ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կ. Լ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԼՈԿԱԼ ԵՎ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2018

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.161ց73
Ա 791

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը*

Ավետիսյան Կ. Լ.
Ա 791 Լոկալ և պայմանական էքստրեմումներ/Կ. Լ. Ավետիսյան. -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2018, 132 էջ:

Ձեռնարկում շարադրված է մաթեմատիկական անալիզի կիրառական ուղղություններից մեկը՝ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների էքստրեմումների տեսությունը: Ներկայացված են լոկալ (բացարձակ) և պայմանական էքստրեմումների որոնման հիմնական մեթոդներն ու առանձնահատկությունները: Բացի անհրաժեշտ տեսական նյութից ձեռնարկը պարունակում է 35 մանրամասն վերլուծված օրինակներ, ինչպես նաև ինքնուրույն աշխատանքի համար 60 վարժություններ իրենց պատասխաններով: Ձեռնարկը նախատեսված է մաթեմատիկական, տնտեսագիտական և բնագիտական մասնագիտությունների ուսանողների համար:

ՀՏԴ 517(075.8)
ԳՄԴ 22.161ց73

ISBN 978-5-8084-2279-7

© ԵՊՀ հրատ., 2018
© Ավետիսյան Կ. Լ., 2018

Նախաբան

Ձեռնարկը ներկայացնում է մաթեմատիկական անալիզի կիրառական ուղղություններից մեկը՝ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների էքստրեմումների տեսությունը: Տվյալ ֆունկցիայի էքստրեմումների, մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոնելու և հայտնաբերելու կարողությունը մեծ դեր է կատարում ոչ միայն մաթեմատիկայում, այլ մաթեմատիկական մեթոդներ կիրառող տարբեր բնագավառներում՝ տեխնիկական, տնտեսագիտական, բոլոր բնագիտական մասնագիտություններում: Կիրառողները շահագրգռված են նվազագույն, հնարավորին չափ պարզ մեթոդներով ստանալ ցանկալի արդյունքը: Տվյալ ձեռնարկում շարադրված են այդ մեթոդներից ամենատարածված և արդյունավետներից մի քանիսը՝ շատ փոփոխականի ֆունկցիաների համար:

Սկզբում ներկայացված են ֆունկցիայի լոկալ (կամ բացարձակ, ոչ պայմանական) էքստրեմումների որոնման հիմնական մեթոդներն ու առանձնահատկությունները: Այնուհետև բերված են ֆունկցիայի պայմանական (հարաբերական) էքստրեմումների որոնման եղանակները, որոնցից, թերևս, ամենակարևորը՝ Լագրանժի բազմապատկիչների մեթոդն է: Ներկայացված յուրաքանչյուր մեթոդից, տեսական ամեն մի դրույթից հետո ներկայացված են մի քանի համապատասխան օրինակներ՝ նշված մեթոդների գործողությունը ցուցադրելու համար: Առանձին օրինակներ լուծված են երկու-երեք տարբեր եղանակներով՝ ցուցադրելու համար տարբեր մեթոդների արդյունավետությունը և համատեղելիությունը: Կան նաև տնտեսագիտական բնույթի օրինակներ: Ձեռնարկը չի հավակնում էքստրեմումների տեսության ամբողջական ծավալին:

Մասնավորապես ընդգրկված չէ անբացահայտ ֆունկցիաների էքստրեմումների թեման: Ձեռնարկն ընդամենը պարունակում է 35 մանրամասն վերլուծված օրինակներ, ինչպես նաև ինքնուրույն աշխատանքի համար 60 վարժություններ իրենց պատասխաններով:

Ձեռնարկը հասանելի է համալսարանական առաջին-երկրորդ կուրսի մաթ. անալիզի կամ բարձրագույն մաթեմատիկա առարկայի հիմնական գաղափարներին ծանոթ ուսանողին: Հեղինակը նպատակ էր դրել առավել մատչելի լեզվով ներկայացնելու և՛ տեսական նյութը, և՛ լուծված օրինակները այնպես, որ ձեռնարկի հիմնական նյութը ($\mathbb{R}^2$ և $\mathbb{R}^3$-ում) հասանելի լինի մաթեմատիկայում անգամ թույլ պատրաստված ուսանողին: Այն ընթերցողները, ովքեր կհետաքրքրվեն ավելի խորը տեսական գիտելիքներով և ավելի բազմազան օրինակներով, կարող են դիմել ձեռնարկի վերջում բերված գրականությանը:

Շնորհակալություն եմ հայտնում ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի դոցենտ Ս. Ռաֆայելյանին արժեքավոր դիտողությունների և առաջարկությունների համար, ինչպես նաև պրոֆեսորներ Ա. Սահակյանին և Վ. Աթաբեկյանին՝ աջակցության համար:

Հեղինակը շնորհակալությամբ կընդունի ընթերցողների յուրաքանչյուր դիտողություն և առաջարկ:

Կարեն Ավետիսյան

Հաճախ օգտագործվող նշանակումներ

1. $\forall$ ցանկացած, կամայական, յուրաքանչյուր, բոլոր :

2. $\exists$ նշանակում է «գոյություն ունի» :

3. **s.t.** նշանակում է «այնպիսին, որ» :

4. $\mathbf{C}(\mathbf{\Omega})$ Ω բազմության մեջ անընդհատ ֆունկցիաների դասը;

5. $\mathbf{C^1}(\mathbf{\Omega})$ Ω բազմության մեջ անընդհատ դիֆերենցելի կամ ողորկ ֆունկ–ցիաների դասը: Գրում են $f \in C^1(\Omega)$, եթե գոյություն ունեն f-ի 1-ին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, որոնք անընդհատ են Ω բազ–մության մեջ: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում մասնակի ածան–ցյալների փոխարեն պետք է հասկանալ սովորական ածանցյալ՝
$$f(x) \in C^1(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) \in C(\Omega);$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^1(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\Omega), \quad 1 \leq j \leq n :$$

6. $\mathbf{C^m}(\mathbf{\Omega})$ Ω բազմության մեջ $m \in \mathbb{N}$ անգամ անընդհատ դիֆերենցելի (m-րդ կարգի ողորկ) ֆունկցիաների դասը: Գրում են $f \in C^m(\Omega)$, եթե գոյություն ունեն f-ի m-րդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, որոնք անընդհատ են Ω բազմության մեջ: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում մասնակի ածանցյալների փոխարեն պետք է հասկանալ սովո–րական ածանցյալներ:

7. $\mathbf{C}^{\infty}(\mathbf{\Omega})$ Ω բազմության մեջ անվերջ դիֆերենցելի (անվերջ ողորկ) ֆունկցիաների դասը:

8. $\mathcal{U}(\mathbf{M_0})$ $M_0 \in \mathbb{R}^n$ կետի շրջակայք, այսինքն՝ M_0 կենտրոնով և ինչ-որ շառավղով բաց միջակայք, եթե $n = 1$, կամ բաց շրջան, եթե $n = 2$, կամ բաց գունդ, եթե $n \geq 3$:

9. $\partial\boldsymbol{\Omega}$ Ω բազմության եզրը:

10. **Կոմպակտ** ($\mathbb{R}^n$-ում) նշանակում է փակ և սահմանափակ բազմություն:

11. **Տիրույթը** մաթեմատիկայում, ինչպես հայտնի է, նշանակում է բաց և կապակցված բազմություն, թեև հաճախ կիրառվում է նաև լայն իմաստով, որպես կամայական բազմություն: Ընթերցողը ենթատեքստից կկարողանա հասկանալ՝ նեղ թե լայն իմաստով է կիրառվում այդ տերմինը:

12. $\mathbf{df}(\mathbf{M_0})$ տվյալ M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալն է: Մասնավորապես, երկու փոփոխականի $f(M) = f(x, y)$ ֆունկցիաների համար $M_0(x_0, y_0)$ կետում

$$\boxed{df(M_0) = df(x_0, y_0) \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\,dy} :$$

Նկատենք, որ $df(M_0)$ դիֆերենցիալը կախված է ոչ միայն M_0 կետից, այլ նաև անկախ փոփոխականների $dx = \Delta x$ և $dy = \Delta y$ աճերից (դիֆերենցիալներից), ինչը կարելի է արտահայտել բացահայտ՝ $df = df(M_0, dx, dy)$: Նմանապես երեք փոփոխականի $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիաների համար $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում սահմանում են

$$\boxed{df(M_0) = df(x_0, y_0, z_0) \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\,dz} :$$

13. $\mathbf{df}(\mathbf{M_0}) \equiv 0$ նշանակում է, որ $df(M_0)$ դիֆերենցիալը նույնաբար հավասար է զրոյի, այսինքն հավասար է զրոյի $dx = \Delta x$ և $dy = \Delta y$ աճերի (դիֆերենցիալների) ցանկացած ընտրության դեպքում ($dx = dy = 0$ դեպքը սովորաբար չի դիտարկվում):

14. Անկախ փոփոխականների $dx = \Delta x$ և $dy = \Delta y$ աճերի (դիֆերենցիալների) աստիճանների համար ընդունված են հետևյալ նշանակումները՝

$$dx^2 = (dx)^2, \qquad dy^2 = (dy)^2, \qquad \Delta x^2 = (\Delta x)^2, \qquad \Delta y^2 = (\Delta y)^2,$$
$$dx^k = (dx)^k, \qquad dy^k = (dy)^k, \qquad \Delta x^k = (\Delta x)^k, \qquad \Delta y^k = (\Delta y)^k$$

և այլն:

15. $\mathbf{d^k f(M_0)}$ f ֆունկցիայի k-րդ կարգի ($k \in \mathbb{N}$) դիֆերենցիալը M_0 կետում: Մասնավորապես, երկու փոփոխականի $f(M) = f(x, y)$ ֆունկ– ցիաների համար $M_0(x_0, y_0)$ կետում սիմվոլիկ կարելի է գրել

$$\boxed{d^k f(M_0) = d^k f(x_0, y_0) \overset{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^k f(M_0)} :$$

Օրինակ, $k = 2$ համար 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը կարելի է բացահայտ ներկայացնել՝

$$d^2 f(M_0) = d^2 f(x_0, y_0) \overset{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 f(M_0) =$$
$$= \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}\,dy^2 :$$

Նմանապես երեք փոփոխականի $f(M) = f(x, y, z)$ ֆունկցիաների համար $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը կընդունի հետևյալ բացահայտ տեսքը՝

$$d^2 f(x_0, y_0, z_0) \overset{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz\right)^2 f(M_0) =$$
$$= \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2}\,dz^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\,\partial z}\,dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y\,\partial z}\,dy\,dz :$$

16. $\mathbf{M}_{\max}$ $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կետը:

17. $\mathbf{M}_{\min}$ $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետը:

18. $\mathbf{f}_{\max}$ f ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի արժեքը (կամ պարզապես մաք– սիմումը):

19. $\mathbf{f}_{\min}$ f ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի արժեքը (կամ պարզապես մինի– մումը):

20. $\max \mathbf{f} = \max\limits_{\mathbf{M} \in \boldsymbol{\Omega}} \mathbf{f}(\mathbf{M})$ f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը դիտարկվող Ω բազմությունում:

21. $\min \mathbf{f} = \min\limits_{\mathbf{M} \in \boldsymbol{\Omega}} \mathbf{f}(\mathbf{M})$ f ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը դիտարկվող Ω բազմությունում:

Գլուխ 1

Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները

Ֆունկցիայի էքստրեմումների որոնումը և հայտնաբերումը ֆունկցիաների հետազոտման կարևորագույն տարրերից է: Սկսենք երկու անկախ փոփոխա–կանից կախված $z = f(x, y)$ ֆունկցիաների հետազոտումից: Շատ փոփոխա–կանից կախված ֆունկցիաների մեջ սա պարզագույն և միակ դեպքն է, երբ գրաֆիկների միջոցով կարելի է տեսանելի դարձնել և՛ ֆունկցիան, և՛ նրա էքստրեմումի կետերը, և՛ էքստրեմումները:

1.1 Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար: Թամբակետի գաղափարը:

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է որևէ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ հարթ բազմության մեջ և $M_0(x_0, y_0)$-ն այդ բազմության ներքին կետ է:

Սահմանում 1.1. *$M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետը կոչվում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մաքսիմումի կետ**, եթե գոյություն ունի $M_0(x_0, y_0)$ կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$*

շրջակայք, որտեղ $f(x,y)$ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը $M_0(x_0,y_0)$ կետում, այսինքն՝

$$\exists\, \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \qquad \forall\, M(x,y) \in \mathcal{U}(M_0): \qquad (1.1)$$

*Իսկ $z_0 = f(x_0,y_0)$ արժեքը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մաքսիմումի արժեք** կամ պարզապես **մաքսիմում**: Կգրենք $M_{\max} = M_0$ և $f_{\max} = z_0$ կամ $z_{\max} = z_0$:*

Նմանապես սահմանում են ֆունկցիայի մինիմումի կետը և մինիմումը:

Սահմանում 1.2. *$M_0(x_0,y_0) \in \Omega$ կետը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մինիմումի կետ**, եթե գոյություն ունի $M_0(x_0,y_0)$ կետի որևէ $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$ շրջակայք, որտեղ $f(x,y)$ ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը $M_0(x_0,y_0)$ կետում, այսինքն՝*

$$\exists\, \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \qquad \forall\, M(x,y) \in \mathcal{U}(M_0): \qquad (1.2)$$

*Իսկ $z_0 = f(x_0,y_0)$ արժեքը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի **(լոկալ) մինիմումի արժեք** կամ պարզապես **մինիմում**: Կգրենք $M_{\min} = M_0$ և $f_{\min} = z_0$ կամ $z_{\min} = z_0$:*

Կասենք նաև, որ $M_0(x_0,y_0)$ կետում $f(x,y)$ ֆունկցիան **խիստ մաքսիմում** կամ **խիստ մինիմում** ունի, եթե (1.1) և (1.2) պայմանների մեջ անհավասարության ոչ խիստ նշանները փոխարինենք խիստ նշաններով, այսինքն՝

$$\exists\, \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(x_0,y_0) > f(x,y) \quad \forall\, M(x,y) \in \mathcal{U}(M_0),\ M \neq M_0, \qquad (1.3)$$

կամ համապատասխանաբար

$$\exists\, \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(x_0,y_0) < f(x,y) \quad \forall\, M(x,y) \in \mathcal{U}(M_0),\ M \neq M_0 : \qquad (1.4)$$

Լոկալ մաքսիմումի և մինիմումի կետերը անվանում են **(լոկալ) էքստրեմումի կետեր**, իսկ (լոկալ) մաքսիմումները և մինիմումները՝ **(լոկալ) էքստրեմումներ**:

Դիտողություն 1.1. *Բերված սահմանումներում նշված անհավասարու-թյունները կարելի է արտահայտել ֆունկցիայի աճման տերմիններով: Նշանակելով $M_0(x_0, y_0)$ կետում ֆունկցիայի (լրիվ) աճը*

$$\boxed{\Delta f(M_0) \overset{def}{=} f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)}, \qquad M(x, y) \in \mathcal{U}(M_0),$$

կարելի է (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) *պայմանների մեջ անհավասարություն-ները համապատասխանորեն փոխարինել համարժեք անհավասարու-թյուններով,* $\Delta f(M_0) \leq 0$, $\Delta f(M_0) \geq 0$, $\Delta f(M_0) < 0$, $\Delta f(M_0) > 0$*:*

Դիտողություն 1.2. *Ֆունկցիայի (լոկալ) մաքսիմումի և մինիմումի արժեք-ները, որոնք նշանակվում են* $f_{\max}$, $f_{\min}$ *կամ* $z_{\max}$, $z_{\min}$*, չպետք է շփոթել տվյալ բազմության մեջ ֆունկցիայի **մեծագույն և փոքրագույն արժեք-ների** հետ: Դրանք կքննարկենք հետագայում՝ Բաժին 3.4-ում:*

Դիտողություն 1.3. *Մենք հիմնականում դիտարկելու ենք ներքին (լոկալ) էքստրեմումի կետեր: Հետագայում հնարավոր է՝ մեզ հանդիպեն նման սահմանմանը բավարարող ոչ թե ներքին* $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ *էքստրեմումի կետեր, այլ եզրային* $M_0(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ *«էքստրեմումի» կետեր: Այդ դեպքե-րում մենք հատուկ կնշենք նման երևույթը:*

Բերենք լոկալ էքստրեմումների երեք պարզ օրինակ:

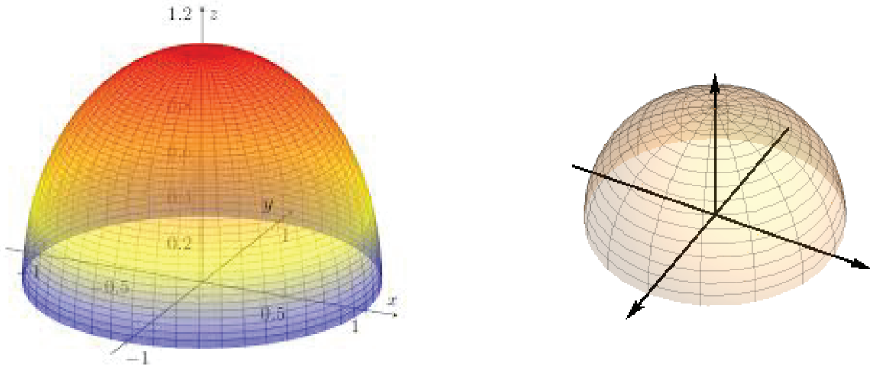
Օրինակ 1. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x, y) \overset{def}{=} \sqrt{1 - x^2 - y^2}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

ֆունկցիան: Հեշտ է տեսնել, որ f*-ի որոշման տիրույթը* $\overline{\mathbb{D}} \overset{def}{=} \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *միավոր փակ շրջանն է, իսկ արժեքների տիրույթը* $[0, 1]$ *փակ հատվածն է,*

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow [0, 1] :$$

Քանի որ ֆունկցիայի բանաձևը կարելի է արտագրել $x^2+y^2+z^2=1,\quad z\geq 0,$ *տեսքով, եզրակացնում ենք, որ* f *ֆունկցիայի գրաֆիկը կիսասֆերա է (վերին միավոր կիսասֆերա), տես գծ. 1 : Ակնհայտ է, որ* f *ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կետ ունի՝ խիստ մաքսիմումի կետ* $M_{\max}=(0,0)$, *և մաքսիմումի արժեքն է* $f_{\max}=1$*:*

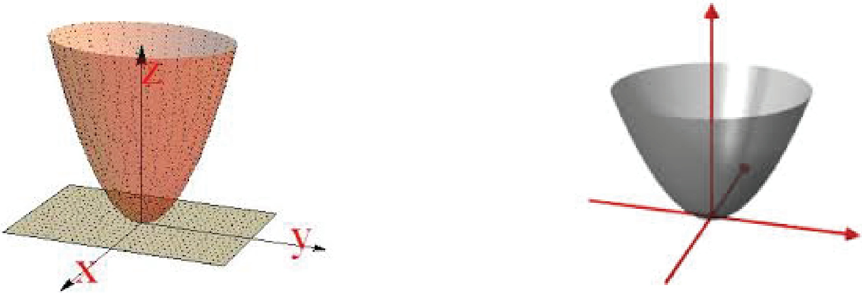


Գծ. 1

Օրինակ 2. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z=f(x,y)\overset{def}{=}x^2+y^2}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան: Հեշտ է տեսնել, որ f*-ի որոշման տիրույթը ամբողջ* $\mathbb{R}^2$ *հարթությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝* $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ *դրական կիսառանցքը: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացնում է էլիպտական պարաբոլոիդ* $(0,0)$ *գագաթով, տես գծ. 2: Ակնհայտ է, որ* f *ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կետ ունի՝ խիստ մինիմումի կետ* $M_{\min}=(0,0)$, *և մինիմումի արժեքն է* $f_{\min}=0$ *:*



Գծ. 2

Օրինակ 3. *Սահմանենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \overset{def}{=} (x-y)^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան: Ինչպես նախորդ օրինակում, f-ի որոշման տիրույթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ հարթությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ դրական կիսաառանցքը: Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան ունի անվերջ թվով ոչ խիստ մինիմումի կետեր, որոնք զբաղեցնում են $y = x$ ուղիղը՝ $M_{\min} = (x, x),\ x \in \mathbb{R}$, և մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = 0$: Հետաքրքիր է, որ f ֆունկցիան ոչ մի մաքսիմումի կետ չունի:

Մեր նպատակն է հայտնաբերել ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը: Կսկսենք լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանից: Հիշենք, որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանն իրենից փաստորեն ներկայացնում է Ֆերմայի հայտնի թեորեմը: Այժմ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար ունենք Ֆերմայի թեորեմի ընդհանրացումը:

Թեորեմ 1.1. *(Ֆերմա)*

Դիցուք $z = f(x,y)$ *ֆունկցիան որոշված է* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *տիրույթում և* $M_0(x_0,y_0) \in \Omega$ *կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե* $M_0(x_0,y_0)$ *կետում գոյություն ունեն* f *ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները,* $\exists \, \dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) \equiv f'_x(x_0,y_0)$ *և* $\exists \, \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) \equiv f'_y(x_0,y_0)$, *ապա դրանք հավասար են զրոյի՝* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0}$ *:*

Մասնակի ածանցյալներով վերջին պայմանը կարելի է արտագրել համար– ժեք տեսքով

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \operatorname{grad} f(M_0) = \vec{0}},$$

օգտագործելով M_0 կետում ֆունկցիայի գրադիենտը, որը մասնակի ածան– ցյալներով կազմված վեկտոր է՝

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \operatorname{grad} f(M_0) \overset{def}{=} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \right\}} :$$

Հիշելով ֆունկցիայի (լրիվ) դիֆերենցիալի տեսքը $M_0(x_0,y_0)$ կետում՝

$$\boxed{df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\, dy},$$

կարելի է Ֆերմայի թեորեմին մի փոքր այլ ձևակերպում տալ:

Թեորեմ 1.2. *(Ֆերմա)*

Դիցուք $z = f(x,y)$ *ֆունկցիան որոշված է* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *տիրույթում և* $M_0(x_0,y_0) \in \Omega$ *կետում դիֆերենցելի է և լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում* $M_0(x_0,y_0)$ *կետում* f*-ի դիֆերենցիալը նույնաբար զրո է՝* $\boxed{df(M_0) \equiv 0}$, *այսինքն՝*

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\, dy = 0$$

dx *և* dy *աճերի (դիֆերենցիալների) ցանկացած ընտրության դեպքում:*

Սահմանում 1.3. *Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$: Եթե M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի,*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0},$$

*ապա $M_0(x_0, y_0)$ կետը կոչվում է f **ֆունկցիայի ստացիոնար կետ**:*

Հաշվի առնելով այս սահմանումը՝ կարելի է վերաձևակերպել Ֆերմայի թեորեմը ստացիոնար կետի տերմիններով:

Թեորեմ 1.3. *(Ֆերմա)*

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե $M_0(x_0, y_0)$ կետում գոյություն ունեն f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, ապա $M_0(x_0, y_0)$-ն f-ի ստացիոնար կետ է:

Այլ կերպ ասած, տվյալ $M_0(x_0, y_0)$ կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալների գոյության պայմանի դեպքում լոկալ էքստրեմումի կետը միշտ ստացիոնար է,

$$\left(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքստրեմումի կետ է}\right) \Longrightarrow \left(M_0\text{-ն } f\text{-ի ստացիոնար կետ է}\right) \tag{1.5}$$

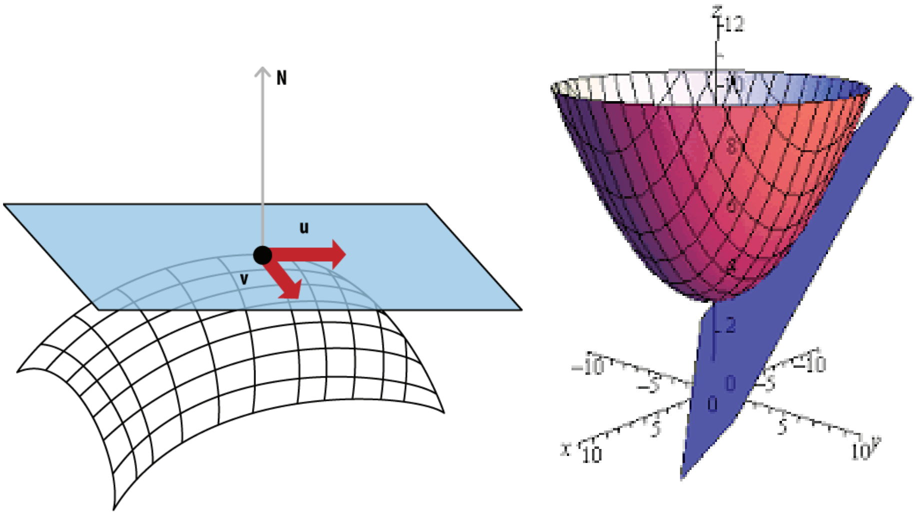
Մասնավորապես, դիտարկված Օրինակներ 1, 2, 3-ում բոլոր էքստրեմումի կետերը նաև ստացիոնար կետեր են:

Երկրաչափորեն ստացիոնար կետի փաստը նշանակում է, որ $M_0(x_0, y_0)$ տվյալ ստացիոնար կետում $f(x, y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի մակերևույթին կարելի է տանել շոշափող հարթություն, որը զուգահեռ է Oxy հարթությանը կամ համընկնում է նրա հետ: Իսկապես, շոշափող հարթության հավասարումն է

$$z = f(M_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0),$$

որը սպացիոնար կետի համար պարզունակ տեսք է ընդունում՝

$$z = f(M_0) \qquad \text{կամ} \qquad z = z_0 \, :$$



Գծ. 3

Նկատենք, որ եթե սպացիոնար կետում ֆունկցիան նաև մաքսիմում ունի, ապա այդ կետում տարված շոշափող հարթությունը ֆունկցիայի գրաֆիկի մակերևույթից վերև է գտնվում (եթե վերցնենք այդ մաքսիմումի կետի որոշակի փոքր շրջակայք): Այդ պատկերը կարելի է տեսնել գծ. 3-ում, իսկ Օրինակ 1-ում բերված ֆունկցիայի շոշափող հարթությունը $(0, 0)$ մաքսիմումի կետում $z = 1$ հորիզոնական հարթությունն է:

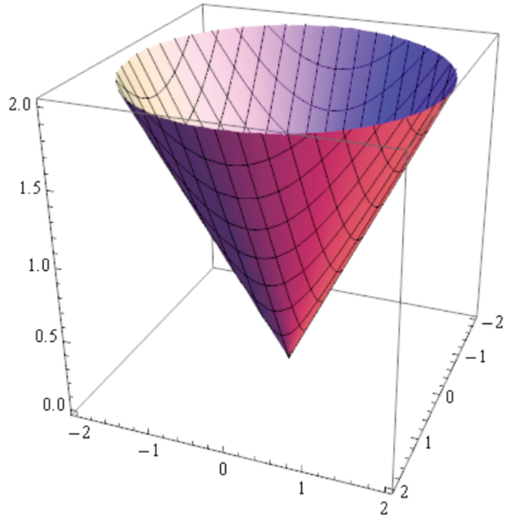
Իսկ եթե սպացիոնար կետում ֆունկցիան մինիմում ունի, ապա այդ կետում տարված շոշափող հարթությունը ֆունկցիայի գրաֆիկի մակերևույթից ներքև է գտնվում (եթե վերցնենք այդ մինիմումի կետի որոշակի փոքր շրջակայք): Այդ պատկերը կարելի է տեսնել Օրինակ 2-ում (գծ. 2), որում բերված ֆունկ– ցիայի շոշափող հարթությունը $(0, 0)$ մինիմումի կետում հորիզոնական է և համընկնում է Oxy կոորդինատական հարթության հետ ($z = 0$ հավասարումով) և գտնվում է պարաբոլոիդից ներքև:

Այժմ բերենք էքստրեմումի կետի այնպիսի օրինակ, որը ստացիոնար չէ:

Օրինակ 4. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2+y^2}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան: Հեշտ է տեսնել, որ f-ի որոշման տիրույթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ հարթությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ դրական կիսառանցքը: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացնում է անվերջ շրջանային կոն՝ $(0,0)$ գագաթով և Oz առանցքով: Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կետ ունի՝ խիստ մինիմումի կետ $M_{\min} = (0,0)$, և մինիմումի արժեքն է $f_{\min} = 0$:



Գծ. 4

Սակայն մյուս կողմից մինիմումի $M_{\min} = (0,0)$ կետը ստացիոնար կետ չէ, քանի որ այդ կետում f-ի մասնակի ածանցյալները գոյություն *չունեն,*

$$\nexists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$
$$\nexists\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{\Delta y^2}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}:$$

Դիտողություն 1.4. *Եթե Ֆերմայի թեորեմի մեջ $z=f(x,y)$ ֆունկցիան $M_0(x_0,y_0)\in\Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի, և M_0 կետում գոյություն ունի f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներից միայն մեկը, ապա հենց այդ մասնակի ածանցյալը հավասար կլինի զրոյի, իսկ երկրորդը՝ կարող է գոյություն չունենալ: Բերենք ստացիոնար կետ չհանդիսացող էքստրեմումի կետի այդպիսի օրինակ: Դիտարկենք*

$$\boxed{z=f(x,y)\overset{def}{=}x^2+|y|}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան: Դարձյալ f-ի որոշման տիրույթը ամբողջ $\mathbb{R}^2$ հարթությունն է, իսկ արժեքների տիրույթը՝ $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ դրական կիսառանցքը: Ակնհայտ է, որ f ֆունկցիան լոկալ էքստրեմումի կետ ունի՝ խիստ մինիմումի կետ $M_{\min}=(0,0)$, և մինիմումի արժեքն է $f_{\min}=0$: Մինչդեռ $M_{\min}=(0,0)$ կետում մասնակի ածանցյալներից մեկը գոյություն ունի (և ուրեմն՝ հավասար է զրոյի), իսկ երկրորդը գոյություն չունի,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2}{\Delta x}=0,$$
$$\nexists\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}:$$

Այսպիսով՝ լոկալ էքստրեմումի կետը կարող է լինել ինչպես ստացիոնար կետ, այնպես էլ չլինել ստացիոնար: Միավորելով Ֆերմայի թեորեմը ոչ ստացիոնար էքստրեմումի կետի դեպքի հետ՝ ստանում ենք լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը:

Թեորեմ 1.4. *(Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)*

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում $M_0(x_0, y_0)$ կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները կամ հավասար են զրոյի, կամ գոյություն չունեն:

Նշված $M_0(x_0, y_0)$ կետերին նոր անվանում տանք:

Սահմանում 1.4. *Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$: $M_0(x_0, y_0)$ կետը կանվանենք f* ***ֆունկցիայի կրիտիկական կետ****, եթե M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի կամ գոյություն չունեն:*

Ուրեմն՝ ստացիոնար կետերը կրիտիկական կետերի մի մասն են կազմում:

Հաշվի առնելով այս սահմանումը՝ կարելի է վերաձևակերպել վերջին թեորեմը կրիտիկական կետի տերմիններով:

Թեորեմ 1.5. *(Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)*

Դիցուք $z = f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում և $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում M_0-ն f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է:

Այլ կերպ ասած, լոկալ էքստրեմումի կետը միշտ կրիտիկական է,

$$\left(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքստրեմումի կետ է}\right) \Longrightarrow \left(M_0\text{-ն } f\text{-ի կրիտիկական կետ է}\right) \tag{1.6}$$

Հաշվի առնելով, որ կրիտիկական և մասնավորապես ստացիոնար կետերը տալիս են լոկալ էքստրեմումի միայն անհրաժեշտ պայմանը, կրիտիկական կետերը անվանում են նաև տվյալ ֆունկցիայի **էքստրեմումի հնարավոր կետեր**: Ստացված (1.5), (1.6) պնդումներից եզրակացնում ենք, որ

f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը որոնելիս, նախ պետք է գտնել f ֆունկցիայի ստացիոնար և բոլոր կրիտիկական կետերը:

Այնուամենայնիվ, Թեորեմներ 1.4 և 1.5-ում մենք ունենք լոկալ էքստրեմումի **միայն** անհրաժեշտ պայմանը, այսինքն՝ (1.5), (1.6) պնդումների հակադարձ պնդումները սխալ են:

Իսկապես, ցույց տանք, որ գոյություն ունեն ստացիոնար և կրիտիկական կետեր, որոնք էքստրեմումի կետեր չեն:

Օրինակ 5. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \overset{def}{=} xy} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

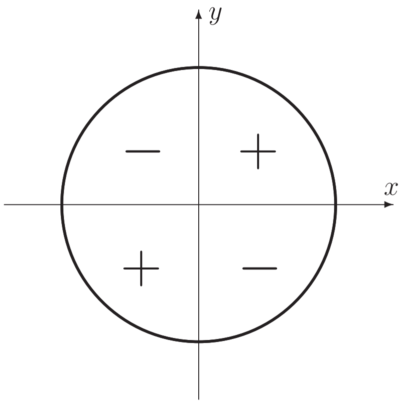
ֆունկցիան: Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը ներկայացնում է հիպերբոլական պարաբոլոիդ: Հեշտ է տեսնել, որ $(0,0)$ *կետում* f *ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = y\Big|_{(0,0)} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = x\Big|_{(0,0)} = 0,$$

և ուրեմն՝ $(0,0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է:*

Սակայն $(0,0)$ *սկզբնակետը* f *ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, որովհետև* $(0,0)$ *կետի ցանկացած շրջակայքում* f *ֆունկցիան ընդունում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ,*

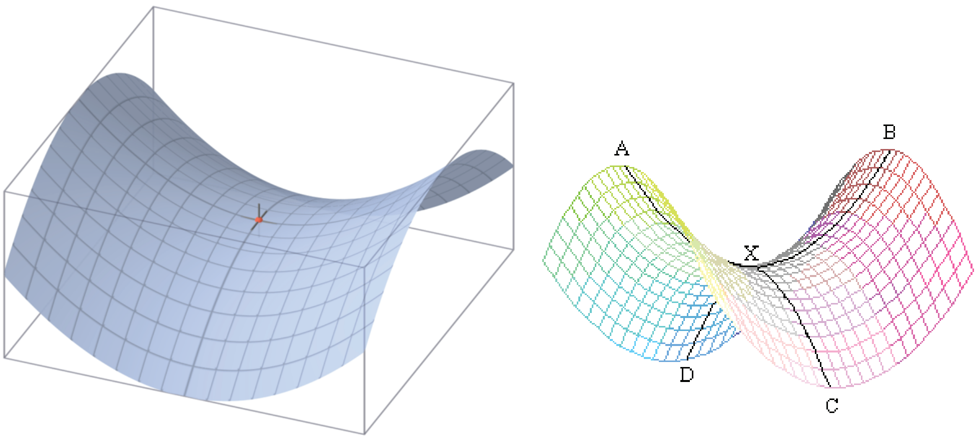
$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) > 0, \ \text{երբ} \ x,y > 0, \quad f(x,y) < 0, \ \text{երբ} \ x > 0, \ y < 0 :$$



Գծ. 5

Գծագիր 5-ում պատկերված է f *ֆունկցիայի որոշման տիրույթը,* (0,0) *սկզբնակետի կամայական շրջակայք, որտեղ* f *ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ: Եթե մենք դիտարկենք ֆունկցիայի գրաֆիկ հանդիսացող մակերևույթը (տես գծ. 6), ապա կարող ենք նկատել, որ* (0,0) *ստացիոնար կետի շրջակայքում այդ մակերևույթը հիշեցնում է թամբ կամ լեռնանցք՝ մի ուղղությամբ ուռուցիկ, իսկ մեկ այլ ուղղությամբ՝ գոգավոր: Նման դեպքում ստացիոնար կետն անվանում են* ***թամբակետ****: Թամբակետը, որոշակի իմաստով, մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների շրջման կետի նմանակն է շատ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում: Գրաֆիկի մակերևույթի տեսքից արդեն կարելի է հասկանալ, թե ինչու տվյալ ստացիոնար կետն էքստրեմումի կետ չէ:*

Սահմանում 1.5. *Ֆունկցիայի* ***թամբակետ*** *է կոչվում այդ ֆունկցիայի այն ստացիոնար կետը, որն էքստրեմումի կետ չէ:*



Գծ. 6

Հաջորդ օրինակը ցույց է տալիս, որ կրիտիկական կետը կարող է չլինել ո՛չ ստացիոնար, ո՛չ էլ էքստրեմումի կետ:

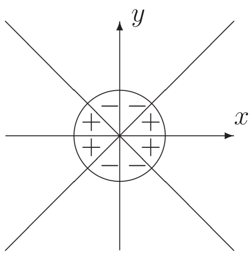
Օրինակ 6. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \overset{def}{=} |x| - |y|} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

ֆունկցիան: Հեշտ է տեսնել, որ $(0,0)$ *կետում* f *ֆունկցիան մասնակի ածանցյալներ չունի, և ուրեմն՝* f*-ի կրիտիկական կետ է, բայց ոչ ստացիոնար,*

$$\nexists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$
$$\nexists\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-|\Delta y|}{\Delta y} :$$

Մյուս կողմից՝ $(0,0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ, որովհետև* $f(0,0) = 0$ *և* $(0,0)$ *սկզբնակետի կամայական շրջակայքում* f *ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ, տե՛ս գծ. 7՝*



Գծ. 7

1.2 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Այժմ անցնենք լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանների ձևակերպումներին: Ինչպես տեսանք նախորդ բաժնի օրինակներում, անհրաժեշտ պայմանին բավարարող կետերը կարող են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր չլինել (այդպես է նաև ավելի պարզ մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար): Ուրեմն՝

մեզ պետք են հայտանիշներ՝ լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմաններով: Ստորև կբերենք մի քանի այդպիսի հայտանիշներ (թեորեմներ), որոնցում միշտ կենթադրենք, որ դիտարկվող կետը ստացիոնար է, այսինքն՝ M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0,$$

կամ f-ի առաջին կարգի դիֆերենցիալն է զրոյական՝

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\,dy \equiv 0, \qquad \forall\, dx, dy :$$

Դրանից հետո էքստրեմումի կետ լինելու կամ չլինելու համար վճռական նշանակություն կունենա M_0 կետում f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանը: Ընդունենք, որ դիտարկվող ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ ֆունկցիա է M_0 կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, այսինքն՝ $f(x,y) \in C^2\big(\mathcal{U}(M_0)\big)$ և դիտարկենք f-ի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը M_0 կետում՝

$$\begin{aligned} d^2 f(M_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 f(M_0) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)\,dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\,dy^2 = \qquad (1.7)\\ &= f''_{xx}(x_0,y_0)\,dx^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\,dxdy + f''_{yy}(x_0,y_0)\,dy^2 \end{aligned}$$

անկախ փոփոխականների dx և dy դիֆերենցիալների կամայական և բավականաչափ փոքր արժեքների համար: Այստեղ պետք է չմոռանալ, որ (1.7) և նմանօրինակ այլ դիֆերենցիալ բանաձևերում dx^2 և dy^2 արտահայտությունները ոչ թե x^2 կամ y^2 ֆունկցիաների դիֆերենցիալներ են, այլ dx և dy դիֆերենցիալների քառակուսիներ: Նույն դիտարկումը վերաբերում է նաև անկախ փոփոխականների աճերին՝

$$\boxed{dx^2 = (dx)^2, \qquad dy^2 = (dy)^2}, \qquad \boxed{\Delta x^2 = (\Delta x)^2, \qquad \Delta y^2 = (\Delta y)^2} :$$

Սա ընդունված գրելաձև է: Նույնը վերաբերում է ավելի բարձր աստիճաններին:

Թեորեմ 1.6. *Դիցուք* $M_0(x_0,y_0)$ *կետի ինչ-որ* $\mathcal{U}(M_0)$ *շրջակայքում* $f(x,y)\in C^2\big(\mathcal{U}(M_0)\big)$, *և* M_0 *կետը* $f(x,y)$ *ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է, այսինքն՝* $df(M_0)\equiv 0$*:*

1) *Եթե* $d^2f(M_0)>0 \quad \forall\, dx,dy, \quad dx^2+dy^2\neq 0$, *ապա* $M_0(x_0,y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մինիմումի կետ է՝* $M_0=M_{\min}$ *:*

2) *Եթե* $d^2f(M_0)<0 \quad \forall\, dx,dy, \quad dx^2+dy^2\neq 0$, *ապա* $M_0(x_0,y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մաքսիմումի կետ է՝* $M_0=M_{\max}$ *:*

3) *Եթե* $d^2f(M_0)$ *երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ), երբ* $dx^2+dy^2\neq 0$, *ապա* $M_0(x_0,y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ:*

4) *Եթե* $d^2f(M_0)\geq 0$ *կամ* $d^2f(M_0)\leq 0 \quad \forall\, dx,dy, \quad dx^2+dy^2\neq 0$, *ապա ստույգ ոչինչ ասել չենք կարող.* $M_0(x_0,y_0)$ *կետը կարող է ինչպես* f*-ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):*

Այսպիսով՝ համաձայն Թեորեմ 1.6-ի՝ էքստրեմումի առկայությունը որոշվում է ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանապահպանման հատկությամբ: Այն է՝ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը տվյալ կետում նշանափոխ է , ապա էքստրեմում լինել չի կարող: Իսկ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը տվյալ կետում պահպանում է (խիստ իմաստով) իր նշանը, ապա էքստրեմումն առկա է:

Հետագա ձևակերպումների համար հարմար է նշանակել f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները $M_0(x_0,y_0)$ կետում՝

$$\boxed{a_{11}\overset{def}{=}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)}, \qquad \boxed{a_{22}\overset{def}{=}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)},$$
$$\boxed{a_{12}\overset{def}{=}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)}, \qquad \boxed{a_{21}\overset{def}{=}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(M_0)} : \tag{1.8}$$

Քանի որ մենք ենթադրել էինք, որ դիփարկվող ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է, $f(x,y) \in C^2\big(\mathcal{U}(M_0)\big)$ ուրեմն՝ մասնավորապես, ըսփ Շվարցի հայփնի թեորեմի՝ f-ի երկրորդ կարգի խառը մասնակի ածանցյալները հավասար են՝

$$\boxed{a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0)} : \tag{1.9}$$

Այսպիսի նշանակումներով արփագրենք f ֆունկցիայի (1.7) երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$\boxed{d^2 f(M_0) = a_{11}\, dx^2 + 2a_{12}\, dxdy + a_{22}\, dy^2} : \tag{1.10}$$

Ըսփ էության՝ (1.10) երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն իրենից ներկայացնում է քառակուսի եռանդամ, որի նշանապահպանման հափկությունները վճռորոշ դեր են կափարում փվյալ $M_0(x_0, y_0)$ կեփի էքսփրեմումի կեփ լինել-չլինելու հարցում: Նշանակենք (1.10) եռանդամի փարբերիչը (դիսկրիմինանփը), ավելի ճիշփ նրա հակադիրը

$$\Delta \equiv \Delta(M_0) \stackrel{def}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացից հայփնի է, որ քառակուսի եռան–դամի նշանապահպանումը որոշվում է նրա փարբերիչի նշանով: Մասնավո–րապես, եթե փարբերիչը դրական է, ապա քառակուսի եռանդամը նշանափոխ է, և ուրեմն՝ փվյալ կեփում էքսփրեմում լինել չի կարող: Իսկ եթե փարբերիչը բացասական է, ապա քառակուսի եռանդամը պահպանում է իր նշանը, և ուրեմն՝ փվյալ կեփը էքսփրեմումի կեփ է: Ամբողջական և ճշգրիփ արդյունքը ձևակերպենք հեփևյալ թեորեմում:

Թեորեմ 1.7. *Դիցուք* $M_0(x_0, y_0)$ *կեփի ինչ-որ* $\mathcal{U}(M_0)$ *շրջակայքում՝* $f(x,y) \in C^2\big(\mathcal{U}(M_0)\big)$, *և* M_0 *կեփը* $f(x,y)$ *ֆունկցիայի սփացիոնար կեփ է, այսինքն՝* $df(M_0) \equiv 0$*: Ընդունենք* (1.8) *նշանակումները* M_0 *կեփում* f*-ի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալների համար և* (1.11) *փարբերիչի համար,* $\Delta \equiv \Delta(M_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ *: Այդ դեպքում ճիշփ են հեփևյալ պնդումները.*

1) *Եթե* $\Delta(M_0) > 0$, *ապա* $M_0(x_0, y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ էքստրեմումի կետ է, ընդ որում՝*

խիստ մինիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\min}$, *երբ* $a_{11} > 0$ *(կամ* $a_{22} > 0$*),*

խիստ մաքսիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\max}$, *երբ* $a_{11} < 0$ *(կամ* $a_{22} < 0$*):*

2) *Եթե* $\Delta(M_0) < 0$, *ապա* $M_0(x_0, y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի լոկալ էքստրե–մումի կետ չէ:*

3) *Եթե* $\Delta(M_0) = 0$, *ապա ստույգ ոչինչ ասել չենք կարող.* $M_0(x_0, y_0)$ *կետը կարող է ինչպես* f*-ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):*

Նշենք, որ Թեորեմ 1.6-ի **4)**-րդ կետի և Թեորեմ 1.7-ի **3)**-րդ կետի դեպքում, երբ թեորեմն ի զորու չէ պարզել M_0 կետի կարգավիճակը, սովորաբար դիմում են էքստրեմումի կետի սահմանմանը:

Այժմ բերենք մի քանի պարզ օրինակներ, որոնք ցույց կտան, թե ինչպես են զործում Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ում ներկայացված բավարար պայմանները:

Օրինակ 7. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x, y) \overset{def}{=} x^2 + y^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան (էլիպտական պարաբոլոիդ), որն արդեն քննարկել էինք Օրի–նակ 2-ում և պարզել, որ $M_{\min} = (0, 0)$ *սկզբնակետը* f*-ի մինիմումի կետ է:*

Ցույց տանք, որ էքստրեմումի կետերը կարելի է գտնել Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար պայմանների միջոցով:

Նախ գտնենք f*-ի ստացիոնար (կրիտիկական) կետերը: Դրա համար պետք է լուծել հետևյալ համակարգը*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (0,0)\text{-ն} \quad \text{միակ ստացիոնար կետն է}:$$

Այս փաստը պայիս է էքստրեմումի կետի առայժմ միայն անհրաժեշտ պայմանը: Գտնված $(0,0)$ *ստացիոնար կետը ֆունկցիայի* ***էքստրեմումի հնարավոր կետ է****: Ստուգելու համար, թե արդյոք* $(0,0)$ *ստացիոնար կետը իսկապես էքստրեմումի կետ կլինի, կիրառենք Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար պայմանները: Հաշվենք* f*-ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները,*

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 :$$

Կազմենք Δ *որոշիչը,*

$$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 :$$

Համաձայն Թեորեմ 1.7-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0,0)$ *կետը էքստրեմումի կետ է հանդիսանում դիտարկվող* f *ֆունկցիայի համար: Ավելին՝* $a_{11} = 2 > 0$ *պայմանն էլ նշանակում է, որ* $(0,0)$ *կետը մինիմումի կետ է,* $M_{\min} = (0,0)$*:*

Նույն եզրակացությանը կարելի է հանգել, եթե Թեորեմ 1.7-ի փոխարեն կիրառել Թեորեմ 1.6-ը: Իսկապես, դուրս գրենք f *ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը* $(0,0)$ *ստացիոնար կետում,*

$$d^2 f(0,0) = a_{11}\, dx^2 + 2a_{12}\, dxdy + a_{22}\, dy^2 = 2\, dx^2 + 2\, dy^2 = 2\left(dx^2 + dy^2\right) > 0 :$$

Ակնհայտ է, 2-րդ կարգի այս դիֆերենցիալը (խիստ) դրական է, երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$*: Ըստ Թեորեմ 1.6-ի՝ սա նշանակում է, որ* $(0,0)$ *կետը մինիմումի կետ է,* $M_{\min} = (0,0)$*, դիտարկվող* f *ֆունկցիայի համար:*

Այսպիսով՝ էքստրեմումի կետերի որոնումը և հայտնաբերումը կարելի է իրականացնել առնվազն երկու եղանակով, առաջինը՝ 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի միջոցով (Թեորեմ 1.6), երկրորդը՝ 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալներից կազմված որոշիչների միջոցով (Թեորեմ 1.7): Ընթերցողին ենք թողնում այս երկու եղանակներից ավելի հարմարի ընտրությունը:

Օրինակ 8. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \stackrel{def}{=} xy} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

ֆունկցիան (հիպերբոլական պարաբոլոիդ), որն արդեն քննարկել էինք Օրինակ 5-ում և պարզել, որ $(0,0)$ *սկզնակետը* f*-ի թամբակետ է, այսինքն՝ էքստրեմումի կետ չէ, թեև ստացիոնար կետ է (ընդ որում միակը),*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 :$$

Որպես ստացիոնար կետ՝ $(0,0)$ *սկզբնակետը* f *ֆունկցիայի էքստրե–մումի միակ հնարավոր կետն է: Այն, որ* $(0,0)$ *սկզբնակետը* f *ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, Օրինակ* **5**-*ում ապացուցել էինք էքստրեմումի բուն սահմանման միջոցով: Այժմ նույնը ցույց տանք Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար պայմանների միջոցով:*

Հաշվենք f*-ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները,*

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 :$$

Կազմենք Δ *որոշիչը,*

$$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 :$$

Համաձայն Թեորեմ 1.7-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0,0)$ *կետում դիտարկվող* f *ֆունկցիան էքստրեմում չունի:*

Նույն եզրակացությանը կարելի է հանգել, եթե Թեորեմ 1.7-ի փոխարեն կիրառել Թեորեմ 1.6-ը: Իսկապես, դուրս գրենք f *ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը* $(0,0)$ *ստացիոնար կետում,*

$$d^2 f(0,0) = a_{11}\, dx^2 + 2a_{12}\, dxdy + a_{22}\, dy^2 = 2\, dxdy :$$

Ակնհայտ է՝ 2-րդ կարգի այս դիֆերենցիալը նշանափոխ է, այսինքն՝ ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ փոքրեր dx *և* dy *աճերի համար, երբ* $dx^2 + dy^2 \neq 0$*:*

Համաձայն Թեորեմ 1.6-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0,0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:*

Դարձյալ, էքստրեմումի երկու բավարար պայմաններից (Թեորեմներ 1.6 և 1.7) ընթերցողը կիրառկման համար կարող է ընտրել ավելի դուրեկանը:

Ցավոք Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ում ներկայացված էքստրեմումի բավարար պայմանները ունիվերսալ միջոց չեն և ամենևին էլ բավարար չեն որոշ ֆունկցիաների համար: Բերենք համապատասխան օրինակներ:

Օրինակ 9. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \overset{def}{=} x^4 + y^4} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան: Էքստրեմումի սահմանումից ակնհայտ է, որ f *ֆունկցիան միայն մեկ լոկալ էքստրեմումի կետ ունի՝ խիստ մինիմումի կետ* $M_{\min} = (0,0)$ *: Բայց այժմ մեր նպատակն է հետազոտել ֆունկցիայի հնարավոր էքստրեմումները՝ կիրառելով Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի էքստրեմումի բավարար պայմանները: Հաշվելով առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները՝ համոզվում ենք, որ ֆունկցիան միայն մեկ ստացիոնար կետ ունի,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (0,0)\text{-ն} \quad \text{միակ ստացիոնար կետն է}:$$

Այս փաստը տալիս է էքստրեմումի կետի միայն անհրաժեշտ պայմանը, և $(0,0)$ *ստացիոնար կետը* f *ֆունկցիայի էքստրեմումի հնարավոր կետ է: Ստուգելու համար, թե արդյոք* $(0,0)$ *ստացիոնար կետը իսկապես էքստրեմումի կետ կլինի, կիրառենք Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար* *պայմանները: Հաշվենք f-ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 :$$

Կազմենք Δ որոշիչը,

$$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 :$$

Համաձայն Թեորեմ 1.7-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0,0)$ կետը ընդհանրապես ասած կարող է ինչպես f-ի էքստրեմումի կետ լինել այնպես էլ չլինել, և ուրեմն՝ պահանջվում է $(0,0)$ կետի լրացուցիչ հետազոտում, ինչը մենք արդեն կատարել էինք հետազոտման սկզբում:

Նույն անորոշ եզրակացությանը կարելի է հանգել, եթե Թեորեմ 1.7-ի փոխարեն կիրառել Թեորեմ 1.6-ը: Իսկապես, դուրս գրենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $(0,0)$ ստացիոնար կետում,

$$d^2 f(0,0) = a_{11}\, dx^2 + 2a_{12}\, dxdy + a_{22}\, dy^2 \equiv 0 :$$

*Ըստ Թեորեմ 1.6-ի **4)**-րդ կետի՝ սա նշանակում է, որ $(0,0)$ կետը կարող է ինչպես f-ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել, և ուրեմն՝ պահանջվում է $(0,0)$ կետի լրացուցիչ հետազոտում:*

Նման անորոշ վիճակում որպես կանոն արդյունավետ է դիմել էքստրեմումի կետի բուն սահմանմանը: Հենց դա մենք արել էինք սկզբում և հաստատել, որ $M_{\min} = (0,0)$:

Օրինակ 10. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \stackrel{def}{=} x^3 + y^3} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

ֆունկցիան:

Հաշվելով առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները՝ համոզվում ենք, որ ֆունկցիան միայն մեկ ստացիոնար կետ ունի,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (0,0)\text{-ն} \quad \text{միակ ստացիոնար կետն է :}$$

Այս փաստը տալիս է էքստրեմումի կետի միայն անհրաժեշտ պայմանը, և $(0,0)$ *ստացիոնար կետը* f *ֆունկցիայի էքստրեմումի հնարավոր կետ է: Ստուգելու համար, թե արդյոք* $(0,0)$ *ստացիոնար կետը իսկապես էքստրեմումի կետ կլինի, կիրառենք Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ի բավարար պայմանները: Հաշվենք* f*-ի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \qquad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \qquad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 :$$

Կազմենք Δ *որոշիչը,*

$$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 :$$

Համաձայն Թեորեմ 1.7-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0,0)$ *կետը ընդհանրապես ասած կարող է ինչպես* f*-ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել, և ուրեմն՝ պահանջվում է* $(0,0)$ *կետի լրացուցիչ հետազոտում:*

Նույն անորոշ եզրակացությանը կարելի է հանգել, եթե Թեորեմ 1.7-ի փոխարեն կիրառել Թեորեմ 1.6-ը: Իսկապես, դուրս գրենք f *ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը* $(0,0)$ *ստացիոնար կետում,*

$$d^2 f(0,0) = a_{11}\, dx^2 + 2a_{12}\, dxdy + a_{22}\, dy^2 \equiv 0 :$$

Ըստ Թեորեմ 1.6-ի ***4)****-րդ կետի՝ սա նշանակում է, որ* $(0,0)$ *կետը կարող է ինչպես* f*-ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել, և ուրեմն՝ պահանջվում է* $(0,0)$ *կետի լրացուցիչ հետազոտում:*

Նման անորոշ վիճակում որպես կանոն արդյունավետ է դիմել էքստրեմումի կետի բուն սահմանմանը: Դժվար չէ նկատել, որ $(0,0)$ սկզբնակետը f ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, որովհետև $(0,0)$ կետի ցանկացած շրջակայքում f ֆունկցիան ընդունում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ,

$$f(0,0)=0, \quad f(x,y)>0, \ \text{երբ} \ x,y>0, \quad f(x,y)<0, \ \text{երբ} \ x>0, \ y<0 :$$

Սկզբնակետի շրջակայքում f ֆունկցիայի նշանների դասավորությունը այնպիսին է, ինչպես պատկերված է գծ. 5-ում: Այսպիսով՝ $(0,0)$ սկզբնակետը f ֆունկցիայի թամբակետ է:

1.3 Բարձր կարգի դիֆերենցիալներով լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը

Ինչպես նշվեց նախորդ բաժնում, Թեորեմներ 1.6 և 1.7-ում ներկայացված էքստրեմումի բավարար պայմանները ունիվերսալ միջոց չեն և ամենևին էլ բավարար չեն որոշ ֆունկցիաների համար: Մասնավորապես, եթե փվյալ $M_0(x_0,y_0)$ կետը $f(M)=f(x,y)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է՝ $df(M_0)\equiv 0$, և նաև f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_0 կետում ևս նույնաբար զրո է՝ $d^2f(M_0)\equiv 0$, ապա Թեորեմ 1.6-ը ի զորու չէ որոշել, թե M_0 կետը էքստրեմումի կետ է թե՝ ոչ: Այսպիսով՝

$$\boxed{df(M_0)\equiv 0, \qquad d^2f(M_0)\equiv 0} \tag{1.12}$$

դեպքում հարցը մնում է բաց և անորոշ: Ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար, մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար էլ (1.12) անորոշ դեպքում, գոյություն ունեն բարձր կարգի

$$d^kf(M_0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx+\frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^k f(M_0), \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{1.13}$$

դիֆերենցիալներով ձևակերպված էքստրեմումի բավարար պայմաններ:

Թեորեմ 1.8. *Դիցուք* $M_0(x_0, y_0)$ *կետի ինչ-որ* $\mathcal{U}(M_0)$ *շրջակայքում* $f(M) = f(x,y)$ *ֆունկցիան* m $(m \in \mathbb{N})$ *անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է`* $f(x,y) \in C^m\big(\mathcal{U}(M_0)\big)$, *և բացի այդ`* M_0 *կետում*

$$df(M_0) \equiv 0, \quad d^2f(M_0) \equiv 0, \quad d^3f(M_0) \equiv 0, \quad \cdots, \quad d^{m-1}f(M_0) \equiv 0 :$$

1) *Եթե* m*-ը զույգ թիվ է և* $d^m f(M_0) > 0 \quad \forall\ dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, *ապա* $M_0(x_0, y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մինիմումի կետ է`* $M_0 = M_{\min}$ *:*

2) *Եթե* m*-ը զույգ թիվ է և* $d^m f(M_0) < 0 \quad \forall\ dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0$, *ապա* $M_0(x_0, y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մաքսիմումի կետ է`* $M_0 = M_{\max}$ *:*

3) *Եթե* m*-ը կենտ թիվ է և* $d^m f(M_0) > 0$ *կամ* $d^m f(M_0) < 0 \quad \forall \quad dx, dy$, $dx^2 + dy^2 \neq 0$, *ապա* $M_0(x_0, y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ:*

Բնականաբար չպետք է մտածել, թե Թեորեմ 1.8-ը տալիս է բոլոր դեպքերի պատասխանը, բայց որոշ դեպքերում նրա կիրառումն արդարացված է:

Օրինակ 11. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \stackrel{def}{=} x^4 + y^4} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան, որն արդեն քննարկել էինք Օրինակ 9-ում: Էքստրեմումի սահմանումից ակնհայտ է, որ $M_{\min} = (0,0)$ *:*

Փորձենք նույն արդյունքին հասնել կիրառելով Թեորեմ 1.8-ի էքստրեմումի բավարար պայմանները: Հաշվելով մասնակի ածանցյալները` համոզվում ենք, որ

$$df(0,0) \equiv 0, \quad d^2f(0,0) \equiv 0, \quad d^3f(0,0) \equiv 0, \quad d^4f(0,0) \not\equiv 0 :$$

Ամենացածր կարգի ոչ զրոյական դիֆերենցիալը 4-րդ կարգի է և հեշտ է այն հաշվել և պարզել նրա նշանը՝

$$d^4f(0,0) = 24(dx^4 + dy^4) > 0 \quad \forall\, dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0:$$

Ըստ Թեորեմ 1.8-ի՝ սա նշանակում է, որ $(0,0)$ *կետը* f*-ի մինիմումի կետ է՝* $M_{\min} = (0,0)$ *:*

Օրինակ 12. *5-րդ աստիճանի*

$$\boxed{z = f(x,y) \stackrel{def}{=} x^5 + y^5}$$

բազմանդամը միայն մեկ ստացիոնար կետ ունի՝ $(0,0)$ *սկզբնակետը,* $df(0,0) \equiv 0$*, ինչպես նախորդ Օրինակ 11-ում:*

Ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանը ըստ Թեորեմ 1.8-ի՝ հաշվելով ավելի բարձր կարգի դիֆերենցիալները՝

$$d^2f(0,0) \equiv 0, \qquad d^3f(0,0) \equiv 0, \qquad d^4f(0,0) \equiv 0,$$
$$d^5f(0,0) = 120(dx^5 + dy^5) \not\equiv 0 \quad \forall\, dx, dy, \quad dx^2 + dy^2 \neq 0:$$

Քանի որ $d^5f(0,0)$ *դիֆերենցիալն ակնհայտորեն նշանափոխ է, երբ* $dx^2 + dy^2 \neq 0$*, և գործ ունենք կենտ աստիճանի դիֆերենցիալի հետ, ապա համաձայն Թեորեմ 1.8,* **3)***-ի՝* $(0,0)$ *սկզբնակետը էքստրեմումի կետ չէ:*

Ճիշտ է, այս եզրակացությունն անմիջապես հետևում էր նաև էքստրեմումի կետի բուն սահմանումից, քանի որ $(0,0)$ *սկզբնակետը* f *ֆունկցիայի զրոն է, իսկ շրջակայքում ֆունկցիան նշանափոխ է:*

Գլուխ 2

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները

Այս գլխում կքննարկենք կամայական $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ թվով անկախ փոփոխականների

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիաների լոկալ էքստրեմումների հարցը: Էքստրեմումի անհրաժեշտ և բավարար պայմանները կամայական թվով անկախ փոփոխականների ֆունկցիաների համար նման են Գլուխ 1-ում քննարկված երկու անկախ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքին: Ստորև բերված թեորեմներն անմիջականորեն տարածում են նախորդ գլխի արդյունքները երկու անկախ փոփոխականի դեպքից շատ փոփոխականի դեպքի վրա: Բնականաբար ձևակերպումները տեխնիկապես ավելի բարդ և մեծածավալ կլինեն:

Ընդհանուր դեպքում մեզ անհրաժեշտ կլինեն որոշ փաստեր գծային հանրահաշվից, մասնավորապես, քառակուսային ձևերի մասին, որոնք թույլ կտան հստակեցնել և կարգավորել հայտանիշների ձևակերպումները:

2.1 Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Կդիտարկենք հետևյալ տեսքի մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են n-չափանի կամ մասնավորապես եռաչափ փիրույթում,

$$u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2,$$
$$u = f(M) = f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} :$$

Ենթադրենք $u = f(M)$ ֆունկցիան որոշված է որևէ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ բազմության մեջ և $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$-ն այդ բազմության ներքին կետ է:

Սահմանում 2.1. $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ *կետը կոչվում է* $f(M)$ *ֆունկցիայի* ***(լոկալ) մաքսիմումի կետ****, եթե գոյություն ունի* M_0 *կետի որևէ* $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$ *շրջակայք, որտեղ* $f(M)$ *ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը* M_0 *կետում, այսինքն՝*

$$\exists\, \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(M_0) \geq f(M) \qquad \forall\, M \in \mathcal{U}(M_0) : \tag{2.1}$$

Իսկ $u_0 = f(M_0)$ *արժեքը կոչվում է* $f(M)$ *ֆունկցիայի* ***(լոկալ) մաքսիմումի արժեք*** *կամ պարզապես* ***մաքսիմում****: Կգրենք* $M_{\max} = M_0$ *և* $f_{\max} = u_0$ *կամ* $u_{\max} = u_0$ *:*

Նմանապես սահմանում են ֆունկցիայի մինիմումի կետը և մինիմումը՝

Սահմանում 2.2. $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ *կետը կոչվում է* $f(M)$ *ֆունկցիայի* ***(լոկալ) մինիմումի կետ****, եթե գոյություն ունի* M_0 *կետի որևէ* $\mathcal{U}(M_0) \subset \Omega$ *շրջակայք, որտեղ* $f(M)$ *ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը* M_0 *կետում, այսինքն՝*

$$\exists\, \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(M_0) \leq f(M) \qquad \forall\, M \in \mathcal{U}(M_0) : \tag{2.2}$$

Իսկ $u_0 = f(M_0)$ *արժեքը կոչվում է* $f(M)$ *ֆունկցիայի* ***(լոկալ) մինիմումի արժեք*** *կամ պարզապես* ***մինիմում****: Կգրենք* $M_{\min} = M_0$ *և* $f_{\min} = u_0$ *կամ* $u_{\min} = u_0$ *:*

Կասենք նաև, որ M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիան **խիստ մաքսիմում** կամ **խիստ մինիմում** ունի, եթե (1.1) և (1.2) պայմանների մեջ անհավասարության ոչ խիստ նշանները փոխարինենք խիստ նշաններով, այսինքն՝

$$\exists\, \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(M_0) > f(M) \quad \forall\, M \in \mathcal{U}(M_0),\ M \neq M_0, \tag{2.3}$$

կամ համապատասխանաբար

$$\exists\, \mathcal{U}(M_0) \subset \Omega \quad s.t. \quad f(M_0) < f(M) \quad \forall\, M \in \mathcal{U}(M_0),\ M \neq M_0 : \tag{2.4}$$

Լոկալ մաքսիմումի և մինիմումի կետերը անվանում են **(լոկալ) էքստրեմումի կետեր**, իսկ (լոկալ) մաքսիմումները և մինիմումները՝ **(լոկալ) էքստրեմումներ**:

Դիտողություն 2.1. *Բերված սահմանումներում նշված անհավասարությունները կարելի է արտահայտել ֆունկցիայի աճման տերմիններով: Նշանակելով $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետում ֆունկցիայի (լրիվ) աճը՝*

$$\boxed{\Delta f(M_0) \stackrel{def}{=} f(M) - f(M_0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)},\ M \in \mathcal{U}(M_0)$$

կարելի է (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) *պայմանների մեջ անհավասարությունները համապատասխանորեն փոխարինել համարժեք անհավասարություններով,* $\Delta f(M_0) \leq 0,\ \Delta f(M_0) \geq 0,\ \Delta f(M_0) < 0,\ \Delta f(M_0) > 0$*:*

Դիտողություն 2.2. *Ֆունկցիայի (լոկալ) մաքսիմումի և մինիմումի արժեքները, որոնք նշանակվում են $f_{\max}$, $f_{\min}$ կամ $u_{\max}$, $u_{\min}$, չպետք է շփոթել տվյալ բազմության մեջ ֆունկցիայի* ***մեծագույն և փոքրագույն արժեքների*** *հետ: Դրանք կքննարկենք հետագայում, Բաժին 3.4-ում:*

Բացի այդ, լոկալ էքստրեմումի կետերը անվանում են նաև ***բացարձակ էքստրեմումի կետեր****, որպեսզի հետագայում դրանք չշփոթեն պայմանական էքստրեմումի կետերի հետ, որոնց կհետազոտենք Գլուխ 3-ում:*

Դիտողություն 2.3. *Մենք միշտ դիտարկելու ենք ներքին (լոկալ) էքստրեմումի կետեր: Հետագայում հնարավոր է՝ մեզ հանդիպեն նման սահմանմանը բավարարող ոչ թե ներքին $M_0 \in \Omega$ էքստրեմումի կետեր, այլ* *եզրային $M_0 \in \partial\Omega$ «էքստրեմումի» կետեր: Այդ դեպքերում մենք հատուկ կնշենք նման երևույթը:*

Մեր նպատակն է սովորել հայտնաբերել լոկալ էքստրեմումի կետերը: Սկսենք լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանից: Հիշենք, որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը իրենից փաստորեն ներկայացնում է Ֆերմայի հայտնի թեորեմը: Այժմ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար ունենք Ֆերմայի թեորեմի ընդլայնումը:

Թեորեմ 2.1. *(Ֆերմա)*

Դիցուք $u = f(M)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե M_0 կետում գոյություն ունեն f ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները,

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) \equiv f'_{x_1}(M_0),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) \equiv f'_{x_2}(M_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) \equiv f'_{x_n}(M_0),$$

ապա դրանք հավասար են զրոյի՝

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0 :$$

Մասնակի ածանցյալներով վերջին պայմանը կարելի է արտագրել համարժեք տեսքով

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \operatorname{grad} f(M_0) = \vec{0}},$$

օգտագործելով M_0 կետում ֆունկցիայի գրադիենտը, որը մասնակի ածանցյալներով կազմված վեկտոր է՝

$$\boxed{\nabla f(M_0) \equiv \operatorname{grad} f(M_0) \stackrel{def}{=} \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\right\}} :$$

Հիշելով ֆունկցիայի (լրիվ) դիֆերենցիալի տեսքը $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետում՝

$$\boxed{df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\, dx_n}$$

կարելի է Ֆերմայի թեորեմին մի փոքր այլ ձևակերպում տալ:

Թեորեմ 2.2. *(Ֆերմա)*

Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ կետում դիֆերենցելի է և լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում՝ M_0 կետում f-ի դիֆերենցիալը նույնաբար զրո է՝ $\boxed{df(M_0) \equiv 0}$:

Սահմանում 2.3. *Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$: Եթե M_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի,*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0, \quad \ldots \quad, \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0},$$

ապա M_0 կետը կոչվում է f ***ֆունկցիայի ստացիոնար կետ****:*

Հաշվի առնելով այս սահմանումը՝ կարելի է վերաձևակերպել Ֆերմայի թեորեմը ստացիոնար կետի տերմիններով:

Թեորեմ 2.3. *(Ֆերմա)*

Դիցուք $f(M)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0 \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Եթե M_0 կետում գոյություն ունեն $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները, ապա M_0-ն f-ի ստացիոնար կետ է:

Այլ կերպ ասած՝ տվյալ M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալների գոյության պայմանի դեպքում, լոկալ էքստրեմումի կետը միշտ ստացիոնար է,

$$\left(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքստրեմումի կետ է}\right) \Longrightarrow \left(M_0\text{-ն } f\text{-ի ստացիոնար կետ է}\right) \tag{2.5}$$

Օրինակ 4-ում բերված է մի ֆունկցիա, որի էքստրեմումի կետը ստացիոնար չէ:

Դիտողություն 2.4. *Եթե Ֆերմայի թեորեմի մեջ $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$: կետում լոկալ էքստրեմում ունի և M_0 կետում գոյություն ունի $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներից ոչ բոլորը՝ այլ մի քանիսը, ապա հենց այդ մասնակի ածանցյալները հավասար կլինեն զրոյի, իսկ մյուսները կարող են գո–յություն չունենալ:*

Այսպիսով՝ լոկալ էքստրեմումի կետը կարող է ստացիոնար կետ լինել, այնպես էլ չլինել ստացիոնար: Միավորելով Ֆերմայի թեորեմը ոչ ստացիոնար էքստրեմումի կետի դեպքի հետ՝ ստանում ենք լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը:

Թեորեմ 2.4. *(Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)*

Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները կա՛մ հավասար են զրոյի, կա՛մ գոյություն չունեն:

Նկարագրված M_0 կետերին նոր անվանում տանք:

Սահմանում 2.4. *Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$: M_0 կետը կանվանենք $f(M)$* ***ֆունկցիայի կրիտիկական կետ****, եթե M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի կամ գոյություն չունեն:*

Ուրեմն՝ ստացիոնար կետերը կրիտիկական կետերի մի մասն են կազմում:

Հաշվի առնելով այս սահմանումը՝ կարելի է վերաձևակերպել վերջին թեո–րեմը կրիտիկական կետի տերմիններով:

Թեորեմ 2.5. *(Լոկալ էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)*

Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան որոշված է $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ տիրույթում և $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ կետում լոկալ էքստրեմում ունի: Այդ դեպքում M_0-ն f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է:

Այլ կերպ ասած՝ լոկալ էքստրեմումի կետը միշտ կրիտիկական է,

$$\Big(M_0\text{-ն } f\text{-ի էքստրեմումի կետ է}\Big) \Longrightarrow \Big(M_0\text{-ն } f\text{-ի կրիտիկական կետ է}\Big) \tag{2.6}$$

Հաշվի առնելով, որ կրիտիկական և մասնավորապես ստացիոնար կետերը տալիս են լոկալ էքստրեմումի միայն անհրաժեշտ պայմանը, կրիտիկական կետերը անվանում են նաև տվյալ ֆունկցիայի **էքստրեմումի հնարավոր կետեր**:

Ստացված (2.5), (2.6) պնդումներից եզրակացնում ենք, որ

f **ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը որոնելիս, նախ պետք է գտնել** f **ֆունկցիայի ստացիոնար և բոլոր կրիտիկական կետերը:**

Այնուամենայնիվ՝ Թեորեմներ 2.4 և 2.5-ում մենք ունենք լոկալ էքստրեմումի **միայն** անհրաժեշտ պայմանները, այսինքն՝ (2.5), (2.6) պնդումների հակադարձները սխալ են: Որպես հասպապող օրինակներ կարելի է դիտարկել Օրինակներ 4 և 6-ը:

2.2 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Այժմ անցնենք լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանների ձևակերպումներին: Ինչպես տեսանք նախորդ բաժնի օրինակներում, անհրաժեշտ պայմանին բավարարող կետերը կարող են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր չլինել (այդպես է նաև ավելի պարզ մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար): Ուրեմն՝ մեզ պետք են հայտանիշներ (թեորեմներ) լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմաններով: Սկզբում կբերենք մի քանի այդպիսի հայտանիշներ, որոնցում միշտ կենթադրենք, որ դիտարկվող կետը ստացիոնար է, այսինքն՝ $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետում $f(M)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0, \quad \ldots \quad , \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0,$$

կամ f-ի առաջին կարգի դիֆերենցիալն է զրոյական

$$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\, dx_n \equiv 0 \qquad \forall\, dx_i \ (i = \overline{1, n}\,) :$$

Դրանից հետո էքստրեմումի կետ լինելու կամ չլինելու համար վճռական նշանակություն կունենա M_0 կետում f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանը: Ընդունենք, որ դիտարկվող ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է M_0 կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, $f(M) \in C^2\big(\mathcal{U}(M_0)\big)$ և դիտարկենք f-ի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը M_0 կետում,

$$\begin{aligned} d^2 f(M_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n\right)^2 f(M_0) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_i\, dx_j \end{aligned} \tag{2.7}$$

անկախ փոփոխականների dx_i դիֆերենցիալների կամայական և բավականաչափ փոքր արժեքների համար:

Թեորեմ 2.6. *Դիցուք $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում, $f(M)$ ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է, $f(M) \in C^2\big(\mathcal{U}(M_0)\big)$, և M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$:*

1) *Եթե f-ի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ դրական է անկախ փոփոխականների կամայական $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ աճերի (դիֆերենցիալների) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն,*

$$d^2 f(M_0) > 0 \quad \forall\, dx_i \ (i = \overline{1, n}\,), \quad dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \neq 0,$$

ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մինիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\min}$:

2) *Եթե f-ի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ բացասական է անկախ փոփոխականների կամայական $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ աճերի (դիֆերենցիալների) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն,*

$$d^2 f(M_0) < 0 \quad \forall\, dx_i\ (i = \overline{1, n}\,), \quad dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \neq 0,$$

ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մաքսիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\max}$:

3) *Եթե $d^2 f(M_0)$ երկրորդ դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ), երբ $dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \neq 0$, ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ:*

4) *Եթե $d^2 f(M_0) \geq 0$ կամ $d^2 f(M_0) \leq 0$ $\forall\, dx_i$, $dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \neq 0$, ապա սրույց ոչինչ ասել չենք կարող, M_0 կետը կարող է ինչպես f-ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):*

Այսպիսով՝ համաձայն Թեորեմ 2.6-ի՝ էքստրեմումի առկայությունը որոշվում է ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի նշանապահպանման հատկությամբ: Այն է՝ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը տվյալ կետում նշանափոխ է , ապա էքստրեմում լինել չի կարող: Իսկ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը տվյալ կետում պահպանում է իր նշանը (խիստ իմաստով), ապա էքստրեմումն առկա է:

Օրինակ 13. *Գտնենք*

$$\boxed{u = f(M) = f(x, y, z) \overset{def}{=} x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումները: Ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է ամբողջ որոշման տիրույթում, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, ինչը թույլ է տալիս կիրառել *վերջին թեորեմը: Նախ և առաջ, գտնենք f ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների միջոցով: Կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝*

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2 = 0 \\ f'_y = 2y + 4 = 0 \\ f'_z = 2z - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases} \qquad M_0(-1, -2, 3) :$$

Ստացանք, որ $f(M)$ ֆունկցիան ընդամենը մեկ ստացիոնար կետ ունի՝ M_0-ն: Ստուգենք՝ արդյոք M_0 կետը էքստրեմումի կետ է թե՝ ոչ: Հաշվենք $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները՝

$$f''_{xx}(M) = 2, \qquad f''_{xy}(M) = 0,$$
$$f''_{yy}(M) = 2, \qquad f''_{xz}(M) = 0,$$
$$f''_{zz}(M) = 2, \qquad f''_{yz}(M) = 0 :$$

Կազմենք $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$\begin{aligned} d^2 f(M) &= f''_{xx}(M)\, dx^2 + f''_{yy}(M)\, dy^2 + f''_{zz}(M)\, dz^2 + \\ &\quad + 2f''_{xy}(M)\, dx\, dy + 2f''_{xz}(M)\, dx\, dz + 2f''_{yz}(M)\, dy\, dz = \\ &= 2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) > 0, \qquad \text{եթե} \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 : \end{aligned}$$

*Քանի որ 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ դրական է, երբ $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, ապա համաձայն Թեորեմ 2.6, **1)**-ի $M_0(-1, -2, 3)$ ստացիոնար կետը $f(M)$ ֆունկցիայի միակ մինիմումի կետն է, $\boxed{M_{\min} = M_0(-1, -2, 3)}$: Հաշվենք նաև $f(M)$ ֆունկցիայի համապատասխան մինիմումի արժեքը՝*

$$f_{\min} = f(M_0) = (-1)^2 + (-2)^2 + 3^2 - 2 - 4 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = -14 :$$

Ի դեպ, քանի որ մինիմումի կետը միակն է, ապա ստացված $f_{\min} = -14$ մինիմումը հանդիսանում է նաև $f(M)$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեք՝ $\boxed{\min\limits_{M \in \mathbb{R}^3} f(M) = f_{\min} = -14}$:

Օրինակ 14. *Հետազոտենք*

$$\boxed{u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{def}{=} x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիան լոկալ էքստրեմումների առումով: Ֆունկցիան անվերջ դիֆե- րենցելի է ամբողջ որոշման տիրույթում, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, *և սկզբում գտնենք* f *ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը առաջին կարգի մասնակի ածան- ցյալների միջոցով: Կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝*

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ f'_y = 2y + 12x = 0 \\ f'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 72x = 0 \\ y = -6x \\ z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x - 24) = 0 \\ y = -6x \\ z = -1 \end{cases}$$

Համոզվում ենք, որ համակարգն ունի երկու լուծում, այսինքն $f(M)$ *ֆունկցիան երկու ստացիոնար կետ ունի՝*

$$M_1(0, 0, -1), \qquad M_2(24, -144, -1) :$$

Այժմ ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները M_1 *և* M_2 *ստացիո- նար կետերի համար: Հաշվենք* $f(M)$ *ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները՝*

$$\begin{aligned} f''_{xx}(M) &= 6x, & f''_{xy}(M) &= 12, \\ f''_{yy}(M) &= 2, & f''_{xz}(M) &= 0, \\ f''_{zz}(M) &= 2, & f''_{yz}(M) &= 0 : \end{aligned}$$

Կազմենք $f(M)$ *ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝*

$$\begin{aligned} d^2 f(M) = f''_{xx}(M)\, dx^2 + f''_{yy}(M)\, dy^2 + f''_{zz}(M)\, dz^2 + \\ + 2f''_{xy}(M)\, dx\, dy + 2f''_{xz}(M)\, dx\, dz + 2f''_{yz}(M)\, dy\, dz = \\ = 6x\, dx^2 + 2\, dy^2 + 2\, dz^2 + 2 \cdot 12\, dx\, dy = \\ = 2\Big(3x\, dx^2 + dy^2 + dz^2 + 12\, dx\, dy\Big) : \end{aligned}$$

Ստացիոնար M_1 և M_2 կետերը ստուգենք հաջորդաբար: Նախ, կազմենք $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_1 կետերում և պարզենք նրա նշանը՝

$$d^2 f(M_1) = d^2 f(0,0,-1) = 2\Big(dy^2 + dz^2 + 12\,dx\,dy\Big) :$$

Ցույց տանք, որ վերջին արտահայտությունը նշանափոխ է փոքր dx, dy, dz աճերի համար: Իսկապես,

եթե վերցնենք $dx = dy = 0, \quad dz \neq 0, \quad$ *ապա* $d^2 f(M_1) = 2\,dz^2 > 0,$

իսկ եթե $dx = -dy \neq 0, \quad dz = 0, \quad$ *ապա* $d^2 f(M_1) = -22\,dy^2 < 0 :$

*Քանի որ 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_1 կետում նշանափոխ է, երբ $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, ապա համաձայն Թեորեմ 2.6, **3)**-ի $M_1(0,0,-1)$ ստացիոնար կետը $f(M)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:*

Այժմ ստուգենք էքստրեմումի բավարար պայմանները M_2 ստացիոնար կետի համար: Կազմենք $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_2 կետերում և պարզենք նրա նշանը՝

$$d^2 f(M_2) = d^2 f(24,-144,-1) = 2\Big(3\cdot 24\,dx^2 + dy^2 + dz^2 + 12\,dx\,dy\Big) = \\ = 2\Big(72\,dx^2 + 12\,dx\,dy + dy^2\Big) + 2\,dz^2 :$$

Դժվար չէ նկատել, որ $72\,dx^2 + 12\,dx\,dy + dy^2$ համասեռ քառակուսի եռանդամը խիստ դրական է, երբ $dx^2 + dy^2 \neq 0$: Դրանում կարելի է համոզվել, անջատելով լրիվ քառակուսին կամ հաշվելով նրա տարբերիչը՝

$$\text{Discriminant} = 12^2 - 4\cdot 72 = 144 - 288 = -144 < 0 :$$

Ուրեմն՝

$$d^2 f(M_2) = 2\Big(72\,dx^2 + 12\,dx\,dy + dy^2\Big) + 2\,dz^2 > 0, \quad \text{երբ} \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 :$$

*Համաձայն Թեորեմ 2.6, **1)**-ի M_2 ստացիոնար կետը $f(M)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ է, $\boxed{M_{\min} = M_2(24,-144,-1)}$: Հաշվենք նաև $f(M)$ ֆունկցիայի համապատասխան մինիմումի արժեքը՝ $f_{\min} = f(M_2) = -6913$:*

Նկատենք, որ բերված Թեորեմ 2.6-ը երկու անկախ փոփոխականների դեպքին վերաբերող Թեորեմ 1.6-ի փարածումն է n անկախ փոփոխականի դեպքի վրա: Մեր հաջորդ նպատակն է n փոփոխականի դեպքի վրա տարածել նաև Թեորեմ 1.7-ը, որը էքստրեմումի բավարար պայման է տալիս ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալների միջոցով: Դրա համար մեզ անհրաժեշտ կլինեն որոշ փաստեր գծային հանրահաշվից, մասնավորապես քառակուսային ձևերից: Թեև հաջորդ բաժինը շատ օգտակար է էքստրեմումի հարցում, այնուամենայնիվ, ընթերցողը կարող է շրջանցել այն, եթե ցանկանում է խուսափել հանրահաշվական հավելյալ հասկացություններից:

2.3 Որոշ տեղեկություններ հանրահաշվից քառակուսային ձևերի մասին

Էքստրեմումի հարցում, ինչպես ցույց է տալիս Թեորեմ 2.6-ը, ֆունկցիայի 2-րդ կարգի (2.7) դիֆերենցիալը վճռական դեր է կատարում և այն արժանի է հատուկ հետազոտման: Փաստորեն 2-րդ կարգի (2.7) դիֆերենցիալը

$$\boxed{d^2f(M_0)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_i\,dx_j} \tag{2.8}$$

իրենից ներկայացնում է անկախ փոփոխականների dx_i աճերից (դիֆերենցիալներից) կախված բազմանդամ (ընդ որում՝ 2-րդ աստիճանի համասեռ):

Հարմար է նշանակել գործակիցները՝ $\boxed{a_{ij}=\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i\,\partial x_j}}$ $i,j=\overline{1,n}$ և dx_i աճերը (դիֆերենցիալները) մեկ այլ տառով:

Սահմանում 2.5. $y_1,y_2,\dots,y_n\in\mathbb{R}$ *փոփոխականների*

$$\boxed{Q\equiv Q(y)\equiv Q(y_1,y_2,\dots,y_n)\stackrel{def}{=}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,y_i\,y_j},\qquad a_{ij}=a_{ji},$$

*պեսքի ֆունկցիան անվանում են **քառակուսային ձև**: Քառակուսային ձևի* $a_{ij} = const \in \mathbb{R}$ *գործակիցներից կազմված*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

քառակուսի մատրիցը կոչվում է Q ***քառակուսային ձևի մատրից**:*

Դիտողություն 2.5. *Եթե քառակուսային ձևի* A *մատրիցի մեջ բացահայտ ենթադրենք, որ* a_{ij} *գործակիցները դիտարկվող* $f(M) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալներն են* M_0 *կետում*

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \, \partial x_j}, \qquad i, j = \overline{1, n},$$

ապա ստացված

$$A \equiv \left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \, \partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^n f}{\partial x_n \, \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

մատրիցն անվանում են f *ֆունկցիայի **Հեսսեի մատրից** (տվյալ* M_0 *կետում) կամ կարճ՝ **հեսսիան**:*

Սահմանման մեջ դրված $a_{ij} = a_{ji}$ պայմանը բնական է, որովհետև այն համապատասխանում է խառը մասնակի ածանցյալների հավասարությանը՝

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_j \, \partial x_i} :$$

Բացի այդ, $a_{ij} = a_{ji}$ պայմանը նշանակում է, որ A մատրիցը **սիմետրիկ** է, այլ կերպ ասած A մատրիցը համընկնում է իր շրջված (տրանսպոնացված) մատրիցի հետ՝ $A = A^T$:

Մասնավորապես, $n = 2$ երկչափ և $n = 3$ եռաչափ դեպքերում քառակուսային ձևը և նրա մատրիցը ներկայացվում են այսպես՝

$$Q = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1\,y_2 + a_{22}y_2^2, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$Q = a_{11}y_1^2+a_{22}y_2^2+a_{33}y_3^2+2a_{12}y_1\,y_2+2a_{13}y_1\,y_3+2a_{23}y_2\,y_3,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}:$$

Անհրաժեշտության դեպքում Q քառակուսային ձևը կարելի է ներկայացնել մատրիցային տեսքով՝ օգտագործելով նրա մատրիցը, y_i փոփոխականներից կազմված մեկ տող և մեկ սյուն,

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,y_i\,y_j = y^T A\,y = \begin{pmatrix} y_1\,y_2\,\cdots\,y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

որտեղ նշանակված է սյան տեսքով վեկտոր՝ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

Սահմանում 2.6. *Դիցուք տրված է*

$$Q \equiv Q(y) \equiv Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,y_i\,y_j = y^T A\,y$$

քառակուսային ձևը:

1) *$Q(y)$ քառակուսային ձևը կոչվում է* ***դրական որոշյալ****, եթե $Q(y)$-ն ընդունում է միայն դրական արժեքներ բոլոր ոչ զրոյական $y \neq 0$*

վեկտորների համար, այսինքն՝ երբ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *փոփոխականները միաժամանակ զրո չեն,*

$$Q(y) > 0, \qquad \text{երբ} \quad \forall\, y \neq 0 \quad \text{կամ} \quad y_1^2 + \cdots + y_n^2 \neq 0 :$$

2) $Q(y)$ *քառակուսային ձևը կոչվում է* ***բացասական որոշյալ***, *եթե* $Q(y)$*-ն ընդունում է միայն բացասական արժեքներ բոլոր ոչ զրոյական* $y \neq 0$ *վեկտորների համար, այսինքն՝ երբ* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *փոփոխականները միաժամանակ զրո չեն,*

$$Q(y) < 0, \qquad \text{երբ} \quad \forall\, y \neq 0 \quad \text{կամ} \quad y_1^2 + \cdots + y_n^2 \neq 0 :$$

3) $Q(y)$ *քառակուսային ձևը կոչվում է* ***ոչ բացասական որոշյալ*** *(կամ* ***դրական կիսաորոշյալ****), եթե* $Q(y)$*-ն ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ բոլոր* $y \in \mathbb{R}^n$ *վեկտորների համար, և նաև ընդունում է զրո արժեքը ինչ-որ ոչ զրոյական* $y' \in \mathbb{R}^n$ *վեկտորի համար,*

$$Q(y) \geq 0, \quad \text{երբ} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \text{և} \quad \exists\, y' \in \mathbb{R}^n,\, y' \neq 0 \quad s.t. \quad Q(y') = 0 :$$

4) $Q(y)$ *քառակուսային ձևը կոչվում է* ***ոչ դրական որոշյալ*** *(կամ* ***բացասական կիսաորոշյալ****), եթե* $Q(y)$*-ն ընդունում է միայն ոչ դրական արժեքներ բոլոր* $y \in \mathbb{R}^n$ *վեկտորների համար, և նաև ընդունում է զրո արժեքը ինչ-որ ոչ զրոյական* $y' \in \mathbb{R}^n$ *վեկտորի համար,*

$$Q(y) \leq 0, \quad \text{երբ} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \text{և} \quad \exists\, y' \in \mathbb{R}^n,\, y' \neq 0 \quad s.t. \quad Q(y') = 0 :$$

5) $Q(y)$ *քառակուսային ձևը կոչվում է* ***նշանաորոշյալ***, *եթե նա կամ դրական, կամ բացասական որոշյալ է:*

6) $Q(y)$ *քառակուսային ձևը կոչվում է* ***կիսաորոշյալ*** *կամ* ***քվազինշանաորոշյալ***, *եթե նա կամ դրական, կամ բացասական կիսաորոշյալ է:*

7) $Q(y)$ *քառակուսային ձևը կոչվում է* ***նշանափոխ*** *(կամ* ***նշանաանորոշ****),* *եթե նա ընդունում է ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ:*

Օրինակ 15. *1.* $\boxed{Q(y_1, y_2, y_3) \stackrel{def}{=} y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2}$ *քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է,* $Q(y_1, y_2, y_3) > 0 \quad \forall\, y = (y_1, y_2, y_3),\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \neq 0$*:*

2. $\boxed{Q(y_1, y_2, y_3) \stackrel{def}{=} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3}$ *քառակուսային ձևը դրական կիսաորոշյալ է, քանի որ*

$Q(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2 + y_3)^2 \geq 0 \quad \forall\, y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$*, ընդ որում*

$Q(y_1, y_2, y_3) = 0,$ *երբ* $y_1 = -y_2 - y_3 \neq 0$*:*

3. $\boxed{Q(y_1, y_2, y_3) \stackrel{def}{=} y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3}$ *քառակուսային ձևը նշանափոխ է, քանի որ* $Q(1, 0, 0) = 1 > 0,\ Q(0, 1, 0) = -1 < 0$*:*

Քառակուսային ձևերի նշանաորոշվածության հատկության համար մի քանի հայտանիշներ կան: Ամենահարմար հայտանիշը, թերևս, Սիլվեստրի հայտնի հայտանիշն է:

Դիտարկենք որևիցե մի քառակուսային ձև

$$\boxed{Q \equiv Q(y) \equiv Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, y_i\, y_j}, \qquad a_{ij} = a_{ji}, \tag{2.9}$$

որի մատրիցն է

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}:$$

Սահմանենք հետևյալ որոշիչները՝

$$\Delta_1 \overset{def}{=} a_{11}, \qquad \Delta_2 \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \cdots$$

$$\Delta_k \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \qquad \cdots \quad \Delta_n \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

որոնք կոչվում են A **մատրիցի անկյունային** (կամ **գլխավոր) մինորներ**:

Թեորեմ 2.7. *(Սիլվեստրի հայտանիշը)*

1) *Որպեսզի* (2.9) *քառակուսային ձևը դրական որոշյալ լինի անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մատրիցի բոլոր անկյունային մինորները դրական լինեն՝*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \cdots \quad , \Delta_n > 0: \tag{2.10}$$

2) *Որպեսզի* (2.9) *քառակուսային ձևը բացասական որոշյալ լինի անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մատրիցի անկյունային մինորները նշանահերթափոխ լինեն, ընդ որում առաջին մինորը լինի բացասական, այսինքն՝*

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \cdots \quad , (-1)^n\Delta_n > 0: \tag{2.11}$$

3) *Որպեսզի* (2.9) *քառակուսային ձևը ոչ բացասական որոշյալ (դրական կիսաորոշյալ) լինի անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մատրիցի բոլոր անկյունային մինորները ոչ բացասական լինեն՝*

$$\Delta_1 \geq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \geq 0, \quad \cdots \quad , \Delta_n \geq 0, \tag{2.12}$$

ընդ որում՝ գոյություն ունի զրոյական անկյունային մինոր, $\exists\, \Delta_k = 0$ *ինչ-որ* k*-ի համար:*

4) *Որպեսզի* (2.9) *քառակուսային ձևը ոչ դրական որոշյալ (բացասական կիսաորոշյալ) լինի անհրաժեշտ է և բավարար, որ կատարվի հե–տևյալ պայմանը*

$$\Delta_1 \leq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \leq 0, \quad \cdots \quad , (-1)^n \Delta_n \geq 0, \tag{2.13}$$

ընդ որում՝ գոյություն ունի զրոյական անկյունային մինոր, $\exists\, \Delta_k = 0$ *ինչ-որ* k*-ի համար:*

5) *Եթե* A *մատրիցի անկյունային մինորները բավարարում են* (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) *պայմաններից տարբերվող մեկ այլ պայմանին, ապա* (2.9) *քառակուսային ձևը նշանափոխ (նշանաանորոշ) է:*

Դիտողություն 2.6. *Յանկացած սիմետրիկ քառակուսի* $A = (a_{ij})$ *մատ–րիցին նույնպես կարելի է վերագրել Սահմանում 2.6-ում տեղ գտած նշանաորոշյալ, կիսաորոշյալ կամ նշանաանորոշ լինելու հատկություն–ները: Պարզապես այդ մատրիցի* a_{ij} *տարրերից կարելի է կազմել*

$$Q \equiv Q(y) \equiv Q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, y_i\, y_j = y^T A\, y$$

քառակուսային ձև և կրկնել Թեորեմ 2.7-ի ***1)-5)*** *կետերի պայմանները:*

2.4 Լոկալ էքստրեմումի բավարար պայմանը մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների համար (շարունակություն)

Օգտվելով Սահմանում 2.6-ի մեջ պարունակվող հանրահաշվական հասկա–ցություններից, կարելի է վերաձևակերպել Թեորեմ 2.6-ը:

Թեորեմ 2.8. *Դիցուք* $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *կետի ինչ-որ* $\mathcal{U}(M_0)$ *շրջակայքում,* $f(M)$ *ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է՝* $f(M) \in C^2\big(\mathcal{U}(M_0)\big)$*, և* M_0 *կետը*

$f(M)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$: Բացի այդ՝ M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները նշանակենք

$$a_{ij} \overset{def}{=} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \, \partial x_j}, \qquad i, j = \overline{1, n},$$

և դրանցից կազմենք

$$Q \equiv Q(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \equiv d^2 f(M_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \, dx_i \, dx_j \tag{2.14}$$

քառակուսային ձևն իր $A = (a_{ij})$ մատրիցով:

1) *Եթե Q քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է, ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մինիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\min}$:*

2) *Եթե Q քառակուսային ձևը բացասական որոշյալ է, ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մաքսիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\max}$:*

3) *Եթե Q քառակուսային ձևը նշանափոխ (նշանաանորոշ) է, ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ :*

4) *Եթե Q քառակուսային ձևը կիսաորոշյալ է, ապա ստույգ ոչինչ ասել չենք կարող. M_0 կետը կարող է ինչպես f-ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում) :*

Կիրառելով Թեորեմ 2.7-ում ներկայացված Սիլվեստրի հայտանիշը՝ կարելի է ձևակերպել այդ հայտանիշով արտահայտված էքստրեմումի բավարար պայ–մանը:

Թեորեմ 2.9. *Դիցուք $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ կետի ինչ-որ $\mathcal{U}(M_0)$ շրջակայքում $f(M)$ ֆունկցիան 2-րդ կարգի ողորկ է՝ $f(M) \in C^2\big(\mathcal{U}(M_0)\big)$, և M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է, այսինքն՝ $df(M_0) \equiv 0$: Բացի* *այդ՝ M_0 կետում $f(M)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները նշանակենք*

$$a_{ij} \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad i,j = \overline{1,n},$$

և դրանցից կազմենք $A = (a_{ij})$ մատրիցը:

1) *Եթե A մատրիցի բոլոր անկյունային մինորները դրական են*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \cdots \quad , \Delta_n > 0, \tag{2.15}$$

ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մինիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\min}$:

2) *Եթե A մատրիցի անկյունային մինորները նշանահերթափոխ են, ընդ որում՝ առաջին մինորը բացասական է, այսինքն՝*

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \cdots \quad , (-1)^n \Delta_n > 0, \tag{2.16}$$

ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի (խիստ) լոկալ մաքսիմումի կետ է, $M_0 = M_{\max}$:

3) *Եթե Q քառակուսային ձևը նշանափոխ (նշանաանորոշ) է, ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ :*

4) *Դիցուք տեղի ունի կիսաորոշվածության պայմաններից որևէ մեկը՝*

$$\Delta_1 \geq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \geq 0, \quad \cdots \quad , \Delta_n \geq 0, \tag{2.17}$$

կամ

$$\Delta_1 \leq 0, \quad \Delta_2 \geq 0, \quad \Delta_3 \leq 0, \quad \cdots \quad , (-1)^n \Delta_n \geq 0, \tag{2.18}$$

ընդ որում՝ գոյություն ունի զրոյական անկյունային մինոր, $\exists\, \Delta_k = 0$ ինչ-որ k-ի համար: Այդ դեպքում սրույց ոչինչ ասել չենք կարող. M_0 կետը կարող է ինչպես f-ի էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում) :

5) *Եթե A մատրիցի անկյունային մինորները բավարարում են* (2.15), (2.16), (2.17), (2.18) *պայմաններից տարբերվող մեկ այլ պայմանին, ապա M_0 կետը $f(M)$ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ չէ :*

Նկատենք, որ Թեորեմ 2.9-ը n-չափանի դեպքի վրա է տարածում երկու փոփոխականի դեպքին վերաբերող Թեորեմ 1.7-ը, որում մասնակցում էին անկյունային մինորներից առաջին երկուսը միայն:

Օրինակ 16. *Գտնենք*

$$\boxed{u = f(M) = f(x, y, z) \stackrel{def}{=} 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիայի էքստրեմումները: Նախ նկատենք, որ ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է ամբողջ որոշման տիրույթում, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, և դիֆերենց– ման հետ խնդիր առաջանալ չի կարող: Գտնենք ֆունկցիայի ստացիո– նար կետերը, իսկ դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} f'_x = 4x - y + 2z = 0 \\ f'_y = -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ f'_z = 2x + 2z = 0 : \end{cases}$$

Լուծելով համոզվում ենք, որ համակարգն ունի միայն երկու լուծում՝

$$M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad M_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) :$$

Սրանք f ֆունկցիայի ստացիոնար կամ էքստրեմումի հնարավոր կետերն են: Այժմ անցնենք ֆունկցիայի էքստրեմումի բավարար պայմանների ստուգմանը: Հաշվենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները՝

$$f''_{xx}(M) = 4, \qquad f''_{xy}(M) = -1,$$
$$f''_{yy}(M) = 6y, \qquad f''_{xz}(M) = 2,$$
$$f''_{zz}(M) = 2, \qquad f''_{yz}(M) = 0 :$$

Կազմենք f ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը և դիտարկենք այն որպես քառակուսային ձև,

$$\begin{aligned} d^2 f(M) = f''_{xx}(M)\,dx^2 + f''_{yy}(M)\,dy^2 + f''_{zz}(M)\,dz^2 + \\ + 2f''_{xy}(M)\,dx\,dy + 2f''_{xz}(M)\,dx\,dz + 2f''_{yz}(M)\,dy\,dz = \\ = 4\,dx^2 + 6y\,dy^2 + 2\,dz^2 - 2\,dx\,dy + 4\,dx\,dz, \end{aligned}$$

որի մատրիցը կստանա հետևյալ տեսքը` $A \equiv A(M) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

Հետազոտենք նախ $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ *ստացիոնար կետի էքստրեմումի բավարար պայմանները: Քառակուսային* $d^2 f(M)$ *ձևի մատրիցը* M_1 *կետում կընդունի հետևյալ տեսքը`*

$$A(M_1) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

Հաշվենք $A(M_1)$ *մատրիցի անկյունային (գլխավոր) մինորները,*

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0 : \tag{2.19}$$

Քանի որ $A(M_1)$ *մատրիցի անկյունային բոլոր մինորները դրական են, ապա համաձայն Թեորեմ 2.9-ի`* $M_1$ *կետը* $f$ *ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է`* $M_{\min} = M_1$*:*

Նշենք, որ (2.19) *պայմանները, այն է`* $A(M_1)$ *մատրիցի անկյունային բոլոր մինորների դրական լինելը` ըստ Սիլվեստրի հայտանիշի (Թեորեմ 2.7) նշանակում է, որ* $A(M_1)$ *մատրիցը կամ նրան համապատասխանող քառակուսային* $d^2 f(M_1)$ *ձևը դրական որոշյալ են, ինչը համաձայն Թեորեմ 2.8-ի` նույնպես հաստատում է, որ* $M_1$ *կետը* $f$ *ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է`* $M_{\min} = M_1$*:*

Այժմ հետազոտենք $M_2\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ *ստացիոնար կետի էքստրեմումի բավարար պայմանները: Քառակուսային* $d^2f(M)$ *ձևի մատրիցը* M_2 *կետում կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$A(M_2)=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}:$$

Հաշվենք $A(M_2)$ *մատրիցի անկյունային (գլխավոր) մինորները,*

$$\Delta_1=4>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-13<0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-14<0: \tag{2.20}$$

(2.20) *պայմանները մատնանշում են, որ* $A(M_2)$ *մատրիցը ո՛չ նշանա–որոշյալ է, ո՛չ էլ կիսաորոշյալ և չի բավարարում Թեորեմ 2.9-ի* ***1)-4)*** *պայմաններին, այլ բավարարում է Թեորեմ 2.9-ի* ***5)****-րդ պայմանին, ինչից եզրակացնում ենք, որ* M_2 *կետը էքստրեմումի կետ չէ:*

Նույն եզրակացությանը կարելի է հանգել, եթե դիտարկենք $d^2f(M_2)$ *քառակուսային ձևը,*

$$\begin{aligned} d^2f(M_2) &= f''_{xx}(M_2)\,dx^2+f''_{yy}(M_2)\,dy^2+f''_{zz}(M_2)\,dz^2+ \\ &\qquad + 2f''_{xy}(M_2)\,dx\,dy+2f''_{xz}(M_2)\,dx\,dz+2f''_{yz}(M_2)\,dy\,dz= \\ &= 4\,dx^2-3\,dy^2+2\,dz^2-2\,dx\,dy+4\,dx\,dz: \end{aligned}$$

Ցույց տանք, որ $d^2f(M_2)$ *քառակուսային ձևը նշանափոխ է: Իսկապես, եթե վերցնենք* $dy=dz=0$ *և* $dx\neq 0$, *ապա կստանանք* $d^2f(M_2)=4\,dx^2>0$*: Իսկ եթե վերցնենք* $dx=dz=0$ *և* $dy\neq 0$, *ապա կստանանք* $d^2f(M_2)=-3\,dy^2<0$*: Քառակուսային* $d^2f(M_2)$ *ձևի նշանափոխությունը ըստ Թեորեմ 2.8-ի՝ դարձյալ ցույց է տալիս, որ* M_2 *կետը էքստրեմումի կետ չէ:*

Գլուխ 3

Ֆունկցիայի պայմանական (հարաբերական) էքստրեմումները: Լագրանժի մեթոդը

Նախորդ գլուխներում քննարկված էքստրեմումի կետերն անվանում են լոկալ, բացարձակ, սովորական կամ ոչ պայմանական: Ի տարբերություն դրանց՝ այս գլխում քննարկվող պայմանական (կամ հարաբերական) էքստրեմումի կետերը պետք է բավարարեն որոշ լրացուցիչ պայմաններին:

3.1 Խնդրի դրվածքը երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Պարզաբանենք պայմանական էքստրեմումի հասկացությունը մի պարզ օրինա– կով:

Օրինակ 17. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \overset{def}{=} \sqrt{1-x^2-y^2}}$$

ֆունկցիան, որի որոշման տիրույթը $\overline{\mathbb{D}} := \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ *փակ միավոր շրջանն է, իսկ գրաֆիկը վերին միավոր կիսասֆերան: Այս ֆունկցիան արդեն հետազոտել էինք Օրինակ 1-ում և պարզել, որ* f *ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի միակ կետն է սկզբնակետը՝ լոկալ մաքսիմումի կետ,* $M_{\max} = (0, 0)$ *: Սրանով լոկալ և բացարձակ էքստրեմումի խնդիրը լիովին լուծված է:*

Այժմ մի փոքր այլ խնդիր ձևակերպենք: Գտնել տվյալ f *ֆունկցիայի էքստրեմումները ոչ թե նրա ամբողջ* $\overline{\mathbb{D}}$ *որոշման տիրույթում, այլ* $\overline{\mathbb{D}}$*-ի ինչ-որ ենթաբազմության վրա՝ ինչ-որ կորի կամ հատվածի վրա, օրինակ գտնենք ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները* $y = 1 - x$ *ուղղի այն հատվածի վրա, որն ընկած է որոշման տիրույթում: Ուղղի հավասարումն արտագրենք համարժեք տեսքով՝*

$$\boxed{\varphi(x, y) \overset{def}{=} x + y - 1 = 0}, \tag{3.1}$$

*որն անվանում են **կապի հավասարում**: Էքստրեմումի դրված խնդիրը կարճ կարելի է ներկայացնել այսպես՝*

$$\begin{cases} f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x, y) \equiv x + y - 1 = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Ուրեմն՝ մեր նպատակն է լուծել պայմանական էքստրեմումի (3.2) *խնդիրը* (3.1) *կապի հավասարման առկայության դեպքում: Իսկ* (3.2) *խնդրի ակնկալվող լուծումները՝ որպես* $\mathbb{R}^2$ *հարթության կետեր կանվանենք **պայմանական էքստրեմումի կետեր*** $\varphi(x, y) = 0$ *կորի վրա կամ* (3.1) *կապի հավասարման դեպքում:*

Նկատենք, որ եթե $\varphi(x, y) = 0$ *կորը անցներ բացարձակ էքստրեմումի կետով, ապա այդպիսի պայմանական էքստրեմումի կետը կհամընկներ բացարձակ էքստրեմումի* $M_{\max} = (0, 0)$ *կետի հետ: Սակայն* (3.2) *խնդրի* (3.1) *կապի հավասարման կորը չի անցնում սկզբնակետով և ուրեմն՝ կունենա պայմանական էքստրեմումի այլ կետեր:*

Քանի որ մենք փաստորեն դիտարկում ենք ոչ թե ամբողջ f ֆունկ– ցիան, այլ միայն նրա նեղացումը $\varphi(x,y) \equiv x+y-1=0$ ուղղի վրա, ապա (3.2) խնդիրը հեշտությամբ կլուծվի, եթե անմիջականորեն տեղադրենք կապի $y=1-x$ հավասարումը f ֆունկցիայի բանաձևի մեջ և ձևակեր– պենք սովորական էքստրեմումի խնդիր՝

$$f(x,y)\Big|_{y=1-x} = f(x,1-x) = \sqrt{1-x^2-(1-x)^2} \longmapsto \text{extr.}, \qquad x \in [0,1] :$$

Ստացված միաչափ և սովորական էքստրեմումի խնդիրն արագ լուծվում է սովորական ածանցյալի միջոցով՝

$$f(x,1-x) = \sqrt{1-x^2-(1-x)^2} = \sqrt{2x(1-x)}, \qquad x_{\max} = \frac{1}{2} :$$

Այստեղից էլ ստանում ենք, որ (3.1) կապի հավասարմանը բավարարող $M_{\max} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետը միակ պայմանական էքստրեմումի (մաքսիմումի) կետն է, իսկ պայմանական մաքսիմումի արժեքը կլինի $f_{\max} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

Ինչպես տեսանք, պայմանական էքստրեմումի խնդիրը հեշտությամբ լուծ– վեց կապի հավասարման անմիջական տեղադրմամբ ֆունկցիայի բանաձևի մեջ: Սա հնարավոր եղավ առաջին հերթին կապի հավասարման պարզության շնորհիվ, երբ y-ը բացահայտ արտահայտվեց x-ի միջոցով՝ $y=y(x)$:

Եթե $\varphi(x,y)=0$ կապի հավասարումը թույլ է տալիս մի փոքր ավելի ընդհանուր *պարամետրական* ներկայացում,

$$\varphi(x,y)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1,$$

ապա անմիջական տեղադրման եղանակը դեռևս հնարավոր է: Ստացվող

$$z = f\big(x(t), y(t)\big) \longmapsto \text{extr.} \qquad t_0 \le t \le t_1, \tag{3.3}$$

ֆունկցիան կախված է միայն մեկ t անկախ փոփոխականից և դարձյալ պայ–մանական էքստրեմումի (3.2) խնդիրը հանգում է (3.3) սովորական էքստրե–մումի խնդրին:

Ավելի բարդ դեպք ենք ունենում, երբ $\varphi(x,y)=0$ կապի հավասարումից չենք կարող x և y փոփոխականներից մեկը բացահայտ արտահայտել մյուսով, կամ համարժեք պարամետրական հավասարումներով ներկայացնել: Դարձյալ ենթադրում ենք, որ $\varphi(x,y)=0$ կապի հավասարումը որոշում է մեկ փոփոխա–կանի $y=y(x)$ ֆունկցիա, որն արդեն իրենից կներկայացնի *անբացահայտ ֆունկցիա*,

$$\varphi(x,y)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y=y(x) \quad \text{անբացահայտ ֆունկցիա :}$$

Թեև $y=y(x)$ ֆունկցիայի բացահայտ տեսքն այժմ չունենք, այնուամենայնիվ ձևականորեն կարելի է այն տեղադրել $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի մեջ և համարել, որ հարցը բերվում է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումի հետազոտմանը՝

$$z=f\bigl(x,y(x)\bigr) \longmapsto \text{extr.} \qquad x_0\le x\le x_1 : \tag{3.4}$$

Հետազոտումը շարունակելու համար պահանջվում է (3.4) բարդ ֆունկցիան ածանցել (բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնով)՝

$$z'_x=f'_x+f'_y\,y'_x : \tag{3.5}$$

Այստեղից էլ կարիք է առաջանում հաշվել $y=y(x)$ անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը, ինչը կարելի է անել անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցման հայտնի բանաձևով կամ անմիջականորեն ածանցելով $\varphi(x,y)=0$ կապի հավասարումը ըստ x-ի՝ համարելով, որ y-ը կախյալ է x-ից՝

$$0=\frac{d}{dx}\,\varphi\bigl(x,y(x)\bigr)=\varphi'_x+\varphi'_y\,y'_x : \tag{3.6}$$

Լրացուցիչ ենթադրելով, որ $\varphi'_y\neq 0$, ստանում ենք անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$\boxed{y'_x=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}} : \tag{3.7}$$

Տեղադրելով (3.7)-ը (3.5)-ի մեջ, ստանում ենք (3.4) z բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$z'_x = f'_x - f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} : \tag{3.8}$$

Էքստրեմումի որոնումը պահանջում է, որ նախ և առաջ պետք է գտնենք ստացիոնար կետերը, և ուրեմն՝ (3.8) ածանցյալը հավասարեցնենք զրոյի՝

$$z'_x = f'_x - f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = 0 : \tag{3.9}$$

Այսպիսով պայմանական հնարավոր էքստրեմումի կետերը պետք է բավարարեն (3.9) և կապի հավասարումներին՝

$$f'_x - f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = 0, \qquad \varphi(x,y) = 0 : \tag{3.10}$$

Ստացանք հավասարումների համակարգ, որը կարելի է ներկայացնել ավելի հարմար համաչափ տեսքով: Դրա համար ներմուծենք նոր օժանդակ պարամետր

$$-\lambda \overset{def}{=} \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}, \tag{3.11}$$

որտեղ $(-)$ նշանը պարտադիր չէ և դրված է զուտ տեխնիկական հարմարության առումով: Օգտվելով λ պարամետրից, (3.10) համակարգը արտագրվում է այսպես՝

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 : \end{cases} \tag{3.12}$$

Այսպիսով (3.12) համակարգը տալիս է $f(x,y)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի **անհրաժեշտ պայմանը** $\varphi(x,y) = 0$ կապի հավասարման դեպ– քում: Հիշենք, որ մենք փորձում ենք լուծել

$$\begin{cases} f(x,y) \ \longmapsto \ \text{extr.} \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

պայմանական էքստրեմումի խնդիրը: Կազմելով և լուծելով (3.12) համակարգը՝ մենք կստանանք պայմանական հնարավոր էքստրեմումի բոլոր կետերը (ստացիոնար կետերը), որոնցից դեռ պետք է ընտրենք իսկապես պայմանական էքստրեմումի կետերը:

(3.12) համակարգին ավելի ամփոփ տեսք տալու համար կազմում են հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$\boxed{L(x,y) \equiv L(x,y,\lambda) \overset{def}{=} f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)}, \qquad (x,y) \in D, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.14}$$

որտեղ (x,y) կետը փոփոխվում է իր (որոշման) $D \subset \mathbb{R}^2$ հարթ տիրույթում, իսկ λ-ն անորոշ պարամետր է:

Սահմանված L ֆունկցիան անվանում են **Լագրանժի ֆունկցիա**, λ պարամետրը՝ **Լագրանժի բազմապատկիչ** կամ **Լագրանժի անորոշ գործակից**, և առհասարակ պայմանական էքստրեմումի նկարագրված եղանակը անվանում են **Լագրանժի մեթոդ**:

Հեշտ է տեսնել, որ (3.12) համակարգի բոլոր երեք հավասարումների ձախ մասերը Լագրանժի L ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն են՝

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 : \end{cases} \tag{3.15}$$

Մենք փաստորեն ապացուցեցինք պայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը, որը Լագրանժի ֆունկցիայի միջոցով հետևյալ ձևակերպումը կստանա:

Թեորեմ 3.1. *Դիցուք $z = f(x,y)$ և $\varphi(x,y)$ ֆունկցիաները որոշված են և ողորկ են $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ տիրույթում, $f(x,y), \varphi(x,y) \in C^1(\Omega)$, և $M_0(x_0,y_0) \in \Omega$ կետը f-ի պայմանական էքստրեմումի կետ է $\varphi(x,y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում: Բացի այդ, $M_0(x_0,y_0)$ կետում $\varphi(x,y)$ ֆունկցիայի գրադիենտը զրոյական վեկտոր չէ, այսինքն՝ $\varphi'_x(x_0,y_0)$ և $\varphi'_y(x_0,y_0)$ ածանցյալները միաժամանակ զրո չեն:*

Այդ դեպքում գոյություն ունի $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ արժեք այնպիսին, որ (x_0, y_0, λ_0) եռյակը բավարարում է (3.15) համակարգին, այսինքն՝ Լագրանժի L ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է:

Բնականաբար պայմանական էքստրեմումի (3.16) խնդիրը լիովին լուծելու համար մեզ անհրաժեշտ կլինի ստանալ պայմանական էքստրեմումի ոչ միայն անհրաժեշտ, այլ նաև բավարար պայմանները: Լագրանժի նկարագրված մեթոդը այնքան արդյունավետ է, որ թույլ է տալիս այդ բավարար պայմանները ամփոփ ձևակերպել Լագրանժի ֆունկցիայի տերմիններով: Հիմնական միտքը հետևյալն է՝

$f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը համարժեք է f-ի Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական լոկալ էքստրեմումի խնդրին:

Այժմ ավելի ճշգրիտ ձևակերպենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը:

Թեորեմ 3.2. *(Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը)*

Դրված է 2-րդ կարգի ողորկ $f(x, y)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը $\varphi(x, y) = 0$ կապի հավասարման դեպքում, այսինքն՝

$$\begin{cases} f(x,y) \ \longmapsto \ \text{extr.} \\ \varphi(x,y) = 0 : \end{cases} \tag{3.16}$$

Դիցուք $M_0(x_0, y_0)$ կետը ինչ-որ $\lambda = \lambda_0$ արժեքի դեպքում $f(x, y)$ ֆունկցիայի Լագրանժի $L(x, y) \equiv L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է, այսինքն՝ $dL(x_0, y_0) \equiv 0$, կամ

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) + \lambda_0\varphi'_x(x_0,y_0) = 0 \\ f'_y(x_0,y_0) + \lambda_0\varphi'_y(x_0,y_0) = 0 \\ \varphi(x_0,y_0) = 0 : \end{cases} \tag{3.17}$$

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(x_0, y_0)$ կետում՝

$$d^2L(x_0,y_0) = L''_{xx}(x_0,y_0)\,dx^2 + 2L''_{xy}(x_0,y_0)\,dx\,dy + L''_{yy}(x_0,y_0)\,dy^2 :$$

1) *Եթե* $d^2L(x_0, y_0) > 0$ *բոլոր* $\forall\, dx, dy$ *դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն և բավարարում են կապի դիֆերենցված հավասարմանը՝*

$$dx^2 + dy^2 \neq 0, \qquad \boxed{\varphi'_x(x_0, y_0)\, dx + \varphi'_y(x_0, y_0)\, dy = 0}, \qquad (3.18)$$

ապա $M_0(x_0, y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մինիմումի կետ է՝* $M_0(x_0, y_0) = M_{\min}$, $\varphi(x, y) = 0$ *կապի հավասարման դեպքում:*

2) *Եթե* $d^2L(x_0, y_0) < 0$ *բոլոր* $\forall\, dx, dy$ *դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն և բավարարում են կապի դիֆերենցված հավասարմանը՝*

$$dx^2 + dy^2 \neq 0, \qquad \varphi'_x(x_0, y_0)\, dx + \varphi'_y(x_0, y_0)\, dy = 0,$$

ապա $M_0(x_0, y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կետ է՝* $M_0(x_0, y_0) = M_{\max}$, $\varphi(x, y) = 0$ *կապի հավասարման դեպքում:*

3) *Եթե* $d^2L(x_0, y_0)$ *երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ)* dx, dy *դիֆերենցիալների (աճերի) նույն* (3.18) *սահմանափակումների ներքո, ապա* $M_0(x_0, y_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետ չէ:*

4) *Եթե* $d^2L(x_0, y_0) \geq 0$ *կամ* $d^2L(x_0, y_0) \leq 0$, *երբ* dx, dy *դիֆերենցիալները (աճերը) բավարարում են նույն* (3.18) *սահմանափակումներին, ապա սրտույգ ոչինչ ասել չենք կարող.* $M_0(x_0, y_0)$ *կետը կարող է ինչպես* f*-ի պայմանական էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):*

Այսպիսով՝ ինչպես լոկալ էքստրեմումի դեպքում էր (տե՛ս Թեորեմ 1.6), այժմ պայմանական էքստրեմումի դեպքում ևս երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը (Լագրանժի ֆունկցիայի) փվյալ ստացիոնար կետում որոշում է պայմանական էքստրեմումի առկայությունը:

Քննարկենք մի քանի պարզ օրինակներ, որոնցում պայմանական էքստրե– մումները հիմնականում կորոնենք անորոշ բազմապատկիչների Լագրանժի մեթոդով:

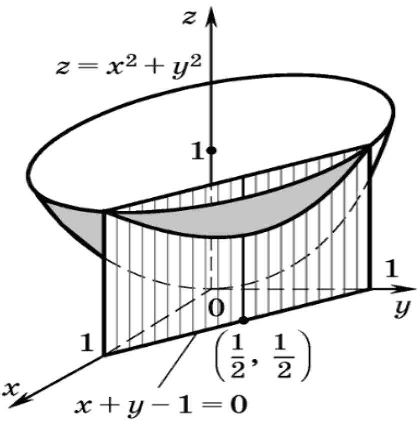
Օրինակ 18. *Մենք արդեն Օրինակներ 2 և 7-ում քննարկել էինք*

$$\boxed{z = f(x,y) \overset{def}{=} x^2 + y^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

ֆունկցիան (էլիպտական պարաբոլոիդ) և պարզել, որ $M_{\min} = (0,0)$ *սկզբնակետը* f*-ի բացարձակ մինիմումի կետ է:*

Այժմ ձևակերպենք բոլորովին այլ՝ պայմանական էքստրեմումի խնդիր $\varphi(x,y) = x + y - 1 = 0$ *կապի հավասարման դեպքում,*

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x,y) \overset{def}{=} x + y - 1 = 0 : \end{cases} \tag{3.19}$$



Գծ. 8

Պայմանական էքստրեմումի այս խնդրի ամենակարճ և հասկանալի եղանակը թերևս $y = 1 - x$ կապի հավասարման անմիջական տեղադրումն է և մեկ փոփոխականի $f(x, 1-x)$ ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումի հետազոտումն է: Թողնում ենք սա ընթերցողին, որպես վարժություն:

Լուծենք (3.19) *խնդիրը Լագրանժի մեթոդով, որպեսզի ցույց տանք՝ ինչպես է այն գործում: Կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան՝*

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ-ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ (գործակից) է: Նախ գտնենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1 = 0 : \end{cases} \tag{3.20}$$

Համակարգի 1-ին և 2-րդ հավասարումներից հեշտ է տեսնել, որ $x = y$, ինչից ստանում ենք

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ x = y = \dfrac{1}{2} : \end{cases}$$

Այսպիսով՝ $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետը Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է, կամ (3.19) *խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կետն է: Այժմ ստուգենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը: Հաշվենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետում,*

$$L''_{xx}(x, y) = 2, \qquad L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2,$$

$$L''_{xy}(x, y) = 0, \qquad L''_{xy}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$L''_{yy}(x,y) = 2, \qquad\qquad L''_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2,$$

$$d^2L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = L''_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)dx^2 + 2L''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)dx\,dy + L''_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)dy^2 =$$
$$= 2\,dx^2 + 2\,dy^2 > 0, \qquad \text{երբ} \quad dx^2 + dy^2 \neq 0 : \tag{3.21}$$

Արդեն ստացանք, որ Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ դրական է, երբ $dx^2+dy^2 \neq 0$, ինչից ըստ Թեորեմ 3.2-ի հետևում է, որ $M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ կետը f-ի (խիստ) պայմանական մինիմումի կետ է՝ $M_{\min} = M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, կապի $\varphi(x,y) = 0$ հավասարման դեպքում:

Նշենք, որ Թեորեմ 3.2-ը պահանջում էր նաև հաշվի առնել կապի (3.18) *դիֆերենցված հավասարումը՝*

$$\varphi'_x(x_0,y_0)\,dx + \varphi'_y(x_0,y_0)\,dy = 0, \qquad \text{կամ} \qquad dx + dy = 0,$$

ինչից ստանում ենք

$$d^2L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\,dx^2 + 2\,dy^2 = 4\,dx^2 > 0 \qquad \text{երբ} \quad dx \neq 0,$$

նույն եզրակացությամբ՝ $M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ կետը f-ի (խիստ) պայմանական մի- նիմումի կետ է $M_{\min} = M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, կապի $\varphi(x,y) = x+y-1 = 0$ հավասարման դեպքում:

Օրինակ 19. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \overset{def}{=} \sqrt{1-x^2-y^2}}$$

ֆունկցիան, որի որոշման տիրույթը $\overline{\mathbb{D}} := \{(x,y) : \ x^2+y^2 \leq 1\}$ փակ միավոր շրջանն է, իսկ գրաֆիկը վերին միավոր կիսասֆերան: Այս ֆունկցիան արդեն հետազոտել էինք Օրինակ 1-ում լոկալ էքստրեմումի առումով և Օրինակ 17-ում պայմանական էքստրեմումի առումով $\varphi(x,y) = x+y-1 = 0$ կապի հավասարման դեպքում: Վերջին դեպքում անմիջական *պեղադրման և փոփոխականի արտաքսման եղանակով պարզել էինք, որ $M_{\max} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետը պայմանական մաքսիմումի կետ է:*

Այժմ նույն պայմանական էքստրեմումի խնդիրը

$$\begin{cases} f(x,y) \overset{def}{=} \sqrt{1-x^2-y^2} \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x,y) \overset{def}{=} x+y-1=0 \end{cases} \tag{3.22}$$

լուծենք Լագրանժի մեթոդով, որպեսզի ցույց տանք ինչպես է այն գործում: Կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \lambda(x+y-1), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ-ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ (գործակից) է: Նախ գտնենք Լագրանժի $L(x,y)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = x+y-1=0: \end{cases} \tag{3.23}$$

Համակարգի 1-ին և 2-րդ հավասարումներից հեշտ է տեսնել, որ $x=y$, ինչից ստանում ենք

$$\begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-x^2}} + \lambda = 0 \\ x+x-1=0: \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{x}{\sqrt{1-2x^2}} \\ x = \dfrac{1}{2}: \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=y=\dfrac{1}{2}: \end{cases}$$

Այսպիսով՝ $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետը Լագրանժի $L(x,y)$ ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է կամ (3.22) խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կետն է: Այժմ ստուգենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը: Հաշվենք Լագրանժի $L(x,y)$ ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ կետում.

$$L''_{xx}(x,y) = \frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}, \qquad L''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$L''_{xy}(x,y) = \frac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}, \qquad L''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$L''_{yy}(x,y) = \frac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}, \qquad L''_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= L''_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)dx^2 + 2L''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)dx\,dy + L''_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)dy^2 = \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2}\,dx^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\,dx\,dy - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,dy^2 = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3\,dx^2 + 2\,dx\,dy + 3\,dy^2\right): \end{aligned} \tag{3.24}$$

Հերևելով Թեորեմ 3.2-ի պայմաններին՝ պահանջենք, որ $M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ *ստացիոնար կետում կատարվի կապի դիֆերենցված* $\boxed{d\varphi(M_0)=0}$ *հավասարումը, տես* (3.18),

$$d\varphi(M_0) = \varphi'_x(M_0)\,dx + \varphi'_y(M_0)\,dy = dx + dy = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad dx = -dy:$$

Տեղադրենք աճերի այս կապը 2-րդ կարգի (3.24) *դիֆերենցիալի մեջ՝*

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3\,dx^2 + 2\,dx\,dy + 3\,dy^2\right) = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3\,dx^2 - 2\,dx^2 + 3\,dx^2\right) = -2\sqrt{2}\,dx^2 < 0, \text{ երբ } dx \neq 0: \end{aligned}$$

Քանի որ Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ բացասական է՝ $d^2L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) < 0$, *երբ* $dx \neq 0$, *համաձայն Թեորեմ 3.2,* **2)**-*ի՝* $M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ *կետը* f-*ի* ***(խիստ)*** *պայմանական մաքսիմումի կետ է* $M_{\max} = M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, *կապի* $\varphi(x,y)=0$ *հավասարման դեպքում, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:*

Դիտողություն 3.1. *Եթե* $M_0(x_0,y_0)$ *կետում* f *ֆունկցիան լոկալ էքստրեմում ունի, և բացի այդ* M_0 *կետով անցնում է ինչ-որ ուղիղ կամ որևէ անընդհատ* Γ *կոր, ապա միանգամայն պարզ է, որ* f *ֆունկցիան նույն*

M_0 կետում կունենա նաև պայմանական էքստրեմում, երբ կապի հավասարումը Γ կորով է արտահայտված: Հետաքրքիր է, որ որոշակի իմաստով հակադարձ պնդումը սխալ է, եթե սահմանափակվենք էքստրեմումի կետով անցնող ուղիղներով միայն: Բերենք համապատասխան օրինակ:

Օրինակ 20. *Ապացուցենք, որ սկզբնակետում*

$$\boxed{z = f(x,y) \stackrel{def}{=} (y-x^2)(y-3x^2)}$$

ֆունկցիան էքստրեմում չունի, սակայն նրա նեղացումը ցանկացած $y = kx$ ուղղի վրա նույն կետում էքստրեմում արդեն ունի: Հաշվենք՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x(y-3x^2) - 6x(y-x^2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = (y-3x^2) + (y-x^2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(2y-3x^2) = 0 \\ y = 2x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 : \end{cases}$$

Ուրեմն՝ $(0,0)$ սկզբնակետը $f(x,y)$ ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է, սակայն էքստրեմումի կետ չէ, այլ կերպ ասած f-ի թամբակետ է: Իսկապես, $f(0,0) = 0$, և եթե $(0,0)$ կետի շրջակայքում վերցնենք $(0,y)$, $y \neq 0$, տեսքի կետեր, ապա ֆունկցիան դրական է՝ $f(0,y) = y^2 > 0$: Իսկ եթե $(0,0)$ կետի շրջակայքում վերցնենք $(x, 2x^2)$, $x \neq 0$, տեսքի կետեր, ապա ֆունկցիան բացասական է՝

$$f(x, 2x^2) = (2x^2 - x^2)(2x^2 - 3x^2) = -x^4 < 0, \qquad \text{երբ} \quad x < 0 :$$

Այսպիսով՝ $(0,0)$ սկզբնակետը թամբակետ է, էքստրեմումի կետ չէ:

Մյուս կողմից, եթե դիտարկենք $(0,0)$ կետով անցնող կամայական $y = kx$, $(k \in \mathbb{R})$ ուղիղ, ապա $f\Big|_{y=kx}$ նեղացումն արդեն էքստրեմում կունենա $(0,0)$ կետում: Իսկապես, սկզբում դիտարկելով f-ի նեղացումը x առանցքի վրա՝ համոզվում ենք, որ $(0,0)$ կետը պայմանական (խիստ) մինիմումի կետ է,

$$f\Big|_{y=0} = f(x,0) = 4x^2, \qquad M_{\min} = (0,0) :$$

Դիտարկելով f-ի նեղացումը y առանցքի վրա, համոզվում ենք, որ $(0,0)$ կետը նույնպես պայմանական (խիստ) մինիմումի կետ է,

$$f\Big|_{x=0} = f(0,y) = y^2, \qquad\qquad M_{\min} = (0,0) :$$

Այժմ դիտարկենք f-ի նեղացումը $y = kx,\ k \neq 0$, ուղղի վրա: Տեղադրելով ստանում ենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$f\Big|_{y=kx} = f(x,kx) = (kx - x^2)(kx - 3x^2) = 3x^4 - 4k\,x^3 + k^2\,x^2 :$$

Էքստրեմումի առկայությունը ստուգենք 2-րդ կարգի ածանցյալի միջոցով՝

$$\frac{d}{dx} f(x,kx)\Big|_{x=0} = 0, \qquad\qquad \frac{d^2}{dx^2} f(x,kx)\Big|_{x=0} = 2\,k^2 > 0,$$

ինչը նշանակում է, որ $x = 0$ կետը $f(x,kx)$ ֆունկցիայի խիստ մինիմումի կետ է, այսինքն՝ $(0,0)$ կետը $f(x,y)$ ֆունկցիայի պայմանական մինիմումի կետ է:

Օրինակ 21. *Դիտարկենք*

$$\boxed{z = f(x,y) \overset{def}{=} xy}, \qquad x > 0, \quad y > 0,$$

ֆունկցիան տրված որոշման տիրույթով, այն է՝ կոորդինատական հարթության առաջին քառորդը: Պահանջվում է գտնել f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ էլիպսի վրա, ավելի ստույգ, այդ էլիպսի առաջին քառորդի աղեղի վրա: Առաջանում է պայմանական էքստրեմումի խնդիր կապի $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0$ հավասարումով,

$$\begin{cases} z = f(x,y) = xy \longmapsto \max. & x,y > 0, \\ \varphi(x,y) \overset{def}{=} \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 : \end{cases} \tag{3.25}$$

Պայմանական էքստրեմումի այս խնդիրը կարելի է լուծել ինչպես անմիջական տեղադրման եղանակով, այդ թվում՝ օգտագործելով էլիպսի *պարամետրական հավասարումները, այնպես էլ Լագրանժի ընդհանուր մեթոդով:*

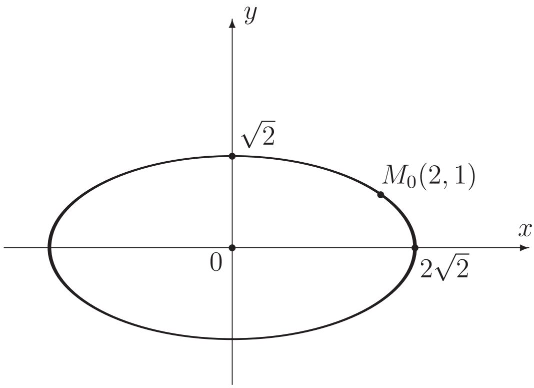
1-ին եղանակ. *Օգտվելով այն պայմանից, որ ֆունկցիայի փոփոխականները դրական են, կապի $\varphi(x, y) = 0$ հավասարումից բացահայտ արտահայտենք y-ը x-ի միջոցով և տեղադրենք f ֆունկցիայի բանաձևի մեջ,* $\quad y = y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{8 - x^2}$,

$$z = z(x) = f\big(x, y(x)\big) = \frac{1}{2}\, x\sqrt{8 - x^2}, \qquad \Big(0 \le x \le 2\sqrt{2}\Big):$$

Դրանով խնդիրը հանգեց մեկ փոփոխականի $z(x)$ ֆունկցիայի սովորական էքստրեմումի խնդրին: Էլ ավելի պարզեցնելով մեր գործը՝ $z(x)$ ֆունկցիայի փոխարեն կարելի է քննարկել նրա քառակուսին (հաստատունի ճշտությամբ)

$$g(x) \overset{def}{=} x^2(8 - x^2) \longmapsto \max. \qquad\qquad 0 \le x \le 2\sqrt{2},$$

որտեղից պարզ է, որ ֆունկցիան մաքսիմում ունի, երբ $x^2 = 4$, այսինքն՝ $\boxed{x_{\max} = 2}$ *կետում: Այն, որ սա հենց մաքսիմումի կետ է, երևում է թեկուզ այն փաստից, որ հատվածի ծայրակետերում $g(x)$ ֆունկցիան զրո է, իսկ ներսում՝ դրական է միակ ստացիոնար $x = 2$ կետով:*



Գծ. 9

Հաշվելով նաև $y(2) = 1$ արժեքը, եզրակացնում ենք, որ $(2,1)$ կետը $f(x,y)$ ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի միակ կետն է, որտեղ f-ն ընդունում է իր մաքսիմումը և մեծագույն արժեքը,

$$\boxed{M_{\max} = M_0(2,1)}, \qquad \max f(x,y) = f_{\max} = f(M_0) = f(2,1) = 2:$$

2-րդ եղանակ. *Էլիպսը, որը երկրաչափորեն կապի հավասարումն է պալիս, ներկայացնենք պարամետրական տեսքով,*

$$\begin{cases} x = x(t) = 2\sqrt{2}\,\cos t \\ y = y(t) = \sqrt{2}\,\sin t \end{cases} \qquad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right):$$

Պարամետրական այս ֆունկցիաները տեղադրենք $f(x,y)$-ի մեջ և դրա– նով խնդիրը կբերվի մեկ փոփոխականի $z(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ ֆունկցիայի սովորական մաքսիմումի խնդրին՝

$$z = z(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = 4\,\cos t\,\sin t = 2\,\sin 2t \;\longmapsto\; \max. \qquad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right):$$

Հեշտությամբ գտնում ենք $z(t)$ ֆունկցիայի միակ մաքսիմումի կետը՝ $\boxed{t_{\max} = \frac{\pi}{4}}$, ինչից ստանում ենք $x(\frac{\pi}{4}) = 2$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$, $f(x,y)$ ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի միակ $(2,1)$ կետը: Եզրակացությունը նույնն է, ինչ նախորդ եղանակի դեպքում՝

$$\boxed{M_{\max} = M_0(2,1)}, \qquad \max f(x,y) = f_{\max} = f(M_0) = f(2,1) = 2:$$

3-րդ եղանակ. *Այժմ պայմանական մաքսիմումի նույն (3.25) խնդիրը լուծենք Լագրանժի մեթոդով: Կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան՝*

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ-ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ է: Ինքնին հասկանալի է, Լագրան– ժի ֆունկցիան կազմելիս, կարելի էր -1 վերջին գումարելին դեն նետել, *քանի որ դիֆերենցելու ժամանակ հաստատունը որևէ դերակատարում չունի:*

Նախ գտնենք Լագրանժի $L(x,y)$ *ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝*

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = y + \dfrac{1}{4}\,\lambda\, x = 0 \\ L'_y(x,y) = x + \lambda\, y = 0 \\ \varphi(x,y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{x}{y} \\ x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ \lambda = -2 : \end{cases} \tag{3.26}$$

Այսպիսով՝ $M_0(2,1)$ *կետը Լագրանժի* $L(x,y)$ *ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է կամ* (3.25) *խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կետն է: Այժմ ստուգենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը: Հաշվենք Լագրանժի* $L(x,y)$ *ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը* $M_0(2,1)$ *կետում՝ նկատի ունենալով, որ* $\lambda = -2$,

$$\begin{aligned} L''_{xx}(x,y) &= \frac{\lambda}{4}, & L''_{xx}(2,1) &= -\frac{1}{2}, \\ L''_{xy}(x,y) &= 1, & L''_{xy}(2,1) &= 1, \\ L''_{yy}(x,y) &= \lambda, & L''_{yy}(2,1) &= -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= L''_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\,dx^2 + 2L''_{xy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\,dx\,dy + L''_{yy}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\,dy^2 = \\ &= -\frac{1}{2}\,dx^2 + 2\,dx\,dy - 2\,dy^2 = -\frac{1}{2}\left(dx^2 - 4\,dx\,dy + 4\,dy^2\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(dx - 2\,dy\right)^2 : \end{aligned} \tag{3.27}$$

Հետևելով Թեորեմ 3.2-ի պայմաններին՝ պահանջենք, որ $M_0(2,1)$ *ստացիոնար կետում կատարվի կապի դիֆերենցված* $\boxed{d\varphi(M_0) = 0}$ *հավասարումը, տե՛ս* (3.18),

$$d\varphi(x,y) = \varphi'_x(x,y)\,dx + \varphi'_y(x,y)\,dy = \frac{x}{4}\,dx + y\,dy$$

$$d\varphi(2,1) = \varphi'_x(2,1)\,dx + \varphi'_y(2,1)\,dy = \frac{1}{2}\,dx + dy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{dx = -2\,dy}\ :$$

Տեղադրենք աճերի այս կապը 2-րդ կարգի (3.27) *դիֆերենցիալի մեջ,*

$$d^2L(2,1) = -\frac{1}{2}\left(dx - 2\,dy\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(2\,dx\right)^2 = -2\,dx^2 < 0, \quad \text{երբ} \quad dx \neq 0\ :$$

Քանի որ Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը խիստ բացասական է, $d^2L(2,1) < 0$, *երբ* $dx \neq 0$, *համաձայն Թեորեմ 3.2,* ***2)****-ի՝* $M_0(2,1)$ *կետը* f*-ի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կետ է* $M_{\max} = M_0(2,1)$, *կապի* $\varphi(x,y) = 0$ *հավասարման դեպքում, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: Ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը կլինի*

$$\boxed{M_{\max} = M_0(2,1)}, \qquad \max f(x,y) = f_{\max} = f(M_0) = f(2,1) = 2\ :$$

Դիտողություն 3.2. *Վերջին դեպքում պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը մենք ստուգեցինք շնորհիվ Թեորեմ 3.2-ի: Տվյալ ֆունկցիայի համար այդ փաստը բավականին ակնհայտ է առանց նշված թեորեմի: Իսկապես, էլիպսի փրված աղեղի* $(2\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$ *ծայրակետերում (դրանք էլիպսի կիսառանցքներն են)* $f(x,y) = xy$ *ֆունկցիան հավասար է զրոյի, իսկ աղեղի ներսում* f*-ը միայն մեկ ստացիոնար կետ ունի: Քանի որ* f*-ը դրական է, ուրեմն՝ այդ ստացիոնար կետը վերածվում է մաքսիմումի կետի:*

Բերենք մի օրինակ տնտեսագիտության բնագավառից:

Օրինակ 22. *Նշանակենք* x*-ով կապիտալի, իսկ* y*-ով աշխատուժի միավորների քանակները: Կապիտալի արժեքն է* 3000 *դրամ յուրաքանչյուր միավորի համար, իսկ աշխատուժի արժեքը՝* 5000 *դրամ յուրաքանչյուր միավորի համար: Դրանցից կախված թողարկված արտադրանքի քանակը ենթադրենք որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$\boxed{f(x,y) \stackrel{def}{=} 120\,x^{4/5}\,y^{1/5}}, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0\ :$$

Տնտեսագիտությունում նման ֆունկցիաներն անվանում են ***Քոբ-Դուգ-լասի արտադրական ֆունկցիա*** *և սովորաբար նշանակում են* $f(K,L)$ *տեսքով:*

Արտադրողը մտադիր է ներդնել 600 *հազար դրամ: Քանի՞ միավոր աշխատուժ և կապիտալ պետք է տեղաբաշխել, որպեսզի արտադրանքը հասցնել առավելագույնի: Հաշվել արտադրանքի առավելագույն քանակը:*

Լուծումը բերվում է պայմանական էքստրեմումի խնդրին: Կապիտալի ընդհանուր արժեքն է $3000\,x$ *դրամ, իսկ աշխատուժի ընդհանուր արժեքը* $5000\,y$ *դրամ: Ըստ պայմանի՝ այդ միջոցների ընդհանուր քանակը* 600 *հազար դրամ է: Այստեղից ստացվեց կապի հավասարում՝*

$$3000\,x + 5000\,y = 600\,000 \qquad \text{կամ} \qquad 3\,x + 5\,y = 600,$$

և առաջացավ պայմանական էքստրեմումի խնդիր՝

$$\begin{cases} z = f(x,y) = 120\,x^{4/5}\,y^{1/5} \ \longmapsto \ \max. & x,y \geq 0, \\ \varphi(x,y) \overset{def}{=} 3\,x + 5\,y - 600 = 0 : \end{cases} \tag{3.28}$$

Խնդիրը լուծենք Լագրանժի մեթոդով և կազմենք f*-ի Լագրանժի ֆունկ-ցիան՝*

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = 120\,x^{4/5}\,y^{1/5} - \lambda(3\,x + 5\,y - 600), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

որտեղ λ*-ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ է (*λ*-ի նշանը էական չէ):*

Գտնենք Լագրանժի $L(x,y)$ *ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը*

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 120\,\dfrac{4}{5}\,x^{-1/5}\,y^{1/5} - 3\,\lambda = 0 \\ L'_y(x,y) = 120\,\dfrac{1}{5}\,x^{4/5}\,y^{-4/5} - 5\,\lambda = 0 \\ \ \varphi(x,y) = 3\,x + 5\,y - 600 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 96\,x^{-1/5}\,y^{1/5} = 3\,\lambda \\ 24\,x^{4/5}\,y^{-4/5} = 5\,\lambda \\ 3\,x + 5\,y = 600, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96 \cdot 5\,x^{-1/5}\,y^{1/5} = 24 \cdot 3\,x^{4/5}\,y^{-4/5} \\ 3\,x + 5\,y = 600 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0,15\,x \\ 3\,x + 5\,y = 600 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 160 \\ y = 24 : \end{cases}$$

Այսպիսով՝ $M_0(160, 24)$ *կետը Լագրանժի* $L(x, y)$ *ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է կամ* (3.28) *խնդրի պայմանական հնարավոր էքստրեմումի միակ կետն է:*

Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը կարելի է ստուգել Լագրանժի $L(x, y)$ *ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի միջոցով, ինչպես նախորդ օրինակներում: Սակայն տվյալ օրինակում կարելի է խուսափել ավելորդ հաշվարկներից և օգտվել ստացիոնար կետի միակությունից: Իսկապես, պայմանական էքստրեմումի* (3.28) *խնդրում* f *ֆունկցիան հետազոտվում է միայն* $3\,x+5\,y = 600$ *ուղղի 1-ին քառորդում գտնվող հատվածի վրա: Այդ հատվածի ծայրակետերում* f *ֆունկցիան ակնհայտորեն հավասար է զրոյի, իսկ հատվածի ներսում՝ դրական է՝*

$$f(200, 0) = 0, \quad f(0, 120) = 0,$$
$$f(x, y) > 0, \qquad \text{երբ} \qquad 3\,x + 5\,y = 600, \quad x, y > 0:$$

Հետևաբար տվյալ հատվածի $M_0(160, 24)$ *ներքին ստացիոնար կետում* f *ֆունկցիան կարող է միայն մաքսիմում ունենալ, ինչից էլ գտնում ենք* f *ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի արժեքը՝*

$$M_{\max} = M_0(160, 24),$$
$$f_{\max} = f(M_0) = f(160, 24) = 120\,(160)^{4/5}\,(24)^{1/5} \approx 13\,138:$$

Այսպիսով՝ արտադրողը պետք է տեղաբաշխի 160 միավոր կապիտալ (այսինքն՝ $160 \cdot 3000 = 480\,000$ *դրամ) և 24 միավոր աշխատուժ (օրինակ 24 հոգու, որի ծախսը կկազմի* $24 \cdot 5000 = 120\,000$ *դրամ), որպեսզի արտադրանքը հասցնի առավելագույնի: Այդ առավելագույն քանակը կկազմի մոտավորապես* 13 138 *միավոր արտադրանք:*

3.2 Պայմանական էքստրեմումի խնդիրը երեք փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Երեք և ավելի շատ փոփոխականի դեպքում պայմանական էքստրեմումի խնդիրն ավելի բազմազան է և ծավալուն, թեև խնդրի լուծման ընդհանուր սկզբունքները չեն փոխվում: Կարճ նկարագրենք իրավիճակը և բերենք համապատասխան օրինակներ:

Երեք փոփոխականի դեպքում պայմանական էքստրեմումի խնդիրը կարող է ունենալ մեկ կամ երկու կապի հավասարում: Առավել պարզ օրինակներում դեռևս հնարավոր է անմիջական տեղադրման և փոփոխականների թվի կրճատման եղանակը:

Օրինակ 23. *Դիտարկենք*

$$\boxed{u = f(M) = f(x,y,z) \stackrel{def}{=} x + y + z^2} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիան ամբողջ $\mathbb{R}^3$ *եռաչափ պարածության վրա երկու կապի հավասարումների դեպքում*

$$\begin{cases} u = f(x,y,z) = x + y + z^2 \ \longmapsto \ \text{extr.} \\ \varphi_1(x,y,z) \stackrel{def}{=} z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2(x,y.z) \stackrel{def}{=} y - xz - 1 = 0 : \end{cases} \tag{3.29}$$

Նշենք, որ կապի $\varphi_1 = 0$ *և* $\varphi_2 = 0$ *հավասարումները երկրաչափորեն ներկայացնում են ինչ-որ* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ *կոր, և միայն այդ կորի վրա է* f *ֆունկցիան հետազոտվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հետազոտվում է* Γ *կորի վրա* f*-ի նեղացումը, կգրենք* $f(M)\Big|_{M\in\Gamma}$ *կամ կարճ՝* $f\Big|_{\Gamma}$ *:*

Կապի հավասարումների միջոցով արտաքսենք x *փոփոխականը՝*

$$\begin{cases} z - x - 1 = 0 \\ y - xz - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = x + 1 \\ y = xz + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = x + 1 \\ y = x^2 + x + 1 : \end{cases}$$

Տեղադրելով f ֆունկցիայի բանաձևի մեջ՝ ստանում ենք մեկ փոփոխա–կանի ֆունկցիա,

$$u = u(x) = f(x, x^2+x+1, x+1) = x + x^2 + x + 1 + (x+1)^2 =$$
$$= 2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2 \longmapsto \text{extr.} \qquad x \in \mathbb{R}:$$

Ստացանք սովորական էքստրեմումի պարզ խնդիր: Ունի է միայն մեկ էքստրեմումի (մինիմումի) կետ՝ $\boxed{x_{min} = -1}$, $\boxed{u_{min} = 0}$*: Վերաձևակեր–պելով սկզբնական f ֆունկցիայի համար՝ ստանում ենք, որ f ֆունկցիան միայն մեկ $f_{\min} = 0$ էքստրեմում (մինիմում) ունի* $\boxed{M_{\min} = M_0(-1,1,0)}$ *կետում:*

Օրինակ 24. *Դիտարկենք*

$$\boxed{u = f(x,y,z) \stackrel{def}{=} x^2 - y^2 + z^2} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիան ամբողջ $\mathbb{R}^3$ եռաչափ տարածության վրա միայն մեկ կապի հավասարման դեպքում

$$\begin{cases} u = f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x,y,z) \stackrel{def}{=} 2x - y - 3 = 0: \end{cases} \tag{3.30}$$

Նշենք, որ կապի $\varphi = 0$ հավասարումը երկրաչափորեն ներկայացնում է որոշակի հարթություն $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, և միայն այդ հարթության վրա է f ֆունկցիան հետազոտվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հետազոտ–վում է $f\Big|_{\Gamma}$ նեղացումը:

Տեղադրելով կապի $y = 2x - 3$ հավասարումը ֆունկցիայի բանաձևի մեջ՝ արտաքսում ենք y փոփոխականը և ստանում երկու փոփոխա–կանի ֆունկցիա՝

$$u = u(x,z) = f(x, 2x-3, z) = x^2 - (2x-3)^2 + z^2 =$$
$$= -3x^2 + 12x - 9 + z^2 \longmapsto \text{extr.} \qquad x, z \in \mathbb{R},$$

որի սովորական լոկալ էքստրեմումներն է հարկավոր գտնել: Նախ գտնենք $u(x,z)$ *ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը՝*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -6x + 12 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 : \end{cases}$$

Ուրեմն՝ $x = 2,\ z = 0$ *կետը* $u(x,z)$ *ֆունկցիայի հնարավոր (լոկալ) էքստրեմումի միակ կետն է: Այն համապատասխանում է* $M_0(2,1,0)$ *կե–տին* $f(x,y,z)$ *ֆունկցիայի համար:*

Էքստրեմումի բավարար պայմանը կարելի է ստուգել՝ 2-րդ կարգի Δ *որոշիչը հաշվելով* $x = 2,\ z = 0$ *կետում (տես Թեորեմ 1.7),*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xz} \\ u''_{zx} & u''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0 :$$

Քանի որ տվյալ ստացիոնար կետում Δ *որոշիչը բացասական է, ըստ Թեորեմ 1.7-ի՝ եզրակացնում ենք, որ* $x = 2,\ z = 0$ *ստացիոնար կետում* $u(x,z)$ *ֆունկցիան էքստրեմում չունի: Վերաձևակերպելով,* $M_0(2,1,0)$ *միակ ստացիոնար կետում* $f(x,y,z)$ *ֆունկցիան պայմանական էքստրե–մում չունի, և ուրեմն՝ ֆունկցիան առհասարակ պայմանական էքստրե–մում չունի:*

Ինչպես տեսանք բերված երկու վերջին օրինակներում, անմիջական տեղա–դրման և փոփոխականի արտաքսման եղանակը հաջողությամբ գործում է: Սակայն այդ եղանակը որպես կանոն պիտանի չէ, երբ փոփոխականներից մեկը մյուսների միջոցով բացահայտ արտահայտել հնարավոր չէ: Երկու փո–փոխականի ֆունկցիաների նման, այժմ նույնպես կարելի է ներմուծել օժան–դակ **Լագրանժի ֆունկցիան** և կիրառել **Լագրանժի մեթոդը**, որն արդեն ավելի ծավալուն կլինի: Ընդհանուր դեպքում կապի հավասարումները երկուսն

են (կապի երեք և ավելի հավասարումներ կարող են հանգեցնել խնդրի իմաս–
պազրկման),

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y.z) = 0 : \end{cases} \tag{3.31}$$

Կապի $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ հավասարումները երկրաչափորեն ներկայացնում են ինչ-որ $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ կոր, և միայն այդ կորի վրա է f ֆունկցիան հետազոտվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հետազոտվում է Γ կորի վրա f-ի նեղացումը՝ $f\Big|_\Gamma$, ինչպես տեսանք Օրինակ 23-ում: Կապի միայն մեկ հավասարման առ–կայությունը երկրաչափորեն ներկայացնում է սովորաբար ինչ-որ $S \subset \mathbb{R}^3$ մակերևույթ, և միայն այդ մակերևույթի վրա է f ֆունկցիան հետազոտվում էքստրեմումի առումով, այսինքն՝ հետազոտվում է S մակերևույթի վրա f-ի նեղացումը՝ $f\Big|_S$, ինչպես տեսանք Օրինակ 24-ում:

Պայմանական էքստրեմումի (3.31) խնդրի Լագրանժի ընդհանուր մեթոդը նկարագրելու համար, սահմանենք f ֆունկցիայի **Լագրանժի ֆունկցիան**՝

$$\boxed{L(x, y, z) \equiv L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \stackrel{def}{=} f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z)}, \tag{3.32}$$

որտեղ $(x, y, z) \in \Omega$ կետը փոփոխվում է իր (որոշման) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ եռաչափ տիրույթում, իսկ $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ պարամետրերը կոչվում են **Լագրանժի բազմա–պատկիչներ** կամ **Լագրանժի անորոշ գործակիցներ**: Ինչպես և երկու փոփո–խականի դեպքում, վճռական է հետևյալ փաստը՝

$f(x, y, z)$ **ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը համարժեք է** f**-ի Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական լոկալ էքստրեմումի խնդրին:**

Ուրեմն՝ $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդրի անհրաժեշտ պայմանը համարժեք է f-ի Լագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետի պայմանին, որն էլ հանգում է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_{\lambda_1} = 0 \\ L'_{\lambda_2} = 0 : \end{cases} \tag{3.33}$$

Համակարգը հինգ հավասարումներից է բաղկացած և հինգ անհայտ ունի: (3.33) համակարգի լուծումները f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի հնարավոր կետերն են:

Թեորեմ 3.3. *(Պայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)*

Դիցուք $f(x, y, z)$, $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$ ֆունկցիաները որոշված են և ողորկ $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ տիրույթում, $f, \varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\Omega)$, և $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ կետը (3.31) խնդրի լուծում է, այսինքն՝ f-ի պայմանական էքստրեմումի կետ է $\varphi_1 = 0$ և $\varphi_2 = 0$ կապի հավասարումների դեպքում:

Բացի այդ, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետում φ_1 և φ_2 ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներից կազմված հետևյալ (Յակոբիի) մատրիցը

$$J = J(M_0) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ունի ոչ զրոյական 2-րդ կարգի մինոր: Այլ կերպ ասած՝ J մատրիցի ռանգը հավասար է 2-ի, $\operatorname{rank} J = 2$:

Այդ դեպքում գոյություն ունեն λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ արժեքներ այնպիսիք, որ $(x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2)$ հնգյակը բավարարում է (3.33) համակարգին, այսինքն՝ Լագրանժի L ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է:

Այժմ ձևակերպենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը երեք փոփոխականից կախված ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 3.4. *(Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը)*

Դրված է 2-րդ կարգի ողորկ $u = f(M) = f(x, y, z)$ *ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը կապի* $\varphi_1(x, y, z) = 0$ *և* $\varphi_2(x, y.z) = 0$ *հավասարումների դեպքում, այսինքն՝*

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y.z) = 0 : \end{cases} \tag{3.34}$$

Դիցուք $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *կետը ինչ-որ* λ_1, λ_2 *արժեքների դեպքում* $f(x, y, z)$ *ֆունկցիայի Լագրանժի*

$$\boxed{L(x, y, z) \equiv L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) + \lambda_2\varphi_2(x, y, z)},$$

ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է, այսինքն՝ $dL(M_0) \equiv dL(x_0, y_0, z_0) \equiv 0$, *կամ*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) + \lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(M_0) + \lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(M_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) + \lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(M_0) + \lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}(M_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0) + \lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}(M_0) + \lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}(M_0) = 0 \\ \varphi_1(M_0) = 0 \\ \varphi_2(M_0) = 0 : \end{cases} \tag{3.35}$$

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *կետում՝*

$$\begin{aligned} d^2L(M_0) = L''_{xx}(M_0)\,dx^2 + {}&+L''_{yy}(M_0)\,dy^2 + L''_{zz}(M_0)\,dz^2 + \\ &+ 2L''_{xy}(M_0)\,dx\,dy + 2L''_{xz}(M_0)\,dx\,dz + 2L''_{yz}(M_0)\,dy\,dz : \end{aligned} \tag{3.36}$$

1) *Եթե* $d^2L(M_0) > 0$ *բոլոր* $\forall\, dx, dy, dz$ *դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն,* $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, *և բավարարում են կապի դիֆերենցված հավասարումներին՝*

$$\begin{cases} d\varphi_1(M_0) = 0 \\ d\varphi_2(M_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(M_0)\,dx + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}(M_0)\,dy + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}(M_0)\,dz = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}(M_0)\,dx + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}(M_0)\,dy + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}(M_0)\,dz = 0, \end{cases} \tag{3.37}$$

ապա $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մինիմումի կետ է՝* $M_0(x_0, y_0, z_0) = M_{\min}$, *կապի* $\varphi_1 = 0$ *և* $\varphi_2 = 0$ *հավասարումների դեպքում:*

2) *Եթե* $d^2L(M_0) < 0$ *բոլոր* $\forall\, dx, dy, dz$ *դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն,* $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, *և բավարարում են կապի դիֆերենցված* (3.37) *հավասարումներին, ապա* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կետ է՝* $M_0(x_0, y_0, z_0) = M_{\max}$, *կապի* $\varphi_1 = 0$ *և* $\varphi_2 = 0$ *հավասարումների դեպքում:*

3) *Եթե* $d^2L(M_0)$ *երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ)* dx, dy, dz *դիֆերենցիալների (աճերի) նույն* (3.37) *սահմանափակումների ներքո, ապա* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *կետը* f *ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետ չէ:*

4) *Եթե* $d^2L(M_0) \geq 0$ *կամ* $d^2L(M_0) \leq 0$, *երբ* dx, dy, dz *դիֆերենցիալները (աճերը) բավարարում են նույն* (3.37) *սահմանափակումներին, ապա սրանից ոչինչ ասել չենք կարող.* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *կետը կարող է լինել ինչպես* f*-ի պայմանական էքստրեմումի կետ, այնպես էլ չլինել այդպիսին (ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):*

Այսպիսով՝ ինչպես լոկալ էքստրեմումի դեպքում էր (տես Թեորեմ 1.6), այժմ պայմանական էքստրեմումի դեպքում ևս երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը (Լագրանժի ֆունկցիայի) փվյալ ստացիոնար կետում որոշում է պայմանական էքստրեմումի առկայությունը:

Քննարկենք մի քանի օրինակներ, որոնցում պայմանական էքստրեմումները հիմնականում կորոնենք անորոշ բազմապատկիչների Լագրանժի մեթոդով:

Օրինակ 25. *Դիտարկենք Օրինակ 23-ում արդեն հետազոտված*

$$\boxed{u = f(M) = f(x,y,z) \stackrel{def}{=} x + y + z^2} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիան երկու կապի հավասարումների դեպքում

$$\begin{cases} u = f(x,y,z) = x + y + z^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi_1(x,y,z) \stackrel{def}{=} z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2(x,y.z) \stackrel{def}{=} y - xz - 1 = 0 : \end{cases} \tag{3.38}$$

Պայմանական էքստրեմումի այս խնդիրը Օրինակ 23-ում մենք լուծեցինք անմիջական տեղադրման և փոփոխականների արտաքսման եղանակով: Այժմ նույն (3.38) *խնդիրը լուծենք Լագրանժի մեթոդով ցույց տալու համար ինչպես է այն գործում երեք փոփոխականի ֆունկիցայի դեպքում: Կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան*

$$\begin{aligned} L \equiv L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= f(x,y,z) + \lambda_1\varphi_1(x,y,z) + \lambda_2\varphi_2(x,y,z) = \\ &= x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1) \end{aligned}$$

և գտնենք նրա ստացիոնար կետերը, լուծելով (3.33), *համակարգը՝*

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0 \\ L'_y = 1 + \lambda_2 = 0 \\ L'_z = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \\ \varphi_1 = z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2 = y - xz - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = z + 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ x + 3z = -1 \\ z - x = 1 \\ y - xz = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 : \end{cases}$$

Այսպիսով $M_0(-1,1,0)$ *կետը Լագրանժի ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է և ուրեմն՝* $f(M)$ *ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի միակ հնարավոր կետը:*

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գրենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$
\begin{aligned}
&L''_{xx} = 0, && L''_{xy} = 0,\\
&L''_{yy} = 0, && L''_{xz} = -\lambda_2 = 1,\\
&L''_{zz} = 2, && L''_{yz} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^2L(M_0) = L''_{xx}(M_0)\,dx^2 + &+L''_{yy}(M_0)\,dy^2 + L''_{zz}(M_0)\,dz^2 +\\
&+2L''_{xy}(M_0)\,dx\,dy + 2L''_{xz}(M_0)\,dx\,dz + 2L''_{yz}(M_0)\,dy\,dz =\\
&= 2\,dz^2 + 2\,dx\,dz = 2\,dz\Big(dz + dx\Big) :
\end{aligned}
$$

Բացի այդ, պահանջենք, որ M_0 *կետում կատարվեն կապի դիֆերենցված* (3.37) *հավասարումները՝*

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\,dz = 0\\[2mm]
\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}\,dz = 0
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
dx - dz = 0\\
z\,dx - dy + x\,dz = 0
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
dx - dz = 0\\
-\,dy - dz = 0
\end{cases}
$$

կամ $\boxed{dx = dz = -dy}$ *: Տեղադրենք աճերի այս կապը Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի մեջ՝*

$$
d^2L(M_0) = 2\,dz\Big(dz{+}dx\Big) = 2\,dz\Big(dz{+}dz\Big) = 4\,dz^2 > 0, \qquad \text{եթե} \qquad dz \neq 0 :
$$

Քանի որ $d^2L(M_0) > 0$, *երբ* dx, dy, dz *աճերը միաժամանակ զրո չեն,* $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, *և բավարարում են կապի դիֆերենցված* $d\varphi_1 = 0$, $d\varphi_2 = 0$ *հավասարումներին, ապա համաձայն Թեորեմ 3.4,* **1)***-ի՝* M_0 *կետում* f *ֆունկցիան պայմանական մինիմում ունի* $\boxed{M_{\min} = M_0(-1,1,0)}$ *և մինիմումի արժեքն է* $f_{\min} = 0$ *:*

Օրինակ 26. *Դիտարկենք*

$$\boxed{u = f(x,y,z) \stackrel{def}{=} x^2 - y^2 + z^2} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ֆունկցիան, որն արդեն հետազոտել էինք Օրինակ 24-ում: Տրված է միայն մեկ կապի հավասարում,

$$\begin{cases} u = f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 \ \longmapsto \ \text{extr.} \\ \varphi(x,y,z) \stackrel{def}{=} 2x - y - 3 = 0 : \end{cases} \tag{3.39}$$

Տեղադրման եղանակի փոխարեն այժմ կիրառենք Լագրանժի մեթոդը: Կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L \equiv L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 + \lambda(2x - y - 3)$$

և գրենք նրա ստացիոնար կետերը, լուծելով (3.33), *համակարգը՝*

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda = 0 \\ L'_y = -2y - \lambda = 0 \\ L'_z = 2z = 0 \\ \varphi = 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \lambda = 0 \\ \lambda = -2y \\ z = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 : \end{cases}$$

Այսպիսով $M_0(2,1,0)$ *կետը Լագրանժի ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է և ուրեմն՝ $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի միակ հնարավոր կետը:*

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գրենք Լա– գրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը՝

$$L''_{xx} = 2, \qquad L''_{xy} = 0,$$
$$L''_{yy} = -2, \qquad L''_{xz} = 0,$$
$$L''_{zz} = 2, \qquad L''_{yz} = 0,$$

$$d^2L(M_0) = L''_{xx}(M_0)\,dx^2 + L''_{yy}(M_0)\,dy^2 + L''_{zz}(M_0)\,dz^2 +$$

$$
+\,2L''_{xy}(M_0)\,dx\,dy + 2L''_{xz}(M_0)\,dx\,dz + 2L''_{yz}(M_0)\,dy\,dz =
$$
$$
= 2\,dx^2 - 2\,dy^2 + 2\,dz^2 :
$$

Բացի այդ, պահանջենք, որ M_0 կետում կատարվեն կապի դիֆերենցված հավասարումը՝

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\,dx - dy = 0 :
$$

Տեղադրենք աճերի այս $dy = 2\,dx$ *կապը Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալի մեջ՝*

$$
d^2L(M_0) = 2\Big(dx^2 - dy^2 + dz^2\Big) = 2\Big(dz^2 - 3\,dx^2\Big) :
$$

Դժվար է տեսնել, որ $d^2L(M_0)$ դիֆերենցիալը կարող է ընդունել տարբեր նշանների արժեքներ, օրինակ՝

$$
\begin{aligned}
&d^2L(M_0) = -4\,dx^2 < 0, && \textit{եթե} \quad dz = dx \neq 0,\\
&d^2L(M_0) = 2\,dx^2 > 0, && \textit{եթե} \quad dz = 2\,dx \neq 0 :
\end{aligned}
$$

*Քանի որ $d^2L(M_0)$ դիֆերենցիալը նշանափոխ է, երբ dx, dy, dz աճերը միաժամանակ զրո չեն, $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցված $d\varphi = 0$ հավասարմանը, ապա համաձայն Թեորեմ 3.4, **3)**-ի՝ $M_0(2,1,0)$ ստացիոնար կետում f ֆունկցիան պայմանական էքստրեմում չունի, և ուրեմն՝ ֆունկցիան առհասարակ պայմանական էքստրեմում չունի:*

Օրինակ 27. *Հետազոտենք էքստրեմումի առումով*

$$
\boxed{u = f(M) = f(x,y,z) \stackrel{def}{=} x^2 + y^2 + z^2} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_+
$$

ֆունկցիան միայն մեկ կապի $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ *հավասարման դեպքում (*$0 < a < b < c$*): Երկրաչափորեն սա նշանակում է հետազոտել* f

ֆունկցիան ոչ թե ամբողջ որոշման տիրույթում, այլ միայն $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *էլիպսոիդի վրա,*

$$\begin{cases} u=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(x,y,z) \stackrel{def}{=} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 : \end{cases} \tag{3.40}$$

Կազմենք f ֆունկցիայի Լագրանժի ֆունկցիան

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

և գտնենք նրա ստացիոնար կետերը, լուծելով (3.33), *համակարգը՝*

$$\begin{cases} L'_x=2x+\dfrac{2\lambda\, x}{a^2}=0 \\ L'_y=2y+\dfrac{2\lambda\, y}{b^2}=0 \\ L'_z=2z+\dfrac{2\lambda\, z}{c^2}=0 \\ L'_\lambda\equiv\varphi=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\left(1+\dfrac{\lambda}{a^2}\right)=0 \\ y\left(1+\dfrac{\lambda}{b^2}\right)=0 \\ z\left(1+\dfrac{\lambda}{c^2}\right)=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 : \end{cases}$$

Փոփոխականների համաչափությունը և $0<a<b<c$ *պայմանը հաշվի առնելով՝ դժվար չէ գտնել համակարգի բոլոր լուծումները՝*

$$\begin{aligned} &\textit{երբ} \quad \lambda=-a^2, \qquad M=M_{1,2}\big(\pm a,0,0\big), \\ &\textit{երբ} \quad \lambda=-b^2, \qquad M=M_{3,4}\big(0,\pm b,0\big), \\ &\textit{երբ} \quad \lambda=-c^2, \qquad M=M_{5,6}\big(0,0,\pm c\big) : \end{aligned}$$

Ստացանք, որ Լագրանժի ֆունկցիան վեց ստացիոնար կետ ունի: Դրանք $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի հնարավոր կետերն են:

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները և դիֆերենցիալը՝

$$L''_{xx}=2+\frac{2\lambda}{a^2}, \qquad\qquad L''_{xy}=0,$$

$$L''_{yy} = 2 + \frac{2\lambda}{b^2}, \qquad\qquad L''_{xz} = 0,$$
$$L''_{zz} = 2 + \frac{2\lambda}{c^2}, \qquad\qquad L''_{yz} = 0,$$

$$\begin{aligned} d^2L(M,\lambda) &= L''_{xx}(M)\,dx^2 + L''_{yy}(M)\,dy^2 + L''_{zz}(M)\,dz^2 + \\ &\quad + 2L''_{xy}(M)\,dx\,dy + 2L''_{xz}(M)\,dx\,dz + 2L''_{yz}(M)\,dy\,dz = \\ &= 2\left[\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2 + \left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2 + \left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2\right] : \end{aligned}$$

Նկատենք, որ Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի $d^2L(M,\lambda)$ դիֆերենցիալը x, y, z փոփոխականներից և ոչ մեկը չի պարունակում, այնուամենայնիվ ամեն մի ստացիոնար կետ քննարկելիս պետք է տեղադրել λ-ի համապատասխան արժեքը: Բացի այդ, պահանջենք, որ M_i $(i = \overline{1,6})$ ստացիոնար կետում կատարվի կապի դիֆերենցված $d\varphi = 0$ հավասարումը՝

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x}{a^2}\,dx + \frac{y}{b^2}\,dy + \frac{z}{c^2}\,dz = 0 : \tag{3.41}$$

Առանձին քննարկենք M_i $(i = \overline{1,6})$ ստացիոնար կետերի ամեն մի զույգ: Մեզ հետաքրքրում է $d^2L(M,\lambda)$ դիֆերենցիալի նշանը յուրաքանչյուր ստացիոնար կետում:

Երբ $\lambda = -a^2$ *և* $M = M_{1,2}\big(\pm a, 0, 0\big)$, *ստանում ենք*

$$d^2L\big(M_{1,2}, -a^2\big) = 2\left[\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)dy^2 + \left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)dz^2\right] > 0,$$

քանի որ $0 < a < b < c$: *Հետևաբար ըստ Թեորեմ 3.4, **1)**-ի՝* $M_{\min} = M_{1,2}\big(\pm a, 0, 0\big)$ *կետերը $f(M)$-ի պայմանական մինիմումի կետեր են: Մինիմումի արժեքը կլինի* $\boxed{f_{\min} = f(M_{1,2}) = a^2}$:

Երբ $\lambda = -b^2$ *և* $M = M_{3,4}\big(0, \pm b, 0\big)$, *ստանում ենք*

$$d^2L\big(M_{3,4}, -b^2\big) = 2\left[\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 + \left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)dz^2\right] :$$

Հաշվի առնելով $0 < a < b < c$ *պայմանը՝ կարելի է տեսնել, որ* $d^2L\big(M_{3,4}, -b^2\big)$ *դիֆերենցիալը նշանափոխ է, իսկապես,*

$$d^2L\big(M_{3,4}, -b^2\big) = 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) dz^2 > 0, \qquad \textit{եթե} \quad dx = 0,\ dz \neq 0,$$

$$d^2L\big(M_{3,4}, -b^2\big) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 < 0, \qquad \textit{եթե} \quad dz = 0,\ dx \neq 0 :$$

Հետևաբար ըստ Թեորեմ 3.4, ***3)****-ի՝* $M_{3,4}\big(0, \pm b, 0\big)$ *կետերը* $f(M)$ *ֆունկ–ցիայի պայմանական էքստրեմումի կետեր չեն:*

Երբ $\lambda = -c^2$ *և* $M = M_{5,6}\big(0, 0, \pm c\big)$*, ստանում ենք*

$$d^2L\big(M_{5,6}, -c^2\big) = 2\left[\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) dx^2 + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) dy^2\right] < 0,$$

քանի որ $0 < a < b < c$*: Հետևաբար ըստ Թեորեմ 3.4,* ***2)****-ի՝* $M_{\max} = M_{5,6}\big(0, 0, \pm c\big)$ *կետերը* $f(M)$*-ի պայմանական մաքսիմումի կետեր են: Մաքսիմումի արժեքը կլինի* $\boxed{f_{\max} = f(M_{5,6}) = c^2}$ *:*

Խնդիրը լուծված է: Հետաքրքիր է, որ անհրաժեշտ չեղավ օգտագործել կապի դիֆերենցված $d\varphi = 0$*,* (3.41) *հավասարումը:*

Դիտողություն 3.3. *Ինչպես տեսանք Թեորեմ 3.4-ում ներկայացված պայ–մանական էքստրեմումի բավարար պայմանը որոշվում է տվյալ* $f(M)$ *ֆունկցիայի Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի* $d^2L(M)$ *դիֆերենցիալի նշանով՝ կապի դիֆերենցված հավասարումները հաշվի առնելով: Քա–ռակուսային* $d^2L(M)$ *ձևի նշանապահպանման հատկությունները կարելի է ստուգել նաև հանրահաշվական մեթոդներով, որոնք ներկայացված են Բաժին 2.3-ում:*

3.3 Պայմանական էքստրեմումի խնդիրն ավելի շատ փոփոխականի ֆունկցիաների համար

Երեքից ավելի շատ փոփոխականի դեպքում պայմանական էքստրեմումի խնդիրն էլ ավելի բազմազան է և ծավալուն, թեև խնդրի լուծման ընդհանուր սկզբունքները չեն փոխվում: Կարճ նկարագրենք իրավիճակը և բերենք համապատասխան օրինակներ:

n հատ փոփոխականից կախված ֆունկցիաների պայմանական էքստրե– մումի խնդիրը կարող է մինչև $(n-1)$ կապի հավասարում ունենալ, ընդհանուր դեպքում՝ m հատ $(1 \leq m \leq n-1)$ կապի հավասարում: Ավելի շատ կապի հավասարումների առկայությունը կարող է հանգեցնել խնդրի իմաստազրկման: Պայմանական էքստրեմումի խնդիրը ձևականորեն կներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \text{ extr.} \\ \varphi_i(M) = 0 \qquad (1 \leq i \leq m) : \end{cases} \tag{3.42}$$

Լուծման **Լագրանժի մեթոդը** կիրառելու համար ներմուծենք օժանդակ **Լա– գրանժի ֆունկցիան**,

$$\begin{gathered} L \equiv L(M, \lambda_i) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \qquad M \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \boxed{L \stackrel{def}{=} f(M) + \lambda_1\varphi_1(M) + \lambda_2\varphi_2(M) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(M)}, \end{gathered} \tag{3.43}$$

որտեղ $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$ պարամետրերը կոչվում են **Լագրանժի բազմա– պատկիչներ** կամ **Լագրանժի անորոշ գործակիցներ**: Նկատենք, որ Լագրանժի λ_i բազմապատկիչների քանակը համընկնում է կապի հավասարումների թվի հետ և փոքր է անկախ փոփոխականների քանակից, այսինքն՝ $m < n$: Ինչպես երկու կամ երեք փոփոխականի դեպքում էր, վճռական է հետևյալ փաստը՝

$f(M)$ **ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը համարժեք է** f**-ի Լագրանժի ֆունկցիայի սովորական լոկալ էքստրեմումի խնդրին:**

Ուրեմն՝ $f(M)$ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդրի անհրաժեշտ պայմանը համարժեք է f-ի Լագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետի պայմա– նին, որն էլ հանգում է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = 0 \\ \varphi_i(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m) : \end{cases} \tag{3.44}$$

Համակարգը $n+m$ հավասարումից է բաղկացած և $n+m$ հինգ անհայտ ունի: (3.44) համակարգի լուծումները f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի հնարավոր կետերն են:

Թեորեմ 3.5. *(Պայմանական էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը)*

Դիցուք $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_i(M) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $1 \leq i \leq m < n$, *ֆունկցիաները ողորկ են* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *տիրույթում՝* $f, \varphi_i \in C^1(\Omega)$, *և* $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ *կետը*

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi_i(M) = 0 \qquad (1 \leq i \leq m) \end{cases} \tag{3.45}$$

խնդրի լուծում է, այսինքն՝ f*-ի պայմանական էքստրեմումի կետ է* $\varphi_i = 0$ *կապի հավասարումների դեպքում:*

Բացի այդ, M_0 *կետում* φ_i *ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալներից կազմված հետևյալ (Յակոբիի) մատրիցը (*$m \times n$ *չափերով)*

$$J = J(M_0) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial \varphi_i(M_0)}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

ունի ոչ զրոյական m*-րդ կարգի մինոր: Այլ կերպ ասած՝* J *մատրիցի ռանգը հավասար է* m*-ի՝* $\operatorname{rank} J = m$*:*

Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$ *արժեքներ այնպիսիք, որ* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ *կետը բավարարում է*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = 0 \\ \varphi_i(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m) : \end{cases} \tag{3.46}$$

համակարգին, այսինքն՝ այդ կետը Լագրանժի L *ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է:*

Այս թեորեմը Ֆերմայի հայտնի թեորեմի հեռավոր նմանակն է պայմանական էքստրեմումի դեպքում: Թեորեմը կարելի է կարճ ձևակերպել այսպես. f

ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետը f-ի Լագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է:

Այժմ ձևակերպենք պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը շատ փոփոխականից կախված ֆունկցիաների համար:

Թեորեմ 3.6. *(Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանը)*

Դրված է 2-րդ կարգի ողորկ $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի խնդիրը կապի* $\varphi_i = 0$ *հավասարումների դեպքում, այսինքն՝*

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi_i(M) = 0 \qquad (1 \le i \le m) : \end{cases} \tag{3.47}$$

Դիցուք $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *կետը ինչ-որ* $\lambda_i\,(1 \le i \le m)$ *արժեքների դեպքում* $f(M)$ *ֆունկցիայի Լագրանժի*

$$\boxed{L \equiv L(M) \equiv L(M, \lambda_i) = f(M) + \lambda_1\varphi_1(M) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(M)}$$

ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է, այսինքն՝ $dL(M_0) \equiv 0$, *կամ*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_j} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \le j \le n) \\ \varphi_i(M_0) = 0 \quad (1 \le i \le m) : \end{cases} \tag{3.48}$$

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի դիֆերենցիալը M_0 *կետում՝*

$$d^2L(M_0) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_j \partial x_k}\, dx_j\, dx_k = \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_1^2}\, dx_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_n^2}\, dx_n^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\, dx_{n-1}\, dx_n :$$

1) *Եթե* $d^2L(M_0) > 0$ *բոլոր* $\forall\, dx_j\,(1 \le j \le n)$ *դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն,* $dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \neq 0$, *և բավարարում են կապի դիֆերենցված հավասարումներին՝*

$$d\varphi_i(M_0) = 0 \quad (1 \le i \le m), \tag{3.49}$$

ապա M_0 կետը f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մինիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\min}$ կապի $\varphi_i = 0$ հավասարումների դեպքում:

2) *Եթե $d^2L(M_0) < 0$ բոլոր $\forall\, dx_j\,(1 \le j \le n)$ դիֆերենցիալների (աճերի) համար, որոնք միաժամանակ զրո չեն, $dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \neq 0$, և բավարարում են կապի դիֆերենցված հավասարումներին՝*

$$d\varphi_i(M_0) = 0 \quad (1 \le i \le m), \tag{3.50}$$

ապա M_0 կետը f ֆունկցիայի (խիստ) պայմանական մաքսիմումի կետ է՝ $M_0 = M_{\max}$ կապի $\varphi_i = 0$ հավասարումների դեպքում:

3) *Եթե $d^2L(M_0)$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը նշանափոխ է (ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ) dx_j դիֆերենցիալների (աճերի) նույն (3.50) սահմանափակումների ներքո, ապա M_0 կետը f ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետ չէ:*

4) *Եթե $d^2L(M_0) \ge 0$ կամ $d^2L(M_0) \le 0$, երբ dx_j դիֆերենցիալները (աճերը) բավարարում են նույն (3.50) սահմանափակումներին, ապա սույնց ոչինչ ասել հնարավոր չէ. M_0 կետը կարող է ինչպես f-ի պայմանական էքստրեմումի կետ լինել, այնպես էլ չլինել (և ուրեմն՝ այս դեպքում կպահանջվի լրացուցիչ հետազոտում):*

Քննարկենք n փոփոխականից կախված ֆունկցիաների մի քանի օրինակներ, որոնցում պայմանական էքստրեմումները կորոնենք անորոշ բազմապատկիչների Լագրանժի մեթոդով:

Օրինակ 28. *Լուծենք պայմանական էքստրեմումի հետևյալ խնդիրը, որը պարունակում է ընդամենը մեկ կապի հավասարում,*

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{def}{=} x_1 + x_2 + \cdots + x_n \longmapsto \text{extr.} \\ \varphi(M) \overset{def}{=} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0 : \end{cases} \tag{3.51}$$

Երկրաչափորեն սա նշանակում է, որ տրված f գծային ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է գտնել $\mathbb{R}^n$ տարածության

$$S \overset{def}{=} \left\{M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$$

միավոր սֆերայի վրա: Այսինքն՝ պահանջվում է հետազոտել $f\Big|_S$ ֆունկ– ցիան:

Կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան ընդամենը մեկ λ անորոշ բազ– մապատկիչով,

$$\begin{aligned} L \equiv L(M) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(M) + \lambda\varphi(M) = \\ = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1) \end{aligned}$$

Սկզբում գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը (հնարա– վոր էքստրեմումի կետերը): Այդ նպատակով կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 1 + 2\lambda\, x_j = 0 \quad (1 \le j \le n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_j = \dfrac{-1}{2\lambda} \quad (1 \le j \le n) \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_j = \dfrac{-1}{2\lambda} \quad (1 \le j \le n) \\ n\,\dfrac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{n}}{2} \\ x_j = \mp\dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad (1 \le j \le n) : \end{cases}$$

Ստացանք երկու ստացիոնար կետ (S միավոր սֆերայի վրա),

$$\text{երբ} \quad \lambda = \frac{\sqrt{n}}{2}, \qquad M = M_1\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{-1}{\sqrt{n}}\right) \in S,$$

$$\text{երբ} \quad \lambda = -\frac{\sqrt{n}}{2}, \qquad M = M_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \in S :$$

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները և դիֆերենցիալը,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = 2\lambda \quad (1 \le j \le n), \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_j\, \partial x_k} = 0 \quad (j \ne k),$$

$$d^2L(M)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 L(M)}{\partial x_j\partial x_k}\,dx_j\,dx_k=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\,dx_1^2+\cdots+\frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}\,dx_n^2+$$
$$+\,2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}\,dx_1\,dx_2+\cdots+2\frac{\partial^2 L}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\,dx_{n-1}\,dx_n=$$
$$=2\lambda\Big(dx_1^2+\cdots+dx_n^2\Big)\ :$$

Համաձայն Թեորեմ 3.6-ի՝ պահանջենք նաև, որ սպացիոնար կետերում կատարվեն կապի դիֆերենցված հավասարումները՝

$$d\varphi(M_{1,2})=\frac{\partial\varphi(M_{1,2})}{\partial x_1}\,dx_1+\cdots+\frac{\partial\varphi(M_{1,2})}{\partial x_n}\,dx_n=0,$$
$$2\,x_1\,dx_1+\cdots+2\,x_n\,dx_n=\frac{-1}{\lambda}\,dx_1+\cdots+\frac{-1}{\lambda}\,dx_n=0,$$
$$\boxed{dx_1+\cdots+dx_n=0}\ :$$

Ճիշտ է՝ d^2L դիֆերենցիալը այնքան պարզ տեսք ունի, որ կապի դիֆերենցված հավասարումն այլևս չի կարող ազդել d^2L դիֆերենցիալի նշանի վրա:

Երբ $M=M_1,\ \lambda=\frac{\sqrt{n}}{2},$ *ստանում ենք* $d^2L(M_1)>0$ *և ուրեմն՝* M_1 *կետը Լագրանժի ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է և միաժամանակ* f *ֆունկցիայի պայմանական մինիմումի կետ, իսկ մինիմումի արժեքն է* $f_{\min}=f(M_1)=-\sqrt{n}$*:*

Երբ $M=M_2,\ \lambda=-\frac{\sqrt{n}}{2},$ *ստանում ենք* $d^2L(M_2)<0$ *և ուրեմն՝* M_2 *կետը Լագրանժի ֆունկցիայի լոկալ մաքսիմումի կետ է և միաժամանակ* f *ֆունկցիայի պայմանական մաքսիմումի կետ, իսկ մաքսիմումի արժեքն է* $f_{\max}=f(M_2)=\sqrt{n}$*:*

Օրինակ 29. *Լուծենք պայմանական էքստրեմումի հետևյալ խնդիրը ընդամենը մեկ կապի հավասարումով,*

$$\begin{cases}u=f(M)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\overset{def}{=}x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\ \longmapsto\ \text{extr.}\\ \varphi(M)\overset{def}{=}x_1+x_2+\cdots+x_n-1=0\ :\end{cases}$$

Երկրաչափորեն սա նշանակում է, որ տրված f քառակուսային ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է գտնել $\mathbb{R}^n$ տարածության $x_1+x_2+\cdots+x_n-1=0$ հիպերհարթության վրա:

Կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան ընդամենը մեկ λ անորոշ բազմապատկիչով,

$$\begin{aligned} L \equiv L(M) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(M) + \lambda\varphi(M) = \\ = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 1) \end{aligned}$$

Սկզբում գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը (հնարավոր էքստրեմումի կետերը): Այդ նպատակով կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 2\,x_j + \lambda = 0 \quad (1 \le j \le n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_j = \dfrac{-\lambda}{2} \quad (1 \le j \le n) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_j = \dfrac{-\lambda}{2} \quad (1 \le j \le n) \\ \dfrac{-\lambda\, n}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{-2}{n} \\ x_j = \dfrac{1}{n} \quad (1 \le j \le n): \end{cases}$$

Ստացանք միայն մեկ ստացիոնար կետ,

$$\text{երբ} \quad \lambda = \frac{-2}{n}, \qquad M = M_0\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right):$$

Էքստրեմումի բավարար պայմանը ստուգելու համար գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները և դիֆերենցիալը,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = 2 \quad (1 \le j \le n), \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_j\, \partial x_k} = 0 \quad (j \ne k),$$

$$d^2 L(M) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(M)}{\partial x_j \partial x_k}\, dx_j\, dx_k = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\, dx_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}\, dx_n^2 +$$

$$+\,2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}\,dx_1\,dx_2+\cdots+2\frac{\partial^2 L}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\,dx_{n-1}\,dx_n=$$

$$=2\Big(dx_1^2+\cdots+dx_n^2\Big)>0, \qquad \text{երբ} \quad dx_1^2+\cdots+dx_n^2\neq 0:$$

Համաձայն Թեորեմ 3.6-ի՝ M_0 *կետը Լագրանժի ֆունկցիայի լոկալ մինիմումի կետ է և միաժամանակ* f *ֆունկցիայի պայմանական մինիմումի կետ, իսկ մինիմումի արժեքն է* $f_{\min}=f(M_0)=\frac{1}{n}$*:*

Ստացիոնար կետում կապի դիֆերենցված $d\varphi(M_0)=0$ *հավասարումը հաշվի առնելու կարիք այլևս չկա:*

Օրինակ 30. *Լուծենք պայմանական էքստրեմումի հետևյալ խնդիրը ընդամենը մեկ կապի հավասարումով,*

$$\begin{cases} u=f(M)\overset{def}{=}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\,x_k^2 \;\longmapsto\; \text{extr.} \qquad (0<a_1<a_2<\cdots<a_n)\\ \varphi(M)\overset{def}{=}x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1=0: \end{cases}$$

Երկրաչափորեն սա նշանակում է, որ տրված f *քառակուսային ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է գտնել* $\mathbb{R}^n$ *տարածության*

$$S\overset{def}{=}\Big\{M(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n: \quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\Big\}$$

միավոր սֆերայի վրա: Այսինքն՝ պահանջվում է հետազոտել $f\Big|_S$ *ֆունկցիան:*

Կազմենք f*-ի Լագրանժի ֆունկցիան ընդամենը մեկ* λ *անորոշ բազմապատկիչով (տեխնիկական նկատառումներով* λ*-ի փոխարեն այս անգամ վերցնենք* $-\lambda$*),*

$$L\equiv L(M)\equiv L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda)=f(M)-\lambda\varphi(M)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k\,x_k^2-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)=\sum_{k=1}^{n}(a_k-\lambda)\,x_k^2+\lambda:$$

Սկզբում գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը (հնարավոր էքստրեմումի կետերը): Այդ նպատակով կազմենք և լուծենք հետևյալ *համակարգը՝*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 2(a_j - \lambda)\, x_j = 0 \quad (1 \le j \le n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = a_j \quad \textit{կամ} \quad x_j = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 : \end{cases}$$

Պարզ է, որ անհնար են երկու ծայրահեղ դեպքերը, երբ λ-ն հավասար է a_k գործակիցներից միաժամանակ երկուսին $\lambda = a_j = a_k$ $(j \neq k)$, ինչը կհակասեր $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ պայմանին, կամ $\lambda \neq a_j\,(j = \overline{1,n})$, այսինքն՝ $x_j = 0$ բոլոր $j\,(j = \overline{1,n})$ ինդեքսների համար, ինչը կհակասեր կապի $\varphi = 0$ հավասարմանը, այն է՝ $M(x_1, \ldots, x_n)$ կետի պատկանելիությանը S սֆերային:

Հետևաբար $\lambda = a_k$ որևէ մեկ $k \in [1, n]$ ինդեքսի համար: Այդ դեպքում անհրաժեշտաբար $\lambda \neq a_j$ և $x_j = 0$ մնացած բոլոր $j\,(j \neq k)$ ինդեքսների համար, և վերջին համակարգը կհանգի հետևյալին՝ $\exists\, k \in [1, n]$ այնպիսին, որ

$$\begin{cases} \lambda = a_k \\ x_j = 0 \qquad \forall\, j \neq k \\ x_k^2 = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \lambda = a_k \\ x_j = 0 \qquad \forall\, j \neq k \\ x_k = \pm 1 : \end{cases}$$

Այսպիսով ստացանք $2n$ հատ ստացիոնար կետ (բնականաբար բոլորը S միավոր սֆերայի վրա),

$$\textit{երբ} \quad \lambda = a_k, \qquad M = M_k^{(\pm)}(0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0) \in S, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

որտեղ 1 կամ -1 թիվը M_k ստացիոնար կետի k-րդ կոորդինատն է:

Նկատենք, որ S սֆերան կոմպակտ է (փակ սահմանափակ բազմություն) $\mathbb{R}^n$ տարածության մեջ, ուստի՝ համաձայն Վայերշտրասի թեորեմի՝ $f \in C(S)$ անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքներին այդ սֆերայի վրա: Եթե խնդիրը կայանա $f\Big|_S$ ֆունկցիայի միայն մեծագույն և փոքրագույն արժեքները ստանալու մեջ, ֆունկցիայի *պեսքից և $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ պայմանից մենք անմիջապես կարող ենք եզրակացնել, որ $M_n^{(\pm)}$ կետերը $f\Big|_S$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետեր են, որոնցում $f\Big|_S$ ֆունկցիան հասնում է իր մեծագույն արժեքին,*

$$M_{\max} = M_n^{(\pm)}(0,\ldots,0,\pm 1) \in S, \qquad \boxed{\max_{M\in S} f(M) = f\big(M_n^{(\pm)}\big) = a_n} :$$

Նմանապես գտնում ենք $f\Big|_S$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը՝

$$M_{\min} = M_1^{(\pm)}(\pm 1, 0,\ldots,0) \in S, \qquad \boxed{\min_{M\in S} f(M) = f\big(M_1^{(\pm)}\big) = a_1} :$$

Մնացած $M_k^{(\pm)}$ $(1 < k < n)$ կետերը առհասարակ $f\Big|_S$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետեր չեն: Այդ փաստը ստուգելու համար դիմենք նույն Թեորեմ 3.6-ին և գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի 2-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները և դիֆերենցիալը՝

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j^2} = 2(a_j - \lambda) \quad (1 \le j \le n), \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_j\, \partial x_k} = 0 \quad (j \ne k),$$

$$\begin{aligned} d^2L(M) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(M)}{\partial x_j \partial x_k}\, dx_j\, dx_k &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\, dx_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}\, dx_n^2 + \\ &+ 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\, dx_{n-1}\, dx_n = \\ &= 2(a_1-\lambda)\, dx_1^2 + \cdots + 2(a_k - \lambda)\, dx_k^2 + \cdots + 2(a_n - \lambda)\, dx_n^2 : \end{aligned}$$

Երբ $M = M_k^{(\pm)}(0,\ldots,0,\pm 1, 0,\ldots,0)$, λ *բազմապատկիչի արժեքն ունենք՝* $\lambda = a_k$, *հետևաբար*

$$\begin{aligned} d^2L\big(M_k^{(\pm)}\big) =& 2(a_1 - a_k)\, dx_1^2 + \cdots + 2(a_{k-1} - a_k)\, dx_{k-1}^2 + \\ &+ 2(a_{k+1} - a_k)\, dx_{k+1}^2 + \cdots + 2(a_n - a_k)\, dx_n^2 : \end{aligned} \tag{3.52}$$

Նշենք, որ ստացիոնար $M = M_k^{(\pm)}(0,\ldots,0,\pm 1, 0,\ldots,0)$ կետերում կապի դիֆերենցված հավասարման առկայությունը $d^2L\big(M_k^{(\pm)}\big)$ դիֆերենցիալի *պեսքը որևէ կերպ չի փոխում: Իսկապես,*

$$d\varphi(M_k) = \frac{\partial\varphi(M_k)}{\partial x_1}\,dx_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi(M_k)}{\partial x_n}\,dx_n = 0,$$

$$2\,x_1\,dx_1 + \cdots + 2\,x_n\,dx_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{dx_k = 0}\,:$$

Վերջապես, մեզ մնում է պարզել $d^2L\big(M_k^{(\pm)}\big)$, (3.52) *դիֆերենցիալի նշանը: Բավական է նկատել,* (3.52) *դիֆերենցիալի առաջին* $k-1$ *գործակիցները բացասական են, իսկ վերջին* $n-k$ *գործակիցները դրական են,*

$$a_j - a_k < 0, \text{ եթե } 1 \le j \le k-1, \qquad \text{և} \qquad a_j - a_k > 0, \text{ եթե } k+1 \le j \le n\,:$$

Սա նշանակում է, որ (3.52) *դիֆերենցիալն ընդունում է թե՛ դրական, թե՛ բացասական արժեքներ պարբեր* $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, $dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \neq 0$, *աճերի համար:*

Համաձայն Թեորեմ 3.6 ***3)****-ի՝* $M_k^{(\pm)}$ $(1 < k < n)$ *կետերից և ոչ մեկը* $f\Big|_S$ *ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, այսինքն՝* f *ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետ չէ:*

Հաջորդ օրինակում մենք էլ ավելի ընդհանուր քառակուսային ձև ենք հետազոտելու:

Օրինակ 31. *Գտնենք հետևյալ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները՝*

$$\begin{cases} u = f(M) = f(x) \overset{def}{=} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\,x_j \;\longmapsto\; \text{max.min.} \qquad (a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}) \\ \varphi(M) = \varphi(x) \overset{def}{=} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0\,: \end{cases}$$

Տրված ֆունկցիան կամայական քառակուսային ձև է, որոնց մասին որոշ պեղեկություններ կարելի է գտնել Բաժին 2.3-ում: Երկրաչափորեն խնդիրը նշանակում է, որ տրված f *քառակուսային ձևի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները պետք է գտնել* $\mathbb{R}^n$ *տարածության* S *միավոր սֆերայի վրա, այսինքն՝ պահանջվում է հետազոտել* $f\Big|_S$ *ֆունկցիան:*

Կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան λ անորոշ բազմապատկիչով (տեխնիկական նկատառումներով λ-ի փոխարեն այս անգամ վերցնենք $-\lambda$),

$$\begin{aligned} L \equiv L(x) \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x) - \lambda\varphi(x) = \\ = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1) : \end{aligned}$$

Սկզբում գտնենք Լագրանժի ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը (հնարավոր էքստրեմումի կետերը): Այդ նպատակով կազմենք n *հավասարումներից բաղկացած հետևյալ համակարգը՝*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = a_{21}\, x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \cdots + a_{2n}\, x_n = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L}{\partial x_n} = a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{n,n-1}\, x_{n-1} + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0, \end{cases} \tag{3.53}$$

որին կավելացնենք $(n+1)$*-րդ (կապի) հավասարումը՝*

$$\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0 :$$

Համասեռ գծային (3.53) *համակարգի պարզունակ* $(0, 0, \ldots, 0)$ *լուծումը չի բավարարում կապի հավասարմանը: Գծային հանրահաշվի դասընթացից հայտնի է, որ ոչ զրոյական լուծում* (3.53) *համակարգը ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա հիմնական մատրիցի որոշիչը զրո է՝*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{3.54}$$

այսինքն՝ երբ λ *թիվը այս բնութագրիչ* (3.54) *հավասարման արմատ է: Կարելի է* (3.53) *համակարգը արտագրել* $A=(a_{ij})$ *սիմետրիկ մատրիցի միջոցով՝*

$$\boxed{Ax=\lambda\,x}, \qquad\qquad x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:$$

Այլ կերպ ասած, A *մատրիցի համար* λ*-ն սեփական արժեք է, իսկ* x*-ը՝ սեփական վեկտոր: Օգտվենք այն փաստից, որ սիմետրիկ մատրիցի սեփական արժեքները միշտ իրական են (այսինքն՝ կոմպլեքս չեն): Դիցուք* $\lambda_1,\,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ *իրական թվերն* $A=(a_{ij})$ *մատրիցի բոլոր սեփական արժեքներն են, այսինքն՝* (3.54) *բնութագրիչ բազմանդամի արմատները: Յուրաքանչյուր* λ_j *սեփական արժեքին* (3.53) *համակարգից համապատասխանում է այնպիսի*

$$x^{(j)}=\left(x_1^{(j)},x_2^{(j)},\ldots,x_n^{(j)}\right)\in S,\qquad Ax^{(j)}=\lambda_j\,x^{(j)},\qquad 1\le j\le n,$$

սեփական վեկտոր, որն ունի միավոր երկարություն, այսինքն՝ բավարարում է կապի $\varphi=0$ *հավասարմանը: Միավոր սֆերայի այս* $x^{(j)}$ *կետերը կլինեն* $f\big|_S$ *ֆունկցիայի հնարավոր էքստրեմումի կետեր, որոնց բացահայտ տեսքը մեզ ամենևին էլ պետք չէ: Մեզ պետք է գտնել* $f\big|_S$ *ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, որոնց գոյությունը ապահովված է* S *սֆերայի կոմպակտ լինելով,* $f\big|_S$ *ֆունկցիայի անընդհատությամբ և Վայերշտրասի թեորեմի շնորհիվ:*

Կատարենք (3.53) *համակարգի մի ձևափոխություն: Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարում բազմապատկենք* $x_1,x_2,\ldots,x_n$*-ով, համապատասխանաբար, և ստացված բոլոր հավասարումները գումարենք իրար: Դժվար չէ նկատել, որ արդյունքում կստացվի*

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,x_i\,x_j-\lambda\sum_{j=1}^{n}x_j^2=0,$$

որն էլ, հաշվի առնելով կապի հավասարումը՝ համարժեք է

$$f(x)\equiv f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,x_i\,x_j=\lambda$$

հավասարմանը: Սա նշանակում է, որ եթե λ-ն բավարարում է (3.53) *համակարգին, այսինքն՝ A մատրիցի սեփական արժեք է, ապա $Ax = \lambda x$ հավասարումից նրան համապատասխանող x սեփական վեկտորը վերցնելով որպես $f(x)$ ֆունկցիայի արգումենտ, կստանանք հենց λ արժեքը՝ $\boxed{f(x) = \lambda}$: Մասնավորապես, λ_j սեփական արժեքին համապատասխանող $x^{(j)}$ սեփական վեկտորի համար կստանանք*

$$\boxed{f\big(x^{(j)}\big) = \lambda_j, \qquad 1 \le j \le n} :$$

Քանի $x^{(j)}$ կետերը $f\Big|_S$ ֆունկցիայի բոլոր ստացիոնար կետերն են, ապա

$$\max_{x\in S} f(x) = \max_{1\le j\le n} f\Big(x^{(j)}\Big) = \max_{1\le j\le n} \lambda_j \,,$$
$$\min_{x\in S} f(x) = \min_{1\le j\le n} f\Big(x^{(j)}\Big) = \min_{1\le j\le n} \lambda_j \;:$$

Այս օրինակով մենք փաստորեն ապացուցեցինք հետևյալ գեղեցիկ արդյունքը.

Հետևանք 3.1. *(Քառակուսային ձևի մաքսիմումի և մինիմումի մասին)*

$\mathbb{R}^n$ *տարածության $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = 1\}$ միավոր սֆերայի վրա սահմանված կամայական*

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j, \qquad x \in S, \qquad (a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R})$$

քառակուսային ձևի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը հավասար է $A = (a_{ij})$ մատրիցի սեփական արժեքների մեծագույնին (փոքրագույնին) :

3.4 Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները փակ և սահմանափակ փիրույթում

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների մեծագույն և փոքրագույն արժեքները սահմանվում են այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար:

Չպետք է շփոթել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները այդ ֆունկ– ցիայի մաքսիմումների և մինիմումների հետ:

Ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը միշտ միակն է (եթե իհարկե գոյություն ունի), մինչդեռ ֆունկցիայի մաքսիմումները (մինիմումները) կարող են մի քանիսը լինել, անգամ՝ անվերջ քանակով: Ավելին՝ ֆունկցայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը կարող է չհամընկնել այդ ֆունկցիայի որևէ մաքսիմումի (մինիմումի) հետ: Այդ առումով իրավիճակը չի փարբերվում մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքից: Եթե ֆունկցիան խզվող է կամ անընդհատ ոչ փակ կամ անսահմանափակ փիրույթում, ապա ֆունկցիան մեծագույն (փոքրագույն) արժեք կարող է չունենալ: Մինչդեռ ըստ Վայերշտրասի հայտնի թեորեմի՝ անընդհատ ֆունկցիան փակ և սահմանափակ փիրույթում (կոմպակտում) միշտ ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները: Այդ երկու ար– ժեքները ֆունկցիան ընդունում է կամ փիրույթի եզրի վրա, կամ ներքին ստա– ցիոնար կետերում:

Դիցուք $f(M)$ ֆունկցիան որոշված է և ողորկ $D \subset \mathbb{R}^n$ կոմպակտում, $f \in C^1(D)$: Որպեսզի գտնել ֆունկցայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D կոմպակտում, կարելի է կատարել հետևյալ քայլերը.

Քայլ 1. Գտնել f ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը D կոմպակտի ներսում: Նշանակենք այդ կետերը՝ $M_1,\ M_2, \ldots,\ M_k$: Պարտադիր չէ պարզել, այդ ստացիոնար կետերը կլինեն (լոկալ) էքստրեմումի կետեր թե ոչ:

Քայլ 2. Հաշվել f ֆունկցիայի արժեքները գտնված ստացիոնար կետերում, նեթադրենք

$$f(M_1),\ f(M_2), \ldots,\ f(M_k)\ :$$

Քայլ 3. Գտնել f ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արգեքները D կոմպակտի ∂D եզրի վրա, $\max\limits_{M\in\partial D} f(M)$, $\min\limits_{M\in\partial D} f(M)$: Այստեղ առաջանում է պայմանական էքստրեմումի խնդիր, քանի որ ∂D եզրը տալու է որոշման փիրույթի նոր սահմանափակումներ: Այդ խնդիրը հնարավոր է լուծել ինչպես անմիջական տեղադրման, այնպես էլ Լագրանժի մեթոդով:

Քայլ 4. Համեմատել բոլոր ստացված $(k+2)$ արժեքները՝

$$f(M_1),\ f(M_2),\ldots,\ f(M_k),\ \max_{M\in\partial D} f(M),\ \min_{M\in\partial D} f(M):$$

Դրանցից մեծագույնը կլինի f-ի մեծագույն արժեքը D-ում, կգրենք $\max\limits_{M\in D} f(M)$, իսկ փոքրագույնը կլինի f-ի փոքրագույն արժեքը D-ում, կգրենք $\min\limits_{M\in D} f(M)$:

Ներկայացնենք մի քանի համապատասխան օրինակներ:

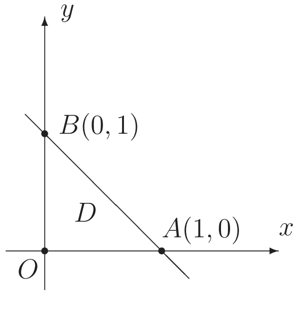
Օրինակ 32. $\mathbb{R}^2$ *հարթության վրա տրված է*

$$x=0, \quad y=0, \quad y=1-x \tag{3.55}$$

ուղիղներով սահմանափակված փակ բազմությունը (կոմպակտը), որը նշանակենք D-ով: Այդ կոմպակտում որոշված է

$$\boxed{z=f(x,y)\stackrel{def}{=} xy-y^2+3x+4y} \longmapsto \text{max.min.}, \qquad (x,y)\in D,$$

ֆունկցիան և պահանջվում է հաշվել նրա մեծագույն և փոքրագույն ար– ժեքները D կոմպակտում:



Գծ. 10

Լուծումն սկսենք ներքին ստացիոնար կետերից,

$$\begin{cases} f'_x = y+3=0 \\ f'_y = x-2y+4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-3 \\ x=-10 \end{cases} \qquad M_0(-10,-3):$$

Քանի որ միակ ստացիոնար կետը գտնվում է D կոմպակտից դուրս, $M_0(-10,-3)\notin D$, մեզ չպետք է հետաքրքրի $f(M_0)$ արժեքը: Հետևաբար f-ի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D կոմպակտում հասանելի են D կոմպակտի ∂D եզրի վրա: Այդ եզրագիծը կազմված է երեք ուղղագիծ հատվածներից՝ OA, OB, AB, որոնք կքննարկենք հաջորդաբար:

1) Եթե $(x,y)\in OA$, ապա $y=0$, $0\le x\le 1$, և f ֆունկցիան ընդունում է $f(x,0)=3x$ տեսքը: Պարզ է, որ $f'_x(x,0)=3$ և ստացիոնար կետեր OA հատվածի վրա չկան, ուրեմն՝

$$\max_{(x,y)\in OA} f(x,y)=f(A)=f(1,0)=3,$$
$$\min_{(x,y)\in OA} f(x,y)=f(O)=f(0,0)=0\,:$$

2) Եթե $(x,y)\in OB$, ապա $x=0$, $0\le y\le 1$, և f ֆունկցիան ընդունում է $f(0,y)=4y-y^2$ տեսքը: Այստեղ $f'_y(0,y)=4-2y=0$, f-ի ստացիոնար կետը $(0,2)\notin D$ չի պատկանում D կոմպակտին, ուրեմն՝ այն անտեսում ենք: Հաշվի առնենք f-ի արժեքները OB հատվածի ծայրակետերում՝

$$f(O)=f(0,0)=0,\qquad f(B)=f(0,1)=3\,:$$

3) Եթե $(x,y)\in AB$, ապա $y=1-x$, $0\le x\le 1$, և տեղադրելուց հետո f ֆունկցիան ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$f(x,1-x)=x(1-x)-(1-x)^2+3x+4(1-x)=-2x^2+2x+3\,:$$

Ածանցումը ցույց է տալիս, որ

$$f'(x,1-x)=-4x+2=0,\qquad x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2},\qquad M_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=M_{max}$$

մաքսիմումի կետ է եզրի վրա: Հաշվենք մաքսիմումի արժեքը՝

$$f_{\max}=f(M_0)=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}\,:$$

Եզրի վրա բոլոր ստացված արժեքները համեմատելով՝ ստանում ենք

$$\max_{M\in D} f(M) = \max_{M\in\partial D} f(M) = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2},$$
$$\min_{M\in D} f(M) = \min_{M\in\partial D} f(M) = f(0,0) = 0 :$$

Հաջորդ օրինակում փիրույթի եզրի վրա ոչ թե պարզ տեղադրում ենք կատարում, այլ լուծում ենք Լագրանժի մեթոդով:

Օրինակ 33. $\mathbb{R}^2$ *հարթության վրա տրված է 5 շառավղով փակ շրջան*

$$D \overset{def}{=} \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2\le 25\Big\},$$

որում պահանջվում է գտնել տրված ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները՝

$$\boxed{z = f(x,y) \overset{def}{=} x^2+y^2-12x+16y} \longmapsto \text{max.min.}, \qquad (x,y)\in D :$$

Սկզբում գտնենք f ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը D տիրույթի ներսում,

$$\begin{cases} f'_x = 2x-12=0 \\ f'_y = 2y+16=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=6 \\ y=-8 \end{cases} \qquad M_0(6,-8) :$$

Ստացանք ընդամենը մեկ ստացիոնար կետ, որն էլ չի պատկանում դիտարկվող տիրույթին՝ $M_0(6,-8)\notin D$ և ուրեմն՝ պետք է անտեսվի: Հետևաբար f-ի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները D շրջանում հասանելի են D կոմպակտի

$$\partial D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 = 25\Big\}$$

եզրի (շրջանագծի) վրա: Առաջացավ պայմանական էքստրեմումի խնդիր՝

$$\begin{cases} z = f(x,y) = x^2+y^2-12x+16y \longmapsto \text{max.min.} \\ \varphi(x,y) \overset{def}{=} 25-x^2-y^2 = 0 : \end{cases}$$

Կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L = L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(25 - x^2 - y^2),$$

որտեղ λ-ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ է:

Նախ գտնենք Լագրանժի $L(x, y)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 2x - 12 - 2\lambda\, x = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 2y + 16 - 2\lambda\, y = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 25 - x^2 - y^2 = 0 : \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1 - \lambda) = 6 \\ y(1 - \lambda) = -8 \\ x^2 + y^2 = 25 : \end{cases}$$

Համակարգն ունի երկու լուծում՝

$$M_1(3, -4), \qquad \text{երբ} \qquad \lambda = -1,$$
$$M_2(-3, 4), \qquad \text{երբ} \qquad \lambda = 3 :$$

Պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանն ստուգելու կարիք չկա: Ընդամենը պետք է հաշվել f ֆունկցիայի արժեքները M_1 և M_2 կետերում և ընտրություն կատարել,

$$\max_{(x,y)\in D} f(x, y) = \max_{(x,y)\in\partial D} f(x, y) = f(-3, 4) = 125,$$
$$\min_{(x,y)\in D} f(x, y) = \min_{(x,y)\in\partial D} f(x, y) = f(3, -4) = -75,$$

ինչը և պահանջվում էր գտնել:

Օրինակ 34. $\mathbb{R}^3$ *եռաչափ տարածության մեջ տրված է 2 շառավղով փակ կիսագունդ*

$$D \overset{def}{=} \Big\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \; z \ge 0\Big\},$$

որում պահանջվում է գտնել տրված ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, $(x, y, z) \in D$,

$$\boxed{u = f(x, y, z) \overset{def}{=} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z} \;\longmapsto\; \text{max.min.} :$$

Սկզբում գտնենք f ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը D տիրույթի ներսում,

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2 = 0 \\ f'_y = 2y - 2 = 0 \\ f'_z = 2z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \boxed{M_1(1,1,1)} \in D :$$

Ստացանք ընդամենը մեկ ստացիոնար կետ, որը պատկանում է դի–տարկվող տիրույթին՝ $M_1(1,1,1) \in D$: Քանի որ մեր առջև էքստրեմումի խնդիր դրված չէ, կարիք չկա որոշելու M_1 հնարավոր էքստրեմումի կետի բնույթը:

Շարունակենք մաքսիմումի և մինիմումի որոնումները, այժմ, եզրի վրա: Տվյալ D կիսագնդի եզրը բաղկացած է

$$S^+ \overset{def}{=} \Big\{ M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0 \Big\}$$

կիսասֆերայից և

$$D_0 \overset{def}{=} \Big\{ M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0 \Big\}$$

փակ շրջանից, $\boxed{\partial D = S^+ \cup D_0}$: Կիսասֆերայի վրա ձևակերպենք պայ–մանական էքստրեմումի խնդիր կապի մեկ հավասարումով՝

$$\begin{cases} u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \ \longmapsto \ \text{max.min.} \\ \varphi(x,y,z) \overset{def}{=} x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 : \end{cases}$$

Այս խնդիրը լուծելու համար կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$\begin{aligned} L = L(x,y,z,\lambda) &= f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4), \end{aligned}$$

որտեղ λ-ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ է:

Գտնենք Լագրանժի L ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը: Դրա համար կազմենք և լուծենք հետևյալ համակարգը

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 2 + 2\lambda\, x = 0 \\ L'_y = 2y - 2 + 2\lambda\, y = 0 \\ L'_z = 2z - 2 + 2\lambda\, z = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1+\lambda) = 1 \\ y(1+\lambda) = 1 \\ z(1+\lambda) = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 : \end{cases}$$

Պարզ է, որ $x = y = z > 0$, և համակարգն ունի մեկ լուծում

$$\boxed{M_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} \in S^+, \qquad \text{երբ} \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 :$$

Դարձյալ պայմանական էքստրեմումի բավարար պայմանն ստուգելու և M_2 հնարավոր էքստրեմումի կետի բնույթը պարզելու կարիք չկա:

Այժմ հետազոտենք f ֆունկցիան D_0 շրջանի վրա, երբ $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$: Տեղադրումից հետո f ֆունկցիան պարզ տեսք է ընդունում՝

$$u(x, y) = f(x, y, 0) = x^2 + y^2 - 2x - 2y :$$

D_0 շրջանի ներսում $f(x, y, 0)$ ֆունկցիան միայն մեկ ստացիոնար կետ ունի

$$\begin{cases} u'_x = 2x - 2 = 0 \\ u'_y = 2y - 2 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{M_3(1, 1, 0)} \in D_0 :$$

Վերջապես D_0 շրջանի եզրի վրա, $\partial D_0 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0\big\}$ շրջանագծի վրա դարձյալ ստանում ենք պայմանական էքստրեմումի խնդիր կապի մեկ հավասարումով՝

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x, y, 0) = x^2 + y^2 - 2x - 2y \ \longmapsto \ \text{max.min.} \\ \varphi(x, y) \stackrel{def}{=} x^2 + y^2 - 4 : \end{cases}$$

Այս խնդիրը լուծելու համար կրկին կազմենք f-ի Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L = L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 4),$$

որտեղ λ*-ն Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչ է: Գտնենք Լագրանժի* L *ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը՝ կազմելով հետևյալ համակարգը՝*

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 2 + 2\lambda\, x = 0 \\ L'_y = 2y - 2 + 2\lambda\, y = 0 \\ \varphi = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1+\lambda) = 1 \\ y(1+\lambda) = 1 \\ x^2 + y^2 = 4: \end{cases}$$

Քանի որ, որ $x = y$*, համակարգն ունի երկու լուծում՝*

$$\boxed{M_4 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)} \in D_0, \qquad \text{երբ} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1,$$

$$\boxed{M_5 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)} \in D_0, \qquad \text{երբ} \quad \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1:$$

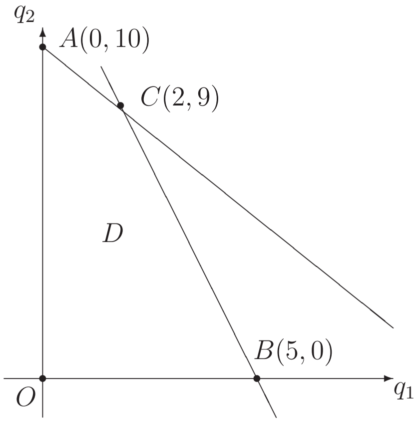
Լուծումն ավարտելու համար մնում է հաշվել f *ֆունկցիայի արժեքները* $M_{1,2,3,4,5}$ *կետերում և ընտրություն կատարել,*

$$\begin{aligned} f(M_1) &= f(1,1,1) = -3, \\ f(M_2) &= f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -4\big(\sqrt{3}-1\big), \\ f(M_3) &= f(1,1,0) = -2, \\ f(M_4) &= f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = -4\big(\sqrt{2}-1\big), \\ f(M_5) &= f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) = 4\big(\sqrt{2}+1\big), \\ \max_{M\in D} f(M) &= f(M_5) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) = 4\big(\sqrt{2}+1\big), \\ \min_{M\in D} f(M) &= f(M_1) = f(1,1,1) = -3, \end{aligned}$$

ինչը և պահանջվում էր գտնել:

Օրինակ 35. *Ձեռնարկությունն արտադրում է երկու տեսակի ապրանք, որոնց վաճառքի (հաստատուն) գներն են* $p_1 = 3$ *և* $p_2 = 2$ *միավոր (օրինակ, հազար դրամ), համապատասխանաբար յուրաքանչյուր միավոր ապրանքի համար: Արտադրության համար օգտագործվում է երկու տեսակի հումք: Առաջին ապրանքատեսակի մեկ միավորի համար ծախսվում է 2 միավոր 1-ին հումքից և 3 միավոր 2-րդ հումքից: Երկրորդ* *ապրանքատեսակի մեկ միավորի համար ծախսվում է 4 միավոր 1-ին հումքից և 1 միավոր 2-րդ հումքից: Հումքի օրական պաշարն է 40 միավոր 1-ին տեսակի հումքից և 15 միավոր 2-րդ տեսակի հումքից:*

Որքա՞ն պետք է արտադրել 1-ին և 2-րդ ապրանքատեսակներից, որպեսզի օրական հասույթը լինի առավելագույնը:



Գծ. 11

Լուծենք խնդիրը՝ բերելով այն մաքսիմումի խնդրին: Ենթադրենք 1-ին ապրանքատեսակից արտադրում են q_1 հատ, իսկ 2-րդ ապրանքա– տեսակից՝ q_2 հատ: Այդ դեպքում հասույթի ֆունկցիան կլինի՝

$$R(q_1, q_2) = p_1\,q_1 + p_2\,q_2 = 3\,q_1 + 2\,q_2 :$$

Ըստ պայմանի՝ 1-ին տեսակի հումքից ծախսվում է 2 միավոր՝ 1-ին ապրանքատեսակի համար և 4 միավոր՝ 2-րդ ապրանքատեսակի համար, ընդամենը $2\,q_1 + 4\,q_2$ *միավոր հումք: Իսկ 2-րդ տեսակի հումքից ծախսվում է 3 միավոր՝ 1-ին ապրանքատեսակի համար և 1 միավոր՝ 2-րդ ապրանքատեսակի համար, ընդամենը* $3\,q_1 + q_2$ *միավոր հումք: Ըստ պայմանի՝ այդ քանակները սահմանափակված են՝*

$$2\,q_1 + 4\,q_2 \leq 40, \qquad 3\,q_1 + q_2 \leq 15 :$$

Արդյունքում ձևավորվեց մաքսիմումի խնդիր որոշակի տիրույթում՝

$$\begin{cases} z = \boxed{R(q_1, q_2) = 3\,q_1 + 2\,q_2} \longmapsto \max. \\ 2\,q_1 + 4\,q_2 \le 40, \qquad 3\,q_1 + q_2 \le 15, \qquad q_1 \ge 0, \qquad q_2 \ge 0 : \end{cases}$$

Երկրաչափորեն R ֆունկցիայի ստացված որոշման տիրույթը իրենից ներկայացնում է փակ քառանկյուն (կոմպակտ) ՝ $\boxed{D \overset{def}{=} OACB}$, տես գծագիրը : Մեզ անհրաժեշտ կլինեն D քառանկյան գագաթների կոոր–դինատները՝

$$O(0,0), \qquad A(0,10), \qquad C(2,9), \qquad B(5,0) :$$

D տիրույթի ներսում R ֆունկցիան ստացիոնար կետ չունի, քանի որ R-ը գծային ֆունկցիա է (R-ի գրաֆիկը հարթություն է) և $\dfrac{\partial R}{\partial q_1} = 3$, $\dfrac{\partial R}{\partial q_2} = 2$: Հետևաբար, R ֆունկցիան հասնում է իր մաքսիմումին D քառանկյան եզրի վրա:

Ավելին՝ R ֆունկցիայի նեղացումը D քառանկյան յուրաքանչյուր կող–մի վրա նույնպես գծային է (ուրեմն՝ մոնոտոն) և ցանկության դեպքում դրանք կարելի է բացահայտ գրել, R-ի մեջ տեղադրելով D քառանկյան կողմերի հավասարումները՝

$$R(q_1, q_2) = \begin{cases} 3\,q_1, & \text{եթե} \quad (q_1, q_2) \in OB, \\ 2\,q_2, & \text{եթե} \quad (q_1, q_2) \in OA, \\ 30 - 3\,q_1, & \text{եթե} \quad (q_1, q_2) \in BC, \\ 2\,q_1 + 20, & \text{եթե} \quad (q_1, q_2) \in CA, \end{cases}$$

թեև դրանում մեծ անհրաժեշտություն չկար: Հետևաբար, R ֆունկցիան հասնում է իր մաքսիմումին (նաև մինիմումին) միայն D քառանկյան գագաթներում: Մեզ մնում է հաշվել R ֆունկցիայի արժեքները O, A, B, C գագաթներում և ընտրություն կատարել,

$$R(O) = R(0,0) = 0,$$

$$R(A) = R(0,10) = 20,$$
$$R(B) = R(5,0) = 15,$$
$$R(C) = R(2,9) = 24,$$
$$\max_{(q_1,q_2)\in D} R(q_1,q_2) = R(C) = R(2,9) = 24 :$$

Այսպիսով՝ օրական հասույթի առավելագույն չափը 24 միավոր է (այսինքն՝ 24 հազար դրամ), և այն հասանելի է, եթե օրական արտադրվի 2 հատ 1-ին ապրանքատեսակից և 9 հատ 2-րդ ապրանքատեսակից:

Վարժություններ ինքնուրույն աշխատանքի համար

Գտեք տվյալ ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

1. $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$

   Պատասխան՝ $f_{\min} = f(1,0) = 0$

2. $f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2$

   Պատասխան՝ էքստրեմում չկա, $(1,0)$ կետը թամբակետ է

3. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

   Պատասխան՝ $f_{\min} = f(0,0) = 0$

4. $f(x,y) = x^2 - xy - y^2$

   Պատասխան՝ էքստրեմում չկա, $(0,0)$ կետը թամբակետ է

5. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$

   Պատասխան՝ $f_{\min} = f(-2,-1) = -2$

6. $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$

   Պատասխան՝ $f_{\max} = f(0,0) = 0,\qquad f_{\min} = f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}$

7. $f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$

   Պատասխան՝ $f_{\max} = f(-1,1) = 6,\qquad f_{\min} = f(1,-1) = -6,$

   $(1,1)$, $(-1,-1)$ կետերը թամբակետեր են

8. $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 - y^2$

   Պատասխան՝ $f_{\max} = f(2,1) = 5$

9. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$

   Պատասխան՝ $f_{\min} = f(5,5) = -125,\qquad (0,0)$ կետը թամբակետ է

10. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(0,3) = -9$

11. $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(0,0) = 4$

12. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(1,1) = 3$

13. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(1,0) = -1$

14. $f(x,y) = x^3\, y^2(6 - x - y), \qquad x, y > 0$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f(3,2) = 108$

15. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8,$

$(0,0)$-ն թամբակետ է

16. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(2,1) = -28, \qquad f_{\max} = f(-2,-1) = 28,$

$(1,2),\ (-1,-2)$ կետերը թամբակետեր են

17. $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{3}}$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f(1,1) = f(-1,-1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}},$

$$f_{\min} = f(-1,1) = f(1,-1) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

18. $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f(0,0) = 1$

19. $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(0,0) = 0$ և ոչ խիստ $f_{\max} = f\Big|_{\mathbb{T}} = \dfrac{1}{e}$,

որտեղ $\mathbb{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ միավոր շրջանագիծ է

20. $f(x,y) = \dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f(1,-1) = \sqrt{3}$

21. $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y, \qquad x,y>0$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(4,2) = 6$

22. $f(x,y) = (x^2-2y^2)\, e^{x-y}$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f(-4,-2) = \dfrac{8}{e^2}, \qquad (0,0)$-ն թամբակետ է

23. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 1\right) = -\dfrac{4}{3}$

24. $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}, \qquad x,y,z>0$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$

25. $f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2-2x+4y-6z+1$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(1,-1,3) = -11$

26. $f(x,y,z) = 2x^2+y^2+z^2-2xy+4z-x$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -2\right) = -\dfrac{17}{4}$

27. $f(x,y,z) = x^3+y^2+2z^2+xy-2xz+3y-1$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f\left(1, -2, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{9}{2}$

28. $f(x,y,z) = xyz(1-x-y-z)$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$

29. $f(x,y,z) = 2\,\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

30. $f(x,y,z) = (x+y+2z)\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{3}{e}}$

$f_{\min} = f\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{e}}$

31. $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 2xy + 6yz - 6z$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(-1,-1,1) = -3$

32. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$

Պատասխան՝ էքստրեմում չկա, $(0,0,0)$-ն թամբակետ է

33. $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$

Պատասխան՝ էքստրեմում չկա, $(2,1,7)$ կետը թամբակետ է

34. $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22-x-y-z)$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f(6,4,10) = 3\ln 6 + 2\ln 4 + 5\ln 10 + \ln 2$

Գտեք տվյալ ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

35. $f(x,y) = xy$, երբ $x+y=1$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

36. $f(x,y) = x + 2y$, երբ $x^2 + y^2 = 5$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f(1,2) = 5$ և $f_{\min} = f(-1,-2) = -5$

37. $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$, երբ $x^2 + y^2 = 1$

Պատասխան՝ $f_{\max} = f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 11,$

$$f_{\min} = f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 1$$

38. $f(x,y) = x^2 + y^2$, երբ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$

39. $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, երբ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(-1,2,-2) = -9$ և $f_{\max} = f(1,-2,2) = 9$

40. $f(x,y,z) = x\,y^2\,z^3$, երբ $x + y + z = 12$ $(x,y,z > 0)$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(2,4,6) = 2 \cdot 4^2 \cdot 6^3 = 6912$

41. $f(x,y,z) = x\,y\,z$, երբ $x + y + z = 5$ և $xy + yz + zx = 8$

Պատասխան՝ $f_{\min} = f(2,2,1) = f(2,1,2) = f(1,2,2) = 4$

$$f_{\max} = f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 4\frac{4}{27}$$

42. Ապացուցեք անհավասարությունը՝

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}, \qquad x, y, z \ge 0 :$$

Ցուցում. Փնտրեք $f = xyz$ ֆունկցիայի մաքսիմումը, երբ $x+y+z = S$:

43. Ձեռնարկության արտադրական ֆունկցիան որոշվում է

$$\boxed{f(K,L) = K^{3/4}\,L^{1/4}}$$

բանաձևով, որտեղ K-ով նշանակված է կապիտալի, իսկ L-ով աշխատուժի միավորների քանակները: Կապիտալի 1 միավորի արժեքն է 40 միավոր, իսկ 1 միավոր աշխատուժի արժեքն է՝ 20 միավոր: Արտադրության համար հատկացված է 24 000 միավոր դրամական միջոց:

Գտեք արտադրանքի հնարավոր առավելագույն քանակը:

Պատասխան՝ $f_{\max} = f(450, 300) \approx 406,62$

Ստորև բերված խնդիրներում գտեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները տրված տիրույթում.

44. $f(x,y) = 1 + x + 2y,$ հետևյալ տիրույթներում՝

ա) $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$;

Պատասխան՝ $\max f = f(0,1) = 3, \qquad \min f = f(0,0) = 1$

բ) $x \geq 0,\ y \leq 0,\ x - y \leq 1$:

Պատասխան՝ $\max f = f(1,0) = 2, \qquad \min f = f(0,-1) = -1$

45. $f(x,y) = x^2 y, \qquad x^2 + y^2 \leq 1$ տիրույթում:

Պատասխան՝ $$\max f = f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\ ,$$

$$\min f = f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

46. $f(x,y) = x^2 - y^2, \qquad x^2 + y^2 \leq 1$ տիրույթում:

Պատասխան՝ $\max f = f(\pm 1, 0) = 1\ , \qquad \min f = f(0, \pm 1) = -1$

47. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y, \qquad x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad x + y \geq -3$ տիրույթում:

Պատասխան՝ $$\max f = f(0,-3) = f(-3,0) = 6\ ,$$

$$\min f = f(-1,-1) = -1$$

48. $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y), \qquad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ տիրույթում:

Պատասխան՝ $\max f = f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $\qquad \min f = f(0,0) = 0$

49. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \qquad 0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 2$ տիրույթում:

Պատասխան՝ $\max f = f(2,-1) = 13$,

$\min f = f(1,1) = f(0,-1) = -1$

Գտեք ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները տրված կորերով սահմանափակված տիրույթում.

50. $f(x,y) = 3x + y - xy, \qquad y = x, \ y = 4, \ x = 0$

Պատասխան՝ $\max f = f(2,2) = 4, \qquad \min f = f(0,0) = f(4,4) = 0$

51. $f(x,y) = xy - x - 2y, \qquad y = x, \ y = 0, \ x = 3$

Պատասխան՝ $\max f = f(0,0) = f(3,3) = 0, \quad \min f = f(3,0) = -3$

52. $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \qquad x = 0, \ x = 1, \ y = 0, \ y = 2$

Պատասխան՝ $\max f = f(1,2) = 17, \qquad \min f = f(1,0) = -3$

53. $f(x,y) = 5x^2 - 3xy + y^2, \qquad x = 0, \ x = 1, \ y = 0, \ y = 1$

Պատասխան՝ $\max f = f(1,0) = 5, \qquad \min f = f(0,0) = 0$

54. $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \qquad y = x + 1, \ x = 3, \ y = 0$

Պատասխան՝ $\max f = f(3,3) = 6, \qquad \min f = f(2,0) = -4$

55. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \qquad x = 0, \ y = 0, \ x + y = 1$

Պատասխան՝ $\max f = f(0,0) = 8, \qquad \min f = f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13}{2}$

56. $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + y^2, \qquad x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 6$

Պատասխան՝ $\max f = f(0,6) = 36, \qquad \min f = f(0,0) = 0$

57. $f(x,y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \qquad x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$

Պատասխան՝ $\max f = f(1,1) = 6, \qquad \min f = f(0,0) = 0$

58. $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy, \qquad y = 8,\ y = 2x^2$

Պատասխան՝ $\max f = f(-2,8) = 18, \qquad \min f = f(2,8) = -14$

59. $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 1, \qquad y = 0,\ y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$

Պատասխան՝ $\max f = f(0,3) = 28, \qquad \min f = f(0,0) = 1$

60. $f(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2, \qquad y = 0,\ y = \sqrt{1 - x^2}$

Պատասխան՝ $\max f = f(0,0) = 4, \quad \min f = f(-1,0) = f(1,0) = 2$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

[1] Գ.Մ. Ֆիխտենգոլց, «Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ», Հատոր 1, Լույս, Երևան, 1970

Г.М. Фихтенгольц, ”Основы математического анализа”, Части 1,2, изд. 10, 9-е, Лань, С-Петербург, Москва, 2015, 2008

[2] Գ.Մ. Ֆիխտենգոլց, «Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի դասընթաց», Հատոր 1, ԵՊՀ, Երևան, 1949

Г.М. Фихтенгольц, ”Курс дифференциального и интегрального исчисления”, Часть 1, изд. 8-е, Физматлит, Москва, 2003

[3] Л.Д. Кудрявцев, ”Краткий курс математического анализа”, Том 2, изд. 3-е, Физматлит, Москва, 2005

[4] Л.Д. Кудрявцев, ”Курс математического анализа”, Том 2, Высшее Образование, Дрофа, Москва, 2004

[5] С.М. Никольский, ”Курс математического анализа”, изд. 6-е, Физматлит, Москва, 2001

[6] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, ”Основы математического анализа”, Часть 1, изд. 7-е, Физматлит, Москва, 2003

[7] В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б. Сендов, ”Математический анализ”, Часть 1, МГУ, Москва, 1985

[8] Վ.Խ. Մուսոյան, «Մաթեմատիկական անալիզ» , Մաս 1,2, Զանգակ, Երևան, 2009, 2012

[9] W.F. Trench, ”The Method of Lagrange multipliers”, Trinity Univ., San Antonio, Texas, 2012

[10] Մ.Հ. Մուրադյան, «Բարձրագույն մաթեմատիկա տնտեսագետների համար: Շատ փոփոխականի ֆունկցիաներ» , Տնտեսագետ, Երևան, 2002

[11] Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, ”Контрпримеры в анализе”, Мир, Москва, 1967

[12] Б.П. Демидович, ”Сборник задач и упражнений по математическому анализу”, изд. 18-е, МГУ, Москва, 1997

[13] И.И. Ляшко и др., ”Математический анализ в примерах и задачах”, Часть 2, Вища школа, Киев, 1977

[14] Գ. Գևորգյան, Լ. Գալստյան, Ա. Թասլաքյան, Գ. Միքայելյան, Կ. Նավասարդյան, «Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք» , Մաս 2, ԵՊՀ, Երևան, 2014

[15] В.Ф. Бутузов и др., ”Математический анализ в вопросах и задачах”, Физматлит, Москва, 2002

[16] И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий, ”Задачи и упражнения по математическому анализу”, МГУ, Москва, 1988

Բովանդակություն

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԿԱՐԵՆ ԼԱՐԻԿԻ ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԼՈԿԱԼ ԵՎ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի

Տպագրված է «Արման Ասմանգուլյան» ԱՁ-ում:
ք. Երևան, Հր. Ներսիսյան 1/125

Ստորագրված է տպագրության՝ 27.04.2018:
Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$: Տպ. մամուլը՝ 8.25:
Տպաքանակը՝ 150:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.am