображения f_λ непрерывны. В этом случае отображение $g: Y \rightarrow Z$, где Z — некоторое топологическое пространство, непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна каждая композиция отображений $gf_\lambda: X_\lambda \rightarrow Z$.

Довольно легкое доказательство оставляем читателю.

Следствие 2.2. Пусть X — топологическое пространство, а пространство Y наделено фактортопологией, задаваемой отображением $f: X \rightarrow Y$ (f — отображение на). В этом случае отображение $g: Y \rightarrow Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна композиция отображений $gf: X \rightarrow Z$.

Следствие 2.3. Пусть Y — топологическая сумма семейства пространств $\{X_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ по отношению к отображениям $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y$. В этом случае отображение $g: Y \rightarrow Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда каждая из композиций $gf_\lambda: X_\lambda \rightarrow Z$ непрерывна.

Для полноты сформулируем утверждение, двойственное лемме 2.1.

Лемма 2.1'. Пусть $\{Y_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ — семейство топологических пространств, $f_\lambda: X \rightarrow Y_\lambda$ — семейство отображений и пространство X наделено слабой топологией, в которой все отображения f_λ непрерывны. В этом случае отображение $g: W \rightarrow X$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна каждая композиция отображений $f_\lambda g: W \rightarrow Y_\lambda$.

Читателю предоставляем сформулировать и доказать утверждения, двойственные следствиям 2.2 и 2.3, выражающие хорошо известные свойства подпространств и произведений пространств соответственно.

Отметим, что при предположениях леммы 2.1' нельзя доказать общую лемму, дающую необходимое и достаточное условие непрерывности отображения $h: W \rightarrow Y$, в частности нет общего условия непрерывности отображения в факторпространство. Аналогично при предположениях леммы 2.1 не существует общего условия непрерывности отображения $h: X \rightarrow Z$.

Для следующей леммы предположим, что заданы

топологическое пространство Z ;
 семейство топологических пространств $\{Y_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$;
 семейство непрерывных отображений $\{f_\lambda: Y_\lambda \rightarrow Z\}$;
 для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ семейство $\{X_{\lambda\mu}: \mu \in M_\lambda\}$ топологических пространств и семейство $\{f_{\lambda\mu}: X_{\lambda\mu} \rightarrow Y_\lambda: \mu \in M_\lambda\}$ непрерывных отображений.

Лемма 2.4. Пусть каждое пространство Y_λ наделено сильнейшей топологией, в которой все отображения $f_{\lambda\mu}$, $\mu \in M_\lambda$, непрерывны, а Z наделено сильнейшей топологией, в которой все отображения f_λ непрерывны. Тогда топология на Z совпадает с сильнейшей топологией, в которой непрерывны все композиции $f_\lambda f_{\lambda\mu}: X_{\lambda\mu} \rightarrow Z$.

Доказательство тривиально.

Приведем три применения этой простой леммы.

- (a) Пусть отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, где X, Y, Z — топологические пространства, являются отображениями на. Предположим, что пространство Y наделено фактортопологией, задаваемой отображением f , а Z — фактортопологией, задаваемой отображением g . Тогда топология на Z совпадает с фактортопологией, задаваемой отображением gf . Если представлять себе пространство Z полученным из пространства X отождествлением определенных точек, то не имеет значения, осуществляется отождествление сразу или в два этапа, дающих сначала пространство Y , а затем — пространство Z .
- (b) Предположим, что Z — топологическая сумма семейства пространств Y_λ и каждое пространство Y_λ — топологическая сумма семейства пространств $X_{\lambda\mu}$. Тогда Z — топологическая сумма всех пространств $X_{\lambda\mu}$.
- (c) Процессы образования факторпространств и топологических сумм взаимозаменяемы, т. е. порядок их осуществления не играет роли. Точнее пусть для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$

отображение $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ есть отображение топологического пространства X_λ на топологическое пространство Y_λ и каждое пространство Y_λ наделено фактортопологией, задаваемой отображением f_λ . Пусть X и Y — топологические суммы семейств $\{X_\lambda\}$ и $\{Y_\lambda\}$ по отношению к отображениям $\varphi_\lambda: X_\lambda \rightarrow X$ и $\psi_\lambda: Y_\lambda \rightarrow Y$ соответственно. Очевидно, что существует единственное отображение $f: X \rightarrow Y$, непрерывное и на все Y , превращающее для каждого λ диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y_\lambda \\ \downarrow \varphi_\lambda & & \downarrow \psi_\lambda \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

в коммутативную. Мы утверждаем, что фактортопология на Y , задаваемая отображением f , совпадает с топологией на Y как на топологической сумме. Доказательство вытекает непосредственно из леммы 2.4 и коммутативности приведенной диаграммы.

Предоставляем читателю сформулировать утверждение, двойственное лемме 2.4. Утверждения, двойственные утверждениям (а), (b) и (с), настолько тривиальны, что обычно в учебниках они даже не формулируются явно.

3. Факторпространства и произведения пространств

Естественно, возникает вопрос, совпадает ли факторпространство произведения пространств с произведением факторпространств? Точнее предположим, что для каждого индекса $\lambda \in \Lambda$ отображение $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ непрерывно и является отображением на, а пространство Y_λ наделено фактортопологией, задаваемой отображением f_λ . Тогда можно построить произведения

$$X = \prod_{\lambda} X_{\lambda}, \quad Y = \prod_{\lambda} Y_{\lambda},$$

и отображения f_λ очевидным образом определяют отображение $f: X \rightarrow Y$, а именно $(fx)_\lambda = f_\lambda(x_\lambda)$ для всех $x \in X$.

Ясно, что отображение f непрерывно и является отображением на. Вопрос заключается в следующем: имеет ли Y фактортопологию, задаваемую отображением f ? Другими словами, на Y можно ввести топологию либо как на произведении пространств, либо как на факторпространстве. Совпадают ли эти две топологии?

Приведем пример Келли [3], показывающий, что в общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Пусть X — нерегу-

лярное хаусдорфово пространство. Можно выбрать такое замкнутое подмножество $A \subset X$ и такую точку $b \in X$, что у них не будет непересекающихся открытых окрестностей, т. е. если U и V — любые открытые множества, содержащие A и b соответственно, то пересечение $U \cap V$ не пусто. Пусть Y — факторпространство пространства X , полученное отождествлением всех точек множества A с одной точкой $a \in Y$. Тогда пространство Y не хаусдорфово, так как у точек a и b нет непересекающихся окрестностей. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — естественное отображение. Рассмотрим отображение $f \times f: X \times X \rightarrow Y \times Y$, где $Y \times Y$ имеет топологию произведения. Мы утверждаем, что $Y \times Y$ не имеет фактортопологии, задаваемой отображением $f \times f$. В самом деле, поскольку пространство Y не хаусдорфово, диагональ произведения $Y \times Y$ — не замкнутое множество, но очевидно, что ее прообраз при отображении $f \times f$ — замкнутое подмножество пространства $X \times X$.

В общем случае фактортопология на Y сильнее, чем топология произведения (т. е. у нее больше открытых множеств). Приведем достаточное условие совпадения этих двух топологий на Y .

Предложение 3.1. Пусть выполнены предположения, сформулированные выше, и каждое из отображений $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ открыто. Тогда топология произведения и фактортопология на

$$Y = \prod_{\lambda} Y_{\lambda}$$

совпадают.

Доказательство. Так как каждое из отображений f_λ открыто, является отображением на, то отображение $f: X \rightarrow Y$ также открыто. Следовательно, Y имеет фактортопологию, задаваемую отображением f (см. замечания в разд. 1).

Теоремы этого типа можно найти в статье Химмельберга (On the product of quotient spaces, *Amer. Math. Monthly*, 72 (1965), 1103—1106).

4. Подпространство факторпространства и факторпространство подпространства

Другой естественный вопрос таков: совпадают ли факторпространство подпространства и подпространство факторпространства? Этот вопрос точно можно сформулировать так. Предположим, что $f: X \rightarrow Y$ — отображение на, пространство Y наделено топологией, задаваемой отображением f , A — подпространство в X и $B = f(A) \subset Y$. В этой ситуации B можно наделить топологией подпространства в Y или фактортопологией, задаваемой отображением $f|A: A \rightarrow B$. Совпадают ли на B эти две топологии? В общем

случае ответ отрицательный. Рассмотрим простой контрпример. Пусть пространства X , Y и отображение $f: X \rightarrow Y$ те же, что и в примере 1.2, и пусть

$$A = \{(x, y) \in X: 0 \leq x < 2\pi, y = 0\}.$$

Тогда A — полуоткрытый интервал, и если наделить $B = f(A)$ топологией подпространства, то B будет одной из окружностей края цилиндра Y . С другой стороны, так как отображение $f|_A: A \rightarrow B$ взаимно однозначно и является отображением на, то наделенное фактортопологией пространство B становится гомеоморфным A . Но полуоткрытый интервал и окружность не гомеоморфны: первое пространство компактно, второе — нет. Поэтому эти две топологии на B различны.

Предложение 4.1. *Если выполнены предположения, сформулированные в начале этого раздела, то фактортопология на B сильнее топологии подпространства.*

Доказательство. Пусть $i: A \rightarrow X$ и $j: B \rightarrow Y$ — отображения включения. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f|_A} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

коммутативна. Если наделить B фактортопологией, то, в силу следствия 2.2 и коммутативности этой диаграммы, отображение j будет непрерывным. Доказательство закончено, так как топология подпространства на B — слабейшая из топологий, в которых отображение j непрерывно.

Приведем достаточное условие совпадения топологии подпространства и фактортопологии на B .

Предложение 4.2. *При тех же предположениях, что и выше, если A — замкнутое подмножество в X и отображение $f: X \rightarrow Y$ замкнуто или если A — открытое подмножество в X и отображение f открыто, то топология подпространства и фактортопология на B совпадают.*

Доказательство. Наделим B топологией подпространства. Сначала рассмотрим случай открытых подмножества A и отображения f . Тогда B — открытое подмножество в Y и очевидно, что отображение $f|_A: A \rightarrow B$ открыто. Следовательно, B имеет фактортопологию, задаваемую отображением $f|_A$.

В случае замкнутых подмножества A и отображения f рассуждения аналогичны: всякий раз, когда в предыдущем абзаце встречается слово «открытый», его надо заменить на слово «замкнутый».

5. Условие, при котором факторпространство хаусдорфово

Сейчас мы исследуем одну из наиболее серьезных проблем, относящихся к факторпространствам. Прежде всего докажем следующее необходимое условие:

Лемма 5.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Если Y — хаусдорфово пространство, то $\{(x_1, x_2) \in X \times X: f(x_1) = f(x_2)\}$ — замкнутое подмножество в $X \times X$.

Доказательство. Легко доказать, что пространство Y хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $D = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y: y_1 = y_2\}$ — замкнутое подмножество в $Y \times Y$.

Рассмотрим отображение $f \times f: X \times X \rightarrow Y \times Y$; оно непрерывно, а $(f \times f)^{-1}(D)$ есть как раз то множество, о котором идет речь в лемме. Так как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут, то лемма доказана.

Заметим, что в лемме не предполагается, что пространство Y наделено фактортопологией. Следовательно, она дает необходимое условие существования некоторой хаусдорфовой топологии на Y , в которой отображение f непрерывно. Однако если на Y существует какая-то топология, обладающая указанным свойством, то фактортопология, задаваемая отображением f , также хаусдорфова; в самом деле, любая топология на Y , более сильная, чем хаусдорфова, также хаусдорфова.

В общем случае утверждение, обратное к этой лемме, не верно даже для фактортопологии на Y . Однако верно частичное ее обращение.

Лемма 5.2. Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно и является отображением на. Если множество $\{(x_1, x_2) \in X \times X: f(x_1) = f(x_2)\}$ замкнуто, то Y — хаусдорфово пространство.

Доказательство. Рассмотрим снова отображение

$$f \times f: X \times X \rightarrow Y \times Y,$$

которое, как и f , открыто. По предположению множество

$$\{(x_1, x_2) \in X \times X: f(x_1) \neq f(x_2)\}$$

открыто в $X \times X$; поэтому его образ при отображении $f \times f$ открыт в $Y \times Y$. Но это — дополнение диагонали $D \subset Y \times Y$.

Следовательно, D — замкнутое множество, и пространство Y хаусдорфово.

В этой лемме не предполагается, что отображение f непрерывно. Леммы 5.1 и 5.2 можно объединить в одно предложение:

Предложение 5.3. (Н. Бурбаки [1].) Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, открыто и является отображением на. В этом случае пространство Y хаусдорфово тогда и только тогда, когда множество

$$\{(x_1, x_2) \in X \times X: f(x_1) = f(x_2)\}$$

замкнуто в $X \times X$.

Заметим, что из условия этого предложения вытекает, что пространство Y наделено фактортопологией, задаваемой отображением f .

Более благоприятная ситуация возникает при рассмотрении факторпространств компактных хаусдорфовых пространств. В этом случае справедлива следующая важная теорема (см. Бурбаки [1]):

Теорема 5.4. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, а отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно и является отображением на. Предположим, что пространство Y наделено фактортопологией, задаваемой отображением f . Тогда условия

- (а) пространство Y хаусдорфово;
- (б) отображение f замкнуто;
- (с) множество $\{(x_1, x_2) \in X \times X: f(x_1) = f(x_2)\}$ замкнуто в $X \times X$

эквивалентны.

Доказательство. Докажем теорему, показав справедливость импликаций (а) $\rightarrow$ (с), (с) $\rightarrow$ (б) и (б) $\rightarrow$ (а). Импликация (а) $\rightarrow$ (с) содержится в лемме 5.1.

(с) $\rightarrow$ (б). Пусть $C = \{(x_1, x_2) \in X \times X: f(x_1) = f(x_2)\}$; по условию C замкнуто в $X \times X$. Так как пространство Y наделено фактортопологией, то для доказательства замкнутости отображения f надо доказать, что для любого замкнутого множества $A \subset X$ множество $f^{-1}f(A)$ также замкнуто. Обозначим через $p_1, p_2: X \times X \rightarrow X$ проекции $p_1(x_1, x_2) = x_1, p_2(x_1, x_2) = x_2$. Легко проверить, что для любого подмножества $A \subset X$

$$f^{-1}f(A) = p_1(C \cap p_2^{-1}A).$$

Если A замкнуто, то замкнуто и $p_2^{-1}(A)$, а следовательно, и $C \cap p_2^{-1}A$. Так как $X \times X$ компактно, то компактно и $C \cap p_2^{-1}A$. Таким образом, поскольку пространство X хаусдорфово, то $p_1(C \cap p_2^{-1}A)$ компактно и потому замкнуто.

(б) $\rightarrow$ (а). Пусть y_1 и y_2 — различные точки пространства Y ; мы должны доказать, что у них есть непересекающиеся окрестно-

сти. Заметим, что $f^{-1}(y_1)$ и $f^{-1}(y_2)$ — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X . Так как X — компактное хаусдорфово пространство, оно нормально, и потому существуют такие непересекающиеся открытые подмножества U_1 и U_2 пространства X , что

$$f^{-1}(x_1) \subset U_1, \quad f^{-1}(x_2) \subset U_2.$$

По предположению отображение f замкнуто, так что $f(X - U_1)$ и $f(X - U_2)$ — замкнутые подмножества пространства Y . Пусть V_1 и V_2 — их открытые дополнения:

$$V_1 = Y - f(X - U_1),$$

$$V_2 = Y - f(X - U_2).$$

Тогда легко проверить, что $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, что и требовалось доказать.

В связи с этой теоремой напомним, что непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово всегда замкнуто; доказательство элементарно.

Эта теорема иллюстрирует пользу условия замкнутости отображения f . В работах Мура, Уайберна и их учеников всегда, когда идет речь о факторпространствах, принимается точка зрения, указанная в примере 1.4. В случае когда естественное отображение $f: X \rightarrow \mathcal{U}$ замкнуто, они называют разложение $\mathcal{U}$ *разложением, полунепрерывным сверху*¹⁾. Еще одну полезную теорему о таких разложениях можно найти в книге Келли [3].

Упражнение

5.1. Пусть X и Y — топологические пространства, а $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ — такие непрерывные отображения, что fg — тождественное отображение пространства Y на себя. Докажите, что

- отображение g взаимно однозначно;
- пространство Y имеет фактортопологию, задаваемую отображением f ;
- g гомеоморфно отображает Y на подпространство пространства X (т. е. Y имеет топологию подпространства, задаваемую отображением g); если пространство X хаусдорфово, то пространство Y также хаусдорфово.
- если пространство X хаусдорфово, то пространство Y также хаусдорфово.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бурбаки Н., Общая топология, изд-во «Наука», М., 1975.
- Дугунджи (Dugundji J.), Topology, Boston: Allyn and Bacon, 1966, Chapter VI.
- Келли Д., Общая топология, изд-во «Наука», М., 1968, гл. 3, 5.

¹⁾ В русской терминологии П. С. Александрова $\mathcal{U}$ — непрерывное разложение. — Прим. ред.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ГРУППЫ ПЕРЕСТАНОВОК, ИЛИ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Основные определения

Читатель, несомненно, знаком со следующим фактом из теории групп: если E — любое множество (конечное или бесконечное), то множество всех его перестановок (т. е. функций $E \rightarrow E$, взаимно однозначных и являющихся отображениями на) образует группу с групповой операцией — композицией, или суперпозицией, перестановок. И, конечно, он встречал примеры таких групп (называемых *симметрическими* группами множества E), главным образом когда множество E конечно. Вероятно, изучил он также различные подгруппы симметрической группы конечного множества.

Если G — произвольная группа, то гомоморфизм группы G в симметрическую группу множества E называется *представлением группы G перестановками множества E* . Если этот гомоморфизм есть изоморфизм, то представление называется *точным*. Легко доказать, что любая группа допускает точное представление перестановками. Доказательство мы не приводим, так как в нашей книге этот факт нам не понадобился.

Изложим еще один часто встречающийся подход к этим вопросам. На первый взгляд этот подход не кажется достаточно прямым, но приводит он к тем же результатам.

Определение. Пусть E — множество, а G — группа. Множество E называют *левым G -пространством* (или говорят, что E допускает группу G в качестве *группы операторов, действующих слева*), если отображение $G \times E \rightarrow E$ задано соответствием $(g, x) \rightarrow g \cdot x$ для любых $g \in G$, $x \in E$ и обладает свойствами

- (1) $1 \cdot x = x$ для всех $x \in E$;
- (2) для любых $x \in E$ и $g_1, g_2 \in G$

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

Например, если G — подгруппа симметрической группы множества E и $g \cdot x$ — результат применения перестановки g к элементу $x \in E$, то E — левое G -пространство.

Другой простой пример: пусть E — обычное евклидово 3-пространство, G — группа всех вращений пространства E , оставляющих неподвижным начало координат, а $g \cdot x$ — образ точки x при вращении g ; тогда E — левое G -пространство.

Аналогично определяются правые G -пространства. Отображение $E \times G \rightarrow E$ задано соответствием $(x, g) \rightarrow x \cdot g$ и обладает свойствами

$$(1') \quad x \cdot 1 = x;$$

$$(2') \quad x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2.$$

Правые и левые G -пространства отличаются не только тем, что элементы группы G пишутся справа или слева от элементов множества E , но — и это главное — свойствами (2) и (2'). Если E — левое G -пространство, то $g_1 g_2$ действует на $x \in E$ так, что сначала на x действует g_2 , а затем на получившийся результат действует g_1 , а для правого G -пространства сначала действует g_1 , а затем уже g_2 .

Упражнение

1.1. Предположим, что E — левое G -пространство. Для любых $x \in E$ и $g \in G$ положим

$$x \cdot g = (g^{-1}) \cdot x.$$

Докажите, что при таком определении действия группы G пространство E становится правым G -пространством.

Теорема 1.1. Пусть E — левое G -пространство. Тогда для любого элемента $g \in G$ отображение $E \rightarrow E$, определенное соответствием $x \rightarrow g \cdot x$, есть перестановка множества E .

Доказательство. Отображение, о котором идет речь в условии теоремы, обозначим через φ_g . Рассмотрим отображение $\varphi_{g^{-1}}$. Из аксиом левого G -пространства вытекает, что $\varphi_g \varphi_{g^{-1}}$ и $\varphi_{g^{-1}} \varphi_g$ — тождественные отображения пространства E на себя. Следовательно, отображение φ_g взаимно однозначно и является отображением на, т. е. перестановкой.

Эта простая, но важная теорема показывает, что понятие левого G -пространства эквивалентно понятию представления группы G перестановками множества E . Однако не следует торопиться с выводом, что такое представление точное; может оказаться, что в G найдется такой элемент $g \neq 1$, что $g \cdot x = x$ для всех $x \in E$. Если таких элементов $g \in G$ нет, то говорят, что G действует на множестве E *эффективно*.

Пусть E_1 и E_2 — левые G -пространства; отображение $f: E_1 \rightarrow E_2$ называется *G -эквивариантным*, или просто *отображением*

левых G -пространств, если

$$f(g \cdot x) = g \cdot (fx)$$

для любых $g \in G$ и $x \in E_1$. G -эквивариантное отображение $f: E_1 \rightarrow E_2$ называется *изоморфизмом левых G -пространств*, если существует такое G -эквивариантное отображение $f': E_2 \rightarrow E_1$, что $f'f$ и ff' — тождественные отображения пространств E_1 и E_2 соответственно. Это эквивалентно условию, что отображение f взаимно однозначно и является отображением на. В данном контексте такое определение изоморфизма естественно. Обращаем внимание читателя на то, что группа G может действовать на данном множестве E несколькими различными неизоморфными способами. Обычно автоморфизм G -пространства — это изоморфизм на себя.

2. Однородные G -пространства

Пусть E — левое G -пространство. Говорят, что группа G действует на пространстве E *транзитивно* или что E — *однородное левое G -пространство*, если для любых элементов $x, y \in E$ существует такой элемент $g \in G$, что

$$g \cdot x = y.$$

Однородные G -пространства встречаются довольно часто и поэтому важны.

Пример

2.1. Пусть G — группа, а H — произвольная ее подгруппа. Обозначим через G/H множество всех классов смежности, т. е. множеств $g \cdot H$ для всех $g \in G$. Очевидно, что после умножения слева элементов данного класса смежности на любой элемент $g \in G$ получаются элементы из одного класса смежности. Этим задается отображение $G \times G/H \rightarrow G/H$, и легко проверить, что выполняются обе аксиомы левого G -пространства. Ясно, что G/H — однородное левое G -пространство.

Покажем, что любое однородное левое G -пространство изоморфно некоторому пространству классов смежности G/H . Пусть E — произвольное однородное G -пространство. Выберем элемент $x_0 \in E$; пусть

$$H = \{g \in G: g \cdot x_0 = x_0\}.$$

Легко проверить, что H — подгруппа группы G . Она называется *изотропной подгруппой*, соответствующей элементу x_0 . Рассмотрим отображение $G \rightarrow E$, определенное соответствием $g \rightarrow g \cdot x_0$. Так как E — однородное G -пространство, это — отображение на. При каких условиях два элемента $g_1, g_2 \in G$ отображаются в один

и тот же элемент пространства E ? Ответ найти легко:

$$g_1 x_0 = g_2 x_0 \iff g_2^{-1} g_1 x_0 = x_0 \iff g_2^{-1} g_1 \in H.$$

Следовательно, g_1 и g_2 отображаются в один и тот же элемент пространства E тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же классу смежности. Таким образом, отображение $G \rightarrow E$ индуцирует отображение $f: G/H \rightarrow E$, взаимно однозначное и на все E ; легко проверить, что f есть G -эквивариантное отображение. Таким образом, G/H и E — изоморфные левые G -пространства.

Изоморфизм f и подгруппа H в предыдущих рассуждениях зависят от выбора точки x_0 в E . Другой выбор точки x_0 приведет к сопряженной подгруппе.

Для целей гл. V надо знать структуру группы автоморфизмов однородного G -пространства. Рассмотрим однородное *правое* G -пространство E . Пусть $\varphi: E \rightarrow E$ — автоморфизм пространства E . Непосредственно из определений вытекает, что для любой точки $x \in E$ точки x и $\varphi(x)$ имеют одну и ту же изотропную подгруппу. Обратно, предположим, что x и y — точки пространства E , имеющие одну и ту же изотропную подгруппу. Мы утверждаем, что существует такой автоморфизм φ пространства E , что $\varphi(x) = y$. Определим φ следующим довольно очевидным образом. Пусть $z \in E$. Тогда найдется элемент $g \in G$, для которого

$$z = x \cdot g.$$

Поэтому должно быть

$$\varphi(z) = \varphi(x \cdot g) = (\varphi x) \cdot g = y \cdot g,$$

так что *определяем* $\varphi(z) = y \cdot g$. Разумеется, надо проверить, что это определение не зависит от выбора элемента g , т. е. если $x \cdot g = x \cdot g'$, то $y \cdot g = y \cdot g'$. Но это вытекает из предположения о том, что x и y имеют одну и ту же изотропную подгруппу. Мы должны также проверить, что так определенное отображение G -эквивариантно, взаимно однозначно и является отображением на. Проверка первого утверждения тривиальна, а для проверки второго и третьего можно точно таким же способом построить отображение, обратное к отображению φ , для которого $\varphi^{-1}(y) = x$.

Заметим, что если φ_1 и φ_2 — автоморфизмы однородного *правого* G -пространства E и $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ для какой-то точки $x \in E$, то $\varphi_1 = \varphi_2$. Это утверждение непосредственно следует из того, что G действует на E транзитивно.

Из всех этих результатов вытекает

Лемма 2.1. *Группа A автоморфизмов однородного G -пространства E будет группой всех автоморфизмов тогда и только тогда*

когда для любых двух точек $x, y \in E$, имеющих одну и ту же изотропную подгруппу, найдется такой автоморфизм $\varphi \in A$, что $\varphi(x) = y$.

Найдем структуру группы автоморфизмов однородного G -пространства. Сначала введем определение. Пусть H — подгруппа группы G и

$$N(H) = \{g \in G: gHg^{-1} = H\}.$$

$N(H)$ — подгруппа группы G , содержащая H . Она называется *нормализатором* группы H . Это наибольшая подгруппа группы G , содержащая H в качестве нормальной подгруппы.

Теорема 2.2. Пусть E — однородное G -пространство, а H — изотропная подгруппа группы G , соответствующая точке $x_0 \in E$. Тогда группа автоморфизмов пространства E изоморфна группе $N(H)/H$.

Доказательство. Обозначим через S множество всех точек $x \in E$, изотропной подгруппой которых является группа H . По доказанному выше группа автоморфизмов действует на множестве S транзитивно.

Мы утверждаем, что если $x \in S$ и $g \in G$, то $x \cdot g \in S$ тогда и только тогда, когда $g \in N(H)$. В самом деле, условие $x \cdot g \in S$ эквивалентно условию

$$\{h \in G: x \cdot g \cdot h = x \cdot g\} = H.$$

Но $xgh = xg$ тогда и только тогда, когда $xghg^{-1} = x$, т. е. тогда и только тогда, когда $ghg^{-1} \in H$, или $h \in g^{-1}Hg$. Таким образом, подгруппа $N(H)$ действует на подпространстве S транзитивно и элементы группы H оставляют неподвижными точки из S . Следовательно, факторгруппа $N(H)/H$ действует справа на S транзитивно и без неподвижных точек.

Теперь установим изоморфизм между группой автоморфизмов и группой $N(H)/H$. Пусть φ — некоторый автоморфизм; так как $N(H)/H$ действует на S транзитивно и без неподвижных точек, то существует такой единственный элемент $\alpha \in N(H)/H$, что

$$x_0 \cdot \alpha = \varphi(x_0).$$

Обратно, для любого элемента $\alpha \in N(H)$ существует такой единственный автоморфизм φ , что $\varphi(x_0) = x_0 \cdot \alpha$. Следовательно, соот-

ветствие $\varphi \leftrightarrow \alpha$ определяет взаимно однозначное отображение между группой автоморфизмов и группой $N(H)/H$. Проверим, что оно сохраняет произведение. Допустим, что

$$\varphi(x_0) = x_0 \cdot \alpha,$$

$$\psi(x_0) = x_0 \cdot \beta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\varphi\psi)(x_0) &= \varphi(\psi x_0) = \varphi(x_0\beta) = \\ &= (\varphi x_0)\beta = (x_0\alpha)\beta = x_0(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Таким образом, это изоморфизм.

Подчеркнем, что этот изоморфизм между $N(H)/H$ и группой автоморфизмов не является естественным; он зависит от выбора точки $x_0 \in E$. Предлагаем читателю исследовать, как влияет на это взаимно однозначное соответствие выбор базисной точки x_0 .

Дж. Столлинс

ТЕОРИЯ ГРУПП И ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Глава 1

ИСХОДНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ И РОЛЬ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

1.А. Введение

Изучение трехмерных многообразий часто оказывается взаимосвязанным с определенным разделом теории групп, занимающимся свободными группами, свободными произведениями, конечными заданиями групп и подобными комбинаторными вещами.

Так, в фундаментальной статье Кнезера [1929] скрыто содержались предпосылки теоремы Грушко [1940]; в одном из параграфов этой статьи Кнезера доказывается теорема о том, что если фундаментальная группа многообразия является свободным произведением, то это проявляется геометрически следующим образом: существует сфера с подходящими свойствами, разделяющая данное многообразие на две области. Доказательство Кнезера наполнено всякой геометрией, но один из шагов доказательства, состоящий в перестройках одномерного остова многообразия и его разбиениях, содержит в завуалированном виде что-то вроде теоремы Грушко: множество образующих свободного произведения можно видоизменить некоторым простым образом так, чтобы оно стало объединением множеств образующих сомножителей.

Подобным же образом в серии теорем Папакирьякопулоса — теореме о петле (Папакирьякопулос [1957a]), лемме Дена и теореме о сфере (Папакирьякопулос [1957b]) — неявно содержатся факты из теории групп, которые и составляют основной предмет этих глав.

Философски говоря, глубина и привлекательность теории 3-многообразий обязаны, на мой взгляд, главным образом тому факту, что теоремы этой теории дают побег, которые в конечном счете пробиваются в другом месте, а именно в теории групп. Поэтому я склонен верить в то, что у новых результатов в этой теории, таких, как результаты Вальдхаузена [1968], со временем могут отыскаться «родственники» в теории групп; решение гипотезы

тезы Пуанкаре [1904], если оно когда-либо будет получено, будет иметь далекие последствия для теории групп.

Чтобы проследить связь между результатами Папакирьякопулоса и теорией групп, рассмотрим теорему о сфере (Папакирьякопулос [19576]). Она гласит:

1.А.1. Если M — ориентируемое 3-многообразие с $\pi_2(M) \neq 0$, то существует 2-сфера S , вложенная в M и не стягиваемая в M .

Имеется также неориентируемый вариант этой теоремы (Эпштейн [1961]):

1.А.2. Если M — (ориентируемое или нет) 3-многообразие с $\pi_2(M) \neq 0$, то в M существует двустороннее 2-подмногообразие Σ , являющееся 2-сферой или проективной плоскостью, которое представляет нетривиальный элемент группы $\pi_2(M)$.

В случае когда M — компактное многообразие без края, из существования 2-сферы, не стягиваемой в M , следует, что $\pi_1(M)$ — либо бесконечная циклическая группа, либо нетривиальное свободное произведение. Теоретико-групповая интерпретация существования в M двусторонней проективной плоскости труднее, так как для групповой ситуации, возникающей здесь, нет стандартной терминологии; пока мы удовлетворимся тем, что скажем: «Группа $\pi_1(M)$ довольно близка к свободному произведению с объединенной подгруппой порядка два».

Таким образом, из теоремы о сфере вытекает, что если некоторую группу можно представить в виде $\pi_1(M)$, где M — определенного рода пространство, удовлетворяющее условию $\pi_2(M) \neq 0$, то эту группу мы можем разложить в свободное произведение, быть может с некоторой конечной объединенной подгруппой.

Аналогично обстоит дело с леммой Дена и теоремой о петле. Объединим их в виде следующей теоремы.

1.А.3. Если M — трехмерное многообразие с краем B и ядро гомоморфизма включения $\pi_1(B) \rightarrow \pi_1(M)$ нетривиально, то в M существует 2-клетка Δ , край которой лежит в B и не стягиваем в B .

Как и в случае теоремы о сфере, из этой теоремы следует, что при соответствующих предположениях относительно B группа $\pi_1(M)$ — либо бесконечная циклическая, либо разлагается в нетривиальное свободное произведение. Предположения, накладываемые на B , можно сформулировать, исходя из точной гомотопической последовательности пары (M, B) , и это приводит к следующему теоретико-групповому заключению:

1.А.4. Если группа G представляется в виде $\pi_1(M)$, где M — некоторое ориентируемое (или неориентируемое) 3-многообразие

с краем B , ни одна компонента которого не является 2-сферой или проективной плоскостью, и если $\pi_2(M, B) \neq 0$, то группа G — либо бесконечная циклическая, либо свободное произведение (быть может, в некотором смысле, с $\mathbb{Z}_2$ -объединением).

Доказательства леммы Деда и теоремы о петле на порядок легче доказательства теоремы о сфере. Поэтому интересно отметить, что теорема о сфере является довольно простым следствием нашего основного теоретико-группового результата и более легких теорем Папакирьякопулоса. В § 5.С мы указываем ход рассуждений, приводящих к этому следствию.

Тот недостаток, что предположения, при которых получается предыдущий результат, относятся к группе $\pi_2(M, B)$, а не к самой группе G , исправляется следующим образом (Шпеккер [1949]). Показывается, что $\pi_2(M, B) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $H_1^{\mathbb{Z}_2}(M) \neq 0$, где M — универсальное накрытие многообразия M и $H_1^{\mathbb{Z}_2}$ — группа когомологий конечных коцепей, для доказательства чего используется двойственность Пуанкаре в $\tilde{M}$ и предположение о том, что B асферично. Группа $H_1^{\mathbb{Z}_2}$ тесно связана с группой $\pi_1(M)$ гомологическими условиями.

Теперь несколько слов о концах. Если X — связное локально связное локально компактное хаусдорфово пространство, то множество его концов — это обратный предел направленного множества, общим элементом которого служит множество компонент пространства $X - C$, где C — произвольное компактное подмножество в X . Таким образом, множество концов действительной прямой состоит из двух точек, плоскости — из одной точки, для любого локально конечного связного дерева это будет некоторое замкнутое подмножество канторова множества.

Концы связаны с когомологиями посредством ряда утверждений, одно из которых звучит так:

1.А.5. Если K — связный локально конечный комплекс, то K имеет больше одного конца тогда и только тогда, когда ядро гомоморфизма $H_1^{\mathbb{Z}_2}(K) \rightarrow H^1(K)$ нетривиально.

В нашем случае условие $\pi_2(M, B) \neq 0$ эквивалентно тому, что $\tilde{M}$ имеет более одного конца. Концы многообразия $\tilde{M}$ можно определить чисто алгебраическим путем, исходя из группы $\pi_1(M)$, и это приводит к понятию концов абстрактной конечно порожденной группы. При этом естественно возникает следующая гипотеза:

1.А.6. Конечно порожденная группа G с более чем одним концом есть либо бесконечная циклическая группа, либо нетривиальное свободное произведение групп, либо нечто аналогичное свободному произведению с конечной объединенной подгруппой.

Ниже мы точно формулируем и докажем это утверждение и тем самым в некотором смысле полностью охарактеризуем конечно порожденные группы с более чем одним концом.

1.В. Точные формулировки упомянутых теорем

Под 3-многообразием мы понимаем хаусдорфово пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную либо трехмерному евклидову пространству, либо его замкнутому подпространству. Однако наши рассуждения мы всегда будем проводить в полиэдральном контексте, рассматривая пижележащее пространство симплициального комплекса K , для вершин которого краями звезд служат либо 2-сферы, либо 2-клетки; мы всюду применяем полиэдральную технику (например, метод приведения в общее положение и метод разрезания и склеивания). Как стало ясно благодаря статьям Мойза [1952] и Бинга [1959], эти два подхода для метризуемых 3-многообразий более или менее эквивалентны.

Точная формулировка теоремы о сфере Папакирьякопулоса [19576] в том виде, как она была усовершенствована Уайтхедом [1958] и Эпштейном [1961], такова.

1.В.1. Теорема о сфере. Пусть M — некоторое 3-многообразие и A — такой $\pi_1(M)$ -подмодуль модуля $\pi_2(M)$, что $\pi_2(M) - A \neq \emptyset$. Тогда существует такое подпространство $X \subset M$, что X гомеоморфно либо 2-сфере, либо действительной проективной плоскости и имеет в M окрестность, гомеоморфную пространству $X \times (-1, +1)$, причем фундаментальный элемент группы $\pi_2(X)$ представляет элемент из $\pi_2(M) - A$.

Точная формулировка теоремы о петле и леммы Дена, доказанных Папакирьякопулосом [1957а, б] и усовершенствованных Шапиро и Уайтхедом [1958] и Столлингсом [1960], такова.

1.В.2. Теорема о петле — лемма Дена. Пусть M — некоторое 3-многообразие, B — компонента его края и N — некоторая нормальная подгруппа группы $\pi_1(B)$, такая, что

$$(\pi_1(B) - N) \cap \ker(\pi_1(B) \rightarrow \pi_1(M)) \neq \emptyset.$$

Тогда существует 2-клетка $D \subset M$, край которой содержится в B , представляющая элемент из $\pi_1(B) - N$.

Важным для нашего обсуждения результатом является гипотеза Кнезера — одна теорема, доказанная Кнезером [1929], по, к сожалению, с использованием ошибочных некорректных методов Дена [1910], связанных с понятием свободного произведения групп. Этот результат, усовершенствованный Столлингсом [1959], таков.

1.В.3. Гипотеза Кнезера. Пусть M — компактное связное 3-многообразие без края, и пусть $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow A * B$ — такой гомоморфизм группы $\pi_1(M)$ на свободное произведение, что всякое двустороннее 2-многообразие T в M , для которого гомоморфизм $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(M)$ инъективен и $\varphi(\pi_1(T)) = \{1\}$, является 2-сферой. (Это условие заведомо удовлетворено, когда φ — изоморфизм или когда группа $\pi_1(M)$ не содержит никакой нетривиальной подгруппы вида $\pi_1(T)$, где T — замкнутое 2-многообразие.) Тогда можно записать $M = M_A \cup M_B$, где $M_A \cap M_B$ — некоторая 2-сфера и $\varphi(\pi_1(M_A)) = A$, $\varphi(\pi_1(M_B)) = B$.

Именно в процессе доказательства этого результата для случая, когда φ — изоморфизм, Кнезер предвосхитил теорему Грушко. Фактически теорема Грушко получается из этого результата, как он здесь сформулирован, если в качестве M взять 3-сферу с ручками, так что группа $\pi_1(M)$ свободна.

Говорят, что подмножество A топологического пространства X является цилиндрически вложенным¹⁾ в X , если существует открытое подмножество в X , гомеоморфное произведению $A \times (-1, +1)$ и содержащее A в качестве $A \times 0$.

Вот один результат, который связан с гипотезой Кнезера и из которого в конечном счете можно получить теорему о сфере:

1.В.4. Пусть M — компактное 3-многообразие, $\varphi: M \rightarrow X$ — непрерывное отображение, и пусть пространство X содержит некоторое цилиндрически вложенное подмножество A . Предположим, что отображение $\varphi_*: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(X)$ инъективно и $\pi_2(X - A \times (-1/2, +1/2), A \times \{-1/2, +1/2\}) = 0$ для любого выбора базисной точки. Тогда φ гомотопна такому отображению $f: M \rightarrow X$, что $f^{-1}(A)$ есть 2-многообразие, цилиндрически вложенное в M , для каждой компоненты T_i которого гомоморфизм $f_*: \pi_1(T_i) \rightarrow \pi_1(A)$ инъективен.

Упомянутая нами теорема Вальдхаузена, пожалуй, слишком сложна, чтобы ее здесь точно формулировать. Она была доказана в работе Вальдхаузена [1968], и в качестве следствия из нее была получена классификация некоторых 3-многообразий только по их фундаментальным группам (при некотором предположении, служащем для обхода всемогущей гипотезы Пуанкаре [1904]).

Теперь мы скажем несколько слов, касающихся теории групп, отложив рассмотрение подробностей до гл. 3.

Свободное произведение $A * B$ двух групп A и B — это «копроизведение» A и B в категории групп и гомоморфизмов. Классически это произведение описывается в терминах редуцированных слов в $A \cup B$. Именно таким образом свободные произведения

¹⁾ В оригинале *bicollared* (буквально — «двухворотниковое»). — Прим ред.

были впервые введены Шрейером и Артином около 1925 г. Понятие свободного произведения было непосредственно обобщено Шрейером [1927] до понятия свободного произведения с объединенной подгруппой. Такие свободные произведения с объединением возникают в топологической ситуации как фундаментальные группы объединений пар пространств в соответствии с теоремой Зейферта [1931] и ван Кампена [1933].

Из теорем о свободных произведениях особый интерес для нас представляет теорема Грушко [1940] (см. также Нейман [1943]), вариант которой для бесконечно порожденных групп принадлежит Вагнеру [1957] (имеется топологическое доказательство Столлингса [1965]).

1.В.5. Теорема Грушко — Вагнера. *Если F — свободная группа (т. е. свободное произведение бесконечных циклических групп) и $\varphi: F \rightarrow *_{\alpha} A_{\alpha}$ — гомоморфизм на свободное произведение, то F можно записать в виде свободного произведения $F = *_{\alpha} F_{\alpha}$ так, что $\varphi(F_{\alpha}) = A_{\alpha}$.*

Наши исследования по концам групп привели нас к одному обобщению понятия свободного произведения с объединением, которое мы подробно обсуждаем в гл. 3.

Сначала мы рассматриваем «предгруппы». *Предгруппа* — это некоторая алгебраическая система, в которой произведение определено не всегда, но в других отношениях очень похожая на группу: существует единичный элемент; для каждого элемента существует обратный; когда это возможно, имеет место ассоциативность; выполняется также своеобразное свойство, состоящее в том, что каждый раз, когда определены произведения wx , xu и yz , определено по крайней мере одно из произведений wxu или xuz .

Для предгрупп существуют универсальные группы, в которых проблема слов разрешима, примерно так же, как и в свободных произведениях с объединением. Универсальная группа $U(P)$ определяется как в некотором смысле наибольшая группа, которая может быть порождена предгруппой P . На множестве редуцированных слов в предгруппе P существует отношение эквивалентности, которое характеризуется следующим примером: (x, y) эквивалентно $(xa, a^{-1}y)$, если определены оба фигурирующих здесь произведения. Имеет место теорема о том, что каждый элемент группы $U(P)$ представляется единственным классом эквивалентности редуцированных слов.

Частным случаем универсальной группы предгруппы является свободное произведение с объединением.

Мы пришли к рассмотрению предгрупп, анализируя доказательство Ван-дер-Вардена [1948] закона ассоциативности для свободных произведений, определенных в терминах редуцированных слов. Предгруппы определяются требованиями, которые пред-

ставляются минимально необходимыми для проведения этого доказательства.

Подгруппы оказываются полезными при исследовании другой комбинаторной теоретико-групповой ситуации, а именно *биполярных структур*. Первоначально мы определили биполярные структуры для случая групп без кручения [1968], но, по-видимому, будет разумным определить это понятие заново так, чтобы охватить и случай периодических элементов.

Биполярная структура на группе G встречается, в частности, тогда, когда G можно представить в виде свободного произведения двух групп A и B с конечной объединенной подгруппой F . В этом случае элементы множества $G - F$ распадаются на четыре класса соответственно тому, начинается или кончается в A или в B содержащий их класс эквивалентности редуцированных слов в $A \cup B$. Мы можем аксиоматизировать эту ситуацию, грубо говоря, так. В группе G даны конечная подгруппа F и четыре подмножества, обозначаемые через EE , EE^* , E^*E , E^*E^* соответственно, которые все вместе следующим образом осуществляют разбиение группы G . Пусть X и Y означают E или E^* ; примем соглашение, что $E^{**} = E$. Тогда если $g \in XY$ и $a \in F$, то $ga \in XY$; если $g \in XY$ и $h \in Y^*Z$, то $gh \in XZ$; наконец, для любого $g \in G$ существует ограничение на длину представлений g в виде $g = g_1 g_2 \dots g_n$, где $g_i \in X_i X_{i+1}^*$. В общем случае мы должны допустить еще одно множество S , входящее в разбиение группы G , такое, что $F \cup S$ — подгруппа, в которой F имеет индекс один или два, и $ga \in XY^*$ для $g \in XY$ и $a \in S$.

Строение группы с биполярной структурой можно исследовать, замечая, что она является универсальной группой предгруппы, состоящей из $F \cup S \cup \{\text{неразложимые элементы}\}$. Неразложимый элемент здесь — это элемент из XY , который не может быть представлен в виде произведения элемента из XZ и элемента из Z^*Y . Эта предгруппа принадлежит к одному из трех типов, которые легко истолковываются как предгруппы, порождающие свободное произведение с объединением по конечной подгруппе или же приводящие к аналогичной ситуации, в которой группа G порождена подгруппой A и одним дополнительным элементом x с соотношениями, получающимися из некоторого вложения конечной подгруппы F группы A снова в A ; эти соотношения имеют вид $xfx^{-1} = \varphi(f)$.

Биполярную структуру мы называем *нетривиальной*, если существует хотя бы один элемент, принадлежащий EE^* . Теперь мы можем сформулировать наш главный теоретико-групповой результат.

1.В.6. *Каждая конечно порожденная группа с более чем одним концом имеет нетривиальную биполярную структуру и поэтому*

может быть описана как нетривиальное свободное произведение с объединенной подгруппой или как группа другого указанного выше типа. Обратно, любая группа с нетривиальной биполярной структурой имеет два или бесконечно много концов.

Далее, скажем несколько слов о графах.

Если Γ — локально конечный граф (т. е. одномерный комплекс), то мы можем рассмотреть некоторые кохомологические группы с простейшей группой коэффициентов $\mathbf{Z}_2$. Обычные (бесконечные) коцепи содержат в качестве коцепного подкомплекса конечные коцепи; именно в факторкомплексе $C_2^*(\Gamma)$ проявляются эффекты, связанные с «концами». В частности, $H_e^0(\Gamma)$ есть «группа концов», ранг которой как $\mathbf{Z}_2$ -модуля равен «числу концов» графа Γ . Можно заметить, что $H_e^0(\Gamma)$ на самом деле наследует структуру булевой алгебры от $C^0(\Gamma)$, т. е. алгебры подмножеств множества всех вершин из Γ .

«Пространство концов» является тогда с классической точки зрения пространством максимальных идеалов булевой алгебры $H_e^0(\Gamma)$.

Если G — конечно порожденная группа, порожденная множеством $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, то мы определяем граф Γ , отражающий эту ситуацию, как граф с вершинами в элементах группы G , причем вершины g и $t_i g$ связаны ребром (t_i, g) . Если определить A как G -модуль, состоящий из всех подмножеств группы G по модулю всех конечных подмножеств (роль операции сложения играет взятие симметрической разности), то $H_e^0(\Gamma) \approx H^0(G; A)$; это получает свою интерпретацию, как факт теории кохомологий групп. Поэтому концы графа Γ не зависят от T . Они будут называться концами группы G .

Если Γ — связный локально конечный граф с более чем одним концом, то существуют такие 0-коцепи Q с конечной кограницей δQ , что ни Q , ни дополнение Q^* не являются конечными. Среди этих коцепей Q есть такие, кограницы которых имеют наименьшее число элементов; такие коцепи будут называться узкими 0-коцепями. Узкие коцепи обладают некоторыми удобными свойствами решеток; в частности, для любой вершины v существует наименьшая узкая 0-коцепь, содержащая v . Для таких наименьших узких 0-коцепей Q имеет место следующий факт.

1.В.7. Если X — произвольная узкая коцепь, то по крайней мере одна из 0-коцепей $Q \cap X$, $Q \cap X^*$, $Q^* \cap X$, $Q^* \cap X^*$ конечна.

Это утверждение представляет собой решающий результат из теории графов, который получает применения в теории групп. Предположим, что Γ — граф группы G по отношению к некоторому конечному множеству образующих; G действует на Γ справа, и поэтому Qg — узкая коцепь всякий раз, когда

Q — узкая коцепь; применим сформулированный выше результат в случае $X = Qg$. Тогда для всякой заданной такой коцепи Q имеется шесть возможностей, когда хотя бы одно из множеств $Qg \cap Q$, $Qg \cap Q^*$, $Q^*g \cap Q$, $Q^*g \cap Q^*$ конечно. Если конечны второе и третье из этих множеств, то мы говорим, что $g \in F$. Если конечны первое и четвертое, то мы говорим, что $g \in S$. Если конечно только первое множество, мы говорим, что $g \in EE$. Если конечно только второе, то мы говорим, что $g \in EE^*$. Если конечно только третье множество, мы говорим, что $g \in E^*E$. Если конечно только четвертое, то мы говорим, что $g \in E^*E^*$.

Оказывается, если G имеет более двух концов, то это разбиение группы G дает нетривиальную биполярную структуру. Для случая когда G имеет точно два конца, строение группы выяснялось многими авторами, и из их работ, в частности, следует, что такая группа также имеет нетривиальную биполярную структуру.

Используя эти результаты, мы доказываем гипотезу Эйленберга и Гани [1957]:

1.В.8. *Любая конечно порожденная группа G когомологической размерности 1 является свободной.*

Недавно здесь было осуществлено дальнейшее продвижение Суоном [1969], показавшим, как можно освободиться от предположения о конечной порожденности группы.

Мы также устанавливаем следующий результат, высказанный в качестве гипотезы Серром [1965] и опять-таки обобщенный на случай бесконечно порожденных групп Суоном:

1.В.9. *Если конечно порожденная группа G не имеет нетривиальных элементов конечного порядка и содержит свободную подгруппу конечного индекса, то она сама свободна.*

Это — наиболее важный результат нашей работы, так как он формулируется с привлечением лишь простых теоретико-групповых понятий и в то же время влечет за собой тонкие комбинаторные факты. Для случая когда допускается существование элементов конечного порядка, структура группы G , имеющей свободную подгруппу конечного индекса, не выяснена пока сколько-нибудь полно.

Глава 2

ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

2.A. Теорема о петле и лемма Дена

Здесь мы кратко изложим основные результаты статьи Столлингса [1960].

2.A.1. Если V — компактное 3-многообразие и $H^1(V; \mathbb{Z}_2) = 0$ (это эквивалентно тому, что V не имеет связного двулистного накрытия), то каждая компонента связности края ∂V является 2-сферой.

Доказательство. По двойственности Пуанкаре $H_2(V, \partial V; \mathbb{Z}_2) \approx H^1(V; \mathbb{Z}_2) = 0$. По теореме об универсальных коэффициентах группа $H_1(V; \mathbb{Z}_2)$ двойственна группе $H^1(V; \mathbb{Z}_2)$ и, следовательно, является нулевой. Из точной гомологической последовательности вытекает тогда, что $H_1(\partial V; \mathbb{Z}_2) = 0$, откуда и следует утверждение леммы.

2.A.2. Пусть V — компактное 3-многообразие, $B \subset \partial V$ — некоторое 2-многообразие и N — собственная нормальная подгруппа группы $\pi_1(B)$; предположим, что V не имеет связного двулистного накрытия. Тогда существует такая 2-клетка $\Delta \subset V$, что $\partial \Delta \subset B$ и класс петли $\partial \Delta$ не принадлежит к группе N .

Доказательство. Так как в качестве образующих группы $\pi_1(B)$ можно взять петли в B без самопересечений, то по крайней мере одна из таких петель не представляет элемента из N ; согласно 2.A.1, такая петля ограничивает некоторую 2-клетку $\Delta \subset \partial V$.

2.A.3. Пусть $f: \Delta \rightarrow K$ — симплициальное отображение, где Δ — односвязный конечный комплекс, а $K = f(\Delta)$. Предположим, что заданы последовательности связных накрывающих пространств

$$p_i: L_{i+1} \rightarrow K_i, \quad \text{где } K_0 = K,$$

отображений

$$f_i: \Delta \rightarrow K_i \quad \text{с } f_i(\Delta) = K_i, \quad f_0 = f$$

и вложений

$$K_{i+1} \subset L_{i+1},$$

так что отображение f_{i+1} является поднятием отображения f_i (рис. 2.1). Тогда для достаточно больших n ситуация стабилизируется, т. е. p_n становится гомеоморфизмом.

Доказательство. Мы можем триангулировать все так, чтобы отображения p_i , f_i стали симплициальными. Определим сложность отображения f_i как количество симплексов в Δ минус количество симплексов в K_i . Так как f_i — симплициальное отображение, то это число всегда неотрицательно. Но для нетривиального p_i сложность f_{i+1} меньше, чем сложность f_i .

2.А.4. Пусть $p: V' \rightarrow V$ — двулистное накрытие компактного 3-многообразия и $B' \subset \partial V'$, $B \subset \partial V$ — такие 2-многообразия что $p(B') = B$. Пусть, далее, N — нормальная подгруппа группы $\pi_1(B)$, а $N' = (p|_{B'})_*^{-1}(N)$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(B')$, и пусть Δ' — это 2-клетка в V' с краем в B' , который представляет элемент группы $\pi_1(B')$, не принадлежащий N' . Тогда существует 2-клетка Δ в V с краем $\partial\Delta \subset B$, представляющим элемент группы $\pi_1(B)$, не принадлежащий N .

Доказательство. Слегка пошевелив отображение $p|_{\Delta'}$, добьемся того, чтобы особенностями $p(\Delta')$ были лишь двойные кривые; это можно сделать потому, что $p|_{\Delta'}$ — погружение, имеющее самое большее двойные точки ($p: V' \rightarrow V$ — двулистное накрытие). Тогда получаем четыре вида особых кривых. Прообразы этих кривых в Δ' изображены на рис. 2.2, причем точки, склеивающиеся друг с другом при отображении в $p(\Delta')$, обозначены одинаковыми буквами.

В каждом из этих случаев, разрезая Δ' и переклеивая, мы можем видоизменять Δ' и $p|_{\Delta'}$ так, чтобы сохранялись свойства: (а) $p(\partial\Delta')$ представляет элемент группы $\pi_1(B)$, не принадлежащий N ; (б) особенностями $p(\Delta')$ являются двойные кривые¹⁾.

¹⁾ Например, в первом случае мы можем вырезать оба диска и приклеить их снова, поменяв местами, так, чтобы отображение сохранилось на каждом из них. Затем нужно немного пошевелить отображение. — Прим. ред.

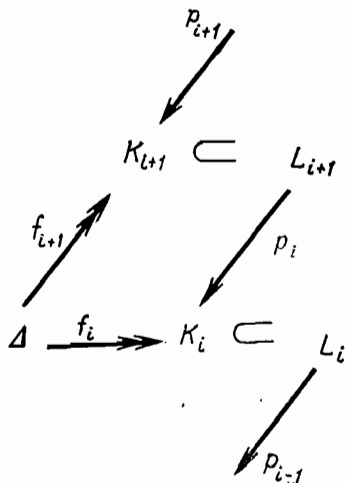


Рис. 2.1.

При этом количество двойных линий будет уменьшаться. Действуя таким способом, мы в конце концов получим нужную несингулярную 2-клетку Δ .

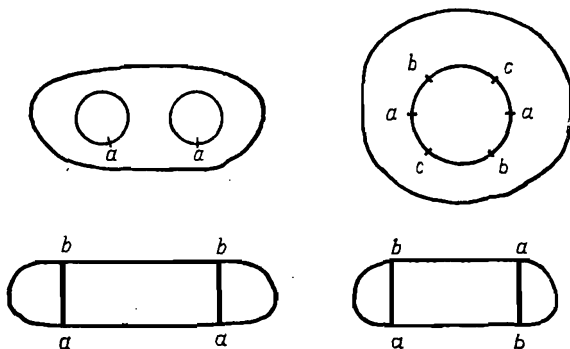


Рис. 2.2.

2.A.5. Теорема о петле — лемма Дена. Пусть M — некоторое 3-многообразие, B — некоторое 2-многообразие, лежащее в ∂M , а N — такая нормальная подгруппа группы $\pi_1(B)$, что

$$(\pi_1(B) - N) \cap \text{Ker}(\pi_1(B) \rightarrow \pi_1(M)) \neq \emptyset.$$

Тогда существует такая 2-клетка $\Delta \subset M$, что $\partial\Delta \subset B$ и петля $\partial\Delta$ представляет элемент группы $\pi_1(B)$, не принадлежащий N .

Доказательство. Мы начинаем с такого отображения $f: \Delta \rightarrow M$, что $f(\partial\Delta)$ представляет элемент из $\pi_1(B) - N$. Превратим отображение f в симплициальное, и пусть V будет регулярной окрестностью множества $f(\Delta)$ в M . Построим следующим образом башню двулистных накрытий над $f(\Delta)$ и, следовательно, над V . Положим $V_0 = V$, $f_0 = f$, $B_0 = B \cap V_0$, $N_0 = \{\alpha \in \pi_1(B_0): \alpha \text{ принадлежит } N \text{ в } \pi_1(B)\}$. Это нулевой этаж башни. Пусть $p_i: W_{i+1} \rightarrow V_i$ — некоторое двулистное накрытие V_i , f_{i+1} — поднятие f_i , V_{i+1} — регулярная окрестность $f_{i+1}(\Delta)$, $B_{i+1} = V_{i+1} \cap \pi_i^{-1}(B_i)$ и $N_{i+1} = \{\alpha \in \pi_1(B_{i+1}): p_{i*}\alpha \in N_i \text{ в } \pi_1(B_i)\}$.

По лемме 2.A.3 построение должно закончиться. По лемме 2.A.2 на самом верхнем этаже башни можно найти подходящую несингулярную 2-клетку. Используя лемму 2.A.4, эту несингулярную 2-клетку можно спустить через всю башню до нулевого этажа, что и даст нам клетку, существование которой требовалось доказать.

2.В. Лемма Кнезера и другие применения

Пусть T представляет собой двустороннее (т. е. цилиндрически вложенное) компактное 2-многообразие в 3-многообразии M . Предположим, что Δ — такая 2-клетка в M , что $\Delta \cap T = \partial\Delta$ — нестягиваемая петля в T . Можно расположить клетку Δ так, чтобы она содержалась во внутренности M , и найти подмножество M , гомеоморфное $\Delta \times (-1, +1)$, пересекающееся с T по $\partial\Delta \times (-1, +1)$ и содержащее клетку Δ в качестве $\Delta \times 0$. Пусть

$$T' = \left[T - \left(\partial\Delta \times \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right) \right) \right] \cup \left[\Delta \times \left\{ -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\} \right].$$

Многообразие T' называется *уменьшением* T вдоль Δ ; оно является результатом сферической перестройки многообразия T вдоль Δ (или перестройки T вдоль $\partial\Delta$, произведенной внутри M). Любому компактному 2-многообразию T мы можем приписать сложность

$$\Sigma (2 - \chi(T_i))^2,$$

где T_i — компоненты связности многообразия T , $\chi(T_i)$ — эйлерова характеристика многообразия T_i и суммирование производится по всем i . Легко доказать, что сложность T' меньше сложности T и, следовательно, термин «уменьшение» оправдан.

2.В.1. Лемма Кнезера. Пусть T — компактное двустороннее 2-многообразие, лежащее в 3-многообразии M . Тогда после конечной серии уменьшений вдоль 2-клеток Δ мы получим больше уже не уменьшаемое двустороннее многообразие T' . В этом случае для любой компоненты T'_i многообразия T' гомоморфизм $\pi_1(T'_i) \rightarrow \pi_1(M)$ инъективен.

Доказательство. Пусть $f: \partial\Delta \rightarrow T'_i$ — отображение, представляющее элемент ядра гомоморфизма $\pi_1(T'_i) \rightarrow \pi_1(M)$. Тогда f продолжается до отображения $f: \Delta \rightarrow M$. Используя двусторонность многообразия T' , легко добиться, чтобы $f^{-1}(T')$ состояло из конечного числа простых замкнутых кривых, в том числе $\partial\Delta$. Пусть C — самая внутренняя кривая в $f^{-1}(T')$; она ограничивает некоторую 2-клетку $D \subset \Delta$, для которой $D \cap f^{-1}(T') = C$. Тогда $f(C)$ содержится в некоторой компоненте T'_j многообразия T' . Если бы петля $f|C$ была не стягиваема на T'_j , то мы могли бы расщепить M вдоль T' и, применив к получившемуся многообразию теорему о петле и лемму Дена, найти 2-клетку, вдоль которой T'_j можно было бы уменьшить, что невозможно. Следовательно, петля $f|C$ стягиваема на T'_j и мы можем переопределить f так, чтобы оно отображало D в T'_j и совпадало

с прежним f на $\Delta - D$. Затем мы можем слегка подвигать полученное отображение и получить новое отображение g , для которого $g^{-1}(T') = f^{-1}(T') - C$.

Повторяя это рассуждение, мы приходим к такому отображению клетки Δ в T'_j , для которого $\partial\Delta$ становится самой внутренней кривой в $f^{-1}(T')$, причем это отображение является продолжением исходного отображения $f|_{\partial\Delta}$. Следовательно, любой элемент из ядра гомоморфизма $\pi_1(T'_i) \rightarrow \pi_1(M)$ тривиален.

Приводимое ниже полезное следствие леммы Кнезера или что-то в этом роде можно найти также в статье Фойстеля, которая должна скоро появиться ¹⁾.

2.В.2. Пусть X — топологическое пространство, содержащее цилиндрически вложенное подмножество A . Обозначим через $\tilde{X}$ пространство X , расщепленное вдоль A , и через A_1 и A_2 — два прообраза множества A в $\tilde{X}$. Предположим, что для всех базисных точек $\pi_2(X, A_1 \cup A_2) = 0$. Пусть, далее, M — компактное 3-многообразие и $f: M \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Тогда f гомотопна такому отображению $g: M \rightarrow X$, что $g^{-1}(A)$ представляет собой неуменьшаемое двустороннее 2-многообразие T в M , причем g отображает цилиндрическое расслоение некоторой окрестности T послойно в такое же расслоение некоторой окрестности A . В этой ситуации если гомоморфизм $f_*: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(X)$ инъективен, а T_i — любая компонента T , то и гомоморфизм $g_*: \pi_1(T_i) \rightarrow \pi_1(A)$ инъективен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение f можно изменить так, чтобы $f^{-1}(A)$ стало цилиндрически вложенным 2-многообразием. Уменьшив $f^{-1}(A)$ вдоль некоторой 2-клетки Δ . В силу того что $\pi_2(\tilde{X}, A_1 \cup A_2) = 0$ и в силу свойства распространения гомотопии с подкомплексов многообразия M , осуществляющее это уменьшение отображение можно выбрать гомотопным f . Следовательно, мы приходим к 2-многообразию $g^{-1}(A) = T$, где g гомотопна f , которое является цилиндрически вложенным и дальше уже неуменьшаемо.

На основании леммы Кнезера мы заключаем, что гомоморфизм $\pi_1(T_i) \rightarrow \pi_1(M)$ инъективен. А так как мы можем пропустить отображения $\pi_1(T_i) \rightarrow \pi_1(X)$ через $\pi_1(A)$, то если гомоморфизм $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(X)$ тоже инъективен, то инъективен и гомоморфизм $\pi_1(T_i) \rightarrow \pi_1(A)$.

2.В.3. Гипотеза Кнезера. Пусть M — компактное связное 3-многообразие с $\partial M = \emptyset$, а $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow A * B$ — гомоморфизм

¹⁾ Она появилась: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 217 (1976). — Прим. ред.

на свободное произведение, обладающий следующим свойством: любое двустороннее 2-многообразие T в M , для которого гомоморфизм $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(M)$ инъективен и $\varphi(\pi_1(T)) = \{1\}$, является 2-сферой. Тогда $M = M_A \cup M_B$, где $M_A \cap M_B$ представляет собой 2-сферу и $\varphi(\pi_1(M_A)) = A$, $\varphi(\pi_1(M_B)) = B$.

Доказательство. Начнем с того, что построим асферичные пространства K_A и K_B с фундаментальными группами A и B соответственно и соединим их отрезком прямой. Обозначим середину отрезка через p , а получившееся пространство — через X . Это пространство содержит цилиндрически вложенное подмножество $\{p\}$, и существует отображение $f: M \rightarrow X$, индуцирующее заданный гомоморфизм $\varphi: \pi_1(M) \rightarrow A * B \approx \pi_1(X)$.

Применим к этой ситуации утверждение 2.В.2, позаботившись при этом о том, чтобы уменьшения и гомотопии не трогали базисную точку многообразия M . Тогда получим, что отображение f гомотопно отображению g , такому, что $g^{-1}(p)$ представляет собой неуменьшаемое 2-многообразие T , которое по нашему предположению состоит из 2-сфер.

Теперь воспользуемся предположением о том, что φ — отображение на все $A * B$, чтобы осуществить некоторую одномерную перестройку на T . Если T имеет больше одной компоненты, то существует путь λ в M , концевые точки которого принадлежат различным компонентам многообразия T ; путь $g(\lambda)$ представляет некоторый элемент группы $A * B$, и поэтому если γ — петля в M с базисной точкой в начальной точке пути λ , которая отображается в элемент $[g(\lambda)]^{-1}$ группы $A * B$ (а такая петля γ существует в силу того, что φ — отображение на), то $g(\mu)$, где $\mu = \gamma\lambda$, является стягиваемой петлей в X и μ соединяет различные компоненты T . Расправляя, если нужно, петлю μ , мы можем записать ее в виде произведения путей: $\mu = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$, причем на T лежат лишь концевые точки путей α_i ; каждый путь $g_i(\alpha_i)$ представляет элемент либо из A , либо из B . Длину n пути μ можно уменьшить: (1) склеивая пути α_i и α_{i+1} в один путь, если оба эти пути принадлежат одновременно либо A , либо B ; (2) опуская путь α_i , если обе его концевые точки принадлежат одной и той же компоненте многообразия T и путь $g(\alpha_i)$ стягиваем. Так как концевые точки пути μ принадлежат различным компонентам многообразия T , то длина μ никогда не сведется к 0. Наконец, если длину μ уменьшить больше нельзя, то либо $g(\mu) = g(\alpha_1) \dots g(\alpha_n)$ является приведенным словом в $A * B$, что невозможно, так как $g(\mu) = 1$ и $n \geq 1$, либо некоторый путь $g(\alpha_i)$ стягиваем в X . Тогда путь α_i должен соединять различные компоненты многообразия T и отображаться весь в $X - \{p\}$, за исключением концевых точек.

Далее, аппроксимируем путь α_i каким-нибудь несингулярным путем, не проходящим через базисную точку многообразия M ; используя тот факт, что путь $g(\alpha_i)$ стягиваем в X , расщепленном вдоль $\{p\}$, и продолжение гомотопии в M , получим отображение $g': M \rightarrow X$, гомотопное g и такое, что $g'^{-1}(p)$ совпадает с $g^{-1}(p)$ повсюду, за исключением двух компонент множества $g^{-1}(p)$, которые теперь соединены трубкой. Эта процедура уменьшает число компонент множества $g^{-1}(p)$, так что в конечном счете мы получим такое отображение $h: M \rightarrow X$, гомотопное g и, следовательно, f , что $h^{-1}(p)$ есть связная сумма всех компонент множества $g^{-1}(p)$ и потому является 2-сферой.

Теперь возьмем в качестве M_A и M_B образы двух половин пространства X при отображении h^{-1} . Ясно, что при этом все утверждения теоремы будут выполнены.

Глава 3

КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП

3. А. Обобщение понятия свободного произведения групп с объединенной подгруппой (предгруппы и их универсальные группы)

В заметке [20] мы рассмотрели ситуацию, когда группа G обладает таким подмножеством P , что каждый ее элемент однозначно представляется редуцированным словом в P . Как выяснилось, такая группа G очень похожа на свободное произведение.

А что можно сказать, когда представление редуцированным словом является однозначным лишь по модулю некоторой эквивалентности, как это оказывается в теории свободных произведений с объединенной подгруппой? В этом параграфе мы вводим внутреннюю структуру подмножества P (которую мы называем «предгруппой») и, следуя методу Ван-дер-Вардена, доказываем, что универсальная группа этой структуры обладает нужным свойством.

Можно указать много интересных примеров предгрупп; все они чем-то похожи на свободные произведения с объединенной подгруппой, однако никакого простого способа построения всех их из обычных произведений с объединенной подгруппой не существует. Бэр [1950] описал бы предгруппу как «сложение», удовлетворяющее его постулатам I — VII и закону ассоциативности T .

3.А.1. Определения и формулировка основной теоремы

3.А.1.1. Определение. Предгруппа — это

- (а) некоторое множество P ;
- (б) некоторый элемент множества P , обозначаемый через 1 ;
- (с) некоторая функция $P \rightarrow P$, обозначаемая через $x \mapsto x^{-1}$;
- (д) некоторое подмножество D произведения $P \times P$;
- (е) некоторая функция $D \rightarrow P$, обозначаемая через $(x, y) \mapsto$

xu .

При этом должны выполняться следующие пять аксиом:

- (1) для всякого $x \in P$ пары $(1, x), (x, 1) \in D$ и $1x = x1 = x$;
- (2) для всякого $x \in P$ пары $(x, x^{-1}), (x^{-1}, x) \in D$ и $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$;

(3) для любых $x, y \in P$, если $(x, y) \in D$, то $(y^{-1}, x^{-1}) \in D$ и $(x, y)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$;

(4) для любых $x, y, z \in P$, если $(x, y), (y, z) \in D$, то $(x, yz) \in D$ тогда и только тогда, когда $(xy, z) \in D$, и в этом случае $x(yz) = (xy)z$;

(5) для любых $w, x, y, z \in P$, если $(w, x), (x, y), (y, z) \in D$, то либо $(w, xy) \in D$, либо $(xy, z) \in D$.

Вместо того чтобы говорить « (x, y) принадлежит D », мы часто будем говорить « xy определено».

3.A.1.2. Определение. Пусть P — предгруппа. Слово в P — это (упорядоченный) набор из n элементов, принадлежащих P , где $n \geq 1$, т. е. $(x_1, \dots, x_n)$. Число n называется *длиной слова*. Если для некоторого i определено $x_i x_{i+1}$, то слово $(x_1, \dots, x_n)$ можно *редуцировать*; при этом

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

называется одной из его *редукций*. Говорят, что слово *редуцировано*, если у него нет никаких редукций, т. е. для всех i мы имеем $(x_i, x_{i+1}) \notin D$. Каждое слово длины единица редуцировано.

Если $(x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_{n-1})$ — слова и если произведения $x_i a_i, a_i^{-1} x_i, a_{i-1}^{-1} x_i a_i$ ($a_0 = a_n = 1$) все определены, то мы определяем *прокладку*¹⁾ первого слова вторым словом как

$$(x_1, \dots, x_n) * (a_1, \dots, a_n) = (y_1, \dots, y_n),$$

где $y_i = a_{i-1}^{-1} x_i a_i$.

Ниже будут доказаны такие утверждения:

(1) Если слово X редуцировано и прокладка $X * A$ определена, то она редуцирована.

(2) Отношение $X \approx X * A$ на множестве редуцированных слов является отношением эквивалентности.

Для произвольного $a \in P$ и произвольного редуцированного слова $X = (x_1, \dots, x_n)$ определим $\lambda_a(X)$ следующим образом: если ax_1 не определено, то

$$\lambda_a(X) = (a, x_1, \dots, x_n);$$

если ax_1 определено, но $(ax_1)x_2$ не определено, то

$$\lambda_a(X) = (ax_1, \dots, x_n);$$

если определены как ax_1 , так и $(ax_1)x_2$, то

$$\lambda_a(X) = ((ax_1)x_2, x_3, \dots, x_n).$$

¹⁾ В оригинале interleaving (interleave — прокладывать, прослаивать). — Прим. ред.

(3) Если X редуцировано, то таково же и $\lambda_a(X)$.

(4) Если X редуцировано и ab определено, то

$$\lambda_{ab}(X) \approx \lambda_a(\lambda_b(X)),$$

где $\approx$ — отношение, определенное в (2).

(5) Функция λ_a индуцирует некоторое отображение на множестве классов эквивалентности редуцированных слов.

(6) Предгруппу P можно включить в некоторую универсальную группу $\bar{U}(P)$ таким образом, что каждый элемент $g \in \bar{U}(P)$ запишется в виде произведения

$$g = x_1 x_2 \dots x_n,$$

где $(x_1, \dots, x_n)$ — некоторое редуцированное слово в P , причем всякие два редуцированных слова, задающих один и тот же элемент g , эквивалентны.

Утверждение (6) — основная теорема; остальные утверждения представляют собой вспомогательные леммы по образцу доказательства Ван-дер-Вардена [1948] аналогичного результата для свободных произведений. Из основной теоремы вытекает как следствие тот факт, что каждая предгруппа точным образом содержится в своей универсальной группе.

Существует много примеров предгрупп; в частности, один из них дает свободное произведение с объединенной подгруппой, а другой — объект, который мы будем обозначать через $A_F \ast \varphi$. Имеются и более эксцентричные примеры. Перед тем как приводить все эти примеры, мы докажем саму теорему.

3.А.2. Леммы (1)–(3)

В этом и следующем пунктах мы предполагаем, что P — фиксированная предгруппа.

3.А.2.1. $(x^{-1})^{-1} = x$.

Доказательство. Применим аксиомы (4), (2) и (1) к произведению

$$xx^{-1}(x^{-1})^{-1}.$$

3.А.2.2. Если ax определено, то определено $a^{-1}(ax)$ и $a^{-1}(ax) = x$. Двойственным образом, если xa определено, то определено $(xa)a^{-1}$ и $(xa)a^{-1} = x$.

Доказательство. По аксиоме (2) $a^{-1}a$ определено и равно 1. Поэтому по аксиомам (4) и (1) $a^{-1}(ax)$ определено и равно $(a^{-1}a)x = x$. Двойственный случай рассматривается аналогично.

3.А.2.3. Если xa и $a^{-1}y$ определены, то xy определено тогда и только тогда, когда определено $(xa)(a^{-1}y)$, и в этом случае $xy = (xa)(a^{-1}y)$.

Доказательство. К произведению элементов x , a , $(a^{-1}y)$ применяем аксиому (4) и лемму 3.А.2.2.

3.А.2.4. Если xa и $a^{-1}y$ определены, то слово (x, y, z) редуцировано тогда и только тогда, когда редуцировано слово $(xa, a^{-1}y, z)$. Двойственным образом, слово (z, x, y) редуцировано тогда и только тогда, когда редуцировано слово $(z, xa, a^{-1}y)$.

Доказательство. Нам надо показать, что если слово (x, y, z) редуцировано, то слово $(a^{-1}y, z)$ не определено. Предположим, что $(a^{-1}y, z)$ определено, и рассмотрим $\{x, a, a^{-1}y, z\}$. По аксиоме (5) определено либо слово x ($a(a^{-1}y)$), либо слово a ($a^{-1}y$) (z слово $a(a^{-1}y)$ определено, в силу лемм 3.А.2.1 и 3.А.2.2). Так как $a(a^{-1}y) = y$, то в обоих случаях слово (x, y, z) не редуцировано. Следовательно, $(a^{-1}y, z)$ не определено, если (x, y, z) редуцировано; на основании 3.А.2.3 мы заключаем, что $(xa)(a^{-1}y)$ также не определено; поэтому $(xa, a^{-1}y, z)$ редуцировано.

Обратное и двойственное утверждения доказываются точно так же.

Можно показать, что аксиома (5) следует из аксиом (1) — (4) вместе с 3.А.2.4. Аксиомы (1) — (4) являются разумными и естественными, а лемму 3.А.2.4 мы хотим использовать для определения классов эквивалентности редуцированных слов. Поэтому нам и нужна аксиома (5).

3.А.2.5. Если слово (x, y) редуцировано и определены слова xa , $a^{-1}y$, yb , то определено и слово $(a^{-1}y) b$.

Доказательство. Если бы это было не так, то на основании леммы 3.А.2.3 слово $(xa, a^{-1}y, b)$ было бы редуцированным. Поэтому, в силу леммы 3.А.2.4, было бы редуцированным слово (x, y, b) в противоречие с тем, что слово yb определено.

3.А.2.6. Если слово (x, y) редуцировано и слова xa , $a^{-1}y$, $(xa) b$, $b^{-1}(a^{-1}y)$ определены, то определено слово ab .

Доказательство. Дважды воспользовавшись леммой 3.А.2.3, получим, что слово $((xa) b)(b^{-1}(a^{-1}y))$ не определено. Применим аксиому (5) к $\{x^{-1}, xa, b, b^{-1}(a^{-1}y)\}$; фигурирующие в этой аксиоме последовательные попарные произведения определены на основании леммы 3.А.2.2; произведение последней тройки не определено. Следовательно, по аксиоме (5) определено произведение первой тройки. Но по аксиоме (4) $x^{-1}((xa) b) = (x^{-1}(xa)) b = ab$ (последнее равенство имеет место в силу леммы 3.А.2.2).

3.А.2.7. Лемма (1). Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$ — некоторое редуцированное слово и $A = (a_1, \dots, a_{n-1})$ — произвольное слово. Положим $a_0 = a_n = 1$ и предположим, что слова $x_i a_i$ и $a_{i-1} x_i$

все определены. Тогда все слова $(a_{i-1}^{-1}x_i)$ a_i определены и слово $Y = X * A = (x_1a_1, a_1^{-1}x_2a_2, \dots, a_{n-1}^{-1}x_n)$ редуцировано.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяем леммы 3.A.2. 4 и 3.A.2.5 к подсловам слова X ; из леммы 3.A.2.5 следует, что слово $(a_{i-1}^{-1}x_i)$ a_i определено. На основании аксиомы (4) скобки можно опустить. По теореме 3.A.2.4 слово $X * A$ редуцировано.

3.A.2.8. Обозначения. Через R_n или $R_n(P)$ будем обозначать множество редуцированных слов в P длины n . Через P^{n-1} обозначим множество всех слов в P длины $n-1$. Если $A = (a_1, \dots, a_{n-1})$ и $B = (b_1, \dots, b_{n-1}) \in P^{n-1}$ и если слова a_ib_i определены для всех i , то через AB мы обозначаем слово $(a_1b_1, \dots, a_{n-1}b_{n-1})$.

3.A.2.9. Если $X \in R_n$, $A, B \in P^{n-1}$ и определены слова $X * A$ и $(X * A) * B$, то определено слово AB и

$$(X * A) * B = X * (AB).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя лемму 3.A.2.6 к подсловам слова X , получаем, что AB можно определить. То, что $(X * A) * B = X * (AB)$, следует из аксиом (4) и (3).

3.A.2.10. Определение. Определим отношение $\approx$ на R_n следующим образом:

$$(x_1, \dots, x_n) \approx (y_1, \dots, y_n)$$

тогда и только тогда, когда существует такое слово $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in P^{n-1}$, что все слова x_ia_i и $a_{i-1}^{-1}x_i$ определены и $y_i = a_{i-1}^{-1}x_ia_i$. Другими словами, $X \approx Y$ тогда и только тогда, когда существует такое слово A , что $Y = X * A$.

3.A.2.11. Лемма (2). Отношение $\approx$ является отношением эквивалентности на R_n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $I = (1, \dots, 1)$ имеем $X = X * I$, поэтому $X \approx X$. Если для $A = (a_1, \dots, a_{n-1})$ положить $A^{-1} = (a_1^{-1}, \dots, a_{n-1}^{-1})$, то ясно, что $Y = X * A$ тогда и только тогда, когда $X = Y * A^{-1}$; поэтому $X \approx Y$ влечет за собой $Y \approx X$. Пусть, наконец, $Y = X * A$ и $Z = Y * B$. Тогда по лемме 3.A.2.9 можно определить слово AB и $Z = X * (AB)$. Следовательно, если $X \approx Y$ и $Y \approx Z$, то $X \approx Z$.

3.A.2.12. Определение. Будем обозначать через R или $R(P)$ объединение всех R_n , $n = 1, 2, \dots$. Для каждого $a \in P$ и каждого $X \in R$ определим слово $\lambda_a(X)$ следующим образом. Пусть

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

(1) Если слово (a, x_1) редуцировано, то

$$\lambda_a(X) = (a, x_1, x_2, \dots).$$

(2) Если ax_1 определено, но (ax_1, x_2) редуцировано, то

$$\lambda_a(X) = (ax_1, x_2, x_3, \dots).$$

(3) Если ax_1 и $(ax_1)x_2$ определены, то

$$\lambda_a(X) = ((ax_1)x_2, x_3, \dots).$$

В (2) мы включаем в качестве вырожденного тот случай, когда слово ax_1 определено, а X имеет длину один.

3.А.2.13. Лемма (3). *Если слово X редуцировано, то редуцировано и слово $\lambda_a(X)$.*

Доказательство. В случаях (1) и (2) наше утверждение очевидно. В случае (3), когда слова ax_1 , $(ax_1)x_2$ определены, но слова x_1x_2 , x_2x_3 не определены, мы должны показать, что слово $((ax_1)x_2)x_3$ не определено. Предположим противное и применим аксиому (5) к $\{x_1, x_1^{-1}a^{-1}, (ax_1)x_2, x_3\}$ — это можно сделать, если $((ax_1)x_2)x_3$ определено. Мы получим, что из двух слов x_1x_2 и x_2x_3 хотя бы одно определено. Но это противоречит редуцированности слова X .

3.А.3. Лемма (4)

Здесь доказывается

3.А.3.1. Лемма (4). *Если слово X редуцировано, а слово ab определено, то $\lambda_{ab}(X) \approx \lambda_a(\lambda_b(X))$.*

Доказательство. Доказательство состоит в рассмотрении различных возможных случаев. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Случай 1. Слово bx_1 не определено. Тогда

$$\lambda_b(X) = (b, x_1, \dots, x_n).$$

Подслучай 1₁. Слово $(ab)x_1$ не определено. При применении λ_a мы находимся в ситуации 3.А.2.12(2). Поэтому

$$\lambda_a(\lambda_b(X)) = (ab, x_1, \dots, x_n) = \lambda_{ab}(X).$$

Подслучай 1₂. Слово $(ab)x_1$ не определено. Мы находимся в ситуации 3.А.2.12(3). Поэтому

$$\lambda_a(\lambda_b(X)) = ((ab)x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Из леммы 3.А.2.13 следует, что слово $((ab)x_1)x_2$ не определено; поэтому, применяя λ_{ab} к X , мы имеем случай 3.А.2.12(2); следовательно,

$$\lambda_{ab}(X) = ((ab)x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_a(\lambda_b(X)).$$

Случай 2. Слово bx_1 определено, но не определено слово $(bx_1)x_2$. Тогда

$$\lambda_b(X) = (bx_1, x_2, \dots, x_n).$$

Подслучай 2₁. Слово $a(bx_1)$ не определено. Тогда слово (a, bx_1) редуцировано. Поэтому, в силу леммы 3.А.2.3, также редуцировано слово $(ab, b^{-1}(bx_1)) = (ab, x_1)$. В этом случае

$$\lambda_a(\lambda_b(X)) = (a, bx_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\lambda_{ab}(X) = (ab, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Поэтому $\lambda_{ab}(X) = (\lambda_a(\lambda_b(X))) * (b, 1, \dots, 1)$.

Подслучай 2₂. Слово $a(bx_1)$ определено. Тогда определено также и слово $(ab)x_1$ и $(ab)x_1 = a(bx_1)$. Если $(abx_1)x_2$ не определено, то

$$\lambda_{ab}(X) = \lambda_a(\lambda_b(X)) = (abx_1, x_2, \dots, x_n).$$

Если $(abx_1)x_2$ определено, то

$$\lambda_{ab}(X) = \lambda_a(\lambda_b(X)) = ((abx_1)x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Случай 3. Слова bx_1 и $(bx_1)x_2$ определены. Тогда

$$\lambda_b(X) = ((bx_1)x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Подслучай 3₁. Слово $a(bx_1)$ не определено. Этот подслучай никогда не встречается. В самом деле, если бы слово $a(bx_1)$ было не определено, то не определено было бы и слово $(ab)x_1$, и мы имели бы

$$\lambda_{ab}(X) = (ab, x_1, \dots, x_n) \approx (a, bx_1, x_2, \dots, x_n).$$

Поэтому на основании леммы 3.А.2.4 слово $(bx_1)x_2$ не было бы определено в противоречие с предположением для случая 3.

Подслучай 3₂. Слово $a(bx_1)$ определено. Тогда слово $(ab)x_1$ определено и равно $a(bx_1)$.

Подподслучай 3₂₁. Слово $(abx_1)x_2$ не определено. Тогда не определено также и слово $a((bx_1)x_2)$. Следовательно,

$$\lambda_{ab}(X) = (abx_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\lambda_a(\lambda_b(X)) = (a, (bx_1)x_2, x_3, \dots, x_n)$$

и потому

$$\lambda_{ab}(X) = (\lambda_a(\lambda_b(X))) * (bx_1, 1, \dots, 1).$$

Подподслучай 3₂₂. Слово $(abx_1)x_2$ определено. Тогда определено слово $(a(bx_1))x_2 = a((bx_1)x_2)$ и

$$\lambda_{ab}(X) = ((abx_1)x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Значит, $((abx_1) x_2) x_3$ не определено, и потому

$$\lambda_a(\lambda_b(X)) = ((abx_1) x_2, x_3, \dots, x_n) = \lambda_{ab}(X).$$

Этим исчерпаны все возможные случаи, и, следовательно, лемма (4) доказана.

3.A.4. Лемма (5) и основная теорема

Для предгруппы P у нас имеется множество $R(P)$ всех редуцированных слов в P , на котором задано отношение эквивалентности $\approx$. Обозначим через $\tilde{R}(P)$ множество классов $\approx$ -эквивалентности.

3.A.4.1. Лемма (5). Для всех $a \in P$ отображение $\lambda_a: R(P) \rightarrow R(P)$ индуцирует отображение $\tilde{R}(P) \rightarrow \tilde{R}(P)$, также обозначаемое через λ_a .

Доказательство. Нам надо показать, что если $Y = X * B$, то $\lambda_a(X) \approx \lambda_a(Y)$. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_{n-1})$. Возможны три случая.

(1) Слово ax_1 не определено. В этом случае

$$\lambda_a(Y) = (\lambda_a(X)) * B',$$

где

$$B' = (1, b_1, \dots, b_{n-1}).$$

(2) Слово ax_1 определено, но $(ax_1) x_2$ не определено. В этом случае

$$\lambda_a(Y) = (\lambda_a(X)) * B.$$

(3) Слова x_1 и $(ax_1) x_2$ оба определены. В этом случае

$$\lambda_a(Y) = (\lambda_a(X)) * B'',$$

где

$$B'' = (b_2, \dots, b_{n-1}).$$

Приведенные формулы устанавливаются так. В каждом из случаев мы выписываем слово $\lambda_a(X)$; выражение в правой части доказываемой формулы определяет некоторое редуцированное слово, исследуя которое, мы убеждаемся, что это как раз $\lambda_a(Y)$. Например, в наиболее трудном случае (3)

$$\lambda_a(X) = ((ax_1) x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Произведение $(ax_1) x_2 b_2$ определено, в силу утверждения, двойственного лемме 3.A.2.5, так как (x_2, x_3) редуцировано, $x_2 b_2$ и $b_2^{-1} x_2$ определены и $(ax_1) x_2$ определено. Аналогично, $ax_1 b_1$ определено. Следовательно,

$$(ax_1 b_1) b_1^{-1} x_2 b_2 = (ay_1) y_2$$

определено на основании леммы 3.А.2.3, и потому мы имеем

$$\begin{aligned}\lambda_a(X) * B'' &= ((ax_1) x_2 b_2, b_2^{-1} x_3, b_3, \dots, b_{n-1}^{-1} x_n) = \\ &= ((ax_1 b_1) b_1^{-1} x_2 b_2, \dots, b_{n-1}^{-1} x_n) = \\ &= ((ay_1) y_2, \dots, y_n) = \lambda_a(Y).\end{aligned}$$

3.А.4.2. Определение. Пусть P и Q — предгруппы. Функция $\varphi: P \rightarrow Q$ называется *морфизмом предгрупп* (или *предгрупповым морфизмом*), если для всех $x, y \in P$, для которых xy определено, определено $\varphi(x)\varphi(y)$ и $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Класс предгрупп с предгрупповыми морфизмами представляет собой расширение категории групп и гомоморфизмов. На основании «абстрактной чепухи» (теорема о сопряженном функторе) существует функтор, косопряженный функтору включения. Это дает нам *универсальную группу* $U(P)$ произвольной предгруппы P , т. е. для всякой предгруппы P существуют такая группа $U(P)$ и такой специальный (предгрупповой) морфизм $\iota: P \rightarrow U(P)$, что для каждой группы G и всякого морфизма $\varphi: P \rightarrow G$ существует единственный гомоморфизм (групп) $\psi: U(P) \rightarrow G$, такой, что $\varphi = \psi \circ \iota$.

3.А.4.3. Пусть S — группа перестановок множества $\tilde{R}(P)$. Тогда λ — морфизм предгруппы P в S .

Доказательство. Так как λ_1 — тождественное отображение $\tilde{R}(P)$ на себя и $\lambda_x \circ \lambda_{x^{-1}} = \lambda_{x^{-1}} \circ \lambda_x = \lambda_1$, ввиду леммы 3.А.3.1, то каждое λ_x принадлежит S . Следовательно, можно переформулировать лемму 3.А.3.1, сказав, что λ является морфизмом.

3.А.4.4. В силу свойства универсальности, λ единственным образом распространяется до гомоморфизма, также обозначаемого через λ , группы $U(P)$ в S . Значение λ на $g \in U(P)$ мы будем обозначать через $\lambda_g: \tilde{R}(P) \rightarrow \tilde{R}(P)$.

Так как $\iota(P)$ порождает $U(P)$, то каждое $g \in U(P)$ может быть записано в виде $g = \iota(x_1)\iota(x_2) \dots \iota(x_n)$, где $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — некоторое слово в P . После применения редукций к этому слову мы получаем редуцированное слово $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, такое, что

$$g = \iota(x_1)\iota(x_2) \dots \iota(x_n).$$

Обозначим через Λ слово (1) длины один. Имеет место формула

$$\lambda_g([\Lambda]) = \lambda_{x_1}(\lambda_{x_2}(\dots(\lambda_{x_n}([\Lambda])) \dots)) = [(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

Здесь $[\cdot]$ обозначает класс $\approx$ -эквивалентности. Каждое применение λ_{x_i} относится к случаю 3.А.2.12(1).

Таким образом, g определяет класс редуцированных слов, который представляет g .

3.А.4.5. Теорема. *Каждый элемент g универсальной группы $U(P)$ предгруппы P может быть представлен произведением $x_1 x_2 \dots x_n$ для некоторого редуцированного слова $(x_1, \dots, x_n)$ в P . Два таких редуцированных слова представляют один и тот же элемент группы $U(P)$ тогда и только тогда, когда они $\approx$ -эквивалентны. (Здесь мы, чтобы упростить обозначения, отождествили $x \in P$ с $\iota(x) \in U(P)$.)*

Доказательство. Утверждение «только тогда» мы только что доказали. Утверждение «тогда» устанавливается тривиальным вычислением: если $g = x_1 x_2 \dots x_n$, то $g = (x_1 a_1) (a_1^{-1} x_2 a_2) \dots (a_{n-1}^{-1} x_n)$.

3.А.4.6. Следствие. *Всякая предгруппа P точным образом содержится в своей универсальной группе $U(P)$.*

Это значит, что специальный морфизм $\iota: P \rightarrow U(P)$ является инъективным. Это следует из теоремы, так как ни одно слово длины 1 не эквивалентно никакому другому слову.

3.А.5. Примеры

3.А.5.1. Самый стандартный пример предгруппы получается так. Возьмем три группы A, B, C и два мопоморфизма $\varphi: C \rightarrow A$, $\psi: C \rightarrow B$ и отождествим $\varphi(C)$ с $\psi(C)$; тогда $A \cap B = C$. Положим $P = A \cup B$. Что такое элемент 1 и обратные элементы, очевидно; произведение двух элементов x и y определено тогда и только тогда, когда они оба принадлежат либо A , либо B . Ясно, что все аксиомы (1) — (4) удовлетворяются. Что касается аксиомы (5), то здесь дело сводится к рассмотрению ряда простых случаев, в каждом из которых ее справедливость легко устанавливается. Универсальная группа этой предгруппы — не что иное, как свободное произведение с объединением $A *_C B$.

3.А.5.2. Вот подобный, но более общий случай. *Дерево групп* определяется заданием

(а) некоторого частично упорядоченного множества I (с отношением порядка, обозначаемым символом $<$), имеющего наименьший элемент и такого, что для всех $i, j, k \in I$, если $i \leq k$ и $j \leq k$, то либо $i \leq j$, либо $j \leq i$ (такое упорядоченное множество представляет собой некую разновидность абстрактного дерева);

(б) некоторого класса групп $\{G_i\}$, индексированного элементами $i \in I$;

(в) для любых $i, j \in I$, таких, что $i < j$, — некоторого мономорфизма $\varphi_{ij}: G_i \rightarrow G_j$.

Эта структура должна удовлетворять следующему условию: для всех $i, j, k \in I$, если $i < j < k$, то

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}: G_i \rightarrow G_k.$$

Как и в предыдущем примере, мы можем сконструировать предгруппу P , взяв в качестве нее объединение всех $\{G_i\}$, в котором производится отождествление элементов $x \in G_i$ и $\varphi_{ij}(x) \in G_j$. Читатель может проверить, что, в силу указанных свойств дерева, P является предгруппой с очевидными операциями. Универсальные группы таких предгрупп включают в себя все обычные свободные произведения с объединением, в которых объединение происходит по многим группам.

3.А.5.3. Рассмотрим некоторое свободное произведение с объединением $A *_c B$. Пусть P — подмножество всех таких элементов, которые можно записать в виде bab' для некоторых $b, b' \in B$ и $a \in A$; следовательно, P содержит A, B и сверх того еще другие элементы. Скажем, что произведение xu двух элементов $x, y \in P$ определено, если $xu \in P$. Используя структуру (определенную при помощи редуцированных слов в $A \cup B$ и т. д.) $A *_c B$, можно доказать, что P — предгруппа. Универсальной группой предгруппы P является снова $A *_c B$; но структура $A *_c B$, определенная посредством слов в P , отличается от структуры, определенной посредством $A \cup B$.

3.А.5.4. Рассмотрим некоторую группу G с подгруппой H . Пусть P как множество совпадает с G , а произведение x и y определено тогда и только тогда, когда по крайней мере один из элементов $\{x, y, xy\}$ принадлежит подгруппе H . Тогда P — предгруппа, и ее универсальная группа не очень-то похожа на свободное произведение с объединенной подгруппой.

3.А.5.5. Пусть G — некоторая группа, H — ее подгруппа и $\varphi: H \rightarrow G$ — некоторый мономорфизм. Построим четыре множества, элементы каждого из которых находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы G :

$$G, x^{-1}G, Gx, x^{-1}Gx.$$

Отождествим $h \in H \subset G$ с $x^{-1}\varphi(h)x \in x^{-1}Gx$. Определим умножение между G и G, G и $Gx, x^{-1}G$ и $G, x^{-1}G$ и Gx, Gx и $x^{-1}G, Gx$ и $x^{-1}Gx, x^{-1}Gx$ и $x^{-1}G, x^{-1}Gx$ и $x^{-1}Gx$ посредством сокращения xx^{-1} и умножения в G . Формулы

$$hx^{-1} = x^{-1}\varphi(h) \quad \text{и} \quad xh = \varphi(h)x,$$

вытекающие из отождествления H и $x^{-1}\varphi(H)x$, определяют произведение во всех случаях, когда один из сомножителей принадлежит H . Это чудовище является предгруппой, универсальную группу которой мы будем обозначать через $G_H \leftarrow \varphi$.

3.В. Биполярные структуры и конечные подгруппы, по которым происходит объединение

Сейчас мы рассмотрим некую комбинаторную теоретико-групповую структуру, более конкретную, чем та, которой мы занимались в предыдущем параграфе. Она доставляет обобщение понятия свободного произведения с конечной объединенной подгруппой.

3.В.1. *Биполярная структура* на группе G — это разбиение ее на шесть не пересекающихся между собой множеств

$$F, S, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*,$$

удовлетворяющих аксиомам, перечисленным ниже. Пусть X, Y, Z означают E или E^* , причем если $X = E$ или E^* , то $X^* = E^*$ или E соответственно. Аксиомы таковы:

1. F — некоторая конечная подгруппа группы G .
2. $F \cup S$ — некоторая подгруппа группы G , в которой F имеет индекс 1 или 2.
3. Если $f \in F$, а $g \in XY$, то $gf \in XY$.
4. Если $s \in S$, а $g \in XY$, то $gs \in XY^*$.
5. Если $g \in XY$, то $g^{-1} \in XY$.
6. Если $g \in XY$, а $h \in Y^*Z$, то $gh \in XZ$.
7. Для каждого элемента $g \in G$ найдется такое число $N(g)$, что для всякого представления этого элемента в виде $g = g_1 g_2 \dots g_n$, где $g_i \in X_{i-1}^* X_i$ для некоторых $X_0, X_1, \dots, X_n$, обязательно $n \leq N(g)$.
8. $EE^* \neq \emptyset$.

В какой-то степени аксиомы 7 и 8 необязательны в том смысле, что многое может быть доказано и без них. В аксиоме 7 заключено условие порождаемости группы G «неприводимыми» элементами, а аксиома 8 обеспечивает некоторого рода нетривиальность.

Элементы подгруппы F являются, так сказать, стабилизаторами структуры, а элементы из множества S , которое может быть и пустым, — инволюциями.

3.В.2. Говорят, что элемент $p \in G$ *неприводим*, если либо $p \in F \cup S$, либо $p \in XY$ и при этом p нельзя записать в виде $p = gh$, где $g \in XZ$, а $h \in Z^*Y$. Другими словами, элемент p неприводим, если аксиома 7 выполняется при $N(p) = 1$.

3.В.2.1. *Каждый элемент группы G представим в виде произведения конечного числа неприводимых элементов.*

Это следует из аксиом 7 и 6.

3.В.2.2. *Если $g \in XY$, $p \in YZ$ и p — неприводимый элемент, то либо $gp \in F \cup S$, либо $gp \in XW$ для некоторого W .*

Доказательство. Есть лишь одна возможность, отличная от указанных в формулировке утверждения, а именно $gr \in X^*W$. Тогда по аксиоме 5 $g^{-1} \in YX$. Так как $p = (g^{-1})(gp)$, то по определению элемент p не может быть неприводимым.

3.В.2.3. Двойственным образом, если $g \in XY$, $p \in ZX$ и p неприводим, то $pg \in WY$ для некоторого W или $pg \in F \cup S$.

3.В.2.4. Если элементы $p \in XY$ и $q \in YZ$ оба неприводимы, то элемент pq лежит в $F \cup S \cup XZ$ и неприводим. Если $pq \in F \cup S$, то $pq \in F$, когда $X = Z$, и $pq \in S$, когда $X = Z^*$.

Доказательство. Если $pq \in F$, то, в силу аксиом 5 и 3, $q = p^{-1}(pq) \in YX$ и поэтому $X = Z$. Все остальные утверждения нашего предложения, за исключением неприводимости элемента pq , уже доказаны в 3.В.2.2 и 3.В.2.3. Если элемент pq не является неприводимым, то он принадлежит XZ и $pq = gh$, где $g \in XW$ и $h \in W^*Z$ для некоторого W . Тогда $p = g(hg^{-1})$ и по аксиоме 5 и предложению 3.В.2.3 $hg^{-1} \in W^*U$ для некоторого U или $hg^{-1} \in F \cup S$. Так как p неприводим, то не может случиться, чтобы $hg^{-1} \in W^*U$. Если $hq \in F$, то из аксиомы 3, примененной к $p = g(hq^{-1})$, и аксиом 1, 3 и 5, примененных к $q = [h^{-1}(hq^{-1})]^{-1}$, следует, что $p \in XW$ и $q \in W^*Z$, а это противоречит тому, что $p \in XY$, $q \in YZ$. С другой стороны, если $hq^{-1} \in S$, то, применяя аксиомы 1, 4 и 5 к тем же произведениям, видим, что $p \in XW^*$ и $q \in WZ$, что снова приводит к противоречию. Следовательно, произведение pq должно быть неприводимым.

3.В.2.5. Если $p \in XY$, $q \in F \cup S$ и элемент p неприводим, то произведение pq неприводимо.

Доказательство вполне аналогично доказательству предложения 3.В.2.4.

3.В.2.6. Если элемент p неприводим, то неприводим и элемент p^{-1} .

3.В.2.7. Если a, b, c, ab, bc неприводимы и $b \notin F \cup S$, то произведение abc неприводимо.

Доказательство. Если $b \in XY$, то, в силу 3.В.2.4 и 3.В.2.5, либо $ab \in F \cup S$, либо $ab \in ZY$. Если $ab \in F \cup S$, то, согласно 3.В.2.5 и 3.В.2.6, произведение abc неприводимо. Если $ab \in ZY$ и $c \in F \cup S$, то abc неприводимо, ввиду 3.В.2.5, а если $ab \in ZY$ и $c \notin F \cup S$, то мы должны иметь $c \in YW$, так как bc неприводимо; в этом случае, чтобы установить неприводимость abc , мы применяем 3.В.2.4, учитывая, что $ab \in ZY$.

3.В.2.8. Если элементы a, b, c, d, ab, bc, cd неприводимы, то либо abc , либо bcd неприводимо.

Действительно, согласно 3.В.2.7, в противном случае и b и c принадлежали бы $F \cup S$, так что $bc \in F \cup S$, а тогда, в силу 3.В.2.5 и 3.В.2.6, abc и bcd оба неприводимы.

3.В.3.

3.В.3.1. Пусть множество P состоит из неприводимых элементов группы G , а D — из таких упорядоченных пар $(a, b) \in P \times P$, что произведение a на b в группе G принадлежит P , т. е. $ab \in P$. Тогда множество P с той же единицей и той же операцией взятия обратного элемента, что и в G , и с той же операцией умножения, что и в G , но только суженной на D , является предгруппой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это легко следует из того факта, что G — группа, и из предложений 3.В.2.6 и 3.В.2.8.

Теперь мы можем говорить о редуцированных словах в предгруппе P ; оказывается, что слово $(p_1, \dots, p_n)$ при $n > 1$ редуцировано тогда и только тогда, когда существуют такие $X_0, X_1, \dots, X_n$, что $p_i \in X_{i-1}^* X_i$.

3.В.3.2. Пусть $(p_1, \dots, p_n)$ и $(q_1, \dots, q_n)$ — два таких редуцированных слова в P , что

$$p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_n.$$

Тогда $m = n$ и существуют такие $c_1, \dots, c_{n-1} \in F \cup S$, что $q_i = c_{i-1}^{-1} p_i c_i$ для всех i (где $c_0 = c_n = 1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $n \leq m$, и докажем предложение индукцией по n .

Если $n = 1$, то должно быть также $m = 1$, так как элемент $p_1 = q_1 q_2 \dots q_m$ неприводим; при этом $p_1 = q_1$.

В случае $n \geq 2$, если $p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n = q_1 q_2 \dots q_m = g$, то $g \in XY$ для некоторых X и Y и потому $p_n \in UY$, $q_m \in VY$ для некоторых U и V , а значит, $q_m p_n^{-1} \in VU$ или $F \cup S$ и $q_m p_n^{-1}$ неприводимо. Согласно 3.В.2.4, если $q_m p_n^{-1} \in VU$, то $(q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m p_n^{-1})$ — все еще редуцированное слово, так как $q_{m-1} \in WV^*$; поэтому

$$p_1 p_2 \dots p_{n-1} = q_1 q_2 \dots q_{m-1} (q_m p_n^{-1}),$$

и, следовательно, по индукции $n - 1 = m$ в противоречие с предположением, что $n \leq m$.

Таким образом, $q_m p_n^{-1} \in F \cup S$; значит, слово $(q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m p_n^{-1})$ редуцировано; следовательно, по индукции $n - 1 = m - 1$, и существуют такие $c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in F \cup S$, что

$$q_i = c_{i-1}^{-1} p_i c_i \quad \text{для } i < n - 1,$$

$$q_{n-1} (q_n p_n^{-1}) = c_{n-2}^{-1} p_{n-1}.$$

По определению $c_{n-1} = (q_n p_n^{-1})^{-1} = p_n q_n^{-1}$, чем шаг индукции и завершен.

3.В.3.3. *Группа G является универсальной группой предгруппы P неприводимых элементов в биполярной структуре.*

Это следует из 3.В.3.2 и 3.В.2.1.

3.В.4. Пусть на группе G задана некоторая биполярная структура. Полагаем по определению

$$G_1 = F \cup \{\text{неприводимые элементы из } EE\},$$

$$G_2 = F \cup \{\text{неприводимые элементы из } E^*E^*\}.$$

3.В.4.1. G_1 и G_2 являются подгруппами группы G .

Это следует из аксиом 1, 3, 5, предложения 3.В.2.4 и того наблюдения, что если $x, y \in EE$, то xy не принадлежит S (действительно, в противном случае, согласно аксиомам 5 и 4, элемент $y = x^{-1}(xy)$ принадлежал бы EE^*).

3.В.4.2. Если $S \neq \emptyset$, то $G = \{F \cup S\} *_F G_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s \in S$. Тогда неприводимые элементы биполярной структуры образуют множества

$$G_1 \subset F \cup EE, \quad sG_1 \subset S \cup E^*E,$$

$$G_1s \subset S \cup EE^*, \quad sG_1s = G_2 \subset F \cup E^*E^*.$$

Сравнивая с примером 3.А.5.3, мы видим, что наша предгруппа неприводимых элементов изоморфна предгруппе этого примера, где вместо A и B следует взять G_1 и $F \cup S$ соответственно. Следовательно, универсальная группа представляет собой свободное произведение с объединенной подгруппой.

3.В.4.3. Если $S = \emptyset$ и в EE^* нет неприводимых элементов, то $G = G_1 *_F G_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В этом случае предгруппа неприводимых элементов есть просто $G_1 \cup G_2$, и мы по существу оказываемся в ситуации примера 3.А.5.1.

3.В.4.4. Если $S = \emptyset$ и в EE^* существует неприводимый элемент t , то $tFt^{-1} \subset G_1$, и если отображение $\varphi: F \rightarrow G_1$ определено правилом $f \mapsto tft^{-1}$, то $G = G_{1F} \xleftarrow{\varphi} \varphi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in F$, то по аксиоме 3 и предложению 3.В.2.5 элемент tf неприводим в EE^* и потому, в силу 3.В.2.4, элемент $(tf)t^{-1}$ неприводим в EE и принадлежит F , а следовательно, принадлежит G_1 . Мы можем построить из t и G_1 целую предгруппу неприводимых элементов; так, например, если $x \in E^*E$, то $tx \in G_1 \subset F \cup EE$ и потому $x = t^{-1}(tx)$; неприводимые

элементы образуют тогда множества

$$G_1 \subset F \cup EE, \quad t^{-1}G_1 \subset E^*E,$$

$$G_1t \subset EE^*, \quad t^{-1}G_1t = G_2 \subset F \cup E^*E^*.$$

Эти четыре множества попарно не пересекаются, за одним исключением: $G_1 \cap t^{-1}G_1t = F = t^{-1}(\varphi(F))t$.

Сравнивая с примером 3.А.5.5, видим, что наша предгруппа в точности изоморфна описанной там предгруппе; следовательно, универсальной группой G будет, как мы ее там обозначили, $G_{1F} \leftarrow \varphi$.

3.В.5. Если группа G снабжена биполярной структурой, удовлетворяющей аксиоме 8 (аксиоме нетривиальности), то эту группу можно представить в одном из двух видов

$$A *_F B \text{ либо } A_F \leftarrow \varphi,$$

где F — некоторая конечная подгруппа группы G , причем в первом случае группа F является собственным подмножеством как в A , так и в B .

Доказательство. Это — итог результатов пункта 3.В.4. Если бы, скажем, $F = B$ в первом случае, то $G = A$ и, в силу 3.В.4.2 и 3.В.4.4, группа G должна была бы состоять только либо из $F \cup S$, либо из $F \cup EE$; в обоих случаях $EE^* = \emptyset$, в противоречие с аксиомой 8.

3.В.6. Топологическое замечание. Пусть K_A и K_B — комплексы с фундаментальными группами A и B соответственно, пересекающиеся по некоторому связному подкомплексу с фундаментальной группой $F = A \cap B$. По теореме Зейферта [1931] — ван Кампена [1933] фундаментальная группа комплекса $K_A \cup K_B$ равна $A *_F B$.

Если K_A содержит два изоморфных подкомплекса K_F и K'_F с фундаментальными группами F и $\varphi(F)$ соответственно и мы приклеиваем к комплексу K_A цилиндр $K_F \times [0, 1]$, отождествляя K_F с $K_F \times 0$, а K'_F с $K_F \times 1$, то мы получим комплекс с фундаментальной группой $A_F \leftarrow \varphi$. Это также следует из теоремы Зейферта — ван Кампена.

Таким образом, комбинаторная ситуация биполярной структуры до некоторой степени аналогична топологической ситуации. Эта топологическая картинка очень полезна для интуиции. Для случая $S \neq \emptyset$ соответствующая картинка несколько сложнее и включает в себя приклейку цилиндра отображения некоторого связного пространства, являющегося двулистным накрытием другого. Интересно было бы исследовать, при каких видах отождествления получаются пространства, фундаментальные группы которых имеют естественные структуры, аналогичные биполярным.

Глава 4

ТЕОРИЯ КОНЦОВ

4.А. Концы групп

К теории концов можно подходить либо с комбинаторной, либо с топологической точки зрения. Здесь мы выбираем первый подход.

4.А.1. Пусть G — некоторая группа. Через $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}(G)$ мы обозначаем булеву алгебру всех подмножеств группы G . При этом $A + B$ обозначает симметрическую разность A и B , AB — их пересечение. (Здесь можно перепутать пересечение и множество всех произведений ab в G . В данном параграфе под AB всегда понимается пересечение.) Далее, 1 обозначает саму группу G — единичный элемент алгебры $\mathcal{A}$, а 0 — пустое множество $\emptyset$; $A^* = 1 + A = = G \setminus A$ — обозначение для дополнения. На $\mathcal{A}$ имеются совместимые друг с другом левое и правое действия группы G , являющиеся автоморфизмами алгебры $\mathcal{A}$.

4.А.2. Для $g \in G$ пусть $\nabla_g(A) = A + gA$. Мы можем выписать для этой простой операции несколько правил:

$$\begin{aligned}\nabla_g(A + B) &= \nabla_g(A) + \nabla_g(B), \\ \nabla_g(AB) &= \nabla_g(A)B + (gA)\nabla_g(B), \\ \nabla_g(1) &= \nabla_g(0) = 0, \\ \nabla_g(Ah) &= \nabla_g(A)h, \\ \nabla_g(hA) &= h\nabla_{h^{-1}gh}(A), \\ \nabla_{g^{-1}}(A) &= g^{-1}\nabla_g(A), \\ \nabla_{gh}(A) &= \nabla_g(A) + g\nabla_h(A), \\ \nabla_g(A) &= 0 \text{ для всех } g \Rightarrow A = 0 \text{ или } A = 1.\end{aligned}$$

4.А.3. Обозначим через $\mathcal{F}$ подмножество алгебры $\mathcal{A}$, состоящее из всех конечных подмножеств группы G . Множество $\mathcal{F}$ есть идеал в $\mathcal{A}$, замкнутый относительно лево- и правостороннего действия группы G на $\mathcal{A}$ и относительно операции ∇_g для всех g .

Обозначим, далее, через $Q(G)$ или просто Q множество всех $A \in \mathcal{A}$, таких, что $\nabla_g(A) \in \mathcal{F}$ для всех $g \in G$. Из свойств операции

∇_g следует, что Q — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{F}$, и что алгебра Q замкнута относительно левого и правого действий группы G .

Пусть $\mathcal{E}(G)$ или просто $\mathcal{E}$ обозначает факторалгебру $Q(G)/\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{E}$ — булева алгебра с правым действием группы G ; индуцированное левое действие группы G на $\mathcal{E}$ тривиально; фактически $\mathcal{E}$ является как раз подгруппой в $\mathcal{A}/\mathcal{F}$, инвариантной относительно действия группы G слева.

Структурная теорема для булевых алгебр утверждает, что E — пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{E}$ — является 0-мерным компактным хаусдорфовым пространством и что алгебру $\mathcal{E}$ можно отождествить с классом открыто-замкнутых подмножеств в E . Пространство E называется *пространством концов группы G* ; *числом концов* называется при этом (все бесконечные числа отождествляются) размерность $\mathcal{E}$ как векторного пространства над $GF(2)$.

4.А.4. Пусть T — любое множество, порождающее группу G . Из свойств, перечисленных в пункте 4.А.2, следует, что алгебру $Q(G)$ можно определить лишь в терминах множества T . А именно:

$$Q(G) = \{A \in \mathcal{A} : \nabla_t(A) \in \mathcal{F} \text{ для всех } t \in T\}.$$

Граф группы G по отношению ко множеству T , обозначаемый через $\Gamma(G, T)$, состоит из двух множеств $\Gamma_0 = G$, $\Gamma_1 = T \times G$ и двух функций $v_1, v_2: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$, определяемых формулами $v_1(t, g) = g$, $v_2(t, g) = tg$. Множество T порождает G тогда и только тогда, когда граф Γ связан. Группа G действует справа на графе Γ .

Посмотрим на коцепи mod 2 графа Γ . Нульмерные коцепи можно отождествить с элементами алгебры $\mathcal{A}(G)$. Кограница некоторой такой 0-коцепи A на ребре (t, g) принимает значение, равное 0, если g и tg принадлежат одновременно либо A , либо A^* , и значение, равное 1, в противном случае. Таким образом,

$$\delta A = \{(t, g) : g \in \nabla_{t^{-1}}(A)\}.$$

Отсюда следует, что в случае, когда T — конечное множество, $A \in Q(G)$ тогда и только тогда, когда δA конечно.

4.А.5. Теперь мы хотели бы сказать несколько слов, относящихся к локально конечным графам Γ вообще. Пусть $Q(\Gamma)$ — множество 0-коцепей A , кограница δA которых конечна, и $\mathcal{E}(\Gamma)$ — булева алгебра $Q(\Gamma)$ (конечные 0-коцепи); под *концом графа Γ* понимается максимальный идеал в $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Таким образом, в том случае, когда граф является графом группы по отношению к некоторому конечному порождающему ее множеству, можно отождествить концы группы и концы графа.

4.А.6. В этом пункте мы перечислим более или менее классические теоремы о концах групп, см. Фрейденталь [1945], Хопф [1943]. При этом мы используем абстрактное определение, не делая, если специально не оговорено противное, никаких предположений относительно конечной порожденности. Потом мы приведем доказательства.

4.А.6.1. Если N — конечная нормальная подгруппа группы G , то $\mathcal{E}(G) \approx \mathcal{E}(G/N)$.

4.А.6.2. Если H — подгруппа конечного индекса в G , то $\mathcal{E}(G) \approx \mathcal{E}(H)$.

4.А.6.3. Если G содержит некоторую конечно порожденную бесконечную нормальную подгруппу H бесконечного индекса в G , то $\mathcal{E}(G) \approx \mathbb{Z}_2$ (т. е. G имеет один конец).

4.А.6.4. Пусть существуют такие $A \in \mathcal{E}(G)$, $A \neq 0$, $A \neq 1$, и бесконечное число таких элементов $g \in G$, что $Ag = A$. Тогда если группа G конечно порожденная, то G имеет два конца.

4.А.6.5. Если G — конечно порожденная группа с двумя концами, то существует такая конечная нормальная подгруппа N , что группа G/N либо бесконечная циклическая, либо изоморфна $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (бесконечная диэдральная группа).

4.А.6.6. Если G — свободное произведение с конечной объединенной подгруппой, $G = A *_F B$, где F является собственной подгруппой как в A , так и в B , причем индекс группы в B не меньше 3, то G имеет бесконечно много концов. Также если $G = A_F \leftarrow \varphi$, где F — собственная конечная подгруппа в A , то G имеет бесконечно много концов.

4.А.7. Доказательства

Доказательство теоремы 4.А.6.1. [N — конечная нормальная подгруппа в $G \Rightarrow \mathcal{E}(G) \approx \mathcal{E}(G/N)$.]

Пусть $\varphi: G \rightarrow G/N$ — естественный гомоморфизм факторизации. Для $A \subset G/N$ положим $f(A) = \varphi^{-1}(A) \subset G$. Тогда f индуцирует отображения $\mathcal{A}(G/N) \rightarrow \mathcal{A}(G)$, $\mathcal{F}(G/N) \rightarrow \mathcal{F}(G)$, $Q(G/N) \rightarrow Q(G)$ и $\mathcal{E}(G/N) \rightarrow \mathcal{E}(G)$. Пусть H — множество представителей в G классов смежности из G/N , содержащее $1 \in N$. Для $B \subset G$ положим $s(B) = \varphi(B \cap H)$; отображение s задает отображения на всех уровнях, в частности задает отображение $\mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{E}(G/N)$. Единственное, что здесь не совсем очевидно, это что $\nabla_h(\varphi(B \cap H))$ конечно для всех $h \in G/N$, если $\nabla_g(B)$ конечно для всех $g \in G$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим $B' = \varphi^{-1}(\varphi(B))$; это некоторое объединение классов смежности по N . Если $\nabla_g(B')$

конечно для всех g , то, как легко видеть, $\nabla_h (\varphi (B' \cap H))$ конечно для всех h . Но

$$\begin{aligned} B' + B &= \varphi^{-1}(\varphi(B)) \setminus B = \bigcup_{n \in N} \{nB\} \setminus B \subset \\ &\subset \bigcup_{n \in N} \{nB\} \setminus \bigcap_{n \in N} \{nB\} = \bigcup_{n \in N} \{(B + nB)\} = \bigcup_{n \in N} \{(\nabla_n B)\}, \end{aligned}$$

последнее же множество конечно. В этих вычислениях мы использовали следующее тождество, имеющее место в любой булевой алгебре:

$$\bigcup_{i=1}^k (A + B_i) = A \cup \bigcup_{i=1}^k \{B_i\} \setminus A \cap \bigcap_{i=1}^k \{B_i\}.$$

Таким образом, B' отличается от B на некоторое конечное множество, и потому если $B \in Q(G)$, то и $B' \in Q(G)$.

Располагая теперь отображением s из $\mathcal{E}(G)$ в $\mathcal{E}(G/N)$, мы замечаем, что отображение sf (т. е. $A \rightarrow \varphi^{-1}(A) \rightarrow \varphi(H \cap \varphi^{-1}(A))$) тождественное и что для множеств вида B' отображение fs (т. е. $B' \rightarrow \varphi(H \cap B') \rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(H \cap B'))$) тождественное. Следовательно, на уровне $\mathcal{E}$, где каждый элемент множества $\mathcal{E}(G)$ представляется посредством B' , f и s — взаимно обратные отображения.

Доказательство теоремы 4.А.6.2. [$H \subset G$, $[G : H] < \infty \Rightarrow \mathcal{E}(G) \approx \mathcal{E}(H)$.]

Лемма. Это верно при дополнительном предположении, что H — нормальная подгруппа в G .

Пусть $A \subset G$; отображение $f: \mathcal{A}(G) \rightarrow \mathcal{A}(H)$, определенное формулой $f(A) = A \cap H$, индуцирует отображения на всех уровнях и, в частности, индуцирует отображение из $\mathcal{E}(G)$ в $\mathcal{E}(H)$. Пусть $\{g_1, \dots, g_n\}$ — представители классов смежности H_g с $g_1 = 1$; для $B \subset H$ положим $s(B) = g_1 B \cup \dots \cup g_n B \subset G$. Ясно, что s индуцирует отображение $\mathcal{A}(H) \rightarrow \mathcal{A}(G)$, при котором $f(s(B)) = B$; остается доказать, что s индуцирует отображение на уровне $\mathcal{E}$ и что $sf(A) + A$ конечно для $A \in Q(G)$. Этим будет показано, что на уровне $\mathcal{E}$ отображения s и f являются взаимно обратными.

Пусть $B \in Q(H)$, так что для всех $h \in H$ множество $\nabla_h(B)$ конечно; имеем

$$\begin{aligned} \nabla_g(s(B)) &= \nabla_g(g_1 B + \dots + g_n B) = \\ &= \sum_{i=1}^n (g_i B + g_{\tau(i)} h_i B) = \sum_{i=1}^n g_{\tau(i)} \nabla_{h_i}(B), \end{aligned}$$

где $gg_i = g_{\tau(i)} h_i$, $h_i \in H$ и τ — некоторая перестановка множества $\{1, \dots, n\}$.

Так как $\nabla_{h_i}(B)$ конечно для всех h_i , то множество $\nabla_g(s(B))$ конечно. Проведенное выше вычисление показывает, что s индуцирует отображение $\mathcal{E}(H) \rightarrow \mathcal{E}(G)$.

Для всякого $A \in Q(G)$ имеем

$$\begin{aligned} sf(A) + A &= s(A \cap H) + A = \sum_{i=1}^n g_i(A \cap H) + A \cap \sum_{i=1}^n g_i H = \\ &= \sum_{i=1}^n (g_i A + A) \cap (g_i H) = \sum_{i=1}^n \nabla_{g_i}(A) \cap (g_i H), \end{aligned}$$

что представляет собой конечное множество. Отсюда вытекает, что sf индуцирует на $\mathcal{E}(G)$ тождественное отображение. Тем самым лемма доказана.

Теперь докажем саму теорему 4.А.6.2. Пусть H — подгруппа конечного индекса в G . Обозначим через K пересечение всех классов, сопряженных с H . Подгруппа K — тоже конечного индекса в G (фактически $[G:K] \leq [G:H]!$) и нормальна в G . Значит, K — нормальная подгруппа группы H . По лемме $\mathcal{E}(G) \approx \mathcal{E}(K)$ и $\mathcal{E}(H) \approx \mathcal{E}(K)$; таким образом, $\mathcal{E}(G) \approx \mathcal{E}(H)$.

Доказательство теоремы 4.А.6.3. [H — нормальная бесконечная конечно порожденная подгруппа в G , $[G:H] = \infty \Rightarrow \mathcal{E}(G) = \mathbb{Z}_2$.]

Пусть $A \in Q(G)$. Надо показать, что A или A^* конечно.

Пусть $T = \{h_1, \dots, h_n\}$ — какое-нибудь конечное множество образующих группы H , а S — какое-нибудь множество представителей классов смежности из G/H . Для $s \in S$ положим $A_s = A \cap (Hs)$. Тогда для $h_i \in T$ имеем

$$\nabla_{h_i}(A) = \bigcup_{s \in S} \nabla_{h_i}(A_s),$$

а так как $A \in Q(G)$, то мы заключаем, что для всех s , кроме конечного числа,

$$\nabla_{h_i}(A_s) = \emptyset.$$

Следовательно, для всех s , кроме конечного числа, и для всех $h_i \in T$

$$\nabla_{h_i}(A_s) = \emptyset;$$

в этом случае $(A_s)s^{-1} \subset H$, и для всех $h_i \in T$ имеет место формула

$$\nabla_{h_i}(A_s)s^{-1} = 0.$$

Используя последнее правило пункта 4.А.2 и вычисления пункта 4.А.4, получаем $(A_s)s^{-1} = \emptyset$ или $= H$. Следовательно, для всех $s \in S$, кроме конечного числа, имеем $A_s = \emptyset$ или $A_s = Hs$; в частности, существует такое $s \in S$, что $A_s = \emptyset$ или $A_s = Hs$.

Если $A_s = \emptyset$ для некоторого s , а для некоторого другого s' множество $A_{s'}$ бесконечно, то множество

$$\nabla_{s's^{-1}}(A) = A + s's^{-1}A$$

пересекается с $s'H$ по $A'_s + s's^{-1}A_s = A'_s$ и, значит, бесконечно, что противоречит условию $A \in Q(G)$. Поэтому если $A_s = \emptyset$ для некоторого s , то $A_s = \emptyset$ для всех s , кроме конечного числа, и конечно для остальных s . Таким образом, A конечно.

Аналогично, если $A = Hs$ для некоторого s , то, применяя приведенное выше рассуждение к A^* , получим, что A^* конечно.

Замечание к теореме 4.A.6.3. Эту теорему можно применять к группам G , не являющимся конечно порожденными. Например, если Q — аддитивная группа рациональных чисел, являющаяся расширением группы целых чисел (конечно порожденной бесконечной нормальной подгруппы) с бесконечной факторгруппой, то $\mathcal{E}(Q) \approx \mathbb{Z}_2$. Поэтому мы могли бы получить результат типа следующего. Пусть A — такое подмножество группы Q , что для всех n множество

$$A + \frac{1}{n!}$$

отличается от A лишь на некоторое конечное множество; тогда либо само A конечно, либо $Q - A$ конечно.

Тем самым одновременно дается пример группы с одним концом, являющейся прямым пределом групп с двумя концами.

Можно рассмотреть и другие специфические случаи бесконечно порожденных групп. Для аддитивной группы $G = \mathbb{Z}_n^\infty$ рациональных чисел $\bmod 1$, знаменатель которых можно представить в виде степени n , при $n > 2$ нетривиальный элемент алгебры $\mathcal{E}(G)$ можно описать при помощи элемента $A \in Q(G)$, состоящего из всех элементов группы G , которые могут быть записаны в виде

$$\frac{a}{n^k}, \text{ где } a \equiv 1 \pmod{n}.$$

Легко доказать, что множества

$$A \text{ и } A + \frac{1}{n^s}$$

отличаются на конечное множество, так как множество

$$\left\{ \frac{1}{n^s} \right\}$$

порождает G . Отсюда следует, что $A \in Q(G)$, и кроме того очевидно, что и A и A^* — бесконечные множества.

Обобщая сказанное, можно получить в этом примере, что группа $\mathbb{Z}_n^\infty$ имеет бесконечно много концов. Такого рода группы дают

нам контрпримеры, показывающие, что условие конечной порожденности в теоремах 4.А.6.3, 4.А.6.4 и 5.А.10 опустить нельзя.

Доказательство теоремы 4.А.6.4. [G конечно порождена, $A \in \mathcal{E}(G)$ — петривиальный элемент, существует бесконечное множество элементов $g \in G$, таких, что $Ag = A \Rightarrow G$ имеет два конца.]

Элемент A представляется в $Q(G)$ некоторым элементом, также именуемым A , таким, что ни A , ни A^* не являются конечными и для бесконечного множества элементов g множество $Ag + A$ конечно.

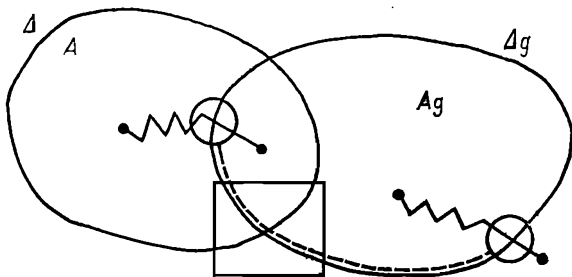


Рис. 4.1.

Рассмотрим граф Γ группы G по отношению к какому-нибудь конечному множеству образующих; поскольку $A \in Q$, то δA конечно. Поэтому существует некоторый конечный связный подграф Δ графа Γ , содержащий все ребра из δA .

Пусть Γ_A — граф, состоящий из Δ , всех вершин из A и всех ребер, вершины которых лежат в A или в Δ . Граф Γ_A связан, так как в противном случае существовало бы собственное подмножество множества A с пустой кограницей.

Поскольку группа G действует свободно на графе Γ , существует лишь конечное число таких элементов $g \in G$, для которых $\Delta \cap \Delta g \neq \emptyset$. Следовательно, существует такой элемент $g \in G$, что $A + Ag$ конечно и $\Delta \cap \Delta g = \emptyset$; для этого элемента g множества $A - Ag$ и $Ag - A$ не могут быть оба непустыми (рис. 4.1).

Рассуждения, при помощи которых устанавливается этот факт, основаны на геометрических соображениях. Как $A \cap Ag$, так и $A^* \cap A^*g$ должны быть бесконечными множествами и, следовательно, непусты. Если $A - Ag \neq \emptyset$, то в Γ_A существует некоторый путь, соединяющий точки из $A - Ag$ и $A \cap Ag$ и, следовательно, пересекающий $\delta Ag \subset \Delta g$. Место пересечения лежит внутри A . Аналогичное рассуждение показывает, что если $Ag - A \neq \emptyset$, то некоторая часть Δg лежит внутри A^* . Путь, соединяющий эти две части в связном множестве Δg , пересекает $\delta A \subset \Delta$, и, следовательно, $\Delta \cap \Delta g$ не должно быть пустым.

Итак, либо $A \subset Ag$, либо $Ag \subset A$. Рассматривая, если нужно, g^{-1} , можно считать, что $A \subset Ag$; далее, так как $\Delta \cap \Delta g = \emptyset$, то $\delta A \cap \delta Ag = \emptyset$. Пусть $B = Ag - A$; это множество конечно. Положим

$$C = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} Bg^n.$$

Легко видеть, что $\delta C = \emptyset$. Отсюда следует, что $C = G$.

Пусть теперь D — произвольный элемент из $Q(G)$. Так как δD конечно, существует такое число k , что все вершины некоторого конечного связного графа Δ' , содержащего δD , лежат в

$$C_k = \bigcup_{n=-k}^{+k} Bg^n.$$

Рассуждения, аналогичные тем, в которых фигурировали A и Ag , показывают, что существуют четыре возможности:

$D \subset C_k$, так что D конечно;

$D^* \subset C_k$, так что D^* конечно;

$Ag^{-k} \subset D$ и $D - Ag^{-k}$ конечно, так что $D + A = D + Ag^{-k} + (Ag^{-k} + A)$ конечно;

$A^*g^{k+1} \subset D$ и $D - A^*g^{k+1}$ конечно, так что $D + A^*$ конечно.

Таким образом, элемент из $Q(G)$ может представлять лишь один из четырех элементов алгебры $\mathcal{E}(G)$ и G имеет точно два конца.

Замечание к теореме 4.А.6.4. Если рассмотреть $\mathcal{E}(G)$ как множество, на котором действует группа G , и предположить, что группа G имеет больше двух концов и конечно порождена, то теорема 4.А.6.4 говорит нам, что для любого нетривиального элемента из $\mathcal{E}(G)$ его группа изотропии I конечна. Поэтому орбита любого нетривиального элемента, которая находится во взаимно однозначном соответствии с классами смежности из G/I , бесконечна. Отсюда вытекает, что $\mathcal{E}(G)$ бесконечно и что G действует на $\mathcal{E}(G)$ существенно нетривиальным образом. Таким образом, мы получаем теорему о том, что конечно порожденная группа с более чем двумя концами имеет бесконечно много концов.

Доказательство теоремы 4.А.6.5. [G конечно порождена и имеет два конца $\Rightarrow$ существует конечная нормальная подгруппа $N \subset G$, такая, что $G/N \approx \mathbb{Z}$ или $\approx \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.]

Пусть A — такой элемент из $Q(G)$, что множества A и A^* оба бесконечны. Для всякого $g \in G$ либо $Ag + A$, либо $Ag + A^*$ конечно. Множество H тех элементов $g \in G$, для которых $Ag + A$ конечно, является подгруппой индекса 1 или 2 в G .

Определим отображение $\varphi: H \rightarrow \mathbf{Z}$ следующим образом. Пусть отображение $f: G \rightarrow \mathbf{Z}$ таково, что $f(g) = 1$ для $g \in A$ и $f(g) = 0$ для $g \in A^*$. Далее, для $g \in H$ пусть $f_g(a) = 1$, если $a \in Ag$, и $= 0$, если $a \in A^*g$. Положим

$$\varphi(h) = \int (f_h - f),$$

т. е. $\varphi(h)$ — это количество элементов во множестве Ah — A минус количество элементов во множестве $A - Ah$. Замечая, что $f_{hg} - f_g$ представляет собой сдвиг элемента $f_h - f$ на элемент g и потому имеет тот же самый интеграл, так что

$$\varphi(hg) = \int (f_{hg} - f) = \int (f_{hg} - f_g) + \int (f_g - f) = \varphi(h) + \varphi(g),$$

видим, что φ — гомоморфизм. Используя рассуждение, примененное при доказательстве теоремы 4.А.6.4, получаем, что ядро N отображения φ конечно, и потому φ есть гомоморфизм на бесконечную циклическую подгруппу группы $\mathbf{Z}$.

Если H имеет индекс 2 в G , то отображение φ можно распространить на конечную диэдральную группу, используя то обстоятельство, что $Ag \equiv A^*$ по модулю конечных множеств.

4.А.8. Некоторые вычисления и доказательство теоремы 4.А.6.6

Для подсчета числа концов удобнее всего работать с группами, снабженными биполярной структурой.

Пусть G — такая группа и $\{F, S, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}$ — ее биполярная структура. По аксиоме нетривиальности $EE^* \neq \emptyset$, в силу аксиомы 5 $E^*E \neq \emptyset$, и из аксиомы 6 следует, что EE^* и E^*E бесконечны.

Положим $A = EE \cup E^*E$. Тогда A и $A^* = G - A$ бесконечны. Пусть g — произвольный неприводимый элемент биполярной структуры. Если $g \in F \cup S$, то, ввиду аксиом 3 и 4, $gA = A$. В остальных случаях, в силу 3.В.2.2 и 3.В.2.3,

$$gA \subset A \cup F \cup S,$$

и так как элемент g^{-1} также неприводим, то

$$g^{-1}A \subset A \cup F \cup S,$$

так что

$$A \subset gA \cup g(F \cup S).$$

Таким образом,

$$gA - A \subset F \cup S \quad \text{и} \quad A - gA \subset g(F \cup S).$$

Следовательно, $\nabla_g(A) = A + gA \subset F \cup S \cup g(F \cup S)$ конечно для всех неприводимых элементов g . Поскольку группа G поро-

ждается своими неприводимыми элементами, то, согласно 4.А.4, $A \in Q(G)$, а так как, кроме того, A и A^* бесконечны, то A представляет нетривиальный элемент алгебры $\mathcal{E}(G)$. Итак:

4.А.8.1. Если у группы G имеется биполярная структура, то G имеет более чем один конец.

Пусть G_2 — подгруппа группы G , образованная элементами объединения $F \cup \{\text{неприводимые элементы множества } E^*E^*\}$. Если мы предположим, что F имеет индекс ≥ 3 в G_2 , то найдутся такие элементы $a, b \in G_2 - F$, что $ab^{-1} \notin F$. Рассмотрим, как выше, $A = EE \cup E^*E$; множества A, Aa, Ab являются непересекающимися элементами из $Q(G)$ и, следовательно, представляют собой три различных нетривиальных элемента из $\mathcal{E}(G)$. Сопоставляя этот факт с теоремой 4.А.6.4, получаем:

4.А.8.2. Если группа G снабжена биполярной структурой и F имеет индекс ≥ 3 в G_1 , то у G бесконечно много концов.

Примерно такие же вычисления можно проделать в случае, когда $S = \emptyset$, EE^* содержит неприводимый элемент x и $G_2 - F$ содержит некоторый элемент a . В этом случае xa — неприводимый элемент из EE^* и множества $Ax^{-1}, Aa^{-1}x^{-1}$ и A^* не пересекаются. Следовательно, как и раньше, G имеет бесконечно много концов.

4.А.8.3. Если G имеет биполярную структуру, $S = \emptyset$, F — подгруппа индекса ≥ 2 в G_2 и EE^* содержит некоторый неприводимый элемент, то у G бесконечно много концов.

Опишем теперь некоторые частные случаи биполярных структур.

(i) Пусть $G = G_1 *_F G_2$, где F — конечная группа, содержащаяся собственным образом как в G_1 , так и в G_2 . Тогда G — универсальная группа предгруппы $G_1 \cup G_2$. Рассмотрим слова этой предгруппы. Пусть X и Y обозначают E или E^* ; предположим, что XY состоит из всех элементов группы G , представляемых такими редуцированными словами $(x_1, \dots, x_n)$ в $G_1 \cup G_2$, что

если $X = E$, то $x_1 \in G_1 - F$,
 если $X = E^*$, то $x_1 \in G_2 - F$,
 если $Y = E$, то $x_n \in G_1 - F$,
 если $Y = E^*$, то $x_n \in G_2 - F$.

Легко проверить, что получающаяся в результате структура является биполярной структурой на G с $S = \emptyset$.

(ii) Пусть $G = G_{1F} \leftarrow \rightarrow \varphi$, где F — некоторая конечная подгруппа группы G_1 . Тогда G — универсальная группа предгруппы P , состоящей из $G_1, xG_1, G_1x^{-1}, xG_1x^{-1}$, где F отождествляется с $x\varphi(F)x^{-1}$. Введем биполярную структуру, считая, что XY состо-

ит из элементов, представленных редуцированными словами $(u_1, \dots, u_n)$ в P , причем

$$\begin{aligned} \text{если } X = F, \quad & \text{то } u_1 \in (xG_1x^{-1} - F) \cup xG_1, \\ \text{если } X = E^*, \quad & \text{то } u_1 \in (G_1 - F) \cup G_1x^{-1}, \\ \text{если } Y = E, \quad & \text{то } u_n \in (xG_1x^{-1} - F) \cup G_1x^{-1}, \\ \text{если } Y = E^*, \quad & \text{то } u_n \in (G_1 - F) \cup xG_1. \end{aligned}$$

Этим также задается биполярная структура с $S = \emptyset$.

Конечно порожденные группы с двумя концами были охарактеризованы теоремой 4.А.6.5. А именно, для таких групп возможны следующие два случая:

(i) $G = G_1 *_F G_2$, где F — подгруппа индекса 2 как в G_1 , так и в G_2 . Это тот случай, когда G имеет конечную нормальную подгруппу F , факторгруппа по которой $Z_2 * Z_2$. Эта последняя группа имеет бесконечную циклическую подгруппу индекса 2; ясно, что эта бесконечная циклическая группа имеет два конца, и потому на основании теорем 4.А.6.1 и 4.А.6.2 любая группа рассматриваемого вида имеет два конца.

(ii) $G = F_F \leftarrow \varphi$, где группа F конечна и φ — некоторый ее автоморфизм. Это тот случай, когда G имеет конечную нормальную подгруппу F с бесконечной циклической факторгруппой. Каждая такая группа имеет два конца.

Теперь мы знаем, сколько в точности будет иметь концов группа G , если ее можно представить в виде $G = G_1 *_F G_2$ или $G = G_{1F} \leftarrow \varphi$. Если она непосредственно подпадает под один из двух предыдущих случаев, то у нее два конца; если же нет, то соответствующая биполярная структура удовлетворяет предположениям теоремы 4.А.8.2 или 4.А.8.3 и потому G имеет бесконечно много концов.

В частности, этим завершается доказательство теоремы 4.А.6.6.

4.В. Результаты, относящиеся к теории графов

Граф Γ — это пара множеств Γ_0 и Γ_1 — множества *вершин* и множества *ребер* соответственно — и пара функций $v_1, v_2: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$, задающих для каждого ребра соответственно начальную и конечную вершины. Говорят, что граф Γ *локально конечен*, если отображения v_1 и v_2 обладают тем свойством, что прообраз каждого элемента из Γ_0 есть конечное множество.

Типичный пример графа — граф некоторой группы G по отношению к некоторому множеству $T \subset G$. Здесь $\Gamma_0 = G$, $\Gamma_1 = T \times G$, $v_1(t, g) = g$, $v_2(t, g) = tg$. Этот граф Γ локально конечен, если T — конечное множество, и связан (в очевидном смысле), если T порождает G .

Булеву алгебру всех подмножеств множества Γ_0 будем обозначать через $\mathcal{A}(\Gamma)$; пересечение обозначается через AB . Группу всех подмножеств множества Γ_1 с операцией взятия симметрической разности будем обозначать через $\mathcal{B}(\Gamma)$; если нам понадобится иметь дело с пересечением двух подмножеств из Γ_1 , то мы будем писать $X \cap Y$, поскольку мы не будем рассматривать $\mathcal{B}(\Gamma)$ как булеву алгебру.

Для любых $A \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $X \in \mathcal{B}(\Gamma)$ полагаем по определению

$$AX = \{e \in X: v_1(e) \in A\},$$

$$XA = \{e \in X: v_2(e) \in A\}.$$

Это — элементы из $\mathcal{B}(\Gamma)$; справедливы законы ассоциативности и дистрибутивности для ABX , AXB , XAB , $(A + B)X$, $A(X + Y)$, $X(A + B)$, $(X + Y)A$, где $A, B \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $X, Y \in \mathcal{B}(\Gamma)$.

Само множество Γ_0 мы обозначаем через $1 \in \mathcal{A}(\Gamma)$. Справедливы правила $1A = A1 = A$, $1X = X1 = X$. Наконец, $A^* = 1 + A$ обозначает дополнение к A .

Для $A \in \mathcal{A}(\Gamma)$ определим $\delta A \subset \mathcal{B}(\Gamma)$ формулой

$$\delta A = A\Gamma_1 + \Gamma_1 A.$$

Выполняются правила

$$\delta(A + B) = \delta A + \delta B,$$

$$\delta(AB) = (\delta A)B + A(\delta B),$$

$$\delta(A^*) = \delta A.$$

Говорят, что элемент $A \in \mathcal{A}(\Gamma)$ *связан*, если для всякого представления $A = B + C$ с $BC = 0$ и $B \neq 0 \neq C$ мы имеем $(\delta B) \cap (\delta C) \neq 0$. Это эквивалентно существованию некоторого связного подграфа графа Γ с множеством вершин A .

Весь граф Γ связан тогда и только тогда, когда связан элемент 1 , а это в свою очередь имеет место тогда и только тогда, когда из $\delta A = 0$ следует, что $A = 0$ или $A = 1$.

4.B.1. Если $A, B \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $0 \neq A \subset B$, $\delta A \subset \delta B$ и B связано, то $A = B$.

Доказательство. Имеем $B = A + (A + B)$, и так как $A \subset B$, то $A(A + B) = 0$. Следовательно, если $A + B \neq 0$, то $\delta A \cap \delta(A + B) \neq 0$, но это противоречит тому, что $\delta A \subset \delta B$.

Обозначим через $Q(\Gamma)$ множество тех $A \in \mathcal{A}(\Gamma)$, для которых δA конечно. Ясно, что $Q(\Gamma)$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}(\Gamma)$. Будем обозначать через $|\delta A|$ число элементов в δA . Пусть M — подгруппа группы $\mathcal{B}(\Gamma)$, состоящая из всех δA , для конечных A . Вспомня определение концов графа (см. § 4.A), мы видим, что

если граф Γ имеет более чем один конец, то M заведомо меньше, чем $\delta(Q(\Gamma))$. Последующие рассмотрения, по-видимому, можно обобщить на случай подгрупп M менее специального вида, однако мы не проделали этого во всех подробностях и потому не включили сюда это обобщение.

Всякий элемент $A \in Q(\Gamma)$ с $\delta A \notin M$ мы называем *нетривиальным*. Пусть k — минимальное из всех чисел $|\delta A|$ для нетривиальных A . Назовем k *шириной* графа Γ . Если граф Γ связан и имеет более чем один конец, то его ширина — корректно определенное положительное целое число. Всякий нетривиальный элемент $A \in \mathcal{A}(\Gamma)$, для которого $|\delta A| = k$, где k — ширина графа Γ , будем называть *узким*. Мы хотим установить некоторые теоретико-решеточные свойства множества узких элементов из $Q(\Gamma)$.

4.B.2. Если элемент A узок, а граф Γ связан, то и A связан.

Доказательство. Будь это не так, A можно было бы представить в виде нетривиальной суммы $B + C$ непересекающихся элементов, границы которых также не пересекаются. Так как $\delta A = \delta B + \delta C \notin M$, то либо δB , либо δC не принадлежит M ; пусть, скажем, это будет δB . Поскольку $0 \neq C \neq 1$ и граф Γ связан, то мы имели бы $\delta C \neq 0$ и потому $|\delta B| < |\delta A|$, т. е. элемент A не был бы узок.

4.B.3 (условие обрыва убывающих цепочек). Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ — убывающая последовательность узких элементов из $Q(\Gamma)$, где Γ — связный граф. Предположим, что

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0.$$

Тогда $B = A_n$ для некоторого n .

Доказательство. Пусть k — ширина графа Γ . Если ребро $e \in \delta B$, то одна из его вершин принадлежит всем A_n , а другая лежит вне всех A_n , кроме конечного числа. Поэтому существует такое n_e , что $e \in \delta A_n$ для всех $n \geq n_e$. Следовательно, в δB имеется не более k элементов, ибо если бы их было больше, то почти все A_n должны были бы иметь в δA_n по меньшей мере $k + 1$ элементов. Отсюда следует, что δB содержится в некотором δA_n . Согласно 4.B.2, элемент A_n связан и потому, согласно 4.B.1, $B = A_n$.

4.B.4. Следствие. Существует узкий элемент $A \in Q(\Gamma)$, являющийся минимальным среди всех узких элементов, содержащих вершину $v \in \Gamma_0$, т. е. если $v \in B \subset A$ и элемент B узок, то $B = A$.

В противном случае существовала бы (по аксиоме выбора) строго убывающая последовательность узких множеств, содержащих v .

4.B.5. Теорема. Если A — узкий элемент, минимальный среди содержащих v , а B — произвольный узкий элемент, то по крайней мере для одного из элементов

$$X = AB, \quad AB^*, \quad A^*B, \quad A^*B^*$$

выполнено условие

$$\delta X \in M.$$

Доказательство. Предположим, что ни для одного из указанных элементов условие $\delta X \in M$ не выполняется. Пусть k — ширина графа Γ . Используя тот факт, что $\delta A = \delta A^*$, запишем

$$\begin{aligned}\delta(AB) &= A(\delta B) + (\delta A)B, \\ \delta(AB^*) &= A(\delta B) + (\delta A)B^*, \\ \delta(A^*B) &= A^*(\delta B) + (\delta A)B, \\ \delta(A^*B^*) &= A^*(\delta B) + (\delta A)B^*.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}|\delta(AB)| + |\delta(AB^*)| + |\delta(A^*B)| + |\delta(A^*B^*)| &\leq \\ &\leq 2|\delta A| + 2|\delta B| = 4k.\end{aligned}$$

Ни для какого X не может быть $|\delta X| < k$, так как в этом случае ввиду того, что $\delta X \notin M$, ширина графа Γ была бы меньше, чем k . Следовательно, $|\delta X| \geq k$ для всех X и потому $=k$. Таким образом, все элементы

$$AB, \quad AB^*, \quad A^*B, \quad A^*B^*$$

являются M -узкими. Однако в этом случае либо AB , либо AB^* содержит v и строго меньше, чем A , что противоречит минимальности A .

Подведем итоги предыдущего обсуждения в виде одного самостоятельного утверждения.

4.B.6. Пусть Γ — локально конечный связный граф с более чем одним концом и

$$k = \min \{ |\delta A| : A \in Q(\Gamma), \quad A \text{ и } A^* \text{ бесконечны} \}.$$

Назовем элемент A узким, если A и A^* оба бесконечны и $|\delta A| = k$. Тогда существует такой узкий элемент A , что для всех узких элементов B один из элементов

$$AB, \quad AB^*, \quad A^*B, \quad A^*B^*$$

конечен.

Доказательство. Выберем какой-нибудь узкий элемент A , минимальный среди содержащих некоторую фиксирован-

ную вершину. Согласно 4.В.5, одно из множеств $\delta(AB)$ и т. д., скажем $\delta(AB)$, представляет собой $\delta(F)$ для некоторого конечного множества F ; следовательно, поскольку граф Γ связан, $AB + F = 0$ или 1. Так как A^* бесконечно, а F лишь конечно, то случай $AB + F = 1$ невозможен. Значит, $AB + F = 0$, т. е. $AB = F$.

4.В.7. Пусть A и B — такие узкие элементы из $Q(\Gamma)$, что AB и A^*B^* бесконечны. Тогда AB и $A \cup B = (A^*B^*)^*$ узки.

Доказательство. Пусть k — ширина графа Γ . Заметим, что множества AB и $(AB)^* \supset A^*B^*$ оба бесконечны. Следовательно, $|\delta(AB)| \geq k$; аналогично, $|\delta(A^*B^*)| \geq k$. Из соотношений

$$\delta(AB) = (\delta A)B + A(\delta B),$$

$$\delta(A^*B^*) = (\delta A^*)B^* + A^*(\delta B^*) = (\delta A)B^* + A^*(\delta B)$$

вытекает, что

$$|\delta(AB)| + |\delta(A^*B^*)| \leq |\delta A| + |\delta B| = 2k.$$

Следовательно, $|\delta(AB)| = |\delta(A^*B^*)| = k$ и элементы AB , A^*B^* оба узки, а так как $\delta(A \cup B) = \delta(A^*B^*)$, то и элемент $A \cup B$ узок.

Напомним, что $\mathcal{E}(\Gamma)$ обозначает факторалгебру алгебры $Q(\Gamma)$ по идеалу конечных подмножеств множества Γ_0 .

4.В.8. Пусть $0 \neq \alpha \subset \beta \neq 1$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{E}(\Gamma)$, и пусть $L(\alpha, \beta) = \{\gamma \in \mathcal{E}(\Gamma): \alpha \subset \gamma \subset \beta, \gamma \text{ представимо некоторым узким элементом } C \text{ из } Q(\Gamma)\}$.

Тогда множество $L(\alpha, \beta)$ замкнуто относительно операций взятия пересечения и объединения и, будучи подрешеткой булевой алгебры, является дистрибутивной решеткой.

Доказательство состоит в выборе представителей и применении предложения 4.В.7.

4.В.9. Множество $L(\alpha, \beta)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепочек, т. е. если $\beta \supset \gamma_1 \supset \gamma_2 \supset \dots \supset \gamma_n \supset \dots \supset \alpha$, где все γ_i представимы узкими элементами $C \in Q(\Gamma)$, то существует такое N , что $\gamma_n = \gamma_N$ для $n \geq N$.

Доказательство. Мы можем считать, что все $\gamma_n \neq \alpha$, в противном случае заключение теоремы очевидно. Представим γ_i узким элементом $C_i \in Q(\Gamma)$. Тогда γ_i представляется также и элементом $D_i = C_1 \cap \dots \cap C_i$, узким в силу 4.В.7, и мы имеем $D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_n \supset \dots$.

Представим α элементом $A \in Q(\Gamma)$. Обозначим через S множество вершин тех ребер, которые лежат в δA ; это множество конеч-

но. Согласно 4.B.2, элемент D_i , будучи узким, является связным; далее, поскольку $\gamma_i \alpha^* \neq 0$ (так как $\gamma_i \neq \alpha$) и $\gamma_i \alpha = \alpha \neq 0$, то $D_i A^* \neq 0 \neq D_i A$. Из связности D_i вытекает, что два множества $\delta(D_i A^*) = (\delta D_i) A^* + D_i (\delta A)$ и $\delta(D_i A) = (\delta D_i) A + D_i (\delta A)$ должны пересекаться, следовательно, $D_i (\delta A) \neq 0$ и потому $D_i \cap S \neq \emptyset$. Таким образом,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} (D_n \cap S) \neq \emptyset,$$

поскольку пересечение обрывающейся последовательности непустых конечных множеств непусто. А тогда, ввиду 4.B.3,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = D_N$$

для некоторого N , и, значит, для $n \geq N$ мы имеем $D_n = D_N$ и, следовательно, $\gamma_n = \gamma_N$.

4.B.10. Двойственным образом $L(\alpha, \beta)$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение эквивалентно условию обрыва убывающих цепочек для $L(\beta^*, \alpha^*)$.

4.B.11 (ограниченность цепочек в $L(\alpha, \beta)$). Для любых заданных $0 \neq \alpha \subset \beta \neq 1$ в $\mathcal{E}(\Gamma)$ существует такое число $N = N(\alpha, \beta)$, что для всякой цепочки

$$\alpha \subset \gamma_1 \subset \gamma_2 \subset \dots \subset \gamma_n \subset \beta,$$

где $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, и элементы γ_i , $i = 1, \dots, n$, представимы узкими элементами из $Q(\Gamma)$, мы имеем $n \leq N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий обрыва возрастающих и убывающих цепочек в $L(\alpha, \beta)$, существует далее не расширяемая цепочка

$$\alpha \subset \delta_1 \subset \delta_2 \subset \dots \subset \delta_N \subset \beta,$$

такая, что если $\delta_i \subset \varepsilon \subset \delta_{i+1}$, где $\varepsilon \in L(\alpha, \beta)$, то $\delta_i = \varepsilon$ или $\varepsilon = \delta_{i+1}$. Если бы существовала более длинная цепочка

$$\alpha \subset \gamma_1 \subset \dots \subset \gamma_n \subset \beta \quad \text{с } n > N,$$

то, согласно теореме Жордана — Гёльдера — Шрейера — Цассенхауза — Артина, примененной к $L(\alpha, \beta)$, мы могли бы уплотнить нашу δ -цепочку так, чтобы в ней было по меньшей мере $n-1$ нетривиальных включений. Но это противоречило бы ее максимальности.

Глава 5

СЛЕДСТВИЯ

5.А. Структура групп с бесконечным числом концов

Пусть G — бесконечно порожденная группа с более чем одним концом. Теоремой 4.А.6.5 мы полностью выяснили, какого вида группы имеют два конца — это группы, имеющие гомоморфизмы с конечным ядром на $\mathbb{Z}$ или на $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Если у группы G более двух концов, то по теореме 4.А.6.4 она имеет бесконечно много концов.

Пусть T — какое-нибудь конечное множество, порождающее группу G , и Γ — соответствующий граф. Заметим, что группа G действует справа на Γ и, следовательно, действует справа на $Q(\Gamma)$ и $\mathcal{E}(\Gamma)$. Согласно 4.В.6, существует узкий элемент $A \in Q(\Gamma)$, минимальный среди узких множеств, содержащих некоторую фиксированную вершину $v \in G = \Gamma_0$. Для любого данного $g \in G$ мы имеем $|\delta A| = |\delta Ag|$, так что элемент Ag узок и, следовательно, в силу 4.В.6, по крайней мере одно из четырех множеств

$$Ag \cap A, \quad Ag \cap A^*, \quad A^*g \cap A, \quad A^*g \cap A^*$$

конечно. Поскольку множества A, A^*g, Ag, A^*g все бесконечны, то невозможно, чтобы четыре из шести возможных попарных пересечений этих множеств были конечны. Рассматривая вопрос о том, какие именно из этих пересечений конечны, мы можем получить разбиение группы G на шесть множеств. А именно, введем следующие обозначения.

Пусть E и E^* действуют на $\mathcal{A}$ так: $E(A) = A, E^*(A) = A^*$, и пусть EE, EE^*, E^*E, E^*E^* — четыре символа, получаемые выписыванием подряд двух букв из алфавита $\{E, E^*\}$. Пусть, далее, X, Y, Z — переменные, принимающие значения E или E^* , причем если X принимает значение E или E^* , то X^* принимает значение E^* или E соответственно.

Определим F, S, EE и т. д. как следующие подмножества группы G :

$$\begin{aligned} F &= \{g \in G: Ag \cap A^* \text{ и } A^*g \cap A \text{ конечны}\} = \\ &= \{g \in G: A = Ag \text{ в } \mathcal{E}(G)\}, \\ S &= \{g \in G: Ag \cap A \text{ и } A^*g \cap A^* \text{ конечны}\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{g \in G \mid Ag = A^* \text{ в } \mathcal{E}(G)\}, \\
H &= F \cup S, \\
XY &= \{g \in G - H: X(Ag) \cap Y(A) \text{ конечно}\} = \\
&= \{g \in G: X(Ag) \subsetneq Y^*(A) \text{ в } \mathcal{E}(G)\} = \\
&= \{g \in G: Y(A) \subsetneq X^*(Ag) \text{ в } \mathcal{E}(G)\}.
\end{aligned}$$

Последние три эквивалентные между собой условия определяют четыре подмножества EE , EE^* , E^*E , E^*E^* .

Ниже мы предполагаем, что группа G имеет бесконечное число концов.

5.A.1. F — конечная подгруппа группы G .

Это следует из теоремы 4.A.6.4, так как F — группа изотропии элемента A в $\mathcal{E}(G)$.

5.A.2. $H = F \cup S$ — подгруппа группы G , в которой F имеет индекс 1 или 2.

Это очевидно.

5.A.3. Если $g \in XY$, то $g^{-1} \in YX$.

Действительно, $X(Ag) \subsetneq Y^*(A)$ в $\mathcal{E}(G)$. Умножая справа на g^{-1} , получаем $X(A) \subsetneq Y^*(Ag^{-1})$, откуда следует, что $g^{-1} \in YX$.

5.A.4. Если $g \in XY$ и $f \in F$, то $gf \in XY$.

Имеем $X(Ag) \subsetneq Y^*(A)$ и $Y^*(Af) = Y^*(A)$ в $\mathcal{E}(G)$. Умножая первое неравенство на f , получаем

$$X(Agf) \subsetneq Y^*(Af) = Y^*(A)$$

и, следовательно, $gf \in XY$.

5.A.5. Если $g \in XY$ и $s \in S$, то $gs \in XY^*$.

Действительно, в $\mathcal{E}(G)$ имеем $Y^*(As) = Y^*(A^*) = Y(A)$, так что из $X(Ag) \subsetneq Y^*(A)$ следует, что $X(Ags) \subsetneq Y^*(As) = Y(A)$ и $gs \in XY^*$.

5.A.6. Если $g \in XY$ и $p \in Y^*Z$, то $gp \in XZ$.

Действительно, $X(Ag) \subsetneq Y^*(A)$ в $\mathcal{E}(G)$, так что $X(Agp) \subsetneq Y^*(Ap)$. Далее, $Y^*(Ap) \subsetneq Z^*(A)$ и, следовательно, $X(Agp) \subsetneq Z^*(A)$, т. е. $gp \in XZ$.

Итак, мы проверили все аксиомы биполярной структуры, за исключением аксиом ограниченности и нетривиальности (аксиом 7 и 8).

Пусть даны $X_1, \dots, X_{n+1}$, и пусть $g_i \in X_i X_{i+1}^*$, так что для всех i

$$X_i(Ag_i) \subsetneq X_{i+1}(A),$$

или

$$X_1(Ag_1g_2 \dots g_n) \subsetneq X_2(Ag_2 \dots g_n) \subsetneq \dots \subsetneq X_n(Ag_n) \subsetneq X_{n+1}(A).$$

Отсюда видно, что существование верхней границы для n в представлениях вида $p = g_1g_2 \dots g_n$ является следствием утверждения 4.В.11 о том, что цепочки, составленные из узких элементов, расположенных между двумя узкими элементами, имеют ограниченные размеры. Итак:

5.А.7. Для любого данного $p \in G$ существует такое число $N(p)$, что если $p = g_1g_2 \dots g_n$ и $g_i \in X_i X_{i+1}^*$, то $n \leq N(p)$.

5.А.8. EE^* непусто.

Доказательство. Пусть Δ — некоторый конечный связный подграф графа Γ , содержащий все ребра из δA , и L — множество вершин этого подграфа. Поскольку группа G действует на вершинах графа Γ транзитивно, а Δ имеет ограниченные размеры, то, как легко видеть, существуют такие $x, y \in G - H$, что

$$\Delta x \cap \Delta = \emptyset = \Delta y \cap \Delta \quad \text{и} \quad Lx \subset A, \quad Ly \subset A^*.$$

Если $\Delta x \cap \Delta = \emptyset$, то все четыре множества $(Ax) \cap A$, $(Ax) \cap A^*$ и т. д. не могут быть пустыми. (Чтобы доказать это, надо рассуждать так же, как при доказательстве теоремы 4.А.6.4.) Так как по построению L содержит точки и из A и из A^* , то $(Ax) \cap A$ и $(A^*x) \cap A$ непусты, и непусты также $(Ay) \cap A^*$ и $(A^*y) \cap A^*$. Отсюда следует, что либо $(Ax) \cap A^*$, либо $(A^*x) \cap A^*$ пусто, а поскольку $x \notin H$, то либо $x \in EE^*$, либо $x \in E^*E^*$. Аналогично, либо $y \in EE$, либо $y \in E^*E$. Следовательно, один из элементов x, y^{-1}, yx принадлежит EE^* .

Таким образом, в предположении, что G имеет более чем два конца, мы доказали, что если задан минимальный узкий элемент $A \in Q(\Gamma)$, где Γ — граф группы G по отношению к некоторому конечному множеству образующих, то на G можно определить биполярную структуру.

5.А.9. Если G — конечно порожденная группа с бесконечным числом концов, то на G существует биполярная структура

$$\{F, S, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}.$$

Следовательно, G принадлежит к одному из следующих двух типов структур:

- (1) $G = G_1 *_F G_2$ — свободное произведение с конечной объединенной подгруппой F , содержащейся собственным образом в обоих сомножителях и имеющей индекс > 2 по крайней мере в одном из них;
 (2) $G = G_{1F} \leftarrow \rightarrow \varphi$, где F — некоторая конечная подгруппа, собственным образом вложенная в G_1 .

Доказательство. Это единственные возможности, имеющиеся для биполярной структуры (см. 3.В.5), если еще принять во внимание результаты пункта 4.А.8, чтобы исключить случаи, когда G имеет два конца.

Присовокупляя сюда результат, сформулированный выше как теорема 4.А.6.6, получаем необходимое и достаточное условие:

5.А.10. Конечно порожденная группа имеет бесконечно много концов тогда и только тогда, когда она допускает разложения (1) или (2) из теоремы 5.А.9.

5.В. Теоретико-групповые следствия

Группа без кручения определяется как группа, в которой единица — единственный элемент конечного порядка.

5.В.1. Конечно порожденная группа без кручения имеет два конца тогда и только тогда, когда она бесконечная циклическая. Она имеет бесконечно много концов тогда и только тогда, когда ее можно нетривиально представить в виде свободного произведения.

Это следует из 4.А.6.5 и 5.А.10.

5.В.2. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое свойство групп, наследуемое нетривиальными свободными сомножителями. Допустим, что если некоторая группа обладает свойством $\mathcal{P}$, то у нее имеется более чем один конец. В этом случае любая конечно порожденная группа без кручения, обладающая свойством $\mathcal{P}$, является свободной группой.

Доказательство. Пусть группа G обладает свойством $\mathcal{P}$. Тогда у нее более чем один конец. Если у нее два конца, то по теореме 5.В.1 она свободная (циклическая). Если число концов больше двух, то по теореме 5.В.1 G является свободным произведением $G_1 *_F G_2$, где G_1 и G_2 обладают свойством $\mathcal{P}$ и (по теореме Грушко) могут быть порождены меньшим числом образующих, чем G ; проводя индукцию по числу образующих, получаем, что группы G_1 и G_2 свободны и, следовательно, группа G свободна.

5.В.3. Гипотеза Серра. Всякая конечно порожденная группа G без кручения, имеющая свободную подгруппу F конечного индекса, свободна.

Доказательство. Любая конечно порожденная подгруппа H в G содержит свободную подгруппу $F \cap H$ в качестве подгруппы конечного индекса. Но всякая нетривиальная свободная группа имеет более чем один конец, а потому, согласно 4.А.6.2, и всякая группа конечного индекса, содержащая такую группу, имеет более чем один конец. Значит, по теореме 5.В.2 группа G свободна.

5.В.4. Гипотеза Эйленберга — Гани. *Всякая конечно порожденная группа G кохомологической размерности 1 свободна.*

Доказательство. Свойство $\mathfrak{F}$, состоящее в том, чтобы иметь кохомологическую размерность 1, наследуется нетривиальными подгруппами, и из него следует отсутствие кручения. Тот факт, что из этого свойства вытекает существование у группы более чем одного конца, является (см. Столлинс [1968]) простым следствием теоремы двойственности для конечно порожденных проективных модулей над групповым кольцом группы G , с учетом гомологической интерпретации концов.

5.С. Теорема о сфере

В заключение мы приведем набросок доказательства теоремы о сфере. Оно предлагается здесь не столько как альтернатива к доказательству Папакирьякопулоса, Уайтхеда и Эпштейна, сколько как пример переплетения топологических и теоретико-групповых фактов. В рассуждениях Папакирьякопулоса имеются идеи, касающиеся накрывающих пространств и распрямления особенностей, которые наводят на мысль о чисто комбинаторных исследованиях в теории групп, вроде того, какое предпринято в данной работе. Встав на путь такого исследования, мы теперь достигли места, где теорему о сфере уже легче понять интуитивно.

Мы не будем здесь доказывать теорему о сфере в самой общей ее формулировке; мы докажем эту теорему в некоторой достаточно общей формулировке, из которой без большого труда можно вывести теорему 1.В.1. При этом, конечно, мы допускаем использование теоремы о петле, леммы Дена и других результатов гл. 2.

5.С.1. *Пусть M — компактное 3-многообразие с $\pi_2(M) \neq 0$. Тогда в M существует двусторонняя поверхность Σ , являющаяся 2-сферой или проективной плоскостью, представляющая нетривиальный элемент группы $\pi_2(M)$.*

Доказательство. Прежде всего мы упростим дело с помощью перестроек вдоль края, что позволит нам установить, что фундаментальная группа многообразия M имеет в этом упрощенном случае более чем один конец. Используя тот факт, что

у нас есть характеристика таких групп, и тем самым и их топологическое представление, мы сконструируем некоторую ситуацию, в которой можно будет применить теорему 2.В.2, и после ряда топологических построений придем к заключению теоремы.

Если ∂M содержит в качестве компоненты 2-сферу или проективную плоскость, то сама эта компонента определяет нетривиальный элемент группы $\pi_2(M)$ и, сдвинув ее немного внутрь M , можно взять ее в качестве Σ . (Легко видеть, что в случае, когда ∂M содержит 2-сферу, стягиваемую в M , многообразие M само стягиваемо.)

Если для некоторой компоненты T края ∂M отображение $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(M)$ не инъективно, то, применяя теорему о петле и лемму Дена, можно представить M как M' плюс ручка $D^2 \times I$; поскольку M имеет гомотопический тип остова многообразия M' и окружности, рассмотрение гомологий универсального накрытия показывает, что $\pi_2(M') \neq 0$. Операция перехода от M к M' осуществляет редукцию на ∂T .

Таким образом, либо теорема справедлива, либо существует подмногообразие M'' многообразия M , для которого отображения $\pi_2(M'') \rightarrow \pi_2(M)$ и $\pi_1(\partial M'') \rightarrow \pi_1(M'')$ инъективны, $\pi_2(M'') \neq \{0\}$, и $\partial M''$ не содержит ни 2-сфер, ни проективных плоскостей.

В этом случае, если $\tilde{M}''$ — универсальное накрытие многообразия M'' , то $\partial \tilde{M}''$ состоит из экземпляров универсальных накрытий пространства $\partial M''$, и потому в размерностях ≥ 1 край $\partial \tilde{M}''$ ацикличесок. Таким образом,

$$\pi_2(M'') \approx H_2(\tilde{M}'') \approx H_2(\tilde{M}'', \partial \tilde{M}'') \approx H_1(\tilde{M}'').$$

Если C_f и C — коцепные комплексы конечных и обычных коцепей соответственно и C_0 — их факторкомплекс, то мы имеем точную когомологическую последовательность, из которой следует, что $H_0^c(\tilde{M}'')$ — группа ранга ≥ 2 ; этот вывод основан на том, что $H^1(\tilde{M}'') = 0$ и $H_1^f(\tilde{M}'') = 0$; а это в свою очередь есть следствие того, что $\tilde{M}''$ — универсальное накрытие и группа $\pi_1(M'')$ бесконечна (в противном случае либо многообразие $\tilde{M}''$ должно было бы быть гомотопической 3-сферой, либо все компоненты края $\partial M''$ должны были бы иметь конечные фундаментальные группы).

На основании сказанного мы заключаем (см. Шпеккер [1949], Эпштейн [1962]), что $\tilde{M}''$, а следовательно, и $\pi_1(M'')$ имеют по крайней мере два конца.

Если $G = \pi_1(M'')$, то, в силу теорем 3.В.6, 4.А.6.5, 4.А.6.6 и 5.А.10, мы можем следующим образом построить асферичное пространство с фундаментальной группой G .

В случае (1) теоремы 5.А.9 имеем $G = G_1 *_F G_2$. Пусть K_1 и K_2 — асферичные пространства с фундаментальными группами

G_1 и G_2 соответственно, содержащие копию K_F -асферичного пространства с фундаментальной группой F . Обозначим через X пространство $K_1 \cup \{K_F \times [-1, +1]\} \cup K_2$, в котором $K_F \times (-1)$ и $K_F \times (+1)$ отождествлены с копиями K_F , содержащимися в K_1 и K_2 соответственно. Определим A как $K_F \times 0$.

В случае (2) теоремы 5.А.9 имеем $G = G_{1F} \leftarrow \varphi$. Пусть K_1 — асферичное пространство с фундаментальной группой G_1 , содержащее пространство K_F в виде двух подпространств с фундаментальными группами $F \subset G_1$ и $\varphi(F) \subset G_1$ соответственно. Обозначим через X объединение $K_1 \cup (K_F \times [-1, +1])$, в котором $K_F \times (-1)$ и $K_F \times (+1)$ отождествлены с подпространствами K_F и $K_{\varphi(F)}$ соответственно. Положим $A = K_F \times 0$.

Легко видеть, что в каждом случае A цилиндрически вложено в X и что пространство X асферично (см. Уайтхед [1939]) и $\pi_1(X) \approx G$ (см. Зейферт [1931] и ван Кампен [1933]).

Существует некоторое отображение $f: M'' \rightarrow X$, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп. Согласно 2.В.2, f гомотопно такому отображению g , что $g^{-1}(A)$ является неубывающим 2-многообразием в M'' , цилиндрически вложенным в M'' , и для каждой компоненты T_i многообразия $g^{-1}(A)$ отображение $\pi_1(T_i) \rightarrow \pi_1(A)$ инъективно. Таким образом, каждая группа $\pi_1(T_i)$ конечна, и, следовательно, T_i — либо 2-клетка, либо 2-сфера, либо проективная плоскость.

Если T_i является 2-клеткой, то край $\partial T_i \subset \partial M''$ должен быть стягиваем на $\partial M''$ и потому должен ограничивать на $\partial M''$ некоторую 2-клетку. Пусть T_i — это 2-клетка, для которой ∂T_i ограничивает самую внутреннюю 2-клетку на $\partial M''$. Перестраивая g в окрестности этой 2-клетки в $\partial M''$, мы можем заменить T_i на некоторую 2-сферу.

Если T_i представляет собой 2-сферу, стягиваемую в M'' , то T_i ограничивает некоторое стягиваемое подмногообразие $N \subset M''$ и некоторая гомотопия в окрестности многообразия N сдвигает T_i с $g^{-1}(A)$.

Если T_i — двусторонняя проективная плоскость, то она представляет нетривиальный элемент группы $\pi_2(M'')$, так как поднятие 2-сферы в ориентированное двулистное накрытие пространства M'' не может ограничивать никакого стягиваемого многообразия (на этом стягиваемом многообразии преобразование накрытия, являющееся гомеоморфизмом, не имело бы неподвижных точек, что противоречило бы теореме Лефшеца о неподвижных точках).

Таким образом, либо в конце концов мы придем к заключению теоремы, либо мы сможем найти некое отображение $h: M'' \rightarrow X$, гомотопное отображению f и такое, что $h^{-1}(A) = \emptyset$; но это последнее невозможно, поскольку тогда отображение h_* фундаментальных групп не было бы эпиморфизмом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бинг (Bing R. H.), An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated, *Ann. Math.*, 69 (1959), 37—65.
2. Бэр (Baer R.), Free sums of groups and their generalizations. III, *Amer. J. Math.*, 72 (1950), 647—670.
3. Вагнер (Wagner D. H.), On free products of groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 84 (1957), 352—378.
4. Вальдхаузен (Waldhausen F.), On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. Math.*, 87 (1968), 56—88.
5. Ван дер Варден (Waerden B. L., van der), Free products of groups, *Amer. J. Math.*, 70 (1948), 527—528.
6. Грушко И. А., О базисах свободного произведения групп, *Матем. сб.*, 8 (1940), 169—182.
7. Ден (Dehn M.), Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Math. Ann.*, 69 (1910), 137—168.
8. Зейферт (Seifert H.), Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, *Berlin Verb. Sachs. Akad. Leipzig, Math.-Phys. Kl.*, 83 (1931), 26—66.
9. ван Кампен (Kampen E. R., van), On the connection between the fundamental groups of some related spaces, *Amer. J. Math.*, 55 (1933), 261—267.
10. Кнесер (Kneser H.), Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, *JB. Deutsch. Math.-Verein.*, 38 (1929), 248—260.
11. Мойз (Moise E. E.), Affine structures in 3-manifolds, V, The triangulation theorem and Hauptvermutung, *Ann. Math.*, 56 (1952), 96—114.
12. Нейманн (Neumann B. H.), On the number of generators of a free product, *J. London Math. Soc.*, 18 (1943), 12—20.
13. Папакирьякопулос (Papakyriakopoulos C. D.), On solid tori, *Proc. London Math. Soc.*, 317 (1957a), 281—299.
14. Папакирьякопулос (Papakyriakopoulos C. D.), On Dehn's lemma and the asphericity of knots, *Ann. Math.*, 66 (1957b), 1—26. [Русский перевод: *Математика*, 2:4 (1958), 32—49.]
15. Пуанкаре (Poincaré H.), Cinquième complément à l'analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 18 (1904), 45—110. [Русский перевод: А. Пуанкаре, *Избранные труды*, т. 2, М., 1972, стр. 676—734.]
16. Серр (Serre J.-P.), Sur la dimension cohomologique des groupes profinis, *Topology*, 3 (1965), 413—420.
17. Столлинс (Stallings J. R.), Some topological proofs and extensions of Grushko's theorem, Thesis, Princeton Univ. (1959).
18. Столлинс (Stallings J. R.), On the loop theorem, *Ann. Math.*, 72 (1960), 12—19.
19. Столлинс (Stallings J. R.), A topological proof of Grushko's theorem on free products, *Math. Zeitschr.*, 90 (1965), 1—8.
20. Столлинс (Stallings J. R.), A remark about the description of free products of groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 62 (1966), 129—134.
21. Столлинс (Stallings J. R.), On torsion-free groups with infinitely many ends, *Ann. Math.*, 88 (1968), 312—334.
22. Свон (Swan R. G.), Groups of cohomological dimension one, *J. Algebra*, 12 (1969), 588—610.
23. Уайтхед (Whitehead J. H. C.), On the asphericity of regions in the 3-sphere, *Fund. Math.*, 32 (1939), 149—166.
24. Уайтхед (Whitehead J. H. C.), On finite cocycles and the sphere theorem, *Colloq. Math.*, 6 (1958), 271—282.
25. Фрейденталь (Freudenthal H.), Über die Enden diskreter Räume und Gruppen, *Comm. Math. Helv.*, 17 (1945), 1—38.
26. Хопф (Hopf H.), Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen, *Comm. Math. Helv.*, 15 (1943), 27—32.

- Шапиро и Уайтхед (Shapiro A., Whitehead J. H. C.), A proof and extension of Dehn's lemma, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 174—178. [Русский перевод: *Математика*, **4**:1 (1960), 9—14.]
- Шпеккер (Specker E.), Die erste Cohomologiegruppe von Überlagerungen und Homotopie-Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Comm. Math. Helv.*, **23** (1949), 303—333.
- Шрейер (Schreier O.), Die Untergruppen der freien Gruppen, *Hamburg. Abh.*, **5** (1927), 161—183.
- Эйленберг и Ганя (Eilenberg S., Ganea T.), On the Lusternik—Schnirelmann category of abstract groups, *Ann. Math.*, **65** (1957), 517—518.
- Эпштейн (Epstein D. B. A.), Projective planes in 3-manifolds, *Proc. London Math. Soc.*, **11** (1961), 469—484.
- Эпштейн (Epstein D. B. A.), Ends, Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice-Hall, 1962, 110—117.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Александров П. С. 272
 Альфорс (Ahlfors L. V.) 54, 61, 63, 67, 68, 157, 159
 Артин (Artin) 284
 Ауслендер (Auslander J.) 169
- Банашевский (Banaschewski B.) 203
 Берж (Berge C.) 206, 226
 Бинг (Bing R. H.) 282
 Бой (Boy W.) 67
 Брауэр (Brouwer L. E. J.) 67
 Брахана (Brahana H. R.) 68
 Буне (Boone W.) 159
 Бурбаки (Bourbaki N.) 124, 271, 272
 Бэр (Baer R.) 252, 295
- Вагнер (Wagner D. H.) 284
 Вальдхаузен (Waldhausen F.) 279, 283
 Ван-дер-Варден (Van der Waerden B. L.) 126, 284, 295, 297
- Ганя (Ganea T.) 287
 Гильберт (Hilbert D.) 67, 68
 Грушко И. А. 243, 284
 Гуревич (Hurewicz W.) 98, 254
- Дей (Dey I. M. S.) 252
 Ден (Dehn M.) 68, 282
 Дженс (Jans J. P.) 203
 Дирак (Dirac G. A.) 226
 Дугунджи (Dugundji J.) 203, 272
- Зейферт (Seifert H.) 6, 10, 68, 98, 156, 158, 159, 205, 226, 252, 259, 333
 Зибенман (Siebenmann L.) 67
 Зиман (Zeeman E. C.) 204
- Кампен, ван (Kampen E. R., van) 156, 333
 Картан (Cartan H.) 259
 Келли (Kelley J. L.) 16, 125, 267, 272
 Керби (Kirby R.) 67
 Кервер (Kervaire M.) 259
 Керекьярто (Kerekjarto B.) 10, 65
 Клейтор (Claytor S.) 226
 Кнезер (Kneser H.) 279, 282, 283
 Кон-Фоссен (Cohn-Vossen S.) 67, 68
 Кронин (Cronin J.) 98
 Кроуэлл (Crowell R. R. H.) 98, 127, 156, 159
 Курант (Courant R.) 68
 Куратовский (Kuratowski K.) 226
 Курош А. Г. 127, 227, 238, 242, 252
 Кэрнс (Cairns S. S.) 68
- Лабкин (Lubkin S.) 203
 Ламадрид, де (Gil de Lamadrid J.) 203
 Леви (Levi F.) 252
 Ли (Lee C. N.) 203
 Линдон (Lyndon R. C.) 252
- Маклейн (Mac Lane S.) 226, 252
 Манкрес (Munkres J. R.) 260
 Марков А. А. 68, 158
 Михаэль (Michael E.) 203
 Милнор (Milnor J.) 252, 259
 Мойз (Moise E.) 67, 282
 Мур (Moore R. L.) 272
- Неванлинна (Nevanlinna R.) 61
 Нейман (Neumann B. H.) 284
 Нильсен (Nielsen J.) 226
 Новиков С. П. 157
 Новосад (Novosad R. S.) 203
 Нойвирт (Neuwirth L. P.) 156, 159
 Ньюман (Newman M. H. A.) 151

- Оре (Ore O.) 206, 226
- Папакирьякопулос (Papakiriakopoulos C. D.) 279—282, 331
- Поэнару (Poenaru V.) 159
- Понтрягин Л. С. 98
- Прюфер (Prüfer) 61, 66
- Пуанкаре (Poincare H.) 98, 156, 157, 254
- Радо (Radó T.) 30, 61, 66
- Рейдемейстер (Reidemeister K.) 10, 127, 226, 227, 252
- Ричардс (Richards I.) 65
- Роббинс (Robbins H.) 68
- Ротман (Rotman J. J.) 127, 227
- Самюэль (Samuel P.) 124
- Сарио (Sario L.) 54, 61, 63, 67, 68, 157, 159
- Серр (Serr J.-P.) 287
- Скотт (Scott W. R.) 127, 227
- Смейл (Smale S.) 157, 258, 260
- Спеньер (Spanier E. H.) 259
- Спрингер (Springer G.) 61
- Стигрод (Steenrod N.) 156, 205, 259
- Сталлингс (Stallings J. R.) 243, 244, 252, 282, 284, 288, 295, 331
- Сулливан (Sullivan D.) 157
- Свон (Swan R. G.) 287
- Трельфалл (Threlfall W.) 10, 66, 68, 98, 156, 158, 159, 205, 226, 252, 259
- Уайберн (Whybern G. T.) 272
- Уайли (Wylie S.) 98, 159, 204, 205, 226, 252, 259
- Уайтхед (Whitehead J. H. C.) 66, 200, 226, 229, 234, 252, 282, 331, 333
- Уолл (Wall C. T. C.) 260
- Уоллес (Wallace A. N.) 259
- Филлипс (Phillips A.) 68
- Фойстель (Feustel) 292
- Фокс (Fox R. H.) 98, 127, 156, 159, 203
- Фрейденталь (Freudenthal H.) 68, 313
- Хакен (Haken W.) 159
- Хегор (Heegard) 68
- Хиггинс (Higgins P. J.) 252
- Хилтон (Hilton P. P.) 98, 159, 204, 205, 226, 234, 252, 259
- Химмельберг (Himmelberg C. J.) 268
- Хирш (Hirsch M.) 66
- Холл (Hall M.) 127, 204, 227, 238, 252
- Хопф (Hopf H.) 313
- Ху Сы-цзян (Hu S. T.) 234, 252, 259
- Шапиро (Shapiro A.) 282
- Шевалле (Chevalley C.) 124, 203, 205
- Шенкман (Schenkman E.) 127, 227
- Шпеккер (Specker E.) 281, 332
- Шпехт (Specht W.) 127, 227, 242, 251, 252
- Шрейер (Schreier O.) 155, 226, 284
- Шуберт (Schubert H.) 259
- Шустер (Schuster S.) 226
- Эйленберг (Eilenberg S.) 156, 259, 287
- Эпштейн (Epstein D. B. A.) 259, 280, 282, 331, 332

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

абсолютное значение вектора 13
антиподальное отображение 186

базис группы 120
барицентрическое разбиение 54
бесконечно неориентируемая не-
компактная поверхность 65
биполярная структура 285, 306
Борсука — Улама теорема 186
Брауэра теорема 89

внутренность многообразия 49
вполне разрывная группа гомеомор-
физмов 181
выпуклое подмножество 81

гомоморфизм накрывающих про-
странств 174
гомотопическая эквивалентность 97
гомотопические группы 253
— классы отображений 78
гомотопные отображения 78
граф 206, 207, 321
— конечный 209
— локально конечный 209, 321
группа без кручения 110, 330
— кручения 110
— Пуанкаре 76
— свободная над множеством (сво-
бодно порожденная множеством)
104
— узла 151
Грушко теорема 8, 243, 252, 279, 283
Грушко — Вагнера теорема 284

двойной класс смежности 238
действительная проективная плос-
кость 21
Дена лемма 279, 280, 282

дерево 211
— группы 304
деформационный ретракт 80
длина слова 113

евклидово n -пространство 13

замкнутое отображение 203
замкнутый n -мерный диск (шар) 13,
93
звездное относительно точки под-
множество 81
Зейферта — ван Кампена теорема 8,
129, 156, 158, 284
— — — применение 215, 231

идеальная граница 64
изоморфизм 11
— накрывающих пространств 164,
174
изотропная подгруппа 275

Кнезера гипотеза 282, 283
коммутативная диаграмма 12
коммутатор 119
коммутаторная подгруппа 119
компактификация поверхности 63
CW-комплекс 9, 229, 232
— n -мерный 233
конец графа 312
конечно копредставимая группа 122
— неориентируемая некомпактная
поверхность 65
концы 64
координата 12
копредставление 122
коэффициенты кручения 111
край (граница) многообразия 49
Куратовского теорема 226

Куроша теорема о подгруппе 8,
236, 252

лебегово число покрытия 83
левое G -пространство 273
Линделёфа пространство 198
линейно связная компонента 70
— связное пространство 70
лист Мёбиуса 17
локально линейно связное простран-
ство 70
локальный гомеоморфизм 164

многообразие с краем 49
— n -мерное (n -многообразие) 16
множество концов пространства 64
монотонизм 11

накрывающее пространство 160
накрытие 160
незаузеленная окружность 152
некомпактная поверхность беско-
нечного рода 65
— — конечного рода 64
неориентируемое многообразие 19
неразложимый элемент 285
Нильсена — Шрейера теорема 8
норма вектора 13
нормализатор группы 277

образующие 103
однородное G -пространство 275
орбита 262
ориентируемая точка 64
ориентируемое многообразие 18
остов (n -остов) 66, 233
открытое отображение 263
открытый n -мерный диск (шар) 13,
93
отображение включения 12
— накрытия 161
отображения, гомотопные относи-
тельно подмножества 79

пара ребер первого (второго) типа 36
петля 76
планарная точка 64
поверхность 20
— рода n 47
погружение дифференцируемое 67
— топологическое 67
подгруппа кручения 110
поднятие отображения 171

полное множество соотношений 121
полулокально односвязное про-
странство 190
порождающее множество 103
правое G -пространство 273
предгруппа 284, 295
представление группы перестанов-
ками 273
преобразование накрытия 174
проективная плоскость 21, 22
проекция 161
произведение путей 71
пространства одного гомотопиче-
ского типа 97
пространство концов группы 312
— стягиваемое односвязное 81
прямая сумма 100
прямое (декартово) произведение
групп 99
Пуанкаре гипотеза 156, 280
пустое слово 113
путь 70, 72
— из ребер 210
— меняющий ориентацию 18, 19
— сохраняющий ориентацию 18, 19

ранг группы 110, 120
регулярное накрывающее простран-
ство 179
редуцированное слово 119
ретракт 79
род поверхности 47, 57

свободная абелева группа 105
— группа 117
связная сумма 23
— — вдоль края 61
Серра гипотеза 330
системы координат одного и того же
класса 20
скольжение 174
слабое произведение 100
следствие соотношений 109, 121
слово 113
— в предгруппе 296
— редуцированное 296
сложность отображения 289
соотношение 103
— нетривиальное 104
— тривиальное 103
степень гомоморфизма бесконечных
циклических групп 83, 155
— класса замкнутого пути 85
Столлинга система 247
сужение функции 12
сфера ($n-1$)-мерная 13

теорема о петле 280, 282
— — сфере 279, 280, 282
тип неориентируемости конечно не-
ориентируемой поверхности 65
топологический тип 13
тор 20, 144
торические узлы 151
триангуляция 29

узел 151
универсальное накрывающее про-
странство 176

фактортопология 261
фундаментальная группа 76

цилиндрически вложенное подмно-
жество 283

число листов накрывающего про-
странства 169

Шрейера метод 155
— система 223

эйлерова характеристика 43
— — конечного графа 217
Эйленберга — Гани гипотеза 331
эквивалентные пути 71
— узлы 151
элементарная окрестность 160
эпиморфизм 11

G -эквивариантное отображение 274

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода	5

У. Масси

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ. ВВЕДЕНИЕ

Предисловие	7
Замечания, предназначенные для студентов	11
Гл. I. Двумерные многообразия	15
1. Введение	15
2. Определение и примеры n -многообразий	16
3. Ориентируемые и неориентируемые многообразия	17
4. Примеры компактных связных 2-многообразий	20
5. Формулировка классификационной теоремы для компактных поверхностей	24
6. Триангуляция компактных поверхностей	29
7. Доказательство теоремы 5.1	32
8. Эйлерова характеристика поверхности	43
9. Многообразия с краем	49
10. Классификация компактных связных 2-многообразий с краем	51
11. Эйлерова характеристика поверхности с краем	57
12. Модели компактных поверхностей с краем в евклидовом 3-пространстве	58
13. Замечания о некомпактных поверхностях	61
Примечания	66
Список литературы	68
Гл. II. Фундаментальная группа	69
1. Введение	69
2. Основные обозначения и терминология	70
3. Определение фундаментальной группы пространства	72
4. Действие непрерывного отображения на фундаментальную группу	77
5. Фундаментальная группа окружности — бесконечная циклическая группа	82
6. Применение: теорема Брауэра о неподвижной точке в пространстве размерности ≤ 2	89
7. Фундаментальная группа произведения пространств	90
8. Гомотопический тип и гомотопическая эквивалентность пространств	93
Примечания	98
Список литературы	98

Гл. III. Свободные группы и свободные произведения групп . . .	99
1. Введение	99
2. Слабое произведение абелевых групп	99
3. Свободные абелевы группы	103
4. Свободные произведения групп	112
5. Свободные группы	117
6. Представление групп с помощью образующих и соотношений . .	121
7. Задачи универсального отображения	123
Примечания	125
Список литературы	127
Глава IV. Теорема Зейферта — ван Кампена о фундаментальной группе объединения двух пространств. Применения	128
1. Введение	128
2. Формулировка и доказательство теоремы Зейферта — ван Кампена .	129
3. Одно из применений теоремы 2.1	133
4. Другое применение теоремы 2.1	142
5. Строение фундаментальной группы компактной поверхности . .	144
6. Применение к теории узлов	151
Примечания	156
Список литературы	159
Глава V. Накрывающие пространства	160
1. Введение	160
2. Определение и некоторые примеры накрывающих пространств .	160
3. Поднятие путей в накрывающее пространство	166
4. Фундаментальная группа накрывающего пространства	169
5. Поднятие отображений в накрывающее пространство	170
6. Гомоморфизмы и автоморфизмы накрывающих пространств . .	173
7. Действие группы $\pi(X, x)$ на множестве $p^{-1}(x)$	177
8. Регулярные накрывающие пространства и факторпространства .	180
9. Применение: теорема Улама — Борсука для 2-сфер	186
10. Теорема существования для накрывающих пространств	188
11. Индуцированное накрытие подпространства	194
12. Топологические свойства накрывающих пространств	197
Примечания	203
Список литературы	205
Гл. VI. Фундаментальная группа и накрывающие пространства графа. Применения в теории групп	206
1. Введение	206
2. Определение и примеры	207
3. Основные свойства графов	209
4. Деревья	211
5. Фундаментальная группа графа	214
6. Эйлерова характеристика конечного графа	217
7. Пространства, накрывающие граф	218
8. Образующие элементы подгруппы свободной группы	222
Примечания	226
Список литературы	226
Глава VII. Фундаментальная группа пространств высокой раз- мерности	228
1. Введение	228
2. Приклеивание 2-клеток к пространству	229
3. Приклеивание к пространству клеток высокой размерности . . .	231

4. CW-комплексы	232
5. Теорема Куроша о подгруппе	236
6. Теорема Грушко	243
Примечания	252
Список литературы	252

Глава VIII. Эпилог	253
Список литературы	259

Приложение А. Фактортопология, или топология отождествления	261
1. Определения и основные свойства	261
2. Обобщение топологии факторпространства	264
3. Факторпространства и произведения пространств	267
4. Подпространство факторпространства и факторпространство подпространства	268
5. Условие, при котором факторпространство хаусдорфово	270
Список литературы	272

Приложение В. Группы перестановок, или группы преобразований	273
1. Основные определения	273
2. Однородные G -пространства	275

Дж. Столлингс

ТЕОРИЯ ГРУПП И ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Глава 1. Исходные соображения и роль трехмерных многообразий	279
1.А. Введение	279
1.В. Точные формулировки упомянутых теорем	282
Глава 2. Трехмерные многообразия	288
2.А. Теорема о петле и лемма Дена	288
2.В. Лемма Кнезера и другие применения	291
Глава 3. Комбинаторная теория групп	295
3.А. Обобщение понятия свободного произведения группы с объединенной подгруппой (предгруппы и их универсальные группы)	295
3.В. Биполярные структуры и конечные подгруппы, по которым происходит объединение	306
Глава 4. Теория концов	311
4.А. Концы групп	311
4.В. Результаты, относящиеся к теории графов	321
Глава 5. Следствия	327
5.А. Структура групп с бесконечным числом концов	327
5.В. Теоретико-групповые следствия	330
5.С. Теорема о сфере	331
Список литературы	334
Именной указатель	336
Предметный указатель	338