СМБ СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

М. В. ФЕДОРЮК

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.16
Ф33
УДК 517.928

Федорюк М. В. **Асимптотика: Интегралы и ряды.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 544 с.— (Справочная математическая библиотека.)

В книге приведены основные методы вычисления асимптотики интегралов, сумм и рядов. Рассмотрен ряд приложений к задачам механики и физики.

Для математиков, механиков, физиков, инженеров, а также для студентов и аспирантов университетов и инженерно-физических вузов.

Ил. 6. Библиогр. 146 назв.

Рецензент
кандидат физико-математических наук *Б. Р. Вайнберг*

Михаил Васильевич Федорюк

АСИМПТОТИКА: ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

Серия: «Справочная математическая библиотека»

Редактор *И. Е. Морозова*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры *Т. А. Радионова, Т. С. Вайсберг*

ИБ № 12922

Сдано в набор 15.12.86. Подписано к печати 27.07.87. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 28,56. Усл. кр. отт. 28,56. Уч.-изд. л. 20,88. Тираж 15 000 экз. Заказ № 520. Цена 1 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск 77, Станиславского, 25

$Ф\frac{1702060000-152}{053(02)-87}52\text{-}87$

ОГЛАВЛЕНИЕ

1*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В многочисленных задачах естествознания возникают интегралы и ряды, содержащие большой параметр. Случаи, когда такие интегралы явно вычисляются, крайне редки; еще реже удается просуммировать ряды. При больших значениях параметра вычисление интегралов и рядов — весьма трудоемкая задача даже для самых современных ЭВМ. Поэтому решающую роль играют асимптотические методы. В книге изложены основные методы вычисления асимптотики интегралов и рядов и основные результаты, полученные к настоящему времени этими методами.

В гл. I приведены основные сведения об асимптотических оценках, асимптотических рядах и даны простейшие методы вычисления асимптотики интегралов, сумм и рядов. Исследована асимптотика интегралов со слабыми особенностями.

В гл. II изложен метод Лапласа, в гл. III — метод стационарной фазы для одномерных и многомерных интегралов.

В гл. IV изложен важнейший метод вычисления асимптотики интегралов от аналитических функций — метод перевала (в одномерном случае). Приведены формулы суммирования Пуассона и Эйлера — Маклорена и их применения к вычислению асимптотики рядов. Метод перевала в многомерном случае изложен в гл. V.

В гл. VI рассмотрены различные случаи слияния критических точек подынтегральной функции: близкие точки перевала, полюс и точка перевала и другие.

Рассмотрен ряд приложений: вычисление асимптотики интегральных преобразований, решений уравнений с частными производными, разностных уравнений, дифференциально-разностных уравнений, коэффициентов Тейлора, Лорана, Фурье аналитических функций, некоторые задачи теории вероятностей, статистической физики, теории дифракции, гидродинамики и другие.

По мнению автора, при написании такого рода справочника нельзя было ограничиться только перечнем готовых формул, как это делается, например, в справочниках по специальным функциям. Поэтому в книге приведены выводы основных асимптотических формул и подробно рассмотрен ряд конкретных примеров. Надеюсь, что это поможет читателям овладеть основными асимптотическими методами.

М. В. Федорюк

ГЛАВА I

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

§ 1. Простейшие асимптотические оценки

1. Символы $\sim, o, O$. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на некотором множестве M и a — предельная точка множества M. Как правило, независимое переменное x является вещественным или комплексным числом.

Будем использовать следующие общепринятые обозначения.

Формула	Определение
$f(x) \sim g(x) \quad (x \to a,\ x \in M)$.	$\lim\limits_{x \to a, x \in M} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$
$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a,\ x \in M)$.	$\lim\limits_{x \to a, x \in M} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$
$f(x) = O(g(x)) \quad (x \in M)$.	Существует постоянная C такая, что $\lvert f(x) \rvert \leqslant C \lvert g(x) \rvert$ при всех $x \in M$.
$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a,\ x \in M)$.	Существуют постоянная C и окрестность U точки a такие, что $\lvert f(x) \rvert \leqslant C \lvert g(x) \rvert$ при $x \in M \cap U$.

В этих формулах указание на множество M будем опускать в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений.

Примеры. 1. $\ln x = o(x^{-\alpha})$ $(x \to +0)$, $\alpha > 0$.
2. $\ln x = o(x^{\alpha})$ $(x \to +\infty)$, $\alpha > 0$ — любое.
3. $\sin z \sim z$ $(z \to 0)$.

4. $\sin x = O(1)$ $(-\infty < x < \infty)$.

5. $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$ $(n \to \infty)$.

6. Пусть S_ε — сектор $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ в комплексной плоскости z, $c > 0$. Тогда

$$e^{-cz} = O(e^{-c'|z|}) \quad (z \in S_\varepsilon), \quad c' > 0.$$

Так как $\operatorname{Re} z \geqslant |z| (\sin \varepsilon)^{-1}$ при $z \in S_\varepsilon$, то

$$|e^{-cz}| \leqslant e^{-\frac{c}{\sin \varepsilon}|z|} \quad (z \in S_\varepsilon).$$

7. При любых a, $b > 0$

$$e^{-a|z|} = o(|z|^{-b}) \quad (|z| \to \infty).$$

Соотношение $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ означает, что функция $f(x)$ есть бесконечно малая по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$. Аналогично соотношение $f(x) = O(g(x))$ $(x \to a)$ означает, что функция $f(x)$ ограничена по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$. В частности, если $f(x) = o(1)$ $(x \to a)$, то $f(x)$ — бесконечно малая величина при $x \to a$; если же $f(x) = O(1)$ $(x \to a)$, то $f(x)$ ограничена при $x \to a$. Отсюда нетрудно получить ряд правил действий с символами o, O:

$$o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)),$$
$$o(f(x))\,o(g(x)) = o(f(x)g(x)),$$
$$o(o(f(x))) = o(f(x)).$$

В этих формулах $x \to a$, $x \in M$, множество M и точка a — одни и те же в левой и правой части каждого равенства.

Расшифруем и докажем первую формулу; остальные доказываются аналогично. Пусть $g_1(x) = o(f(x))$, $g_2(x) = o(f(x))$ при $x \to a$; тогда $g_1(x) + g_2(x) = o(f(x))$ при $x \to a$ — это содержание первой формулы. Доказательство:

$$\lim_{x \to a} \frac{g_1(x) + g_2(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{f(x)} + \lim_{x \to a} \frac{g_2(x)}{f(x)} = 0.$$

Точно такие же формулы справедливы для символа O. Далее, имеют место формулы

$$o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x)),$$
$$o(f(x))\,O(g(x)) = o(f(x)g(x)),$$
$$O(o(f(x))) = o(f(x)), \quad o(O(f(x))) = o(f(x)).$$

(Здесь всюду $x \to a$, $x \in M$.)

Соотношения вида

$$f(x) \sim g(x), \quad f(x) = o(g(x)), \quad f(x) = O(g(x))$$

называются *асимптотическими формулами* или *асимптотическими оценками*.

2. Простейшие асимптотические оценки интегралов и рядов. Приведем простые достаточные условия, при которых асимптотические оценки можно интегрировать.

Предложение 1.1. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны, $g(x) > 0$ при $a < x < b$, и пусть*

$$\int_{x_0}^{b} g(x)\,dx = +\infty, \tag{1.1}$$

где $a < x_0 < b$. Тогда:

1°. *Если $f(x) = O(g(x))$ $(x \to b)$, то*

$$\int_{x}^{b} f(x)\,dx = O\left(\int_{x}^{b} g(x)\,dx\right) \quad (x \to b). \tag{1.2}$$

2°. *Утверждение 1° остается в силе, если всюду заменить O на o.*

3°. *Если $f(x) \sim g(x)$ $(x \to b)$, то*

$$\int_{x}^{b} f(x)\,dx \sim \int_{x}^{b} g(x)\,dx \quad (x \to b). \tag{1.3}$$

Докажем 2°. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to b} \frac{\int_{x}^{b} f(x)\,dx}{\int_{x}^{b} g(x)\,dx} = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Аналогично доказываются остальные утверждения.

В этом предложении достаточно потребовать измеримости функций f, g и суммируемости на каждом отрезке $I \subset (a, b)$.

1.1. Если $f(x)=O(x^{\alpha})$ $(x\to+\infty)$, то при $x\to+\infty$

$$\int_0^x f(t)\,dt = O(x^{\alpha+1}),\quad \alpha>-1,$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = O(\ln x),\quad \alpha=-1.$$

1.2. Если $f(x)\sim x^{\alpha}$ $(x\to+\infty)$, то при $x\to+\infty$

$$\int_0^x f(t)\,dt \sim \begin{cases} x^{\alpha+1}/(\alpha+1), & \alpha>-1,\\ \ln x, & \alpha=-1,\end{cases}$$

$$\int_\infty^x f(t)\,dt \sim x^{\alpha+1}/(\alpha+1),\quad \alpha<-1.$$

1.3. Пусть $f(x)=\sum\limits_{k=-1}^{n} a_k x^k + O(x^{-2})$ $(x\to+\infty)$. Тогда при $x\to\infty$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}+a_{-1}\ln x+O(1).$$

1.4. Пусть $f(x)=\sum\limits_{k=2}^{n} a_k x^{-k}+O(x^{-n-1})$ $(x\to+\infty)$. Тогда при $x\to+\infty$

$$\int_x^\infty f(t)\,dt = \sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{(k-1)\,x^{k-1}}+O(x^{-n}).$$

1.5. $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt = x+\frac{1}{2}\ln x+O(1)$ $(x\to+\infty)$.

Приведем простейшие оценки для рядов.

Предложение 1.2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонна при $x\geqslant 0$. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n f(x)\,dx+O(f(n+1))+O(1)\quad (x\to\infty).\qquad(1.4)$$

Пусть $f(x)$ возрастает для определенности. Тогда

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt\leqslant f(k)\leqslant\int_k^{k+1} f(t)\,dt,$$

и, суммируя эти неравенства при $1 \leqslant k \leqslant n$, получаем

$$f(0) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,dt \leqslant f(0) + \int_n^{n+1} f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant$$
$$\leqslant f(n+1) + f(0) - \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Тем самым (1.4) доказано.

Предложение 1.3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geqslant 0$. Тогда*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(x)\,dx \right| \leqslant \int_0^n |f'(x)|\,dx + |f(0)|. \tag{1.5}$$

Имеем

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt - f(k) = \int_{k-1}^{k} [f(t) - f(k)]\,dt,$$
$$f(t) - f(k) = \int_k^t f'(t')\,dt'. \tag{1.6}$$

Следовательно,

$$\left| \int_{k-1}^{k} (f(t) - f(k))\,dt \right| \leqslant \int_{k-1}^{k} |f'(t)|\,dt.$$

Суммируя тождества (1.6) от $k=1$ до $k=n$ и учитывая последнее неравенство, получаем (1.5).

Предложения 1.2 и 1.3 удобны при вычислении асимптотики сумм типа $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$, если $f(x)$ растет не быстрее некоторой степени x при $x \to +\infty$.

При $n \to +\infty$ имеем

1.6. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$

1.7. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > -1.$

1.8. $\sum\limits_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} \sim \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}, \quad \alpha > -1.$

1.9. $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(\ln k)^{\alpha}}{k} \sim \frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > -1.$

3. Преобразование Абеля. Это преобразование — аналог формулы интегрирования по частям:

$$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \ldots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_nb_n, \quad (1.7)$$
$$A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Этим преобразованием удобно пользоваться в случае, когда поведение при $n \to \infty$ суммы $a_1 + \ldots + a_n$ известно, а $b_k = b(k)$, где $b(x)$ — гладкая функция. Пусть функция $b(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geqslant 0$ и $A(x) = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant x} a_k$, так что $A(x)$ — ступенчатая функция: $A(x) = 0$ при $x < 1$, $A(x) = A_k$ при $k \leqslant x < k+1$. Тогда формулу (1.7) можно записать в виде

$$S_n = A(n)\,b(n) - \int_0^n A(x)\,b'(x)\,dx. \quad (1.8)$$

Пример 1.1. Исследуем асимптотику при $n \to \infty$ суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx \cdot \ln k,$$

где x — вещественная постоянная. Приведем вначале грубую оценку

$$|S_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k = O(n \ln n) \qquad (n \to \infty).$$

Применим формулу (1.8). Имеем

$$A_k = \sum_{m=1}^{k} \sin mx = \frac{\sin \frac{kx}{2} \sin \frac{(k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

Если x лежит вне интервалов $I_m = (\pi m - \delta, \pi m + \delta)$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \delta > 0$ — фиксированное число, то существует такая постоянная C, что $|A_k| \leqslant C$. (На всей оси сумма A_k не ограничена — например, при $x = \pi/k$ имеем $A_k = \operatorname{ctg} \pi/(2k) \to \infty$, $k \to \infty$.) Имеем

$$S_n = A(n) \ln n - \int_1^n A(t)\, t^{-1} dt,$$

и из ограниченности $|A(t)|$ следует, что

$$S_n = O(\ln n) \qquad (n \to \infty,\ x \notin I_m).$$

Аналогично доказывается, что при $\alpha \geqslant 0$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sin kx = O(n^{\alpha}) \qquad (n \to \infty),$$

если $x \notin I_m$. Точная асимптотика этой суммы, по-видимому, неизвестна (за исключением случая $\alpha = 1$, когда сумма вычисляется точно). При $\alpha < 0$ соответствующий ряд ($n = \infty$) сходится.

Точно так же оцениваются суммы

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \cos kx \quad (\alpha \geqslant 0), \quad \sum_{k=1}^{n} \cos kx \ln k.$$

Пример 1.2. Исследуем асимптотику при $\varepsilon \to +0$ ряда

$$S(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e^{-n^2 \varepsilon}.$$

Положим $a_n = n^{-1}$, $b_n = e^{-n^2\varepsilon}$; тогда из (1.8) получим

$$S(\varepsilon) = 2\varepsilon \int_1^{\infty} A(x)\, x e^{-x^2 \varepsilon} dx = 2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} A\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) x e^{-x^2} dx.$$

Имеем $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Воспользуемся известной асимптотической формулой

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty), \tag{1.9}$$

где γ — постоянная Эйлера $\left(\gamma = -\int\limits_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\Gamma'(1)\right)$. Введем функцию $\tilde{A}(x) = \ln x + \gamma$. Имеем

$$I = \int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \tilde{A}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) dx = 2\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\left(\ln x - \frac{1}{2}\ln\varepsilon + \gamma\right) x e^{-x^2} dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\ln\varepsilon + \gamma\right) + 2\int\limits_0^\infty x\ln x e^{-x^2}dx - 2\int\limits_0^{\sqrt{\varepsilon}} x\ln x e^{-x^2}dx.$$

Последний интеграл имеет порядок $O(\varepsilon\ln\varepsilon)$ при $\varepsilon\to+0$, а предпоследний — равен $-\gamma/2$, так что

$$I = -\frac{1}{2}\ln\varepsilon + \frac{1}{2}\gamma + O(\varepsilon\ln\varepsilon).$$

Далее, $S(\varepsilon) = I + J$, где

$$J = 2\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty}\left[A\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \tilde{A}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right] x e^{-x^2} dx,$$

так что остается оценить интеграл J. Пусть $k \leqslant x/\sqrt{\varepsilon} \leqslant k+1$, тогда при всех $k \geqslant 1$ имеем

$$A\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \tilde{A}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \ln\frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} + O\left(\frac{1}{k}\right) = \ln\frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right).$$

Далее, $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1} \leqslant \frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} \leqslant 1$, так что $-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln\frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} \leqslant 0$, и потому $\ln\frac{k\sqrt{\varepsilon}}{x} = O\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right)$. Следовательно,

$$J = \int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\right) x e^{-x^2} dx = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

и окончательно получаем

$$S(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\ln\varepsilon + \frac{\gamma}{2} + O(\sqrt{\varepsilon}) \qquad (\varepsilon\to+0).$$

§ 2. Асимптотические ряды

1. Асимптотические последовательности. Пусть функции $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, определены на множестве M, имеющем предельную точку a, и пусть $\varphi_n(x) \neq 0$ в некоторой окрестности U_n точки a.

Определение 2.1. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ называется *асимптотической* при $x \to a$, $x \in M$, если при любом целом $n \geqslant 0$

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \quad (x \to a, \ x \in M). \tag{2.1}$$

Приведем примеры асимптотических последовательностей. В этих примерах x — комплексное переменное, M — окрестность точки a.

1. $\{(x-a)^n\}$, $x \to a$.

2. $\{x^{-n}\}$, $x \to \infty$.

Асимптотические последовательности такого вида называются *степенными*.

3. $\{e^{\lambda_n z}\}$, λ_n вещественны, $\lambda_{n+1} < \lambda_n$; при $z \to \infty$ в секторе S_ε: $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leqslant \pi/2$.

Укажем некоторые свойства асимптотических последовательностей.

1°. Любая подпоследовательность асимптотической последовательности является асимптотической последовательностью.

2°. Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки a при $x \in M$, а $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to a$, $x \in M$. Тогда последовательность $\{f(x)\varphi_n(x)\}$ является асимптотической при $x \to a$, $x \in M$.

3°. Пусть последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\psi_n(x)\}$ — асимптотические (при $x \to a$, $x \in M$). Тогда последовательность $\{\varphi_n(x)\psi_n(x)\}$ является асимптотической при $x \to a$, $x \in M$.

2. Асимптотические ряды. Пусть a — предельная точка множества M, функция $f(x)$ определена на множестве M.

Определение 2.2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность при $x \to a$, $x \in M$. *Функция $f(x)$ разлагается в асимптотический ряд*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \to a, \ x \in M), \tag{2.2}$$

где a_n — постоянные, если при любом целом $N \geqslant 0$

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) = o(\varphi_N(x)) \quad (x \to a, \; x \in M). \tag{2.3}$$

Ряд (2.2) называется *асимптотическим разложением* функции $f(x)$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$. Определение 2.2 принадлежит А. Пуанкаре, и разложение (2.2) называется *асимптотическим разложением в смысле Пуанкаре.*

Более общее определение было введено Эрдейи [44]. Пусть $\varphi_n(x)$ — асимптотическая последовательность при $x \in M$. Пусть $\{\psi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,— последовательность функций, которые определены при $x \in M$, и

$$\overline{\lim_{x \to a, x \in M}} \left| \frac{\psi_n(x)}{\varphi_n(x)} \right| = C_n, \tag{2.4}$$

где $0 < C_n < \infty$.

Определение 2.3. Формальный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)$ называется *асимптотическим разложением* функции $f(x)$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, если при любом целом $N \geqslant 0$

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \psi_n(x) = o(\varphi_N(x)). \tag{2.5}$$

Записывается это так:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \{\varphi_n(x)\}. \tag{2.6}$$

Определение 2.3 используется в тех случаях, когда функции $\psi_n(x)$ могут иметь нули в любой окрестности точки a (например, $\psi_n(x) = x^{-n} \sin x$, $x \to +\infty$).

Ниже мы рассматриваем асимптотические разложения в смысле Пуанкаре. Асимптотический ряд дает нам последовательность асимптотических формул для функции $f(x)$, причем каждая последующая формула уточняет предыдущую:

$$f(x) - a_0\varphi_0(x) = o(\varphi_0(x)),$$
$$f(x) - a_0\varphi_0(x) - a_1\varphi_1(x) = o(\varphi_1(x)), \ldots$$

Из определения 2.2 следует, что асимптотический ряд может *расходиться* (примеры такого рода см. в § 3).

Действительно, из (2.3) следует, что остаточный член ряда $R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(x)$ имеет вид

$$R_N(x) = \varphi_N(x)\varepsilon_N(x), \quad \varepsilon_N(x) = o(1) \quad (x \to a),$$

но ничего не говорится о поведении $R_N(x)$ при фиксированном x и при $N \to \infty$. В отличие от сходящихся рядов расходящийся асимптотический ряд позволяет вычислить значение функции $f(x)$ в данной точке x_0 лишь с некоторой относительной ошибкой $\varepsilon = \varepsilon(x_0)$; при этом $\lim_{x_0 \to a} \varepsilon(x_0) = 0$.

Таким образом, возможны три варианта для асимптотического ряда функции $f(x)$:

1) ряд сходится к $f(x)$;
2) ряд сходится к функции $g(x) \neq f(x)$;
3) ряд расходится.

Все три варианта реализуются в действительности.

Рассмотрим функцию $f(x)$, бесконечно дифференцируемую в окрестности точки $x = 0$. Ее ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ является асимптотическим для $f(x)$ при $x \to 0$, так как

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = O(x^{N+1}) \qquad (x \to 0)$$

при любом $N \geqslant 0$. Если $f(x)$ голоморфна в окрестности точки $x = 0$, то ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ в этой окрестности. Для функции $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ все члены ряда Тейлора равны нулю, так что ряд Тейлора сходится, но не к функции $f(x)$. Наконец, ряд Тейлора может быть расходящимся.

Установим некоторые свойства асимптотических разложений.

Теорема 2.1. *Асимптотическое разложение в смысле Пуанкаре данной функции по данной асимптотической последовательности единственно.*

С другой стороны, *две различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение.* Например:

$$0 \sim 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^{-1} + \ldots + 0 \cdot x^{-n} + \ldots \quad (x \to +\infty),$$
$$e^{-x} \sim 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^{-1} + \ldots + 0 \cdot x^{-n} + \ldots \quad (x \to +\infty).$$

Заметим, что в первом примере асимптотический ряд сходится к функции, которую мы разложили, а во втором примере ряд сходится, но уже к другой функции.

Асимптотические ряды, как и обычные сходящиеся ряды, можно складывать и умножать на константу.

Теорема 2.2. *Пусть*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x), \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n(x) \; \{\varphi_n(x)\}$$

и α, β — *постоянные. Тогда*

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \psi_n(x) \; \{\varphi_n(x)\}.$$

Однако перемножать асимптотические ряды, вообще говоря, нельзя, так как не всегда можно упорядочить систему функций $\{\varphi_n \varphi_m\}$, $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, так, чтобы получилась асимптотическая последовательность.

3. Асимптотические разложения, содержащие параметр. Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $x \in M$, $y \in N$ и a — предельная точка множества M. Пусть функция f при каждом фиксированном $y \in N$ разлагается в асимптотический ряд

$$f(x, y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \varphi_n(x) \qquad (x \to a, \; x \in M). \tag{2.7}$$

Разложение называется *равномерным по параметру* $y \in N$, если соотношение

$$f(x, y) - \sum_{n=0}^{N} a_n(y) \varphi_n(x) = o(\varphi_N(x))$$

при $x \to a$, $x \in M$ выполняется равномерно по $y \in N$.

Рассмотрим вопрос об интегрировании асимптотических разложений по параметрам. Пусть M и N — области в $R_x^{n_1}$ и $R_y^{n_2}$ соответственно, область N ограничена, $dy = dy_1 \ldots dy_{n_2}$, функции $a_n(y)$ и $f(x, y)$ (при каждом фиксированном $x \in M$) суммируемы на множестве N. Тогда справедлива

Теорема 2.3. *Если разложение* (2.7) *равномерно по* $y \in N$, *то его можно интегрировать почленно*:

$$\int_N f(x, y)\, dy \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x),$$

где коэффициенты A_n *имеют вид* $A_n = \int_N a_n(y)\, dy$.

Дифференцирование асимптотических разложений по параметру y (так же как и по переменному x), вообще говоря, недопустимо.

§ 3. Степенные асимптотические ряды

1. Основные свойства. Асимптотические ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ называются *степенными*. Введем обозначения: x — вещественное, z — комплексное переменное, S — сектор вида $|z| \geqslant R$, $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ (здесь $0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant 2\pi$) в комплексной плоскости z. В частности, сектор S может быть лучом или внешностью круга.

Покажем, что *степенные асимптотические ряды можно перемножать и делить.*

Теорема 3.1. *Пусть функции* $f(z)$, $g(z)$ *непрерывны в* S *и*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}, \quad g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \quad (z \to \infty,\ z \in S).$$

Тогда (при $z \to \infty$, $z \in S$):

1°. *Если* a, b — *постоянные, то*

$$af(z) + bg(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (af_n + bg_n) z^{-n}.$$

2°. $f(z)\, g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$.

3°. $f(z)/g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n}$, *если* $g_0 \neq 0$.

4°. *Если* $g_0 = 0$, *то* $f(g(z)) \sim \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^{-n}$.

Коэффициенты c_n, d_n, e_n *выражаются через* f_n, g_n *по тем же формулам, что и в случае, когда ряды* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n}$ *сходятся при* $|z| > R$.

Докажем 2°. Имеем

$$f(z)\,g(z) = \left(\sum_{k=0}^{N} f_k z^{-k} + o(z^{-N})\right)\left(\sum_{l=0}^{N} g_l z^{-l} + o(z^{-N})\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} f_k z^{-k} \sum_{l=0}^{N} g_l z^{-l} + o(z^{-N}) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^{-n} + o(z^{-N}),$$

где $c_n = f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + \ldots + f_n g_0$.

Аналогично доказывается 3°. Докажем 4°. Имеем

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} f_k z^{-k} + o(z^{-N}), \quad g(z) = \sum_{l=0}^{N} g_l z^{-l} + o(z^{-N}),$$

так что

$$f(g(z)) = \sum_{k=1}^{N} f_k \left(\sum_{l=0}^{N} g_l z^{-l}\right)^{-n} + o(z^{-N}) = \sum_{n=0}^{N} e_n z^{-n} + o(z^{-N}).$$

Коэффициенты e_n (по построению) не зависят от N и вычисляются точно так же, как для голоморфных в точке $z = \infty$ функций $f(z)$, $g(z)$.

Рассмотрим вопросы о почленном интегрировании и дифференцировании степенных асимптотических разложений.

Теорема 3.2. *Пусть* $f(z)$ *голоморфна при* $z \in S$ *и* $\alpha \neq \beta$. *Тогда функция*

$$F(z) = \int_{z}^{\infty} \left[f(\zeta) - f_0 - f_1 \zeta^{-1}\right] d\zeta$$

(интеграл берется по кривой, лежащей внутри S*) разлагается в асимптотический ряд*

$$F(z) \sim \frac{f_2}{z} + \frac{f_3}{2z^2} + \ldots + \frac{f_{n+1}}{nz^n} + \ldots \quad (z \to \infty,\ z \in S).$$

Если $\alpha = \beta$, *то достаточно потребовать непрерывности функции* $f(z)$ *при* $|z| > R$, $\arg z = \alpha$.

Имеем

$$F(z) = \int_z^\infty \left[\sum_{n=2}^{N} f_n \zeta^{-n} + O\left(\zeta^{-N-1}\right) \right] d\zeta = -\sum_{n=2}^{N} \frac{f_n}{(n+1)\, z^{n+1}} + O\left(z^{-N}\right)$$

для любого $N \geqslant 2$, что и доказывает утверждение.

Теорема 3.3. *Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ при $x \geqslant a$, которая разлагается в асимптотический степенной ряд при $x \to +\infty$, то это разложение получается формальным почленным дифференцированием асимптотического ряда для $f(x)$, т. е.*

$$f'(x) \sim -\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) f_{n-1} x^{-n} \quad (x \to +\infty).$$

Пусть $f'(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$. Имеем

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt = f(a) + a_0 x + a_1 \ln x + O(1) \quad (x \to +\infty).$$

Так как $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^{-n}$, то $a_0 = a_1 = 0$.

В силу теоремы 3.2

$$f(x) = -\int_x^\infty f'(t)\, dt \sim -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)\, x^{n+1}} \quad (x \to +\infty),$$

и из единственности асимптотического разложения следует, что

$$a_n = -(n-1) f_{n-1}.$$

2. Асимптотические разложения голоморфных функций. Эти разложения можно почленно дифференцировать, как показывает

Теорема 3.4. *Если $f(z)$ голоморфна в секторе S: $|z| > R$, $\alpha < \arg z < \beta$, и если*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

при $|z| \to \infty$ *равномерно по* $\arg z$ *в любом замкнутом подсекторе сектора* S, *то*

$$f'(z) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} n f_n z^{-n-1}$$

равномерно по $\arg z$ *в любом замкнутом подсекторе сектора* S.

Рассмотрим замкнутый сектор S: $|z| \geqslant R_1$, $\alpha_1 < \arg z < \beta_1$, лежащий внутри S, и обозначим l границу сектора S'': $|z| \geqslant R_2$, $\alpha_2 \leqslant \arg z \leqslant \beta_2$, такого, что $S' \subset S'' \subset S$. Имеем для любого $N \geqslant 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n z^{-n} + z^{-N-1}\varphi_N(z),$$

где $|\varphi_N(z)| \leqslant C$ в S'', если $R_1 > R$ достаточно велико. Функция $\varphi_N(z)$ голоморфна в S'', так как $f(z)$ голоморфна в S. При $z \in S'$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{N} f_n \int_l \frac{d\zeta}{\zeta^n(\zeta - z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi_N(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{N+1}(\zeta - z)^2} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{N} \frac{n f_n}{z^{n+1}} + R_N(z), \qquad (3.1)$$

что следует из теоремы о вычетах. Обозначим l' окружность $|\zeta - z| = \rho$, лежащую в S'. Тогда R_N равен интегралу по l', так что

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{l'} \frac{|\varphi_N(\zeta)|\,|d\zeta|}{|\zeta - z|^2\,|\zeta|^{N+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\rho}{\rho^2(|z| - \rho)^{N+1}} = O(|z|^{-N-1}) \quad (z \to \infty,\ z \in S)$$

равномерно по $\arg z$. Из этой оценки и (3.1) следует утверждение.

Из теоремы 3.4 следует

Теорема 3.5. *Пусть* S: $\alpha < \arg z < \beta$, $0 < |z| \leqslant R$, — *сектор в комплексной плоскости* z, *функция* $f(z)$ *голоморфна при* $z \in S$ *и разлагается в асимптотический ряд*

$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ $(z \to 0,\ z \in S)$. *Тогда*

$$f_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0, z \in S^*} f^{(n)}(z), \tag{3.2}$$

где S^* — любой замкнутый подсектор сектора S.

Имеем $f(z) = a_0 + O(z)$ $(z \to 0,\ z \in S)$, откуда следует (3.2) при $n = 0$. В силу теоремы 3.4 имеем

$$f^{(k)}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z^n)^{(k)} \quad (z \to 0,\ z \in S),$$

что и доказывает (3.2).

Теорема 3.6. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна при $|z| > R$ и*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \quad (z \to \infty).$$

Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \quad (|z| > R).$$

Теорема 3.7. *Для любого формального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ и для любого сектора S:*

$$\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta \quad (0 < \alpha - \beta < 2\pi,\ |z| > R > 0)$$

существует функция $f(z)$, голоморфная в секторе S и такая, что

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (z \to \infty,\ z \in S). \tag{3.3}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что сектор S имеет вид $|\arg z| < \alpha < \pi$, $|z| > 1$. Положим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z) z^{-n}, \quad \varphi_n(z) = 1 - \exp(-b_n z^{\gamma}). \tag{3.4}$$

Здесь $b_n \geqslant 0$, а число $\gamma > 0$ выбрано настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{Re} z^{\gamma} < 0$, $|\arg z| \leqslant \alpha$. С помощью неравенства $|1 - e^{-\zeta}| \leqslant |\zeta|$ $(\operatorname{Re} \zeta \geqslant 0)$ получаем, что

$$|a_n \varphi_n(z) z^{-n}| \leqslant |a_n| b_n |z|^{\gamma - n}.$$

Положим

$$b_n = |a_n|^{-1}, \quad a_n \neq 0; \quad b_n = 0, \quad a_n = 0.$$

Тогда при $z \in S$ ряд (3.4) мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z|^{\gamma-n}$. Так как члены ряда (3.4) голоморфны в секторе S, то по теореме Вейерштрасса функция $f(z)$ голоморфна в секторе S.

Докажем (3.3). Имеем

$$z^N\left[f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}\right] = \\ = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \varphi_n(z) z^{-n+N} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \exp(-b_n z^\gamma) z^{-n+N}.$$

Второе слагаемое в правой части стремится к нулю при $z \to \infty$, $z \in S$. Далее, при $z \in S$

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n \varphi_n(z) z^{-n+N}\right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} |z|^{-n+N-\gamma} < |z|^{-\gamma} \to 0 \quad (z \to \infty).$$

Эта теорема показывает, что существуют асимптотические ряды, которые расходятся всюду в комплексной плоскости.

Более подробные сведения об асимптотических рядах см. в [5], [7], [15], [32], [44].

Пример 3.1. Найдем асимптотику при $x \to +\infty$ ряда

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{x+k}, \quad 0 < a < 1.$$

При $x > k$ имеем

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^3} - \frac{k^3}{x^4} + \ldots,$$

так что, действуя формально, получаем

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x^n}, \quad A_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} a^k, \tag{3.5}$$

Покажем, что ряд (3.5) — асимптотический для $S(x)$ при $x \to +\infty$. Положим $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k x^{-k}$, тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a^k}{x} - \frac{ka^k}{x^2} + \frac{k^2a^k}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^n k^n a^k}{x^{n+1}} \right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(-\frac{k}{x} \right)^{n+1} \right] \frac{a^k}{x+k}.$$

Поэтому при $x > 0$ справедлива оценка

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k}{x} \right)^{n+1} \frac{a^k}{x+k} \right| \leqslant x^{-n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+1} a^k.$$

Последний ряд сходится; пусть $c_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+1} a^k$. Тогда

$$|S(x) - S_n(x)| \leqslant c_n x^{-n-1}, \quad x > 0.$$

Тем самым доказано, что ряд (3.5) асимптотический при $x \to \infty$.

Пример 3.2 [5]. Найдем асимптотику при $n \to \infty$ суммы

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} k!.$$

Члены этой суммы быстро растут с ростом номера, так что главный член асимптотики равен последнему члену суммы: $S(n) \sim n!$, $n \to \infty$. Действительно,

$$\frac{S(n)}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)\ldots 1}.$$

Следовательно,

$$S(n) = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Если разложить каждую из дробей в ряд по степеням n^{-1}, то получим асимптотическое разложение

$$S(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \quad (n \to \infty).$$

Можно показать, что этот ряд расходится. Его коэффициенты равны $a_{k+1} = k!b_k$, где b_k — коэффициенты разложения

$$e^{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Действительно, при $0 < x < 1/k$

$$\int_0^{\infty} e^{-y/x} \frac{(e^y-1)^k}{k!}\, dy = \frac{x^{k+1}}{(1-x)(1-2x)\ldots(1-kx)},$$

а коэффициент при x^{m+1} ряда $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ равен умноженному на $m!$ коэффициенту при y^m в ряде Тейлора функции $(e^y - 1)^k/k!$.

§ 4. Интегралы со слабой особенностью

1. Степенная особенность. Рассмотрим интеграл

$$F(\varepsilon) = \int_0^a f(x, \varepsilon)\, dx, \quad 0 < a,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Если $f \in C^\infty$ в области U: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, то асимптотический ряд для $F(\varepsilon)$ легко получить, применяя формулу Тейлора:

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, 0)}{\partial \varepsilon^n} + R_N(x, \varepsilon).$$

Здесь $N \geqslant 0$ — любое, $|R_N(x, \varepsilon)| \leqslant C_N \varepsilon^{N+1}$ при $(x, \varepsilon) \in U$, где постоянная C_N не зависит от x, ε. Интегрируя почленно, получаем асимптотическое разложение

$$F(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon^n}{n!} \int_0^a \frac{\partial^n f(x, 0)}{\partial \varepsilon^n}\, dx + O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (\varepsilon \to +0).$$

Пусть теперь $f \in C^\infty$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, так что интеграл $F(\varepsilon)$ сходится при $\varepsilon > 0$, и пусть $f(x, \varepsilon)$ имеет особенность при $\varepsilon = 0$. Если эта особенность имеет степенной или логарифмический порядок, то мы скажем, что интеграл $F(\varepsilon)$ имеет слабую особенность. Это же определение относится и к интегралам вида

$$F(\varepsilon) = \int\limits_0^a g(x) f(x, \varepsilon)\, dx,$$

где $\int\limits_0^a |g(x)|\, dx < \infty$.

Исследуем поведение при $\varepsilon \to +0$ интегралов вида

$$F(\varepsilon; a, \beta) = \int\limits_0^a t^{\beta-1} (t+\varepsilon)^\alpha \varphi(t)\, dt, \quad 0 < a < \infty. \quad (4.1)$$

Здесь $\beta > 0$, α — вещественное число.

Если $\varphi \in C[0, a]$, то функция $F(\varepsilon; \alpha, \beta)$ голоморфна в комплексной плоскости ε с разрезом по полуоси $(-\infty, 0)$. В точке $\varepsilon = 0$ эта функция имеет особенность (за исключением случаев, когда $\alpha \geqslant 0$ — целое число или $\varphi(t) \equiv 0$ в окрестности точки $t = 0$). Нас интересует характер особенности. Заметим, что интеграл вида (4.1) по любому отрезку $[\delta, a]$, $0 < \delta < a$, есть голоморфная функция в точке $\varepsilon = 0$. Следовательно, особенность функции F в точке $\varepsilon = 0$ полностью определяется поведением функции $\varphi(t)$ при малых $t \geqslant 0$, т. е. ростком функции $\varphi(t)$ в точке $t = 0$.

Введем обозначение: S_δ — сектор $0 < |\varepsilon| \leqslant r$, $|\arg \varepsilon| \leqslant \pi - \delta$ в комплексной плоскости ε. Здесь $r > 0$, число δ может быть выбрано сколь угодно малым, но не зависящим от ε.

Рассмотрим эталонный интеграл

$$\Phi(\varepsilon; \alpha, \beta) = \int\limits_0^a t^{\beta-1} (t+\varepsilon)^\alpha\, dt. \quad (4.2)$$

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что α *не является целым положительным числом.*

1°. Пусть $\alpha + \beta < 0$. Тогда $\Phi(0; \alpha, \beta) = \infty$. Представим интеграл (4.2) в виде

$$\Phi(\varepsilon; \alpha, \beta) = \left(\int\limits_0^\infty - \int\limits_a^\infty\right) t^{\beta-1} (t+\varepsilon)^\alpha\, dt \equiv \Phi_1 + \Phi_2. \quad (4.3)$$

Если $\varepsilon > 0$, то

$$\Phi_1 = \varepsilon^{\alpha+\beta} \int\limits_0^\infty t^{\beta-1} (t+1)^\alpha\, dt = \varepsilon^{\alpha+\beta} \mathrm{B}(\beta, -\alpha-\beta). \quad (4.4)$$

Поскольку функции Φ_1, $\varepsilon^{\alpha+\beta}$ голоморфны в плоскости ε с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$, то по принципу аналитического продолжения формула (4.4) справедлива при $\varepsilon \notin (-\infty, 0]$ и, в частности, при $\varepsilon \in S_\delta$. Функция Φ_2 голоморфна в точке $\varepsilon = 0$ и разлагается в сходящийся ряд по степеням ε. Имеем

$$\Phi_2 = -\int_a^\infty t^{\alpha+\beta-1}\left(1+\varepsilon t^{-1}\right)^\alpha dt.$$

Разлагая функцию $(1+\varepsilon t^{-1})^\alpha$ в ряд по степеням εt^{-1} и интегрируя почленно, получаем, что при $\alpha+\beta<-1$

$$\Phi(\varepsilon; \alpha, \beta) = \mathrm{B}(\beta, -\alpha-\beta)\,\varepsilon^{\alpha+\beta} + \sum_{n=0}^\infty \binom{n}{\alpha} \frac{a^{\beta+\alpha-n}}{\beta+\alpha-n}\,\varepsilon^n, \quad \varepsilon \notin (-\infty, 0]. \tag{4.5}$$

Итак, особенность функции $\Phi(\varepsilon; \alpha, \beta)$ в точке $\varepsilon = 0$ имеет вид $\mathrm{const}\,\varepsilon^{\alpha+\beta}$.

2°. Пусть $\alpha+\beta>0$, $\alpha+\beta$ — нецелое число. Дифференцированием по ε этот случай сводится к предыдущему:

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^N \Phi(\varepsilon; \alpha, \beta) = N!\binom{N}{\alpha}\Phi(\varepsilon; \alpha-N, \beta). \tag{4.6}$$

Положим $N = [\alpha+\beta]+1$, тогда $\alpha+\beta-N<-1$, и для функции $\Phi(\varepsilon; \alpha-N, \beta)$ справедливо разложение вида (4.5). Интегрируя тождество (4.6), получаем для функции $\Phi(\varepsilon; \alpha, \beta)$ разложение (4.5).

В данном случае главный член асимптотики имеет вид

$$\Phi(\varepsilon; \alpha, \beta) \sim \frac{a^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} \quad (\varepsilon \to 0,\ \varepsilon \in S_\delta).$$

Однако, как и в случае 1°,

$$\Phi(\varepsilon; \alpha, \beta) = \mathrm{const}\,\varepsilon^{\alpha+\beta} + \widetilde{\Phi},$$

где $\widetilde{\Phi}$ — голоморфная в точке $\varepsilon = 0$ функция.

3°. Остается рассмотреть случай, когда $\alpha+\beta = N \geqslant 0$, где N — целое число. Положим $\beta = N-\alpha+\rho$ в (4.5) и перейдем к пределу при $\rho \to +0$ и при фиксированных α, ε. При $\rho = 0$ обращаются в бесконечность только первое слагаемое в правой части равенства (4.5) и член ряда, отвечающий $n = N$, т. е.

$$A = \varepsilon^{\alpha+\beta}B(\beta_1 - \alpha - \beta) + \binom{N}{\alpha}\frac{a^{\alpha+\beta-N}}{\alpha+\beta-N}\varepsilon^N.$$

Выражая бета-функцию через гамма-функции: $B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ и используя тождество $\Gamma(x) \times \Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$, получаем

$$B(\beta_1 - \alpha - \beta) = \frac{\Gamma(N+\rho-\alpha)\Gamma(-N-\rho)}{\Gamma(-\alpha)} = \frac{(-1)^{N+1}\pi\Gamma(N+\rho-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(N+\rho+1)\sin\pi\rho}.$$

Следовательно,

$$A = \varepsilon^N\varphi(\rho)\rho^{-1},$$

$$\varphi(\rho) = \frac{(-1)^{N+1}\Gamma(N+\rho-1)\pi\rho}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(N+\rho+1)}\varepsilon^\rho + \binom{N}{\alpha}a^\rho.$$

Нетрудно проверить, что $\varphi(0) = 0$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{\rho\to 0} A = \varepsilon^N\varphi'(0) = \varepsilon^N\left[\binom{N}{\alpha}\ln a - \binom{N}{\alpha}\ln\varepsilon + \frac{(-1)^{N+1}}{\Gamma(-\alpha)}\frac{d}{d\rho}\frac{\Gamma(N-\alpha+\rho)}{\Gamma(N+1+\rho)}\bigg|_{\rho=0}\right].$$

Подставляя в (4.5), получаем, что

$$\Phi(\varepsilon; \alpha, N-\alpha) = \varepsilon^N\left[\binom{N}{\alpha}\ln\frac{a}{\varepsilon} + \frac{(-1)^{N+1}}{\Gamma(-\alpha)}\frac{d}{d\rho}\frac{\Gamma(N-\alpha+\rho)}{\Gamma(N+1+\rho)}\bigg|_{\rho=0}\right] + \sum_{n=0,\, n\neq N}^{\infty}\frac{a^{N-n}}{N-n}\varepsilon^n, \quad \varepsilon \notin (-\infty, 0]. \tag{4.7}$$

Эта формула упрощается в случае, когда α — целое (отрицательное) число. Применяя тождество $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, получаем при $\alpha \leqslant -1$

$$\frac{\Gamma(N-\alpha+\rho)}{\Gamma(N+1+\rho)} = \begin{cases} (N-\alpha-1+\rho)\ldots(N+1+\rho), & \alpha < -1, \\ 1, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Следовательно, при целых $\alpha \leqslant -1$

$$\frac{d}{d\rho}\frac{\Gamma(N-\alpha+\rho)}{\Gamma(N+1+\rho)}\bigg|_{\rho=0} = -(\alpha+1)\left(N-\frac{\alpha}{2}\right),$$

и формула (4.7) принимает вид

$$\Phi(\varepsilon;\ \alpha,\ N-\alpha)=\varepsilon^{N}\left[\binom{N}{\alpha}\ln\frac{a}{\varepsilon}+\frac{(-1)^{N}}{(-\alpha)!}(\alpha+1)\left(N-\frac{\alpha}{2}\right)\right]+\\+\sum_{n=0,\,n\neq N}^{\infty}\frac{a^{N-n}}{N-n}\varepsilon^{n},\quad(4.8)$$

где $N\geqslant 0$, $\alpha\leqslant 0$ — целые числа. Функция Φ имеет логарифмическую особенность.

Итак, если $\alpha+\beta$ не является неотрицательным целым числом, то для функции $\Phi(\varepsilon;\ \alpha,\ \beta)$ справедливо разложение (4.5). Если же $\alpha+\beta=N\geqslant 0$, где N — целое число, то для функции $\Phi(\varepsilon;\ \alpha,\ \beta)$ справедливо разложение (4.7), которое упрощается при целых $\alpha\leqslant -1$ (см. (4.8)). Если же $\alpha\geqslant 0$ — целое число, то $\Phi(\varepsilon;\ \alpha,\ \beta)$ есть полином от ε. Эти разложения сходятся при любом $\varepsilon\notin(-\infty,\ 0]$. Они состоят из регулярной части (ряды в правых частях формул (4.5), (4.7), (4.8), которые являются голоморфными в точке $\varepsilon=0$ функциями) и сингулярной части. Последняя имеет вид $\mathrm{const}\,\varepsilon^{\alpha+\beta}$, если $\alpha+\beta\neq N$, где $N\geqslant 0$ — целое число, и вид $\mathrm{const}\,\varepsilon^{N}\ln\varepsilon$, если $\alpha+\beta=N$. Эти константы не зависят от a. Все разложения можно дифференцировать по ε любое число раз.

2. Интегралы вида (4.1). Напомним, что α — нецелое число.

Теорема 4.1. *Пусть α — вещественное число*, $\beta>0$, $\varphi(t)\in C(0,\ a]$.

1°. *Пусть $\alpha+\beta$ не является целым числом. Тогда справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\varepsilon;\ \alpha,\ \beta)\sim\\ \sim\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{B}(\beta+n,\ -\alpha-\beta-n)\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\varepsilon^{\alpha+\beta+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\varepsilon^{n}\\ (\varepsilon\to 0,\ \varepsilon\in S_{\delta}).\quad(4.9)$$

2°. *Пусть $\alpha+\beta=N$, где N — целое число. Тогда справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\varepsilon;\ \alpha,\ \beta)\sim-\sum_{n\geqslant\max[0,-N]}^{\infty}\varepsilon^{n+N}\ln\varepsilon\binom{n+N}{\alpha}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{n}\varepsilon^{n}\\ (\varepsilon\to 0,\ \varepsilon\in S_{\delta}).\quad(4.10)$$

Эти разложения можно дифференцировать по ε любое число раз.

Для функций ε^{γ}, $\ln\varepsilon$ выбрана в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ такая ветвь, что $\varepsilon^{\gamma} > 0$ при $\varepsilon > 0$, $\ln\varepsilon$ веществен при $\varepsilon > 0$.

Разложим функцию $\varphi(t)$ по формуле Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n + t^{k+1}\psi_k(t). \qquad (4.11)$$

Функция $\psi_k(t) \in C^{\infty}([0, a])$. Тогда

$$F(\varepsilon; \alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \Phi(\varepsilon; \alpha, \beta+n) + R_k(\varepsilon),$$
$$R_k(\varepsilon) = \int_0^a t^{\beta+k}(t+\varepsilon)^{\alpha}\psi_k(t)\,dt. \qquad (4.12)$$

Для интегралов $\Phi(\varepsilon; \alpha, \beta+n)$ справедливы разложения (4.5), (4.7). Функция $R_k(\varepsilon)$ голоморфна в секторе S_δ. Так как

$$R_k^{(s)}(0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0,\, \varepsilon\in S_\delta} R_k^{(s)}(\varepsilon) = \binom{s}{\alpha}\int_0^a t^{\beta+\alpha+k-s}\psi_k(t)\,dt,$$

то производные $R_k^{(s)}(0)$ существуют при $s < \alpha + \beta + k + 1$. Следовательно,

$$R_k(\varepsilon) = \sum_{s=0}^{[\alpha+\beta+k]} \frac{\varepsilon^s}{s!} R_k^{(s)}(0) + o(\varepsilon^{[\alpha+\beta+k]}) \qquad (4.13)$$

при $\varepsilon \in S_\delta$, $\varepsilon \to 0$. Подставляя в (4.12) и учитывая, что k можно выбрать сколь угодно большим, получаем (4.9). Аналогично доказывается (4.10).

Коэффициенты сингулярной части разложений (4.9) зависят только от значений $\varphi^{(k)}(0)$ (т. е. определяются ростком функции $\varphi(t)$ в точке $t = 0$). Коэффициенты a_n, b_n регулярной части разложений зависят от значений $\varphi(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant a$. Приведем формулы для коэффициентов a_n (т. е. $\alpha + \beta$ — нецелое число). Из (4.11)—(4.13) и (4.5) получаем

$$a_n = \binom{n}{\alpha}\sum_{m=0}^{k} \frac{a^{\alpha+\beta+m-n}}{\alpha+\beta+m-n}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{1}{n!}\binom{n}{\alpha}\int_0^a t^{\beta+\alpha+k-n}\psi_k(t)\,dt, \qquad (4.14)$$

где k таково, что $\alpha+\beta+k-n>0$, функция

$$\psi_k(t)=t^{-k-1}\left[\varphi(t)-\sum_{m=0}^{k}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}t^m\right].$$

Если же функция $\varphi(t)$ допускает аналитическое продолжение в круг $|t|<R$, где $R>a$, то в формуле (4.14) можно положить $k=\infty$, $\psi_k(t)\equiv 0$, так что в этом случае

$$a_n=\binom{n}{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{\alpha+\beta+m-n}}{\alpha+\beta+m-n}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}. \qquad (4.15)$$

Если же $\varphi(t)\in C^\infty([0,\ a])$, то формула (4.15), вообще говоря, неверна. Действительно, из формулы Коши — Адамара следует, что сходимость ряда (4.15) (при некотором $n=n_0$) влечет сходимость степенного ряда $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}t^m$ в круге $|t|<a$.

Замечание 1. Теорема 4.1 очевидным образом обобщается на интегралы вида

$$F(\varepsilon)=\int_0^a t^\beta(t+\varepsilon)^\alpha\varphi(t,\varepsilon)\,dt, \qquad (4.16)$$

где функция $\varphi(t,\varepsilon)\in C^\infty([0,\ a]\times\{\varepsilon\colon |\varepsilon|<r\})$ и голоморфна по ε в круге $|\varepsilon|<r$ при каждом фиксированном $t\in[0,\ a]$. При этом сингулярная часть асимптотического ряда имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{B}(\beta+n,\ -\alpha-\beta-n)\left.\frac{\partial^n\varphi(t,\varepsilon)}{\partial t^n}\right|_{t=0}\varepsilon^{\alpha+\beta+n}, \qquad (4.9')$$

если $\alpha+\beta$ — нецелое число, и вид

$$-\sum_{n\geqslant\max[0,N]}^{N}\binom{n+N}{\alpha}\left.\frac{\partial^n\varphi(t,\varepsilon)}{\partial t^n}\right|_{t=0}\varepsilon^{n+N}\ln\varepsilon, \qquad (4.10')$$

если $\alpha+\beta=N$.

Разложения (4.9), (4.10) остаются в силе и в том случае, когда $\varphi(t,\varepsilon)\in C^\infty([0,\ a]\times[0,\ \varepsilon_0])$, $\varepsilon_0>0$, при $\varepsilon\to+0$.

Рассмотрим примеры. В примерах 4.1 и 4.2 предполагается, что $\varphi(t)\in C^\infty([0,\ a])$.

Пример 4.1. Вычислим главный член асимптотики при $\varepsilon \to +0$ интеграла

$$F(\varepsilon) = \int_0^a \frac{\varphi(t)}{t+\varepsilon}\, dt, \quad 0 < a < 1.$$

В данном случае $\alpha = -1$, $\beta = 1$, так что $\alpha + \beta = 0$, и по формуле (4.10) имеем

$$F(\varepsilon) \sim -\varphi(0) \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \to +0).$$

Можно получить этот результат непосредственно:

$$F(\varepsilon) = \varphi(t) \ln(t+\varepsilon)\big|_0^a - \int_0^a \varphi'(t) \ln(t+\varepsilon)\, dt.$$

Последний интеграл ограничен при $\varepsilon \to 0$. Из этой формулы следует также, что при $\varepsilon \to +0$

$$F(\varepsilon) = -\varphi(0) \ln \varepsilon + \varphi(a) \ln a - \int_0^a \varphi'(t) \ln t\, dt + o(1).$$

Построим асимптотический ряд. Предположим вначале, что функция $\varphi(x)$ голоморфна в точке $\varepsilon = 0$. Имеем

$$F(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon) \ln \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-\varepsilon)}{x+\varepsilon} dx.$$

Подынтегральная функция голоморфна по ε при малых $|\varepsilon|$ и разлагается в ряд

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-\varepsilon)}{x+\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)\, \varepsilon^n,$$

$$c_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \varphi(x) - \varphi(0) \right].$$

Интегрируя этот ряд почленно и разлагая функции $\varphi(-\varepsilon)$, $\ln(1+\varepsilon)$ в ряды по степеням ε, получаем сходящийся при малых $|\varepsilon|$ ряд

$$F(\varepsilon)=\ln\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varepsilon^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\varepsilon^n,$$
$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}\varphi^{(n)}(0)}{n!},\quad b_n=\int_0^1 c_n(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi^{(n-k)}(0)}{(n-k)!\,k}. \tag{4.17}$$

Покажем, что этот ряд — асимптотический при $\varepsilon\to+0$, если $\varphi\in C^\infty$. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$F(\varepsilon)=\varphi_N(-\varepsilon)\ln\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}+\int_0^1\frac{\varphi(x)-\varphi_N(-\varepsilon)}{x+\varepsilon}\,dx,$$

$$\varphi_N(-\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}(-\varepsilon)^n.$$

Это приведет к формуле

$$F(\varepsilon)=\ln\varepsilon\sum_{n=0}^{N}a_n\varepsilon^n+\sum_{n=0}^{N}b_n\varepsilon^n+O(\varepsilon^{N+1}\ln\varepsilon),$$

где коэффициенты a_n, b_n — те же, что и в (4.17). Следовательно, ряд (4.17) — асимптотический при $\varepsilon\to+0$.

Этот метод применим и к интегралам из примеров 4.2, 4.3.

Пример 4.2. Вычислим главный член асимптотики при $\varepsilon\to+0$ интеграла

$$F(\varepsilon)=\int_0^a\frac{\varphi(t)}{t^2+\varepsilon^2}\,dt,\quad 0<a<1.$$

Используя результат примера 4.1, получаем

$$F(\varepsilon)=\frac{1}{2i\varepsilon}\left(\int_0^a\frac{\varphi(t)}{t-i\varepsilon}\,dt-\int_0^a\frac{\varphi(t)}{t+i\varepsilon}\,dt\right)=$$
$$=\frac{\varphi(0)}{2i\varepsilon}(\ln i-\ln(-i)+o(1))=\frac{\pi}{2\varepsilon}\varphi(0)+o(\varepsilon^{-1})$$
$$(\varepsilon\to+0).$$

Пример 4.3. Вычислим главный член асимптотики при $\varepsilon \to +0$ интеграла

$$F(\varepsilon) = \int\limits_0^a \frac{\varphi(t)}{(t^2+\varepsilon^2)^\alpha}\, dt.$$

Мы ограничимся случаем $\alpha > 1/2$ (так что $F(0) = \infty$). Делая замену $t^2 \to t$, получаем

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{a}} \frac{\varphi(\sqrt{t})\, t^{-1/2}}{(t+\varepsilon^2)^\alpha}\, dt.$$

Главный член асимптотики, как нетрудно показать тем же методом, что и в доказательстве теоремы 4.1, равен

$$F(\varepsilon) \sim \frac{\varphi(0)}{2} \int\limits_0^{\sqrt{a}} t^{-1/2} (t+\varepsilon^2)^{-\alpha}\, dt = \frac{\varphi(0)}{2} \Phi(\varepsilon^2; -\alpha, 1/2) \sim$$

$$\sim \frac{\varphi(0)}{2} \mathrm{B}(1/2, \alpha - 1/2)\, \varepsilon^{-2\alpha+1} \quad (\varepsilon \to +0).$$

Аналогично исследуются интегралы вида

$$F(\varepsilon) = \int\limits_0^a (t^{\beta_1} + \varepsilon^{\beta_2})^\alpha \varphi(t)\, dt.$$

Исследуем другие типы интегралов, асимптотика которых носит степенной или логарифмический характер.

Пример 4.4. Рассмотрим интеграл

$$F(\varepsilon) = \int\limits_a^\infty x^\alpha e^{-\varepsilon x^\beta} dx, \quad a > 0,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, α, β вещественны, $\beta > 0$.

Пусть вначале $\alpha > -1$. Сделаем замену переменной $\varepsilon x^\beta = t$ и преобразуем интеграл:

$$F(\varepsilon) = \left(\int\limits_0^\infty - \int\limits_0^a\right) x^\alpha e^{-\varepsilon x^\beta} dx =$$

$$= \frac{1}{\beta} \varepsilon^{-(\alpha+1)/\beta} \left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) - \int\limits_0^{\varepsilon a^\beta} e^{-t} t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} dt\right].$$

В последнем интеграле разложим экспоненту в ряд по степеням t и проинтегрируем почленно. Тогда получим асимптотический ряд ($\varepsilon \to +0$)

$$F(\varepsilon) \sim$$
$$\sim \frac{1}{\beta} \varepsilon^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \beta a^{\alpha+\beta(n+1)}}{(\alpha+1)\, n!} \varepsilon^{\alpha+\beta(n+1)} \right]. \tag{4.18}$$

Пусть $\alpha = -1$, тогда сделанная выше замена переменных приводит интеграл к виду

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{\beta} \int_{\varepsilon a^{\beta}}^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} = -\frac{1}{\beta} e^{-\varepsilon a^{\beta}} \ln(\varepsilon a^{\beta}) + \frac{1}{\beta} \int_{\varepsilon a^{\beta}}^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt,$$

так что главный член асимптотики имеет вид

$$F(\varepsilon) \sim -\frac{1}{\beta} \ln \varepsilon \qquad (\varepsilon \to +0).$$

Чтобы получить асимптотический ряд, экспоненту $e^{-\varepsilon a^{\beta}}$ необходимо разложить в ряд Тейлора, а к последнему интегралу применить тот же прием, что и выше, т. е. представить его в виде разности интегралов по полуоси $[0, \infty)$ и по отрезку $[0, \varepsilon a^{\beta}]$. Первый интеграл равен $-\gamma$, где γ — постоянная Эйлера. Во втором — разложим экспоненту e^{-t} в ряд по степеням t и проинтегрируем почленно. Окончательно получим, что

$$\begin{gathered} F(\varepsilon) \sim -\frac{\ln \varepsilon}{\beta} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n \qquad (\varepsilon \to +0), \\ a_0 = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n!\beta^n} a^{n\beta}, \qquad n \geqslant 1. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Пусть $-1-\beta < \alpha < -1$. Интегрируя по частям, получаем

$$F(\varepsilon) = -\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} e^{-\varepsilon a^{\beta}} + \frac{\varepsilon\beta}{\alpha+1} \int_{a}^{\infty} x^{\alpha+\beta} e^{-\varepsilon x^{\beta}} dx.$$

Так как $\delta = \alpha + \beta > -1$, то мы получили уже исследованный выше интеграл. Для него справедливо асимптотическое разложение (4.18), в котором следует заменить

α на 6. Точно так же, с помощью интегрирования по частям, при произвольном отрицательном α функция $F(\varepsilon)$ приводится к интегралу, для которого справедливо одно из асимптотических разложений (4.18), (4.19).

Точно так же исследуются интегралы вида

$$F(\varepsilon) = \int_a^\infty x^\alpha f(x)\, e^{-\varepsilon x^\beta} dx,$$

где $f(x) \in C^\infty$ при $x \geqslant 0$ и ограничена вместе со всеми производными. Главный член асимптотики при $\alpha = -1$ имеет вид

$$F(\varepsilon) \sim -\frac{f(0)}{\beta} \ln \varepsilon \qquad (\varepsilon \to +0).$$

Пример 4.5. Рассмотрим интеграл

$$F(\varepsilon) = \int_a^\infty x^\alpha e^{-\varepsilon P(x)} dx, \quad a > 0,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $P(x) = x^n + \ldots + a_{n-1}x$, $n \geqslant 1$. Пусть $\alpha > -1$, тогда функция $F(x)$ равна разности интегралов по полуоси $[0, +\infty)$ и по отрезку $[0, a]$. В последнем интеграле экспоненту $e^{-\varepsilon P(x)}$ разложим в ряд Тейлора и проинтегрируем почленно, тогда получим ряд

$$F_1(\varepsilon) = \sum_{n=0}^\infty b_n \varepsilon^n, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^a x^\alpha P^n(x)\, dx.$$

В интеграле по полуоси сделаем замену переменной $\varepsilon x^n = t$, тогда получим интеграл

$$F_2(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{\alpha+1}{n}} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha+1}{n}-1} e^{-t} e^{Q(t,\varepsilon)} dt,$$

$$Q(t, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/n} \sum_{j=1}^{n-1} a_j \varepsilon^{(j-1)/n} t^{(n-j)/n}.$$

Разложим e^Q в ряд $e^Q = \sum\limits_{k=0}^\infty \frac{Q^k}{k!}$ и проинтегрируем почленно, тогда получим асимптотический ряд

$$F_2(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-(\alpha+1)/n} \sum_{j=0}^\infty c_j \varepsilon^{j/n} \qquad (\varepsilon \to +0),$$

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\varepsilon) \sim \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{n}\right)\varepsilon^{-\frac{\alpha+1}{n}}.$$

При $\alpha = -1$ интегрируем по частям:

$$F(\varepsilon) = -e^{-\varepsilon P(a)}\ln a + \varepsilon\int_a^\infty e^{-\varepsilon P(x)}P'(x)\ln x\,dx.$$

Полученный интеграл исследуется теми же методами, что и выше, приходим к асимптотическому разложению

$$F(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1-1/n}\ln\varepsilon\sum_{k=0}^\infty b_k\varepsilon^{k/n} + \sum_{k=0}^\infty c_k\varepsilon^{k/n} \qquad (\varepsilon\to+0),$$

$$c_0 = -\ln a, \quad b_0 = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Случай $\alpha < -1$ приводится к рассмотренным выше интегрированием по частям (как и в примере 4.4). Точно так же исследуются интегралы вида

$$F(\varepsilon) = \int_0^\infty x^\alpha f(x)\,e^{-\varepsilon P(x)}dx,$$

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^{\alpha_j}, \quad 0<\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n,$$

где $f\in C^\infty$ при $x\geqslant 0$ и ограничена вместе со всеми производными.

Рассмотрим интеграл

$$F(\varepsilon, \omega) = \int_0^\infty f\left(\frac{\varepsilon}{x}, x\right)x^{-\omega}\varphi(x)\,dx,$$

где $\varepsilon>0$, $\operatorname{Re}\omega<0$, $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Пусть $f(y, x)\in C^\infty((0,\infty)\times\mathbf{R})$ и существуют функции $f_{nj}(x)\in C^\infty(\mathbf{R})$, последовательность комплексных чисел k_n ($\operatorname{Re}k_n$ монотонно возрастает с ростом n, $\operatorname{Re}k_n\to+\infty$ при $n\to\infty$) и целые числа $l_n\geqslant 0$ такие, что при $y\to+0$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f(y,x) - \sum_{n=0}^N\sum_{j=0}^{l_n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f_{nj}(x)\,y^{k_n}(\ln y)^j\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{\delta,k,l}\,y^{\operatorname{Re}k_{N+1}-\delta}.$$

Оценки выполняются при всех k, N, $\varepsilon > 0$ и при $|x| \leqslant B$. Пусть при $y \to \infty$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f(y, x)\right| \leqslant c_k y^k g_k(y)$$

при всех x из некоторой окрестности точки $x = 0$, и $\int\limits_0^c g_k(1/x)\,dx < \infty$ при некотором $c < 0$. Тогда при $\varepsilon \to +0$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\varepsilon, \omega) \sim \sum_{\substack{n=0,\alpha=k_n,\\ k_n+\omega\neq m+1\in N}}^{\infty} \sum_{j=0}^{l_n} \varepsilon^\alpha (\ln\varepsilon)^j (u_{\alpha j}(\omega), \varphi)) + \sum_{\substack{n=0,\alpha=k_n,\\ k_n+\omega=m+1\in N}}^{\infty} \sum_{j=0}^{l_n+1} \varepsilon^\alpha (\ln\varepsilon)^j (v_{\alpha j}(\omega), \varphi).$$

Здесь (u, φ), (v, φ) — значения функционалов u, v из пространства $D'(\mathbf{R})$, сопряженного с $C_0^\infty(\mathbf{R})$, на функции φ. При этом $\operatorname{supp} v_{\alpha j}(\omega) \subseteq \{0\}$, $\operatorname{sing\,supp} u_{\alpha j}(\omega) \subseteq \{0\}$. Этот результат получен в [110].

3. Интегралы типа потенциала. Рассмотрим интеграл

$$\Pi(\nu) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\nu(t)}{R}\,dt, \quad R^2 = (t - z)^2 + r^2, \tag{4.20}$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты в $\mathbf{R}^3$. Функция $\Pi(\nu)$ — потенциал простого слоя, сосредоточенный на отрезке $I = [-1, 1]$ с плотностью $\nu(t)$. Если плотность непрерывна, то функция $\Pi(\nu)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Pi = 0$ вне I и равна нулю на бесконечности.

Нас интересует асимптотика $\Pi(\nu)$ при $r \to 0$, $|z| < 1$. Найдем главный член асимптотики. Пусть $\nu(t) \in C^1(I)$, тогда

$$\Pi(\nu) = \nu(z) \ln(t - z + R)\big|_{-1}^{1} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{\nu(t) - \nu(z)}{R}\,dt.$$

Последний интеграл имеет порядок $O(1)$ при $r \to 0$. Пусть $|z| \leqslant 1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, тогда

$$\Pi(\nu) = -2\nu(z) \ln r + O(1), \quad r \to 0. \tag{4.21}$$

Заметим, что $\Pi(\nu)$ имеет особенности в концевых точках $r=0$, $z=\pm 1$, если $\nu(z)\neq 0$ в этих точках; например, при $z=1$ имеем $\Pi(\nu)=-\nu(1)\ln r+O(1)$. Если $\nu\in C^\infty(I)$, то при $|z|\leqslant 1-\delta$ асимптотику (4.21) можно дифференцировать по x, y, z любое число раз.

Аналогично исследуется волновой потенциал

$$\Pi(\nu, k)=\int_{-1}^{1}\frac{e^{ikR}}{R}\nu(t)\,dt. \qquad (4.22)$$

Представив его в виде

$$\Pi(\nu, k)=\nu(z)\ln(t-z+R)\big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{e^{ikR}\nu(t)-\nu(z)}{R}\,dt,$$

мы снова получим асимптотическую формулу (4.21). Пусть $R_0=\sqrt{r^2+z^2}$, тогда при $R_0\to\infty$, $k>0$ имеем

$$\Pi(\nu, k)=\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int_{-1}^{1}e^{-ikt\cos\varphi}\nu(t)\,dt+O\left(\frac{1}{R_0^2}\right), \qquad (4.23)$$

где R_0, θ, φ — сферические координаты в $\mathbf{R}^3$. Эту асимптотику можно дифференцировать по x, y, z любое число раз. Заметим, что функция $\Pi(\nu, k)$ удовлетворяет вне отрезка I уравнению Гельмгольца $(\Delta+k^2)\Pi=0$ и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности:

$$\Pi=O\left(\frac{1}{R_0}\right),\quad \frac{\partial\Pi}{\partial R_0}-ik\Pi=o\left(\frac{1}{R_0}\right)\qquad (R_0\to\infty).$$

Теорема 4.2. *Пусть $\nu(t)\in C_0^\infty(I)$. Тогда при $r\to 0$, равномерно по $z\in I$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\Pi(\nu, k)\sim\ln r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z)\,r^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z)\,r^{2n}. \qquad (4.24)$$

Функции $a_n(z)$, $b_n(z)\in C^\infty(I)$, асимптотическое разложение (4.24) можно дифференцировать по x, y, z любое число раз.

Выпишем первые коэффициенты:

$$a_0(z)=-2\nu(z),\quad b_0(z)=$$
$$=-\int_0^\infty\ln(2t)\,d\left[e^{ikt}(\nu(z+t)+\nu(z-t))\right]. \qquad (4.25)$$

Последний интеграл берется по конечному отрезку, так как функция ν финитна. Справедливы рекуррентные соотношения

$$4(n+1)a_{n+1}+4(n+1)^2b_{n+1}+(d^2/dz^2+k^2)b_n=0,$$
$$4(n+1)^2a_{n+1}+(d^2/dz^2+k^2)a_n=0. \tag{4.26}$$

Продолжим функцию $\nu(z)$ нулем вне I, тогда $\Pi = G*\nu$, где $G=e^{ikR}R^{-1}$. Применим преобразование Фурье по переменной z, получим

$$\widetilde{\Pi}=\widetilde{G}\widetilde{\nu},$$

где $\widetilde{\nu}(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi}\nu(t)dt$. Значение $\widetilde{G}$ известно [14], так что

$$\widetilde{\Pi}=\pi iH_0^{(1)}\left(\sqrt{k^2-\xi^2}r\right)\widetilde{\nu}(\xi).$$

Выбор ветви корня следующий:

$$\sqrt{k^2-\xi^2}>0,\quad \xi^2<k^2;\qquad \sqrt{k^2-\xi^2}=i\,|\sqrt{k^2-\xi^2}|,\quad \xi^2>k^2,$$

так что при $\xi^2>k^2$ функция Ханкеля пропорциональна функции Макдональда K_0 и экспоненциально убывает при $|\xi|\to\infty$. Из разложения функции Ханкеля в ряд находим

$$\widetilde{\Pi}=\pi i\left[\left(1+\frac{2iC}{\pi}+\frac{2i}{\pi}\ln\frac{r\sqrt{k^2-\xi^2}}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(k^2-\xi^2)^n r^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\right.$$
$$\left.+\,2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}(k^2-\xi^2)^n\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\widetilde{\nu}(\xi), \tag{4.27}$$

где $C=0,6\ldots$ — постоянная Эйлера. Следовательно,

$$\widetilde{\Pi}=\ln r\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{a}_n(\xi)r^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{b}_n(\xi)r^{2n}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем (4.24). Эти формальные рассуждения строго обоснованы. Рекуррентные соотношения (4.26) следуют из того, что Π удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

Коэффициенты $a_n(z)$ имеют вид

$$a_n(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}(n!)^2}\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right)^n \nu(z)$$

и зависят только от значений функции ν и ее производных в точке z. Коэффициенты $b_n(z)$ нелокально зависят от функции $\nu(z)$ и выражаются через интегралы от этой функции и ее производных. Их явный вид можно найти из (4.27). Приведем другую формулу для $b_0(z)$:

$$b_0(z) = 2\nu(z)\ln 2 + \left(\frac{e^{ik|t|}}{|t|} * \nu(t)\right)(z),$$

где свертка понимается в смысле обобщенных функций.

В ряде задач электростатики и дифракции волн требуется исследовать потенциалы $\Pi(\nu, k)$ в вытянутых сфероидальных координатах, которые связаны с цилиндрическими соотношениями

$$r = \sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \quad z = \xi\eta.$$

Здесь ξ, η меняются в пределах $1 \leqslant \xi < \infty$, $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$. Координатные поверхности $\xi = \text{const}$ — сфероиды с фокусами в точках $(0, 0, \pm 1)$, поверхности $\eta = \text{const}$ — ортогональные сфероидам полы двуполостных гиперболоидов вращения с теми же фокусами. При $\xi = 1$ сфероид вырождается в отрезок $x = 0$, $y = 0$, $|z| \leqslant 1$. Приведем асимптотику $\Pi(\nu)$ при $\xi \to 1$ (см. [93]). Интеграл (4.20) принимает вид

$$\Pi(\nu) = \int_{-1}^{1} \frac{\nu(t)\,dt}{\sqrt{(t-\xi\eta)^2 + (\xi^2-1)(1-\eta^2)}}.$$

Если $\nu(t) \in C^1(I)$, то справедливо представление

$$\Pi(\nu) = -\nu(\eta)\ln(\xi-1) + (K\nu)(\eta) + a(\xi, \eta)\nu(\eta) + H, \tag{4.28}$$
$$|H| \leqslant \sqrt{\xi - 1}\,\|\nu'(t)\|_C.$$

Здесь K — интегральный оператор:

$$(K\nu)(\eta) = \int_{-1}^{1} \frac{\nu(t) - \nu(\eta)}{|t-\eta|}\,dt, \tag{4.29}$$

и $a \in C^\infty$. Собственные значения оператора K равны $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = -2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, так что

$\lambda_n \sim -2\ln n$, $n \to \infty$, а собственные функции — полиномы Лежандра $P_n(\eta)$.

Если $\nu(t) \in C^\infty(I)$, то при любом целом $N \geqslant 0$ справедливо разложение

$$\Pi(\nu) = -\nu(\eta)\ln(\xi - 1) + (K\nu)(\eta) + a(\xi, \eta)\nu(\eta) + \\ + (\xi - 1)a_N(\xi, \eta) + (\xi - 1)\ln(\xi - 1)b_N(\xi, \eta) + O((\xi - 1)^N) \tag{4.30}$$

в области $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$, $1 \leqslant \xi \leqslant 1 + \delta$, функции a, a_N, $b_N \in C^\infty$ при указанных ξ, η. Это разложение можно $M(N)$ раз дифференцировать по ξ, η, где $M(N) \to \infty$ при $N \to \infty$. Если разложить функции a, a_N, b_N по степеням $\xi - 1$, то формула (4.30) дает асимптотическое разложение потенциала $\Pi(\nu)$ при $\xi \to 1$.

Функция b_N имеет вид

$$b_N(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{L(N)} c_j(\xi, \eta)\, \nu^{(j)}(\eta), \quad c_j \in C^\infty,$$

т. е. выражается только через значения функции ν и ее производных в точке η. Ситуация точно такая же, как и в разложении (4.24). Функция $a_N = A_N(\nu)$, где A_N — линейный интегральный оператор, зависящий от конечного числа производных функции ν и отображающий пространство $C^\infty(I)$ в себя.

Аналогично исследуется потенциал $\Pi(\nu, k)$ при $k \neq 0$. Имеем

$$\Pi(\nu, k) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos kR}{R}\, \nu(t)\, dt + i \int_{-1}^{1} \frac{\sin kR}{R}\, \nu(t)\, dt.$$

Ядро второго из интегралов есть функция класса C^∞, а первый можно представить в виде

$$\Pi(\nu) + \int_{-1}^{1} \frac{\cos kR - 1}{R}\, \nu(t)\, dt.$$

Главный член асимптотики при $\xi \to 1$ имеет вид

$$\Pi(\nu, k) = -\nu(\eta)\ln(\xi - 1) + (K(k)\nu)(\eta) + o(1),$$

где $K(k)$ — интегральный оператор:

$$(K(k)\nu)(\eta) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{ik|t-\eta|}\nu(t) - \nu(\eta)}{|t - \eta|}\, dt.$$

Пусть имеется потенциал простого или двойного слоя, сосредоточенный на гладкой поверхности S. При исследовании поведения потенциалов и их производных вблизи S возникают интегралы со слабой особенностью, вида

$$\Phi(\varepsilon) = \int_0^1 f\left[\frac{(\varepsilon + x^2)^2}{\varepsilon^2 + x^2}\right] \frac{\varepsilon + x^2}{\varepsilon^2 + x^2} g(x^2)\, dx,$$

$$\Phi_s(\varepsilon) = \int_0^1 f\left[\frac{(\varepsilon + x^2)^2}{\varepsilon^2 + x^2}\right] \frac{\varepsilon + x^2}{\varepsilon^2 + x^2} (\varepsilon^2 + x^2)^s \ln(\varepsilon^2 + x^2)\, g(x^2)\, dx$$

(см. [95]). Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $s \geqslant 0$ — целое число, $f, g \in C^\infty(0, 1)$. Ясно, что $\Phi, \Phi_s \in C^\infty$ при $\varepsilon \neq 0$, но в точке $\varepsilon = 0$ эти функции могут иметь особенности.

Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$\Phi(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j^{\pm} |\varepsilon|^j, \quad \varepsilon \to \pm 0. \tag{4.31}$$

Аргумент функции f представим в виде

$$\frac{\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^2 + x^2} + x^2 + (2\varepsilon - \varepsilon^2).$$

Для упрощения записи заменим множитель $1 - \varepsilon^2$ единицей, что не повлияет на результат рассуждений. Тогда аргумент функции f примет вид $t + x^2 + 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $t = \varepsilon^2(\varepsilon^2 + x^2)^{-1}$.

Применяя формулу Тейлора, получаем

$$f = \sum_{j=0}^{M} \frac{1}{j!} f^{(j)}(t + x^2)(2\varepsilon - \varepsilon^2)^j + O(\varepsilon^{M+1}),$$

где $M \geqslant 0$ любое и оценка остаточного члена равномерна по $x \in [0, 1]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Мы получаем однотипные интегралы; исследуем первый из них, т. е.

$$\int_0^1 f(t + x^2) g(x^2) h\, dx = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} f(t + x^2) g(x^2) h\, dx + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 f(t + x^2) g(x^2) h\, dx \equiv I_1 + I_2, \quad h = \frac{\varepsilon + x^2}{\varepsilon^2 + x^2}.$$

Разбиение участка интегрирования на отрезки $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ и $[\sqrt{\varepsilon}, 1]$ обусловлено тем, что функции t и x^2 имеют одинаковый порядок при $x \sim \sqrt{\varepsilon}$. Разложим функцию $f(t+x^2)$ по степеням x^2 в интеграле I_1 и по степеням t в интеграле I_2, тогда получим

$$f(t+x^2) = \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{j!} f^{(j)}(t)\, x^{2j} + O(\varepsilon^{M+1}),$$

$$g(x^2) = \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0)\, x^{2j} + O(\varepsilon^{M+1})$$

при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. При $\sqrt{\varepsilon} \leqslant x \leqslant 1$ имеем

$$f(t+x^2) = \sum_{j=0}^{2M} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x^2)\, t^j + O(\varepsilon^{M+1/2}),$$

так как $t = O(\sqrt{\varepsilon})$. Число M выберем достаточно большим. Полученные интегралы имеют вид

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} hF(t)\, x^{2j}\, dx, \quad J_2 = \int_{\sqrt{\varepsilon}} hF(x^2)\, t^j dx,$$

где $F \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$, с различными функциями F. Остаточный член имеет порядок $O(\varepsilon^{M+1/2})$. Имеем

$$J_1 = \frac{\varepsilon^{2j}}{2} \int_{\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}}^{1} F(t)(1-t)^{2j-1/2}\,[t(1-\varepsilon)+\varepsilon]\, t^{2j-3/2}\, dt =$$

$$= \varepsilon^{(1+j)/2} \left[\sum_{m=0}^{M} a_m \varepsilon^{m/2} + O(\varepsilon^{M+1/2}) \right].$$

Для этого интеграл представляется в виде разности интегралов по отрезкам $[0, 1]$ и $[0, \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}]$ и в последнем из них функция $F(t)$ разлагается по формуле Тейлора. В интеграле J_2 можно заменить h на $h_1 = \varepsilon(\varepsilon^2 + x^2)^{-1}$ и аргумент x^2 функции F на $x^2 + \varepsilon^2$. Действительно, функцию $F(x^2) = F((x^2+\varepsilon^2) - x^2)$ можно разложить по степеням ε^2 с остаточным членом любого заданного порядка малости по ε. Окончательно получим интегралы вида

$$J = \int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} F(x^2+\varepsilon^2)\left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+x^2}\right)^j \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \\ = \frac{1}{2}\varepsilon^{2j+1}\int\limits_{\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}}^{1+\varepsilon^2} G(t)\frac{dt}{t^j\sqrt{t-\varepsilon^2}}.$$

Так как $\varepsilon^2 t^{-1} \leqslant \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}$, то

$$(t-\varepsilon^2)^{-1/2} = t^{-1/2}\left[1+\sum_{m=1}^{M} b_m\left(\frac{\varepsilon^2}{t}\right)^m\right] + O(\varepsilon^{M+1/2}),$$

$$J = \sum_{m=0}^{M} b_m \varepsilon^{2m+2j+1}\int\limits_{\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}}^{1+\varepsilon^2} G(t)\,t^{-j-m-1/2} + O(\varepsilon^{M+j+3/2}).$$

Полученные интегралы — функции класса C^∞ от ε при $\varepsilon > 0$. Тем самым получено асимптотическое разложение $\Phi(\varepsilon) \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} \Psi_j(\sqrt{\varepsilon})^j$ при $\varepsilon \to +0$. Покажем, что коэффициенты при нечетных степенях $\sqrt{\varepsilon}$ равны нулю. Эти коэффициенты — билинейные формы от значений функций f, g и их производных в точке $x = 0$. Если f, g — полиномы, то $\Phi(\varepsilon)$ есть линейная комбинация интегралов вида

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+x^2}\right)^j \frac{dx}{\varepsilon^2+x^2} = \\ = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{j+1}} - \int\limits_{1/\varepsilon}^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^{j+1}}, \quad j \geqslant 1,$$

коэффициенты которой — полиномы от ε, а интегралы разлагаются в асимптотические ряды по целым степеням ε. Следовательно, $\Phi(\varepsilon)$ разлагается в асимптотический ряд по целым степеням ε при $\varepsilon \to +0$. Аналогично исследуется случай $\varepsilon \to -0$.

Для интегралов $\Phi_*(\varepsilon)$ справедливы асимптотические разложения [95]

$$\Phi_*(\varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{*j}^{\pm}|\varepsilon|^j + \ln\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{*j}^{\pm}|\varepsilon|^j \qquad (\varepsilon \to \pm 0).$$

§ 5. Корни трансцендентных уравнений

1. Формула Бюрмана — Лагранжа. Рассмотрим уравнение

$$w = \frac{z}{f(z)}, \tag{5.1}$$

где функция $f(z)$ голоморфна в окрестности точки $z = 0$ и $f(0) \neq 0$. Тогда существует $a > 0$ такое, что при $|w| < a$ уравнение (5.1) имеет единственное решение $z = \varphi(w)$, z лежит в окрестности точки $z = 0$, и это решение голоморфно при $|w| < a$:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n, \quad c_n = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}(f(z))^n\right]\Bigg|_{z=0}. \tag{5.2}$$

Формула (5.2) для коэффициентов c_n называется *формулой Бюрмана — Лагранжа* [5]. Если функция $g(z)$ голоморфна в окрестности точки $z = 0$, то

$$g(z(w)) = g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n,$$
$$d_n = \frac{1}{n!}\left\{\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left[g'(z)(f(z))^n\right]\right\}\Bigg|_{z=0}. \tag{5.3}$$

Имеется более общая теорема о голоморфности неявной функции. Рассмотрим уравнение

$$f(z_1, \ldots, z_m, w) = 0, \tag{5.4}$$

где функция f голоморфна по совокупности переменных в точке $P^0 = (z_1^0, \ldots, z_m^0, w^0)$ и равна нулю в этой точке. Пусть $\partial f/\partial w \neq 0$ в точке P^0. Тогда существуют постоянные $a_1, \ldots, a_m$ такие, что если $|z_1 - z_1^0| < a_1, \ldots, |z_m - z_m^0| < a_m$, то уравнение (5.4) имеет единственное решение $w = \varphi(z_1, \ldots, z_m)$ такое, что $w^0 = \varphi(z_1^0, \ldots, z_m^0)$. Функция φ голоморфна в окрестности точки $z_1^0, \ldots, z_m^0$ и потому разлагается в ряд

$$\varphi(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=0}^{\infty} \varphi_{k_1 \ldots k_m} (z_1 - z_1^0)^{k_1} \ldots (z_m - z_m^0)^{k_m},$$

сходящийся при $|z_j - z_j^0| < a_j$, $1 \leq j \leq m$. Здесь $\varphi_{0 \ldots 0} = w^0$, а остальные коэффициенты могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов (ряд для φ подставляем в уравнение (5.4) и приравниваем нулю коэффициенты при степенях $z_j - z_j^0$).

Уравнения вида (5.4) встречаются в самых разных задачах естествознания. Во многих задачах приходится также исследовать асимптотику при $|z| \to \infty$ корней уравнений вида $f(z) = 0$, где $f(z)$ — целая или мероморфная функция. Приведенные ниже примеры рассмотрены в [5], [34].

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение

$$xe^x = \varepsilon$$

и исследуем его положительные решения при малых $\varepsilon > 0$. Уравнение имеет вид (5.1), где $f(z) = e^{-z}$, и из (5.2) получаем

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1}}{n!} \varepsilon^n.$$

Этот ряд сходится при комплексных ε, $|\varepsilon| < e^{-1}$, и одновременно является асимптотическим разложением решения $x(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Пример 5.2. Рассмотрим уравнение

$$x^t = e^{-x}$$

при $t \to +\infty$. Функция x^t возрастает при $x > 0$, функция e^{-x} убывает, так что имеется единственный положительный корень $x = x(t)$. Полагая $x = 1 + z$, $w = t^{-1}$, получаем уравнение вида (5.1), где $f(z) = -z(1+z)/\ln(1+z)$. Следовательно, существует такое $t_0 > 0$, что

$$x(t) = 1 - t^{-1} - c_2 t^{-2} - \ldots,$$

и ряд сходится при комплексных t, $|t| > t_0$.

Пример 5.3. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{tg} x = 1/x.$$

Из графиков функций $\operatorname{tg} x$ и $1/x$ видно, что в каждом из интервалов $\pi n < x < \pi(n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеется ровно один корень x_n, причем $x_n - \pi n \to 0$ при $n \to \infty$. Найдем асимптотику корней x_n. Полагая $x = n\pi + z$, $w = (\pi n)^{-1}$, получаем уравнение (5.1), где

$$f(z) = \frac{z(\cos z - z \sin z)}{\sin z}, \quad f(0) = 1.$$

Поэтому при $|n| \geqslant n_1 \gg 1$ имеет место разложение в сходящийся ряд

$$x_n = \pi n + \frac{1}{\pi n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k+1}}{(\pi n)^{2k+1}}.$$

Коэффициенты при четных степенях $(\pi n)^{-1}$ равны нулю, так как $f(z)$ — четная функция.

5.1. Уравнение $\sin x = (\ln x)^{-1}$ имеет ровно один корень x_n в интервале $2\pi n < x < 2\pi n + \pi/2$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$x_n = 2\pi n + \frac{1}{\ln(2\pi n)} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^3}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Рассмотрим уравнение

$$z^m f(z) = w, \tag{5.5}$$

где $m \geqslant 2$ — целое, функция $f(z)$ голоморфна в окрестности точки $z = 0$ и $f(0) \neq 0$. Тогда существует такое $a > 0$, что при $0 < |w| < a$ уравнение (5.5) имеет ровно m корней, лежащих в окрестности точки $z = 0$. Обратная функция в данном случае m-значна и разлагается в сходящийся ряд

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^{n/m}. \tag{5.6}$$

В круге $|w| < a$ с разрезом по какому-либо отрезку $\arg w = \alpha$, $0 \leqslant |w| \leqslant a$, функция $\sqrt[m]{w}$ распадается на m однозначных голоморфных ветвей, значения которых отличаются множителями $e^{2\pi i k/m}$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Формула (5.6) в круге с разрезом определяет m однозначных функций.

Рассмотрим уравнение относительно z вида (5.4) с двумя переменными

$$f(z, w) = 0, \tag{5.7}$$

где $f(0, 0) = 0$, функция $f(z, w)$ голоморфна по совокупности переменных в окрестности точки $(0, 0)$ и $f(0, w) \not\equiv 0$. Тогда существует $a > 0$ такое, что при $|w| < a$ уравнение (5.7) имеет конечное число решений $z_1(w), \ldots, z_k(w)$. Каждое из этих решений разлагается в сходящийся ряд по дробным степеням z (ряды Пюизе) вида

$$z_j(w) = w^{r_j} \sum_{n=0}^{\infty} c_{jn} w^{np_j/q_j}. \tag{5.8}$$

Здесь r_j — рациональное число, p_j, q_j — целые, $p_j \geqslant 0$, $q_j \geqslant 1$. Числа r_j, p_j, q_j находятся с помощью диаграммы Ньютона, а c_{jn} — методом неопределенных коэффициентов.

Пример 5.4. Рассмотрим уравнение $P(z) = w$, где

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0, \quad n \geqslant 2.$$

Исследуем поведение корней при $|w| \to \infty$ в плоскости с разрезом по лучу $\arg z = \alpha$. Положим $z = 1/\zeta$, $w = 1/\varepsilon$, тогда получим уравнение вида (5.5):

$$\frac{\zeta^n}{a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n} = \varepsilon.$$

Следовательно, при $|w| \geqslant R \gg 1$ имеется ровно n корней:

$$z_j(w) = \frac{e^{2\pi ij/n}\sqrt[n]{w}}{\sqrt[n]{a_0}} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi ijn} c_n w^{-j/n}. \tag{5.9}$$

Здесь $\sqrt[n]{a_0}$ — фиксированное значение корня, $\sqrt[n]{w}$ — фиксированная ветвь корня, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ и ряды сходятся при $|w| > R$.

5.2. Пусть $f(z) = z^n \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$, $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 2$ — целое, и ряд сходится при $|z| > R$. Тогда в плоскости с разрезом по лучу $\arg z = \alpha$ уравнение $f(z) = w$ при $|w| \geqslant R_0 \gg \gg 1$ имеет ровно n решений, которые разлагаются в сходящиеся ряды вида (5.9).

2. Более сложные случаи.

Пример 5.5. Рассмотрим уравнение

$$z - \ln z = \lambda \tag{5.10}$$

в области D, где D — плоскость z с разрезом по полуоси $(-\infty, 0]$, из которой удален круг $|z| < \rho$. Здесь $\ln z$ — голоморфная в D ветвь логарифма, принимающая вещественные значения на полуоси $(0, +\infty)$, так что

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Найдем асимптотику корней при $\lambda \to +\infty$.

Если такой корень $z(\lambda)$ существует, то $z(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to +\infty$, так как функция $z - \ln z$ ограничена на любом компакте, лежащем в замыкании области D. Так как функция z растет быстрее, чем $\ln z$, то $z(\lambda) \sim \lambda$, $\lambda \to +\infty$.

Поэтому будем искать решение уравнения (5.10) в виде

$$z = \lambda(1 + \zeta(\lambda)),$$

где $\zeta(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$. Покажем, что если $\lambda_0 > 0$ достаточно велико, $\lambda \geqslant \lambda_0$, то уравнение имеет в области D единственное решение, причем

$$z(\lambda) = \lambda + O(\ln \lambda). \qquad (5.11)$$

Для функции $\zeta(\lambda)$ имеем уравнение

$$\zeta = \frac{\ln \lambda}{\lambda} + \frac{\ln(1+\zeta)}{\lambda}.$$

Полагая $\varepsilon = \ln \lambda/\lambda$, $\delta = \lambda^{-1}$, получаем уравнение

$$\zeta - (\varepsilon + \delta \ln (1 + \zeta)) = 0. \qquad (5.12)$$

Воспользуемся теоремой Руше [34]. Пусть K_ε — круг $|\zeta| \leqslant 2\varepsilon$; при $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$ он содержится в круге K: $|\zeta| \leqslant 1/2$. Функция $\ln(1+\zeta)$ ограничена в круге K: $|\ln(1 + \zeta)| \leqslant M$ и тем более в круге K_ε. На границе Γ_ε: $|\zeta| = 2\varepsilon$ круга K_ε

$$|-\varepsilon - \delta \ln (1 + \zeta)| \leqslant \varepsilon + M\delta,$$

и так как $\delta = o(\varepsilon)$ при $\lambda \to \infty$, то при больших λ на Γ_ε

$$|-\varepsilon - \delta \ln(1 + \zeta)| < 2\varepsilon = |\zeta|.$$

По теореме Руше уравнение (5.12) имеет единственное решение в круге K_ε, откуда следует (5.11). Более того, уравнение (5.12) имеет вид (5.4), где $f = f(\zeta, \varepsilon, \delta)$, $f = 0$, $\partial f/\partial\zeta \neq 0$ при $\zeta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$. Следовательно, ζ разлагается в сходящийся при малых $|\varepsilon|$, $|\delta|$ степенной ряд, так что

$$z(\lambda) = \lambda \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{km} (\ln \lambda)^m}{\lambda^{k+m}} \right], \quad c_{01} = 1.$$

Пример 5.6. Рассмотрим уравнение

$$xe^x = \lambda, \qquad (5.13)$$

которое при $\lambda > 0$ имеет единственное решение, так как функция xe^x строго монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ на полуоси $x \geqslant 0$. Уравнение (5.13) можно записать в виде

$$x = \lambda - \ln x.$$

Это уравнение аналогично уравнению (5.10), так что тем же способом, что и в примере 5.5, можно получить формулу

$$x = \ln\lambda - \ln\ln\lambda + O\left(\frac{\ln\ln\lambda}{\ln\lambda}\right) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

Полагая

$$x = \ln\lambda - \ln\ln\lambda + \zeta, \quad \varepsilon = \frac{\ln\ln\lambda}{\ln\lambda}, \quad \delta = \frac{1}{\ln\lambda},$$

получаем уравнение вида (5.4):

$$e^{-\zeta} - 1 - \delta\zeta + \varepsilon = 0.$$

При $\lambda \geqslant \lambda_0 \gg 1$ решение этого уравнения разлагается в сходящийся ряд по степеням ε, δ, и окончательно получаем

$$x = \ln\lambda - \ln\ln\lambda + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{km}(\ln\ln\lambda)^{m+1}(\ln\lambda)^{-k-m-1}.$$

5.3. Пусть $f(\lambda) > 0$ и $e^{\lambda f(\lambda)} = f(\lambda) + \lambda + O(1)$, $\lambda > 0$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$f(\lambda) = \frac{\ln\lambda}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

5.4. При больших $\lambda > 0$ уравнение $e^x + \ln x = \lambda$ имеет положительное решение вида

$$x = \ln\lambda + \frac{\ln\ln\lambda}{\lambda} f\left(\frac{\ln\ln\lambda}{\ln\lambda}, \frac{1}{\lambda\ln\lambda}, \frac{\ln\ln\lambda}{\lambda}\right),$$

где $f(t_1, t_2, t_3)$ — степенной ряд от своих аргументов, сходящийся при достаточно малых $|t_1|$, $|t_2|$, $|t_3|$.

5.5. Уравнение $e^z = az\ (a \neq 0)$ имеет бесконечно много корней, которые состоят из двух серий. Одна из них имеет вид

$$z_n = 2\pi i n + \ln n + \ln(2\pi i a) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \qquad (n \to +\infty),$$

вторая имеет аналогичный вид и лежит в секторе

$$-\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant -\pi/2 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

5.6. Уравнение $\sin z = z$ имеет 4 бесконечные серии корней z_n, $-z_n$, $\bar{z}_n$, $-\bar{z}_n$, где

$$z_n = 2\pi n + i\ln(4\pi n) + \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \qquad (n \to +\infty).$$

5.7 [75]. Рассмотрим уравнение

$$f_1(x)\sin(x+\omega)+f_2(x)\cos(x+\omega)=f_3(x), \qquad (5.14)$$

где функции $f_j(x)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$f_j(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x^{-\alpha_{jk}} \quad (x \to +\infty).$$

Здесь $\alpha_{j0} < \alpha_{j1} < \ldots < \alpha_{js} < \ldots$, $\alpha_{js} \to +\infty$ при $s \to +\infty$, одно из чисел $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}$ равно нулю, остальные неотрицательны. Пусть функции $f_j(x) \in C^\infty$ при больших x и их асимптотические разложения можно дифференцировать.

Запишем уравнение (5.14) в виде $\Phi(x)+o(1)=0$ ($\Phi(x)$ — главная часть, не содержащая степеней x). Если укороченное уравнение $\Phi(y)=0$ имеет корни, то их бесконечно много и они имеют вид

$$y_n = n\pi s + \varkappa,$$

где $s=1$ или $s=2$. Если уравнение $\Phi(y)=0$ имеет бесконечно много корней и $s=1$, то уравнение (5.14) имеет бесконечно много положительных корней, которые разлагаются в асимптотические ряды вида

$$x_n \sim y_n + \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_n^{-\lambda_k} \qquad (n \to \infty).$$

Если $s=2$, то это утверждение справедливо, но каждому y_n отвечают два корня $x_n^{\pm}$.

ГЛАВА II

МЕТОД ЛАПЛАСА

§ 1. Интегралы Лапласа (одномерный случай)

1. Эвристические соображения. *Интегралами Лапласа* называются интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \exp[\lambda S(x)]\, dx, \tag{1.1}$$

где $S(x)$ — вещественнозначная функция, λ — большой положительный параметр. Функция $f(x)$ может принимать комплексные значения. Будем считать для простоты, что $I = [a, b]$ — конечный отрезок и что $f(x)$, $S(x)$ — достаточно гладкие при $x \in I$ функции. Тривиальный случай $S(x) \equiv \text{const}$, $f(x) \equiv 0$ не рассматривается.

Рис. 1

Пусть $\max\limits_{x \in I} S(x) = S(x_0)$ и достигается только в точке x_0. Тогда функция $\exp[\lambda S(x)]$ имеет максимум в точке x_0, который тем резче, чем больше λ (рис. 1). Интеграл $F(\lambda)$ можно приближенно заменить интегралом по малой окрестности точки максимума x_0, и это приближение будет тем точнее, чем больше λ. Далее, в этой окрестности функции f, S можно приближенно заменить по формуле Тейлора, и мы получим интеграл, асимптотика которого легко вычисляется. Этот метод был предложен Лапласом.

Пусть $a < x_0 < b$. Тогда $S'(x_0) = 0$; пусть для простоты $S''(x_0) \neq 0$, $f(x_0) \neq 0$. Тогда

$$F(\lambda) \approx \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x) \exp[\lambda S(x)]\, dx,$$

где $\varepsilon > 0$ — малое фиксированное число, и

$$f(x) \approx f(x_0), \qquad S(x) \approx S(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} S''(x_0).$$

Следовательно,

$$F(\lambda) \approx f(x_0) \exp[\lambda S(x_0)] \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left[\frac{\lambda S''(x_0)}{2} t^2\right] dt.$$

Заметим, что $S''(x_0) < 0$. Последний интеграл равен

$$[-\lambda S''(x_0)]^{-1/2} \int_{-\varepsilon\sqrt{\lambda}}^{\varepsilon\sqrt{\lambda}} e^{-t^2/2} dt \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} \quad (\lambda \to \infty),$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Итак, мы получили асимптотическую формулу

$$F(\lambda) \approx \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\, f(x_0)\, e^{\lambda S(x_0)} \quad (\lambda \to +\infty). \qquad (1.2)$$

Пусть теперь x_0 совпадает с одним из концов отрезка I, например $x_0 = a$, и пусть для простоты $S'(a) \neq 0$, $f(a) \neq 0$. Заменяя $F(\lambda)$ интегралом по отрезку $[a, a+\varepsilon]$ и заменяя приближенно на этом отрезке функции

$$f(x) \approx f(a), \quad S(x) \approx S(a) + (x-a) S'(a),$$

получаем, что

$$F(\lambda) \approx f(a) \exp(\lambda S(a)) \int_0^{\delta} \exp[tS'(a)]\, dt.$$

Заметим, что $S'(a) < 0$. Вычисляя последний интеграл, получаем

$$F(\lambda) \approx -\frac{f(a)\, e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \qquad (\lambda \to +\infty). \qquad (1.3)$$

Строгий вывод формул (1.2) и (1.3) будет приведен в следующих разделах. По существу эти две формулы являются основными асимптотическими формулами для интегралов Лапласа. Нам удалось получить простые асимптотические формулы по следующим причинам:

1°. Подынтегральная функция имеет при больших λ резкий максимум (т. е. интеграл по отрезку I можно приближенно заменить интегралом по малой окрестности точки максимума).

2°. В окрестности точки максимума подынтегральную функцию можно заменить более простой (например, такой, что интеграл от нее берется или его асимптотика легко вычисляется).

Ясно, что если интеграл

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) \exp [S(x, \lambda)]\, dx$$

обладает свойствами 1° и 2°, то его асимптотику можно вычислить, и применение метода Лапласа всегда сводится к проверке этих свойств. Для интегралов Лапласа (при условии, что I — конечный отрезок и f, S — достаточно гладкие функции) асимптотика вычисляется довольно просто. В случае же, когда зависимость от λ является более сложной, имеются только некоторые результаты, носящие частный характер (см. § 2).

2. Простейшие оценки.

Лемма 1.1. *Пусть*

$$M = \sup_{a<x<b} S(x) < \infty \tag{1.4}$$

и при некотором $\lambda_0 > 0$ *интеграл* (1.1) *сходится абсолютно*:

$$\int_a^b |f(x)| \exp [\lambda_0 S(x)]\, dx < \infty. \tag{1.5}$$

Тогда имеет место оценка

$$|F(\lambda)| \leqslant C|e^{\lambda M}| \quad (\operatorname{Re} \lambda \geqslant \lambda_0). \tag{1.6}$$

Имеем при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$

$$|F(\lambda)| \leqslant |\exp(\lambda M)| \int_a^b |\exp[\lambda_0(S(x) - M)]| \times$$
$$\times |\exp[(\lambda - \lambda_0)(S(x) - M)]| |f(x)| dx \leqslant$$
$$\leqslant |\exp[(\lambda - \lambda_0) M]| \int_a^b |\exp[\lambda_0 S(x)]| |f(x)| dx = C |\exp(\lambda M)|.$$

Так как подынтегральная функция является целой функцией λ при каждом фиксированном $x \in (a, b)$ и интеграл (1.1) сходится равномерно по λ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$, то справедливо

Следствие 1.1. *Пусть функции* $f(x)$, $S(x) \in C(a, b)$ *и условия* (1.4), (1.5) *выполнены. Тогда функция* $F(\lambda)$ *голоморфна в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$.

Пусть I — некоторый интервал. Введем стандартные обозначения: $C(I)$ — класс непрерывных на I функций, $C^r(I)$ — класс r раз непрерывно дифференцируемых на I функций.

3. Лемма Ватсона. Рассмотрим интеграл Лапласа, в котором S — степенная функция

$$\Phi(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} f(x) \exp\left(-\lambda x^\alpha\right) dx, \tag{1.7}$$

где $0 < a < \infty$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$. Так как в окрестности точки максимума функцию $S(x)$ можно приближенно заменить степенной функцией (вообще говоря), то вычисление асимптотики интегралов Лапласа (1.1) сводится к вычислению асимптотики эталонных интегралов (1.7).

Получим асимптотические оценки для $\Phi(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, где S_ε — сектор

$$|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2} \tag{1.8}$$

в комплексной плоскости λ. Во всех предложениях настоящего параграфа $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым (но не зависящим от λ).

Замечание 1.1. Так как

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant (\sin\varepsilon)^{-1}|\lambda| \quad (\lambda \in S_\varepsilon),$$

то при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, $c > 0$

$$O(|e^{-c\lambda}|) = O(e^{-c'|\lambda|}), \quad c' = c|\sin\varepsilon|^{-1}.$$

Нам понадобится формула

$$\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-\lambda x^\alpha}dx = \lambda^{-\beta/\alpha}\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \tag{1.9}$$

где α, $\beta > 0$. Здесь и далее для функции $\lambda^{-\beta/\alpha}$ выбрана главная ветвь:

$$\lambda^{-\beta/\alpha} = |\lambda|^{-\beta/\alpha}e^{-\frac{i\beta}{\alpha}\arg\lambda}\left(|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Если $\lambda > 0$, то с помощью замены переменной $\lambda x^\alpha = t$ интеграл (1.9) приводится к Γ-функции. Так как обе части формулы (1.9) голоморфны при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то по теореме единственности формула (1.9) справедлива при $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Лемма 1.2 (лемма Ватсона). *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $f(x) \in C^\infty([0, a])$. *Тогда при* $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, *справедливо асимптотическое разложение*

$$\Phi(\lambda) \sim \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-(k+\beta)/\alpha}\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)\frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{1.10}$$

Это разложение можно дифференцировать по λ *любое число раз.*

Выпишем главный член асимптотики:

$$\Phi(\lambda) = \alpha^{-1}\Gamma(\beta/\alpha)[f(0) + o(1)]\lambda^{-\beta/\alpha}. \tag{1.10'}$$

По формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_N(x),$$

$$|r_N(x)| \leqslant C_N x^{N+1} \quad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

Покажем, что при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$\Phi_k(\lambda) \equiv \int_0^a x^{k+\beta-1}\exp(-\lambda x^\alpha)\,dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)\lambda^{-(k+\beta)/\alpha} + O(e^{-c|\lambda|}), \tag{1.11}$$

где $c > 0$. Представим $\Phi_k(\lambda)$ в виде разности интегралов по полуоси $[0, \infty)$ и $[a, \infty)$; тогда первый интеграл равен $\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)\lambda^{-(k+\beta)/\alpha}$ (см. (1.9)). Так как $x^\alpha \geqslant a^\alpha > 0$

при $x \geqslant a$, то интеграл по полуоси $x \geqslant a$, в силу леммы 1.1 и замечания 1.1, есть $O(e^{-c|\lambda|})$ $(c > 0)$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$. Тем самым (1.11) доказано. Оценим остаточный член:

$$|R_N(\lambda)| = \left|\int_0^a x^{\beta-1} r_N(x) \exp(-\lambda x^\alpha)\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_N \int_0^\infty x^{\beta+N} \exp[-|\lambda|(\sin\varepsilon)^{-1} x^\alpha]\, dx =$$
$$= C' |\lambda|^{-(\beta+N+1)/\alpha} \quad (\lambda \in S_\varepsilon)$$

в силу (1.9). Так как $O(e^{-c_1|\lambda|}) = O(|\lambda|^{-N})$ $(|\lambda| \to \infty)$ при любом целом $N \geqslant 0$, то

$$\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Phi_k(\lambda) + R_N(\lambda) =$$
$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \lambda^{-(k+\beta)/\alpha} + O(|\lambda|^{-(\beta+N+1)/\alpha}).$$

Из этого соотношения и определения 1.2.2 следует справедливость асимптотического разложения (1.10). Дифференцирование $\Phi(\lambda)$ по λ приводит к интегралу того же вида, откуда следует возможность почленного дифференцирования асимптотического ряда (1.10).

Лемма 1.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \in [0, a]$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, справедлива асимптотическая формула* (1.10′).

Пусть $0 < \delta < 1$. Тогда интеграл вида (1.7) по отрезку $[|\lambda|^{(\delta-1)/\alpha}, a]$ имеет порядок $O(\exp(-c|\lambda|^\delta))$ (все оценки пишутся при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$) в силу леммы 1.1. Поэтому достаточно доказать (1.10′) для интеграла по отрезку $[0, |\lambda|^{(\delta-1)/\alpha}]$. Этот интеграл представим в виде

$$f(0) \int_0^{|\lambda|^{(\delta-1)/\alpha}} x^{\beta-1} \exp(-\lambda x^\alpha)\, dx +$$
$$+ \int_0^{|\lambda|^{(\delta-1)/\alpha}} x^{\beta-1} (f(x) - f(0)) \exp(-\lambda x^\alpha)\, dx \equiv F_1(\lambda) + F_2(\lambda).$$

Имеем

$$F_1(\lambda) = \left(\int_0^\infty - \int_{|\lambda|^{(\delta-1)/\alpha}}^\infty \right) f(0)\, x^{\beta-1} \exp\left(-\lambda x^\alpha\right) dx =$$
$$= \alpha^{-1} f(0)\, \lambda^{-\beta/\alpha} + O\left(e^{-c|\lambda|^\delta}\right),$$

где $c > 0$. В силу непрерывности

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon(\lambda) \quad (0 \leqslant |x| \leqslant |\lambda|^{(\delta-1)/\alpha}),$$

где $\varepsilon(\lambda) = o(1)$. Следовательно,

$$|F_2(\lambda)| \leqslant \varepsilon(\lambda) \int_0^\infty x^{\beta-1} \left|\exp\left(-\lambda x^\alpha\right)\right| dx = o\left(\lambda^{-\beta/\alpha}\right).$$

Замечание 1.2. Функция $h(x) = \exp(-\lambda x^\alpha)$ достигает максимума при $x = 0$, и отношение $h(x)/h(0)$ есть величина порядка 1 в окрестности точки максимума размера $\approx |\lambda|^{-1/\alpha}$. Из доказательства леммы 1.3 следует, что основной вклад в интеграл $F(\lambda)$ вносит чуть бо́льшая окрестность точки максимума (мы выбрали ее в виде $[0, |\lambda|^{(\delta-1)/\alpha}]$).

Пример 1.1. Рассмотрим преобразование Лапласа

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-\lambda x} dx.$$

Пусть $f(x) \in C^\infty$ при малых $x \geqslant 0$ и интеграл сходится абсолютно при некотором $\lambda_0 > 0$. Тогда

$$F(\lambda) \sim \sum_{k=0}^\infty \lambda^{-k} f^{(k)}(0) \qquad (|\lambda| \to \infty, \ \lambda \in S_\varepsilon).$$

Действительно, интеграл по полуоси $x \geqslant 1$ имеет порядок $O(e^{-c|\lambda|})$, $c > 0$, а к интегралу по отрезку $[0, 1]$ применима лемма Ватсона.

Пример 1.2. Докажем, что при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \leqslant \pi - \varepsilon < \pi$ справедливо асимптотическое разложение

$$\ln \Gamma(z) \sim \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} z^{-2k+1}, \tag{1.12}$$

которое можно дифференцировать любое число раз.

Ряд (1.12) называют обычно *рядом Стирлинга*. Здесь B_{2k} — числа Бернулли, которые определяются из соотношения

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, \quad |t| < 2\pi. \quad (1.13)$$

При $\operatorname{Re} z > 0$ справедливо интегральное представление

$$\psi(z) \equiv \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \ln z + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right) e^{-tz} dt, \quad (1.14)$$

где для $\ln z$ выбрана главная ветвь.

Из примера 1.2 следует, что

$$\psi(z) \sim \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k} z^{-2k}$$

при $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$. Интегрируя это асимптотическое равенство, получаем

$$\ln \Gamma(z) \sim \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} z^{-2k+1}.$$

Постоянная C находится из сравнения этой формулы с формулой Стирлинга (см. пример 1.2), и мы получаем (1.12) при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$.

Чтобы доказать (1.12) при $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon < \pi$, необходимо предварительно аналитически продолжить правую часть формулы (1.14), так как интеграл в (1.14) расходится при $\operatorname{Re} z < 0$. Повернем контур интегрирования на острый угол α, $|\alpha| < \pi/2$, т. е. рассмотрим интеграл

$$\psi_\alpha(z) = \int_{l_\alpha} e^{-tz} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right) dt,$$

где l_α — луч $t = \rho e^{i\alpha}$, $0 \leqslant \rho < \infty$. Интеграл сходится абсолютно, когда z лежит в полуплоскости D_α: $\operatorname{Re}(ze^{i\alpha}) > 0$, и поэтому является голоморфной функцией z в этой полуплоскости. Если $z = x > 0$, то по теореме Коши $\psi_\alpha(x) = \psi(x)$; следовательно, $\psi_\alpha(z)$ является аналитическим продолжением функции $\psi(z)$ из полуплоскости

$\operatorname{Re} z > 0$ в полуплоскость D_α. В силу единственности аналитического продолжения имеем

$$\psi(z) = \ln z + F_\alpha(z), \quad z \in D_\alpha.$$

Положим $z = e^{-i\alpha}\zeta$, тогда

$$F_\alpha(z) = e^{i\alpha} \int_0^\infty e^{-t\zeta} \varphi\left(te^{i\alpha}\right) dt, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}.$$

По доказанному выше, этот интеграл разлагается в асимптотический ряд по степеням ζ^{-1} при $|\zeta| \to \infty$, $|\arg \zeta| \leqslant \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$, так что функция $\psi(z) - \ln z$ разлагается в асимптотический ряд по степеням z^{-1} при $|z| \to \infty$, $|\arg z + \alpha| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$. Это разложение имеет место, в частности, при вещественных $z \to +\infty$; с другой стороны, при таких z справедливо разложение (1.12). В силу единственности асимптотического разложения коэффициенты обоих разложений совпадают. Тем самым разложение (1.12) доказано при $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, $|\arg z + \alpha| \leqslant \leqslant \pi/2 - \varepsilon$. Так как α — произвольный угол такой, что $|\alpha| < \pi/2$, то (1.12) доказано при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \leqslant \pi - \varepsilon < \pi$.

4. Вклад от граничной точки максимума (основной случай). Рассмотрим интеграл Лапласа $F(\lambda)$ (см. 1.1)).

Теорема 1.1. *Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок и выполнены условия*:

1°. $\max\limits_{x \in I} S(x)$ *достигается только в точке $x = a$.*

2°. $f(x),\ S(x) \in C(I)$.

3°. $f(x),\ S(x) \in C^\infty$ *при x, близких к a, и $S'(a) \neq 0$.*

Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda) \sim \exp\left[\lambda S(a)\right] \sum_{k=0}^\infty c_k \lambda^{-k-1}. \tag{1.15}$$

Коэффициенты c_k имеют вид

$$c_k = -M^k\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\bigg|_{x=a}, \quad M = -\frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}. \tag{1.16}$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Выберем $\delta > 0$ такое, что $S'(x) \neq 0$ при $x \in [a, a+\delta]$, и положим $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$, где $F_1(\lambda)$ — интеграл по отрезку $[a, a+\delta]$. В силу леммы 1.1 интеграл $F_2(\lambda)$

экспоненциально мал по сравнению с $\exp[\lambda S(a)]$. Интегрируя по частям, получаем

$$F_1(\lambda) = \lambda^{-1} \int_a^{a+\delta} \frac{f(x)}{S'(x)}\, d\,[\exp(\lambda S(x))] =$$
$$= \frac{f(x)\exp[\lambda S(x)]}{\lambda S'(x)}\Big|_a^{a+\delta} - \frac{1}{\lambda}\int_a^{a+\delta} \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\exp[\lambda S(x)]\, dx.$$

Интегрируя точно так же по частям еще $N-1$ раз, получаем

$$F_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} (-\lambda)^{-k-1} M^k\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\exp(\lambda S(x))\,|_a^{a+\delta} -$$
$$- \lambda^{-N-1}\int_a^{a+\delta} \left[M^N\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\right]' \exp[\lambda S(x)]\, dx, \quad (1.17)$$

где M — оператор из (1.16), M^0 — единичный оператор. Внеинтегральная подстановка в (1.17) при $x=a$ дает N слагаемых ряда (1.15), а подстановка при $x=a+\delta$ экспоненциально мала по сравнению с $\exp[\lambda S(a)]$. Последний интеграл в (1.16) есть $O(\lambda^{-N-1}\exp[\lambda S(a)])$, т. е. по крайней мере того же порядка, что и последнее слагаемое в сумме в (1.17). Это очень грубая оценка, но ее достаточно:

$$F(\lambda) = \exp[\lambda S(a)]\left[\sum_{k=0}^{N-1} c_k\lambda^{-k-1} + O(\lambda^{-N})\right], \quad (1.17')$$

и (1.15) следует из того, что N произвольно.

Дифференцирование $F(\lambda)$ по λ приводит к интегралу того же вида. Возможность почленного дифференцирования ряда (1.15) вытекает также из теоремы 1.3.4 и следствия 1.1. Главный член асимптотики имеет вид (1.3).

Теорема 1.2. *Пусть условия* 1° *и* 2° *теоремы* 1.1 *выполнены и* $S(x)\in C^1$ *при* x, *близких к* a, $S'(a)\neq 0$. *Тогда при* $\lambda\to\infty$, $\lambda\in S_\varepsilon$, *справедлива формула* (1.3).

Пусть $\delta>0$ таково, что $S'(x)\neq 0$ при $x\in[a, a+\delta] = I_\delta$. Интеграл по оставшемуся участку мы отбросим, так как он имеет порядок $O(\exp(\lambda(S(a)-c)))$, $c>0$. Сделаем замену

$$S(x)-S(a) = -t, \quad x\in I_\delta,$$

тогда по теореме об обратной функции $x=\varphi(t)$, где $\varphi\in C^1[0, \delta']$ (очевидно, что $\delta'=S(a)-S(a, a+\delta)>0$). Применяя к полученному интегралу

$$\exp(\lambda S(a))\int_0^{\delta'}\exp(-\lambda t)f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

лемму 1.3, получаем (1.2).

Основной вклад в асимптотику $F(\lambda)$ вносит окрестность точки максимума $x=a$ размера $\approx\lambda^{-1}$ (см. замечание 1.2).

Замечание 1.3. В теоремах 1.1 и 1.2 и во всех последующих теоремах интервал (a, b) может быть бесконечным. Например, заключения теорем 1.1 и 1.2 верны для интеграла по полуоси $[a, \infty)$, если выполнено условие (1.5) и если $S(x)\leqslant S(a)-\delta$, $\delta>0$, вне некоторой окрестности точки $x=a$. Аналогично, интервал может быть конечным, но функции f, S могут иметь особенности при $x=b$.

Замечание 1.4. Чтобы получить конечное число членов ряда (1.15), достаточно потребовать конечной гладкости функций f и S. Например, формула (1.17') справедлива, если $S\in C^{N+1}(I)$, $f\in C^N(I)$. Это замечание относится к последующим теоремам и к лемме Ватсона. Отметим, что дифференциальные свойства функций f, S существенны только в окрестности точки максимума, т. е. асимптотика $F(\lambda)$ определяется ростками этих функций в точке $x=a$.

Пример 1.3. Еще Лаплас получил асимптотическое разложение для функции ошибок

$$\operatorname{Erfc} x=\int_x^\infty e^{-t^2}dt\sim\frac{e^{-x^2}}{2x}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^kx^{2k}}\quad(x\to+\infty).\tag{1.18}$$

Делая замену переменной $t\to\sqrt{x}t$, получаем

$$\operatorname{Erfc} x=x\int_1^\infty e^{-x^2t^2}\,dt.$$

В данном примере $f(t)\equiv1$, $S(t)=-t^2$, функция S достигает максимума только при $t=1$ и $S'(1)\neq0$. Применяя теорему 1.1, получаем (1.18). Ряд (1.18) расходится при всех x. Из теоремы 1.1 следует, что разложение (1.18) справедливо при $|x| \to \infty$, $|\arg x| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$.

Пример 1.4. Рассмотрим неполную гамма-функцию

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t}\, dt,$$

где $0 < a < \infty$, $x > 0$. Найдем асимптотику $\gamma(a, x)$ при $x \to +\infty$. Имеем

$$\gamma(a, x) = \Gamma(a) - \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(a) - x^a \int_1^\infty t^{a-1} e^{-tx}\, dt. \quad (1.19)$$

К последнему интегралу применим теорему 1.1. Так как

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k t^{a-1}\Big|_{t=1} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)},$$

то из (1.18), (1.19) получаем $(x \to +\infty)$

$$\gamma(a, x) - \Gamma(a) \sim e^{-x} x^{a-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)} x^{-k}. \quad (1.20)$$

Эта формула остается в силе и при целых $a \geqslant 1$, если положить $\Gamma(a)/\Gamma(a-k) = 0$ при $k \geqslant a+1$.

Пусть a — нецелое. Оценим остаточный член ряда (1.20). Интегрируя по частям последний интеграл в (1.19), получаем

$$R_N(x) \equiv \gamma(a, x) - \Gamma(a) - e^{-x} x^{a-1} \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)} x^{-k} = \\ = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-N)} \int_x^\infty t^{a-N-1} e^{-t}\, dt,$$

так что при $N \geqslant a$

$$|R_N(x)| \leqslant e^{-x} x^{a-N-1} \max_{t \geqslant 1} \left| \frac{\Gamma(a)\, t^{a-N-1}}{\Gamma(a-N)} \right| = e^{-x} x^{a-N-1} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-N)},$$

так что остаточный член меньше по величине, чем N-е слагаемое в (1.20). Если u_k есть k-й член ряда (1.20), то $|u_{k+1}/u_k| = |k+1-a|/|x|$, так что этот ряд расходится при любом x. Модули членов ряда вначале монотонно убывают, а затем при $k+1-a > x$ монотонно возрастают до бесконечности. Такое поведение характерно для большинства известных асимптотических рядов.

1.1. Пусть при $x \in [0, a]$ имеем $f(x)$, $S(x) \in C^\infty$, $S(x) > 0$, $S'(0) \neq 0$, $a > 0$ и функция $S(x)$ достигает максимума только в точке $x = 0$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda) = \int_0^a f(x) S^\lambda(x)\, dx \sim [S(0)]^{\lambda+1} \sum_{n=0}^\infty a_n \lambda^{-n-1}.$$

Главный член асимптотики равен

$$F(\lambda) = \frac{[S(0)]^{\lambda+1}}{\lambda S'(0)} [-f(0) + O(\lambda^{-1})].$$

5. Вклад от внутренней невырожденной точки максимума.

Лемма 1.4. *Пусть $S(x) \in C^\infty$ в окрестности точки x_0,*

$$S'(x_0) = \ldots = S^{(N-1)}(x_0) = 0, \quad S^{(N)}(x_0) \neq 0, \quad (1.21)$$

и $S(x)$ — вещественнозначная функция. Тогда существуют отрезки $I_x = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2]$, $I_y = [-\delta_0, \delta_0]$ $(\delta_j > 0)$ и функция $x = \varphi(y)$ такие, что:

$$1^\circ. \quad S(\varphi(y)) = S(x_0) + \varepsilon y^N, \quad y \in I_y, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} S^{(N)}(x_0). \quad (1.22)$$

2°. *Функция $\varphi(y) \in C^\infty(I_y)$ взаимно однозначно отображает отрезок I_y на отрезок I_x и*

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \left(\frac{N!}{|S^{(N)}(x_0)|}\right)^{1/N}. \quad (1.23)$$

Замечание 1.5. Можно показать, что если $S \in C^{N+r}$ при x, близких к x_0, $r \geqslant 1$, то $\varphi \in C^r$ при малых y.

Все дальнейшие результаты настоящего параграфа мы получим, комбинируя лемму Ватсона и лемму 1.4.

Теорема 1.3. *Пусть $I = [a, b]$ — конечный отрезок и выполнены условия*:

1°. $f(x), S(x) \in C(I)$.

2°. $\max\limits_{x \in I} S(x)$ *достигается только в точке x_0, $a < x_0 < b$*;

3°. $f(x)$, $S(x) \in C^\infty$ *при x, близких к x_0, и $S''(x_0) \neq 0$.*

Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(x_0)] \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-k-1/2}, \tag{1.24}$$

$$c_k = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[f(x) \left(\frac{2(S(x_0)-S(x))}{(x-x_0)^2} \right)^{-k-1/2} \right] \Bigg|_{x=x_0}. \tag{1.25}$$

Главный член асимптотики (1.24) *имеет вид* (1.2).

Это разложение можно дифференцировать любое число раз.

В окрестности точки x_0 сделаем замену переменной

$$S(x) - S(x_0) = -y^2, \quad x = \varphi(y)$$

и выберем окрестность такой, чтобы $-\delta \leqslant y \leqslant \delta$. Интеграл по оставшейся части отрезка I экспоненциально мал по сравнению с $\exp[\lambda S(x_0)]$, и мы его отбросим. Имеем

$$F(\lambda) = \exp[\lambda S(x_0)] \int_{-\delta}^{\delta} \exp(-\lambda y^2) f(\varphi(y)) \varphi'(y)\, dy =$$

$$= \exp[\lambda S(x_0)] \int_{0}^{\delta} \exp(-\lambda y^2) [f(\varphi(y)) \varphi'(y) +$$

$$+ f(\varphi(-y)) \varphi'(-y)]\, dy. \tag{1.26}$$

Применяя лемму Ватсона (1.2), получаем, что при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(x_0)] \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) (2k)!\, a_{2k} \lambda^{-k-1/2},$$

$$a_{2k} = \left(\frac{d}{dy}\right)^{2k} (f(\varphi(y)) \varphi'(y))\big|_{y=0}.$$

Тем самым существование разложения (1.24) доказано. Возможность почленного дифференцирования ряда (1.24) доказывается так же, как и в теореме 1.2.

Докажем (1.25). Нам достаточно рассмотреть случай, когда функции $f(x)$, $S(x)$ голоморфны в точке x_0, так как a_{2k} выражаются только через производные функций f, S в точке x_0. По формуле Коши (здесь x, y — комплексные переменные) имеем при $\varepsilon > 0$ достаточно малом

$$a_{2k} = \frac{(2k)!}{2\pi i} \int\limits_{|y|=\varepsilon} y^{-2k-1} f(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy =$$
$$= \frac{(2k)!}{2\pi i} \int\limits_{|x-x_0|=\delta} f(x) \left[\frac{S(x_0) - S(x)}{(x-x_0)^2} \right]^{-k-1/2} (x-x_0)^{-2k-1} dx =$$
$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{2k} \left[f(x) \left(\frac{S(x_0) - S(x)}{(x-x_0)^2} \right)^{-k-1/2} \right] \Bigg|_{x=x_0}.$$

Коэффициенты a_{2k} можно явно выразить через производные функций $f(x)$, $S(x)$ в точке x_0, если воспользоваться формулой дифференцирования сложной функции ([14], с. 33)

$$\frac{d^n f(\varphi(x))}{dx^n} = \sum \frac{n!}{i_1! i_2! \ldots i_k!} \left(\frac{\varphi'(x)}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\varphi''(x)}{2!}\right)^{i_2} \ldots$$
$$\ldots \left(\frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}\right)^{i_k} \left(\frac{d}{dy}\right)^{i_1+\ldots+i_k} f(y) \Big|_{y=\varphi(x)}. \quad (1.27)$$

Здесь сумма берется по всем целым неотрицательным значениям $i_1, \ldots, i_k$ таким, что $1 \cdot i_1 + 2 \cdot i_2 + \ldots + k \cdot i_k = n$.

Еще один прием, позволяющий вычислить a_{2k}, заключается в следующем. Разложим функцию

$$f(x) \exp\left[\lambda \left(S(x) - S(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2} S''(x_0)\right) \right]$$

в ряд Тейлора и заменим пределы интегрирования на $\pm\infty$ соответственно. Тогда получим формальное разложение

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(x_0)] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \exp\left[\frac{\lambda S''(x_0)\, x^2}{2}\right] dx,$$
$$b_k = \left(\frac{d}{dx}\right)^k \Bigg(f(x) \exp\Bigg[\lambda \Big(S(x) - S(x_0) -$$
$$- \frac{(x-x_0)^2}{2} S''(x_0)\Big)\Bigg]\Bigg)\Bigg|_{x=x_0}.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(x_0)] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k}(\lambda)}{(2k)!} \left[- \frac{\lambda S''(x_0)}{2}\right]^{-k-1/2} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Приведем формулы для первых коэффициентов разложения (1.24). Имеем [82]

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left[a_0 + \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right],$$

$$a_1 = \frac{1}{4} \left(f_2 \psi_1^3 + 3 f_1 \psi_1 \psi_2 + f_0 \psi_3 \right),$$

$$a_2 = \frac{1}{32} \left(f_4 \psi_1^5 + 10 f_3 \psi_1^3 \psi_2 + 10 f_2 \psi_1^2 \psi_3 + \right.$$
$$\left. + 15 f_2 \psi_2^2 \psi_1 + 5 f_1 \psi_4 \psi_1 + 10 f_1 \psi_3 \psi_2 + f_0 \psi_5 \right),$$

$$\psi_1 = \sqrt{2/-S_2}, \quad \psi_2 = -\frac{1}{3} S_3 S_2^{-1} \psi_1^2,$$

$$\psi_3 = \left(-\frac{1}{4} S_4 S_2^{-1} + \frac{5}{12} S_3^2 S_2^{-2} \right) \psi_1^3,$$

$$\psi_4 = \left(-\frac{1}{5} S_5 S_2^{-1} + S_4 S_3 S_2^{-2} - \frac{8}{9} S_3^3 S_2^{-2} \right) \psi_1^4,$$

$$\psi_5 = \left(-\frac{1}{6} S_6 S_2^{-1} + \frac{7}{6} S_5 S_3 S_2^{-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{35}{48} S_4^2 S_2^{-2} + \frac{385}{144} S_3^4 S_2^{-4} - \frac{35}{8} S_4 S_3^2 S_2^{-3} \right) \psi_1^5.$$

Здесь $S_j = S^{(j)}(x_0)$, $f_j = f^{(j)}(x_0)$. Если $f(x) \equiv 1$, то

$$a_0 = \psi_1, \quad a_1 = \psi_3/4, \quad a_2 = \psi_5/32.$$

Точно так же доказывается

Теорема 1.4. *Пусть все условия теоремы 1.3 выполнены, за исключением одного:* $x_0 = a$. *Тогда при* $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(a)] \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-(k+1)/2}. \qquad (1.28)$$

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}} \left[f(a) + o(1) \right] \exp[\lambda S(a)] \quad (1.28')$$

(т. е. правая часть (1.28′) отличается от правой части формулы (1.2) множителем 1/2).

Теорема 1.5. *Пусть условия 1° и 2° теоремы 1.3 выполнены и*

3′. $f(x) \in C$, $S(x) \in C^2$ *при* x, *близких к* x_0, $S''(x_0) \neq 0$.
Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, *справедлива формула* (1.2).

С помощью той же замены переменной, что и в доказательстве теоремы 1.3, приводим $F(\lambda)$ к виду (1.26). Затем применяем замечание 1.5 и лемму 1.3.

Приведем оценку остаточного члена в методе Лапласа [32], [130]. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^a e^{-\lambda S(x)} f(x)\, dx, \quad a > 0,$$

где $S(0) = S'(0) = 0$, и $S'(x) > 0$ при $0 < x < b$, так что $x = 0$ — точка максимума функции $-S(x)$. Функция $f(x) \in C[0,\ a]$, и при $x \to +0$ справедливы асимптотические разложения

$$S(x) \sim S_2 x^2 + S_3 x^3 + \ldots, \quad f(x) \sim f_0 + f_1 x + \ldots$$

Делая замену переменной $p = S(x)$, получаем

$$F(\lambda) = \int_0^{S(a)} e^{-\lambda p} f(p)\, p^{-1/2} dp,$$

$$f(p) = S^{1/2}(x) f(x)/S'(x),$$

и при $p \to +0$ справедливо асимптотическое разложение

$$f(p) \sim a_0 + a_1 p^{1/2} + a_2 p + \ldots, \quad a_0 = f_0/(2\sqrt{S_0}).$$

Имеем

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k \Gamma((k+1)/2)}{\lambda^{(k+1)/2}} + R_n(\lambda),$$

где $R_n(\lambda) = O(\lambda^{-(n+1)/2})$. Приведем более точные оценки. Положим

$$f(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^{k/2} + f_n(p)$$

и запишем остаточный член в виде

$$R_n(\lambda) = R_n^{(2)}(\lambda) - R_n^{(1)}(\lambda),$$

$$R_n^{(1)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{S(a)}^{\infty} e^{-\lambda p} p^{(k-1)/2} dp,$$

$$R_n^{(2)}(\lambda) = \int_0^{S(a)} e^{-\lambda p} f_n(p)\, p^{-1/2} dp.$$

Если $S(a)=+\infty$, то $R_n^{(1)}(\lambda)=0$. Справедливы оценки

$$|R_1^{(1)}(\lambda)|\leqslant\frac{|a_0|\,e^{-\lambda S(a)}}{\lambda\sqrt{S(a)}},$$

$$|R_n^{(1)}(\lambda)|\leqslant\frac{e^{-\lambda S(a)}}{\lambda-[(n/2-1)/S(a)]}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\,|S(a)|^{(k-1)/2},\quad n\geqslant 2,$$

если знаменатели положительны.

Грубая оценка для $R_n^{(2)}(\lambda)$ имеет вид

$$|R_n^{(2)}(\lambda)|\leqslant A_n\Gamma((n+1)/2)\,\lambda^{-(n+1)/2},$$
$$A_n=\sup_{0<p<S(a)}|p^{-n/2}f_n(p)|.$$

Однако A_n может обратиться в бесконечность, если $S(a)=+\infty$. Более точные оценки таковы. Пусть

$$\varphi_n=\sup_{0<p<S(a)}\left[p^{-1/2}\ln|f_n(p)\,a_n^{-1}p^{-n/2}|\right].$$

Если $\varphi_n\leqslant 0$, то

$$|R_n^{(2)}(\lambda)|\leqslant|a_n|\,\Gamma((n+1)/2)\,\lambda^{-(n+1)/2}.$$

Если $\varphi_n>0$, то

$$|R_n^{(2)}(\lambda)|\leqslant$$
$$\leqslant\lambda^{-(n+1)/2}|a_n|\,\Gamma((n+1)/2)\exp\left(\varphi_n^2/(4\lambda)+\frac{\varphi_n}{2}\sqrt{\frac{\pi n}{\lambda}}\right),\ n\geqslant 1.$$

В [32] приведены также оценки остаточного члона в лемме Ватсона.

1.2. Пусть $[a,\ b]$ — конечный отрезок, $S(x)>0$, $f(x)$, $S(x)\in C^\infty$, функция $S(x)$ достигает наибольшего значения только в точке x_0 и $S''(x_0)\neq 0$. Тогда при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x)\,[S(x)]^\lambda dx\sim\varepsilon f(x_0)\sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\,[S(x_0)]^{\lambda+1/2}. \tag{1.29}$$

Здесь $\varepsilon=1$, если $a<x_0<b$, и $\varepsilon=1/2$, если $x_0=a$ или $x_0=b$.

Пример 1.5. Докажем формулу Стирлинга

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\,e^{-x}x^x[1+O(x^{-1})]\quad(x\to+\infty).\tag{1.30}$$

Воспользуемся интегральным представлением Г-функции:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt.$$

Метод Лапласа непосредственно неприменим к этому интегралу, так как функция t^x не имеет максимума при $t\in[0,+\infty)$. Преобразуем интеграл, делая замену $t\to xt$, тогда

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}\int_0^\infty \exp[x(\ln t-t)]\,dt.$$

Последний интеграл имеет вид (1.1), где $f(t)=1$, $S(t)=\ln t-t$. Функция $S(t)$ достигает максимума на $(0,+\infty)$ только в точке $t=1$, причем $S(1)=-1$, $S''(1)=-1$. В силу леммы 1.1 можно заменить интегрирование по полуоси интегрированием по любому конечному отрезку, содержащему внутри себя точку $t=1$. Применяя теорему 1.3, получаем (1.30). Так как $\Gamma(n+1)=n!$, то из (1.30) следует формула Стирлинга

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}n^n\quad(n\to+\infty).$$

Формула (1.30) пригодна и при $x\to\infty$, $x\in S_\varepsilon$. Из теоремы 1.3 следует, что

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\,e^{-x}x^x\left(1+\sum_{k=1}^\infty a_k x^{-k}\right).\qquad(1.31)$$

Явный вид a_k см., например, в [41].

Пример 1.6. Покажем, что при $n\to+\infty$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,[1+O(n^{-1})].$$

Имеем $\sin^n t=\exp(n\ln\sin t)$, так что интеграл имеет вид (1.1), где $x=n$, $S(t)=\ln\sin t$, $f(t)=1$. Функция $S(t)$ достигает максимума при $t=\pi/2$, причем $S(\pi/2)=S'(\pi/2)=0$, $S''(\pi/2)=-1$, и асимптотика вычисляется по формуле (1.28′).

Замечание. Известно, что

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

Сравнивая с асимптотической формулой, получаем формулу Валлиса:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

Пример 1.7. Найдем асимптотику при $x \to +\infty$ функции Бесселя

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta,$$

где $n \geqslant 0$ — целое. Здесь $f = \cos n\theta$, $S = \cos\theta$ и $\max\limits_{[0,\pi]} S(0) = S(0) = 1$, $S'(0) = 0$, $S''(0) = -1$. Применяя теорему 1.3, получаем

$$I_n(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + O(x^{-1/2})\right] \quad \left(x \to \infty,\ |\arg x| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right),$$

где $\sqrt{x} > 0$ $(x > 0)$. Аналогично получаем, что

$$I_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-x}}{\sqrt{-2\pi x}}\left[1 + O(x^{-1/2})\right]$$

$$\left(x \to \infty,\ |\arg(-x)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right),$$

где $\sqrt{-x} > 0$ при $x < 0$.

Пример 1.8. Найдем асимптотику при $n \to +\infty$, $x > 1$ полинома Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^n d\theta,$$

где $\sqrt{x^2-1} > 0$. Воспользуемся результатом задачи 1.2. В данном случае $S(\theta) = x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta$, $f = 1$, функция S достигает максимума при $\theta = 0$ и

$$S(0) = x + \sqrt{x^2-1}, \quad S'(0) = 0, \quad S''(0) = -\sqrt{x^2-1}.$$

Отсюда находим, что

$$P_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi n}\sqrt[4]{x^2-1}}\left[1 + O(n^{-1/2})\right].$$

1.3. $\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx \sim \sqrt{\pi/n} \quad (n\to+\infty)$.

1.4. Если $0<\alpha<1$, то

$$\int\limits_0^\infty \exp\left(-t^\alpha/\alpha - xt\right)dt \sim$$
$$\sim \sqrt{\frac{2\pi}{1-\alpha}}\, x^{-\alpha/2(1-\alpha)-1}\exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}x^{-\alpha/(1-\alpha)}\right) \qquad (x\to\infty).$$

1.5. Если $\alpha>0$, то

$$\int\limits_0^\infty t^{-\alpha t}t^x\,dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e^\alpha}}\,x^{1/(2\alpha)}\exp\left(\frac{\alpha}{e}x^{1/\alpha}\right) \quad (x\to\infty).$$

Пример 1.9. Покажем, что при $n\to+\infty$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k!\,n^{-k} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}\left[1+O(n^{-1})\right].$$

Воспользуемся тождеством

$$k!\,n^{-k} = \int\limits_0^\infty e^{-nt}t^k\,dt,$$

тогда сумма примет вид

$$\int\limits_0^\infty (1+t)^n e^{-nt}\,dt.$$

В данном случае $f(t)\equiv 1$, $S(t)=-t+\ln(1+t)$; остается применить теорему 1.3.

1.6 [5]. При $0<\lambda<1$, $n\to+\infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k k!\,n^{-k}\lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda^2}{n(1-\lambda)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6. Вклад от точки максимума (общий случай).

Теорема 1.6. *Пусть $I=[a,b]$ — конечный отрезок, $f(x)$, $S(x)\in C(I)$ и $\max\limits_{x\in I} S(x)$ достигается только в одной точке x_0. Пусть $f(x)$, $S(x)\in C^\infty$ при x, близких к x_0. Тогда:*

1°. *Если* $a < x_0 < b$ *и*

$$S^{(j)}(x_0) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2m-1, \quad S^{(2m)}(x_0) \neq 0, \tag{1.32}$$

где $m \geqslant 1$, *то при* $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda) \sim \lambda^{-1/2m} \exp[\lambda S(x_0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k/m}, \tag{1.33}$$

$$a_k = -2\frac{(2m)^{2k}}{(2k)!}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right)\left(h(x, x_0)\frac{d}{dx}\right)^{2k}(f(x)\,h(x, x_0))\big|_{x=x_0}, \tag{1.34}$$

$$h(x, x_0) = (S(x_0) - S(x))^{1-1/2m}/S'(x).$$

2°. *Пусть* $x_0 = a$ *и*

$$S'(a) = \ldots = S^{(m-1)}(a) = 0, \quad S^{(m)}(a) \neq 0, \tag{1.35}$$

тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda) \sim \lambda^{-1/m} \exp[\lambda S(a)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k/m}, \tag{1.36}$$

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1} m^k}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right)\left(h(x, a)\frac{d}{dx}\right)^{k}(f(x)\,h(x, a))\big|_{x=a}, \tag{1.37}$$

$$h(x, a) = (S(x) - S(a))^{1-1/m}/S'(x).$$

Главный член асимптотики в случаях 1°, 2° *соответственно имеет вид (при* $f(x_0) \neq 0$)

$$F(\lambda) = m^{-1}\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\left[-\frac{(2m)!}{S^{(2m)}(x_0)}\right]^{1/2m} \times \\ \times \lambda^{-1/2m}\exp[\lambda S(x_0)]\left[f(x_0) + O\left(\lambda^{-1/2m}\right)\right],$$

$$F(\lambda) = m^{-1}\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\left[-\frac{m!}{S^{(m)}(a)}\right]^{1/m} \times \\ \times \lambda^{-1/m}\exp[\lambda S(a)]\left[f(a) + O\left(\lambda^{-1/m}\right)\right].$$

Эти разложения можно дифференцировать по λ *любое число раз.*

В случае 1° основной вклад в асимптотику $F(\lambda)$ дает малая окрестность точки x_0. Делая в этой окрестности замену переменной $x = \varphi(y)$ такую, что

$$S(\varphi(y)) - S(x_0) = -y^{2m}$$

(см. лемму 1.3), получаем эталонный интеграл вида (1.7). Точно так же исследуется случай 2°.

Замечание 1.6. Если функция $S(x)$ имеет конечное число точек максимума $x_1, \ldots, x_k$ на отрезке I, то асимптотика $F(\lambda)$ равна сумме вкладов от этих точек. Именно, в силу леммы 1.1

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} F(\lambda; x_j) + O(\exp(\lambda(M-c)))$$

$$(\lambda \to \infty, \quad \lambda \in S_\varepsilon).$$

Здесь $c > 0$, $M = \max\limits_{x \in I} S(x)$ и

$$F(\lambda; x_j) = \int\limits_{U(x_j)} f(x) \exp[\lambda S(x)]\, dx,$$

где $U(x_j)$ — достаточно малая окрестность точки x_j. Однако вклады от точек максимума могут, вообще говоря, сокращаться. Например, пусть $S(x)$ — полином степени $\geqslant 2$, $S(\pm\infty) = -\infty$. Тогда асимптотика интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S'(x) \exp[\lambda S(x)]\, dx$$

равна сумме вкладов от точек максимума полинома $S(x)$, но $F(\lambda) \equiv 0$ при $\lambda > 0$.

Приведем аналог леммы Ватсона в случае, когда $f(x)$ имеет логарифмическую особенность.

Теорема 1.7. *Пусть γ вещественно, $\beta > 0$, функция $f(x) \in C^1$ при малых $x \geqslant 0$ и непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant a < \infty$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, справедливо асимптотическое разложение*

$$\int\limits_0^a x^{\beta-1} |\ln x|^\gamma e^{-\lambda x} f(x)\, dx \sim \lambda^{-\beta} (\ln \lambda)^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\ln \lambda)^{-k},$$

$$a_0 = \Gamma(\beta) f(0). \tag{1.38}$$

Так как функция $S(x) = -x$ достигает максимума при $x = 0$, то можно считать, что $a < 1$; отброшенный интеграл экспоненциально мал. Положим $f(x) = f(0) + h(x)$;

так как $h(x)=O(x)$ $(x\in[0, a])$, то при $\lambda\in S_\varepsilon$

$$\left|\int_0^a x^{\beta-1}h(x)\left|\ln\frac{1}{x}\right|^{\gamma}e^{-\lambda x}dx\right|\leqslant C_\delta\int_0^a x^{\beta+\delta}e^{-x\operatorname{Re}\lambda}dx\leqslant \leqslant C'_\delta|\lambda|^{\beta-1+\delta}.$$

Мы воспользовались тем, что $\ln x=O(x^{-\delta})$ $(x\to+0)$ при любом сколь угодно малом $\delta>0$. Следовательно, рассмотренный интеграл по порядку меньше любого из членов ряда (1.38); остается исследовать интеграл (1.38) при $f(x)\equiv 1$, обозначим его $\Phi(\lambda)$. Сделаем замену переменной $\lambda x\to x$; тогда

$$\Phi(\lambda)=\lambda^{-\beta}(\ln\lambda)^{\gamma}\int_0^{a\lambda}x^{\beta}\left(1-\frac{\ln x}{\ln\lambda}\right)^{\gamma}e^{-x}dx.$$

Воспользуемся следующим соотношением: если $z\notin$ $\notin(-\infty, -1+\delta]$, $N>\gamma$ (γ вещественно), то

$$(1+z)^{\gamma}=\sum_{k=0}^{N}\binom{\gamma}{k}z^k+R_N(z),$$

где остаточный член допускает оценку

$$\begin{aligned}&R_N(z)=O(|z|^{N+1}) \quad (|z|\leqslant 1/2),\\ &R_N(z)=O(|z|^{N}) \quad (|z|\geqslant 1/2).\end{aligned}\tag{1.39}$$

Здесь для функции $(1+z)^{\gamma}$ выбрана главная ветвь в плоскости z с разрезом по лучу $(-\infty, -1)$. Первая оценка для $R_N(z)$ следует из аналитичности функции $(1+z)^{\gamma}$ в круге $|z|\leqslant 1/2$; вторая — из того, что $R_N(z)\sim-\binom{\gamma}{N}z^N$ при $|z|\to\infty$. Следовательно,

$$\Phi(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k\binom{\gamma}{k}}{(\ln\lambda)^k}\int_0^{a\lambda}x^{\beta-1}(\ln x)^k e^{-x}dx+\Phi_N(\lambda).\tag{1.40}$$

Для остаточного члена в силу (1.39) справедлива оценка

$$|\Phi_N(\lambda)|\leqslant C\left|\int_0^{a\lambda}\left[\left|\frac{\ln x}{\ln\lambda}\right|^{N}+\left|\frac{\ln x}{\ln\lambda}\right|^{N+1}\right]x^{\beta-1}e^{-x}dx\right|\leqslant C'|\ln\lambda|^{-N},$$

поскольку, совершив экспоненциально малую ошибку, можно заменить верхний предел интегрирования на $\infty \exp(i \arg \lambda)$; полученный интеграл сходится абсолютно. Заменяя точно так же верхний предел интегрирования в (1.40), получаем

$$\Phi(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} b_k (\ln \lambda)^{-k} + O\left((\ln \lambda)^{-N}\right),$$

так что коэффициенты разложения (1.38) имеют вид

$$a_k = (-1)^k \binom{\gamma}{k} f(0) \int_0^\infty x^{\beta-1} (\ln x)^k e^{-x} dx = \\ = (-1)^k \binom{\gamma}{k} f(0) \left(\frac{d}{d\beta}\right)^k \Gamma(\beta). \quad (1.41)$$

Рассмотрим примеры, в которых одна из функций $f(x)$, $S(x)$ имеет нуль бесконечного порядка в точке максимума функции S.

Пример 1.10. Найдем асимптотику при $\lambda \to +\infty$ интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{x} - \lambda x\right) dx.$$

Этот интеграл имеет вид (1.1), где $S(x) = x$, $f(x) = e^{-1/x}$. Максимум $S(x)$ достигается при $x = 0$, а функция $f(x)$ обращается в нуль при $x = 0$ вместе со всеми производными, и применение теоремы 1.3 дает только оценку $F(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ $(\lambda \to +\infty)$. Чтобы получить более точную оценку, заметим, что функция $-\lambda x - x^{-1}$ достигает максимума при $x = \lambda^{-1/2}$. Сделаем замену переменной $x = t\lambda^{-1/2}$, тогда

$$F(\lambda) = \lambda^{-1/2} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \exp\left[-\sqrt{\lambda}\,(t + t^{-1})\right] dt.$$

Функция $S(t) = -t - t^{-1}$ достигает максимума при $t = 1$, причем $S(1) = -2$, $S''(1) = -2$. Применяя теорему 1.3, получаем

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\pi}\, \lambda^{-3/4} e^{-2\sqrt{\lambda}} \quad (\lambda \to +\infty).$$

1.7. При $\alpha > 0$, $x \to +\infty$

$$\int_0^\infty \exp(-xt-\alpha t^{-\alpha})dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha+1}}\, x^{-\frac{\alpha+2}{2(\alpha+1)}} \exp[-(1+\alpha)x^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}].$$

Пример 1.11. Вычислим асимптотику при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, интеграла

$$F(\lambda) = \int_0^a f(x) \exp\left[-\lambda e^{-1/x^\alpha}\right] dx.$$

Здесь $0 < a < \infty$, $f(x) \in C^\infty([0, a])$ и $\alpha > 0$. Все производные функции $S(x) = \exp(-x^{-\alpha})$ обращаются в нуль при $x = 0$.

Делая замену переменной $t = \exp(-x^{-\alpha})$ и вводя обозначение $\xi = -\ln t$, получаем

$$F(\lambda) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^b e^{-\lambda t} f\left(\xi^{-1/\alpha}\right) \xi^{-1/\alpha - 1} d\xi,$$

где $0 < b < 1$. По формуле Тейлора

$$f\left(\xi^{-1/\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \xi^{-k/\alpha} + O\left(\xi^{-(N+1)/\alpha}\right)$$

при $t \in [0, b]$. Далее,

$$F_k(\lambda) \equiv \int_0^b e^{-\lambda t} \xi^{-(k+1)/\alpha - 1} d\xi =$$
$$= -\frac{\alpha\lambda}{k+1} \int_0^b e^{-\lambda t} (-\ln t)^{-(k+1)/\alpha} dt + O(e^{-\lambda b}) \sim$$
$$\sim (\ln \lambda)^{-(k+1)/\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mk} (\ln \lambda)^{-m},$$

что следует из теоремы 1.7.

Остаточный член имеет порядок $O((\ln \lambda)^{-(N+2)/\alpha})$, так что

$$F(\lambda) \sim (\ln \lambda)^{-1/\alpha} \left[f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\ln \lambda)^{-k} \right].$$

Главный член разложения имеет вид $F(\lambda) \sim f(0)(\ln \lambda)^{-1/\alpha}$.

Пример 1.12. Вычислим асимптотику при $n \to +\infty$ интеграла

$$I_n = \int\limits_0^\infty t^{-2}\Phi^n dt, \quad \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-u^2} du.$$

Функция $\Phi(t)$ строго монотонна, возрастает от 0 до 1 на полуоси $t \geqslant 0$, так что эта функция достигает наибольшего значения при $t = +\infty$. Кроме того, $\Phi^{(k)}(+\infty) = 0$ при всех $k \geqslant 1$, так что ситуация та же, что и в примере 1.11, с той лишь разницей, что точкой максимума является точка $t = +\infty$. Делая замену $t = \tau^{-1}$, получаем

$$I_n = \int\limits_0^\infty \Phi^n(\tau^{-1})\, d\tau.$$

Теперь подынтегральная функция достигает максимума при $\tau = 0$. Интеграл по полуоси $\delta \leqslant \tau < \infty$, $\delta > 0$, по лемме 1.1 имеет порядок $O(\Phi^n(\delta^{-1}))$, т. е. экспоненциально мал. На отрезке $[0, \delta]$, где $\delta > 0$ достаточно мало, сделаем замену переменной $\ln \Phi(\tau^{-1}) = x$, тогда

$$I_n = \int\limits_0^{\delta'} e^{-nx} f(x)\, dx, \quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}\, \tau^2 e^{-x}}{2e^{-\tau^{-2}}},$$

так что при $\tau \to +0$

$$\ln \Phi(\tau^{-2}) \sim \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} e^{-1/\tau^2}$$

(см. пример 1.2), и $\tau \sim (-\ln x)^{-1/2}$, а потому

$$f(x) \sim \frac{e^{-x}}{2x}(-\ln x)^{-3/2} \quad (x \to +\infty).$$

Из предыдущего примера следует, что

$$I_n \sim \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \quad (n \to +\infty).$$

Более точно, $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\ln n}} + O\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$.

Приведем еще несколько известных асимптотических разложений [30]. Здесь $x \to +\infty$.

$$1.8.\ \int\limits_0^\infty e^{-x \operatorname{sh} t} dt \sim \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{((2n-1)!!)^2}{x^{2n+1}}.$$

$$1.9.\ \int_1^\infty \frac{dt}{t^2(x+\ln t)^{1/3}} \sim x^{-1/3} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(3x)^n}.$$

При $x > 0$ остаточный член меньше первого отбрасываемого члена и имеет тот же знак.

$$1.10.\ \int_0^\infty \exp\left[-xt + (1+t)^{1/2}\right] dt = \frac{e}{x}\left[1+\delta(x)\right],$$

$$0 < \delta(x) \leqslant [2(x-\sigma)]^{-1}, \quad x > \sigma,$$

$$\sigma = \sup_{t>0}\left[t^{-1}\left((1+t)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2}\ln(1+t)\right)\right].$$

$$1.11.\ \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} t} dt \sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \sum_{n=0}^\infty \frac{((2n-1)!!)^2}{n!\,(8x)^n}.$$

$$1.12.\ \int_0^\infty \exp\left(-t + xt^\alpha\right) t^{\beta-1} dt \sim$$

$$\sim \left(\frac{2\pi}{1-\alpha}\right)^{1/2} (\alpha x)^{(2\beta-1)/(2-2\alpha)} \exp\left[(1-\alpha)\left(\alpha^\alpha x\right)^{1/(1-\alpha)}\right],$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

$$1.13.\ \int_0^{\pi^2/4} e^{x\cos\sqrt{t}} dt \sim e^x\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{3x^2} + \frac{8}{15x^3} + \ldots\right).$$

$$1.14.\ \int_0^\infty \frac{\varepsilon^t - 1}{\Gamma(t)} dt \sim \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{f^{(n+1)}(0)}{(\ln \varepsilon)^{n+2}},$$

где $\varepsilon \to +0$, $f(x) = 1/\Gamma(x)$.

$$\int_a^\infty \frac{x^{t-1}}{\Gamma(x)} dx \sim e^t \qquad (a>0,\ \ t \to +\infty).$$

$$1.15.\ \int_{-\infty}^\infty e^{-xt^2} \ln(1+t+t^2)\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{1}{x^{3/2}} + \frac{3}{4x^{5/2}} - \frac{5}{2x^{7/2}} + \varepsilon(x)\right),$$

$$0 < \varepsilon(x) < \frac{105}{32\,(x-4/5)^{9/2}}, \quad x > 4/5.$$

6 М. В. Федорюк

1.16. Пусть сходятся все интегралы $M_n = \int\limits_0^\infty t^n f(t)\,dt$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (моменты функции f). Тогда для преобразования Стилтьеса функции f справедливо асимптотическое разложение ($x \to +\infty$)

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t+x}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k M_k x^{-k-1} + R_n(x),$$

$$|R_n(x)| \leqslant x^{-n-1} \sup_{t>0} \left| \int\limits_0^t \tau^n f(\tau)\,d\tau \right|.$$

1.17. Пусть $I = \int\limits_0^\varepsilon e^{-\alpha t^{-a}} t^\mu e^{-\beta(\varepsilon - t)^{-b}} (1-t)^\nu\,dt$, где α, β, a, $b > 0$, μ, ν — комплексные числа. Тогда при $a = b$, $\varepsilon \to +0$ имеем

$$I \sim \sqrt{\frac{2\pi\gamma^{2\nu+1}}{\alpha a(a+1)(1+\gamma)^{2\mu+2\nu+a+3}}}\, \varepsilon^{\mu+\nu+1+a/2} \times$$
$$\times \exp\left[-\alpha(1+\gamma)^{a+1}\varepsilon^{-a}\right],$$

где $\gamma = (\beta/\alpha)^{1/(a+1)}$. Если $a > b$, то

$$I \sim \sqrt{\frac{2\pi\gamma^{2\nu+1}}{\alpha a(b+1)}}\, \varepsilon^{\mu+c\nu+\frac{a+c+1}{2}} \exp\left[-\alpha x^{-a}\left(1+\frac{\gamma a}{b}\right) x^{c-1}\right],$$

где $c = (a+1)/(b+1)$, $\gamma = (\beta b/(\alpha a))^{1/(b+1)}$.

7. Асимптотика преобразований Лапласа и Меллина. Лемма Ватсона допускает следующие обобщения. Для справедливости формулы (1.10) достаточно, чтобы интеграл (1.7) сходился, а функция $f(x)$ разлагалась в асимптотический ряд вида $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^\infty a_n x^n$, $x \to +0$. Следующее обобщение таково. Пусть $0 < \operatorname{Re}\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \ldots$, $\operatorname{Re}\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^\infty f_k(x)\,[x^{\lambda_k - 1}] \qquad (x \to +0), \tag{1.42}$$

(см. в (1.2.6)). Пусть $\tilde f(z)$ — преобразование Лапласа функции $f(x)$:

$$\tilde f(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zx} f(x)\,dx, \tag{1.43}$$

и пусть при некотором z существуют $\widetilde{f}$ и $\widetilde{f}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\widetilde{f}(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{f}_k(z)\,\{z^{-\lambda_k}\}, \tag{1.44}$$

когда $z \to 0$ в некотором секторе S с вершиной в начале координат, содержащем отрезок вида $[0, a]$, $a > 0$.

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_0 > \operatorname{Re}\lambda_1 > \ldots > 0$, асимптотическое разложение (1.42) справедливо при $x \to +\infty$. Тогда справедливо асимптотическое разложение (1.44) при $z \to \infty$, $z \in S$, где S — сектор в комплексной плоскости z, содержащий полуось $(0, +\infty)$.

1.18. $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (1 - e^{-x})^k \{x^k\}$ $\quad (x \to +0)$. Тогда при $z \in S$

$$\widetilde{f}(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} k!\,c_k/[z(z+1)\ldots(z+k)]\,\{z^{-k}\} \qquad (z \to \infty).$$

1.19. $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (e^x - 1)^k \{x^k\}$, $\quad x \to +0$. Тогда при $z \in S$

$$\widetilde{f}(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} k!\,c_k/[z(z-1)\ldots(z-k)]\,\{z^{-k-1}\} \qquad (z \to \infty).$$

1.20. $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \left(2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right)^{2k} \{x^{2k}\}$ $\quad (x \to +0)$. Тогда при $z \in S$

$$\widetilde{f}(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (2k)!\,c_k/[(z-k)(z-k+1)\ldots(z+k)]\,\{z^{-2k-1}\} \qquad (z \to \infty).$$

Пусть c — комплексное число такое, что

$$|\theta + r\gamma| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma = \arg c; \quad c^{-1} z^{s-1/r} = O(\ln(z^{rs}/\lambda)),$$

равномерно по θ при фиксированном γ. Здесь

$$r,\ s > 0, \quad z = |z| e^{i\theta}, \quad \lambda = \alpha + i\beta = |\lambda| e^{i\Lambda}, \quad |\lambda| \geqslant \lambda_0 > 0$$

и Λ лежит в множестве $|\Lambda| \leqslant \pi/2 - \delta < \pi/2$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$, $\theta_1 - \theta_0 < \pi$.

Теорема 1.8. *Пусть функция $G(z, t, \lambda)$ голоморфна и равномерно ограничена при $|t| \leqslant 2|c|$, $\lambda z^{-r\varepsilon} \to 0$ при $z \in D$, $z \to \infty$, где D — неограниченная область в комплексной плоскости. Тогда*

$$\int_0^c rt^{\lambda r-1} \exp(-zt^r)\, G(z, t, \lambda)\, dt \sim$$
$$\sim \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z, \lambda)\, \Gamma(\lambda + n/r)\, z^{-\lambda-n/r} \{\psi_n\}.$$

Здесь $G_n(z, \lambda)$ — коэффициенты разложения $G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z, \lambda)\, t^n$, $\{\psi_n\}$ — асимптотическая последовательность $\psi_n = z^{-\lambda-n\varepsilon}$.

Теорема 1.9. *Пусть функция $G(z, t)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1.8,

$$G(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(tz^{1/r})\, z^{-mn},$$
$$m > 0, \quad r > 0, \quad |t| < 2|z|^\rho,$$

и функции $P_n(w^{1/r}) \exp[(A_n - 1)w]$ ограничены при некоторых $A_n > 0$. Пусть область D содержится в секторе $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \delta < \pi/2$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и $s = \rho + 1/r > 0$. Тогда при $z \in D$

$$\int_0^{z^{|\rho|}} rt^{r\lambda-1} \exp(-zt^r)\, G(z, t)\, dt \sim z^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) z^{-mn} \quad (z \to \infty).$$

Здесь

$$a_n(\lambda) = r \int_0^{\infty} t^{r\lambda-1} e^{-t^r} P_n(t)\, dt.$$

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} K(t, \lambda)\, H(t, \lambda)\, dt.$$

Пусть функция $H(t, \lambda)$ имеет $n+1$ частных производных по t при $t \geqslant 0$, которые монотонно стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Пусть функция $K(t, \lambda)$ абсолютно интегрируема по t на некотором отрезке $[0, T]$, ее преобразование Лапласа $k(x, \lambda)$ по переменной t существует при $x > 0$

и аналитично по x при малых $|x|$. Пусть

$$\int_0^\infty e^{-xt} K(t+\eta, \lambda)\, t^{n+1} dt = O(1)$$

при всех $x > 0$, $\eta \geqslant 0$. При этих предположениях справедлива

Теорема 1.10 [107]. *Имеет место асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m k(0, \lambda) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m H(0, \lambda) + \\ + O\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n+1} H_{n+1}(0, \lambda)\right).$$

Из этой теоремы вытекают следующие асимптотические формулы.

1.21. При $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^\infty K(t) H\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt = \\ = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} k^{(m)}(0) H^{(m)}(0) \lambda^{-m} + O(\lambda^{-n-1}),$$

где k — преобразование Лапласа функции K.

1.22. При $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^\infty K(\lambda t) H(t)\, dt = \\ = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} k^{(m)}(0) H^{(m)}(0) \lambda^{-m-1} + O(\lambda^{-n-2}).$$

1.23. При $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^\infty \frac{K(t)}{t+\lambda}\, dt = \sum_{m=0}^{n} \frac{k^{(m)}(0)}{\lambda^{m+1}} + O(\lambda^{-n-2}).$$

1.24. При $n = 2m-1$, $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^\infty \cos \lambda t H(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k H^{(2k-1)}(0) \lambda^{-2k} + O(\lambda^{-2m-1}),$$

$$\int_0^\infty \sin \lambda t H(t)\, dt = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k H^{(2k)}(0) \lambda^{-2k-1} + O(\lambda^{-2m-1}).$$

1.25. При $\lambda \to +\infty$ (здесь J_0 — функция Бесселя, $n = 2m-1$)

$$\int_0^\infty J_0(\lambda t) H(t)\, dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) H^{(2k)}(0) \lambda^{-2k-1} + O(\lambda^{-2m-1}).$$

1.26. При $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^\infty e^{-t^2-\alpha t} t^{2\lambda} dt \sim$$
$$\sim e^{-\lambda-\alpha\sqrt{\lambda}} \lambda^\lambda \left[\sum_{m=0}^{2n-1} \frac{1}{m!} H_m(\lambda, \sqrt{\lambda}) \int_{-\infty}^\infty e^{-2t^2-\alpha t} t^m dt + O(\lambda^{-m/3})\right].$$

Здесь $H_m(t, \lambda) = (\partial/\partial t)^m t^{2\lambda}$.

Положим (здесь $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < 1$)

$$F(\varepsilon) = \int_{-\infty}^\infty K(t, \varepsilon) f(t, \varepsilon)\, dt, \quad G(\varepsilon) = \int_{-\infty}^\infty K(t, \varepsilon)\, dt > 0.$$

Теорема 1.11 [128]. *Пусть существуют функции* p, φ_m, k, r_m *такие, что*

$$p(t, \lambda) = p(t+1, \lambda) \geqslant 0, \quad \int_0^1 p(t, \varepsilon)\, dt > 0,$$

$$k(t) f(t, \varepsilon) = \sum_{m=0}^n \varphi_m(\varepsilon) k(t+m) + r_n(t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^{-1} \int_{-\infty}^\infty p(t, \varepsilon) r_n(t-n, \varepsilon)\, dt = o(\varphi_n(\varepsilon) G(\varepsilon)) \qquad (\varepsilon \to +0).$$

Тогда при $\varepsilon \to +0$ *имеем*

$$F(\varepsilon)/G(\varepsilon) = \sum_{m=0}^n \varphi_m(\varepsilon) \varepsilon^m + o(\varepsilon^n \varphi_n(\varepsilon)).$$

Из этой теоремы получена следующая асимптотическая формула.

1.27. При $\varepsilon \to +0$, $\alpha \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2 - t \ln \varepsilon)\, p(t, \varepsilon)\, \operatorname{th}(t + \alpha\varepsilon)\, dt \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2 - t \ln \varepsilon)\, p(t, \varepsilon)\, dt \right]^{-1} \sim \\ \sim 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n \exp(n^2 - 2n\alpha\varepsilon).$$

Приведем еще некоторые результаты об асимптотике преобразований Лапласа и Меллина. Пусть S — сектор $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$.

Теорема 1.12. *Пусть* $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ *при всех* n *и либо* $\operatorname{Re} \lambda_n > \operatorname{Re} \lambda_{n-1}$, α_n *произвольно, либо* $\operatorname{Re} \lambda_n = \operatorname{Re} \lambda_{n-1}$ *и* $\operatorname{Re} \alpha_n < \operatorname{Re} \alpha_{n-1}$. *Если*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \{(-\ln x)^{\alpha_n} x^{\lambda_n - 1}\} \qquad (x \to +0)$$

и существуют преобразования Лапласа $\tilde{f}$, $\tilde{f}_n$ *функций* f, f_n, *то*

$$\tilde{f}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n(z) \{(\ln z)^{\alpha_n} z^{-\lambda_n}\}$$

при $z \to \infty$, $z \in S_\varepsilon$.

Теорема 1.13. *Пусть при всех* n *имеем* $\alpha_n \geqslant 0$, $0 < \beta_n < 1$, $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ *и либо* $\beta_n < \beta_{n-1}$, *либо* $\beta_n = \beta_{n-1}$ *и* $\alpha_n < \alpha_{n-1}$, *либо* $\beta_n = \beta_{n-1}$, $\alpha_n = \alpha_{n-1}$, $\operatorname{Re} \lambda_n < \operatorname{Re} \lambda_{n-1}$. *Если*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \{x^{\lambda_n - 1} \exp(\alpha_n x^{\beta_n})\} \quad (x \to +\infty)$$

и преобразования Лапласа $\tilde{f}(z)$, $\tilde{f}_n(z)$ *существуют при* $z > 0$, *то*

$$\tilde{f}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n(z) \{x_n(\rho)\}$$

при $z \to 0$ *в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$. *Здесь* $\rho = \operatorname{Re} z$,

$$x_n(\rho) = \rho^{-(\lambda_n - \beta_n/2)\gamma_n} \exp\left[(\beta_n^{-1} - 1)(\alpha_n \beta_n \rho^{-\beta_n})^{\gamma_n}\right],$$
$$\gamma_n = (1 - \beta_n)^{-1}.$$

1.28. Пусть $0 < c < 1$, $\lambda > 0$, α вещественно. Тогда при $x \to +\infty$

$$\int_0^c (-\ln t)^\alpha t^{\lambda-1} e^{-tx}\, dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \binom{\alpha}{n} \Gamma^{(n)}(\lambda)\, x^{-\lambda} (\ln x)^{\alpha-n} + o\left(x^{-\lambda} (\ln x)^{\alpha-\lambda}\right).$$

1.29. Пусть $c < 1$, α, λ вещественны. Тогда при $x \to +0$

$$\int_0^c (-\ln t)^\alpha t^{\lambda-1} e^{-xt}\, dt \sim$$
$$\sim \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \Gamma^{(n)}(\lambda)\, x^{-\lambda} (-\ln x)^{\alpha-n} \left[x^{-\lambda} (-\ln x)^{\alpha-n}\right].$$

1.30. Пусть $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $\lambda > 0$ и $x \to +0$ или $\alpha < 0$, $\beta < 0$, λ — любое, $x \to +\infty$. Тогда

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1} \exp\left[-z\left(t - \beta^{-1} t^\beta\right)\right] dt \sim$$
$$\sim \exp\left[-\left(1-\beta^{-1}\right) x\right] \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) c_n z^{-(n+1)/2},$$

Здесь $\gamma = (1-\beta)^{-1}$, $z = (\alpha\beta x^{-\beta})^\gamma$, коэффициенты c_n не зависят от x, $c_0 = \sqrt{2\gamma}$.

Введем класс Λ функций $L(x)$, которые непрерывны, строго положительны при $x > 0$ и удовлетворяют условиям:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x+h)/L(x) = 1$ для любого $h > 0$;

2) существует $\lambda \geqslant 1$ такое, что $\max\limits_{x \leqslant t \leqslant 2x} L(t) \leqslant \lambda L(2x)$

при всех $x > 0$.

Примером служит функция $L(x) = \ln(x+1)$. Такие функции называются также медленно растущими.

Пусть f, $g \in L^1(0, \infty)$ и $f(x) \sim lL(x)$, $g(x) \sim mM(x)$ при $x \to +\infty$, где L, $M \in \Lambda$. Тогда при $x \to +\infty$

$$(f * g)(x) \sim l\left(\int_0^\infty g(t)\, dt\right) L(x) + m\left(\int_0^\infty f(t)\, dt\right) M(x).$$

Этот и последующие результаты получены в [126].

Теорема 1.13. *Пусть функция* $\Phi(z)$ *голоморфна при* $\operatorname{Re} z > -R$, $R > 0$, $\Phi(0) = 0$. *Пусть* $\int\limits_0^\infty |f(t)|\,dt < R/\lambda$ *и* $f(x) \sim lL(x)$ $(x \to \infty)$, $L(x) \in \Lambda$. *Если преобразование Лапласа функции* $\varphi(x)$ *равно* $\Phi(\tilde{f}(z))$ *при* $\operatorname{Re} z > 0$, *то*

$$\varphi(x) \sim l\Phi'\left(\int\limits_0^\infty f(t)\,dt\right)L(x) \qquad (x \to +\infty).$$

Эти результаты переносятся на ряды Дирихле вида

$$\sum_{n=0}^\infty a_n e^{-nz}, \quad \sum_{n=0}^\infty |a_n| < \infty,$$

где $\operatorname{Re} z > 0$. Пусть $c_n = \sum\limits_{k=0}^n a_{n-k}b_k$, причем $a_n \sim lL(n)$, $b_n \sim mM(n)$ при $n \to \infty$, $L, M \in \Lambda$. Тогда

$$c_n \sim lL(n)\sum_{k=0}^\infty b_k + mM(n)\sum_{k=0}^\infty a_k.$$

Рассмотрим преобразование

$$g(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{s-1}f(t)\,dt,$$

которое лишь множителем $1/\Gamma(s)$ отличается от преобразования Меллина функции $e^{-t}f(t)$. Пусть функция $f(t)$ имеет $2l+1$ непрерывных производных при $t \geqslant T > 1$, $l > 0$, голоморфна в полосе $\sigma \geqslant T$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ $(s = \sigma + i\tau)$, где $\tau_1 \leqslant 0 \leqslant \tau_2$, и при всех τ

$$f^{(\nu+1)}(s) = O(\sigma^{\alpha-1}|f^{(\nu)}(\sigma)|) \qquad (\sigma \to \infty).$$

Здесь $\nu = 0, 1, \ldots, 2l$, $0 < \alpha < 1/2$ и сходится интеграл $\int\limits_0^T t^{s-1}|f(t)|\,dt$ при некотором $s = \sigma_0$. При этих условиях имеет место

Теорема 1.14 [102]. *При* $m < 2l$ *справедливо разложение*

$$g(s) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}Q_k(s)f^{(k)}(s) + R_m(s) + O(\sigma^{[m/2]}|f^{(m+1)}(\sigma)|). \tag{1.45}$$

Здесь $Q_n(s)$ — полиномы степени $[n/2]$:

$$Q_n(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} (t-s)^n \, dt \sim a_n s^{[n/2]} \qquad (s \to \infty),$$

$$a_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2n(2n+1)!}{3 \cdot 2^n n!}.$$

Остаточный член имеет вид

$$R_m(s) = \frac{1}{(m+1)! \, \Gamma(s)} \int_T^{2\sigma} e^{-t} t^{s-1} f^{(m+1)}(\xi) (t-\sigma)^{m+1} \, dt,$$

где $\xi = \sigma + \theta(1-\sigma)$, $0 < \theta < 1$. При этом

$$R_{2l-1}(\sigma) = O(\sigma^l |f^{(2l)}(\sigma)|).$$

Разложение (1.45) можно записать в виде

$$g(s) = f(s) + \frac{1}{2} f''(s) + \frac{s}{3} f'''(s) + \frac{s(s+2)}{8} f^{(4)}(s) +$$

$$+ \frac{s(5s+4)}{30} f^{(5)}(s) + \ldots + \frac{Q_{2l-1}(s)}{(2l-1)!} f^{(2l-1)}(s) + O(\sigma^l |f^{(2l)}(\sigma)|).$$

1.31. Пусть $s = 2\mu \ln x + \nu$, где $\mu > 0$, ν — любое. Тогда при $x \to +\infty$

$$\int_0^\infty e^{-xt} t^{\nu - 1 - \mu \ln t} \, dt \sim \Gamma(s) \exp\left(-\frac{s^2 - \nu^2}{4\mu} - \mu \ln^2 s\right).$$

8. Интегралы с логарифмическими особенностями. Результаты этого пункта получены в [109]. Рассмотрим интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_0^\infty h(\lambda t) f(t) \, dt,$$

где λ — большой параметр.

Теорема 1.15. *Пусть функция $h(t)$ локально интегрируема и*

$$\begin{aligned} &h(t) = O(t^{-r} (\ln t)^N \exp(-st^\nu)) \qquad (t \to \infty), \\ &h(t) = O(t^\gamma) \qquad (t \to +0), \end{aligned} \tag{1.46}$$

где $s,\ \nu > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\gamma) > -1$. *Пусть* $0 < |\arg a| < \pi$ *и*

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{h(\lambda t)\, t^\alpha}{a - \ln t}\, dt. \tag{1.47}$$

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\begin{gathered} F(\lambda) = \lambda^{-\alpha-1} \sum_{m=0}^\infty c_m (\ln \lambda)^{-m-1} + O\left(\lambda^{-\alpha-1-k}\right) + \\ + O\left(\exp\left(-\lambda^\nu (1-\varepsilon)\right)\right), \\ F(\lambda) = \lambda^{-\alpha-1} \sum_{m=0}^\infty \tilde{c}_m (a + \ln \lambda)^{-m-1} + O\left(\lambda^{-\alpha-1-k}\right) + \\ + O\left(\exp\left(-\lambda^\nu (1-\varepsilon)\right)\right), \end{gathered} \tag{1.48}$$

где $k > 0$ — *любое*, $0 < \varepsilon < 1$.

Коэффициенты разложений определяются из тождеств

$$e^{-az} M(h)(\alpha + 1 + z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{c_m}{m!} z^m,$$

$$M(h)(\alpha + 1 + z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{\tilde{c}_m}{m!} z^m,$$

где $M(h)$ — преобразование Меллина функции h:

$$M(h)(z) = \int_0^\infty h(t)\, t^{z-1}\, dt.$$

1.32. $h(t) = e^{-t}$ (преобразование Лапласа). Тогда

$$e^{-az}\Gamma(\alpha + 1 + z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{c_m}{m!} z^m,$$

$$\Gamma(\alpha + 1 + z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{\tilde{c}_m}{m!} z^m.$$

1.33. $F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^{\sigma-1} e^{-\lambda t}}{a^2 + \ln^2 t}\, dt \sim \lambda^{-\sigma} \sum_{m=0}^\infty c_m (\ln \lambda)^{-m-1}$, где c_m определяются из тождества

$$\frac{\sin az}{a} \Gamma(\sigma + z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{c_m}{m!} z^m.$$

Кроме того,

$$F(\lambda) \sim -\lambda^{-\sigma} a^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{c}_m \operatorname{Im} (\ln\lambda + ai)^{-m-1},$$

$$\Gamma(\sigma + z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\widetilde{c}_m}{m!} z^m.$$

1.34. $h(t) = K_\mu(t)$, μ вещественно, $K_\mu(t)$ — функция Макдональда. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha K_\mu(t)}{a - \ln t}\, dt \sim \lambda^{-\alpha-1} \sum_{m=0}^{\infty} d_m (\ln\lambda)^{-m-1}, \quad \operatorname{Re}\alpha + 1 > |\mu|,$$

$$e^{-az} 2^{\alpha+z-1} \Gamma\left(\frac{\alpha + 1 + z - \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + 1 + z + \mu}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{m!} z^m. \tag{1.49}$$

1.35. Пусть $\operatorname{Ai}(t)$ — функция Эйри. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha \operatorname{Ai}(\lambda t)}{a - \ln t}\, dt \sim \lambda^{-\alpha-1} \sum_{m=0}^{\infty} e_m (a + \ln\lambda)^{-m-1}, \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1,$$

$$(2\pi)^{-1} 3^{2z/3-(7/6)} \Gamma\left(\frac{z}{3}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{3}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e_m}{m!} (z - \alpha - 1)^m.$$

1.36. Пусть $D_\mu(t)$ — функция Вебера, F — гипергеометрическая функция. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha D_\mu(\lambda t)}{a - \ln t}\, dt \sim \lambda^{-\alpha-1} \sum_{m=0}^{\infty} f_m (\ln\lambda + a)^{-m-1}, \qquad \operatorname{Re}\alpha > -1,$$

$$\frac{\Gamma(z)\sqrt{\pi}\, 2^{(z+1+\mu)/2}}{\Gamma((z+1-\mu)/2)} F\left(\frac{z+1}{2}, \frac{1-\mu}{2}, \frac{z+1-\mu}{2}, 1\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_m}{m!} (z - \alpha - 1)^m.$$

Дифференцируя по параметру a, можно вычислить асимптотику интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^\alpha h(t)}{(a - \ln t)^n}\, dt$$

при целых $n \geqslant 1$.

Пусть функция $h(t)$ голоморфна в секторе $|\arg t| < \theta_0$, $|t| > 0$, и удовлетворяет условиям (1.46). Тогда для интеграла (1.47) разложения (1.48), (1.49) справедливы при $|\lambda| \to \infty$, $|\arg \lambda| < \theta$, где $\theta = \min(\theta_0, \pi/(2\nu))$. Для рассмотренных выше ядер $h(t)$ имеем

$$e^{-t},\ \theta = \pi/2; \quad K_\mu(t),\ \theta = \pi/2;$$
$$\mathrm{Ai}(t),\ \theta = \pi/3; \quad D_p(t),\ \theta = \pi/4.$$

Если, кроме того,

$$h(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N(m)} d_{mn} t^{-r_m} (\ln t)^n \qquad (t \to \infty),$$

где $\mathrm{Re}\, r_0 < \mathrm{Re}\, r_1 < \ldots$, $\mathrm{Re}\, r_m \to +\infty$, $N(m) < \infty$ и $\mathrm{Re}\, \alpha + 1 < \mathrm{Re}\, r_0$, то $\theta = \theta_0$.

1.37. Пусть

$$F(\lambda) = \int_0^1 |\ln t|^{-1/2} e^{-\lambda t}\, dt.$$

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \lambda^{-1} (\ln \lambda)^{-1/2} [1 + O((\ln \lambda)^{-1})],$$
$$F(\lambda) = \lambda^{-1} (\ln \lambda)^{-1/2} [1 - \gamma/(2 \ln \lambda)][1 + O(\lambda^{-1})],$$

где $\gamma = 0{,}57721\ldots$ — постоянная Эйлера. Расчеты показывают, что второе из этих приближений обладает большей точностью, чем первое, при $\lambda \geqslant 10$.

9. Асимптотические разложения интегралов, содержащие производные дробного порядка. Приведем асимптотические формулы для интеграла

$$F(x, a) = \int_0^\infty e^{-x(t-a)} t^{\lambda - 1} g(t)\, dt, \quad 0 < \lambda \leqslant 1, \qquad (1.50)$$

при $x \to +\infty$, равномерные по a при $a \geqslant 0$. Оператор интегрирования I^α порядка $\alpha > 0$ определяется по формуле

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f(s)\, ds.$$

Этот интеграл сходится при $0 \leqslant t < b$, если $f(t) \in C(0, b)$. При α, $\beta > 0$ справедливо тождество

$$I^\alpha I^\beta f = I^{\alpha + \beta} f.$$

Пусть

$$f(t) = g(t), \quad \lambda = 1;$$

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \int_0^t (t-s)^{-\lambda} s^{k+\lambda-1} g(s)\, ds, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Пусть $g(t) \in C^\infty(0, \infty)$ и ограничена вместе со всеми производными. В [127] для интеграла (1.50) при $x \to +\infty$ получено асимптотическое разложение

$$F(x, a) = \sum_{k=1}^{n-1} x^{-k} \left(I^\lambda f^{(k)}\right)(a) + \sum_{k=0}^{n-1} x^{-k} f^{(k)}(0)\, Q + R_n,$$
$$Q = \frac{e^{ax}}{\Gamma(\lambda)\, x^\lambda} \int_{ax}^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt = \frac{e^{ax}\Gamma(\lambda, ax)}{\Gamma(\lambda)\, x^\lambda}. \tag{1.51}$$

Для остаточного члена

$$R_n = x^{1-n} \int_a^\infty e^{-x(t-a)} \left(I^\lambda f^{(n)}\right)(t)\, dt$$

справедлива оценка

$$|R_n| \leqslant c_n x^{n-\lambda} e^{ax} \Gamma(\lambda+1, ax), \quad x > 0,\ a \geqslant 0,$$
$$c_n = \sup_{t \geqslant 0} \left| \left(I^\lambda f^{(n)}\right)(t) \right|.$$

Так как последовательность $\{x^{-n-\lambda} e^{ax} \Gamma(\lambda+1, ax)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — асимптотическая при $x \to +\infty$, то (1.51) — асимптотическое разложение. Оно может быть обобщено на случай комплексных x: $|\arg x| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$, $|x| \to \infty$.

Аналогично исследуется интеграл вида

$$F_1(x, a) = \int_0^a e^{-xt} \left(I^{\lambda-1} f\right)(t)\, dt.$$

Асимптотическое разложение имеет вид

$$F_1(x, a) = -\sum_{k=1}^{n-1} x^{-k} e^{-ax} \left(I^\lambda f^{(k)}\right)(a) + \sum_{k=0}^{n-1} x^{-k} f^{(k)}(0)\, P + S_n, \tag{1.52}$$
$$P = \gamma(\lambda, ax)\, x^{-\lambda} / \Gamma(\lambda),$$

где γ — укороченная гамма-функция:

$$\gamma(\lambda, a) = \int_0^a e^{-t} t^{\lambda-1}\, dt.$$

Для остаточного члена справедлива оценка

$$|S_n| \leqslant c_n x^{-n-\lambda} \gamma(\lambda+1, ax), \quad a \geqslant 0,$$

при тех же условиях на функцию $f(t)$, что и выше.

В [142] предложена другая форма асимптотического разложения интеграла (1.50):

$$F(x, a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} F_k + R_n,$$

$$F_k = \int_a^\infty e^{-x(t-a)} t^{\lambda-1} (t-a)^k\, dt.$$

Здесь $F_0 = \Gamma(\lambda) Q$, где Q — та же функция, что и в (1.51),

$$F_1 = (\lambda x^{-1} - a) F_0 + a^\lambda x^{-1},$$

$$F_{k+1} = x^{-1}[(k+\lambda-ax) F_k + akF_{k-1}], \quad k \geqslant 1.$$

Функции F_k выражаются через конфлюентные гипергеометрические функции. Для остаточного члена имеет место оценка

$$|R_n| \leqslant c_n x^{-n-\lambda} \Gamma(n+\lambda)/n!, \quad x > 0, \quad a \geqslant 0.$$

Асимптотика интегралов вида $(I^\lambda f)(x)$ при $x \to +\infty$ исследована в [118].

Рассмотрим операторный интеграл Лапласа

$$F(A_\alpha) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-A_\alpha t} dt.$$

Здесь $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n t^{n/r-1}$ при $|t| \leqslant c + \delta$, где r, c, $\delta > 0$ и $|f(t)| \leqslant M_0 e^{bt}$, $t \geqslant c$. Далее, A_α — замкнутые линейные операторы, действующие в банаховом пространстве B и удовлетворяющие условиям:

1. Спектр $\sigma(A_\alpha)$ оператора A_α содержится в секторе $|\arg\lambda| \leqslant \pi/2 - \Delta < \pi/2$, $\lambda \neq 0$.

2. Пусть $\omega(A_\alpha) = \inf\{\operatorname{Re}\lambda\colon \lambda \in \sigma(A_\alpha)\}$ и $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A. Существуют та-

кие числа $M > 0$, ω_1, $0 < \omega_1 \leqslant \omega(A_\alpha)$, что $\|R_\lambda(A_\alpha)^n\| \leqslant \leqslant M(\omega_1 - \lambda)^{-n}$ для любого целого $n \geqslant 0$, при всех $\lambda < \omega_1$.

Теорема 1.15 [144]. *Пусть существует $\eta > 0$ такое, что $\omega_1(A_\alpha) > \eta\omega(A_\alpha)$ при всех α. Тогда при $|A_\alpha^{-1}| \to 0$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(A_\alpha) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Gamma(n/r) A_\alpha^{-n/r}.$$

§ 2. Модификации метода Лапласа (одномерный случай)

1. Интегралы Лапласа, содержащие дополнительные параметры. Рассмотрим интеграл по конечному отрезку

$$F(\lambda, \alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) \exp[\lambda S(x, \alpha)]\, dx, \tag{2.1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — вещественные параметры. Если функция $S(x, \alpha)$ при каждом фиксированном α из некоторой области $\Omega \subset \mathbf{R}^k$ имеет на отрезке $I = [a, b]$ ровно одну, и притом невырожденную, точку максимума $x_0(\alpha)$ и если при $\alpha \in \Omega$ точка $x_0(\alpha)$ не подходит близко к концам отрезка I, то полученное в теореме 1.3 разложение будет пригодно при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, равномерно по $\alpha \in \Omega$. Формализуем это утверждение. Введем условия:

A_1. Функции $f(x, \alpha)$, $S(x, \alpha) \in C(\bar{I} \times \bar{\Omega}) \cap C^\infty(I \times \Omega)$, где Ω — область в $\mathbf{R}^k_\alpha$, и функция $S(x, \alpha)$ вещественнозначна при $(x, \alpha) \in I \times \Omega$.

A_2. При каждом фиксированном $\alpha \in \Omega$ функция $S(x, \alpha)$ имеет единственную точку максимума $x_0(\alpha) \in I$.

A_3. Точка максимума $x_0(\alpha)$ невырождена:

$$-S''_{xx}(x_0(\alpha), \alpha) \geqslant \delta_0 > 0, \quad \alpha \in \Omega, \tag{2.2}$$

и лежит строго внутри I: $x_0(\alpha) \in I' = [a', b']$ при $\alpha \in \Omega$, где $a < a' < b' < b$.

Теорема 2.1. *Пусть условия $A_1 - A_3$ выполнены. Тогда для функции $F(\lambda, \alpha)$ справедливо асимптотическое разложение (1.24) при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, равномерно по $\alpha \in \mathscr{K}$, где $\mathscr{K}$ — произвольный компакт, лежащий внутри Ω.*

Это разложение можно почленно дифференцировать по λ и по α любое число раз.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda, \alpha) = \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''_{xx}(x_0(\alpha), \alpha)}} \times$$
$$\times \exp[\lambda S(x_0(\alpha), \alpha)]\left[f(x_0(\alpha), \alpha) + O(\lambda^{-1})\right], \quad (2.3)$$

где $O(\lambda^{-1})$ равномерно по $\alpha \in \mathscr{K}$.

Пример 2.1. Найдем асимптотику при $\nu \to +\infty$, $x > 0$ функции Макдональда (бесселевой функции)

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(\nu t - x \operatorname{ch} t)\, dt. \quad (2.4)$$

Точка максимума $t_0 = t_0(\nu)$ подынтегральной функции находится из уравнения $\nu - x \operatorname{sh} t = 0$, так что

$$t_0 \sim \ln(2\nu/x) \qquad (\nu \to +\infty), \qquad t_0(+\infty) = +\infty.$$

Сделаем замену переменной так, чтобы «остановить» точку максимума. Полагая $t = t' + \ln(2\nu/x)$, получаем

$$K_\nu(x) = 2^{\nu-1}\nu^{-\nu}x^{-\nu}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\nu(t - e^t) - \frac{xe^{-t}}{4\nu}\right] dt. \quad (2.5)$$

Теперь точка максимума $t_0 \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Представим этот интеграл в виде (2.1), где $S(t) = t - e^t$, $f(t, \alpha) = \exp(-\alpha e^{-t})$ и $\lambda = \nu$, $\alpha = x/4\nu$. Так как $\max\limits_{-\infty<t<\infty} S(t) = S(0) = -1$, $S''(0) = -1$, то, применяя теорему 2.1, получаем $\Phi \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}e^{-\nu}$ $(\nu \to +\infty)$, где Φ — интеграл в правой части (2.5). Здесь интеграл берется по всей оси; но по лемме 1.1 интеграл по области $|t| \geqslant 1$ имеет порядок $O(e^{-c\nu})$ $(\nu \to +\infty)$, $c > 0$. Следовательно,

$$K_\nu(x) \sim \left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu e^{-\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \quad (\nu \to +\infty). \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что $\Phi \sim e^{-\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\nu^{-k}$.

2.1. $K_\nu(x) = \left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu e^{-\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\left(1 + \frac{1-2x}{8\nu} + O(\nu^{-2})\right)$ $(\nu \to +\infty)$.

Пример 2.2. Найдем асимптотику функции Вебера (функция параболического цилиндра)

$$D_{-\nu-1}(x) = \frac{\exp(-x^2/4)}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty t^\nu \exp\left(-xt - \frac{t^2}{2}\right) dt$$

при $x > 0$, $\nu \to +\infty$. Подынтегральная функция имеет единственный максимум в точке $t_0 = t_0(\nu)$, которая определяется из уравнения $-x - t + \nu t^{-1} = 0$, так что $t_0 \sim \sim \sqrt{\nu}$ при $\nu \to +\infty$. Делая замену $t = \sqrt{\nu} t'$, получаем

$$D_{-\nu-1}(x) = \\ = \frac{\nu^{\frac{\nu+1}{2}} \exp(-x^2/4)}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty \exp\left[\nu(\ln t - t^2/2) - xt/\sqrt{\nu}\right] dt.$$

Обозначим последний интеграл $\Phi(\nu)$ и представим его в виде (2.1), где $S(t, \alpha) = \ln t - t^2/2 - \alpha x t$, $\alpha = \nu^{-1/2}$, $f \equiv 1$. Точка максимума $t_0 = t_0(\alpha)$ находится из уравнения $t^{-1} - t - \alpha x = 0$, так что $t_0 = 1 - \frac{\alpha x}{2} + \frac{\alpha^2 x^2}{8} + O(\alpha^4)$. Можно заменить участок интегрирования интервалом $(1-\delta, 1+\delta)$, $0 < \delta < 1$, так как оставшиеся интегралы экспоненциально малы при $\nu \to +\infty$ в силу леммы 1.1. Вычислим S и S''_{tt} в точке t_0 с точностью до $O(\alpha^3)$, $O(\alpha)$ соответственно с тем, чтобы остаточный член имел вид $o(1)$. Имеем

$$\nu S(t_0, \alpha) = -\frac{\nu}{2} - x\sqrt{\nu} + \frac{x^2}{4} + O(\nu^{-1/2}),$$
$$S''_{tt} = -2 + O(\nu^{-1/2}).$$

Подставляя в последний интеграл эти разложения и применяя формулу Стирлинга к $\Gamma(\nu+1)$, получаем, что при $x > 0$, $\nu \to +\infty$

$$D_{-\nu-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \nu^{-\nu-1/2} \exp\left(\frac{\nu}{2} - x\sqrt{\nu}\right)(1 + O(\nu^{-1/2})). \tag{2.7}$$

2.2. При $x \to +\infty$ равномерно по $\nu \in [-R, R]$, где $R > 0$ любое, имеем

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

2. Более сложная зависимость от параметра. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \lambda) \exp\left[S(x, \lambda)\right] dx, \tag{2.8}$$

где $\lambda > 0$ — большой параметр, a, b, f, S — вещественнозначные функции. Не приходится рассчитывать на то, что асимптотику интеграла (2.8) в общем случае можно вычислить. Рассмотрим случай, когда основной вклад в интеграл дает некоторая окрестность точки максимума $x_0(\lambda)$ функции $S(x, \lambda)$. В этой окрестности заменим S квадратичной функцией. Для вычисления размеров этой окрестности и вклада воспользуемся очевидным соотношением

$$\int\limits_{-a(\lambda)}^{a(\lambda)} \exp\left[-\frac{b(\lambda)}{2} x^2\right] dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b(\lambda)}}\,(1 + o(1)), \tag{2.9}$$

если $\lambda \to +\infty$, $a(\lambda)$, $b(\lambda) > 0$ и $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} a(\lambda) \sqrt{b(\lambda)} = +\infty$.

Лемма 2.1. *Пусть $\varepsilon_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$, $r(\lambda)$, $\mu(\lambda)$ — вещественнозначные функции, $r(\lambda) > 0$, $\mu(+\infty) = +\infty$ и ε_j непрерывны при $|x| \leqslant \mu(\lambda)$. Пусть*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \varepsilon_j(x, \lambda) = 0, \quad j = 1, 2, \tag{2.10}$$

равномерно по $|x| \leqslant \mu(\lambda)$. Тогда

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_{\mu(\lambda)/\sqrt{r(\lambda)}}^{\mu(\lambda)/\sqrt{r(\lambda)}} (1 + \varepsilon_1) \exp\left[-\frac{r(\lambda)}{2} x^2 (1 + \varepsilon_2)\right] dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{r(\lambda)}}\,[1 + o(1)] \quad (\lambda \to +\infty). \tag{2.11}$$

Пусть $x_0(\lambda)$ — невырожденная точка максимума функции $S(x, \lambda)$ (т. е. $S''_{xx} \neq 0$ в этой точке). Положим

$$U(x_0(\lambda)) = \{x\colon\ |x - x_0(\lambda)| \leqslant \mu(\lambda) |S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)|^{-1/2}\}. \tag{2.12}$$

Теорема 2.2. *Пусть существует функция $\mu(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$ такая, что*

$$S''_{xx}(x, \lambda) = S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)\,[1 + o(1)], \tag{2.13}$$

$$f(x, \lambda) = f(x_0(\lambda), \lambda)\,[1 + o(1)] \tag{2.14}$$

при $\lambda \to +\infty$, $x \in U(x_0(\lambda))$, *равномерно по* $x \in U(x_0(\lambda))$. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_U f(x, \lambda) \exp [S(x, \lambda)]\, dx = \\ = \sqrt{-\frac{2\pi}{S''_{xx}}}\, f \exp(S)\big|_{x=x_0(\lambda)} [1 + o(1)]. \quad (2.15)$$

Положим $r(\lambda) = -S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)$. По формуле Тейлора при $x \in U(x_0(\lambda))$ имеем

$$S(x, \lambda) - S(x_0(\lambda), \lambda) = \frac{1}{2} S''_{xx}(\xi, \lambda)(x - x_0(\lambda))^2,$$

где $\xi \in U(x_0(\lambda))$, и в силу (2.13), (2.14) интеграл из (2.15) имеет вид $f(x_0(\lambda), \lambda) \exp[S(x_0(\lambda), \lambda)]\Phi(\lambda)$, где $\Phi(\lambda)$ — интеграл из (2.10). Применяя лемму 2.1, получаем (2.15).

Пусть функция $S(x, \lambda)$ строго выпукла кверху при каждом фиксированном λ, т. е. при всех x, λ

$$S''_{xx}(x, \lambda) < 0. \quad (2.16)$$

Тогда при каждом фиксированном λ существует, и притом единственная, точка $x_0(\lambda)$, в которой достигается $\max\limits_{-\infty < x < \infty} S(x, \lambda)$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* (2.16) *и* (2.13) (*для некоторой функции* $\mu(\lambda) \to +\infty$ *при* $\lambda \to +\infty$). *Тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[S(x, \lambda)]\, dx \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)}} \exp[S(x_0(\lambda), \lambda)]. \quad (2.17)$$

Положим $r(\lambda) = |S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)|^{-1/2}$ и разобьем интеграл из (2.17) на три: $F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda)$, по интервалам $(-\infty,\ x_0(\lambda) - r(\lambda)\mu(\lambda)]$, $[x_0(\lambda) - r(\lambda)\mu(\lambda),\ x_0(\lambda) + r(\lambda)\mu(\lambda)]$, $[x_0(\lambda) + r(\lambda)\mu(\lambda),\ \infty)$ соответственно. Из теоремы 2.2 следует, что $F_2(\lambda) \sim V(\lambda)$ $(\lambda \to +\infty)$, где $V(\lambda)$ — правая часть формулы (2.17). Остается показать, что

$$F_j(\lambda) = o(V(\lambda)) \quad (\lambda \to +\infty), \quad j = 1, 3. \quad (2.18)$$

Из условий теоремы следует, что функция $S(x, \lambda)$ монотонно возрастает при $x < x_0(\lambda)$ и монотонно убывает (до $-\infty$) при $x > x_0(\lambda)$. Сходимость этого интеграла следует из выпуклости функции S. Оценим $F_3(\lambda)$. Пусть $h(t)$ — такая функция, что $h(+\infty)=+\infty$, $h'(t)>0$, $h''(t)>0$ при $t\geqslant a$. Покажем, что

$$I=\int\limits_a^\infty e^{-h(t)}dt<\frac{e^{-h(a)}}{h'(a)}. \tag{2.19}$$

Делая замену $h(t)=\tau$, получаем

$$I=\int\limits_{h(a)}^\infty \frac{e^{-\tau}d\tau}{h_t'(t(\tau))}<\frac{1}{h_t'(a)}\int\limits_{h(a)}^\infty e^{-\tau}d\tau=\frac{e^{-h(a)}}{h'(a)},$$

поскольку функция $\left[h_t'(t(\tau))\right]^{-1}$ монотонно убывает:

$$\frac{d}{d\tau}h_t'(t(\tau))=\frac{h_{tt}''(t(\tau))}{h_t'(t(\tau))}>0.$$

Применяя к $F_3(\lambda)$ оценку (2.19), получаем

$$F_3(\lambda)\leqslant\frac{\exp\left[S(x^+(\lambda),\lambda)\right]}{S_x'(x^+(\lambda),\lambda)},\qquad x^+(\lambda)=x_0(\lambda)+r(\lambda)\mu(\lambda).$$

В силу условия (2.13)

$$S(x^+(\lambda),\lambda)-S(x_0(\lambda),\lambda)=\frac{\mu^2(\lambda)}{2}[1+o(1)],$$

$$S_x'(x^+(\lambda),\lambda)=\frac{\mu(\lambda)}{r(\lambda)}[1+o(1)]$$

при $\lambda\to+\infty$, так что

$$F_3(\lambda)\leqslant CV(\lambda)\exp\left[-\frac{\mu^2(\lambda)}{2}(1+o(1))\right]\Big/\mu(\lambda)=o(V(\lambda)).$$

Тем самым (2.18) доказано для $F_3(\lambda)$. Аналогично оценивается интеграл $F_1(\lambda)$.

Следствие 2.1. *Пусть условия теоремы* 2.3 *выполнены и*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}x_0(\lambda)\sqrt{\left|S_{xx}''(x_0(\lambda),\lambda)\right|}=+\infty. \tag{2.20}$$

Тогда формула (2.17) *справедлива для интеграла*

$$\int\limits_0^\infty\exp\left[S(x,\lambda)\right]dx,$$

Для доказательства достаточно заметить, что $x_0(\lambda)/r(\lambda)\to+\infty$ и что, не ограничивая общности, можно выбрать $\mu(\lambda)$ так, чтобы $x_0(\lambda)/r(\lambda)\mu(\lambda)\to+\infty$, так что $U(x_0(\lambda))\not\equiv 0$ при $\lambda\gg 1$. В остальном доказательство то же, что и в теореме 2.3.

3. Асимптотика преобразований Лапласа и Меллина. Если $S(x)$ — выпуклая книзу функция, растущая при $x\to+\infty$ быстрее линейной функции, то функция

$$\max_{x\geqslant 0}\,[-S(x)+xp]=\tilde{S}(p) \tag{2.21}$$

конечна при всех $p\geqslant 0$, и этот максимум достигается только в одной точке $x_0(p)$. Функции $S(x)$, $\tilde{S}(p)$ называются *двойственными по Юнгу*. Функция $\tilde{S}(p)$ также выпукла книзу.

Теорема 2.4 [15], [108]. *Пусть функция $S(x)\in C^2[0,+\infty)$ и удовлетворяет условиям*:

1°. $S'(x)\to+\infty$, $x^2S''(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$.

2°. *Существует функция $\mu(x)$ такая, что $\mu(+\infty)=+\infty$ и*

$$S''(\xi)\sim S''(x)\quad (|x-\xi|\leqslant\mu(x)|S''(x)|^{-1/2},\quad x\to+\infty).$$

Тогда при $p\to+\infty$

$$\int_0^\infty e^{xp-S(x)}\sim e^{\tilde{S}(p)}\sqrt{\frac{2\pi}{S''(x_0(p))}}. \tag{2.22}$$

Функция $G(x,p)=-S(x)+xp$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3 и следствия 2.1; последнее следует из условия $x^2S''(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$. Применяя следствие 2.1, получаем (2.22).

Рассмотрим преобразование Меллина

$$M(\lambda)=\int_0^\infty x^{\lambda-1}\exp(-S(x))\,dx. \tag{2.23}$$

Делая замену переменной $x=e^t$, получаем

$$M(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\lambda t-S(e^t)]\,dt,$$

так что исследование этого интеграла сводится к случаю, рассмотренному в теореме 2.4. Имеем

$$\frac{d}{dt} S(e^t) = e^t S'(e^t),$$
$$\frac{d^2}{dt^2} S(e^t) = e^t S'(e^t) + e^{2t} S''(e^t),$$

так что условия 1° и 2° теоремы 2.4 принимают вид

$$x^2 S'(x) \to +\infty, \quad x \ln^2 x \,[S'(x) + xS''(x)] \to +\infty \quad (x \to +\infty), \tag{2.24}$$

$$S''(\xi) \sim S''(x) \quad (|x - \xi| \leqslant \mu(x) r(x),\ x \to +\infty), \tag{2.25}$$

где обозначено

$$r(x) = (xS'(x) + x^2 S''(x))^{-1/2} \tag{2.26}$$

и $\mu(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Следовательно, справедлива

Теорема 2.5. *Пусть* $S(x) \in C^2[0, +\infty)$ *и условия* (2.24), (2.25) *выполнены. Тогда для интеграла* (2.23) *справедлива асимптотическая формула*

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda \ln x_0(\lambda) - S(x_0(\lambda))] \times \\ \times (2\pi)^{1/2} \left[x_0(\lambda) S'(x_0(\lambda)) + x_0^2(\lambda) S''(x_0(\lambda))\right]^{-1/2}, \tag{2.27}$$

где $x_0(\lambda)$ — *решение уравнения*

$$xS'(x) = \lambda. \tag{2.28}$$

Пример 2.3. Покажем, что при $p \to +\infty$

$$\int_0^\infty \exp(px - e^x)\, dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\ln p}}\, p^p e^{-p}.$$

Условие 1° теоремы 2.4 выполнено. Далее,

$$S''(x)/S''(\xi) - 1 = e^{x-\xi} - 1 = o(1),$$

если $|x - \xi| = o(1)$, так что в качестве μ можно взять любую такую функцию, что $\mu(x) = o(e^{x/2})\ (x \to +\infty)$. Имеем

$$x_0(p) = \ln p, \quad S(p) = p \ln p - p, \quad S''(x_0(p)) = \ln p;$$

остается подставить эти значения в (2.22).

4. Интегралы с переменным верхним пределом. С помощью интегрирования по частям можно вычислить асимптотику при $x \to +\infty$ интегралов вида

$$F_1(x) = \int_x^\infty f(t)\exp[-S(t)]\,dt, \tag{2.29}$$

$$F_2(x) = \int_0^x f(t)\exp[S(t)]\,dt, \tag{2.30}$$

если подынтегральные функции имеют резко выраженный максимум при $t = x \gg 1$. Приведем условия на функции f, S.

A_4. Функции $f(t)$, $S(t)$ вещественнозначны,

$$f(t) \in C^1, \quad S(t) \in C^2, \quad S'(t) > 0$$
$$(t \geqslant 0), \quad S(+\infty) = +\infty.$$

A_5. $S''(t) = o(S'^2(t)) \quad (t \to +\infty)$.

A_6. $f(t) > 0$ при $t \geqslant 0$, $f'(t)/f(t) = o(S'(t)) \quad (t \to +\infty)$.

Теорема 2.6. *Пусть функции $f(t)$, $S(t)$ удовлетворяют условиям $A_4 - A_6$. Тогда при $x \to +\infty$*

$$F_1(x) \sim \frac{f(x)}{S'(x)}\exp[-S(x)], \tag{2.31}$$

$$F_2(x) \sim \frac{f(x)}{S'(x)}\exp[S(x)]. \tag{2.32}$$

Покажем, что интеграл (2.29) сходится. Интегрируя по частям, получаем

$$F_1(x, a) \equiv \int_a^x f(t)\exp[-S(t)]\,dt =$$
$$= h_1(a) - h_1(x) + \int_a^x f_1(t)\exp[-S(t)]\,dt, \tag{2.33}$$

где обозначено

$$h_1(x) = \frac{f(x)}{S'(x)}\exp[-S(x)], \quad f_1(x) = \left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)'.$$

Из условий $A_4 - A_6$ следует, что

$$f_1(t) = o(f(t)) \quad (t \to +\infty). \tag{2.34}$$

Выберем $a > 0$ такое, что $|f_1(t)/f(t)| \leqslant 1/2$ при $t \geqslant a$; тогда интеграл в правой части (2.33) не превосходит по модулю величины $\frac{1}{2} F_1(x, a)$. Следовательно, при $x \geqslant a$

$$\frac{1}{2} F_1(x, a) \leqslant h_1(a) - h_1(x). \tag{2.35}$$

Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln f(t)}{S(t)} = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln S'(t)}{S(t)} = 0, \tag{2.36}$$

и так как $S(+\infty) = +\infty$, то из (2.36) находим, что

$$\lim_{t\to+\infty} h_1(t) = 0. \tag{2.37}$$

Применяя правило Лопиталя, получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{h_1(x)}{F_1(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{f_1(x)}{f(x)}\right) = 1,$$

и (2.31) доказано.

Обозначим $h_2(t) = \exp[S(t)]\, f(t)/S'(t)$. Из (2.37) и условий $A_4 - A_6$ следует, что

$$F_2(+\infty) = +\infty, \quad h_2(+\infty) = +\infty.$$

Применяя правило Лопиталя к отношению $h_2(x)/F_2(x)$, получаем (2.32).

Предложение 2.1. *Пусть выполнено условие* A_4, $f(t) \geqslant 0$ *при* $t \geqslant 0$, *функции* $f(t)$, $S(t) \in C^\infty[0, +\infty)$. *Пусть последовательность*

$$\left\{M^k\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\right\}, \quad M = -\frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.38}$$

является асимптотической при $x \to +\infty$. *Тогда справедливы при* $x \to +\infty$ *асимптотические разложения*

$$F_1(x) \sim \exp[-S(x)] \sum_{k=0}^{\infty} M^k (f(x)/S'(x)), \tag{2.39}$$

$$F_2(x) \sim \exp[S(x)] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k M^k (f(x)/S'(x)) \tag{2.40}$$

по последовательности (2.38).

Рассмотрим $F_1(x)$. Покажем, что

$$\lim_{t\to+\infty} \psi_k(t) = 0, \quad \psi_k(t) = \exp[-S(t)]\, M^k\left(\frac{f(t)}{S'(t)}\right). \tag{2.41}$$

При $k=0$ это доказано в теореме 2.6. Далее, $\psi_{k+1}(t) = o(\psi_k(t))$ $(t\to+\infty)$, так как последовательность (2.38) — асимптотическая при $t\to+\infty$, что и доказывает (2.41). Интегрируя по частям, получаем

$$F_1(x) = \exp[-S(x)]\sum_{k=0}^{N} M_k(x) + \int_x^\infty \exp[-S(t)]\,M_N'(t)\,dt,$$

$$M_k(x) = M^k\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right).$$

Обозначим последний интеграл $R_N(x)$. Применяя правило Лопиталя, получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{R_N(x)}{\psi_N(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{M_{N+1}(x)}{M_{N+1}(x)-M_N(x)} = 0,$$

и (2.39) доказано. Аналогично доказывается (2.40).

2.3. Последовательность (2.38) является асимптотической, если:

$$S(x) = x^\alpha, \quad f(x) = x^\beta(\ln x)^\gamma,$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, γ — любое.

2.4. $\displaystyle\int_0^x t^\alpha e^{t^2/2}dt \sim x^{\alpha-1}e^{x^2/2} \quad (x\to+\infty).$

2.5. $\displaystyle\int_x^\infty t^\alpha e^{-t^\beta}dt \sim \beta^{-1}x^{\alpha-\beta+1}e^{-x^\beta}, \quad \beta>0 \quad (x\to+\infty).$

2.6. $\displaystyle\int_0^x t^\alpha e^{-1/t}dt \sim x^{\alpha+2}e^{-1/x} \quad (x\to+0).$

5. **Дополнения.** Рассмотрим асимптотику интеграла при $x\to S$

$$F(s) = \int_a^{a+\omega}(x-a)^\alpha h(x,s)\,e^{-g(x,s)}dx, \tag{2.42}$$

где $\alpha>-1$, $\omega=\omega(s)$, $0<\omega(s)\leqslant C$.

Пусть $g^{(n-1)}(x,s)$ абсолютно непрерывна (производная берется по x) при $a\leqslant x\leqslant a+\omega$, s лежит в окрестности точки S,

$$g^{(n)}(x,s) = (x-a)^\beta k(x,s), \quad \beta>-1.$$

Введем обозначения

$$\underline{k(s)} = e \inf k(x, s), \quad \overline{k(s)} = \sup k(x, s), \quad a \leqslant x \leqslant a + \omega$$

и $k(s)$ — такая функция, что $k(s) \sim \underline{k(s)}$ при $s \to S$. Аналогично вводятся обозначения $\underline{h(s)}$, $\overline{h(s)}$, $h(s)$.

Теорема 2.7 [133]. *Пусть при $s \to S$*

$$\omega^{\beta+n}(s) k(s) \to \infty, \quad \underline{k(s)} \sim \overline{k(s)}, \quad \underline{h(s)} \sim \overline{h(s)},$$
$$g^{(j)}(a, s) = o(k^{j/(\beta+n)}(s)), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тогда при $s \to S$ имеем

$$F(s) \sim [\Gamma(\beta+n+1)/\Gamma(\beta+1) k(s)]^{(\alpha+1)/(\beta+n)} \times$$
$$\times \Gamma((\alpha+1)/(\beta+\alpha)) h(s) e^{-g(a, s)} (\beta+n)^{-1}. \quad (2.43)$$

Рассмотрим интеграл

$$F_1(s) = \int_A^{a+\omega} (x-a)^\alpha h(x, s) e^{-g(x, s)} dx, \quad (2.44)$$

где $a = a(s)$, $A = A(s)$, $\alpha > -1$.

Теорема 2.8 [133]. *Пусть условия теоремы 2.7 выполнены и*

$$(A(s) - a(s))^{\beta+n} k(s) = O(1) \qquad (s \to S).$$

Тогда при $s \to S$ имеем

$$F_1(s) \sim [\Gamma(\beta+n+1)/\Gamma(\beta+1) k(s)]^{(n+1)/(\beta+n)} \times$$
$$\times \Gamma((\alpha+1)/(\beta+n);\ \varkappa(s) h(s)) e^{-g(a, s)} (\beta+n)^{-1}, \quad (2.45)$$
$$\varkappa(s) = (A-a)^{\beta+n} \Gamma(\beta+1)/\Gamma(\beta+n+1).$$

Здесь $\Gamma(a, x)$ — неполная гамма-функция:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt.$$

2.7. Рассмотрим «неполную» функцию Макдональда

$$B_s(y, z) = \frac{1}{2} \int_y^\infty x^{s-1} e^{-z(x+1)/2} dx,$$

где y, $z > 0$ и $z^4 = o(s^3)$, $s \to +\infty$. Тогда при $s \to +\infty$ имеем

1°. $y < 2s/z$, $\sqrt{s} = o(zy/2 - s)$:

$$B_s(y, z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2s}} \left(\frac{2s}{z}\right)^s \exp(-s - z^2/(4s)).$$

2°. $y \geqslant 2s/z$, $zy/2 - s = O(\sqrt{s})$:

$$B_s(y, z) \sim$$
$$\sim \frac{1}{2}(2s)^{-1/2}\Gamma(1/2; [(zy/2 - s)^2/2s]\,(2s/z)^s \exp(-s - z^2/(4s)).$$

3°. $y > 2s/z$, $\sqrt{s} = o(zy/2 - s)$:

$$B_s(y, z) \sim y^s \exp[-z(y + 1/y)/2]\,(zy - 2s)^{-1}.$$

2.8. Рассмотрим интеграл

$$I(s) = \int_0^{\omega(s)} x^\gamma \exp[-s \operatorname{sh}^m (x + 1/s)]\, dx,$$

где $\gamma > -1$, $m \geqslant 1$ — целое. Если $\omega(s) = (\ln s/s)^{1/m}$, то из теоремы 2.8 следует, что

$$I(s) \sim s^{-(\gamma+1)}\Gamma[(\gamma + 1)/m]\, m^{-1}, \quad m \geqslant 2,$$
$$I(s) \sim s^{-(\gamma+1)}\Gamma(\gamma + 1)\, e^{-1}, \quad m = 1.$$

В [135], [136] рассматриваются интегралы, зависящие от двух вещественных параметров

$$F(s, \sigma) = \int_x^b e^{-g(s, \sigma, t)} (t - x)^\lambda dt, \quad \lambda > -1. \tag{2.46}$$

Параметр s лежит в окрестности точки s_0, параметр σ произволен. Оценки равномерны по σ. Функция g представима в виде

$$g(s, \sigma, t) = k(s, \sigma, t) - l(s, \sigma, t).$$

Введем обозначения $t = x + z$, k_n, l_n — производные порядка n от функций k, l по переменной t,

$$F_1(s, \sigma) = \int_x^{y+\omega} e^{-g(s, \sigma, t)} (t - x)^\lambda dt.$$

Функции k, l предполагаются достаточно гладкими; $0 < \omega = \omega(s, \sigma) \leqslant b - y$. Пусть при $x \leqslant t \leqslant y + \omega$ выполнены условия:

$$g_r = o(z^{n-r}),\ r = 1, \ldots, n-1,\ k_r = o(z^{n-r}),$$
$$r = n,\ n+1, \ldots, m-1,\ \omega^m k_m \to \infty,$$

и для всех $\xi \in [x, y+\omega]$ имеем

$$k_m(s, \sigma, \xi) \sim k_m, \quad l_n(s, \sigma, \xi) \sim l_n, \quad l_n > 0.$$

1. Если $zk_m^{1/m} = o(1)$, то

$$F_1(s, \sigma) \sim \frac{1}{m}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{m}\right)\left(\frac{m!}{k_m}\right)^{(\lambda+1)/m} e^{-g(s,\sigma,x)}. \qquad (2.47)$$

2. Если $0 < c_1 \leqslant zk_m^{1/m} \leqslant c_2$, то

$$F_1(s, \sigma) \sim k_m^{-(\lambda+1)/m} e^{-g(s,\sigma,x)} \int\limits_0^\infty t^\lambda \exp\left(-\frac{t^m}{m!} + \frac{l_n t^n}{k_m^{n/m} n!}\right) dt. \qquad (2.48)$$

3. Если $zk_m^{1/m} \to +\infty$ и выполнены условия

$$g_1(s, \sigma, y) = o\left(z^{(m-2)/2} k_m^{1/2}\right), \quad n \geqslant 2,$$
$$k_1(s, \sigma, y) - l_1(s, \sigma, \xi) = o\left(z^{(m-2)/2} k_m^{1/2}\right), \quad n = 1,$$

при всех $\xi \in [x, y+\omega]$, то

$$F_1(s, \sigma) \sim z^\lambda \left[\frac{2\pi(m-1)!}{(m-n)\, z^{m-2} k_m}\right] e^{-g(s,\sigma,y)}. \qquad (2.49)$$

Заметим, что в случае 2 асимптотика F_1 выражается через интеграл

$$Fi(\alpha, \beta; x) = \int\limits_0^\infty \exp\left(-t + xt^\alpha\right) t^{\beta-1} dt,$$

который называется *интегралом Факсена*. При $m = 2n$ интеграл из правой части (2.48) выражается через функции Эрмита $H_{-\nu}(x)$, $\nu > 0$. Пусть

$$F_2(s, \sigma) = \int\limits_{y+\omega}^{b} e^{-g(s,\sigma,t)} (t-x)^\lambda dt.$$

Теорема 2.9. *Пусть выполнены сформулированные выше условия и*

$$z = O(\omega), \quad F_2(s, \sigma) = O(\omega^\lambda e^{-g(s,\sigma,y+\omega)})/g_1(s, \sigma, y+\omega).$$

Тогда асимптотические формулы (2.47), (2.48), (2.49) *справедливы для интеграла* (2.46).

В [136] исследован также случай $l_n < 0$.

2.9. Пусть $x = 0$, $b = +\infty$, $s_0 = +\infty$ и

$$g(s, \sigma, t) = \sigma^2 s t^3 + s^3 t^4 - \sigma s t^2.$$

Если $\sigma = o(s)$, то

$$F(s, \sigma) \sim s^{-3/4} \int_0^\infty \exp\left[- t^5 + \frac{\sigma}{s^{1/2}} \left| 1 - \left(\frac{\sigma^2}{2s^{\sigma}} \right)^{1/2} \right|^{1/2} t^2 \right] dt.$$

Если $s = o(\sigma^{2/5})$, $s^{6/5} = o(\sigma)$, то

$$F(s, \sigma) \sim (\sigma^2 s)^{-1/5} \int_0^\infty \exp\left(- t^5 + \sigma^{1/5} s^{3/5} \left| 1 - \left(\frac{20 s^{\sigma}}{27 \sigma^5} \right)^{1/3} \right|^{3/5} t^2 \right) dt.$$

2.10. Пусть $0 < \gamma < 1$, $b = +\infty$, $s_0 = +\infty$ и $g(s, \sigma, t) = t^2/(2s) - 2t + s \ln t - \sigma t^{\gamma}$. При $\sigma > 0$, $\sigma = o(s^{1/2-\gamma})$ и при $\sigma \leqslant 0$

$$F(s, \sigma) \sim 3^{1/3} s^{2/3-s} e^{3s/2 + \sigma s^{\nu}} \int_0^\infty \exp\left(- t^3 + 3^{1/3} \gamma \sigma s^{\nu - t/3} \right) dt.$$

Если $s^{1/2-\gamma} = o(\sigma)$, $\sigma = o(s^{3/5-\gamma})$, $\sigma > 0$, то

$$F(s, \sigma) \sim \sqrt{\pi} \left(\frac{s^{3-\gamma}}{\gamma\sigma} \right)^{1/4} s^{-s} \exp\left[\frac{3}{2} s + \sigma s^{\nu} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3} (\gamma\sigma)^{3/2} s^{(3\gamma-1)/2} + \frac{2\gamma - 1}{4} (\gamma\sigma)^2 s^{2\gamma-1} \right].$$

Если $\sigma < 0$, $s^{1/3-\gamma} < \sigma$, то

$$F(s, \sigma) \sim - \frac{1}{\gamma\sigma s^{s+\gamma-1}} \exp\left(\frac{5}{2} s + s\sigma^{\nu} \right).$$

§ 3. Некоторые сведения из анализа

1. Обозначения. Теоремы об обратных и неявных функциях. Будем использовать следующие обозначения: Ω — область в $\mathbb{R}^n_x$ (открытое связное множество), $\partial\Omega$ — граница области Ω, $[\Omega] = \Omega \cup \partial\Omega$, α — мультииндекс: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \geqslant 0$ — целые числа,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \quad \partial^{\alpha} f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$D^{\alpha} f(x) = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} f(x).$$

Граница $\partial\Omega \in C^\infty$ по определению, если в окрестности каждой точки $x^0 \in \partial\Omega$ ее можно локально задать уравнением вида $x_j = \varphi(x')$, $x' \in U$, $x' = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, U — окрестность точки $x^{0\prime}$ и функция $\varphi(x')$ бесконечно дифференцируема в U'.

Введем классы функций: $C([\Omega])$, $C^r(\Omega)$, $C^r([\Omega])$, $C_0^r(\Omega)$ $(r \geqslant 0$ — целое число или $r = \infty)$. Функция $f(x)$ удовлетворяет соответственно условиям: 1) $f(x)$ непрерывна в $[\Omega]$; 2) $\partial^\alpha f(x)$ непрерывны при $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant r$; 3) $\partial^\alpha f(x)$ непрерывны при $x \in [\Omega]$; 4) $f(x) \in C^r(\Omega)$ и $f(x) = 0$ в некоторой окрестности множества $\partial\Omega$. Здесь $C^0 = C$. Функции $f(x) \in C_0(\mathbf{R}^n)$ называются *финитными*. *Носителем финитной функции* $f(x)$ называется замыкание множества, на котором $f(x) \neq 0$; обозначение носителя: $\operatorname{supp} f(x)$.

Рассмотрим отображение φ: $\Omega_x \to \Omega_y$, заданное формулой $y = \varphi(x)$, $x \in \Omega_x$, или, в покомпонентной записи, $y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. По определению отображение φ принадлежит классу C^r $(r \geqslant 1$ — целое), если $\varphi_j(x) \in C^r(\Omega_x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Взаимно однозначное отображение φ называется *диффеоморфизмом* (Ω_x на Ω_y) класса C^r, если $\varphi \in C^r(\Omega_x)$, $\varphi^{-1} \in C^r(\Omega_y)$.

Пусть $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$, $x \in \mathbf{R}^n$, где $\varphi_j(x)$ — скалярные функции. *Матрицей Якоби* называется $(k \times n)$-матрица

$$\varphi_x'(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Приведем формулировки известных теорем из анализа.

Теорема об обратной функции. *Пусть вектор-функция $y = \varphi(x)$, где $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяет условиям:*

1°. $\varphi(x) \in C^r$, $r \geqslant 1$, *в окрестности U точки x^0.*

2°. $\det \varphi_x'(x^0) \neq 0$.

Тогда существуют окрестность V точки $y^0 = \varphi(x^0)$ и вектор-функция $x = \psi(y)$ такие, что $\psi(y) \in C^r(V)$ и

$$\varphi(\psi(y)) = y, \quad y \in V.$$

Обратная функция единственна в следующем смысле: если существуют две функции $\psi^{(1)}(y)$, $\psi^{(2)}(y)$, обладающие указанными свойствами в окрестностях $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ точки y^0, то

$$\psi^{(1)}(y) = \psi^{(2)}(y), \quad y \in V^{(1)} \cap V^{(2)}.$$

Теорему об обратной функции можно сформулировать следующим образом:

если условия 1°, 2° *выполнены, то отображение* $y = \varphi(x)$ *является диффеоморфизмом класса* $C^r(U)$ *в достаточно малой окрестности* U *точки* x^0.

Справедлива формула

$$\varphi'_x(x) = \left(\psi'_y(y)\right)^{-1}, \quad y = \varphi(x).$$

Пусть дана вещественнозначная вектор-функция $F(x, y) = (F_1(x, y), \ldots, F_k(x, y))$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^k$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0,$$

т. е. систему уравнений

$$\begin{gathered} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = 0. \end{gathered}$$

Теорема о неявной функции. *Пусть* Ω — *область в* $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$, *вектор-функция* $F(x, y) \in C^r(\Omega)$, *и пусть в точке* $(x^0, y^0) \in \Omega$

$$F(x^0, y^0) = 0, \quad \det F'_y(x^0, y^0) \neq 0.$$

Тогда существуют окрестность U *точки* x^0 *и вектор-функция* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in C^r(U)$ *такие, что*

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in U, \quad f(x^0) = y^0.$$

Вектор-функция $f(x)$ единственна в следующем смысле: если существуют две вектор-функции $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, обладающие указанными свойствами в окрестностях $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ точки x^0, то $f^{(1)}(x) \equiv f^{(2)}(x)$, $x \in U^{(1)} \cap U^{(2)}$.

Справедлива формула

$$f'_x(x) = -\left(F'_y(x, y)\right)^{-1} F'_x(x, y).$$

2. Лемма Морса. Пусть $S(x) \in C^r(\Omega)$, $r \geqslant 2$,— вещественнозначная скалярная функция. Введем обозначение

$$S''_{xx}(x) = \left(\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Точка x^0 называется *критической* точкой функции $S(x)$, если

$$\nabla S(x^0) = 0. \tag{3.2}$$

Критическая точка x^0 называется *невырожденной*, если

$$\det S''_{xx}(x^0) \neq 0. \tag{3.3}$$

Определитель из (3.3) называется *гессианом* функции $S(x)$ в точке x^0.

Лемма 3.1 (лемма Морса). *Пусть x^0 — невырожденная критическая точка функции $S(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и пусть $S(x) \in C^\infty$ в окрестности точки x^0. Тогда существуют окрестности U, V точек $x = x^0$, $y = 0$ и диффеоморфизм φ: $V \to U$ класса C^∞ такие, что*

$$S(\varphi(y)) = S(x^0) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j^2, \tag{3.4}$$

$$\det \varphi'_y(0) = 1. \tag{3.5}$$

Здесь μ_j — собственные значения матрицы $S''_{xx}(x^0)$.

Замечание 3.1. Из леммы Морса следует, что невырожденные критические точки изолированы.

Замечание 3.2. Если $S(x) \in C^r$, $r \geqslant 3$, в окрестности точки x^0, то $\varphi(y) \in C^{r-2}$ в окрестности точки $y = 0$.

Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — точка n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Определение 3.1 остается в силе для функций $S(z)$ от n комплексных переменных. Приведем комплексный вариант леммы Морса.

Лемма 3.2. *Пусть z^0 — невырожденная критическая точка функции $S(z)$, голоморфной в окрестности точки z^0. Тогда существуют окрестности U, V точек z^0, $w = 0$ и вектор-функция $z = \varphi(w)$ такие, что*

$$S(z) - S(z^0) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j^2, \quad \det \varphi'_w(0) = 1. \tag{3.6}$$

При этом $\varphi(w)$ голоморфна при $w \in V$ и взаимно однозначно отображает V на U.

Сформулируем аналог леммы Морса в случае, когда функция S зависит от дополнительных параметров.

Лемма 3.3. *Пусть $S(x, \alpha)$ — вещественнозначная функция, удовлетворяющая условиям:*

1. $S(x, \alpha) \in C^\infty(U \times V)$, *где* $U \subset \mathbb{R}^n_x$, $V \subset \mathbb{R}^k_\alpha$ — *окрестности точек* x^0, α^0.

2. $S'_x(x^0, \alpha) \equiv 0$, $\alpha \in V$,
$S'_x(x, \alpha) \neq 0$ *при* $x \in U \setminus \{x^0\}$, $\alpha \in V$.

3. $\det S''_{xx}(x^0, \alpha) \neq 0$, $\alpha \in V$.

Тогда существуют окрестности V_0, U_0, W точек $\alpha = \alpha^0$, $x = x^0$, $y = 0$ и вектор-функция $x = \varphi(y, \alpha)$ такие, что:

1°. *При $\alpha \in V$, $y \in W$ имеем $\varphi(y, \alpha) \in U_0$ и*

$$S(\varphi(y, \alpha), \alpha) = S(x^0, \alpha) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} y_j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=p+1}^{n} y_j^2, \quad (3.7)$$

где p — число положительных собственных значений матрицы $S''_{xx}(x^0, \alpha^0)$.

$$2^\circ. \quad \varphi(y, \alpha) \in C^\infty(W \times V_0), \quad \varphi(0, \alpha^0) = 0,$$
$$\det \varphi'_y(0, \alpha^0) = |\det S''_{xx}(x^0, \alpha^0)|. \quad (3.8)$$

Эта лемма доказывается точно так же, как и лемма 3.1. Вырожденные критические точки будут рассмотрены в гл. III, § 5.

3. Преобразование Фурье экспоненты от квадратичной формы. Введем обозначение: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то $\langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$. Пусть $A = (a_{ij})$ — симметричная $(n \times n)$-матрица. Обозначим $\operatorname{Re} A$ матрицу с элементами $\operatorname{Re} a_{ij}$; запись $\operatorname{Re} A \geqslant 0$ ($\operatorname{Re} A > 0$) означает, что $\langle \operatorname{Re} Ax, x\rangle \geqslant 0$ (соответственно >0) для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Предложение 3.1. *Пусть A — невырожденная симметричная матрица порядка $n \times n$ и $\operatorname{Re} A \geqslant 0$. Тогда при $\lambda > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\langle Ax, x\rangle - i\langle x, \xi\rangle\right] dx =$$
$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} (\det A)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\lambda}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle\right]. \quad (3.9)$$

Ветвь $\sqrt{\det A}$ выбрана следующим образом:

$$(\det A)^{-1/2} = |\det A|^{-1/2} \exp[-i \operatorname{Ind} A],$$
$$\operatorname{Ind} A = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \arg \mu_j(A), \quad |\arg \mu_j(A)| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad (3.10)$$

где $\mu_j(A)$ — собственные значения матрицы A.

Пусть $J(A)$ — интеграл из левой части (3.9). Докажем (3.9) в случае, когда $\operatorname{Re} A > 0$. Тогда интеграл $J(A)$ сходится абсолютно. Так как $\operatorname{Re} A > 0$, то квадратичную форму можно привести к сумме квадратов, т. е. существует вещественная $(n \times n)$-матрица T такая, что

$$'TAT = \Lambda = \operatorname{diag}(\mu_1(A), \ldots, \mu_n(A))$$

и

$$\det T = 1. \tag{3.11}$$

Делая замену переменных

$$x = Ty, \quad \eta = 'T\xi, \tag{3.12}$$

получаем

$$J(A) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle \Lambda y, y\rangle - i\langle y, \eta\rangle\right] dy =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\mu_j(A)\, y_j^2 - iy_j\eta_j\right] dy_j =$$

$$= (2\pi)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle \Lambda^{-1}\eta, \eta\rangle\right] \prod_{j=1}^{n} (\mu_j(A))^{-1/2}, \tag{3.13}$$

где ветви $\sqrt{\mu_j(A)}$ выбраны в соответствии с (3.10). Далее,

$$\langle \Lambda^{-1}\eta, \eta\rangle = \langle T\Lambda^{-1}{}'T\xi, \xi\rangle = \langle A^{-1}\eta, \eta\rangle,$$

так что (3.9) доказано при $\operatorname{Re} A > 0$.

Если хотя бы одно из чисел $\mu_j(A)$ является чисто мнимым, то интеграл $J(A)$ не является абсолютно сходящимся, и его необходимо регуляризовать. Один из возможных способов регуляризации состоит в следующем: по определению полагаем

$$J(A) = \lim_{\varepsilon \to +0} J_\varepsilon(A),$$

$$J_\varepsilon(A) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\langle x, x\rangle - i\langle x, \xi\rangle\right] dx. \tag{3.14}$$

Интеграл $J_\varepsilon(A)$ при $\varepsilon > 0$ сходится абсолютно, так что для него справедливы формулы (3.8), (3.10), где $\mu_j(A)$ следует заменить на собственные значения $\mu_j(A, \varepsilon)$ матрицы $A + \varepsilon I$ (I — единичная матрица). Так как $\mu_j(A, \varepsilon) \to \mu_j(A)$ при $\varepsilon \to +0$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и $|\arg \mu_j(A, \varepsilon)| < \pi/2$ для ветвей $\sqrt{\mu_j(A, \varepsilon)}$, то $|\arg \mu_j(A)| \leqslant \pi/2$.

В частности, при $\xi = 0$ имеем

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\langle Ax, x\rangle\right] dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} (\det A)^{-1/2}. \tag{3.15}$$

Отметим важный частный случай формулы (3.9).

Предложение 3.2. *Пусть A — вещественная симметричная невырожденная $(n \times n)$-матрица. Тогда при* $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\lambda > 0$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp\left[\frac{i\lambda}{2}\langle Ax, x\rangle - i\langle x, \xi\rangle\right] dx =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} |\det A|^{-1/2} \exp\left[-\frac{i}{2\lambda}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle\right] \exp\left(\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} A\right). \tag{3.16}$$

Здесь $\operatorname{sgn} A$ — *сигнатура* матрицы A, т. е.

$$\operatorname{sgn} A = \nu_+(A) - \nu_-(A), \tag{3.17}$$

где $\nu_+(A)$ — число положительных, $\nu_-(A)$ — число отрицательных собственных значений матрицы A.

4. Интегралы по множествам уровня. Пусть $S(x) \in C^\infty(\Omega)$ — вещественнозначная функция и S_c — множество уровня, заданное уравнением $S(x) = c$ (c — постоянная), $x \in \Omega$. Если S_c непусто и $\nabla S(x) \neq 0$ на S_c, то это множество является $(n-1)$-мерным C^∞-многообразием в $\mathbf{R}^n_x$. *Дифференциальной формой Лере — Гельфанда* называется форма ω_S степени $n-1$, удовлетворяющая уравнению

$$dS(x) \wedge \omega_S(x) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{3.18}$$

Эта форма однозначно определена на S_c при $x \in S_c$, если $\nabla S(x) \neq 0$ на S_c ([12]). Если $\partial S(x)/\partial x_j \neq 0$ на S_c, то справедлива формула

$$\omega_S(x) = (-1)^{j-1} \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n}{\partial S(x)/\partial x_j} \tag{3.19}$$

(крышка означает, что соответствующий сомножитель отсутствует).

Приведем более удобную формулу:

$$\omega_S(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial S(x)}{\partial x_j} |\nabla S(x)|^{-2} dx_1 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{3.20}$$

Обе формулы проверяются прямыми выкладками.

Пример 3.1. Пусть $S(x) = -\sum_{j=1}^{n} x_j^2$. Тогда при $x \in S_c$, $c > 0$, имеем

$$\omega_S(x) = \frac{1}{2c} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{3.21}$$

Сделаем замену переменных $x = \varphi(y)$ (φ есть диффеоморфизм класса C^∞). Пусть $S^*(y) = S(\varphi(y))$ и $\omega^*_{S^*}(y)$ — форма Лере — Гельфанда, т. е. $\omega^*_{S^*}(y) \wedge dS^*(y) = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$. Тогда

$$\omega^*_{S^*}(y) = \left(\det \varphi'_y(y)\right)^{-1} \omega_S(x) \quad (x = \varphi(y)), \tag{3.22}$$

что следует из уравнений для ω, ω^* и тождества $dx = \det \varphi'_y(y)\, dy$.

Интеграл $\int_\Omega h(x)\, dx$ можно вычислять так: сначала проинтегрировать по множествам уровня S_c, а затем по c. Именно,

$$\int_\Omega h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_h(c)\, dc, \quad \Phi_h(c) = \int_{S_c} h(x) \chi_\Omega(x) \omega_S(x). \tag{3.23}$$

Здесь $\chi_\Omega(x)$ — характеристическая функция области Ω (равная 1 при $x \in \Omega$ и равная 0 вне Ω). В частности,

$$\begin{gathered} F(\lambda) \equiv \int_\Omega f(x) \exp[\lambda S(x)]\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda c} \Phi_f(c)\, dc, \\ \Phi_f(c) = \int_{S(x)=c} f(x) \chi_\Omega(x) \omega_S(x). \end{gathered} \tag{3.24}$$

(Мы не указываем здесь очевидных условий применимости формул (3.23), (3.24).)

Из §§ 1 и 2 следует, что асимптотика интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ определяется поведением функции $\Phi_f(c)$ в окрестности точки максимума функции S. Пусть x^0 — изолированная точка максимума функции S. Тогда множества уровня S_c: $S(x) - S(x^0) = -c$ при малых $c > 0$ являются C^∞-многообразиями, диффеоморфными сфере S^{n-1} размерности $n-1$ и содержащими внутри себя точку x^0. Рассмотрим интеграл

$$\Phi_f(c) = \int\limits_{S_0} f(x)\,\omega_S(x). \tag{3.25}$$

Предложение 3.3. *Пусть x^0 — невырожденная точка максимума функции $S(x)$, и пусть $f(x)$, $S(x) \in C^\infty$ в окрестности точки x^0. Тогда*

$$\Phi_f(c) \sim c^{n/2-1} \sum_{k=\infty}^{\infty} a_k c^k \quad (c \to +0). \tag{3.26}$$

Пусть $x^0 = 0$, $S(x) = -\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2$. Тогда в силу (3.21)

$$\Phi_f(c) = \frac{1}{2c} \int\limits_{|x|=\sqrt{c}} f(x)\,\eta(x) = \frac{c^{n/2-1}}{2} \int\limits_{|x|=1} f\left(x\sqrt{c}\right)\eta(x),$$
$$\eta(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j\,dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{3.27}$$

Разложим $f(x\sqrt{c})$ по формуле Тейлора:

$$f(x\sqrt{c}) = f(0) + \sqrt{c}\,f_1(x) + \ldots + c^{N/2} f_N(x) + O(c^{(N+1)/2}),$$

где $f_j(x)$ — однородные полиномы степени j, и заметим, что $\int\limits_{|x|=1} \eta(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$ для любой нечетной функции $\varphi(x)$. Подставляя это разложение в (3.27), получаем (3.26). Если $S(x)$ имеет изолированную невырожденную точку максимума x^0, то в силу леммы Морса ее с помощью замены переменных $x = \varphi(y)$ можно привести к виду $S(\varphi(y)) = S(0) - \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^2$. Из (3.22), (3.24) следует, что

$$\Phi_f(c) = \frac{1}{2c} \int\limits_{|y|=\sqrt{c}} f^*(y)\,\eta(y), \quad f^*(y) = f(\varphi(y))\,(\det \varphi'(y))^{-1},$$

т. е. $\Phi_f(c)$ имеет вид (3.27).

Если x^0 — вырожденная критическая точка функции S, то асимптотику $\Phi_f(c)$ в общем случае не удается вычислить. Некоторые результаты, полученные в этом направлении, основаны на теоремах 3.1, 3.2.

Пусть $S(z)$, $h(z)$ — функции, голоморфные в окрестности точки $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Эти функции называются *эквива-*

лентными в точке z^0, если существует вектор-функция $w = \varphi(z)$, которая голоморфна в некоторой окрестности U точки z^0, взаимно однозначно отображает U на себя, и такая, что $S(\varphi(z)) = h(z)$, $z \in U$. При этом обратное отображение $\varphi^{-1}(z)$ также голоморфно в U.

Теорема 3.1 ([1]). *Пусть z^0 — изолированная критическая точка функции $S(z)$, голоморфной в окрестности точки z^0. Тогда функция $S(z)$ в точке z^0 эквивалентна достаточно длинному отрезку своего ряда Тейлора.*

Пусть $P(x)$ — полином с вещественными коэффициентами, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Рассмотрим функцию

$$P_+(\lambda) = \int_{P(x)>0} [P(x)]^\lambda \varphi(x)\, dx. \tag{3.28}$$

Этот интеграл является голоморфной функцией λ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Теорема 3.2 ([51]). *Функция $P_+(\lambda)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость λ как мероморфная функция λ. Ее полюсы лежат на конечном числе арифметических прогрессий вида $\lambda_{k,j} = -a_{k,j} - kb_{k,j}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $a_{k,j}$, $b_{k,j}$ — положительные рациональные числа, кратности всех полюсов ограничены (одним и тем же числом). Имеет место оценка*

$$|P_+(\lambda)| \leqslant C\,|\lambda|^{-1} \tag{3.29}$$

при $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant 1$, $-A \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ *для любого* $A > 0$.

Теорема 3.3 [100]. *Пусть $P(x)$ — вещественный полином, $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда при любом вещественном a*

$$\Phi_f(a+c) = \int_{P(x)=a+c} f(x)\,\omega_P(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{N} a_{kl}^{\pm} |c|^{r_k^{\pm}} (\ln|c|)^{l-1} \right) \quad (c \to \pm 0). \tag{3.30}$$

Здесь $r_j^{\pm}$ — рациональные числа, $r_0^+ < r_1^+ < \ldots < r_j^+ \to \infty$ $(j \to \infty)$, и аналогично для r_j^-.

Пусть $a = 0$, $c > 0$ для определенности. Имеем при $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$P_+(\lambda) = \int_0^\infty c^\lambda \Phi_f(c)\, dc,$$

т. е. $P_+(\lambda)$ является преобразованием Меллина функции $c\Phi_j(c)$. По формуле обращения

$$\Phi_j(c) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} c^{-\lambda-1} P_+(\lambda)\, d\lambda, \quad \sigma > 0.$$

Выберем $b > 0$ так, чтобы точка $\lambda = -b$ не была полюсом функции $P_+(\lambda)$, и заменим контур интегрирования прямой $\operatorname{Re}\lambda = -b$ (это можно сделать в силу оценки (3.29)). Тогда

$$\Phi_j(c) = \sum_{\operatorname{Re}\lambda_j > -b} \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_j} \left(c^{-\lambda-1} P_+(\lambda)\right) + \int\limits_{-b-i\infty}^{-b+i\infty} c^{-\lambda-1} P_+(\lambda)\, d\lambda,$$

где λ_j — полюсы функции $P_+(\lambda)$. Последний интеграл имеет порядок $O(c^{b-\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, а вычет в полюсе λ_j имеет вид $\sum\limits_{0}^{m} a_{kj} c^{-\lambda_j} (\ln c)^k$, где m — кратность полюса λ_j (напомним, что $\lambda_j < 0$). Тем самым (3.30) доказано при $c > 0$; аналогично исследуется случай $c < 0$.

Из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть $S(x)$ — вещественная функция, x^0 — ее критическая точка, $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp} f(x)$ не содержит критических точек функции $S(x)$, отличных от x^0. Пусть $S(x)$ аналитически продолжается в комплексную окрестность точки x^0, и эта точка является изолированной критической точкой функции $S(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$. Тогда все заключения теоремы* 3.3 *остаются в силе.*

Коэффициенты разложения (3.30) удается вычислить в явном виде еще в одном важном случае. Напомним определение: функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, называется *положительно однородной* степени α, если $\varphi(tx) = t^\alpha \varphi(x)$ при любых $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Лемма 3.4. *Пусть $S(x)$ — положительно однородная функция степени $\alpha \neq 0$ и $S(x) \in C^\infty$ при $x \neq 0$. Тогда множество уровня $S(x) = c$ при $c \neq 0$ либо пусто, либо является C^∞-многообразием, звездным относительно начала координат.*

Предложение 3.4. *Пусть $S(x)$ — положительно однородная функция степени $\alpha \neq 0$, $S(x) \in C^\infty$ при $x \neq 0$ и $S(x) > 0$, $x \neq 0$. Пусть $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.*

Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$\Phi_f(c) \sim c^{n/\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} c^{k/\alpha} \left(\sum_{|\beta|=k} \frac{\partial^\beta f(0)}{\beta!} \int_{S(x)=1} x^\beta \omega \right). \quad (3.31)$$

Здесь ω — дифференциальная форма Лере — Гельфанда, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — мультииндекс,

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}, \quad \partial^\beta = (\partial/\partial x_1)^{\beta_1} \ldots (\partial/\partial x_n)^{\beta_n}.$$

В силу однородности S имеем

$$\int_{S=c} f(x)\,\omega = c^{n/\alpha-1} \int_{S=1} f(c^{1/\alpha}x)\,\omega. \quad (3.32)$$

Множество уровня M_1: $S=1$ компактно, так как $S(x) > 0$ при $x \neq 0$. По формуле Тейлора имеем

$$f(c^{1/\alpha}x) = \sum_{|\beta|=0}^{N} \frac{c^{|\beta|/\alpha}}{\beta!} x^\beta \partial^\beta f(0) + O(c^{(N+1)/\alpha}), \quad x \in M_1$$

при любом целом $N \geqslant 0$, откуда следует (3.31).

Если же положительно однородная функция $S(x)$ может менять знак, то множества уровня $S=c$ будут неограниченными многообразиями. В этом случае вычисление разложения (3.30) (даже тогда, когда S — однородный полином) весьма затруднительно, и мы ограничимся одним примером.

Пример 3.2. Пусть $S(x)$ — положительно однородная функция степени $\alpha \neq 0$, $S(x) \in C^\infty$ при $x \neq 0$, $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, и пусть сходится интеграл $\int_{S=1} \omega$. Тогда

$$\Phi_f(c) \sim c^{n/\alpha-1} f(0) \int_{S=1} \omega. \quad (3.33)$$

Для доказательства этой формулы достаточно показать, что

$$\lim_{c \to 0} \int_{S=1} [f(xc^{1/\alpha}) - f(0)]\,\omega = 0. \quad (3.34)$$

Разобьем этот интеграл на два: $I_1(R) + I_2(R)$, где $I_1(R)$ — интеграл по множеству $|x| \leqslant R$, $S(x) = 1$. Из ограниченности функций f и сходимости интеграла $\int\limits_{S=1} \omega$ следует существование $R(\varepsilon)>0$ такого, что $|I_2(R)|<\varepsilon$ при $R \geqslant R(\varepsilon)$, $0 \leqslant c \leqslant 1$. Далее, $I_1(R) \to 0$ при $c \to 0$, так что $|I_1(R)|<\varepsilon$ при малых c, и (3.34) доказано.

§ 4. Метод Лапласа для кратных интегралов

1. Вклад от внутренней точки максимума. Рассмотрим интеграл Лапласа

$$F(\lambda)=\int\limits_{\Omega} f(x) \exp [\lambda S(x)]\, dx. \tag{4.1}$$

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, λ — параметр, $S(x)$ — вещественнозначная функция. Как и в одномерном случае, основной вклад в асимптотику $F(\lambda)$ вносят окрестности точек, в которых достигается $\max\limits_{x \in [\Omega]} S(x)$. Напомним обозначение:

$$S_\varepsilon=\left\{\lambda:\ |\arg \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\}, \quad 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2},$$

— сектор в комплексной плоскости λ.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия:*

1°. $f(x),\ S(x) \in C([\Omega])$.

2°. $\max\limits_{x \in [\Omega]} S(x)$ *достигается только в точке* $x^0 \in \Omega$.

3°. $f(x),\ S(x) \in C^\infty$ *в окрестности точки* x^0.

4°. x^0 — *невырожденная точка максимума.*

Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda) \sim \exp [\lambda S(x^0)]\, \lambda^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k}. \tag{4.2}$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз. Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda)=\exp [\lambda S(x^0)]\,(2\pi/\lambda)^{\frac{n}{2}} \frac{f(x^0)+O(\lambda^{-1})}{\sqrt{|\det S''_{xx}(x^0)|}}. \tag{4.2'}$$

Выберем окрестность U точки x^0 такую, что $f,\ S \in C^\infty(U)$, и такую, что существует диффеоморфизм φ: $U \to V$, указанный в лемме Морса, где V есть куб $|y_j| \leqslant \delta$,

$1 \leqslant j \leqslant n$. Разобьем интеграл $F(\lambda)$ на два:

$$F(\lambda) = \int\limits_U + \int\limits_{\Omega\setminus U} = F_1(\lambda) + F_2(\lambda).$$

Тогда

$$F_2(\lambda) = O(\exp[\lambda(S(x^0) - \delta')]) \qquad (\lambda \in S_\epsilon), \qquad \delta' > 0$$

(эта оценка доказывается точно так же, как в лемма 2.1.1). В интеграле $F_1(\lambda)$ сделаем замену переменных $x = \varphi(y)$, тогда

$$S(x) = S(x^0) + \sum_{j=1} \frac{\mu_j}{2} y_j^2,$$

$$F_1(\lambda) = \exp[\lambda S(x^0)] \int\limits_V \exp\left(\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \mu_j y_j^2\right) f(\varphi(y)) \times$$

$$\times \det \varphi_y'(y)\, dy, \quad (4.3)$$

где μ_j — собственные значения матрицы $S''_{xx}(x^0)$ и все $\mu_j < 0$, так как x^0 — точка максимума. Рассмотрим

$$F_{11}(\lambda) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{\lambda\mu_1}{2}y_1^2} f(\varphi(y)) \det \varphi_y'(y)\, dy_1.$$

Здесь переменные $y_2, \ldots, y_n$ играют роль параметров. Применяя теорему 2.1, получаем, что при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\epsilon$,

$$F_{11}(\lambda) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-\frac{1}{2}} a_k(y'), \quad y' = (y_2, \ldots, y_n) \qquad (4.4)$$

равномерно по $y' \in V'$ и что $a_{k_1}(y') \in C^\infty(V')$, где V' — куб $|y_j| \leqslant \delta$, $2 \leqslant j \leqslant n$. Теперь применим эту же процедуру к интегралам $\int\limits_{V'} a_{k_1}(y') \exp\left(\frac{\lambda\mu_2}{2} y_2^2\right) dy_2$, снова получим разложение вида (4.4) и т. д. Тем самым существование разложения (4.2) доказано.

Дифференцирование $F(\lambda)$ по λ снова приводит к интегралу того же вида.

Приведем другое доказательство теоремы 4.1. Достаточно рассмотреть интеграл по малой окрестности точки максимума x^0; выберем ее в виде $\{x\colon S(x) - S(x^0) < -\delta\}$,

$\delta > 0$. В силу (3.24) можно заменить интеграл (4.1) одномерным:

$$F_1(\lambda) = \exp[\lambda S(x^0)] \int_0^\delta e^{-\lambda c} \Phi_f(-c)\, dc, \qquad (4.5)$$

$$\Phi_f(-c) = \int_{S(x)-S(x^0)=-c} f(x)\, \omega_S(x), \qquad (4.6)$$

где $\omega_S(x)$ — дифференциальная форма Лере — Гельфанда. Так как при $c \to +0$ для функции $\Phi_f(-c)$ справедливо асимптотическое разложение (3.26), то (4.2) следует из леммы Ватсона.

В силу замечания к лемме Морса (см. § 3) справедлива

Теорема 4.2. *Пусть условия* 1°, 2°, 4° *теоремы* 4.1 *выполнены и* $f(x) \in C$, $S(x) \in C^2$ *в окрестности точки* x^0. *Тогда при* $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, *справедлива формула* (4.2′).

Замечание 4.1. Пусть условия 1°, 2°, 4° теоремы 4.1 выполнены. Тогда формула (4.2′) справедлива при $\lambda \to +\infty$, если $f(x) \in C$ и вещественнозначна, $S(x) \in C^2$ при x, близких к x^0. Это следует из теоремы 1.5.

Пример 4.1. Рассмотрим интеграл

$$G(\lambda) = \int_\Omega f(x)\, h^\lambda(x)\, dx. \qquad (4.7)$$

Пусть $h(x) > 0$, $x \in \Omega$, и условия теоремы 4.1 выполнены. Покажем, что тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$G(\lambda) = (f(x^0) + o(1))\, h^{\lambda+\frac{n}{2}}(x^0) \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} |\det h''_{xx}(x^0)|^{-1/2}. \qquad (4.8)$$

Действительно, $G(\lambda)$ имеет вид (4.1), где $S(x) = \ln h(x)$. Так как

$$\det S''_{xx}(x^0) = (h(x^0))^{-n} \det h''_{xx}(x^0),$$

то из (4.2′) следует (4.8).

Пример 4.2 ([5]). Вычислим асимптотику при $n \to +\infty$ интеграла

$$F(n) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos\varphi_1 \ldots \cos\varphi_r \sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_r)]^{2n} d\varphi_1 \ldots d\varphi_r.$$

Этот интеграл имеет вид (4.7), где $\lambda = 2n$, $x = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, $f = 1$, $h(\varphi) = \cos\varphi_1 \ldots \cos\varphi_2 \sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_r)$. Так как $h(\varphi) = 0$ на границе области интегрирования, то $\max h^2\varphi$ достигается внутри области. Поскольку

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi_j} = h\left(\operatorname{ctg}(\varphi_1 + \ldots + \varphi_r) - \operatorname{tg}\varphi_j\right) = 0$$

в точках максимума и $h \neq 0$ в этих точках, то $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_r$, так что мы получаем две точки максимума $\varphi^{\pm} = \pm \frac{\pi}{2(r+1)}(1, 1, \ldots, 1)$ функции h^2. Вклады от этих точек одинаковы, так что достаточно вычислить вклад от точки φ^+. Имеем

$$|h(\varphi^+)| = \left(\cos\frac{\pi}{2(r+1)}\right)^{r+1},$$

$$\frac{\partial^2 h(\varphi^+)}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j} = (1 + \delta_{ij})\left(\cos\frac{\pi}{2(r+1)}\right)^{-2} h(\varphi^+).$$

Определитель матрицы с элементами $1 + \delta_{ij}$ равен $r + 1$, так как она имеет собственное значение $r + 1$ кратности 1 и собственное значение 1 кратности r. Применяя формулу (4.8) и удваивая полученное выражение, получаем, что

$$F(n) \sim 2(\pi)^{r/2}(r+1)^{-1/2}\left(\cos\frac{\pi}{2(r+1)}\right)^{2n(r+1)+r}$$

$$(n \to +\infty).$$

Получим формулы для коэффициентов разложения (4.2).

Предложение 4.1. *В условиях теоремы 4.1 справедливо асимптотическое разложение при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$:*

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(x^0)]\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} |\det S''_{xx}(x^0)|^{-1/2} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(2\lambda)^k}\left(L_S\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^k (f(x)\exp(\lambda S(x, x^0)))\big|_{x=x^0}. \quad (4.9)$$

Здесь L_S — дифференциальный оператор

$$L_S = \langle (S''_{xx}(x^0))^{-1}\nabla, \nabla\rangle, \quad (4.10)$$

$$S(x, x^0) = S(x) - S(x^0) - \frac{1}{2}\langle S''_{xx}(x^0)(x - x^0), x - x^0\rangle. \quad (4.11)$$

Положим

$$A = -S''_{xx}(x^0),\quad S(x, x^0) = S(x) - S(x^0),$$
$$H(x, \lambda) = f(x)\exp[\lambda S(x, x^0)],$$

и пусть $\tilde{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$. Продолжим $f(x)$ на $\mathbf{R}^n$, положив $f = 0$ вне Ω, и применим равенство Парсеваля; тогда в силу (3.14)

$$F(\lambda)\exp[-\lambda S(x^0)] = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp[\lambda S(x, x^0)]\, H(x, \lambda)\, dx =$$
$$= (2\pi\lambda)^{-n/2} (\det A)^{-1/2} \int\limits_{\mathbf{R}^n_\xi} \widetilde{H}(\xi, \lambda) \exp\left[-\frac{1}{2\lambda}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle\right] d\xi. \tag{4.12}$$

Пусть $\Phi(\lambda)$ — последний интеграл. Разлагая экспоненту под интегралом в ряд Тейлора и учитывая, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \langle A^{-1}\xi, \xi\rangle^k \widetilde{H}(\xi, \lambda)\, d\xi = (2\pi)^n (-1)^k L_S^k H(x, \lambda)\big|_{x=x^0},$$

мы, пока что формально, получаем (4.9). Приведем строгое обоснование этих выкладок. Можно считать, что $H(x, \lambda) \in C_0^\infty(\Omega)$, и так как асимптотика $F(\lambda)$ не изменится, если заменить $f(x)$ на $f(x)\varphi(x)$, где $\varphi \in C^\infty$, $\varphi = 1$ в малой окрестности K_δ: $|x - x^0| < \delta$ точки x^0 и $\varphi = 0$ при $|x - x^0| > 2\delta$, то

$$F(\lambda)\exp[-\lambda S(x^0)] =$$
$$= (2\pi\lambda)^{-n/2} |\det A|^{-1/2} \left[\sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^k \int\limits_{\mathbf{R}^n} \langle A^{-1}\xi, \xi\rangle^k \widetilde{H}(\xi, \lambda) d\xi + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\mathbf{R}^n} R_N(\xi, \lambda)\, \widetilde{H}(\xi, \lambda)\, d\xi\right]. \tag{4.12'}$$

В силу неравенства

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{N} \frac{z}{k!} \right| \leqslant \frac{|z|^N e^{|z|}}{(N+1)!} \tag{4.13}$$

последний интеграл в (4.12′) не превосходит по модулю величины

$$(2|\lambda|)^{-N-1}\frac{1}{(N+1)!}\int\limits_{\mathbf{R}^n}|\langle A^{-1}\xi,\xi\rangle|^{N+1}|\widetilde{H}(\xi,\lambda)|\,d\xi\leqslant \leqslant C_N|\lambda|^{-N-1},$$

так как $H(x,\lambda)$ — финитная функция. Далее, в шаре K_δ

$$|S(x,x^0)|\leqslant c|x-x^0|^3,$$

так как эта функция имеет нуль порядка $\geqslant 3$ при $x=x^0$. Разлагая функцию $e^{\lambda S}$ в ряд Тейлора, получаем в силу (4.13)

$$H(x,\lambda)=\sum_{|\alpha|=0}^{N} f(x)\frac{(\lambda(x-x^0))^\alpha}{\alpha!}+R_N\equiv H_N+R_N,$$

$$R_N=O(|x-x^0|^{3N+3}\exp[\lambda S(x,x^0)]).$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультииндекс, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$. Так как $S(x)-S(x^0)\leqslant -a|x-x^0|^2$ в шаре K_δ, то

$$\left|\int\limits_{K_\delta}\exp[\lambda S(x,x^0)]\,R_N(x,\lambda)\,dx\right|\leqslant \leqslant C\int\limits_{|y|<\delta}\exp[-\lambda a\langle y,y\rangle]\,|y|^{3N+3}\,dy = =O\left(\lambda^{-\frac{N+n+3}{2}}\right)\quad(\lambda\to\infty,\ \lambda\in S_\varepsilon).$$

Следовательно, при любом целом $N\geqslant 0$

$$F(\lambda)=\exp[\lambda S(x^0)]\left[\int H_N(x,\lambda)\exp[\lambda S(x,x^0)]\,dx+ +O\left(\lambda^{-\frac{N+n+3}{2}}\right)\right].$$

Замечание 4.2. Ряд (4.9) не есть асимптотический ряд по степеням λ^{-1}; чтобы получить последний, ряд (4.7) надо переразложить. Коэффициент при λ^{-k} в ряде (4.9) есть полином от λ степени $\leqslant 2/3k$, так как функция $S(x,x^0)$ имеет нуль порядка $\geqslant 3$ при $x=x^0$, а L_s есть однородный дифференциальный оператор второго порядка.

Рассмотрим случай вырожденной точки максимума.

Теорема 4.3. *Пусть условия* $1^\circ-3^\circ$ *теоремы* 4.1 *выполнены. Тогда существует такое* $N<\infty$, *что при* $\lambda\to\infty$, $\lambda\in S_\varepsilon$, *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{N}a_{kl}\lambda^{-r_k}(\ln\lambda)^l\right). \tag{4.14}$$

Здесь r_k — *рациональные числа*, $n/2\leqslant r_0\leqslant r_1<\ldots<r_s$, $r_s\to+\infty$ $(s\to\infty)$.

Достаточно рассмотреть интеграл (4.5). Так как в силу теоремы 3.10 функция $\Phi_f(-c)$ имеет асимптотическое разложение (3.40) при $c\to+0$, то, применяя лемму Ватсона к одномерному интегралу (4.5), получаем (4.14).

Эта теорема является типичной теоремой существования и не дает алгоритма для вычисления коэффициентов разложения (4.14).

Пример 4.3. Пусть условия $1^\circ-3^\circ$ теоремы 4.1 выполнены, $x^0=0$ и при малых x

$$S(x)=S(0)-S_{2m}(x)+\ldots,$$

где $S_{2m}(x)$ — однородный полином степени $2m$, положительно определенный (т. е. $S_{2m}(x)>0$ при $x\neq0$). Многоточием обозначены члены порядка $\geqslant 2m+1$. Покажем, что тогда при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in S_\varepsilon$,

$$\begin{gathered}F(\lambda)\sim\lambda^{-\frac{n}{2m}}\exp[\lambda S(0)]\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-\frac{r_k}{m}},\\ a_0=f(0)\int_{\mathbf{R}^n}\exp[-S_{2m}(x)]\,dx.\end{gathered} \tag{4.15}$$

Пусть $S(0)=0$. Достаточно рассмотреть интеграл по шару K_δ: $|x|\leqslant\delta$, $\delta>0$ мало, так как отброшенный интеграл экспоненциально мал. Переходя к полярным координатам

$$x=r\omega,\quad r=|x|,\quad \omega\in S^{n-1}:\ \sum_{j=1}^{n}\omega_j^2=1,$$

получаем

$$F(\lambda)=\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{\delta}e^{-\lambda r^{2m}h(r,\omega)}r^{n-1}dr\right)d\Omega,$$

где S^{n-1} — единичная сфера, $d\Omega$ — элемент ее поверхности и $h(r,\omega)=h_{2m}(\omega)-rh_{2m+1}(\omega)-\ldots$ Так как $h_{2m}(\omega)\geqslant$ $\geqslant c>0$, $\omega\in S^{n-1}$, то функция $r^{2m}h$ при малых $\delta>0$ достигает максимума только в точке $r = 0$. Применяя к интегралу по dr лемму Ватсона и интегрируя полученное асимптотическое разложение по сфере S^{n-1}, получаем (4.15).

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda, \alpha) = \int_{\Omega} f(x, \alpha) \exp[\lambda S(x, \alpha)]\, dx, \tag{4.16}$$

содержащий дополнительные параметры $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Получим аналог теоремы 2.1. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n_x$, $\Theta \in \mathbf{R}^k_\alpha$ — ограниченные области. Введем условия:

A_3. Функция $S(x, \alpha)$ вещественнозначна, функция $f(x, \alpha)$ комплекснозначна при $(x, \alpha) \in \Omega \times \Theta$ и функции $f, S \in C^\infty([\Omega \times \Theta])$.

A_4. При каждом фиксированном $\alpha \in \Theta$ функция $S(x, \alpha)$ имеет единственную точку максимума $x^0(\alpha)$, причем $\rho(x^0(\alpha), \partial\Omega) \geqslant \rho_0 > 0$ при всех $\alpha \in \Theta$.

Здесь $\rho(x^0(\alpha), \partial\Omega)$ — расстояние от точки $x^0(\alpha)$ до $\partial\Omega$.

Теорема 4.4. *Пусть условия* A_3, A_4 *выполнены. Тогда при любом целом* $N \geqslant 0$

$$F(\lambda, \alpha) = \exp[\lambda S(x^0(\alpha), \alpha)]\, \lambda^{-n/2} \times \left(\sum_{k=0}^{N} a_k(\alpha) \lambda^{-k} + \lambda^{-N-1} R_N(\lambda, \alpha) \right), \tag{4.17}$$

$$|R_N(\lambda, \alpha)| \leqslant C \quad (\lambda \in S_\varepsilon,\ |\lambda| \geqslant \lambda_0,\ \alpha \in \mathscr{K}), \tag{4.18}$$

где $\mathscr{K}$ *— любой компакт, лежащий в области* Θ. *Формулу* (4.17) *можно дифференцировать по* λ *и по* α *любое число раз с сохранением равномерной по* α, λ *оценки остаточного члена.*

Коэффициенты разложения (4.17) вычисляются по тем же формулам, что и для интеграла (4.1), и принадлежат $C^\infty(\Theta)$.

Замечание 4.3. Замечания 1.4—1.6 остаются в силе для кратных интегралов Лапласа.

Замечание 4.4. Коэффициенты асимптотических разложений (4.2), (4.14) и т. д. являются *инвариантами* в следующем смысле. Пусть $F(\lambda; S, f)$ — интеграл (4.1) по малой окрестности точки максимума U. Сделаем гладкую замену переменных $x = \varphi(y)$, тогда

$$F(\lambda; S, f) = F(\lambda; S^*, f^*) = \int_{U^*} f^*(y) \exp[\lambda S^*(y)]\, dy.$$

Здесь $\quad U^* = \varphi^{-1}(U), \qquad S^*(y) = (S \circ \varphi)(y), \qquad f^*(y) =$

$=(f\circ\varphi)(y)\det\varphi'_y(y)$. Так как асимптотическое разложение по асимптотической последовательности $\left\{\lambda^{-\frac{n}{2}-k}\right\}$ единственно, то $a_k(S, f)\equiv a_k(S^*, f^*)$ при всех k. В частности, при $k=0$ получаем

$$|\det S''_{xx}(x^0)|^{-1/2} = |\det\varphi'_y(y^0)|\,|\det(S\circ\varphi)''_{yy}(y^0)|^{-1/2}.$$

Следовательно, выражение

$$D(y^0) = |\det\varphi'_y(y^0)|\,|\det(S\circ\varphi)''_{yy}(y^0)|^{-1/2} \qquad (4.19)$$

является инвариантным относительно диффеоморфизмов $y=\varphi(z)$ $(y^0=\varphi(z^0))$. Эта величина имеет простой геометрический смысл:

$$D(y^0) = \lim_{c\to 0} c^{-n/2} \int\limits_{S(x)=S(x^0)-c} \omega_{S},$$

где ω_S — дифференциальная форма Лере — Гельфанда. Следующие коэффициенты разложения (4.2) также являются инвариантами в указанном выше смысле, однако они не имеют столь простого геометрического смысла.

Приведенное замечание относится ко всем асимптотическим разложениям (по степеням λ) функций, заданных интегралами.

2. **Вклад от граничной точки максимума.** Пусть $\max\limits_{x\in[\Omega]} S(x)$ достигается в точке $x^0\in\partial\Omega$, и пусть $S(x)$ $\partial\Omega\in C^\infty$ при x, близких к x^0. Точка x^0 не обязана быть критической точкой функции $S(x)$, так как в этой точке должны обращаться в нуль только производные по направлениям, касательным к $\partial\Omega$. Назовем x^0 *невырожденной граничной точкой максимума*, если:

1. $\partial S(x^0)/\partial n\neq 0$, где $\partial/\partial n$ — дифференцирование по внутренней нормали к $\partial\Omega$.

2. Матрица $\left\|\dfrac{\partial^2 S(x^0)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|_{i,j=1}^{n-1} = B$ отрицательно определена, где $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ — ортонормированный базис в касательной плоскости $T\,\partial\Omega_{x^0}$ к $\partial\Omega$ в точке x^0.

В частности, пусть $x^0=0$ и Ω — полупространство $x_n>0$. Тогда при малых $|x|$, $x_n\geqslant 0$, имеем (поскольку

$S'_{x_j}(0) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1)$

$$S(x) = S(0) + \left[b_n x_n + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 S(0)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j \right] + \\ + x_n \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S(0)}{\partial x_j \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(0)}{\partial x_n^2} x_n^2 + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены порядка $\geqslant 3$. Условия 1, 2 эквивалентны следующим:

$$b_n < 0, \quad \left\| \frac{\partial^2 S(0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j=1}^{n-1} < 0.$$

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия:*
1°. $f, S \in C([\Omega])$.
2°. $\max\limits_{x \in [\Omega]} S(x)$ *достигается только в точке* $x^0 \in \partial\Omega$, *и* x^0 *— невырожденная граничная точка максимума.*
3°. $f, S, \partial\Omega \in C^\infty$ *в окрестности точки* x^0.
Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda) \sim \lambda^{-\frac{n+1}{2}} \exp[\lambda S(x^0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k}. \qquad (4.20)$$

Это разложение можно дифференцировать по λ *любое число раз.*

Заменив $F(\lambda)$ интегралом по малой полуокрестности U точки x^0, мы совершим экспоненциально малую ошибку. Перенесем начало координат в точку x^0 и повернем оси координат так, чтобы направление внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке x^0 совпало с вектором $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Полученные в результате из f, S функции обозначим f^*, S^*, и пусть U^* — образ U. Уравнение ∂U^* в окрестности точки $y = 0$ можно записать в виде

$$y_n = \varphi(y'), \; y' \in U', \; y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}), \qquad (4.21)$$

где U' — окрестность точки $y' = 0$, причем $\varphi(y') \in C^\infty(U')$, $\varphi(y') = O(|y'|^2) \; (y' \to 0)$. Рассмотрим след функции $S^*(y)$ на $\partial\Omega^*$, т. е. функцию $S^*(y', \varphi(y'))$, и разложим ее по формуле Тейлора

$$S^*(y', \varphi(y')) = \frac{1}{2} \langle Ay', y' \rangle + O(|y'|^3) \qquad (y' \to 0) \quad (4.22)$$

(линейные слагаемые отсутствуют, так как точка $y' = 0$

является точкой максимума функции $S^*(y', \varphi(y'))$ в области U').

Выберем U так, чтобы $\varphi(y') \leqslant y_n \leqslant \delta$, $\delta > 0$, при $y \in U^*$. Тогда

$$F(\lambda) \exp[-\lambda S(x^0)] = \int\limits_{U'} \Phi(y', \lambda)\, dy',$$

$$\Phi(y', \lambda) = \int\limits_{\varphi(y')}^{\delta} \exp[\lambda S^*(y)]\, f^*(y)\, dy_n.$$

При каждом фиксированном $y' \in U'$ функция $S^*(y)$ на отрезке $[\varphi(y'), \delta]$ достигает максимума в точке $y_n = \varphi(y')$, причем $\left|\frac{\partial S^*(y)}{\partial y_n}\right|\Bigg|_{y_n=\varphi(y')} \geqslant c > 0$ при всех $y' \in [U']$, если область U достаточно мала. Следовательно, при любом целом $N \geqslant 1$, $y' \in [U']$

$$\Phi(y', \lambda) = \lambda^{-1} \exp[\lambda S^*(y', \varphi(y'))] \times \\ \times \left[-\frac{f^*(y', \varphi(y'))}{S^{*\prime}_{y_n}(y', \varphi(y'))} + \sum_{k=1}^{N} \lambda^{-k} b_k(y') + \lambda^{-N-1} R_N(y', \lambda) \right],$$

где $b_k(y') \in C^\infty([U'])$, $|R_N(y', \lambda)| \leqslant C_N$ ($y' \in [U']$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 1$, $\lambda \in S_\varepsilon$). Из (4.22) и невырожденности точки x^0 следует, что к интегралам

$$\int\limits_{U} \exp[\lambda S^*(y', \varphi(y'))]\, b_k(y')\, dy'$$

применима теорема 4.1, так что каждый из них разлагается в асимптотический ряд по степеням λ^{-1}. Тем самым (4.20) доказано.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = -\lambda^{-\frac{n+1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \exp[\lambda S(x^0)] \times \\ \times \left[\frac{\partial S^*(x^0)}{\partial n}\right]^{-1} |\det B|^{-\frac{1}{2}} [f(x^0) + o(1)], \quad (4.23)$$

где n, B указаны в условиях 1 и 2 (с. 130).

4.1. Пусть точка $x^0 \in \partial\Omega$ является невырожденной критической точкой функции $S(x)$ и $\max\limits_{x \in [\Omega]} S(x)$ достигается только в точке x^0. Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$,

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \exp[\lambda S(x^0)] \left|\det S''_{xx}(x^0)\right|^{-1/2} \times \\ \times \left[f(x^0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^{-k/2}\right].$$

3. Асимптотика преобразования Лапласа. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\lambda) = \int_{\Omega(\lambda)} f(x, \lambda) \exp[S(x, \lambda)]\, dx. \tag{4.24}$$

Пусть $f, S \in C^\infty(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^+_\lambda)$, где $\mathbf{R}^+_\lambda$ — полуось $\lambda > 0$, функция S вещественнозначна и $x^0(\lambda)$ — точка максимума функции $S(x, \lambda)$. Положим

$$\Omega(\lambda) = \{x\colon \left|\sqrt{A(\lambda)}\,(x - x^0)\right| \leqslant \mu(\lambda)\}, \\ A(\lambda) = -S''_{xx}(x^0(\lambda), \lambda). \tag{4.25}$$

Здесь $\sqrt{A(\lambda)}$ — положительно определенная матрица такая, что $(\sqrt{A})^2 = A$.

Теорема 4.6. *Пусть существует функция $\mu(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$ такая, что*

$$S''_{xx}(x, \lambda) = S''_{xx}(x^0(\lambda), \lambda)(I + \varepsilon_1(x, \lambda)), \\ f(x, \lambda) = f(x^0(\lambda), \lambda)(1 + \varepsilon_2(x, \lambda)), \tag{4.26}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \varepsilon_j(x, \lambda) = 0, \quad j = 1, 2, \tag{4.27}$$

равномерно по $x \in \Omega(\lambda)$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\Phi(\lambda) \sim \\ \sim (2\pi)^{n/2} \left|\det S''_{xx}(x^0(\lambda), \lambda)\right|^{-1/2} f(x^0(\lambda), \lambda) \exp[S(x^0(\lambda)), \lambda)]. \tag{4.28}$$

Имеем при $\lambda \gg 1$, $x \in \Omega(\lambda)$

$$S(x, \lambda) - S(x^0(\lambda), \lambda) = -\frac{1}{2} \langle A(\lambda)(x - x^0(\lambda)), \\ x - x^0(\lambda)\rangle (1 + \varepsilon_3(x, \lambda)),$$

где $\varepsilon_3 \to 0$ при $\lambda \to +\infty$, $x \in \Omega(A)$ равномерно по x. Делая замену $\sqrt{A(\lambda)}\,(x - x^0(\lambda)) = y$, получаем

$$\Phi(\lambda) = \Phi_0(\lambda) \int_{|y| < \mu(\lambda)} (1 + \varepsilon_2) \exp\left[-\frac{1}{2}(1 + \varepsilon_3)\langle y, y\rangle\right] dy,$$

где $\Phi_0(\lambda)$ — правая часть (4.24). Тем же способом, что и в лемме 2.1, доказывается, что последний интеграл стремится к $(2\pi)^{n/2}$ при $\lambda \to +\infty$.

Докажем следующую асимптотическую формулу для двустороннего преобразования Лапласа при $|\xi| \to \infty$:

$$\mathscr{L}(e^{-S})(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}^n} \exp[-S(x) + \langle x, \xi\rangle]\, dx \sim \\ \sim (2\pi)^{n/2} \left|\det S''_{xx}(x^0(\xi))\right|^{-1/2} \exp[\tilde{S}(\xi)]. \quad (4.29)$$

Здесь $S(x)$ — строго выпуклая кверху при $|x| \gg 1$ функция (более точные условия указаны ниже), $x^0(\xi)$ — точка (единственная при $|\xi| \gg 1$), в которой достигается

$$\max_{x \in \mathbf{R}^n} (-S(x) + \langle x, \xi\rangle) = \tilde{S}(\xi). \quad (4.30)$$

Функция $\tilde{S}(\xi)$ двойственна по Юнгу (см. § 3) к функции $S(x)$, и из (4.29) следует, что

$$\ln \mathscr{L}(e^{-S})(\xi) \sim \tilde{S}(\xi) \quad (|\xi| \to \infty). \quad (4.31)$$

Эта формула устанавливает связь между *преобразованиями Лапласа и Лежандра.*

Теорема 4.7. *Пусть*

1°. $S(x) \in C^2$ *и сторго выпукла кверху при* $|x| \geqslant a > 0$, *т. е.* $S''_{xx}(x) < 0$.

2°. *Существуют постоянные* α, C_1, C_2 *такие, что*

$$-C_1(1+|x|)^{1+\alpha} \leqslant S(x) \leqslant -C_2(1+|x|)^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

3°. *Существует* $\beta > 0$ *такое, что*

$$S''_{xx}(x) = S''_{xx}(y)(I + o(1))$$

при $\left|\sqrt{-S''_{xx}(x)}\,(x-y)\right| \leqslant |x|^{\beta}$, $\quad |x| \to \infty$, *равномерно по* y.

4°. *При любом* $\varepsilon > 0$

$$\ln\left|\det S''_{xx}(x)\right| = O(|x|^{\varepsilon}) \quad (|x| \to \infty).$$

Тогда при $|\xi| \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула* (4.29).

Разобьем интеграл $\mathscr{L}(e^{-S})(\xi)$ на три: $I_1 + I_2 + I_3$, где I_1 — интеграл по области $\Omega(\xi)$:

$$\left|\sqrt{-S''_x(x^0(\xi))}\,(x - x^0(\xi))\right| \leqslant |x^0(\xi)|^{\beta},$$

I_2 — интеграл по области $|x| \geqslant C_0|\xi|^{1/\alpha}$, где C_0 будет указано ниже. Из условий $1^\circ - 4^\circ$ и теоремы 4.6 следует, что асимптотика I_1 совпадает с правой частью формулы (4.49). Остается доказать, что

$$I_j(\xi) = o(I_1(\xi)) \quad (|\xi| \to \infty), \quad j = 2,\ 3. \qquad (4.32)$$

Имеем в силу условия 2°

$$|I_2(\xi)| \leqslant \int\limits_{|x| \geqslant C_0|\xi|^{1/\alpha}} \exp\left(-C_1|x|^{1+\alpha} + |x||\xi|\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant C'|\xi|^{n/\alpha} \int\limits_{C_0}^{\infty} r^{n-1} \exp\left[(-C_1 r^{1+\alpha} + r)|\xi|^{1+1/\alpha}\right] dr.$$

Если $C_0 > 0$ достаточно велико, то подынтегральная экспонента достигает при $r \geqslant C_0$ максимума только в точке $r = C_0$, и интеграл $I_2(\xi)$ экспоненциально мал:

$$I_2(\xi) = O(\exp(-C''|\xi|^{1+1/\alpha})),$$

причем постоянную C'' можно выбрать сколь угодно большой за счет увеличения C_0. При больших $|\xi|$

$$\tilde{S}(\xi) \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left(-C_1|x|^{1+\alpha} + |x||\xi|\right) \leqslant C_3|\xi|^{1+1/\alpha}. \quad (4.33)$$

Из этой оценки, условия 4° и оценки для $I_2(\xi)$ следует (4.32) при $j = 2$. Аналогично (4.33) доказывается оценка

$$S(\xi) \geqslant C_4(1 + |\xi|)^{1+1/\alpha} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n). \qquad (4.33')$$

Докажем, что при $|\xi| \gg 1$

$$|x^0(\xi)| \geqslant C_5|\xi|^{1/\alpha} > 0. \qquad (4.34)$$

Допустим противное, тогда на некоторой последовательности $\{\xi^k\} \to \infty$ выполняется оценка $|x^0(\xi)| \leqslant \varepsilon|\xi|^{1/\alpha}$, так что при $\xi \in \{\xi^k\}$

$$|S(\xi)| = |-S(x^0(\xi)) + \langle x^0(\xi),\ \xi\rangle| \leqslant \delta(\varepsilon)|\xi|^{1+1/\alpha},$$

где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Это противоречит оценке (4.33′).

Оценим $I_3(\xi)$. Пусть $0 < \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 < 1$, $A(\xi) = S''_{xx}(x^0(\xi))$. Тогда при $|\sqrt{A(\xi)}(x - x^0(\xi))| = \theta|x^0(\xi)|^\beta$

(β указано в условии 3°) имеем

$$S(x, \xi) \equiv -S(x) + \langle x, \xi\rangle =$$
$$= -\frac{1}{2}\langle A(\xi)(I + o(1))(x - x^0(\xi)),\ x - x^0(\xi)\rangle =$$
$$= \left[-\frac{1}{2} + o(1)\right] \left|\sqrt{A(\xi)}\,(x - x^0(\xi))\right|^2 =$$
$$= \left[-\frac{1}{2} + o(1)\right] \theta^2 |x^0(\xi)|^{2\beta}.$$

Следовательно, множества уровня

$$S(x, \xi) = -\frac{\theta^2}{2}|x^0(\xi)|^{2\beta}$$

при $|\xi| \gg 1$, $0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < 1$, близки к эллипсоидам $\left|\sqrt{A(\xi)}\,(x - x^0(\xi))\right| = \frac{\theta}{\sqrt{2}}|x^0(\xi)|^{\beta}$ и содержатся в $\Omega(\lambda)$. Так как $S(x, \xi)$ — выпуклая кверху функция, то значения $S(x, \xi)$ в $\mathbb{R}^n\setminus\Omega(\lambda)$ не превосходят величины $-\frac{\theta^{*2}}{2}|x^0(\xi)|^{2\beta}$ при некотором $\theta^* \in (0, 1)$ (множества уровня выпуклой функции выпуклы). Пусть $\Omega_1(\xi)$ — область, по которой берется интеграл I_3. Тогда $\Omega_1(\xi)$ лежит в шаре $|x| \leqslant C_0|\xi|^{1/\alpha}$, так что

$$\operatorname{mes}\Omega_1(\xi) \leqslant C'|\xi|^{n/\alpha},$$
$$\max_{x\in\Omega_1(\xi)} S(x, \xi) \leqslant -\frac{\theta^{*2}}{2}|x^0(\xi)|^{2\beta} \leqslant -C''|\xi|^{2\beta/\alpha}.$$

Последняя оценка вытекает из (4.34). Таким образом,

$$I_3(\xi) \leqslant C|\xi|^{n/\alpha}\exp(-C''|\xi|^{2\beta/\alpha}).$$

Из этой оценки, (4.33′) и условия 4° следует (4.32) при $j = 3$.

Пример 4.4. Пусть функция $S(x)$:

1. Положительно однородная функция порядка $\alpha > 1$, $S(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.
2. Строго выпукла при $x \neq 0$.

Тогда при $|\xi| \to \infty$

$$\mathscr{L}(e^{-S})(\xi) \sim (2\pi)^{\frac{n}{2}}|\xi|^{-n(1-\alpha')}|\det S_{xx}(x^0(\omega))|^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \exp\left(|\xi|^{\alpha'}\tilde{S}(\omega)\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)|\xi|^{-\alpha' k}\right). \quad (4.35)$$

Здесь $\omega = \xi/|\xi|$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$ и $a_k(\omega) \in C^\infty(S^{n-1})$, где S^{n-1} — единичная сфера.

Чтобы получить главный член асимптотики, можно воспользоваться теоремой 4.7. Но проще воспользоваться однородностью функции S. Делая замену переменных $x = |\xi|^{\frac{1}{\alpha-1}} y$, получаем

$$\mathscr{L}(e^{-S})(\xi) = |\xi|^{\frac{n}{\alpha-1}} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left[|\xi|^{\alpha'}(-S(y) + \langle\omega, y\rangle)\right] dy. \tag{4.36}$$

Функция $S(y, \omega) = -S(y) + \langle\omega, y\rangle$ при любом $\omega \in S^{n-1}$ имеет единственную и притом невырожденную точку максимума $y^0(\omega)$. Нетрудно проверить, что

$$0 < C_1 < |y^0(\omega)| < C_2, \quad \left|\det S''_{yy}(y^0(\omega))\right| > C_3 > 0$$

при всех $\omega \in S^{n-1}$ и (4.35) следует из теоремы 4.4.

Пример 4.5. Пусть функция $S(x)$ удовлетворяет условию 1 примера 4.4, но не является строго выпуклой. Тогда точка максимума $x^0(\xi)$ может быть вырожденной.

1°. При всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ справедлива оценка

$$\mathscr{L}(e^{-S})(\xi) \leqslant \left(1 + |\xi|^{\frac{n}{\alpha-1}}\right) e^{\widetilde{S}(\xi)}. \tag{4.37}$$

Рассмотрим интеграл (4.36). Точка максимума $y^0(\omega)$ при всех $\omega \in S^{n-1}$ лежит в некотором шаре $|y| \leqslant C_0$, так как $S(y) \geqslant C|y|^\alpha$, $C > 0$, и интеграл по этому шару допускает оценку (4.37), поскольку $-S(x) + \langle x, \xi\rangle \leqslant \widetilde{S}(\xi)$ при всех x, ξ. Оставшийся интеграл экспоненциально мал при больших $|\xi|$, так как

$$-S(y) + \langle\omega, y\rangle \leqslant -C_0'|y|^\alpha \quad (|y| \geqslant C^*),$$

где C_0' может быть сделано сколь угодно большим за счет увеличения C^*. Тем самым оценка (4.37) доказана при $|\xi| \gg 1$; в ограниченной области $|\xi| \leqslant r$ эта оценка очевидна.

2°. Если ξ^0 таково, что точка максимума $x^0(\xi^0)$ невырождена и единственна, то для функции $\mathscr{L}(e^{-S})(\xi)$ справедлива асимптотическая формула (4.35) на луче $\xi = t\xi^0$, $t \to +\infty$, а также при $|\xi| \to \infty$ в некотором конусе, содержащем этот луч. Последнее следует из того, что при малых $|\xi^* - \xi^0|$ функция $-S(x) + \langle x, \xi\rangle$ будет иметь ровпо одну и притом невырожденную точку глобального максимума $x^0(\xi^*)$, причем $x^0(\xi^*) \to x^0(\xi^0)$ при $\xi^* \to \xi^0$. Если же максимум достигается в нескольких невырожденных точках глобального максимума при $\xi = \xi^0$, то в некотором конусе K, содержащем луч $\xi = t\xi^0$, $0 \leqslant t < \infty$, асимптотика интеграла равна сумме вкладов от точек локального максимума, лежащих вблизи исходных (на каждом луче из K по крайней мере одна из этих точек является точкой глобального максимума).

3°. Имеются *пограничные зоны*, в которых точки максимума вырождены, и в общем случае неясно, как найти искомую асимптотику.

Заметим, что максимум (4.30) может достигаться не в точке, а на многообразии.

Пример 4.6. Функция $S(x) = -(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$ достигает максимума в $\mathbb{R}^2$ на окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Теорема 4.8. *Пусть*

1°. $f(x)$, $S(x) \in C([\Omega])$.

2°. $\max\limits_{x \in [\Omega]} S(x) = M$ *достигается на* C^∞*-многообразии* $M^{n-1} \subset \Omega$, *и только на нем.*

3°. $f(x)$, $S(x) \in C^\infty$ *в некоторой окрестности многообразия* M^{n-1}.

4°. $S''_{\nu\nu}(x) \neq 0$ *при* $x \in M^{n-1}$, *где* $\partial/\partial\nu$ — *производная по нормали к* M^{n-1}.

Тогда при $\lambda \in S_\varepsilon$, $\lambda \to \infty$,

$$F(\lambda) = \int\limits_\Omega f(x) \exp[\lambda S(x)]\, dx \sim e^{\lambda M} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k-\frac{1}{2}}. \quad (4.38)$$

Как обычно, достаточно рассмотреть интеграл по малой окрестности многообразия M^{n-1}. Пусть M_0^{n-1} — одна из связных компонент многообразия M^{n-1}, $x^0 \in M_0^{n-1}$, U — достаточно малая окрестность точки x^0. Положим

$$h(x) = \sqrt{M - S(x)}. \quad (4.39)$$

С помощью гладкой замены переменных можно превратить M_0^{n-1} в кусок гиперплоскости $y_n = 0$. Именно, можно так выбрать U, чтобы существовал диффеоморфизм φ: $V \to U$, обладающий следующими свойствами:

1) V — куб $|y_j| \leqslant \delta$, $1 \leqslant j \leqslant n$;

2) $\varphi^{-1}(M_0^{n-1} \cap U)$ есть множество $y_n = 0$, $y \in V'$, где обозначено $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, $V' = \{y': |y_j| \leqslant \delta, 1 \leqslant j \leqslant n-1\}$;

3) нормаль к M_0^{n-1} в точке x^0 переходит в ось y_n при отображении φ^{-1}.

Положим $S^*(y) = M - (S \circ \varphi)(y)$ и покажем, что при $y \in V$

$$S^*(y) = y_n^2 S_1(y); \quad S_1(y', 0) \neq 0, \quad y' \in V, \tag{4.40}$$

где $S_1 \in C^\infty(V)$. Действительно, $\min S^*(y) = 0$ достигается только при $y_n = 0$. Функцию $S^*(y)$ при $y \in V$ можно представить в виде

$$S^*(y) = a(y') + y_n b(y') + y_n^2 S_1(y),$$

где a, b, $S_1 \in C^\infty$. По условию $S(y', 0) \equiv 0$, $\dfrac{\partial S(y', 0)}{\partial y_n} \equiv 0 \, (y' \in V)$, так что $a(y') = b(y') \equiv 0$, $y' \in V'$. Из условия 4° следует, что $S_1(y', 0) > 0$, $y' \in V'$. Так как $h(x) = y_n \sqrt{S_1(y)}$ и $S_1(y) > 0$ при $y \in V$, если куб V достаточно мал, то $h \in C^\infty(V)$; следовательно, $h \in C^\infty(U)$.

Если $\delta > 0$ достаточно мало, то множество M_δ^{n-1}: $-\delta < h(x) < \delta$ содержит M_0^{n-1} и не пересекается с другими компонентами множества M^{n-1}. Кроме того, уравнение $h(x) = t$, $-\delta < t < \delta$, $x \in M_\delta^{n-1}$ определяет C^∞-многообразие. Имеем из (4.40)

$$\int\limits_{M_\delta^{n-1}} f(x) e^{\lambda S(x)} dx = e^{\lambda M} \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-\lambda t^2} \Psi_h(t) \, dt, \tag{4.41}$$
$$\Psi_h(t) = \int\limits_{h(x)=t} f\omega_h,$$

где ω_h — дифференциальная форма Лере — Гельфанда. Функция $\Psi_h(t) \in C^\infty([-\delta, \delta])$, и из теоремы 1.1 следует (4.38).

Главный член асимптотики интеграла (4.41) равен $e^{\lambda M} \sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}} \, \Psi_h(0)$, так что

$$F(\lambda) = e^{\lambda M} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left[\int\limits_{S(x)=M} f(x) \, \omega_{\sqrt{M - S(x)}} + o(1) \right]. \tag{4.42}$$

4.2. При $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, и при $a > 0$

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-\lambda(x^2+y^2-a^2)^2]\,dx\,dy \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

4. Интегральные операторы с δ-образными ядрами. Рассмотрим интегральный оператор

$$(K_\lambda f)(x) = \lambda^{n/2} \int\limits_\Omega \exp[\lambda S(y-x)]\, f(y)\,dy. \qquad (4.43)$$

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Будем предполагать, что:

1°. $S(x)$ — вещественнозначная функция, $S(x) \in C^2(\Omega) \cap C([\Omega])$, точка $0 \in \Omega$.

2°. $\max\limits_{x\in[\Omega]} S(x) = S(0) = 0$ достигается только в этой точке, и точка максимума $x = 0$ невырождена.

Теорема 4.9. *Пусть условия* 1°, 2° *выполнены, $\mathscr{K}$ — компакт, $\mathscr{K} \subset \Omega$, и функция $f(x) \in C(\Omega)$. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} (K_\lambda f)(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left|\det S''_{xx}(0)\right|^{-\frac{1}{2}} f(x) \qquad (4.44)$$

равномерно по $x \in \mathscr{K}$.

Так как

$$\int\limits_\Omega \delta(y-x)\, f(y)\,dy = f(x)$$

(δ — дельта-функция Дирака), то при $\lambda \to +\infty$ формально получаем

$$\lambda^{n/2} \exp[\lambda S(y-x)] \to \mathrm{const}\cdot\delta(y-x).$$

Имеем

$$(K_\lambda f)(x) = \lambda^{n/2} \int\limits_{\Omega_x} \exp(-\lambda S(t))\, f(x+t)\,dt,$$

где область Ω_x получена из области Ω сдвигом на вектор x. Отбрасывая экспоненциально малый интеграл по области $\Omega_x \setminus U$, где U — малая окрестность точки $t = 0$, и применяя замечание 4.1, получаем (4.44).

§ 5. Логарифмические асимптотики

В работах по вероятностям больших уклонений обычно получают грубую логарифмическую асимптотику интегралов Лапласа

$$F(\lambda) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \exp[\lambda S(x)]\, dx. \qquad (5.1)$$

Здесь $\lambda > 0$ — большой параметр, функция $\varphi(x)$ финитна, измерима по Лебегу и ограничена почти всюду, функция $S(x)$ вещественнозначна и непрерывна. Введем обозначения: $M(S)$ — множество, на котором достигается $\max\limits_{x \in \operatorname{supp}\varphi} S(x) = M$, $M_c(S) \subset \operatorname{supp}\varphi$ — множество, на котором $S(x) \geqslant M - c$ и $V(c)$ — объем множества $M_c(S)$. В [71] получены следующие результаты.

Теорема 5.1. *Пусть $\varphi(x) \geqslant \delta > 0$ в некоторой окрестности множества $M(S)$. Тогда*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln F(\lambda)}{\lambda} = \max_{x \in \operatorname{supp}\varphi} S(x). \qquad (5.2)$$

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1 *и*

$$\lim_{c \to 0} \frac{\ln V(c)}{\ln c} = \alpha > 0. \qquad (5.3)$$

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\ln F(\lambda) = M\lambda - \alpha \ln \lambda + o(\ln \lambda). \qquad (5.4)$$

Условие (5.3) означает, что функция $S(x)$ не уплощается в окрестности множества $M(S)$. Это условие выполнено для любого полинома $S(x)$. Справедливо обратное предложение: *если условия теоремы* 5.1 *выполнены*, $V(0) = 0$ *и справедлива асимптотическая формула* (5.4), *то для* $V(c)$ *справедлива формула* (5.3).

Пример. Пусть $S(x) = -\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{2m_j} - 1\right)^{2m_0}$, где $m_j \geqslant 1$ — целые числа. Тогда $M(S)$ — гиперповерхность $\sum\limits_{j=1}^{n} x^{2m_j} = 1$ и $V(c) \sim Ac^{1/(2m_0)}$ $(c \to 0)$, где $A > 0$ постоянная.

§ 6. Некоторые применения теории вычетов

1. Интегралы. Рассмотрим преобразование Фурье

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx, \qquad (6.1)$$

где интеграл сходится при $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ (возможно, условно). Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности вещественной оси, то контур интегрирования можно деформировать, что позволяет в ряде случаев найти асимптотику интеграла (6.1) при $\lambda \to +\infty$.

Если $f(x)$ — рациональная функция, то интеграл вычисляется:

$$F(\lambda) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}\left(e^{i\lambda z} f(z)\right), \qquad (6.2)$$

где сумма берется по всем полюсам функции $f(z)$, лежащим в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Следовательно, главный член асимптотики функции $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ равен сумме вычетов в полюсах с наименьшим значением $\operatorname{Im} z$. В частности, если имеется ровно один полюс z_1 такой, что $\operatorname{Im} z_1 > 0$, $\operatorname{Im} z_1 = \min\limits_k \operatorname{Im} z_k$, и притом простой, то

$$F(\lambda) = 2\pi i e^{i\lambda z_1}\left[\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + O(e^{-\lambda c})\right] \qquad (\lambda \to +\infty), \quad (6.3)$$

где $c > 0$. Формула (6.2) справедлива также, если функция $f(z)$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и существует такая последовательность расширяющихся полуокружностей C_n: $|z| = r_n \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, что $\max\limits_{z \in C_n} |f(z)| \to 0$ $(n \to \infty)$. Вместо полуокружностей можно взять любую правильную систему расширяющихся контуров (т. е. $l_n \to \infty$, $d_n/l_n \leqslant C$, где l_n — длина контура, d_n — максимальное расстояние от контура до начала координат). При этих условиях справедлива формула (6.3), она дает асимптотику $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

В этих примерах интеграл $F(\lambda)$ вычисляется точно, но для получения асимптотики это не обязательно.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полосе Π: $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant a$, $a > 0$, за исключением конечного числа полюсов $z_1, \ldots, z_n$, не лежащих на прямых $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Im} z = a$.

Пусть интегралы $\int |e^{i\lambda z} f(z)| \, |dz|$ по этим прямым сходятся, и $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x+iy)=0$ равномерно по $y \in [0, a]$. Тогда

$$F(\lambda) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} \left(e^{i\lambda z} f(z)\right) + \int\limits_{\operatorname{Im} z = a} e^{i\lambda z} f(z)\, dz. \qquad (6.4)$$

Последний интеграл имеет порядок $O(e^{-\lambda a})$ при $\lambda \to +\infty$, т. е. экспоненциально мал по сравнению с любым из вычетов, и формула (6.4) дает асимптотику функции $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$. По-прежнему главный член асимптотики определяется полюсами с наименьшим значением $\operatorname{Im} z$. Если такой полюс z_1 единственный и простой, то справедлива формула (6.3). Если все полюсы простые, то формула (6.4) принимает вид

$$F(\lambda) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda z_j} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z) + O(e^{-\lambda a}) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

Если z_j — полюс кратности m, то

$$F(\lambda) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda z_j} P_{m_j-1}(\lambda) + O(e^{-\lambda a}) \qquad (\lambda \to +\infty),$$

где $P_k(z)$ — полином степени k.

Пусть в полосе П функция $f(z)$, кроме полюсов, имеет еще точки ветвления $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$, не лежащие на границе П, и выполнены сформулированные выше условия. Тогда

$$F(\lambda) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} \left(e^{i\lambda z} f(z)\right) + \sum_{j=1}^{k} \int_{l_j} e^{i\lambda z} f(z)\, dz + \\ + \int\limits_{\operatorname{Im} z = a} e^{i\lambda z} f(z)\, dz, \quad (6.5)$$

где l_j — разрез, соединяющий точку ζ_j с прямой $\operatorname{Im} z = a$ (например, прямолинейный). В этом случае главный вклад в асимптотику $F(\lambda)$ дают особые точки z_j, ζ_j с наименьшим значением мнимой части. Заметим, что случай $\lambda < 0$ сводится к случаю $\lambda > 0$ заменой x на $-x$ в интеграле (1.1).

Пример 6.1. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} (x^2+1)^{-1/2} dx,$$

который равен $2K_0(\lambda)$, где $K_0(\lambda)$ — функция Макдональда. В этом случае

$$F(\lambda) = \int\limits_l e^{i\lambda z}(z^2+1)^{-1/2}dz,$$

где l — разрез по лучу $[i, i\infty)$, так что

$$F(\lambda) = 2\int\limits_1^\infty e^{-\lambda t}(t^2-1)^{-1/2}dt =$$

$$= 2e^{-\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(t^2+2t)^{-1/2}dt = 2e^{-\lambda}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\lambda t^2}(t^2+2)^{-1/2}\,dt.$$

Асимптотика последнего интеграла вычисляется с помощью леммы Ватсона (гл. II, § 1) и имеет вид

$$F(\lambda) \sim 2e^{-\lambda}2^{-1/2}\sum_{n=0}^\infty c_n\Gamma(n+1/2)\lambda^{-n} \qquad (\lambda\to+\infty),$$

где c_n — коэффициенты разложения

$$(2+t^2)^{-1/2} = 2^{-1/2}\sum_{n=0}^\infty c_n t^{2n}\ (|t^2|<2);$$

эти коэффициенты равны $c_n = (-1)^n 2^{-2n}(2n)!(n!)^{-2}$.

Пусть точки ветвления ζ_j имеют степенной характер, т. е. $f(z) = (z-\zeta_j)^{\alpha_j} g_j(z)$, где функция $g_j(z)$ голоморфна в точке $z=\zeta_j$ и $g_j(\zeta_j)\neq 0$. Тогда асимптотика интегралов по разрезам (см. (6.5)) также вычисляется с помощью леммы Ватсона. Это верно и для точек ветвления таких, что $f(z) = (z-\zeta_j)^{\alpha_j}(\ln(z-\zeta_j))^{\beta_j} g_j(z)$ в окрестности точки ζ_j.

Приведенные выше факты очевидным образом переносятся на интегралы типа обратного преобразования Лапласа:

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda z}f(z)\,dz.$$

Такого рода интегралы возникают, например, при решении операционным методом нестационарных линейных уравнений математической физики; роль параметра λ играет время t.

Отметим, что ряд приведенных выше фактов переносится на интегралы от операторнозначных функций.

Именно, пусть $f(z)$ — функция комплексного переменного z со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ и $|f(z)|$ — норма в $\mathbf{B}$. Тогда при тех же условиях, что и выше, справедлива формула (6.4), и норма остаточного члена имеет порядок $O(e^{-\lambda a})$.

Аналогичные методы применимы к исследованию асимптотики обратного преобразования Меллина. *Преобразованием Меллина* функции $f(x)$ называется функция

$$g(z)=\int_0^\infty x^{z-1}f(x)\,dx.$$

Формула обращения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(z)\,x^{-z}dz. \qquad (6.6)$$

Простейшее достаточное условие справедливости этой формулы: функция $f(x)$ непрерывна при $x\geqslant 0$ и $\int_0^\infty |f(x)|\,x^{a-1}dx<\infty$. Более тонкие достаточные условия см. в [15]. В частности, справедлива формула

$$e^{-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^{-z}\Gamma(z)\,dz, \qquad (6.7)$$

где $a>0$ — любое.

Пусть функция $g(z)$ в полосе $a\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant b$ имеет конечное число полюсов $z_1,\ldots,z_k$, интегралы вида (6.6) по прямым $\operatorname{Re} z=a$ и $\operatorname{Re} z=b$ абсолютно сходятся и $\lim\limits_{\sigma\to\infty}|g(\sigma+i\tau)|\,|x|^{-\sigma}=0$ равномерно по $\sigma\in[a,\,b]$. Тогда при $x>0$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{res}_{z=z_j}(g(z)\,x^{-z})+\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} g(z)\,x^{-z}dz \qquad (6.8)$$

(это аналог формулы (6.4)). Последний интеграл имеет порядок $O(x^{-b+\varepsilon})$, $\varepsilon>0$ — любое, при $x\to+\infty$ и мал по сравнению с любым из вычетов. Формула (6.8) дает асимптотику функции $f(x)$ при $x\to+\infty$. Главный член асимптотики определяется суммой вычетов в полюсах с наименьшим значением $\operatorname{Re} z$. Если такой полюс z_1 единственный и простой, то

$$f(x) = x^{-z_1}\left[\operatorname*{res}_{z=z_1} g(z) + O(x^{-c})\right] \qquad (x \to +\infty), \quad (6.9)$$

где $c > 0$. Если все полюсы простые, то

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} x^{-z_j} \operatorname*{res}_{z=z_j} g(z) + O(x^{-b+\varepsilon}) \qquad (x \to +\infty),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое. Если z_j — полюс порядка m_j, то

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} x^{-z_j} P_{m_j-1}(\ln x) + O(x^{-b+\varepsilon}) \qquad (x \to +\infty),$$

где $P_k(t)$ — полином степени k.

2. Суммы и ряды. Во многих случаях очень полезной оказывается формула (6.7).

Пример 6.2. Рассмотрим сумму

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k k! n^{-k}$$

при $n \to \infty$. Имеем из (1.8)

$$k! n^{-k-1} = \int_0^\infty e^{-nx} x^k dx.$$

Следовательно,

$$S(n) = n \int_0^\infty e^{-nx} (1 + x)^n dx.$$

К этому интегралу применим метод Лапласа. Фазовая функция $S(x) = -x + \ln(1 + x)$ имеет единственную и притом невырожденную точку максимума $x = 0$, $S''(0) = -1$, и по формуле (1.3)

$$S(n) \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \qquad (n \to \infty).$$

Точно так же доказывается, что если $0 < \lambda < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k! n^{-k} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda^2}{n(1-\lambda^2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Для последующих примеров необходимы некоторые сведения о дзета-функции Римана $\zeta(z)$. При $\operatorname{Re} z > 1$ эта функция представима рядом

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Дзета-функция аналитически продолжается на всю комплексную плоскость z как мероморфная функция, имеющая простой полюс в точке $z = 1$ с вычетом, равным 1. При $\operatorname{Re} z > 1$ справедливо интегральное представление

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

Дзета-функция удовлетворяет функциональному соотношению

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2}\, \Gamma(1 - z)\, \zeta(1 - z).$$

В полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$ при $|z - 1| > \varepsilon$ модуль $|\zeta(z)|$ ограничен, при $\operatorname{Re} z = 1$ имеем $|\zeta(z)| \leqslant 5 + |\ln z|$, при $0 < \operatorname{Re} z < 1$ имеем $|\zeta(z)| \leqslant c|z|^{1-\operatorname{Re} z}$. Пусть $z = x + iy$, $x > 0$. Тогда $|\zeta(z)| = O(|y|^{1/2-x})$, $y \to \infty$. При $x = 0$, $|\zeta(z)| = O(|\sqrt{y}|\ln|y|)$ $(y \to \infty)$. Более точные оценки см. в [13].

Пример 6.3 [13]. Рассмотрим ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} e^{-n^{\alpha} x},$$

где $\alpha > 0$, β вещественно, и исследуем его асимптотику при $x \to +\infty$. Из (5.8) находим

$$n^{-\beta} e^{-n^{\alpha} x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(z)\, x^{-z} n^{-\alpha z + \beta}\, dz,$$

где $\sigma > 0$, $\sigma > (\beta + 1)/\alpha$. При таких σ можно переставить порядок суммирования и интегрирования, так что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(z)\, x^{-z} \zeta(\alpha z - \beta)\, dz,$$

где $\zeta(z)$ есть дзета-функция Римана.

Пусть σ_N таково, что $N < \sigma_N < N + 1$, $-\alpha\sigma_N - \beta < 1$ и $(1 + \beta)/\alpha \neq -k$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда контур интегрирования $\operatorname{Re} z = \sigma$ можно заменить прямой $\operatorname{Re} z = -\sigma_N$, так как

$$|\Gamma(z)\zeta(\alpha z-\beta)| = O(e^{-\pi|z|/4})$$

между этими прямыми. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)x^{-(\beta+1)/\alpha} + \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}\zeta(-\alpha k-\beta)\,x^{-k} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_N-i\infty}^{\sigma_N+i\infty}\Gamma(z)\,x^{-z}\zeta(\alpha z-\beta)\,dz. \quad (6.10)$$

В правой части равенства (6.10) стоят вычеты в полюсе $\tilde z = (\beta+1)/\alpha$ функции $\zeta(\alpha z-\beta)$ и в полюсах $z_k = -k$, $k = 0, 1, \ldots$ функции $\Gamma(z)$. Последний интеграл имеет порядок $O(x^{-N+1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ — любое, при $x\to+\infty$ и ряд (6.10) — асимптотический. При $\alpha \leqslant 1$ ряд сходится.

Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ можно преобразовать в интеграл, если функция $f(z)$ голоморфна в окрестности полуоси $[0, +\infty)$. Пусть C — контур в комплексной плоскости z, состоящий из отрезка $[-b-ia, -b+ia]$, лучей $(-ia-b, -b-i\infty)$, $(ia-b, ia-i\infty)$ и положительно ориентированный. Пусть функция $f(z)$ голоморфна внутри C и на C, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1/2+iy) = 0$, равномерно по y, $|y| \leqslant a$. Тогда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2i}\int\limits_C f(z)\operatorname{ctg}\pi z\,dz. \quad (6.11)$$

При тех же условиях справедлива формула

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f(n) = \frac{1}{2i}\int\limits_C \frac{f(z)}{\sin \pi z}\,dz. \quad (6.12)$$

Формулы (5.10), (5.11) называются *преобразованием Ватсона*. Суть этих преобразований состоит в том, что к контурным интегралам (5.10), (5.11) можно применять развитую для интегралов технику. Одно из наиболее ярких применений преобразования Ватсона относится к ряду, возникающему при решении задачи дифракции волн на сфере [40].

§ 7. Двумерное преобразование Лапласа

Рассмотрим интеграл

$$F(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t, \tau) e^{-tx-\tau y} dt\, d\tau, \tag{7.1}$$

который сходится при $x > 0$, $y > 0$, и исследуем его асимптотику при $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 \to \infty$. Фазовая функция $S = -tx - \tau y$ в квадранте K: $t \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$ достигает максимума только в точке $t = 0$, $\tau = 0$. Поэтому главный вклад в асимптотику интеграла F должна вносить эта точка, если функция φ не слишком быстро растет на бесконечности. Отметим еще, что $\max\limits_K S$ достигается в угловой точке области интегрирования.

Интеграл (7.2) при $x = 0$ или при $y = 0$ может расходиться, так что его поведение на бесконечности зависит, вообще говоря, от способа стремления точки (x, y) к бесконечности. Это видно уже на простом примере:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-xt-y\tau}}{(t+\tau)^{3/2}}\, dt\, d\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Приведем результаты, полученные в [76]. Пусть

$$\varphi(t, \tau) = \frac{t^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}}{g(t, \tau)} f(t, \tau), \tag{7.2}$$

где g — однородная функция степени γ, и при $(t, \tau) \neq (0, 0)$ имеем $g > 0$, $g \in C^1$. Пусть функция $f(t, \tau)$ локально интегрируема, $f \in C^1$ в четверти круга $t^2 + \tau^2 \leqslant \delta^2$, $\delta > 0$, $f(0, 0) \neq 0$ и f растет не быстрее некоторой степени $t^2 + \tau^2$ на бесконечности в K. Пусть

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \rho = \alpha + \beta - \gamma > 0, \tag{7.3}$$

тогда интеграл 6.1 сходится при $x > 0$, $y > 0$.

Рассмотрим область G_0 на плоскости (x, y): $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $y_0(x) \geqslant y > h_0 x$, где $h_0 > 0$ и $\ln y_0(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Область G_0 получена из квадранта $x > 0$, $y > 0$ вырезанием некоторых окрестностей его границ. Введем функцию

$$\omega_h(\varepsilon) = \varepsilon, \quad h > 1; \quad \varepsilon \ln 1/\varepsilon, \quad h = 1; \quad \varepsilon^h, \ 0 < h < 1. \tag{7.4}$$

Теорема 7.1. *Пусть функция φ имеет вид (7.2) и $\gamma > \alpha$. Тогда при $(x, y) \in G_0$*

$$F(x, y) = f(0, 0)\frac{\Gamma(\rho)}{y^{\rho}}\varphi_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{x}{y}\right)\left[1 + \omega\left(\frac{x}{y}\right)O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$
$$\varphi_{\alpha\beta\gamma}(v) = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\theta}{g(\cos\theta, \sin\theta)}\frac{d\theta}{(v\cos\theta + \sin\theta)^{\beta}}, \tag{7.5}$$

и эта функция непрерывна при $0 \leqslant v < \infty$.

Теорема 7.2. *Пусть функция* φ *имеет вид* (7.2) *и* $\alpha \geqslant \gamma$. *Тогда при* $(x, y) \in G_0$

$$F(x, y) = f(0, 0)\frac{\Gamma(\rho)}{x^{\alpha-\gamma}y^{\beta}}\psi_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{x}{y}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$
$$\psi_{\alpha\beta\gamma}(v) = \int_0^{\infty}\frac{s^{\beta-1}}{g(1, vs)(1+s)^{\rho}}\,ds. \tag{7.6}$$

Функция $\psi_{\alpha\beta\gamma}(v)$ *при* $\alpha > \gamma$ *непрерывна на луче* $0 \leqslant v < \infty$, *а при* $\alpha = \gamma$ *непрерывна на луче* $v > 0$ *и*

$$\psi_{\alpha\beta\gamma}(v) = \frac{1}{g(1, 0)}\ln\frac{1}{v} + O(1).$$

Доказано также, что равномерно по v на любом конечном отрезке $[0, H_0]$ имеем

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma}(v) = O(\omega_{\gamma-\alpha}(v)), \quad \gamma > \alpha,$$
$$\psi_{\alpha\beta\gamma}(v) = O(\omega_{\alpha-\gamma}(v)), \quad \gamma < \alpha.$$

Случай, когда $g(t, \tau) = (t + \tau)^{-\gamma}$, исследован в [77]. В [78] рассмотрен случай, когда φ имеет

$$\varphi(t, \tau) = \frac{f(t, \tau)}{t^{\alpha} + \tau^{\beta}}, \tag{7.7}$$

где функция f непрерывна в $\overline{K}$, $f \in C^1$ в четверти круга $t^2 + \tau^2 \leqslant \delta^2$, $\delta > 0$, $f(0, 0) \neq 0$ и

$$\ln(1 + |f(t, \tau)|) = O(\ln(1 + t^2 + \tau^2)).$$

Далее, $0 < \beta < \alpha < 1$.

Теорема 7.3. *Пусть* φ *имеет вид* (7.7) *и* $x \to +\infty$, $y \to +\infty$.

1°. *Если* $y = O(x^{\alpha/\beta})$, $\ln y = O(x)$ $(x \to +\infty)$, *то*

$$F(x, y) \sim f(0, 0)\frac{\Gamma(1-\beta)}{y^{1-\beta}}\frac{1}{x}.$$

2°. *Если* $x = O(y^{\beta/\alpha})$, $\ln x = O(y)$ $(y \to +\infty)$, *то*

$$F(x, y) \sim f(0, 0)\frac{\Gamma(1-\alpha)}{x^{1-\alpha}}\frac{1}{y}.$$

3°. *Если* $y \sim \lambda_0^{1-\alpha/\beta} x^{\alpha/\beta}$, $\lambda_0 > 0$, *то*

$$F(x, y) \sim f(0, 0) \frac{\lambda_0^{2-\alpha}}{x^{1-\alpha} y} \tilde{f}(\lambda_0).$$

Здесь

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda u} g(u)\, du, \quad g(u) = \\ = \frac{u}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dv}{u^\alpha \left(\frac{1+v}{2}\right)^\alpha + u^\beta \left(\frac{1+v}{2}\right)^\beta}.$$

Приведем некоторые обобщения формул (7.5), (7.6). Пусть

$$\varphi(t, \tau) = f(t, \tau) g(t, \tau),$$

где функция f непрерывна при $t \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$, удовлетворяет оценке $|f(t, \tau)| \leqslant M e^{a(t+\tau)}$ и $f \in C^\infty$ в четверти круга $t^2 + \tau^2 \leqslant \delta^2$. Пусть

$$g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \geqslant \rho(\varphi) r^{q-2}, \quad 0 < \varphi < \pi/2,$$

где $\rho(\varphi) \geqslant 0$ и $\int_0^{\pi/2} \rho(\varphi)\, d\varphi > 0$. Функция

$$\chi(r) = \int_0^{\pi/2} g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)\, d\varphi$$

непрерывна при $r > 0$ и удовлетворяет оценкам

$$r\chi(r) = O(r^{p-1}) \quad (r \to 0), \quad \chi(r) = e^{o(r)} \quad (r \to \infty),$$

где $p > 0$. Положим

$$\Phi_{nk}(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xt - y\tau} t^n \tau^k g(t, \tau)\, dt\, d\tau.$$

Пусть G — область $x, y \geqslant 2a + 1$, $H_0^{-1} \leqslant x/y \leqslant H_0$, где $H_0 > 0$. Функции $\Phi_{nk}(x, y)$ образуют асимптотическую последовательность в области G. Для интеграла (7.1) в области G справедливы формулы

$$F(x, y) = [f(0, 0) + o(1)] \Phi_{00}(x, y),$$

$$F(x, y) = \sum_{\nu=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{\nu} a_{j, \nu-j} \Phi_{j, \nu-j}(x, y) \right) + O\left(\sum_{j=0}^{N} \Phi_{j, N-j}(x, y) \right).$$

ГЛАВА III

МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

§ 1. Метод стационарной фазы в одномерном случае

1. Фазовая функция без критических точек. В этом параграфе рассматриваются *интегралы Фурье*:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \exp[i\lambda S(x)]\, dx. \qquad (1.1)$$

Здесь $S(x)$ — вещественнозначная, $f(x)$ — комплекснозначная функции, λ — большой положительный параметр.

Очевидно, что случай $S(x) \equiv \mathrm{const}$, или $f(x) \equiv 0$, мы не рассматриваем. Функцию $S(x)$ будем называть *фазовой функцией*.

Интеграл $F(\lambda)$ будет мал при $\lambda \gg 1$ за счет быстрой осцилляции $\exp(i\lambda S)$. Наиболее общим результатом такого рода является

Лемма Римана — Лебега. *Если $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = o(1) \quad (\lambda \to +\infty).$$

Никакой более точной информации о скорости убывания интеграла при этих условиях получить нельзя. Ясно только, что основной вклад в асимптотику интеграла Фурье (при гладких f, S) должны вносить *стационарные* (т. е. *критические*) *точки* фазовой функции, так как вблизи них осцилляция замедляется, а также *особенности* функций f, S или их производных. Заметим, что в отличие от интегралов Лапласа (см. гл. II) для интегралов Фурье гладкость функций f, S существенна на всем интервале интегрирования.

В случае, когда фазовая функция не имеет стационарных точек, асимптотика $F(\lambda)$ легко вычисляется с помощью интегрирования по частям.

Теорема 1.1. *Пусть $I=[a, b]$ — конечный отрезок,*

$$S'(x)\neq 0, \quad x\in I, \tag{1.2}$$

и $f(x)\in C^{N+1}(I)$, $S(x)\in C^{N+2}(I)$. Тогда при $\lambda\to+\infty$

$$\int_a^b f(x)\exp[i\lambda S(x)]\,dx = \sum_{k=0}^{N}(i\lambda)^{-k-1}\left(\frac{-1}{S'(x)}\frac{d}{dx}\right)^k\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)e^{i\lambda S(x)}\Big|_a^b + o\left(\lambda^{-N}\right). \tag{1.3}$$

Интегрируя по частям так же, как и в теореме 2.1.3, получаем, что разность между $F(\lambda)$ и суммой в правой части (1.3) равна

$$(i\lambda)^{-N}\int_a^b\left(M^N\frac{f(x)}{S'(x)}\right)'\exp[i\lambda S(x)]\,dx,\quad M=\frac{-1}{S'(x)}\frac{d}{dx}. \tag{1.4}$$

По лемме Римана — Лебега последний интеграл есть $o(1)$ при $\lambda\to+\infty$.

Главный член асимптотики (1.3) имеет вид

$$F(\lambda)=(i\lambda)^{-1}[f(b)\exp[i\lambda S(b)]-f(a)\exp[i\lambda S(a)]]+O(\lambda^{-2}).$$

Замечание 1.1. Если $f(x)$, $S(x)\in C^\infty(I)$, то $F(\lambda)$ разлагается в асимптотический ряд при $\lambda\to+\infty$.

Следствие 1.1. *Пусть $I=[0,\infty]$, условия теоремы 1.1 выполнены и при $0\leqslant k\leqslant N$*

$$\begin{gathered} M^k\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)=o(1)\quad (x\to+\infty),\\ \frac{d}{dx}M^k\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\in L_1[0,\infty]. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Тогда

$$\int_0^\infty f(x)\exp[i\lambda S(x)]\,dx = -\sum_{k=0}^{N}(i\lambda)^{-k-1}e^{i\lambda S(x)}M^k\left(f(x)/S'(x)\right)\big|_{x=0}+o\left(\lambda^{-N}\right)\quad (\lambda\to+\infty). \tag{1.6}$$

Стоит обратить внимание на полное сходство асимптотических формул для интегралов Фурье и Лапласа: они получаются друг из друга формальной заменой $\lambda \to i\lambda$.

1.1. При $\alpha > 0$, $\lambda \to +\infty$

$$1) \qquad \int_0^\infty (1+x)^{-\alpha} e^{i\lambda x} dx = i\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2});$$

$$2) \qquad \int_0^\infty (1+x)^{-\alpha} \sin \lambda x \, dx = \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2});$$

$$3) \qquad \int_0^\infty (1+x)^{-\alpha} \cos \lambda x \, dx = \alpha\lambda^{-2} + O(\lambda^{-3}).$$

1.2. Пусть $f(x) \in C^N(0, 2\pi)$, $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi)$, $0 \leqslant j \leqslant N$, где $N \geqslant 1$. Тогда при $n \to +\infty$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{inx} dx = o(n^{-N+1}).$$

С помощью интегрирования по частям можно вычислять также асимптотику при $x \to +\infty$ интегралов вида

$$F(x) = \int_x^\infty f(t)\, e^{iS(t)}\, dt,$$

где $S(t)$ — вещественнозначная функция, $S'(t) \neq 0$ при $t \gg 1$. Рассмотрим

Пример 1.1. Пусть $f(t) \in C^2[0, \infty)$, $f(t) > 0$, $f'(t) < 0$, $f''(t) > 0$ при $t \gg 1$ и $f^{(j)}(t) = o(1)$, $j = 0, 1, 2$, $f'(t) = o(f(t))$ $(t \to +\infty)$. Тогда при $x \to +\infty$

$$\int_x^\infty f(t)\, e^{it} dt = -if(x)\, e^{ix}(1 + o(1)). \qquad (1.7)$$

Обозначим этот интеграл через $F(x)$ и проинтегрируем по частям дважды. Тогда

$$F(x) = -if(x)\, e^{ix} + f'(x)\, e^{ix} - \int_x^\infty f''(t)\, e^{it} dt.$$

Последний интеграл не превосходит по модулю $\int_x^\infty f'' dt = -f'(x)$, и (1.7) доказано.

1.3. Пусть $\alpha > 0$. Тогда при $x \to +\infty$

$$\int_x^\infty t^{-\alpha} e^{it} dt \sim \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(ix)^k}.$$

Пример 1.2. Получим асимптотическое разложение для интеграла Френеля

$$\Phi(x) = \int_x^\infty e^{it^2} dt \sim \frac{ie^{ix^2}}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{x^k}. \qquad (1.8)$$

Чтобы доказать это, можно либо сделать замену $t \to \sqrt{t}$ и воспользоваться задачей 1.3, либо сделать замену $t \to \sqrt{x}\, t$ и воспользоваться следствием 1.1.

2. Принцип локализации.

Лемма 1.1. *Пусть* $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \exp[i\lambda S(x)]\, dx = O(\lambda^{-\infty}). \qquad (1.9)$$

Интеграл фактически берется по конечному отрезку $a \leqslant x \leqslant b$, так как функция f финитна. Применим теорему 1.1, тогда в (1.3) все внеинтегральные подстановки равны нулю в силу финитности f, так что $F(\lambda) = O(\lambda^{-N})$, где $N \geqslant 0$ — любое.

Эта лемма играет такую же роль в методе стационарной фазы, что и лемма 2.1.1 в методе Лапласа. Именно, поскольку главный член асимптотики $F(\lambda)$, как правило, имеет степенной порядок, то интегралами, удовлетворяющими условиям леммы 1.1, можно пренебречь.

Нам понадобится некоторый технический аппарат — разбиение единицы. Будем вести изложение сразу для n-мерного случая. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим множество всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$. Пример:

$$\varphi_0(x) = \left\{\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right\}, \quad |x| < 1; \quad 0, \quad |x| \geqslant 1.$$

Функция $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp}\varphi = [-1, 1]$. Функция $\varphi_0(x_1) \ldots \varphi_n(x_n) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Теорема о разбиении единицы. *Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^n$ покрыто конечным или счетным числом открытых множеств $\{\Omega_\alpha\}$. Тогда существует семейство функций $\Phi = \{\varphi_\alpha(x)\}$ такое, что*:

1°. $\varphi_\alpha(x) \in C_0^\infty(\Omega_\alpha)$.

2°. $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1, \quad x \in M$.

3°. $0 \leqslant \varphi_\alpha(x) \leqslant 1, \ x \in M$.

4°. *Каждая точка $x \in M$ имеет такую окрестность, в которой только конечное число функций $\varphi_\alpha(x)$ отлично от нуля.*

Если множество M компактно, то покрытие $\{\Omega_\alpha\}$ можно выбрать конечным.

Рассмотрим интеграл (1.1). Продолжим f, S нулем при $x < a$, $x > b$ и обозначим полученные функции также через f, S. Будем называть точку x_0 *обыкновенной точкой интеграла* (1.1), если функции f, $S \in C^\infty(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ при некотором $\delta > 0$ и $S'(x_0) \neq 0$. В противном случае будем называть x_0 *критической точкой интеграла* (1.1). Мы будем рассматривать только изолированные критические точки. *Вкладом от критической точки x_0* в интеграл $F(\lambda)$ мы назовем интеграл

$$F(\lambda;\ x_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x,\ x_0) \exp[i\lambda S(x)]\,dx. \qquad (1.10)$$

Здесь $\varphi(x,\ x_0)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция такая, что

1) $\operatorname{supp}\varphi$ не содержит критических точек, отличных от x_0;

2) $\varphi(x,\ x_0) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки x_0 (напомним, что мы продолжили функции f, S нулем вне I).

Теорема 1.2 (принцип локализации). *Пусть $I = [a,\ b]$ — конечный отрезок, и пусть интеграл (1.1) имеет конечное число изолированных критических точек $x_1, \ldots, x_k \in I$. Тогда*

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} F(\lambda;\ x_j) + O(\lambda^{-\infty}) \quad (\lambda \to +\infty), \qquad (1.11)$$

т. е. интеграл $F(\lambda)$ равен сумме вкладов от критических точек с точностью до $O(\lambda^{-\infty})$.

Покроем отрезок I конечным числом открытых интервалов Ω_α так, чтобы каждая критическая точка x_j содержалась ровно в одном интервале Ω_{α_j}, и устроим разбиение единицы $\{\varphi_\alpha(x)\}$, отвечающее покрытию $\{\Omega_\alpha\}$. Тогда $\varphi_{\alpha_j}(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки x_j. Продолжим функции $f(x)$, $S(x)$ на всю ось, полагая их равными нулю при $x \notin I$. Тогда

$$F(\lambda) = \sum_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[i\lambda S(x)] \varphi_\alpha(x)\, dx.$$

Если $\alpha \neq \alpha_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, то интеграл, содержащий $\varphi_\alpha(x)$, имеет порядок $O(\lambda^{-\infty})$ в силу леммы 1.1. Тем самым (1.11) доказано.

Таким образом, как и в методе Лапласа, задача о вычислении асимптотики $F(\lambda)$ сводится к задаче о вычислении асимптотики интеграла по малой окрестности критической точки. В этой окрестности функции f, S можно приближенно заменить более простыми и исследовать затем полученный эталонный интеграл.

Вычислим вклад от граничной критической точки в простейшем случае.

Теорема 1.3. *Пусть $f(x)$, $S(x) \in C^\infty[a, a+\delta)$, $\delta > 0$ и $S'(a) \neq 0$. Тогда при $\lambda \to +\infty$*

$$F(\lambda;\ a) \sim -\exp[i\lambda S(a)] \sum_{k=0}^{\infty} (i\lambda)^{-k-1} M^k \left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)\Bigg|_{x=a}. \quad (1.12)$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Главный член имеет вид

$$F(\lambda;\ a) \sim -\frac{f(a) \exp[i\lambda S(a)]}{i\lambda S'(a)}. \quad (1.12')$$

3. Эталонные интегралы. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} f(x)\, e^{i\lambda x^\alpha} dx. \quad (1.13)$$

Лемма 1.2 (лемма Эрдейи). *Пусть $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 0$, функция $f(x) \in C^\infty([0, a])$ и обращается в нуль вместе со всеми производными в точке $x = a$. Тогда*

$$\int_0^a x^{\beta-1} f(x)\, e^{i\lambda x^\alpha} dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} \quad (\lambda \to +\infty), \quad (1.14)$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!\,\alpha} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \exp\left[\frac{i\pi(k+\beta)}{2\alpha}\right]. \quad (1.15)$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Лемма Эрдейи играет такую же роль для интегралов Фурье, как лемма Ватсона — для интегралов Лапласа.

Фазовая функция $S = x^\alpha$ имеет единственную критическую точку $x = 0$ на участке интегрирования. Рассмотрим вначале случай, когда $f(x) = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant \delta$, где $0 < \delta < a$. Тогда подынтегральная функция аналитична на интервале $(0, \delta)$. В секторе $0 < \arg x < \pi/\alpha$ имеем $\operatorname{Re}(ix^\alpha) < 0$. По теореме Коши интеграл по отрезку $[0, \delta/2]$ равен интегралу по ломаной $l = l_1 \cup l_2$, где $l_1 = \left[0, e^{\frac{i\pi}{2\alpha}} \rho_0\right]$, $l_2 = \left[e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}\rho_0, \frac{\delta}{2}\right]$ и $\rho_0 \cos\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\delta}{2}$. Тогда

$$\Phi_\beta(\lambda) = \Phi_\beta^{(1)}(\lambda) + \Phi_\beta^{(2)}(\lambda) + \Phi_\beta^{(3)}(\lambda), \tag{1.16}$$

где $\Phi_\beta^{(j)}(\lambda)$ — интеграл (1.13) по отрезку l_j, $l_3 = \left[\frac{\delta}{2}, a\right]$ (напомним, что $f(x) = 1$ при $x \in l_1 \cup l_2$). Имеем

$$\Phi_\beta^{(1)}(\lambda) = \int\limits_0^{\rho_0 e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}} x^\beta e^{i\lambda x^\alpha} dx = e^{\frac{i\pi(\beta+1)}{2\alpha}} \int\limits_0^{\rho_0} x^\beta e^{-\lambda x^\alpha} dx =$$

$$= \alpha^{-1}\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right) e^{\frac{i\pi(\beta+1)}{2\alpha}} \lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}} + O(e^{-c\lambda}), \quad c > 0, \tag{1.17}$$

в силу леммы Ватсона. Интегрируя по частям, получаем

$$\Phi_\beta^{(2)}(\lambda) + \Phi_\beta^{(3)}(\lambda) = \frac{x^\beta \exp(i\lambda x^\alpha)}{i\alpha\lambda x^{\alpha-1}}\Bigg|_{\rho_0 e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}}^{\frac{\delta}{2}} -$$

$$- (i\alpha\lambda)^{-1} \int\limits_{l_2} \exp(i\lambda x^\alpha)(x^{\beta-\alpha+1})' dx +$$

$$+ (i\lambda x^{\alpha-1})^{-1} x^\beta f(x) \exp(i\lambda x^\alpha)\big|_{\delta/2}^{a} -$$

$$- (i\lambda\alpha)^{-1} \int\limits_{\delta/2}^{a} (f(x) x^{\beta-\alpha+1})' \exp(i\lambda x^\alpha)\, dx. \tag{1.18}$$

Внеинтегральная подстановка при $x = \rho_0 e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}$ экспоненциально мала, так как в этой точке $\exp(i\lambda x^\alpha) = \exp(-\lambda\rho_0^\alpha)$. Внеинтегральная подстановка при $x = a$ равна нулю, так как $f(a) = 0$. Наконец, внеинтегральные подстановки в точке $x = \delta/2$ сокращаются (если функция $h(x)$ аналитична в точке x_0, то ее производная по любому направлению равна $h'(x_0)$). Следовательно, внеинтегральные подстановки в (1.18) имеют порядок $O(\lambda^{-\infty})$. Кроме того,

$$\Phi_\beta^{(2)}(\lambda) + \Phi_\beta^{(3)}(\lambda) = O(\lambda^{-1}) \quad (\lambda \to +\infty), \qquad (1.19)$$

так как $|\exp(i\lambda x^\alpha)| \leqslant 1$ на отрезках l_1, l_2, l_3 при $\lambda \geqslant 0$. Далее,

$$\Phi_\beta^{(2)}(\lambda) + \Phi_\beta^{(3)}(\lambda) = -\frac{\beta-\alpha}{i\lambda\alpha}\left[\int_{l_2} x^{\beta-\alpha}\exp(i\lambda x^\alpha)\,dx + \int_{l_3} \exp(i\lambda x^\alpha)\,(x^{\beta+\alpha-1})' f'(x)\,dx\right] - (i\lambda\alpha)^{-1}\int_{\delta/2}^{a} x^{\beta+\alpha-1} f'(x)\exp(i\lambda x^\alpha)\,dx + O(\lambda^{-\infty}).$$

Поскольку функция $f'(x) \in C^\infty([0, a])$ и $f'(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \delta$, то последний интеграл имеет порядок $O(\lambda^{-\infty})$ в силу леммы 1.1, так что

$$\Phi_\beta^{(2)}(\lambda) + \Phi_\beta^{(3)}(\lambda) = \frac{\alpha-\beta}{i\lambda\alpha}\left[\Phi_{\beta-\alpha}^{(2)}(\lambda) + \Phi_{\beta-\alpha}^{(3)}(\lambda)\right] + O(\lambda^{-\infty}). \qquad (1.20)$$

Поскольку в силу (1.19) $\Phi_{\beta-\alpha}^{(2)}(\lambda) + \Phi_{\beta-\alpha}^{(3)}(\lambda) = O(\lambda^{-1})$, то в силу (1.20) $\Phi_\beta^{(2)}(\lambda) + \Phi_\beta^{(3)}(\lambda) = O(\lambda^{-2})$. Повторение этих же рассуждений показывает, что

$$\Phi_\beta^{(2)}(\lambda) + \Phi_\beta^{(3)}(\lambda) = O(\lambda^{-\infty}).$$

Из этой оценки и (1.16), (1.17) следует, что

$$\Phi_\beta(\lambda) = \alpha^{-1}\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)e^{\frac{i\pi(\beta+1)}{2\alpha}}\lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}} + O(\lambda^{-\infty}) \quad (\lambda \to +\infty), \qquad (1.21)$$

если $f(x) = 1$ при малых x.

Докажем лемму в общем случае. По формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + f_N(x).$$

Заменим в интеграле (1.10) $f(x)$ на $f(x)\psi(x)$, где $\psi \in C^\infty([0, a])$, $\psi = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant \delta < a$ и функция ψ обращается в нуль при $x = a$ вместе со всеми производными. Обозначим полученный интеграл $\Psi(\lambda)$. Так как $f(x)-f(x)\psi(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant\delta$, то по лемме 1.1

$$\Phi(\lambda)=\Psi(\lambda)+O(\lambda^{-\infty}).$$

Далее,

$$\Psi(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}\frac{f^{k}(0)}{k!}\Phi_{\beta+k}(\lambda)+R_N(\lambda),$$

$$\Phi_{\beta+k}(\lambda)=\int_0^a x^{\beta+k}\psi(x)\exp(i\lambda x^{\alpha})\,dx.$$

По доказанному выше асимптотика интегралов $\Phi_{\beta+k}(\lambda)$ дается формулой (1.21), и остается показать, что

$$R_N(\lambda)=O(\lambda^{-s_N})\quad(\lambda\to+\infty),\tag{1.22}$$

где $\lim\limits_{N\to\infty}s_N=+\infty$. Имеем

$$f_N(x)=x^{N+1}h_N(x),\quad h_N\in C^{\infty}([0,\,a]),$$

$$R_N(\lambda)=\int_0^a\varphi_N(x)\exp(i\lambda x^{\alpha})\,dx,\qquad\varphi_N(x)=x^{\beta+N}h_N(x)\psi(x).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$R_N(\lambda)=$$
$$=(i\lambda\alpha)^{-1}[\varphi_N(x)]\exp\left(i\lambda x^{\alpha}\right)\Big|_0^a-\int_0^a[x^{1-\alpha}\varphi_N(x)]'\exp\left(i\lambda x^{\alpha}\right)dx.\tag{1.23}$$

Функция $\varphi_N(x)$ обладает следующими свойствами: 1) при $x=a$ она обращается в нуль вместе со всеми производными; 2) при $x=0$ она имеет нуль порядка $s=\beta+N$. Поэтому внеинтегральная подстановка в (1.23) равна нулю при $N\geqslant 0$. Функция $(x^{1-\alpha}\varphi_N(x))'$ обладает свойством 1) и свойством 2) при $s=\beta+N-\alpha$. Следовательно, можно повторить такое же интегрирование по частям, как в (1.23), $\left[\frac{\beta+N}{\alpha}\right]$ раз. При этом все внеинтегральные подстановки обратятся в нуль, и мы получим, что

$$R_N(\lambda)=C_N\lambda^{-\left[\frac{\beta+N}{\alpha}\right]}\int_0^a q_N(x)\exp\left(i\lambda x^{\alpha}\right)dx,$$

где $q_N(x)$ — непрерывная при $0 \leqslant x \leqslant a$ функция. Следовательно,

$$R_N(\lambda) = O\left(\lambda^{-\left[\frac{\beta+N}{\alpha}\right]}\right) \quad (\lambda \to +\infty),$$

и (1.22) доказано.

Лемма 1.3. *Утверждения леммы* 1.2 *верны при* $|\lambda| \to \infty$, $0 \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi$, *равномерно по* $\arg \lambda$.

1.4. При $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^1 \exp(i\lambda x^3)\, dx \sim \Gamma(4/3)\, e^{i\pi/6} \lambda^{-1/3} - e^{i\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+2/3)}{\Gamma(-1/3)} (i\lambda)^{-k-1}.$$

Эрдейи [44] принадлежит другое доказательство леммы 1.2. Мы приведем его, поскольку оно содержит полезный технический прием. Пусть $\alpha \geqslant 1$, $0 < \beta \leqslant 1$. Представим $\Phi_\beta(\lambda)$ в виде

$$\Phi_\beta(\lambda) = \int_0^a f(x)\, d\left(\int_\infty^x t^{\beta-1} e^{i\lambda t^\alpha} dt\right)$$

и проинтегрируем по частям. Здесь интеграл берется по лучу l_t: $t = x + \rho e^{i\frac{\pi}{2\alpha}}$, $\rho > 0$, в комплексной плоскости t. Интегрируя по частям N раз, получаем

$$\begin{gathered}\Phi_\beta(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n f^{(n)}(0)\, \varphi_{-n-1}(0, \lambda) + R_N(\lambda), \\ R_N(\lambda) = (-1)^{N+1} \int_0^a \varphi_{-N}(x, \lambda)\, f^{(N)}(x)\, dx.\end{gathered} \tag{1.24}$$

Здесь обозначено

$$\varphi_{-n-1}(x, \lambda) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_{l_x} (t-x)^n\, t^{\beta-1} \exp\left(i\lambda t^\alpha\right) dt. \tag{1.25}$$

Сумма из (1.24) дает первые N членов разложения (1.14); оценим остаточный член. Имеем при $x \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$

$$x + \rho e^{\frac{i\pi}{2\alpha}} = re^{i\varphi}, \quad r^2 = \left(x + \rho\cos\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 + \rho^2 \sin^2 \frac{\pi}{2\alpha} \geqslant \rho^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\rho \sin \frac{\pi}{2\alpha}}{x + \rho \cos \frac{\pi}{2\alpha}} \leqslant \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\alpha},$$

так что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}$, и поэтому

$$\sin(\alpha\varphi) \geqslant 0, \quad \operatorname{Re}\left[i\left(x + \rho e^{i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)^{\alpha}\right] \leqslant -r^{\alpha}\sin\alpha\varphi \leqslant -\rho^{\alpha}.$$

Далее, $|t|^{\beta-1} \leqslant x^{\beta-1}$ на луче l_x, так что

$$\varphi_{-n-1}(x, \lambda)| \leqslant \frac{x^{\beta-1}}{n!}\int_0^{\infty}\rho^n \exp(-\lambda\rho^{\alpha})\,d\rho = \\ = \frac{1}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right)x^{\beta-1}\lambda^{-\frac{n+1}{\alpha}}.$$

Следовательно,

$$|R_N(\lambda)| \leqslant C_N\lambda^{-\frac{N}{\alpha}}\int_0^a x^{\beta-1}dx = C_N'\lambda^{-\frac{N}{\alpha}}. \qquad (1.26)$$

Так как N произвольно, то (1.14) доказано.

4. Вклад от стационарной точки. Теперь мы будем действовать по тому же плану, что и в § 1, гл. II, а именно, комбинировать лемму Эрдейи и лемму 2.1.2 о замене переменной.

Теорема 1.4. *Пусть $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ — конечный отрезок и выполнены условия*:

1°. $f(x) \in C_0^{\infty}(I)$, $S(x) \in C^{\infty}(I)$.

2°. *Функция $S(x)$ имеет при $x \in I$ единственную стационарную точку x_0.*

3°. $S''(x_0) \neq 0$ (*т. е. x_0 — невырожденная стационарная точка*).

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda; x_0) \equiv \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\exp[i\lambda S(x)]\,dx \sim \\ \sim \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)\right]\lambda^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^{-k}, \quad (1.27)$$

где коэффициенты a_k имеют вид

$$a_k = \exp\left[\frac{i\pi(2k+1)}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)\right]\frac{\Gamma(k+1/2)}{(2k)!}2^{k+1/2} \times \\ \times\left(S(x, x_0)^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{2k}(f(x)\,S(x, x_0))\Big|_{x=x_0}, \\ S(x, x_0) = \sqrt{2(S(x) - S(x_0))\operatorname{sgn} S''(x_0)}\,(S'(x))^{-1}. \qquad (1.28)$$

Разложение (1.27) *можно дифференцировать по* λ *любое число раз.*

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda; x_0) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}}\,[f(x_0) + O(\lambda^{-1})] \times$$
$$\times \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)\right] \quad (\lambda \to +\infty).$$

Сделаем замену переменной $x = \psi(y)$ такую, что $S(x) = S(x_0) + \frac{\varepsilon y^2}{2}$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} S''(x_0)$ (см. лемму 2.1.2). При этом $\delta > 0$ можно считать настолько малым, чтобы функции $x = \psi(y)$, $y = \psi^{-1}(x) \in C^\infty$. Тогда

$$F(\lambda; x_0) = \exp[i\lambda S(x_0)] \int_{-\delta_1}^{\delta_2} \exp\left(\frac{i\lambda\varepsilon y^2}{2}\right) f(\psi(y))\,\psi'(y)\,dy.$$

Применяя к каждому из интегралов $\int\limits_{\delta_1}^{0}$, $\int\limits_{0}^{\delta_2}$ лемму Эрдейи, получаем, что $F(\lambda; x_0)$ разлагается в асимптотический ряд (1.27). Формула (1.28) доказывается точно так же, как и формула (2.1.26).

Имеет место также формула, аналогичная (2.4.9):

$$F(\lambda; x_0) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)\right] \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{i}{2\lambda}\right)^k (S''(x_0))^{-k} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2k} [f(x)\exp(i\lambda h(x, x_0))]\big|_{x=x_0}, \tag{1.29}$$
$$h(x, x_0) = S(x) - S(x_0) - \frac{1}{2} S''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Доказательство будет приведено в § 2 в многомерном случае.

Теорема 1.5. *Пусть* $I = [x_0, x_0 + \delta]$ — *конечный отрезок,* $\delta > 0$, *функции* $f(x)$, $S(x) \in C^\infty(I)$ *и* $f^{(k)}(x_0 + \delta) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Пусть функция* $S(x)$ *имеет на* I *единственную стационарную точку* $x = x_0$ *и*

$$S^{(k)}(x_0) = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant m - 1, \quad S^{(m)}(x_0) \neq 0, \tag{1.30}$$

где $m \geqslant 2$. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda; x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x) \exp[i\lambda S(x)]\, dx \sim$$
$$\sim \lambda^{-1/m} \exp[i\lambda S(x_0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k/m}, \quad (1.31)$$

где коэффициенты a_k *вычисляются по формуле*

$$a_k = \frac{1}{k!m} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) \exp\left[\frac{i\pi\delta(x_0)(k+1)}{2m}\right] \times$$
$$\times \left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[f(x)\left(-\delta(x_0)(S(x)-S(x_0))\right)^{-\frac{k+1}{m}} (x-x_0)^{k+1}\right]\Big|_{x=x_0}. \quad (1.32)$$

Здесь обозначено

$$\delta(x_0) = \operatorname{sgn} S^{(m)}(x_0). \quad (1.33)$$

Главный член асимптотики (1.31) имеет вид

$$F(\lambda; x_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{m} \lambda^{-\frac{1}{m}} \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{2m} \operatorname{sgn} S^{(m)}(x_0)\right] \times$$
$$\times \left[f(x_0) + O\left(\lambda^{-\frac{1}{m}}\right)\right].$$

Пример 1.3. Функция Бесселя целого индекса $n \geqslant 0$ имеет интегральное представление

$$J_n(x) = \pi^{-1} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi.$$

Вычислим асимптотику $J_n(x)$ при $x \to +\infty$ и фиксированном n. Имеем

$$J_n(x) = \pi^{-1} \operatorname{Re} \int_0^{\pi} \exp(ix\sin\varphi - in\varphi)\, d\varphi.$$

Функция $S(\varphi) = \sin\varphi$ имеет на отрезке $[0, \pi]$ единственную стационарную точку $\varphi = \pi/2$, в которой $S = 1$, $S'' = -1$. Поэтому главный вклад в асимптотику дает эта точка. Из формулы (1.27′) получаем, что

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1}),$$

так как вклад от концов имеет порядок $O(x^{-1})$.

Пример 1.4. Функция Бесселя вещественного индекса ν имеет интегральное представление

$$J_\nu(\nu x) = \pi^{-1}\int_0^\pi \cos[\nu(\varphi - x\sin\varphi)]\,d\varphi - \\ - \pi^{-1}\sin\nu\pi\int_0^\infty \exp[-\nu(t + x\operatorname{sh} t)]\,dt. \quad (1.34)$$

Вычислим асимптотику $J_\nu(\nu x)$ при $\nu\to+\infty$, $x>1$ фиксированном. Второе слагаемое в (1.34) имеет порядок $O(\nu^{-1})$, так как интеграл не превосходит величины $\int_0^\infty e^{-\nu t}dt = \nu^{-1}$. Первое слагаемое в правой части (1.32) равно

$$\pi^{-1}\operatorname{Re}\int_0^\pi \exp[i\nu S(\varphi)]\,d\varphi, \quad S = \varphi - x\sin\varphi.$$

Стационарная точка единственна и имеет вид $\varphi_0 = \arccos x^{-1}$, причем $S''(\varphi_0) = \sqrt{x^2-1}$, $S(\varphi_0) = \arccos x^{-1} - \sqrt{x^2-1}$. По формуле (1.27)

$$J_\nu(\nu x) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi\nu\sqrt{x^2-1}}}\cos\left(\nu\arccos x^{-1} - \nu\sqrt{x^2-1} + \frac{\pi}{4}\right) + \\ + O(\nu^{-1})$$

$$(\nu\to+\infty,\ x>1).$$

Вычислим асимптотику $J_\nu(\nu)$ при $\nu\to+\infty$. Имеем

$$J_\nu(\nu) = \pi^{-1}\operatorname{Re}\int_0^\pi \exp[i\nu S(\varphi)]\,d\varphi + O(\nu^{-1}),$$

$$S = \varphi - \sin\varphi.$$

Стационарной точкой является точка $\varphi = 0$, причем $S(0) = S''(0) = 0$, $S'''(0) = 1$. Применяя формулу (1.31), получаем

$$J_\nu(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi\nu^{1/3}} + O(\nu^{-2/3}) \quad (\nu\to+\infty).$$

Рассмотрим пример, когда функция $f(x)$ имеет логарифмическую особенность в стационарной точке функции $S(x)$.

Лемма 1.4. *Пусть $f(x) \in C^\infty([0, a])$, где $0 < a < 1$, обращается в нуль при $x = a$ вместе со всеми производными, и $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда при $\lambda \to +\infty$*

$$F(\lambda) \equiv \int_0^a f(x)\, x^{\beta-1} \ln x \exp(i\lambda x^\alpha)\, dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda)\, \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \quad (1.35)$$

$$a_k(\lambda) = \alpha^{-2}\Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right)\left[-\ln\lambda + \psi\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) + \frac{i\pi}{2}\right]\times$$
$$\times \exp\left[\frac{i\pi(\beta+k)}{2\alpha}\right]\frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad (1.36)$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = -\alpha^{-2} e^{\frac{i\pi\beta}{2\alpha}}\, \Gamma(\beta/\alpha)\, \lambda^{-\beta/\alpha} \ln\lambda \left[f(0) + O\left(\frac{1}{\ln\lambda}\right)\right]. \quad (1.37)$$

Повторяя те же рассуждения, что и в доказательстве леммы Эрдейи, получаем, что

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, \Psi_k(\lambda) + O(\lambda^{-\gamma_N}), \quad (1.38)$$

где $\gamma_N \to +\infty$ при $N \to \infty$,

$$\Psi_k(\lambda) = \int_0^a x^{\beta+k}\psi(x) \ln x \exp(i\lambda x^\alpha)\, dx.$$

Снова заменим контур интегрирования на $l_1 \cup l_2 \cup l_3$; тем же способом, что и в лемме 1.2, можно показать, что интеграл по $l_2 \cup l_3$ имеет порядок $O(\lambda^{-\infty})$, а интеграл по l_1 равен

$$\exp\left[\frac{i\pi(\beta+k)}{2\alpha}\right]\int_0^a y^{\beta+k} e^{-\lambda y^\alpha}\left(\ln y + \frac{i\pi}{2\alpha}\right) dy.$$

Разобьем этот интеграл на два: $I_1 + I_2$, где I_1 содержит $\ln y$, а I_2 содержит $\frac{i\pi}{2\alpha}$. К первому из них применим лемму 1.2, а ко второму — лемму Ватсона, тогда

$$I_1 + I_2 =$$
$$= \alpha^{-2}\Gamma\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right)\left[-\ln\lambda + \psi\left(\frac{\beta+k}{\alpha}\right) + \frac{i\pi}{2\alpha}\right]\lambda^{-\frac{\beta+k}{\alpha}} + O\left(e^{-\lambda a^{\alpha}}\right).$$

Подставляя полученные выражения в (1.37), получаем (1.34), (1.35).

1.5. Пусть условия леммы 1.4 выполнены, γ вещественно. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^a f(x)\, x^{\beta-1} (\ln x)^{\gamma} \exp\left(i\lambda x^{\alpha}\right) dx \sim$$
$$\sim -e^{i\pi\beta/(2\alpha)}\alpha^{-2}\Gamma(\beta/\alpha)\left[f(0) + O\left(\frac{1}{\ln\lambda}\right)\right]\lambda^{-\beta/\alpha}(\ln\lambda)^{\gamma}.$$

5. Более сложная зависимость от параметра. Рассмотрим интеграл, содержащий дополнительные вещественные параметры $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$:

$$F(\lambda, \alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) \exp\left[i\lambda S(x, \alpha)\right] dx, \qquad (1.39)$$

и докажем результат, аналогичный теореме 2.2.1. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^k_{\alpha}$, $I = [a, b]$ — конечный отрезок. Введем условия:

A_1. Функции f, $S \in C([I \times \Omega]) \cap C^{\infty}(I \times \Omega)$, функция $S(x, \alpha)$ вещественнозначна при $(x, \alpha) \in I \times \Omega$.

A_2. При каждом фиксированном $\alpha \in \Omega$ функция $S(x, \alpha)$ имеет единственную критическую точку $x_0(\alpha) \in I$. Эта точка невырождена,

$$\left|S''_{xx}(x_0(\alpha), \alpha)\right| \geqslant \delta_0 > 0, \quad \alpha \in \Omega,$$

и лежит строго внутри I, т. е. $x_0(\alpha) \in I' = [a', b']$, $a < a' < b' < b$, при всех $\alpha \in \Omega$.

A_3. $D_x^k f(x, \alpha) = 0$ при $x = a, b$; $\alpha \in \Omega$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема 1.6. *Пусть условия $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_3$ выполнены. Тогда для функции $F(\lambda, \alpha)$ справедливо асимптотическое разложение (1.27) при $\lambda \to +\infty$ равномерно по $\alpha \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — произвольный компакт, лежащий внутри Ω. Это разложение можно почленно дифференцировать по λ и по α любое число раз.*

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda, \alpha) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\left|S''_{xx}(x_0(\alpha), \alpha)\right|}}\left[f(x_0(\alpha), \alpha) + O(\lambda^{-1})\right]\times$$
$$\times\exp\left[i\lambda S(x_0(\alpha), \alpha) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} S''_{xx}(x_0(\alpha), \alpha)\right], \quad (1.40)$$

где $O(\lambda^{-1})$ равномерно по $\alpha \in \mathscr{K}$.

1.6. Асимптотическая формула (1.34) для функции Бесселя пригодна при $\nu \to +\infty$ равномерно по x, $1 < a \leqslant \leqslant x \leqslant b$ (числа a, b фиксированы).

Пример 1.5. Рассмотрим интеграл

$$\eta(t, x) = \frac{S}{\pi}\int_0^\infty e^{-2\nu t k^2}\cos xk \cos t\sqrt{gk}\,dk.$$

Здесь η — профиль волн, вызванных сконцентрированным в начале координат поднятием жидкости площади S, на свободной поверхности жидкости в канале бесконечной глубины. Далее, t — время, x — пространственная переменная, ν — кинематическая вязкость и g — ускорение силы тяжести.

В работе [73] с помощью ряда линейных замен переменных η приводится к виду

$$\xi = 2\int_0^\infty ue^{-2tu^4}\cos(xu^2)\cos(tu)\,du,$$

где ξ пропорциональна η, и вычисляется асимптотика на кривых $x = ct^\alpha$, $t \to +\infty$, при различных α. Мы модифицируем это решение. Делая замену $u \to t^{-1/4}u$, получаем

$$\xi = t^{-1/2}\operatorname{Re}(I_+ + I_-), \quad (1.41)$$
$$I_\pm = \int_0^\infty \varphi(u)\exp\left[it^{3/4}S_\pm(u, \alpha)\right]du,$$

где обозначено

$$\varphi(u) = ue^{-2u^4}, \quad \alpha = xt^{-5/4}, \quad S_\pm = u \pm \alpha u^2. \quad (1.42)$$

Точки $u_\pm(\alpha) = \mp 1/(2\alpha)$ являются стационарными точками фазовой функции $S_\pm$. Параметр α может быть и большим, и малым. Стационарные точки $u_\pm$ лежат далеко от начала контура $u = 0$ при $\alpha \ll 1$ и лежат близко к этой точке при $\alpha \gg 1$.

1°. $\alpha \to 0$. Положим $I_\pm = I_\pm^{(1)} + I_\pm^{(2)}$, где $I_\pm^{(1)}$ — интеграл по отрезку $\left[0, \frac{1}{4\alpha}\right]$. Тогда при $\alpha \to 0$

$$|I_\pm^{(2)}| \leqslant \int_{1/4\alpha}^{\infty} ue^{-2u^4} du \sim c_1\alpha^2 e^{-C_2\alpha^{-4}} = O\left(e^{-C\alpha^{-4}}\right) (C > 0).$$

(Здесь и далее C, C_j — постоянные, не зависящие от x, t.) Интегрируя $I_\pm^{(1)}$ по частям дважды (так как $\varphi(0) = 0$), как в доказательстве теоремы 1.1, получаем

$$I_\pm^{(1)} = -t^{-3/2}\left[1 + O\left(t^{-3/4}\right)\right].$$

Следовательно,

$$\xi = -2t^{-2}\left[1 + O(t^{-3/4})\right] + t^{-1/2}O(\exp(-Ct^3/x^4)) \quad (t \to +\infty, \quad t^3/x^4 \to \infty). \tag{1.43}$$

2°. $\alpha \in l$, где l — конечный отрезок, $0 \equiv l$. В этом случае интеграл I_+ по-прежнему имеет порядок $O(t^{-3/2})$, равномерно по $\alpha \in l$, так как $|S'_u(u, \alpha)| \geqslant C > 0$ при всех $u \geqslant 0$, $\alpha \in l$. Асимптотика интеграла I_- по теореме 1.5 равна вкладу от стационарной точки $u_-(\alpha)$; этот вклад имеет порядок, больший чем I_+. Окончательно получаем

$$\xi = \frac{t\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^4}{8t^6}\right)\left[\cos\left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(t^{-3/2}\right)\right] \quad (t \to +\infty, \quad 0 < \beta_1 \leqslant t^3/x^4 \leqslant \beta_2 < \infty) \tag{1.44}$$

равномерно по α.

3°. $\alpha \to +\infty$. В этом случае стационарные точки $u_\pm(\alpha) \to 0$, т. е. «садятся» на конец контура интегрирования, так что основной вклад в асимптотику $I_\pm$ вносит окрестность точки $u = 0$. Сделаем в интеграле ξ замену переменной $u \to ut/x$, тогда

$$\xi = \left(\frac{t}{x}\right)^2 \operatorname{Re}(\tilde{I}_+ + \tilde{I}_-), \qquad \tilde{I}_\pm = \int_0^\infty u \exp\left(-2\beta u^4 \pm t\lambda \tilde{S}_\pm(u)\right) du, \tag{1.45}$$

где обозначено

$$\lambda = t^2/x, \quad \beta = x^4/t^6, \quad \tilde{S}_\pm = u \pm u^2,$$

и β — малый параметр. Рассмотрим два случая:

a) $\lambda \to +\infty$. Тогда основной вклад в $I_\pm$ вносят точка $u = 0$ и стационарная точка $u = 1/2$ соответственно. Имеем

$$I_+ = (i\lambda)^{-2}[1 + O(\lambda^{-1})],$$

$$\widetilde{I}_- = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{-\beta/8} e^{i\frac{\pi-\lambda}{4}}\,[1 + O(\lambda^{-1})],$$

так что

$$\xi = \frac{t\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}\left(\cos\left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{x}{t^2}\right) + O\left(\frac{x^4}{t^5}\right)\right] \qquad (1.46)$$
$$\left(\frac{t^2}{x} \to +\infty,\ \frac{x^4}{t^5} \to 0\right).$$

b) $\lambda \to 0$. В этом случае оба параметра λ, β в интеграле (1.45) являются малыми. Преобразуем ξ к интегралу, содержащему большой параметр, делая замену $u \to u/t$; тогда

$$\xi = \operatorname{Re}(\widetilde{\widetilde{I}}_+ + \widetilde{\widetilde{I}}_-),$$

$$\widetilde{\widetilde{I}}_\pm = 2t^{-2}\int_0^\infty u \exp\left(-\frac{2u^4}{t^3} + iu\right)\exp\left(\pm\frac{ix}{t^2}u^2\right)du.$$

В данном случае $x/t^2 \to +\infty$, обе фазовые функции имеют точку стационарной фазы $u = 0$, и мы получаем

$$\xi = \frac{t^2}{2x^2}[1 + o(1)] \qquad (x/t^2 \to +\infty). \qquad (1.47)$$

Полученные формулы (1.44), (1.46), (1.47) не решают поставленной задачи полностью, так как остаются пограничные зоны, в которых асимптотика, вообще говоря, выражается через специальные функции (см. гл. VI).

Докажем аналог теоремы 2.2 из гл. II. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \lambda)\exp[iS(x, \lambda)]\,dx, \qquad (1.48)$$

где a, b, f, S — вещественнозначные функции. Введем условия:

A_4. Функция $S(x, \lambda)$ при $\lambda \gg 1$ имеет единственную стационарную точку $x = x_0(\lambda)$, которая невырождена при $\lambda \gg 1$.

A_5. Существует функция $\rho(\lambda) > 0$ при $\lambda \gg 1$ такая, что

$$\rho^2(\lambda)\, S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda) \to +\infty \quad (\lambda \to +\infty), \tag{1.49}$$

$$S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda) - S''_{xx}(x_0(\lambda) + h, \lambda) = \\ = o\left[(\rho(\lambda))^{-3}\left(S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)\right)^{-1/2}\right] \tag{1.50}$$

при $\lambda \to +\infty$, $|h| \leqslant \rho(\lambda)$.

Теорема 1.7. *Пусть условия A_4, A_5 выполнены. Тогда*

$$\int\limits_{x_0(\lambda)-\rho(\lambda)}^{x_0(\lambda)+\rho(\lambda)} \exp\left[i\lambda S(x, \lambda)\right] dx \sim \\ \sim \sqrt{\frac{2\pi}{S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)}} \exp\left[iS(x_0(\lambda), \lambda) + \frac{i\pi}{4}\right] \quad (\lambda \to +\infty). \tag{1.51}$$

По формуле Тейлора при $x \in (x_0(\lambda) - \rho(\lambda),\ x_0(\lambda) + \rho(\lambda))$ имеем

$$S(x, \lambda) = S(x_0(\lambda), \lambda) + \frac{1}{2} S''_{xx}(\varphi(x, \lambda), \lambda)(x - x_0(\lambda))^2,$$

$$|x_0(\lambda) - \varphi(x, \lambda)| \leqslant \rho(\lambda).$$

Далее, из (1.49) следует, что при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_{-\rho(\lambda)}^{\rho(\lambda)} \exp\left[\frac{i}{2} S''(x_0(\lambda), \lambda)\, x^2\right] dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)}}\, e^{\frac{i\pi}{4}}. \tag{1.52}$$

Поскольку $|1 - e^{i\theta}| \leqslant |\theta|$ при вещественных θ, то

$$\left|\int\limits_{-\rho(\lambda)}^{\rho(\lambda)} \exp\left[\frac{i}{2} S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)\, x^2\right] - \exp\left[\frac{i}{2} S''_{xx}(\varphi, \lambda)\, x^2\right] dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\rho(\lambda)}^{\rho(\lambda)} \left|1 - \exp\left[\frac{ix^2}{2}\left(S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda) - S''_{xx}(\varphi(x, \lambda), \lambda)\right)\right]\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\rho^3(\lambda)\left|S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda) - S''_{xx}(\varphi, \lambda)\right| = \\ = o\left(\left|S''_{xx}(x_0(\lambda), \lambda)\right|^{-1/2}\right) \quad (\lambda \to +\infty).$$

6. Асимптотика главных значений интегралов. Рассмотрим интеграл $\int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, где $a,\ b > 0$. Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$, если $\varphi(0) \neq 0$, так что этот интеграл, вообще говоря, расходится. *Главным значением* (v. p.) по Коши этого интеграла называется предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{a}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \text{v. p.}\int_{-a}^{b}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \qquad (1.53)$$

Этот предел существует, если функция $\varphi(x)$ дифференцируема. Для симметричного интервала $[-a,\ a]$ имеем

$$\text{v. p.}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx. \qquad (1.53')$$

Пусть функция $\varphi(x)$ голоморфна в некоторой комплексной окрестности $|x| < R$ точки $x = 0$, и пусть l_ε^+ — контур в комплексной плоскости x, состоящий из отрезков $[-a,\ -\varepsilon]$, $[\varepsilon,\ b]$ и полуокружности γ_ε^+: $|x| = \varepsilon$, $\operatorname{Im} x \geqslant 0$, где $0 < \varepsilon < R$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{l_\varepsilon^+}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{b}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + {}$$
$$+ \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\gamma_\varepsilon^+}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \text{v. p.}\int_{-a}^{b}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \pi i\varphi(0)$$

(знак минус берется потому, что полуокружность γ_ε^+ ориентирована по часовой стрелке). Но по интегральной теореме Коши интеграл по контуру l_ε^+ не зависит от ε при $0 < \varepsilon < R$. Следовательно, при малых $\varepsilon > 0$

$$\text{v. p.}\int_{-a}^{b}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{l_\varepsilon^+}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \pi i\varphi(0). \qquad (1.54)$$

Аналогично, если l_ε^- — контур, симметричный с l_ε^+ относительно вещественной оси, то при малых $\varepsilon > 0$

$$\text{v. p.} \int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{l_\varepsilon^-} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx - \pi i \varphi(0). \qquad (1.54')$$

Лемма 1.5. *Пусть* $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\lambda x} f(x) \frac{dx}{x} = \pm \pi i f(0) + O(\lambda^{-\infty}). \qquad (1.55)$$

Пусть для определенности интеграл содержит $e^{i\lambda x}$. Введем функцию $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ такую, что $\eta \equiv 1$ при $|x| < \delta$, и преобразуем подынтегральное выражение в рассматриваемом интеграле $F(\lambda)$ следующим образом:

$$e^{i\lambda x} f(x) = e^{i\lambda x}[f(x) - \eta(x) f(0)] + e^{i\lambda x} \eta(x) f(0).$$

Тогда

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \frac{f(x) - \eta(x) f(0)}{x}\, dx + {} \\ + \text{v. p.}\, f(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \frac{\eta(x)}{x}\, dx = F_1(\lambda) + F_2(\lambda).$$

Функция $\varphi(x) = x^{-1}[f(x) - \eta(x) f(0)]$ финитна и тождественно равна нулю при малых $|x|$. Следовательно, $F_1(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to +\infty$ в силу леммы 1.1. Далее, подынтегральная функция в $F_2(\lambda)$ голоморфна при малых комплексных x, так что в силу (1.54)

$$F_2(\lambda) = f(0) \int_{l_\varepsilon^+} e^{i\lambda x} \frac{\eta(x)}{x}\, dx + \pi i f(0),$$

если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Фиксируем ε. Интегрируя по частям и учитывая, что функция η обращается в нуль на концах контура l_ε^+ вместе со всеми производными, получаем, что при любом целом $N \geqslant 0$ этот интеграл равен

$$I(\lambda) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^N \int_{l_\varepsilon^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^N \left(\frac{\eta(x)}{x}\right) e^{i\lambda x}\, dx,$$

Так как $\operatorname{Im} x \geqslant 0$ на l_ε^+, то $|e^{i\lambda x}| \leqslant 1$, и мы получаем оценку $|I(\lambda)| \leqslant C_N \lambda^{-N}$ (напомним, что ε фиксировано).

Теорема 1.8. *Пусть $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, функция $S(x)$ вещественнозначна и $S'(0) \neq 0$. Тогда при $\lambda \to +\infty$*

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} \exp[i\lambda S(x)]\, dx = \\ = \pi i f(0) \exp[i\lambda S(0)] \operatorname{sgn} S'(0) + O(\lambda^{-\infty}). \quad (1.56)$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

В силу принципа локализации можно считать, что $S'(x) \neq 0$ на $\operatorname{supp} f$; пусть $S'(x) > 0$ для определенности. Сделаем замену переменных $S(x) - S(0) = t$; пусть $x = \varphi(t)$. Тогда рассматриваемый интеграл $F(\lambda)$ примет вид

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S(0)}\, \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{f^*(t)}{t}\, dt,$$

$$f^*(t) = \frac{f(x)}{S'(x)} \frac{t}{x}, \qquad x = \varphi(t),$$

функция $f^*(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Так как $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{x} = \left.\frac{dt}{dx}\right|_{t=0} = S'(0)$, то $f^*(0) = f(0)$, и (1.56) следует из (1.55). Аналогично рассматривается случай $S'(x) < 0$.

Покажем, что асимптотические ряды можно интегрировать почленно и в том случае, когда интеграл берется в смысле главного значения.

Лемма 1.6. *Если $\varphi(x) \in C^1[-a, a]$, то справедлива оценка*

$$\left| \text{v. p.} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right| \leqslant 2a \max_{x \in [-a, a]} |\varphi'(x)|. \quad (1.57)$$

При $x \in [-a, a]$ имеем по формуле Лагранжа $\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\xi)$, $\xi \in [-a, a]$. Оценка (1.57) следует из (1.53').

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, \lambda)}{x} e^{i\lambda S(x)}\, dx. \quad (1.58)$$

Пусть

1°. $f(x, \lambda) \in C^\infty$ при $x \in \mathbf{R}$, $\lambda \geqslant 1$; $f = 0$ при $|x| \geqslant a$.

2°. $S(x) \in C^\infty$ при $|x| \leqslant a$, $S'(x) \neq 0$, S — вещественнозначная функция.

3°. При любом целом $N \geqslant 0$ справедливо разложение

$$f(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{N} \lambda^{-k} f_k(x) + \lambda^{-N-1} R_k(x, \lambda), \qquad (1.59)$$

где $f_k(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции, $f_k(x) = 0$ при $|x| \geqslant a$, и для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_N(x, \lambda)| \leqslant C_N, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} R_N(x, \lambda) \right| \leqslant C'_N$$

при $|x| \leqslant a$, $\lambda \geqslant \lambda_0 > 1$.

Теорема 1.9. *Пусть условия 1° — 3° выполнены. Тогда при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) \sim \exp[i\lambda S(0)] \pi i \operatorname{sgn} S'(0) \sum_{k=0}^{\infty} f_k(0) \lambda^{-k}. \quad (1.60)$$

Теорема 1.7 применима к каждому из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{-1} f_k(x) e^{i\lambda x} dx$, а для остаточного члена в силу леммы 1.6 справедлива оценка

$$\lambda^{-N-1} \left| \int\limits_{-a}^{a} \exp[i\lambda S(x)] x^{-1} R_N(x, \lambda) \, dx \right| \leqslant \lambda^{-N-1} (\lambda C_N + C'_N).$$

Теорема 1.10. *Пусть $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, функция S вещественнозначна. Пусть $S'(0) = 0$, $S''(0) \neq 0$ и фаза S не имеет других стационарных точек на* $\operatorname{supp} f$.

Тогда при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \equiv \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} \exp[i\lambda S(x)] \, dx \sim$$

$$\sim \exp[i\lambda S(0)] \lambda^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k}. \quad (1.61)$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = \lambda^{-1/2} \exp\left[i\lambda S(0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''(0)\right] \times \\ \times \sqrt{\frac{2\pi}{|S''(0)|}} \left[f'(0) - \frac{S'''(0)}{6S''(0)} f(0) + O(\lambda^{-1})\right]. \quad (1.61')$$

В силу принципа локализации можно считать $\operatorname{supp} f$ настолько малым, насколько это необходимо. Пусть для определенности $S''(0) > 0$. Сделаем замену переменной $S(x) - S(0) = t^2$, $x = \varphi(t)$, тогда рассматриваемый интеграл равен

$$F(\lambda) = \exp[i\lambda S(0)] \text{ v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t^2} \frac{f^*(t)}{t} \, dt,$$

где обозначено

$$f^*(t) = f(x) \frac{2t^2}{S'(x)}, \qquad x = \varphi(t).$$

Функция $f^*(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. В силу (1.53′) имеем

$$F(\lambda) = \exp[i\lambda S(0)] \int_{-a}^{a} e^{i\lambda t^2} \frac{f^*(t) - f^*(-t)}{2t} \, dt.$$

Функция $\varphi(t) = (2t)^{-1}[f^*(t) - f^*(-t)] \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi(0) = f_t^{*\prime}(0)$. Применяя теорему 1.4, получаем асимптотическое разложение интеграла $F(\lambda)$. Главный член асимптотики равен $\exp\left[i\lambda S(0) + \frac{i\pi}{4}\right] \sqrt{\pi/\lambda}\, \varphi(0)$.

Вычислим $\varphi(0) = df^*(0)/dt$. Имеем

$$S(x) = S(0) + \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{6} + \ldots, \; f(x) = f_0 + f_1 x + \ldots$$

(многоточием обозначены члены более высокого порядка малости). Далее, при малых t имеем

$$f^*(t) = \frac{2(f_0 + f_1 x + \ldots) t^2}{\left(a + \frac{bx}{2} + \ldots\right) x^2} = f_0 + \left(f_1 - \frac{b}{6a} f_0\right) x + \ldots$$

Так как $x \sim \sqrt{\frac{2}{a}}\, t$ при $t \to 0$, то получаем (1.61′).

Замечание 1.2. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda, \alpha) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, \alpha)}{x} \exp[i\lambda S(x, \alpha)]\, dx,$$

содержащий вещественные параметры $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Пусть f, S бесконечно дифференцируемы по (x, α) при $-\infty < x < \infty$, $\alpha \in \Omega$, $f(x, \alpha) = 0$ при $|x| \geqslant a$ и при всех $\alpha \in \Omega$.

Тогда теорема 1.8 остается в силе для интеграла $F(\lambda, \alpha)$, если $|S'_x(x, \alpha)| \geqslant \delta > 0$ на $\operatorname{supp} f$, где δ не зависит от (x, α). Аналогично обстоит дело с теоремой 1.9. Теорема 1.10 остается в силе, если $S'_x(0, \alpha) \equiv 0$ при всех α и $|S''_{xx}(x, \alpha)| \geqslant \delta > 0$ на $\operatorname{supp} f$.

7. Интегралы с логарифмическими особенностями. Рассмотрим интеграл Фурье

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx. \tag{1.62}$$

Пусть $\operatorname{Re}\alpha_1 < \operatorname{Re}\alpha_2 < \ldots < \operatorname{Re}\alpha_m < \ldots$, $\operatorname{Re}\alpha_m \to +\infty$ и

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{\alpha_m - 1} (-\ln x)^{\beta_m} \qquad (x \to +0), \tag{1.63}$$

где β_m — произвольные комплексные числа. Пусть интеграл (1.62) сходится при $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема q раз при $x > 0$, разложение (1.63) можно q раз дифференцировать. Пусть $f^{(j)}(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, $j = 0, 1, \ldots, q-1$, и интеграл $\int_0^{\infty} f^{(q)}(x)\, e^{i\lambda x}\, dx$ сходится равномерно при $\lambda \geqslant \lambda_0$. Введем обозначение

$$J(\alpha, \beta, \lambda) = \int_l z^{\alpha-1} (-\ln z)^{\beta} e^{i\lambda z}\, dz, \tag{1.64}$$

где l — луч $\arg z = \gamma$ в комплексной плоскости z, $0 < \gamma < \pi/2$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, β — любое комплексное число. При $\lambda \to +\infty$ справедливы асимптотические разложения

$$J(\alpha, \beta, \lambda) \sim e^{i\alpha\pi/2}\lambda^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\beta}{k} \Gamma^{(k)}(\alpha) (\ln \lambda - i\pi/2)^{\beta-k},$$

$$J(\alpha, \beta, \lambda) \sim e^{i\alpha\pi/2}\lambda^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha, \beta) (\ln \lambda)^{\beta-k}, \tag{1.65}$$

$$c_k(\alpha, \beta) = (-1)^k \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \Gamma^{(s)}(\alpha) \left(\frac{\pi i}{2}\right)^{k-s}.$$

Пусть $M = M(q) > 0$ — целое, $\operatorname{Re} \alpha_{M-1} \leqslant q < \operatorname{Re} \alpha_M$ и выполнены сформулированные выше условия.

Теорема 1.11 [99]. *При $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m J(\alpha_m, \beta_m, \lambda) + o(\lambda^{-q}).$$

Коэффициенты c_m — те же, что и в (1.63).

1.6. При $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^1 (-\ln x)^{-1/2} e^{i\lambda x}\, dx \sim i\lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\ln \lambda)^{-k-1/2} + \\ + e^{i(\lambda-\pi/4)}\lambda^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \Gamma(k + 1/2)(i\lambda)^{-k},$$

$$c_k = (-1)^k \binom{-1/2}{k} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \Gamma^{(s)}(1) \left(\frac{i}{2}\right)^{k-s},$$

$$(-\ln t)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (1-t)^{k-1/2}.$$

При $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^{\infty} |\ln t|^{3/2} e^{-t+i\lambda t}\, dt = J(1, 5/2, \lambda) - J(2, 3/2, \lambda) + o(\lambda^{-2}).$$

Эти результаты обобщены в [99] на интегралы с быстро осциллирующими ядрами вида

$$F(\lambda) = \int_0^T h(\lambda x) f(x)\, dx. \tag{1.66}$$

Здесь $f(x) \in C^\infty$ при $x > 0$, $f(x) = 0$ при $x > T$ и

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N(m)} c_{mn} x^{\alpha_m} (\ln x)^{\beta_{mn}} \qquad (x \to +0). \tag{1.67}$$

Числа α_m, β_{mn} удовлетворяют тем же условиям, что и в (1.63), $N(m) < \infty$ при всех m. Далее, $h(x) \in C^\infty(R)$ и

$$h(x) \sim e^{ix^v} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N(m)} a_{mn} x^{-r_m} (\ln x)^n \qquad (x \to +\infty),$$

числа r_m, $N(m)$ удовлетворяют тем же условиям, что и выше, v вещественно, $v \neq 0$.

Метод исследования основан на использовании равенства Парсеваля для преобразования Меллина:

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \lambda^{-z} M(h)(z)\, M(f)(1-z)\, dz,$$

где $M(\varphi)(z)$ — преобразование Меллина функции $\varphi(x)$. Предполагается, что

$$h(x) = O(x^{-a}) \qquad (x \to +0,\ a < \operatorname{Re} r_0,\ \operatorname{Re} \alpha_0 - a > -1).$$

Тогда $a < c < \operatorname{Re} \alpha_0 + 1$.

Теорема 1.12 [99]. *При $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) = \sum_{\operatorname{Re}(\alpha_m - \alpha_0) < k} \left[\sum_{m=0}^{N(m)}{}^{*} c_{mn} \Gamma(\beta_{mn} + 1)\, J(\alpha_m, \beta_m, \lambda) + \sum_{n=0}^{N(m)}{}' \frac{c_{mn}}{(l-1)!} K(\alpha_m, l, \lambda) \right] + O\left(\lambda^{-\alpha_0 - 1 - k + \varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое. Здесь β_{mn} не является целым отрицательным числом в сумме $\sum^{*}$, $\beta_{mn} = -l$ — целое отрицательное число в сумме $\sum'$.

Далее,

$$J(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{e^{i\pi\beta}}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\alpha + 1 - z)^{\beta - 1} \lambda^{-z} M(h)(z)\, dz,$$

где интеграл берется по малой окружности, окружающей особую точку $z = \alpha + 1$. Если $\beta = l \geqslant 0$ целое, то этот интеграл равен вычету в точке $z = \alpha + 1$. Если $\beta \neq l$, то при $\lambda \to +\infty$

$$J(\alpha, \beta, \lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j e^{i\pi\beta} (\ln \lambda)^{\beta - j}}{\lambda^{\alpha+1} \Gamma(1 + \beta - j)},$$

$$c_j = \frac{M^{(j)}(h)(\alpha + 1)}{j!},$$

что следует из леммы Ватсона. Интеграл K равен

$$K(\alpha, l, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^{-z} (\alpha + 1 - z)^l \ln (z - \alpha - 1) M(h)(z)\, dz.$$

При $\lambda \to +\infty$ имеем

$$K(\alpha, l, \lambda) \sim \lambda^{-\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \binom{l+j}{j} (\ln \lambda)^{-l-j},$$
$$z^{l-1} M(h)(z + \alpha + 1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j!} z^{j+l-1}. \tag{1.68}$$

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int^{1} h(\lambda x) |\ln x|^{3/2} x\, dx.$$

Здесь $f(x)$ состоит из одного слагаемого вида (1.67), где $\alpha_0 = 1$, $\beta_{00} = 3/2$, $c_{00} = e^{3\pi i/2}$ и главный член асимптотически имеет вид

$$F(\lambda) \sim c_{00} \Gamma(\beta_{00} + 1) J(\alpha_0, \beta_{00}, \lambda).$$

Выпишем первые два члена асимптотики

$$F(\lambda) \sim -i\Gamma(5/2) \left[c_0 \frac{-i (\ln \lambda)^{3/2}}{\lambda^2 \Gamma(5/2)} + c_1 \frac{-i (\ln \lambda)^{1/2}}{\lambda^2 \Gamma(3/2)} \right],$$

$$c_j = \frac{1}{j!} M^{(j)}(h)(\alpha_0 + 1).$$

1°. $h(t) = e^{it}$

$$c_0 = -1, \quad c_1 = -(1 - \gamma) - i\pi/2,$$

где $\gamma = 0{,}57721...$ — постоянная Эйлера.

2°. $h(t) = J_\nu(t)$:

$$c_0 = 2\Gamma((2 + \nu)/2)/\Gamma(\nu/2),$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{2^{z-1} \Gamma\left(\frac{z + \nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu - z + 2}{2}\right)} \right]_{z=2}.$$

3°. $h(t) = \mathrm{Ai}(-t)$ (функция Эйри):

$$c_0 = \frac{3^{1/2}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right),$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dz}\left[\frac{3((2z/3) - 7/6)}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{z}{3}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]\Bigg|_{z=2}.$$

4°. $h(t) = D_\nu(e^{i\pi/4}t)$ (функция Вебера):

$$c_0 = \frac{-i\sqrt{\pi}\,2^{(3+\nu)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{3-\nu}{2}\right)}\,F\left(\frac{3}{2};\,\frac{1-\nu}{2};\,\frac{3-\nu}{2};\,-1\right),$$

$$c_1 = -\frac{i}{2}\,\frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(z)\,2^{(z+1-\nu)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{z+1-\nu}{2}\right)} \times \right.$$
$$\left. \times F\left(\frac{z+1}{2};\,\frac{1+\nu}{2};\,\frac{z+1-\nu}{2};\,-1\right)\right]\Bigg|_{z=2},$$

где F — гипергеометрическая функция.

В [99] получены оценки остаточных членов для асимптотических разложений интегралов вида (1.66) с осциллирующими ядрами.

8. Некоторые специальные типы интегралов. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_q^z g\left(\sqrt{y^2 - q^2}\right)\sin\lambda y\,dy. \tag{1.70}$$

Пусть функция $g^{(n)}(x)$, $n \geqslant 1$, непрерывна в интервале $0 < x < (z^2 - q^2)^{1/2}$ и

$$g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha-1} \qquad (x \to +0),$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$. Если z конечно, то существуют конечные пределы

$$\lim_{y \to z-0} G^{(k)}(y) = G^{(k)}(z-0), \quad k = 0,\,1,\,\ldots,\,n,$$

где $G^{(k)}(y) = (d/dy)^k g(\sqrt{y^2 - q^2})$.

Если $z = +\infty$, то при достаточно больших $\lambda > 0$ интегралы

$$\int_c^\infty G^{(k)}(y)\sin\left(\frac{k\pi}{2} + \lambda y\right)dy, \quad k = 0,\,1,\,\ldots,\,n,$$

сходятся равномерно при некотором $c > 0$. В [145] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.13. *Пусть z конечно. Тогда при $\lambda \to +\infty$*

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{2n-1} J_{-(k+\alpha)/2}(\lambda q)\, a_k(q)\, \lambda^{-(k+\alpha)/2} - \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k+1}{2}\pi + \lambda z\right) G^{(k)}(z-0)\, \lambda^{-k-1} + o\left(\lambda^{-n}\right). \quad (1.71)$$

Здесь J_ν — функция Бесселя и

$$a_k(q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_k \Gamma\left(\frac{k+\alpha+1}{2}\right)(2q)^{(k+\alpha)/2}.$$

Теорема 1.14. *Если $z = \pm\infty$, то справедлива формула вида* (1.71), *причем вторую сумму из* (1.71) *следует отбросить.*

Оценка остаточного члена равномерна по q, $0 \leqslant q \leqslant q_0$. Точный вид остаточных членов приведен в [145].

1.7. Пусть $g(x) = e^{ix}x^{-1}$. Тогда

$$F(\lambda) = \frac{\pi}{2} J_0(\lambda q) + \rho(\lambda),$$

$$|\rho(\lambda)| \leqslant \lambda^{-1}\Big(1 + \frac{3}{2}(z^2 - q^2)^{1/2} + (z^2 - q^2)^{-1/2} + \\ + 2q^2 z^{-1}(z^2 - q^2)^{-3/2}\Big).$$

1.8. Пусть $g(x) = [x(x+1)]^{-1}$, $z = +\infty$. Тогда

$$F(\lambda) = \frac{\pi}{2} J_0(\lambda q) - \frac{\cos\lambda q}{\lambda} + o\left(\lambda^{-1}\right).$$

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^1 x^{-\alpha} f(x, \{\lambda x\})\, dx, \quad 0<\alpha<1,$$

где $\{\lambda x\} = \lambda x - [\lambda x]$, $[\lambda x]$ — целая часть λx. Введем обозначения: $\bar{B}_k(x)$ — периодические функции Бернулли (полиномы Бернулли $B_k(x)$, продолженные с отрезка $[0, 1]$ периодически на всю ось), $\zeta(s, a)$ — обобщенная дзета-функция:

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s} \qquad (a \neq 0, -1, -2, \ldots).$$

Положим

$$F(x, y) = x^{-\alpha} f(x, y), \quad F_x^{(h)}(x, y) = (\partial/\partial x)^h F(x, y).$$

Теорема 1.14 [125]. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна при $0 \leqslant x$, $y \leqslant 1$ и имеет непрерывные частные производные по x до порядка $m+1$ включительно. Тогда при $\lambda \to +\infty$*

$$F(\lambda) = \int_0^1 \int_0^1 x^{-\alpha} f(x, y)\, dx\, dy + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k \int_0^1 F_x^{(k-1)}(1, y)\, \bar{B}_k(y - \{y\})\, dy + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-\alpha+k+1} \int_0^1 f_x^{(k)}(0, y)\, \zeta(\alpha - k, y)\, dy + O(\lambda^{-m}).$$

В [134] исследован интеграл

$$F(s) = \int_{a(s)}^{a(s)+b(s)} g(x, s)\, e^{ih(x, s)} dx,$$

где g, h — достаточно гладкие функции, s — вещественное переменное, функция h вещественна. Пусть $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$ — полные вариации функций $g(x, s)$, $h_x^{(4)}(x, s)$ на отрезке $[a, a+b]$ соответственно,

$$\varepsilon_1 = \operatorname{sgn} h''(a, s), \quad \varepsilon_2 = \operatorname{sgn} h^{(4)}(a, s),$$

$$\lambda(s) = 3[h''(a, s)]^2 \left[4h^{(4)}(a, s)\right]^{-1},$$

$$\mu(s) = \sqrt{|h''(a, s)|} + \sqrt[4]{|h^{(4)}(a, s)|}.$$

Пусть на отрезке $[a, a+b]$ при $s \to s_0$ имеем

$$\omega_1(s) = o(g(a, s)/(b(s)\mu(s))), \quad b(s)\mu(s) \to \infty,$$

$$h'(a, s) = o(b^{-2}(s)\mu^{-1}(s)), \quad h'''(a, s) = o(b^{-4}(s)\mu^{-1}(s)),$$

$$\omega_2(s) = o(b^{-5}(s)\mu^{-1}(s)), \quad h''(a, s) < 0, \quad h^{(\mathrm{IV})}(a, s) < 0.$$

Тогда при $s \to s_0$

$$F(s) \sim \frac{\pi}{2} g(a, s) \left[\frac{3\lambda(s)}{h^{(4)}(a, s)}\right] \exp\left[i\left(h(a, s) - \varepsilon_2(\lambda/s) - \pi/2\right)\right] \times \left[J_{-1/4}(\lambda(s)) + i\varepsilon_1 J_{1/4}(\lambda(s))\, e^{i\varepsilon_2\pi/4}\right].$$

§ 2. Метод стационарной фазы в многомерном случае. Вклад от внутренней невырожденной стационарной точки

1. Вклад от невырожденной стационарной точки.

Лемма 2.1 (принцип локализации). *Пусть* $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $S(x) \in C^\infty(\Omega)$, *функция* $S(x)$ *вещественнозначна и*

$$S'_x(x) \neq 0, \quad x \in \operatorname{supp} f. \tag{2.1}$$

Тогда для любого целого $N \geqslant 0$ *существует постоянная* C_N *такая, что при* $\lambda \geqslant 1$ *выполнено неравенство*

$$\left| \int_\Omega f(x) \exp[i\lambda S(x)]\, dx \right| \leqslant C_N \lambda^{-N} \|f\|_{C^N(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Здесь $\|f\|_{C^N(\Omega)} = \max\limits_{x \in \Omega} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant N} |D^\alpha f(x)|$.

Пусть L — дифференциальный оператор

$$L = |S'_x(x)|^{-2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial S(x)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{2.3}$$

Тогда справедливо тождество

$$L(e^{i\lambda S(x)}) = i\lambda e^{i\lambda S(x)}. \tag{2.4}$$

Если $F(\lambda)$ — интеграл (2.1), то, интегрируя по частям, получаем

$$F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \int_\Omega f(x)\, L(e^{i\lambda S(x)})\, dx = \frac{1}{i\lambda} \int_\Omega {}^tL(f(x))\, e^{i\lambda S(x)} dx, \tag{2.5}$$

так как внеинтегральная подстановка обращается в нуль в силу финитности функции f. Здесь ${}^tL$ — формально сопряженный к L оператор: ${}^tLf = -\sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|S'_x(x)|^{-2} \frac{\partial S}{\partial x_j} f \right)$.

Следовательно, $|F(\lambda)| \leqslant C_1 \lambda^{-1} \|f\|_{C^1(\Omega)}$. Повторяя интегрирование по частям еще $N-1$ раз, получаем (2.2).

Таким образом, в условиях этой леммы $F(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ $(\lambda \to +\infty)$.

Из леммы 2.1 вытекает тот же принцип локализации, что и в одномерном случае (см. § 1, п. 2).

Пусть $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n_x)$ — пространство Л. Шварца; его элементами являются функции $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, которые при $|x| \to \infty$ убывают быстрее любой степени $|x|$ вместе со всеми своими производными.

Предложение 2.1. *Если функция $f(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n_x)$, то ее преобразование Фурье $\widetilde{f}(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n_\xi)$.*

По условию для любого N и для любого мультииндекса α существует постоянная $C_{N,\alpha}$ такая, что

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant C_{N,\alpha}(1 + |x|)^{-N}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Имеем

$$D^\alpha_\xi \widetilde{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n_\xi} \exp(i\langle x, \xi\rangle) \cdot g_\alpha(x)\, dx,$$

$$g_\alpha(x) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} f(x) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n).$$

Интегрируя M раз по частям так же, как и в (2.5), и учитывая, что внеинтегральные подстановки на бесконечности обращаются в нуль в силу быстрого убывания функции g_α, получаем

$$D^\alpha_\xi \widetilde{f}(\xi) = |\xi|^{-2M} \int_{\mathbf{R}^n_\xi} \exp(i\langle x, \xi\rangle) \left(\sum_{j=1}^{n} i\xi_j \frac{\partial}{\partial x}\right)^M g_\alpha(x)\, dx.$$

Следовательно, при $|\xi| \geqslant 1$ справедлива оценка $|D^{\xi\alpha} \widetilde{f}(\xi)| \leqslant \widetilde{C}_{\alpha,M} |\xi|^{-M}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.1 [84]. *Пусть $\Omega \in \mathbf{R}^n$ — конечная область, $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $S(x) \in C^\infty(\Omega)$. Пусть функция $S(x)$ вещественнозначна и имеет в области Ω единственную и притом невырожденную стационарную точку x^0. Тогда при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) = \int_\Omega f(x) \exp[i\lambda S(x)]\, dx \sim \lambda^{-n/2} \exp[i\lambda S(x^0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k}. \tag{2.6}$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Выпишем главный член асимптотики:

$$F(\lambda)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}\exp\left[i\lambda S(x^0)+\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}S''_{xx}(x^0)\right]\times$$
$$\times\left|\det S''_{xx}(x^0)\right|^{-1/2}\left[f(x^0)+O(\lambda^{-1})\right]. \quad (2.6')$$

Здесь используется обозначение: если A — вещественная симметричная невырожденная матрица, то

$$\operatorname{sgn}A=\nu_+(A)-\nu_-(A),$$

где $\nu_+(A)$ $(\nu_-(A))$ — число положительных (отрицательных) собственных значений матрицы A.

По лемме Морса функцию $S(x)$ в малой окрестности точки x^0 можно с помощью гладкой замены переменных $x=\varphi(y)$ привести к сумме квадратов:

$$(S\circ\varphi)(y)=S(x^0)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j y_j^2 \quad (\varepsilon_j=\pm 1).$$

Вектор-функция $x=\varphi(y)$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки $y=0$ на окрестность U точки x^0. В качестве V выберем куб вида $|y_j|\leqslant\delta$, $1\leqslant j\leqslant n$. Далее, в силу принципа локализации можно считать, что $f(x)=0$ вне U.

После замены переменных получаем, что

$$F(\lambda)=\exp[i\lambda S(x^0)]\int_{-\delta}^{\delta}\ldots\int_{-\delta}^{\delta}\exp\left(\frac{i\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j y_j^2\right)f^*(y)\,dy+$$
$$+O(\lambda^{-\infty}). \quad (2.7)$$

Применяя к полученному интегралу теорему 1.5, последовательно по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (сравните с доказательством теоремы 2.3.1!) получаем (2.6).

Главный член асимптотики имеет вид

$$\exp[i\lambda S(x^0)]\,f^*(0)\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i\lambda\varepsilon_j}{2}x_j^2\right)dx_j=$$
$$=\exp[i\lambda S(x^0)]\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}\exp\left(\frac{i\pi}{4}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\right)f(x^0)\det\varphi'_y(0).$$

Из этой формулы и леммы Морса 2.2.3 следует (2.6′).

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 2.1 для любого целого $N \geqslant 0$ существуют постоянные C_N, α_N такие, что при $\lambda \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\left| F(\lambda) - \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp[i\lambda S(x^0)] \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{-k} \right| \leqslant C_N \lambda^{-\frac{n}{2}-N-1} \|f\|_{C^{\alpha_N}(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Коэффициенты a_k разложения (2.5) *имеют вид*

$$a_k = (M_{2k} f)(x^0),$$

где M_{2k} — линейные дифференциальные операторы порядка $\leqslant 2k$.

Ввиду важности теоремы 2.1 приведем другие варианты ее доказательства. Достаточно ограничиться случаем, когда $\operatorname{supp} f$ есть малая окрестность точки x^0, $\det S''_{xx}(x) \neq 0$ на $\operatorname{supp} f$. Применяя формулу (2.3.24), получаем одномерный интеграл

$$F(\lambda) = \exp[i\lambda S(x^0)] \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda c} \Phi_f(c)\, dc$$

(интеграл в силу финитности функции f берется в конечных пределах). Из предложения 2.3.3 следует, что $\Phi_f(c) \sim c^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k c^k \ (c \to 0)$ и что $\Phi_f(c) \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, откуда в силу леммы Эрдейи следует (2.5). Третий вариант доказательства основан на равенстве Парсеваля

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \psi(x)\, dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi) \tilde{\psi}(-\xi)\, d\xi. \tag{2.9}$$

Здесь $\tilde{\varphi}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$:

$$\tilde{\varphi}(\xi) = F_{x\to\xi}\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \exp[-i\langle x, \xi\rangle]\, dx. \tag{2.10}$$

Применяя лемму Морса, получаем (см. доказательство теоремы 2.1)

$$F(\lambda) = \exp[i\lambda S(x^0)] \int_U \exp\left[\frac{i\lambda}{2} \langle Ay, y\rangle\right] f^*(y)\, dy + O(\lambda^{-\infty}),$$

где U — малая окрестность точки $y = 0$, A — вещественная невырожденная симметричная матрица. Применяя равенство Парсеваля (2.9) и учитывая формулу (2.3.16), получаем

$$F(\lambda) = \exp\left[i\lambda S(x^0)\right]\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}\exp\left[\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}A\right]I(\lambda),$$

$$I(\lambda) = \int\limits_{\mathbf{R}^n}\exp\left[\frac{i}{2\lambda}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle\right]\widetilde{f}^*(\xi)\,d\xi.$$

Теперь экспонента, стоящая под знаком интеграла, содержит малый параметр λ^{-1}. Разложим ее по формуле Тейлора:

$$\exp\left[\frac{i}{2\lambda}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle\right] = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{i}{2\lambda}\right)^k\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle^k + R_N(\xi, \lambda).$$

Из оценки

$$\left|e^z - \sum_{k=0}^{N}\frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}e^{|z|} \quad (\operatorname{Re} z \leqslant 0)$$

следует, что

$$|R_N(\xi, \lambda)| \leqslant C_N\lambda^{-N-1}|\xi|^{2(N+1)},$$

C_N — постоянная, так что

$$\left|\int\limits_{\mathbf{R}^n}R_N(\xi, \lambda)\,\widetilde{f}^*(\xi)\,d\xi\right| \leqslant C_N\lambda^{-N-1}\int\limits_{\mathbf{R}^n}|\xi|^{2(N+1)}|\widetilde{f}^*(\xi)|\,d\xi \leqslant C'_N\lambda^{-N-1}.$$

Последний интеграл сходится, так как функция $\widetilde{f}^*(\xi)$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Окончательно получаем

$$I(\lambda) = \sum_{k=0}^{N}a_k\lambda^{-k} + O\left(\lambda^{-N-1}\right) \quad (\lambda \to +\infty),$$

что и доказывает теорему 2.1.

Приведем формулы для коэффициентов разложения (2.5), аналогичные формулам (2.4.9). Положим

$$H_S(x^0) = S''_{xx}(x^0), \quad \Delta_s(x^0) = \det H_S(x^0) \tag{2.11}$$

и введем дифференциальный оператор

$$L = \frac{i}{2}\langle H_S^{-1}(x^0)\nabla_x, \nabla_x\rangle. \tag{2.12}$$

Предложение 2.2. *Пусть условия теоремы 2.1 выполнены. Тогда при $\lambda \geqslant 1$ и при любом $k \geqslant 1$ справедливо разложение*

$$F(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} |\Delta_S(x^0)|^{-1/2} \exp\left[\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} H_S(x^0)\right] \times \\ \times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^{-j}}{j!} L^j (f(x) \exp[i\lambda S(x, x^0)])\big|_{x=x^0} + \lambda^{-\alpha_k} R_k(\lambda), \tag{2.13}$$

$$\alpha_k = \frac{n}{2} + k - \left[\frac{2k}{3}\right].$$

Здесь обозначено

$$S(x, x^0) = S(x) - S(x^0) - \langle H_S(x^0)(x - x^0), x - x^0\rangle, \tag{2.14}$$

и для остаточного члена справедлива оценка (при $\lambda \geqslant 1$)

$$|R_k(\lambda)| \leqslant C_k \|f\|_{C^{\gamma}(\Omega)} \tag{2.15}$$

при некотором $\gamma = \gamma(k) < \infty$.

Рассмотрим формальный ряд $\sum\limits_0^\infty \lambda^{-j}\chi_j(\lambda)$, полученный из (2.13) заменой k на $+\infty$. Так как функция $S(x, x^0)$ имеет в точке x^0 нуль порядка $\geqslant 3$, то $\chi_j(\lambda)$ есть полином степени $\leqslant [2j/3]$. Переразлагая этот ряд по степеням λ^{-1}, получаем $\sum\limits_0^\infty \lambda^{-j}\chi_j(\lambda) = \sum\limits_0^\infty a_j^* \lambda^{-j}$ (равенство формальных степенных рядов) и формальное разложение

$$F(\lambda) \approx \exp[i\lambda S(x^0)] \lambda^{-n/2} \sum_0^\infty a_j^* \lambda^{-j}.$$

Покажем, что $a_j^* = a_j$.

Пусть $n = 1$. Тогда для интеграла Лапласа (2.11) справедливы асимптотические разложения (2.1.24) и (2.1.25). Асимптотическое разложение (1.27) для интеграла Фурье получается из (2.1.24) формальной заменой

$$\sqrt{|S''(x^0)|} \to \sqrt{|S''(x^0)|} \exp\left[\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''(x^0)\right].$$

Разложение (1.29) получается из (2.1.25′) с помощью той же формальной замены. В силу единственности асимптотического разложения по степеням λ^{-1} предложение доказано при $n = 1$. Поскольку разложение (2.5) получается в результате последовательного применения метода стационарной фазы к одномерным интегралам, из (2.4.9) следует (2.13).

Сумма, стоящая в правой части равенства (2.13), содержит все коэффициенты a_k при $k < n/2 + \alpha_k$. Отправляя в остаточный член все слагаемые вида const λ^{-m}, $m \geqslant \frac{n}{2} + \alpha_k$, и учитывая (2.8), получаем (2.15).

Пример 2.1. Пусть μ_j — вещественные числа, отличные от нуля, $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда при $\lambda \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x) \exp\left(\frac{i\lambda}{2}\sum_{j=1}^n \mu_j x_j^2\right) dx \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\sum_{j=1}^n \operatorname{sgn}\mu_j\right) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^{-k}}{k!}\left(\sum_{j=1} \mu_j^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^k f(x)\big|_{x=0}.$$

Метод стационарной фазы очевидным образом распространяется на интегралы от дифференциальных форм по многообразиям. Именно, пусть M^n есть n-мерное C^∞-многообразие, ω^n есть C^∞-форма размерности n на M^n и S: $M^n \to \mathbf{R}$ — функция на M^n класса C^∞. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int\limits_{M^n} e^{i\lambda S}\omega^n. \qquad (2.16)$$

Если M^n — некомпактное многообразие, то потребуем дополнительно, чтобы форма ω^n имела компактный носитель. Определения критической и невырожденной критической точки вводятся стандартным образом. Именно, пусть точка $P^0 \in M^n$, $(u_1, \ldots, u_n) = u$ — локальные координаты в окрестности этой точки, $(u_1^0, \ldots, u_n^0)$ — координаты P^0. Тогда $S = S(u)$. Точка P^0 называется *критической*, если $S_u'(u^0) = 0$, и *невырожденной*, если $\det S_{uu}''(u^0) \neq 0$. Нетрудно проверить, что эти определения инвариантны относительно выбора локальной системы координат. Если на supp ω^n нет критических точек функции S, то $F(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ $(\lambda \to +\infty)$. Это доказывается с помощью разбиения единицы, перехода к локальным координатам и применения леммы 2.1. Для вклада от невырожденной стационарной точки справедливо асимптотическое разложение (2.6).

2. Дополнительные параметры. Как правило, фазовая функция зависит от дополнительных параметров. Если при изменении параметров стационарная точка остается невырожденной, то разложение типа (2.6) остается в силе. Приведем соответствующие достаточные условия.

Пусть $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, Ω_x, Ω_α — ограниченные области $\mathbb{R}^n_x$, $\mathbb{R}^m_\alpha$ соответственно. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda, \alpha)=\int_{\Omega_x} f(x, \alpha)\exp[i\lambda S(x, \alpha)]\,dx. \tag{2.17}$$

Сформулируем дифференциальные условия на функции f, S.

1°. f, $S\in C^\infty(\Omega_x\times\Omega_\alpha)$, фаза S вещественнозначна.

2°. Существует компакт $\mathscr{K}_0\in\Omega_x$ такой, что $f(x, \alpha)\equiv 0$ при $\alpha\in\Omega_\alpha$, $x\in\mathscr{K}_0$.

Сформулируем условия на стационарную точку фазы, т. е. на решение уравнения

$$S'_x(x, \alpha)=0. \tag{2.18}$$

3°. При каждом $\alpha\in\Omega_\alpha$ фаза $S(x, \alpha)$ имеет единственную и притом невырожденную стационарную точку $x^0(\alpha)\in\Omega_x$.

Теорема 2.2. *Пусть условия* 1°—3° *выполнены. Тогда при любом целом* $N\geqslant 0$ *справедливо разложение*

$$F(\lambda, \alpha)=\lambda^{-\frac{n}{2}}\exp[i\lambda S(x^0(\alpha), \alpha)]\sum_{j=0}^{N}\lambda^{-j}a_j(\alpha)+R_N(\lambda, \alpha). \tag{2.19}$$

Пусть $\mathscr{K}\subset\Omega_\alpha$ — *компакт*, $\alpha\in\mathscr{K}$, $\lambda\geqslant 1$. *Тогда для остаточного члена справедлива оценка*

$$|D^\beta_\alpha D^\gamma_\lambda R_N(\lambda, \alpha)|\leqslant C_{N,\beta,\gamma}(\mathscr{K})\lambda^{-\frac{n}{2}-N-1+|\beta|+\gamma}. \tag{2.20}$$

Здесь постоянная C не зависит от α, λ и β, γ — любые мультииндексы; $a_j(\alpha)=[M_{2j}(x, \alpha, D_x)f](x^0(\alpha), \alpha)$, где M_{2j} — линейные дифференциальные операторы порядка $2j$.

3. Интегралы Фурье от функций с особенностями. Рассмотрим преобразование Фурье

$$F(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{i\langle x, \xi\rangle}dx, \tag{2.21}$$

где интеграл сходится в смысле главного значения по Коши. Приведем асимптотику $F(\xi)$ при $|\xi| \to \infty$ (см. [138]). Пусть $f(x) \in C^{2m}(\mathbf{R}^n \setminus 0)$, где $m \geqslant 0$ — целое,

$$f(x) = \sum_{\alpha, q} a_{\alpha q} x^\alpha r^q + \varphi(x). \tag{2.22}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $r = |x|$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, q — вещественно, сумма конечна и $q + |\alpha| > -n$ при всех q, α. Положим $Q = \max(q + |\alpha|)$ и пусть

$$2m - 1 \leqslant Q + n < 2m + 1.$$

Предполагается, что при $r \to 0$

$$(\Delta^j \varphi)(x) = O(r^{Q-2j+1}), \quad 0 \leqslant j \leqslant m,$$

если $Q + n \neq 2m - 1$, и

$$(\Delta^j \varphi)(x) = O(r^{Q-2j+2}), \quad 0 \leqslant j \leqslant m,$$

если $Q + n = 2m - 1$, где Δ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^n$. При некотором $\rho > 0$ и при достаточно больших $|\xi|$ интеграл

$$\int\limits_{|x| \geqslant \rho} (\Delta^j f)(x) e^{i(x, \xi)} dx$$

сходится равномерно.

Теорема 2.3. *При $|\xi| \geqslant 1$ справедливо разложение*

$$F(\xi) = \sum{}' a_{\alpha q} L(q) D_\xi^\alpha (|\xi|^{-q-n}) + \\ + \sum{}'' a_{\alpha q} L^*(q) D_\xi^\alpha (|\xi|^{2l} \ln |\xi|) + o(|\xi|^{-2m}). \tag{2.23}$$

В первой сумме $q + n$ не есть отрицательное четное число, во второй $q + n = -2l$ — отрицательное четное число.

Постоянные $L(q)$, $L^*(q)$ имеют вид

$$L(q) = 2^{q+n/2} \Gamma\left(\frac{q+n}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(-\frac{q}{2}\right),$$

$$L^*(q) = (-1)^{l+1} \left[2^l l! \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) n(n+2) \ldots (n + 2l - 2)\right]^{-1}.$$

4. Интегралы с комплексной фазой. Рассмотрим интеграл (2.17), где Ω_α — отрезок $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, условия на f, S те же, за исключением одного: фаза S может быть комплекснозначной. При этом

$$\operatorname{Im} S(x, \alpha) \geqslant 0, \quad (x, \alpha) \in \Omega_x \times \Omega_\alpha, \tag{2.24}$$

так что $|e^{i\lambda S}| \leqslant 1$ при всех x, α. Точка x^0 называется *стационарной точкой* функции $S(x, 0)$, если

$$S_x'(x^0, 0) = 0, \quad \operatorname{Im} S(x^0, 0) = 0.$$

Ограничимся случаем, когда такая точка единственна и невырождена, и вычислим асимптотику интеграла (2.17). Число ε_0 считается достаточно малым, и основная идея метода исследования состоит в том, что вблизи точки x^0 функции f, S заменяются достаточно длинными отрезками их рядов Тейлора.

Произведем поворот системы координат в $\mathbf{R}^n$ так, чтобы были отличны от нуля миноры

$$\det\left[\frac{\partial^2 S(x^0, 0)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1,\ldots,k} \neq 0$$

при всех $k = 1, \ldots, n$, что возможно в силу невырожденности стационарной точки x^0. По теореме о неявной функции уравнение $S_x'(x, \alpha) = 0$ имеет в окрестности точки x^0 единственное решение $x = x(\alpha)$, $\alpha \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Пусть $S_N(x, \alpha)$, $f_N(x, \alpha)$ — частичные суммы рядов Тейлора функций S, f в окрестности точки $x(\alpha)$. Пусть $V(\alpha)$, $y(\alpha)$ — корни уравнений

$$\operatorname{Re}\left[\left(S_{xx}''(x, \alpha)\right)^{-1} S_x'(x, \alpha)\right] = 0,$$
$$\operatorname{Re}\left[\left((S_N'')_{xx}(x, \alpha)\right)^{-1} (S_N')_x(x, \alpha)\right] = 0.$$

Теорема 2.4 [74]. *В некоторой окрестности точки $\alpha = 0$ справедлива оценка*

$$F(\lambda, \alpha) - f(V(\alpha), \alpha)\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \left|\det S_{xx}''(V(\alpha), \alpha)\right|^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left[i\lambda T_1(\alpha) - \frac{1}{2}\operatorname{Ind}\left(-S_{xx}''(V(\alpha), (\alpha))\right)\right] = O\left(\lambda^{-(N+1)/2}\right)$$

равномерно по α. Здесь

$$T_1(\alpha) =$$
$$= S(V(\alpha), \alpha) + \frac{1}{2} S_x'(V(\alpha), \alpha)\left(S_{xx}''(V(\alpha), \alpha)^{-1}\right) S_x'(V(\alpha), \alpha),$$

$$\operatorname{Ind} A = \sum_{j=1}^{n} \arg \lambda_j, \quad -\pi < \arg \lambda_j \leqslant \pi,$$

где λ_j — собственные значения матрицы A.

§ 3. Применения многомерного метода стационарной фазы

1. Вывод законов геометрической оптики. Пусть D — конечная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой строго выпуклой границей Γ, точка y^0 лежит вне Γ. В приближении Кирхгофа задача о дифракции поля точечного источника, расположенного в точке y^0, на идеально отражающем теле D, ограниченном поверхностью Γ, приводится к вычислению интеграла (см. [21], [67])

$$v(y, k) =$$
$$= \iint\limits_{\Gamma} \left[-G(x, y^0) \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y) + G(x, y) \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y^0) \right] d\Gamma. \quad (3.1)$$

Здесь $d\Gamma$ — элемент поверхности Γ, $\partial/\partial n_x$ — производная по внешней нормали к Γ в точке x, $G = -\frac{1}{4\pi r} e^{ikr}$, $r = |x - y|$, точки y, y^0 лежат вне Γ и $v(y, k)$ есть отраженное поле. Нас интересует коротковолновое приближение, т. е. асимптотика $v(y, k)$ при $k \to +\infty$. Применим метод стационарной фазы.

Фазовая функция S имеет вид $S(x) = |x - y^0| + |x - y|$. Поверхность уровня $S(x) = C \geqslant |y - y^0|$ есть эллипсоид вращения с фокусами в точках y, y^0. Точка $x^0 \in \Gamma$ тогда и только тогда является стационарной точкой фазы на поверхности Γ, когда эллипсоид $S(x) = |x^0 - y^0| + |x^0 - y|$ касается поверхности Γ в точке x^0. Пусть $x^0 = x^0(y, y^0)$ — та из стационарных точек, для которой величина $S(x^0)$ минимальна. В силу строгой выпуклости Γ имеется только одна такая точка. Вычислим вклад от этой точки (кстати, вклады от остальных стационарных точек не имеют физического смысла).

Проведем плоскость π через точки y^0, y, x^0; тогда нормаль $n = n_{x^0}$ будет лежать в этой плоскости. В силу известного свойства эллипса n образует равные углы θ с лучами, соединяющими x^0 с y и с y^0. (Для читателя, знакомого с геометрической оптикой, это утверждение звучит так: *угол падения равен углу отражения.*) Введем в окрестности точки x локальную декартову систему координат (z_1, z_2, z_3). Начало координат поместим в точку x^0, ось z_3 направим по нормали к n, ось z_1 поместим в плоскости π. Уравнение Γ примет вид

$$z_3 = -\frac{a}{2} z_1^2 - b z_1 z_2 - \frac{c}{2} z_2^2 + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены степени $\geqslant 3$. Здесь $a > 0$, $c > 0$, $ac - b^2 > 0$. Кроме того, $d\Gamma = [1 + O(z_1^2 + z_2^2)]\, dz_1 dz_2$ при малых $|z|$. Так как нас интересует только главный член асимптотики, то мы можем ограничиться квадратичными по z_1, z_2 членами в разложении Тейлора функции S. Введем обозначения: $r_1 = |y - x^0|$, $r_2 = |y^0 - x^0|$, θ — угол между осью z_3 и вектором $y - x^0$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда при малых $|z|$, $z \in \Gamma$, имеем

$$|x - y| = [r_1^2 + |z|^2 - 2r_1 z_1 \sin\theta - 2r_1 z_2 \cos\theta]^{1/2} = r_1 + \frac{z_1^2 \cos^2\theta + z_2^2}{2r_1} - \frac{z_3}{2}\cos\theta + \ldots,$$

и аналогичная формула справедлива для $|x - y^0|$. Окончательно получаем

$$S = r_1 + r_2 + \frac{1}{2}\left\{z_1^2\left[\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\cos^2\theta - 2a\cos\theta\right] + z_2^2\left[\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - 2c\cos\theta\right] - 2z_1 z_2 b\cos\theta\right\} + \ldots$$

Следовательно, гессиан функции S в точке x^0 равен

$$H_S(x^0) = \cos\theta \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\cos\theta - 2a & -b \\ -b & \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - 2c\cos\theta \end{vmatrix}.$$

Далее, в точке x^0

$$e^{-ik|x-y|}\frac{\partial G(x, y)}{\partial n} = e^{-ik|x-y|} ikG(x^0, y)\frac{\partial |x^0 - y|}{\partial n} + O(1) = -\frac{ik\cos\theta}{4\pi r_1} G + O(1),$$

и аналогично для $G(x, y^0)$. Следовательно, главный член асимптотики $v(y, k)$ равен

$$v(y, k) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\frac{\exp[ik(r_1 + r_2)]}{\sqrt{H_S(x^0)}}\cos\theta. \quad (3.2)$$

Заметим, что $\operatorname{sgn} S''(x^0) = +2$, так как x^0 — точка минимума функции S на Γ.

Пример 3.1. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \exp[i\lambda(|x - x^0| + |x - x^1|)]\, dx.$$

Здесь $x^0 \neq x^1$, x^j — фиксированные точки, $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Вычислим асимптотику $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Множества уровня фазовой функции $S = c$ являются при $c > |x^0 - x^1|$ эллипсоидами вращения, фокусы которых расположены в точках x^0, x^1. Значение $c = |x^0 - x^1|$ является стационарным значением (минимум) фазовой функции, при этом минимум достигается на целом отрезке $[x^0, x^1]$. Будем считать, что $x^0 = (-l, 0, \ldots, 0)$, $x^1 = (l, 0, \ldots, 0)$; этого всегда можно добиться с помощью движения. Перейдем к эллиптическим координатам, полагая

$$x_1 = l\xi\eta, \quad x_j = l\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\,\theta_j, \quad 2 \leqslant j \leqslant n,$$

где θ_j — угловые переменные, $\sum\limits_{j=2}^{n} \theta_j^2 = 1$. Тогда

$$dx = l^n [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{(n-3)/2} (\xi^2 - \eta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\Omega, \qquad S = 2l\xi,$$

где $d\Omega$ — элемент поверхности единичной сферы S^{n-2}. Область изменения переменных следующая:

$$1 \leqslant \xi < \infty, \quad -1 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad \theta \in S^{n-2}.$$

Вычислим главный член асимптотики. Имеем

$$F(\lambda) = l^n \int_1^\infty (\xi^2 - 1)^{(n-3)/2} \exp(i2\lambda l\xi)\, g(\xi)\, d\xi,$$

$$g(\xi) = (\xi + 1)^{(n-3)/2} \int_{S^{n-2}} \int_{-1}^{1} (\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)^{(n-3)/2} \times$$
$$\times f\left(l\xi\eta,\ l\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\,\theta_2, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, l\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\,\theta_n\right) d\eta\, d\Omega.$$

Функция $g(\xi)$ финитна, фаза $S = 2l\xi$ не имеет стационарных точек. Поэтому основной вклад в интеграл вносит точка $\xi = 1$. По лемме Ватсона

$$F(\lambda) \sim \lambda^{-(n-1)/2} \exp\left[2i\lambda l + \frac{i\pi(n-1)}{4}\right] l^{(n+1)/2} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) g(1)\, 2^{-(n-1)/2}.$$

Далее,

$$g(1) = 2^{(n-3)/2}\omega_{n-2} \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-1)/2} f(l\eta, 0, \ldots, 0)\, d\eta,$$

где ω_{n-2} — площадь поверхности сферы S^{n-2}. Так как $\omega_{n-2} = \dfrac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$, то окончательно получаем

$$F(\lambda) \sim (\pi/\lambda)^{(n-1)/2} l^{(n+1)/2} \exp\left[2i\lambda l + \frac{i\pi(n-1)}{4}\right] \times \\ \times \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{(n-1)/2} f(l\eta, 0, \ldots, 0)\, d\eta.$$

Остаточный член имеет порядок $O(\lambda^{-(n+2)/2})$. Отметим, что главный член зависит только от значений функции f на отрезке $[x^0, x^1]$, т. е. на том множестве, где достигается $\min\limits_{x \in \mathbf{R}^n} S$.

2. Интегральные операторы с δ-образными ядрами. Рассмотрим интегральный оператор

$$(K_\lambda f)(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\Omega} f(y) \exp[i\lambda S(x-y)]\, dy. \qquad (3.3)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область, $0 \in \Omega$, $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $S \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и фаза S имеет единственную, и притом невырожденную, стационарную точку $x = 0$. Тогда оператор K_λ: $C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ есть оператор с δ-образным ядром. Именно, в силу теоремы 2.2 имеем при $\lambda \to +\infty$

$$(K_\lambda f)(x) = \exp\left[\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''_{xx}(0)\right] |\det S_{xx}(0)|^{1/2} [f(x) + O(\lambda^{-1})]$$

равномерно по $x \in \Omega$. Если же $x \notin \Omega$, то $(K_\lambda f)(x) =$

$= O(\lambda^{-\infty})$ $(\lambda \to +\infty)$, так что при $x \notin \partial\Omega$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (K_\lambda f)(x) = \mathrm{const}\, f(x)\, \chi_\Omega(x), \tag{3.4}$$

где χ_Ω — характеристическая функция множества Ω (т. е. $\chi_\Omega(x) = 1$, $x \in \Omega$, $\chi_\Omega(x) = 0$, $x \notin \Omega$).

3. Преобразование Фурье и преобразование Лежандра. Введем λ-*преобразование Фурье*, содержащее параметр $\lambda > 0$:

$$[F_{\lambda, x \to p} f(x)](p) = \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left[-i\lambda \langle x, p\rangle\right] f(x)\, dx. \tag{3.5}$$

Здесь $\sqrt{i} = e^{\frac{i\pi}{4}}$. Обратное преобразование имеет вид

$$\left[F^{-1}_{\lambda, p \to x} g(p)\right](x) = \left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left[i\lambda \langle x, p\rangle\right] g(p)\, dp, \tag{3.5'}$$

где $\sqrt{-i} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. Вычислим асимптотику λ-преобразования Фурье от быстро осциллирующей функции вида $\varphi(x) \exp\left[i\lambda S(x)\right]$ с вещественной фазой $S(x)$. Оно имеет вид

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \exp\left[i\lambda (S(x) - \langle x, p\rangle)\right] dx. \tag{3.6}$$

Точки стационарной фазы определяются из уравнения

$$p = S'_x(x). \tag{3.7}$$

Если $x = x(p)$ — решение этого уравнения, то значение фазы в стационарной точке равно

$$\tilde{S}(p) = (S \circ x)(p) - \langle p, x(p)\rangle. \tag{3.8}$$

Преобразование

$$L\colon\ (x,\ S(x)) \to (p,\ -\tilde{S}(p)), \tag{3.9}$$

задаваемое формулами (3.7), (3.8), называется *преобразованием Лежандра*. Приведем основные свойства этого преобразования. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n_x$, функция $S(x) \in C^\infty(\Omega)$, вещественнозначна и многообразие $x_{n+1} =$

$= S(x)$, $x \in \Omega$, имеет отличную от нуля гауссову кривизну, т. е.

$$\det S''_{xx}(x) \neq 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.10}$$

Ниже мы предполагаем, что эти условия выполнены. По теореме об обратной функции отображение $p = S'_x(x)$ задает диффеоморфизм достаточно малых окрестностей U_0, V_0 точек $x^0 \in \Omega$, $p^0 = S'_x(x^0)$ соответственно, причем $\tilde{S}(p) \in C^\infty(V_0)$. Ниже $x \in U_0$, $p \in U_0$.

1°. Преобразование Лежандра инволютивно: $L^2 = I$. Действительно, в силу (3.7), (3.8)

$$d\tilde{S}(p) = \langle \tilde{S}'_p(p), dp\rangle = \\ = \langle x, dp\rangle + \langle p, dx\rangle - \langle S'_x(x), dx\rangle = \langle x, dp\rangle,$$

так что $\tilde{S}'_p(p) = x$, и формулы преобразования Лежандра приобретают удивительно симметричный вид:

$$p = S'_x(x), \quad x = \tilde{S}_p(p), \quad S(x) + \tilde{S}(p) = \langle x, p\rangle. \tag{3.11}$$

2°. Справедливо тождество:

$$S''_{xx}(x)\,\tilde{S}''_{pp}(p) = I. \tag{3.12}$$

Действительно,

$$dx = d\left(\tilde{S}'_p(p)\right) = \tilde{S}''_{pp}(p)\,dp, \quad dp = S''_{xx}(x)\,dx.$$

3°. Гауссова кривизна многообразия $p_{n+1} = \tilde{S}(p)$, $p \in V_0$, отлична от нуля, и это многообразие выпукло, если выпукло многообразие $x_{n+1} = S(x)$, $x \in U_0$.

Следует из 2° и условия (3.10).

Если же условие (3.10) не выполняется, то функция $\tilde{S}(p)$ может не быть гладкой, а соответствие (3.7) между x и p может не быть взаимно однозначным.

Геометрическая интерпретация преобразования Лежандра такова. Пусть уравнение $x_{n+1} = S(x)$ задает строго выпуклое (для простоты) n-мерное многообразие Γ класса C^∞ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Эту же гиперповерхность можно задать как *огибающую* семейства n-плоскостей, а именно, касательных плоскостей к Γ. Уравнение n-плоскости π, которая касается Γ в точке $(x^0, S(x^0))$, имеет вид

$$x_{n+1} = \langle x, S'_x(x^0)\rangle + \left[S(x^0) - \langle x^0, S'_x(x^0)\rangle\right].$$

Поэтому числа $S'_x(x^0) = p^0$, $S(x^0) - \langle x^0, S'_x(x^0)\rangle = \tilde{S}(p^0)$ однозначно определяют эту n-плоскость, так что $(p^0, \tilde{S}(p^0))$ — координаты π.

Пусть A — вещественная симметричная $(n \times n)$-матрица. Введем обозначение: $\operatorname{inerdex} A$ (*индекс инерции матрицы A*) — число отрицательных собственных значений матрицы A. Имеет место соотношение (если $\det A \neq 0$)

$$\operatorname{sgn} A + 2 \operatorname{inerdex} A = n. \tag{3.13}$$

Напомним, что $x(p)$ — решение уравнения (3.7).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия*:

1°. $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *функция S вещественнозначна (Ω — область в $\mathbf{R}_x^n$).*

2°. *Отображение $x \to p = S_x'(x)$, $x \in \Omega$, есть диффеоморфизм.*

Тогда при любом целом $N \geqslant 1$ и при любых $p \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \geqslant 1$ имеем

$$[F_{\lambda, x \to p}(\varphi(x) \exp[i\lambda S(x)])](p) =$$
$$= \exp[i\lambda \widetilde{S}(p)] \left\{ \exp\left[-\frac{i\pi}{2} \operatorname{inerdex} S_{xx}''(x)\right] \left|\det S_{xx}''(x)\right|^{-1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\varphi(x) + \sum_{k=1}^{N} \lambda^{-k} (R_k \varphi)(x)\right]\right\}\Bigg|_{x = x(p)} + R_{-N}(p, \lambda). \tag{3.14}$$

Для остаточного члена при $\lambda \geqslant 1$, $|p| \leqslant R$ ($R > 0$ — любое) справедлива оценка

$$|R_{-N}(p, \lambda)| \leqslant C_{N, R} \lambda^{-N-1}. \tag{3.15}$$

Разложение (3.15) *можно дифференцировать по p и по λ любое число раз, с сохранением равномерной по p λ-оценки остаточного члена.*

Интеграл, стоящий в левой части равенства (3.14), имеет вид (3.6), и его стационарные точки определяются из уравнения (3.7). Пусть $\widetilde{\Omega} = \{p\colon p = S_x'(x),\ x \in \operatorname{supp} \varphi\}$. Если $p \in \widetilde{\Omega}$, то в силу условий 1°, 2° стационарная точка $x(p)$ единственна и невырождена, и из теоремы 2.2 следует существование разложения (3.14) и оценка (3.15). Вычислим главный член асимптотики. Он равен

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{n/2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \varphi(x) \left|\det S_{xx}''(x)\right|^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left[i\lambda (S(x) - \langle x, p\rangle) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S_{xx}''(x)\right]\Bigg|_{x = x(p)},$$

и из (3.13) следует (3.14).

Замечание 3.1. Пусть точка p лежит вне сколь угодно малой окрестности множества $\widetilde{\Omega} = S'_x(\operatorname{supp}\varphi)$ (определение $\widetilde{\Omega}$ приведено в доказательстве теоремы). Тогда все слагаемые в формуле (3.13), кроме R_{-N}, равны нулю.

Следствие 3.1. *Пусть условия теоремы* 3.1 *выполнены и* Ω_p — *произвольная область в* $\mathbf{R}^n_p$, *замыкание которой не пересекается с множеством* $\widetilde{\Omega}$. *Тогда для любого мультииндекса* α *и для любых целых* β, N *имеем*

$$|D^\alpha_p D^\beta_\lambda [F_{\lambda, x\to p}(\varphi(x)\exp(i\lambda S(x)))]| \leqslant C_{N,\alpha,\beta}\lambda^{-N}(1+|p|)^{-N} \tag{3.16}$$

при $p \in \Omega_p$, $\lambda \geqslant 1$.

Пусть $p \in \Omega_p$, $\lambda \geqslant 1$ и $\Phi(\lambda, p)$ — интеграл (3.14). Применяя формулу (2.5), получаем

$$\Phi(\lambda, p) = \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{i}{\lambda} \int \varphi_1(x, p)\exp[i\lambda(S(x) - \langle x, p\rangle)]\, dx.$$

Здесь обозначено

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j\varphi), \quad a_j = (S'_{x_j}(x) - p_j)\,|S'_x(x) - p|^{-2}.$$

При $x \in \operatorname{supp}\varphi$, $|\alpha| > 0$ имеем

$$0 < C_1(1+|p|) \leqslant |S'_x(x) - p| \leqslant C_2(1+|p|),$$
$$|D^\alpha_x(S'_x(x) - p)| \leqslant C_3,$$

где C_j — постоянные. Поэтому

$$|\varphi_1| \leqslant C(1+|p|)^{-1}, \quad |\Phi(\lambda, p)| \leqslant C\lambda^{\frac{n}{2}-1}(1+|p|)^{-1}.$$

Снова применяя (2.5), получаем (3.16) при $|\alpha| = 0$. Дифференцирование Φ по λ, p приводит к интегралу того же вида.

Таким образом, интеграл (3.14) убывает быстрее любой степени при $|p| \to \infty$, $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ равномерно по λ.

Главный член асимптотики (3.14) допускает следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_p$ многообразие

$$\Lambda^n = \{(x, p)\colon\ p = S'_x(x);\quad x \in \Omega\}.$$

Это многообразие лагранжево ([26], [27]). В условиях теоремы 3.1 уравнение Λ^n можно записать в виде

$$\Lambda^n = \{(x, p):\ x = \tilde{S}'_p(p),\quad p \in \Omega'\},$$

где Ω' — образ Ω при отображении (3.7). Поэтому в качестве локальных координат на Λ^n можно взять либо x, либо p. Если x — локальные координаты на Λ^n, то

$$\det p'_x(x) = \det S''_{xx}(x),$$

и аналогично, если p — локальные координаты на Λ^n, то

$$\det x'_p(p) = \det \tilde{S}''_{pp}(p).$$

Учитывая эти тождества, получаем из (3.14) следующую симметричную формулу для главного члена асимптотики (при $x \in \operatorname{supp}\varphi$):

$$\begin{aligned}\left[F_{\lambda, x\to p}\varphi(x)\left|\det p'_x(x)\right|^{1/2}\exp[i\lambda S(x)]\right](p) &= \\ = \varphi(x(p))\left|\det x'_p(p)\right|^{1/2}&\exp[i\lambda\tilde{S}(p)]\times \\ \times\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\operatorname{inerdex} x'_p(p)\right) &+ O(\lambda^{-1}).\end{aligned}\qquad(3.17)$$

4. Действие псевдодифференциального оператора на быстроосциллирующую экспоненту. *Псевдодифференциальным оператором* (п. д. о.) называется интегральный оператор вида

$$(\mathscr{A}u)(x) = F^{-1}_{\xi\to x}a(x, \xi)\,F_{x\to\xi}u(x). \qquad (3.18)$$

Здесь преобразование Фурье определено в (2.3.13), $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Скалярная функция $a(x, \xi)$ называется *символом* оператора $\mathscr{A}$. В частности, если символ a есть полином от ξ: $a = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$, то оператор $\mathscr{A}$ — дифференциальный: $(\mathscr{A}u)(x) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x)\,D^\alpha u(x)$.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область. Хёрмандер ввел класс $S^m(\Omega)$. Функция $a(x, \xi) \in S^m(\Omega)$, если

1) $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n_\xi)$;

2) для любых мультииндексов α, β и для любого компакта $K \subset \Omega$ выполняется оценка

$$\left|D^\alpha_x D^\beta_\xi a(x, \xi)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta,K}\,(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \qquad (3.19)$$

при $x \in K$, $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Можно показать, что если $a \in S^m(\Omega)$, то формула (3.18) задает ограниченный линейный оператор $\mathcal{A}\colon C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$.

Теорема 3.2 ([36]). *Пусть* $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $S(x) \in C^\infty(\Omega)$, *функция* S *вещественнозначна, и пусть*

$$S_x'(x) \neq 0, \quad x \in \operatorname{supp} \varphi. \tag{3.20}$$

Тогда при любом целом $N \geqslant 0$

$$\exp[-i\lambda S(x)]\, \mathcal{A}\,(f(x)\exp[i\lambda S(x)]) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a\left(x, \lambda S_x'(x)\right) D_y^\alpha\left(\varphi(y)\exp[i\lambda S(x, y)]\right)\big|_{y=x} + R_N(x, \lambda), \tag{3.21}$$

где обозначено

$$S(x, y) = S(x) - S(y) - \langle y - x, S_x'(x)\rangle. \tag{3.22}$$

Для остаточного члена при $\lambda \geqslant 1$, $x \in K$ *справедлива оценка*

$$|R_N(x, \lambda)| \leqslant C_{N,K}\lambda^{-N+\left[\frac{N}{2}\right]-m}, \tag{3.23}$$

где $K \subset \Omega$ — *компакт.*

Эта теорема играет такую же роль в теории п. д. о., как и формула Лейбница в теории д. о. Приведенное ниже доказательство см. в [89].

Имеем из (3.18)

$$(\mathcal{A}u)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\, a(x, \xi) \times \left(\int_{\mathbb{R}_y^n} \exp[-i\langle y, \xi\rangle]\, u(y)\, dy\right) d\xi.$$

Этот интеграл понимается как повторный и сходится абсолютно, если $u \in C_0^\infty(\Omega)$, так как преобразование Фурье $\tilde{u}(\xi)$ этой функции убывает быстрее любой степени $|\xi|$ при $|\xi| \to \infty$. Ограничимся для простоты случаем $m < -n$; тогда абсолютно сходится соответствующий двойной интеграл по $dy\, d\xi$. Случай $m \geqslant -n$ сводится к случаю $m < -n$ интегрированием по частям. Имеем

$$\Phi(x, \lambda) \equiv \exp[-i\lambda S(x)]\, \mathcal{A}\,(\varphi\exp(i\lambda S))(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int\int \chi \exp(i\lambda\psi)\, dy\, d\xi,$$

где интеграл берется по $\mathbf{R}^n_y \times \mathbf{R}^n_\xi$ и

$$\chi = a(x, \lambda\xi)\varphi(y), \quad \psi = \langle x - y, \xi\rangle + S(y) - S(x).$$

Имеем

$$\psi'_y = -\xi + S'_y(y), \quad \psi'_\xi = x - y,$$

так что функция ψ имеет единственную стационарную точку $Q(x)$ с координатами $y = x$, $\xi = S'_x(x)$.

1°. Покажем, что вклады от областей $|\xi| < a$, $y \in \Omega$ и $|\xi| > b$, $y \in \Omega$ в интеграл Φ имеют порядок $O(\lambda^{-\infty})$, если $a > 0$ достаточно мало, $b > 0$ достаточно велико. Так как по условию $S'_y(y) \neq 0$ при $y \in \operatorname{supp}\varphi$, то существуют $a', b' > 0$ такие, что $a' \leqslant |S'_y(y)| \leqslant b'$ при $y \in \operatorname{supp}\varphi$. Выберем $a < a'$, и пусть функция $\zeta_1(\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\zeta_1 \equiv 0$ при $|\xi| > a$, $\zeta_1 \equiv 1$ при $|\xi| < a/2$. Положим

$$\Phi_1 = \int\int \chi\zeta_1 \exp(i\lambda\psi)\,dy\,d\xi.$$

Пусть $K \subset \Omega$ — компакт. Покажем, что для любых α, β и для любого целого $N \geqslant 0$ справедлива оценка

$$\left|D^\alpha_x D^\beta_\lambda \Phi_1(x, \lambda)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta,N,K}\lambda^{-N} \tag{3.24}$$

при $x \in K$, $\lambda \geqslant 1$. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int \chi\zeta_1 \exp(i\lambda\psi)\,dy$$

при $\xi \in \operatorname{supp}\zeta_1$, $x \in K$. Применяя к этому интегралу формулу (2.5), получаем

$$I_1 = i\lambda^{-1}\int L(\chi\zeta_1)\exp(i\lambda\psi)\,dy,$$
$$L = \sum_{j=1}^n \partial/\partial y_j a_j, \tag{3.25}$$
$$a_j = (S'_{y_j}(y) - \xi_j)\,|S'_y(y) - \xi|^{-2}.$$

Пусть $x \in K$, $\xi \in \operatorname{supp}\zeta_1$, $y \in \Omega$. Тогда $|S'_y(y) - \xi| \geqslant C > 0$, так что коэффициенты a_j бесконечно дифференцируемы и ограничены при указанных y, ξ. Так как по условию $|a(y, \lambda\xi)| \leqslant C(1 + |\lambda\xi|)^m$ и при дифференцировании символа по y эта оценка сохраняется, то мы получаем, что $|I_1| \leqslant C\lambda^{m-1}$ (все постоянные, не зависящие от x, y, ξ, λ, обозначаются одной и той же буквой C). Следовательно,

$$|\Phi_1(x, \lambda)| \leqslant C\lambda^{m-1} \quad \text{при} \quad x \in K,\ \lambda \geqslant 1.$$

Повторяя интегрирование по частям, получаем оценку (3.24) при $|\alpha| = \beta = 0$. Дифференцирование Φ_1 по x и по λ приводит к интегралу того же вида.

Выберем теперь $b > b' = \max\limits_{y \in \operatorname{supp} \varphi} |S'_y(y)|$, и пусть функция $\zeta_2(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\zeta_2 = 0$ при $|\xi| \leqslant b$, $\zeta_2 = 1$ при $|\xi| \geqslant 2b$. Обозначим Φ_2, I_2 интегралы, полученные из Φ_1, I_1 заменой ζ_1 на ζ_2, и докажем оценку (3.24) для Φ_2. В отличие от Φ_1 область интегрирования в интеграле Φ_2 не ограничена. Применяя формулу (2.5), представим интеграл I_2 в виде (3.25). Так как $|S'_y(y) - \xi| \neq 0$ при $|\xi| \geqslant b'$, то $|S'_y(y) - \xi| \geqslant C(1 + |\xi|)$ при $\xi \in \operatorname{supp} \zeta_2$, $y \in \operatorname{supp} \varphi$. Следовательно, функции $a_j \in S^{-1}(\Omega)$. Далее, $|a(y, \lambda\xi)| \leqslant C\lambda^m |\xi|^m$ при тех же y, ξ, и дифференцирование по λ не меняет этой оценки. Поэтому

$$|L(\chi\zeta_2)| \leqslant C|\xi|^{m-1}\lambda^m,$$

так что

$$|\Phi_2| \leqslant C\lambda^{m-1} \int\limits_{|\xi| \geqslant b} |\xi|^{m-1} d\xi \leqslant C\lambda^{m-1}.$$

Повторяя интегрирование по частям, получаем оценку (3.24) для φ_2 при $|\alpha| = \beta = 0$. Дифференцирование Φ_2 по x и по λ приводит к интегралу того же вида.

2°. Положим $\zeta_3 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2$, и пусть Φ_3 — интеграл, полученный из Φ_1 заменой ζ_1 на ζ_3. Тогда $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$. Для интегралов $\Phi_{1,2}$ мы уже получили оценку (3.24); к интегралу Φ_3 применим теорему 2.2. Функция ψ имеет единственную стационарную точку $Q(x) = (x, S'_x(x))$, как было показано выше. Делая замену

$$\xi = S'_x(x) + \frac{1}{2} S''_{xx}(x)\, y' + \xi', \quad y = x + y',$$

при малых ξ', y' получаем

$$\psi = -S(y) - \langle y', \xi' \rangle + O(|y'|^2 + |\xi'|^2).$$

Следовательно, собственные значения матрицы $\psi''_{y\xi} = \| \psi''_{y_i \xi_j} \|$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, в стационарной точке равны ± 1, так что все условия теоремы 2.2 выполнены. В точке $Q(x)$ имеем

$$\psi = 0, \quad \det \psi''_{y\xi} = (-1)^n, \quad \operatorname{sgn} \psi''_{y\xi} = 0.$$

Тем самым существование асимптотического разложения функции Φ по степеням λ^{-1} доказано, и остается получить формулу (3.21). Если $u \in C_0^\infty(\Omega)$, то

$$\exp[-i\langle x, \eta\rangle] \mathscr{A}(u(x)\exp[i\langle x, \eta\rangle]) =$$

$$= (2\pi)^{-n}\int a(x, \xi)\exp[i\langle x-\xi, \eta\rangle]\tilde{u}(\xi-\eta)\,d\xi \sim$$

$$\sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha a(x, \eta)\int(\xi-\eta)^\alpha\exp[i\langle x, \xi-\eta\rangle]\tilde{u}(\xi-\eta)\,d\xi =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha a(x, \eta)\,D_x^\alpha u(x).$$

Применяя эту формулу (при $\eta = \lambda S_x'(x)$, $u = \varphi e^{i\lambda s}$) к тождеству

$$e^{-i\lambda S}\mathscr{A}(\varphi e^{i\lambda S}) = e^{-i\lambda S(x)}\mathscr{A}_y\big(\exp\left[i\langle y, \lambda S_x'(x)\rangle\right] \times$$
$$\times \varphi(y)\exp(i\lambda S(x, y))\big),$$

получаем (3.21).

Выпишем первые два члена разложения (3.21):

$$e^{-i\lambda S}\mathscr{A}(e^{i\lambda S}) = \varphi(x)\,a(x, \lambda\xi) - i\langle a_\xi'(x, \lambda\xi), \varphi_x'(x)\rangle -$$
$$-\frac{i\lambda}{2}\operatorname{Sp}\left(a_{\xi\xi}''(x, \lambda\xi)\,S_{xx}''(x)\right)\Big|_{\xi=S_x'(x)} + O(\lambda^{m-2}). \quad (3.21')$$

Рассмотрим *λ-псевдодифференциальный оператор*:

$$(\mathscr{A}u)(x) = F_{\lambda, p\to x}^{-1}\,a(x, \lambda^{-1}p)\,F_{\lambda, x\to p}u(x). \qquad (3.26)$$

Функция $a(x, p)$ называется *символом* λ-п. д. о. Такого рода λ-п. д. о. возникают в различных задачах математической физики. Например, оператор Гельмгольца $k^{-2}\Delta + n^2(x)$ есть k-п. д. о. с символом $a = -\langle p, p\rangle + n^2(x)$, оператор Шредингера $ih\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h^2}{2m}\Delta - V(x)$ есть h^{-1}-п. д. о. с символом $a = E + \frac{1}{2m}\langle p, p\rangle + V(x)$, где E, p — двойственные к t, x переменные.

Класс T^m по определению — класс функций $a(x, p)$, удовлетворяющих условиям:

1°. $a(x, p) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_p^n)$.

2°. Для любых мультииндексов α, β

$$\left|D_x^\alpha D_p^\beta a(x, p)\right| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|x|)^m(1+|p|)^m$$

при всех x, p.

Примером символа $a \in T^m$ при $m > 0$ целом служит полином от (x, p) степени $\leqslant m$.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{A}$ есть λ-п. д. о. с символом a класса T^m, функция $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и вещественнозначна, функция $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда при $\lambda \geqslant 1$ и при любом целом $N \geqslant 0$*

$$\exp[-i\lambda S(x)]\, \mathscr{A}(\varphi(x)\exp[i\lambda S(x)]) = \\ = \sum_{j=0}^{N} (i\lambda)^{-j} R_j(x, D_x)\,\varphi(x) + \widetilde{R}_N(x, \lambda). \quad (3.27)$$

Здесь R_j — линейный дифференциальный оператор порядка $\leqslant j$ с коэффициентами класса $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, и для остаточного члена справедлива оценка

$$|D_x^\alpha \widetilde{R}_N(x, \lambda)| \leqslant C_r \lambda^{-N-1+|\alpha|}(1 + |x|)^{-r}, \quad (3.28)$$

где $r > 0$ — любое, $x \in \mathbf{R}^n$.

Доказательство этой теоремы см. в [27].

В § 4 мы рассмотрим другие приложения метода стационарной фазы.

В работах [26], [27], [62] метод стационарной фазы развит для интегралов вида

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\exp[iAS(x)]\, dx,$$

где A — производящий оператор сильно непрерывной группы операторов, действующих в банаховом пространстве B, $S(x)$ — вещественнозначная функция, $\varphi(x)$ — операторнозначная функция со значениями в B.

§ 4. Метод стационарной фазы. Вклад от граничных стационарных точек

1. Граничные стационарные точки II рода. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{\Omega} f(x)\exp[i\lambda S(x)]\, dx, \quad (4.1)$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}_x^n$ и, как обычно, $f(x)$, $S(x) \in C^\infty(\Omega) \cap C([\Omega])$, функция $S(x)$ вещественнозначна. Введем понятие вклада от границы $\partial\Omega$ области Ω в интеграл (4.1). Пусть для простоты фаза S имеет конечное число стационарных точек $x^1, \ldots, x^m \in \Omega$. Устроим C^∞-разбиение единицы в $\mathbb{R}_x^n$:

$$1 \equiv \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) + \varphi_{\partial\Omega}(x) + \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x).$$

Здесь функции φ_j, $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, причем $\varphi_j \equiv 1$ в окрестности точки x^j, $\varphi \equiv 0$ в окрестности точки x^k при $k \neq j$. Функция $\varphi_{\partial\Omega} \equiv 1$ в некоторой ε-окрестности множества $\partial\Omega$ и вне области Ω. Тогда

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} F(\lambda, x^j) + F(\lambda, \partial\Omega) + \Phi(\lambda), \tag{4.2}$$

где функция $\Phi(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to +\infty$ и

$$\begin{gathered} F(\lambda, x^j) = \int_\Omega f(x)\, \varphi_j(x) \exp[i\lambda S(x)]\, dx, \\ F(\lambda, \partial\Omega) = \int_\Omega f(x)\, \varphi_{\partial\Omega}(x) \exp[i\lambda S(x)]\, dx. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Действительно,

$$\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega f\psi_j \exp(i\lambda S)\, dx.$$

По построению $\operatorname{supp}\psi_j$ не содержит стационарных точек функции S и не пересекается с $\partial\Omega$. В силу леммы 2.1 каждый из интегралов, составляющих Φ, имеет порядок $O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to +\infty$.

Интеграл $F(\lambda, \partial\Omega)$ будем называть *вкладом от границы* $\partial\Omega$ в интеграл $F(\lambda)$. Формула (4.2) означает, что асимптотика $F(\lambda)$ равна сумме вкладов от стационарных точек фазы S, лежащих в области Ω, и от границы области $\partial\Omega$.

Выбор функции $\varphi_{\partial\Omega}(x)$ в определении вклада не играет роли: интегралы вида (4.3) с разными функциями $\varphi_{\partial\Omega}$ отличаются на величину порядка $O(\lambda^{-\infty})$.

Если на $\partial\Omega$ фаза S не имеет стационарных точек, то интеграл $F(\lambda, \partial\Omega)$ сводится к интегралу по $\partial\Omega$ (с точностью до $O(\lambda^{-\infty})$).

Лемма 4.1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^∞, функции $f(x)$, $S(x) \in C^\infty([\Omega])$, фаза S вещественнозначна и не имеет стационарных то-*

чек на $\partial\Omega$. Тогда при любом целом $N \geqslant 0$ справедливо разложение

$$F(\lambda, \partial\Omega) = \sum_{j=1}^{N} (i\lambda)^{-j} \int_{\partial\Omega} \exp[i\lambda S(x)]\, \omega_j(x) + R_N(\lambda). \quad (4.4)$$

Здесь $\omega_j(x)$ — дифференциальные формы степени $n-1$ и класса C^∞ на $\partial\Omega$,

$$|R_N(\lambda)| \leqslant C_N \lambda^{-N-1} \quad (4.5)$$

при $\lambda \geqslant 1$.

Как обычно, разложение (4.4) можно дифференцировать по λ любое число раз.

Формы ω_j имеют вид

$$\omega_j(x) = |\nabla S(x)|^{-2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial S(x)}{\partial x_k} ({}^tL)^{j-1} f(x)\, dx_1 \wedge \ldots \\ \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n \quad (4.6)$$

(крышка означает, что соответствующий сомножитель отсутствует), где L — оператор (2.3). В частности, $\omega_1(x) = f(x)\omega_s(x)$, где ω_s — дифференциальная форма Лере — Гельфанда (см. гл. II, § 3), отвечающая функции S. Выпишем первый член разложения:

$$F(\lambda, \partial\Omega) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\partial\Omega} \frac{f(x)}{|\nabla S(x)|^2} \exp[i\lambda S(x)] \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial S(x)}{\partial x_k}\, dx_1 \wedge \ldots \\ \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n + O(\lambda^{-2}). \quad (4.7)$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n} S'_{x_k}(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n = \frac{\partial S(x)}{\partial n_x}\, d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности $\partial\Omega$, $\partial/\partial n_x$ — производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке x, главный член асимптотики можно записать в виде

$$F(\lambda, \partial\Omega) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\partial\Omega} \exp[i\lambda S(x)] \frac{f(x)}{|\nabla S(x)|^2} \frac{\partial S(x)}{\partial n_x}\, d\sigma + O(\lambda^{-2}). \quad (4.7')$$

Для краткости обозначим $\varphi_{\varepsilon 0}$ через φ. Интеграл (4.3) берется по некоторой ε-окрестности Ω_ε границы $\partial\Omega$. Имесм $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \Gamma$, где Γ не пересекается с $\partial\Omega$. По построению $\varphi = 1$ на $\partial\Omega$, $\varphi = 0$ на Γ. Применяя к интегралу (4.3) формулу (2.4) и интегрируя по частям, получаем

$$F(\lambda, \partial\Omega) = (i\lambda)^{-1} \int_{\Omega} f(x)\,\varphi(x)\,L(\exp[i\lambda S(x)])\,dx =$$

$$= (i\lambda)^{-1} \int_{\partial\Omega} \exp[i\lambda S(x)]\,f(x)\,|\nabla S(x)|^{-2} \sum_{k=1}^{n} S'_{x_k}(x)\,dx_1 \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n - (i\lambda)^{-1} F_1(\lambda, \partial\Omega).$$

Интеграл F_1 получается из F заменой $f\varphi \to {}^tL(f\varphi)$ (см. (2.5)), где L — оператор (2.3). Так как подынтегральная функция в интеграле F_1 ограничена, то $\lambda^{-1}F_1 = O(\lambda^{-1})$. Интегрируя по частям интеграл F_1, получаем $F_1 = (i\lambda)^{-1}\tilde{F}_1 - (i\lambda)^{-1}F_2$, где $\tilde{F}_1$ — интеграл по $\partial\Omega$, F_2 — интеграл по Ω, который получается из F заменой $f\varphi \to {}^tL^2(f\varphi)$.

Так как $\tilde{F}_1 = O(1)$, $F_2 = O(1)$, то мы доказали (4.7). Продолжая интегрирование по частям, получаем (4.4), (4.5).

Докажем (4.6). При $j = 1$ эта формула доказана. Пусть $j > 1$, тогда соответствующий интеграл равен

$$\int_{\partial\Omega} \exp[i\lambda S(x)] \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,({}^tL)^{k-1}(f(x)\,\varphi(x))\,dx_1 \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где $a_k(x) = S'_{x_k}(x)\,|\nabla S(x)|^{-2}$.

Так как $\varphi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$, то все ее производные равны нулю на $\partial\Omega$. Поэтому при $x \in \partial\Omega$ имеем $({}^tL)^{k-1}(f(x)\varphi(x)) = ({}^tL)^{k-1}(f(x))$, и (4.6) доказано.

Проанализируем результаты теоремы 4.1. Мы показали, что вклад от границы $F(\lambda, \partial\Omega)$ асимптотически равен сумме интегралов по границе. Но каждый из этих интегралов есть интеграл по многообразию $\partial\Omega$ от быстро осциллирующей функции. Чтобы получить окончательные асимптотические формулы, необходимо вычислить асимптотику этих интегралов, чем мы и займемся.

Рассмотрим функцию $S(x)$ на многообразии $\partial\Omega$. По условию $\nabla S(x) \neq 0$; однако эта функция, как функция на $\partial\Omega$, имеет на $\partial\Omega$ стационарные точки (например, она достигает наибольшего и наименьшего значения на $\partial\Omega$).

Стационарные точки функции $S(x)$ на $\partial\Omega$, как функции на многообразии $\partial\Omega$ (т. е. $S(x)$ рассматривается только при $x \in \partial\Omega$), будем называть *стационарными точками* II *рода или граничными стационарными точками*.

Пусть многообразие $\partial\Omega$ в окрестности точки x^0 задается параметрически, т. е.

$$x_1 = \psi_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n(u_1, \ldots, u_{n-1}),$$
$$(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in U,$$

где U — окрестность точки $(0, \ldots, 0)$. В векторной записи имеем

$$x = \psi(u), \quad x^0 = \psi(0).$$

Точка x^0 является *стационарной точкой* II *рода* функции S, если

$$\nabla_u \tilde{S}(0) = 0, \quad \tilde{S}(u) = (S \circ \psi)(u). \tag{4.8}$$

Стационарная точка II рода x^0 называется *невырожденной*, если

$$\det \left\| \frac{\partial^2 (S \circ \psi)(u)}{\partial u_i \partial u_j} \right\|_{u=0} \neq 0. \tag{4.9}$$

Нетрудно проверить, что оба эти определения инвариантны относительно выбора локальных координат на $\partial\Omega$. *Стационарной граничной точкой* I *рода*, очевидно, называется точка x^0, в которой $\nabla S(x^0) = 0$.

Пусть $\partial\Omega$ в окрестности точки x^0 задана уравнением

$$g(x) = 0, \quad \nabla g(x^0) \neq 0, \tag{4.10}$$

где g есть функция класса C^∞. Тогда x^0 будет стационарной точкой II рода тогда и только тогда, когда существует $\alpha \neq 0$ такое, что

$$\nabla S(x^0) = \alpha \nabla g(x^0). \tag{4.11}$$

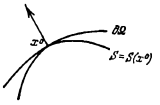

Рис. 2

Геометрически это означает, что многообразие уровня $S(x) = S(x^0)$ касается $\partial\Omega$ в точке x^0 (рис. 2).

Хотя бы одна из компонент вектора $\nabla g(x^0)$ отлична от нуля; пусть $\partial g(x^0)/\partial x_n \neq 0$ для определенности. Тогда из уравнения (4.10) можно выразить x_n через остальные переменные:

$$x_n = \psi(x'), \; x' \in U, \; x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{4.10'}$$

где U — окрестность точки $x^{0\prime}$, так что в качестве локальных координат на $\partial\Omega$ можно взять $x_1, \ldots, x_{n-1}$. При $x \in \partial\Omega$ имеем

$$S(x) = S(x', \psi(x')) = \widetilde{S}(x').$$

Пусть для простоты $x^0 = 0$, $S(0) = g(0) = 0$. Тогда

$$\widetilde{S}(x') = \sum_{j=1}^{n-1} \widetilde{S}_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \widetilde{S}_{ij} x_i x_j + \ldots \tag{4.12}$$

Коэффициенты этого разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_j &= S_j - S_n g_j / g_n, \\ \widetilde{S}_{ij} &= S_{ij} + g_n^{-1} S_n \left(- g_{ij} + 2 g_i g_{jn} g_n^{-1} - g_{nn} g_i g_j g_n^{-2}\right) - \\ &\qquad - 2 S_{in} g_j g_n^{-1} + S_{nn} g_i g_j g_n^{-2}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Здесь $S_j = S'_{x_j}(x^0)$, $S_{ij} = S''_{x_i x_j}(x^0)$ и аналогично определяются g_j, g_{ij}.

Из условия $d\widetilde{S} = 0$ получаем $S_i/S_n = g_i/g_n$, т. е. (4.11). Невырожденность стационарной точки означает, что $\det \widetilde{S}''_{x'x'} \neq 0$ в этой точке.

Теорема 4.1. *Пусть условия леммы 4.1 выполнены, и пусть на $\partial\Omega$ имеется ровно одна, и притом невырожденная, стационарная точка* II *рода x^0 функции $S(x^0)$. Тогда при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda, \partial\Omega) \sim \lambda^{-(n+1)/2} \exp[i\lambda S(x^0)] \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{-j}. \tag{4.14}$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Выпишем главный член асимптотики. При этом предполагаем, что $\partial\Omega$ задана уравнением $g(x) = 0$ при x, близких к x^0, и что $g'_{x_n}(x^0) \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} F(\lambda, \partial\Omega) &= \\ &= i (2\pi)^{(n-1)/2} \lambda^{-(n+1)/2} \exp\left[i\lambda S(x^0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \widetilde{S}''_{x'x'}(x^0)\right] \times \\ &\times \left|\det \widetilde{S}''_{x'x'}(x^0)\right|^{-1/2} \left(\frac{\partial S(x^0)}{\partial x_n}\right)^{-1} \left[f(x^0) + O(\lambda^{-1})\right]. \end{aligned} \tag{4.14'}$$

Здесь $\widetilde{S}''_{x'x'}(x^0)$ — матрица с элементами $\widetilde{S}_{ij}$ (см. (4.13)).

Замечание 4.1. Из сравнения формул (2.6′) и (4.14′) видно, что внутренняя стационарная невырожденная точка вносит в $F(\lambda)$ бо́льший вклад, чем невырожденная граничная стационарная точка II рода: порядки их вкладов равны $\lambda^{-n/2}$, $\lambda^{-(n+1)/2}$ соответственно.

Устроим C^∞-разбиение единицы на $\partial\Omega$: $1=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)$, $x\in\partial\Omega$. Здесь $\varphi_0\equiv 1$ при x, близких к x^0, и $\operatorname{supp}\varphi_0$ сосредоточен в малой окрестности точки x^0. Тогда каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства (4.4), разобьется на два слагаемых. Интегралы, содержащие φ_1, имеют порядок $O(\lambda^{-\infty})$. В остальных интегралах остается перейти к локальным координатам на $\partial\Omega$ и воспользоваться теоремой 2.1.

Очевидно, что если на $\partial\Omega$ имеется конечное число невырожденных стационарных точек II рода, то асимптотика вклада от границы $F(\lambda, \partial\Omega)$ равна сумме вкладов вида (4.14) от этих точек.

Вклад от границы в интеграл $F(\lambda)$ может иметь больший порядок, чем $O(\lambda^{-n/2})$. Рассмотрим

Пример 4.1. Пусть условия леммы 4.1 выполнены и $S(x)\equiv S_0=\text{const}$ на $\partial\Omega$. Тогда при $\lambda\to+\infty$ в силу (4.4), (4.7′)

$$F(\lambda, \partial\Omega)\sim$$

$$\sim\exp(i\lambda S_0)\frac{1}{i\lambda}\left[\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial S(x)}{\partial n}\,|\nabla S(x)|^{-2}f(x)d\sigma+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(i\lambda)^{-k}\right], \tag{4.15}$$

$d\sigma$ — элемент поверхности $\partial\Omega$, так что главный член асимптотики имеет порядок λ^{-1}, независимо от размерности $\partial\Omega$. Такая ситуация имеет место, например, в известном опыте Араго (см. [17]) при дифракции на круглом диске поля точечного источника света, лежащего на прямой, перпендикулярной к диску и проходящей через его центр.

Замечание 4.2. Лемма 4.1 и теорема 4.1 без всяких изменений переносятся на интегралы, содержащие дополнительные параметры

$$F(\lambda,\alpha)=\int\limits_{\Omega(\alpha)}\exp[i\lambda S(x,\alpha)]f(x,\alpha)\,dx,$$

если все условия выполняются равномерно по α.

2. Вклад от граничной стационарной точки I рода. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, функции $f(x)$, $S(x) \in C^\infty([\Omega])$ и функция $S(x)$ вещественнозначна. Пусть $x^0 \in \partial\Omega$, $\nabla S(x^0) = 0$. Назовем x^0 *невырожденной граничной стационарной точкой*, если матрица $B(x^0) = \|S''_{\xi\xi}(x^0)\|$ невырождена, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — координаты в ортонормированном базисе, расположенном в касательной плоскости $T\,\partial\Omega_{x^0}$ к $\partial\Omega$ в точке x^0.

Теорема 4.2. *Пусть $x^0 \in \partial\Omega$ — невырожденная граничная стационарная точка функции $S(x)$ и $f(x) = 0$ вне некоторой достаточно малой окрестности точки x^0. Тогда при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) \sim \lambda^{-n/2} \exp[i\lambda S(x^0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k/2}. \qquad (4.16)$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз. Главный член асимптотики равен правой части (2.6′), помноженной на 1/2, т. е. попросту равен половине вклада от внутренней стационарной точки.

Мы предполагаем, что $\operatorname{supp} f$ не содержит стационарных точек (I и II рода), отличных от x^0. Пусть $x^0 = 0$, $S(x^0) = 0$ для простоты. Введем в окрестности точки x^0 локальные координаты $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $x = \psi(u)$ так, чтобы $\partial\Omega$ имела вид $u_n = 0$ и чтобы точке $x = 0$ отвечала точка $u = 0$. Тогда

$$F(\lambda) = \int_V \varphi(u) \exp[i\lambda \widetilde{S}(u)]\, du,$$

где обозначено

$$\widetilde{S}(u) = (S \circ \psi)(u), \quad \varphi(u) = (f \circ \psi)(u) \det \psi'_u(u)$$

и V — полуокрестность точки $u = 0$. Пусть $u_n > 0$ при $u \in V$ для определенности.

Применим к интегралу $F(\lambda)$ метод стационарной фазы по переменным $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Тем самым мы сведем интеграл к одномерному. Не ограничивая общности, можно считать, что V есть куб: $V = I \times \widetilde{V}$, где I — интервал $0 < u_n < \delta$, $\widetilde{V}$ — куб $-\delta < u_j < \delta$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, и $\delta > 0$ настолько мало, насколько это необходимо. Это утверждение следует из принципа локализации. Тогда

$$F(\lambda) = \int_0^\infty F_1(\lambda, u_n)\, du_n,$$

$$F_1(\lambda, u_n) = \int_V \psi(u) \exp[i\lambda\widetilde{S}(u)]\, du',$$

где $u' = (u_1, \ldots, u_{n-1})$. Стационарные точки функции $\widetilde{S}$, как функции от u', определяются из уравнения $\widetilde{S}'_{u'}(u) = 0$. Имеем при малых u

$$\widetilde{S}(u) = \frac{b_{nn}}{2} u_n^2 + u_n \langle b, u' \rangle + \frac{1}{2} \langle Bu', u' \rangle + \ldots,$$

где b есть n-вектор, B — симметричная матрица порядка n. Следовательно, уравнение $\widetilde{S}'_{u'} = 0$ имеет вид

$$u_n b + Bu' + \ldots = 0.$$

Так как по условию $\det B \neq 0$, то

$$u'(u_n) = -u_n B^{-1} b + \ldots,$$

и эта стационарная точка невырождена при малых δ, так как

$$\widetilde{S}(u', 0) = \frac{1}{2} \langle Bu', u' \rangle + \ldots$$

Применяя теорему 2.2 к интегралу F_1, получаем асимптотическое разложение

$$F_1(\lambda, u_n) \sim \lambda^{-(n-1)/2} \exp[i\lambda\widetilde{S}(u'(u_n), u_n)] \sum_{j=0}^\infty a_j(u_n),$$

где $a_j(u_n) \in C^\infty([0, \delta])$. При этом функции a_j обращаются в нуль при $u_n = \delta$ вместе со всеми производными. Далее,

$$\widetilde{S}(u'(u_n), u_n) = \frac{1}{2}(b_{nn} - \langle b, B^{-1}b \rangle) u_n^2 + \ldots$$

Коэффициент при u_n^2 равен $\det \widetilde{S}''_{uu}(0) (\det B)^{-1}$ и поэтому отличен от нуля. Применяя теорему 1.5, получаем разложение (4.16).

3. Асимптотика преобразования Фурье характеристической функции выпуклого множества и аналогичные задачи. Рассмотрим асимптотику при $|\xi| \to \infty$ интеграла

$$F(\xi) = \int_\Omega f(x) \exp[-i\langle x, \xi \rangle]\, dx, \tag{4.17}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^\infty$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, функция $f(x) \in C^\infty([\Omega])$. Если $f(x) = 1$, то $F(\xi)$ есть преобразование Фурье *характеристической функции множества* Ω (эта функция равна 1 при $x \in \Omega$ и равна 0 вне Ω). Пусть для простоты начало координат лежит внутри Ω.

Фазовая функция $S = \langle x, \xi \rangle$ не имеет стационарных точек при $\xi \neq 0$, так как $S_x = \xi$. Но она имеет на $\partial\Omega$ стационарные граничные точки II рода. Именно, это те точки $x(\xi)$, в которых гиперповерхность $\langle x, \xi \rangle = \mathrm{const}$ касается $\partial\Omega$.

Лемма 4.2. *Стационарная точка* II *рода* $x(\xi) \in \partial\Omega$ *невырождена тогда и только тогда, когда гауссова кривизна многообразия* $\partial\Omega$ *в этой точке отлична от нуля.*

Не ограничивая общности, можно считать, что $\xi = (0, 0, \ldots, 0, \xi_n)$, $\xi_n \neq 0$. Пусть $x^0(\xi)$ — одна из граничных стационарных точек, тогда нормаль n_{x^0} к $\partial\Omega$ в этой точке параллельна или антипараллельна вектору ξ. В окрестности точки $x^0(\xi)$ выберем локальные декартовы координаты y так, чтобы ось Oy была направлена по внешней нормали к $\partial\Omega$ и чтобы точки $(y', 0)$, $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ лежали в касательной плоскости $T_{x^0}\partial\Omega$ к $\partial\Omega$. Здесь $y = 0 \leftrightarrow x = x^0(\xi)$. Тогда уравнение $\partial\Omega$ при малых y примет вид

$$y_n = \frac{1}{2} \langle By', y' \rangle + \ldots, \tag{4.18}$$

где B — симметричная квадратная матрица порядка $n - 1$, и

$$S(x, \xi) = \langle x^0(\xi), \xi \rangle + y_n \xi_n. \tag{4.19}$$

Из этих формул и (4.13) следует, что невырожденность точки $x^0(\xi)$ эквивалентна невырожденности матрицы B. Но из (4.18) вытекает, что $\det B$ равен гауссовой кривизне гиперповерхности $\partial\Omega$ в точке $x^0(\xi)$.

Пусть $\mathscr{K}$ — конус

$$\mathscr{K} = \{\xi \in \mathbf{R}^n:\ 0 < |\xi| < \infty,\ \xi/|\xi| \in U\},$$

U — область на единичной сфере $|\xi| = 1$.

Теорема 4.3. *Пусть* $\mathscr{K}$ *— односвязный конус, и пусть при любом* $\xi \in [\mathscr{K}]$, $\xi \neq 0$, *гауссова кривизна границы* $\partial\Omega$ *отлична от нуля во всех стационарных точках* II *рода функции* $S = \langle x, \xi \rangle$. *Тогда:*

1°. *Функция S при всех $\xi \in [\mathcal{K}]$, $\xi \neq 0$, имеет одно и то же число $m = m(\mathcal{K})$ стационарных точек II рода $x^{(1)}(\xi), \ldots, x^{(m)}(\xi)$, и все они невырождены.*

2°. *Асимптотика $F(\xi)$ при $\xi \in [\mathcal{K}]$, $|\xi| \to \infty$, равна сумме вкладов от этих точек*

$$F(\xi) \sim \sum_{j=1}^{m} F(\xi, x^{(j)}(\xi)). \tag{4.20}$$

Выпишем формулу для вклада от точки $x(\xi)$:

$$F(\xi, x(\xi)) \sim$$

$$\sim i\varepsilon \exp[i\langle x(\xi), \xi\rangle](2\pi)^{(n-1)/2}|\xi|^{-(n+1)/2}|\varkappa_1 \ldots \varkappa_{n-1}|^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{i\pi}{4}\sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{sgn}(\varepsilon\varkappa_j)\right]\left[(f \circ x)(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)|\xi|^{-k}\right],$$
$$\omega = \xi/|\xi|. \tag{4.21}$$

Здесь $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ — главные кривизны $\partial\Omega$ в точке $x(\xi)$,

$$-\varepsilon = \operatorname{sgn}\langle \xi, n_{x(\xi)}\rangle, \tag{4.22}$$

где $n_{x(\xi)}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x(\xi)$.

Невырожденность стационарных точек вытекает из леммы 4.2. Пусть $\omega^0 = \xi^0/|\xi^0| \in U$; тогда имеется конечное число стационарных точек II рода $x^{(j)}(\omega^0)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Действительно, если бы их было бесконечно много, то, в силу компактности $\partial\Omega$, они имели бы предельную точку, которая также являлась бы стационарной точкой. Но невырожденные стационарные точки изолированы. По теореме о неявной функции при всех $\omega \in S^{n-1}$, достаточно близких к ω^0, имеется также ровно m стационарных точек $x^{(j)}(\omega)$, причем $x^{(j)}(\omega) \to x^{(j)}(\omega^0)$ при $\omega \to \omega^0$. Применяя лемму Гейне — Бореля, получаем, что число стационарных точек одно и то же при всех $\xi \in [\mathcal{K}]$, $\xi \neq 0$. Поэтому асимптотика $F(\xi)$ равна сумме вкладов от точек $x^{(j)}(\xi)$.

Пусть $x(\xi)$ — одна из этих точек. В обозначениях леммы 4.2 (см. (4.18), (4.19)) для главного члена вклада $F(\xi, x(\xi))$ получаем из (4.7′) формулу

$$F(\xi, x(\xi)) \sim i\varepsilon(2\pi)^{(n-1)/2}|\xi|^{-(n+1)/2} \times$$
$$\times \exp[i\langle x(\xi), \xi\rangle]|\det B|^{-1/2} \exp\left[\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}(\varepsilon B)\right](f \circ x)(\xi),$$

где ε указано в (4.22). Отсюда следует (4.21). Теорема доказана.

Многообразие размерности $n-1$ в $\mathbb{R}^n$ называется *строго выпуклым*, если все его главные кривизны в любой точке положительны. Если Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ со строго выпуклой границей, то при любом $\xi \neq 0$ функция $S = \langle x, \xi \rangle$ имеет ровно 2 стационарные точки II рода $x^{\pm}(\xi)$. Нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x^{+}(\xi)$ (соответственно $x^{-}(\xi)$) параллельна (антипараллельна) вектору ξ. Обозначим $k^{\pm}(\xi)$ гауссовы кривизны $\partial\Omega$ в точках $x^{\pm}(\xi)$. Из теоремы 4.3 вытекает

Следствие 4.1. *Пусть Ω — ограниченная область со строго выпуклой границей класса C^∞. Тогда при $|\xi| \to \infty$*

$$F(\xi) \sim$$

$$\sim -i(2\pi)^{(n-1)/2}|\xi|^{-(n+1)/2}\{\exp(i\langle x^{+}(\xi), \xi\rangle)\left|k^{+}(\xi)\right|^{-1/2} \times$$

$$\times e^{-\frac{i\pi}{4}(n-1)}\left[(f\circ x^{+})(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{+}(\omega)|\xi|^{-j}\right] -$$

$$- \exp(i\langle x^{-}(\xi), \xi\rangle)\left|k^{-}(\xi)\right|^{-1/2} \times$$

$$\times e^{\frac{i\pi}{4}(n-1)}\left[(f\circ x^{-})(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{-}(\omega)|\xi|^{-j}\right]. \quad (4.23)$$

Коэффициенты $a_j^{\pm}(\omega) \in C^\infty(S^{n-1})$, где S^{n-1} — сфера $|\xi| = 1$.

Следствие 4.2. *Пусть область Ω — неограниченная, условия теоремы 4.3 выполнены и при всех $\xi \in \mathcal{K}$ выполнено свойство 1° теоремы 4.3. Тогда, если $f(x)$ — финитная функция, заключение 2° теоремы 4.3 остается в силе.*

Пусть Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $F(\xi)$ имеет вид (4.17), где $f(x) = 1$. Обозначим

$$\tilde{F}(\omega) = \sup_{r>0} r^{(n+2)/2}|F(r\omega)|, \quad |\omega| = 1.$$

Точка $x^0 \in \partial\Omega$ называется *точкой уплощения порядка $\leqslant j$*, если расстояние от точки $x \in \partial\Omega$ до касательной плоскости в точке x^0 имеет нуль порядка $\leqslant j+2$. Пусть $K(x)$ — гауссова кривизна границы $\partial\Omega$ в точке x. В [141] доказано, что $\tilde{F}(\omega) \in L^p(S^n)$ при следующих предположениях: $F(\xi) \in C^\mu(\mathbb{R}^{n+1})$, где μ — наименьшее целое число, большее, чем $(n+2)/2$, $\partial\Omega \in C^{j+1}$, $\partial\Omega$ не имеет точек уплощения порядка $\geqslant \mu$ и $\int\limits_{\partial\Omega} K(x)^{(2-p)/2}\, dS < \infty$. Более точные результаты получены при $n = 1$.

4. Асимптотика главных значений интегралов. Пусть $P(x)$ — вещественнозначная функция класса $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, имеющая вещественные нули, и $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда интеграл $I = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{f(x)}{P(x)}\, dx$, вообще говоря, расходится. Приведем один из способов регуляризации этого интеграла.

Пусть множество нулей $\{x\colon P(x) = 0\}$ функции P содержит ограниченную компоненту M_0, и пусть $\nabla P(x) \neq 0$ на M_0. Тогда M_0 является C^∞-многообразием размерности $n-1$. Кроме того, множество $\{x\colon P(x) = \varepsilon\}$ при всех достаточно малых ε содержит компоненту M_ε с теми же свойствами, что и M_0, и $M_\varepsilon \to M_0$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть функция $f(x) = C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и сосредоточена в достаточно малой окрестности многообразия M_0.

Главным значением интеграла I по определению называется предел

$$\text{v. p.} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{f(x)}{P(x)}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|P(x)| > \varepsilon} \frac{f(x)}{P(x)}\, dx. \tag{4.24}$$

Пусть ω_P — дифференциальная форма Лере — Гельфанда, отвечающая P: $dP \wedge \omega_P = dx$ (см. гл. II, § 3). Тогда

$$\text{v. p.} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{f(x)}{P(x)}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|c| > \varepsilon} \Phi_f(c)\, \frac{dc}{c} = \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_f(c)\, \frac{dc}{c},$$
$$\Phi_f(c) = \int\limits_{P(x) = c} f(x)\, \omega_P(x), \tag{4.24'}$$

откуда немедленно вытекает существование предела (4.24).

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{f(x)}{P(x)} \exp[i\lambda S(x)]\, dx. \tag{4.25}$$

Перечислим условия на функции f, S, P.

1°. Функция $P(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и вещественнозначна, множество $\{x \in \mathbf{R}^n\colon P(x) = 0\}$ ее вещественных нулей содержит компактное C^∞-многообразие M_0^{n-1} размерности $n-1$, $\nabla P(x) \neq 0$ при $x \in M_0^{n-1}$.

2°. Функция $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и сосредоточена в малой окрестности множества M_0^{n-1}. Функция $S(x) \in C^\infty$ в некоторой области, содержащей $\operatorname{supp} f$, и вещественнозначна.

3°. $\nabla S(x) \neq 0$ при $x \in \operatorname{supp} f$, и на многообразии M_0^{n-1} функция $S(x)$ имеет конечное число, и притом невырожденных, стационарных точек II рода $x^1, \ldots, x^m$.

Вычислим асимптотику интеграла $F(\lambda)$ при этих условиях. Рассмотрим вначале интеграл

$$\Phi(0, \lambda) = \int_{P(x)=0} f(x) \exp[i\lambda S(x)]\, \omega_P(x), \qquad (4.26)$$

где ω_P — дифференциальная форма Лере — Гельфанда. Асимптотика этого интеграла равна сумме вкладов $\Phi_j(0, \lambda)$ от стационарных точек

$$\Phi(0, \lambda) \sim \sum_{j=1}^{m} \Phi_j(0, \lambda). \qquad (4.27)$$

Теорема 4.4 ([57]). *Пусть условия 1°—3° выполнены. Тогда при $\lambda \to +\infty$ для интеграла (4.25) справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) \sim \pi i \sum_{j=1}^{m} \Phi_j(0, \lambda) \operatorname{sgn}[\langle \nabla S(x^j), \nabla P(x^j)\rangle]. \quad (4.28)$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Формулы для вкладов $\Phi_j(0, \lambda)$ будут приведены ниже.

Положим

$$\Phi(c, \lambda) = \int_{P(x)=c} \exp[i\lambda S(x)]\, f(x)\, \omega_P(x),$$

тогда

$$F(\lambda) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(c, \lambda)}{c}\, dc.$$

При малых $c > 0$ множество $M_c = \{x\colon P(x) = c\} \cap \operatorname{supp} f$ является C^∞-многообразием размерности $n-1$, а функция S имеет на M_c ровно m, и притом невырожденных, стационарных точек II рода $x^1(c), \ldots, x^m(c)$. При этом

$x^j(c) \in C^\infty$ при малых c, $x^j(0) = x^j$. Асимптотика $\Phi(c, \lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ равна сумме вкладов $\Phi_j(c, \lambda)$ от точек $x^j(c)$ равномерно по $c \in [-c_0, c_0]$, если $c_0 > 0$ достаточно мало. Каждый из этих вкладов имеет вид

$$\Phi_j(c, \lambda) \sim \lambda^{-(n-1)/2} \exp[i\lambda (S \circ x^j)(c)] \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj}(c) \lambda^{-k}, \quad (4.29)$$

где функции $a_{kj} \in C^\infty$ при малых $|c|$. Покажем, что

$$\operatorname{sgn} \frac{d}{dc}(S \circ x^j)(c)|_{c=0} = \pm 1$$

в зависимости от того, являются ли векторы ∇S, ∇P в точке x параллельными или антипараллельными. Так как x^j — стационарная точка II рода, то $\nabla S = \alpha \nabla P$, $\alpha \neq 0$, в этой точке. Дифференцируя тождество $P(x) = c$, получаем при $x = x^j$: $\left\langle \nabla P, \frac{dx}{dc} \right\rangle = 1$, откуда следует, что $\frac{dS}{dc} = \left\langle \nabla S, \frac{dx}{dc} \right\rangle = \alpha |\nabla P|^2 \neq 0$. Применяя теорему 1.8 к интегралам v. p. $\int \frac{\Phi_j(c, \lambda)}{c} dc$, получаем (4.27).

Выпишем формулу для главного члена вклада $\Phi_j(0, \lambda)$. Пусть $\partial P(x^j)/\partial x_n \neq 0$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$,

$$\tilde{S}(x') = S(x), \quad x \in M_0^{n-1}.$$

Тогда аналогично (4.14′) имеем

$$\Phi_j(0, \lambda) =$$
$$= (2\pi)^{(n-1)/2} \lambda^{-(n-1)/2} \exp\left[i\lambda S(x^j) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \tilde{S}''_{x'x'}(x^j)\right] \times$$
$$\times \left|\det \tilde{S}''_{x'x'}(x^j)\right|^{-1/2} \left[\frac{\partial P(x^j)}{\partial x_n}\right]^{-1} \left[f(x^j) + O(\lambda^{-1})\right]. \quad (4.29')$$

Следствие 4.3. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \Omega$, *где* $\partial\Omega$ — *область в* $\mathbb{R}^k$,

$$F(\lambda, \alpha) = \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x, \alpha) \exp[i\lambda S(x, \alpha)]}{P(x)} dx. \quad (4.30)$$

Тогда все заключения теоремы 4.4 остаются в силе для интеграла (4.30) равномерно по $\alpha \in \mathcal{K}$, *если* f, $S \in C^\infty$ *по* (x, α), *условия 2°, 3° выполнены равномерно по* $\alpha \in \Omega$. *Здесь* $\mathcal{K}$ — *произвольный компакт, лежащий в области* Ω.

5. Асимптотика фундаментальных решений некоторых классов дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и условиями излучения. Рассмотрим уравнение

$$P(D)\mathscr{E}(x)=\delta(x). \tag{4.31}$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^n$, $D=(D_1, \ldots, D_n)$, $D_j=-i\partial/\partial x_j$ и $P(\xi)$ — полином от $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с постоянными коэффициентами. Решение $\mathscr{E}(x)$ уравнения (4.31) называется *фундаментальным* (или элементарным) решением оператора $P(D)$.

Будем предполагать, что выполнены условия:

1°. $P(\xi)$ — гипоэллиптический полином, $P(\xi)=T(\xi)Q(\xi)$, где $T(\xi)$ — полином с вещественными коэффициентами, полином $Q(\xi)$ не имеет вещественных нулей.

2°. Вещественные нули полинома $T(\xi)$ образуют $m\geqslant 1$ гладких, замкнутых, строго выпуклых многообразий $K_1, \ldots, K_m$ размерности $n-1$. Эти многообразия не пересекаются, и $\nabla T(\xi)\neq 0$ при $\xi\in K_j$, $1\leqslant j\leqslant m$.

Нас интересует асимптотика фундаментального решения $\mathscr{E}(x)$ при $|x|\to\infty$.

Простейшим примером служит оператор Гельмгольца $\Delta+k^2$, $k>0$. Рассматриваемый класс уравнений был введен в [8].

Получим интегральное представление для $\mathscr{E}(x)$. Применяя преобразование Фурье в (4.31), получаем $P(\xi)\widetilde{\mathscr{E}}=1$, откуда $\widetilde{\mathscr{E}}=1/P(\xi)$, и, применяя обратное преобразование Фурье, получаем $\mathscr{E}(x)=(2\pi)^{-n}\int\exp(i\langle x, \xi\rangle)\,d\xi/P(\xi)$. Однако этот интеграл расходится, так как P имеет вещественные нули, и его необходимо регуляризовать.

Пусть $n=1$ и $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — вещественные нули P; все они простые. Тогда функция

$$\mathscr{E}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{ix\xi}}{P(\xi)}\,d\xi \tag{4.32}$$

является фундаментальным решением. Здесь γ — контур в комплексной плоскости ξ, который совпадает с вещественной осью всюду, кроме малых окрестностей точек ξ_k. В этих окрестностях γ идет по полуокружности, которая обходит точку ξ_k снизу или сверху. Формулу для $\mathscr{E}$

можно записать также следующим образом:

$$\mathscr{E}(x) = \frac{1}{2\pi} \text{ v. p. } \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{d\xi}{P(\xi)} + i \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \frac{e^{ix\xi_j}}{P'(\xi_j)}. \quad (4.32')$$

Здесь $\varepsilon_j = +1(-1)$, если γ обходит точку ξ_j сверху (снизу).

Функция $\mathscr{E}(x)$ является решением уравнения (4.31) в следующем смысле. Она является функционалом над пространством K функций, принадлежащих $C_0^\infty(-\infty, \infty)$. Ее преобразование Фурье $\widetilde{\mathscr{E}}(\xi)$ удовлетворяет уравнению $P(\xi)\widetilde{\mathscr{E}}(\xi) = 1$, т. е. для любой функции $\psi(\xi) \in Z$ (это пространство функций, которые являются преобразованиями Фурье функций из K) справедливо тождество

$$(P(\xi)\widetilde{\mathscr{E}}(\xi), \psi(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, d\xi. \quad (4.33)$$

Всякая функция $\psi \in Z$, очевидно, аналитически продолжается на всю комплексную плоскость ξ и убывает быстрее любой степени при вещественных $\xi \to \infty$. По определению

$$(\widetilde{\mathscr{E}}(\xi), \psi(\xi)) = \int_{\gamma} \frac{\psi(\xi)}{P(\xi)}\, d\xi.$$

Следовательно,

$$(P(\xi)\widetilde{\mathscr{E}}(\xi), \psi(\xi)) = \int_{\gamma} \psi(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, d\xi,$$

так как ψ — целая функция, и (4.33) доказано.

Заметим, что формула (4.32′) задает 2^m фундаментальных решений (каждый нуль ξ_j можно обходить либо снизу, либо сверху).

При $n > 1$ для $\mathscr{E}(x)$ имеет место формула, аналогичная (4.32′). Приведем ее. Пусть функция $h(\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $h = 1$ в некоторой окрестности всех многообразий K_j. Тогда

$$\mathscr{E}(x) = (2\pi)^{-n} \text{ v. p. } \int_{\mathbf{R}^n} \frac{h(\xi) \exp[i\langle x, \xi\rangle]}{P(\xi)}\, d\xi +$$

$$+ (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \pi i \int_{K_j} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\, \omega_P(\xi) + F^{-1}_{\xi \to x}\left(\frac{1 - h(\xi)}{P(\xi)}\right) =$$

$$= \mathscr{E}_1(x) + \mathscr{E}_2(x) + \mathscr{E}_3(x). \quad (4.34)$$

Числа ε_j равны ± 1, знак зависит от ориентации K_j. Именно, $\varepsilon_j = +1$, если K_j ориентирована так, что в качестве положительного направления нормали к K_j в каждой точке x выбирается направление вектора $\nabla T(\xi)$ и $\varepsilon_j = -1$ в противном случае. Ниже мы считаем, что ориентации K_j фиксированы, так что набор $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ фиксирован.

Мы покажем, что $\mathscr{E}_3(x)$ убывает быстрее любой степени при $|x| \to \infty$, а асимптотику $\mathscr{E}_{1,2}(x)$ вычислим с помощью теорем 4.3 и 4.4.

Лемма 4.3. *Для любого $N \geqslant 0$ и для любого мультииндекса α существует постоянная $C_{N,\alpha}$ такая, что*

$$|D_x^\alpha \mathscr{E}_3(x)| C \leqslant_{N,\alpha} (1 + |x|)^{-N}, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{4.35}$$

При любом целом $M \geqslant 0$ имеем

$$\mathscr{E}_3(x) = (-i|x|^2)^{-M} F^{-2}\left(\Delta^M \frac{1 - h(\xi)}{P(\xi)}\right),$$

где Δ — оператор Лапласа. Так как полином P гипоэллиптичен, то существуют постоянные c, $C > 0$ такие, что при любом β

$$\left|\frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)}\right| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-c|\beta|}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Следовательно, если $M > 0$ достаточно велико, то $\left|\Delta^M\left(\frac{1-h}{P}\right)\right| \leqslant C'(1 + |\xi|)^{-n-1}$, так что при $|x| \geqslant 1$

$$|\mathscr{E}_3(x)| \leqslant C'|x|^{-2M}(2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|)^{-n-1} d\xi \leqslant C''|x|^{-2M}.$$

Тем самым (4.35) доказано при $|\alpha| = 0$; случай $|\alpha| > 0$ исследуется аналогично.

Фазовая функция $S = \langle x, \xi\rangle$ имеет на каждой поверхности K_j ровно 2 стационарные точки II рода $\xi_j^\pm(x)$ в силу леммы 4.2. Пусть $\xi_j^+(x)$ (соответственно $\xi_j^-(x)$) — та из этих точек, в которой положительное направление нормали к K_j совпадает с x (соответственно с $-x$). Введем обозначения: $k_j(x)$ — гауссова кривизна многообразия K_j в точке $\xi_j^+(x)$, n_j — направление внешней нормали к K_j в точке $\xi_j^+(x)$, $\omega = x/|x|$.

Теорема 4.5 ([58]). *Пусть условия* 1°—3° *выполнены. Тогда при* $|x| \to \infty$

$$\mathscr{E}(x) = (2\pi)^{(1-n)/2} |x|^{(1-n)/2} \sum_{j=1}^{m} \left(\sqrt{k_j(x)} \frac{\partial P(\xi_j^+(x))}{\partial n_j} \right)^{-1} \times$$
$$\times \exp\left[i\langle x, \xi_j^+(x)\rangle + \frac{i\pi}{4}(n-3)\varepsilon_j \right] \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} a_{lj}(\omega)|x|^{-l} \right), \tag{4.36}$$

где функции $a_{lj} \in C^\infty$ *при* $|\omega| = 1$.

Это разложение можно дифференцировать по x *любое число раз.*

Достаточно рассмотреть случай $m = 1$. Пусть K — множество вещественных нулей полинома P. Так как K — компактное строго выпуклое многообразие, то по лемме 4.2 функция $S = \langle x, \xi\rangle$ имеет на K ровно 2 стационарные точки II рода $\xi^\pm(x)$, и обе они невырождены. Пусть $\xi^+(x)$ — такая точка, что вектор x параллелен внешней нормали к K в этой точке. Тогда при $|x| \to \infty$ асимптотика $\mathscr{E}_2(x)$ равна сумме вкладов от точек $\xi^\pm(x)$. Аналогично, по теореме 4.3 асимптотика $\mathscr{E}_1(x)$ равна сумме тех же вкладов, умноженных на $\pi i \operatorname{sgn}\langle \xi, \nabla T\rangle$, так что при суммировании мы получаем удвоенный вклад от точки $\xi^+(x)$.

6. Дополнения. Главный член разложения (4.14) можно записать в более инвариантном виде ([58]). Пусть условия теоремы 4.1 выполнены. Введем функцию Лагранжа $L(x, \mu) = S(x) + \mu g(x)$. Если x^0 — стационарная граничная точка фазы S II рода, то (x^0, μ_0) — стационарная точка функции Лагранжа при μ_0 таком, что $\nabla S(x^0) + \mu_0 \nabla g(x^0) = 0$. Покажем, что главный член асимптотики выражается через значения ∇g и матрицы

$$Q(x, \mu) = \det \frac{\partial^2 L(x, \mu)}{\partial x\, \partial \mu} = \begin{Vmatrix} S''_{xx} + \mu g''_{xx} & {}^t(\nabla g) \\ \nabla g & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.37}$$

в точке (x^0, μ_0). Пусть $x^0 = 0$, $g(x^0) = 0$, $\frac{\partial g(x^0)}{\partial x_n} \neq 0$; перейдем к координатам y: $y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}$, $y_n = g(x)$, и обозначим через S^*, g^* функции S, g, записанные в переменных y. Далее, положим

$$\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}), \quad \tilde{Q}(y) = \frac{\partial^2 S^*(y)}{\partial \tilde{y}^2}. \tag{4.38}$$

Тогда справедливы тождества

$$\det Q = -\left(\frac{\partial g}{\partial x^n}\right)^2 \det \tilde{Q}, \quad \operatorname{sgn} Q = \operatorname{sgn} \tilde{Q} \qquad (4.39)$$

при $x = x^0$, $\mu = \mu_0$. Действительно,

$$Q = \begin{Vmatrix} {}^tT & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix} Q^* \begin{Vmatrix} T & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix},$$

где матрица Q^* строится по S^*, g^* так же, как и матрица Q, $T = \partial y(0)/\partial x$, 0 и E — нулевая и единичная $(n \times n)$-матрицы. Имеем

$$\det Q = \det Q^* (\det T)^2, \quad \operatorname{sgn} Q = \operatorname{sgn} Q^*.$$

Так как $g^* = y_n$, $\det Q^* = -\det \tilde{Q}$, то $\det Q = -g_n^2 \det \tilde{Q}$, и первое из тождеств (4.39) доказано. Далее, матрица Q^* приводится линейным преобразованием к виду

$$\begin{Vmatrix} \tilde{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

откуда следует второе из тождеств (4.39). Поэтому коэффициент a_0 в разложении (4.14) равен

$$a_0 = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \nabla g/\nabla S \,|\det Q|^{-1/2} \exp\left[\frac{i\pi}{4}(\operatorname{sgn} Q + 2)\right], \quad (4.40)$$

где $x = x^0$, $\mu = \mu_0$ и ориентация границы $\partial\Omega$ такова, что вектор $-\nabla g(x^0)$ направлен по внешней нормали к $\partial\Omega$.

Рассмотрим еще один важный пример: интеграл

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dx \exp(-i\lambda xy)\, \varphi(x, y). \qquad (4.41)$$

В данном случае условия теоремы 4.2 не выполнены: именно, все точки границы — оси $y = 0$ — являются граничными стационарными точками фазы II рода. Кроме того, точка (0, 0) является стационарной точкой фазы I рода.

Предложение 4.1. *Пусть функция $\varphi \in C^\infty$ при $y \geqslant 0$ и финитна. Тогда при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\Phi(\lambda) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n \lambda^{-n-1}, \qquad (4.42)$$

коэффициенты которого имеют вид

$$a_n = i^{n+1}\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-n-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \varphi(x, 0)\,dx + \\ + \frac{i^n\pi}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\varphi(0, 0). \quad (4.43)$$

Представим интеграл (4.41) в виде

$$\Phi(\lambda) = \lambda^{-1}\int_0^\infty I\,dt, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(x, \varepsilon)\,dx,$$

где $\varepsilon = t\lambda^{-1}$. По формуле Тейлора имеем

$$\varphi(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N}\frac{\varepsilon^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\varphi(x, 0) + R_N,$$

$$R_N = \frac{1}{N!}\int_0^\varepsilon(\varepsilon - \tau)^N\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{N+1}\varphi(x, \tau)\,d\tau,$$

так что

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^{-n-1} + \Phi_N(\lambda),$$

где коэффициенты a_n имеют вид

$$a_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty y^n dy\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\varphi(x, 0)\,e^{-ixy}dx, \quad (4.44)$$

а остаточный член равен

$$\Phi_N(\lambda) = \lambda^{-1}\int_0^\infty I_N dt,$$

$$I_N = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}R_N dx = \frac{1}{N!}\int_0^\varepsilon(\varepsilon - \tau)^N\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\psi(x, \tau)\,dx\right)d\tau.$$

Здесь $\psi = (\partial/\partial\tau)^{N+1}\varphi(x, \tau)$. Интегралы можно переставлять в силу финитности функции φ. Так как φ — гладкая финитная функция, то при любом $k > 0$ справедлива оценка

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\psi(x, \tau)\,dx\right| \leqslant C_k(1 + |t|)^{-k}$$

равномерно по $\tau \in [0, \infty]$. Следовательно,

$$|I_N| \leqslant \frac{C_k}{N!}(1+t)^{-k}\int_0^{\varepsilon}(\varepsilon-\tau)^N d\tau = C_k'(1+t)^{-k}\varepsilon^{N+1},$$

$$|\Phi_N| \leqslant C_k'\lambda^{-N-2}\int_0^{\infty} t^{N+1}(1+t)^{-k}dt \leqslant C_k''\lambda^{-N-2},$$

и тем самым формула (4.42) доказана. Далее, имеем ([12])

$$\int_0^{\infty} e^{-itx}t^n dt = i^{n+1}n!x^{-n-1} + i^n\pi\delta^{(n)}(x),$$

где равенство понимается в смысле обобщенных функций, и из (4.44) следует (4.43).

Напомним, что (см. [26])

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2k}\psi(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^{-2k}\Big[\psi(x)+\psi(-x) - {}$$
$$- 2\left(\psi(0) + \frac{x^2}{2!}\psi''(0) + \ldots + \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}\psi^{(2k-2)}(0)\right)\Big]dx,$$

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2k-1}\psi(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^{-2k-1}\Big[\psi(x)-\psi(-x) - {}$$
$$- 2\left(x\psi'(0) + \frac{x^3}{3!}\psi'''(0) + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\psi^{(2k-1)}(0)\right)\Big]dx.$$

Главный член асимптотики имеет вид

$$\Phi(\lambda) = \lambda^{-1}\left[\pi\varphi(0, 0) + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x, 0)-\varphi(0, 0)}{x}dx\right] + O(\lambda^{-2}).$$

§ 5. Вырожденные стационарные точки

1. Существование асимптотического разложения. Пусть фаза $S(x) \in C^{\infty}$ в окрестности стационарной точки x^0, и пусть выполнено одно из условий:

1°. Функция $S(x)$ аналитически продолжается в комплексную окрестность точки x^0, и точка x^0 является изолированной критической точкой функции $S(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$.

2°. Локальное кольцо отображения $x \to \nabla S(x)$ конечномерно.

Локальное кольцо отображения $x \to \nabla S(x)$ есть фактор-пространство $F[[x-x^0]] \Big/ \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right)$; здесь $F[[x-x^0]]$ — кольцо формальных степенных рядов от переменных $x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$ и $\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right)$ — идеал, натянутый на ряды Тейлора в точке x^0 функций $\partial S/\partial x_j$.

Тогда (см. гл. II, § 3) существует диффеоморфизм $x = \varphi(y)$, $\varphi(0) = x^0$ такой, что $(S \circ \varphi)(y)$ есть полином. Таким образом, в случаях 1°, 2° вычисление вклада от вырожденной стационарной точки приводится к случаю, когда фаза есть полином.

Теорема 5.1 (Атья [100]). *Пусть x^0 — вещественная стационарная точка фазы S, функция $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{supp} f$ не содержит стационарных точек, отличных от x^0, и выполнено одно из условий 1°, 2°. Тогда при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) \equiv \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \exp[i\lambda S(x)]\, dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{N} a_{kl} \lambda^{-r_k} (\ln \lambda)^l \right). \tag{5.1}$$

Здесь r_k — рациональные числа, $n/2 \leq r_0 < r_1 < \ldots < r_m \to \infty$ $(m \to \infty)$ и N — некоторое фиксированное целое число.

Эта теорема следует из теоремы 2.3.3 и леммы Эрдейи (ср. доказательство теоремы 2.4.3).

Числа r_m, N являются инвариантами стационарной точки. Именно, при гладкой замене $x = \varphi(y)$ они не меняются, так как не меняется значение интеграла $F(\lambda)$, а асимптотическое разложение вида (5.1) единственно. Наиболее важным инвариантом является r_0. Вычисление r_0 основано на теореме Хиронака [97] о *редукции особенности*, т. е. о приведении полинома S к некоторой канонической форме с помощью замены переменных.

2. Некоторые примеры.

Теорема 5.2. *Пусть $S(x)$ — положительно определенный однородный полином степени $2m$, $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,* *Тогда при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda) \sim \lambda^{-\frac{n}{2m}} e^{\frac{i\pi n}{4m}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k}{2m}} \Gamma\left(\frac{k+n}{m}\right) \tag{5.2}$$

$$a_k = e^{\frac{i\pi k}{4m}} \int_{S=1} \sum_{|\beta|=k} x^{\beta} \partial^{\beta} f(0)\, \omega_S \cdot (\beta!)^{-1} \tag{5.3}$$

Здесь ω_S — дифференциальная форма Лере — Гельфанда.

Лемма 5.1 [49]. *Пусть x^0 — критическая точка фазы S и $\operatorname{rank} S''_{xx}(x^0) = r$. Тогда с помощью диффеоморфизма $x = \varphi(y)$ $(x^0 = \varphi(0))$ можно в малой окрестности точки x^0 привести фазу S к виду*

$$(S \circ \varphi)(y) = \text{const} + \sum_{j=1}^{r} \pm y_j^2 + S_1(y_{r+1}, \ldots, y_n). \tag{5.4}$$

При этом все частные производные первого и второго порядка фазы S_1 равны нулю при $y = 0$.

Пусть $r \geqslant 1$ и $x^0 = 0$, $S(x^0) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что второй дифференциал функции S в точке $x = 0$ есть сумма квадратов $\sum\limits_{j=1}^{r} \pm x_j^2$, этого можно добиться с помощью невырожденного линейного преобразования. Положим $x' = (x_1, \ldots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \ldots, x_n)$, тогда $S(x) = S(0', x'') + S_2(x', x'')$. Функция $S(0', x'')$ имеет нуль порядка $\geqslant 3$ в точке $x'' = 0$. Далее,

$$S_2(x', x'') = \sum_{j=1}^{r} \pm x_j^2 + S_3(x', x'').$$

Рассмотрим S_2 как функцию от переменных x' и от параметров x'' при малых $|x''|$. Так как по построению функция $S_2(x', 0'')$ имеет нуль порядка $\geqslant 3$ в точке $x' = 0$, то по теореме об обратной функции уравнение $\frac{\partial S_3}{\partial x'} = 0$ при малых $|x''|$ имеет, и притом единственное, решение $x'^0 = \psi(x'')$. При этом $|\psi(x'')| = O(|x''|)$. В силу леммы 2.3.3 с помощью гладкой (по y' и по параметрам x'') замены переменной $x' = x'(y', x'')$, $y' = (y_1, \ldots, y_r)$ можно привести функцию S_2 к виду $S_2 = \sum\limits_{j=1}^{r} \pm y_j^2$, что доказывает (5.4).

Следствие 5.1. *Пусть* $\operatorname{rank} S''_{xx}(x^0) = n-1$. *Тогда с помощью гладкой замены переменных* $x = \varphi(y)$ *фаза* S *в окрестности точки* x^0 *приводится к виду*

$$(S \circ \varphi)(y) = S(x^0) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j y_j^2 \pm a y_n^{k+2}, \quad a > 0. \tag{5.5}$$

Здесь μ_j — *ненулевые собственные значения матрицы* $S''_{xx}(x^0)$, $k \geqslant 1$ — *целое число. При этом* $\det \varphi'(0) = 1$.

Это следует из теоремы 5.2 и леммы 2.3.1. Тем самым задача о редукции особенности полностью решается в случае $\operatorname{rank} S''_{xx}(x^0) = n-1$. Асимптотика интеграла $F(\lambda)$ с фазовой функцией вида (5.5) легко вычисляется (с помощью теоремы 2.1 и теоремы 1.5), и главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)(\pm a\lambda)^{-\frac{1}{n}} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{i\pi}{4}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}\mu_j + \frac{i\pi}{2n}\right] \times$$
$$\times |\mu_1 \ldots \mu_{n-1}|^{-1/2} \exp[i\lambda S(x^0)]\, f(x^0). \tag{5.6}$$

Разность $n-r$, $r = \operatorname{rank}\det S''_{xx}(x^0)$ называется *корангом* стационарной точки x^0 (особенности). Особенности корангов 0, 1 уже исследованы; рассмотрим особенность коранга 2.

Однородный вещественный многочлен ($\neq 0$) *третьей степени от двух переменных можно с помощью невырожденной линейной замены переменных привести к одному из следующих четырех видов*:

$$x^3 + y^3, \quad x^2 y - y^3, \quad x^2 y, \quad x^3. \tag{5.7}$$

Имеем $P_3(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$; пусть для определенности $a \neq 0$. Кубическое уравнение $P_3(\lambda, 1) = 0$ имеет по крайней мере один вещественный корень λ_1, и форма P_3 делится на линейный множитель $x - \lambda_1 y$. Полагая $x - \lambda_1 y = y'$, $y = x'$, получаем $P_3 = y' P_2(x', y')$, где P_2 — вещественная квадратичная форма. Приводя ее к сумме квадратов, получаем $P_3 = y'\left[\pm(Ax' + By')^2 + Cy'^2\right]$.

Форма P_3 приводится к виду y''^3, если $A = C = 0$, к виду $y''x''^2$, если $C = 0$, $A \neq 0$, и к виду $y''(x''^2 \pm y''^2)$, если $AC \neq 0$. Пусть $P_3 = y(x^2 + y^2)$. Делая замену $y = u + v$, $x = \sqrt{3}(u - v)$, приводим P_3 к виду $4(u^3 + v^3)$.

Теорема 5.3 [49]. *Пусть $S(x)$ имеет вид*

$$(a)\ S = x^3 + y^3 + \ldots; \quad (b)\ S = yx^2 - y^3 + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены степени $\geqslant 4$. Тогда в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ с помощью гладкой замены переменных S приводится к виду

$$(a)\ S = x'^3 + y'^3; \quad (b)\ S = y'x'^2 - y'^3$$

соответственно.

Замечание 5.1. Если функция S голоморфна в комплексной окрестности точки $(0, 0)$, то с помощью голоморфной замены переменных функция S приводится к виду $x'^3 + y'^3$.

В случае (a) интеграл $F(\lambda)$ приводится к виду

$$F(\lambda) = \int \exp[i\lambda(x^3 + y^3)]\,\varphi(x, y)\,dx\,dy \sim$$
$$\sim c\lambda^{-2/3}\left[\varphi(0, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k/3} c_k\right].$$

Для доказательства достаточно последовательно применить одномерный метод стационарной фазы по переменным x, y (см. теорему 1.5).

Заметим, что постоянная c есть инвариант, который выражается через производные третьего порядка фазы S в стационарной точке.

Пример 5.1. Вычислим асимптотику при $\lambda \to +\infty$ интеграла

$$F(\lambda) = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\exp[i\lambda(yx - y^3)]\,dx\,dy,$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Интеграл $\int\limits_{S=1} \omega$, где ω — дифференциальная форма Лере — Гельфанда, отвечающая фазе $S = yx^2 - y^3$, сходится, и в силу примера 2.3.2 имеем

$$\Phi_c(f) = \int\limits_{S=c} f\omega \sim c^{1/3} f(0, 0) \int\limits_{S=1} \omega \quad (c \to 0).$$

Следовательно, по лемме Эрдейи главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = [f(0, 0) + o(1)]\, \lambda^{-1/3} \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}} \int\limits_{S=1} \omega. \qquad (5.8)$$

Вычислим $\int\limits_{S=1} \omega$. Кривая $S = 1$ имеет вид $x = \pm \sqrt{\dfrac{1+y^3}{y}}$ и состоит из трех ветвей. Одна из них лежит в полуплоскости $y < -1$, симметрична относительно оси y и имеет асимптотами прямые $y = \pm x$. Две другие ветви лежат в полуплоскости $y > 0$, симметричны относительно оси y, и одна из них имеет асимптотами лучи $y = 0$, $x > 0$; $y = x > 0$. Имеем

$$\int\limits_{S=1} \omega = \int\limits_{S=1} \frac{dy}{S'_x} = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dy}{\sqrt{y(1+y^3)}} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y(1+y^3)}} = \frac{1}{3}\left[\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + \mathrm{B}\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right)\right]. \qquad (5.9)$$

Пусть $P_m(x_1, \ldots, x_n)$ — однородный полином степени $m \geqslant 2$ от $n \geqslant 2$ переменных. $\mathcal{GL}(n, \mathbf{R})$ — группа невырожденных матриц порядка $n \times n$. Группа $\mathcal{GL}(n, \mathbf{R})$ есть многообразие вещественной размерности n^2 ($=$ числу элементов $(n \times n)$-матрицы). Полином P_m имеет C_{m+n-1}^{n-1} коэффициентов. Неравенство $n^2 \geqslant C_{m+n-1}^{n-1}$ выполняется только при $m = 2$, $n \geqslant 2$ или при $m = 3$, $n = 2$. В противном случае линейная группа содержит меньше параметров, чем множество полиномов $\{P_m(x)\}$, так что с помощью линейной замены переменных $x = Ty$ нельзя привести любой полином степени m к одному из конечного (или даже дискретного) числа канонических типов при $m = 3$, $n \geqslant 3$ и при $m > 3$, $n \geqslant 2$. Семейство канонических форм в этих случаях зависит от непрерывных параметров. Это имеет место уже для однородных многочленов $P_4(x, y)$ четвертой степени от двух переменных.

Рассмотрим функции

$$S_1(x, y) = xy(x^2 - y^2), \quad S_2(x, y) = x(x + ty)(x^2 - y^2) + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены степени $\geqslant 5$ и $t \neq 0$ достаточно мало. Покажем, следуя [49], что не существует гладкой замены переменных $(x, y) = \varphi(x', y')$, $\varphi(0, 0) = (0, 0)$, переводящей S_1 в S_2 (в малой окрестности точки $(0, 0)$). Положим $S_2^*(x', y') = S_2(x, y)$; тогда разложение S_2^* по формуле Тейлора начинается с членов степени 4, коэффициенты при которых определяются только линейной частью преобразования φ в нуле. Инвариантом линейного преобразования является двойное отношение четырех прямых. Именно, пусть прямые m_1, m_2, m_3, m_4 выходят из одной точки O, прямая m пересекает прямые m_j в точках M_j. Двойным отношением называется число

$$d = \frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}} : \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_4}},$$

которое не зависит от выбора прямой m. Пусть m_j — прямые $x + y = 0$, $x + ty = 0$, $x = 0$, $x = y$; тогда $d = 2t/(t+1)$ для функции S_2, $d = 2$ для S_1.

Таким образом, при классификации вырожденных критических точек возникают *модули* (семейства неэквивалентных относительно гладкой замены ростков, зависящие от непрерывных параметров), и задача о классификации вырожденных критических точек в настоящее время не является полностью решенной.

Нормальные формы функций вблизи критических точек подробно исследованы в монографии [1].

3. Асимптотика интегралов и многогранник Ньютона. Приведем результаты из монографии [2]. Рассмотрим степенной ряд

$$S(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha x^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

и пусть $S(0) = 0$. *Носителем ряда* называется множество всех α таких, что $a_\alpha \neq 0$. Носитель ряда — подмножество положительного октанта в $\mathbf{R}^n$, т. е. множества точек с неотрицательными координатами. В каждую точку носителя ряда перенесем параллельно положительный октант. *Многогранником Ньютона* Γ называется выпуклая оболочка в $\mathbf{R}^n$ объединения всех полученных октантов. *Диаграммой Ньютона* Δ называется объединение всех компактных граней многогранника Ньютона.

Проведем биссектрису положительного октанта в $\mathbf{R}^n$, т. е. луч $x_j = t$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant t < \infty$. Биссектриса пересекается с границей Γ ровно в одной точке $(t = t_0)$. Число t_0 называется *расстоянием до многогранника Ньютона*, число $-1/t_0$ называется *удаленностью от многогранника Ньютона.*

Для любой грани $\gamma \in \Gamma$, γ-*частью* S_γ степенного ряда называется степенной ряд, составленный из одночленов, показатели которых принадлежат грани γ. Если грань γ компактна, то S_γ есть многочлен. *Главной частью* S_Δ называется многочлен, составленный из одночленов, показатели которых принадлежат диаграмме Ньютона Δ. Главная часть S_Δ многочлена с вещественными коэффициентами называется *R-невырожденной*, если для любой компактной грани $\gamma \in \Delta$, $\nabla S_\gamma \neq 0$ в $(\mathbf{R}\setminus 0)^n$. *Показателем осцилляции* называется число $-r_0$ в ряде (5.1), если существует функция φ такая, что $a_{0l} \neq 0$ при некотором l. *Показателем особости* называется число $n/2 - r_0$. Таблицы показателей особости для ряда классов критических точек приведены в [2].

Теорема 5.4. *Пусть фаза $S(x)$ голоморфна в окрестности критической точки x^0 и ее главная часть R-невырождена. Пусть удаленность t от многогранника Ньютона такова, что $t > -1$. Тогда показатель осцилляции точки x^0 равен t.*

Теорема 5.5. *Пусть $n = 2$ и фаза $S(x)$ голоморфна в окрестности критической точки x^0. Тогда показатель осцилляции точки x^0 равен t.*

Приведем еще один результат о скорости убывания интеграла (2.6), фаза которого имеет вырожденные стационарные точки [139].

Теорема 5.6. *Пусть $n = 1$ или $n = 2$, $f(x) \geqslant 0$ и существует по крайней мере одна вырожденная стационарная точка x^0 фазы $S(x)$ такая, что $f(x^0) > 0$. Тогда $(1 + |\lambda|)^m F(\lambda) \notin L^2(\mathbf{R})$ при $m < 1/2$.*

При $n \geqslant 3$ эта теорема неверна.

§ 6. Особенности интегралов от быстро осциллирующих функций

1. Классы интегралов. Рассмотрим интеграл вида

$$F(x) = \int_{\mathbf{R}^n} a(p, x) \exp[iS(p, x)]\, dp, \tag{6.1}$$

где $p \in \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^k$. Функция S называется *фазовой*. Введем следующие предположения:

1. Функция $S \in C^\infty$ вещественнозначна и положительно однородна степени 1 по переменным p при $|p| \geqslant 1$, т. е.

$$S(tp,\ x) = tS(p,\ x) \quad (|p| \geqslant 1,\ t \geqslant 1).$$

2. Функция S не имеет стационарных точек, т. е.

$$\nabla_{p,x} S(p,\ x) \neq 0 \quad (|p| \geqslant 1,\ x \in \mathbf{R}^k).$$

3. Функция $a \in C^\infty$ и положительно однородна степени q при $|p| \geqslant 1$, т. е.

$$a(tp,\ x) = t^q a(p,\ x) \qquad (|p| \geqslant 1,\ t \geqslant 1).$$

Кроме того, $a(p,\ x) = 0$ при $|p| \leqslant 1/2$.

Типичным примером фазовой функции при $n = k$ служит $S = (x,\ p)$, а интеграл (6.1) есть преобразование Фурье функции a. Интеграл (6.1) может не быть сходящимся, но он является обобщенной функцией из пространства $D'(\mathbf{R}^k)$. Его можно понимать, например, как предел (в смысле обобщенных функций)

$$F(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left[iS(p,\ x) - \varepsilon |p|\right] a(p,\ x)\, dp.$$

Интеграл (6.1) есть ядро интегрального оператора Фурье, введенного Л. Хермандером и играющего огромную роль в теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными [36]. Интегральный оператор Фурье имеет вид

$$(Lu)(x) = \int\int \exp\left[iS(p,\ x,\ y)\right] a(p,\ x,\ y)\, u(y)\, dy,$$

где $p \in \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^{k_1}$, $y \in \mathbf{R}^{k_2}$.

Приведем простейший пример. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x),$$

где $x \in \mathbf{R}^3$, $c > 0$ — постоянная, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Функция u называется *фундаментальным решением задачи Коши*. Имеем (интегралы берутся по $\mathbf{R}^3_p$)

$$u(t,\ x) = \int \frac{\sin(ct|p|)}{c|p|} e^{-i(p,x)} dp =$$
$$= \frac{1}{2ic} \int \frac{\exp\left[i(c|p| - (p,\ x))\right]}{|p|} dp - \frac{1}{2ic} \int \frac{\exp\left[-i(c|p| + (p,\ x))\right]}{|p|} dp.$$

Таким образом, $u(t, x)$ есть сумма двух интегралов вида (6.1) с фазовыми функциями $S_{1,2} = \pm c|p| - (p, x)$ и $q = -1$.

Нас интересуют особенности интегралов вида (6.1). Приведенные ниже результаты получены в [96].

Пусть K_S — проекция на $\mathbf{R}_x^k$ множества C_S, на котором $\nabla_p S = 0$:

$$C_S = \left\{(p, x):\ \frac{\partial S(p, x)}{\partial p} = 0\right\}, \quad K_S = \pi_x C_S.$$

Стандартным интегрированием по частям (см. § 1) нетрудно показать, что $F(x) \in C^\infty$ вне множества K_S. Поэтому особенности функции $F(x)$ содержатся в множестве K_S, которое называется *характеристическим коноидом*.

Прежде всего уменьшим на единицу число интегрирований в (6.1), используя обобщенные функции $(x + i0)^\alpha$, $\ln(x + i0)$ (α вещественно) и формулы для их преобразований Фурье [12]. Для этого положим $p = \rho\omega$, $\rho > 0$, $|\omega| = 1$ и проинтегрируем по ρ. Тогда получим:

1°. Если $\alpha = -n - q$ не является целым неотрицательным числом, то

$$F(x) = \exp(-i\pi\alpha/2)\,\Gamma(-\alpha) \int\limits_{S^{n-1}} [S(p, x) + i0]^\alpha a(p, x)\, d\Omega, \tag{6.2}$$

где S^{n-1} — единичная сфера $|p| = 1$, $d\Omega$ — элемент ее поверхности.

2°. Если $\alpha = m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$F(x) = \int\limits_{S^{n-1}} \left[a_0^{(m+1)} S^m(p, x) - a_{-1}^{(m+1)} S^{m-1}(p, x)\right] \times \\ \times \ln[S(p, x + i0)]\, a(p, x)\, d\Omega, \tag{6.3}$$

$$a_{-1}^{(m+1)} = \frac{i^m}{m!}, \quad a_0^{(m+1)} = \frac{i^m}{m!}\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} + \right. \\ \left. + \Gamma'(1) + \frac{i\pi}{2}\right].$$

2. Особенности $F(x)$ в регулярных точках характеристического коноида. Коноид K_S есть, вообще говоря, многообразие размерности $\leqslant k - 1$, которое может иметь особенности. Структура особенностей интеграла (6.1) существенно зависит от структуры особенностей коноида K_S.

Пусть $(p^0, x^0) \in C_S$, $|p^0| = 1$, и $K_S(x^0)$ — проекция на $\mathbf{R}^k_x$ малой окрестности точки (p^0, x^0). Если выполнено условие

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 S(p^0, x^0)}{\partial p^2} & \dfrac{p^0}{|p^0|} \\ \dfrac{{}^t p^0}{|p^0|} & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \qquad (6.4)$$

то множество $K_S(x^0)$ есть многообразие размерности $k-1$ и класса C^∞. Здесь p^0 — вектор-столбец, ${}^t p^0$ — вектор-строка.

При $x \in K_S$, близких к точке x^0, функция $S(p, x)$ имеет невырожденную стационарную точку $p = p^0(x) \in C^\infty$, $|p^0(x)| = 1$, такую, что $p^0(x^0) = p^0$. Функция $\lambda(x) = -S(p^0(x), x)$ имеет простой нуль на коноиде K_S.

Эти факты позволяют полностью описать особенности интеграла (6.1) в неособых точках коноида K_S. Предполагается, что условие (6.4) выполнено.

Теорема 6.1. *В малой окрестности U точки x^0 справедливо разложение*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k(x) [S(p^0(x), x) + i0]^{\alpha+k} + R_N(x), \qquad (6.5)$$

$$\alpha = -\frac{n+1}{2} - q,$$

если α — нецелое число. Здесь $N \geqslant 0$ любое, $c_k(x) \in C^\infty(U)$, остаточный член $R_N(x) \in C^\gamma(U)$ при $N > (n-1)/2 + q + \gamma$.

Разложение (6.5) есть асимптотическое разложение по гладкости: каждый следующий член разложения имеет меньшую особенность, чем предыдущий. Начиная с некоторого k, члены разложения (6.5) становятся гладкими функциями.

Главный член асимптотики равен

$$F(x) \sim (2\pi)^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2} + q\right) \exp\left[\frac{i\pi}{2}(\nu_+(x^0) + q)\right] \times$$

$$\times |\Delta(x)|^{-1/2} a(p^0(x), x) [S(p^0(x), x) + i0]^{-(n+1)/2-q}. \qquad (6.6)$$

Здесь $\Delta(x) = \det Q(x)$, $\nu_+(x)$ — число положительных собственных значений матрицы

$$Q(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial p^2}(S+\lambda|p|) & \dfrac{p}{|p|}\\ \dfrac{{}^tp}{|p|} & 0\end{bmatrix},$$

где $p=p^0(x)$, $\lambda=\lambda(x)$.

Теорема 6.2. *Пусть* $\alpha=-\frac{n+1}{2}-q$ — *целое число. Тогда справедливо асимптотическое разложение по гладкости*

$$F(x)=\sum_{k=0}^{-\alpha-1}c_k(x)[S(p^0(x),x)+i0]^{\alpha+k}+$$
$$+\sum_{k=-\alpha}^{N}d_k(x)[S(p^0(x,x))+i0]^{\alpha+k}\ln[S(p^0(x),x)+i0]+$$
$$+R_N(x). \quad (6.7)$$

Прокомментируем эти теоремы. Из формулы (6.6) видно, что «главная» особенность имеет вид

$$a(x)(b(x)+i0)^{\tau},$$

где a, $b\in C^{\infty}$, $\nabla b(x)\neq 0$. Пусть $\partial b/\partial x_1\neq 0$ для определенности. Сделаем замену переменных

$$b(x)=t_1,\quad x_2=t_2,\ \ldots,\ x_n=t_n,$$

тогда получим, что особенность имеет вид

$$\tilde{a}(t)(t_1+i0)^{\tau}.$$

Аналогичное замечание относится к формуле (6.7).

Таким образом, особенности носят одномерный характер, т. е. описываются функциями вида $(t+i0)^{\tau}$, $(t+i0)^{\tau}\ln(t+i0)$.

Теоремы 6.1, 6.2 справедливы и в том случае, когда функция $a(p,x)$ принадлежит классу Хермандера $S^m_{\rho,\delta}$ $0\leqslant\delta\leqslant 1/2<\rho<1$ (см. [36], [96]).

3. Редукция интегралов вида (6.1) в особых точках характеристического коноида. Из формул (6.2), (6.3) вытекает, что задача об исследовании особенностей интеграла вида (6.1) сводится к исследованию интегралов вида

$$\Phi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} g(t, x)\,(f(t, x) + i0)^{\alpha}\,dt, \tag{6.8}$$

$$\Phi(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} g(t, x)\,f^s(t, x)\ln(f(t, x) + i0)\,dt. \tag{6.9}$$

Здесь $x \in \mathbf{R}^k$, $t \in \mathbf{R}^m$, V — малая окрестность точки $t = 0$, x лежит в малой окрестности U точки $x = 0$, α не является целым неотрицательным числом, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Функция f вещественнозначна, $f \in C^{\infty}(V \times U)$, $g \in C_0^{\infty}(V \times U)$.

Интегралы (6.2), (6.3) приводятся к конечной сумме интегралов вида (6.8), (6.9) с помощью разбиения единицы на сфере S^{n-1} и перехода к локальным координатам. Функция $f(t, x)$ — это «старая» функция $S(p, x)$ в новых (локальных) координатах. Из условий 1.1, 1.2 следует, что

$$\left\{f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0\right\}. \tag{6.10}$$

Введем, как и ранее, обозначения

$$C_f = \left\{(t, x) : f(t, x) = 0, \ \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = 0\right\}, \quad K_f = \pi_x C_f$$

и множество K_f будем называть характеристическим коноидом функции f. Как и в п. 1, доказывается, что $\Phi(x) \in C^{\infty}$ при $x \notin K_f$, так что особенности обобщенной функции $\Phi(x)$ содержатся в коноиде K_f.

Будем далее считать, что $f(0, 0) = 0$. Точка $x = 0$ может быть особой точкой функции $\Phi(x)$ только тогда, когда точка $t = 0$ является критической (стационарной) точкой функции $f(t, 0)$, т. е. $\partial f/\partial t = 0$ в точке $(0, 0)$.

Функцию $f(t, x)$ можно, вообще говоря, привести к более простому виду с помощью замены переменных. Сделаем в интеграле (6.8) замену переменных и параметров

$$t = h(\xi, y), \quad x = \varphi(y). \tag{6.11}$$

Здесь h — гладко зависящий от параметра y диффеоморфизм, $h(\xi, 0) = \xi$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(y)$ — гладкая функция и матрица Якоби $\varphi'(0)$ имеет максимальный возможный ранг. Заметим, что число параметров y может быть меньше, чем число параметров x. Тогда получим

$$\Phi(x) = \tilde{\Phi}(y) = \int [\tilde{f}(\xi, y) + i0]^{\alpha} \tilde{g}(\xi, y)\, dy,$$

где $\tilde{f} = f(h, \varphi)$, $\tilde{g} = g(h, \varphi) \det h'_{\xi}$.

При таком преобразовании $C_f \to C_{\tilde{f}}$, а условие (6.10) выполняется для функции $\tilde{f}$. Такое же преобразование можно применить к интегралу (6.9).

Вопрос о том, к какому наиболее простому виду можно привести функцию f в окрестности критической точки, исследован В. И. Арнольдом и другими [1]. Мы приведем лишь некоторые из этих результатов.

Пусть $t = 0$ — критическая точка функции $f(t, 0)$ конечной кратности μ. Тогда с помощью преобразования вида (6.11) можно в малой окрестности точки $(0, 0)$ привести функцию f к нормальной форме

$$\tilde{f}(\xi, y) = g_0(\xi') + Q(\xi'') + \sum_{j=1}^{\mu} y_j g_j(\xi'). \qquad (6.12)$$

Здесь $\xi = (\xi', \xi'')$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$, функции g_j — полиномы, причем g_0 имеет нуль порядка $\geqslant 3$ в точке $\xi' = 0$ и $Q(\xi'')$ — квадратичная форма:

$$Q(\xi'') = \pm \xi_{r+1}^2 \pm \ldots \pm \xi_n^2.$$

Можно считать с самого начала, что функция f приведена к нормальной форме (6.12). Сделаем еще два упрощения.

1°. Квадратичную форму Q можно исключить из нормальной формы (6.12).

Действительно, интеграл (6.1) представим в виде

$$F(x) = \int_1^{\infty} \rho^{n-1+q} d\rho \int_{S^{n-1}} a(\rho\omega, x) \exp[i\rho S(\omega, x)]\, d\Omega,$$

и можно считать, что функция $S(\omega, x)$ приведена к виду (6.12). Применяя метод стационарной фазы к интегралу

$$\Psi = \int \exp[i\rho Q(\xi'')]\, \tilde{a}(\xi, y)\, d\xi'',$$

где $\tilde{a}$ — функция a в переменных ξ, y, получаем асимптотическое разложение

$$\Psi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(\xi', y)\, \rho^{\frac{-n-r-1}{2} - k} \qquad (\rho \to \infty),$$

с гладкими коэффициентами $\tilde{a}_k$. Тем самым мы снова приходим к интегралам вида (6.1), в которых фазовая функция не содержит квадратичной формы.

Итак, будем считать, что

$$f(t, x) = g_0(t) + \sum_{j=1}^{r-1} x_j g_j(t) + x_r, \tag{6.13}$$

где g_j — полиномы, $g_j(0) = 0$, $g_0(t)$ имеет нуль порядка $\geqslant 3$ в точке $t = 0$. Наличие слагаемого x_r следует из условия (6.10). Кроме того, всякая гладкая в окрестности точки $(0, 0)$ функция $g(t, x)$ может быть представлена в виде

$$g(t, x) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t, x) \frac{\partial f}{\partial t_j} + \left(\sum_{j=1}^{k} \nu_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \nu_0(x) f \right) \psi_0(t), \tag{6.14}$$

где a_j, ν_j, ψ_0 — гладкие функции, a_j, ψ_0 финитны по t, $\psi_0 \equiv 1$ при малых $|t|$.

2°. Можно считать, что функция g зависит только от t.

Рассмотрим интеграл вида (6.8). Имеем

$$\int a_j (f + i0)^\alpha \frac{\partial f}{\partial t_j} dt = -\frac{1}{\alpha + 1} \int (f + i0)^{\alpha+1} \frac{\partial a_j}{\partial t_j} dt,$$

$$\int \psi_0 (f + i0)^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_j} dt = \frac{1}{\alpha + 1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int (f + i0)^{\alpha+1} \psi_0 dt.$$

Фиксируем целое число $N \geqslant 1$. Повторяя проведенную выше процедуру, получаем, что интеграл (6.8) равен сумме интегралов того же вида с показателем $\alpha + N$ (и при $N \gg 1$ эти функции гладкие) и их производных по переменным x_j с показателями β, $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha + N$, причем множители при $(f + i0)^\beta$ зависят только от t. Итак, мы приходим к эталонным интегралам вида

$$\Phi(x) = \int [f(t, x) + i0]^\alpha g(t)\, dt,$$

где f имеет вид (6.13), $g \in C_0^\infty(R^n)$, $g(t) \equiv 1$ при малых $|t|$. Интегралы вида (6.9) приводятся к эталонным интегралам вида

$$\Phi(x) = \int f^s(t, x) \ln [f(t, x) + i0]\, g(t)\, dt.$$

Заметим, что функция $\Phi(x)$ аналитична вне коноида K_f.

4. Особенности типа A_m, D_m. В [1] приведена полная классификация так называемых 0-модальных ростков гладких функций f: $R^m \to R$, $f(0)=0$. Это, по терминологии В. И. Арнольда, ростки типов A_m, $D_m (m \geqslant 3)$, E_6, E_7, E_8.

Для серии A_m, t — одно переменное, и эталонный интеграл (6.15) имеет вид

$$A_{m,\alpha}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t, x) + i0]^{\alpha} g(t)\, dt,$$
$$f = t^{m+1} + x_1 t^{m-1} + \ldots + x_{m-2} t + x_{m-1}. \tag{6.15}$$

Здесь $m \geqslant 2$, α не является целым неотрицательным числом, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $g(t) = 1$ в окрестности точки $t = 0$.

Характеристический коноид K_f определяется уравнением $D(x) = 0$, где D — дискриминант полинома f как функции t. При $m = 2$ коноид есть полукубическая парабола $4x_1^3 + 27x_2^2 = 0$.

Пусть $\gamma(x)$ — контур в комплексной плоскости t, который при $|t| \gg 1$ совпадает с вещественной осью и обходит вещественные нули полинома $f(t, x)$ следующим образом: максимальный нуль обходится сверху, следующий снизу, следующий — снова сверху и т. д. Напомним, что x лежит в малой окрестности U точки $x = 0$, так что все нули полинома f лежат в малой окрестности точки $t = 0$. Тогда при $x \notin K_f$ имеем

$$A_{m,\alpha}(x) = \int_{\gamma(x)} f^{\alpha}(t, x)\, g(t)\, dt.$$

Здесь $g(t) = 1$ на части контура $\gamma(x)$, выходящей в комплексную плоскость, и $f^\alpha > 0$ при вещественных $t \gg 1$.

Функция $A_{m,\alpha}(x)$ при $x \notin K_f$ продолжается на всю комплексную плоскость α как мероморфная функция с полюсами в точках $\alpha_l = l(m+1)^{-1}$, $l = -1, 0, 1, 2, \ldots$ Этот факт доказывается так же, как и мероморфность гамма-функции $\Gamma(z)$. Мы положим $g(t) = 1$, так что при $x \notin K_f$

$$A_{m,\alpha}(x) = \int_{\gamma(x)} f^{\alpha}(t, x)\, dt. \tag{6.16}$$

Интеграл (6.16) сходится абсолютно при $\alpha < -1/(m+1)$, а при остальных α под функцией $A_{m,\alpha}(x)$ понимается ее аналитическое продолжение.

При $\alpha \neq \alpha_l$, $x \notin K_f$ функция $A_{m,\alpha}(x)$ является решением линейного уравнения с частными производными с линейными коэффициентами

$$[(m+1)D_1D_{m-2} + x_1(m-1)D_2D_{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + x_{m-2}D_{m-1}D_{m-2}]\,A_{m,\alpha}(x) = 0,$$

где $D_j = \partial/\partial x_j$. Кроме того,

$$D_{m-1}A_{m,\alpha}(x) = \alpha A_{m,\alpha-1}(x). \qquad (6.17)$$

Оба эти факта доказываются прямой выкладкой.

В общем случае функция $A_{m,\alpha}(x)$ не выражается через известные специальные функции. Но при полуцелых α она выражается через гиперэллиптические интегралы. Этот случай важен потому, что исследование особенностей фундаментальных решений гиперболических уравнений приводит к функциям вида (6.15) с полуцелым α. Учитывая тождество (6.17), можно ограничиться случаем $\alpha = -1/2$. Тогда при $x \notin K_f$ функция $A_{m,-1/2}(x)$ есть период гиперэллиптического интеграла. Действительно, в силу (6.16) имеем

$$A_{m,-1/2}(x) = \int\limits_{\gamma(x)} \frac{dt}{\sqrt{f(t,\,x)}}. \qquad (6.18)$$

Если $t_1(x) < \ldots < t_k(x)$ — все вещественные нули полинома f, то интеграл равен удвоенной сумме интегралов по разрезам $[t_1(x),\, t_2(x)]$, ..., $[t_{k-1}(x),\, t_k(x)]$ (если k нечетно, то последний разрез проводится по лучу $[t_k(x),\, +\infty)$).

При $m = 2$, 3 функции $A_{m,-1/2}(x)$ выражаются через периоды эллиптических интегралов. Интеграл $A_{2,-1/2}(x,\, y)$ можно представить в форме Вейерштрасса

$$A_{2,-1/2}(x,\,y) = \int\limits_{\gamma(x,y)} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - xt - y}}.$$

Характеристический коноид K_f задается уравнением $x^3 = 27y^2$ и является полукубической параболой с острием («клювом») в начале координат. Внутри клюва (т. е. при $x^3 - 27y^2 > 0$) полином $f = 4t^3 - xt - y$ имеет три вещественных корня $e_3 < e_2 < e_1$. В области $x^3 - 27y^2 < 0$ полином f имеет один вещественный корень e_1 и два комплексно сопряженных e_2, e_3; пусть $\operatorname{Im} e_2 > 0$. Положим

$$k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

где $k^2 + k'^2 = 1$. Числа K, K' — полупериоды эллиптического интеграла (в форме Якоби)

$$w(u) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Теорема 6.3. *При* $x^3 - 27y^2 > 0$

$$A_{2,-1/2}(x, y) = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}}(K + 2iK'). \tag{6.19}$$

При $x^3 - 27y^2 < 0$

$$A_{2,-1/2}(x, y) = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_2}} K\left(k^{-1}\right). \tag{6.20}$$

Выбор ветвей следующий: $k > 0$, $k' > 0$, $\sqrt{e_1 - e_3} > 0$ в первом случае и $k = e^{-i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$,— во втором. Во втором случае вещественная и мнимая части функции $A_{2,-1/2}(x, y)$ положительны.

Формулы (6.19), (6.20) показывают, что функция $A_{2,-1/2}(x, y)$ имеет довольно сложную особенность в начале координат. Пусть, например, $(x, y) \to (0, 0)$ изнутри клюва. Вместо x, y в качестве независимых параметров выберем корни e_1, e_3. Так как $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, то

$$\operatorname{Im} A_{2,-1/2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} K\left(\frac{2e_3 + e_1}{e_1 - e_3}\right).$$

Если $e_1 \to e_3$, то $(e_1 - e_3)^{-1/2} \to \infty$, но дробь $k^2 = (2e_3 + e_1)/(e_1 - e_3)$ не стремится, вообще говоря, ни к какому пределу при $(x, y) \to (0, 0)$.

При всех $\alpha < -1/3$ функция $A_{2,\alpha}(x, y)$ выражается через гипергеометрические интегралы. Если точка (x, y) лежит, например, внутри клюва, то

$$A_{2,\alpha}(x, y) = -i(e_1 - e_3)^{3\alpha-1} \int_{(k^{-2})}^{(\infty)} (1 - t)^\alpha (1 - k^2t)^\alpha t^{-3\alpha-2} dt,$$

контур интегрирования охватывает разрез $(k^{-2}, k^{-2}+i\infty)$. При других значениях α функцию $A_{2,\alpha}$ можно определить с помощью аналитического продолжения по параметру α.

Аналогично исследуются интегралы вида $A_{3,\alpha}(x, y, z)$. В данном случае полином

$$f = t^4 + xt^2 + yt + z$$

имеет или 4 вещественных корня $e_4 < e_3 < e_2 < e_1$, или 2 вещественных корня $e_2 < e_1$ и два комплексно сопряженных e_3, e_4, $\operatorname{Im} e_3 > 0$. Положим

$$k^2 = \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_2 - e_4)(e_1 - e_3)}.$$

Теорема 6.4. *Пусть $x \notin K_f$. Если все корни полинома f вещественны, то*

$$A_{3,-1/2}(x, y, z) = \frac{4}{\sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_4)}}(K + 2iK').$$

Если f имеет два вещественных и два комплексно сопряженных корня, то

$$A_{3,-1/2}(x, y, z) = \frac{4K}{\sqrt{(e_1 - e_3)(e_2 - e_4)}}.$$

В первом случае корень положителен, $K > 0$, $K' > 0$, во втором $\operatorname{Re} A_{3,-1/2} > 0$, $\operatorname{Im} A_{3,-1/2} > 0$.

Рассмотрим особенности типа $D^{\pm}_{m+1}$. В этом случае [1] имеем $t = (t_1, t_2)$,

$$f_{\pm} = t_1^2 t_2 \pm t_2^m + x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_2^2 + \ldots + x_m t_2^{m-1} + x_{m+1}.$$

Эталонные интегралы имеют вид

$$D^{\pm}_{m+1,\alpha}(x) = \int\int (f \pm i0)^{\alpha} g(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2.$$

Здесь $g \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^2)$, $g(t) \equiv 1$ при малых $|t|$, точка x лежит в малой окрестности U начала координат. Можно считать, что $g = g_1(t_1) g_2(t_2)$, где $g_j(t) \in C_0^{\infty}(\mathbf{R})$. Тогда интегралы $D^{\pm}_{m+1,\alpha}$ сводятся к однократным с точностью до слагаемого класса $C^{\infty}(U)$. Положим

$$a_{\pm}(t, x) = -\frac{x_1^2}{4t} \pm t^m + x_2 t + x_3 t^2 + \ldots + x_{m+1}. \quad (6.21)$$

Если α не имеет вид $k-1/2$, $k=0, 1, 2, \ldots$, то при $x \notin K_l$ справедлива формула

$$D^{\pm}_{m+1,\alpha}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\alpha-1/2)}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{\gamma^{\pm}(x)} t^{-1/2}\,[a_{\pm}(t, x)]^{\alpha+1/2}\,h(t)\,dt. \tag{6.22}$$

Здесь $a_{\pm}(t, x)$ имеют вид (6.21), контуры $\gamma^{\pm}(x)$ идут по вещественной оси и обходят нули и полюс $t=0$ функций $a_{\pm}$. Пусть $x_1 \neq 0$ и $e_1^+(x)$ — максимальный положительный нуль функции $a_+(t, x)$. Тогда $\arg a_+ = 0$ при $t > e_1^+(x)$, $\sqrt{t} > 0$, и далее нули и полюс функции a_+ обходятся так, что $\arg a_+ = 0$ на тех интервалах, на которых $a_+ > 0$, $\arg a_+ = \pi$ на тех интервалах, на которых $a_+ < 0$. Функция $h(t)$ финитна по t и $h(t) \equiv 1$ на $\gamma^+(x)$ в окрестности точки $t=0$. На контуре $\gamma^-(x)$ имеем $\arg a_-(t, x) = \pi$ при вещественных $t \gg 1$, далее контур $\gamma^-(x)$ обходит нули и полюс функции a_- с соблюдением тех же правил, что и выше.

Пусть $x \notin K_l$, $h \equiv 1$ и интегралы (6.22) сходятся абсолютно. Тогда функции $D^{\pm}_{m+1,\alpha}(x)$ удовлетворяют линейным уравнениям с частными производными

$$\frac{\partial}{\partial x_{m+1}}\left[\pm m\frac{\partial}{\partial x_m} + x_2\frac{\partial}{\partial x_{m-1}} + 2x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + 3x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (m-1)\,x_m\frac{\partial}{\partial x_{m-1}} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 4x_1^2\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}\right] D^{\pm}_{m+1,\alpha}(x) = 0$$

и справедливы тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_{m+1}} D^{\pm}_{m+1,\alpha}(x) = \alpha D^{\pm}_{m+1,\alpha-1}(x).$$

Если α — целое или полуцелое число, то функция $D^{\pm}_{m+1,\alpha}$ — период гиперэллиптического интеграла, а при $m=2$ — период эллиптического интеграла.

§ 7. Асимптотика преобразования Бесселя

Рассмотрим интегральное преобразование Бесселя

$$F(r) = \int\limits_0^{\infty} \alpha f(\alpha)\,J_{\nu}(\alpha r)\,d\alpha, \quad \nu > -1, \tag{7.1}$$

и исследуем его асимптотику при $r \to +\infty$. Такого рода задачи возникают, например, в акустике, электродинамике, теории упругости. Будем считать, что функция $f(\alpha)$ достаточно быстро убывает при $\alpha \to +\infty$, голоморфна в окрестности полуоси $\alpha \geqslant 0$, за исключением, быть может, конечного числа вещественных особых точек. В этом случае предполагается, что контур интегрирования обходит особые точки снизу. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — особые точки функции $f(\alpha)$, все $\alpha_j > 0$. Устроим разбиение единицы

$$1 = \eta_0(\alpha) + \eta_1(\alpha) + \ldots + \eta_{m+1}(\alpha), \quad \alpha \geqslant 0,$$

класса C^∞, $0 \leqslant \eta_j(\alpha) \leqslant 1$, $\eta_j(\alpha) = 1$ в окрестности точки α_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, и носитель функции $\eta_j(\alpha)$ не содержит других особых точек. Далее, $\eta_0(\alpha) = 1$ в окрестности точки $\alpha = 0$, $\eta_{m+1}(\alpha) = 1$ при больших α. Тогда

$$\begin{gathered} F(r) = \sum_{j=0}^{m+1} F_j(r), \\ F_j(r) = \int_0^\infty \alpha f(\alpha) J_\nu(\alpha r)\, \eta_j(\alpha)\, dx. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Интеграл $F_j(r)$ назовем вкладом от точки α_j ($\alpha_0 = 0$, $\alpha_{m+1} = +\infty$).

1°. *Вклад от бесконечности.* Если

$$f^{(j)}(\alpha) = O(\alpha^{1/2-\delta-j}) \qquad (\alpha \to +\infty, \quad \delta > 0)$$

при всех j, то

$$F_{m+1}(r) = O(r^{-\infty}) \quad (r \to \infty).$$

2°. *Вклад от точки* $\alpha = 0$. Пусть

$$f(\alpha) = \alpha^\gamma \varphi(\alpha), \quad \gamma > -\nu - 2$$

и $\varphi \in C^\infty$ при малых α. Тогда

$$\begin{gathered} F_0(r) \sim r^{-\gamma-2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{-n} \quad (r \to \infty) \\ c_n = \frac{2^{\gamma+n+1}\Gamma\left(\frac{\gamma+\nu+n}{2}+1\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{\nu-n-\gamma}{2}\right)}\, \varphi^{(n)}(0). \end{gathered} \tag{7.3}$$

Главный член асимптотики равен

$$F_0(r) \sim \frac{\varphi(0)\, 2^{\gamma+1}\Gamma\left(\frac{\gamma+\nu}{2}+1\right)}{r^{\gamma+2}\Gamma\left(\frac{\nu-\gamma}{2}\right)},$$

если $\varphi(0) \neq 0$.

3°. *Вклад от точки ветвления.* Предварительно рассмотрим эталонные интегралы

$$I_\pm(r, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{\alpha})^\gamma e^{\pm i\alpha r} d\alpha, \quad r > 0.$$

Здесь $\sqrt{\alpha} > 0$ при $\alpha > 0$, контур интегрирования обходит точку ветвления $\alpha = 0$ снизу, γ вещественно. Имеет $I_-(r, \gamma) = 0$, $r > 0$ и

$$I_+(r, \gamma) = -2\Gamma(\gamma/2+1)\, e^{-i\pi\gamma/4} \sin\frac{\pi\gamma}{2}\, r^{-\gamma/2-1}. \quad (7.4)$$

Замечание. Сходимость интегралов $I_\pm$ мы не обсуждаем — ее можно добиться, например, загнув контур интегрирования в комплексную плоскость. Можно также воспользоваться принципом аналитического продолжения (по γ).

Пусть $\varkappa = \sqrt{\alpha - k}$, где $k > 0$, $\varkappa > 0$ при $\alpha > k$ и

$$f(\alpha) = \varkappa^\gamma g(\varkappa), \quad (7.5)$$

где функция $g(\varkappa)$ голоморфна в точке $\varkappa = 0$. Имеем (мы полагаем $\alpha_1 = k$)

$$F_1(r) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \alpha f(\alpha)\, H_\nu^{(1)}(\alpha r)\, \eta_1(\alpha)\, d\alpha + \\ + \frac{1}{2}\int_0^\infty \alpha f(\alpha)\, H_\nu^{(2)}(\alpha r)\, \eta_1(\alpha)\, d\alpha \quad (7.6)$$

(это вклад от точки α_1). Заменяя функции Ханкеля их асимптотиками при $\alpha r \to \infty$ и учитывая, что $I_-(r) = 0$, получаем, что последний из интегралов в формуле (7.6) имеет порядок $O(r^{-\infty})$ при $r \to +\infty$. Главный член асимптотики $F_1(r)$, где $f(\alpha)$ имеет вид (7.5), равен

$$F_1(r) \sim g(0)\sqrt{\frac{k}{2\pi r}}\, I_+(r, \gamma) \exp\left[i\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (7.7)$$

Интеграл I_+ определяется формулой (7.4). Справедливо также асимптотическое разложение

$$F_1(r) \sim e^{ikr} r^{-(\gamma+3)/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad (r \to \infty).$$

Таким образом, $F_1(r)$ имеет порядок $r^{-(\gamma+3)/2}$.

Особо стоит выделить случаи $\gamma = 0$, $\alpha = \pm 1$. При $\gamma = 0$ главный член асимптотики обращается в нуль (см. (7.7)). Имеем

$$\alpha = k + \varkappa^2, \quad g(\varkappa) = g(0) + \varkappa g'(0) + \ldots,$$

и мы получим главный член асимптотики, заменив в формуле (7.7) $g(0)$ на $g'(0)$ и $\gamma = 0$ на $\gamma = 1$:

$$F_1(r) \sim ir^{-2} e^{ikr} g'(0) \sqrt{\frac{k}{2}}\, e^{-i\nu\pi/2}.$$

Аналогично получаем, что

$$F_1(r) \sim ir^{-2} e^{ikr} g(0) e^{-i\nu\pi/2} \qquad (\gamma = 1),$$

$$F_1(r) \sim r^{-1} e^{ikr} \sqrt{2k}\, g(0) e^{-i\nu\pi/2} \quad (\gamma = -1).$$

4°. *Вклад от простого полюса.* Пусть

$$f(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha - k},$$

где $k > 0$, $g(k) \neq 0$, функция $g(\alpha)$ голоморфна в окрестности точки $\alpha = k$. Обозначим $\alpha_1 = k$ и представим интеграл $F_1(r)$ в виде (7.6). Как и выше, доказывается, что последний из интегралов, стоящих в правой части этого равенства, имеет порядок $O(r^{-\infty})$. В первом из этих интегралов заменим функцию Ханкеля $H_\nu^{(1)}(\alpha r)$ ее асимптотикой при $\alpha r \to +\infty$ и применим теорему 1.9, тогда получим, что

$$F_1(r) \sim e^{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{-n} \qquad (r \to \infty).$$

Рассмотрим интеграл вида

$$F(\lambda) = \int_0^a f(x)\, x^{\alpha-1} J_\nu(\lambda x^\beta)\, dx,$$

где $f(x) \in C^\infty(0, a)$, $f(x) = 0$ вместе со всеми производными в точке $x = a$ и

$$\alpha + \beta\nu > 0, \quad \beta > 0, \quad \nu > -3/2.$$

Тогда при $\lambda \to +\infty$ имеем [69]

$$F(\lambda) = A_N(\lambda) + o(\lambda^{-\mu N}), \quad \mu = (\alpha + N - 1)/\beta.$$

Здесь $N \geqslant 0$ любое и

$$A_N(\lambda) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{\Gamma((\beta\nu + \alpha + n)/(2\beta))}{\Gamma((\beta\nu - \alpha - n)/(2\beta + 1))} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-(\alpha+n)/\beta}.$$

Этот результат обобщается на интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_0^a f(x)\, x^{\alpha-1} J_\nu(\lambda h(x))\, dx,$$

$$h'(x) = h_1(x)\, x^{\beta-1}, \quad h(0) = 0, \quad h_1 \in C^\infty(0, a).$$

§ 8. Асимптотика преобразований Фурье обобщенных функций

Пусть имеется некоторое линейное пространство функций B (они называются *основными* и обозначаются $\varphi(x)$) и пространство линейных функционалов B' на B. Значение функционала f на функции φ обозначается (f, φ). В дальнейшем B — пространство Л. Шварца $S(\mathbf{R}^n)$, элементы которого — функции класса C^∞, убывающие при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|^{-1}$ вместе со всеми своими производными. Пусть $\psi_n(t)$ — асимптотическая последовательность при $t \to t_0$ и $f_t(x)$ — линейный непрерывный функционал на пространстве B. По определению,

$$f_t(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x, t) \quad \{\psi_n(t)\} \qquad (t \to t_0),$$

где $a_n \in B'$, если для любой функции $\varphi(x) \in B$

$$(f_t(x), \varphi(x)) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(x, t), \varphi(x)) \{\psi_n(t)\} \quad (t \to t_0).$$

Это определение и приведенные в этом параграфе результаты см. в [52] — [55].

Рассмотрим функционал

$$F_{t,\lambda}^{\pm}(\varphi(x)) = \int (x \pm i0)^\lambda e^{ixt} \varphi(x)\, dx \tag{8.1}$$

(все интегралы берутся по всей оси). Определение обобщенных функций $(x \pm i0)^\lambda$, $\ln(x + i0)$ см. в [12].

8.1. $$\lim_{t\to\pm\infty} |t|^{\lambda+1} F^{-}_{t,\lambda}(\varphi(x)) = \begin{cases} 2\pi \dfrac{e^{-i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}\varphi(0), \\ 0, \end{cases} \quad \lambda \neq n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} |t|^{n+1} F^{-}_{t,n}(\varphi(x)) = 0.$$

8.2. $$\lim_{t\to\pm\infty} |t|^{\lambda+1} F^{+}_{t,\lambda}(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, \\ 2\pi \dfrac{e^{i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}\varphi(0), \quad \lambda \neq n, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} |t|^{\mu} F^{+}_{t,n}(\varphi(x)) = 0$$

при любом μ. Эти формулы можно записать также в виде

$$\lim_{t\to\pm\infty} |t|^{\lambda+1}(x+i0)^{\lambda} e^{ixt} = \begin{cases} 0, \\ 2\pi \dfrac{e^{i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}\delta(x), \quad \lambda \neq n, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} |t|^{\lambda+1}(x-i0)^{\lambda} e^{ixt} = \begin{cases} 2\pi \dfrac{e^{-i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}\delta(x), \quad \lambda \neq n, \\ 0, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} |t|^{\mu}(x \pm i0)^{n} e^{ixt} = 0$$

при любом μ. В частности,

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{e^{ixt}}{x-i0} = \begin{cases} 2\pi i\delta(x), \\ 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функционал

$$F^{\pm}_{t,\lambda,m}(\varphi(x)) = \int (x \pm i0)^{\lambda} \ln^{m}(x \pm i0)\, e^{ixt}\varphi(x)\,dx,$$

где $m > 0$ целое. Он связан с функционалом (8.1) тождеством

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{m} F^{\pm}_{t,\lambda}(\varphi(x)) = F^{\pm}_{t,\lambda,m}(\varphi(x)).$$

8.3. При $\lambda \neq n$, $t \to -\infty$

$$(x+i0)^{\lambda}\ln^{m}(x+i0)\,e^{ixt} \sim$$
$$\sim 2\pi \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{m-k}\left[\frac{e^{i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}\right]|t|^{-\lambda-1}\ln^{k}|t|\,\delta(x),$$

при $t \to +\infty$

$$(x-i0)^{\lambda}\ln(x-i0)\,e^{ixt} \sim$$
$$\sim 2\pi \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{m-k}\left[\frac{e^{-i\lambda\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}\right]|t|^{-\lambda-1}\ln^{k}|t|\,\delta(x),$$
$$(x+i0)^{\lambda}\ln^{m}(x+i0)\,e^{ixt} \to 0 \qquad (t\to+\infty),$$
$$(x-i0)^{\lambda}\ln^{m}(x-i0)\,e^{ixt} \to 0 \qquad (t\to-\infty)$$

быстрее любой степени $|t|^{-1}$.

8.4. Пусть n — четное. Тогда

$$\lim_{t\to\pm\infty}|t|^{n+1}(x+i0)^{n}\ln(x+i0)\,e^{ixt} = \begin{cases} 0, \\ -2\pi i^{n} n!\,\delta(x), \end{cases}$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}|t|^{n+1}(x-i0)^{n}\ln(x-i0)\,e^{ixt} = \begin{cases} -2\pi i^{n} n!\,\delta(x), \\ 0. \end{cases}$$

Справедливо тождество

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k} F^{\pm}_{t,\lambda,m}(\varphi(x)) = i^{k} F^{\pm}_{t,\lambda+k,m}(\varphi(x)),$$

так что приведенные выше асимптотики можно дифференцировать по t.

8.5. Пусть $\lambda \neq n$. Тогда

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left[\frac{\partial}{\partial(-1/t)}\right]^{k}\left[|t|^{\lambda+1}(x+i0)^{\lambda}e^{ixt}\right] =$$
$$= \begin{cases} 0, \\ 2\pi\dfrac{e^{i(\lambda+1)\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\,\delta^{(k)}(x), \end{cases}$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\left[\frac{\partial}{\partial(-1/t)}\right]^{k}\left[|t|^{\lambda+1}(x-i0)^{\lambda}e^{ixt}\right] =$$
$$= \begin{cases} 2\pi\dfrac{e^{-i(\lambda+1)\pi/2}}{\Gamma(-\lambda)}(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)\,\delta^{(k)}(x), \\ 0. \end{cases}$$

8.6. Пусть $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Тогда

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left[\frac{\partial}{\partial(-1/t)}\right]^k\left[|t|^{n+1}F^{\pm}_{t,n}(\varphi(x))\right] = 0.$$

8.7. Рассмотрим интеграл

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbf{R}^3} e^{i(p,x)-iEt}\varphi(p)\,dp,$$

где $E = p^2/(2M)$, $M > 0$, $\varphi \in S(\mathbf{R}^3)$. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial(-1/t)}\right]^k\left[t^{3/2}\psi(x, t)\right] =$$

$$= M^{3/2}\,e^{i(2k+1)\pi/4}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+k\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(E)\frac{\sin r\sqrt{2ME}}{r\sqrt{2ME}}\delta^{(k)}(E)\,dE, \quad r = |x|.$$

8.8. При $t \to -\infty$, $\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$

$$(x + i0)^{\lambda}e^{ixt} \sim 2\pi|t|^{-\lambda-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i(\lambda+n)\pi/2}}{\Gamma(-\lambda-n)\,n!\,|t|^n}\delta^{(n)}(x),$$

при $t \to +\infty$

$$(x + i0)^{\lambda}e^{ixt} \sim 0.$$

В [53] приведена таблица асимптотик преобразования Фурье обобщенных функций $\delta^{(m)}(x)$, $x^{\lambda}_{\pm}$ и других.

ГЛАВА IV

МЕТОД ПЕРЕВАЛА (ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ). СУММЫ И РЯДЫ

§ 1. Метод перевала для интегралов Лапласа

1. Эвристические соображения. Нас интересует асимптотика при $\lambda \to +\infty$ интегралов Лапласа

$$F(\lambda) = \int_\gamma f(z)\, e^{\lambda S(z)}\, dz. \tag{1.1}$$

Здесь γ — кривая в комплексной плоскости z, функции $f(z)$, $S(z)$ голоморфны в окрестности кривой γ.

Аналитичность функций f, S позволяет деформировать контур γ, что наводит на мысль продеформировать контур γ в контур, наиболее удобный для получения асимптотических оценок.

Рассмотрим вначале более простую задачу об оценке сверху функции $|F(\lambda)|$. Пусть $f(z) \equiv 1$, $S(z)$ — полином, $\gamma = \gamma_0$ — конечная кривая для простоты. Тогда

$$|F(\lambda)| \leqslant \int_{\gamma_0} \exp[\lambda \operatorname{Re} S(z)]\, |dz| \leqslant l_{\gamma_0} \max_{z \in \gamma_0} \exp[\lambda \operatorname{Re} S(z)],$$

где l_{γ_0} — длина контура γ_0. Но по теореме Коши интеграл $\int_{\gamma_0} \exp[\lambda S(z)]\, dz$ равен интегралу по любому контуру, концы которого совпадают с концами γ_0; пусть Γ — множество всех таких контуров γ. Тогда оценка вида (1.2) справедлива для всех $\gamma \in \Gamma$, и получаем, что

$$|F(\lambda)| \leqslant \inf_{\gamma \in \Gamma} (l_\gamma \max_{z \in \gamma} \exp[\lambda \operatorname{Re} S(z)]). \tag{1.2}$$

Так как нас интересуют большие значения λ, то можно ожидать, что длина l_γ несущественно влияет на точность оценки (1.2), так что

$$|F(\lambda)| \leqslant l \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{z \in \gamma} \exp[\lambda \operatorname{Re} S(z)], \tag{1.2'}$$

где l — постоянная, не зависящая от λ. Наконец, допустим, что существует контур $\gamma^* \in \Gamma$ такой, на котором достигается

$$\min_{\gamma \in \Gamma} \max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z). \tag{1.3}$$

Тогда из (1.2) следует оценка

$$|F(\lambda)| \leqslant l_{\gamma^*} \exp[\lambda \max_{z \in \gamma^*} \operatorname{Re} S(z)].$$

Продеформируем в (1.1) γ в γ^* (допустим, что это возможно), тогда

$$F(\lambda) = \int_{\gamma^*} f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz. \tag{1.4}$$

Покажем, что асимптотику этого интеграла можно вычислить с помощью метода Лапласа. Пусть для простоты $\max_{z \in \gamma^*} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в одной точке $z_0 \in \gamma^*$. Имеются две возможности:

1. z_0 — один из концов контура γ^*.

Пусть z_0 — начало γ^* и $S'(z_0) \neq 0$ для простоты. Тогда можно заменить интеграл по γ^* интегралом по малой дуге γ_0^* с началом в точке z_0, на которой $S'(z_0) \neq 0$; отброшенный интеграл имеет порядок $O(\exp[\lambda(S(z_0) - c)])$, $c > 0$. Так как $\operatorname{Re}(S(z) - S(z_0)) < 0$ при $z \in \gamma_0^*$, $z \neq z_0$, то, интегрируя по частям точно так же, как и в доказательстве теоремы 2.1.1, получаем асимптотическую формулу

$$F(\lambda) = \frac{\exp[\lambda S(z_0)]}{-\lambda S'(z_0)} \left[f(z_0) + O(\lambda^{-1})\right]. \tag{1.5}$$

2. z_0 — внутренняя точка γ.

Из минимаксного свойства контура γ^* следует, что z_0 является седловой точкой функции $\operatorname{Re} S(z)$. Положим $z = x + iy$. Так как седловая точка является стационарной, то $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} S(z_0) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} S(z_0) = 0$, и из условий Коши — Римана следует, что $S'(z_0) = 0$.

Определение 1.1. Точка z_0 называется *точкой перевала* функции $S(z)$, если $S'(z_0) = 0$. *Порядок* точки перевала равен $n \geqslant 1$, если

$$S'(z_0) = \ldots = S^{(n)}(z_0) = 0, \quad S^{(n+1)}(z_0) \neq 0. \qquad (1.6)$$

Точка перевала z_0 называется *простой*, если $S''(z_0) \neq \neq 0$. Величина $\operatorname{Re} S(z_0)$ называется *высотой* точки перевала.

Заменим γ^* достаточно малой дугой γ_0^*, содержащей точку z_0, и пусть $S''(z_0) \neq 0$ для простоты. Тогда на γ_0^* имеем

$$\zeta^2 = S(z) - S(z_0) \approx \frac{S''(z_0)}{2}(z - z_0)^2.$$

Пусть $\zeta = u + iv$, тогда $\operatorname{Re} \zeta^2 = u^2 - v^2$, и линии уровня $\operatorname{Re} \zeta^2 = 0$ делят плоскость ζ на 4 равных сектора. В двух из этих секторов $\operatorname{Re} \zeta^2 > 0$, в остальных $\operatorname{Re} \zeta^2 < 0$. Точно так же линии уровня $\operatorname{Re}[S(z) - S(z_0)] = 0$ делят окрестность точки z_0 на 4 сектора; в двух из них (скажем, S_1

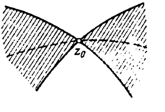

Рис. 3

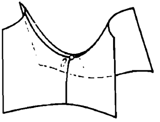

Рис. 4

и S_2) функция $\operatorname{Re}[S(z) - S(z_0)]$ отрицательна, в остальных (S_3, S_4) — положительна (см рис. 3). Поверхность $w = u^2 - v^2$ в пространстве (w, u, v) есть гиперболический параболоид (рис. 4). Контур γ_0^* проходит через секторы S_1 и S_2. Действительно, если бы он лежал в одном из них, скажем, в S_1, то по теореме Коши можно было бы заменить γ_0^* контуром γ', лежащим внутри S_1 и не содержащим точки z_0. Тогда $\max\limits_{z \in \gamma'} \operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0) = \max\limits_{z \in \gamma^*} \operatorname{Re} S(x)$, что противоречит минимаксному свойству контура γ^*.

Линия уровня $\operatorname{Im}[S(z) - S(z_0)] = 0$ при малых $z - z_0$ распадается на две линии l_1 и l_2, одна из которых проходит через секторы S_1 и S_2, вторая через S_3 и S_4. Действительно, в плоскости ζ эта линия имеет вид $uv = 0$, т. е. состоит из прямых $u = 0$, $v = 0$. Так как контур γ_0^* проходит через S_1 и S_2, то можно заменить γ_0^* дугой l_1^0

линии l_1. Переходя к переменной ζ, получаем, что

$$\int\limits_{\gamma_0^*} f(z)\exp[\lambda S(z)]\,dz = \int\limits_{l_1^0} f(z)\exp[\lambda S(z)]\,dz =$$

$$= \exp[\lambda S(z_0)] \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_0} \exp(-\lambda\zeta^2)\, f(z(\zeta))\,\frac{dz}{d\zeta}\,d\zeta,$$

$$\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = \sqrt{\frac{2}{S''(z_0)}}.$$

Применяя метод Лапласа, получаем, что при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0)}}\exp[\lambda S(z_0)]\left[f(z_0) + O(\lambda^{-1})\right]. \quad (1.7)$$

Аккуратные рассуждения будут проведены в последующих разделах.

Метод перевала состоит из двух частей.

I. *Топологическая часть.* Деформация контура γ в наиболее удобный для получения асимптотических оценок контур γ^*.

II. *Аналитическая часть.* Вычисление асимптотики интеграла по контуру γ^*.

Аналитическая часть содержит трудности того же порядка, что и в методе Лапласа. Во многих случаях можно воспользоваться готовыми формулами, полученными методом Лапласа.

Топологическая часть почти во всех применениях метода перевала вызывает значительные трудности, что неудивительно, так как эта задача — глобальная. Выше мы искали контур, на котором достигается *минимакс* (1.3). Такой контур может попросту не существовать даже в том случае, когда $S(z)$ — целая функция. Далее, строго говоря, следует искать контур, на котором достигается

$$\min_{\gamma\in\Gamma}\max_{z\in\gamma}|f(z)\exp[\lambda S(z)]| \quad (1.8)$$

(Γ — множество контуров, по которым интегралы (1.1) равны), что еще больше осложняет задачу.

Таким образом, если *минимаксный контур* (в смысле (1.3) или (1.8)) можно найти, то асимптотика интеграла (1.1) вычисляется. Но, к сожалению, не существует (и не может существовать) простого алгоритма, дающего возможность найти такой контур. Некоторые приемы, позволяющие это сделать, а также теоремы существования таких контуров, будут приведены в последующих параграфах. Несмотря на эти трудности, методом перевала получен ряд блестящих результатов, и он является, по существу, единственным методом получения асимптотических оценок для интегралов Лапласа. Этот метод был впервые предложен и применен к ряду задач известным английским физиком Питером Дебаем.

Метод перевала носит также названия «метод наискорейшего спуска», «метод седловой точки» (method of the steepest descent, method of the saddle point, method of the cool).

2. Локальная структура линий уровня гармонических функций.

Лемма 1.1. *Пусть функция $S(z)$ голоморфна в точке z_0 и $S'(z_0)\neq 0$. Тогда связная компонента линии уровня $\operatorname{Re} S(z)=\operatorname{Re} S(z_0)$, которая содержит точку z_0 и лежит в достаточно малой окрестности точки z_0, является аналитической кривой. То же самое верно и для линии $\operatorname{Im} S(z)=\operatorname{Im} S(z_0)$. Эти линии уровня ортогональны в точке z_0.*

Так как $S'(z_0)\neq 0$, то функция $w=S(z)-S(z_0)$ взаимно однозначно и конформно отображает некоторую окрестность U точки z_0 на окрестность V точки $w=0$. В качестве V можно взять квадрат вида $|\operatorname{Re} w|<\delta$, $|\operatorname{Im} w|<\delta$; для этого достаточно изменить U. Тогда дуга l линии уровня $\operatorname{Re} S(z)=\operatorname{Re} S(z_0)$, лежащая внутри U, отобразится на отрезок I: $\operatorname{Re} w=0$, $|\operatorname{Im} w|<\delta$ мнимой оси, который является аналитической кривой. Так как обратная функция $z=\psi(w)$ голоморфна в V, то $l=\psi^{-1}(I)$ — аналитическая кривая. Аналогично доказывается аналитичность дуги линии уровня $\operatorname{Im} S(z)=\operatorname{Im} S(z_0)$.

Лемма 1.2. *Пусть z_0 — точка перевала порядка n функции $S(z)$. В малой окрестности U точки z_0 линия уровня $\operatorname{Re} S(z)=\operatorname{Re} S(z_0)$ состоит из $(n+1)$ аналитических кривых, которые пересекаются в точке z_0 и разбивают U на $2n+2$ секторов с углами $\pi/(n+1)$ при вершине. Знаки функции $\operatorname{Re}[S(z)-S(z_0)]$ в соседних секторах различны.*

В силу леммы 2.1.4 существуют окрестность U точки z_0, функция $\psi(w)$ и $\rho>0$ такие, что:

1) $S(\psi(w))=S(z_0)+w^{n+1}$ в круге V: $|w|<\rho$;

2) функция $\psi(w)$ голоморфна в области V и взаимно однозначно отображает V на U, $\psi(0)=z_0$, $\psi'(0)\neq 0$;

3) функция $w=\psi^{-1}(z)$ голоморфна в области U.

В плоскости w уравнение $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$ примет вид $\operatorname{Re} w^{n+1} = 0$, и его решение в V состоит из $(n+1)$-го интервала l_k: $w = re^{i\varphi_k}$, $\varphi_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\Big/(n+1)$, $-\rho \leqslant r \leqslant \rho$, $k = 0, 1, \ldots, n$, которые являются аналитическими кривыми, делят V на $2n+2$ равных сектора, и знаки $\operatorname{Re} w^{n+1}$ в соседних секторах различны. Прообразы интервалов l_k обладают перечисленными свойствами, так как функция $w = \psi^{-1}(z)$ голоморфна в U и отображение ψ: $V \to U$ конформно.

Простую кривую с началом в точке z_0 будем называть *линией наибыстрейшего спуска* функции $\operatorname{Re} S(z)$, если на этой кривой:

1) $\operatorname{Im} S(z) = \mathrm{const}$;

2) $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$, $z \neq z_0$.

Если выполнены условия 1) и

2′) $\operatorname{Re} S(z) > \operatorname{Re} S(z_0)$, $z \neq z_0$, то такая кривая называется *линией наибыстрейшего подъема* функции $\operatorname{Re} S(z)$.

Лемма 1.3. *Если z_0 не является точкой перевала, то из точки z_0 выходит ровно одна линия наибыстрейшего спуска. Из точки перевала z_0 порядка n выходит $n+1$ линия наибыстрейшего спуска. В малой окрестности точки z_0 в каждом из секторов, в котором $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$, лежит ровно одна линия наибыстрейшего спуска.*

Достаточно рассмотреть случай $z_0 = 0$, $S(z) = c + z^{n+1}$, где c — постоянная, так как общий случай сводится к этому заменой переменной (см. доказательство леммы 1.2). Линиями наибыстрейшего спуска в данном случае являются лучи $\arg z = (2k+1)\pi/(n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Поясним термин «точка перевала». Пусть $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — голоморфная в области D функция, отличная от тождественной постоянной. Рассмотрим поверхность S: $u = u(x, y)$ в трехмерном пространстве (x, y, u). Так как $u(x, y) = \operatorname{Re} S(z)$ — гармоническая функция, то она не имеет ни точек максимума, ни точек минимума в области D. Следовательно, поверхность S не имеет ни вершин, ни впадин, а точки, в которых $S'(z) = 0$, будут *седловыми точками*. Пусть z_0 — простая точка перевала. В силу леммы 1.3 окрестность этой точки состоит из двух «долин», в которых $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$, и двух «хребтов», в которых $\operatorname{Re} S(z) > \operatorname{Re} S(z_0)$, т. е. устроена так же, как окрестность точки перевала в горах. На рис. 3 изображена окрестность простой точки перевала. Долины $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ заштрихованы. В простейшем случае $S = z^2$ поверхность S есть гиперболический параболоид (седло) $u = x^2 - y^2$. Поверхность $u = x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re} z^3$ называется «обезьяньим седлом».

Пусть $F(\lambda)$ — интеграл (1.1). Контур γ' назовем *эквивалентным* контуру γ, если интегралы вида (1.1) по этим контурам равны

$$\int_{\gamma} f(z)\, e^{\lambda S(z)}\, dz = \int_{\gamma'} f(z)\, e^{\lambda S(z)}\, dz$$

при всех $\lambda > 0$.

Лемма 1.4. *Пусть γ — конечный контур, функции $f(z)$ и $S(z)$ голоморфны на γ. Пусть среди точек, в которых достигается* $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$, *нет ни точек перевала, ни концов контура γ.*

Тогда существует контур γ', эквивалентный контуру γ и такой, что

$$\max_{z \in \gamma'} \operatorname{Re} S(z) < \max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z). \tag{1.9}$$

Пусть $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z) = M_\gamma$ достигается в точке z_0. Так как $S'(z_0) \neq 0$, то существует такая окрестность $U(z_0)$, которая взаимно однозначно отображается функцией $w = S(z) - S(z_0)$ на круг V: $|w| < \rho$. Положим $\gamma(z_0) = \gamma \cap U(z_0)$, тогда образ $\gamma^*(z_0)$ этой кривой лежит в полукруге $\operatorname{Re} w \leqslant 0$, $|w| \leqslant \rho$. Если $\operatorname{Re} w < 0$ на концах $\gamma^*(z_0)$, то заменим $\gamma^*(z_0)$ отрезком $\gamma_0^*(z_0)$, соединяющим концы $\gamma^*(z_0)$; если же $\operatorname{Re} w = 0$ на обоих концах $\gamma^*(z_0)$, то заменим $\gamma^*(z_0)$ кривой $\gamma_1^*(z_0)$, лежащей в указанном полукруге и такой, что $\operatorname{Re} w < 0$ всюду на этой кривой, кроме концов. После этого заменим контур γ контуром, в котором дуга $\gamma(z_0)$ заменена прообразом $\gamma_0(z_0)$ дуги $\gamma_0^*(z_0)$. По лемме Гейне — Бореля можно разбить дугу γ на конечное число дуг $\gamma_j(z_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, к каждой из которых можно применить проведенную выше деформацию. Тогда γ заменится эквивалетным контуром $\tilde{\gamma}$, на котором $M_{\tilde{\gamma}}$ достигается в конечном числе точек $\tilde{z}_j$. Применим описанную выше деформацию к малым дугам $\tilde{\gamma}_j$, внутри которых лежат точки $\tilde{z}_i$; мы получим дуги $\tilde{\tilde{\gamma}}_j$, на которых по построению $\operatorname{Re} S(z) < M_{\tilde{\gamma}}$ Таким образом, для полученного контура γ' условие (1.9) выполнено.

Если $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается на конце z_0 контура γ, то на нем достигается минимакс (1.3). Действительно, если контур γ' имеет те же концы, что и γ, то

$$\max_{z \in \gamma'} \operatorname{Re} S(z) \geqslant \operatorname{Re} S(z_0) = M_\gamma.$$

Покажем, что если $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается в точке перевала z_0, лежащей внутри γ, то, вообще говоря, нельзя заменить γ эквивалентным контуром γ', на котором $M_{\gamma'} < M_\gamma$. Пусть $S = -z^2$, γ — отрезок $[-1, 1]$. Если контур γ' имеет те же концы, что и γ, то $M_{\gamma'} \geqslant \operatorname{Re} S(0) = 0$. Однако если взять в этом примере контур, внутри которого лежит точка $z = 0$, а остальные точки контура лежат в секторе $|\arg z| < \pi/4$, то такой контур не будет минимаксным: его можно заменить контуром, целиком лежащим в области $\operatorname{Re}(-z^2) < 0$.

Теорема 1.1. *Пусть Γ — множество всех контуров, эквивалентных γ, и пусть существует контур $\gamma^* \in \Gamma$, на котором достигается минимакс* (1.3). *Тогда среди точек, в которых достигается* $\max\limits_{z \in \gamma^*} \operatorname{Re} S(z)$, *имеются либо концы контура, либо точки перевала z_j, удовлетворяющие условию A_0: в окрестности точки z_j контур γ^* проходит через два различных сектора, в которых* $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_j)$.

В силу леммы 1.4 среди точек, в которых достигается $\max\limits_{z \in \gamma^*} \operatorname{Re} S(z) = M_{\gamma^*}$, обязаны быть или концы контура, или точки перевала. Допустим, что среди этих точек нет концов контура и что точки перевала, в которых достигается M_{γ^*}, не удовлетворяют условию A_0. Достаточно рассмотреть случай, когда имеется только одна такая точка перевала z_0. Так как γ^* в окрестности z_0 лежит в одном из секторов, в которых $\operatorname{Re} S(z) \leqslant \operatorname{Re} S(z_0)$, то можно заменить малую дугу γ_0^* кривой γ^*, содержащую z_0, дугой γ_1^*, которая лежит в указанном секторе и не содержит точки z_0. К полученному контуру можно применить лемму 1.4, тогда получим контур γ', эквивалентный контуру γ^* и такой, что $\max\limits_{z \in \gamma'} \operatorname{Re} S(z) < \max\limits_{z \in \gamma^*} \operatorname{Re} S(x)$. Это противоречит минимаксному свойству контура γ^*.

Замечание 1.1. Пусть минимакс (1.3) достигается на γ^* только для тех контуров γ, которые получены из γ^* достаточно малой деформацией. Тогда все утверждения теоремы 1.1 остаются в силе.

3. Аналитическая часть метода перевала. На протяжении всей главы будем предполагать, что выполнены условия:

A_1. γ — кусочно-гладкая кривая (конечная или бесконечная).

A_2. Функции $f(z)$, $S(z)$ голоморфны в каждой точке γ (за исключением, возможно, концов γ).

A_3. При $\lambda > 0$

$$\int_\gamma |f(z)|\,|\exp(\lambda S(z))|\,|dz| < \infty.$$

Кроме того, будем предполагать, что γ — простая кривая. Это упрощает рассуждения, ничуть не умаляя их общности.

Лемма 1.5. *Если* $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z) \leqslant C$, *то*

$$F(\lambda) = O(e^{C\lambda}) \quad (\lambda \geqslant 1). \tag{1.10}$$

Теорема 1.2. *Пусть* $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ *достигается только в начале* z_0 *контура* γ, *функции* $f(z)$, $S(z)$ *голоморфны в точке* z_0 *и*

$$S'(z_0) \neq 0.$$

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) = \int_\gamma f(z)\exp[\lambda S(z)]\,dz \sim \exp[\lambda S(z_0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k-1}, \tag{1.11}$$

$$a_k = -\left(-\frac{1}{S'(z)}\frac{d}{dz}\right)^k \left(\frac{f(z)}{S'(z)}\right)\Bigg|_{z=z_0}. \tag{1.12}$$

Разложение (1.11) *можно дифференцировать любое число раз.*

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = -\frac{f(z_0) + O(\lambda^{-1})}{\lambda S'(z_0)} \exp[\lambda S(z_0)].$$

Заменим γ дугой γ_0, которая содержит точку z_0 и на которой $S'(z) \neq 0$. Тогда интеграл по $\gamma\setminus\gamma_0$ имеет порядок $O(\exp[\lambda(S(z_0)-\delta)])$, $\delta > 0$, в силу леммы 1.5. Интегрируя по частям интеграл по γ_0 тем же способом, что и в доказательстве теоремы 2.1.1, получаем (1.11), (1.12).

Теорема 1.3. *Пусть* $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ *достигается только в точке* z_0, *которая является внутренней точкой контура* γ, *простой точкой перевала функции* $S(z)$ *и* *удовлетворяет условию* A_0. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \equiv \int_\gamma f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz \sim \exp[\lambda S(z_0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k-1/2}. \tag{1.13}$$

Это разложение можно дифференцировать любое число раз.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0)}}\,[f(z_0) + O(\lambda^{-1})] \exp[\lambda S(z_0)].$$

Выбор ветви $\sqrt{-S''(z_0)}$ будет указан ниже.

В силу леммы 2.3.2 существуют окрестность U точки z_0, функция $\psi(w)$ и $\rho > 0$ такие, что при $|w| < \rho$

$$S(\psi(w)) = S(z_0) - \frac{w^2}{2}, \tag{1.14}$$

функция $z = \psi(w)$ голоморфна в круге V: $|w| < \rho$ и взаимно однозначно отображает этот круг на U. При этом

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = [-S''(z_0)]^{-1/2}, \tag{1.15}$$

где ветвь корня будет указана ниже. Положим $\gamma_0 = \gamma \cap U$; интеграл по оставшейся части γ экспоненциально мал по сравнению с $|\exp[\lambda S(z_0)]|$. После замены переменной γ_0 перейдет в кривую γ_0^*, которая проходит через точку $w = 0$ и через секторы S_1: $|\arg w - \pi| < \pi/4$ и S_2: $|\arg w| < \pi/4$, в которых $\operatorname{Re} w^2 > 0$. Пусть $w_j \in S_j$, $j = 1, 2$ — концы γ_0^*. После замены (1.14) интеграл $F_0(\lambda)$ по γ_0 будет иметь вид

$$F_0(\lambda) = \exp[\lambda S(z_0)] \int_{\gamma_0^*} \exp\left(-\frac{\lambda w^2}{2}\right) f(\psi(w))\, \psi'(w)\, dw.$$

По теореме Коши интеграл по γ_0^* равен интегралу по контуру $\tilde{\gamma}^*$, состоящему из отрезка $I_\rho = [-\rho, \rho]$ и дуг γ_1^*, γ_2^* окружности $|w| = \rho$; здесь $\gamma_j^* \in S_j$ и γ_1^* соединяют точки $-\rho$, w_1, а γ_2^* — точки ρ, w_2. Так как $\operatorname{Re} w^2 > c > 0$ на γ_j^*, $j = 1, 2$, то интегралы по этим дугам экспоненциально малы по сравнению с $\exp[\lambda S(z^0)]$, так что функция $F(\lambda)$ с точностью до экспоненциально малого слагаемого равна интегралу

$$\pm \exp[\lambda S(z_0)] \int_{-\rho}^{\rho} e^{-\lambda t^2/2} f(\psi(t))\, \psi'(t)\, dt,$$

где знак зависит от ориентации γ. Применяя лемму Ватсона к последнему интегралу, получаем (1.12), (1.13). Главный член асимптотики имеет вид

$$\pm \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \exp[\lambda S(z_0)] \left[f(\psi(0))\, \psi'(0) + O(\lambda^{-1}) \right]$$

и в силу (1.15) совпадает с (1.13′).

Выбор ветви корня в (1.13′) следующий: $\arg \sqrt{-S''(z_0)}$ равен углу между положительным направлением касательной к γ в точке z_0 и положительным направлением вещественной оси.

Замечание 1.2. При доказательстве теоремы 1.3 мы заменили контур γ в окрестности точки перевала z_0 контуром, идущим по линии наискорейшего спуска. Однако нет необходимости каждый раз заново проделывать эту процедуру.

Коэффициенты a_k разложения (1.13) определяются следующим образом. Пусть $\psi(w)$ — функция, определенная соотношениями (1.14), (1.15) и

$$f(\psi(w))\, \psi'(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k. \qquad (1.16)$$

Тогда

$$a_k = 2^{k+\frac{1}{2}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) b_{2k} = \sqrt{2\pi}\, (2k-1)!!\, b_{2k}. \qquad (1.17)$$

Теорема 1.4. *Пусть* $\max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ *достигается только в начальной точке* z_0 *контура* γ, *которая является точкой перевала порядка* n, *и функция* $f(z)$ *голоморфна в точке* z_0.

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \equiv \int_{\gamma} f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz \sim \exp[\lambda S(z_0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k+1}{n}}. \qquad (1.18)$$

Это разложение можно почленно дифференцировать любое число раз.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в предыдущем случае: делается замена переменной

$z = \psi(w)$,
$$S(\psi(w)) = S(z_0) - w^n, \qquad (1.19)$$
и к полученному интегралу применяется метод Лапласа.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{n!}{\lambda S^{(n)}(z_0)}}\,\frac{\Gamma(1/n)}{n}\left[f(z_0) + O\left(\lambda^{-1/n}\right)\right]\exp[\lambda S(z_0)].$$

Коэффициенты a_k в (1.18) имеют вид

$$a_k = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right) b_k, \qquad (1.20)$$

где b_k определяются из разложения

$$f(\psi(w))\,\psi'(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k. \qquad (1.21)$$

Функция $\psi(w)$ удовлетворяет уравнению (1.19) и нормирована условиями

$$\psi(0) = z_0, \quad \psi'(0) = \sqrt{-\frac{n!}{S^{(n)}(z_0)}}. \qquad (1.22)$$

В этой формуле $\arg\sqrt{-S^{(n)}(z_0)}$ равен углу между положительным направлением касательной к γ в точке z_0 и положительным направлением вещественной оси.

Замечание 1.3. Случай, когда функция $f(z)$ имеет степенную или логарифмическую особенность в точке z_0, в которой достигается $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ и которая является точкой перевала или концом γ, также приводится к лемме Ватсона или к теореме 2.1.7.

До сих пор мы рассматривали случай, когда $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в одной точке контура γ.

Теорема 1.5. *Пусть γ — конечный контур, функции $f(z)$ и $S(z)$ голоморфны в окрестности контура γ. Пусть среди точек, в которых достигается $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$, имеются точки $z_1, \ldots, z_k$, которые являются концами контура или точками перевала, удовлетворяющими условию* A_0. *Тогда при $\lambda \to +\infty$ интеграл* (1.1) *асимптотически равен сумме вкладов от точек $z_1, \ldots, z_k$.*

Понятие *вклада* будет введено ниже.

Покажем, что существует контур γ^*, эквивалентный контуру γ и такой, что $\max\limits_{z\in\gamma^*} \operatorname{Re} S(z) = M$ достигается только в точках $z_1, \ldots, z_k$. Тогда по лемме 1.5

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz + O(\exp[\lambda(M - c)]),$$

где $c > 0$, а γ_j — малые дуги контура γ^*, содержащие точки z_j. Интеграл по дуге γ_j и назовем *вкладом от точки* z_j в асимптотику интеграла $F(\lambda)$. Эти вклады вычисляются с помощью теорем 1.2—1.4.

Пусть $S_j^{(1)}$ — один из секторов с вершиной в точке z_j, в котором $\operatorname{Re} S(z) \leqslant M$ и через который проходит контур γ. Пусть $\gamma_j^{(1)}$ — достаточно малая дуга контура γ с началом в точке z_j, лежащая в $S_j^{(1)}$. Заменим $\gamma_j^{(1)}$ эквивалентной ей дугой $\overset{*}{\gamma_j}$, на которой $\operatorname{Re} S(z) < M$ всюду, за исключением, быть может, концов.

Полученную таким образом кривую можно разбить на конечное число дуг $\tilde{\gamma}_\alpha$, каждая из которых либо содержит одну из точек z_j, либо не содержит точек z_j, и $\operatorname{Re} S(z) < M$ на концах дуги $\tilde{\gamma}_\alpha$. Применяя к каждой из дуг $\tilde{\gamma}_\alpha$ второго типа деформацию, описанную в лемме 1.4, получим искомый контур γ^*.

Контур γ, удовлетворяющий условиям теоремы 1.5, будем называть *перевальным контуром*. Асимптотика интеграла по перевальному контуру легко вычисляется с помощью формул, полученных в теоремах 1.2—1.4.

Особо следует выделить такой случай:

Предложение 1.1 *Пусть* $\operatorname{Im} S(z) = \mathrm{const}$ *на* γ, *функции* $f(z)$ *и* $S(z)$ *голоморфны в каждой точке контура (за исключением, быть может, его концов). Пусть на* γ *лежит конечное число точек перевала.*

Тогда при $|\lambda| \to \infty$, $|\arg \lambda| \leqslant \pi/2 - \delta < \pi/2$, *асимптотика интеграла* (1.1) *равна сумме вкладов от точек перевала, лежащих на* γ, *и концов контура.*

Доказательство следует из того, что

$$\exp[\lambda S(z)] = \exp(i\lambda c) \exp[\lambda \operatorname{Re} S(z)], \quad z \in \gamma,$$

где c — константа. Поэтому интеграл (1.1) с точностью до множителя $\exp(i\lambda c)$ совпадает с интегралом вида (2.1.1).

Приведем конкретные примеры (см. [5], [30]).

1.1. $\int\limits_0^\infty \exp[\lambda(x + ix - x^3)]\,dx \sim$

$$\sim e^{-\pi i/16}2^{-1/3}3^{-1/4}\pi^{1/2}\lambda^{-1/4}\exp(2^{7/4}3^{-3/2}e^{3\pi i/8}\lambda) \qquad (\lambda \to +\infty).$$

В данном случае имеются две точки перевала $z_{1,2} = \pm 2^{1/4}3^{-1/2}e^{\pi i/8}$, и асимптотика интеграла равна вкладу от точки z_1.

1.2. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}(1 + x^2)^{-\lambda}\,dx \sim \left[\frac{\pi(1-c)}{\lambda}\right]^{1/2} e^{-\lambda c}(2c)^{-\lambda} \qquad (\lambda \to +\infty),$$

где $c = \sqrt{2} - 1$. В данном случае имеются две точки перевала $z_{1,2} = i(-1 \pm \sqrt{2})$, и асимптотика интеграла равна вкладу от точки z_1.

1.3. $$\int\limits_{-1}^{\infty} (x^3 + 3x - 2i)^{-n} e^{ix}dx \sim 2e(i/4)^n(\pi/(3n))^{1/2} \quad (n \to \infty),$$

где $n > 0$ — целое. Имеем две точки перевала $z_{1,2} = \pm i$ и асимптотика интеграла равна вкладу от точки z_2.

1.4. $$\int\limits_{1-\infty}^{1+\infty} e^{-z^2}(1 + z)^{-n}\,dz \sim \left(\frac{\pi}{2e}\right)^{1/2} i^{-n}e^{n/2}(n/2)^{-n/2} \quad (n \to \infty),$$

где $n > 0$ — целое.

1.5. $$\int\limits_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \exp(-2\lambda z^2 - 4\lambda/z)\,dz =$$

$$= \pi^{1/6}(6\lambda)^{-1/2}\exp(3\lambda + 3\sqrt{3}\,i\lambda)[1 + O(\lambda^{-1})] \quad (\lambda \to +\infty),$$

где $a > 0$. Здесь имеются три точки перевала, которые определяются из уравнения $z^3 = 1$, и асимптотика интеграла равна вкладу от точки $z = e^{2\pi i/3}$. В качестве перевального можно выбрать контур, состоящий из лучей $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ и полуокружности $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

1.6. $$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} z^{z^2}\exp(-\lambda z^2)\,dz =$$

$$= i\pi^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}e^{2\lambda-1}\right)[1 + O(e^{-2\lambda})] \quad (\lambda \to +\infty).$$

Здесь имеются две точки перевала $z_1 = 0$, $z_2 = e^{\lambda - 1/2}$ и асимптотика интеграла равна вкладу от точки z_2.

1.7. $$F(\lambda) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-\lambda(x^2 - 2ix)] [\operatorname{sh}(1 + x^2)]^{-1} = \\ = e^{-\lambda}\left[\pi + \frac{\pi^{1/2}}{4\lambda^{1/2}} - \frac{11\pi^{1/2}}{96\lambda^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{5/2}}\right)\right]$$
при $|\lambda| \to \infty$, $|\arg\lambda| < \pi/2 - \delta < \pi/2$.

В этом случае точка перевала $z = i$ совпадает с полюсом подынтегрального выражения. Введем обозначения

$$S(z) = -z^2 + 2iz, \quad f(z) = (z - i)[\operatorname{sh}(1 + z^2)]^{-1},$$

тогда $f(i) = 1/(2i)$. Вычтем сингулярную часть, т. е. положим

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda), \quad F_1(\lambda) = f(i) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda S(x)}}{x - i}\, dx,$$

$$F_2(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda S(x)} \frac{f(x) - f(i)}{x - i}\, dx.$$

Контур интегрирования для $F_1(\lambda)$ можно заменить прямой $\operatorname{Re} z = a > 1$. Тогда

$$F_1(\lambda) = 2\pi i f(i) \operatorname*{res}_{z=i} \left[e^{\lambda S(z)} (z - i)^{-1}\right] = \pi e^{-\lambda}.$$

В интеграле $F_2(\lambda)$ можно заменить контур интегрирования прямой $\operatorname{Re} z = 1$, которая проходит через точку перевала $z = i$ и является перевальным контуром.

В [143] приведена другая точка зрения на метод перевала. Сделаем в интеграле (1.1) замену переменной $S(z) = t$, тогда $z = \varphi(t)$ и

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma_1} e^{\lambda t} g(t)\, dt, \quad g(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t),$$

где γ_1 — некоторый контур в комплексной плоскости t. Функция $\varphi(t)$, вообще говоря, неоднозначна: если z_0 — точка перевала порядка n функции $S(z)$, то $S(z_0)$ — точка ветвления порядка n функции $\varphi(t)$. Это видно на примере $S(z) = z^n$, $\varphi(t) = t^{1/n}$. Пусть $t_1, t_2, \ldots$ — точки ветвления функции $\varphi(t)$ (будем для простоты считать, что S и f — полиномы, контур γ_1 бесконечен и не имеет концов). Проведем из этих точек разрезы $l_k: (-\infty + t_k, t_k)$. Контур γ_1, вообще говоря, можно продеформировать так, что интеграл $F(\lambda)$ будет равен сумме интегралов по контурам $\tilde{l}_k$, обходящим часть разрезов l_k. После этого к интегралам по $\tilde{l}_k$ применяется лемма Ватсона об интегралах по петле.

4. Дополнительные параметры. Рассмотрим интеграл Лапласа, зависящий от дополнительного параметра α:

$$F(\lambda, \alpha) = \int\limits_{\gamma} f(z, \alpha) \exp[\lambda S(z, \alpha)]\, dz. \tag{1.23}$$

Будем предполагать, что:

1°. Функции $f(z, \alpha)$, $S(z, \alpha)$ голоморфны по $(z, \alpha) \in \Omega_z \times \Omega_\alpha$, где Ω_z, Ω_α — области в комплексных плоскостях z, α соответственно.

2°. γ — конечный контур, $\gamma \subset \Omega_z$.

Теорема 1.6. *Пусть условия* 1°, 2° *выполнены*, $\alpha_0 \in \Omega_\alpha$. *Пусть* $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z, \alpha_0)$ *достигается только в конце* z_0 *контура* γ *и* $S'_z(z_0, \alpha_0) \neq 0$.

Тогда существует $\delta > 0$ *такое, что при* $\lambda \to +\infty$ *равномерно по* α, $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda, \alpha) \sim \exp[\lambda S(z_0, \alpha)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha) \lambda^{-k}. \tag{1.24}$$

Это разложение можно дифференцировать по λ *и по* α *любое число раз.*

Коэффициенты $a_k(\alpha)$ *определяются по формуле* (1.12) *и голоморфны при малых* $|\alpha - \alpha_0|$.

Пусть выполнены условия 1°, 2° и условие

3°. Функция $S(z, \alpha_0)$, $\alpha_0 \in \Omega_\alpha$, имеет простую точку перевала $z_0 \in \Omega_z$, z_0 является внутренней точкой контура γ и $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z, \alpha_0)$ достигается только в точке z_0.

Тогда при малых $|\alpha - \alpha_0|$ функция $S(z, \alpha)$ имеет ровно одну точку перевала $z_0(\alpha)$ такую, что $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} z_0(\alpha) = z_0$, и точка перевала $z_0(\alpha)$ невырождена при малых $|\alpha - \alpha_0|$.

Теорема 1.7. *Пусть условия* 1°—3° *выполнены. Тогда существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $\lambda \to +\infty$, $|\alpha - \alpha_0| \leqslant \delta$ *асимптотика интеграла* $F(\lambda, \alpha)$ *равна вкладу от точки перевала* $z_0(\alpha)$:

$$F(\lambda, \alpha) \sim \exp[\lambda S(z_0(\alpha), \alpha)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha) \lambda^{-k-1/2}. \tag{1.25}$$

Главный член асимптотики имеет вид (1.13), где z_0 следует заменить на $z_0(\alpha)$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha_0=0$, $z_0=0$, $S''_{zz}(0, 0)=-1$. Далее, контур γ можно продеформировать так, чтобы он совпадал с отрезком $\gamma_0=[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ в окрестности точки $z=0$. Тогда

$$S(z, \alpha)=b_0(\alpha)+b_1(\alpha)z+\frac{b_2(\alpha)}{2}z^2+\ldots$$

при малых $|z|$, $|\alpha|$, где функции $b_j(\alpha)$ голоморфны при малых $|\alpha|$, и $b_0(0)=b_1(0)=0$, $b_2(0)=-1$. Имеем при малых $|\alpha|$

$$z_0(\alpha)=b_1(\alpha)[1+O(\alpha)],\quad S(z_0(\alpha), \alpha)=O(\alpha),$$

$$S(z, \alpha)-S(z_0(\alpha), \alpha)=\frac{1}{2}(z-z_0(\alpha))^2h(z, \alpha),$$

где функция $h(z, \alpha)$ голоморфна по совокупности переменных в точке $(0, 0)$, $h(0, 0)=-1$. Сделаем замену переменной

$$\zeta=(z-z_0(\alpha))\sqrt{-h(z, \alpha)},\tag{1.26}$$

где $\sqrt{-h(0, 0)}=1$, тогда

$$S(z, \alpha)-S(z_0(\alpha), \alpha)=-\frac{\zeta^2}{2}.$$

Функция $\zeta=\zeta(z, \alpha)$ голоморфна по совокупности переменных в точке $(0, 0)$, $\zeta'_z(0, 0)=1$. По теореме о неявной функции уравнение (1.26) относительно неизвестной z имеет решение $z=\psi(\zeta, \alpha)$, голоморфное в точке $(0, 0)$ и такое, что $\psi(0, 0)=0$, $\psi'_\zeta(0, 0)=1$. Пусть ε_1, $\delta_1>0$ достаточно малы; тогда функция $z=\psi(\zeta, \alpha)$ при каждом фиксированном α однолистно отображает круг $|\zeta|<\varepsilon$ на окрестность V_α точки $z=0$, причем V_α содержит круг $|z|\leqslant\varepsilon_2$ при всех α, $|\alpha|\leqslant\delta_1$. Можно считать, что $\varepsilon_2=\varepsilon_0$. Представим интеграл (1.22) в виде $F_0(\lambda, \alpha)+F_1(\lambda, \alpha)$, где F_0 — интеграл по отрезку γ_0. По непрерывности $\operatorname{Re} S(z, \alpha)\leqslant -c<0$ при $z\in\gamma\setminus\gamma_0$, $|\alpha|\leqslant\delta_2$, если $\delta_2>0$ достаточно мало, так что $F_2(\lambda, \alpha)=O(\exp(-c\lambda))$ $(\lambda\to+\infty)$; можно считать, что $\delta_2=\delta_1$. После замены переменной $z=\psi(\zeta,\alpha)$ интеграл F_0 примет вид

$$F_0(\lambda,\alpha)=\\ =\exp[\lambda S(z_0(\alpha),\alpha)]\int\limits_{l_\alpha}\exp\left(-\frac{\lambda\zeta^2}{2}\right)f(\psi(\zeta,\alpha),\alpha)\,\psi'_\zeta(\zeta,\alpha)\,d\zeta, \tag{1.27}$$

где l_α — образ отрезка γ_0. По построению l_α лежит в круге $|\zeta|\leqslant\varepsilon_1$ и задается уравнением $\zeta=\rho+O(\alpha)$, $-\varepsilon_0\leqslant\leqslant\rho\leqslant\varepsilon_0$. Пусть $\zeta_1(\alpha)$, $\zeta_2(\alpha)$ — концы l_α и $l_\alpha^{(1)}$, $l_\alpha^{(2)}$ — дуги окружности $|\zeta|=\varepsilon_1$, соединяющие точки $-\varepsilon_1$, $\zeta_1(\alpha)$ и ε_1, $\zeta_2(\alpha)$ соответственно. Тогда интеграл (1.27) равен сумме интегралов по отрезку $l_0'=[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]$ и по дугам $l_\alpha^{(1)}$, $l_\alpha^{(2)}$. На этих дугах $\operatorname{Re}(-\zeta^2/2)=-\varepsilon_1^2/2+O(|\alpha|)$, так что интегралы вида (1.25) по этим дугам имеют порядок $O(\exp(-c\lambda))$, $c>0$, если $|\alpha|\leqslant\delta$ и $\delta>0$ достаточно мало. Применяя к интегралу по отрезку l_0' теорему 2.2.1, получаем утверждение данной теоремы.

5. Лемма Ватсона для интегралов по петле. Метод Дарбу. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{(0+)}e^{\lambda z}f(z)\,dz. \tag{1.28}$$

Сделаем разрез вдоль луча $(-\infty,0)$. Контур интегрирования l состоит из луча $(-\infty,r)$, идущего по нижнему берегу разреза, окружности $|z|=r$ и луча $(r,-\infty)$, идущего по верхнему берегу разреза. Функция $f(z)$ аналитична, но не обязательно однозначна, в кольце $0<|z|<<R$, $R>r$, непрерывна на l и интеграл (1.28) сходится абсолютно при $\lambda\geqslant\lambda_0>0$. Тогда справедлива

Теорема 1.8. *Пусть при $z\to0$, $|\arg z|\leqslant\pi$, справедливо асимптотическое разложение*

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^{(k+\alpha-\beta)/\beta},$$

где $\beta>0$, α — вещественное или комплексное число. Тогда при $\lambda\to+\infty$, $|\arg\lambda|\leqslant\pi/2-\varepsilon<\pi/2$, имеем

$$F(\lambda)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left[\Gamma\left(\frac{\beta-\alpha-k}{\beta}\right)\right]^{-1}\frac{a_k}{\lambda^{(k+\alpha)/\beta}}.$$

Для степеней λ выбираются главные значения.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$, так что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$. Обозначим

$$M_f(r) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi\right]^{1/2}.$$

Если $\lim_{r\to 1} M_f(r) < \infty$, то f принадлежит H^2 (класс Харди). Пусть функция $g(z)$ также голоморфна в круге $|z| < 1$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ и $f^{(m)}(z) - g^{(m)}(z) \in H^2$.

Теорема 1.9 (метод Дарбу). *При* $n \to \infty$

$$f_n = g_n + o(n^{-m}).$$

Пусть $f(z)$ имеет алгебраические особенности: в окрестности точки $z = \alpha_r$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kr} \left(1 - \frac{z}{\alpha_r}\right)^{\beta_r + k\gamma_r},$$

где α_r комплексны и различны, $\operatorname{Re}\gamma_r > 0$, $k = 1, \ldots, K$, $r = 1, \ldots, R$.

Теорема 1.10. *Пусть*

$$m < 1/2 + \min_r ((K+1)\operatorname{Re}\gamma_r + \operatorname{Re}\beta_r).$$

Тогда при всех таких m *и при* $n \to \infty$

$$f_n = \sum_{k=0}^{K} \sum_{r=1}^{R} a_{kr} \binom{\beta_r + k\gamma_r}{n} (-\alpha_r)^n + o(n^{-m}).$$

С помощью этой формулы получены асимптотические разложения полиномов Лежандра, Якоби, обобщенных полиномов Бернулли и многих других специальных полиномов.

Пусть $f(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $|x| < 1$. Здесь p_n — это число способов, которыми n может быть представлено в виде суммы положительных чисел, не превосходящих n, $p_0 = 1$. Тогда

$$p_n = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{kn} \sqrt{k} \frac{d}{dk} \left[N^{-1} \operatorname{sh}(CN/k)\right],$$

$$C = \pi\sqrt{2/3}, \quad N = (n - 1/4)^{1/2},$$

$$A_{kn} = \sum_{\substack{h \bmod k \\ (h,k)=1}} \omega_{hk} e^{-2\pi i nh},$$

где ω_{hk} — корень 24-й степени из единицы и (h, k) — наибольший общий делитель чисел h, k. Ряд для p_n — асимптотический по n при $n \to \infty$.

§ 2. Теоремы существования

1. Глобальная структура линий уровня гармонических функций. Пусть функция $S(z)$ голоморфна в области D и отлична от тождественной постоянной. Через $\{\operatorname{Re} S = c\}$ обозначим *множество уровня* $\operatorname{Re} S(z) = c$, $z \in D$. Аналогично вводятся обозначения $\{\operatorname{Im} S = c\}$, $\{\operatorname{Re} S < c\}$ и т. д. Множество $\{\operatorname{Im} S = c\}$ (соответственно $\{\operatorname{Re} S = c\}$) состоит из конечного или счетного числа связных компонент, которые назовем *линиями уровня* функции $\operatorname{Im} S(z)$ (соответственно $\operatorname{Re} S(z)$).

Лемма 2.1. *Пусть l_c — линия уровня $\{\operatorname{Re} S = c\}$, не содержащая точек перевала. Тогда*:

1°. *Функция $w = S(z)$ взаимно однозначно отображает l_c на горизонтальный интервал вида*

$$w = c + iv, \quad -\infty \leqslant a < v < b \leqslant +\infty.$$

2°. *l_c — простая аналитическая кривая, диффеоморфная интервалу.*

Покажем, что функция $\operatorname{Im} S(z)$ строго монотонна вдоль l_c. Пусть функция $\operatorname{Im} S(z)$ имеет экстремум в точке $z_0 \in l_c$. В силу леммы 1.1 дуга l_c, проходящая через z_0, является аналитической кривой; пусть $z = \varphi(\tau)$, $-\delta \leqslant \tau \leqslant \delta$, — ее уравнение, где τ — длина дуги, $\varphi(0) = z_0$. По условию $\frac{d}{d\tau} \operatorname{Re} S(\varphi(\tau)) \equiv 0$, $|\tau| \leqslant \delta$. По предположению $\frac{d}{d\tau} \operatorname{Im} S(\varphi(\tau)) = 0$ при $\tau = 0$. Следовательно, $S'(z_0) = 0$, т. е. z_0 — точка перевала, что противоречит условию. Из монотонности $\operatorname{Im} S$ следует 1°, а из 1° следует 2°.

Линию уровня $\{\operatorname{Re} S = c\}$ (или $\{\operatorname{Im} S = c\}$), содержащую точку перевала, будем называть *критической линией уровня*.

Следствие 2.1. *Критическая линия уровня* $\{\operatorname{Re} S = c\}$ *состоит из конечного или счетного числа линий, обладающих свойствами* 1°, 2°.

Далее будем рассматривать множества уровня $\{\operatorname{Re} S = c\}$, $\{\operatorname{Im} S = c\}$ мероморфной функции $S(z)$. Структура линий уровня $\{\operatorname{Re} S = c\}$ в окрестности точки перевала исследована в лемме 1.3. Рассмотрим окрестность полюса.

Пример 2.1. $S = a_0 z^n$, $n \geqslant 1$ — целое, $a_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}$, $\rho_0 = |a_0| > 0$. Полагая $z = re^{i\varphi}$, получаем уравнение множества $M_c = \{\operatorname{Im} S = c\}$:

$$r^n \sin(n\varphi + \psi_0) = c/\rho_0.$$

Множество M_0 состоит из $2n$ лучей $\arg z = \varphi_k = (k\pi - \psi_0)/n$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, которые разбивают плоскость на $2n$ секторов S_k: $\varphi_k < \arg z < \varphi_{k+1}$ $(S_{2n} = S_0)$. При $c \neq 0$ множество M_c состоит из $2n$ линий $l_{c,k}$, которые являются кривыми типа гиперболы: $l_{c,k}$ лежит внутри S_k и имеет своими асимптотами лучи, ограничивающие S_k.

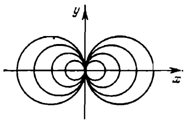

Рис. 5

Функция $w = S(z)$ конформно отображает каждый сектор S_k на полуплоскость вида $\operatorname{Im} w > 0$ или $\operatorname{Im} w < 0$, а каждую линию $l_{c,k}$ при $c \neq 0$ — на горизонтальный луч

$$\operatorname{Im} w = c, \quad -\infty < \operatorname{Re} w < \infty.$$

Пример 2.2. $S = a_0 z^{-n}$, $n \geqslant 1$ — целое, $a_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}$. Уравнение $M_c = \{\operatorname{Im} S = c\}$:

$$r^{-n} \sin(\psi_0 - n\varphi) = c/\rho_0.$$

Множество M_0 состоит из $2n$ лучей $\arg z = \varphi_k = (\psi_0 + k\pi)/n$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, которые разбивают плоскость на $2n$ секторов S_k. При $c \neq 0$ множество M_c состоит из $2n$ кривых $l_{c,k}$, которые имеют вид лепестков (см. рис. 5, $S = iz^{-1}$) с вершиной в точке $z = 0$. Каждый лепесток $l_{c,k}$ лежит внутри сектора S_k и касается в точке $z = 0$ лучей, ограничивающих сектор. Функция $w = S(z)$ конформно отображает S_k, $l_{c,k}$ на те же множества, что и в примере 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть точка z_0 является полюсом функции $S(z)$ порядка n. Тогда*:

1°. *Если $z_0 \neq \infty$, то существуют окрестности U, V точек $z = z_0$, $w = 0$ и функция $\psi(w)$, голоморфная при $w \in V$, такие, что*

1) $S(\varphi(w)) = a_0 w^{-n}$, *где* $a_0 = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n S(z)$;

2) *отображение* ψ: $V \to U$ *однолистно*, $\psi'(0) = 1$.

2°. *Если $z = \infty$, то существуют окрестности U, V точек $z = \infty$, $w = \infty$ и функция $\psi(w)$ такие, что*

1) $S(\psi(w)) = a_0 w^n$, *где* $a_0 = \lim\limits_{z \to \infty} z^{-n} S(z)$;

2) ψ: $V \to U$, *отображение однолистно*;

3) $\psi(w) = w\varphi(w)$, *функция $\varphi(w)$ голоморфна в точке $w = \infty$ и $\varphi(\infty) = 1$.*

В случае 1° имеем $(S(z))^{-1} = a_0^{-1}(z - z_0)^n h(z)$, функция $h(z)$ голоморфна в точке z_0 и $h(z_0) = 1$.

Из леммы 2.3.2 следует существование искомой функции $\psi(w)$. Случай 2° сводится к этому заменой $z = 1/\zeta$.

Таким образом, если z_0 — полюс функции $S(z)$, то в достаточно малой окрестности z_0 линии уровня $\operatorname{Im} S = c$ устроены так же, как и линии уровня эталонной функции $a_0(z - z_0)^{-n}$, $z_0 \neq \infty$, или $a_0 z^n$, $z = \infty$.

В частности, если $S(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$, то асимптотами линий l_c являются лучи

$$z = -\frac{a_1}{na_0} + re^{i\varphi_k},$$

$$0 < r < \infty, \quad \varphi_k = (k\pi - \arg a_0)/n.$$

Пусть $S(z)$ — мероморфная функция, $\bar{\mathrm{C}}(z)$ — расширенная комплексная плоскость (риманова сфера), $\bar{\mathrm{C}}_S(z)$ — риманова сфера, из которой удалены особые точки функции $S(z)$. Множества уровня функций $\operatorname{Re} S(z)$, $\operatorname{Im} S(z)$ рассматриваются в области $\bar{\mathrm{C}}_S(z)$; концами линий уровня $\{\operatorname{Re} S = c\}$, $\{\operatorname{Im} S = c\}$ могут быть только особые точки функции $S(z)$. Пусть l_c — линия уровня $\{\operatorname{Re} S = c\}$, z_0 — один из ее концов. В силу леммы 2.1 существует предел

$$\lim_{z \to z_0,\, z \in l_c} \operatorname{Im} S(z) = a. \tag{2.1}$$

Если z_0 — полюс, то $a = \pm\infty$ в силу леммы 2.2. Аналогично для линии уровня l_c': $\{\operatorname{Im} S = c\}$ существует предел

$$\lim_{z \to z_0, z \in l_c'} \operatorname{Re} S(z) = b, \tag{2.1'}$$

причем $b = \pm\infty$, если z_0 — полюс. Следовательно, если $a \neq \infty$ (или $b \neq \infty$), то $z_0 \neq \infty$ и является существенно особой точкой функции $S(z)$. Число $c + ia$ (соответственно $b + ic$) является *асимптотическим значением* функции $S(z)$.

Пример 2.3. Пусть $S = e^z$, l_0 — вещественная ось. Тогда $\operatorname{Im} S(z) = 0$ на l_0, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Re}(e^x) = 0$.

Если предел (2.1) или (2.1′) конечен, то естественно называть точку $z = \infty$ *особой точкой перевала* функции $S(z)$. Заметим, что если $S(z)$ — трансцендентная мероморфная функция, не имеющая асимптотических значений, то точка $z = \infty$ не является точкой перевала.

Определение 2.1. Линия уровня l_c: $\{\operatorname{Re} S = c\}$ (соответственно l_c': $\{\operatorname{Im} S = c\}$) называется *критической*, если она содержит точку перевала $z_0 \neq \infty$ или если одним из ее концов является точка $z = \infty$, и предел (2.1) (соответственно (2.1′)) конечен.

Из определения 2.1 и проведенных выше рассуждений вытекает

Лемма 2.3. *Пусть l_c, l_c' — некритические линии уровня $\{\operatorname{Re} S = c\}$, $\{\operatorname{Im} S = c\}$ соответственно. Тогда функция $w = S(z)$ взаимно однозначно отображает l_c (соответственно l_c') на прямую $\operatorname{Re} w = c$ (соответственно $\operatorname{Im} w = c$).*

2. Структура множества $a < \operatorname{Re} S < b$ для мероморфных функций $S(z)$.

Теорема 2.1. *Пусть $M_{a,b}$ — максимальная связная компонента множества уровня $\{a < \operatorname{Re} S < b\}$, не содержащая критических линий уровня $\{\operatorname{Re} S = c\}$, $a < c < b$. Пусть хотя бы одно из чисел a, b конечно.*

Тогда функция $w = S(z)$ взаимно однозначно отображает $M_{a,b}$ на полосу $a < \operatorname{Re} S < b$.

Замечание 2.1. Если $a = -\infty$, $b < +\infty$ (или $a > -\infty$, $b = +\infty$), то образ множества $M_{a,b}$ есть полуплоскость.

Множество $M_{a,b}$ вместе с каждой точкой z_0 содержит всю линию уровня $l(z_0)$: $\{\operatorname{Re} S = \operatorname{Re} S(z_0)\}$, проходящую через точку z_0. По лемме 2.3 функция $w = S(z)$ взаимно однозначно отображает линию $l(z_0)$ на вертикальную прямую $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} S(z_0)$. Таким образом, множество $M_{a,b}$ расслаивается на линии уровня $l(z_0)$, а его образ — на вертикальные прямые $\operatorname{Re} w = c$, $a < c < b$.

Пусть $S(z)$ — рациональная функция, $c_0 = \min\limits_j \operatorname{Re} S(z_j)$, где минимум берется по всем точкам перевала функции $S(z)$. Тогда при $c \leqslant c_0$ множество уровня $\{\operatorname{Re} S(z) < c\}$ состоит из конечного числа связных компонент, каждая из которых взаимно однозначно отображается функцией $S(z)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} S < c$.

Теорема 2.2. *Пусть $S(z)$ — мероморфная функция, не являющаяся линейной функцией. Тогда критические линии уровня функции $\operatorname{Re} S(z)$ разбивают комплексную плоскость на области, каждая из которых взаимно однозначно отображается функцией $S(z)$ на область вида $a < \operatorname{Re} S < b$.*

При этом одно (и только одно) из чисел a, b может быть бесконечным.

Будем называть область $D \subset \overline{\mathbf{C}}_a(z)$, которая ограничена критическими линиями уровня функции $\operatorname{Re} S(z)$, *областью типа полосы* (*полуплоскости*), если функция $w = S(z)$ взаимно однозначно отображает D на полосу вида $a < \operatorname{Re} w < b$ (на полуплоскость вида $\operatorname{Re} w > a$ или $\operatorname{Re} w < a$).

Из теоремы 2.2 следует, что критические линии уровня функции $\operatorname{Re} S(z)$ разбивают комплексную плоскость на области типа полосы и типа полуплоскости. Заменяя $S(z)$ на $iS(z)$, получаем, что теоремы 2.1, 2.2 остаются в силе, если вместо линий $\{\operatorname{Re} S = c\}$ взять линии $\{\operatorname{Im} S = c\}$.

Рассмотрим примеры. Пусть $S(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$ — полином. Если l_c — некритическая линия $\{\operatorname{Re} S = c\}$, то она имеет две различные асимптоты. Если l_c — критическая линия с началом в точке перевала и концом в бесконечности, то она имеет асимптоту, параллельную одному из лучей $\operatorname{Re}(a_0 z^n) = 0$. Граница области типа полуплоскости (полосы) состоит из одной (двух) связных компонент. Аналогично устроены линии $\{\operatorname{Im} S = c\}$ и области, ограниченные критическими линиями.

Пример 2.4. $S(z) = i(z^3/3 + z)$. Точки перевала $z_{1,2} = \pm i$ — обе простые, $S(z_{1,2}) = \mp 2/3$, так что $\operatorname{Im} S(z_{1,2}) = 0$. Уравнение линии $\operatorname{Im} S(z) = 0$ имеет вид $x(x^2 - 3y^2 + 3) = 0$, так что эта линия состоит из оси Oy и гиперболы. Критические линии разбивают плоскость на 6 областей типа полуплоскости.

Линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку перевала $z=i$, есть ветвь гиперболы $x^2-3y^2+3=0$, $y>0$.

Пусть $S(z)$ — мероморфная функция, $z_0\neq\infty$ — полюс порядка n, $S(z)=a_0(z-z_0)^{-n}+\ldots$ Если z_0 — один из концов l_c, то l_c касается в точке z_0 одного из лучей $\operatorname{Re}[a_0(z-z_0)^{-n}]=0$. Если оба конца l_c совпадают с z_0, то l_c в точке z_0 касается двух различных лучей, указанных выше.

Пример 2.5. $S(z)=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$. Точки перевала $z_{1,2}=\pm i$ — обе простые, $S(\pm i)=\pm i$, так что $\operatorname{Re}S(\pm i)=0$, $\operatorname{Im}S(\pm i)=\pm 1$. Уравнение линии $\operatorname{Re}S(z)=0$ имеет вид $x(x^2+y^2-1)=0$, так что она состоит из оси Oy и единичной окружности $|z|=1$.

Построим линию $\operatorname{Im}S(z)=1$, проходящую через точку перевала $z_1=i$. В окрестности простой точки перевала эта линия состоит из четырех кривых, две из которых идут внутрь окружности $|z|=1$, две — наружу. Линии, направленные внутрь, не могут выйти из круга $|z|<1$, так как $\operatorname{Re}S(z)=0$ на окружности $|z|=1$ и $\operatorname{Re}S(z)$ — строго монотонная функция вдоль этих кривых. Следовательно, обе эти линии оканчиваются в полюсе $z=0$ и касаются лучей $\operatorname{Im}1/z=0$, т. е. касаются вещественной оси. Аналогично линии, выходящие из круга $|z|<1$, целиком лежат вне круга и оканчиваются в точке $z=\infty$; их асимптотами являются полуоси $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$. Так как $S(\bar z)=\overline{S(z)}$, то линии уровня $\operatorname{Im}S(z)=\pm 1$ симметричны относительно вещественной оси. Эти линии разбивают плоскость на 4 области типа полуплоскости и 2 области типа полосы.

Пример 2.6. $S(z)=e^z$. Эта функция не имеет конечных точек перевала. Линия $\operatorname{Im}S(z)=c$ имеет уравнение $e^x\sin y=c$. При $c=0$ получаем линии $l_{0,k}$: $y=k\pi$, $-\infty<x<\infty$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Эти линии — критические, так как $\operatorname{Re}e^z=e^x\cos y\to 0$ при $z\in l_{0,k}$, $\operatorname{Re}z\to-\infty$. Следовательно, $z=\infty$ — точка перевала; естественно считать, что кратность ее равна бесконечности, так как через нее проходит бесконечно много критических линий. Линии $l_{0,k}$ разбивают плоскость на области типа полуплоскости.

Ряд примеров будет рассмотрен в следующих параграфах.

3. Теорема существования. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda)=\int_{\gamma}\exp\left[\lambda S(z)\right]dz, \tag{2.2}$$

где $S(z)\neq\mathrm{const}$ — мероморфная функция, γ — простая кусочногладкая кривая, функция $S(z)$ голоморфна во всех внутренних точках кривой γ. Будем предполагать, что

$$\int_{\gamma}\left|\exp\left[\lambda S(z)\right]\right|\left|dz\right|<\infty,\quad \lambda>0, \tag{2.3}$$

и что если конец кривой γ является полюсом функции $S(z)$, то в достаточно малой окрестности этого полюса (на римановой сфере) γ является интервалом или лучом.

Теорема 2.3. *Пусть $S(z)$ — рациональная функция. Тогда либо существует перевальный контур γ' такой, что*

$$F(\lambda)=\int_{\gamma'}\exp\left[\lambda S(z)\right]dz, \tag{2.4}$$

либо $F(\lambda)\equiv 0$ при $\lambda>0$.

Напомним, что *перевальным контуром* называется контур, удовлетворяющий условиям теоремы 1.4, и что асимптотика интеграла по перевальному контуру легко вычисляется. Следовательно, имеет место

Следствие 2.2. *В условиях теоремы 2.2 либо $F(\lambda)=0$ при $\lambda>0$, либо асимптотика $F(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$ равна сумме вкладов от точек перевала, лежащих на γ', и концов контура γ', в которых достигается $\max\limits_{z\in\gamma'}\operatorname{Re}S(z)$.*

Таким образом, асимптотику интеграла (2.2), где $S(z)$ — рациональная функция, всегда можно вычислить с помощью метода перевала.

Рассмотрим интеграл (1.1), где $S(z)$ — рациональная функция, и условие A_1 из § 1 выполнено. Тогда либо $F(\lambda)\equiv 0$ при $\lambda>0$, либо

$$F(\lambda)=\int_{\gamma'}f(z)\exp\left[\lambda S(z)\right]dz+2\pi i\sum\operatorname*{res}_{z=z_j}\left(f(z)\exp\left[\lambda S(z)\right]\right), \tag{2.5}$$

где сумма берется по всем вычетам функции $f(z)$, которые лежат в области, ограниченной контурами γ и γ'. Так как асимптотика интеграла по γ' вычисляется (см. теорему 1.4), то асимптотика интеграла (1.1) в случае, когда f, S — рациональные функции, также всегда вычисляется методом перевала.

Рассмотрим вначале случай, когда функция $S(z)$ голоморфна на концах γ. Введем обозначения: $z_1, \ldots, z_n$ — все точки перевала функции $S(z)$, $c_j = \operatorname{Re} S(z_j)$, и пусть $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n$; $w(\mathfrak{M})$ — образ множества $\mathfrak{M} \subset \bar{C}_s(z)$ (это риманова сфера с выколотыми полюсами функции $S(z)$) при отображении $w = S(z)$, $w^{-1}(\mathfrak{M})$ — прообраз множества $\mathfrak{M} \subset \bar{C}(w)$, $c^* = \max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$, $c^{**} = \min\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$. Деформация γ в γ' проводится в несколько этапов. Пусть $M_{a,b}$ — одна из максимальных связных компонент множества $\{a < \operatorname{Re} S < b\}$, не содержащая точек перевала. Тогда по теореме 2.1 функция $w = S(z)$ взаимно однозначно отображает $M_{a,b}$ на полосу (или полуплоскость) $a < \operatorname{Re} w < b$. Поэтому все деформации удобнее проводить в плоскости w.

1°. Пусть $(\gamma \backslash \partial\gamma) \subset M_{a,b}$, и пусть $c^* < b$. Так как $w(M_{a,b})$ — полоса или полуплоскость, то кривую $w(\gamma)$ можно продеформировать внутри $w(M_{a,b})$ в отрезок $\tilde{\gamma}$, соединяющий концы этой кривой. Контур $\gamma' = w^{-1}(\tilde{\gamma})$ эквивалентен контуру γ и является перевальным.

2°. Пусть $(\gamma \backslash \partial\gamma) \subset M_{a,b}$ и $\operatorname{Re} S(z^*) = b$, $\operatorname{Re} S(z^{**}) < b$, где z^*, z^{**} — концы γ. Тогда кривую $w(\gamma)$ можно внутри $w(M_{a,b})$ продеформировать в ломаную $\tilde{\gamma}$, состоящую из двух звеньев. Именно, проведем из точек $w^* = S(z^*)$, $w^{**} = S(z^{**})$ прямые $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} w^*$, $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} w^{**}$; они пересекутся в точке w^0. Составим $\tilde{\gamma}$ из отрезков $[w^*, w^0]$ и $[w^{**}, w^*]$, ориентация которых согласована с ориентацией $w(\gamma)$. Контур $\gamma' = w^{-1}(\tilde{\gamma})$ эквивалентен контуру γ и является перевальным.

Пусть для определенности высоты точек перевала $c_1, \ldots, c_n$ различны: $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$; общий случай исследуется точно так же. Положим $c_0 = -\infty$, $c_{n+1} = +\infty$ для удобства. Пусть $c_j < c^* \leqslant c_{j+1}$ $(j < n)$. Покажем, что тогда контур γ можно продеформировать либо в перевальный контур γ_j', либо в такой контур γ^*, что $\max\limits_{z \in \gamma^*} \operatorname{Re} S(z) = c_j$. После этого доказательство завершается индукцией по j.

Множество $\{c_j < \operatorname{Re} S < c_{j+1}\}$ не содержит точек перевала и в силу теоремы 2.1 состоит из конечного числа связных компонент $D_{j,p}$, каждая из которых взаимно однозначно отображается функцией $w = S(z)$ на полосу $c_j < \operatorname{Re} w < c_{j+1}$ (или на полуплоскость, если $j = 0$ или

$j=n$). Положим $\gamma_{j,p}=\gamma\cap(D_{j,p}\cup\partial D_{j,p})$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma_{j,p}$ состоит из конечного числа кривых $\gamma_{j,p,q}$. Применим к каждой из этих кривых деформацию 1° или 2°; пусть $\gamma'_{j,p,q}$ — полученные кривые, $\gamma'_{j,p}=\bigcup\limits_q \gamma'_{j,p,q}$ и γ^* — контур, полученный из γ заменой $\gamma_{j,p}$ на $\gamma'_{j,p}$. Если контуры γ'_{j,p_1}, γ'_{j,p_2} при некоторых $p_1\neq p_2$ проходят через точку перевала z_{j+1} (она является концом для обоих контуров) и их ориентации противоположны, то контур $\gamma'_{j,p_1}\cup\gamma'_{j,p_2}$ заменим эквивалентным контуром, уже не содержащим точки z_{j+1}. К полученному контуру применим деформацию 1°. Будем считать, что при построении γ^* такие деформации уже проделаны. Имеются следующие возможности:

A. $$\max_{z\in\gamma^*}\operatorname{Re}S(z)>c_j.$$

Тогда γ^* — перевальный контур. Действительно, по построению деформаций 1°, 2°, указанный максимум обязательно достигается либо на одном из концов контура γ^*, либо в точке перевала z_{j+1}; в последнем случае выполнено условие A_0 теоремы 1.1.

B. $$\max_{z\in\gamma^*}\operatorname{Re}S(z)=c_j.$$

Тем самым теорема доказана в случае, когда функция $S(z)$ голоморфна на концах контура γ. Пусть один из концов контура γ — полюс функции $S(z)$. Положим

$$\gamma_1=\gamma\cap\{\operatorname{Re}S<\min(c_1,c^{**})-\varepsilon\},\quad \varepsilon>0.$$

Тогда контур γ_1 можно продеформировать в перевальный контур γ'_1, контур $\gamma'=(\gamma\setminus\gamma_1)\cup\gamma'_1$ является перевальным. Пусть оба конца контура γ являются полюсами функции $S(z)$. Повторяя ту же конструкцию, что и выше, получаем контур γ', эквивалентный γ, который либо является перевальным, либо $\max\limits_{z\in\gamma'}\operatorname{Re}S(z)<c_1-\varepsilon$. Так как множество $\{\operatorname{Re}S<c_1-\varepsilon\}$ состоит из конечного числа связных компонент, то γ лежит в одной из них, скажем, D_1. Тогда ∂D_1 — это линия уровня $\{\operatorname{Re}S=c_1-\varepsilon\}$ с началом и концом в некотором полюсе z_0 функции $S(z)$, и D_1 — односвязная область. Пусть для простоты $z_0\neq\infty$. Тогда из условий на контур γ, наложенных в теореме,

следует, что интеграл по γ' равен нулю. Теорема доказана.

Точно так же доказывается следующая

Теорема 2.4. *Пусть $S(z)$ — мероморфная функция, удовлетворяющая условиям:*

1°. *$S(z)$ не имеет асимптотических значений.*

2°. *На каждом конечном отрезке $a \leqslant c \leqslant b$ имеется конечное число критических значений функции $\operatorname{Re} S(z)$.*

Тогда, если функция $S(z)$ голоморфна в окрестности конечной кривой γ, существует перевальный контур γ', эквивалентный γ.

4. Интегралы по кривым на римановых поверхностях. В [64] рассмотрены интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_C e^{\lambda h}\omega, \tag{2.6}$$

где $\lambda > 0$ — большой параметр, h — мероморфная функция на римановой поверхности R рода $g > 1$, ω — абелев дифференциал на R, имеющий полюсы в тех же точках, что и h. Контур C — допустимый, т. е. либо замкнутый и не проходящий через полюсы h, либо входящий в полюсы под такими углами, что интеграл сходится. Пусть $P = \{P_j\}$ — множество всех полюсов h, $N = \{N_j\}$ — множество точек перевала функции h, т. е. нулей дифференциала dh. Точка перевала называется *простой*, если dh имеет простой нуль в этой точке.

Два допустимых пути C, C' называются эквивалентными, если

$$\int_C e^{\lambda h}\omega = \int_{C'} e^{\lambda h}\omega$$

для любого $\lambda > 0$ и для любого абелева дифференциала ω, имеющего полюсы в тех же точках, что и h.

Локальная структура линий уровня $\operatorname{Re} h(z) = c$, $\operatorname{Im} h(z) = c$ такая же, как и на комплексной плоскости (см. леммы 1.1—1.3). В частности, через простую точку N_j перевала проходит одна линия наискорейшего спуска; ее максимальную связную компоненту, лежащую в множестве $R \backslash P$, назовем линией перевала и обозначим C_j.

Теорема 2.4. *Пусть все точки перевала простые и $\operatorname{Im} h(N_k) \neq \operatorname{Im} h(N_j)$, если $N_j = N_k$. Тогда линии перевала*

C_k, $k=1, \ldots, l$, образуют базу в группе допустимых путей, т. е. любой допустимый путь эквивалентен пути $\sum_{k=1}^{l} r_k C_k$, где r_k — целые числа.

Вычисление асимптотики интеграла по контуру C_k проводится стандартными методами. Именно, если z — локальные координаты в окрестности точки N_k, то интеграл по малой дуге пути C_k, содержащий точку N_k, имеет вид

$$\int_{z_1}^{z_2} e^{\lambda h(z)} P(z)\, dz.$$

Из формулы (1.13′) следует, что при $\lambda \to +\infty$

$$\int_{C_k} e^{\lambda h}\omega = \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda h''(N_k)}}\, e^{\lambda h(N_k)} \left[P(N_k) + O(\lambda^{-1})\right].$$

В [64] исследован также случай, когда h, ω непрерывно зависят от вещественных параметров $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \varphi$, и показано, что точки и линии перевала непрерывно зависят от φ.

Пример 2.7. Рассмотрим интеграл

$$\int_C e^{x\xi + y\eta} (p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy),$$

где контур C задан уравнением $x^4 + y^4 = 1$, p и q — многочлены, ξ, η — комплексные параметры. Будем рассматривать контур C на римановой поверхности алгебраической функции $y = \sqrt[4]{1 - x^4}$. Положим $\xi = |\xi| e^{i\alpha}$, $\eta = |\eta| e^{i\beta}$, $\rho = |\xi|/|\eta|$ и пусть $\lambda = |\eta|$. Тогда получим интеграл вида (2.6)

$$F(\lambda, \alpha, \beta) = \int_C e^{\lambda h}\omega, \quad h = |\eta|^{-1}(x\xi + y\eta).$$

Пусть $-\pi < \alpha$, $\beta \leqslant \pi$, $\rho \in (0, 1)$, так что $\varphi = (\alpha, \beta, \rho) \in \Phi$, где Φ — область $-\pi < \alpha$, $\beta \leqslant \pi$, $0 < \rho < 1$. Нули dh находятся из системы

$$\xi + 4x^3\lambda_0 = 0, \quad \eta + 4y^3\lambda_0 = 0, \quad x^4 + y^4 = 1$$

(с помощью функции Лагранжа) и имеют вид

$$N_{km} = (x_{km}, y_{km}), \quad k = 0, 1, 2; \quad m = 0, 1, 2, 3,$$

$$x_{km} = \xi^{1/3} e^{i\pi m/2} H_k^{-1},$$

$$y_{km} = \eta^{1/4} e^{i\pi m/2} H_k^{-1},$$

$$H_k = (\xi^{4/3} e^{i2\pi k/3} + \eta^{4/3})^{3/4}.$$

В области Φ все точки перевала простые; слияние их происходит только на гранях $\rho = 0$, $\rho = 1$. Значение функции h в точке N_{km} обозначим H_{km}; имеем

$$H_{km} = \frac{(\rho e^{i4\alpha/3} + e^{i4\beta/3})\, e^{i\pi m/2}}{(\rho e^{i4\alpha/3 - i2\pi k/3} + e^{i4\beta/3})^{1/4}}.$$

Пусть $\varphi_0 = (0, 0, \rho_0)$, тогда ξ, η вещественны. Найдем коэффициенты r_{km} разложения C по базису. Запишем интеграл в виде

$$\int\limits_C e^{\lambda(px+y)} (p\,dx + q\,dy).$$

Контур C проходит через точки перевала N_{00} и N_{02} (они вещественны). В данном случае $r_{00} = 1$, $r_{02} = \pm 1$, все остальные $r_{km} = 0$. Максимум $\operatorname{Re} h$ на C достигается в точке N_{00}. Запишем уравнение C в виде

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad r(t) = (\cos^4 t + \sin^4 t)^{1/4}.$$

В точке N_{00}

$$\cos t_0 = \xi^{1/3} (\xi^{2/3} + \eta^{2/3})^{-1/2}, \quad \sin t_0 = \eta^{1/3} (\xi^{2/3} + \eta^{2/3})^{-1/2}.$$

Асимптотика интеграла имеет вид

$$F(\lambda, 0, 0) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \exp\left[(\xi^{4/3} + \eta^{4/3})^{3/4}\right] \xi^{-1/3} \eta^{-1/3} \times \\ \times (\xi^{4/3} + \eta^{4/3}) \left[P(\xi, \eta) + Q(\xi, \eta)\right].$$

Здесь P, Q получаются в результате подстановки x_{00}, y_{00}, $\cos t_0$, $\sin t_0$ в выражения

$$p(x, y)(-r\sin t + r'\cos t), \quad q(x, y)(r\cos t + r'\sin t).$$

Эта асимптотика сохраняется в области, содержащей точку φ_0, в которой $\operatorname{Re} H_{00} > \operatorname{Re} H_{02}$. В области, где $\operatorname{Re} H_{00} < \operatorname{Re} H_{02}$, асимптотика интеграла равна вкладу от точки H_{02}, так как в [64] показано, что все $r_{km} = 0$, кроме r_{00} и r_{02}.

§ 3. Функция Эйри

1. Определение и простейшие свойства. В своих исследованиях по оптике в 1838 г. Эйри ввел функцию

$$Ai(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{t^3}{3}+tz\right)dt \tag{3.1}$$

(z вещественно), которая называется теперь *функцией Эйри*. Она выражается через функции Бесселя порядка 1/3:

$$Ai(z)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{z}{3}}\,K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{2/3}\right).$$

Функция Эйри часто встречается в задачах дифракции волн, квантовой механики, асимптотической теории дифференциальных уравнений и многих других. Из (3.1) следует, что при вещественных z

$$Ai(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\frac{t^3}{3}+zt\right)\right]dt. \tag{3.2}$$

Функция $Ai(z)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость как целая функция z. Действительно, пусть l_0 — контур, состоящий из лучей $(\infty e^{i5\pi/6}, 0]$ и $[0, \infty e^{i\pi/6})$. По лемме Жордана имеем при вещественных z

$$Ai(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{l_0}\exp\left(i\left(\frac{t^3}{3}+zt\right)\right)dt. \tag{3.3}$$

Интеграл, стоящий в правой части, сходится при всех z и потому является целой функцией.

Из (3.2) следует, что $Ai(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w''-zw=0. \tag{3.4}$$

Это уравнение имеет решения $Ai(z)$, $Ai(\omega z)$, $Ai(\omega^2 z)$, где $\omega=e^{2\pi i/3}$ — корень кубический из единицы. В силу (3.3) имеем

$$Ai(z)+\omega Ai(\omega z)+\omega^2 Ai(\omega^2 z)=0. \tag{3.5}$$

В качестве второго линейно независимого решения уравнения (3.4) используется функция

$$Bi(z) = i\omega^2 Ai(\omega^2 z) - i\omega Ai(\omega z).$$

Функции $Ai(z)$, $Bi(z)$ вещественны при вещественных z.

2. Асимптотика функции Эйри.

Предложение 3.1. *Пусть* $0 < \varepsilon < \pi$. *Тогда*:

1°. *При* $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\pi \sqrt[4]{z}} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{3k+1}{2}\right)(-1)^k}{3^{2k}(2k)!} z^{-3k/2}. \tag{3.6}$$

Здесь для $\sqrt{z}$, $\sqrt[4]{z}$ *берутся главные ветви.*

2°. *При* $|z| \to \infty$, $|\arg z - \pi| \leqslant \varepsilon$

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\pi \sqrt[4]{z}} \left[\exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{3k+1}{2}\right)}{3^{2k}(2k)!} z^{-3k/2} + i \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{3k+1}{2}\right)}{3^{2k}(2k)!} z^{-3k/2} \right]. \tag{3.6'}$$

Здесь выбор ветвей следующий:

$$\sqrt[4]{z} = e^{i\pi/4} \left|\sqrt[4]{z}\right|, \quad \sqrt{z} = i\left|\sqrt{z}\right|$$

при $z \in (-\infty, 0)$.

Эти асимптотические разложения можно дифференцировать любое число раз.

Пусть $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$. Функция $g(t, z) = i(t^3/3 + tz)$ при фиксированном z имеет ровно две точки перевала $t_{1,2}(z) = \pm i\sqrt{z}$, где для $\sqrt{z}$ выбрана главная ветвь. Пусть z вещественно, $z > 0$, тогда в (3.3) $\max \operatorname{Re} g(t, z) = 0$ на контуре интегрирования. Так как $g(t_2(z), z) = (2/3) z^{3/2} > 0$, то точка перевала $t_2(z)$ не может вносить вклад в асимптотику интеграла (4.3).

В этом примере можно не исследовать структуру критических линий уровня. По лемме Жордана можно в (3.2) заменить контур интегрирования параллельной прямой $t = i\sqrt{z} + \tau$, $-\infty < \tau < \infty$, проходящей через точку перевала $t_1(z)$, так что при $z \in (0, +\infty)$

$$Ai(z) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\tau^2\sqrt{z}+\frac{i\tau^3}{3}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\int_0^{\infty}\exp\left(-t^2\sqrt{z}\right)\cos\frac{t^3}{3}\,dt. \quad (3.7)$$

Последний интеграл в (3.7) сходится абсолютно при всех $z \notin (-\infty, 0)$, так что эта формула справедлива при $z \notin (-\infty, 0)$. Применяя лемму Ватсона к последнему интегралу в (3.7), получаем (3.6).

Пусть $|\arg z - \pi| \leqslant \varepsilon$. Имеем из (3.5)

$$Ai(z) = -\omega Ai(\omega z) - \omega^2 Ai(\omega^2 z),$$

где $\omega = e^{2\pi i/3}$. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то точки ωz, $\omega^2 z$ лежат в секторе $|\arg z| \leqslant \pi - \delta < \pi$, и к функциям $Ai(\omega)$, $Ai(\omega^2 z)$ можно применить формулу (3.6). Отсюда следует (3.6′).

Из предложения 3.1 следует, что функция Эйри

1) экспоненциально убывает в секторе $|\arg z| < \pi/3$;

2) экспоненциально возрастает в секторах $\pi/3 < \arg z < \pi$, $-\pi < \arg z < -\pi/3$;

3) осциллирует на лучах $\arg z = \pm\pi/3$, π.

На вещественной оси имеем

$$Ai\,(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}x^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \qquad (x \to +\infty),$$

$$Ai\,(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-x)^{-1/4}\left[\cos\left(\frac{2}{3}(-x)^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)+Q\,(x^{-3/2})\right] \qquad (x \to -\infty). \quad (3.8)$$

Таким образом, функция Эйри экспоненциально затухает при $x \to +\infty$ и осциллирует и затухает степенным образом при $x \to -\infty$, т. е. ее поведение существенно различно при положительных и отрицательных x. На полуоси $(-\infty, 0)$ функция Эйри имеет бесконечно много нулей; можно показать [10], что все нули функции Эйри вещественны.

Асимптотика функции $Bi(z)$ легко находится из соотношения (3.6) и предложения 3.1.

§ 4. Функции Бесселя

1. Асимптотика функции $J_n(z)$ при n целом, $z \to \infty$. Если n — целое число, то при всех z справедливо интегральное представление

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} t^{-n-1} dt. \qquad (4.1)$$

Этот интеграл имеет вид (1.1), где $S = \frac{1}{2}\left(t - t^{-1}\right)$, $f = \frac{t^{-n-1}}{2\pi i}$. Функция $S(t)$ имеет точки перевала $t = \pm i$; обе они простые и лежат на контуре интегрирования. Вычислим асимптотику $J_n(z)$ при фиксированном индексе n и при $z \to \infty$. Полагая $t = e^{i\varphi}$, $z = |z| e^{i\theta}$, $S(t, \theta) = e^{i\theta} S(t)$, получаем

$$\operatorname{Re} S(t, \theta) = -\sin\theta \sin\varphi, \quad e^{i\theta} S(\pm i) = \pm i e^{i\theta}. \qquad (4.2)$$

Поэтому $\max\limits_{|t|=1} \operatorname{Re} S(t, \theta) = M_\theta$ при любых θ достигается в одной из точек перевала, и только в них. Исключение составляет случай, когда z вещественно; но когда контур интегрирования можно продеформировать так, чтобы M_θ достигался только в точках $t = \pm i$. Применяя теорему 1.4, получаем, что асимптотика $J_n(z)$ равна сумме вкладов от точек перевала при $|z| \to \infty$ и при всех $\arg z$

$$J_n(z) \sim e^{iz}\left(\frac{e^{-i\pi n/2}}{\sqrt{2\pi i z}} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (-iz)^{-k-1/2}\right) + \\ + e^{-iz}\left(\frac{e^{i\pi n/2}}{\sqrt{-2\pi i z}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (iz)^{-k-1/2}\right). \qquad (4.3)$$

Здесь ветви $\sqrt{iz}$, $\sqrt{-iz}$ выбраны в плоскости с разрезами по лучам $[0, +i\infty)$, $[0, -i\infty)$ соответственно так, что корни положительны при положительных значениях iz (соответственно $-iz$). При этом неоднозначность выбора ветвей при отрицательных значениях iz (соответственно $-iz$) несущественна, так как при таких z соответствующая экспонента e^{iz} (e^{-iz}) экспоненциально мала по сравнению с другой экспонентой в (6.3).

Поясним выбор ветвей. Пусть $z = iy$, $y > 0$, тогда $\theta = \pi/2$, максимум M_θ достигается только в точке $t =$

$= -i$, $S_{tt}''(-i, \pi/2) = -1$. Поэтому касательная в точке $t = -i$ к линии наибыстрейшего спуска горизонтальна, так что $\arg \sqrt{-S_{tt}''(-i, \pi/2)} = 0$. Далее аргумент продолжается по непрерывности.

Главный член асимптотики при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon < \pi$ имеет вид

$$J_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi z}}\left[\cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-1})\right]. \qquad (4.4)$$

Асимптотическое разложение (4.3) можно дифференцировать любое число раз.

Непосредственное вычисление коэффициентов a_k, b_k по методу перевала, как обычно, весьма затруднительно. Воспользуемся тем, что функция $y = z^{-1/2}J_n(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя

$$y'' + \left(1 - \frac{n^2 - 1/4}{z^2}\right) y = 0.$$

Полагая $y = e^{iz}w$, получаем

$$w'' + 2iw' - \frac{n^2 - 1/4}{z^2} w = 0.$$

Подставляя сюда разложение $w \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (iz)^{-k}$ и приравнивая нулю коэффициенты при степенях z^{-k}, получаем рекуррентные соотношения

$$b_{k+1} = \frac{(2k+1)^2 - n^2}{8(k+1)} b_k.$$

Так как b_0 известно из (6.5), то отсюда находим b_k. Окончательные формулы см. в [14], [35].

2. Функция Бесселя нецелого аргумента при $z \to \infty$. Воспользуемся интегральным представлением Зоммерфельда для функции Ханкеля порядка ν I рода:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty + \pi i} e^{z \operatorname{sh} t - \nu t} dt, \qquad (4.5)$$

которое пригодно при $\operatorname{Re} z > 0$ и любом комплексном ν. Контур интегрирования состоит из лучей $(-\infty, 0]$, $[\pi i, \pi i + \infty)$ и отрезка $[0, \pi i]$. Найдем асимптотику этой функции при $z \to \infty$ и при фиксированном ν. В данном случае $S = \operatorname{sh} t$, $f = e^{-\nu t}$. Точки перевала имеют вид $t_k = \frac{i\pi}{2} + k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, и все они простые. Покажем, что контур интегрирования можно продеформировать в линию наибыстрейшего спуска l: $\operatorname{Im} \operatorname{sh} t = \operatorname{Im} \operatorname{sh} t_0 = 1$, проходящую через точку перевала t_0. Функция $w = \operatorname{sh} t$ взаимно однозначно отображает полуполосу $0 < \operatorname{Re} t < \infty$, $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} t < \pi$, на левую полуплоскость $\operatorname{Re} w < 0$, и прообразом полуоси $(-\infty, 0)$ является половина l^+ линии l. Линия l симметрична относительно мнимой оси, так что l лежит в полосе $0 < \operatorname{Im} t < \pi$ и имеет своими асимптотами лучи $(-\infty, 0)$, $(i\pi, i\pi + \infty)$. Поэтому контур интегрирования можно продеформировать в эту линию, и из теоремы 1.2 следует, что

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \exp\left[i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}\right] \quad (4.6)$$

при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$, где для $\sqrt{z}$ выбирается главная ветвь. На самом деле этот результат справедлив при $-\pi < -\pi + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \varepsilon < 2\pi$. Доказательство этого утверждения несколько утомительно; оно может быть проведено тем же способом, что и в § 3. Аналогично вычисляется асимптотика Ханкеля II рода $H_\nu^{(2)}(z)$ и функции Бесселя $J_\nu(z) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right]$.

3. Асимптотика $J_x(x)$ при $x \to +\infty$. При $\operatorname{Re} x > 0$ имеем

$$J_x(x) = \int\limits_{\infty - i\pi}^{\infty + i\pi} \exp\left[x(\operatorname{sh} t - t)\right] dt.$$

Здесь интеграл берется по контуру, состоящему из отрезка $[-\pi i, \pi i]$ и лучей $[\pi i, \pi i + \infty)$, $(+\infty - \pi i, -i\pi]$. Точка $t = 0$ является двукратной точкой перевала функции $S = \operatorname{sh} t - t$. Линия уровня $\operatorname{Im} S(t) = 0$, проходящая через точку перевала $t = 0$, задается уравнением $\operatorname{ch} \sigma \sin \tau = \tau$, $t = \sigma + i\tau$, и содержит вещественную ось. Так как $t = 0$ — точка перевала второго порядка, то остальные ветви l образуют углы $\pm\pi/3$, $\pm 2\pi/3$ с вещественной осью. В силу симметрии l относительно осей достаточно рассмотреть уравнение $\operatorname{ch} \sigma = \tau/\sin \tau$ при $\sigma > 0$, $\tau > 0$. Это даст нам линию наибыстрейшего спуска l_1, которая выходит из точки $t = 0$ под углом $\pi/3$ к вещественной оси и имеет асимптоту $\tau = \pi$. Линия l_2, симметричная с l_1 относительно вещественной оси, также является линией наибыстрейшего спуска.

Продеформируем контур интегрирования в контур, состоящий из линий l_1, l_2. Так как $S(t)$ вещественна при вещественных t, то значения интегралов по l_1 и l_2 комплексно сопряжены. Следовательно,

$$J_x(x) = 2\mathrm{Re} \int\limits_{l_1} \exp(xS(t))\, dt.$$

Далее, $S(0) = 0$, $S'''(0) = 1$, угол между l_1 и осью Ox в точке $t = 0$ равен $\pi/3$. Применяя теорему 1.4, получаем, что при $x \to +\infty$

$$J_x(x) \sim \pi^{-1} \sqrt[3]{6} \sin \frac{\pi}{3}\, \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) x^{-1/3} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k/3} \right].$$

Можно также показать, что все $a_{2k} = 0$.

Приведенные в §§ 3, 4 примеры носят иллюстративный характер; кроме того, мы, как правило, ограничивались главным членом асимптотики. Метод перевала многократно применялся к вычислению асимптотики специальных функций при различных соотношениях между аргументом и индексами, а именно, к функциям Бесселя, к функциям параболического цилиндра (Вебера), к функциям и полиномам Лежандра и ко всем другим ортогональным полиномам, к функциям Уиттекера, гипергеометрической функции и т. д. Мы не ставим своей целью написать справочник по асимптотике специальных функций и отсылаем интересующегося этими вопросами читателя к работам [14], [35].

§ 5. Асимптотика коэффициентов Тейлора, Лорана, Фурье аналитических функций. Некоторые задачи теории вероятностей, статистической физики и теории чисел

1. Класс интегралов. Выбор перевального контура. Пусть ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{5.1}$$

сходится при $|z| < R \leqslant \infty$. Требуется найти асимптотику коэффициентов Тейлора a_n при $n \to \infty$.

По формуле Коши имеем

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} f(z)\, z^{-n-1} dz. \tag{5.2}$$

В этой формуле в качестве r можно взять любое число такое, что $0 < r < R$. Рассмотрим семейство окружностей $\{|z| = r\}$. Пусть n фиксировано, r_n таково, что

$$\min_{0<r<R} \max_{|z|=r} \left(|f(z)|\, |z|^{-n-1} \right) \tag{5.3}$$

достигается на окружности $|z| = r_n$, и пусть z_n — одна из точек, в которой достигается этот минимакс. Тогда, вообще говоря, точка z_n является седловой точкой функции $g_n(z) = f(z) z^{-n-1}$, так как в ней достигается $\min\limits_{0<r<R} \max\limits_{0\leqslant\varphi<2\pi} |g_n(re^{i\varphi})|$. Во всяком случае мы немедленно получаем следующую оценку:

$$|a_n| \leqslant r_n^{-n} \max_{|z|=r_n} |f(z)|. \tag{5.4}$$

Пусть все коэффициенты Тейлора a_n неотрицательны:

$$a_0 > 0, \quad a_n \geqslant 0 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.5}$$

Покажем, что минимакс (5.3) достигается в точке $z = r_n$, которая является точкой перевала функции $g_n(z)$.

Лемма 5.1. *Если условие* (5.5) *выполнено, то*

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = f(r). \tag{5.6}$$

Если этот максимум достигается также в некоторой точке $z \neq r$, то существует целое число $p \geqslant 2$ такое, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn} z^{pn}. \tag{5.7}$$

Пусть $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, тогда

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\varphi} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n,$$

так как $a_n \geqslant 0$. Пусть равенство имеет место при некотором $\varphi \neq 0$, и пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, где $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ — все ненулевые коэффициенты ряда (5.1). Тогда $e^{in_k\varphi} = 1$ при $k = 1, 2, \ldots$, так что $\varphi n_k = 2\pi m_k$, где m_k — целые числа. Следовательно, $n_j = \frac{n_0}{m_0} m_j = r m_j$, где r — рациональное число, и $0 < r < 1$, так как $0 < \varphi < 2\pi$. Пусть $r = p/q$, где $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$ — взаимно простые целые числа, тогда $n_j = p m_j / q$, так что m_j делится на q: $m_j = q S_j$, $n_j = p S_j$, и $f(z)$ имеет вид (5.6).

Таким образом, минимакс (5.3) достигается в точке, в которой достигается $\min\limits_{0<r<R} (f(r)\, r^{-n-1})$.

Лемма 5.2. *Пусть условие* (5.5) *выполнено*, $f(z)$ *не имеет вида* az^k. *Тогда*

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{rf'(r)}{f(r)}\right) > 0 \tag{5.8}$$

при $0 < r < R$.

Пусть $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Тогда $M(r) = f(r)$ в силу леммы 5.1. По теореме Адамара о трех кругах функция $\ln M(r)$ является строго выпуклой книзу функцией от $\ln r$, если только $f(z)$ не имеет вида $a_n z^n$. Следовательно,

$$0 < \left(\frac{d}{d \ln r}\right) \ln M(r) = r \frac{d}{dr} \left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right).$$

Приведем элементарное доказательство этой леммы. Левая часть (5.8) равна

$$r^{-1} (f(r))^{-2} \left[f(r) (r^2 f''(r) + r f'(r)) - (r f'(r))^2\right] =$$
$$= r^{-1} (f(r))^{-2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k r^k - \left(\sum_{k=0}^{\infty} k a_k r^k\right)^2\right] \leqslant 0$$

при $r \neq 0$ в силу неравенства Коши — Буняковского; равенство возможно только тогда, когда $a_k r^k = \mu k^2 a_k r^k$, где μ не зависит от k, при всех $k = 0, 1, \ldots$, и так как $a_0 > 0$, то при $r \neq 0$ имеет место строгое неравенство.

Лемма 5.3. *Пусть условие* (5.5) *выполнено, функция* $f(z)$ *не является функцией вида* az^n. *Тогда при любом* $\mu \in (0, \mu_0)$, $\mu_0 = \lim\limits_{x \to R} x f'(x)/f(x)$ *существует, и притом единственная, точка* $x_0(\mu)$, *в которой достигается* $\min\limits_{0<r<R} f(r)\, r^{-\mu}$. *Эта точка является невырожденной точкой перевала функции*

$$S(z, \mu) = \ln f(z) - \mu \ln z. \tag{5.9}$$

Функция $\varphi(r) = f(r)\, r^{-\mu}$ строго положительна при $0 < r < R$, $\varphi(0) = +\infty$, и потому достигает минимума на интервале $(0, R]$. Точка минимума определяется из уравнения

$$\frac{rf'(r)}{f(r)} = \mu \tag{5.10}$$

и в силу леммы 5.2 единственна. При $z = x_0(\mu)$ имеем

$$\frac{d}{dz} S(z, \mu) = \frac{d}{dr} S(r, \mu) = \frac{f'}{f} - \frac{\mu}{r} = 0,$$
$$\frac{d^2}{dz^2} S(z, \mu) = \frac{d^2}{dr^2} S(r, \mu) = \frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2} + \frac{\mu}{r^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{rf'}{f}\right) > 0 \tag{5.11}$$

в силу леммы 5.2.

Следствие 5.1. *Функция*

$$\varphi(\mu) = \min_{0<r<R} (\ln f(r) - \mu \ln r)$$

является строго выпуклой кверху функцией μ.

Пусть $f(z)$ — полином с неотрицательными коэффициентами, $f(0) > 0$. Тогда все утверждения леммы 5.3 справедливы, если $0 < \mu < n$.

Лемма 5.4. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \ a_0 > 0, \ a_n \geqslant 0, \ n = \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \tag{5.12}$$

и областью сходимости ряда Лорана является кольцо $0 < R_0 < |z| < R_1$. *Пусть среди коэффициентов* a_n *имеется бесконечно много отличных от нуля коэффициентов с положительными и отрицательными номерами. Тогда все заключения леммы* 5.3 *справедливы при любом вещественном* μ.

Пусть $f(z) = \sum_{-N_1}^{N_2} a_k z^k$, где $N_1, N_2 > 0$, $a_k \geqslant 0$ и $a_{-N_1} > 0$, $a_{N_2} > 0$, $a_0 > 0$. Тогда все утверждения леммы 5.3 справедливы, если $-N_1 < \mu < N_2$. Кроме того, для функции $f(z)$ вида (5.12) справедливы утверждения леммы 5.1.

В условиях лемм 5.3, 5.4 контур интегрирования $|z| = r_n$ является перевальным контуром, на котором лежит только одна точка перевала $z = r_n$.

2. Асимптотика интегралов вида

$$F(N, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} [f(z)]^N z^{-n-1} dz \tag{5.13}$$

при $N \to \infty$, $N/n \to \text{const}$.

Мы рассмотрим эту задачу при следующих условиях на функцию $f(z)$.

1°. Функция $f(z)$ голоморфна в кольце K: $R_1 < |z| < R_2$, где $R_1 \geqslant 0$, $R_2 \leqslant \infty$.

В (5.12), очевидно, $R_1 < \rho < R_2$. Функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in K.$$

2°. $a_0 > 0$, $a_n \geqslant 0$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Если $\{n_k\}$ — номера всех ненулевых коэффициентов a_n, $n_k \neq 0$, то числа n_k не имеют общего делителя, отличного от единицы.

Теорема 5.1. *Пусть условия* 1°, 2° *выполнены*, $\lim\limits_{x \to R_j} f(x) = \infty$, $j = 1, 2$, *и* $\mu > 0$ — *фиксированное число. Тогда при* $N \to \infty$, $|n|/N \to \mu$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(N, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N h(x)}} f^N(x)\, x^{-n-1} \Big|_{x = x_0(n/N)}, \tag{5.14}$$

где $x_0(n/N)$ — *единственное решение уравнения* (5.10) (*при* $\mu = n/N$),

$$h(x) = \frac{N}{n} \frac{f''(x)}{f(x)} + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{1}{x^2}. \tag{5.15}$$

Разложение (5.14) *равномерно по* $n/N \in [-\mu, \mu]$.

Заменим в (5.12) контур интегрирования окружностью $|z| = x_0(n/N)$. В силу леммы 5.4 окружность является перевальным контуром, причем в силу задачи 5.3 $|f(z)|$ достигает максимального значения только при $z = x_0(n/N)$. Эта точка является невырожденной точкой перевала подынтегральной функции. Применяя теорему 1.1 и учитывая (5.11), получаем (5.14), (5.15).

Следствие 5.2. *Пусть условия теоремы* 5.1 *выполнены. Тогда при* $N \to \infty$, $n/N \to \mu$, *где* μ — *любое вещественное число,*

$$\lim_{N \to \infty} F(N, n) = \ln f(x_0(\mu)) - \mu x_0(\mu). \tag{5.16}$$

Правая часть этой формулы является выпуклой кверху функцией μ.

Для доказательства (5.16) достаточно заметить, что $x_0(n/N) = x_0(\mu) + O(|n/N - \mu|)$. Выпуклость правой части (5.16) вытекает из следствия 5.1.

Теорема 5.2. *Пусть* $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *ряд сходится при* $|z|<R$, *условия* 1°, 2° *выполнены и имеется бесконечно много ненулевых коэффициентов* a_n. *Пусть* $0<\mu_1<\mu_2$. *Тогда при* $N\to\infty$, $\mu_1\leqslant n/N\leqslant\mu_2$, *равномерно по* n/N *справедливо асимптотическое разложение* (5.14).

Следствие 5.2 также остается в силе, если $\mu>0$.

Следствие 5.3. *Пусть* $f(z)=\sum\limits_{-N_1}^{N_2} a_n z^n$, *где* $0<N_i<+\infty$, *и условия* 1°, 2° *выполнены. Тогда все утверждения теоремы* 5.1 *и следствие* 5.1 *остаются в силе при* $N_1\leqslant n/N\leqslant N_2$.

Пусть условие 1° выполнено, $a_n\geqslant 0$ и пусть $m\geqslant 2$ — наибольший общий делитель чисел $n\neq 0$ таких, что $a_n\neq 0$. Тогда $\max\limits_{|z|=r_0}|f(z)|$ достигается только в точках $z_k=\omega_k r_0$, где ω_k — различные значения $\sqrt[m]{1}$, и асимптотика интеграла $F(N, n)$ равна сумме вкладов от этих точек.

3. Асимптотика коэффициентов Тейлора и Лорана. Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция с неотрицательными коэффициентами Тейлора, т. е. условие (5.5) выполнено. Тогда из (5.4) и леммы 5.3 следует оценка

$$a_n\leqslant f(x)\,x^{-n}\big|_{x=x_0(n)},\qquad (5.17)$$

где $x_0(n)$ — единственное решение уравнения (5.10).

Точка $z=x_0(n)$ является единственной точкой перевала подынтегральной функции из (5.2) на окружности $|z|=x_0(n)$, к тому же невырожденной (если условия 1°, 2° теоремы 5.1 выполнены). Поэтому естественно ожидать, что асимптотика a_n равна вкладу от этой точки перевала, т. е. что справедлива асимптотическая формула

$$a_n=\sqrt{\frac{2\pi}{h(x,n)}}\,f(x)\,x^{-n}\big|_{x=x_0(n)}(1+o(1)),\qquad (5.18)$$

где обозначено

$$h=\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{n-n^2}{x^2}.$$

Доказательство этой формулы требует дополнительных предположений относительно функции $f(z)$.

Положим
$$S(r, \varphi) = \ln f(re^{i\varphi}) \tag{5.19}$$
и введем следующие условия:

3°. Существует функция $\omega(r) \to \infty$ при $r \to +\infty$ такая, что
$$S''_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \sim S''_{\varphi\varphi}(r, 0)$$
при $r \to \infty$, $|\varphi| \leqslant \varphi_0(r) = \omega(r)[h(x_0(n), n)]^{-1/2}$. Кроме того, $\varphi_0(+\infty) = 0$.

4°. При больших фиксированных r функция $\operatorname{Re} S(r, \varphi)$ монотонно убывает на интервалах $(0, \pi)$, $(0, -\pi)$.

Теорема 5.3. *Если выполнены условия* 1°—4°, *то справедлива асимптотическая формула* (5.18).

Положим $r = x_0(n)$ в интеграле (5.2) и положим $a_n = a'_n + a''_n$, где a'_n — интеграл (5.2) по дуге $|\varphi| \leqslant \varphi_0(r)$. Тогда
$$|a''_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} r^{-n-1} \int \exp[\operatorname{Re} S(r, \varphi)]\, d\varphi,$$
где интеграл берется по дуге $\varphi_0(r) \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$. Напомним, что $r = x_0(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Повторяя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 2.2.2, получим, что $a''_n = o(V_n)\ (n \to \infty)$, где V_n — правая часть формулы (5.18). Остается показать, что $a'_n \sim V_n$. В силу условия 3° имеем
$$a_n = \frac{1}{2\pi} r^{-n} \int\limits_{-\varphi_0(r)}^{\varphi_0(r)} \exp[S(r, \varphi) - in\varphi]\, d\varphi \sim$$
$$\sim \frac{r^{-n}}{2\pi \sqrt{S''_{\varphi\varphi}(r, 0)}} \int\limits_{-\omega(r)}^{\omega(r)} \exp\left[-\frac{\varphi^2}{2}(1 + o(1))\right] d\varphi.$$

Последний интеграл стремится к $\sqrt{2\pi}$ при $r \to \infty$.

Аналогичный результат имеет место для коэффициентов Лорана, если $f(z)$ имеет вид (5.12).

4. Метод Дарвина — Фаулера в статистической механике. Наше изложение следует работам [42], [43]. *Ансамблем* называется набор из M различных физических систем $A_1, \ldots, A_M$ (подсистемы ансамбля). Каждая из подсистем полностью характеризуется заданием своей энергии. Требуется найти наиболее вероятное распределение энергий по подсистемам, если заданы M и энергия E всего ансамбля. Вводятся следующие предположения:

1°. Энергия каждой подсистемы может принимать любое из заданных значений E_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Числа E_k — целые, $0 < E_0 < E_1 < \ldots$, и не имеют общего делителя, отличного от единицы.

Это означает следующее: единица энергии выбирается настолько малой, что все уровни энергии E_k подсистем и полную энергию E ансамбля можно с любой степенью точности считать целыми. Имеются, конечно, случаи, когда это предположение не выполняется, например электронные уровни атома водорода, которые сгущаются к нулю. Такие случаи исключаются; они вообще недоступны статистическому исследованию без специальных предосторожностей.

2°. Энергия E ансамбля равна сумме энергий подсистем. Число $U = E/M$ (средняя энергия ансамбля) — целое.

Пусть в состоянии с энергией E_k находятся m_k подсистем. Тогда должны выполняться соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k = M, \tag{5.20}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k E_k = E = MU. \tag{5.21}$$

Очевидно, что обе суммы содержат конечное число ненулевых слагаемых.

Набор целых чисел $\{m\} = \{m_0, m_1, m_2, \ldots\}$ будем называть *допустимым*, если выполнены условия (5.20), (5.21). Заданному допустимому набору $\{m\}$ отвечает число

$$W(\{m\}) = \frac{M!}{m_0!\, m_1!\, m_2! \ldots} \tag{5.22}$$

различных ансамблей, так как перестановка любых двух подсистем (они неразличимы) оставляет набор $\{m\}$ неизменным. В (5.22) имеется конечное число сомножителей $m_j!$, отличных от 1; остальные равны 1. Вводится предположение

3°. Все допустимые наборы $\{m\}$ (т. е. распределения энергии по подсистемам, удовлетворяющие условиям (5.20), (5.21)) равновероятны.

Как уже говорилось выше, требуется найти наиболее вероятное распределение по энергиям, или в силу предположения 3° найти такой допустимый набор $\{\bar{m}\}$, что

$$\max_{\{m\}} W(m) = W(\bar{m}). \tag{5.23}$$

Мы будем решать эту задачу при условии, что $M \gg 1$.

Введем *среднее значение* (математическое ожидание) компоненты m_k:

$$\langle m_k \rangle_M = \frac{\sum\limits_{\{m\}} m_k W(m)}{\sum\limits_{\{m\}} W(m)}, \tag{5.24}$$

где суммы берутся по всем допустимым наборам (M, U фиксированы). Следует ожидать, что

$$\bar{m}_k = \lim_{M\to\infty} \langle m_k \rangle_M, \tag{5.25}$$

т. е. что при $M \gg 1$ почти все возможные наборы $\{m\}$ совпадают с наиболее вероятным набором $\{\bar{m}\}$. Если *среднеквадратичная флуктуация* (*дисперсия*) стремится к нулю при $M \to \infty$, т. е.

$$\langle m_k^2 \rangle_M - \langle m_k \rangle_M^2 \to 0, \quad M \to \infty, \tag{5.26}$$

то отсюда следует (5.25).

Вычислим асимптотику $\langle m_k \rangle_M$ при $M \to \infty$. Введем вспомогательные переменные $g_0, g_1, g_2, \ldots$, положим $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$ и

$$W(\{m\}, g) = \frac{M!\, g_0^{m_0} g_1^{m_1} \ldots}{m_0!\, m_1! \ldots}, \tag{5.27}$$

где все g_k изменяются в интервале $(1-\delta, 1+\delta)$, $0 < \delta < 1$, δ — фиксированное число. Из условий (5.20), (5.21) следует, что все сомножители в (5.27) равны 1, начиная с некоторого k. Обозначим $1 = (1, 1, 1, \ldots)$. Тогда

$$W(\{m\}, 1) = W(m). \tag{5.28}$$

Введем вспомогательную функцию

$$\Gamma(M, U, g) = \sum_{\{m\}} W(\{m\}, g), \tag{5.29}$$

где, как обычно, сумма берется по всем допустимым наборам. В правой части (5.29) стоит конечная сумма, так как число допустимых наборов $\{m\}$ конечно. Имеем

$$\langle m_k \rangle = g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \ln \Gamma |_{g=1}, \qquad (5.30)$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial g_k} \Gamma(U, M; g) = M! \sum_{(m)} \frac{m_k g_0^{m_0} \dots g_k^{m_k - 1} \dots}{m_0! \dots m_k! \dots}.$$

Аналогично показывается, что среднеквадратичная флуктуация m_k равна

$$\langle m_k^2 \rangle - \langle m_k \rangle^2 = g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \left(g_k \frac{\partial}{\partial g_k} \ln \Gamma \right) \Big|_{g=1}. \qquad (5.31)$$

Так как нас интересует $\langle m_k \rangle$ при фиксированном k, то достаточно считать, что все $g_j = 1$ при $j \neq k$, и только g_k изменяются в пределах $(1-\delta, 1+\delta)$. Таким образом, все интересующие нас величины выражаются через Γ, так что остается вычислить Γ.

Введем *производящую функцию* G:

$$G(z, M; g) = f^M(z; g), \quad f(z, g) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{E_k}. \qquad (5.32)$$

Так как $g_k \in (1-\delta, 1+\delta)$, то радиус сходимости степенного ряда (5.32) $R = 1$, что следует из формулы Коши — Адамара. Из полиномиальной формулы Ньютона следует, что

$$G(z, M; g) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l, \quad a_l = \sum \frac{g_0^{m_0 E_0} g_1^{m_1 E_1} \dots}{m_0!\, m_1! \dots}, \qquad (5.33)$$

где суммирование в формуле для a_l производится по таким наборам $\{m\}$, что

$$\sum m_k = M, \quad \sum m_k E_k = l.$$

Сравнивая (5.29) и (5.33), получаем, что $\Gamma(M, U, g) = a_{MU}$, т. е. Γ — коэффициент при z^{MU} в разложении Тейлора функции G. Отсюда по формуле Коши находим, что

$$\Gamma(M, U; g) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f^M(z; g)\, z^{-MU-1} dz, \qquad (5.34)$$

где C — простой контур, охватывающий начало координат и лежащий в круге $|z| < 1$. Асимптотика этого интеграла при $M \to \infty$, $E/M \to U$ вычисляется с помощью теоремы 5.1.

Исследуем свойства наиболее вероятного распределения. Положим в (5.22) все $g_j = 1$ при $j \neq k$ и обозначим $x_0(g_h) = e^{-\beta(g_h)}$ единственный корень уравнения

$$\frac{f'_x(x; g_h)}{f(x; g_h)} - \frac{U}{x} = 0, \tag{5.35}$$

лежащий на интервале $(0, 1)$. Через $x_0 = e^{-\beta}$ обозначим $x_0(1)$. Из (5.14) находим, что при $M \to \infty$

$$\frac{1}{M}\ln\Gamma(M, U; g_h) = \\ = \ln f(x_0; g_h) + \beta U - \frac{1}{2\pi}\ln(2\pi M g''(x_0)) + O(M^{-1}). \tag{5.36}$$

Это разложение можно дифференцировать по g_k любое число раз. При этом достаточно дифференцировать только первые два слагаемых. Для краткости будем писать $g_k = g$, $E_k = E$. Учитывая, что

$$\frac{d\beta}{dg} = -x_0^{-1}\frac{dx_0}{dg}, \quad \frac{\partial f(x, g)}{\partial g} = x^E,$$

и что соотношение (5.35) выполняется тождественно по g, если $x = x_0(g)$ в (5.35), находим из (5.36), что

$$\frac{d\ln\Gamma(g)}{dg} = \frac{x_0^E}{f(x_0, g)} + \frac{dx_0}{dg}\left[\frac{f'_x(x_0, g)}{f(x_0, g)} - \frac{U}{x_0}\right] + O\left(\frac{\ln M}{M}\right) = \\ = \frac{x_0^E}{f(x_0, g)} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right). \tag{5.37}$$

Далее, учитывая (5.35), получаем

$$\frac{d}{dg}(g\ln\Gamma(g)) = \\ = gx_0^{E-1}(E-U)\frac{dx_0}{dg}(f(x_0, g))^{-1} - gx_0^{2E}(f(x_0, g))^{-2} + \\ + x_0^E(f(x_0, g))^{-1}.$$

Дифференцируя тождество (5.35) по g, получаем

$$\frac{dx_0}{dg}\left[(1-U)f'_x + x_0 f''_{xx}\right] = (U-E)x_0^E,$$

где все производные берутся в точке (x_0, g). Учитывая

(5.35) и (5.14), получаем, что

$$\frac{d(g\ln\Gamma(g))}{dg} = \\ = \frac{x_0^E}{f(x_0, g)} - \left(\frac{x_0^E}{f(x_0, g)}\right)^2 - \frac{g(E-U)^2 x_0^{2E-2}}{g''_{xx}(x_0)\, f^2(x_0, g)} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right). \tag{5.38}$$

Теперь положим $g_k = 1$, т. е.

$$f(x) = 1 + x^{E_1} + x^{E_2} + \ldots,$$

и пусть $x_0 = e^{-\beta}$ — корень уравнения (5.35). Из (5.37), (5.11) находим, что при $M \to \infty$

$$\frac{\langle m_k\rangle}{M} = \frac{e^{-\beta E_k}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\beta E_j}} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right). \tag{5.39}$$

Далее, учитывая (5.35), получаем, что

$$h''(x_0) = e^{2\beta}\sum_0^{\infty}\left(E_j^2 - U^2\right)e^{-\beta E_j}\left(\sum_0^{\infty} e^{-\beta E_j}\right)^{-1} = \\ = e^{2\beta}\langle E^2 - U^2\rangle > 0.$$

Из этой формулы с учетом (5.31), (5.38) получаем, что при $M \to \infty$

$$\frac{\langle m_k^2\rangle - \langle m_k\rangle^2}{M^2} = \\ = \frac{1}{M}\frac{\langle m_k\rangle}{M}\left[1 - \frac{\langle m\rangle}{M} - \frac{\langle m_k^2\rangle}{M}\frac{(E_k - U)^2}{\langle E^2 - U^2\rangle} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right)\right]. \tag{5.40}$$

Таким образом, среднеквадратичная флуктуация стремится к нулю при $M \to \infty$.

5. Симметричное случайное блуждание на прямой. Пусть частица совершает случайное блуждание по целочисленным точкам вещественной оси. За единицу времени частица совершает скачок из данной точки в соседнюю, слева или справа, с вероятностями, равными 1/2 (симметричное блуждание). Вычислим вероятность $P_L(M)$ нахождения частицы в данной точке M после L испытаний. Испытание — это серия из n скачков; испытания считаются независимыми. В начальный момент времени частица находится в точке 0.

Пусть p_m — вероятность попадания в точку m в результате одного испытания ($m = -n, \ -n+1, \ \ldots, \ n$). Введем производящую функцию $f(z) = \sum_{m=-n}^{n} p_m z^m$, тогда $P_L(M)$ — коэффициент при z^M в разложении

$$f^L(z) = (p_{-n}z^{-n} + \ldots + p_n z^n)^L = \sum_{M=-nL}^{nL} P_L(M)\, z^M.$$

Следовательно,

$$P_L(M) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} (f(z))^L z^{-M-1} dz, \tag{5.41}$$

где окружность $|z| = \rho$ ориентирована положительно.

Рассмотрим задачу об асимптотическом поведении $P_L(M)$ при $L \to \infty$ (число испытаний неограниченно возрастает) в предположении, что $M/L \to \mu$ $(-n \leqslant \mu \leqslant n)$. Эта задача решается с помощью следствия 5.3 из теоремы 5.2, и ответ дается формулой (5.14) (где следует заменить (M, n) на (L, M)).

6. Задача Харди — Рамануджана. Пусть n — натуральное число, $p(n)$ — число неотрицательных целочисленных решений $(x_1, x_2, \ldots)$ диофантова уравнения

$$n = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + r \cdot x_r + \ldots$$

Иными словами, натуральное число всевозможными способами разбивается на натуральные слагаемые, где число 1 встречается x_1 раз, число 2 встречается x_2 раз и т. д. Введем производящую функцию

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^m}. \tag{5.42}$$

Имеем

$$F(z) = (1 + z + z^2 + \ldots)(1 + z^2 + z^4 + \ldots) \times \ldots$$
$$\ldots \times (1 + z^m + z^{2m} + \ldots) \times \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, z^n.$$

Функция $F(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$, так что

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} F(z)\, z^{-n-1} dz, \tag{5.43}$$

где $0 < \rho < 1$. Мы получили интеграл вида (5.2), и в силу леммы 5.3 подынтегральная функция на окружности

$|z| = r_n$ имеет единственную, и притом невырожденную, точку перевала $z = r_n$, в которой достигается $\max\limits_{|z|=r_n} |F(z)|$.

Здесь r_n — единственное положительное решение уравнения

$$r \frac{d}{dr} \ln F(r) = n. \tag{5.44}$$

Нас интересует асимптотика $p(n)$ при $n \to \infty$. Чтобы вычислить ее, заменим контур интегрирования в (5.43) окружностью $|z| = r_n$ и применим метод перевала. Положим $r = e^{-\rho}$, тогда точка $\rho_n = -\ln r_n$ будет корнем уравнения

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{e^{\rho m} - 1} = n.$$

Отсюда следует, что $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Представим это уравнение в виде

$$n = \frac{1}{\rho^2} \sum_{m=1}^{\infty} \rho \frac{\rho_m}{e^{m\rho} - 1} \approx \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\infty} \frac{\xi \, d\xi}{e^{\xi} - 1} = \frac{\pi^2}{6\rho^2},$$

так что $\rho_n \approx \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$. Приведенные рассуждения являются нестрогими.

В данной задаче основную трудность представляет не применение метода перевала, а исследование поведения функции $F(z)$ при малых $|z|$. Положим $z = e^{-u}$, $u = v + iw$, тогда

$$p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v + iw)\, e^{n(v + iw)} dw, \quad f(u) = F(e^{-u}).$$

В [31] доказано, что

$$p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_0}^{w_0} f(v + iw)\, e^{n(v+iw)} dw + \\ + O\left(n^{-5/4+\varepsilon} \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2}{3} n}\right)\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число,

$w_0 = n^{-3/4+\varepsilon/3}$, и что

$$\ln f(v + iw) = $$
$$= \frac{\pi\sqrt{n}}{6} - iwn - \frac{n\sqrt{6\pi}}{\pi} w^2 + \frac{1}{4}\ln\frac{1}{24n} + O(n^{-1/4+\varepsilon})$$

при $|w| \leqslant w_0$. После этого асимптотика интеграла по отрезку $[-w_0, w_0]$ легко вычисляется, и окончательно для $p(n)$ получается асимптотическая формула

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}} [1 + O(n^{-1/4+\varepsilon})].$$

7. Асимптотика коэффициентов Фурье. Пусть f есть 2π-периодическая функция, тогда ее можно считать функцией от $e^{i\varphi}$: $f = f(e^{i\varphi})$. Коэффициенты Фурье функции f равны

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi, \tag{5.45}$$

и при известных условиях $f = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi}$.

Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $I = [0, 2\pi]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ (лемма Римана — Лебега). Если $f \in C^m(I)$, $m \geqslant 1$, и $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi)$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, то $f_n = o(n^{-m})$ при $|n| \to \infty$. Этот результат легко доказывается интегрированием по частям. Точную асимптотику коэффициентов Фурье можно вычислить, например, в случае, когда $f \in C^\infty(I)$, за исключением конечного числа точек, в окрестностях которых f имеет степенную особенность (с помощью леммы Эрдейи). При этом асимптотика f_n имеет степенной характер. Если функция $f(e^{i\varphi})$ голоморфна в окрестности отрезка I, то коэффициенты Фурье экспоненциально убывают:

$$f_n = O(e^{-c|n|}) \qquad (n \to \infty), \tag{5.46}$$

где $c > 0$. В этом случае удобно преобразовать интеграл (5.45) в контурный, сделав замену переменной $e^{i\varphi} = z$:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1} f(z) z^{-n-1} dz. \tag{5.47}$$

Мы получили интеграл вида (5.2). Функция $f(z)$ голоморфна в некотором кольце K: $r \leqslant |z| \leqslant R$, $0 < r < 1 < R$. Оценка (5.46) легко получается с помощью деформации контура интегрирования. Пусть для определенности $n > 0$, тогда можно заменить в (5.47) контур интегрирования окружностью $|z| = R$, на которой $|f(z)| \leqslant M$, $|z| \leqslant e^{-c}$, $c = \ln R > 0$, откуда следует (5.46).

Если $f(z)$ — рациональная функция, то интеграл (5.47) вычисляется:

$$f_n = \sum_{|z_k|<1} \operatorname*{res}_{z=z_k} (f(z)\, z^{-n-1}),$$

где сумма берется по всем полюсам, лежащим в круге $|z| < 1$, или

$$f_n = -\sum_{|z_k|>1} \operatorname*{res}_{z=z_k} (f(z)\, z^{-n-1}) - \operatorname*{res}_{z=\infty} (f(z)\, z^{-n-1}).$$

Первой из этих формул удобно пользоваться для вычисления асимптотики f_n при $n \to -\infty$, второй — при $n \to +\infty$ (при этом вычет в бесконечности исчезает). Пусть функция $f(z)$ мероморфна в кольце K и не имеет полюсов на его границе. Тогда

$$f_n = \sum_{R>|z_k|>1} \operatorname*{res}_{z=z_k} (f(z)\, z^{-n-1}) + O(e^{-nR}) \qquad (n \to -\infty),$$

$$f_n = \sum_{r<|z_k|<1} \operatorname{res} (f(z)\, z^{-n-1}) + O(e^{nr}) \qquad (n \to +\infty),$$

так что асимптотика f_n определяется ближайшими к окружности $|z| = 1$ полюсами.

Если $f(z)$ — целая функция, то асимптотика f_n определяется, вообще говоря, точками перевала подынтегральной функции, т. е. корнями уравнения $zf'(z)/f(z) = n$. Однако сколько-нибудь общие результаты об асимптотике f_n в этом случае неизвестны.

Пример [5]. Найдем асимптотику коэффициентов Фурье функции $f(z) = e^{e^z}$. Интеграл (5.47) имеет вид

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \exp(e^z)\, z^{-n-1} dz.$$

Так как функция $f(x)$ вещественна при вещественных x, то $f_{-n} = \overline{f_n}$ и достаточно ограничиться случаем $n > 0$.

Точки перевала определяются из уравнения

$$ze^z = n + 1.$$

Это уравнение имеет единственное положительное решение, которое обозначим $z_0(n)$. Положим $r = z_0(n)$, тогда максимум модуля подынтегральной функции на контуре интегрирования будет достигаться только в точке $z = z_0(n)$. Используя лемму Жордана, можно заменить контур интегрирования вертикальной прямой $\operatorname{Re} z = z_0(n)$, тогда получим

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[e^{z_0(n)+iy} - (n+1)\ln\left(z_0(n) + iy\right)\right] dy.$$

Можно проверить, что максимум модуля подынтегральной функции достигается только в точке $y = 0$ и потому эта точка дает основной вклад в асимптотику интеграла. Окончательно получаем, что

$$f_n \sim \left(2\pi e^{z_0}\right)^{-1/2} \exp\left[e^{z_0} - (n+1)\ln z_0\right].$$

Можно получить более точную формулу, используя тот факт, что при $n \to \infty$

$$z_0(n) = \ln(n+1) - \ln\ln(n+1) + O\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right).$$

Некоторые физические задачи (см., например, [91], [92]) приводят к необходимости вычислить асимптотику коэффициентов Фурье функций вида $f = a(\varphi)\exp\{i\lambda S(\varphi)\}$, где $\lambda \gg 1$ — большой параметр, S — вещественнозначная, a — комплекснозначная функции, периодические по φ с периодом 2π. Нас интересуют коэффициенты Фурье $f_{\pm N}$ такие, что N — величина порядка λ, т. е. $N = \lambda h$, $h > 0$ фиксировано. Имеем

$$f_N = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i\lambda S_1(\varphi)} a(\varphi)\, d\varphi, \quad S_1(\varphi) = S(\varphi) - h\varphi. \tag{5.48}$$

Если фазовая функция $S_1(\varphi)$ имеет вещественные стационарные точки, то они вносят основной вклад в асимптотику интеграла (5.48), которая вычисляется с помощью леммы Эрдейи (гл. 3, § 1).

Пусть функции $a(\varphi)$, $S(\varphi)$ голоморфны в окрестности вещественной оси и $|S'(\varphi)|>h$ при $\varphi\in[0,\,2\pi]$. Тогда функция $S_1(\varphi)$ не имеет вещественных стационарных точек и $f_N=O(e^{-cN})$, $c>0$, при $N\to\infty$. То же самое верно и для коэффициента Фурье f_{-N}.

Если $S(\varphi)$ — рациональная функция от $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, то асимптотика f_N равна вкладу от некоторой точки перевала φ^+, в которой $\operatorname{Im} S_1(\varphi)>0$, так что величина $\exp\{iNS_1(\varphi^+)\}$ экспоненциально мала [91].

Некоторые задачи акустики и электродинамики приводят к исследованию асимптотики при $N\to\infty$ интегралов вида

$$f_{\pm N}=\int\limits_0^{2\pi} H_0^{(1)}(k_NR)\exp\{ik_Na\cos\varphi\pm iN\varphi\}\,g\left(\varphi,\,k_N^{-1}\right)d\varphi,$$

$$\widetilde{f}_{\pm N}=\int\limits_0^{2\pi} H_0^{(1)}(k_NR)\,H_0^{(1)}(k_N\widetilde{R})\,e^{\mp iN\varphi}g\left(\varphi,\,k_N^{-1}\right)d\varphi.$$

Здесь $k_N=N(ah)^{-1}$, $a>0$, $h>0$, R — расстояние между точками $x=(r,\,\theta)$ и $y=(a,\,\varphi)$, $\widetilde{R}$ — расстояние между точками y и $\widetilde{y}=(b,\,0)$, так что

$$R^2=r^2+a^2-2ar\cos(\varphi-\theta),$$
$$\widetilde{R}^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi,\quad b<a.$$

Предполагается, что $h>2$. Показано, что можно заменить функции Ханкеля их асимптотиками при $k_NR\to\infty$, так что достаточно исследовать интегралы вида

$$\begin{gathered} f_{\pm N}=\int\limits_0^{2\pi}\exp\{iNS_1(\varphi)\}\,g\,d\varphi,\\ \widetilde{f}_{\pm N}=\int\limits_0^{2\pi}\exp\{iNS_2(\varphi)\}g\,d\varphi,\\ S_1(\varphi)=(R+a\cos\varphi)(ah)^{-1}\mp\varphi,\\ S_2(\varphi)=(R+\widetilde{R})(ah)^{-1}\mp\varphi. \end{gathered}\tag{5.49}$$

Функция g слабо зависит от k_N (например, разлагается в асимптотический ряд по степеням k_N^{-1}), голоморфна в достаточно большой области комплексной плоскости φ, содержащей вещественную ось, и 2π-периодична по φ.

Короче говоря, функция g играет подчиненную роль по отношению к фазе S.

Условие $h>2$ приводит к тому, что функции S_i не имеют вещественных стационарных точек и потому интегралы $f_{\pm N}$, $\tilde{f}_{\pm N}$ экспоненциально убывают при $N\to\infty$.

Точки перевала функции S_1 определяются из уравнения

$$\frac{r}{R}\sin(\varphi-\theta)-\sin\varphi=\pm h, \tag{5.50}$$

которое эквивалентно алгебраическому уравнению 8-й степени относительно неизвестной $z=e^{i\varphi}$. Его удается приближенно решить лишь в некоторых частных случаях.

1°. Если $r/a\ll 1$, то уравнение (5.50) имеет вид $\sin\varphi=\mp h$ с точностью до $O(r/a)$. При знаке минус искомая точка перевала есть $\varphi=\ln(\sqrt{h^2-1}+h)+O(r/a)$, так что

$$\frac{1}{N}\ln|f_N|\sim\sqrt{h^2-1}/h-\ln\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)$$

с остаточным членом порядка $O(\ln N/N)$. При этом достаточно условия $h>1$ вместо $h>2$.

2°. Если $r/a\gg 1$, то

$$\sin(\varphi-\theta)-\sin\varphi=\pm h+O(a/r),$$

поэтому при $\theta\neq 0$

$$\frac{1}{N}\ln|f_N|\sim\sqrt{h_\theta^2-1}\Big/h_\theta-\ln\left(h_\theta+\sqrt{h_\theta^2-1}\right),$$
$$h_\theta=h/\sin\theta/2$$

с точностью до $O(\ln N/N)$. При $\theta=0$

$$\frac{1}{N}\ln|f_N|\sim\ln(a/(4hr)).$$

Асимптотика неравномерна по θ. Заметим, что величина $\ln|f_N|/N$ стабилизируется при $r\to\infty$ и максимальна при $\theta=\pi$:

$$\frac{1}{N}\ln|f_N(\infty,\pi,h)|\sim\frac{\sqrt{h^2-4}}{2h}-\ln\frac{h+\sqrt{h^2-4}}{2}.$$

3°. Если $h\gg 1$, то $\sin\varphi\to\infty$ при $h\to\infty$ в уравнении (5.50) и

$$\frac{1}{N}\ln|f_N|\sim-\ln h$$

независимо от r, θ.

Точки перевала функции $S_2(\varphi)$ определяются из уравнения

$$\frac{r\sin(\varphi-\theta)}{R}+\frac{b\sin\varphi}{\hat{R}}=\pm h,$$

которое эквивалентно алгебраическому уравнению 16-й степени.

4°. $b=0$. В этом случае

$$\frac{1}{N}\ln|f_N|\sim-|f(\alpha)-f(\beta)|,\quad r<ah,$$

$$\frac{1}{N}\ln|f_N|\sim f(\beta),\qquad r>ah,$$

$$f(x)=\operatorname{th}x-x,\quad \operatorname{ch}\alpha=(ah)/r,\quad \operatorname{ch}\beta=h.$$

Более точные асимптотики для $f_{\pm N}$ приведены в [92].

5°. Если $r/a\ll 1$, то $\sin\varphi\sim\pm h\hat{R}b^{-1}$ и

$$\frac{1}{N}\ln|f_N|\sim\sqrt{t^2-1}/t-\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right),$$

$$t=(ah^2+\sqrt{D})/b,\quad D=(h^2-1)(a^2h^2-b^2).$$

В [79] исследован интеграл вида

$$I_j^n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_K\exp\left[ij\varphi-in\alpha\varphi+nc_p\varphi^p(1+O(\varphi))\right](1-e^{i\varphi})^{-1}d\varphi. \tag{5.51}$$

Здесь K — контур: $\varphi=\delta e^{i\theta}$, $\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $|j|$, α, c_p, δ — положительные постоянные, $\delta>0$ мало. Точки перевала определяются из уравнения

$$j/n+pc_p\varphi^{p-1}(1+\varphi Q(\varphi))=0.$$

Предполагается, что $|j-\alpha n|n^{-1/p}\gg 1$. Тогда точки перевала имеют вид при $j/n\to 0$

$$\varphi_k=\left(\frac{j}{nc_p}\right)^{1/(p-1)}\exp\left\{\frac{(2k+1)\pi i}{p-1}\right\}\left[1+O\left(\left(\frac{j}{n}\right)^{1/(p-1)}\right)\right].$$

Остальные корни стремятся при $j/n\to 0$ к корням уравнения $1+\varphi Q(\varphi)=0$. При $0<\delta\ll 1$ в окрестности точки $\varphi=0$ лежит ровно $p-1$ точек перевала подынтегральной функции (5.51). Будем предполагать, что корни уравнения $1+\varphi Q(\varphi)$ лежат вне 2δ-окрестности точки $\varphi=0$. Сделаем замену

$$\varphi=\left(\frac{|j|}{n}\right)^{1/(p-1)}t=\varepsilon t,\quad |j|\left(\frac{|j|}{n}\right)^{1/(p-1)}=A,$$

и рассмотрим интегралы

$$\tilde{I} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{K/\varepsilon}(1-e^{i\varphi})^{-1}\exp\left[A\left[(i\operatorname{sgn} j)\varphi + c_p\varphi^p(1+O(\varepsilon\varphi))\right]\right]d\varphi,$$

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\varphi^{-1}\exp\left[A\left[(i\operatorname{sgn} j)\varphi + c_p\varphi^p\right]\right]d\varphi,$$

где γ — контур $[\delta/\varepsilon,\ \infty)\cup K/\varepsilon\cup(-\infty,\ -\delta/\varepsilon]$. При $\varepsilon \ll 1$ интеграл I есть возмущение интеграла $\tilde{I}$. При $A\to\infty$, $n\to\infty$, $|j-\alpha n|\leqslant\delta\theta n$ имеем

$$\tilde{I} = \sum_k \frac{\exp\left[AS(\tilde{\varphi}_k)\right]}{\varphi_k\sqrt{2\pi AB_k}}\left(1+R_k^1\right)+R_2,$$

$$S = (i\operatorname{sgn} j)\varphi + \sum_{p=1}^{\infty} c_j\varphi^j,\quad B_k = S''(\tilde{\varphi}_k),$$

$$\tilde{\varphi}_k = \varphi_k(1+O(\varepsilon)),\quad \operatorname{Re}\left[(i\operatorname{sgn} j)\varphi_k + c_p\varphi_k^p\right]\leqslant 0,$$

$$|R_k^1|\leqslant c_1/A,\quad |R_2|\leqslant c_2\exp\{-c_3A\},$$

где $c_j>0$. Интегралы вида (5.51) возникают при решении линейной разностной схемы с постоянными коэффициентами

$$\sum_{|l|<k} a_l' u_{j+l}^{n+1} = \sum_{|l|<k} a_l^0 u_{j+1}^n$$

с начальными данными типа «ступеньки»: $u_j^0=0,\ j\leqslant 0$; $u_j^0=1,\ j\geqslant 1$.

8. Асимптотика функции Линделёфа и ее коэффициентов Тейлора. Пусть $P_\lambda(z)$ — каноническое произведение, отвечающее последовательности нулей $z_n=-n^{1/\lambda}$, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ \lambda>0$, т. е.

$$P_\lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n^{1/\lambda}}\right)\exp\left\{\sum_{k=1}^{q}\frac{z^k}{k}\right\},$$

где $q=[\lambda]$ — целая часть λ. Функция $P_\lambda(z)$ — целая,

$$P_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Ее асимптотика и асимптотика коэффициентов Тейлора исследованы в [98]. Введем обозначение

$$\xi(t) = \int_0^t \left([x] - x + \frac{1}{2}\right) dx, \quad t \geqslant 0,$$

где $[x]$ — целая часть x. Пусть D — область $-\pi + \delta < \arg z < \pi - \delta$, $\delta > 0$.

1°. Пусть λ — нецелое. Тогда при $z \in D$

$$\ln P_\lambda(z) = (\pi \operatorname{cosec} \pi\lambda) z^\lambda + \sum_{m=1}^{q} \frac{(-1)^m}{m} \zeta(m/\lambda) z^m - \frac{1}{2} \ln z - \frac{1}{2\lambda} \ln 2\pi + E(z),$$

где ζ есть дзета-функция Римана,

$$E(z) = \int_0^\infty \frac{[(\lambda^{-1} - 1) z - t]\, \xi(t^\lambda)}{(z + t)^2 t^\lambda} dt.$$

Остаточный член $E(z) \to 0$ при $z \in D$, $|z| \to \infty$, равномерно по $\arg z$.

2°. Пусть $\lambda = q \geqslant 1$ — целое, C — постоянная Эйлера. Тогда при $z \in D$

$$\ln P_\lambda(z) = (-z)^\lambda \ln z + \frac{C-1}{\lambda} (-z)^\lambda + \sum_{m=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^m}{m} \zeta(m/\lambda) z^m - \frac{1}{2} \ln z - \frac{1}{2\lambda} \ln 2\pi + E(z).$$

Для логарифмов во всех формулах берутся их главные значения.

3°. Пусть $\lambda > 1/2$, $\gamma = 2\lambda$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при $|\arg z| \leqslant \delta$ имеем:

1) Если λ нецелое, то

$$P_\lambda(-z) = 2(2\pi)^{-(1/2\lambda)} z^{-1/2} \sin(\pi z^\lambda) \times \exp\left\{\pi \operatorname{ctg}(\pi\lambda z^\lambda) + \sum_{m=1}^{q} \frac{\zeta(m/\lambda)}{m} z^m + E_1(z)\right\}.$$

2) Если $\lambda = q$ целое, то

$$P_\lambda(-z) = 2(2\pi)^{-(1/2\lambda)} \sin(\pi z^\lambda) \times \exp\left\{z^q \ln z + \frac{C-1}{q} z^q + \sum_{m=1}^{q-1} \frac{\zeta(m/\lambda)}{m} z^m + E_1(z)\right\}.$$

Здесь

$$E_1(z) = -\frac{\gamma^2}{2\pi}\int_0^\infty X(t, z)\left(\int_{-\pi+\pi/\gamma}^{\pi-\pi/\gamma} \operatorname{Re} E(te^{i\theta})\, d\theta\right) dt/t,$$

$$X(t, z) = t^{\gamma} z^{\gamma} (t^{\gamma} + z^{\gamma})^{-2}.$$

При этом $E_1(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \delta$, равномерно по $\arg z$.

4°. Пусть $\lambda > 1$ — нецелое, $[\lambda] = q$. Положим

$$J = \{k: -q/2 \leqslant k \leqslant \pi/2\}, \qquad q \text{ четно}$$

$$J = \{k: -(q+1)/2 \leqslant k \leqslant (q-1)/2\}, \quad q \text{ нечетно}.$$

Пусть $\theta_k = 2k\pi/\lambda$, q четно, $\theta_k = (2k+1)\pi/\lambda$, q нечетно, где $k \in J$, и $\theta_* = q\pi/\lambda$. Положим

$$\alpha_k = (-1)^{q+1} q^{-1} \zeta(q/\lambda) [\cos q\theta_k - \cos q\theta_{k+1}],$$

$$\delta = \frac{1}{4}\pi\left(1 - q\lambda^{-1}\right).$$

Существует $r_0 > 0$ такое, что при $r \geqslant r_0$ функция $|P_\lambda(re^{i\theta})|$ имеет ровно $q+1$ точек локального максимума на отрезке $[-\pi, \pi]$, которые лежат в интервалах $|\theta - \theta_k| \leqslant \delta\,(k \in J)$. Если $\beta_k(r)$ — точка из такого интервала, то

$$\beta_k \to \theta_k \qquad (r \to \infty, \quad k \in J),$$

$$|P_\lambda(re^{i\beta_k})/P_\lambda(re^{i\beta_{k+1}})| = O\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_k r^q\right\}\right) \quad (r \to \infty)$$

при всех $k \geqslant 0$ таких, что $k \in J$, $(k+1) \in J$.

При $r \gg 1$, $\max\limits_\theta |P_\lambda(re^{i\theta})|$ достигается ровно в двух точках $\pm\theta_*$.

Эти факты позволяют исследовать асимптотику коэффициентов Тейлора функции $P_\lambda(z)$ с помощью метода перевала.

5°. Пусть $\lambda > 1$ нецелое. Тогда при $n \to \infty$

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda n}}\left[\frac{n\,|\sin\pi\lambda|}{\pi\lambda}\right]^{-(n+1/2)\lambda} (2\pi)^{-1/(2\lambda)} \times$$

$$\times \exp\left[n/\lambda + O\left(n^{q/\lambda}\right)\right][\cos H(n) + o(1)],$$

где $H(n)$ неограничена и строго монотонно убывает при $n \gg 1$.

Здесь $H(n) = H(r_n)$, где

$$H(r) = \pi r^{\lambda} \operatorname{cosec} \pi\lambda \sin \lambda\theta_{\omega} + \sum_{m=1}^{q} \frac{(-1)^m}{m} \zeta(m/\lambda) r^m \sin m\theta_{\omega} - (n + 1/2)\theta_{\omega} + \operatorname{Im} E(re^{i\theta}),$$

и r_n — корень уравнения $a(r_n) = n$. Функция $a(r)$ имеет вид

$$a(r) = \pi\lambda r^{\lambda} \operatorname{cosec} \pi\lambda \cos \lambda\theta_{\omega} + \sum_{m=1}^{q} (-1)^m \zeta(m/\lambda) r^m \cos m\theta_{\omega} - \frac{1}{2}.$$

§ 6. Асимптотика преобразования Лапласа

В этом параграфе исследуется асимптотика интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp[-S(x) + \lambda x]\, dx \tag{6.1}$$

при комплексных $\lambda \to \infty$. Рассмотрены примеры: $S(x)$ — полином, степенная функция, сумма степенных функций и некоторые другие. Центральным местом в методе перевала является выбор перевального контура. В рассмотренных примерах перевальным контуром является либо сама полуось $[0, \infty)$, либо луч, либо ломаная из двух звеньев, а асимптотика $F(\lambda)$ всегда равна сумме вкладов от конца контура $x = 0$ и от некоторой точки перевала подынтегральной функции.

1. Случай, когда S — степенная функция. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda, \alpha) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^{\alpha}}{\alpha} + \lambda x\right) dx, \tag{6.2}$$

где $\alpha > 1$, $x^{\alpha} > 0$ при $x > 0$. Функция $F(\lambda, \alpha)$ является, очевидно, целой функцией λ. Исследуем асимптотику $F(\lambda, \alpha)$ при комплексных $\lambda \to \infty$.

Лемма 6.1. *Пусть $\alpha > 1$. Тогда асимптотика $F(\lambda, \alpha)$ при $|\lambda| \to \infty$ равномерно по $\arg \lambda$ равна:*

1°. *Вкладу от точки перевала $z_0(\lambda) = \lambda^{1/\alpha - 1}$ при*

$$|\arg \lambda| < \frac{\pi(\alpha - 1)}{2\alpha} - \varepsilon,$$

где для функции $\lambda^{1/\alpha - 1}$ выбрана главная ветвь.

2°. *Вкладу от начала контура при*

$$|\arg(-\lambda)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha} - \varepsilon.$$

3°. *Сумме вкладов от точки перевала $z_0(\lambda)$ и от начала контура при*

$$\frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha} + \varepsilon \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, но фиксированным.

Приведем явные формулы:

$$F(\lambda, \alpha) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k\alpha+1)}{\alpha^k k!} (-\lambda)^{-k\alpha-1}, \tag{6.3}$$

$$|\arg(-\lambda)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha} - \varepsilon;$$

$$F(\lambda, \alpha) \sim \exp\left[(1-\alpha^{-1})\lambda^{\alpha/(\alpha-1)}\right] \sqrt{2\pi} \times \\ \times \left[(\alpha-1)\lambda^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\right]^{-1/2} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k\alpha}{\alpha-1}}\right), \tag{6.4}$$

$$|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha} - \varepsilon,$$

и асимптотика $F(\lambda, \alpha)$ равна сумме выражений (6.3) и (6.4) в оставшемся секторе. Разложения (6.3), (6.4) можно дифференцировать по λ любое число раз. Коэффициенты a_k определяются по формуле

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha-1}{2} y^2\right) c_{2k}(y)\, dy, \tag{6.5}$$

где $c_k(y)$ — коэффициенты разложения по степеням $\sqrt{\mu}$ функции $\exp[\mu c(y/\sqrt{\mu})]$,

$$c(y) = \exp\left(-\frac{(1+y)^\alpha}{\alpha} + y + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{2} y^2\right). \tag{6.6}$$

Выпишем главные члены асимптотики:

$$F(\lambda, \alpha) \sim \sqrt{2\pi}\left[(\alpha-1)\lambda^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\right]^{-1/2}\exp\left[\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right], \tag{6.7}$$

$$|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha} - \varepsilon,$$

$$F(\lambda, \alpha) \sim -\lambda^{-1}, \quad |\arg(-\lambda)| \leqslant \frac{\pi(\alpha+1)}{2\alpha} - \varepsilon, \tag{6.8}$$

и асимптотика $F(\lambda, \alpha)$ равна сумме выражений (6.7), (6.8) в оставшемся секторе. Таким образом, функция $F(\lambda, \alpha)$ экспоненциально возрастает в любом секторе, лежащем строго внутри сектора S_0: $|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha}$, эквивалентна $-1/\lambda$ в любом секторе, лежащем строго внутри дополнительного к S_0 сектора, и асимптотически равна сумме выражений (6.7) и (6.8) в оставшихся секторах.

Положим $\lambda = |\lambda| e^{i\psi}$, $\psi = \arg\lambda$. Делая замену переменной $x \to |\lambda|^{1/(\alpha-1)}x$, получаем

$$F(\lambda, \alpha) = |\lambda|^{1/(\alpha-1)}F_1(\lambda, \alpha),$$

$$F_1(\lambda, \alpha) = \int_0^\infty \exp\left[-|\lambda|^{\alpha/(\alpha-1)}S(x, \psi)\right]dx, \tag{6.9}$$

$$S(x, \psi) = x^\alpha/\alpha - xe^{i\psi}.$$

Интеграл $F_1(\lambda)$ имеет вид (1.1), и естественно ожидать, что его асимптотика при $|\lambda| \to \infty$ и при каждом фиксированном ψ равна сумме вкладов от некоторых точек перевала функции S или от конца $x = 0$ контура интегрирования. Займемся отысканием перевального контура.

1°. Если $\cos\psi \leqslant 0$, то $\min \operatorname{Re} S(x, \psi)$ на полуоси $x \geqslant 0$ достигается только в точке $x = 0$, поскольку

$$d/dx \operatorname{Re} S = x^{\alpha-1} - \cos\psi > 0, \quad x > 0.$$

Следовательно, асимптотика интеграла $F(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$, $|\arg(-\lambda)| \leqslant \pi/2$ равна вкладу от точки $x = 0$. Разлагая экспоненту $\exp(-x^\alpha/\alpha)$ в ряд по степеням x, получаем

$$F(\lambda, \alpha) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\alpha^k k!}\int_0^\infty e^{\lambda x}x^{\alpha k}dx,$$

откуда следует (6.3); строгое обоснование этой формулы вытекает из леммы Ватсона.

2°. Подынтегральная функция в $F_1(\lambda, \alpha)$ экспоненциально убывает в секторе $|\arg z| < \pi/2\alpha$. Точка перевала $z_0(\psi) = \exp(i\psi/(\alpha-1))$ лежит в замыкании этого сектора, если $|\psi| \leqslant \pi(\alpha-1)/(2\alpha)$. По лемме Жордана контур интегрирования в (6.9) можно заменить лучом $l_0(\psi)$: $z = \rho z_0(\psi)$, $0 \leqslant \rho < \infty$, проходящим через точку перевала $z_0(\psi)$. На этом луче имеем

$$\operatorname{Re} S(z, \psi) = h(\rho) \cos\frac{\alpha\psi}{\alpha-1}, \quad h = \frac{\rho^\alpha}{\alpha} - \rho.$$

Так как функция $h(\rho)$ имеет на полуоси $\rho \geqslant 0$ единственную точку минимума $\rho = 1$ и так как $\cos\frac{\alpha\psi}{\alpha-1} \geqslant 0$, то на контуре $l_0(\psi)$ функция $\operatorname{Re} S(z, \psi)$ достигает минимума только в точке перевала $z_0(\psi)$, если $|\psi| < \frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha}$, и $\operatorname{Re} S = 0$ на контуре, если $\psi = \pm\frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha}$. Поэтому контур $l_0(\psi)$ перевальный при $|\psi| \leqslant \frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha}$, и асимптотика $F_1(\lambda, \alpha)$ при $|\lambda| \to \infty$, $|\psi| \leqslant \frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha} - \varepsilon$ равна вкладу от точки перевала $z_0(\psi)$, а при $-\varepsilon \leqslant |\psi| - \frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha} \leqslant \leqslant 0$ — сумме вкладов от этой точки перевала и от конца $z = 0$ контура интегрирования. Вычисляя вклад от точки $z_0(\psi)$, получаем (6.7).

3°. Остается исследовать случай $\frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha} < |\psi| < \frac{\pi}{2}$. Так как $F(\bar{\lambda}, \alpha) = \overline{F(\lambda, \alpha)}$, то достаточно рассмотреть случай $\frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha} < \psi < \frac{\pi}{2}$. Пусть Q — сектор, ограниченный лучами l_0 и $l_{-1}(\psi)$: $z = \rho z_{-1}(\psi)$, $0 \leqslant \rho < \infty$, где $z_{-1}(\psi) = \exp\left[i\,\frac{\alpha - 2\pi}{\alpha-1}\psi\right]$ — точка перевала. Функция $S(z, \psi)$ конформно отображает Q на область $\tilde{Q}$, ограниченную ломаными L_0, L_{-1}. Ломаная L_j $(j = 0, -1)$ состоит из отрезка $L_{j0} = [0, S_j]$, $S_j = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)e^{i\psi}z_j(\psi)$ и луча L_{j1} с вершиной в точке S_j: угол между L_{j0} и L_{j1} в точке S_j равен $3\pi/2$ (рис. 6). Полуось $[0, \infty]$ отображается на линию l с асимптотическим направлением $\arg S = 0$. Пусть L — ломаная, состоящая из отрезка $[0, iA]$, $A \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$, и луча $S = iA + \rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$. Ее прообраз $\tilde{L}$ лежит в секторе $|\arg z| < \pi/2\alpha$, и интеграл $F_1(\lambda, \alpha)$ равен интегралу по линии $\tilde{L}$. Так как $\min \operatorname{Re} S$ на L достигается только на отрезке $[0, iA]$, и в частности, в начальной точке

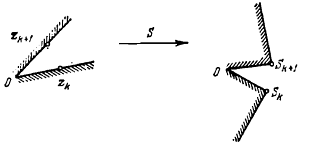

Рис. 6

контура $S = 0$, то $\tilde{L}$ — перевальный контур; тем самым лемма полностью доказана.

Остается вывести формулы (6.7). Ограничимся случаем $\lambda > 0$, так как a_k не зависят от λ. Тогда

$$F(\lambda, \alpha) = \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_0^\infty \exp\left[-\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} S(x, 0)\right] dx.$$

Асимптотика интеграла равна вкладу от точки перевала $x = 1$, лежащей на контуре интегрирования. При $x \approx 1$ имеем $x = 1 + y$, $y \approx 0$ и $S(x, 0) = S(1, 0) - \frac{\alpha - 1}{2} y^2 + c(y)$, где $c(y)$ имеет вид (6.6). Положим $\mu = \lambda^{\alpha/(\alpha-1)}$, тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\lambda^{-1/(\alpha-1)} F(\lambda, \alpha) \approx \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left[-\frac{\alpha-1}{2}\mu y^2 + \mu c(y)\right] dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\delta\sqrt{\mu}}^{\delta\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{\alpha-1}{2} y^2\right) \exp\left[\mu c\left(\frac{y}{\sqrt{\mu}}\right)\right] dy.$$

Разлагая последнюю экспоненту в ряд Тейлора по степеням y и заменяя пределы интегрирования на $\pm\infty$, получаем (6.7). Обоснование этих выкладок было проведено в гл. II, § 2.

Теорема 6.1. *Пусть α, a — фиксированные числа, $\alpha > 1$, $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, и*

$$F(\lambda, \alpha, a) = \int\limits_0^\infty \exp(-ax^\alpha + \lambda x)\, dx. \tag{6.10}$$

Тогда асимптотика $F(\lambda, \alpha, a)$ при $|\lambda| \to \infty$ равномерно по $\arg\lambda$ равна:

1°. *Вкладу от точки перевала $z_0(\lambda) = (\lambda/\alpha a)^{1/(\alpha-1)}$ при $|\arg\lambda - \alpha^{-1}\arg a| \leqslant \frac{\pi(\alpha-1)}{2\alpha} - \varepsilon$.*

2°. *Вкладу от начала контура при $|\arg(-\lambda) + \alpha^{-1}\arg a| \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha} - \varepsilon$.*

3°. *Сумме вкладов от точки перевала $z_0(\lambda)$ и от начала контура в оставшихся секторах.*

Здесь $|\arg a| \leqslant \pi/2$ и для функции $z_0(\lambda)$ выбрана главная ветвь.

Выразим $F(\lambda, \alpha, a)$ через интеграл (6.2). Подынтегральная функция в интеграле (6.10) экспоненциально убывает в секторе $|\alpha \arg z + \arg a| < \pi/2$, и по лемме Жордана F можно заменить интегралом по любому лучу с вершиной в точке $z = 0$, лежащему в этом секторе. Следовательно, функция $F(\lambda, \alpha, a)$ равна интегралу по лучу $z = r\exp\left(-\frac{i}{\alpha}\arg a\right)$, т. е.

$$F(\lambda, \alpha, a) = \exp\left(-\frac{i}{\alpha}\arg a\right)\int\limits_0^\infty \exp(-|a|r^\alpha + \lambda r e^{-i\arg a/\alpha})\, dr.$$

Делая замену $r = x(\alpha|a|)^{-1/\alpha}$, получаем

$$\begin{gathered} F(\lambda, \alpha, a) = (\alpha|a|)^{-1/\alpha}\exp\left(-\frac{i}{\alpha}\arg a\right)F(\mu, \alpha), \\ \mu = \lambda(\alpha|a|)^{-1/\alpha}\exp\left(-\frac{i}{\alpha}\arg a\right). \end{gathered} \tag{6.11}$$

Из этого соотношения и леммы 6.1 следует теорема.

Выпишем асимптотические разложения. При условиях п. 2° теоремы 6.1 имеем

$$F(\lambda, \alpha, a) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{(-a)^k\Gamma(\alpha k + 1)}{k!}(-\lambda)^{-\alpha k - 1}, \tag{6.12}$$

где для функции $(-\lambda)^a$ выбрана ветвь, положительная при $\lambda \in (-\infty, 0)$. Формула (6.12) доказывается точно так же, как и формула (6.3). При условиях п. 1° теоремы

$$F(\lambda) \sim C_1 \lambda^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}} \exp\left(C_2 \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right), \quad (6.13)$$

$$\begin{gathered} C_1 = \sqrt{2\pi}[(\alpha-1)(\alpha a)^{1/(\alpha-1)}]^{-1/2}, \\ C_2 = (1-\alpha^{-1})(\alpha a)^{-1/(\alpha-1)}. \end{gathered} \quad (6.14)$$

2. Случай, когда $S(x)$ — полином или сумма степенных функций. Этот случай приводится к теореме 6.1. Действительно, рассмотрим интеграл (6.1), где $S(z)$ — полином:

$$S(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \quad (6.15)$$

и $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 2$. Пусть интеграл (6.1) сходится абсолютно. Делая замену $x \to |\lambda|^{1/(n-1)} x$, получаем

$$F(\lambda) = |\lambda|^{1/(n-1)} \int_0^{\infty} \exp\left[-|\lambda|^{n/(n-1)} S(x, \psi, \varepsilon)\right] dx,$$

где обозначено

$$\psi = \arg\lambda, \quad \varepsilon = |\lambda|^{-1/(n-1)},$$

$$S(x, \psi, \varepsilon) = -a_0 x^n - a_1 \varepsilon x^{n-1} - \ldots - a_n \varepsilon^n + x e^{i\psi}.$$

При $\varepsilon = 0$ имеем $S = -a_0 x^n + e^{i\psi} x$, т. е. эта функция имеет вид (6.9). Поэтому при $|\lambda| \gg 1$ полином $S(z)$ можно рассматривать как малое возмущение степенной функции $a_0 z^n$, и все утверждения теоремы 6.1 остаются в силе для интеграла (6.1).

Нам понадобится только лемма, устанавливающая связь между точками перевала полинома $-S(z) + \lambda z$ и функции $-a_0 z^n + \lambda z$ при $\lambda \to +\infty$.

Лемма 6.2. *Пусть $z_j^{(0)}(\lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$,— все точки перевала функции $-a_0 z^n + \lambda z$ ($\lambda \neq 0$). Тогда существует $r_0 > 0$ такое, что при $|\lambda| > r_0$ все точки перевала полинома $S(z) - \lambda z$ имеют вид*

$$z_j(\lambda) = z_j^{(0)}(\lambda)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kj} \lambda^{-k/(n-1)}\right), \quad (6.16)$$

где все ряды сходятся при $|\lambda| > r_0$.

Пусть $z_0^{(0)}(\lambda) = (\lambda/(na_0))^{1/(n-1)}$ и $z_0(\lambda)$ — соответствующая (см. (6.16)) точка перевала полинома $-S(z) + \lambda z$.

Из теоремы 6.1 и проведенных выше рассмотрений вытекает

Теорема 6.2. *Пусть $S(z)$ — полином* (6.15), *интеграл* (6.1) *сходится. Тогда при $|\lambda| \to \infty$ равномерно по $\arg\lambda$ асимптотика интеграла* (6.1) *равна*:

1°. *Вкладу от точки перевала $z_0(\lambda)$ при*

$$\left|\arg\lambda - \frac{1}{n}\arg a_0\right| < \frac{\pi(n-1)}{2n} - \varepsilon. \tag{6.17}$$

2°. *Вкладу от конца контура $x = 0$ при*

$$\left|\arg\left(-\lambda + \frac{1}{n}\arg a_0\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \varepsilon. \tag{6.17'}$$

3°. *Сумме вкладов от точки перевала $z_0(\lambda)$ и от конца контура в оставшихся секторах.*

В случае 1° имеем

$$F(\lambda) \sim \exp\left[\lambda^{\frac{n}{n-1}}(C_1 + f_1(\lambda))\right] C_2\lambda^{-\frac{n-2}{2(n-1)}}[1 + f_2(\lambda)], \tag{6.18}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)(na_0)^{-\frac{1}{n-1}},\\ C_2 &= \sqrt{2\pi}\left[(n-1)(na_0)^{-\frac{1}{n-1}}\right]^{-1/2},\\ f_1(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_{k_1}\lambda^{-\frac{k}{n-1}},\\ f_2(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_{k2}\left(\lambda^{-\frac{1}{n-1}}\right)\lambda^{-\frac{kn}{n-1}}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Здесь $f_1(\lambda)$, $d_{k2}\left(\lambda^{-\frac{1}{n-1}}\right)$ — сходящиеся ряды при $|\lambda| \geqslant r_0$, $r_0 > 0$ достаточно большом, и $f_2(\lambda)$ — асимптотический ряд. Главный член асимптотики получается из формулы (6.18) вычеркиванием функции $f_2(\lambda)$.

В случае 2° имеем

$$F(\lambda) \sim \lambda^{-1}e^{-a_n}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\lambda^{-k}\right). \tag{6.20}$$

Аналогично исследуется случай

$$S(z) = a_0z^{\alpha_0} + a_1z^{\alpha_1} + \ldots + a_kz^{\alpha_k},$$

где $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_k$, $\alpha_0 > 1$, $\operatorname{Re} a_0 \geqslant 0$, и для функций z^{α_j} выбраны главные ветви. Асимптотика $F(\lambda)$ также определяется вкладом от точки перевала такой, что $z_0(\lambda) \sim (\lambda/\alpha a_0)^{1/(\alpha-1)}$ ($|\lambda| \to \infty$), или от точки $z = 0$.

3. Случай, когда $S = -ax \ln x$. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\lambda, a) = \int_0^\infty \exp(-ax \ln x + \lambda x)\, dx, \tag{6.21}$$

где $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, $a \neq 0$. Функция $\Phi(\lambda, a)$ является целой функцией λ при каждом фиксированном a, и

$$\Phi(\lambda, a) = \frac{1}{a} \Phi\left(\frac{\lambda}{a} + \ln a, 1\right), \tag{6.22}$$

где для $\ln a$ выбрана главная ветвь. Пусть $a = |a| e^{i\alpha}$, $|\alpha| < \pi/2$. Интеграл $\Phi(\lambda, 1)$ можно заменить интегралом по лучу $z = at$, $0 \leqslant t < \infty$, так что

$$\Phi(\lambda, 1) = a\Phi(\lambda a - a \ln a, a). \tag{6.22$'$}$$

Тем самым (6.22) доказано при $\operatorname{Re} a > 0$. Пусть $\operatorname{Re} a = 0$, $a \neq 0$, тогда интеграл (6.21) абсолютно сходится и является голоморфной функцией λ в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Тождество (6.22$'$) при $\operatorname{Re} \lambda < 0$ выполняется. Так как левая часть этого тождества — целая функция λ, то функция $\Phi(\lambda, a)$ при $\operatorname{Re} a = 0$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость λ как целая функция, и это продолжение дается формулой (6.22$'$).

Таким образом, чтобы исследовать асимптотику функции $\Phi(\lambda, a)$ при $|\lambda| \to \infty$, достаточно исследовать асимптотику функции $\Phi(\lambda, 1)$. Подынтегральная функция из (6.21) при $a = 1$ имеет единственную точку перевала $z_0(\lambda) = e^{\lambda-1}$.

Теорема 6.3. *Асимптотика* $\Phi(\lambda, 1)$ *равна*:

1°. *Вкладу от точки перевала* $z_0(\lambda) = e^{\lambda-1}$ *при* $|\operatorname{Im} \lambda| < \pi/2$, $\operatorname{Re} \lambda \to +\infty$.

2°. *Вкладу от конца контура* $x = 0$ *при* $\operatorname{Re} \lambda \to +\infty$, $|\operatorname{Im} \lambda| > \pi/2$ *или при* $\operatorname{Re} \lambda \to -\infty$, *равномерно по* $\operatorname{Im} \lambda$ *при* $|\operatorname{Im} \lambda| \leqslant \mathrm{const}$.

Асимптотические разложения в случаях 1°, 2° соответственно имеют вид

$$\Phi(\lambda, 1) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{(\lambda-1)/2} e^{e^{\lambda-1}} \left(1 + \sum_{k=1}^\infty a_k e^{-k\lambda/2}\right), \tag{6.23}$$

$$\Phi(\lambda, 1) \sim -\lambda^{-1} \left(1 + \sum_{k=1}^\infty b_k (\ln \lambda)^{-k}\right). \tag{6.24}$$

Контур интегрирования в интеграле $\Phi(\lambda, 1)$ можно заменить лучом $\arg z = \varphi$, если $|\varphi| < \pi/2$. Пусть $|\operatorname{Im}\lambda| < \pi/2$, тогда $\operatorname{Re} e^{\lambda} > 0$. Заменяя контур интегрирования лучом $z = e^{\lambda}t$, $0 \leqslant t < \infty$, проходящим через точку перевала $z_0(\lambda)$, получаем

$$\Phi(\lambda, 1) = e^{\lambda}\int\limits_0^{\infty} \exp(-e^{\lambda}t\ln t)\,dt. \qquad (6.25)$$

Функция $S = -t\ln t$ на полуоси $t \geqslant 0$ достигает наибольшего значения только в точке $t = e^{-1}$, которая является невырожденной точкой перевала. Тем самым утверждение 1° доказано, так как контур интегрирования в (6.25) является перевальным (см. теорему 1.4). Вычисляя вклад, получаем (6.23).

Если $\operatorname{Re}\lambda < 0$, функция $|e^{\lambda x}|$ достигает максимума в точке $x = 0$, так что полуось $x \geqslant 0$ является перевальным контуром, и основной вклад в асимптотику $\Phi(\lambda, 1)$ вносит точка $x = 0$. Представим $\Phi(\lambda, 1)$ в виде суммы интегралов по интервалам $[0, 1/2]$, $[1/2, \infty)$; последний интеграл имеет порядок $O(\exp(-c|\operatorname{Re}\lambda|))$, $c > 0$. В первом интеграле разложим $\exp(-x\ln x)$ в ряд Тейлора, тогда

$$\Phi(\lambda, 1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}\int\limits_0^{1/2} e^{\lambda x}(x\ln x)^k dx + \int\limits_0^{1/2} e^{-\lambda x}\psi_N(x)\,dx + O\left(e^{-c|\operatorname{Re}\lambda|}\right),$$

где для остаточного члена выполняется оценка

$$|\psi_N(x)| \leqslant C_N|x\ln x|^{N+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2.$$

Следовательно, модуль интеграла, содержащего ψ_N, не превосходит величины

$$C_N\int\limits_0^{1/2} \exp(-x|\operatorname{Re}\lambda|)\,|x\ln x|^{N+1}dx \leqslant C_{N,\delta}\int\limits_0^{1/2} \exp(-x|\operatorname{Re}\lambda|)\,x^{N+1-\delta}dx = O\left(\lambda^{-N-2+\delta}\right),$$

где $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым,

$|\arg(-\lambda)| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$. Далее, при этих значениях λ

$$\int\limits_0^{1/2} e^{\lambda x}(x\ln x)^k dx = \lambda^{-k-1}\ln\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_{nk}(\ln\lambda)^{-n}$$

(см. гл. II, § 1). Тем самым утверждение 2° доказано. Асимптотическое разложение (6.24) пригодно также при $\operatorname{Re}\lambda \to -\infty$ равномерно по $|\operatorname{Im} z| \leqslant C$ при любом C.

Остается исследовать случай $|\operatorname{Im}\lambda| > \pi/2$, $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$. Положим $\lambda = \sigma + i\tau$ и заменим контур интегрирования контуром $l = l_1 \cup l_2$, где l_1 — отрезок $[0, -1]$, l_2 — луч $z = -1 + iy$, $0 \leqslant y < \infty$, и соответственно положим $\Phi(\lambda, 1) = \Phi_1(\lambda, 1) + \Phi_2(\lambda, 1)$. Оценим последний интеграл. При $z \in l_2$ имеем

$$\operatorname{Re}(-z\ln z + \lambda z) = -\sigma + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + y[\arg(iy-1) - \tau].$$

Так как $\lim\limits_{y\to+\infty}\arg(iy-1) = \pi/2$, то интеграл Φ_2 сходится при $\tau > \pi/2$, и

$$|\Phi_2(\lambda, 1)| \leqslant e^{-\sigma}\int\limits_0^{\infty}\exp\Big[y(\arg(iy-1) - \tau) + \\ + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\Big]dy \leqslant Ce^{-\sigma}. \quad (6.26)$$

Далее,

$$\Phi_1(\lambda, 1) = \int\limits_0^1 e^{-\sigma x}\exp[x\ln x + i(\pi-\tau)x]\,dx,$$

и асимптотика этого интеграла равна вкладу от точки $x = 0$. Разлагая экспоненту в ряд Тейлора, получаем

$$\Phi_1(\lambda, 1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int\limits_0^1 e^{-\sigma x}[x\ln x + ix(\pi-\tau)]^k\,dx.$$

Асимптотика таких интегралов была вычислена в гл. II, § 1.

Эти же рассуждения справедливы при $\tau < -\pi/2$, $\sigma \to +\infty$, так как $\overline{\Phi(\lambda, 1)} = \Phi(\bar\lambda, 1)$.

Следующие результаты получены в [48].

Пусть $\alpha > 0$ — параметр. Пусть функция $g(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, не обращается в нуль на отрезке $[0, 1]$ и $|g(z)| \leqslant e^{\delta|z|}$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_1^\infty g(x)\exp(-\lambda\alpha x)\sin\left(\lambda\sqrt{x^2-1}\right)dx =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\, g\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)(1+\alpha^2)^{-1/4}\exp\left(-\lambda\sqrt{1+\alpha^2}\right)\times$$
$$\times[1+O(\lambda^{-1})].$$

Действительно, этот интеграл равен

$$\frac{1}{2i}\int\limits_\gamma g(z)\exp\left[\lambda\left(-\alpha z + i\sqrt{z^2-1}\right)\right]dz,$$

где γ — контур, огибающий разрез $[1, +\infty)$ по часовой стрелке и $\sqrt{z^2-1}\geqslant 0$ на верхнем берегу разреза. Фазовая функция $S(z)$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ единственную точку перевала $z_0(\alpha) = \alpha/\sqrt{1+\alpha^2}$. Линия наискорейшего спуска l имеет асимптотами лучи $\arg z = \operatorname{arctg}(1/\alpha)$, $\arg z = 2\pi - \operatorname{arctg}(1/\alpha)$, и контур γ можно продеформировать так, чтобы он проходил через точку перевала вдоль дуги l.

Пусть предыдущие условия выполнены и $m \geqslant 0$ — целое. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_1^\infty g(x)\exp(-\lambda\alpha x)J_{2m}\left(\lambda\sqrt{x^2-1}\right)dx =$$
$$= \frac{(-1)^m g\left(\alpha/\sqrt{1+\alpha^2}\right)}{\lambda\sqrt{1+\alpha^2}}\exp\left(-\lambda\sqrt{1+\alpha^2}\right)[1+O(\lambda^{-1})].$$

Пусть $g(z)$ — целая функция экспоненциального типа, не имеющая нулей на полуоси $(-\infty, 0]$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\int\limits_0^\infty g(x)\exp(-\lambda\alpha x)\sin\left(\lambda\sqrt{x}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\, g\left(-\frac{1}{4\alpha^2}\right)\exp(-\lambda/(4\alpha))\left[1+O(\lambda^{-1})\right].$$

Пусть предыдущие условия выполнены и $1 < \nu < 3/2$.

Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^\infty g(x) \exp[-\lambda(\alpha x + x^\nu \cos \pi\nu)] \sin(\lambda x^\nu \sin \pi\nu)\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda(\nu-1)}} \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{(\nu-2)/2(\nu-1)} g\left[-\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{1/\nu-1}\right] \times$$

$$\times \exp\left[\lambda(1-\nu)\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu/\alpha-1}\right][1 + O(\lambda^{-1})].$$

6.1 [15]. Пусть $\rho > 0$,

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda t} dt}{\Gamma(t/\rho + 1)}.$$

Тогда при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$, $|\operatorname{Im}\lambda| < \pi\rho$

$$F(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + \exp[\rho e^{\lambda/\rho} + O(e^{-\lambda})],$$

а при $\lambda \to \infty$ вне полуполосы $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $|\operatorname{Im}\lambda| < \pi\rho$

$$F(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

§ 7. Асимптотика преобразования Фурье

В этом параграфе исследуется асимптотика интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[S(x) + i\lambda x]\, dx \tag{7.1}$$

при комплексных $\lambda \to \infty$. Рассмотрены примеры: $S(x)$ — полином, рациональная функция, экспонента и некоторые другие.

1. Случай, когда S — степенная функция. Рассмотрим эталонный интеграл

$$\Phi(\lambda, 2m) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^{2m}}{2m} + i\lambda x\right) dx, \tag{7.2}$$

где $m \geqslant 2$ — целое число (при $m = 1$ интеграл берется). Точки перевала функции $S(z, \lambda) = -z^{2m}/2m + i\lambda z$ имеют вид $z_k(\lambda) = (i\lambda)^{1/(2m-1)}$, $0 \leqslant k \leqslant 2m-2$.

Лемма 7.1. *Асимптотика интеграла* $\Phi(\lambda, 2m)$ *при* $|\lambda| \to \infty$ *равна*:

1°. *Вкладу от точки перевала*

$$z_0(\lambda) = |\lambda|^{1/(2m-1)} \exp\left[\frac{i(\psi + \pi/2)}{2m-1}\right], \quad \psi = \arg \lambda,$$

при $-\pi + \varepsilon \leqslant \arg \lambda \leqslant -\varepsilon$.

2°. *Вкладу от точки перевала*

$$z_{m-1}(\lambda) = -|\lambda|^{1/(2m-1)} \exp\left[\frac{i(\psi - \pi/2)}{2m-1}\right]$$

при $\varepsilon \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi - \varepsilon$.

3°. *Сумме вкладов от точек перевала* $z_0(\lambda)$, $z_{m-1}(\lambda)$ *при* $|\arg(\pm\lambda)| \leqslant \varepsilon$.

Здесь $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, но не зависящим от λ.

Как обычно, полученные асимптотические формулы можно дифференцировать по λ любое число раз.

Прежде чем доказывать лемму, проанализируем асимптотику функции $\Phi(\lambda, 2m)$. Вклады Φ_0, Φ_{m-1} точек z_0, z_{m-1} равны

$$\Phi_j \sim \exp\left[A_j(1 - 1/2m)|\lambda|^{\frac{2m}{2m+1}}\right]\sqrt{\frac{2\pi}{2m-1}} \times \\ \times |\lambda|^{-\frac{m-1}{2m-1}} B_j \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} \lambda^{-\frac{2mk}{2m-1}}\right]. \quad (7.3)$$

Здесь

$$A_0 = \exp\left[\frac{i2m(\psi + \pi/2)}{2m-1}\right], \\ B_0 = \exp\left[-\frac{i(m-1)(\psi + \pi/2)}{2m-1}\right], \quad (7.4)$$

причем $\psi = \arg \lambda$, $-\pi \leqslant \psi \leqslant 0$. Далее,

$$A_{m-1} = \exp\left[\frac{i2m(\psi - \pi/2)}{2m-1}\right], \\ B_{m-1} = \exp\left[-\frac{i(m-1)(\psi - \pi/2)}{2m-1}\right], \quad (7.5)$$

и в этих формулах $\psi = \arg \lambda$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$.

Такой разнобой в формулах вызван тем, что главный член вклада имеет вид $\mathrm{const}(z^{2m-2})^{-1/2} \exp(-z^{2m}/2m + i\lambda z)$. Поэтому нам приходится выбирать ветви двух различных многозначных функций от λ: $z_0(\lambda)$, $\sqrt{z_0^{2m-2}(\lambda)}$ для вклада Φ_0 и аналогично для Φ_{m-1}.

В частности, при вещественных $\lambda\to+\infty$ имеем

$$\Phi(\lambda, 2m) = 2\sqrt{\frac{2\pi}{2m-1}}\,\lambda^{-\frac{m-1}{2m-1}}\times \\ \times\exp\left[-\left(1-\frac{1}{2m}\right)\sin\frac{\pi}{2(2m-1)}\lambda^{\frac{2m}{2m-1}}\right]\times \\ \times\left[\cos\left(\left(1-\frac{1}{2m}\right)\lambda^{\frac{2m}{2m-1}}\cos\frac{\pi}{2(2m-1)}\right)+O\left(\lambda^{-\frac{2m}{2m-1}}\right)\right]. \quad (7.6)$$

Функция $\Phi(\lambda, 2m)$ является, таким образом, целой функцией λ порядка роста $2m/(2m-1)$ и конечного типа. Ее *индикатриса* $h(\psi)\overset{\text{def}}{=}\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\left[\ln|\Phi(re^{i\psi}, 2m)|r^{-2m/(2m-1)}\right]$ равна

$$h(\psi)=\left(1-\frac{1}{2m}\right)\cos\frac{2m(\psi-\pi/2)}{2m-1},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\pi, \\ h(-\psi)=h(\psi). \quad (7.7)$$

Следовательно, функция $\Phi(\lambda, 2m)$ экспоненциально растет вне секторов $|\arg(\pm\lambda)|\leqslant\pi/4m$ и экспоненциально убывает в этих секторах. Она имеет бесконечно много вещественных нулей и не более конечного числа невещественных нулей.

Функция $\exp(-z^{2m}/2m)$ экспоненциально убывает в секторах $S_\pm$: $|\arg(\pm z)|<\pi/4m$. Точка перевала $z_0(\lambda)$ при $-\pi+\pi/4m\leqslant\psi\leqslant-\pi/4m$, $\psi=\arg\lambda$, лежит внутри или на границе секторов, и по лемме Жордана контур интегрирования в (7.2) можно заменить прямой $l_+(\lambda)$: $z=\rho\exp\left[\frac{i(\psi+\pi/2)}{2m-1}\right]$, $-\infty<\rho<\infty$, которая проходит через точку перевала $z_0(\lambda)$. На $l_+(\lambda)$ имеем

$$\operatorname{Re}S(z,\lambda)=\left(|\lambda|\rho-\frac{\rho^{2m}}{2m}\right)\cos\frac{2m(\psi+\pi/2)}{2m-1}.$$

Последний косинус отрицателен, если $z_0(\lambda)$ лежит внутри S_+, и равен нулю, если эта точка лежит на границе S_+, а функция $|\lambda|\rho-\rho^{2m}/2m$ имеет единственную стациопарную точку $\rho = |\lambda|^{1/2m}$, которая является точкой максимума. Следовательно, прямая $l_1(\lambda)$ является перевальным контуром при указанных выше $\arg\lambda$, и асимптотика $\Phi(\lambda, 2m)$ равна вкладу от точки перевала $z_0(\lambda)$. Так как

$$\Phi(\lambda, 2m) = \Phi(-\lambda, 2m), \quad \overline{\Phi(\lambda, 2m)} = \Phi(-\bar{\lambda}, 2m), \quad (7.8)$$

то тем самым асимптотика интеграла (7.2) найдена вне секторов $D_\pm$: $|\arg(\pm\lambda)| < \pi/4m$. Если $\lambda \in D_+$, то в секторах $S_\pm$ нет точек перевала функции $S(z, \lambda)$. Но в силу соображений непрерывности естественно ожидать, что если значение $\arg\lambda$ близко к $\pm\pi/4m$, то асимптотика по-прежнему дается вкладом от точки перевала $z_0(\lambda)$.

Пусть $\lambda > 0$. Заменим контур интегрирования в (7.2) прямой $l(\lambda)$: $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0(\lambda)$, проходящей через точку перевала $z_0(\lambda)$, и покажем, что $\max\limits_{z \in l(\lambda)} \operatorname{Re} S(z, \lambda)$ достигается только в точках перевала $z_0(\lambda)$, $z_{m-1}(\lambda) = -z_0(\lambda)\exp\left(\frac{i\pi}{2m-1}\right)$, лежащих на этой прямой. Тем самым будет доказано, что при $\lambda \to +\infty$ асимптотика интеграла (7.2) равна сумме вкладов от точек перевала $z_0(\lambda)$, $z_{m-1}(\lambda)$. Критическими точками функции $\operatorname{Re} S(z, \lambda)$ на прямой $l(\lambda)$ являются точки, в которых $\operatorname{Re} z^{2m-1} = 0$. Непосредственным вычислением проверяется, что искомый максимум достигается только в точках $z_0(\lambda)$, $z_{m-1}(\lambda)$.

Фиксируем ψ, $0 < \psi < \pi/4m$, и пусть $l(\lambda)$ — ломаная, состоящая из лучей $z = z_{m-1}(\lambda) + x$, $-\infty < x \leqslant \operatorname{Re} z_{m-1}(\lambda)$; $z = z_0(\lambda) + x$, $\operatorname{Re} z_0(\lambda) \leqslant x < \infty$, и отрезка $l_0(\lambda)$, соединяющего точки $z_{m-1}(\lambda)$, $z_0(\lambda)$, тогда интеграл (7.2) равен интегралу по ломаной $l(\lambda)$. Из доказательства леммы 6.1 следует, что на каждом из указанных лучей наибольшего значения функция $\operatorname{Re} S$ достигает только на конце, т. е. в точках перевала $z_{m-1}(\lambda)$, $z_0(\lambda)$ соответственно. Покажем, что отрезок $l_0(\lambda)$ можно продеформировать в контур $\tilde{l}_0(\lambda)$ такой, что $\max\limits_{z \in \tilde{l}_0(\lambda)} \operatorname{Re} S(z, \lambda)$ достигается только в точках $z_{m-1}(\lambda)$, $z_0(\lambda)$. Тогда контур $\tilde{l}(\lambda)$, полученный из $l(\lambda)$ заменой $l_0(\lambda)$ на $\tilde{l}_0(\lambda)$, будет перевальным, и асимптотика $\Phi(\lambda, 2m)$ при $0 < \psi < \pi/4m$ будет равна сумме вкладов от точек перевала $z_0(\lambda)$, $z_{m-1}(\lambda)$.

Аналогично вычисляется асимптотика при $-\pi/4m < \psi < 0$ и при $|\psi - \pi| < \pi/4m$ в силу свойств симметрии (7.8).

Функция $S(z, \lambda)$ однолистно отображает сектор $\arg z_k(\lambda) < \arg z < \arg z_{k+1}(\lambda)$ на область D_k, граница которой состоит из отрезков $[0, S_k]$, $[0, S_{k+1}]$, где $S_j = S(z_j(\lambda), \lambda)$, и лучей с вершинами в точках S_k, S_{k+1}; углы при этих вершинах равны $3\pi/2$ (рис. 6). Поэтому сектор

$$\arg z_0(\lambda) \leqslant \arg z \leqslant \arg z_{m-1}(\lambda)$$

отображается функцией $S(z, \lambda)$ (напомним, что $\psi = \arg\lambda$ фиксировано) на область в плоскости S, которая содержит точки S_0, S_{m-1} и отрезок, соединяющий эти точки. На этом отрезке $\operatorname{Re} S$ достигает максимума только на одном из концов. Выберем в качестве $\tilde{l}_0(\lambda)$ прообраз этого отрезка. Лемма доказана.

Рассмотрим эталонный интеграл

$$\Phi(\lambda, 2m+1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ix^{2m+1}}{(2m+1)} + i\lambda x\right) dx, \quad (7.9)$$

где $m \geqslant 2$ — целое число, λ вещественно. При $m = 1$ этот интеграл выражается через функцию Эйри.

Лемма 7.2. *Функция* $\Phi(\lambda, 2m+1)$ *аналитически продолжается на всю комплексную плоскость* λ, *как целая функция. Асимптотика* $\Phi(\lambda, 2m+1)$ *при* $|\lambda| \to \infty$ *равна*:

1°. *Сумме вкладов от точек перевала* $z_0(\lambda) = |\lambda|^{1/2m} e^{i\psi/2m}$, $z_m(\lambda) = -z_0(\lambda)$ *при* $|\psi| \leqslant \frac{2m\pi}{2m+1}$, $\psi = \arg\lambda$.

2°. *Сумме вкладов от точек перевала* $z_0(\lambda), z_{m-1}(\lambda) = -|\lambda|^{1/2m} \exp\left(\frac{i(\psi + 2\pi)}{2m}\right)$ *при* $-\pi \leqslant \psi \leqslant -\pi + \frac{\pi}{2m+1}$.

В оставшемся секторе асимптотика вычисляется с помощью соотношения (7.16).

Проанализируем асимптотику функции $\Phi(\lambda, 2m+1)$. Вклады Φ_j от точек $z_j(\lambda)$ равны

$$\Phi_j(\lambda) \sim \exp\left[iA_j\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)|\lambda|^{\frac{2m+1}{2m}}\right] \times \\ \times \sqrt{\frac{\pi}{m}}\, |\lambda|^{\frac{1}{4m} - \frac{1}{2}} B_j \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} \lambda^{-\frac{(2m+1)k}{2m}}\right]. \quad (7.10)$$

Здесь

$$A_0 = \exp\left[i\psi\left(1+\frac{1}{2m}\right)\right], \quad A_m = -A_0,$$
$$A_{m-1} = -A_0 \exp\left(\frac{i\pi}{m}\right), \tag{7.11}$$
$$B_{0,m} = \exp\left[\mp\frac{i\pi}{4} + \frac{i\psi}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)\right], \; B_{m-1} = B_m \exp\left(\frac{i\pi}{2m}\right). \tag{7.12}$$

На вещественной оси λ эта функция по-разному ведет себя при $\lambda \to \pm\infty$: экспоненциально убывает при $\lambda \to -\infty$, убывает степенным образом и сильно осциллирует при $\lambda \to +\infty$. Именно,

$$\Phi(\lambda, 2m+1) = 2\lambda^{\frac{1}{4m}-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\left[\cos\left(\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\lambda^{\frac{2m+1}{2m}} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\lambda^{-\frac{2m+1}{2m}}\right)\right] \quad (\lambda \to +\infty), \tag{7.13}$$

$$\Phi(\lambda, 2m+1) = 2|\lambda|^{\frac{1}{4m}-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\exp\left[-\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)|\lambda|^{\frac{2m+1}{2m}}\right] \times \left[\cos\left(\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)|\lambda|^{\frac{2m+1}{2m}} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4m}\right) + O\left(\lambda^{-\frac{2m+1}{2m}}\right)\right] \quad (\lambda \to -\infty). \tag{7.14}$$

Функция $\Phi(\lambda, 2m+1)$ является целой функцией порядка $1 + 1/2m$. Ее индикатриса равна

$$h(\psi) = -\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\sin\left(\psi\left(1+\frac{1}{2m}\right)\right), \tag{7.15}$$
$$-\pi \leqslant \psi \leqslant 0; \quad h(-\psi) = h(\psi), \quad \psi = \arg\lambda.$$

Таким образом, функция $\Phi(\lambda, 2m+1)$ экспоненциально убывает в секторе $|\arg(-\lambda)| < \pi/2m$, экспоненциально растет в секторах вида $0 < \arg\lambda < \pi - \pi/2m$, $-\pi + \pi/2m < \arg\lambda < 0$ и осциллирует на лучах $\lambda = \rho e^{i\psi}$ при $\psi = 0, \pm(\pi - \pi/2m)$.

Подынтегральная функция убывает в секторах

$$S_{\pm}:\ -\pi/(2m+1)<\varphi<0,$$
$$-\pi<\varphi<\pi--\pi/(2m+1),\quad \varphi=\arg z,$$

прилегающих к вещественной оси. При вещественных λ интеграл $\Phi(\lambda,\ 2m+1)$ в силу леммы Жордана можно заменить интегралом по ломаной, состоящей из биссектрис секторов $S_{\pm}$. Полученный интеграл сходится абсолютно при всех λ и поэтому является целой функцией λ. Тем самым мы аналитически продолжили интеграл (7.9).

Точка перевала $z_0(\lambda)=|\lambda|^{\frac{1}{2m+1}}e^{i\psi/2m}$ лежит внутри или на границе сектора S_+ при $-2m\pi/(2m+1)\leqslant\psi\leqslant 0$. Заменим интеграл (7.9) интегралом по ломаной $l=l_0\cup l_1$, где l_0 — полуось $(-\infty,\ 0]$, l_1 — луч $\varphi=\psi/2m$, проходящий через точку перевала $z_0(\lambda)$. Покажем, что $\max\limits_{z\in l}\operatorname{Re}S(z,\ l)$ достигается в точке $z_0(\lambda)$; тем самым будет доказано, что l — перевальный контур. На луче l_0 имеем $z=x<0$, так что $\operatorname{Re}S(x,\ \lambda)=-x\operatorname{Im}\lambda\leqslant 0$. На луче l_1 имеем $z=e^{i\psi/2m}\rho$, $0\leqslant\rho<\infty$, так что

$$\operatorname{Re}S(z,\ \lambda)=-h(\rho,\ \lambda)\sin\psi\left(1+\frac{1}{2m}\right),\quad h=\rho|\lambda|-\frac{\rho^{2m+1}}{2m+1}.$$

Функция h имеет единственную точку максимума $\rho=|\lambda|$ на полуоси $\rho\geqslant 0$, и в этой точке $\operatorname{Re}S>0$ при $-\frac{2m\pi}{2m+1}<\psi<0$. Поэтому при этих значениях ψ функция $\operatorname{Re}S$ достигает наибольшего значения на контуре l только в точке перевала $z_0(\lambda)$. При $\psi=-\frac{2m\pi}{2m+1}$ функция $\operatorname{Re}S=0$ на луче l_1, однако на l_1 имеется только одна точка перевала, так что l является перевальным контуром. Следовательно, асимптотика $\Phi(\lambda,\ 2m+1)$ при $|\lambda|\to\infty$, $-\frac{2m\pi}{2m+1}\leqslant\psi\leqslant-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ может быть сколь угодно малым, равна вкладу от точки $z_0(\lambda)$. При $\psi=0$ контур l по-прежнему является перевальным, но на нем имеются две точки перевала $z_0(\lambda)=\lambda^{1/2m}$, $z_m(\lambda)=-z_0(\lambda)$ (ветвь арифметическая), так что асимптотика Φ при $|\lambda|\to\infty$, $-\varepsilon\leqslant\psi\leqslant 0$ равна сумме вкладов от этих точек.

Функция Φ вещественна при вещественных λ, так как $\operatorname{Im}\Phi$ — интеграл от нечетной функции. Следовательно,

$$\overline{\Phi(\lambda,\ 2m)}=\Phi(\bar{\lambda},\ 2m)\tag{7.16}$$

при всех λ, и мы вычислили асимптотику Φ в секторе $|\arg\lambda| \leqslant \frac{2m\pi}{2m+1}$. Остается вычислить асимптотику Φ в секторе $-\pi \leqslant \arg\lambda < \frac{2m\pi}{2m+1}$. Предварительно вычислим асимптотику Φ при вещественных $\lambda \to -\infty$. Проведем через точку перевала $z_0(\lambda) = e^{-i\pi/2m}|\lambda|^{1/2m}$ прямую $\tilde{l}$, параллельную вещественной оси. На этой прямой имеется еще одна точка перевала $z_{m+1}(\lambda) = -\overline{z_0(\lambda)}$. Покажем, что наибольшее значение функции $\operatorname{Re} S$ на прямой $\tilde{l}$ достигается только в точках $z_0(\lambda)$, $z_{m+1}(\lambda)$; тем самым будет доказано, что асимптотика Φ при $\lambda \to -\infty$ равна сумме вкладов от этих точек. Можно считать, что $\lambda = -1$; для этого достаточно сделать замену $x \to |\lambda|^{1/2m}x$ в интеграле (7.9). На прямой $\tilde{l}$ имеем $\operatorname{Re}(i\lambda z) = \mathrm{const}$, так что в точках, в которых $\operatorname{Re} S$ достигает максимума на $\tilde{l}$, имеем $\frac{d}{dz}\operatorname{Re}\left(-iz^{2m+1}\right) = 0$.

Следовательно, в этих точках $z^{2m} = \pm\rho$, где $\rho > 0$. Система $z^{2m} = \rho$, $\operatorname{Im} z = y = -\sin\pi/2m$ имеет решения $\tilde{z}_k = ye^{ik\pi/m}(\sin k\pi/m)^{-1}$, $k \neq 0$, m, так что $\operatorname{Re}\left(-i\tilde{z}_k^{2m+1}\right) = y^{2m+1}(\sin k\pi/m)^{-2m}$. Система $z^{2m} = -\rho$, $\operatorname{Im} z = y$ имеет решения $\tilde{\tilde{z}}_k = ye^{\frac{i(2k+1)\pi}{2m}}\left(\sin\left(\frac{2k+1}{2m}\pi\right)\right)^{-1}$, так что $\operatorname{Re}\left(-i\tilde{\tilde{z}}_k^{2m+1}\right) = -y^{2m+1}\left(\sin\frac{2k+1}{2m}\right)^{-2m}$. Отсюда видно, что $\max\limits_{z\in\tilde{l}} \operatorname{Re} S$ достигается только в точках $\tilde{\tilde{z}}_0$, $\tilde{\tilde{z}}_m$, т. е. в точках $z_0(\lambda)$, $z_{m+1}(\lambda)$, и $\tilde{l}$ — перевальный контур.

Пусть $-\frac{2m\pi}{2m+1} < \psi < -\pi$. Тогда точки перевала $z_0(\lambda)$, $z_{m+1}(\lambda)$ лежат в нижней полуплоскости. Заменим контур интегрирования в (7.9) контуром, состоящим из лучей l_1: $z = z_{m+1}(\lambda) - \rho$, l_2: $z = z_0(\lambda) + \rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$, и отрезка $l_3 = [z_{m+1}(\lambda),\ z_0(\lambda)]$, и покажем, что этот контур можно продеформировать в контур l, на котором $\max\limits_{z\in\tilde{\tilde{l}}} \operatorname{Re} S(z, \lambda)$ достигается только в точках перевала $z_0(\lambda)$, $z_{m+1}(\lambda)$. Тем самым будет доказано, что асимптотика Φ при указанных выше ψ равна сумме вкладов от этих точек перевала. Учитывая (7.16), получаем асимптотику Φ при всех $\arg\lambda$. Покажем, что $\max\limits_{z\in l_3} \operatorname{Re} S$ достигается только в точке $z_0(\lambda)$.

Имеем $z=|z|e^{i\varphi}$ при $z\in l_3$, где $\psi/2m\leqslant\varphi<0$. Следовательно,

$$\frac{d^2}{dz^2}\operatorname{Re}S(z,\lambda)=-(2m+1)|z|^{2m+1}\sin(2m-1)\varphi<0,$$

так как $-\pi(2m-1)/2m<(2m-1)\varphi<0$. Поэтому функция $\operatorname{Re}S$ выпукла кверху на l_3, и так как $d/dz\operatorname{Re}S=0$ в точке $z_0(\lambda)$, то $\operatorname{Re}S$ достигает наибольшего значения на l_3 только в точке $z_0(\lambda)$. Аналогично доказывается, что $\max\limits_{z\in l_3}\operatorname{Re}S$ достигается только в точке $z_{m+1}(\lambda)$.

Продеформируем отрезок l_4 в контур l_4', который имеет те же концы и на котором наибольшее значение $\operatorname{Re}S$ достигается только на концах. Тем самым доказательство теоремы будет завершено.

Пусть $D_k(\lambda)$ — сектор $\arg z_{k-1}(\lambda)<\arg z<\arg z_k(\lambda)$. Функция $S(z,\lambda)$ взаимно однозначно отображает этот сектор на область $\tilde{D}_k(\lambda)$, граница которой состоит из отрезков $[0,S_{k-1}]$, $[0,S_k]$, $S_j=S(z_j(\lambda),\lambda)$ и лучей, которые выходят из точек S_j, $j=k-1,k$, и образуют углы $3\pi/2$ с соответствующими отрезками. Образ области $D=\bigcup\limits_{k=0}^{-m+1}D_k(\lambda)$ содержит круговой сектор $\tilde{D}$, граница которого состоит из отрезков $[0,S_k]$, $k=0,\ m-1$ и дуги окружности с центром в точке $z=0$, соединяющей концы отрезков. При этом $\operatorname{Re}S<0$ на концах этих отрезков. Пусть l — отрезок $[S_{-m+1},S_0]$, тогда l лежит в $\tilde{D}$ и $\max\limits_{S\in l}\operatorname{Re}S$ достигается только на концах l. Обозначим прообраз l через l_4' и продеформируем отрезок l_4 в контур l_4'. Лемма доказана.

Наконец, рассмотрим интеграл

$$\Phi(\lambda,2m;a_0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-a_0x^{2m}+i\lambda x\right)dx,\qquad(7.17)$$

где $\operatorname{Re}a_0\geqslant0$. Этот интеграл выражается через $\Phi(\lambda,2m)$.

Лемма 7.3. *Если* $\operatorname{Re}a_0\geqslant0$, *то*

$$\Phi(\lambda,2m;a_0)=(2ma_0)^{-1/2m}\Phi\left(\lambda a_0^{-1/2m},2m\right),\qquad(7.18)$$

где $\left|\arg a_0^{1/2m}\right|\leqslant\pi/2m$.

2. Случай, когда S — полином. Рассмотрим интеграл (7.1), где

$$S(z)=-a_0z^n-\ldots-a_n,\qquad(7.19)$$

$a_0 \neq 0$, $n \geqslant 2$. Вычисление асимптотики интеграла $F(\lambda)$ сводится к вычислению асимптотики интегралов вида (7.2), (7.9). Предварительно исследуем точки перевала функции $S(z, \lambda) = S(z) + i\lambda z$.

Лемма 7.4. *Существует $R_0 > 0$ такое, что при $|\lambda| \geqslant R_0$ все точки перевала функции $S(z, \lambda)$ невырождены и имеют вид*

$$z_k(\lambda) = \left(\frac{i\lambda}{na_0}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}\lambda^{-\frac{j}{n-1}}\right), \quad 0 \leqslant k \leqslant n-2. \tag{7.20}$$

Эти ряды сходятся при $|\lambda| \geqslant R_0$.

Делая в интеграле (7.1) замену $x \to |\lambda|^{1/(n-1)}x$, получаем

$$F(\lambda) = |\lambda|^{1/(n-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[|\lambda|^{n/(n-1)} S(x, \psi, \delta)\right] dx,$$

где обозначено $\psi = \arg\lambda$, $\delta = |\lambda|^{1/(1-n)}$,

$$S(x, \psi, \delta) = \left[-a_0x^n + ixe^{i\psi}\right] - \sum_{k=1}^{n} a_k\delta^k x^k.$$

При $\delta = 0$ функция S совпадает с эталонной функцией $-a_0x^n + ie^{i\psi}x$, и асимптотика интеграла $F(\lambda)$ вычисляется с помощью лемм 7.1—7.3. Кроме того, при $|\delta| \leqslant \delta_0 \ll 1$ и при $|z| \gg 1$ функция $S(z, \psi, \delta)$ является малым возмущением функции $S(z, \psi, 0)$, так как их разность есть полином степени меньше n. Поэтому в качестве перевальных контуров можно каждый раз выбирать то же контуры, что и в леммах 7.1, 7.2, слегка продеформировав их в окрестностях точек перевала, и асимптотика $F(\lambda)$ будет равна сумме вкладов от тех же точек перевала. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 7.1. 1°. *Пусть $n \geqslant 2$ четно, $|\psi_0| \leqslant \pi/2$, $\psi_0 = \arg a_0$. Тогда асимптотика интеграла*

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a_0x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_n + i\lambda x\right) dx \tag{7.21}$$

при $|\lambda| \to \infty$ равна

а) *вкладу от точки перевала*

$$z_0(\lambda) \sim |a_0|^{-1/(n-1)} |\lambda|^{1/(n-1)} \exp\left[\frac{i(\psi - \psi_0/n + \pi/2)}{n-1}\right]$$

при $-\pi - \varepsilon \leqslant \psi - \psi_0/n \leqslant -\varepsilon$, где $\psi = \arg\lambda$;

b) *вкладу от точки перевала*

$$z_{n/2-1}(\lambda) \sim -|\lambda|^{1/(n-1)}|a_0|^{-1/(n-1)}\exp\left[\frac{i(\psi-\psi_0/n-\pi/2)}{n-1}\right]$$

при $\varepsilon \leqslant \psi - \psi_0/n \leqslant \pi - \varepsilon$;

c) *сумме вкладов от точек перевала* $z_0(\lambda)$, $z_{n/2-1}(\lambda)$ *в оставшихся секторах.*

2°. *Пусть* $n \geqslant 3$ *нечетно,* $\operatorname{Re} a_0 = 0$, $\operatorname{Im} a_0 > 0$ *и*

$$\operatorname{Re} a_1 = \ldots = \operatorname{Re} a_{n-2p-1} = 0, \quad \operatorname{Re} a_{2p} > 0. \qquad (7.22)$$

Тогда асимптотика интеграла (7.21) *при* $|\lambda| \to \infty$ *равна*

a) *сумме вкладов от точек перевала*

$$z_0(\lambda) \sim |a_0|^{-1/(n-1)}|\lambda|^{1/(n-1)}e^{i\psi/(n-1)}, \quad z_{(n-1)/2}(\lambda) \sim -z_0(\lambda)$$

при $|\psi| \leqslant \frac{n-1}{n}\pi$;

b) *сумме вкладов от точек перевала*

$$z_0(\lambda),\ z_{n/2-2}(\lambda) \sim -e^{i2\pi/(n-1)}z_0(\lambda)$$

при $-\pi \leqslant \psi \leqslant \pi - \pi/n$;

c) *сумме вкладов от точек перевала*

$$z_{n/2-1}(\lambda), \quad z_{n-1}(\lambda)$$

при $\pi - \pi/n \leqslant \psi \leqslant \pi$.

Условие (7.22) необходимо для сходимости интеграла (при $p = 0$ условие на a_{2p} излишне). Окончательные формулы, ввиду их громоздкости, мы не станем приводить. Отметим только, что вклад от точки перевала $z(\lambda)$ равен

$$V(z(\lambda)) = \\ = \sqrt{-\frac{2\pi}{S''_{zz}(z,\lambda)}}\exp[S(z,\lambda)]|_{z=z(\lambda)}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\lambda^{-k/(n-1)}\right) \qquad (7.23)$$

Сделаем несколько замечаний.

Замечание 7.1. Пусть $S(z)$ — полином (7.19), $n \geqslant 2$ четно, $\operatorname{Re} a_0 > 0$, $f(z)$ — целая функция порядка роста $< n$. Тогда асимптотика при $|\lambda| \to \infty$ интеграла

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp[S(x) + i\lambda x]\,dx$$

равна сумме вкладов от тех же точек перевала, что и интеграла (7.21).

Замечание 7.2. Пусть $S(z)=P(e^z)$, где P — полином. Делая замену $e^x=t$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(S(x)+i\lambda x)\,dx=\int_{0}^{\infty} e^{P(t)}t^{i\lambda-1}dt,$$

т. е. этот интеграл есть преобразование Меллина функции $\exp(P(t))$. Асимптотика таких интегралов будет вычислена в следующем параграфе.

3. Приложения к дифференциальным уравнениям. Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u \quad (t>0,\ x\in\mathbb{R}), \tag{7.24}$$

где $P(\xi)$ — полином. *Фундаментальным решением* (ф. р.) этого уравнения называется функция $G(t,x)$, удовлетворяющая уравнению и данным Коши

$$G|_{t=0}=\delta(x), \tag{7.25}$$

где $\delta(x)$ есть дельта-функция Дирака. Уравнение (7.24) называется *корректным по Петровскому*, если $\operatorname{Re}P(\xi)\leqslant$ $\leqslant\text{const}$ при $-\infty<\xi<\infty$; мы будем рассматривать только такие уравнения.

Получим интегральное представление для G. Применяя преобразование Фурье по переменной x, получаем

$$\frac{d\tilde{G}}{dt}=P(\xi)\tilde{G},\quad \tilde{G}|_{t=0}=1,$$

откуда $\tilde{G}=\exp(tP(\xi))$. Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$G(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[tP(\xi)+ix\xi]\,d\xi. \tag{7.26}$$

Пусть $P(\xi)=a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\ldots+a_n$. При $n=1,2$ интеграл (7.26) легко вычисляется; рассмотрим случай $n\geqslant3$. Сделаем замену переменных $\xi\to(|x|/t)^{1/(n-1)}\xi$. Тогда

$$G(t,x)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{|x|}{t}\right)^{1/(n-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\lambda S(\xi,\varepsilon)]\,d\xi, \tag{7.27}$$

где обозначено

$$\lambda = \frac{|x|^{n/(n-1)}}{t^{1/(n-1)}}, \quad \varepsilon = \left(\frac{t}{|x|}\right)^{1/(n-1)}, \tag{7.28}$$

$$S(\xi, \varepsilon) = a_0\xi^n + \varepsilon a_1\xi^{n-1} + \ldots + \varepsilon^n a_n + i\xi \operatorname{sgn} x.$$

Нас интересует асимптотика $G(t, x)$ при $t \to +0$, x фиксированном или при $|x| \to \infty$, $t > 0$ фиксированном. Асимптотику G можно вычислить методом перевала при

$$\frac{|x|^n}{t} \to \infty, \quad \frac{t}{|x|} < \delta, \tag{7.29}$$

где $\delta > 0$ достаточно мало, так как при $\varepsilon = 0$ получаем эталонный интеграл типа (7.17) или (7.9), и эта асимптотика равна сумме вкладов от точек перевала, указанных в теореме 7.1. Мы ограничимся качественной характеристикой поведения $G(t_0, x)$ при $|x| \to \infty$, где $t_0 > 0$ фиксировано; асимптотические формулы см. в [86].

1°. Уравнение (7.24) — *параболическое по Петровскому*, т. е. n четно, $\operatorname{Re} a_0 < 0$. В этом случае ф. р. экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$ и, в частности,

$$|G(1, x)| \leqslant C_1 \exp(-C_2|x|^{n/(n-1)}) \tag{7.30}$$

при вещественных x, где $C_1, C_2 > 0$.

2°. Уравнение (7.24) — *параболическое по Шилову*, т. е.

$$\operatorname{Re} a_0 = \ldots = \operatorname{Re} a_{n-2p-1} = 0, \quad \operatorname{Re} a_{2p} < 0,$$

где $p \geqslant 1$. В этом случае

$$|G(1, x)| \leqslant C_3 \exp\left(-C_4 |x|^{\frac{p}{n-1}}\right), \tag{7.31}$$

т. е. скорость убывания меньше, чем в случае 1°.

3°. Уравнение (7.24) — *собственно корректное по Петровскому*, т. е. $\operatorname{Re} a_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Здесь приходится различать два случая.

А. n четно. Тогда $G(1, x)$ сильно осциллирует при вещественных x и убывает как степень x:

$$G(1, x) = C_5|x|^{-\frac{n-2}{2(n-1)}}\left[\cos\left(C_6 |x|^{n/(n-1)} + C_7\right) + O\left(|x|^{-\frac{1}{n-1}}\right)\right]. \tag{7.32}$$

В. n нечетно. Пусть $\operatorname{Im} a_0 > 0$ для определенности. Тогда асимптотика $G(1, x)$ имеет вид (7.32) при $x \to +\infty$ и (7.30) при $x \to -\infty$, т. е. G убывает экспоненциально при $x \to +\infty$ и степенным образом при $x \to -\infty$. Этот случай наиболее интересен в том отношении, что фундаментальное решение обнаруживает резко несимметричное поведение на бесконечности при вещественных x.

Простейшим примером такого рода является уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

Следующее приложение относится к дифференциальному уравнению

$$y^{(n)} - xy = 0. \tag{7.33}$$

Это уравнение решается явно с помощью *метода Лапласа*. Будем искать решение в виде

$$y(z) = \int_C e^{\zeta z} v(\zeta)\, d\zeta,$$

где z, ζ — комплексные переменные, C — контур в комплексной плоскости ζ, v — неизвестная функция. Имеем

$$y^{(n)}(z) = \int_C e^{\zeta z} \zeta^n v(\zeta)\, d\zeta,$$

$$zy(z) = e^{\zeta z} v(\zeta)\,|_C - \int_C e^{\zeta z} v'(\zeta)\, d\zeta.$$

Выберем в качестве v решение уравнения

$$\zeta^n v + v' = 0, \quad \text{т. е.} \quad v(\zeta) = \exp\left(-\frac{\zeta^{n+1}}{n+1}\right),$$

и выберем контур C так, чтобы внеинтегральная подстановка $e^{\zeta z} v(\zeta)\,|_C$ обратилась в нуль. Тогда функция

$$y(z;\, c) = \int_C \exp\left(\zeta z - \frac{\zeta^{n+1}}{n+1}\right) d\zeta$$

будет решением уравнения (7.33).

Укажем выбор контура C. Функция $\exp\left(-\frac{\zeta^{n+1}}{n+1}\right)$ экспоненциально убывает в секторах S_k: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < (n+1)\arg\zeta < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, 1, \ldots$ Пусть γ_0 — контур, состоящий из лучей $l_0=[0, +\infty)$ и $l_1=(+\infty e^{\frac{i2\pi}{n+1}}, 0)$. Тогда функция

$$y_0(z)=\int_{\gamma_0}\exp\left(\zeta z-\frac{\zeta^{n+1}}{n+1}\right)d\zeta \tag{7.34}$$

будет решением уравнения (7.33) и является целой функцией z.

Уравнение (7.33) инвариантно относительно преобразования $x\to tz$, где $t=\sqrt[n+1]{1}$, так что функции

$$y_k(z)=e^{-\frac{i2k\pi}{n+1}}y_0\left(ze^{\frac{i2k\pi}{n+1}}\right) \tag{7.35}$$

являются решениями этого уравнения (k — целое число). Имеет место тождество

$$y_0(z)+y_1(z)+\ldots+y_n(z)=0. \tag{7.36}$$

Действительно, $y_k(z)$ есть интеграл вида (7.34) по контуру γ_k, полученному из контура γ_0 поворотом на угол $-2k\pi/(n+1)$. Контур $\gamma=\gamma_0\cup\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_n$ состоит из лучей $\operatorname{Im}\zeta^{n+1}=0$, $\operatorname{Re}\zeta^{n+1}>0$, причем каждый луч входит в γ дважды и с противоположной ориентацией. Сумма, стоящая в левой части равенства (7.36), есть интеграл по контуру γ и поэтому равна нулю. Отметим еще следующую симметрию решения y_0:

$$y_0\left(\bar{z}e^{i\alpha}\right)=-e^{-i\alpha}\overline{y_0(z)},\quad \alpha=\frac{2\pi}{n+1}. \tag{7.37}$$

Вычислим асимптотику решения y_0. Асимптотику остальных решений определим из (7.35). Точки перевала функции

$$S(\zeta, z)=\zeta z-\frac{\zeta^{n+1}}{n+1}$$

определяются из уравнения $\zeta^n=z$. Положим $\arg z=\psi$,

$$\zeta_0(z)=|z|^{1/n}e^{i\psi/n},\quad \zeta_1(z)=|z|^{1/n}e^{\frac{i\psi+2\pi}{n}}. \tag{7.38}$$

Теорема 7.2. *Асимптотика решения $y_0(z)$ равна*: 1°. *Вкладу от точки перевала $\zeta_0(z)$ при*

$$-\frac{\pi}{n+1}+\varepsilon\leqslant\psi\leqslant\frac{3\pi n}{2(n+1)}-\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

2°. *Вкладу от точки перевала* $\zeta_1(z)$ *при*

$$-\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2(n+1)}+\varepsilon\leqslant\psi\leqslant-\frac{\pi}{n+1}-\varepsilon.$$

3°. *Сумме вкладов от точек* $\zeta_0(z)$, $\zeta_1(z)$ *в остальных секторах.*

Здесь $\varepsilon>0$ *может быть выбрано сколь угодно малым, но не зависящим от* z. *Любые* n *решений из набора* $\{y_0(z), \ldots, y_n(z)\}$ *линейно независимы.*

Формулы для вкладов V_j от точек ζ_j имеют вид

$$V_0(z)\sim\exp\left[\frac{n}{n+1}|z|^{n/(n+1)}\exp\left(\frac{i\psi(n+1)}{n}\right)\right]\times \\ \times\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,z^{\frac{1-n}{2n}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}a_{0k}z^{-\frac{kn}{n+1}}\right), \quad (7.39)$$

$$V_1(z)\sim-\exp\left[\frac{n}{n+1}|z|^{\frac{n}{n+1}}\exp\left(\frac{i\psi(n+1)}{n}+\frac{i2\pi}{n}\right)\right]\times \\ \times\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,z^{\frac{1-n}{2n}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}a_{1k}z^{-\frac{kn}{n+1}}\right). \quad (7.39)$$

Для $z^{\frac{1-n}{2n}}$ выбрана положительная при $z\in(0, +\infty)$ ветвь корня. Эти разложения можно дифференцировать любое число раз.

Таким образом, функция $y_0(z)$ экспоненциально растет на любом луче из сектора $-\frac{n\pi}{2(n+1)}-\frac{2\pi}{n+1}<\arg z<$ $<\frac{n\pi}{2(n+1)}$ и экспоненциально убывает на любом луче из дополнительного (открытого) сектора. Она имеет бесконечно много нулей в окрестности лучей $\arg z=$ $=\frac{\pi n}{2(n+1)}$, $-\frac{\pi}{n+1}$, $-\frac{n\pi}{2(n+1)}-\frac{2\pi}{n+1}$ и конечное число нулей в остальной части плоскости z. Индикатриса $h(\psi)$, $\psi=\arg z$ функции $y_0(z)$ имеет вид

$$h(\psi)=\frac{n}{n+1}\cos\frac{n+1}{n}\psi, \qquad -\frac{\pi}{n+1}\leqslant\psi\leqslant\frac{3\pi n}{n+1},$$

$$h(\psi)=\frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{n+1}{n}\psi+\frac{2\pi}{n}\right), \\ -\frac{n\pi}{2(n+1)}-\frac{2\pi}{n+1}\leqslant\psi\leqslant-\frac{\pi}{n+1}.$$

$y_0(z)$ — целая функция порядка роста $1 + 1/n$.

В силу леммы 6.1 асимптотика интеграла вида (7.34) по лучу $l_0 = [0, +\infty)$ равна вкладу от точки перевала $\zeta_0(z)$ в секторе D_0: $|\psi| < \frac{n\pi}{2(n+1)}$, причем этот вклад есть растущая при $|z| \to \infty$ экспонента. В любом секторе D плоскости z, который не пересекается с D_0 (кроме точки $z = 0$), асимптотика этого интеграла имеет порядок $O(z^{-1})$, а в секторах, содержащих лучи $\psi = \pm\frac{n\pi}{2(n+1)}$, асимптотика равна сумме вкладов от точки $\zeta_0(z)$ и от начала контура; последний имеет порядок $O(z^{-1})$. Точно такие же утверждения справедливы для интеграла вида (7.34) по лучу $-l_1$, с той лишь разницей, что $(\zeta_0, D_0) \to (\zeta_1, D_1)$, где D_1 — сектор $\left|\psi + \frac{2\pi}{n+1}\right| < \frac{n\pi}{2(n+1)}$. Тем самым асимптотика y_0 вычислена при $z \in D_0 \cup D_1$.

Покажем, что если z лежит в секторе D: $\frac{n\pi}{2(n+1)} \leqslant \psi \leqslant \frac{3\pi n}{2(n+1)}$, дополнительном к $D_0 \cup D_1$, то линия наибыстрейшего спуска L, проходящая через точку перевала $\zeta_0(z)$, имеет своими асимптотами лучи l_0, l_1. Следовательно, интеграл (7.34) равен интегралу по L, а асимптотика последнего равна вкладу от точки перевала $\zeta_0(z)$.

Пусть D_{-1} — сектор в плоскости ζ, ограниченный лучами l_0', l_{-1}', проходящими через точки перевала ζ_0, ζ_{-1}, и содержащий полуось $[0, +\infty)$. При $\zeta \in l_0'$ имеем

$$\zeta = \rho e^{i\psi/n}, \quad 0 \leqslant \rho < \infty,$$
$$S = \exp\left[i\psi\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] h(\rho, |z|),$$
$$h = \rho|z| - \frac{\rho^{n+1}}{n+1}.$$

Функция h при фиксированном $|z| \neq 0$ монотонно возрастает на интервале $(0, |z|^{1/n})$ и монотонно убывает на полуоси $\rho > |z|^{1/n}$ до $-\infty$. Следовательно, функция S отображает луч l_0' на ломаную L_0' в плоскости S, состоящую из отрезка $I = [0, S(\zeta_0(z), z)]$ и луча, который начинается в конце отрезка I и идет в обратном направлении (так что I проходится дважды). Аналогично устроен образ L_{-1}' луча l_{-1}'. Сектор D_{-1} отображается функцией S на область, ограниченную линиями L_0', L_{-1}'. Это отображение неоднолистно, а именно, каждая точка из сектора с острым углом при вершине $S=0$, ограниченного этими линиями, имеет 2 прообраза. Так как $\cos(1+1/n)\psi \leqslant 0$, то образ S_0 точки $\zeta_0(z)$ лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re} S \leqslant 0$; следовательно, луч $S = \zeta_0(z) - \rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$, содержится в образе сектора D. Прообразом этого луча является «половина» L^+ линии наискорейшего спуска L, так что L^+ содержится в секторе D. Нетрудно видеть, что асимптотой L^+ является луч $l_0 = [0, +\infty)$. Аналогично доказывается, что вторая «половина» L^- линии L лежит в секторе, ограниченном лучами l_0', l_1' (последний проходит через точку перевала $\zeta_1(z)$), и имеет асимптотой луч l_1.

Линейная независимость решений $y_j(z)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, следует из того, что они имеют разную асимптотику, например, при вещественных $z \to +\infty$.

4. Функции с особенностями. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\alpha(x) = \exp\left(-\frac{x^{-\alpha}}{\alpha}\right), \quad x > 0; \quad \varphi_\alpha(x) = 0, \quad x \leqslant 0, \tag{7.40}$$

где $\alpha > 0$. Эта функция бесконечно дифференцируема на всей оси. Ее преобразование Фурье

$$\tilde{\varphi}_\alpha(\xi) = \int_0^\infty \varphi_\alpha(x) e^{-ix\xi} dx \tag{7.41}$$

расходится при вещественных ξ, но этот интеграл легко регуляризуется при $\xi \neq 0$. Именно, будем понимать под $\tilde{\varphi}_\alpha(\xi)$ при $\xi > 0$ интеграл вида (7.41), взятый по лучу $\arg x = -\varepsilon$ в комплексной плоскости x. Заметим, что функция $\varphi_\alpha(z) = \exp(-z^\alpha/\alpha)$ имеет особенность в точке $z=0$; при целом α эта точка является существенно особой. Очевидно, что $\tilde{\varphi}_\alpha(\xi)$ убывает быстрее любой степени ξ при $|\xi| \to \infty$, так как все производные функции $\varphi_\alpha(x)$ обращаются в нуль на конце $x=0$ контура интегрирования. Мы покажем, что $\tilde{\varphi}_\alpha(\xi)$ экспоненциально убывает при $|\xi| \to \infty$, но медленнее, чем $\exp(-c|\xi|)$.

Лемма 7.5. *При $\xi \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\tilde{\varphi}_\alpha(\xi) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha+1}}\, e^{-\frac{i\pi(\alpha+2)}{4(\alpha+1)}} \xi^{\frac{\alpha+2}{2(\alpha+1)}} \times$$
$$\times \exp\left[-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) e^{-\frac{i\pi}{2(\alpha+1)}} \xi^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right] \left(1 + \sum_{k=1}^\infty a_k \xi^{-\frac{\alpha k}{\alpha+1}}\right). \tag{7.42}$$

Это разложение можно дифференцировать по ξ любое число раз.

Так как $\overline{\tilde{\varphi}_\alpha(\xi)} = \tilde{\varphi}_\alpha(-\xi)$, то асимптотика $\tilde{\varphi}_\alpha(\xi)$ при $\xi \to -\infty$ легко вычисляется.

В комплексной плоскости z с разрезом по лучу $(-\infty, 0)$ рассмотрим функцию $\varphi_\alpha(z) = \exp(-z^{-\alpha}/\alpha)$, где $x^{-\alpha} > 0$ при $x > 0$.

Эта функция экспоненциально убывает при $z \to 0$ в секторе $|\arg z| < \pi/2\alpha$, функция $\exp(-ix\xi)$ экспоненциально убывает на любом луче с началом в точке $z = 0$, который лежит в нижней полуплоскости. Поэтому можно заменить контур интегрирования в интеграле (7.41) лучом l: $z = \rho\lambda^{-1/(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{i\pi}{2(\alpha+1)}\right)$, $0 \leqslant \rho < \infty$, который проходит через точку перевала $z_0(\xi) = \xi^{-1/(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{i\pi}{2(\alpha+1)}\right)$ подынтегральной функции $S(z, \xi) = -z^{-\alpha}/\alpha - iz\xi$. На луче l имеем

$$S = i\xi^{-\alpha/(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{i\pi}{2(\alpha+1)}\right) h(\rho),$$
$$h = -\rho - \frac{\rho^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Функция $h(\rho)$ при $0 \leqslant \rho < \infty$ имеет единственную точку максимума $\rho = 1$; следовательно, $\max\limits_{z \in l} \operatorname{Re} S$ достигается только в точке перевала $z_0(\xi)$. Вычисляя вклад от этой точки, получаем (7.42).

Рассмотрим преобразование Фурье

$$\tilde{\varphi}_{\alpha,\beta}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\alpha,\beta}(x) e^{-ix\xi} dx$$

финитной функции

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \exp\left[\frac{A}{(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}}\right], \quad a < x < b;$$
$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) = 0, \quad x \notin (a, b). \tag{7.43}$$

Здесь A, α, $\beta > 0$, ветви арифметические, $-\infty < a < b < \infty$. Финитные функции такого типа будем называть «аналитическими», так как экспонента из правой части (7.43) допускает аналитическое продолжение с интервала (a, b) вещественной оси на всю комплексную плоскость z с разрезами по лучам $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$. В силу леммы 3.1.1 имеем $\tilde{\varphi}_{\alpha,\beta}(\xi) = O(|\xi|^{-\infty})$ при $|\xi| \to \infty$. Вычислим асимптотику этой функции.

Теорема 7.3. *При $\xi \to +\infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\xi) \sim \xi^{\frac{\alpha+2}{2(\alpha+1)}} \exp\left[-A_1 \xi^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\left(1 + O\left(\xi^{-\frac{1}{\alpha+1}}\right)\right)\right] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}\left(\xi^{-\frac{1}{\alpha+1}}\right) \xi^{-\frac{k\alpha}{\alpha+1}} + \xi^{\frac{\beta+2}{2(\beta+1)}} \times \\ \times \exp\left[-A_2 \xi^{\frac{\beta}{\beta+1}}\left(1 + O\left(\xi^{-\frac{1}{\beta+1}}\right)\right)\right] \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\left(\xi^{-\frac{1}{\beta+1}}\right) \xi^{-\frac{k\beta}{\beta+1}}. \tag{7.44}$$

Здесь $A_{1,2}$ — постоянные, $\operatorname{Re} A_{1,2} > 0$, $a_{jk}(\varepsilon)$ — голоморфные функции ε при малых $|\varepsilon|$.

Так как $\tilde{\varphi}_{\alpha,\beta}(\xi) = \varphi_{\alpha,\beta}(-\xi)$, то тем самым искомая асимптотика найдена и при $\xi \to -\infty$.

Подынтегральная функция имеет вид $\exp[S(z, \xi)]$, где $S = -A(z-a)^{-\alpha}(b-z)^{-\beta} - iz\xi$. Здесь ветвь функции $(z-a)^{\alpha}$ выбрана в плоскости с разрезом по лучу $(-\infty, -a]$ и положительна при вещественных $x > a$, ветвь $(b-z)^{\beta}$ — в плоскости с разрезом по лучу $[b, +\infty)$ и положительна при вещественных $x < b$. При $z \approx a$ имеем $S \approx S_a = -A^*(z-a)^{-\alpha} - iz\xi$, где A^* — постоянная. Асимптотика интеграла $F_a = \int_a^{\infty} e^{S_a} dx$ вычислена в лемме 7.5. Аналогично, $S \approx S_b = B^*(b-z)^{-\alpha} - iz\xi$, и асимптотика интеграла $F_b = \int_{-\infty}^{b} e^{S_b} dx$ также вычисляется с помощью леммы 7.5. Мы покажем, что, грубо говоря, асимптотика $\tilde{\varphi}_{\alpha,\beta}(\xi)$ равна $F_a + F_b$.

Функция S экспоненциально убывает при $z \to a$ в секторе $-\pi/2\alpha < \arg(z-a) < 0$. В этом секторе функция S при вещественных $\xi \gg 1$ имеет точку перевала

$$z_a(\xi) = a + e^{-\frac{i\pi}{2(\alpha+1)}} \xi^{-\frac{1}{\alpha+1}} \frac{(b-a)^{\beta}}{\alpha A}\left[1 + O\left(\xi^{-\frac{1}{\alpha+1}}\right)\right].$$

Точно так же, как и в лемме 7.5, можно показать, что если $\delta > 0$ достаточно мало, то на отрезке l_a: $0 \leqslant$

$\leqslant |z-a| \leqslant \delta$, $\arg(z-a) = \arg(z_a(\xi)-a)$ функция $\operatorname{Re} S$ достигает максимума только в точке $z_a(\xi)$. Аналогично, функция S экспоненциально убывает в секторе $-\pi/2\beta < \arg(b-z) < 0$, при вещественных $\xi \gg 1$ имеет в этом секторе точку перевала

$$z_b(\xi) = b - e^{-\frac{i\pi}{2(\beta+1)}}\xi^{-\frac{1}{\beta+1}}\frac{(b-a)^\alpha}{\beta A}\left[1 + O\left(\xi^{-\frac{1}{\beta+1}}\right)\right]$$

и на отрезке l_b: $\arg(z-b) = \arg(z_b(\xi)-b)$, $0 \leqslant |z-b| \leqslant \delta$ при $\delta > 0$ достаточно малом $\operatorname{Re} S$ достигает максимума только в точке перевала $z_b(\xi)$. Имеем

$$\tilde{\varphi}_{\alpha,\beta}(\xi) = \int_l \exp[S(z, \xi)]\, dz,$$

где $l = l_a \cup \tilde{l} \cup l_b$, $\tilde{l}$ — отрезок, соединяющий концы отрезков l_a, l_b. Асимптотика интегралов по отрезкам l_a, l_b равна сумме вкладов от точек перевала $z_a(\xi)$, $z_b(\xi)$ соответственно, а

$$\left|\int_{\tilde{l}} \exp S\, dz\right| \leqslant C \exp(-C'\xi), \quad C, C' > 0.$$

Рассмотрим следующий класс интегралов:

$$F(\lambda) = \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) \exp[R(z) + \lambda z]\, dz. \qquad (7.45)$$

Здесь функция $R(z)$ имеет полюс в точке z_0, функция $f(z)$ голоморфна в точке z_0 и $\rho > 0$ достаточно мало, так что на контуре интегрирования и внутри него функция $R(z)$ голоморфна. Интеграл (7.45) равен

$2\pi i \times$(вычет подынтегральной функции в точке z_0).

Если вычислять этот вычет непосредственно, то мы получим его в виде ряда по степеням λ, что не позволяет вычислять асимптотику $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$. Заметим, что $F(\lambda)$ — целая функция λ.

Эталонным интегралом служит интеграл вида

$$\Phi(\lambda, m) = \int_{|z|=\rho} f(z) \exp\left(\frac{1}{mz^m} + \lambda z\right) dz, \qquad (7.46)$$

где $m \geqslant 1$ — целое число. Точки перевала $z_k(\lambda)$ подынтегральной функции

$$S(z, \lambda) = \frac{1}{mz^m} + \lambda z$$

определяются из уравнения $z^{m+1} = \lambda^{-1}$ и лежат на окружности $|z| = |\lambda|^{-1/(m+1)}$. Аналогичные интегралы исследованы в [57].

Лемма 7.6. *Асимптотика интеграла* (7.46) *при* $|\lambda| \to +\infty$ *равна сумме вкладов от тех точек перевала* $z_k(\lambda)$, *в которых величина* $\operatorname{Re} S(z_k(\lambda), \lambda)$ *максимальна.*

Формулы для вкладов будут приведены ниже.

Фиксируем $\arg \lambda = \psi$. Тогда точки перевала имеют вид

$$z_k(\lambda) = |\lambda|^{-1/(m+1)} e^{i\varphi_k(\lambda)},$$
$$\varphi_k(\lambda) = -\frac{1}{m+1}(\psi + 2k\pi), \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Пусть $l_k(\lambda)$ — луч в плоскости z с началом в точке $z = 0$, проходящий через точку $z_k(\lambda)$; его уравнение имеет вид $z = \rho|\lambda|^{-1/(m+1)} \exp(i\psi(\lambda))$, $0 \leqslant \rho < \infty$. При $z \in l_k(\lambda)$ имеем

$$S(z, \lambda) = \lambda z_k(\lambda) h(\rho), \qquad h = \rho + m\rho^{-m}.$$

Функция $h(\rho)$ отображает полуось $[0, \infty)$ на полуось $[1, \infty)$, проходимую дважды, так что функция S отображает $l_k(\lambda)$ на луч $L_k(\lambda)$: $S = \lambda z_k(\lambda)\tau$, $1 \leqslant \tau < \infty$, проходимый дважды. Следовательно, сектор D_k: $\psi_k(\lambda) < \arg z < \psi_{k+1}(\lambda)$ взаимно однозначно отображается функцией S на плоскость S с разрезами по лучам $L_k(\lambda)$, $L_{k+1}(\lambda)$. Отметим, что при $m = 1$ функция S является суперпозицией линейной функции и функции Жуковского.

Контур интегрирования в (7.46) при $|\lambda| \gg 1$ можно заменить окружностью $|z| = |\lambda|^{-1/(m+1)}$, на которой лежат все точки перевала. Возьмем в плоскости S отрезок $I_k(\lambda)$, соединяющий концы лучей $L_k(\lambda)$, $L_{k+1}(\lambda)$, и пусть $l_k(\lambda)$ — прообраз этого отрезка в плоскости z. Функция $\operatorname{Re} S(z, \lambda)$ принимает наибольшее значение на дуге $l_k(\lambda)$ только на одном из ее концов, либо постоянна вдоль $l_k(\lambda)$, так как образом $l_k(\lambda)$ является отрезок. Заменим меньшую дугу окружности $|z| = |\lambda|^{-1/(m+1)}$, соединяющую точки $z_k(\lambda)$, $z_{k+1}(\lambda)$, кривой $l_k(\lambda)$, и сделаем это при всех k (k берется по модулю $m+1$). Тогда полученный контур является перевальным (см. § 1), что и доказывает лемму.

Приведем асимптотические формулы для интеграла (7.46). Имеем

$$S_k \equiv S_k(z_k(\lambda), \lambda) = \left(1 + \frac{1}{m}\right) |\lambda|^{m/(m+1)} \exp\left[i\left(\frac{m\psi + 2k\pi}{m+1}\right)\right].$$

Если $\psi = 0$, то $\max\limits_k \operatorname{Re} S_k$ достигается при $k = 0$. Так как точки S_k расположены на окружности и угол между отрезками $[0, S_k]$, $[0, S_{k+1}]$ равен $2\pi/(m+1)$, то этот максимум достигается при $k = 0$, если $-\pi/m < \psi < \pi/m$. При $\psi = \pi/m$ максимум достигается при $k = 0, -1$, и асимптотика равна сумме вкладов от этих точек. Выпишем формулу для вклада V_0 от точки $z_0(\lambda)$:

$$V_0(\lambda) \sim \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)\lambda^{m/(m+1)}\right] \sqrt{\frac{2\pi}{m+1}} \times$$
$$\times |\lambda|^{-\frac{m+2}{2(m+1)}} e^{-\frac{i\psi(m+2)}{m+1}} \left[f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{0k}\lambda^{-k/(m+1)}\right], \quad (7.47)$$
$$|\psi| \leqslant \pi/m.$$

Итак, асимптотика $\Phi(\lambda, m)$ равна вкладу (7.47) от точки $z_0(\lambda)$ при $|\psi| \leqslant \pi/m - \varepsilon$ и сумме вкладов от точек $z_0(\lambda)$, $z_{-1}(\lambda)$ при $|\psi - \pi/m| \leqslant \varepsilon$. При остальных значениях λ асимптотику легко выписать, используя тождество

$$\Phi(\lambda, m) = e^{i2\pi/m}\Phi(\lambda e^{i2\pi/m}, m), \qquad (7.48)$$

справедливое при $f(z) \equiv 1$. Нули целой функции $\Phi(\lambda, m)$ состоят из m серий, расположенных асимптотически вблизи лучей $\arg\lambda = \dfrac{\pi + 2k\pi}{m}$.

Следующий интеграл легко выражается через функцию $\Phi(\lambda, m)$ (при $f(z) \equiv 1$):

$$\int\limits_{|z|=1} \exp(az^{-m} + \lambda z)\, dz = t\Phi(\lambda t, m), \quad t^m = ma. \quad (7.49)$$

Вернемся к интегралу (7.45). Функция $R(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$, $g(z_0) \neq 0$, функция $g(z)$ голоморфна в точке z_0. Точки перевала функции $R(z)$ при $|\lambda| \gg 1$ имеют вид

$$z_k(\lambda) = z_0 + z_k^0(\lambda)\left[1 + O\left(\lambda^{-1/(m+1)}\right)\right],$$
$$\left(z_k^0(\lambda)\right)^{m+1} = -mg(z_0)\lambda^{-1},$$

т. е. асимптотически расположены на окружности.

Из леммы 7.6 вытекает

Теорема 7.4. *Асимптотика интеграла* (7.45) *при* $|\lambda| \to \infty$ *равна сумме вкладов от тех точек перевала* $z_k(\lambda)$, *в которых значение* $\operatorname{Re} S_0(z_k^0(\lambda), \lambda)$ *максимально. Здесь* $S_0 = (z - z_0)^{-m} g(z_0) + \lambda (z - z_0)$.

В заключение покажем, что функция

$$F(\zeta) = \int\limits_{|z|=1} \exp\left(\frac{P(z)}{Q(z)} + \lambda z\right) dz, \qquad (7.50)$$

где P, Q — полиномы, является решением дифференциального уравнения

$$\left[Q\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\right]^2 (\zeta F) + \left[Q'\left(\frac{d}{d\zeta}\right) P\left(\frac{d}{d\zeta}\right) - P'\left(\frac{d}{d\zeta}\right) Q\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\right] F = 0. \qquad (7.51)$$

Это вытекает из тождества

$$\int\limits_{|z|=1} \exp\left(\frac{P(z)}{Q(z)} + \zeta z\right)\left[\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)' + \zeta\right] dz = 0.$$

5. Интегралы типа Зоммерфельда. Рассмотрим интеграл

$$F(k) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+i\infty}^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \exp\left[ik\cos(\theta - \theta_0)\right] f(\theta)\, d\theta. \qquad (7.52)$$

Контур интегрирования состоит из луча $\left(-\frac{\pi}{2} + i\infty, -\frac{\pi}{2}\right]$, отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и луча $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - i\infty\right)$. Далее, k — большой положительный параметр, θ_0 вещественно, $|\theta_0| < \pi/2$, функция $f(\theta)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Re}\theta| \leqslant \pi$ и удовлетворяет оценке $|f(\theta)| \leqslant C \exp(\varepsilon e^{|\theta|})$, $\varepsilon < 1$.

Такого рода интегралы возникают в теории дифракции волн, в частности, в задачах, которые удается решить с помощью интегрального преобразования Зоммерфельда.

Теорема 7.5. *При сделанных выше предположениях асимптотика интеграла* (7.52) *равна вкладу от точки перевала* $\theta = \theta_0$.

Функция $S = i\cos(\theta - \theta_0)$ взаимно однозначно и конформно отображает полуполосу $-\pi + \theta_0 < \operatorname{Re}\theta < \theta_0$, $\operatorname{Im}\theta > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Re} S < 0$. Прообразом полуоси $(-\infty, 0)$ является ветвь l^+ линии l наибыстрейшего спуска, проходящей через точку θ_0; ее асимптотой является луч $\theta = -\frac{\pi}{2} + \theta_0 + i\rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$. Вторая ветвь l^- линии l лежит в нижней полуплоскости и имеет асимптотой луч $\theta = \frac{\pi}{2} + \theta_0 + i\rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$. Контур интегрирования в (7.52) можно заменить контуром l, после чего остается применить теорему 1.4.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(k) = -\sqrt{2\pi}\, e^{-i\pi/4}[f(\theta_0) + O(k^{-1})]. \tag{7.53}$$

Из доказательства теоремы и предложения 1.1 вытекает, что эта формула справедлива при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Re} k \geqslant 0$.

Интересный случай возникает, если функция $f(\theta)$ имеет вещественную точку ветвления θ_1; пусть для определенности $0 < \theta_1 < \theta_0 < \pi/2$,

$$f(\theta) = \sqrt{\theta - \theta_1}\, \varphi(\theta), \tag{7.54}$$

при θ, близких к θ_1, функция $\varphi(\theta)$ голоморфна и отлична от нуля в точке θ_1. Оценка для $|f(\theta)|$ прежняя, контур интегрирования обходит точку θ_1 снизу.

Теперь мы не можем продеформировать γ в l — мешает точка ветвления. Соединим точку θ_1 простой гладкой кривой с точкой $\theta^* \in l$. Тогда контур интегрирования γ в (7.52) можно заменить контуром $\tilde{\gamma} = l_1 \cup l_0^+ \cup \cup l_0^- \cup l_2$. Здесь l_1 — часть $l\left(\text{от } \frac{\pi}{2} - i\infty \text{ до } \theta^*\right)$, l_0^+ — берег разреза l_0 (от θ^* до θ_1), l_0^- — второй берег разреза и l_2 — оставшаяся часть линии l. Тем самым доказано, что при $k \to +\infty$

$$F(k) \sim F_0(k) + F_1(k),$$

где $F_0(k)$ — вклад от точки θ_0, $F_1(k)$ — вклад от точки θ_1 (т. е. интеграл по разрезу $l_0^+ \cup l_0^-$).

Выбор разреза l_0 довольно безразличен; требуется лишь, чтобы $\max \operatorname{Re} S$ на l_0 достигался в точке θ_1. Тогда асимптотика $F_1(k)$ определяется интегралом по «носику» разреза. Выберем l_0 так, чтобы он совпадал с отрезком $[\theta_1, \theta_1 + i\delta]$, $\delta > 0$, вблизи точки θ_1, и вычислим асимптотику $F_1(k)$. Положим $\tilde{\theta} = \theta - \theta_1$, тогда при малых $|\tilde{\theta}|$ имеем

$$S(\theta) = i\cos(\theta_0 - \theta_1) + i\sin(\theta_0 - \theta_1)\tilde{\theta} + \ldots$$

Пусть $\sqrt{\theta - \theta_1} > 0$ при $\theta > \theta_1$ и малых $\tilde{\theta}$.

Мы ограничимся нестрогим выводом; для аккуратного доказательства достаточно сделать замену $S(\theta) = S(\theta_0) + \zeta$ при малых $\tilde{\theta}$ и применить метод Лапласа к полученному интегралу.

Отбрасывая квадратичные по $\tilde{\theta}$ члены, заменяя $f(\theta)$ на $f(\theta_1)$ и полагая $\tilde{\theta} = iy$, получаем

$$F_1(k) \sim 2i\exp(-ik\cos(\theta_0 - \theta_1)) \times$$
$$\times f(\theta_1)\int_0^{\delta} \exp[-k\sin(\theta_0 - \theta_1)y]\,\sqrt{y}\,dy.$$

Отсюда находим, что

$$F_1(k) \sim 2ik^{-1}\sqrt{\pi}\exp[-ik\cos(\theta_0 - \theta_1)]f(\theta_1)[\sin(\theta_0 - \theta_1)]^{-3/2}. \tag{7.55}$$

6. Фундаментальные решения уравнений Соболева — Гальперна. Уравнения вида

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{7.56}$$

удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \leqslant c, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.57}$$

где $\lambda_j(s)$ — корни уравнения

$$P(\lambda, s) = P_m(s)\lambda^m + \ldots + P_0(s) = 0, \quad s = \sigma + i\tau,$$

называются *уравнениями Соболева — Гальперна*.

Фундаментальным решением задачи Коши (или *функцией Грина*) называется решение уравнения (7.56) с данными Коши

$$G|_{t=0} = \partial G/\partial t|_{t=0} = \ldots = \partial^{m-2}G/\partial t^{m-2}|_{t=0} = 0,$$
$$\partial^{m-1}G/\partial t^{m-1}|_{t=0} = \delta(x).$$

Рассмотрим уравнение первого порядка по t:

$$Q(i\partial/\partial x)\partial u/\partial t = P(i\partial/\partial x)u.$$

При $|s| \gg 1$ имеем

$$P(s)/Q(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots$$

Из условия (7.57) следует, что возможны случаи:

1°. $\operatorname{Re} \alpha_n < 0$, $n > 0$ четно.

2°. $\operatorname{Re} \alpha_n = \operatorname{Re} \alpha_{n-1} = \ldots = \operatorname{Re} \alpha_{p+1}$, $\operatorname{Re} \alpha_p < 0$, $p > 0$, p четно.

3°. $\operatorname{Re} \alpha_n = \operatorname{Re} \alpha_{n-1} = \ldots = \operatorname{Re} \alpha_1 = 0$; a) $n \geqslant 2$; b) $n < 2$.

В окрестности вещественного нуля σ_k функции $Q(s)$ имеем

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{j=n}^{0} \frac{a_{j_k}}{(s-\sigma_k)^j} + \frac{P_1(s)}{Q_1(s)}, \quad Q_1(\sigma_k) \neq 0, \quad n > 0.$$

Возможны только следующие случаи:

4°. $\operatorname{Re} \alpha_{n_k} < 0$, n_k четно.

5°. $\operatorname{Re} \alpha_{n_k} = \ldots = \operatorname{Re} \alpha_{(p+1)_k} = 0$, $\operatorname{Re} \alpha_{p_k} < 0$, $p_k > 0$ четно.

6°. $\operatorname{Re} \alpha_{n_k} = \ldots = \operatorname{Re} \alpha_{1_k} = 0$.

Асимптотика функции Грина $G(x, t)$ при $|x| \to \infty$, $t > 0$ фиксированном состоит из трех слагаемых:

$$G(x, t) \sim G_1(x, t) + G_2(x, t) + G_3(x, t).$$

Здесь G_1, G_2, G_3 определяются поведением функции $P(s)/Q(s)$ соответственно в окрестностях вещественных полюсов, невещественных полюсов и точки $s = \infty$. Действительно, $G(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{tP(s)/Q(s) - ixs\}\, ds$, и подынтегральная функция может иметь точки перевала только вблизи полюсов функции $P(s)/Q(s)$ при $|x| \gg 1$. Асимптотика G_3 вычислена в п. 1. Асимптотика G_1, G_2 вычислена в [57].

Теорема 7.6. *В случае 4° имеем*

$$G_1(x, t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left\{ e^{-ix\sigma_k} \left[C_{1k} |x|^{-\frac{n_k+2}{2n_k+2}} t^{\frac{1}{2n_k+2}} h \right] \exp \left\{ \gamma_{1k} |x|^{\frac{n_k}{n_k+1}} t^{\frac{1}{n_k+1}} h \right\} + \right.$$

$$\left. + C_{2k} |x|^{-\frac{n_k+2}{2n_k+2}} t^{\frac{1}{2n_k+2}} h \exp \left\{ \gamma_{2k} |x|^{\frac{n_k}{n_k+1}} t^{\frac{1}{n_k+1}} \right\} \right\}. \quad (7.58)$$

Здесь

$$\operatorname{Re}\gamma_{1k}<0,\ \operatorname{Re}\gamma_{2k}<0,\ h=1+O\left(|x|^{-\frac{1}{n_k+1}}\right).$$

В случае 5° при n_k четном имеем

$$G_1(x,t)=\sum_k e^{-ix\sigma_k}\left[C_k|x|^{-\frac{n_k+2}{2n_k+2}}t^{\frac{1}{2n_k+2}}h\right]\times$$
$$\times\exp\left\{i\gamma_{1k}|x|^{\frac{n_k}{n_k+1}}t^{\frac{1}{n_k+1}}+\gamma_{2k}|x|^{\frac{p_k}{n_k+1}}t^{\frac{n_k-p_k+1}{n_k+1}}h\right\},\quad (7.59)$$

где $\operatorname{Re}\gamma_{2k}<0$, γ_{1k} вещественно. Если n_k нечетно, то при $x\to\operatorname{sgn}(-i\alpha_{n_k})\infty$ асимптотика имеет вид (7.58), а при $x\to\operatorname{sgn}(i\alpha_{n_k})\infty$ равна сумме двух выражений вида (7.59).

В случае 6° при n_k четном имеем

$$G_1(x,t)=\sum_k e^{-ix\sigma_k}\left[C_k|x|^{-\frac{n_k+2}{2n_k+2}}t^{\frac{1}{2n_k+2}}h\right]\times$$
$$\times\exp\left\{i\gamma_k|x|^{\frac{n_k}{n_k+1}}t^{\frac{1}{n_k+1}}\right\},\quad (7.60)$$

где γ_k вещественно. Если n_k нечетно, то при $x\to\to\operatorname{sgn}(-i\alpha_{n_k})\infty$ асимптотика G_1 имеет вид (7.58), а при $x\to\operatorname{sgn}(i\alpha_{n_k})\infty$ равна сумме двух выражений вида (7.59).

Далее,

$$G_2(x,t)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}C_j|x|^{-\frac{n_j+2}{2n_j+2}}t^{\frac{1}{2n_j+2}}\exp\left\{-\left[ixs_j\left(1+O\left(|x|^{-\frac{1}{n_j+1}}\right)\right)\right]\right\}.$$

Здесь $s_j=\sigma_j+i\tau_j$ — комплексный нуль функции $Q(s)$, n_j — его кратность, причем $x\tau_j<0$.

В [57] исследована также асимптотика уравнения (7.56) произвольного порядка по t.

7.1 [30]. При $x\to+\infty$

$$\pi^{-1}\operatorname{Re}\int_0^\infty\exp\left\{-itx-t\left(1-\frac{2i}{\pi}\ln t\right)\right\}dt=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{e}}\exp\left(\frac{\pi}{4}e^x-\frac{2}{\pi e}e^{-\pi x/2}\right)[1+O(e^{-\pi x/4})].$$

7.2 [30]. Пусть $\alpha \in (0, \pi/2)$ фиксировано. Тогда при $\nu \to +\infty$

$$\int_0^\infty \exp(-\nu \operatorname{ch} t/\cos\alpha) \cos \nu t \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\nu \operatorname{th} \alpha}} \exp[\nu(\alpha - \operatorname{th}\alpha - \pi/2)] \left[1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right].$$

7. Некоторые задачи теории вероятностей. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины,

$$\mathsf{M}X_j = 0, \quad \mathsf{D}X_j = \sigma_j^2 > 0,$$

где M — математическое ожидание, D — дисперсия, и $\mathsf{M}\exp(a|X_j|) < \infty$ при некотором $a > 0$. Положим $Z_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}$.

Пусть случайные величины X_j имеют непрерывную и ограниченную на всей оси плотность $g(x)$, тогда существует плотность вероятности $p_n(x)$ случайной величины Z_n. Положим $p_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Следующие результаты приведены в [18].

Теорема 7.7. *При* $x \geqslant 1$, $x = o(\sqrt{n})$, $n \to \infty$, *имеем*

$$\frac{p_n(x)}{p_0(x)} = \exp\left[\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

$$\frac{p_n(-x)}{p_0(x)} = \exp\left[-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\lambda(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots$, *ряд сходится при малых* $|z|$.

Для коэффициентов λ_j получены рекуррентные соотношения. Доказательство основано на интегральном представлении

$$p_n(x) = \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mathsf{M}^n(z) \exp(-\sigma\sqrt{n}\, xz)\, dz,$$

$$\mathsf{M}(it) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x)\, dx$$

и проведено с помощью метода перевала. Основной вклад в асимптотику интеграла $p_n(x)$ дает точка перевала $z_0(\tau)$,

$\tau = x/\sqrt{n}$, которая имеет вид

$$\tau = \sigma z + \frac{\gamma_3 z^2}{2\sigma} + \frac{\gamma_4 z^3}{6\sigma} + \ldots,$$

где γ_j — коэффициенты разложения

$$\ln \mathsf{M}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k z^k}{k!}.$$

Числа γ_j выражаются через центральные моменты μ_j случайной величины X_j.

Пусть X_j — решетчатая случайная величина, принимающая значения на арифметической прогрессии $b + kh$, $h > 0$, k — целое число, $x_{nk} = \frac{kh + bn}{\sigma\sqrt{n}}$, $P\{Z_n = x_{nk}\}$ — вероятность того, что $Z_n = x_{nk}$.

Теорема 7.8. *Пусть $x = x_{nk}$, $x \geqslant 1$, $x = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$. Тогда*

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P\{Z_n = x_{nk}\} = p_0(x) \exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

При $x \leqslant -1$, $x = o(\sqrt{n})$ имеем

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P\{Z_n = x_{nk}\} = \\ = p_0(x) \exp\left(-\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Доказательство проводится с помощью метода перевала и основано на интегральном представлении

$$P_n(k) = \frac{h}{2\pi i} \int\limits_{c - i\pi/h}^{c + i\pi/h} \mathsf{M}^n(z) \exp[-z(kh + bn)]\, dz.$$

Здесь $c \in [-a/2, a/2]$, $P_n(k) = P\{x_1 + \ldots + x_n = kh + bn\}$,

$$\mathsf{M}(z) = \mathsf{M}e^{zX_j} = \sum_{-\infty}^{\infty} p_k \exp[(kh + b)z].$$

Пусть X_j — случайные величины с плотностью $g(x)$ непрерывной и ограниченной на всей оси и выполнено условие

$$\mathsf{M} \exp |X_j|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}} < \infty, \quad 1/6 \leqslant \alpha < 1/2.$$

Пусть $s \geqslant 0$ — целое,

$$\frac{1}{2}\frac{s+1}{s+3} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\frac{s+2}{s+4}, \quad \lambda^{[s]}(z) = \sum_{k=0}^{s} \lambda_s z^s,$$

где $\lambda(z)$ — та же функция, что и в теореме 7.7.

Теорема 7.9. *Пусть* $\rho(n) > 0$, $\rho(\infty) = \infty$. *Тогда при* $x \in [0, n^\alpha/\rho(n)]$, $n \to \infty$

$$p_n(x) \sim \exp\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{n}\lambda^{[s]}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

а при $x \in [-n^\alpha/\rho(n), 0]$, $n \to \infty$

$$p_n(x) \sim \exp\left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda^{[s]}\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

равномерно по x.

В [18] приведен ряд других применений метода перевала к задачам теории вероятностей.

Приведем некоторые результаты из [24]. Пусть $G(u)$ — непрерывная неубывающая функция на отрезке $[\beta, 1]$, $0 < \beta < 1$ и $G(1) - G(\beta) > 0$, X — случайная величина с характеристической функцией

$$\varphi(z) = \exp\left[\gamma z^2 + \int_\beta^1 (e^{zu} - 1)\, dG(u)\right].$$

При достаточно малом $\nu > 0$ и подходяще выбранном $\eta_0 > 0$ функция

$$\psi(z) = \varphi(z) \exp\left[-\nu\left(e^{\eta_0 z^2} - 1\right)\right]$$

будет характеристической функцией некоторой случайной величины.

Доказательство основано на применении метода перевала к интегралу

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \psi(z) e^{-zx} dz.$$

Точки перевала подынтегральной функции определяются из уравнения

$$2\gamma z + \int_\beta^1 e^{zu} u\, dG(u) - \nu\eta_0 e^{\eta_0 z^2} - x = 0,$$

которое при достаточно малом $\nu > 0$ имеет положительный корень $z_0(x)$. Функция $z_0(x)$ монотонно возрастает и точка $z_0(x)$ дает основной вклад в асимптотику интеграла $g(x)$ при $x \to +\infty$.

§ 8. Асимптотика преобразования Меллина

Преобразованием Меллина $M(z)$ функции $f(t)$ называется интеграл

$$M(z) = \int_0^\infty f(t)\, t^{z-1} dt.$$

Здесь $t^z = e^{z \ln t}$, функция $\ln t$ вещественна при $0 < t < \infty$. Формула обращения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} M(z)\, t^{-z} dz.$$

В этом параграфе мы исследуем асимптотику $M(z)$ при комплексных $z \to \infty$ в случае, когда $f(t) = \exp(P(t))$, $P(t)$ — полином.

1. Асимптотика гамма-функции. При вещественных и положительных z справедливо интегральное представление

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z^{-1} \int_0^\infty e^{-t} t^z dt. \tag{8.1}$$

Гамма-функция есть преобразование Меллина функции e^{-t}. Подынтегральная функция имеет вид $\exp(-t + z \ln t)$ и имеет единственную точку перевала $t_0(z) = z$.

Теорема 8.1. *При* $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon < \pi$, *асимптотика* $\Gamma(z)$ *равна вкладу от точки перевала* $t_0(z) = z$.

Асимптотическое разложение гамма-функции имеет вид

$$\Gamma(z) \sim z^z e^{-z} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \gamma_k z^{-k}\right). \tag{8.2}$$

1°. $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Интеграл (8.1) сходится абсолютно при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ и потому является голоморфной функцией z в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Пусть $\operatorname{Re} z \geqslant 0$; тогда интеграл (8.1) равен интегралу по лучу l_z, проходящему через точку $t=0$ и точку перевала $t=z$. Делая в этом интеграле замену $t \to tz$, получаем, что

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \exp[zS(t)]\,dt, \quad S = -t + \ln t.$$

Так как функция $S(t)$ вещественна, то $\max \operatorname{Re}(zS(t))$ на полуоси $t \geqslant 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$ достигается только в точке перевала $t=1$ функции S; при $\operatorname{Re} z = 0$ имеем $\operatorname{Re}(zS(t)) = 0$ на этой полуоси. Следовательно, по теореме 1.3 асимптотика гамма-функции при $|z| \to \infty$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ равна вкладу от точки перевала $t=1$, и (8.2) доказано при $|\arg z| \leqslant \pi/2$, $|z| \to \infty$.

2°. $\operatorname{Re} z < 0$. Интеграл (8.1) расходится при $\operatorname{Re} z < 0$; продолжим его аналитически. Пусть γ — контур в комплексной плоскости t, обходящий полуось $0 \leqslant t < \infty$ в положительном направлении,

$$F(z) = \int_\gamma e^{-t} t^z\,dt. \tag{8.3}$$

Здесь ветвь функции $t^z = e^{z \ln t}$ при $z > 0$ выбрана в плоскости t с разрезом $[0, +\infty)$ так, что $t^z > 0$ на верхнем берегу разреза. Пусть $z > 0$, тогда $F(z)$ равна разности интегралов по берегам разреза $[0, +\infty)$:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^z\,dt - e^{2\pi i z} \int_0^\infty e^{-t} t^z\,dt = z\left(1 - e^{2\pi i z}\right)\Gamma(z),$$

так что

$$\Gamma(z) = z^{-1}\left(1 - e^{2\pi i z}\right)^{-1} \int_\gamma e^{-t} t^z\,dt. \tag{8.4}$$

Интеграл $F(z)$ сходится абсолютно при всех комплексных z и поэтому является целой функцией z; следовательно, функция $\Gamma(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости z, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \ldots$ Сделаем в интеграле (8.3) замену $t = e^\zeta$, тогда

$$F(z) = \int_{\tilde\gamma} \exp\left(-e^\zeta + \zeta z\right) e^\zeta d\zeta.$$

Выберем в качестве γ контур, состоящий из полуоси $[1, +\infty)$, окружности $|t| = 1$ и полуоси $(+\infty, 1]$, идущей по нижнему берегу разреза $[0, \infty)$. Тогда $\tilde\gamma$ — граница полуполосы $\operatorname{Re}\zeta > 0$, $0 < \operatorname{Im}\zeta < 2\pi$, ориентированная по часовой стрелке. Подынтегральная функция имеет точку перевала $\zeta = \ln z = \ln|z| + i\arg z$, где $|\arg z| < \pi$. Сделаем замену $\zeta \to \zeta + \ln z$, тогда

$$F(z) = z\int\limits_{\tilde{\gamma}_z} \exp(zS(\zeta))\, e^{\zeta}d\zeta, \quad S(\zeta) = \zeta - e^{\zeta}, \qquad (8.5)$$

контур $\tilde{\gamma}_z$ получен сдвигом из контура $\tilde{\gamma}$ на $\ln z$.

Пусть $\pi/2 < \varphi < \pi$, $\varphi = \arg z$. Покажем, что асимптотика $F(z)$ при таких $\arg z$ и при $|z| \to \infty$ равна вкладу от точки перевала $\zeta = 0$ функции S. Для этого исследуем структуру линий наибыстрейшего спуска функции $S_\varphi(\zeta) = e^{i\varphi}S(\zeta)$, выходящих из точки $\zeta = 0$.

Лемма 8.1. *Пусть $\pi/2 < \varphi < \pi$. Тогда линия наибыстрейшего спуска $l(\varphi)$ функции $S_\varphi(\zeta) = e^{i\varphi}(\zeta - e^{\zeta})$, выходящая из точки $\zeta = 0$, состоит из двух бесконечных кривых $l^{\pm}(\varphi)$. Одна из них имеет асимптотой луч $0 < \operatorname{Re}\zeta < \infty$, $\operatorname{Im}\zeta = -\varphi$, другая — луч $0 < \operatorname{Re}\zeta < \infty$, $\operatorname{Im}\zeta = 2\pi - \varphi$.*

При $\varphi = \pi$ функция $S_\pi(\zeta)$ имеет точки перевала $\zeta_k = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Множества уровня M_k: $\operatorname{Im} S_\pi(\zeta) = \operatorname{Im} S_\pi(\zeta_k)$, содержащие точки ζ_k, получаются из M_0 сдвигом на $2k\pi i$, так как

$$\operatorname{Im} S_\pi(\zeta + 2k\pi i) = \operatorname{Im} S_\pi(\zeta) + \operatorname{Im} S_\pi(\zeta_k),$$

и если $\operatorname{Im} S_\pi(\zeta) = \operatorname{Im} S_\pi(\zeta_0)$, то $\operatorname{Im} S_\pi(\zeta + 2k\pi i) = \operatorname{Im} S_\pi(\zeta_k)$. Множество M_0 определяется из уравнения

$$e^{\sigma}\sin\tau - \tau = 0 \qquad (\zeta = \sigma + i\tau)$$

и состоит из линий наибыстрейшего подъема $l_{01} = [-\infty, 0)$, $l_{02} = [0, +\infty)$ и двух линий l_{03}, l_{04} наибыстрейшего спуска. Так как функция $S_\pi(\zeta)$ вещественна при вещественных ζ, то линии l_{03}, l_{04} симметричны относительно вещественной оси; пусть $\operatorname{Im}\zeta > 0$ на l_{03}. Из уравнения следует, что l_{03} имеет асимптотой луч $0 \leqslant \sigma < +\infty$, $\tau = \pi$.

Обозначим через l_{kj} линии, полученные из l_{0j} сдвигом на $2k\pi i$, и пусть D — область, ограниченная линиями l_{02}, l_{03}. Функция $w = S_\pi(\zeta)$ взаимно однозначно отображает область D на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$. Положим $\psi = \pi - \varphi$ (напомним, что $\pi/2 < \varphi < \pi$), тогда $S_\varphi(\zeta) = -e^{-i\psi}S_\pi(\zeta)$, и функция $w = S_\varphi(\zeta)$ взаимно однозначно отображает D на полуплоскость $\operatorname{Im}(e^{i\varphi}w) < 0$. Последняя содержит полуось $-\infty < w < 0$; прообразом этой полуоси является ветвь $l^+(\varphi)$ линии наибыстрейшего спуска $\operatorname{Im} S_\varphi(\zeta) = \operatorname{Im} S_\varphi(0)$, проходящая через точку $\zeta = 0$. Асимптотой этой линии является луч $\tau = -\varphi$.

Пусть $\tilde{D}$ — область, ограниченная линиями l_{01}, l_{03}, l_{11} и l_{12}. Функция $w = S_\pi(\zeta)$ взаимно однозначно отображает $\tilde{D}$ на область G — полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ с разрезом по лучу $\operatorname{Im} w = -2\pi i$, $0 < \operatorname{Re} w < \infty$ (на этот разрез отображается $l_{11} \cup l_{12}$). Так как $S_\varphi(\zeta) = e^{-i\psi}S_\pi(\zeta)$, то функция $w = S_\varphi(\zeta)$ взаимно однозначно отображает $\tilde{D}$ на область G_ψ, полученную из области G поворотом на угол $-\psi$. Область G_ψ содержит полуось $-\infty < \operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Im} w = 0$; ее прообразом является ветвь $l^-(\varphi)$ линии наибыстрейшего спуска $l(\varphi)$, и ее асимптотой является луч $0 < \sigma < \infty$, $\tau = 2\pi - \varphi$. Лемма доказана.

Покажем, что контур $\tilde{\gamma}_z$ можно продеформировать в линию $l(\varphi)$; тем самым (8.2) будет доказано при $\pi/2 < \varphi < \pi$. При $-\pi < \varphi < -\pi/2$ доказательство аналогично (можно также воспользоваться тем, что $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$, так как функция $\Gamma(z)$ вещественна при вещественных z). При $\pi/2 < \varphi < \pi$ функция $\exp(zS(\zeta))$ экспоненциально убывает при $|\zeta| \to \infty$ в полосах $\operatorname{Re}\zeta > 0$, $2k\pi - \pi/2 < \varphi + \tau < 2k\pi + \pi/2$, контур $\tilde{\gamma}_z$ состоит из лучей $-\ln|z| < \sigma < \infty$, $\tau = -i\varphi$ и $-\ln|z| < \sigma < \infty$, $\tau = -i\varphi + 2\pi i$ и отрезка, соединяющего их концы. Поэтому $\tilde{\gamma}_z$ можно продеформировать вначале в границу полуполосы $0 < \sigma < \infty$, $-\varphi < \tau < 2\pi - \varphi$, а затем, в силу структуры линии $l(\varphi)$ (см. лемму 8.1), в линию $l(\varphi)$. Тем самым теорема доказана.

Замечание 8.1. Достаточно было бы вычислить асимптотику гамма-функции при $|z| \to \infty$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ и затем, используя тождество

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

вычислить асимптотику в левой полуплоскости. Достоинство приведенного выше доказательства состоит в том, что оно позволяет вычислить асимптотику ряда других интегралов.

Найдем рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения (8.1). Сделаем в окрестности точки $t = 1$

замену

$$t = 1 + \varphi(u), \quad \ln t - t + 1 = -u^2,$$

где $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \sqrt{2}$. Функция φ разлагается в ряд $\varphi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k u^k$, сходящийся при малых $|u|$. Из формул (8.1′) и (2.1.25) следует, что

$$a_k = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)(2k+1)!\,\varphi_{2k+1}. \tag{8.6}$$

Дифференцируя тождество для φ по u, получаем тождество

$$2u\varphi(u) + 2u - \varphi(u)\varphi'(u) = 0.$$

Подставляя в это тождество ряд для φ и приравнивая нулю коэффициенты при степенях u, получаем рекуррентные соотношения

$$2\varphi_k = \sum_{m=1}^{k+1} m\varphi_m\varphi_{k-m+2}, \quad k \geqslant 2.$$

Так как $\varphi_1 = \sqrt{2}$, то окончательно

$$\varphi_{k+1} = \frac{\sqrt{2}\,\varphi_k}{k+2} - \frac{1}{\sqrt{2}\,(k+2)} \sum_{m=2}^{k} m\varphi_m\varphi_{k-m+2}. \tag{8.7}$$

2. Укороченная гамма-функция. Эта функция определяется формулой

$$\Gamma(a, z) = \int_a^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt, \tag{8.8}$$

где $0 < a < \infty$, и при фиксированном a является целой функцией z.

Теорема 8.2. *Пусть* $a > 0$ *фиксировано*, $|z| \to \infty$. *Тогда асимптотика функции* $\Gamma(a, z)$ *равна*:

1°. *Вкладу от точки перевала* $t_0(z) = z - 1$ *при* $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$.

2°. *Вкладу от конца контура* $t = a$ *при* $|\arg(-z)| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$.

3°. *Сумме вкладов от точки перевала* $t_0(z)$ *и от конца контура в оставшихся секторах.*

Вклад от точки перевала совпадает с правой частью (8.2). Вычислим вклад от конца контура. Имеем

$$\Gamma(a, z) = \int_{e^a}^{\infty} e^{-e^x} e^{xz} dx.$$

Из теоремы 1.2 следует, что

$$\Gamma(a, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-1} \left(|\arg(-z)| \leqslant \pi/2 - \varepsilon, \quad |z| \to \infty\right),$$

$$c_k = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{k+1} (\exp(-e^x))\big|_{x=a}. \qquad (8.9)$$

Подынтегральная функция в (8.8) имеет вид $\exp[S(t, z)]$, $S = -t + (z-1)\ln t$. Имеем $\operatorname{Re} S_t' = -1 + t^{-1}\operatorname{Re}(z-1) < 0$, если $t \geqslant a$, $\operatorname{Re} z < a + 1$. Поэтому при $\operatorname{Re} z < a + 1$ функция $\operatorname{Re} S(t, z)$ достигает максимума только на конце $t = a$ контура интегрирования, и асимптотика $\Gamma(a, z)$ равна вкладу от точки $t = a$. Тем самым 2° доказано. Далее,

$$\Gamma(a, z) = \Gamma(z) - \int_0^a e^{-t} t^{z-1} dt. \qquad (8.10)$$

Функция $|t^z|$ при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ достигает максимума на отрезке $[0, a]$ только в точке $t = a$, так что асимптотика последнего интеграла в (8.10) при $|z| \to \infty$, $\operatorname{Re} z > 0$ равна вкладу от точки $t = a$, который равен

$(-1)\times$(вклад от точки $t = a$ в интеграл (8.8)).

Из (8.10) и асимптотики гамма-функции следуют утверждения 1°, 3°.

3. Обобщенная гамма-функция. Эта функция определяется равенством

$$G(z) = \int_0^{\infty} e^{-P(t)} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0), \qquad (8.11)$$

где $P(t)$ — полином:

$$P(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n, \quad \operatorname{Re} a_0 > 0, \quad n \geqslant 1.$$

При $P = t$ имеем $G(z) = \Gamma(z)$. Покажем прежде всего, что функция $G(z)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость z и является мероморфной функцией с простыми полюсами в точках $z=0, -1, -2, \ldots$ Представим $G(z)$ в виде $G(z)=G_1(z)+G_2(z)$, где $G_1(z)$ — интеграл по отрезку $[0, 1]$, $G_2(z)$ — интеграл по полуоси $[0, \infty)$. Функция $G_2(z)$ является целой функцией, так что остается аналитически продолжить интеграл $G_2(z)$.

По формуле Тейлора при любом целом $N \geqslant 0$ имеем

$$e^{-P(t)} = \sum_{k=0}^{N} b_k t^k + R_N(t),\ R_N(t) = O\left(t^{N+1}\right) \quad (t \to 0).$$

Следовательно, при $\operatorname{Re} z > 0$

$$G_1(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{z+k} + \int_0^1 R_N(t)\, t^{z-1} dt. \tag{8.12}$$

Последний интеграл сходится и потому является голоморфной функцией z в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -N-1$. Тем самым формула (8.12) дает мероморфное продолжение функции $G_1(z)$ в эту полуплоскость; полюсы полученной функции могут быть только в точках $z=0, -1, -2, \ldots$ Так как N произвольно, то продолжение функции $G(z)$ получено для всей плоскости.

Задача о вычислении асимптотики $G(z)$ при $|z| \to \infty$ в секторе $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon < \pi$ сводится, как мы покажем, к задаче о вычислении асимптотики гамма-функции. Подынтегральная функция в (8.11) имеет вид $\exp S$, $S(t, z) = -P(t) + (z-1)\ln t$; исследуем ее точки перевала.

Лемма 8.2. *Пусть* $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon \leqslant \pi$, $|z| \geqslant R \gg 1$. *Тогда функция* $S(t, z)$ *имеет точку перевала*

$$t_0(z) = \left(\frac{z}{na_0}\right)^{1/n} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} b_k z^{-k/n}\right). \tag{8.13}$$

Этот ряд сходится при $|z| \geqslant R$ *и*

$$\arg\left(\frac{z}{a_0}\right)^{1/n} = \frac{1}{n}(\arg z - \arg a_0), \quad |\arg a_0| < \frac{\pi}{2}. \tag{8.13'}$$

Теорема 8.3. *Асимптотика функции* $G(z)$ *при* $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon < \pi$ *равна вкладу от точки перевала* $t_0(z)$.

Выпишем главный член асимптотики:

$$G(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{nz}} \exp\left[-P(t_0(z)) + z \ln t_0(z)\right]\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k/n}\right). \tag{8.14}$$

Функция, стоящая в экспоненте, имеет вид

$$z \ln z - z/n + O(z^{1-1/n}).$$

Пусть z вещественно и положительно, $a_0 > 0$. Сделаем замену переменной $t \to \left(\frac{z}{na_0} t\right)^{1/n}$, тогда

$$G(z) = \frac{1}{n}\left(\frac{z}{na_0}\right)^{1/n} \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{z}{n} S(t, \varepsilon)\right] dt, \tag{8.15}$$

где обозначено

$$\varepsilon = \left(\frac{z}{na_0}\right)^{-1/n}, \quad S(t, \varepsilon) = -t + \ln t + \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon^k t^{1-k/n}.$$

Формула (8.15) справедлива при $\operatorname{Re} z > 0$ по принципу аналитического продолжения. При $\varepsilon = 0$ функция $S(t, \varepsilon)$ совпадает с функцией $S = -t + \ln t$, входящей в интеграл (8.1′). Асимптотика этого интеграла равна вкладу от точки $t = 1$. Так как $S(t, \varepsilon)$ при малых ε (т. е. при больших $|z|$) является малым возмущением функции $S(t, 0)$, то асимптотика $G(z)$ равна вкладу от точки перевала $t_0(\varepsilon)$ такой, что $t_0(0) = 1$.

Пусть $a_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$, $|\varphi_0| < \pi/2$. Заменяя контур интегрирования в (8.11) лучом $t = e^{-i\varphi_0/n}\rho$, $0 \leqslant \rho < \infty$, получаем

$$G(z) = e^{-\frac{iz\varphi_0}{n}} \int_0^{\infty} e^{-P_1(\rho)} \rho^{z-1} d\rho.$$

Здесь $P_1(\rho) = \rho_0 \rho^n + \ldots$, так что старший коэффициент полинома P_1 положителен, и мы пришли к рассмотренному выше случаю.

8.1. Пусть $\alpha > 1$, $\operatorname{Re} a > 0$,

$$M(z) = \int_0^{\infty} \exp\left(-at^{\alpha}\right) t^z dt,$$

тогда при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon < \pi$, асимптотика интеграла $M(z)$ равна вкладу от точки перевала $t_0(z) = (z/\alpha a)^{1/a}$.

4. Асимптотика некоторых интегральных преобразований. Рассмотрим интеграл вида

$$F(y, 0) = \int\limits_{L_\theta} y^t \exp\{-t\ln t + \alpha t + \psi(t)\} f(t)\,dt, \qquad (8.16)$$

где L_θ — луч: $t = \tau e^{i\theta}$, $h \leqslant \tau < \infty$, причем $0 < \varepsilon_1 < h$, $|\theta| < \pi/2 - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi/2)$, α — комплексное число. Функция $\psi(t)$ голоморфна в области D:

$h - \varepsilon_1 < |t| < \infty$, $\gamma^- < \arg t < \gamma^+$, где $\varepsilon_1 > 0$, $\gamma^- < 0 < \gamma^+$,

$|\gamma^\pm| < \pi$, функция $f(t)$ голоморфна в области D, за исключением конечного числа полюсов $a_1, \ldots, a_N$. Кроме того, в области D при $|t - a_j| > \varepsilon > 0$ выполняются неравенства $|\psi(t)| \leqslant C(\varepsilon)|t|^{1-p}$, $0 < p < 1$; $|f(t)| \leqslant C(\varepsilon)|t|^\delta$, при некотором $\delta > 0$ и $\arg a_j \neq 0$. Под $\ln t$ понимается главное значение логарифма. К интегралам вида (8.16) относятся функции Бесселя и обобщенные гипергеометрические функции.

С помощью замены $y_1 = ye^{\alpha-1}$ можно добиться того, что $\alpha = 1$. Тогда точки перевала определяются из уравнения

$$-\ln t + \psi'(t) + \ln y_1 = 0.$$

Оно имеет единственное решение, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, t, y_1 лежат в области $|t| < |y_1|e^\varepsilon$, $K(\varepsilon) < |y_1| < \infty$, $\gamma^- + \varepsilon < \arg y_1 < \gamma^+ - \varepsilon$ и имеет вид

$$t_0(y_1) = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}} (e^\tau \psi'(y_1 e^\tau))^k\right]_{\tau=0}. \qquad (8.17)$$

Функция $t_0(y_1)$ голоморфна в области $K(\varepsilon) < |y_1| < \infty$, $\gamma^- + \varepsilon < \arg y_1 < \gamma^+ - \varepsilon$ и $t_0(y_1) = y_1[1 + O(|y_1|^{-1})]$ при $|y_1| \to \infty$ в этой области. Пусть D_1 — область $|y_1| \leqslant K$, $\max(-\pi/2 - \varepsilon^*, \gamma^- + \varepsilon^*) < \arg y_1 < \min(\pi/2 + \varepsilon, \gamma^+ - \varepsilon^*)$, $\varepsilon^* > 0$ достаточно мало, $K > 0$.

Теорема 8.4. *При $y_1 \in D_1$, $|y_1| \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(y, 0) = t_0^{-1/2} \exp\{t_0 + \psi(t_0) - t_0\psi'(t_0)\} \times$$
$$\times \left[\sum_{j=0}^{J} 2\Gamma(j + 1/2)\, d_j(t_0)\, t_0^{-j} + R_J(t_0)\right] + H(y, 0) + F_1(t_0).$$

Здесь t_0 *определяется формулой* (8.17), $J \geqslant 1$ *любое*,

$$H(y, 0) = r(y_1)\, 2\pi i \sum_{a_j \in D_\theta} \underset{t=a_j}{\mathrm{Res}} \left[\exp\{-t\ln t + \psi(t) + \alpha t)\}\, f(t)\, y^t\right],$$

D_θ — *область* $h \leqslant |t| < \infty$, $r(y_1)\theta < r(y_1)\arg t \leqslant \pi/2$, $r(y_1) = \operatorname{sgn}\arg y_1$.

При $y \in D_1$ *справедливы оценки*

$$|R_J(t_0)| \leqslant M_J |y|^{-pJ+\delta}, \quad |F_1(t_0)| \leqslant M|y|^h.$$

Коэффициенты d_j *определяются из разложения*

$$d_j(t) = \frac{1}{(2j)!} \left.\frac{d^{2j}\widetilde{Q}(\xi^2, t)\,\xi}{d\xi^{2j}}\right|_{\xi=0},$$

где обозначено

$$\widetilde{Q}(\tau, t) = f(w_1(\tau)\,t)\, w_1'(\tau) \exp\{Q(t, w_1(\tau)\,t)\},$$

$$Q(t, w) = [\psi(tw) - \psi(t)]\, t^{-1} - (w-1)\,\psi'(t),$$

и w_1 — *решение уравнения* $-w + 1 + w\ln w = \tau$ *такое, что* $w_1(0) = 0$.

Пусть D_2 — область $\pi/2 + \varepsilon < \operatorname{sgn}\gamma \arg y_1 < A_0$, $|y_1| > K$, $\varepsilon > 0$, $A_0 > \pi/2 + \varepsilon$. Пусть $\gamma^+ > \pi/2$ или $\gamma^- < \pi/2$; любое из этих чисел обозначается γ.

Теорема 8.5. *Справедливо тождество*

$$F(y, \theta) = H(y, \theta) + F_2(y),$$

где функция H *указана в теореме* 8.4,

$$|F_2(y)| \leqslant M(A_0)\,|y|^h, \quad y \in D_2,$$

при некотором $M(A_0) > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование вида

$$(Tf)(t) = \int_0^\infty f(t)\, K(st)\, dt. \tag{8.18}$$

Пусть Ω_f — полуплоскость $\operatorname{Re} s > \sigma_1$ или полуось (σ_1, ∞) $L(\sigma_1) = L(\sigma_1, \infty)$. Пусть ядро K удовлетворяет условиям:

1°. $K(st)$ — обобщенная функция на пространстве $L(\sigma_1)$.

2°. $RK(st) = P(s)K(s, t)$, где $P(s)$ — полином степени $\gamma \geqslant 1$, не имеющий нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 0$. Здесь R — дифференциальный оператор вида

$$R = \theta_0 D^{n_1} \theta_1 D^{n_2} \ldots D^{n_p} \theta_p,$$

где $D = d/ds$, $n_k \geqslant 0$ — целые, $0_k(t) \in C^\infty(0, \infty)$ и не обращаются в нуль вместе со всеми своими производными.

3°. $K(0)$ конечно, $K(s) \to \infty$ при $s \to \infty$, $|\arg s| \leqslant \pi/2$.

Введем пространство $\mathcal{L}^*(\sigma_1)$: $f \in \mathcal{L}^*(\sigma_1)$, если f локально интегрируема на $(0, \infty)$, $f \in L^*(\sigma_1)$, существует преобразование $T(f)(s)$, сходящееся при $s > 1$ и $T(f) = T_s(f)$. Здесь $L^*(\sigma)$ — пространство, двойственное к пространству функций $\varphi \in C^\infty$, на котором определены функционалы $\sup\limits_{t\in I} |\eta(t) R^k \varphi(t)|$, $k = 0, 1, 2, \ldots, I = [0, \infty)$, где η непрерывна и отлична от нуля при $t \in I$. Далее,

$$T_s(f)(s) = (f(t), K(s, t)), \quad s \in \Omega_f.$$

Пусть $t^\beta \in \mathcal{L}^*(\sigma_1)$, $\beta > -1$, $R^* t^\beta = O(t^{\beta-\gamma})$ при $t \to +0$, $\gamma > 0$ и $\eta(t)$ ограничена на отрезке $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Теорема 8.6. *Пусть*

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{(k+\lambda-\alpha)/\alpha}, \quad t \to +0, \tag{8.19}$$

где $\lambda > 0$, $\alpha < 0$ *и разложение можно* γ_m *раз дифференцировать*, $m > 0$. *Пусть*

$$(R^*)^j f \in \mathcal{L}^*(\sigma_1), \; j = 0, 1, 2, \ldots, \gamma, \quad \gamma_m < (n+\lambda)/\alpha \leqslant \gamma_{m+1}. \tag{8.20}$$

Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$T(f)(s) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k T\left(t^{(k+\lambda-\alpha)/\alpha}\right)(s) + \delta_{mn}(s), \tag{8.21}$$

где $\delta_{mn}(s) = O\left(|s|^{-\gamma_m}\right)$ *при* $s \to \infty$, $|\arg s| < \pi/2$.

Этот результат применяется к ряду других интегральных преобразований. Пусть $\eta(t) = e^{\sigma t}$, $0 \leqslant t < \infty$, $\eta(t) = 0$ при $t < 0$, $e^{-st} \in L(a)$ при $\sigma_1 < a \leqslant \operatorname{Re} s$. Пусть выполнены условия (8.19), (8.20). Тогда

$$\int_T^\infty f(t) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\alpha}\right) \frac{a_k}{s^{(k+\lambda)/\alpha}} + \delta_{mn},$$

где $\delta_{mn}(s) = O(|s|^{-m})$ при $s \to \infty$.

Пусть выполнены условия (8.19). (8.20) и $n > 0$ — целое, $3m < (n+\lambda)/\alpha < 3m + 1$. Тогда для преобразования

Эйри справедливо асимптотическое разложение

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{Ai}\,(st)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k 3^{(2(k+\lambda)/3\alpha)-7/6}}{2\pi s^{(k+\lambda)/\alpha}} \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{3\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{k+\lambda+\alpha}{3\alpha}\right) + \delta_{mn}(s),$$

где $\delta_{mn}(s) = O(|s|^{-3m})$ при $s \to \infty$.

Пусть условия (8.19), (8.20) выполнены, $\mu \geqslant -1/2$, $\alpha = 1$, $\lambda + 1/2 > \mu$. Пусть $n > 0$ — целое число такое, что $2m < n + \lambda - \mu + 1/2 \leqslant 2m + 1$. Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$\int_0^\infty f(t)\,\sqrt{st}\,K_\mu(st)\,dt \sim \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+\lambda-3/2} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(k+\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(k+\lambda-\mu+\frac{1}{2}\right)\right) \frac{a_k}{s^{k+\lambda}} + \delta_{mn}(s),$$

где $\delta_{mn}(s) = O(|s|^{-2m})$ при $s \to \infty$ и K_μ — функция Макдональда.

Аналогичные результаты получены для преобразования Ханкеля

$$(H_\mu f)(s) = \int_0^\infty f(t)\,\sqrt{st}\,J_\mu(st)\,dt.$$

Пусть $R^j f(t) \in (S^\nu)^*$ при $j = 0, 1, \ldots, m$,

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k t^{k+\lambda-1} \qquad (t \to +0),$$

где $a_0 \neq 0$, $\operatorname{Re}(\lambda + \mu + 1/2) > 0$, $\mu \geqslant 0$, и это асимптотическое разложение можно $2m$ раз дифференцировать при $m \geqslant 0$, $2m \geqslant \operatorname{Re}(\lambda + 1/2)$. Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$(H_\mu f)(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma((k+\lambda+\mu)/2 + 1/4)\; 2^{k+\lambda-1/2} a_k}{\Gamma((\mu-k-\lambda)/2 + 3/4)\; s^{k+\lambda}} + \delta_{mn}(s),$$

где $\delta_{mn}(s) = o(s^{1/2-2m})$ при $s \to \infty$. Здесь S_μ — пространство функций $\varphi \in C^\infty(0, \infty)$ таких, что

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \left| t^m (tD)^k t^{-\mu-1/2} \varphi(t) \right| < \infty$$

при любых $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и $(S^\mu)^*$ — сопряженное пространство.

§ 9. Точка перевала на бесконечности

В § 2 мы назвали точку $z = \infty$ точкой перевала (целой) функции $S(z)$, если $\operatorname{Re} S(z) \to \mathrm{const}$ при $z \to \infty$ вдоль некоторой линии уровня $\operatorname{Im} S = c$. Вычислим асимптотику некоторых интегралов с точкой перевала $z = \infty$. Если z_0 — конечная точка перевала, то $S(z) \sim c(z - z_0)^n$, $c \neq 0$, при $z \to z_0$. Если $z = \infty$ — точка перевала, то поведение S в ее окрестности не описывается универсальными асимптотиками.

Будем предполагать, грубо говоря, что линии уровня $\operatorname{Re} S = c$ устроены на бесконечности, вблизи полуоси $(0, +\infty)$, так же, как и для функции e^{-z} (см. § 2, пример 2.6).

Именно, пусть функция $S(z)$ голоморфна в неограниченной области D, и пусть выполнены условия:

1°. $S(z) \to a + ib$ при $z \in D$, $z \to \infty$; $S'(z) \neq 0$ при $z \in D$.

2°. В области D имеется $2n+2$ линии уровня $l_1, \ldots, l_{2n+2}$, уходящие на бесконечность, и на которых $\operatorname{Re} S(z) = a$. Эти линии разбивают D на области; пусть D_j — область, ограниченная линиями l_j, l_{j+1} и частью ∂D. При этом $\operatorname{Re} S < a$ в областях с нечетными номерами и $\operatorname{Re} S > a$ в областях с четными номерами.

В частности, если $S = e^{-z}$, то $a = b = 0$, l_j — прямые $y = (n_0 + j)\pi + \pi/2$, n_0 — целое число.

3°. Пусть уравнения линий l_1, l_{2n+2} имеют вид

$$y = h_0(x), \quad y = h_1(x), \tag{9.1}$$

где $h_1(x) > h_0(x)$ при вещественных $x \gg 1$, и

$$\lim_{x \to +\infty} h_0'(x) = \lim_{x \to +\infty} h_1'(x) = 0, \tag{9.2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\theta(x)\theta''(x)}{\theta'(x)} = 0, \tag{9.3}$$

$$\int^{+\infty} \frac{\theta'^2(x)}{\theta(x)}\, dx < \infty, \tag{9.4}$$

где обозначено
$$\theta(x) = h_1(x) - h_0(x). \qquad (9.5)$$

Пример 9.1. $S(z) = \exp(-z^\alpha)$, $\alpha > 0$, $z \notin (-\infty, 0)$, и для z^α выбрана главная ветвь. Тогда $a = b = 0$, уравнение линий $\operatorname{Re} S = 0$ имеет вид
$$r^\alpha \sin \alpha\varphi = j\pi + \pi/2,$$
$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
так что $h_j(x)$, $\theta(x) \sim \mathrm{const}\, x^{1-\alpha}$, и все условия 1°—3° выполнены.

Из условий 1°—3° вытекает (см. [83])

Предложение 9.1. *При* $x \to +\infty$, $z \in \bigcup_{j=1}^{2n+1} D_j$
$$S(z) \sim C \exp\left\{-(2n+1)\int_{x_0}^{x} (\theta(u))^{-1}\left(1 + \psi'^2(u)\right) du + \right.$$
$$\left. + i\pi(\theta(x))^{-1}(y - \psi(x))\right\}, \quad (9.6)$$

где обозначено $\psi(x) = \frac{1}{2}(h_0(x) + h_1(x))$.

Теорема 9.1. *Пусть условия* 1°—3° *выполнены*, $f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$ *при* $z \to \infty$, $z \in \bigcup_{j=1}^{2n+1} D_j$, $a_0 \neq 0$, *и пусть* γ — *простая кривая, концы которой* z_1, z_2 *лежат в областях* D_1, D_{2n+1} *соответственно. Тогда при* $\lambda \to +\infty$
$$F(\lambda) =$$
$$= \int_\gamma f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz \sim \exp[\lambda S(\infty)] \frac{2n}{2n+1} f(\infty)\, \theta\left(\xi(\lambda^{-1})\right).$$

Здесь ξ — *функция, обратная к функции*
$$\varphi(x) = \exp\left[-(2n+1)\pi\int_{x_0}^{x} (\theta(x))^{-1}\left(1 + \psi'^2(x)\right) dx\right]. \quad (9.7)$$

Пусть $a + ib = 0$. Для нахождения асимптотики интеграла (1) естественно поступить следующим образом: закрепив концы контура γ, тянуть его в бесконечность. Тогда асимптотика $F(\lambda)$ определится суммой асимптотик интегралов по частям γ, лежащим внутри D_1 и D_{2n+1}

и интеграла по перемычке, их соединяющей. Однако если контур бесконечен и лежит в области D_1, то интеграл по нему расходится в силу 2°. Поэтому поступим следующим образом: проинтегрируем $F(\lambda)$ по частям и затем применим описанный выше метод. Мы имеем случай, когда перевал расположен на бесконечности, и проводим контур через бесконечность, т. е. через перевал, как это обычно и делается в методе перевала. Проинтегрируем по частям:

$$F(\lambda) = zf(z)\exp[\lambda S(z)]\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_\gamma zS'(z)\exp[\lambda S(z)]\,dz - \\ - \lambda\int_\gamma zf'(z)\,S(z)\exp[\lambda S(z)]\,dz. \quad (9.8)$$

В силу предложения 9.1 можно в качестве γ взять контур, идущий по линии $\operatorname{Im} S = 0$ в D_1, затем по вертикальному отрезку и затем снова по линии $\operatorname{Im} S = 0$ в D_{2n+1}. Интегралы по вертикальному отрезку стремятся к нулю при $x \to +\infty$, что следует из 1°—3° и (9.6).

Найдем теперь уравнения линий $\operatorname{Im} S = 0$. Из (9.6) следует, что при больших z уравнение $\operatorname{Im} S(z) = 0$ запишется в виде

$$\sin[(2n+1)\pi(y - \psi(x))/\theta(x)] = 0.$$

Отсюда для искомых линий получаем уравнения

$$y = \frac{1}{2(2n+1)}[h_1(x) + (4n+1)h_0(x)] = H_1(x),$$

$$y = \frac{1}{2(2n+1)}[h_0(x) + (4n+1)h_1(x)] = H_2(x).$$

Обозначим эти линии через l_1 и l_2. На l_2

$$\operatorname{Re} S(z) \sim -C\exp\left[-(2n+1)\pi\int_{x_0}^{x}\left(1 + \psi'^2(t)\right)/\theta(t)\,dt\right] = \\ = -C\varphi(x), \quad (9.9)$$

на l_2 также $\operatorname{Re} S(z) \sim -C\varphi(x)$. Сделаем в (9.8) замену

$$\varphi(x) = t, \quad x = \xi(t). \quad (9.10)$$

Напомним определение: функция $l(t)$ называется *медленно растущей* при $t \to +0$, если $\lim\limits_{t\to+0}\frac{tl'(t)}{l(t)} = 0$. Если

$l(t)$ — медленно растущая функция, то (см. [15])

$$\lim_{t\to+0}\frac{l(ct)}{l(t)}=1 \text{ при любом } c>0.$$

Нам понадобится

Лемма 9.1. $\xi(t)$, $\theta(\xi(t))$, $\theta'_\xi(\xi(t))$ *при* $t\to+0$ *являются медленно растущими функциями* t.

Докажем вначале лемму для $\xi(t)$, т. е. покажем, что

$$\lim_{t\to+0} t\xi'(t)/\xi(t)=0. \tag{9.11}$$

В силу (9.9)

$$t=\exp\left[-\int_{x_0}^{\infty}\left(1+\psi'^2(u)\right)/\theta(u)\right]du,$$

$$\ln t=-\varphi(x),\qquad \xi(t)=\varphi^{-1}(-\ln t)=q(-\ln t).$$

Заметим еще, что поскольку $S(z)\to\text{const}$ при $z\to\infty$, $z\in D$, то $\int\limits_{x_0}^{\infty}dx/\theta(x)=\infty$. Отсюда

$$\lim_{t\to+0}\frac{t\xi'(t)}{\xi(t)}=-\lim_{t\to+0}\frac{\dfrac{dq(-\ln t)}{d(-\ln t)}}{q(-\ln t)}=-\lim_{u\to+\infty}\frac{q'_u(u)}{q(u)}=$$

$$=-\lim_{v\to+\infty}\frac{\dfrac{dv}{d\varphi(v)}}{v}=-\lim_{v\to+\infty}\frac{\theta(v)}{v\left(1+\psi'^2(v)\right)}=$$

$$=-\lim_{v\to+\infty}\frac{\theta'(v)}{v}=0,$$

так как в силу (9.2)

$$\lim_{v\to+\infty}\theta'(v)=0.$$

Остальные случаи исследуются аналогично.

Продолжим доказательство теоремы. Из (9.9) следует

$$F(\lambda)=$$

$$=-\int_{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{-n}e^{\lambda S}dz-\lambda\int_{\gamma}S'(z)e^{\lambda S}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}dz+O(e^{-\beta\lambda}). \tag{9.12}$$

Исследуем каждое слагаемое в отдельности:

$$\lambda \int_\gamma zS'(z)\exp[\lambda S(z)]\,dz =$$

$$= \lambda \int_{l_1} zS'(z)e^{\lambda S}dz - \lambda \int_{l_2} zS'(z)e^{\lambda S}dz =$$

$$= -\lambda \int_{x_0}^{\infty} (x + iH_1(x))\frac{d\varphi}{dx}e^{-\lambda\varphi}dx +$$

$$+ \lambda \int_{x_0}^{\infty} (x + iH_2(x))\frac{d\varphi}{dx}e^{-\lambda\varphi}dx =$$

$$= i\frac{2n}{2n+1}\lambda \int_0^{\varphi(x_0)} \theta(x)\frac{d\varphi}{dx}e^{-\lambda\varphi}dx =$$

$$= i\frac{2n}{2n+1}\lambda \int_{\varphi(x_0)}^{0} \theta(\xi)e^{-\lambda t}dt =$$

$$= -i\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\lambda\varphi(x_0)} \theta\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)e^{-t}dt \sim -i\frac{2n}{2n+1}\theta\left(\xi\left(\lambda^{-1}\right)\right). \tag{9.13}$$

В силу (9.11)

$$\lambda \int_\gamma S'e^{\lambda S}dz = \lambda e^{\lambda S}\Big|_{l_1}^{l_2} = O(e^{-\beta\lambda}), \quad \beta > 0, \tag{9.14}$$

и то же самое имеет место для интегралов $\lambda \int_\gamma S'z^{-n}e^{\lambda S}dz$.

Наконец, рассмотрим интеграл

$$\int_\gamma z^{-n}e^{\lambda S}dz = \left(\int_{l_1} - \int_{l_2}\right) z^{-n}e^{\lambda S}dz =$$

$$= \int_{\varphi(x_0)}^{0} e^{-\lambda t}\xi'\left[\frac{1 + iH_1'(\xi)}{(\xi + iH_1)^n} - \frac{1 + iH_2'(\xi)}{(\xi + iH_2)^n}\right]dt \sim$$

$$\sim i\frac{2n^2}{2n+1}\int_0^{\varphi(x_0)} e^{-\lambda t}\xi'\xi^{-n-1}\theta(\xi)\,dt + i\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\varphi(x_0)} e^{-\lambda t}\xi'\xi^{-n}\theta_\xi'\,dt.$$

Выведем вспомогательную формулу

$$\int\limits_0^{\varphi(x_0)} \xi'(t)\,\xi^{-2}(t)\,e^{-\lambda t}dt \sim -\left(\xi\left(\lambda^{-1}\right)\right)^{-1}. \tag{9.15}$$

Действительно,

$$\int\limits_0^{\varphi(x_0)} \xi'(t)\,\xi^{-2}(t)\,e^{-\lambda t}dt =$$

$$= -\xi^{-1}(t)\,e^{-\lambda t}\Big|_0^{\varphi(x_0)} - \lambda \int\limits_0^{\varphi(x_0)} \xi^{-1}(t)\,e^{-\lambda t}dt =$$

$$= O\left(e^{-\beta\lambda}\right) - \int\limits_0^{\lambda\varphi(x_0)} e^{-t}\xi^{-1}\left(\lambda^{-1}\right)dt \sim -\xi^{-1}\left(\lambda^{-1}\right).$$

С помощью этой формулы находим

$$\int\limits_0^{\varphi(x_0)} e^{-\lambda t}\,\frac{\theta(\xi(t))}{[\xi(t)]^{n+1}}\,\frac{d\xi(t)}{dt}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\lambda\varphi(x_0)} e^{-t}\,\frac{\theta(\xi(t/\lambda))}{\xi^{n-1}(t/\lambda)}\,\frac{d\xi(t/\lambda)}{\xi^2(t/\lambda)} \sim \frac{\theta\left(\xi\left(\lambda^{-1}\right)\right)}{\xi^{n-1}\left(\lambda^{-1}\right)} \int\limits_0^{\lambda\varphi(x_0)} e^{-t}\,\frac{d\xi(t/\lambda)}{\xi^2(t/\lambda)} \sim$$

$$\sim -\theta\left(\xi\left(\lambda^{-1}\right)\right)\xi^{-n}\left(\lambda^{-1}\right).$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_0^{\varphi(x_0)} e^{-\lambda t}\theta'_\xi\xi'\xi^{-n}dt \sim -\theta'_\xi\left(\xi\left(\lambda^{-1}\right)\right)\xi^{1-n}\left(\lambda^{-1}\right).$$

Мы видим, что все слагаемые в первом интеграле (9.12) при больших λ малы по сравнению с первым слагаемым:

$$i\,\frac{2n}{2n+1}\left[\theta'_\xi\left(\xi\left(\lambda^{-1}\right)\right) + n\xi^{-1}\left(\lambda^{-1}\right)\theta\left(\xi\left(\lambda^{-1}\right)\right)\right]. \tag{9.16}$$

Но (9.16) мало по сравнению с $\theta\left(\xi\left(\lambda^{-1}\right)\right)$. Поэтому

$$F(\lambda) \sim i\,\frac{2na_0}{2n+1}\,\theta\left(\xi\left(\lambda^{-1}\right)\right),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 9.1. *Если* $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$, $k > 0$, *то*

$$F(\lambda) \sim \frac{i2na_k}{2n+1} \exp[\lambda S(\infty)] [\xi(\lambda^{-1})]^{1-k} \times \times [n\theta(\xi(\lambda^{-1}))\xi^{-1}(\lambda^{-1}) + 0'_\xi(\xi(\lambda^{-1}))]. \quad (9.17)$$

Пример $\theta(x) = x^\alpha$, $\alpha < 1$, показывает, что стоящие в скобках слагаемые могут иметь одинаковый порядок, и потому нельзя ограничиться только одним из них.

Пример 9.2. Пусть $S = z^\alpha$, $\alpha > 0$, γ — контур описанного в теореме 9.1 типа. Тогда (см. пример 9.1) $\theta(x) \sim \sim Cx^{1-\alpha}$, так что

$$\int_\gamma \exp(\lambda \exp(z^\alpha))\, dz \sim C_0 (\ln \lambda)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Пример 9.3. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{-\infty-i\pi}^{-\infty+i\pi} \exp(\lambda e^{-z})\, dz, \quad (9.18)$$

где контур интегрирования состоит из лучей $(-\infty, -i\pi]$, $[i\pi, i\pi-\infty)$ и отрезка $[-i\pi, i\pi]$. В данном случае $n = 1$, $\theta(x) = 3\pi$, так что $F(\lambda) \sim 2\pi$ $(\lambda \to +\infty)$. Точно такую же асимптотику имеют интегралы

$$F(\lambda) = \int_{-\infty-i\pi}^{-\infty+i\pi} \exp(\lambda z^n e^{-z})\, dz, \quad n \geqslant 0 \text{ — целое число.}$$

Замечание 9.1. Если $F(\lambda)$ — интеграл (9.18), то $F(\lambda) = 2\pi$ $(\lambda > 0)$. Действительно, этот интеграл равен интегралу по контуру γ_r, состоящему из лучей $l_r^\mp = = \pm(-\infty \pm i\pi, \pm i\pi + r]$ и отрезка $I_r = [-i\pi + r, i\pi + r]$ при любом $r > 0$. Если $r \to +\infty$, то $e^{-z} \to 1$ на перемычке I_r, а интегралы по $l_r^\pm$ сокращаются в силу периодичности функции e^{-z}.

Пример 9.4. Пусть $f(z) = 1$, $S(z) = e^{-e^z}$. Линии уровня $\operatorname{Im} e^{-e^z} = 0$ задаются уравнениями

$$e^x \sin y = k\pi.$$

Пусть γ — контур с концами на линиях, отвечающих $k = 1$, $k = 3$, и лежащих внутри полосы $|y| < \pi/2$. Тогда

$\theta(x) \sim 3\pi e^{-x}$, откуда

$$F(\lambda) = \int\limits_{\gamma} \exp\left(\lambda e^{-e^{z}}\right) dz \sim \frac{1}{\ln\lambda}.$$

В примерах 9.1—9.4 можно также получить асимптотические разложения по степеням $(\ln\lambda)^{-1}$, но мы не будем их выписывать ввиду их громоздкости.

§ 10. Метод контурного интегрирования Лапласа

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение с линейными коэффициентами

$$(a_0 z + b_0) w^{(n)} + (a_1 z + b_1) w^{(n-1)} + \ldots + (a_n z + b_n) w = 0.$$

Это уравнение интегрируется с помощью метода Лапласа, который состоит в том, что решение ищется в виде контурного интеграла

$$w(z) = \int\limits_{C} e^{\zeta z} v(\zeta)\, d\zeta. \tag{10.1}$$

Мы ограничимся уравнением второго порядка

$$(a_0 z + a_1) w'' + (b_0 z + b_1) w' + (c_0 z + c_1) w = 0. \tag{10.2}$$

Дифференцируя под знаком интеграла и интегрируя по частям, получаем

$$w^{(j)}(z) = \int\limits_{C} e^{\zeta z} \zeta^{j} v(\zeta)\, d\zeta,$$

$$z w^{(j)}(z) = \zeta^{j} v(\zeta)|_{C} - \int\limits_{C} e^{\zeta z} (\zeta v(\zeta))^{(j)} d\zeta, \quad j = 0, 1, 2,$$

где внеинтегральные подстановки берутся на концах контура C. Пусть контур C выбран так, что

$$(a_0 \zeta^2 + b_0 \zeta + c_0) v(\zeta) e^{\zeta z}|_{C} = 0, \tag{10.3}$$

а функция $v(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\zeta}(a_0 \zeta^2 v + b_0 \zeta v + c_0) - (a_1 \zeta^2 + b_1 \zeta + c_1) v = 0. \tag{10.4}$$

Тогда интеграл (10.1) есть решение уравнения (10.2).

Уравнение (10.4) — линейное однородное, первого порядка, и потому интегрируется. Возможны следующие варианты.

1. $a_0 \neq 0$. Можно считать, что $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ (этого легко добиться с помощью линейной замены переменной). Пусть уравнение $\zeta^2 + b_0\zeta + c_0 = 0$ имеет различные корни ζ_1, ζ_2, тогда

$$w(z) = A \int\limits_C (\zeta - \zeta_1)^{p-1} (\zeta - \zeta_2)^{q-1} e^{\zeta z} d\zeta, \tag{10.5}$$

где A — произвольная постоянная и $p = (\zeta_1 - \zeta_2)^{-1} [(b_1 - 2)\zeta_1 + c_1 - b_0 + \zeta_1 - \zeta_2]$, q получается из p заменой ζ_1 на ζ_2 и ζ_2 на ζ_1.

2. $a_0 = 0$. Можно считать, что $a_1 = 1$, и пусть $b_0 \neq 0$. Тогда

$$w(z) = A \int\limits_C \left(\zeta + \frac{c_0}{b_0}\right)^p \exp\left\{\frac{1}{2} B\zeta^2 + D\zeta + \zeta z\right\} d\zeta,$$

$$B = \frac{1}{b_0}, \quad D = \frac{b_1}{b_0} - \frac{c_0}{b_0^2}, \quad p = \frac{c_0^2}{b_0^3} - \frac{b_1 c_0}{b_0^2} + \frac{c_1}{c_0} - 1.$$

Если же $a_0 = b_0 = 0$, $a_1 = 1$, то

$$w(z) = A \int\limits_C \exp\left[c_0^{-1} (\zeta^3/3 + b_1\zeta^2/2 + c_1\zeta) + \zeta z\right] d\zeta.$$

Остается указать выбор контура C. В случае 1 проведем разрезы l_j вдоль лучей $\zeta = \zeta_j - t$, $0 \leq t < \infty$, $j = 1, 2$, и обозначим C_j контур, охватывающий разрез и обходящий его в положительном направлении. Полученные интегралы сходятся при $\operatorname{Re} z > 0$ за счет быстрого убывания экспоненты $e^{\zeta z}$ и образуют фундаментальную систему решений уравнения (10.2). В случае 2 контуры выбираются из тех соображений, чтобы экспонента быстро убывала на контуре при $|\zeta| \to \infty$.

Найдем асимптотику интеграла (10.5) при $z = x \to +\infty$. Ограничимся случаем, когда p, q — вещественные и нецелые. Ветви функций $(\zeta - \zeta_1)^p$, $(\zeta - \zeta_2)^q$ выберем так, чтобы они были положительными при $\zeta - \zeta_1 > 0$, $\zeta - \zeta_2 > 0$, т. е. на продолжениях разрезов. Пусть $w_j(z)$ — решение, отвечающее контуру C_j. Тогда при $x \to +\infty$

справедливы асимптотические разложения

$$w_1(x) \sim e^{\zeta_1 x} x^{-p} \sin \pi p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}, \qquad w_2(x) \sim e^{\zeta_2 x} x^{-q} \sin \pi q \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n}, \tag{10.6}$$

коэффициенты которых имеют вид

$$a_n = 2i(-1)^n \Gamma(n+p)(\zeta_1 - \zeta_2)^{q-n-1} \frac{(q-1)\dots(q-n)}{n!}, \qquad b_n = 2i(-1)^n \Gamma(n+q)(\zeta_2 - \zeta_1)^{p-n-1} \frac{(p-1)\dots(p-n)}{n!}. \tag{10.7}$$

Выбор ветвей следующий: $|\arg(\zeta_1 - \zeta_2)| < \pi$ в первой из формул и $|\arg(\zeta_2 - \zeta_1)| < \pi$ — во второй.

Асимптотика интегралов вычисляется с помощью леммы Ватсона (гл. II, § 1). Сделаем в интеграле по контуру C_1 замену переменной $\zeta - \zeta_1 = t$, тогда получим

$$w_1(x) = e^{\zeta_1 x} \int_{C_0} t^{p-1} (t + \zeta_1 - \zeta_2)^{q-1} e^{xt} dt.$$

Контур интегрирования C_0 обходит разрез $(-\infty, 0)$ в положительном направлении. Пусть $p > 0$, тогда C_0 можно продеформировать в контур, идущий по берегам разреза, и в силу выбора ветви подынтегральной функции

$$w_1(x) = 2i \sin \pi p e^{\zeta_1 x} \int_0^{\infty} t^{p-1} (\zeta_1 - \zeta_2 + t)^{q-1} e^{xt} dt.$$

Применяя лемму Ватсона, получаем первые из формул (10.6), (10.7). Если $-1 < p < 0$, то, интегрируя по частям, получаем

$$w_1(x) = -\frac{1}{p} e^{\zeta_1 x} \int_{C_0} t^p \varphi'(t)\, dt,$$

$$\varphi(t) = (t + \zeta_1 - \zeta_2)^{q-1} e^{xt}.$$

Этот интеграл исследуется так же, как и предыдущий. При $p > -m$ необходимо применить лемму Ватсона для интегралов по петле. Аналогично исследуется асимптотика решения $w_2(x)$.

Формулы (10.6), (10.7) справедливы для решений $w_j(z)$, если $z \to \infty$ в секторе $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

2. Дифференциально-разностное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$y'(x) = (Ax + B)\, y(x - h), \quad x > h, \tag{10.8}$$

где $A \neq 0$, $h > 0$. Будем искать его решение в виде контурного интеграла

$$y(x) = \int\limits_C e^{px} v(p)\, dp.$$

Имеем

$$y'(x) = \int\limits_C p e^{px} v(p)\, dp, \quad y(x - h) = \int\limits_C e^{p(x-h)} v(p)\, dp,$$

$$xy(x - h) = -\int\limits_C e^{px} (v(p)\, e^{-ph})' dp$$

в предположении, что обращается в нуль внеинтегральная подстановка

$$v(p)\, e^{p(x-h)}|_C = 0. \tag{10.9}$$

Для функции v получаем уравнение

$$pv = -A(e^{-ph} v)' + Be^{-ph} v,$$

откуда находим

$$y(x) = \int\limits_C \exp S(p, x)\, dp,$$

$$S(p, x) = -\frac{p}{h} e^{ph} + \frac{1}{h^2} e^{ph} + p(x + h + B/A).$$

Пусть A, B вещественны, тогда можно ограничиться случаем $A = 1$, $B = 0$. Имеем

$$S = -\frac{p}{h} e^{ph} + \frac{1}{h^2} e^{ph} + p(x + h). \tag{10.10}$$

Уравнение (10.8) имеет бесконечно много решений, ограничимся построением одного из них. Выберем в качестве контура C границу полуполосы $\operatorname{Re} p > 0$, $0 < \operatorname{Im} p < 2\pi/h$, тогда условие (10.9) будет выполнено. Можно было бы выбрать и другие контуры, например, границы полуполос вида $\operatorname{Re} p > c$, $(2\pi k)/h < \operatorname{Im} p < (2\pi m)/h$, где $k \neq m$ — целые числа.

Точки перевала функции S определяются из уравнения

$$pe^{ph} = x. \qquad (10.11)$$

Исследуем асимптотику решения $y(x)$ при $x \to +\infty$. Уравнение (10.11) имеет единственное положительное решение $p_0(x)$, причем [5]

$$p_0(x) = h^{-1}\left(\ln t - \ln\ln t + \frac{1}{2}\frac{\ln\ln t}{(\ln t)^2} + O\left(\frac{\ln\ln x}{(\ln x)^3}\right)\right), \quad t = xh. \qquad (10.12)$$

При этом $S''(p_0(x)) = -x\left(h + p_0^{-1}(x)\right) < 0$, так что $\max S$ на полуоси $p > 0$ достигается только в точке $p_0(x)$, где

$$S = x[p_0(x) - h^{-1} + h^{-2}(p_0(x))^{-2}] + hp_0(x). \qquad (10.13)$$

В частности, $S \sim h^{-1}x\ln x$ при $x \to +\infty$.

На части l контура C: $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, $\operatorname{Im} p = 2\pi i/h$ имеем

$$\operatorname{Re} S = -\frac{\tilde{p}}{h}e^{\tilde{p}h} + \frac{1}{h^r}e^{\tilde{p}h} + \tilde{p}(x+h), \quad \tilde{p} = p + 2\pi i/h.$$

Следовательно, $\max \operatorname{Re} S$ тот же, что и на луче $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Im} p = 0$, но на l нет точек перевала. Поэтому основной вклад в асимптотику интеграла вносит точка $p_0(x)$. Итак, уравнение

$$y'(x) = xy(x-h)$$

имеет решение такое, что при $x \to +\infty$

$$y(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{xh}}\, e^{S(p_0(x))},$$

где $S(p_0(x))$ имеет вид (10.12). Точно так же можно найти асимптотику других классов решений уравнения (10.8). Можно также получить асимптотические разложения решений.

§ 11. Асимптотика сумм, рядов и бесконечных произведений

Интегралы — аппарат значительно более гибкий, чем ряды. Поэтому если удается «свернуть» ряд, т. е. представить его сумму в виде некоторого интеграла, то исследование ряда значительно упрощается.

1. Формула суммирования Пуассона. Так называется формула

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{2\pi i n x} dx. \tag{11.1}$$

Приведем ее формальный вывод. Воспользуемся известным разложением в ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n} = \frac{\pi(1-2x)}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

Продолжим правую часть на всю ось x периодически, с периодом 1, и обозначим полученную функцию $f(x)$. Эта функция имеет точки разрыва $x_n = n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; скачок в точке разрыва x_n равен $\pi(f(x_n+0) - f(x_n-0)) = +\pi$. Поэтому производная $f'(x)$ функции $f(x)$ как обобщенная функция в окрестности точки разрыва x_n равна $f'(x) = \{f'(x)\} + \pi\delta(x-x_n)$, где $\{f'(x)\}$ — обычная производная при $x \neq x_n$. Дифференцируя тождество $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n} = f(x)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n x = -\frac{1}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-n).$$

Из формулы Эйлера следует, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x-n).$$

Умножив обе части этой формулы на $f(x)$ и проинтегрировав по всей оси, получим (11.1).

Приведем достаточные условия справедливости формулы (1).

1°. 1) $f'(x)$ существует при $-\infty < x < \infty$, 2) ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x+n)$ сходится равномерно при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2°. Возьмем точку $z = ia$, $a > 0$ и сектор S_+ вида: $|\arg(z - ia) - \pi/2| \leqslant \pi/2 - \eta$. Пусть S_- — сектор, симметричный с S_+ относительно вещественной оси. Обозначим $D = \mathbb{C} \setminus (S_+ \cup S_-)$.

Функция $f(z)$ голоморфна в области D и

$$|f(x+iy)| \leqslant \varepsilon(|x|)e^{\gamma|y|},$$

где $\gamma < 2\pi$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$.

Другие достаточные условия и доказательства см. в [5], [37], [41].

Формула суммирования Пуассона заменяет один ряд другим, и ею удобно пользоваться тогда, когда ряд из правой части (11.1) сходится быстрее, чем ряд из левой части.

Пример 11.1. Найдем асимптотику при $\lambda \to +\infty$ ряда

$$F(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+\lambda^2}}.$$

В данном случае $f(x, \lambda) = e^{i\pi x}(x^2+\lambda^2)^{1/2}$ и условия 1°, 2° выполнены ($\gamma = \pi$). Применяя формулу (11.1), получаем

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi inx+\pi ix}(x^2+\lambda^2)^{-1/2}\,dx,$$

где штрих означает, что $n \neq 0$. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ib\lambda x}(x^2+\lambda^2)^{-1/2}\,dx = 2K_0(|b|\lambda),$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда (гл. IV, § 1, пример 1.1), $b = \pi, 3\pi, \ldots$ Из указанного примера следует, что при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) - \frac{1}{2\lambda} \sim e^{-\pi\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^{-n-1/2} 2^{1/2-5n} \pi^{-n} (2n!)^2 (n!)^{-2}.$$

Пример 11.2. Найдем асимптотику при $x \to +0$ функции

$$\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2x}.$$

Условие 2° выполнено при $\gamma = 0$, $\eta < \pi/4$, так что

$$\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2x+2n\pi it}dt = \sum_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{x}}.$$

Это приводит к тождеству

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\,\psi\left(\frac{\pi^2}{x}\right).$$

Нетрудно видеть, что $\psi(x) - 1 \sim e^{-x}$, $x \to +\infty$, так что

$$\psi(x) - \sqrt{\frac{\pi}{x}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-\pi^2/x} \qquad (x \to +0).$$

Имеется другой вариант формулы суммирования Пуассона [37]:

$$\sqrt{\alpha}\left[\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\right] = \sqrt{\beta}\left[\frac{1}{2} F_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n\beta)\right], \tag{11.2}$$

где $\alpha\beta = 2\pi$, $\alpha > 0$, и $F_c(x)$ есть косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$:

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos xt\, dt.$$

Пример 11.3. Пусть $f(x) = e^{-x}$, так что $F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$. Из (11.2) следует, что

$$\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2\beta^2}\right) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha}\right).$$

Следовательно, при $\beta \to +0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2\beta^2} = \frac{\pi}{2\beta} - \frac{1}{2} + O\left(\beta^{-1} e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}}\right).$$

Пример 11.4. Пусть $f(x) = e^{-x^2/2} \cos kx$, $k \neq 0$, тогда $F_c(x) = e^{-\frac{1}{2}(k^2+x^2)} \operatorname{ch} kx$, и

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 n^2} \cos kn\alpha\right) = \sqrt{\beta}\, e^{-\frac{1}{2}k^2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 n^2} \operatorname{ch} kn\beta\right).$$

Следовательно, при $\alpha \to +0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 n^2} \cos kn\alpha =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{4\alpha} e^{-k^2/2} - \frac{1}{2} + O\left(\alpha^{-1} \exp\left\{|k| \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} - \frac{4\pi^2}{2\alpha^2}\right\}\right).$$

Имеется также формула Пуассона, в которую вместо косинус-преобразования Фурье входит синус-преобразование Фурье.

2. Формула суммирования Эйлера — Маклорена. Так называется формальное тождество

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) =$$
$$= \int_1^n f(x)\,dx + C + \frac{1}{2} f(n) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(n), \quad (11.3)$$

где C — постоянная, B_{2m} — числа Бернулли. Ряд, стоящий в правой части, может быть сходящимся или расходящимся; при определенных условиях на функцию $f(x)$ этот ряд является асимптотическим при $n \to \infty$.

Числа Бернулли B_m и полиномы Бернулли $B_m(x)$ определяются из тейлоровских разложений

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m, \quad \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(x)}{m!} t^m$$

(эти ряды сходятся при $|t| < 2\pi$). Имеем $B_m(0) = B_m$, $B_0 = +1$, $B_1 = -1/2$, а все остальные числа Бернулли с нечетными номерами равны нулю: $B_3 = B_5 = \ldots$ $\ldots = B_{2n+1} = \ldots = 0$. Поэтому

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} t^{2m}.$$

Справедлива формула

$$B_{2m} = (-1)^m (2m)!\,(2\pi)^{-2m} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2m},$$

так что при $m \to \infty$ имеем

$$|B_{2m}| \sim (2m)!\,(2\pi)^{-2m},$$

числа B_{2m} быстро растут с ростом m. Для чисел Бернулли справедливо рекуррентное соотношение

$$B_k = \sum_{p=0}^{k} B_p C_k^p, \quad k \geqslant 2.$$

Для полиномов Бернулли справедлива формула

$$B_{2m}(x) = \frac{(-1)^{m-1}(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{m^{2k}},$$

из которой следует оценка

$$|B_{2m}(x)| \leqslant |B_{2m}|. \tag{11.4}$$

Пусть Δ — разностный оператор: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, тогда

$$\Delta B_k(x) = kx^{k-1},$$

это — основное свойство полиномов Бернулли. Более подробные сведения о числах и полиномах Бернулли см. в [13], [37], [41].

Приведем эвристические соображения, из которых вытекает формула (11.3). Обозначим $D = d/dx$, тогда формулу Тейлора можно формально записать в виде

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k D^k}{k!} f(x) = e^{hD} f(x).$$

Оператор D^{-1} есть оператор интегрирования; положим $D^{-1} f(x) = \int\limits_1^x (t)\,dt$. Имеем

$$f(1) + \ldots + f(n-1) = (1 + e^D + \ldots + e^{(n-2)D}) f(1) =$$

$$= \frac{e^{(n-1)D} - 1}{e^D - 1} f(1) = \frac{1}{e^D - 1} f(n) - \frac{1}{e^D - 1} f(1) =$$

$$= D^{-1} f(n) - \frac{1}{2} f(n) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} D^{2m-1} f(n) + C,$$

откуда следует формула (11.3).

Приведем формулу Эйлера — Маклорена с остаточным членом. Доказательства и другие достаточные условия, при которых эта формула справедлива, см. в [5], [13], [15], [41].

Пусть $f(x) \in C^{2m}(1, \infty)$. Тогда справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{1}^{n} f(x)\,dx + \frac{1}{2} f(n) + C_m + R_{2m}(n). \quad (11.5)$$

Здесь C_m — постоянная, не зависящая от n:

$$C_m = \frac{1}{2} f(1) - \frac{B_2}{2!} f'(1) - \ldots - \frac{B_{2m-1}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(1), \quad (11.6)$$

остаточный член имеет вид

$$R_{2m}(n) = -\int_{1}^{n} f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}\,dx, \quad (11.7)$$

где $[x]$ — целая часть x. Если

$$\int_{1}^{\infty} |f^{(2m)}(x)|\,dx < \infty,$$

то формулу (11.5) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{1}^{n} f(x)\,dx + \frac{1}{2} f(n) + \left(C_m - \int_{1}^{\infty} f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}\,dx\right) + \tilde{R}_{2m}(n). \quad (11.8)$$

Остаточный член есть

$$\tilde{R}_{2m}(n) = \int_{n}^{\infty} f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}\,dx. \quad (11.9)$$

Из (11.4) следует, что справедлива оценка

$$|\tilde{R}_{2m}(n)| \leqslant \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_{n}^{\infty} |f^{(2m)}(x)|\,dx. \quad (11.10)$$

Приведем другой вид формулы Эйлера — Маклорена:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = \int_0^n f(x+t)\,dt - \frac{1}{2}[f(x+n) - f(x)] + \\ + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(x+n) - f^{(2k-1)}(x)\right] + R_{2m}(n),$$

$$R_{2m}(n) = -\int_0^1 \frac{B_{2m}(t)}{(2m)!} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(2m)}(x+t+k)\,dt. \quad (11.11)$$

Остаточные члены вида (11.9), (11.11) удобно использовать в тех случаях, когда $|x|$, n и $|x+n|$ велики и производная $f^{(m)}(x)$ быстро убывает при $|x| \to \infty$.

Приведем еще один вариант формулы Эйлера — Маклорена. Пусть функция $f(x)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant a$, где $-1 < a < 0$ непрерывна вплоть до границы и справедлива оценка

$$|f(x+iy)| \leqslant Me^{\gamma|y|}, \quad \gamma < 2\pi.$$

Тогда формулу Эйлера — Маклорена можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} f(x) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2} f(n) + C(\theta) + \\ + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + R_{2m}(n). \quad (11.12)$$

Постоянная $C(\theta)$ равна

$$C(0) = \int_0^{\theta+i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi iz} - 1} - \int_0^{\theta-i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi iz} - 1}, \quad (11.13)$$

для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_{2m}(n)| \leqslant \frac{|y|^{2m}}{(2m)!} \max_{|a|<|y|} \left|f^{(2m)}(n+ia)\right|. \quad (11.14)$$

Наиболее яркие применения формулы суммирования Эйлера — Маклорена относятся к исследованию асимптотического поведения гамма-функции Эйлера и дзета-функции Римана.

Пример 11.5. Рассмотрим сумму

$$S(n, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(k+z),$$

где $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $|z| \geqslant 1$. Пусть $n \geqslant |z|^3$. Имеем из (11.9)

$$S(z, n) = \int_0^1 \ln(t+z)\,dt - \frac{1}{2}[\ln(n+z) - \ln z] + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k-1)\,2k}\left[\frac{1}{(n+z)^{2k-1}} - \frac{1}{z^{2k-1}}\right] + R_{2m} =$$

$$= (n+z)\ln(n+z) - z\ln z - n - \frac{1}{2}[\ln(n+z) - \ln z] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{2k}}{(2k-1)\,2k}\left[\frac{1}{(n+z)^{2k-1}} - \frac{1}{z^{2k-1}}\right] + O\left(\frac{1}{|z|^{2m-1}}\right).$$

Оценка остаточного члена следует из (11.9), (11.4) и явных формул для производных $f^{(k)}(z)$, $f(z) = \ln z$. Из тождества $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ следует, что $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(n+z+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}$. Применяя формулу Стирлинга (гл. II, § 1) в рассматриваемой области, получаем

$$\Gamma(z) = \frac{n^{z+n+1}e^{-n}}{z\dots(z+n)}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

и, логарифмируя, находим

$$\ln\Gamma(z) = (n+z)\ln n - n - \frac{1}{2}\ln n + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - S(n, z) = z\ln z - (n+z)\ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k-1)\,2k} z^{-2k+1} + O\left(\frac{1}{|z|^{2m+1}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем асимптотическое разложение

$$\ln\Gamma(z) = z\ln z - \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k-1)\,2k} z^{-2k+1} + O\left(\frac{1}{|z|^{2m+1}}\right), \quad (11.15)$$

справедливое при $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Разложение (11.5) называется *формулой Стирлинга.*

Пример 11.6 [13]. Пусть $z = x + iy$, $y \neq 0$, $p > 0$. Тогда при любом $m \geqslant 0$ справедливо тождество

$$\frac{1}{\Gamma^p(z)} = \frac{p^{pz}}{\gamma_p}\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{\Gamma\left(pz - \frac{p-1}{2} + k\right)} + O\left(e^{\frac{\pi p|y|}{2}}|y|^{p\left(\frac{1}{2}-x\right)-m-1}\right)\right],$$

$$\gamma_p = p^{p/2}(2\pi)^{(p-1)/2},$$

где $a_0 = 1$, остальные постоянные a_k выражаются через числа Бернулли.

Пример 11.7. Рассмотрим дзета-функцию Римана

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Этот ряд сходится при $\operatorname{Re} z > 1$ и является голоморфной функцией, которая ограничена в любой полуплоскости вида $\operatorname{Re} z \geqslant a > 1$. Рассмотрим сумму

$$S(n, z) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^z}.$$

В данном случае $f(x) = x^{-z}$, $\int_1^x f(t)\,dt = (x^{1-z} - 1)/(1 - z)$, $z \neq 1$. Пусть z вещественно, $z \geqslant a$, $a \leqslant 0$ и $2k > -a - 1$. Используя формулы (11.8), (11.9), получаем, что

$$\sum_1^n \frac{1}{m^z} - \frac{n^{1-z} - 1}{1 - z} = C(z) + \frac{1}{2n^z} + \\ + \sum_{r=1}^{k} (-1)^r z^{(2r-2)} \frac{B_r}{(2r)!} \frac{1}{n^{z+2r-1}} + O\left(\frac{1}{n^{z+2k+1}}\right) \qquad (n \to \infty). \tag{11.16}$$

Здесь обозначено $z^{(p)} = z(z+1)\ldots(z+p)$,

$$C(z) = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} S^{(2r-2)} \frac{B_r}{(2r)!} - \\ - \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+2)!} \int_1^{\infty} B_{2k+2}(t - [t]) \frac{dt}{t^{z+2k+2}}$$

и $z \neq 1$. Если $z = x + iy$ комплексно, то остаточный член в формуле (11.16) имеет порядок $O(n^{-x-2k-1})$, и можно показать, что $C(z)$ — целая функция. Поэтому

$$\zeta(z) = C(z) + \frac{1}{z-1},$$

так что $z = 1$ — простой полюс функции $\zeta(z)$ с вычетом, равным единице. Других конечных особых точек дзета-функция не имеет. Из (11.16) следует также формула

$$\zeta(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^z} - \frac{n^{1-z}}{1-z} - \frac{1}{2n^z}\right), \quad \operatorname{Re} z > -1,$$

и ряд других [41].

Приведем еще некоторые сведения о дзета-функции. Справедливо функциональное соотношение

$$\zeta(1-z) = 2(2\pi)^{-z}\,\Gamma(z)\,\zeta(z)\cos\frac{\pi z}{2},$$

которое можно вывести из формулы Эйлера — Маклорена [41]. Для дзета-функции имеет место интегральное представление [41]

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 1,$$

которое следует из тождества

$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty e^{-nt}t^{z-1}dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Суммирование по n приводит к интегральному представлению для $\zeta(z)$.

Приведем оценки роста $\zeta(z)$ в комплексной плоскости (см. [13]). Пусть $|z-1| > \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда

1. При $\operatorname{Re} z > 1$, $|\zeta(z)| \leqslant c$.
2. При $\operatorname{Re} z = 1$, $|\zeta(z)| \leqslant 5 + \ln|z|$.
3. При $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $|\zeta(z)| \leqslant C|z|^{1-\operatorname{Re} z}$.
4. При $\operatorname{Re} z = 0$, $|\zeta(iy)| = O(\sqrt{|y|}\ln|y|)$.
5. При $\operatorname{Re} z < 0$, $|\zeta(z)| = O\left(|\operatorname{Im} z|^{\frac{1}{2}-\operatorname{Re} z}\right)$.

Более точные оценки см. [13].

Пример 11.8 [13]. Рассмотрим ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} e^{-n^{\alpha}x},$$

где $\alpha > 0$, β вещественно. Имеем

$$n^{\beta} e^{-n^{\alpha}x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(s) x^{-s} n^{-\alpha s + \beta} dx.$$

Если $\sigma > 0$, $\sigma > (\beta + 1)/\alpha$, то можно заменить ряд интегралом

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(s) x^{-s} \zeta(\alpha s - \beta)\, ds.$$

Пусть $N < \sigma_N < N + 1$, $-\alpha\sigma_N + \beta < 1$, и $\frac{1+\beta}{\alpha} \neq -k$, $k = 1, 2, \ldots$ Заменим прямую интегрирования $\operatorname{Re} s = \sigma$ прямой $\operatorname{Re} s = -\sigma_N$; это можно сделать, так как функция $|\Gamma(s)\zeta(\alpha s - \beta)|$ убывает между этими прямыми не медленнее, чем $e^{-\frac{\pi}{4}|t|}$. Тогда получим

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right) x^{-\frac{\beta+1}{\alpha}} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \zeta(-\alpha k - \beta) x^k + $$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_N - i\infty}^{\sigma_N + i\infty} \Gamma(s) x^{-s} \zeta(\alpha s - \beta)\, ds = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right) x^{-\frac{\beta+1}{\alpha}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k!} (2\pi)^{-\alpha k - \beta} \sin\frac{\pi}{2}(\alpha k + \beta)\, \Gamma(1 + \alpha k + \beta) \times$$

$$\times \zeta(2k + \beta + 1) x^k + O\left(x^{\sigma_N}\right). \quad (11.17)$$

В этой формуле справа стоят вычеты подынтегральной функции в точке $s = (\beta + 1)/\alpha$, где $\zeta(\alpha s - \beta)$ имеет полюс первого порядка с вычетом α^{-1}, и в точках $-k$, $k = 0, 1, \ldots, N$, где $\Gamma(s)$ имеет полюсы с вычетом $(-1)^k/(k!)$.

При $\alpha > 1$ ряд (11.17) будет асимптотическим, когда $x \to +\infty$; при $\alpha \leqslant 1$ ряд сходится.

Пример 11.9 [13]. Рассмотрим ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{\beta} e^{-n^{\alpha} x}.$$

В этом случае при $\sigma > 0$, $\sigma > (1+\beta)/\alpha$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(s)\, x^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^{\alpha s - \beta}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(s)\, x^{-s} \left(1 - 2^{1+\beta-\alpha s}\right) \zeta(\alpha s - \beta)\, ds.$$

Мы использовали тождество

$$\left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Функция $(1 - 2^{1+\beta-\alpha s})\zeta(\alpha s - \beta)$ не имеет полюсов, и потому для $f(x)$ получается асимптотическое разложение по степеням x^{-k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Пример 11.10 [13]. Рассмотрим ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^{\alpha}} x^n, \quad 0 < \alpha < 2.$$

При $\alpha = 1$ имеем $f(x) = e^{-x}$. Рассмотрим интеграл

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\pi x^{-s} ds}{(\Gamma(1-s))^{\alpha} \sin \pi s}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Функция $(\Gamma(1-s))^{\alpha}$ голоморфна при $\operatorname{Re} s < 1$. Выберем ветвь этой функции, положительную на полуоси $(-\infty, 1)$. Заменим прямую интегрирования прямой $\operatorname{Re} s = \sigma_N = -N + 1/2$. Используя формулу Стирлинга, получим [13], что

$$\left| \int_{\sigma_N - i\infty}^{\sigma_N + i\infty} \frac{x^{-s} ds}{(\Gamma(1-s))^{\alpha} \sin \pi s} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C x^{\sigma_N} (1 + \sigma_N)^3 \exp\left\{ -\alpha (1 + \sigma_N) \ln \frac{1}{e} (1 + \sigma_N) \right\},$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^\alpha} x^n + O\left(x^{\sigma_N} \sigma_N^3 \exp\left\{-\alpha\sigma_N \ln \frac{\sigma_N}{\varepsilon}\right\}\right) = f(x).$$

Поэтому функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^\alpha} x^n, \quad F(s) = \frac{\pi}{(\Gamma(1-s))^\alpha \sin \pi s}$$

образуют меллинову пару. Делая замену $s \to (1-s)$ и сдвигая прямую $\operatorname{Re} s = \sigma$ влево, получаем

$$f(x) = \frac{x^{-1}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\pi x^s s^\alpha}{(\Gamma(1+s))^\alpha \sin \pi s} \, ds.$$

Контур интегрирования $[0, i\infty)$ можно заменить контуром, состоящим из отрезка $[0, -1/2]$ и луча $[-1/2, +i\infty)$, а контур $(-i\infty, 0]$ — контуром, состоящим из луча $(-1/2 - i\infty, -1/2]$ и отрезка $[-1/2, 0]$. На лучах $[-1/2, -1/2 + i\infty)$, $[-1/2, -1/2 + i\infty)$ интегралы абсолютно сходятся, $|x^s| = x^{-1/2}$. Поэтому

$$f(x) = \frac{x^{-1}}{2\pi i} \left[\int_0^{-1/2} \frac{\pi x^t e^{i\pi\alpha} |t|^\alpha \, dt}{\Gamma^\alpha(t+1) \sin \pi t} - \int_0^{1/2} \frac{\pi x^t e^{-i\pi\alpha} |t|^\alpha \, dt}{\Gamma^\alpha(t+1) \sin \pi t} \right] +$$

$$+ O\left(x^{-3/2}\right) = \frac{\sin \pi\alpha}{x} \int_0^{1/2} \frac{x^{-t} t^\alpha}{\Gamma^\alpha(1-t) \sin \pi t} + O\left(x^{-3/2}\right).$$

При малых $|t|$ имеем

$$\frac{1}{\sin \pi t \Gamma^\alpha(1-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad a_0 = 1,$$

так что

$$f(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{x} \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{|\ln x|^{\alpha+n}} + O\left(\frac{1}{x \ln^{\alpha+N+1} x}\right).$$

Здесь использован метод Лапласа для интегралов вида $\int_0^{1/2} x^{-t} t^{\alpha+1-k} dt$.

При $\alpha = 2$ получается известная асимптотическая формула для функции Бесселя:

$$f(x) = \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(2\sqrt{x} - \pi/4\right) + O\left(x^{-1/2+\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало.

Приведем аналоги формулы Эйлера — Маклорена [15]. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma$ (σ — не целое число) и удовлетворяет в ней оценке

$$|f(x+iy)| \leqslant \varepsilon(x) e^{a|y|}, \qquad (11.18)$$

где $a < 2\pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$. Тогда

$$\sum_{n>\sigma} f(n) = \int_{\sigma}^{\infty} f(x)\,dx + \int_{\sigma}^{\sigma+i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1} + \int_{\sigma}^{\sigma-i\infty} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1}$$

в предположении, что интеграл $\int\limits_{\sigma}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится. Из этой формулы следует

Теорема 11.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma$ ($\sigma < 0$ — не целое число) и*

$$|f(x+iy)| \leqslant M_A e^{-Ax+a|y|}, \quad a < \pi,$$

при любом фиксированном $A > 0$. Тогда при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \notin (-\infty, 0)$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\lambda^n = \int_{\sigma}^{\infty} f(x) e^{x\ln\lambda} dx - \sum_{k=0}^{[-\sigma]} \frac{f(-k)}{\lambda^k} + O\left(|\lambda|^{\sigma}\right), \quad (11.19)$$

где для $\ln \lambda$ берется главное значение.

Пример 11.11. Рассмотрим ряд

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (n!)^{-1/\rho}, \quad \rho > 1/2.$$

При $\rho > 1/2$ условия теоремы 11.1 выполнены, так как справедлива оценка

$$|\Gamma(\sigma+iy)| \leqslant M_\sigma e^{-\pi|y|/2}.$$

Из (11.19) следует, что

$$F(\lambda) = \int_{-1}^{\infty} [\Gamma(x+1)]^{-1/\rho} e^{x\ln\lambda} dx + O\left(|\lambda|^{-1}\right).$$

Асимптотика интеграла вычисляется с помощью метода перевала, и мы получаем

$$F(\lambda) = (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2\rho}} \lambda^{\frac{\rho-1}{2}} \exp(\lambda^\rho/\rho)\left[1 + O(|\lambda|^{-\rho})\right] + O(|\lambda|^{-1})$$

при $|\lambda| \to \infty$, $|\arg \lambda| \leqslant \pi/(2\rho) + \eta$, $\eta > 0$ — фиксировано,

$$F(\lambda) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{\rho}\right)\frac{1}{\lambda(\ln\lambda)^{1/\rho}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\ln\lambda}\right)\right]$$

в остальной части комплексной плоскости λ.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D, содержащей полуполосу $\operatorname{Re} z > \sigma$, $|\operatorname{Im} z| < h$ ($\sigma > 0$ — не целое число), и в D справедлива оценка (11.18), где a, $\varepsilon(x)$ удовлетворяют тем же условиям. Если сходится интеграл $\int\limits_\sigma^\infty f(x)\,dx$, то

$$\sum_{n>\sigma} f(n) = \int\limits_\sigma^\infty f(x)\,dx + \int\limits_{C_\sigma^+} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi i z} - 1} + \int\limits_{C_\sigma^-} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi i z} - 1}.$$

Здесь C_σ^+ — любой контур, идущий из точки $z = \sigma$ в бесконечность выше действительной оси и лежащий в D, C_σ^- — аналогичный контур, лежащий ниже действительной оси. Из этой формулы следует

Теорема 11.2. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D, содержащей полуполосу* $\operatorname{Re} z > \sigma$, $|\operatorname{Im} z| < h$ *($\sigma < 0$ — не целое число),*

$$|f(x+iy)| \leqslant M_A e^{-Ax}$$

при любом $A > 0$, $x + iy \in D$. Тогда

$$\sum_{n>\sigma}^{\infty} f(n)\,\lambda^n = \int\limits_\sigma^\infty f(x)\,e^{x\ln\lambda}dx + \\ + \int\limits_{C_\sigma^+} \frac{f(z)\,e^{z\ln\lambda}}{e^{-2\pi i z} - 1} + \int\limits_{C_\sigma^-} \frac{f(z)\,e^{z\ln\lambda}}{e^{2\pi i z} - 1}\,dz. \quad (11.20)$$

Пример 11.12. Пусть $F(\lambda)$ — функция из примера 11.11, $\rho > 0$. Условия теоремы 11.2 выполнены, и из

(11.20) следует, что

$$F(\lambda) = \int_{-1}^{\infty} [\Gamma(x+1)]^{-1/\rho} e^{x\ln\lambda} dx + \int_{C_{-1}^{+}} \frac{[\Gamma(z+1)]^{-1/\rho} e^{z(\ln\lambda + 2\pi i)}}{1 - e^{2\pi i z}} dz + \int_{C_{-1}^{-}} \frac{[\Gamma(z+1)]^{-1/\rho} e^{z(\ln\lambda + 2\pi i)}}{1 - e^{-2\pi i z}} dz \equiv F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda).$$

Асимптотика интеграла $F_1(\lambda)$ вычисляется с помощью метода перевала и имеет вид

$$F_1(\lambda) = (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2\rho}} \lambda^{\frac{\rho-1}{2}} \exp(\lambda^\rho/\rho)\left[1 + O(\lambda^{-\rho})\right] + O\left(\frac{1}{\lambda(\ln\lambda)^{1/\rho}}\right)$$

при $|\lambda| \to \infty$, $|\arg\lambda| \leqslant \pi/(2\rho) + \eta$, где $\eta > 0$ фиксировано,

$$F_1(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda(\ln\lambda)^{1/\rho}}\right)$$

при $|\lambda| \to \infty$, $\pi/(2\rho) \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi$.

Точки перевала подынтегральной функции в $F_i(\lambda)$ определяются из уравнения

$$\frac{1}{\rho}\ln z = \ln\lambda + 2\pi i + O(\lambda^{-1}) + O(e^{2\pi i z}),$$

которое имеет решение вида

$$z_0(\lambda) = \lambda^\rho e^{2\pi i\rho}\left[1 + O(e^{2\pi i\lambda^\rho})\right]\left[1 + O(\lambda^{-\rho})\right].$$

В [15] показано, что при $\rho \leqslant 1/2$, $|\arg\lambda| \leqslant \pi - \eta$ основной вклад в асимптотику $F(\lambda)$ дает точка перевала интеграла $F_1(\lambda)$, так что $F(\lambda) \sim F_1(\lambda)$.

11.1. Пусть

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^\alpha \lambda^n}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Тогда при $\lambda \to \infty$

$$F(\lambda) = K_\alpha (\ln|\lambda|)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-2}} \left\{ \exp\left[C_\alpha (\ln|\lambda| + i\varphi)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + o(1) \right] + \right.$$
$$+ \exp\left[C_\alpha (\ln|\lambda| + (\varphi + 2\pi) i|)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + o(1) \right] +$$
$$\left. + \exp\left[C_\alpha (\ln|\lambda| + (\varphi - 2\pi) i)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right] + o(1) \right\},$$

$$\varphi = \arg\lambda, \quad C_\alpha = (\alpha - 1)\alpha^{-1/(\alpha-1)}, \quad K_\alpha = \sqrt{2\pi\alpha(\alpha-1)}.$$

11.2. Пусть

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{|\ln(n+2)|^n}.$$

Тогда при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$, $|\operatorname{Im}\lambda| < \pi$

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi\lambda} \exp\left[\frac{\lambda}{2} + e^{\lambda - \ln\lambda} + o(1) \right] + O(\lambda^{-1})$$

и $F(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to \infty$ вне полуполосы $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $|\operatorname{Im}\lambda| < \pi$.

Пример 11.13 [5]. Рассмотрим сумму

$$S(s, n) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+n} \binom{2n}{k}^s.$$

При $s < 0$, $n \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$S(s, n) \sim 2(-1)^n \left[1 - \binom{2n}{1}^s + \binom{2n}{2}^s - \ldots \right].$$

Очевидно, что $S(0, n) = (-1)^n$, $S(1, n) = 0$.

Пусть $s > 0$, D — комплексная плоскость z с разрезами по лучам $(n+1, +\infty)$, $(-\infty, -n-1)$, C — граница прямоугольника с вершинами $\pm(n+1/2) \pm pi$, $p > 0$, положительно ориентированная. Тогда в силу теоремы о вычетах справедливо интегральное представление

$$S(s, n) = \int_C \left[\frac{\Pi(2n)}{\Pi(n+z)\,\Pi(n-z)} \right]^s \frac{dz}{2i \sin \pi z}, \qquad (11.21)$$

где $\Pi(z) = \Gamma(z+1)$, и для s-й степени функции, стоящей под знаком интеграла, выбирается ветвь, положительная на отрезке $[-n-1/2, n+1/2]$.

Подынтегральная функция — нечетная функция z. Поэтому достаточно проинтегрировать по одной половине контура C, а затем удвоить результат.

Ввиду сложности подынтегральной функции трудно найти ее точки перевала. Но в секторе $|\arg z| \leqslant \pi - \delta < \pi$ можно при $|z| \to \infty$ заменить функцию $\Pi(z)$ ее асимптотикой, применив формулу Стирлинга. Поэтому постараемся продеформировать контур интегрирования так, чтобы можно было заменить подынтегральную функцию ее асимптотикой. Рассмотрим интегралы

$$P_N = \int\limits_{-N-\frac{1}{2}+ip}^{N+\frac{1}{2}+ip} f\,dz, \quad Q_N = \int\limits_{C_N} f\,dz.$$

Здесь f — подынтегральная функция из (11.21), $p > 0$ фиксировано, $N > 0$ — целое число. Контур C_N — простая замкнутая кривая. Она начинается в точке $z = N + 1/2 - i0$, лежащей на нижнем берегу разреза, проходит в нижней полуплоскости, пересекает вещественную ось в точке $z = n + 1/2$, а затем возвращается по верхней полуплоскости в точку $z = N + 1/2 + i0$, лежащую на верхнем берегу разреза. В качестве C_N можно взять границу прямоугольника с вершинами в точках $N + \frac{1}{2} \pm ip$, $n + \frac{1}{2} \pm ip$. Тогда

$$\frac{1}{2} S(s, n) = Q_N - P_N + \int\limits_{N+\frac{1}{2}+i0}^{N+\frac{1}{2}+ip} f\,dz + \int\limits_{N+\frac{1}{2}-ip}^{N+\frac{1}{2}-i0} f\,dz. \quad (11.22)$$

Покажем, что пределы $\lim\limits_{N\to\infty} P_N = P$, $\lim\limits_{N\to\infty} Q_N = Q$ существуют и что

$$S(s, n) = 2Q - 2P. \quad (11.23)$$

Из функционального уравнения

$$\Pi(z)\,\Pi(-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z} \quad (11.24)$$

следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n (2n)!\,\Pi(z-n)}{\pi(z-n)\,\Pi(z+n)}\right]^s (\sin \pi z)^{s-1},$$

Пусть K_δ — сектор $|\arg z| \leqslant \pi - \delta < \pi$, тогда из формулы Стирлинга следует, что

$$\Pi(z) = (2\pi)^{1/2} z^{z+1/2} e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right], \quad z \in K_\delta. \quad (11.25)$$

Поэтому на отрезках $\left[N + \frac{1}{2} + i0,\ N + \frac{1}{2} + ip\right]$, $\left[N + \frac{1}{2} - i0, N + \frac{1}{2} - ip\right]$ имеем при n фиксированном, $N \gg 1$

$$f(z) = O(|z|^{-(2n+1)s} |\sin \pi z|^{s-1}). \quad (11.26)$$

На этих отрезках $1 \leqslant |\sin \pi z| \leqslant \operatorname{ch}(\pi p)$. Пусть n фиксировано и таково, что $(2n+1)s \geqslant 2$. Тогда на указанных выше отрезках

$$f(z) = O(|z|^{-2}), \quad (11.27)$$

и потому последние два интеграла из (11.22) стремятся к нулю при $N \to \infty$. Оценки (11.26), (11.27) справедливы на отрезках $\left[n + \frac{1}{2} + ip,\ N + \frac{1}{2} + ip\right]$, $\left[n + \frac{1}{2} - ip,\right.$ $\left.N + \frac{1}{2} - ip\right]$, и потому существует $\lim\limits_{N \to \infty} Q_N = Q$.

Остается исследовать интеграл P_N. Из (11.24), (11.25) следует, что

$$\Pi(z) = (2\pi)^{1/2} z^{z+1/2} e^{-z} [1 + O(|z|^{-1})] (1 - e^{2\pi i z})^{-1} \quad (11.28)$$

при $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. На прямой $\operatorname{Im} z = p > 0$ имеем $|1 - e^{2\pi i z}|^{-1} \leqslant (1 - e^{-2\pi p})^{-1}$, $|\sin \pi z| \leqslant C$, и потому на этой прямой справедлива оценка (11.27). Аналогично доказывается оценка (11.27) на прямой $\operatorname{Im} z = -p$, откуда следует существование предела $\lim\limits_{N \to \infty} P_N = P$.

Найдем асимптотику при $n \to \infty$ интеграла

$$P = \int_{ip-\infty}^{ip+\infty} f(z)\, dz, \quad p > 0.$$

Этот интеграл не зависит от p. Из (11.25), (11.28) следует, что если $p_0 > 0$ фиксировано, то при $|\operatorname{Im} z| > p_0$

$$\Pi(z) = (2\pi)^{1/2} z^{z+1/2} e^{-z} [1 + O(|z|^{-1}) + O(e^{-2\pi |\operatorname{Im} z|})].$$

Поэтому при фиксированных $s>0$, $p_0>0$, $|\operatorname{Im} n\zeta|>p_0$, где $\zeta = z/n$, $n>1$, имеем

$$f(z) = -2^{2ns}(\pi n)^{-s/2}(1-\zeta^2)^{-s/2}\exp[n\psi(\zeta)] \times \\ \times\left[1 + O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n|1+\zeta|} + \frac{1}{n|1-\zeta|} + e^{-2\pi n|\operatorname{Im}\zeta|}\right)\right],$$

$$\psi(\zeta) = -s\ln(1-\zeta^2) - s\zeta\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \pi i\zeta.$$

Для функций $\ln(1-\zeta)$, $\ln(1+\zeta)$ берутся главные значения. Точки перевала функции $\psi(\zeta)$ определяются из уравнения $\psi'(\zeta) = \pi i - s\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = 0$, так что $\zeta_0 = i\operatorname{tg}\pi/(2s)$. Точка ζ_0 лежит в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ тогда и только тогда, когда $s>1$. Пусть $s>1$. Контур интегрирования заменим прямой l: $\operatorname{Im}\zeta = \operatorname{Im}\zeta_0$ (напомним, что $z = n\zeta$), тогда $\max\limits_{\zeta\in l}\operatorname{Re}\psi(\zeta)$ достигается только в точке перевала ζ_0. Действительно, уравнение контура l есть $\zeta = \zeta_0 + x$, $-\infty < x < \infty$,

$$\operatorname{Re}\frac{d\psi}{dx} = -s\ln\left|\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right| < 0$$

при $x>0$ и аналогично при $x<0$. Следовательно, контур l — перевальный. Имеем

$$\psi''(\zeta_0) = -2s\cos^2\pi/(2s), \quad \exp[n\psi(\zeta_0)] = \left(\cos\frac{\pi}{2s}\right)^{2ns},$$

$$(1-\zeta_0^2)^{-s/2} = \left(\cos\frac{\pi}{2s}\right)^s.$$

Асимптотика интеграла P равна вкладу от точки ζ_0, и окончательно получаем

$$P = -\left(2\cos\frac{\pi}{2s}\right)^{2ns+s-1} 2^{1-s}(\pi n)^{(1-s)/2} s^{-1/2}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{11.29}$$

при $n\to\infty$, $s>1$. Множитель $1+O(1/n)$ можно заменить асимптотическим рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k n^{-k}$, если воспользоваться асимптотическим рядом для функции $\Pi(z)$.

Покажем, что $P=0$, если $0<s\leqslant 1$, $2ns>1-s$. При $\operatorname{Im} z > p_0 > 0$, p_0 фиксировано, имеем $|\sin\pi z|^{s-1} = O(1)$. Из оценки (11.26) следует, что $f(z) = O(|z|^{-\lambda})$ при $|z|>2n$, $\operatorname{Im} z > p_0$, $(2n+1)s>1$, где $\lambda>1$ и n, s фиксированы. Поэтому $P = O(p^{1-\lambda})$ при $p \to +\infty$, и так как P не зависит от p, то $P = 0$.

Исследуем интеграл $Q = \int\limits_L f(z)\,dz$, где L — граница полуполосы $\operatorname{Re} z > n$, $|\operatorname{Im} z| < p$. Контур L можно продеформировать в контур L_0, который обходит разрез $(n+1, \infty)$ в положительном направлении. Более точно, верхняя половина контура состоит из полуокружностей $|z-(n+1+k)| = \delta$; $\operatorname{Im} z > 0$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, где $\delta > 0$ мало, и отрезков $[n+1+k+\delta,\ n+2+k-\delta]$, лежащих на верхнем берегу разреза, а нижняя половина симметрична верхней относительно вещественной оси. Точки $z = n+1+k$ являются точками ветвления подынтегральной функции, которую можно записать в виде

$$f(z) = (-1)^n \pi^{-s} \frac{1}{2i} \left[\frac{(2n)!\, \Pi(z-n-1)}{\Pi(z+n)}\right]^s [\sin \pi (z-n)]^{s-1}.$$

Функция $\Pi(z-n-1)/\Pi(z+n)$ однозначна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > n$ и положительна на полуоси $[n, \infty)$. Функция $[\sin \pi(z-n)]^{s-1}$ положительна при $z \in (n, n+1)$. Ее аргумент получает приращение $\pi(s-1)$, когда точку ветвления $z = n+k+1$ мы обходим по нижней полуокружности, принадлежащей L_0, и получает приращение $-\pi(s-1)$ при обходе по верхней полуокружности. Поэтому, полагая $z = n + x$, получаем

$$Q = (-1)^{n+1} \pi^{-s} \int\limits_1^\infty g(x)\,dx,$$
$$g(x) = \left[\frac{(2n)!\, \Pi(x-1)}{\Pi(x+2n)}\right]^s |\sin \pi x|^{s-1} \sin(\pi(s-1)[x]),$$

где $[x]$ — целая часть x. В частности, $Q = 0$ при целых $s > 0$.

Покажем, что основной вклад в асимптотику интеграла Q дает точка $x = 1$. Применяя формулу Стирлинга, получаем, что при $n \to \infty$

$$Q_1 = \int\limits_1^2 g(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_1^2 (2n)^{-xs} (\Pi(x-1))^s |\sin \pi x|^{s-1} \sin \pi(s-1)\,[1 + O(n^{-1})]\,dx =$$
$$= \sin \pi(s-1)\,(2n)^{-s} \int\limits_0^1 e^{-sy \ln 2n}\, (\Pi(y))^s\, (\sin \pi y)^s [1 + O(n^{-1})]\,dy.$$

При $y \to 0$ имеем $(\sin \pi y)^s \sim \pi^s y^s$. Поэтому к последнему интегралу применима лемма Ватсона, причем роль большого параметра играет $\ln n$, так что

$$Q_1 = \pi^{s-1}\Gamma(s)[2ns\ln(2n)]^{-s})]\sin\pi(s-1) + O((\ln n)^{-1})]. \tag{11.30}$$

Для Q_1 можно получить асимптотический ряд по степеням $(\ln n)^{-1}$.

Остается оценить интеграл $Q_2 = \int\limits_2^\infty g(x)\,dx$. Покажем, что $Q_2 = O(n^{-2s})$ при $n \to \infty$, тогда из (1.30) будет следовать, что $Q \sim Q_1$. Докажем оценку

$$\frac{\Pi(x+2n)}{(2n)!\,\Pi(x-1)} > Cx^K n^2 \qquad (x \geqslant 2,\ n \geqslant K). \tag{11.31}$$

Левая часть этого неравенства равна

$$x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{2n}\right) > \frac{x^K}{(K-1)!}\prod_{h=K}^{2n}\left(1+\frac{2}{h}\right) \geqslant$$

$$\geqslant C_2 x^K \prod_{h=1}^{2n}\left(1+\frac{2}{h}\right), \quad C_2^{-1} = (K-1)!\prod_{h=1}^{K-1}\left(1+\frac{2}{h}\right).$$

Далее,

$$\prod_{h=1}^{2n}\left(1+\frac{2}{h}\right) = \prod_{h=1}^{2n}\left(1+\frac{1}{h}\right)^2\prod_{h=1}^{2n}\left[1-\frac{1}{(h+1)^2}\right] \geqslant$$

$$\geqslant (2n+1)^2\prod_{h=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(h+1)^2}\right].$$

Последнее произведение сходится и оценка (2.31) доказана. Поэтому

$$|Q_2| \leqslant C^{-s}n^{-2s}\int\limits_2^\infty x^{-Ks}|\sin\pi x|^{s-1}dx.$$

Так как $Ks > 1$, то последний интеграл сходится и $Q_2 = O(n^{-2s})$.

Окончательные оценки суммы $S(s, n)$ имеют вид

$$S(s, n) = 2(-1)^n + O(n^s), \quad s < 0;$$

$$S(0, n) = (-1)^n;$$

$$S(s, n) = 2(-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\pi} (2ns \ln(2n))^{-s} \left[\sin \pi s + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right], \quad 0 < s < 3/2;$$

$$S(1, n) = 0;$$

$$S(s, n) = 2^{2-s} \left[2 \cos \frac{\pi}{2s}\right]^{2ns+s-1} (\pi n)^{\frac{1-s}{2}} s^{-1/2} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad s > 3/2.$$

При $s < 0$ и $s > 3/2$ остаточный член можно заменить асимптотическим рядом по степеням n^{-1}, при $0 < s < 3/2$ — по степеням $(\ln n)^{-1}$. При $s = 3/2$ оба интеграла P и Q вносят свой вклад в асимптотику (см. (11.29), (11.30)):

$$S\left(\frac{3}{2}, n\right) \sim 2 \cdot 3^{-1/2} \pi^{-1/4} \left[n^{-1/4} + C_1 n^{-5/4} + \right.$$
$$\left. + C_2 n^{-3/2} (\ln n)^{-3/2} + C_3 n^{-3/2} (\ln n)^{-5/2} + \ldots\right].$$

11.3 [5]. Пусть α вещественно. Тогда при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{n+k} k^{2n+\alpha} \sim n^{3\alpha/2} (2n)! \sum_{k=0}^{\infty} C_k n^{-k},$$

$$C_0 = \frac{1}{2} 3^{-\alpha/2} / \Gamma(1 + \alpha/2).$$

3. Бесконечные произведения. Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{f(n)}\right).$$

Пусть функция $w = f(z)$ голоморфна в области D, содержащей полуось $[0, +\infty)$, и взаимно однозначно отображает D на угол $|\arg w| < \alpha$, причем $\operatorname{Re} w \to +\infty$, если $\operatorname{Re} z \to +\infty$. Пусть L_η — кривая, образ которой есть луч $\arg w = \eta$.

Доказательства сформулированных ниже теорем см. в [15].

Теорема 11.3. *Пусть выполнено условие*

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{|f(t)|} < \infty$$

и на любой кривой L_η, $0<|\eta|<\alpha$, имеем

$$\ln|f(z)| = o(|\operatorname{Im} z|) \qquad (z\in L_\eta,\ z\to\infty). \quad (11.32)$$

Тогда при $|\lambda|\to\infty$, $\eta\leqslant|\arg\lambda|\leqslant\pi$, справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda)\sim\exp\left[\int\limits_\sigma^\infty \ln\left(1-\frac{\lambda}{f(x)}\right)dx + R(\sigma,\lambda)\right],$$

$$R(\sigma,\lambda)\sim\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\ln(-\lambda)-\sum_{k=0}^\infty\frac{c_k(\sigma)}{\lambda^k}.$$

Коэффициенты разложения имеют вид

$$c_0(\sigma)=\int\limits_{L_{\sigma,\eta}}\frac{\ln f(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1}+\int\limits_{L_{\sigma,-\eta}}\frac{\ln f(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1},$$

$$kc_k(\sigma)=\int\limits_{L_{\sigma,\eta}}\frac{f^k(z)\,dz}{e^{-2\pi iz}-1}+\int\limits_{L_{\sigma,-\eta}}\frac{f^k(z)\,dz}{e^{2\pi iz}-1},\quad k\geqslant 1.$$

Здесь $0<\sigma<1$ и $L_{\sigma,\eta}$ — контур, который состоит из вертикального отрезка, идущего из точки $z=\sigma$ до пересечения с L_η и части L_η, идущей от этой точки до бесконечности.

Следующая теорема описывает поведение функции $F(\lambda)$ вблизи ее нулей.

Теорема 11.4. *Пусть условия теоремы 11.3 выполнены и $g(z)$ — функция, обратная к функции $f(z)$. Если λ лежит в секторе $|\arg\lambda|<\eta$, то*

$$F(\lambda)\sim\frac{1-e^{2\pi ig(\lambda)}}{1-e^{2\pi ig(0)}}\exp\left[\int\limits_\sigma^\infty\ln\left(1-\frac{\lambda}{f(x)}\right)dx+R(\sigma,\lambda)\right]$$

при λ, лежащих выше L_0,

$$F(\lambda)\sim\frac{1-e^{-2\pi ig(\lambda)}}{1-e^{-2\pi ig(0)}}\exp\left[\int\limits_\sigma^\infty\ln\left(1+\frac{\lambda}{f(x)}\right)dx+R(\sigma,\lambda)\right]$$

при λ, лежащих ниже L_0,

$$F(\lambda)\sim\frac{\sin\pi g(\lambda)}{\sin\pi g(0)}\exp\left[\int\limits_\sigma^\infty\ln\left|1+\frac{\lambda}{f(x)}\right|dx+R(\sigma,\lambda)\right]$$

при λ, лежащих на L_0.

Здесь $R(\sigma, \lambda)$ — тот же асимптотический ряд, что и в теореме 11.3.

Пример 11.14 [15]. Пусть

$$F(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \lambda e^{-n^{\alpha}}\right), \quad 0 < \alpha < 1/2.$$

Покажем, что условие (11.32) выполняется; остальные условия теоремы 11.3 выполнены. Кривая L_η определяется уравнением $\operatorname{Im} z^{\alpha} = \eta$. Положим $z = re^{i\varphi(r)}$, тогда при $r \to \infty$ имеем

$$\varphi(r) \sim \frac{1}{\alpha}\eta r^{-\alpha}, \quad \operatorname{Re} z(r) \sim r^{\alpha}, \quad \operatorname{Im} z(r) \sim \frac{\eta}{\alpha} r^{1-\alpha},$$

и при $0 < \alpha < 1/2$ условие (11.32) выполнено. Из теоремы 11.3 следует, что при $|\lambda| \to \infty$, $|\arg(-\lambda)| < \pi - \eta$, справедливо асимптотическое разложение

$$\ln F(\lambda) \sim \int_0^{\infty} \ln\left(1 - \lambda e^{-x^{\alpha}}\right) dx - \frac{1}{2} \ln(-\lambda) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(0)}{\lambda^k},$$

$$c_0(0) = \zeta(-\alpha),$$

$$c_k(0) = \frac{2}{k} \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(kx^{\alpha} \sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{e^{2\pi x} - 1} \exp\left(kx^{\alpha} \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) dx.$$

Остается вычислить асимптотику интеграла. Ограничимся для простоты случаем, когда $\lambda = -\mu$, $\mu > 0$, так что интеграл имеет вид

$$I(\mu) = \int_0^{\infty} \ln\left(1 + \mu e^{-x^{\alpha}}\right) dx.$$

Сделаем замену переменной $e^{-x^{\alpha}} = t$, тогда получим

$$I(\mu) = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \ln(1 + \mu t) \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha} - 1} \frac{dt}{t} =$$

$$= \mu \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dt}{1 + \mu t} = \mu \int_1^{\infty} \frac{(\ln \tau)^{\frac{1}{\alpha}} d\tau}{\tau(\tau + \mu)} = \int_{\mu}^{\infty} \frac{(\ln \mu t)^{\frac{1}{\alpha}} dt}{t(t + 1)}.$$

В предпоследнем интеграле мы сделали замену переменной $\tau = \mu t$. Далее,

$$I(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n(\mu),$$

$$I_n(\mu) = \int_{\mu}^{\infty} \frac{(\ln \mu t)^{1/\alpha}}{t^{n+2}}\, dt = \frac{1}{\mu^{n+1}} \int_{1}^{\infty} \frac{(\ln \mu^2 \tau)^{1/\alpha}}{\tau^{n+2}}\, d\tau.$$

Имеем (см. (1.39) из гл. II)

$$(\ln \mu^2 \tau)^{1/\alpha} = (2 \ln \mu)^{1/\alpha} \sum_{k=0}^{N} \binom{1/\alpha}{k} \left(\frac{\ln \tau}{2 \ln \mu}\right)^k + R_N,$$

$$|R_N| \leqslant C \max\left[\left(\frac{\ln \tau}{\ln \mu}\right)^N, \left(\frac{\ln \tau}{\ln \mu}\right)^{N+1}\right].$$

Следовательно,

$$I_n(\mu) =$$

$$= \frac{(2 \ln \mu)^{1/\alpha}}{\mu^{n+1}} \sum_{k=0}^{N} \binom{1/\alpha}{k} (2 \ln \mu)^{-k} \int_{1}^{\infty} \frac{(\ln \tau)^{1/\alpha}}{\tau^{n+2}}\, d\tau + O\left(\frac{(\ln \mu)^{\frac{1}{\alpha} - N}}{\mu^{n+1}}\right).$$

Поэтому первые члены разложения $\ln F(\lambda)$ имеют вид

$$\ln F(\lambda) = -\frac{1}{2} \ln(-\lambda) - c_0(0) - \frac{1}{\lambda} (2 \ln(-\lambda))^{1/\alpha} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

11.4 [15]. Пусть

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{[\ln(n+2)]^n}.$$

Тогда при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$, $|\operatorname{Im}\lambda| < \pi$

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi\lambda} \exp\left[\frac{\lambda}{2} + e^{\lambda - \ln\lambda} + o(1)\right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

а при $|\lambda| \to \infty$ вне полуполосы $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $|\operatorname{Im}\lambda| > \pi$, имеем $F(\lambda) = O(\lambda^{-1})$.

ГЛАВА V

МЕТОД ПЕРЕВАЛА (МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

§ 1. Основы метода перевала

1. Предварительные соображения. Рассмотрим *интеграл Лапласа*

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz. \qquad (1.1)$$

Здесь $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, $dz = dz_1 \ldots dz_n$, γ есть n-мерное гладкое многообразие (возможно, с краем), λ — большой положительный параметр. Функции $f(z)$, $S(z)$ голоморфны в некоторой окрестности контура γ. Нас интересует асимптотика $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$. Как обычно, считаем, что $f(z) \not\equiv 0$, $S(z) \not\equiv \text{const}$.

Основная идея метода перевала в многомерном случае та же, что и в одномерном (см. гл. IV, § 1). Рассмотрим интеграл

$$F_1(\lambda) = \int_{\gamma_0} \exp[\lambda S(z)]\, dz, \qquad (1.2)$$

где γ_0 — компактное многообразие с краем и $S(z)$ — полином. Очевидно, что

$$|F_1(\lambda)| \leqslant V(\gamma_0) \exp[\lambda \max_{z \in \gamma_0} \operatorname{Re} S(z)],$$

где $V(\gamma_0)$ — n-мерный объем многообразия γ_0. В силу интегральной теоремы Коши — Пуанкаре значение интеграла (1.2) не изменится, если мы заменим γ_0 любым многообразием, которое имеет тот же край. Пусть Γ — множество всех таких многообразий. Тогда

$$|F_1(\lambda)| \leqslant \inf_{\gamma \in \Gamma} \{V(\gamma) \exp[\lambda \max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)]\}.$$

Как и в гл. I, § 1, п. 1, будем предполагать, что можно ограничиться только такими $\gamma \in \Gamma$, для которых $V(\gamma) \leqslant C = \mathrm{const}$. Наконец, допустим, что существует $\gamma^* \in \Gamma$ такое, на котором достигается минимакс

$$\min_{\gamma \in \Gamma} \max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z). \tag{1.3}$$

Тогда получим оценку

$$|F_1(\lambda)| \leqslant C \exp\left[\lambda \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)\right]. \tag{1.4}$$

Ниже (лемма 1.2) будет доказано, что если γ^* — минимаксный контур, то $\max\limits_{z \in \gamma^*} \operatorname{Re} S(z)$ достигается либо на краю этого многообразия, либо в точке z^0 такой, что

$$S'_z(z^0) = 0. \tag{1.5}$$

Такая точка z^0 называется *точкой перевала* функции $S(z)$.

Определение 1.1. Точка перевала z^0 функции $S(z)$ называется *невырожденной*, если $\det S''_{zz}(z^0) \neq 0$.

Как и в одномерном случае, вклад от точки перевала в интеграл (1.1) вычисляется с помощью метода Лапласа. Однако задача об отборе тех точек перевала, которые дают основной вклад в асимптотику интеграла (1.1), в многомерном случае связана с еще более существенными трудностями, чем в одномерном. Кроме того, имеются и дополнительные аналитические трудности, связанные с вычислением вклада от вырожденных точек перевала.

В настоящей главе собраны практически все примеры многомерных интегралов вида (1.1), асимптотику которых удается вычислить.

Этот параграф написан по тому же плану, что и § 1 гл. IV.

2. Локальная структура множеств уровня аналитических функций. Рассмотрим отображение $\zeta = \varphi(z)$, или, в покомпонентной записи,

$$\zeta_1 = \varphi_1(z_1, \ldots, z_n), \ \ldots, \ \zeta_n = \varphi_n(z_1, \ldots, z_n).$$

Это отображение называется *голоморфным* в области $U \subset \mathbf{C}^n_z$, если все функции $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$ голоморфны в области U. Далее, отображение $\zeta = \varphi(z)$ называется *биголоморфным* в области U, если оно голоморфно в U, область U взаимно однозначно отображается на область $V \subset \mathbf{C}^n_\zeta$ и обратное отображение $z = \varphi^{-1}(\zeta)$ голоморфно в области V.

Как и в одномерном случае, введем обозначения для множеств уровня: $\{S=c\}$ — множество всех $z\in\mathbb{C}^n$ таких, что $S(z)=c$, $\{\operatorname{Re} S\leqslant c\}$ — множество всех $z\in\mathbb{C}^n$ таких, что $\operatorname{Re} S(z)\leqslant c$ и т. д. Далее, D^k есть k-мерный шар, S^k есть k-мерная сфера.

Лемма 1.1. *Пусть функция $S(z)$ голоморфна в окрестности точки z^0, которая не является точкой перевала. Тогда существует биголоморфное отображение $z=\varphi(\zeta)$: $V\to U$, где U, V — окрестности точек $\zeta=0$, $z=z^0$, такое, что*

$$(S\circ\varphi)(\zeta)=S(z^0)+\zeta_1. \tag{1.6}$$

Лемма следует из теоремы об обратной функции.

Следствие 1.1. *Пусть условия леммы 1.1 выполнены, U — достаточно малая окрестность точки z^0. Тогда:*

1°. *Множество $\{S=S(z^0)+\varepsilon\}\cap U$ при малых $|\varepsilon|$ является $(n-1)$-мерным аналитическим множеством, диффеоморфным шару D^{2n-2}.*

2°. *Множества $\{\operatorname{Re} S=\operatorname{Re} S(z^0)+\varepsilon\}\cap U$, $\{\operatorname{Im} S=\operatorname{Im} S(z^0)+\varepsilon\}\cap U$ при малых вещественных ε являются C^∞-многообразиями размерности $2n-1$, диффеоморфными шару D^{2n-1}.*

Действительно, в переменных ζ уравнение множества $\{S=S(z^0)+\varepsilon\}$ имеет вид $\zeta_1=\varepsilon$ — это есть плоскость размерности $2n-2$ в $\mathbb{C}^n_\zeta$. Аналогично, множество $\{\operatorname{Re} S=\operatorname{Re} S(z^0)+\varepsilon\}$ в переменных ζ определяется уравнением $\operatorname{Re}\zeta_1=\varepsilon$ — это есть плоскость размерности $2n-1$ в $\mathbb{C}^n_\zeta$.

В частности, если множества $\{S=c\}$, $\{\operatorname{Re} S=a\}$ не содержат точек перевала, то первое является $(n-1)$-мерным *комплексным аналитическим многообразием*, а второе — $(2n-1)$-мерным *вещественным аналитическим многообразием*.

Функция $\operatorname{Re} S(z)$ наиболее быстро меняется в направлении градиента $\nabla_{x,y}\operatorname{Re} S(z)$. Линии, принадлежащие *векторному полю* $\{\nabla_{x,y}\operatorname{Re} S\}$, определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений $(z=x+iy)$

$$\frac{dx}{dt}=-\nabla_x\operatorname{Re} S(z),\quad \frac{dy}{dt}=-\nabla_y\operatorname{Re} S(z).$$

Учитывая соотношения Коши — Римана, можно переписать эту систему в виде

$$\frac{dz}{dt}=-\overline{S_z'(z)}. \tag{1.7}$$

Здесь t — вещественный параметр, выбранный так, что $\operatorname{Re} S$ убывает с ростом t, т. е. (1.7) — уравнение линий наибыстрейшего спуска.

Точками покоя системы (1.7) являются точки перевала функции $S(z)$. Если z^0 не является точкой перевала, то фазовая траектория системы (1.7), проходящая через точку z^0, есть кривая класса C^∞ при малых t.

Лемма 1.2. *Пусть γ — компактное гладкое многообразие размерности n (возможно, с краем), функции $f(z)$, $S(z)$ голоморфны при $z \in \gamma$.*

Пусть среди точек, в которых достигается $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$, *нет ни точек перевала, ни точек края* $\partial\gamma$.

Тогда существует многообразие γ_0 такое, что:

1°. $\int\limits_{\gamma} f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz = \int\limits_{\gamma_0} f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz.$

2°. $\max\limits_{z \in \gamma_0} \operatorname{Re} S(z) < \max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z).$

Пусть $\gamma(S)$ — множество всех точек, в которых достигается $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S$, и точка $z^0 \in \gamma(S)$. Тогда линия наискорейшего спуска, проходящая через точку z^0, трансверсальна к γ. Действительно, производная функции $\operatorname{Re} S$ в точке z^0 по любому направлению, касательному к γ, равна нулю. Если бы траектория $z = z(t)$, $z(0) = z^0$ касалась γ в точке z^0, то в силу (1.7)

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(S \circ z)(t)\,|_{t=0} = -\,|S_z'(z^0)|^2 = 0,$$

т. е. z^0 была бы точкой перевала.

По непрерывности линии наискорейшего спуска трансверсальны к γ в некоторой окрестности U множества $\gamma(S)$; выберем U так, чтобы ее замыкание не пересекалось с краем $\partial\gamma$. Сдвинем каждую точку $z \in [U]$ за время $t(z)$ вдоль линии наибыстрейшего спуска, выходящей из z, в сторону возрастания t, и пусть U^* — полученное множество. Последнее выберем так, чтобы было $t(z) > 0$, $z \in U$; $t(z) = 0$, $z \in \partial U$ и чтобы функция $t(z)$ была непрерывна на $[U]$. Если выбрать $t(z)$ достаточно малыми, то все траектории останутся в области голоморфности функций f, S.

Пусть γ_0 — множество, полученное из γ заменой U на U^*; тогда утверждение 1° леммы выполняется.

Докажем 2°. При $z \in \gamma_0$, $z \in U^*$ имеем

$$\operatorname{Re} S(z) < \max_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z) = M.$$

Это же неравенство верно при $z \in \partial U$; при $z \in U^*$, $z \notin \partial U$ неравенство выполняется по той причине, что $\operatorname{Re} S$ убывает вдоль траекторий (1.7) с ростом t. Из компактности множества U^* следует утверждение 2°.

Таким образом, как и в одномерном случае, основной вклад в асимптотику интеграла (1.1) могут вносить только точки перевала функции $S(z)$, край контура интегрирования и особенности функций f, S.

Нам понадобятся следующие топологические понятия: *относительный цикл*, *группы относительных гомологий* (см. [1], [11], [28], [29]). Напомним коротко эти понятия.

Пусть X — подмножество в $\mathbf{C}^n$, $A \subset X$. В рассматриваемых ниже примерах: $X = \{a \leqslant \operatorname{Re} S < b\}$ или $X = \{a \leqslant \operatorname{Re} S < b\} \cap U$, где S — голоморфная функция, U — область в $\mathbf{C}^n$, и соответственно

$$A = \{\operatorname{Re} S = a\}, \qquad A = \{\operatorname{Re} S = a\} \cap U.$$

k-мерным элементом цепи σ называется k-мерное ориентированное многообразие (возможно, с краем), содержащееся в X; элемент, отличающийся от σ ориентацией, обозначается $-\sigma$; *k-мерной цепью* γ на X называется формальная линейная комбинация с целочисленными коэффициентами конечного числа k-мерных элементов цепи $\gamma = \sum\limits_i n_i \sigma_i$. Если ω есть форма степени k на X, то $\int\limits_\gamma \omega = \sum\limits_i n_i \int\limits_{\sigma_i} \omega$. Сложение цепей производится покоэффициентно и по определению коммутативно; в частности, $\sigma + (-\sigma) = 0$. Цепь γ на X называется *циклом* $\operatorname{mod} A$ (*относительным циклом*), если $\partial\gamma$ содержится в A. Относительный k-мерный цикл называется *гомологичным нулю* $\operatorname{mod} A$ (запись: $\gamma \approx 0 \operatorname{mod} A$), если он вместе с некоторой цепью, содержащейся в A, ограничивает $(k+1)$-мерную цепь в X, т. е. $\gamma = \gamma' + \partial\tilde\gamma$, где γ' есть k-мерная цепь на A, $\tilde\gamma$ есть $(k+1)$-мерная цепь на X. Два относительных цикла γ, $\tilde\gamma$ называются *гомологичными* $\operatorname{mod} A$ (запись: $\gamma \approx \tilde\gamma \operatorname{mod} A$), если их разность гомологична нулю $\operatorname{mod} A$: $\gamma - \tilde\gamma \approx 0 \operatorname{mod} A$. Пусть $B_k(X, A)$ — группа относительных

k-мерных циклов на $X \bmod A$, $Z_k(X, A)$ — группа относительных k-мерных циклов, гомологичных нулю $\bmod A$. Фактор-группа $H_k(X, A) = B_k(X, A)/Z_k(X, A)$ называется k-мерной *группой относительных гомологий* пары (X, A). Мы рассматриваем группы относительных гомологий с целочисленными коэффициентами. Далее, X вложено в $\mathbf{C}^n$ и топология на X индуцирована обычной евклидовой топологией пространства $\mathbf{C}^n$. В наших примерах, как правило, X некомпактно в этой топологии, а элементы цепей допускают компактное замыкание в $\mathbf{C}^n$, т. е. рассматриваются *гомологии с компактными носителями*. Если A — пустое множество, то группа относительных k-мерных гомологий $H_k(X, A)$ является группой k-мерных гомологий $H_k(X)$.

Пусть Ω — область в $\mathbf{C}^n$, функция $f(z)$ голоморфна в области Ω и γ_1^n, γ_2^n — цепи размерности n, гомологичные в Ω. Тогда в силу интегральной теоремы Коши — Пуанкаре

$$\int_{\gamma_1^n} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2^n} f(z)\,dz.$$

Пусть A — множество $\{\operatorname{Re} f = a\}$, $X = \Omega \cap \{\operatorname{Re} f \geqslant a\}$, A непусто. Если цепи γ_1^n, γ_2^n гомологичны в $X \bmod A$ и функция $g(z)$ голоморфна в Ω, то

$$\int_{\gamma_1^n} g(z) \exp[\lambda f(z)]\,dz - \int_{\gamma_2^n} g(z) \exp[\lambda f(z)]\,dz = O(e^{a\lambda})$$
$$(\lambda > 0).$$

Действительно, $\gamma_1^n - \gamma_2^n = \gamma' + \partial\tilde{\gamma}$, где цепь γ' содержится в A, цепь $\tilde{\gamma}$ размерности $n+1$ содержится в X. Интеграл по $\partial_{\tilde{\gamma}}$ равен нулю в силу теоремы Коши — Пуанкаре, а интеграл по γ' имеет порядок $O(e^{a\lambda})$ при $\lambda > 0$, так как $\operatorname{Re} f(z) \equiv a$ на γ'.

Группы относительных гомологий инвариантны относительно гомеоморфизмов пар. Именно, пусть отображение f: $(X, A) \to (X', A')$ является гомеоморфизмом, т. е. оно взаимно однозначно и непрерывно вместе с обратным отображением (здесь $X \subset A$, $X' \subset A'$). Тогда, как известно, $H_k(X, A) \approx H_k(X', A')$ при всех k.

Два непрерывных отображения f_j: $X \to Y$, $j = 0, 1$, называются *гомотопными* (обозначается $f_0 \approx f_1$), если их можно «проинтерполировать» с помощью непрерывного семейства отображений f_t: $X \to Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Непрерывное отображение r: $X \to A$ называется *ретракцией*, если оно тождественно на A (т. е. все точки множества A остаются на месте). Ретракция называется *деформационной*, если отображение $i \circ r$ гомотопно единичному отображению X на себя. Здесь i: $A \to X$ — включение A в X.

Аналогично определяется деформационная ретракция пары r: $(X, A) \to (X', A')$, где $A \subset X$, $A' \subset X'$, и r отображает X на X', A на A'. Имеет место следующее важное свойство:

Если существует деформационная ретракция пары r: $(X, A) \to (X', A')$, то все относительные группы гомологий этих пар изоморфны: $H_k(X, A) \approx H_k(X', A')$.

Пусть U — область в $\mathbf{C}^n$. Введем обозначение:

$$H_k^U(a \leqslant \operatorname{Re} S < b, \ \operatorname{Re} S = a) = \\ = H_k(\{a \leqslant \operatorname{Re} S < b\} \cap U, \ \{\operatorname{Re} S = a\} \cup U). \quad (1.8)$$

Пример 1.1. Пусть U — малая односвязная окрестность точки z^0, функция $S(z)$ голоморфна в области U и $S'_z(z^0) \neq 0$. Тогда группа $H_n^U(\operatorname{Re} S \geqslant \operatorname{Re} S(z^0) + c$, $\operatorname{Re} S = \operatorname{Re} S(z^0) + c)$ тривиальна.

Действительно. в силу леммы 1.1 можно считать, что $S(z) = S(z^0) + z_1$. Далее, мы можем считать, что U есть куб вида $-\delta \leqslant x_j \leqslant \delta$, $-\delta \leqslant y_j \leqslant \delta$ $(z_j = x_j + iy_j)$. Множество $\{\operatorname{Re} S \geqslant \operatorname{Re} S(z^0) + c\} \cap U$ можно непрерывно продеформировать в множество $\{\operatorname{Re} S = \operatorname{Re} S(z^0) + c\} \cap U$, откуда и следует наше утверждение.

Деформационная ретракция задается формулой

$$r(z) = (z_1 + t(c - z_1), \ z_2, \ \ldots, \ z_n), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Пример 1.2. Пусть U — односвязная окрестность точки $z = 0$ в комплексной плоскости z и $c > 0$. Тогда

$$H_1^U(\operatorname{Re} z^2 \geqslant -c, \ \operatorname{Re} z^2 = -c) \approx \mathbf{Z},$$

где $\mathbf{Z}$ — группа всех целых чисел.

Образующей этой группой гомологии является отрезок $\gamma_c = [-i\sqrt{c}, \ i\sqrt{c}]$.

Действительно, множество $\{\operatorname{Re} z^2 \geqslant 0\} \cap U$ можно непрерывно продеформировать в множество $\{\operatorname{Re} z^2 = 0\} \cap U$, сдвигая каждую точку вдоль проходящей через нее линии уровня $\operatorname{Im} z^2 = \mathrm{const}$. Множество $\{-c \leqslant \operatorname{Re} z^2 \leqslant 0\} \cap U$

можно продеформировать в отрезок γ_c, сдвигая каждую точку вдоль проходящей через нее линии уровня $\operatorname{Re} z^2 = \mathrm{const}$. Таким образом, рассматриваемая нами группа гомологий изоморфна группе $H_1(\gamma_c,\ z = \pm i\sqrt{c}) \approx \mathbf{Z}$.

Относительный цикл γ_c называется *исчезающим циклом*, поскольку при $c \to 0$ он стягивается в точку («исчезает»).

Отсюда следует, что если z_0 — простая точка перевала функции $S(z)$, U — ее малая односвязная окрестность и $c > 0$ достаточно мало, то

$$H_1^U(\operatorname{Re} S(z) \geqslant \operatorname{Re} S(z_0) - c,\quad \operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0) - c) \approx \mathbf{Z}.$$

Действительно, функцию S с помощью биголоморфной замены переменных $z = \varphi(\zeta)$ можно привести к виду $(S \circ \varphi)(\zeta) = S(z_0) + \zeta^2$.

Пример 1.3. Пусть U, c те же, что и в примере 1.2, $k \geqslant 2$. Тогда

$$H_1^U(\operatorname{Re} z^k \geqslant -c,\ \operatorname{Re} z^k = -c) \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}\ (k-1 \text{ раз}).$$

Образующими этой группы служат относительные циклы $\gamma_j = l_j - l_{j+1}$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, где l_j — отрезки $\left[0,\ \sqrt[n]{c}\, e^{i2\pi j/n}\right]$ (исчезающие циклы).

Точно такую же структуру имеет группа $H_1^U(\operatorname{Re} S(z) \geqslant \operatorname{Re} S(z_0) - c,\ \operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0) - c)$, если z_0 является точкой перевала порядка k функции $S(z)$, U — окрестность точки z_0.

Следующий пример является наиболее важным.

Пример 1.4. Пусть U — шар $|z| \leqslant a$ в $\mathbf{C}^n$ и $c > 0$ — достаточно малое число, тогда

$$H_n^U\left(\operatorname{Re}\left(-\sum_{j=1}^n z_j^2\right) \geqslant -c,\ \operatorname{Re}\left(-\sum_{j=1}^n z_j^2\right) = -c\right) \approx \mathbf{Z}.$$

Образующей этой группы является исчезающий цикл

$$\gamma_c = \left\{z\colon\ y_1 = 0,\ \ldots,\ y_n = 0,\ \sum_{j=1}^n x_j^2 \leqslant c\right\},$$

т. е. γ_c есть n-мерный шар-пересечение U с вещественной n-плоскостью $\mathbf{R}_x^n$.

Наметим доказательство. Перейдем к биполярным координатам: $x_j = r\varphi_j$, $y_j = \rho\theta_j$, где $r = |x|$, $\rho = |y|$, $\sum\limits_{j=1}^n \varphi_j^2 =$

$=\sum\limits_{l=1}^{n}\theta_j^2=1$. Тогда рассматриваемые множества примут вид X: $\rho^2-r^2\geqslant -c$, A: $\rho^2-r^2=-c$. Как и в примере 1.2, их можно непрерывно продеформировать в множества X': $-\sqrt{c}\leqslant r\leqslant \sqrt{c}$, $\rho=0$: A': $r^2=c$, $\rho=0$, $z\in U$, где φ, θ пробегают единичные сферы, так что рассматриваемая группа изоморфна группе гомологий $H_1(X',A')\approx \mathbf{Z}$.

Пусть γ есть элемент рассматриваемой группы, причем 1) γ — гладкое многообразие с краем, содержащее точку $z=0$; 2) $\operatorname{Re}\sum\limits_{j=1}^{n}z_j^2>0$ при $z\in\gamma$, $z\neq 0$. Тогда можно показать, что

$$\gamma\approx\pm\gamma_c \bmod \left(\left\{\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n}(-z_j^2)=-c\right\}\cap U\right).$$

Число ±1 есть *индекс пересечения* γ с γ_c.

Лемма 1.3. *Пусть z^0 — невырожденная точка перевала функции $S(z)$, U — шар $|z-z^0|<\rho$, $c>0$ и ρ, c достаточно малы. Тогда*

$$H_n^U(\operatorname{Re}S\geqslant \operatorname{Re}S(z^0)-c,\quad \operatorname{Re}S=\operatorname{Re}S(z^0)-c)\approx\mathbf{Z}.$$

Доказательство следует из примера 1.4 и аналитического варианта (лемма 2.3.2) леммы Морса. Действительно, функцию S можно с помощью биголоморфной замены переменных $z=\varphi(\zeta)$ привести к виду $(S\circ\varphi)(\zeta)=$ $=S(z^0)-\sum\limits_{j=1}^{n}\zeta_j^2$. Образующей этой группы является исчезающий цикл γ_c (прообраз исчезающего цикла из примера 1.4).

Замечание 1.1. Пусть z^0 — вырожденная точка перевала, тогда группа $H_n^U(\operatorname{Re}S\geqslant\operatorname{Re}S(z^0)-c,\ \operatorname{Re}S=$ $=\operatorname{Re}S(z^0)-c)$ при малых U, $c>0$ изоморфна прямой сумме $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbf{Z}$ ($k\geqslant 1$ раз). Здесь k не зависит от c и называется *n-мерным типовым числом* точки z^0. Базис этой группы относительных гомологий образуют исчезающие циклы $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$, конструкция которых такова. Рассмотрим траектории системы (1.7), которые при $t\to-\infty$ входят в точку z^0, т. е. устойчивое интегральное многообразие $\mathfrak{M}$, отвечающее этой точке покоя системы (1.7). Пусть $\mathfrak{M}_U=\mathfrak{M}\cap U$; тогда $\mathfrak{M}_U$ есть n-мерное многообразие, связные компоненты которого являются исчевающими циклами и образуют базис $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. При этом $\max_{z\in\gamma_j} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в точке z^0.

3. Вклад от точки перевала. Рассмотрим интеграл $F(\lambda)$ вида (1.1), где γ есть n-мерное гладкое компактное многообразие с краем, функции $f(z)$, $S(z)$ голоморфны при $z^0 \in \gamma$.

Теорема 1.1. *Пусть $\max_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в точке $z^0 \in \gamma$, которая является невырожденной точкой перевала и внутренней точкой контура γ. Тогда при $\lambda \to +\infty$*

$$F(\lambda) = \int_\gamma f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz \sim \lambda^{-n/2} \exp[\lambda S(z^0)] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k}. \tag{1.9}$$

Это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз.

Положим $\gamma = \gamma_\varepsilon \cup \tilde{\gamma}_\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, $\gamma_\varepsilon = \{\operatorname{Re} S \geqslant \operatorname{Re} S(z^0 - \varepsilon)\} \cap U$. Тогда интеграл по $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ имеет порядок $O(\exp[\lambda(S(z^0) - \varepsilon)])$, и мы его отбросим. Рассмотрим группу $\mathcal{G} = H_n^U(\operatorname{Re} S \geqslant c^0 - \varepsilon, \operatorname{Re} S = c^0 - \varepsilon)$, где $c^0 = \operatorname{Re} S(z^0)$, U — достаточно малый шар с центром в точке z^0. Из примера 1.4 следует, что $\gamma_\varepsilon \approx \pm \gamma_\varepsilon^0$, где γ_ε^0 — канонический относительный цикл, который является образующей группы $\mathcal{G}$ (см. лемму 1.3). Следовательно,

$$F_1(\lambda) = \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz = \pm \int_{\gamma_\varepsilon^0} f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz.$$

Сделаем биголоморфную замену переменных $z = \varphi(\zeta)$, приводящую функцию S к сумме квадратов (см. лемму 2.3.2): $S(z) = S(z^0) - \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^2$. Тогда

$$F_1(\lambda) = \pm \exp[\lambda S(z^0)] \times \\ \times \int_{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 < \rho^2} (f \circ \varphi)(\xi) \det \varphi'_\xi(\xi) \exp\left[-\lambda \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\right] d\xi,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. Асимптотика полученного интеграла вычисляется с помощью метода Лапласа (см. теорему 2.4.1) и имеет вид (1.9).

Предложение 1.1. *В условиях теоремы* 1.1 *главный член асимптотики интеграла* (1.1) *имеет вид*

$$F(\lambda) = \\ = \pm (2\pi/\lambda)^{n/2} \exp[\lambda S(z^0)] \prod_{j=1}^{n} (-\mu_j)^{-1/2} [f(z^0) + O(\lambda^{-1})]. \tag{1.10}$$

Здесь μ_j — *собственные значения матрицы* $S''_{zz}(z^0)$ *и*

$$|\arg \sqrt{-\mu_j}| < \pi/2. \tag{1.11}$$

Знак в (1.10) совпадает со знаком в тождестве $\gamma_c \approx \pm\gamma_c^0$, где $\gamma_c = \{\operatorname{Re}(S(z) - S(z^0)) \geqslant c\} \cap \gamma$, $c > 0$ мало, γ_c^0 — канонический исчезающий цикл.

Короче формулу (1.10) можно записать так:

$$F(\lambda) = (2\pi/\lambda)^{n/2} \exp[\lambda S(z^0)] \times \\ \times [\det(-S''_{zz}(z^0))]^{-1/2} [f(z^0) + O(\lambda^{-1})], \tag{1.10'}$$

однако выбор ветви корня гессиана в такой записи неясен.

Поскольку главный член асимптотики выражается только через $S''_{zz}(z^0)$, то достаточно ограничиться рассмотрением квадратичной функции S. Пусть $z^0 = 0$, $S(z^0) = 0$. С помощью линейного преобразования с определителем, равным единице, S можно привести к сумме квадратов, так что рассмотрим функцию $S = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mu_j z_j^2$. Контур γ_c^0 в данном случае имеет вид $z_j = \rho_j/\sqrt{-\mu_j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, где ρ_j вещественны, ветви $\sqrt{-\mu_j}$ выбраны в соответствии с (1.11). Следовательно,

$$F(\lambda) = \pm \prod_{j=1}^{n} (-\mu_j)^{-1/2} \int_V \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n} \rho_j^2\right) d\rho,$$

где V — вещественная окрестность точки $\rho = 0$. Окончательно

$$F(\lambda) = \pm \prod_{j=1}^{n} (-\mu_j)^{-1/2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} [1 + O(\lambda^{-1})],$$

и тем самым (1.10) доказано.

Следствие 1.2. *Пусть условия теоремы 1.1 выполнены, z^0 — вещественная точка и γ — вещественная окрестность точки z^0. Тогда в формуле* (1.10) *берется знак плюс.*

Рассмотрим интеграл (1.1), где γ — гладкое n-мерное многообразие (возможно, с краем), функции f, S голоморфны на γ.

Контур γ называется *перевальным* (для интеграла (1.1)), если:

1°. Среди точек, в которых достигается $M = \max_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$, имеются точки перевала функции $S(z)$.

2°. $\operatorname{Re} S(z) < M$ на $\partial\gamma$.

Теорема 1.2. *Асимптотика при $\lambda \to +\infty$ интеграла* (1.1) *по перевальному контуру равна сумме вкладов от тех точек перевала, в которых достигается* $\max_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$.

Если γ — перевальный контур и те точки перевала, в которых достигается $\max_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$,— простые, то асимптотика $F(\lambda)$ вычисляется. Вклад от вырожденных точек перевала удается вычислить в явном виде только в некоторых частных случаях. Приведем примеры. Если z^0 — точка перевала, то

$$S(z) = S(z^0) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j(z) \tag{1.12}$$

при малых $|z - z^0|$, где S_j — однородный полином степени j от переменных $z - z^0$.

Пример 1.5. Пусть γ — вещественная окрестность точки $x^0 \in \mathbf{R}^n$, $\max_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в точке x^0, и пусть при вещественных x

$$S_j(x) = 0, \quad 2 \leqslant j \leqslant 2p-1; \qquad \operatorname{Re} S_{2p}(x) < 0, \quad x \neq x^0,$$

где $p \geqslant 2$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(x^0)]\, \lambda^{-n/2p} \times \\ \times \left[f(x^0) \int_{\mathbf{R}^n} \exp(S_{2p}(x))\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^{-k/p} \right]. \tag{1.13}$$

Доказательство точно такое же, как и в примере 2.4.3.

Пример 1.6. Пусть контур γ тот же, что и в примере 1.5, $\max_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S$ достигается только в точке x^0, и

пусть

$$S(x) = S(x^0) + S_{2p_1}(x^{(1)}) + S_{2p_2}(x^{(2)}) + \ldots$$
$$\ldots + S_{2p_k}(x^{(k)}) + S_{2p_{k+1}}(x) + \ldots$$

Здесь $x = (x^1, \ldots, x^{(k)})$, т. е. $x^{(1)} = (x_1, \ldots, x_{l_1})$, $x^{(2)} = (x_{l_1+1}, \ldots, x_{l_1+l_2}), \ldots, x^{(k)} = (x_{l_1+\ldots+l_{k-1}+1}, \ldots, x_n)$, $\operatorname{Re} S_{2p_j}(x^{(j)}) < 0$ при вещественных $x^{(j)} \neq x^0$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(x^0)]\,\lambda^{-(nq)/2}\left[a_0 f(x^0) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{-jr}\right], \quad (1.14)$$

где обозначено

$$q = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k}, \quad a_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\sum_{j=1}^{k} S_{2p_j}(x)\right] \quad (1.15)$$

и r — рациональное число, $r \geqslant 1$.

Для доказательства достаточно сделать замену переменных $x^{(j)} - x^{0(j)} = \lambda^{-1/2p_j} y^{(j)}$ в интеграле $F(\lambda)$ и затем провести те же рассуждения, что и в примере 2.4.3.

4. О вкладе от границы. Пусть $\max\limits_{z \in \gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в граничной точке контура $z^0 \in \partial\gamma$. При $n = 1$ асимптотика интеграла $F(\lambda)$ равна вкладу от точки z^0 и легко вычисляется (см. гл. IV, § 1). При $n \geqslant 2$ *асимптотика* $F(\lambda)$ в этом случае, *вообще говоря, не вычисляется* и, во всяком случае, не определяется точкой z^0.

Пусть для простоты γ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n_x$ с гладкой границей $\partial\gamma$. Можно свести интеграл по γ к интегралам по $\partial\gamma$ аналогично тому, как это было сделано в гл. III, § 4, тогда получим интегралы вида

$$\Phi(\lambda) = \int_{\partial\gamma} \exp[\lambda \tilde{S}(x)]\,\omega(x),$$

где ω — гладкая дифференциальная форма, $\tilde{S}(x)$ — сужение функции S на $\partial\gamma$. По условию $\max\limits_{x \in \partial\gamma} \operatorname{Re} S(x)$ достигается только в точке x^0. Но точка x^0 не является точкой перевала функции S, так как она является стационарной точкой функции $\operatorname{Re}\tilde{S}$, но не функции $\operatorname{Im}\tilde{S}$. Если $\nabla S(x^0) \neq 0$, то асимптотику интеграла $F(\lambda)$ мы не можем вычислить. Подтвердим эти соображения примером.

Пример 1.7. Пусть γ — круг $x^2+y^2\leqslant 1$ в вещественной плоскости (x, y),

$$F(\lambda)=\iint\limits_{\gamma}\exp[\lambda(x+iy)]\,dx\,dy.$$

Здесь $S=x+iy$, $\operatorname{Re}S$ достигает максимума на γ только в точке $(1,0)$. Имеем

$$F(\lambda)=\lambda^{-1}\int\limits_{-1}^{1}(\exp[\lambda S_+(y)]-\exp[\lambda S_-(y)])\,dy,$$

$$S_{\pm}(y)=iy\pm\sqrt{1-y^2}.$$

При этом $\max\limits_{y\in[-1,1]}\operatorname{Re}S_{\pm}(y)$ достигается только в точке $y=0$, которая не является точкой перевала и поэтому не дает вклада в асимптотику $F(\lambda)$ (лемма 4.1.4). Конечно, в данном конкретном случае асимптотика $F(\lambda)$ вычисляется, но она не выражается через значения фазы и ее производных в точке $x^0=(1,0)$.

5. **Малые возмущения.** Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda,\alpha)=\int\limits_{\gamma}f(z,\alpha)\exp[\lambda S(z,\alpha)]\,dz,\qquad(1.16)$$

где $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ — параметр, γ — гладкое многообразие в $\mathbf{C}^n$ с компактным замыканием (возможно, с краем). Пусть выполнены условия:

1°. Функции $f(z,\alpha)$, $S(z,\alpha)$ голоморфны при $(z,\alpha)\in U\times\Omega$, где U — окрестность контура γ, Ω — окрестность точки $\alpha^0\in\mathbf{C}^k$.

2°. Контур γ является перевальным при $\alpha=\alpha^0$.

3°. Все точки перевала $z^1,\ldots,z^s$ функции $S(z,\alpha^0)$, в которых достигается $\max\limits_{z\in\gamma}\operatorname{Re}S(z,\alpha^0)$, невырождены.

Из условия 3° следует, что при малых $|\alpha-\alpha^0|$ функция $S(z,\alpha)$ имеет точки перевала $z^1(\alpha),\ldots,z^s(\alpha)$ такие, что $z^j(\alpha^0)=z^j$, и все они невырождены.

Теорема 1.3. *Пусть условия* 1°—3° *выполнены. Тогда существует* $\delta>0$ *такое, что при* $|\alpha-\alpha^0|<\delta$, $\lambda\to+\infty$ *асимптотика интеграла* (1.16) *равна сумме вкладов от точек перевала* $z^1(\alpha),\ldots,z^s(\alpha)$.

Формулы для вкладов от точек $z^j(\alpha)$ имеют вид (1.10) с той лишь разницей, что S, a, зависят от α.

6. Интегралы с неаналитической фазой. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x) \exp[\lambda S(x)]\, dx. \qquad (1.17)$$

Пусть выполнены условия:

1°. $f(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

2°. $\max\limits_{x \in \mathbf{V}} \operatorname{Re} S(x) = \operatorname{Re} S(x^0)$, $S'_x(x^0) = 0$, и на $\operatorname{supp} f$ нет стационарных точек функции S, отличных от x^0.

3°. Точка x^0 невырождена, т. е. $\det S''_{xx}(x^0) \neq 0$. Покажем, что асимптотика интеграла (1.17) равна вкладу от точки x^0; *аналитичность функций* f, S в окрестности этой точки *не предполагается*.

Теорема 1.4. *Пусть условия* 1° — 3° *выполнены, тогда при* $\lambda \to +\infty$ *асимптотика интеграла* (1.17) *имеет вид* (1.9) — (1.11) *и в формуле* (1.10) *берется знак плюс.*

Пусть $x^0 = 0$, $S(x^0) = 0$ для простоты; можно считать, что U — малая окрестность точки x^0, так как $\operatorname{Re} S(x) \leqslant c < 0$ вне этой окрестности. Устроим разбиение единицы $1 = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, класса C^∞, где $\varphi_0(x) = 1$ при малых $|x|$ и $\varphi_0(x) = 0$ при $|x| > 1$. Фиксируем ε, $1/3 < \varepsilon < 1/2$, и положим

$$F_j(\lambda) = \int\limits_U \exp[\lambda S(x)]\, f(x)\, \varphi_j(\lambda^\varepsilon x)\, dx, \quad j = 0, 1,$$

так что $F(\lambda) = F_0(\lambda) + F_1(\lambda)$. Покажем, что

$$F_1(\lambda) = O(\lambda^{-\infty}) \quad (\lambda \to +\infty). \qquad (1.18)$$

Введем оператор

$$L = \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial S}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{-1} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}. \qquad (1.19)$$

Тогда $e^{\lambda S} = \lambda^{-1} L(e^{\lambda S})$, так что при любом целом $k \geqslant 0$

$$F_1(\lambda) = \lambda^{-k} \int\limits_U \exp[\lambda S(x)]\, {}^t L^k \left[f(x)\, \varphi_1(\lambda^\varepsilon x) \right] dx, \quad (1.20)$$

где ${}^t L$ — сопряженный с L оператор (напомним, что $f\varphi_1$ — финитная функция).

Покажем, что при $x \in U$

$$|{}^t L^k (f\varphi_1)| \leqslant C_k \lambda^{2\varepsilon k}. \qquad (1.21)$$

Имеем

$$ {}^tL(f\varphi_1) = \varphi_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}, $$
$$ a_j = -\overline{fS'_{x_j}}(x)\,|\nabla S(x)|^{-2}. $$

Так как $x = 0$ — единственная и притом невырожденная стационарная точка функции S, то

$$ |\nabla S(x)|^2 \geqslant C|x|^2, \quad S'_{x_j}(x) = O(|x|), $$
$$ D^{\alpha}S(x) = O(1) \quad (|\alpha| \geqslant 2) $$

при $x \in U$, если U достаточно мала. Следовательно,

$$ a_j(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \ \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_k} = O\left(|x|^{-2}\right), $$
$$ \frac{\partial \varphi_1(\lambda^{\varepsilon}x)}{\partial x_j} = O(\lambda^{\varepsilon}), \quad x \in U, $$

так что

$$ |{}^tL(f\varphi_1)| = O(|x|^{-2}) + O(\lambda^{\varepsilon}|x|^{-1}) = O(\lambda^{2\varepsilon}), \quad x \in U, $$

поскольку $|x| \geqslant C\lambda^{-\varepsilon}$ на $\operatorname{supp}\varphi_1(\lambda^{\varepsilon}x)$. Тем самым (1.21) доказано при $k = 1$. Аналогично исследуется случай $k > 1$; достаточно заметить, что при $x \in U$ имеют место оценки

$$ D_x^{\alpha}a_j(x) = O\left(|x|^{-1-|\alpha|}\right), $$
$$ D_x^{\alpha}\varphi_1(\lambda^{\varepsilon}x) = O\left(\lambda^{\varepsilon|\alpha|}\right), \quad |x| \geqslant C\lambda^{-\varepsilon}, $$

где $D^{\alpha} = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $\quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Из (1.20), (1.21) следует, что $F_1(\lambda) = O(\lambda^{k(2\varepsilon-1)})$ при любом целом k, и так как $\varepsilon < 1/2$, то (1.18) доказано.

Итак, остается исследовать интеграл $F_0(\lambda)$. Мы сведем его к интегралу с квадратичной фазовой функцией, разложив в ряд экспоненту

$$ \exp[\lambda S_1(x)] = \sum_{k=0}^{N} \frac{(\lambda S_1(x))^k}{k!} + O\left((\lambda S_1(x))^{N+1}\right). $$

Здесь $S_1(x) = S(x) - S_0(x)$, $S_0(x)$ — квадратичная форма с матрицей $\frac{1}{2}S''_{xx}(0) = A$. Из условий 2°, 3° следует, что $\operatorname{Re} S_0(x) \leqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Имеем $|x| = O(\lambda^{-\varepsilon})$ на $\operatorname{supp}\varphi_0$, и так как $S_1(x) = O(|x|^3)$, то $\lambda S_1(x) = O(\lambda^{1-3\varepsilon}) \to 0$

при $\lambda \to +\infty$ $(\varepsilon > 1/3)$. Следовательно,

$$\int\limits_U \exp[\lambda S_0(x)]\, O\big((\lambda S_1(x))^{N+1}\big)\, \varphi_0(\lambda^\varepsilon x)\, dx = O(\lambda^{-\alpha_N}),$$

$$\alpha_N = (N+1)(3\varepsilon - 1) + n\varepsilon$$

(напомним, что $\operatorname{Re} S_0(x) \leqslant 0$ при малых $|x|$). Так как $\alpha_N \to +\infty$ при $N \to \infty$, то интеграл $F_0(\lambda)$ с точностью до слагаемого, убывающего быстрее любой наперед заданной степени λ, равен сумме слагаемых вида

$$\tilde{F}_0(\lambda) = \int\limits_U \exp[\lambda S_0(x)]\, \varphi(x) \varphi(\lambda^\varepsilon x)\, dx,$$

где $\varphi \in C^\infty$ при малых $|x|$. Если $\varphi(x) = O(|x|^N)$, то $F_0(\lambda) = O(\lambda^{-(N+n)\varepsilon})$, поэтому с точностью до слагаемого, убывающего быстрее любой наперед заданной степени λ, функцию $\varphi(x)$ можно заменить отрезками ее ряда Тейлора по степеням x. Таким образом, достаточно исследовать интеграл вида

$$\tilde{F}_0(\lambda) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp[\lambda S_0(x)]\, x^\alpha \varphi_0(\lambda^\varepsilon x)\, dx,$$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_j \geqslant 0$ — целые числа). Делая замену $x \to \lambda^{-\varepsilon} x$, получаем

$$\tilde{F}_0(\lambda) = \lambda^{-\varepsilon(n+|\alpha|)} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp[\mu S_0(x)]\, x^\alpha \varphi_0(x)\, dx,$$

$$\mu = \lambda^{1-2\varepsilon},$$

так что остается вычислить асимптотику при $\mu \to +\infty$ интеграла вида

$$\Phi(\mu) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \exp[\mu S_0(x)]\, dx,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S_0(x)$ — невырожденная квадратичная форма, $\operatorname{Re} S_0(x) \leqslant 0$ при $x \in \mathbf{R}^n$. Применим равенство Парсеваля, тогда

$$\Phi(\mu) = c\mu^{-n/2} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \tilde{\varphi}(-\xi) \exp[\mu^{-1} \tilde{S}_0(\xi)]\, d\xi.$$

Здесь $\tilde{\varphi}$ — преобразование Фурье функции φ, $\tilde{S}_0(\xi) = \langle A^{-1}\xi, \xi\rangle$. Разлагая экспоненту по формуле Тейлора, получаем

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \widetilde{\varphi}(-\xi)\exp[\mu^{-1}\widetilde{S}_0(\xi)]\,d\xi = \\ = \sum_{k=0}^{N}\mu^{-k}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\widetilde{\varphi}(-\xi)\,\widetilde{S}_0^k(\xi)\,d\xi + R_N(\mu).$$

Остаточный член имеет вид

$$\mu^{-N-1}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\widetilde{\varphi}(-\xi)\,O(|\xi|^{2N+2})\,d\xi = O(\mu^{-N-1}),$$

так как $\mathrm{Re}\,\widetilde{S}_0(\xi) \leqslant 0$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Суммируя все выкладки, получаем для исходного интеграла разложение вида (1.9). Теорема доказана.

§ 2. Точки перевала полиномов и алгебраических функций. Теоремы существования

1. Элементарные сведения о комплексных и вещественных алгебраических множествах и об алгебраических отображениях. (Приведенные в этом пункте сведения содержатся в [3], [9], [29], [60].) Подмножество $V \subset \mathbf{C}^n$ называется *алгебраическим*, если оно задается конечным числом алгебраических (полиномиальных) уравнений

$$V = \{z \in \mathbf{C}^n : P_1(z) = 0, \ldots, P_k(z) = 0\},$$

где $P_j(z)$ — полиномы. Все пространство $\mathbf{C}^n$ и пустое множество являются алгебраическими множествами.

Критерий непустоты алгебраического множества в $\mathbf{CP}^n$. *Система однородных полиномиальных уравнений имеет нетривиальное решение.*

Иными словами, система уравнений

$$P_1(z) = 0, \ldots, P_k(z) = 0,$$

где $P_j(z)$ — однородный полином степени m_j, всегда имеет нетривиальное решение $z^0 \neq 0$.

Если система алгебраических уравнений состоит из однородных уравнений и z^0 — ее решение, то при любом $t \in \mathbf{C}$ точка tz^0 также является решением; множество $\{tz^0\}$, $t \in \mathbf{C}$, называется *прямой решений*.

Теорема Безу. *Пусть система $n-1$ однородных алгебраических уравнений с n неизвестными*

$$P_1(z) = 0, \ldots, P_{n-1}(z) = 0, \quad z \in \mathbf{C}^n,$$

имеет конечное число прямых решений. Тогда их число (с учетом кратности) равно произведению степеней уравнений.

Теорема Гильберта о корнях. *Пусть полином $P(z)$ обращается в нуль на алгебраическом множестве $V = \{z \in \mathbf{C}^n,$

$P_1(z) = 0, \ldots, P_k(z) = 0\}$. *Тогда существуют целое число* m *и полиномы* $Q_1(z), \ldots, Q_k(z)$ *такие, что*

$$P^m(z) = Q_1(z)P_1(z) + \ldots + Q_k(z)P_k(z).$$

Полином $P(z)$ называется *приводимым*, если его можно представить в виде $P(z) = P_1(z)P_2(z)$, где $P_j(z)$ — полиномы ненулевых степеней. В противном случае полином $P(z)$ называется *неприводимым*.

Всякий полином $P(z)$ может быть представлен в виде произведения неприводимых полиномов. Именно,

$$P(z) = P_1^{m_1}(z) \ldots P_k^{m_k}(z),$$

где $m_j \geqslant 1$ — целые числа, $P_j(z)$ — неприводимые полиномы ненулевых степеней, $P_j(z)/P_k(z) \not\equiv \text{const}$ при $j \neq k$. Это разложение единственно в следующем смысле: если имеется другое разложение

$$P(z) = Q_1^{n_1}(z) \ldots Q_l^{n_l}(z),$$

то $k = l$, и для каждого сомножителя $P_j(z)$ существует $l(j)$ такое, что $P_j(z) = \text{const}\, Q_{l(j)}(z)$, $m_j = n_{l(j)}$.

Отметим еще два алгебраических факта.

1°. Если полином $P(z) \not\equiv 0$ неприводим и полином $Q(z)$ обращается в нуль всюду, где $P(z) = 0$, то $Q(z)$ делится на $P(z)$.

2°. Пусть $n = 2$, P, Q — полиномы, и система

$$P(z_1, z_2) = 0; \quad Q(z_1, z_2) = 0$$

имеет бесконечно много решений. Тогда полиномы P, Q имеют общий множитель — полином $R(z_1, z_2) \not\equiv \text{const}$.

Введем в $\mathbf{C}^n$ *топологию Зариского*: *замкнутыми* множествами называются алгебраические множества. Объединение конечного числа и пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Замкнутое множество $V \in \mathbf{C}^n$ называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде $V = V_1 \cup V_2$, где V_j — непустые собственные замкнутые подмножества множества V. В противном случае множество V называется *приводимым*. Всякое замкнутое множество $V \subset \mathbf{C}^n$ единственным образом (с точностью до перестановки слагаемых) представимо в виде объединения конечного числа неприводимых замкнутых множеств: $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$.

Пусть $M \subset \mathbf{C}^n$ — произвольное множество. Его *замыканием в топологии Зариского* (обозначается $[M]_Z$) называется наименьшее замкнутое множество, содержащее M (или, что то же, пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих M).

Отображение $f\colon \mathbf{C}_z^n \to \mathbf{C}_w^m$ называется *алгебраическим*, если $w_j = f_j(z)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, где f_j — полиномы от z.

Образ алгебраического множества при алгебраическом отображении может не быть алгебраическим множеством. Пример: V — множество $z_1z_2 = 1$ в $\mathbf{C}^2$, $f(z_1, z_2) = z_1$ (проектирование на плоскость z_1). В этом случае $f(V)$ — комплексная плоскость z_1 с выколотой точкой $z_1 = 0$ (т. е. множество $z_1 \in \mathbf{C}$, $z_1 \neq 0$).

Имеется класс множеств, инвариантных относительно алгебраических отображений. Назовем *стратом* в $\mathbf{C}^n$ множество, задаваемое конечным числом полиномиальных равенств и неравенств:

$$P_1(z) = 0, \ldots, P_k(z) = 0, Q_1(z) \neq 0, \ldots, Q_l(z) \neq 0.$$

Множества, представимые в виде объединения конечного числа стратов, назовем *комплексными полуалгебраическими* множествами. Класс таких множеств замкнут относительно всех теоретико-множественных операций.

Теорема Шевалле. *Образ комплексного полуалгебраического множества при алгебраическом отображении является комплексным полуалгебраическим множеством.*

Пусть $P(z) = a_0z^m + a_1z^{m-1} + \ldots + a_m$ — полином, $z \in \mathbf{C}$, $a_0 \neq 0$. *Дискриминантом* D полинома P называется число $D = \prod_{j=1}^{m} P'(z_j)$, где z_j — корни полинома P (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Чтобы P имел кратный корень, необходимо и достаточно, чтобы $D = 0$. Далее, дискриминант D является полиномом от коэффициентов $a_0, \ldots, a_m$ полинома P.

Пусть $z \in \mathbf{C}$, $\zeta \in \mathbf{C}^n$ и $P(z, \zeta)$ — полином от переменных (z, ζ). Тогда дискриминант P, как полином от z, является полиномом $D(\zeta)$ от переменных ζ. Если полином P зависит от ζ и неприводим, то $D(\zeta) \not\equiv 0$.

Пусть $V \subset \mathbf{C}^n$ — неприводимое алгебраическое множество. Тогда V можно задать с помощью системы уравнений $P_1(z) = 0, \ldots, P_r(z) = 0$, где $P_j(z)$ — неприводимые полиномы и $P_j(z)/P_k(z) \not\equiv \mathrm{const}$ при $j \neq k$. *Размерностью* V (обозначается $\dim V$) называется число $r = 2 \max\limits_{z \in V} \operatorname{rank}(\partial P_j/\partial z_l)$. Точки V, в которых ранг матрицы Якоби равен r, называются *неособыми* точками. Размерностью произвольного алгебраического множества называется максимум из размерностей его неприводимых компонент. *Коразмерность* V ($\operatorname{codim} V$) определяется по формуле $\dim V + \operatorname{codim} V = 2n$.

Мы всюду используем *вещественную размерность*. Размерность комплексного алгебраического множества $V \subset \mathbf{C}^n$ равна, по определению, размерности его замыкания $[V]_Z$ в топологии Зариского.

Отметим несколько элементарных свойств комплексных алгебраических множеств.

3°. *Пусть алгебраическое множество $V \subset \mathbf{C}^n$ содержит комплексную или вещественную окрестность некоторой точки. Тогда $V = \mathbf{C}^n$.*

Под вещественной окрестностью точки $z^0 \in \mathbf{C}^n$ понимается множество вида $z = z^0 + x$, $x \in U$, где U — окрестность точки $x = 0$ в $\mathbf{R}^n_x$.

4°. *Пусть комплексное полуалгебраическое множество $V \subset \mathbf{C}^n$ обладает указанным в 3° свойством. Тогда $\mathbf{C}^n \setminus V$ содержится в собственном алгебраическом подмножестве в $\mathbf{C}^n$.*

5°. *Если алгебраическое множество $V \subset \mathbf{C}^n$ дискретно, то оно состоит из конечного числа точек.*

6°. *Если алгебраическое множество $V \subset \mathbf{C}^n$ содержит бесконечно много точек, то* $\dim V \geqslant 2$.

7°. *Ненульмерное непустое алгебраическое (комплексное полуалгебраическое) множество в $\mathbf{C}^n$ некомпактно (в обычной топологии).*

Приведем еще некоторые аналитические факты. Рассмотрим систему из n уравнений

$$f_1(z) = 0, \ldots, f_n(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где функции $f_j(z)$ голоморфны в области $U \subset \mathbb{C}^n$. Положим $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$. Пусть z^0 — *изолированное решение уравнения* $f(z) = 0$. *Кратностью* μ решения z^0 называется *степень отображения* $z \to f(z)/|f(z)|$ сферы достаточно малого радиуса с центром в точке z^0 в единичную сферу S^{n-1}. Число μ всегда является целым и положительным. Если $\det f'_z(z^0) \neq 0$, то $\mu = 1$.

Принцип Руше. *Пусть z^0 — изолированный нуль кратности μ вектор-функции $f(z)$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что уравнение*

$$f(z) = w$$

при $|w| < \varepsilon$ имеет ровно μ решений (с учетом их кратности), и все они лежат в шаре $|z - z^0| < \delta$.

Теорема Сарда. *Пусть M_1, M_2 — дифференцируемые многообразия одинаковой размерности со счетной базой и отображение $f: M_1 \to M_2$ принадлежит классу C^1. Тогда образ множества критических точек отображения f имеет в M_2 меру нуль.*

Критическая точка отображения — это точка, в которой якобиан вырожден.

Вещественное алгебраическое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ определяется так же, как и комплексное, т. е. $V = \{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = 0, \ldots, P_k(x) = 0\}$, где $P_j(x)$ — полиномы от x с вещественными коэффициентами.

Объединение конечного числа и пересечение любого числа вещественных алгебраических множеств являются вещественными алгебраическими множествами. Понятия проводимости полинома, размерности алгебраического множества, алгебраического отображения полностью переносятся на вещественный случай; утверждения 3°, 5° справедливы для вещественных алгебраических множеств.

Назовем *стратом* в $\mathbb{R}^n_x$ множество, которое задается конечным числом полиномиальных уравнений и неравенств:

$$P_1(x) = 0, \ldots, P_k(x) = 0, \quad Q_1(x) > 0, \ldots, Q_l(x) > 0.$$

Вещественным полуалгебраическим множеством называется объединение конечного числа стратов. Класс вещественных полуалгебраических множеств замкнут относительно всех теоретико-множественных операций.

Теорема Зайденберга — Тарского. *Образ вещественного полуалгебраического множества при вещественном алгебраическом отображении является вещественным полуалгебраическим множеством.*

Размерность вещественного полуалгебраического множества V можно определить, например, как максимум размерностей шаров, которые можно поместить в V.

Если $V \subset \mathbb{R}^n_x$ — собственное вещественное полуалгебраическое подмножество, то его граница ∂V содержится в некотором собственном алгебраическом подмножестве $\mathbb{R}^n_x$.

Вещественнозначная функция $\varphi(x)$ называется *кусочно-алгебраической*, если существует такой полином $P(\varphi, x)$ от (φ, x) с вещественными коэффициентами, что

$$P(\varphi(x), x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Кусочно-алгебраическая функция, определенная при всех $x \in \mathbf{R}^n$, бесконечно дифференцируема всюду в $\mathbf{R}^n$, за исключением, быть может, некоторого полуалгебраического множества коразмерности $\geqslant 1$.

Теорема Уитни. *Всякое вещественное алгебраическое множество V может быть представлено в виде конечного дизъюнктного объединения C^∞-многообразий: $V = \bigcup_{j=0}^{n} V_j$, $\dim V_j = j$. Каждое из многообразий V_j имеет конечное число компонент связности.*

Эта теорема верна, очевидно, и для комплексных алгебраических множеств.

2. Точки перевала алгебраических функций. Пусть $P(z)$ — полином степени $m \geqslant 2$, $z \in \mathbf{C}^n$. Его точки перевала определяются из уравнения $P'_z(z) = 0$. В одномерном случае любой полином степени $m \geqslant 2$ имеет ровно $(m-1)$ точек перевала (с учетом кратности). При $n \geqslant 2$ это не так. Именно, возможны следующие варианты:

1. Имеется конечное, не меньшее 1, число точек перевала.

Пример: $P(z_1, z_2) = z_1^m + z_2^m$.

2. Нет ни одной точки перевала.

Пример: $P(z_1, z_2) = z_1 + z_2^m$.

3. Имеется бесконечно много точек перевала.

Пример: $P(z) = (Q(z))^2$, где $Q \not\equiv \mathrm{const}$ — полином. Все точки, в которых $Q(z) = 0$, являются точками перевала полинома P.

Трудно указать сколь-нибудь общие критерии (в терминах коэффициентов полинома P), какой именно из этих вариантов реализуется. Мы несколько по-другому поставим задачу о структуре множества точек перевала.

Рассмотрим *градиентное отображение* P': $\mathbf{C}_z^n \to \mathbf{C}_w^n$, заданное формулой

$$w = P'_z(z). \tag{2.1}$$

Если рассматривать это соотношение как уравнение относительно z при фиксированном w, то его решения — точки перевала функции

$$S(z, w) = P(z) - \langle z, w\rangle, \tag{2.2}$$

как функции от z. Здесь $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j w_j$. Заметим, что преобразование Фурье функции $\exp(P(z))$ имеет S своей фазовой функцией.

Задача о разрешимости уравнения (2.1) эквивалентна задаче об описании образа $P'(\mathbf{C}^n)$ градиентного отображения. Далее, если уравнение (2.1) разрешимо при данном w^0, то задача о структуре множества точек перевала функции $S(z, w^0)$ — это задача о структуре слоя $(P')^{-1}w^0$ отображения P'. *Критическими точками* отображения P' являются точки, в которых $\det P''_{zz}(z) = 0$; им отвечают вырожденные точки перевала функции $S(z, w)$, где $w = P'_z(z)$.

Предложение 2.1. *Образ $P'(\mathbf{C}^n)$ градиентного отображения является комплексным полуалгебраическим множеством.*

Множество

$$\mathfrak{M} = [z \in \mathbf{C}^n,\ w \in \mathbf{C}^n\colon\ w - P'_z(z) = 0]$$

— алгебраическое. Множество $P'(\mathbf{C}^n)$ является проекцией множества $\mathfrak{M}$ на $\mathbf{C}^n_w$ и по теореме Шевалле является комплексным полуалгебраическим.

Отсюда немедленно вытекает, что возможны 2 варианта:

1) $P'(\mathbf{C}^n_z)$ совпадает с $\mathbf{C}^n_w$ с точностью до алгебраического множества коразмерности $\geqslant 2$;

2) $P'(\mathbf{C}^n_z)$ содержится в собственном алгебраическом подмножестве в $\mathbf{C}^n_w$.

Иными словами, уравнение (2.1) либо разрешимо при почти всех w, либо неразрешимо при почти всех w. Так как (2.1) — система из n уравнений с n неизвестными, то случай 2) реализуется только тогда, когда полином P в некотором смысле *вырожден*. Ниже (теорема 2.2) мы получим необходимые и достаточные условия, при которых для полинома P реализуются варианты 1), 2).

Предварительно рассмотрим более общую задачу, а именно, исследуем структуру множества точек перевала алгебраических функций.

Пусть

$$P(\zeta, z) = \sum_{j=0}^{k} P_j(z)\, \zeta^{k-j}, \quad k \geqslant 1, \tag{2.3}$$

где $P_j(z)$ — полиномы от $z \in \mathbb{C}^n$, $P_0(z) \neq 0$ и полином $P(\zeta, z)$ неприводим. Рассмотрим алгебраическую функцию $\zeta(z)$, заданную уравнением

$$P(\zeta, z) = 0, \tag{2.4}$$

и положим

$$S(z, w) = \zeta(z) - \langle z, w \rangle. \tag{2.5}$$

Точки перевала функции S (как функции от z при фиксированном w) определяются из уравнения $\zeta'_z(z) = w$. Точка перевала z называется *невырожденной*, если в этой точке

$$\det \zeta''_{zz}(z) \neq 0. \tag{2.6}$$

Сделаем несколько замечаний о свойствах алгебраической функции $\zeta(z)$. Пусть $D(z)$ — дискриминант полинома $P(\zeta, z)$, как полинома от ζ. Тогда $D(z) \neq 0$ в силу неприводимости полинома P. Если U — односвязная область в $\mathbb{C}^n_z$ и $D(z) \neq 0$ в U, то уравнение (2.4) определяет k функций $\zeta_1(z), \ldots, \zeta_k(z)$, голоморфных в области U (*ветви* алгебраической функции $\zeta(z)$), причем $\zeta_j(z) \neq \zeta_k(z)$ при $j \neq k$, $z \in U$. Для каждой из этих ветвей имеем

$$\zeta'_z = -\frac{P'_z}{P'_\zeta}, \quad \zeta''_{z_j z_k} = -\frac{P''_{\zeta\zeta} P'_{z_j} P'_{z_k}}{(P'_\zeta)^3} + \frac{P''_{\zeta z_k} P'_{z_j} + P''_{\zeta z_j} P'_{z_k}}{(P'_\zeta)^2}, \tag{2.7}$$

где все производные берутся в точке $(\zeta(z), z)$, а точки перевала функции S определяются из уравнения

$$w = -\frac{P'_z(\zeta, z)}{P'_\zeta(\zeta, z)}, \tag{2.8}$$

где ζ, z связаны уравнением (2.4). Таким образом, все точки ветвления функции $\zeta(z)$ содержатся в дискриминантном множестве $D = \{z \in \mathbb{C}^n\colon D(z) = 0\}$. Матрицу с элементами (2.7) обозначим $A(\zeta, z)$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{\zeta \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}^n\colon P(\zeta, z) = 0\}$ и введем отображение $\zeta'\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{C}^n_w$ по формуле (2.8). По построению точка w тогда и только тогда является точкой перевала $S(\zeta, w)$, когда $w \in \zeta'(\mathfrak{M})$. Критическими точками отображения ζ' являются те и только те точки $(\zeta, z) \in \mathfrak{M}$, в которых $\operatorname{rank} A(\zeta, z) < n$.

Теорема 2.1. *Пусть $P(\zeta, w)$ — неприводимый полином вида* (2.3), $P_0(z) \neq 0$, *и пусть выполнено условие*

$$\max_{(\zeta, z) \in \mathfrak{M}} \operatorname{rank} A(\zeta, z) = n.$$

Тогда существует такое алгебраическое множество $M_C \subset \mathbf{C}^n_w$ коразмерности не меньше 2, что:

1°. *При любом $w \notin M_C$ уравнение* (2.8) *имеет одно и то же конечное число $k \geqslant 1$ решений, и все они невырождены (т. е. выполняется* (2.6)).

2°. *Если $U \subset \mathbf{C}^n_w \setminus M_C$ — односвязная область, то уравнение* (2.8) *определяет k голоморфных в U функций $\zeta_1(w), \ldots, \zeta_k(w)$, причем*

$$\zeta_j(w) \neq \zeta_k(w) \quad (j \neq k,\ w \in U).$$

Отображение, вообще говоря, не определено на следующих алгебраических множествах в $\mathbf{C}^{n+1}_{\zeta,z}$:

$$M_1 = [(\zeta, z);\ P'_\zeta(\zeta, z) = 0], \quad M_2 = \{(\zeta, z):\ P_0(z) = 0\}.$$

Так как полином P неприводим и $P_0(z) \neq 0$, то множество $\mathfrak{M} \setminus (M_1 \cup M_2)$ непусто. Критические точки отображения ζ' содержатся в множестве $M_3 = \{(\zeta, z):\ \det A(\zeta, z) = 0\}$, и по условию множество $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M} \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$ непусто. Множество $\mathfrak{M}^*$ является комплексным полуалгебраическим, и по теореме Шевалле его образ $\zeta'(\mathfrak{M}^*)$ также является комплексным полуалгебраическим множеством. Пусть точка $(\zeta^0, z^0) \in \mathfrak{M}^*$, тогда существует функция $\zeta(z)$, удовлетворяющая уравнению (2.4), голоморфная при малых $|z - z^0|$ и такая, что $\zeta(z^0) = \zeta^0$, $\det \zeta''_{zz}(z^0) \neq 0$. Положим $w^0 = \zeta'_z(z^0)$, тогда по теореме об обратной функции уравнение $\zeta'_z(z) = w$ разрешимо при w, близких к w_0. Следовательно, множество $\zeta'(\mathfrak{M}^*)$ содержит окрестность точки w^0. Так как оно является комплексным полуалгебраическим, то существует алгебраическое множество $M_C \subset \mathbf{C}^n_w$ коразмерности $\geqslant 2$ такое, что

$$M_C \supset \mathbf{C}^n_w \setminus \zeta'(\mathfrak{M}^*).$$

Итак, уравнение (2.8) разрешимо при всех $w \notin M_C$. Фиксируем $w^0 \notin M_C$; тогда слой $(\zeta')^{-1} w^0$ дискретен, так как все точки перевала функции $S(z, w^0)$ невырождены и поэтому изолированы. Этот слой является комплексным полуалгебраическим множеством и потому состоит из конечного множества точек. Действительно, слой $(\zeta')^{-1} w^0$ состоит из точек $(\zeta, z) \in \mathbf{C}^{n+1}_{\zeta,z}$ таких, что

$$P'_\zeta(\zeta, z)\, w^0 + P'_z(\zeta, z) = 0, \quad P(\zeta, z) = 0,$$

$$P_0(z) \neq 0, \quad P'_\zeta(\zeta, z) \neq 0, \quad \det A(\zeta, z) \neq 0.$$

Покажем, что при $w \notin M_C$ число решений $k(w)$ уравнения (2.8) не зависит от w. Так как $\operatorname{codim} M_C \geqslant 2$, то множество $\mathbf{C}_w^n \setminus M_C$ связно. Пусть $w^0 \notin M_C$. Тогда, если точки w^1 достаточно близка к w^0, то $k(w^1) \geqslant k(w^0)$, так как в силу теоремы об обратной функции вблизи каждого решения уравнения $\zeta_z'(z) = w^0$ имеется решение уравнения $\zeta_z'(z) = w^1$. Аналогично, $k(w^1) \geqslant k(w^0)$, и в силу связности множества $\mathbf{C}_w^n \setminus M_C$ функция $k(w) = \mathrm{const}$. Тем самым утверждение 1° доказано; утверждение 2° вытекает из полученных выше результатов и того факта, что U не содержит образов критических точек отображения ζ'.

Следствие 2.1. *Пусть условия теоремы* 2.1 *выполнены,*

$$M_R = M_C \cap \mathbf{R}_u^n \quad (w = u + iv).$$

Тогда M_R есть вещественное алгебраическое множество коразмерности $\geqslant 1$. Если K — одна из связных компонент множества $\mathbf{R}_u^n \setminus M_R$, то функция $S(z, u)$ при любом вещественном $u \in K$ имеет конечное число $k \geqslant 1$ точек перевала, не зависящее от u, и все они невырождены.

Покажем, что $\operatorname{codim} M_R \geqslant 1$; остальные утверждения вытекают из теоремы 2.1 и ее доказательства. Если $\operatorname{codim} M_R = 0$, то $M_R = \mathbf{R}_u^n$; тогда $M_C \supset \mathbf{R}_u^n$, т. е. $M_C = \mathbf{C}_w^n$, что противоречит соотношению $\operatorname{codim} M_C \geqslant 2$.

Теорема 2.2. *Пусть $P(z)$ — полином или рациональная функция и*

$$\det P_{zz}''(z) \not\equiv 0. \tag{2.9}$$

Тогда все заключения теоремы 2.1 *и следствия* 2.1 *справедливы для уравнения* (2.1).

Для доказательства достаточно заметить, что в данном случае

$$P(\zeta, z) = \zeta - P(z); \quad A(\zeta, z) = P_{zz}''(z).$$

Выясним, насколько широким является класс полиномов данной степени m, удовлетворяющих условию (2.9), и к чему приводит нарушение этого условия.

Предложение 2.2. *Пусть $P(z)$ — такой полином, что*

$$\det P_{zz}''(z) \equiv 0. \tag{2.10}$$

Тогда $P'(\mathbf{C}_z^n)$ содержится в алгебраическом множестве коразмерности $\geqslant 2$.

В силу условия (2.10) все точки $z \in \mathbf{C}^n$ являются критическими для отображения P'. По теореме Сарда множество $P'(\mathbf{C}_z^n)$ имеет меру нуль, и поскольку оно является комплексным полуалгебраическим, то его коразмерность $\geqslant 2$.

Итак, если $P(z)$ удовлетворяет условию (2.10), то уравнение (2.1) неразрешимо при почти всех w. Достаточно очевидно, что таких полиномов «мало»; придадим точный смысл этому утверждению. Пусть $M(m, n)$ — множество всех полиномов степени $m \geqslant 2$ от n переменных: $P(z) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} p_\alpha z^\alpha$. Это множество изоморфно пространству $\mathbf{C}^{N(m, n)}$ размерности $N(m, n)$; каждому полиному P взаимно однозначно соответствует набор $\{p_\alpha\}$, $|\alpha| \leqslant m$, его коэффициентов. Положим $|P| = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} |p_\alpha|$.

Предложение 2.3. *Полиномы $P \in M(m, n)$, удовлетворяющие условию* (2.10), *содержатся в собственном алгебраическом подмножестве в пространстве коэффициентов $\mathbf{C}^{N(m, n)}$.*

Соотношение (2.10) определяет алгебраическое множество $\mathfrak{M}$ в пространство $\mathbf{C}^{N(m,n)} \times \mathbf{C}_z^n$. Его проекция $\mathfrak{M}^*$ на пространство $\mathbf{C}^{N(m, n)}$ является комплексным полуалгебраическим множеством. Полином $P_0(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j^m \notin \mathfrak{M}^*$. Если $P(z) \in M(m, n)$, $|P - P_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то полином $P \notin \mathfrak{M}^*$. Действительно, пусть $\det (P_0)''_{zz}(z^0) \neq 0$; тогда $\det P''_{zz}(z^0) \neq 0$ при $|P - P_0| < \varepsilon < 1$ в силу непрерывности. Следовательно, дополнение к $\mathfrak{M}^*$ в $\mathbf{C}^{N(m, n)}$ содержит шар, и потому $\operatorname{codim} \mathfrak{M}^* \geqslant 2$.

Тем самым доказано, что полиномы, удовлетворяющие условию (2.9), являются полиномами «общего положения».

3. Критерии конечности множества точек перевала. Рассмотрим полином

$$P(\zeta, z) = \zeta^k + \sum_{j=0}^{k-1} P_j(z) \zeta^j, \tag{2.11}$$

где $P_j(z)$ — полиномы от $z \in \mathbf{C}^n$, и алгебраическую функцию $\zeta(z)$, заданную уравнением (2.4). Точки перевала функции $S(z, w) = \zeta(z) - \langle z, w \rangle$ определяются из системы

$$P(\zeta, z) = 0, \quad P'_z(\zeta, z) - wP'_\zeta(\zeta, z) = 0. \tag{2.12}$$

Полином $P(\zeta, z)$ называется *q-однородным* (q — целое число), если полином $P(\zeta^q, z)$ — однородный по переменным (ζ, z). Нетрудно видеть, что в этом случае $P_j(z)$ — однородные полиномы степени jq и что для любого

$$P(t^q\zeta, tz) = t^{kq}P(\zeta, z). \qquad (2.13)$$

Теорема 2.3. *Пусть $P(\zeta, z)$ есть q-однородный полином вида* (2.11). *Тогда для того, чтобы функция $S(z, w)$ при любом $w \in \mathbb{C}^n$ имела конечное и ненулевое число решений, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\{P(\zeta, z) = 0, \quad P'_z(\zeta, z) = 0\} \Rightarrow \{\zeta = 0, z = 0\}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$P(\zeta^q, z) = 0, \quad P'_z(\zeta^q, z) - wt^{q-1}P'_\zeta(\zeta^q, z) = 0, \quad (2.12')$$

где $w \neq 0$ фиксировано, $t \in \mathbb{C}$. В силу q-однородности полинома P (2.12′) есть система однородных относительно переменных (t, ζ, z) уравнений и потому всегда имеет нетривиальное решение $(t^0, \zeta^0, z^0) \neq (0, 0, 0)$. Если условие (2.14) выполнено, то $t^0 \neq 0$, и система (2.12′) имеет решение вида $(1, \zeta^*, z^*)$, так что система (2.12) имеет решение $\left(\sqrt[q]{\zeta^*}, z^*\right)$. Итак, из условия (2.14) следует существование точек перевала функции $S(z, w)$ при любом $w \in \mathbb{C}^n$. Покажем, что из условия (2.14) вытекает конечность числа точек перевала при любом $w \neq 0$. При $w = 0$ это очевидно. Допустим, что при некотором $w \neq 0$ система (2.12) имеет бесконечно много решений. Множество $\mathfrak{M}$ этих решений является комплексным полуалгебраическим множеством и потому некомпактно в $\mathbb{C}^{n+1}_{\zeta, z}$. Из q-однородности полинома P следует, что $|\zeta(z)| \leqslant C|z|^q$ при всех z. Поэтому $\mathfrak{M}$ содержит последовательность точек (ζ^s, z^s), $s = 1, 2, \ldots$, такую, что $|z^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$P(\zeta^{0s}, z^{0s}) = 0,$$

$$P'_z(\zeta^{0s}, z^{0s}) - |z^s|^{-l+1}wP'_\zeta(\zeta^{0s}, z^{0s}) = 0,$$

где обозначено $z^{0s} = z^s/|z^s|$, $\zeta^{0s} = \zeta^s|z^s|^{-l}$. Тогда $|z^{0s}| = 1$, $|\zeta^{0s}| \leqslant C$ и последовательность (ζ^{0s}, z^{0s}) имеет предельную точку (ζ^*, z^*), $|z^*| = 1$. По непрерывности

$$P(\zeta^*, z^*) = 0, \quad P'_z(\zeta^*, z^*) = 0,$$

где $z^* \neq 0$, что противоречит условию (2.14).

Если условие (2.14) не выполняется, то система (2.12) при $w=0$ имеет решение $(\zeta^0, z^0) \neq (0, 0)$. При этом $z^0 \neq 0$ (в противном случае $P(\zeta^0, 0) = 0$, откуда $\zeta^0 = 0$). Следовательно, точка $(t^m\zeta^0, tz^0)$ является решением системы (2.12) при любом комплексном t, так что все точки $z = tz^0$, $t \in \mathbf{C}$, являются точками перевала функции $S(z, 0)$.

Итак, условие (2.14) необходимо для того, чтобы функция $S(z, w)$ при всех w имела не более конечного числа точек перевала.

Пусть система (2.12) неразрешима при некотором $w \neq 0$. Тогда вспомогательная система (2.12′) имеет нетривиальное решение (t^0, ζ^0, z^0), где $t^0 = 0$ (если $t^0 \neq 0$, то, как показано выше, система (2.12) разрешима). Следовательно, в точке $(\zeta^0, z^0) \neq (0, 0)$ условие (2.14) нарушается. Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Пусть $P(z)$ — однородный полином степени $m \geqslant 2$. Тогда для того, чтобы уравнение $P'_z(z) = w$ было разрешимо и имело конечное число решений при любом $w \in \mathbf{C}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\{P'_z(z) = 0\} \Rightarrow \{z = 0\}. \tag{2.15}$$

Кроме того, если условие (2.15) выполнено, то при любом $w \neq 0$ уравнение (2.1) имеет $(m-1)^n$ решений (с учетом их кратностей). Это следует из теоремы Безу.

Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть полином $P(\zeta, z) = \zeta - P(z)$ и убедиться в том, что условие (2.14) для $P(\zeta, z)$ эквивалентно условию (2.15) для $P(z)$. Отметим еще, что условие (2.15) эквивалентно неравенству

$$|P'_z(z)| \geqslant C|z|^{m-1}, \quad z \in \mathbf{C}^n. \tag{2.16}$$

Теорема 2.5. *Пусть $P(z)$ — полином степени $m \geqslant 2$, старшая однородная часть которого удовлетворяет условию (2.15). Тогда при любом $w \in \mathbf{C}^n$ уравнение (2.1) разрешимо и имеет конечное число решений.*

Положим $P(z) = P^0(z) + P^1(z)$, где P^0 — однородный полином степени m, P^1 — полином степени не выше $m-1$. Так как $|P'^0_z(z)| \geqslant C|z|^{m-1}$ при всех z по условию, то

$$|P'_z(z)| \geqslant C|z|^{m-1} - C'(1 + |z|)^{m-2},$$

так что $\lim\limits_{|z|\to\infty} |P'_z(z)| = \infty$. Поэтому множество

$$\omega_r = \{z: \ |P'_z(z)| = r\}$$

компактно при любом $r \geqslant 0$. Если уравнение (2.1) при некотором $w \in \mathbf{C}^n$ имеет бесконечно много решений, то множество $\{z \in \mathbf{C}^n: \ P'_z(z) = w\}$, будучи алгебраическим, некомпактно, и тем более некомпактно множество $\omega_{|w|}$. Следовательно, уравнение (2.1) при любом w имеет не более конечного числа решений.

Остается доказать разрешимость уравнения (2.1) при любом $w \in \mathbf{C}^n$. Из условия (2.15) и теоремы 2.2 следует, что $\det (P^0)''_z(z) \not\equiv 0$. Имеем

$$P''_{zz}(z) = |z|^{m-2}\left[(P^0)''_{zz}(z/|z|) + O(|z|^{-1})\right] \qquad (|z| \to \infty),$$

и так как $\det (P^0)''_{zz}(z) \neq 0$ на сфере $|z| = 1$, то $\det P''_{zz}(z) \not\equiv 0$. В силу теоремы 2.2 множество $P'(\mathbf{C}^n_z)$ совпадает с $\mathbf{C}^n_w$ с точностью до алгебраического множества коразмерности $\geqslant 2$. Поэтому для любого $w^0 \in \mathbf{C}^n$ существует последовательность (z^k, w^k), $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $P'_z(z^k) = w^k \to w^0$. Так как последовательность $|w^k|$ ограничена, то в силу компактности множеств ω_r (см. выше) последовательность $\{z^k\}$ ограничена. Следовательно, существует подпоследовательность $\{z^{*k}, w^{*k}\} \to (z^0, w^0)$; по непрерывности $P'_z(z^0) = w^0$.

Резюмируем полученные результаты, ограничившись уравнением (2.1), где $P(z)$ — полином степени $m \geqslant 2$.

1°. Если $\det P''_{zz}(z) \not\equiv 0$, то уравнение (2.1) при всех $w \notin M_C$ разрешимо, имеет конечное число решений, и все они невырождены. Здесь M_C — некоторое алгебраическое множество коразмерности $\geqslant 2$.

Полиномы P, удовлетворяющие условию (2.9), являются полиномами «общего положения» (см. предложение 2.2).

2°. Если старшая однородная часть полинома P удовлетворяет условию (2.15), то уравнение (2.1) при любом $w \in \mathbf{C}^n$ разрешимо и имеет конечное число решений.

Такие полиномы также являются полиномами «общего положения».

Предложение 2.4. *Полиномы степени $m \geqslant 2$, старшие однородные части которых не удовлетворяют ус-*

ловию (2.15), *содержатся в некотором собственном алгебраическом множестве в пространстве коэффициентов.*

Рассмотрим множество в $\mathbf{C}_P^{N(m,n)}\times\mathbf{C}_z^n$, заданное соотношениями $(P^0)'_z(z)=0$, $z\neq 0$. Его проекция на $\mathbf{C}_P^{N(m,n)}$ есть комплексное полуалгебраическое множество $\mathfrak{M}$, точками которого являются не удовлетворяющие условию (2.15) полиномы. Полином $P^0(z)=\sum\limits_{j=1}^{m} z_j^m \notin \mathfrak{M}$, и все близкие полиномы также удовлетворяют условию (2.15), что следует, например, из (2.16). Следовательно, дополнение к $\mathfrak{M}$ содержит шар, так что $\mathfrak{M}$ содержится в собственном алгебраическом подмножестве $\mathbf{C}_P^{N(m,n)}$.

В частности, полиномы, старшая однородная часть которых удовлетворяет условию (2.15), устойчивы относительно малых возмущений коэффициентов.

Пример 2.1. Полином $P(z)=\frac{1}{2m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} z_j^2\right)^m$, $m\geqslant 2$, удовлетворяет условию (2.9), но не удовлетворяет условию (2.15). Уравнение (2.1) не имеет решений тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2=0$, $w\neq 0$. Если $w=0$, то все точки гиперповерхности $\sum\limits_{j=1}^{n} z_j^2=0$ являются решениями уравнения (2.1). Если $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^2\neq 0$, то все точки перевала полинома $S(z, w)$ невырождены и имеют вид

$$z_j=\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^2\right)^{-1/(2m-1)} w_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n, \tag{2.17}$$

где ветвь корня одна и та же для всех j (т. е. всего имеется $2m-1$ точек перевала).

Пример 2.2. Полином

$$P(z)=\frac{1}{4}\left[(z_1^2+z_2^2-z_3^2)^2+Az_3^4\right],\quad A\neq 0,$$

удовлетворяет условию (2.9) и не удовлетворяет условию (2.15). Множество решений уравнения $P'_z(z)=0$ имеет вид $\{z\in\mathbf{C}^3\colon\ z_1^2+z_2^2=0,\ z_3=0\}$. Уравнение (2.1) не имеет решений тогда и только тогда, когда $w_1^2+w_2^2=0$, $w_3=0$, $w\neq 0$.

Пример 2.3. Полином $P(z)=\sum_{j=1}^{n} z_j^m$, $m\geqslant 2$, удовлетворяет условию (2.15). Функция $S(z, w)$ имеет вырожденные точки перевала тогда и только тогда, когда w принадлежит гиперповерхности $w_1 w_2 \ldots w_n = 0$.

Для однородных полиномов от двух переменных справедливо более сильное утверждение, чем теорема 2.2.

Теорема 2.6. *Пусть $P(z)$ — однородный полином от двух переменных степени $m\geqslant 2$. Тогда либо уравнение (2.1) при любом $w\neq 0$ имеет конечное (быть может, пустое) множество решений, либо*

$$P(z)=(a_1z_1+a_2z_2)^m, \tag{2.18}$$

где a_j — постоянные.

Рассмотрим уравнение (1.2), где $w=w^0\neq 0$. С помощью замены $z=Tz^*$, где T — невырожденная матрица, это уравнение можно привести к виду

$$P^{*\prime}_{z_1^*}(z^*)-1=0,\quad P^{*\prime}_{z_2^*}(z^*)=0. \tag{2.19}$$

Если $P^{*}_{z_2^*}(z^*)\equiv 0$, то $P^*(z^*)=cz_1^{*m}$, так что P имеет вид (2.18). Допустим, что $P^{*}_{z_2^*}(z^*)\not\equiv 0$ и что система (2.19) имеет бесконечно много решений. Тогда полиномы $P^{*\prime}_{z_1^*}-1$, $P^{*\prime}_{z_2^*}$ имеют общий делитель — полином $f(z^*)$; этот полином однородный, так как $P^{*\prime}_{z_2^*}$ — однородный полином. Следовательно,

$$P^{*\prime}_{z_1^*}(z^*)-1=f(z^*)\,g(z^*),$$

где g — некоторый полином. Полагая $z^*=0$, получаем, что $1=0$, и приходим к противоречию. Теорема доказана.

4. Малые возмущения. Установим связь между точками перевала полинома $P(z)$ и его старшей однородной части $P^0(z)$. Пусть $m\geqslant 2$,

$$P(z)=P^0(z)+P^1(z)+\ldots+P^m(z),$$

где P^j — однородный полином степени $m-j$. Положим

$$S_0(z, w)=P^0(z)-\langle z, w\rangle, \tag{2.20}$$

и пусть S^{2n-1} — единичная сфера $\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 = 1$ в $\mathbb{C}^n_w$. Так как полином P^0 однороден, то точки перевала $z(w)$ функции $S_0(z, w)$ являются однородными функциями степени $1/(m-1)$.

Пусть выполнено условие:

А. Все точки перевала функции $S_0(z, w^0)$ невырождены, где $|w^0| = 1$.

Тогда существует окрестность U точки w^0 на сфере S^{2n-1} такая, что при $w/|w| \in U$ функция $S_0(z, w)$ имеет одно и то же число точек перевала $z^{01}(w), \ldots, z^{0k}(w)$. Все они являются голоморфными функциями w при $w/|w| \in U$, $w \neq 0$, и однородными функциями w степени $1/(m-1)$.

Предложение 2.5. *Пусть условие А выполнено. Тогда существуют $\rho > 0$ и окрестность U_0 точки w^0 на единичной сфере S^{2n-1} в $\mathbb{C}^n_w$ такие, что при $w/|w| \in U_0$, $|w| > \rho$:*

1°. *Функция $S(z, w)$ имеет одно и то же число точек перевала $z^1(w), \ldots, z^k(w)$. Эти точки перевала невырождены и являются голоморфными функциями w.*

2°. *Справедливо разложение*

$$z^k(w) = z^{0k}(w) + \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}(w),$$

где $a_{kj}(w)$ — голоморфные и однородные функции степени $-j/(m-1)$.

Следствие 2.2. *Пусть условия предложения* 2.5 *выполнены, и полином $P^0(z)$ удовлетворяет условию* (2.15). *Тогда при $\rho \gg 1$ в достаточно малой окрестности U_0 все точки перевала функции $S(z, w)$ при $|w| \geqslant \rho$, $w/|w| \in U_0$, исчерпываются точками $z^j(w)$, $1 \leqslant j \leqslant k$.*

Замечание 2.1. Если P^0 не удовлетворяет условию (2.15), то следствие 2.2 не имеет места. Это означает, что функция $S(z, w)$ может иметь точки перевала, отличные от точек $z^j(w)$ (при $|w| \geqslant \rho \gg 1$, $w/|w| \in U_0$), даже если полином P^0 невырожден. Рассмотрим

Пример 2.4.

$$P(z_1, z_2) = \frac{1}{4}(z_1^2 + z_2^2)^2 + \frac{1}{2} z_1^2, \quad w = (\rho, 0), \quad \rho > 0,$$

так что $w^0 = (1, 0)$. Функция $S_0(z, w^0)$ имеет 3 точки перевала z^{0j}: $z_1^3 = 1$, $z_2 = 0$, и все они невырождены.

Функция $S(z, w^0)$ имеет 3 точки перевала

$$z^s(\rho):\ z_2 = 0,\quad z_1^3 + z_1 = \rho,\quad s = 1, 2, 3,$$

которые обладают указанными в предложении 2.5 свойствами, и еще 2 точки перевала: $z^{4,5}(\rho) = \rho(1, \pm i)$. Заметим, что $|z^s(\rho)| \sim C\rho^{1/3}$, $s = 1, 2, 3$, $|z^s(\rho)| \sim C\rho$, $s = 4, 5$, при $\rho \to \infty$, так что точки $z^{4,5}(\rho)$ быстрее уходят на бесконечность, чем точки $z^{1,2,3}(\rho)$. Кроме того, точки $z^{4,5}(\rho)$ расположены на многообразии $z_1^2 + z_2^2 = 0$ нулей полинома P^0.

Рассмотрим вопрос о поведении точек перевала при малом изменении коэффициентов полинома. Пусть для простоты P — однородный полином степени m, $P_\varepsilon(z) = P(z) + \varepsilon Q(z)$, где Q — полином степени $\leqslant m$. Нас интересует поведение решений $z(\varepsilon)$ уравнения

$$(P_\varepsilon)_z'(z) = w,\quad w \neq 0, \tag{2.21}$$

при фиксированном w и при $\varepsilon \to 0$. Из теоремы 2.5 следует, что если P удовлетворяет условию (2.15), то корни возмущенного уравнения (2.1) стремятся к корням невозмущенного уравнения (2.1) при $\varepsilon \to 0$. В противном случае это не так.

Пример 2.5. Пусть $P(z)$ — полином из примера 2.1, $Q(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j^{2m}$. Тогда полином $P_\varepsilon(z)$ при $\varepsilon \neq 0$ удовлетворяет условию (2.15). Пусть $\sum_{j=1}^{n} w_j^2 \neq 0$. Тогда уравнение (2.1) имеет $2m - 1$ решений (см. пример 2.1), и все они простые; уравнение (2.21) имеет $(2m-1)^n$ решений (с учетом их кратностей) $z^j(\varepsilon)$. Из них $(2m-1)^n - (2m-1)$ стремятся к бесконечности.

Можно показать, что справедливо

Предложение 2.6. *При $\varepsilon \to +0$ решение возмущенного уравнения (2.21) либо стремится к решению невозмущенного уравнения, либо уходит на бесконечность.*

В частности, если уравнение (2.1) неразрешимо, то все решения возмущенного уравнения уходят на бесконечность при $\varepsilon \to +0$.

5. Теоремы существования. Мы покажем, что асимптотика интеграла вида (1.1) при $\lambda \to +\infty$ в случае, когда $S(z)$ — полином, удовлетворяющий некоторым достаточно общим условиям, равна сумме вкладов от точек перевала. При доказательстве используются методы теории Морса, причем приходится иметь дело с некомпактными в $\mathbf{C}^n$ многообразиями.

Напомним, что *линии наибыстрейшего спуска* функции $\operatorname{Re} P(z)$ являются фазовыми траекториями системы (1.7). Будем предполагать, что эти траектории лежат в области голоморфности функции P.

Лемма 2.1. 1°. *Функция* $\operatorname{Im} P(z)$ *является первым интегралом системы* (1.7).

2°. *Если* $z(t)$ — *решение системы* (1.7), *то при* $t > 0$

$$\operatorname{Re} P(z(t)) - \operatorname{Re} P(z(0)) \leqslant -t \min_{0<\tau<t} |P'_z(z(\tau))|^2. \qquad (2.22)$$

Имеем

$$\frac{dP(z(t))}{dt} = -|P'_z(z(t))|^2,$$

так что $\frac{d}{dt} \operatorname{Im} P(z(t)) \equiv 0$. Далее,

$$P(z(t)) - P(z(0)) = -\int_0^t |P'_z(z(t'))|^2 dt' = \\ = \operatorname{Re} P(z(t)) - \operatorname{Re} P(z(0)),$$

откуда следует (2.22).

Лемма 2.2. *Пусть* $M_{a,b}$ — *максимальная связная компонента множества* $\{a \leqslant \operatorname{Re} P(z) \leqslant b\}$, *функция* $P(z)$ *голоморфна при* $z \in M_{a,b}$ *и*

$$|P'_z(z)| \geqslant C > 0, \quad z \in M_{a,b}. \qquad (2.23)$$

Тогда $H_n(M_{a,b}, \{\operatorname{Re} P = a\}) \approx 0$.

Фиксируем точку $z^0 \in M_{a,b}$, $a \leqslant \operatorname{Re} P(z^0) \leqslant b$, и пусть $z(t, z^0)$ — решение системы (1.7) с данными Коши $z(0) = z^0$. В силу оценки (2.22) соответствующая фазовая траектория придет на границу $\{\operatorname{Re} P = a\}$ множества $M_{a,b}$ за время $t(z^0) \leqslant t_* = (b-a)C^{-2}$. Если $\gamma \in M_{a,b}$ есть относительный цикл $\operatorname{mod} \{\operatorname{Re} P = a\}$ и $\partial\gamma$ содержится в множестве $\{\operatorname{Re} P = a\}$, то можно продеформировать γ в цепь $\gamma' \subset \{\operatorname{Re} P = a\}$, сдвигая каждую точку γ вдоль фазовой траектории.

Лемма 2.3. *Пусть условия леммы* 2.2 *выполнены с той лишь разницей, что функция* $P(z)$ *имеет при* $z \in M_{a,b}$ *конечное число* k *точек перевала, все они невырождены,* $\operatorname{Re} P(z) > a$ *в этих точках и* (2.23) *выполняется* *вне окрестностей этих точек. Тогда*

$$H_n(M_{a,b}, \{\operatorname{Re} P = a\}) \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z} \ (k \text{ раз}). \quad (2.24)$$

Рассмотрим вначале случай, когда в $M_{a,b}$ имеется ровно одна точка перевала z^0, $\operatorname{Re} P(z^0) = C$, где $a < C < b$. Пусть $\gamma \subset M_{a,b}$ есть n-мерный относительный цикл $\operatorname{mod}\{\operatorname{Re} P = a\}$. В силу леммы 2.2 $\gamma \approx \gamma' \operatorname{mod}\{\operatorname{Re} P = a\}$, где $\gamma' \subset M_{a,C} = \{a \leqslant \operatorname{Re} P \leqslant C\} \cap M_{a,b}$. Пусть U — достаточно малая окрестность точки z^0, $\tilde{U} = M_{a,C} \cap U$. Если γ' не пересекается с $\tilde{U}$, то $\gamma' \approx 0 \operatorname{mod}\{\operatorname{Re} P = a\}$ в множестве $M_{a,C}$, что вытекает из доказательства леммы 2.2. Следовательно, $H_n(M_{a,C}, \{\operatorname{Re} P = a\}) \approx H_n^U(C - \varepsilon \leqslant \leqslant \operatorname{Re} P < C, \operatorname{Re} P = C - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Последняя группа гомологий изоморфна $\mathbf{Z}$ (см. лемму 1.3), и ее образующей является исчезающий цикл.

Пусть $P(z)$ имеет k точек перевала $z^1, \ldots, z^k$, $\operatorname{Re} P(z^j) = C_j$, и пусть C_j различны: $a < C_1 < C_2 < \ldots \ldots < C_k < b$. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы было $C_1 + \varepsilon < C_2$, $C_2 + \varepsilon < C_3$, ..., и рассмотрим множества

$$B_j = \{C_{j-1} + \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} P < C_j + \varepsilon\}, \quad j = 2, \ldots, k-1,$$
$$B_1 = \{\operatorname{Re} P < C_1 + \varepsilon\},$$

лежащие в $M_{a,b}$. По доказанному выше $H_n(B_j, \operatorname{Re} P = = C_j - \varepsilon) \approx \mathbf{Z}$, и образующей этой группы является исчезающий цикл γ_j, выходящий из точки перевала z^j (см. лемму 1.3). Продолжим эти циклы γ_j до пересечения с $\{\operatorname{Re} P = a\}$ и обозначим полученные циклы $\operatorname{mod}\{\operatorname{Re} P = a\}$ снова γ_j. Тогда всякий цикл $\gamma \operatorname{mod}\{\operatorname{Re} P = a\}$ гомологичен линейной комбинации $n_1\gamma_1 + \ldots + n_k\gamma_k$ с целочисленными коэффициентами. Можно показать, как это делается в теории Морса, что эти циклы $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ гомологически независимы. Их независимость следует также из того факта, что

$$\lambda^{n/2} \int_{\gamma_j} \exp[\lambda P(z)]\, dz \sim a_j \exp[\lambda P(z^j)],$$

где $a_j \neq 0$ — постоянные. Действительно, интегралы по γ_j имеют экспоненциальные асимптотики, и экспоненты растут с разной скоростью при $\lambda \to \infty$.

Аналогично исследуется случай, когда среди чисел C_j есть равные.

Следствие 2.3. *В условиях леммы 2.3 базис группы гомологий $H_n(M_{a,b}, \operatorname{Re} P = a)$ состоит из циклов γ_j та-*

ких, что γ_j совпадает в окрестности точки перевала z^j с каноническим исчезающим циклом.

Замечание 2.2. Если среди точек перевала z^j есть вырожденные, то

$$H_n(M_{a,b}, \operatorname{Re} P = a) \approx$$
$$\approx H_n^{U_1}(C_1 - \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} P \leqslant C_1,\ \operatorname{Re} P = C_1 - \varepsilon) \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus H_n^{U_k}(C_k - \varepsilon \leqslant \operatorname{Re} P \leqslant C_k,\ \operatorname{Re} P = C_k - \varepsilon), \quad (2.25)$$

где $C_j = \operatorname{Re} P(z^j)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число и U^j — достаточно малая окрестность точки z^j. Этот факт доказывается так же, как и лемма 2.3. Размерность j-й группы из правой части (2.25) называется n-мерным *типовым числом* точки z^j.

Применим полученные результаты к асимптотике интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_\gamma f(z) \exp[\lambda S(z)]\, dz, \qquad (2.26)$$

где γ — компактное n-мерное многообразие с краем в $\mathbf{C}^n$.

Теорема 2.7. *Пусть функция $P(z)$ удовлетворяет условиям 2.3, функция $f(z)$ голоморфна при $z \in M_{a,b}$ и $\operatorname{Re} P(z) = a$ на $\partial\gamma$. Тогда либо асимптотика $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ равна сумме вкладов от некоторых из точек перевала $z^1, \ldots, z^k$, либо $F(\lambda) = O(e^{a\lambda})$.*

Имеем

$$\gamma \approx n_1\gamma_1 + \ldots + n_k\gamma_k \mod \{\operatorname{Re} P = a\},$$

где n_j — целые числа. Асимптотика интеграла (2.26) по циклу γ_j равна вкладу от точки перевала z^j, и теорема доказана, если не все числа n_j равны нулю. Если же все n_j равны нулю, то γ можно продеформировать в контур γ', на котором $\operatorname{Re} P(z) = a$, так что $|F(\lambda)| \leqslant \leqslant Ce^{a\lambda} (\lambda > 0)$.

Применим эту теорему к интегралу вида (2.26) по $\mathbf{R}^n$ в случае, когда $P(z)$ — полином.

Теорема 2.8. *Пусть $P(z)$ — полином степени $m \geqslant 2$, удовлетворяющий условиям:*

1°. *Старшая однородная часть $P^0(z)$ этого полинома удовлетворяет условию* (2.15).

2°. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\operatorname{Re} P(x) \leqslant -C(1 + |x|)^m, \quad x \in \mathbf{R}^n. \qquad (2.27)$$

Тогда асимптотика интеграла

$$F(\lambda) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp[\lambda P(x)]\,dx \tag{2.28}$$

при $\lambda \to +\infty$ равна сумме вкладов от точек перевала.

В силу условия 1° и теоремы 2.4 полином P имеет конечное число точек перевала $z^1, \ldots, z^k$. Пусть

$$a = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \operatorname{Re} P(z^j), \quad b = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \operatorname{Re} P(z^j).$$

Положим $\gamma = \{\operatorname{Re} P \leqslant a - 1\} \cap \mathbf{R}^n_x$, $\tilde{\gamma} = \mathbf{R}^n_x \setminus \gamma$. Из (2.27) следует, что интеграл по $\tilde{\gamma}$ имеет порядок $O(\exp(\lambda(a-1)))$ $(\lambda \to +\infty)$. Далее, γ есть относительный цикл $\operatorname{mod}\{\operatorname{Re} P = a - 1\}$ в множестве $M_{a-1,\,b+1} = \{a - 1 \leqslant \operatorname{Re} P \leqslant b + 1\}$; пусть M^0 — одна из максимальных связных компонент этого множества, $\gamma^0 = M^0 \cap \gamma$. Проверим, что P удовлетворяет условиям леммы 2.3; тогда теорема будет доказана. Имеем $P(z) = P^0(z) + P^1(z)$, где P^0 — однородный полином степени m, P^1 — полином степени $\leqslant m - 1$. В силу (2.16) имеем

$$|P_z'(z)| \geqslant |(P^0)_z'(z)| - |(P^1)_z'(z)| \geqslant C|z|^m - C_1(1 + |z|)^{m-1},$$

так что $|P_z'(z)| \geqslant C'|z|^m$, $C' > 0$, при больших $|z|$.

Замечание 2.3. Вместо $\mathbf{R}^n$ в (2.28) можно взять бесконечный контур γ, диффеоморфный $\mathbf{R}^n$ и имеющий структуру типа n-плоскости или конуса на бесконечности.

§ 3. Асимптотика фундаментальных решений корректных по Петровскому уравнений

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + P(D)\,u(t, x) = 0, \tag{3.1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $t > 0$, $D = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Уравнение (3.1) называется *корректным по Петровскому*, если

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}^n} (-\operatorname{Re} P(\xi)) < \infty.$$

Фундаментальным решением задачи Коши для уравнения (3.1) (*или функцией Грина*) называется функция

$G(t, x)$, удовлетворяющая уравнению (3.1) и данным Коши

$$G|_{t=0} = \delta(x). \tag{3.2}$$

Здесь $\delta(x)$ есть δ-функция Дирака. Тем же способом, что и в гл. IV, § 7, получаем интегральное представление

$$G(t, x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp[-tP(\xi) + i\langle x, \xi\rangle]\, d\xi, \tag{3.3}$$

где интеграл понимается в смысле обобщенных функций. Нас интересует асимптотическое поведение $G(t, x)$ при фиксированном $t > 0$, $|x| \to 0$. Асимптотику интеграла (3.3) будем исследовать с помощью метода перевала.

2. Параболические уравнения. Оценки функции Грина. Уравнение (3.1) называется *параболическим*, если

$$\operatorname{Re} P^0(\xi) > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \neq 0, \tag{3.4}$$

где $P^0(\xi)$ — старшая однородная часть полинома P. Такие полиномы называются *параболическими*. Степень параболического полинома четна.

Введем класс $\mathcal{P}(2m, n)$ однородных параболических полиномов степени $2m$, $m \geqslant 1$, от n переменных. Если $P \in \mathcal{P}(2m, n)$, то в силу однородности

$$G(t, x) = t^{-n/2m} G(1, xt^{-1/2m}). \tag{3.5}$$

Далее предполагается, что $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, так как при $m = 1$ интеграл (3.3) берется; в частности, функция Грина уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

имеет вид

$$G(t, x) = \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),$$

так что $G(1, x)$ в данном примере экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$. Известно, что функция Грина параболического уравнения допускает оценку

$$|G(1, x)| \leqslant C_1 \exp(-C_2 |x|^{2m/(2m-1)}), \quad C_j > 0,$$

т. е. экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$.

Нас интересует асимптотика $G(1, x)$ при $|x| \to \infty$. Введем обозначения

$$\zeta = \xi + i\eta, \ \xi, \ \eta \in \mathbb{R}^n; \quad S(\zeta, w) = -P(\zeta) + \langle \xi, w\rangle. \tag{3.6}$$

Результаты пп. 2—6 принадлежат С. Г. Гиндикину и автору [59], [60], [61].

Наиболее трудным при применении метода перевала является вопрос об отборе точек перевала, дающих основной вклад в асимптотику. Из общих соображений (лемма 1.2) вытекает, что асимптотика интеграла $G(1, x)$ дается теми точками перевала, в которых достигается минимакс

$$\min_{\gamma\in\{\gamma\}} \max_{\zeta\in\gamma} \operatorname{Re} S(\zeta, ix) \tag{3.7}$$

(если он существует). Здесь $\{\gamma\}$ — множество всех контуров γ, эквивалентных $\mathbf{R}^n$, т. е. таких, что

$$G(1, x) = (2\pi)^{-n} \int_\gamma \exp(S(\zeta, ix))\, d\zeta \tag{3.8}$$

при всех $x\in\mathbf{R}^n$. Семейство $\{\gamma\}$ контуров, эквивалентных γ, трудно обозримо. Рассмотрим подмножество этого семейства, состоящее из сдвигов $\mathbf{R}^n$ на векторы вида $i\eta$, $\eta\in\mathbf{R}^n$, т. е. семейство n-плоскостей $\zeta = \xi + i\eta$, $\xi\in\mathbf{R}^n$, η фиксировано. Введем функцию

$$\nu(\eta) = \min_{\xi\in\mathbf{R}^n} \operatorname{Re} P(\xi + i\eta); \tag{3.9}$$

тогда минимакс (3.7) примет вид

$$\min_{\eta\in\mathbf{R}^n} (-\nu(\eta) - \langle x, \eta\rangle) = \mu(x), \tag{3.7'}$$

а точки, в которых достигается минимум (3.7′), определяются из уравнения

$$\nu'_\eta(\eta) = -x. \tag{3.10}$$

Эти соображения приводят к следующему *правилу отбора точек перевала* (доказательства приведены ниже). Пусть $\nu\in C^1(\mathbf{R}^n)$, тогда находим $\eta=\eta(x)$ из уравнения (3.10) и затем на n-плоскости $\eta=\eta(x)$ находим точки, в которых достигается $\max(-\operatorname{Re} P(\xi + i\eta(x)))$. Это точки и будут точками перевала функции $S(\zeta, ix)$, а n-плоскость $\eta = \eta(x)$ будет перевальным контуром. Однако если $\nu\notin C^1(\mathbf{R}^n)$, то этот метод не позволяет найти нужные точки перевала для всех направлений в $\mathbf{R}^n_x$.

Установим некоторые свойства функции ν и получим оценки для $|G(1, x)|$.

Теорема 3.1. *Пусть $P(\xi)\in\mathcal{P}(2m, n)$. Тогда функция $\nu(\eta)$:*

1°. *Выпукла кверху.*

2°. *Однородна степени $2m$ и удовлетворяет оценкам*

$$-C_1|\eta|^{2m}\leqslant\nu(\eta)\leqslant -C_2|\eta|^{2m},\quad C_{1,2}>0, \tag{3.11}$$

при $\eta\in\mathbf{R}^n$.

3°. *Кусочно-алгебраическая и бесконечно дифференцируема всюду в $\mathbf{R}^n_\eta$, за исключением, быть может, алгебраического множества коразмерности $\geqslant 1$.*

Функция $R_h(\xi,\ \eta)=\operatorname{Re}P(\xi+h+i\eta)$ является плюригармонической при любом $h\in\mathbf{R}^n$. Так как $\nu(\eta)=\min\limits_{h\in\mathbf{R}^n}R_h(\xi,\ \eta)$, то $\nu(\eta)$ — плюрисупергармоническая функция от $(\xi,\ \eta)$. Функция $\nu(\eta)$ выпукла кверху, поскольку $\nu(\eta)$ не зависит от ξ ([11]). Однородность функции $\nu(\eta)$ следует из однородности полинома $P(\xi)$. Чтобы доказать (3.11), достаточно показать, что $\nu(\eta)<0$ при $\eta\neq 0$. Выберем $a\in\mathbf{R}$ такое, что $(a+i)^{2m}=-b<0$. Так как $P(a\eta+i\eta)=-bP(\eta)$, то при $\eta\neq 0$ имеем

$$\nu(\eta)\leqslant\operatorname{Re}P(a\eta+i\eta)=-b\operatorname{Re}P(\eta)<0.$$

Тем самым утверждения 1°, 2° доказаны.

Докажем 3°. Рассмотрим алгебраическое множество $M\subset\mathbf{R}^n_\xi\times\mathbf{R}^n_\eta\times\mathbf{R}^1_\nu$, заданное уравнением $\nu=-\operatorname{Re}P(\xi+i\eta)$, и пусть N — проекция M на $\mathbf{R}^n_\eta\times\mathbf{R}^1_\nu$. Из определения функции ν следует, что $N=\{(\nu,\ \eta):\ \nu\leqslant\nu(\eta)\}$. По теореме Зайденберга — Тарского множество N является полуалгебраическим, так что его граница $\partial N=\{(\nu,\eta):\ \nu=\nu(\eta)\}$ содержится в некотором собственном алгебраическом подмножестве $\mathbf{R}^{n+1}_{\eta,\nu}$. Можно считать, что это множество задается одним полиномиальным уравнением $f(\nu,\ \eta)=0$, так что $\nu(\eta)$ — кусочно-алгебраическая функция. Следовательно (см. § 2, п. 1), существует алгебраическое множество $V\subset\mathbf{R}^n_\eta$ коразмерности $\geqslant 1$ такое, что $\nu\in C^\infty(\mathbf{R}^n_\eta\setminus V)$.

Лемма 3.1. *Пусть $P(\zeta)\in\mathcal{P}(2m, n)$, тогда существуют постоянные C_1, $C_2>0$ такие, что*

$$\operatorname{Re}P(\xi+i\eta)-\nu(\eta)\geqslant C_1|\xi|^{2m} \tag{3.12}$$

при $|\xi|\geqslant C_2|\eta|$.

Имеем

$$\operatorname{Re} P(\xi + i\eta) = \operatorname{Re} P(\xi, 0) + \sum_{|\alpha|=1}^{2m} \frac{1}{\alpha!} Q_\alpha(\xi)\eta^\alpha,$$

$$Q_\alpha(\xi) = \partial_\eta^\alpha \operatorname{Re} P(\xi + i\eta)|_{\eta=0}.$$

Так как $P \in \mathscr{P}(2m, n)$, то

$$\operatorname{Re} P(\xi, 0) \geqslant c|\xi|^{2m}, \quad c > 0,$$

$Q_\alpha(\xi)$ — однородные полиномы степени $2m - |\alpha|$, и при $|\xi| \geqslant c'|\eta|$ имеем

$$\operatorname{Re} P(\xi + i\eta) \geqslant \left(c - \sum_{|\alpha|=1}^{2m} \frac{1}{\alpha!} c_\alpha (c')^{-|\alpha|}\right)|\xi|^{2m},$$

где c_α не зависят от ξ. Если $c' \gg 1$, то

$$\operatorname{Re} P(\xi + i\eta) \geqslant c_1|\xi|^{2m} > 0, \quad \xi \neq 0.$$

Так как $\nu(\eta) \leqslant 0$, то (3.14) доказано.

Пусть $\mu(x)$ — функция, определенная в (3.7'). Функции $\mu(x)$, $\nu(-\eta)$ двойственны по Юнгу.

Лемма 3.2. 1°. *Функция $\mu(x)$ выпукла кверху.*

2°. *Функция $\mu(x)$ однородна степени $2m/(2m-1)$, и при всех $x \in \mathbf{R}^n$*

$$-C_1|x|^{2m/(2m-1)} \leqslant \mu(x) \leqslant -C_2|x|^{2m/(2m-1)}, \tag{3.13}$$

где $C_{1,2} > 0$ — постоянные.

3°. *Пусть $\mathrm{H}(x)$ — точка, в которой достигается минимум (3.7'). Тогда существует такая постоянная $c > 0$, что*

$$|\mathrm{H}(x)| \leqslant C|x|^{1/(2m-1)}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.14}$$

для всех таких $\mathrm{H}(x)$.

Утверждения 1°, 2° вытекают из свойств двойственных по Юнгу функций и из однородности ν. Докажем 3°: в силу однородности μ достаточно показать, что $\sup\limits_{|x|=1}|\mathrm{H}(x)| < \infty$. Допустим противное; тогда существует последовательность $\{x^j\}$, $|x^j| = 1$, $\lim\limits_{j\to\infty} x^j = x^0$, $\lim\limits_{j\to\infty}|\mathrm{H}(x^j)| = \infty$, откуда следует, что

$$\mu(x^0) = \lim_{j\to\infty}(-\nu(\mathrm{H}(x^j)) - \langle x^j, \mathrm{H}(x^j)\rangle) = \infty,$$

так как $-\nu(\eta)$ при $|\eta| \to \infty$ растет как $|\eta|^{2m}$. Полученное противоречие доказывает (3.14).

Теорема 3.2. *Пусть* $P \in \mathcal{P}(2m, n)$, *тогда*

$$|G(t, x)| \leqslant C_1 \exp\left[t\mu\left(\frac{x}{t}\right)\right]\left[C_2\left|\frac{x}{t}\right|^{n/(2m-1)} + C_3 t^{-n/m}\right]. \quad (3.15)$$

В частности, при всяком $\delta > 0$

$$|G(t, x)| \leqslant C(\delta) \exp\left[t\mu\left(\frac{x}{t}\right)\right]\left|\frac{x}{t}\right|^{n/(2m-1)} (|x|^{2m} t^{-1} > \delta). \quad (3.16)$$

Заменим в (3.3) интеграл по $\mathbf{R}^n_\xi$ интегралом по n-плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, η фиксировано. Тогда

$$|G(t, x)| \leqslant (2\pi)^{-n} \exp[-t\nu(\eta) - \langle x, \eta\rangle] \times$$
$$\times \int_{\mathbf{R}^n} \exp[t(\nu(\eta) - \operatorname{Re} P(\xi + i\eta))]\, d\xi$$

при любом $\eta \in \mathbf{R}^n$. Пусть $I(t, \eta)$ — последний интеграл; представим его в виде $I_1 + I_2$, где I_1 — интеграл по множеству $|\xi| \leqslant S_2|\eta|$, и C_2 — то же, что и в лемме 3.1. Тогда

$$I_1 \leqslant \int_{|\xi| < C_2|\eta|} d\xi \leqslant C_3 |\eta|^n,$$

так как подынтегральная функция в интеграле I_1 не превосходит 1. Далее, в силу (3.12) имеем

$$I_2 \leqslant \int_{|\xi| > C_2|\eta|} \exp(-C_1 t |\xi|^{2m})\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-C_1 t |\xi|^{2m})\, d\xi = C_4 t^{-n/(2m)}.$$

Окончательно получаем, что

$$|G(t, x)| \leqslant C \exp[-t\nu(\eta) - \langle x, \eta\rangle](C_3|\eta|^n + C_4 t^{-n/2m})$$

при любом $\eta \in \mathbf{R}^n$. Полагая $\eta = \mathrm{H}(x/t)$, где точка $\mathrm{H}(x)$ дает минимум $-\nu(\eta) - \langle x, \eta\rangle$, и учитывая (3.14), получаем (3.15). Чтобы получить (3.16) из (3.15), достаточно заметить, что при $|x|^{2m}/t > \delta$ второй член в квадратных скобках из (3.15) оценивается через первый.

Из (3.16) следует, что функция $G(1, x)$ экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$.

3. Параболические уравнения. Асимптотика функции Грина при вещественных $\boldsymbol{x}$.

Лемма 3.3. *Пусть* $P \in \mathcal{P}(2m, n)$, *функция* $\nu(\eta) \in C^1$ *в окрестности точки* η^0. *Тогда все точки n-плоскости*

$\eta = \eta^0$, *в которых достигается* $\max\limits_{\xi \in \mathbf{R}^n} (-\operatorname{Re} P(\xi + i\eta^0))$, *являются точками перевала функции* $S(\zeta, ix^0)$, *где* $x^0 = -v'_\eta(\eta^0)$.

Пусть Γ — множество всех точек на n-плоскости $\eta = \eta^0$, в которых достигается $\max(-\operatorname{Re} P)$. Имеем

$$\operatorname{Re} P'_\xi(\xi + i\eta^0) = 0, \quad \xi \in \Gamma.$$

Пусть $l \in \mathbf{R}^n$, $|l| = 1$, тогда имеет место формула

$$\frac{\partial v(\eta^0)}{\partial l} = \max_{\xi \in \Gamma} \left(-\langle R'_\eta(\xi, \eta^0), l\rangle\right),$$

где $\partial/\partial l$ — производная по направлению l. Так как $v \in C^1$ в окрестности точки η^0, то $\dfrac{\partial v(\eta^0)}{\partial l} = -\dfrac{\partial v(\eta^0)}{\partial(-l)}$, так что

$$\min_{\xi \in \Gamma} \langle \operatorname{Re} P'_\eta(\xi + i\eta^0), l\rangle = \max_{\xi \in \Gamma} \langle \operatorname{Re} P'_\eta(\xi + i\eta^0), l\rangle.$$

Следовательно, $\langle \operatorname{Re} P'_\eta(\xi + i\eta^0), l\rangle \equiv \mathrm{const}$ на Γ, и так как это верно для любого единичного вектора l, то $\operatorname{Re} P'_\eta(\xi + i\eta^0) \equiv \mathrm{const}$ на Γ. Следовательно, $v'_\eta(\eta^0) = -\operatorname{Re} P'_\eta(\xi + i\eta^0)$ при $\xi \in \Gamma$. Так как

$$\operatorname{Re} S(\zeta, ix^0) = -\operatorname{Re} P(\xi + i\eta) - \langle \eta, x^0\rangle,$$

то при $x^0 = -v'_\eta(\eta^0)$ в точке $\zeta^0 = \xi^0 + i\eta^0$ имеем $\operatorname{Re} S'_\xi = 0$, $\operatorname{Re} S'_\eta = 0$. Из условий Коши — Римана вытекает, что $S'_\zeta(\zeta^0, ix^0) = 0$.

Отметим, что n-плоскость $\eta = \eta^0$ является, в условиях леммы 3.3, перевальным контуром для функции $S(\zeta, ix^0)$.

Лемма 3.4. *Если* $P \in \mathscr{P}(2m, n)$, *то* $\det P''_{\zeta\zeta}(\zeta) \not\equiv 0$.

Достаточно показать, что $\operatorname{Re} P''_{\xi\xi}(\xi^0) > 0$ в некоторой точке $\xi^0 \in \mathbf{R}^n$ (т. е. матрица положительно определена). Тогда $\det P''_{\zeta\zeta}(\zeta^0) \neq 0$. Действительно, если A, B — вещественные симметрические матрицы и $A > 0$, то $\det(A + iB) \neq 0$.

Положим (здесь $\xi \in \mathbf{R}^n$)

$$a = \max_{|\xi| = 1} \operatorname{Re} P(\xi)(|\xi|^2)^{-m},$$

$$f(\xi) = \operatorname{Re} P(\xi), \quad g(\xi) = a|\xi^2|^m,$$

и пусть ξ^0 — точка, в которой достигается максимум.

Функция $g(\xi)$ строго выпукла при $\xi \neq 0$, т. е. $g''_{\xi\xi}(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$. Далее,

$$f(\xi^0) = g(\xi^0), \quad f'_\xi(\xi^0) = g'_\xi(\xi^0), \quad f(\xi) \geqslant g(\xi) \quad (\xi \in \mathbf{R}^n),$$

так что

$$f(\xi) - f(\xi^0) - \langle f'_\xi(\xi^0), \xi - \xi^0 \rangle \geqslant a\,|\xi - \xi^0|^2, \quad a > 0,$$

при малых $|\xi - \xi^0|$, так что $f''_{\xi\xi}(\xi^0) > 0$. Лемма доказана.

Точки перевала интеграла $G(1, x)$ определяются из уравнения

$$P'_\zeta(\zeta) = ix. \tag{3.17}$$

Отметим один важный частный случай.

Лемма 3.5. *Пусть коэффициенты полинома $P \in \mathcal{P}(2m, n)$ вещественны. Тогда уравнение (3.17) разрешимо при любом вещественном x, и если $\zeta(x)$ — точка перевала, то $-\overline{\zeta(x)}$ также является точкой перевала.*

В силу однородности полинома P множество $\nabla_P = \{\xi \in \mathbf{R}^n\colon |\xi| = 1\}$ является компактным C^∞-многообразием размерности $n-1$, звездным относительно начала координат. Следовательно, нормаль к ∇_P может иметь любое направление. Так как нормаль в точке $\xi^0 \in \nabla_P$ и вектор $P'_\xi(\xi^0)$ параллельны, то уравнение $P'_\xi(\xi) = x$ имеет решение $\xi(x) \in \mathbf{R}^n$ при любом $x \in \mathbf{R}^n$. В силу однородности P точки $\sqrt[2m-1]{i}\,\xi(x)$ являются решениями уравнения (3.17). Пусть $\xi(x)$ — решение уравнения (3.17), тогда в силу вещественности и однородности P имеем $P'_\zeta(-\bar{\zeta}(x)) = -\overline{P'_\zeta(\zeta(x))} = ix$.

В силу леммы 3.4 и теоремы 2.2 существуют такие алгебраические множества $M_C \subset \mathbf{C}^n_x$, $M_R \subset R^n_x$ коразмерности $\geqslant 2$, $\geqslant 1$ соответственно, что при $x \notin M_C$, $x \notin M_R$ функция $S(\zeta, ix)$ имеет конечное (ненулевое) число точек перевала и все они невырождены. Однако при $x \in M_C$ (или при $x \in M_R$) функция S может иметь вырожденные точки перевала, может иметь бесконечно много точек перевала и может вовсе не иметь точек перевала (см. примеры 2.1, 2.2). В этих случаях мы не умеем (за очень редкими исключениями) вычислять асимптотику $G(1, x)$, даже если известно, какие точки перевала дают основной вклад в асимптотику.

Приступим к формулировке основной теоремы. Пусть $M_R \subset \mathbf{R}^n_x$ — указанное выше исключительное алгебраическое множество, тогда

$$\mathbf{R}_x^n \setminus M_R = \bigcup_{j=1}^{N} \mathfrak{M}_j,$$

где $\mathfrak{M}_j$ — связные непересекающиеся открытые множества. Все они в силу однородности P являются конусами с вершиной в точке $x = 0$. Уравнение (3.17) при каждом $x \in \mathfrak{M}_j$ имеет одно и то же число k_j решений $\zeta^{j1}(x), \ldots, \zeta^{jk_j}(x)$ на n-плоскости $\eta = \mathrm{H}(x)$, и все эти точки перевала невырождены. Положим $\mathfrak{M}_j^0 = \mathfrak{M}_j \cap S^{n-1}$, где S^{n-1} — единичная сфера $|x| = 1$ в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 3.3. *Пусть* $\nu(\eta) \in C^1(\mathbf{R}^n)$. *Тогда при* $x/t \in \mathfrak{M}_j$, $|x|^{2m}/t \to +\infty$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$G(t, x) = \sum_{s=1}^{k_j} G_{js}(t, x), \tag{3.18}$$

$$G_{js}(t, x) \sim (2\pi)^{-n/2} |x|^{-n(m-1)/2(2m-1)} t^{-n/2(2m-1)} \times$$
$$\times \left[\det P''_{\zeta\zeta}\left(\zeta^{js}\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)\right]^{-1/2} \exp\left[i\left(1 - \frac{1}{2m}\right) t \left\langle x, \zeta^{js}\left(\frac{x}{t}\right)\right\rangle\right] \times$$
$$\times \left[1 + \sum_{q=1}^{\infty} a_{jsq}\left(\frac{x}{|x|}\right)\left(\frac{t}{|x|^{2m}}\right)^{q/(2m-1)}\right]. \tag{3.19}$$

Здесь функции $a_{jsq} \in C^\infty$ *при* $x \in \mathfrak{M}_j$, *это разложение равномерно по* $\omega = x/|x| \in \mathscr{K}_j^0$, *где* $\mathscr{K}_j^0 \subset \mathfrak{M}_j$ — *произвольный компакт. Разложение* (3.18) *можно дифференцировать по* t, x *любое число раз.*

Выбор ветви корня в (3.19) следующий:

$$\arg\left[\det P''_{\zeta\zeta}(\zeta^{js}(x^0))\right]^{-1/2} = -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} \arg\left(-\lambda_r^{js}(x^0)\right), \qquad \left|\arg\left(-\lambda_r^{js}(x^0)\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{3.20}$$

где $\lambda_r^{js}(x^0)$ — собственные значения матрицы $P''_{\zeta\zeta}(\zeta^{js}(x^0))$.

Заменим в интеграле (3.3) контур интегрирования n-плоскостью $\zeta = \xi + i\eta(x/t)$ и в полученном интеграле сделаем замену $\xi \to (|x|/t)^{1/(2m-1)}\xi$. Тогда

$$G(t, x) = (2\pi)^{-n}(|x|/t)^{n/(2m-1)} I(\lambda, \omega),$$
$$I = \int_{\mathbf{R}_\xi^n} \exp[\lambda f(\xi, \omega)]\, d\xi, \tag{3.21}$$

где обозначено

$$f(\xi, \omega) = -P(\xi + i\mathrm{H}(\omega)) + i\langle\omega, \xi + i\mathrm{H}(\omega)\rangle,$$
$$\omega = \frac{x}{|x|}, \quad \lambda = \left(\frac{|x|^{2m}}{t}\right)^{1/(2m-1)}. \tag{3.22}$$

Большим параметром является λ. Функция $f(\xi, \omega)$ при каждом фиксированном $\omega \in \mathfrak{M}_j^0$ имеет одно и то же число вещественных точек перевала $\xi^{js}(\omega)$, $1 \leqslant s \leqslant k_j$, где $\xi^{js}(\omega) + i\mathrm{H}(\omega) = \zeta^{js}(\omega)$, и все они невырождены. В силу леммы 3.2 существуют C_1, $C_2 > 0$ такие, что $\mathrm{Re}\, f(\xi, \omega) \leqslant -\nu(\eta) - C_1|\xi|^{2m}$ при $|\xi| \geqslant C_2|\eta|$. Пусть $\mathcal{K}_j^0 \subset \mathfrak{M}_j^0$ — компакт, тогда $|\mathrm{H}(\omega)| \geqslant C_3 > 0$ при $\omega \in \mathcal{K}_j^0$. Имеем

$$\left|\int\limits_{|\xi| \geqslant C_2|\mathrm{H}(\omega)|} \exp[\lambda f(\xi, \omega)]\, d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \exp(-\lambda\nu(\eta)) \int\limits_{|\xi| \geqslant C_2C_3} \exp(-\lambda|\xi|^{2m})\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \exp(-\lambda\nu(\eta) - C\lambda), \quad C > 0,$$

так что этот интеграл экспоненциально мал по сравнению с $\exp(-\lambda\nu(\eta))$. Интеграл от функции $\exp[\lambda f(\xi, \omega)]$ по области $|\xi| \leqslant C_2|\mathrm{H}(\omega)|$ в силу теоремы 1.2 равен сумме вкладов от точек перевала $\zeta^{js}(\omega)$. Заметим, что в силу однородности P и формулы Эйлера

$$2mP(\zeta) = \langle P'_\zeta(\zeta), \zeta\rangle,$$

в точке перевала $\zeta^{js}(\omega)$ имеем

$$f(\xi, \omega) = i\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\langle\xi, \omega\rangle.$$

Вычисляя вклады (см. (1.9), (1.10)), получаем (3.19).

Следствие 3.1. *Пусть функция $\nu(\eta) \in C^1$ в окрестности точки $\eta^0 \neq 0$, точка $x^0 = -\nu'_\eta(\eta^0)$ принадлежит одному из конусов $\mathfrak{M}_j$. Тогда разложение* (3.18), (3.19) *имеет место при $|x|^{2m}/t \to \infty$, $x \in \mathcal{K} = \{x\colon x = \rho\omega,\ 0 < \rho < \infty,\ \omega \in U\}$, где U — достаточно малая окрестность точки $\omega^0 = x^0/|x^0|$ на единичной сфере $|x| = 1$.*

Замечание 3.1. Главный член асимптотики имеет вид (при $x \in \mathfrak{M}_j$)

$$G(1, x) = |x|^{-\frac{n(m-1)}{2(2m-1)}} e^{\mu(x)} \left[\sum_{s=1}^{k_j} A_{sj} \exp\left(iB_{sj} |x|^{\frac{2m}{2m-1}}\right) + O\left(|x|^{-\frac{1}{2m-1}}\right)\right], \quad (3.23)$$

где A_{sj}, B_{sj} — постоянные, B_{sj} вещественны. В частности, если P — вещественный полином, то (см. лемму 3.4) k_j четно и слагаемые в (3.23) входят парами:

$$A_{sj} \exp\left(iB_{sj} |x|^{\frac{2m}{2m-1}}\right) + \text{(комплексно сопряженная величина)}.$$

В этом случае $G(1, x)$ имеет на каждом луче $x = \rho x^0$, $0 < \rho < \infty$, $x^0 \in \mathfrak{M}_j^0$, бесконечно много нулей.

Обсудим вопрос об эффективности правила отбора точек перевала, построенного в лемме 3.3. Очевидно, что оно непригодно, если $\nu \notin C^1(\mathbf{R}^n)$. Такие функции ν должны существовать: функция $\nu(\eta)$ — кусочно-алгебраическая, т. е. она «склеена» из различных гладких ветвей алгебраических функций, и в местах склейки может не быть гладкой.

1°. Если $\nu \in C^1(\mathbf{R}^n)$, то этот метод позволяет вычислить асимптотику $G(1, x)$ при $|x| \to \infty$, $x \notin M_n$.

2°. Существует открытое множество полной размерности (в пространстве коэффициентов) полиномов $P \in \mathscr{P}(2m, n)$, для которых $\nu \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Далее, если $P \in \mathscr{P}(2m, n)$ и удовлетворяет условию (2.15), или если $n = 2$, то получаем асимптотику $G(1, x)$ на множестве полной размерности в $\mathbf{R}_x^n$.

3°. Существуют такие полиномы $P \in \mathscr{P}(2m, n)$, что функция $\nu \notin C^1(\mathbf{R}^n)$ (т. е. ее график $\nu = \nu(\eta)$, $\eta \in \mathbf{R}^n$ имеет *угловые точки*). В частности, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то функция ν, отвечающая полиному

$$P(z_1, z_2) = (z_1^2 + z_2^2)^2 + i\varepsilon z_1^3 z_2,$$

не принадлежит $C^1(\mathbf{R}^2)$ (см. [59]). Полиномы с негладкими ν также содержат открытое множество в $\mathscr{P}(2m, n)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 3.1. Пусть $G(1, x)$ — фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(-1)^m}{2m}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^m u.$$

Здесь $P(\zeta) = 1/2m\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \zeta_j^2\right)^m$; точки перевала функции $S(\zeta, ix)$ вычислены в примере 2.1. В данном случае минимум (3.9) достигается в точках $\xi = \pm\eta\sin\frac{\pi}{2(2m-1)}$, функция ν равна

$$\nu(\eta) = -\frac{|\eta|^{2m}}{2m}\left[\sin\frac{\pi}{2(2m-1)}\right]^{1-2m}.$$

Асимптотика $G(1, x)$ при $|x| \to \infty$ равна сумме вкладов от точек перевала $\zeta(x)$, $-\bar{\zeta}(x)$, где

$$\zeta(x) = e^{i\omega_0}\xi(x), \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2(2m-1)}, \quad \xi(x) = x\cdot|x|^{-\frac{2m-2}{2m-1}},$$

так что

$$G(1, x) =$$
$$= 2(2\pi)^{-n/2}\left[\det P''_{\zeta\zeta}(\zeta(x))\right]^{-1/2}\exp\left[-(2m-1)P(\xi(x))\sin\omega_0\right]\times$$
$$\times\left[\cos(P(\xi(x))\cos\omega_0 + o(1))\right].$$

В работе [63] доказано, что если $P(\zeta)$ — сильно выпуклый полином с вещественными коэффициентами, то минимум (3.9) достигается при всех x в тех же самых точках, функция $\nu(\eta) = -\left(\sin\frac{\pi}{2(2m-1)}\right)^{1-2m} P(\eta)$ и асимптотика $G(1, x)$ при $|x| \to \infty$ равна сумме вкладов от двух точек перевала.

Пример 3.2. $P_\alpha(\zeta) = \frac{1}{2m} e^{i\alpha}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \zeta_j^2\right)^m$, $\alpha > 0$. Если $\alpha > 0$ достаточно мало, то $P_\alpha \in \mathcal{P}(2m, n)$, и минимум (3.9) достигается только в точке $\xi^*(\eta) = \eta\operatorname{ctg}\omega_0$, $\omega_0 = \frac{\pi/2-\alpha}{2m-1}$. Асимптотика $G(1, x)$ при $|x| \to \infty$ равна вкладу от точки перевала $\zeta^\alpha(x) = e^{i\omega_0}\xi(x)$ ($\xi(x)$ см. в примере 3.1) и имеет вид

$$G(1, x) = (2\pi)^{-n/2}\left[\det P''_{\zeta\zeta}(\zeta^\alpha(x))\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\left[(2m-1)P(\zeta^\alpha(x))\right][1 + o(1)].$$

Если α фиксировано и полином $P(\zeta)$ достаточно близок к полиному $P_\alpha(\zeta)$, то минимум (3.9) достигается при всех η в точке $\xi(\eta)$, близкой к точке $\xi^\alpha(\eta)$, и асимптотика $G(1, x)$ при $|x| \to \infty$ равна вкладу от точки перевала, близкой к точке $\zeta^\alpha(x)$.

Перенесем полученные в теореме 3.3 результаты на неоднородные параболические полиномы. Пусть

$$P(\zeta) = P^0(\zeta) + P^1(\zeta) + \ldots + P^{2m}(\zeta),$$

где P^j — однородный полином степени $2m - j$, $P^0 \in \mathcal{P}(2m, n)$, и положим $S^0(\zeta, ix) = -P^0(\zeta) + i\langle x, \zeta\rangle$. Пусть M_q, $\mathfrak{M}_j$, $\mathfrak{M}_j^0$ — множества, отвечающие полиному P^0, и ν^0 — функция, построенная по P^0. В силу предложения 2.5 точки перевала функции S при $x \in \mathfrak{M}^j$, $|x| \gg 1$, близки к точкам перевала функции S^0; обозначим их ζ^{0js}, ζ^{js} соответственно.

Предложение 3.1. *Пусть P — неоднородный параболический полином степени $2m$, функция $\nu^0 \in C^1(\mathbf{R}^n)$. Тогда при $|x|^{2m}/t \to \infty$, $t/|x| < \delta$, $x/t \in \mathfrak{M}_j$ и при $\delta > 0$ достаточно малом справедливо асимптотическое разложение* (3.18), *где*

$$G_{js}(t, x) =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} |x|^{-\frac{n(m-1)}{2(2m-1)}} t^{-\frac{n}{2(2m-1)}} \left[\det P''_{\zeta\zeta}(\zeta^{0js}(x/|x|))\right]^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left[-tP(\zeta^{js}(x/t)) + i\langle\zeta^{js}(x/t), x\rangle\right](1 + Q_{js}),$$

$$Q_{js} \sim 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (t|x|^{-2m})^{l/(2m-1)} a_{jsl}((t|x|^{-1})^{1/(2m-1)}), \quad (3.24)$$

и функции $a_{jsl}(\varepsilon)$ — аналитические функции ε при малых $|\varepsilon|$.

Разложение (3.18) *можно дифференцировать по t, x любое число раз.*

Следствие 3.1 *также остается в силе.*

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.3. Именно, деформируем контур интегрирования в n-плоскость $\eta = \mathrm{H}(x/t)$, показываем, что интеграл по множеству $|\xi| \geqslant C|\mathrm{H}(x/t)| \times \times (|x|/t)^{1/(2m+1)}$, лежащему в этой n-плоскости, экспоненциально мал по сравнению с $\exp(-A(|x|^{2m}/t)^{1/(2m-1)})$ при любом $A > 0$, если $C \gg 1$, и применяем теорему 1.2 к оставшемуся интегралу.

4. Корректные по Петровскому уравнения с чисто мнимой и дефинитной старшей частью. Пусть $P^0(\xi)$ (старшая однородная часть полинома P) есть полином с чисто мнимыми коэффициентами и полином $P^0(\xi)$ *дефинитен*:

$$P^0(\xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}. \tag{3.25}$$

Тогда $P^0(\xi)$ — полином четной степени $2m \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{K}^+(2m, n)$ — класс всех таких полиномов степени $2m$ от n переменных.

Типичным примером служит уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u.$$

В этом примере функция Грина имеет вид

$$G(t, x) = 2^{-n}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{i\,|x|^2}{4t}\right),$$

так что при $|x| \to \infty$, $t > 0$ фиксированном функция Грина сильно осциллирует, но не убывает экспоненциально.

Интеграл (3.3) не является абсолютно сходящимся, если $P \in \mathcal{K}^+(2m, n)$, и его необходимо регуляризовать. Будем рассматривать $G(t, x)$ при фиксированном $t > 0$ как функционал под пространством $K(\mathbf{R}_x^n)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций. Преобразование Фурье переводит K в пространство $Z(R_\xi^n)$. Если $\psi \in Z$, то $\psi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}_x^n)$ и аналитически продолжается на все комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ как целая функция первого порядка роста и конечного типа ([12]). Пусть F — преобразование Фурье $(x \to \xi)$, тогда $G(t, x) = F^{-1}(\exp(-tP(\xi)))$. Применяя равенство Парсеваля и переходя к полярным координатам, получаем

$$(G(t, x), \varphi(x)) = (2\pi)^{-n}(\exp(-tP(\xi), \psi(-\xi))),$$

где $\varphi \in K(\mathbf{R}^n)$, $\psi \in Z(\mathbf{R}^n)$, так что

$$(G, \varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}_\xi^n} \exp(-tP(\xi))\, \psi(-\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{S^{n-1}} \left(\int\limits_0^\infty \exp(-tr^{2m}P(\theta))\, \psi(-r\theta)\, r^{n-1} dr \right) dS.$$

Здесь $\xi = r\theta$, $r = |\xi|$, $S^{n-1} = \left\{\theta\colon \sum\limits_{j=1}^n \theta_j^2 = 1\right\}$ и dS — элемент поверхности сферы S^{n-1}. Перестановка порядка интегрирования законна, так как $\psi \in Z$.

Рассмотрим интеграл по dr (t, θ фиксированы). Так как $\psi \in Z$, то $|\psi(\zeta)| \leqslant C_1 \exp(C_2|\zeta|)$ при всех комплексных ζ. Поэтому интеграл равен интегралу по контуру $l(A)$ (в комплексной плоскости r), который состоит из отрезка $[0, A]$, $A > 0$, и луча $r = A + \rho e^{-i\varepsilon\pi/2m}$, $0 \leqslant \rho < +\infty$, где ε — знак $\operatorname{Im} P(\xi)$ при $\xi \neq 0$. Пусть $\varepsilon = +1$; тогда $P(\xi) = iQ(\xi)$, $Q(\xi) \geqslant 0$, и при $r \in l(A)$, $r \to \infty$ имеем

$$\operatorname{Re} S(r\theta, x) \sim -t|r|^{2m} Q(\theta).$$

Поскольку $Q(\theta) \geqslant c > 0$ при $\theta \in S^{n-1}$, то интеграл по контуру $l(A)$ сходится абсолютно и равномерно по θ. Выражая ψ через φ, получаем

$$\int\limits_{l(A)} \exp\left[-tr^{2m} P(r\theta)\right] \psi(-r\theta)\, r^{n-1} dr =$$
$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n_x} \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{l(A)} \exp\left[-tr^{2m} P(r\theta) + ir\langle x, \theta\rangle\right] r^{n-1} dr\, dS \right) \times$$
$$\times \varphi(x)\, dx.$$

Перестановка порядка интегрирования законна, так как $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Итак,

$$(G, \varphi) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} G(t, x)\, \varphi(x)\, dx,$$

где для G имеет место формула

$$G(t, x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{S^{n-1}} \left(\int\limits_{l(A)} \exp\left[-tP(\xi) + i\langle x, \xi\rangle\right] r^{n-1} dr \right) dS. \tag{3.26}$$

Заметим, что интеграл (3.26) не зависит от A. Из этих рассуждений вытекает

Предложение 3.2. *Если полином $P \in \mathscr{H}^+(2m, n)$, то функция Грина $G(t, x)$ является при каждом фиксированном $t > 0$ целой функцией от $x \in \mathbf{C}^n$. Если $\operatorname{Im} P(\xi) > 0$ (<0) при $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\xi \neq 0$, то $G(t, x)$ является голоморфной функцией (t, x) при $\operatorname{Im} t \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$, $x \in \mathbf{C}^n$.*

Отметим еще, что если $P \in \mathscr{H}^+(2m, n)$, то

$$G(1, x) = G(1, -x)$$

в силу однородности P.

Если $P \in \mathcal{H}^+(2m, n)$, то функция $S(\zeta, ix)$ при любом $x \in \mathbf{R}^n$ имеет вещественные точки перевала; они-то и дают главный вклад в асимптотику G. Действительно, $P(\zeta) = iQ(\zeta)$, где Q — вещественный полином. Пусть $Q(\xi) > 0$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\xi \neq 0$; тогда множество $M_Q = \{\xi \in \mathbf{R}^n : Q(\xi) = 1\}$ есть C^∞ — многообразие размерности $(n-1)$, звездное относительно начала координат. Поэтому нормаль к M_Q может иметь любое направление в $\mathbf{R}^n$, вектор нормали n_ξ в точке ξ параллелен вектору $Q'_\xi(\xi)$. Если $\xi(x) \in M_Q$ таково, что $n_{\xi(x)} \| x$, то точка $\xi = \lambda\xi(x)$ при некотором $\lambda \neq 0$ есть вещественная точка перевала функции $S(\xi, ix)$. Далее, если $P \in \mathcal{H}^+(2m, n)$, то полином $P(e^{-i\pi/2m}\xi) \in \mathcal{P}(2m, n)$, так что в силу леммы 3.4 $\det P''_{\xi\xi}(\xi) \not\equiv 0$. Вырожденные вещественные точки перевала — это точки, в которых

$$P'_\xi(\xi) = ix, \ \xi \in \mathcal{K} = \{\xi \in \mathbf{R}^n: \ \det P''_{\xi\xi}(\xi) = 0\},$$

т. е. точки, в которых многообразие $\xi_{n+1} = iP(\xi)$ в $\mathbf{R}^{n+1}$ имеет нулевую гауссову кривизну. Пусть M_R — множество всех $x \in \mathbf{R}^n$, которым отвечают вырожденные вещественные точки перевала, тогда M_R есть вещественное полуалгебраическое коническое множество коразмерности $\geqslant 1$. Имеем $\mathbf{R}^n_x \setminus M_R = \mathfrak{M}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{M}_N$, где $\mathfrak{M}_j$ — связные открытые конусы в $\mathbf{R}^n_x$. При любом $x \in \mathfrak{M}_j$ функция $S(\zeta, ix)$ имеет одно и то же число k_j вещественных точек перевала $\xi^{j1}(x), \ldots, \xi^{jk_j}(x)$.

Теорема 3.4. *Пусть полином $P \in \mathcal{H}^+(2m, n)$, $m \geqslant 1$. Тогда при $x/t \in \mathfrak{M}_j$, $|x|^{2m}/t \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение* (3.18), *где*

$$\begin{gathered}
G_{js}(t, x) = (2\pi)^{-n/2}|x|^{-n(m-1)/(2m-1)} \times \\
\times t^{-n/2(2m-1)}\left|\det P''_{\xi\xi}\left(\xi^{js}\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)\right|^{-1/2} \times \\
\times \exp\left[i\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\left\langle x, \xi^{js}\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\rangle\right] \times \\
\times \exp\left(-\frac{i n\pi}{4}\right)\cdot\left[1 + \sum_{q=1}^{\infty} a_{jsq}\left(\frac{x}{|x|}\right)\left(\frac{t}{|x|^{2m}}\right)^{q/(2m-1)}\right]. \quad (3.27)
\end{gathered}$$

Здесь функции $a_{jsq} \in C^\infty$ при $x/|x| \in \mathfrak{M}^0_j$, это разложение равномерно по $x/|x| \in \mathcal{K}^0_j$, где $\mathcal{K}^0_j \subset \mathfrak{M}^0_j$ — произволь-

ный компакт. Разложение (3.27) *можно дифференцировать по t, x любое число раз.*

Таким образом, функция $G(1, x)$ сильно осциллирует при $|x| \to \infty$ и убывает при $m \geqslant 2$ степенным образом: $|G(1, x)| = O(|x|^{-n(m-1)/(2m-1)})$.

Делая в интеграле (3.3) замену $\xi \to (|x|/t)^{1/(2m-1)}\xi$, получаем для $G(t, x)$ представление (3.21), где λ, ω те же, что и в (3.22),

$$f(\xi, \omega) = -P(\xi) + i\langle\xi, \omega\rangle.$$

Выберем $A > 0$ такое, что все вещественные точки перевала функции f лежат в шаре $|\xi| \leqslant A/2$ при $|\omega| = 1$, и заменим контур интегрирования в (3.21) контуром $S^{n-1} \times l(A)$ (см. (3.26)). Пусть $\operatorname{Im} P(\xi) > 0$ при вещественных $\xi \neq 0$ и $l(A)$ — луч $r = A + C\rho e^{-i\pi/2m}$, $0 \leqslant \rho < \infty$. Тогда, если $C > 0$ достаточно велико,

$$\operatorname{Re} f(r\theta, \omega) \leqslant -C'\rho^{2m}, \quad r \in l(A), \quad \theta, \omega \in S^{n-1},$$

где $C' > 0$ может быть выбрано сколь угодно большим за счет увеличения C. Поэтому интеграл по контуру $S^{n-1} \times l(A)$ имеет порядок $O(e^{-C'\lambda})$. К интегралу по оставшемуся контуру применима теорема 1.2.

Следствие 3.2. *Пусть многообразие*

$$M = \{\xi \in \mathbf{R}^n\colon \operatorname{Im} P(\xi) = \varepsilon\},$$
$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} P(\xi) \quad (\xi \neq 0)$$

строго выпукло. Тогда при $|x| \to 0$ асимптотика $G(t, x)$ равна вкладу от (*единственной*) *вещественной точки перевала $\xi(x/t)$.*

Пример 3.3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i}{2m}(-\Delta)^m u.$$

Тогда при $|x| \to \infty$

$$G(1, x) \sim (2\pi)^{-n/2} |x|^{-n(m-1)/(2m-1)} (2m-1)^{-1/2} e^{-i\pi n/4} \times \\ \times \exp\left[i\left(1 - \frac{1}{2m}\right)|x|^{2m/(2m-1)}\right].$$

Полученные выше результаты переносятся па тот случай, когда P — корректный по Петровскому неоднородный полином, старшая однородная часть $P^0(\xi)$ которого принадлежит классу $\mathscr{K}^+(2m, n)$. Пусть $S_*(\zeta, tx) = -P^0(\zeta) + i\langle x, \zeta\rangle$, $\zeta^k(t, x)$ — точки перевала функции S

такие, что $\zeta^{jk}(t, x) \sim \xi^{jk}(t, x)$ при $t/|x| \to 0$, где ξ^{jk} — точки перевала функции S_0, указанные в теореме 3.4.

Следствие 3.3. *Пусть P — корректный по Петровскому полином, $P^0 \in \mathscr{H}^+(2m, n)$. Тогда при $x/t \in \mathfrak{M}_j$, $|x|^{2m}/t \to \infty$, $t/|x| \leqslant \delta$, и при достаточно малом $\delta > 0$ справедливо асимптотическое разложение* (3.18), *где G_{jk} имеют вид* (3.27).

Отметим важный частный случай:

Предложение 3.3. *Пусть*

$$P(\xi) = P^0(\xi) + P^1(\xi) + \ldots + P^{2m}(\xi),$$

где P^j — однородный полином степени $2m - j$, $P^0 \in \mathscr{H}^+(2m, n)$ и при вещественных ξ

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} P^1(\xi) = \ldots = \operatorname{Re} P^{2p-1}(\xi) = 0, \\ \operatorname{Re} P^{2p}(\xi) < 0 \quad (\xi \neq 0,\ p \geqslant 0). \end{gathered} \tag{3.28}$$

Тогда при тех же условиях, что и в следствии 3.2, *справедливо разложение* (3.18), *где*

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} S_0^{jk}(\omega) = \ldots = \operatorname{Re} S_{2p-1}^{jk}(\omega) = 0, \\ \operatorname{Re} S_{2p}^{jk}(\omega) < 0, \quad |\omega| = 1. \end{gathered} \tag{3.29}$$

Пусть $y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $\xi^0(y)$ — простая вещественная точка перевала функции $S_0(\zeta, iy)$, $\varepsilon = |y|^{-1/(2m-1)}$, $\omega = y/|y|$. При малых $\varepsilon > 0$ функция $S(\zeta, iy)$ имеет точку перевала

$$\zeta(y) = \zeta^0(y) + \varepsilon\zeta^1(y) + \ldots,$$

где ряд сходится при $|\varepsilon| \ll 1$ (см. предложение 2.5). Покажем, что

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} \zeta^0(y) = \operatorname{Re} \zeta^1(y) = \ldots = \operatorname{Re} \zeta^{2p-1}(y) = 0, \\ \operatorname{Im} \zeta^{2p}(y) \neq 0 \end{gathered} \tag{3.30}$$

при вещественных $y \neq 0$. Делая замену $\zeta \to \varepsilon\zeta$ в уравнении $S'_\zeta = 0$, получаем

$$P_\zeta^{0'}(\zeta) + \varepsilon P_\zeta^{1'}(\zeta) + \ldots + \varepsilon^{2m-1} P_\zeta^{2m-1'}(\zeta) = i\omega, \tag{3.31}$$

причем $\zeta(y) \to \zeta(\omega)$. Ниже будем считать, что ω фиксировано, $0 < \varepsilon \ll 1$. Так как полиномы $P^0, \ldots, P^{2p-1}$ имеют чисто мнимые коэффициенты, то $\operatorname{Re} \zeta^0(\omega) = \ldots = \operatorname{Re} \zeta^{2p-1}(\omega) = 0$. Разлагая левую часть уравнения (3.31) по степеням ε, для $\operatorname{Im} \zeta^{2p}$ получаем уравнение

$$-\operatorname{Im} P_{\zeta\zeta}^{0''}(\zeta^0) \operatorname{Im} \zeta^{2p} + \operatorname{Re} P_\zeta^{2p'}(\zeta^0) = 0,$$

и так как матрица $\operatorname{Im} P^{0''}_{\zeta\zeta}(\zeta)$ невырождена, то (3.30) доказано.

Докажем (3.29). Имеем из (3.30), (3.28), что

$$\operatorname{Re}[-P(\zeta(\omega)) + i\langle\zeta(\omega), \omega\rangle] =$$
$$= -\varepsilon^{2p} \operatorname{Re} P^{2p}(\zeta^0(\omega)) + O(\varepsilon^{2p+1}).$$

В условиях предложения (3.3) имеет место оценка

$$|G(1, x)| \leqslant C_1 |x|^{-\frac{n(m-1)}{2(2m-1)}} t^{-\frac{n}{2(2m-1)}} \exp\left[-C_2 t^{\frac{2p-1}{2m-1}} |x|^{\frac{2m-2p}{2m-1}}\right],$$
$$C_2 > 0,$$

т. е. $G(t, x)$ убывает экспоненциально, но медленнее, чем функция Грина параболического уравнения.

5. Общие корректные по Петровскому уравнения. Если уравнение (3.1) корректно по Петровскому, но не является параболическим или уравнением рассмотренного в п. 2 класса, то функция Грина является обобщенной функцией конечного порядка над пространством $C_0^\infty(\mathbf{R}_x^n)$ при фиксированном $t > 0$. Если $P \in \mathscr{P}(2m, n)$, то $G(1, x)$ экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$; если $P \in \mathscr{H}^+(2m, n)$, то $G(1, x)$ сильно осциллирует и убывает только степенным образом. Если же P — однородный полином, не входящий ни в один из этих классов, то $G(1, x)$ может по одним направлениям в $\mathbf{R}_x^n$ убывать экспоненциально, как функция Грина параболического уравнения, а по другим — сильно осциллировать и убывать только степенным образом. При $n = 1$ типичным примером служит уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

П р и м е р 3.4. *Уравнение С. Л. Соболева* ([80]):

$$\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}. \tag{3.32}$$

Вычислим функцию Грина; мы ограничимся формальным выводом (см. [80]). Имеем из (3.3′)

$$G(t, x) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbf{R}^3} \exp(i4t\xi_1\xi_2\xi_3 - i\langle x, \xi\rangle)\, d\xi.$$

Интеграл по $d\xi_3$ равен $2\pi\delta(4t\xi_1\xi_2 - x_3)$, откуда

$$G(t, x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}^2} \exp(-ix_1\xi_1 - ix_2\xi_2)\,\delta(4t\xi_1\xi_2 - x_3)\,d\xi_1 d\xi_2.$$

Полагая $4t\xi_1\xi_2 = u$, $\xi_1 = v$, получаем

$$G(t, x) = -\frac{1}{16\pi^2 t}\int\int_{\mathbf{R}^2} \exp\left(-ix_1v - \frac{ix_2u}{4tv}\right)\delta(u - x_3)\,\frac{du\,dv}{v} =$$

$$= -\frac{1}{16\pi^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ix_1v - \frac{ix_2x_3}{4tv}\right)\frac{dv}{v}.$$

Сделаем замену переменной $v = \frac{1}{2}\sqrt{\pm\frac{x_2x_3}{tx_1}}\,\xi$; здесь и далее знак «+» берется при $x_1x_2x_3 > 0$, знак «−» берется при $x_1x_2x_3 < 0$. Тогда

$$G(t, x) = -\frac{1}{16\pi^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\lambda\frac{\xi + \xi^{-1}}{2}\right)\frac{d\xi}{\xi},$$

$$\lambda = \sqrt{\pm\frac{x_1x_2x_3}{t}}.$$

Выражая последний интеграл через бесселевы функции, получаем

$$G(t, x) = \begin{cases} (8\pi t)^{-1}Y_0\left(\sqrt{\frac{x_1x_2x_3}{t}}\right), & x_1x_2x_3 > 0, \\ -(4\pi^2 t)^{-1}K_0\left(\sqrt{-\frac{x_1x_2x_3}{t}}\right), & x_1x_2x_3 < 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Отсюда следует, что $G(1, x)$ имеет логарифмические особенности на координатных плоскостях. Далее, при $|x| \to \infty$ функция $G(t, x)$ экспоненциально убывает в тех квадрантах, где $x_1x_2x_3 < 0$, и осциллирует и убывает степенным образом в остальных квадрантах, что следует из известных асимптотик бесселевых функций.

Пример 3.5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}. \tag{3.34}$$

Имеем

$$G(t, x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \exp\left[it\xi_1\xi_2^2 - i\langle x, \xi\rangle\right] d\xi.$$

Интеграл по $d\xi_1$ равен $2\pi\delta\left(t\xi_2^2 - x_1\right)$, откуда

$$G(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t\xi_2^2 - x_1\right) e^{-ix_2\xi_2} d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \delta\left(t\xi_2^2 - x_1\right) \cos(\xi_2 x_2)\, d\xi_2.$$

В частности, $G(t, x) \equiv 0$ при $x_1 < 0$. Вычисляя этот интеграл при $x_1 > 0$, получаем

$$G(t, x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{tx_1}} \cos\left(x_2\sqrt{\dfrac{x_1}{t}}\right), & x_1 > 0, \\ 0, & x_1 < 0, \end{cases} \tag{3.35}$$

так что $G(1, x)$ имеет особенность на оси $x_1 = 0$.

Покажем, что $G(t, x)$ является при каждом фиксированном $t > 0$ обобщенной функцией порядка $\leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ над пространством $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Интеграл

$$G_k(t, x) = (2\pi)^{-n} \int \exp\left[-tP(\xi) + i\langle x, \xi\rangle\right] (\xi^2 + 1)^{-k} d\xi$$

сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте в $\mathbf{R}_x^n$, если $k > n/2$, так как $|\exp(-tP(\xi))| \leqslant \mathrm{const}$, и $G(t, x) = (-\Delta + 1)^k G_k(t, x)$, где дифференцирование понимается в смысле обобщенных функций. Однако нерешенным остается вопрос, где расположены и как устроены особенности G.

Мы приведем ниже два результата о регуляризации интеграла (3.3). Один из них получается с помощью замены контура интегрирования контуром в $\mathbf{C}^n$, другой — с помощью предельного перехода (3.38), который обычно применяют для регуляризации быстро осциллирующих интегралов.

Предложение 3.4. *Пусть уравнение* (3.1) *корректно по Петровскому, и пусть на любом луче* $\xi = |\xi|\theta$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $|\theta|^2 = 1$, *выполняется неравенство*

$$|P(\xi)| \geqslant C_0(\theta)|\xi|^2 > 0 \quad (|\xi| > C_1(\theta)). \tag{3.36}$$

Тогда $G(t, x)$ является целой функцией x при каждом фиксированном $t > 0$ и бесконечно дифференцируема при $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Повторяя проведенные при выводе формулы (3.3′) (см. п. 3) рассуждения, получаем для G формулу

$$G(t, x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{S^{n-1}} \left(\int\limits_{l_\theta} \exp\left[-tP(\theta) + i\langle x, \theta\rangle\right] r^{n-1} dr \right) dS. \tag{3.37}$$

Здесь контур l_θ зависит от θ и выбирается так: l_θ — луч $r = \rho e^{i\varphi(\theta)}$, $0 \leqslant \rho < \infty$, такой, что $\operatorname{Re} P(r\theta) \leqslant -C\rho^2$ при $r \in l_\theta$, $r \to \infty$. Из (3.36) нетрудно получить существование постоянных C_0, C_1 таких, что $|P(\xi)| \geqslant C_0|\xi|^2$ при $|\xi| \geqslant C_1$. Интеграл по dr в (3.37) сходится абсолютно и равномерно, когда $\theta \in S^{n-1}$, $0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, x принадлежит компакту в $\mathbf{C}^n$. Отсюда вытекает предложение 3.4.

Предложение 3.5. *Пусть уравнение* (3.1) *корректно по Петровскому и выполнены условия*:

1°. $$|P'_\xi(\xi)| \geqslant C_1|\xi|^{m/2-1+\delta}$$

при $|\xi| \geqslant C_2$, где δ, $C_j > 0$ — постоянные, $m \geqslant 2$ — степень полинома $P(\xi)$.

2°. *Функция $S(\xi, iy)$ имеет не более конечного числа вещественных точек перевала в некоторой области $U \subset \mathbf{R}^n_y$.*

Тогда функция $G(t, x) \in C^\infty$ при $x/t \in U$.

Воспользуемся следующим способом регуляризации интеграла (3.3):

$$G(t, x) = \lim_{\varepsilon \to +0} (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbf{R}^n_\xi} \exp\left[-tP(\xi) + i\langle x, \xi\rangle\right] \varphi(\varepsilon\xi)\, d\xi. \tag{3.38}$$

Здесь функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ равна единице при $|\xi| \leqslant 1/2$ и равна нулю при $|\xi| \geqslant 1$. Пусть $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ фиксированы; положим $t = 1$ для удобства. Выберем $r > 0$ такое, что функция $S(\xi, ix)$ не имеет вещественных точек перевала при $|\xi| = r/2$, и введем функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, равную 1 при $|\xi| \leqslant r$ и равную нулю при $|\xi| \geqslant 2r$. Тогда интеграл в правой части (3.38) $I(\varepsilon) = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)$, где I_1 содержит χ, I_2 содержит $\varphi(\varepsilon\xi) - \chi$. Интеграл $I_1 \in C^\infty$ при всех $x \in \mathbf{R}^n$. Интеграл I_2 проинтегрируем по частям так же, как и в доказательстве теоремы 1.4:

$$I_2(\varepsilon) = \int \exp[S(\xi, ix)]\,{}^tL^k(\varphi(\varepsilon\xi) - \chi(\xi))\,d\xi,$$

где ${}^tL$ — оператор

$${}^tLf = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f\psi_j)}{\partial\xi_j}, \quad \psi_j = |S'_\xi(\xi, ix)|^{-2}\overline{S}'_{\xi_j}(\xi, ix).$$

Так как P — полином степени m, то для любого мультииндекса α

$$|D_\xi^\alpha S(\xi, ix)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

Следовательно, $|\psi_j(\xi)| \leqslant C'(1 + |\xi|)^{-\delta}$, и нетрудно показать, что для любого мультииндекса β

$$|D_\xi^\beta \psi_j(\xi)| \leqslant C_\beta(1 + |\xi|)^{-|\beta|-\delta}.$$

Следовательно, при целом $k \geqslant 0$

$${}^tL^k(\varphi(\varepsilon\xi) - \chi(\xi)) = \sum_{j=0}^{k} \psi_{jk}(\xi)\,M_j(\varphi(\varepsilon\xi) - \chi(\xi)),$$

где M_j — однородный дифференциальный оператор порядка j,

$$|\psi_{j,k}(\xi)| = C_{jk}(1 + |\xi|)^{-k(1+\delta)+j}.$$

Если функция $f \in L_1(\mathbf{R}^n)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi)\,\varphi(\varepsilon\xi)\,d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi)\,d\xi,$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi)\,D_\xi^\alpha\varphi(\varepsilon\xi)\,d\xi = 0, \quad |\alpha| > 0.$$

Выберем $k > 0$ такое, чтобы было $k\delta > n$; тогда существует $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} I_2(\varepsilon)$ в силу того, что $\psi_{jk} \in L_1(\mathbf{R}^n)$, а функция $|\exp(S(\xi, ix))|$ ограничена, так как уравнение (3.1) корректно по Петровскому. Дифференцируя интеграл $I_2(\varepsilon)$ по x, получаем

$$D_x^\alpha I_2(\varepsilon) = \int_{\mathbf{R}^n} \varkappa_\alpha(\xi)\exp[S(\xi, ix)]\,[\varphi(\varepsilon\xi) - \chi(\xi)]\,d\xi,$$

где $\varkappa_\alpha$ — полином степени $\leqslant |\alpha|(m-1)$. Интегрируя по частям тем же способом, что и выше, получаем, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} D_x^\alpha I_2(\varepsilon)$ существует при $x \in U$.

30*

Пример 3.6. Функция Грина уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}+i\Delta u$$

является целой функцией x при любом фиксированном $t>0$ в силу предложения 3.3.

Лемма 3.6. *Пусть вещественные точки перевала полинома $P(\xi)$ содержатся в некотором шаре, $m(R)=\min\limits_{|\xi|=R}|P'_\xi(\xi)|$. Тогда существуют постоянная $a>0$ и рациональное число α такие, что*

$$m(R)\sim aR^\alpha \quad (R\to\infty). \tag{3.39}$$

Множество $|P'_\xi(\xi)|^2 \geqslant m^2$, $|\xi|^2=R^2$ в $\mathbf{R}^{n+2}_{\xi,m,R}$ является полуалгебраическим. Его проекция M на $\mathbf{R}^2_{m,R}$ по теореме Зейденберга — Тарского является полуалгебраическим множеством, имеет вид $M=\{(m,R)\colon m\geqslant m(R)\}$ и не совпадает с $\mathbf{R}^2$. Следовательно, его граница содержится в некотором собственном алгебраическом множестве, и потому существует полином $f(m,R)$ такой, что

$$f(m(R),R)=0,\quad -\infty<R<\infty.$$

Поэтому функция $m(R)$ — кусочно-алгебраическая. Можно считать, что разложение полинома f на неприводимые сомножители не содержит кратных сомножителей. Тогда существует $R_0>0$ такое, что дискриминант $D(R)$ полинома f отличен от нуля при $R\geqslant R_0$. При $R\geqslant R_0$ всякое решение уравнения $f=0$ разлагается в ряд Пюизе:

$$m_j(R)=a_{0j}R^{\alpha_{0j}}+a_{1j}R^{\alpha_{1j}}+\ldots,$$

где $\alpha_{0j}>\alpha_{1j}>\ldots$ — рациональные числа. Функция $m(R)$ совпадает при $R>R_0$ с одной из функций $m_j(R)$. Так как по условию $m(R)>0$ при $R\gg 1$, то асимптотика $m(R)$ имеет вид (3.39).

Заметим, что число α в (3.39) может быть отрицательным.

Лемма 3.7. *Пусть уравнение* (3.17) *имеет вещественное решение при любом вещественном x из некоторой области $U\subset\mathbf{R}^n_x$. Тогда все коэффициенты полинома $P(\zeta)-P(0)$ — чисто мнимые.*

Из разрешимости уравнения (3.16) при $x\in U$ следует, что $\det P''_{\zeta\zeta}(\zeta)\not\equiv 0$. В силу предложения 2.2 можно взять область $\tilde U\subset U$ такую, что при $x\in\tilde U$ уравнение (3.17) имеет одно и то же конечное число решений $\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x)$, и все они невырождены и различны. Множество $M^j = \{\zeta \in \mathbf{C}^n\colon \zeta = \zeta^j(x),\ x \in U\}$ есть C^∞-многообразие размерности n; по условию хотя бы одно из них содержит область $V \subset \mathbf{R}^n_\xi$. Тогда $\operatorname{Re} R'_\xi(\xi) \equiv 0,\ \xi \in V$, так что $\operatorname{Re} P'_\xi(\xi) \equiv 0$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$, и все коэффициенты полиномов $P'_{\xi_j}(\xi),\ 1 \leqslant j \leqslant n$, являются чисто мнимыми.

Исследуем асимптотику $G(t, x)$; она будет существенно различной в зависимости от того, будет ли полином $P^0(\zeta)$ иметь вещественные точки перевала или нет. Введем обозначения

$$\omega = \frac{x}{|x|}, \quad S^{n-1} = \{\omega \in \mathbf{R}^n\colon |\omega|^2 = 1\},$$

$$S_0(\zeta, ix) = -P^0(\zeta) + i\langle x, \zeta\rangle.$$

В силу леммы 3.7 функция S_0 может иметь вещественные точки перевала в целой области в $\mathbf{R}^n_x$ только тогда, когда все коэффициенты полинома P^0, кроме свободного члена, являются чисто мнимыми. Пусть $P^0(\zeta)$ — полином с чисто мнимыми коэффициентами. Положим

$$\mathfrak{M} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon P^{0\prime}_\xi(\xi) = ix \text{ для некоторого } \xi \in \mathbf{R}^n\}.$$

Множество $\mathfrak{M}$ является полуалгебраическим конусом в $\mathbf{R}^n_x$. Пусть $\det P^{0\prime\prime}_{\xi\xi}(\xi) \not\equiv 0$; тогда $\mathfrak{M}$ есть конус полной размерности. По теореме 2.2 имеем

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{j=1}^{N} \mathfrak{M}_j \cup \mathfrak{M}^*; \quad \mathfrak{M}_j^0 = \mathfrak{M}_j \cap S^{n-1},$$

где $\mathfrak{M}_j$ — открытые связные конусы, $\dim \mathfrak{M}^* \leqslant n-1$. При каждом $x \in \mathfrak{M}_j$ функция $S_0(\xi, ix)$ имеет одно и то же конечное число k_j вещественных точек перевала $\xi^{j1}(x), \ldots, \xi^{jk_j}(x)$, и все они невырождены.

Конус $\mathfrak{M}$ имеет простую геометрическую интерпретацию. Именно, положим $P(\xi) = iQ(\xi)$, тогда Q — однородный полином с вещественными коэффициентами. Рассмотрим множества уровня $M^\pm_Q = \{\xi \in \mathbf{R}^n\colon Q(\xi) = \pm 1\}$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^+ \cup \mathfrak{M}^- \cup \mathfrak{M}^0 \cup \{\xi = 0\}$. Если степень P нечетна, то $\mathfrak{M}^\pm$ — конус, составленный из лучей, которые ортогональны к $M^\pm_Q$ и направлены в сторону возрастания Q, $\mathfrak{M}^0$ — аналогичный конус, образующие которого ортогональны к множеству $Q = 0$. Действительно, пусть $\xi^0 \in M_Q^+$, тогда нормаль к M_Q^+ в точке ξ^0 параллельна вектору $Q'_\xi(\xi)$, который направлен в сторону возрастания Q. В силу однородности $Q'_\xi(t\xi^0) = t^{m-1}Q'_\xi(\xi^0)$ и при m нечетном $t^{m-1} > 0$, $t \neq 0$.

Уравнение (3.17) имеет вещественные решения при всех x вида $x = t^{m-1}Q'_\xi(\xi^0)$, $t \in \mathbf{R}$. Если же m четно, то конусы $\mathfrak{M}^{\pm, 0}$ составлены не из лучей, а из прямых.

Теорема 3.5. *Пусть полином $P^0(\zeta)$ имеет чисто мнимые коэффициенты и удовлетворяет условию* (2.15). *Тогда при $|x|^{2m}/t \to \infty$, $t/|x| < \delta$, $t/x \in \mathfrak{M}_j^0$ и при $\delta > 0$ достаточно малом асимптотика функции $G(t, x)$ равна сумме вкладов от точек перевала, близких к точкам $\zeta^{j1}(x/t), \ldots, \zeta^{jk_j}(x/t)$. Это разложение равномерно по x, если $x/|x|$ лежит в компакте $\mathscr{K} \subset \mathfrak{M}_j^0$.*

В силу предложения 3.4 функция $G(t, x) \in C^\infty$ при $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$. Делая замену $\xi \to (|x|/t)^{1/(m-1)}\xi$, получаем для G представление (3.21), (3.22), где

$$\begin{gathered} f = -P^0(\xi) - \varepsilon P^1(\xi) - \ldots - \varepsilon^m P^m(\xi) + i\langle\omega, \xi\rangle, \\ \varepsilon = \left(\frac{t}{|x|}\right)^{1/(m-1)}. \end{gathered} \tag{3.40}$$

Пусть $\omega \in \mathscr{K} \subset \mathfrak{M}_j^0$, где $\mathscr{K}$ — компакт. Так как P^0 удовлетворяет условию (2.15), то существуют положительные постоянные ε_0, R_0, C_0 такие, что

$$|f'_\xi(\xi, i\omega, \varepsilon)| \geqslant C_0|\xi|^{m-1}$$

при $|\xi| \geqslant R_0$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Устроим C^∞-разбиение единицы $1 = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)$ в $\mathbf{R}_\xi^n$, где функция $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, равна 1 при $|\xi| \leqslant 2R_0$ и равна 0 при $|\xi| \geqslant 3R_0$. Соответственно положим $I = I_1 + I_2$, где I — интеграл (3.21). Асимптотика интеграла I_1 равна, по теореме 1.2, сумме вкладов от точек перевала, близких к вещественным точкам перевала $\zeta^{j1}(\omega), \ldots, \zeta^{jk_j}(\omega)$. Покажем, что $I_2 = O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to +\infty$. Интегрируя по частям так же, как и в доказательстве предложения 3.4, получаем

$$I_2 = \lambda^{-1} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{\lambda f}\psi_1 d\xi, \quad \psi_1 = {}^tL\varphi_2.$$

В силу условия (2.15) и ограниченности функции φ_2

$$|\psi_1| \leq C(1+|\xi|)^{-m+1}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n,$$

так что интеграл I_2 сходится абсолютно и допускает оценку $|I_2| \leq C\lambda^{-1}$. Интегрируя по частям далее, получаем, что $I_2 = O(\lambda^{-N})$ $(\lambda \to +\infty)$ при любом N.

Следствие 3.4. *Теорема* 3.5 *остается в силе, если коэффициенты полинома P^0 — чисто мнимые, а полином P удовлетворяет условиям предложения* 3.4.

Рассмотрим случай, когда функция $S_0(\zeta, ix)$ не имеет вещественных точек перевала.

Лемма 3.8. *Пусть $P(\zeta)$ — однородный многочлен степени $m \geq 3$, функция $S(\zeta, w^0)$ имеет точки перевала. Положим*

$$d(w^0) = \inf \operatorname{Re} S(\zeta, w^0), \tag{3.41}$$

где inf *берется по всем точкам перевала. Тогда либо $d(w^0) < 0$, либо $P^0 = 0$ во всех точках перевала.*

Пусть ζ^0 — точка перевала, тогда по формуле Эйлера $S(\zeta^0, w^0) = (1-2m)P(\zeta^0) = S_0$. В силу однородности P все точки $\zeta^j = \varepsilon_j\zeta^0$, $\varepsilon_j = \sqrt[m-1]{1}$, являются точками перевала и $S(\zeta^j, w^0) = \varepsilon_j S_0$. Если $P(\zeta^0) \neq 0$, то $S_0 \neq 0$, и хотя бы одно из чисел S_j лежит в нижней полуплоскости.

Рассмотрим конус $\mathfrak{M} \subset \mathbf{R}^n_x$ вида $\{x \in \mathbf{R}^n\colon\ x = \rho\omega,\ \omega \in \Omega,\ 0 \leq \rho < \infty\}$, где Ω — односвязная область на единичной сфере S^{n-1}. Пусть $\mathscr{K} \subset \Omega$ — компакт, $\mathfrak{M}(\mathscr{K})$ — конус, полученный из $\mathfrak{M}$ заменой Ω на $\mathscr{K}$. Пусть $P(\zeta)$ — однородный полином степени $m \geq 3$, и пусть при $x \in \mathfrak{M}$ функция $S(\zeta, ix)$ имеет одно и то же число точек перевала $\zeta^1(x), \ldots, \zeta^k(x)$, все они невырождены. Для этого достаточно, чтобы $\mathfrak{M}$ не пересекался с исключительным множеством M_R (см. теорему 2.2).

Теорема 3.6. *Пусть $P(\zeta)$ — однородный полином степени $m \geq 3$, $\mathfrak{M}$ — описанный выше конус и*

1°. *P удовлетворяет условию* (2.15).

2°. *При $x \in \mathfrak{M}$ уравнение* (3.17) *не имеет вещественных решений и $P(\zeta) \neq 0$ в точках перевала $\zeta^j(x)$.*

Тогда асимптотика функции $G(1, x)$ при $|x| \to \infty$ равномерно по $x \in \mathfrak{M}(\mathscr{K})$ равна сумме вкладов от некоторых из точек перевала, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} S(\zeta, ix) < 0. \tag{3.42}$$

Основная трудность связана с регуляризацией интеграла (3.3). В силу предложения 3.4 функция $G(1, x) \equiv$

$\in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$. Однако при вычислении асимптотики G мы не можем пользоваться полученными в этом предложении формулами, так как они содержат неаналитические функции. Рассмотрим G как функционал над пространством $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ и воспользуемся равенством Парсеваля для функции $G = G(1, x)$:

$$(G, \varphi) = (2\pi)^n (\widetilde{G}, \widetilde{\varphi}(-\xi)) = (e^{-P(\xi)}, \widetilde{\varphi}(-\xi)).$$

Пусть $\zeta = \xi + i\eta$, тогда, если $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, то при любом $N \geqslant 0$

$$|\widetilde{\varphi}(-\zeta)| \leqslant C_N e^{-\langle x, \eta\rangle}(1 + |\zeta|)^{-N}. \tag{3.43}$$

Поэтому интеграл

$$I = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-P(\zeta)} \widetilde{\varphi}(-\zeta)\, d\zeta$$

сходится абсолютно.

Положим $d = \inf\limits_{x \in \mathfrak{M}(\mathscr{X})} \operatorname{Re} P(\zeta(x))$, где нижняя грань берется по всем точкам перевала функции $S(\zeta, ix)$; тогда $-\infty < d < 0$. Фиксируем $x \in \mathfrak{M}(\mathscr{X})$. Пусть M — связная компонента множества $\{2(m-1)d \leqslant \operatorname{Re} S \leqslant 0\}$, $S = S(\zeta, ix)$, содержащая $\mathbf{R}_\xi^n$, M^0 — множество, полученное из M удалением малых окрестностей U_j всех точек перевала функции S. Тогда $|S'_\zeta| \geqslant C(1 + |\zeta|)^{m-1}$ при $\zeta \in M^0$. Линия наибыстрейшего спуска $\zeta = \zeta(t, \xi; ix)$, $t \geqslant 0$, выходящая из точки $\xi \in \mathbf{R}^n$, является решением задачи Коши:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \overline{P'_\zeta(\zeta)} - i\langle x, \bar{\zeta}\rangle, \quad \zeta|_{t=0} = \xi.$$

В силу леммы 2.2 за конечное время $t = t(\xi)$ точка $\zeta(t, \xi; ix)$ придет либо на ∂U_j, либо на множество $\{\operatorname{Re} S = 2(m-1)d\} \subset \partial M$. Если $R > 0$ достаточно велико, то все точки множества $D_R = \{\xi \in \mathbf{R}^n\colon\ (\xi) \geqslant R\}$ за конечное время выйдут на ∂M, причем $t(R) = \sup\limits_{\xi \in D_R} t(\xi) < \infty$.

Пусть $\widetilde{D}_R$ — сдвинутое множество; покажем, что оно мало отличается от $\mathbf{R}_\xi^n$ при $|\xi| \gg 1$. Имеем $\operatorname{Re} S(\zeta, ix) = 2d(m-1)$ на $\widetilde{D}_R$. При фиксированном ξ и при малых t
$\operatorname{Re} S(\zeta(t, \xi; ix), ix) =$

$$= \operatorname{Re} S|_{t=0} + t\frac{d \operatorname{Re} S}{dt}\Big|_{t=0} + O(t^2) = -t\,|S'_\zeta(\xi, ix)|^2 + O(t^2).$$

Следовательно,

$$t(\xi) \sim |S'_\xi(\xi, ix)|^{-2} = O(|\xi|^{-2(m-1)}) \text{ при } |\xi| \to \infty.$$

Положим $\gamma = \bar{D}_R \cup D_R \cup D$, где D — цилиндр из траекторий $\zeta = \zeta(t, \xi; ix)$, $0 \leqslant t \leqslant t(\xi)$, $|\xi| = R$, тогда в силу оценки (3.43) и свойств $\bar{D}_R$ интеграл I равен интегралу по γ. Так как $\bar{D}_R$ есть почти n-плоскость на бесконечности, то тем же способом, что и в предложении 3.4, можно доказать сходимость интеграла от $\exp[S(\zeta, ix)]$ по γ. Следовательно, при $|x| = 1$, $x \in \mathfrak{M}(\mathcal{H})$,

$$G(1, x) = \int_\gamma \exp[S(\zeta, ix)]\, d\zeta.$$

Нетрудно показать равномерность проведенных выше построений относительно $x \in \mathfrak{M}(\mathcal{H})$, $|x| = 1$.

Далее,

$$G(1, x) = |x|^{n/(m-1)} \int_\gamma \exp\left[|x|^{m/(m-1)} S\left(\zeta, i\frac{x}{|x|}\right)\right] d\zeta.$$

По построению $\operatorname{Re} S = 2d(m-1)$ на $\bar{D}_R$, и интеграл по $\bar{D}_R$ имеет порядок

$$O(\exp(2d(m-1+\varepsilon)|x|^{m/(m-1)})),$$

где $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Оставшаяся часть $\tilde{\gamma}$ контура γ есть ограниченное многообразие в $\mathbf{C}^n$ и по построению является относительным циклом $\operatorname{mod}\left\{\operatorname{Re} S\left(\zeta, \frac{ix}{|x|}\right) = 2d(m-1)\right\}$. По теореме 2.2 асимптотика этого интеграла равна сумме вкладов от точек перевала функции S.

Замечание 3.2. Мы ограничились для простоты однородным полиномом P. Можно показать, что теорема 3.6 остается в силе для неоднородных полиномов P, старшая однородная часть которых удовлетворяет условиям теоремы.

6. Параболические по Петровскому уравнения высокого порядка по t. Рассмотрим уравнение

$$P(D_t, D_x)\, u(t, x) = 0, \tag{3.44}$$

где $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

и $P(\tau, \zeta)$ — полином,

$$P(\tau, \zeta) = \tau^r + \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k}(\zeta)\, \tau^k.$$

Пусть $\tau_j(\zeta)$ — решения уравнения $P = 0$ относительно τ. Будем предполагать, что $\tau_j(\zeta)$ — однородные функции степени $2m$. Положим

$$\tau = \sigma + i\rho, \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (\sigma, \rho \in \mathbf{R}, \ \xi, \eta \in \mathbf{R}^n)$$

и введем функцию

$$T(\xi, \eta) = \min_{1 < j < p} \operatorname{Im} \tau_j(\xi + i\eta). \tag{3.45}$$

Уравнение (3.44) называется *параболическим по Петровскому*, если $T(\xi, 0) > 0$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\xi \neq 0$. Отсюда следует, что m — целое число, $m \geqslant 1$.

Фундаментальным решением $G(t, x)$ задачи Коши для уравнения (3.44) называется решение этого уравнения с данными Коши

$$G\big|_{t=0} = D_t G\big|_{t=0} = \ldots = D_t^{p-2} G\big|_{t=0} = 0,$$
$$D_t^{p-1} G\big|_{t=0} = -i\delta(x),$$

продолженное нулем при $t < 0$.

Функция G удовлетворяет уравнению

$$P(D_t, D_x)\, G(t, x) = \delta(t, x).$$

Применяя преобразование Фурье, получаем интегральное представление

$$G(t, x) = (2\pi)^{-n-1} \int \frac{\exp[i(t\tau + \langle x, \xi\rangle)]}{P(\tau, \xi)}\, d\tau\, d\xi,$$

где интеграл берется по области $\operatorname{Im} \tau = c < 0$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Пусть разложение P на неприводимые сомножители не содержит одинаковых сомножителей. Тогда по теореме о вычетах

$$G(t, x) = i(2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{j=1}^{p} \frac{\exp[it\tau_j(\xi) + i\langle x, \xi\rangle]}{P'_\tau(\tau_j(\xi), \xi)}\, d\xi. \tag{3.46}$$

Заметим, что стоящая под знаком интеграла сумма при любых фиксированных $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ аналитически продолжается с $\mathbf{R}^n_\xi$ на $\mathbf{C}^n_\zeta$ как целая функция ζ.

В силу однородности P

$$G(t, x) = t^{p-n/2m-1} G(1, xt^{-1/2m}).$$

Нас интересует асимптотика $G(t, x)$ при $|x| \to \infty$, $t > 0$ фиксированном. В силу однородности символа из асимптотики $G(1, x)$ при $|x| \to \infty$ мы получим асимптотику $G(t, x)$ при $|x|^{2m}/t \to \infty$. Будем исследовать эту задачу по тому же плану, что и в пп. 2, 3. Сформулируем полученные результаты и покажем новые явления по сравнению с уравнениями первого порядка по t, которые здесь возникают.

Введем функцию

$$\nu(\eta) = \min_{\xi \in \mathbf{R}^n} T(\xi, \eta).$$

Эта функция обладает такими же свойствами, что и введенная в п. 1 функция ν. Именно, ν выпукла кверху, однородна степени $2m$, кусочно-алгебраическая и удовлетворяет оценкам (3.11). Пусть функция $\mu(x)$ — двойственная по Юнгу к функции $\nu(-\eta)$; тогда функция $\mu(x)$ обладает перечисленными в лемме 3.2 свойствами.

Аналогично тому, как это было сделано в пп. 2, 3, можно доказать, что при $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$

$$|G(t, x)| \leqslant Ct^{p-1}\left[\left(\frac{|x|}{t}\right)^{n/(2m-1)} + t^{-n/2m}\right] \exp(t\mu(x/t)), \tag{3.47}$$

так что $G(1, x)$ экспоненциально убывает при $x \in \mathbf{R}^n$, $|x| \to \infty$.

Пусть $\tau(\zeta)$ — алгебраическая функция, заданная уравнением $P = 0$, $S(\zeta, w) = \tau(\zeta) + \langle \zeta, w \rangle$. Точки перевала функции S определяются из уравнения $\tau'_\zeta(\zeta) = -w$, или (см. (2.8))

$$P'_\zeta(\tau, \zeta) + wP'_\tau(\tau, \zeta) = 0.$$

Пусть выполнены условия:

1°. Функция $\nu \in C^1$ в окрестности точки $\eta^0 \neq 0$.

2°. Множество $\Gamma(\eta^0) = \{\xi \in \mathbf{R}^n\colon\ T(\xi, \eta^0) = \nu(\eta^0)\}$ состоит из конечного числа невырожденных точек минимума $\xi^j(\eta^0)$.

Тогда аналогично лемме 3.3 можно показать, что все точки $\zeta^j(x^0) = \xi^j(\eta^0) + i\eta^0$ являются точками перевала функции $S(\zeta, tx^0)$, где $x^0 = -\nu'_\eta(\eta^0)$. Кроме того, эти точки перевала невырождены.

Точно так же, как и теорема 3.2, доказывается

Теорема 3.7. *Пусть условия* 1°, 2° *выполнены. Тогда при*

$$x = \rho x^0 \quad \left(0 < \rho < \infty,\ x^0 = -\nu'_\eta(\eta^0)\right)$$

и при $|x|^{2m}/t \to \infty$ *асимптотика фундаментального решения* $G(t, x)$ *равна сумме вкладов от точек перевала* $\zeta^j(x/t)$.

Выпишем явную формулу для вклада G_k точки перевала $\zeta^k(x/t)$ в асимптотику $G(t, x)$. Учитывая соотношения однородности

$$\tau(\zeta) = \frac{1}{2m}\langle \tau'_\zeta(\zeta), \zeta\rangle, \quad \zeta^k\left(\frac{x}{t}\right) = \left(\frac{|x|}{t}\right)^{1/(2m-1)} \zeta^k(x^0),$$

получаем

$$G_k(t, x) = (-2\pi i t)^{-n/2}\left(\frac{|x|}{t}\right)^{-\alpha}\left[\det \tau''_{j(k)}\left(\zeta^{(k)}(x^0)\right)\right]^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left[i\left(\frac{|x|^{2m}}{t}\right)^{1/(2m-1)}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\langle x^0, \zeta^k(x^0)\rangle\right], \tag{3.48}$$
$$\alpha = \frac{2m\left(p + \frac{n}{2} - 1\right) + n}{2m - 1}.$$

Однако асимптотика $G(1, x)$ может не определяться точками перевала функции $S(\zeta, ix)$ даже в том случае, когда символ P устроен достаточно «хорошо» (например, удовлетворяет условию (2.14)). Рассмотрим

Пример 3.7. Фундаментальное решение $G(t, x)$ уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} b_k^2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right)u = 0, \tag{3.49}$$

где $a_k, b_k > 0$, имеет вид

$$G(t, x) = i(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} \frac{\exp[it\tau_1(\xi)] - \exp[it\tau_2(\xi)]}{\tau_1(\xi) - \tau_2(\xi)} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\, d\xi. \tag{3.50}$$

Здесь $\tau_1(\xi) = i\sum_{j=1}^{n} a_j^2\xi_j^2$, $\tau_2(\xi) = i\sum_{j=1}^{n} b_j^2\xi_j^2$. Применим теорему 3.7.

В данном случае

$$\nu(\eta)=\min(\nu_1(\eta),\ \nu_2(\eta)),$$

$$\nu_1(\eta)=-\sum_{j=1}^{n}a_j^2\eta_j^2,\quad \nu_2(\eta)=-\sum_{j=1}^{n}b_j^2\eta_j^2.$$

Если параболоиды $\nu=\nu_1(\eta)$, $\nu=\nu_2(\eta)$ пересекаются трансверсально в точке (ν^0,η^0), то точка η^0 является точкой негладкости функции ν. Пусть $\mu_j(x)$ — функция, двойственная по Юнгу к функции $\nu_j(-\eta)$. Тогда

$$\mu_1(x)=-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{a_j^2},\quad \mu_2(x)=-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{b_j^2},$$

множество $\mu(x)\geqslant-1$ есть граница выпуклой оболочки объединения эллипсоидов $\{\mu_1(x)\geqslant-1\}\cup\{\mu_2(x)\geqslant-1\}$.

Вычислим асимптотику $G(1,x)$. Положим

$$S_j(\zeta,x)=i\tau_j(\zeta)+i\langle x,\zeta\rangle,\quad j=1,2.$$

Функция S_j имеет единственную и притом невырожденную точку перевала: $\zeta_k^1(x)=\dfrac{ix_k}{2a_k^2}$, $\zeta_k^2(x)=\dfrac{ix_k}{2b_k^2}$. Правило отбора (теорема 3.7) показывает, что асимптотика $G(1,x)$ равна вкладу $V_1(x)$ от точки перевала $\zeta^1(x)$, если $|x|\to\infty$ в области

$$D_1:\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{a_j^2}-\frac{b_j^2}{a_j^4}\right)x_j^2>0.$$

Имеем

$$V_1(x)=$$
$$=2^{2-n}\pi^{-n/2}a_1\ldots a_n\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j^2-a_j^2}{a_j^4}x_j^2\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{a_j^2}\right).\tag{3.51}$$

Аналогично асимптотика $G(1,x)$ равна вкладу $V_2(x)$ от точки перевала $\zeta^2(x)$, если $|x|\to\infty$ в области D_2: при этом D_2, V_2 получаются из D_1, V_1, если поменять a_j, b_j местами.

Пусть один из эллипсоидов $\nu_1(\eta)=-1$, $\nu_2(\eta)=-1$ содержится в другом — скажем, первый во втором. Тогда $\nu(\eta)\equiv\nu_1(\eta)$ при всех η, так что $\nu\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, и асимптотика $G(1,x)$ имеет вид (3.51) при $|x|\to\infty$.

Пусть эллипсоиды $\nu_j(\eta) = -1$, $j = 1, 2$, пересекаются трансверсально. Тогда функция ν имеет угловые точки, а функция μ — плоские куски. В этом случае $D_1 \cup D_2$ не совпадает с $\mathbb{R}^n$ и теорема 3.7 не позволяет вычислить асимптотику G для всех направлений в $\mathbb{R}^n_x$.

Используя специфику данного примера, асимптотику G можно вычислить при всех x. Имеем

$$G(t, x) = G_1 * G_2 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x-\xi, t-\tau) G_2(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau,$$

где G_1, G_2 — фундаментальные решения уравнений с символами $\tau - i \sum_{j=1}^n a_j^2 \xi_j^2$, $\tau - i \sum_{j=1}^n b_j^2 \xi_j^2$ соответственно. Явный вид G_1, G_2 позволяет вычислить интеграл по $\mathbb{R}^n_\xi$:

$$G(1, x) = \pi^{-n/2} \int_0^1 \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{p_j + q_j} \right) \prod_{j=1}^n (p_j + q_j)^{-1/2} \, d\tau, \tag{3.52}$$

$$p_j = 4a_j^2 \tau, \quad q_j = 4b_j^2 (1-\tau).$$

Рассмотрим функцию, стоящую под знаком экспоненты:

$$S(\tau; x) = -\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{p_j + q_j}. \tag{3.53}$$

Основной вклад в асимптотику $G(1, x)$ вносят точки отрезка $I = [0, 1]$, в которых достигается максимум S. Заметим, что $S(0; x) = \mu_2(x)$, $S(1; x) = \mu_1(x)$, и если бы функция S при всех $x \neq 0$ достигала бы максимума только на концах отрезка, то асимптотика G определялась бы одной из точек перевала $\zeta^j(x)$ при всех x. Но при разных x максимум S достигается на разных концах отрезка; из непрерывности S по параметрам x следует, что при некоторых x функция S достигает максимума внутри отрезка I. Подкрепим сказанное прямой выкладкой. Пусть $n = 2$; положим $\alpha_j = a_j^2 - b_j^2$, $\beta_j = b_j^2$, так что

$$4S = -\frac{x_1^2}{\alpha_1 \tau + \beta_1} - \frac{x_2^2}{\alpha_2 \tau + \beta_2}.$$

При этом $\beta_j > 0$, $\alpha_j + \beta_j > 0$. Пусть $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$. Из уравнения $S'_\tau = 0$ находим $(\tau \in I)$

$$(\alpha_1\tau + \beta_1)\sqrt{-\alpha_2}x_2 = \sqrt{\alpha_1}x_1(\alpha_2\tau + \beta_2), \tag{3.54}$$

и так как функции $-(\alpha_i\tau + \beta_i)^{-1}$ выпуклы кверху при $\tau \in I$, то решение уравнения (3.54), принадлежащее I, является точкой максимума функции S. Из (3.54) находим

$$\tau(x) = \frac{\sqrt{\alpha_1}\,\beta_2|x_1| - \sqrt{-\alpha_2}\,\beta_1|x_2|}{\alpha_1\sqrt{-\alpha_2}|x_2| - \alpha_2\sqrt{\alpha_1}|x_1|}. \tag{3.55}$$

Эта точка лежит на интервале (0, 1), если

$$\frac{\sqrt{-\alpha_2}\,\beta_1}{\sqrt{\alpha_1}\,\beta_2} < \left|\frac{x_1}{x_2}\right| < \frac{\sqrt{-\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}} \cdot \frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_2+\beta_2} \tag{3.56}$$

Следовательно, если $|x| \to \infty$ в области (3.56), то

$$G(1, x) \sim \sqrt{2\pi}\,\pi^{-n/2}\exp[S(\tau(x); x)] \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n}[(p_j + q_j)(\tau(x))]^{-1/2}|S''_{\tau\tau}(\tau(x); x)|^{-1/2}. \tag{3.57}$$

Здесь $n = 2$,

$$S(\tau(x); x) = -\frac{\left(\sqrt{a_1^2 - b_1^2}|x_2| + \sqrt{b_2^2 - a_2^2}|x_1|\right)^2}{4\left(a_1^2b_2^2 - b_1^2a_2^2\right)}. \tag{3.58}$$

Аналогично исследуется случай $n > 2$. Окончательно получаем, что асимптотика функции $G(1, x)$ равна вкладу от точки $\tau(x)$, в которой достигается $\max\limits_{0<\tau<1} S(\tau; x)$. Точка $\tau(x)$ единственна. Если $\tau(x)$ лежит внутри отрезка [0, 1], то вклад определяется формулой (3.51). Если $\tau(x)$ совпадает с одним из концов отрезка [0, 1], то

$$G(1, x) \sim \pi^{-n/2}\exp[S(\tau(x); x)] \times$$
$$\times \left[\prod_{j=1}^{n}(p_j + q_j)(\tau(x))\right]^{-1/2}|S'_\tau(\tau(x); x)|^{-1} \tag{3.59}$$

(здесь $\tau(x) = 0$ или $\tau(x) = 1$, если $S'_\tau \neq 0$). Границей между зонами применимости асимптотик (3.57), (3.59) служат, очевидно, множества $S'_\tau(0, x) = 0$, $S'_\tau(1, x) = 0$, т. е. множество

$$\left\{x:\ \sum_{j=1}^{n}\frac{\left(a_j^2-b_j^2\right)x_j^2}{b_j^4}=0 \text{ или } \sum_{j=1}^{n}\frac{\left(a_j^2-b_j^2\right)x_j^2}{b_j^4}=0\right\}.$$

Асимптотика (3.58) определяется точкой перевала не функции $S(\zeta, x)$, а функции, стоящей под знаком интеграла (3.52):

$$F(\zeta, x)=\frac{\exp\left[i\tau_1(\zeta)\right]-\exp\left[i\tau_2(\zeta)\right]}{\tau_1(\zeta)-\tau_2(\zeta)}\exp\left[i\langle x, \zeta\rangle\right].$$

Точками перевала этой функции называются точки, в которых $F'_\zeta=0$. Делая замену переменных $\zeta\to|x|\zeta$, получаем для точек перевала уравнение

$$\nabla\tau_1(\zeta)+\omega+\frac{i\left(\nabla\tau_1(\zeta)-\nabla\tau_2(\zeta)\right)}{|x|^2\left(\tau_1(\zeta)-\tau_2(\zeta)\right)}=\left[\nabla\tau_2(\zeta)+\omega+\right.$$
$$\left.+\frac{i\left(\nabla\tau_1(\zeta)-\nabla\tau_2(\zeta)\right)}{|x|^2\left(\tau_1(\zeta)-\tau_2(\zeta)\right)}\right]\exp\left[i|x|^2\left(\tau_2(\zeta)-\tau_1(\zeta)\right)\right]. \quad (3.60)$$

Заметим, что если одна из экспонент $\exp(i|x|^2\tau_j(\zeta))$ много больше другой, то соответствующая точка перевала функции $F(\zeta, x)$ близка к точке перевала функции $S(\zeta, tx)$. Например, если $\exp(i|x|^2\tau_1)=o(\exp(i|x|^2\tau_2))$, то функция $F(\zeta, x)$ имеет точку перевала, близкую к точке $\zeta^2(x)$. Рассмотрим случай, когда рассматриваемые экспоненты примерно равны; именно, пусть

$$i|x|^2(\tau_2(\zeta)-\tau_1(\zeta))=c+o(1)\quad(|x|\to\infty), \quad (3.61)$$

где c — постоянная. Подставляя это соотношение в (3.60) и исключая c, получаем

$$\left(b_2^2-a_2^2\right)\left(2ia_1^2+\omega_1\zeta_1^{-1}\right)=\left(b_1^2-a_1^2\right)\left(2ia_2^2+\omega_2\zeta_2^{-1}\right)+o(1). \quad (3.62)$$

Из уравнений (3.61), (3.62) находим

$$\zeta_2=(t+o(1))\,\zeta_1,\quad t=\sqrt{\frac{a_1^2-b_1^2}{b_2^2-a_2^2}},$$

$$\zeta_1=\sqrt{b_2^2-a_2^2}\left(\omega_1\sqrt{b_2^2-a_2^2}+\right.$$
$$\left.+\,\omega_2\sqrt{a_1^2-b_1^2}\right)\left[2i\left(a_2^2b_1^2-a_1^2b_2^2\right)\right]^{-1}+o(1).$$

Далее, значение функции $i\tau_1(\zeta)+i\langle x, \zeta\rangle$ в найденной точке перевала (их две), как нетрудно проверить, совпадает со значением функции, стоящей под знаком экспоненты в (3.57), так что именно эта точка перевала и дает главный вклад в асимптотику $G(1, x)$ в области (3.56). Эта точка перевала при больших x лежит вблизи дискриминантного множества $\tau_1(\zeta)-\tau_2(\zeta)=0$ полинома P.

7. Асимптотика фундаментального решения при комплексных x. Рассмотрим уравнение

$$P'_{\zeta}(\zeta) = w, \tag{3.63}$$

и пусть $\{\zeta(w)\}$ — множество его решений.

Теорема 3.8. [90] *Пусть $P(\zeta)$ — однородный полином степени $m \geqslant 2$ такой, что* $\det P''_{\zeta\zeta}(\zeta) \not\equiv 0$. *Тогда существует вещественное алгебраическое множество $\widetilde{M} \subset \mathbb{C}^n_w$ коразмерности $\geqslant 1$, обладающее следующими свойствами:*

1°. *Если $w \notin \widetilde{M}$, то $\{\zeta(w)\}$ состоит из конечного ($\geqslant 1$) числа невырожденных точек перевала.*

2°. *Если $\zeta^1, \zeta^2 \in \{\zeta(w)\}$, $\zeta^1 \neq \zeta^2$, $w \notin \widetilde{M}$, то*

$$\operatorname{Re} P(\zeta^1) \neq \operatorname{Re} P(\zeta^2). \tag{3.64}$$

В силу теоремы 2.2 существует алгебраическое многообразие $M_C \subset \mathbb{C}^n_w$ коразмерности $\geqslant 2$ такое, что если $w \notin M_C$, то множество $\{\zeta(w)\}$ обладает свойством 1°. Ниже мы считаем, что $w \notin M_C$.

Система уравнений и неравенств

$$\begin{gathered} P'_{\zeta}(\zeta^1) = w, \qquad P'_{\zeta}(\zeta^2) = w, \\ \operatorname{Re} P(\zeta^1) = \operatorname{Re} P(\zeta^2), \quad \zeta^1 \neq \zeta^2 \end{gathered} \tag{3.65}$$

определяет вещественное полуалгебраическое множество в $\mathbb{C}^n_{\zeta^1} \times \mathbb{C}^n_{\zeta^2} \times \mathbb{C}^n_w$. Его проекция $\mathfrak{M}$ на $\mathbb{C}^n_w$ является, по теореме Зайденберга — Тарского, вещественным полуалгебраическим множеством. Допустим, что $\dim \mathfrak{M} = 2n$. Тогда существуют такая точка $w^0 \in \mathbb{C}^n_w$, что система (3.65) совместна при всех w из некоторой окрестности U этой точки. Так как $\dim M_C \leqslant 2n-2$, то можно считать, что U не пересекается с M_C. Выберем U настолько малой, чтобы множество $\{\zeta(w)\}$, $w \in U$, состояло из конечного числа голоморфных в U функций $\zeta^1(w), \ldots, \zeta^k(w)$. Из конечности k следует, что соотношения (3.65) должны выполняться для некоторой пары $\zeta^\alpha(w)$, $\zeta^\beta(w)$; пусть $\alpha = 1$,

$\beta = 2$. Тогда

$$\operatorname{Re}[P(\zeta^\alpha(w)) - P(\zeta^\beta(w))] = 0, \quad w \in U,$$

так что

$$P(\zeta^\alpha(w)) - P(\zeta^\beta(w)) = ia, \quad w \in U,$$

где a — вещественная постоянная. В силу однородности P имеем $a = 0$. Дифференцируя это тождество по w, получаем

$$\left(\zeta^\alpha(w)\right)'_w = \left(\zeta^\beta(w)\right)'_w w, \quad w \in U, \tag{3.66}$$

так как $P'_\zeta\left(\zeta^j(w)\right) = w$. В силу однородности P

$$\langle \zeta^\alpha(w), w \rangle = \langle \zeta^\beta(w), w \rangle, \quad w \in U.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\left(\zeta^\alpha(w)\right)'_w w + \zeta^\alpha(w) = \left(\zeta^\beta(w)\right)'_w w + \zeta^\beta(w).$$

Учитывая (3.66), находим, что $\zeta^\alpha(w) = \zeta^\beta(w)$ при $w \in U$, что противоречит предположению $\zeta^\alpha \not\equiv \zeta^\beta$. Тем самым доказано, что $\operatorname{codim} \mathfrak{M} \geqslant 1$.

Из этой теоремы и теоремы 2.8 вытекает

Теорема 3.9. *Пусть полином $P \in \mathcal{P}(2m, n)$ и удовлетворяет условию* (2.15). *Тогда при* $|w| \to \infty$, $w \notin \mathfrak{M}$,

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \exp[-P(\zeta) + \langle \zeta, w \rangle]\, d\zeta = (2\pi)^{-n/2}\left[\det P''_{\zeta\zeta}(\zeta(w))\right]^{-1/2} \times$$
$$\times \exp[(2m-1)P(\zeta(w))]\left[1 + O\left(|w|^{-2m/(2m-1)}\right)\right], \tag{3.67}$$

где $\zeta(w)$ — одна из точек перевала функции $S(\zeta, w)$.

Действительно, асимптотика этого интеграла равна сумме вкладов от точек перевала. Поскольку при $w \notin \mathfrak{M}$ значения $\operatorname{Re} S$ в этих точках различны, то в сумме вкладов остается только слагаемое с максимальным значением $\operatorname{Re} S$.

Интеграл $F(w)$, стоящий в левой части (3.67), является целой функцией w порядка роста $2m/(2m-1)$. *Индикатором* $L_F(w)$ целой функции F называется функция

$$L_F(w) = \varlimsup_{r \to \infty}\left[r^{-2m/(2m-1)} \ln|F(rw)|\right].$$

Следствие 3.5. *При* $w \notin \mathfrak{M}$

$$L_F(w) = (2m-1)\operatorname{Re} P(\zeta(w)).$$

В частности, $L_F(w)$ при $w \notin M$ являются кусочно-алгебраической плюрисубгармонической функцией. Из (3.67) следует также, что нули целой функции $F(w)$ сосредоточены в конической окрестности множества $\mathcal{M}$.

Для произвольных P возможен случай, когда *асимптотика* $G(1, x)$ *вообще не определяется точками перевала*, даже если они имеются. Так, в примере 3.5 при $x_1 < 0$ есть точки перевала, но $G(1, x_1, x_2) \equiv 0$ при $x_1 < 0$. Далее, точек перевала может не быть (т. е., грубо говоря, точка перевала находится на бесконечности).

Пример 3.8. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \lambda\xi_1 + i\lambda\xi_2\right] d\xi_1 d\xi_2.$$

Подынтегральная функция при $\lambda \neq 0$ не имеет точек перевала (см. пример 2.1).

Этот интеграл вычисляется, так что можно найти асимптотику $F(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$. Переходя к полярным координатам (r, φ), получаем при любом комплексном λ

$$F(\lambda) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp(-r^4 + \lambda r e^{i\varphi})\, r\, dr\, d\varphi = \\ = 2\pi\int_0^{\infty} r \exp(-r^4) dr = \frac{\pi^{3/2}}{2}.$$

§ 4. Устойчивость в C задачи Коши для разностных уравнений и уравнений с частными производными

1. Постановка задачи. Принцип локализации. Рассмотрим задачу Коши для однородной двуслойной линейной разностной схемы с постоянными комплексными коэффициентами

$$\sum_{\|l\| < h} a_l^1 u_{j+l}^{n+1} = \sum_{\|l\| < h} a_l^0 u_{j+l}^n, \tag{4.1}$$

$$u_j^0 = v_j, \tag{4.2}$$

где j, l — мультииндексы, $j = (j_1, \ldots, j_m)$, $\|j\| = \max\limits_s |j_s|$. Пусть $v = \{v_j\}$, j пробегает всю целочисленную m-мерную решетку. Введем C-норму $\|v\| = \sup\limits_j |v_j|$. Задача (4.1), (4.2) называется *устойчивой в равномерной метрике* (или в C), если существует такая постоянная a, не зависящая от n, что

$$\|u^n\|_C \leqslant a\|u^0\|_C \tag{4.3}$$

при всех n. Исследование устойчивости в C сводится к исследованию *разностной функции Грина* Γ_j^n (*функция единичной ошибки*), которая по определению является решением уравнения (4.1) с начальными данными $\Gamma_0^0 = 1$, $\Gamma_j^0 = 0$, $j \neq 0$. Положим

$$\gamma(n) = \sum_j |\Gamma_j^n|. \tag{4.4}$$

Здесь и далее сумма берется по всем целочисленным m-векторам.

Лемма 4.1. *Для устойчивости в C задачи* (4.1), (4.2) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{n\geqslant 0} \gamma(n) < \infty. \tag{4.5}$$

Решение задачи (4.1), (4.2) имеет вид

$$u_j^n = \sum_l \Gamma_{j-l}^n u_l^0. \tag{4.6}$$

Так как $\|u^n\|_C \leqslant \gamma(n)\|u^0\|_C$, то из (4.5) следует (4.3). Пусть (4.5) не выполняется. Рассмотрим данные Коши v^k такие, что $v_{-j}^k = \bar{\Gamma}_j^k / |\Gamma_j^n|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда $\|v^k\|_C = 1$. Если $u^{n,k}$ — решение задачи Коши с данными v^k, то по построению $u_0^{n,n} = \gamma(n)$, и оценка (4.3) не имеет места.

Разностная функция Грина вычисляется в явном виде с помощью дискретного преобразования Фурье. Обозначим

$$P(z) = \sum_{|l|<k} a_l^0 z^l, \quad Q(z) = \sum_{|l|<k} a_l^1 z^l, \tag{4.7}$$

$$f(z) = P(z)/Q(z),$$

где $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $z^l = z_1^{l_1} \ldots z_m^{l_m}$, и положим $\tilde{u}^n(z) = \sum_j u_j^n z^j$. Тогда уравнение (4.1) примет вид

$$\tilde{u}^{n+1}(z) = f(z)\tilde{u}^n(z),$$

так что $\tilde{u}^n(z) = [f(z)]^n \tilde{u}^0(z)$. Отсюда находим, что

$$\Gamma_j^n = (2\pi i)^{-m} \int_{T^m} [f(z)]^n z^{j-1} dz, \tag{4.8}$$

где T^m — единичный тор $|z_1| = 1, \ldots, |z_m| = 1$,

$$\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1), \quad dz = dz_1 \ldots dz_m.$$

Кроме того,

$$f^n(z) = \sum_j \Gamma_j^n z^{-j}, \quad z \in T^m. \tag{4.9}$$

Потребуем, чтобы $Q(z) \neq 0$ при $z \in T^m$; это условие необходимо для разрешимости задачи (4.1), (4.2). Положим

$$M(f) = \max_{z \in T^m} |f(z)|. \tag{4.10}$$

Лемма 4.2. *Если $M(f) < 1$, то при $n \geqslant 0$*

$$\gamma(n) \leqslant Cn^{2m} [M(f)]^n, \tag{4.11}$$

где C — постоянная. Если $M(f) > 1$, то при $n \geqslant 0$

$$\gamma(n) \geqslant [M(f)]^n. \tag{4.12}$$

Отсюда следует, что задача Коши (4.1), (4.2) устойчива в C, если $M(f) < 1$, и неустойчива в C, если $M(f) > 1$.

Из (4.9) следует, что $|f^n(z)| \leqslant \gamma(n)$, и (4.12) доказано. Пусть все $j_s > 0$. Интегрируя по частям по dz_1, получаем

$$\Gamma_j^n = -(2\pi i)^{-m} n j_1^{-1} \int_T f^{n-1} \frac{\partial f}{\partial z_1} z_1^{j_1} z_2^{j_2-1} \ldots z_m^{j_m-1} dz,$$

откуда следует оценка $|\Gamma_j^n| \leqslant Cnj_1^{-1}(M(f))^n$. Проинтегрируем по частям еще раз по z_1 и затем точно так же по переменным $z_2, \ldots, z_m$; это дает оценку

$$|\Gamma_j^n| \leqslant Cn^{2m}(M(f))^n \left(\prod_{s=1}^m j_s(j_s+1)\right)^{-1}.$$

Из этой оценки и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ следует оценка (4.11). Случай $j_1 < -1$, $j_2 > 0, \ldots, j_m > 0$ сводится к рассмотренному нами с помощью замены $z_1 = \zeta_1^{-1}$, и аналогично исследуются остальные случаи. Тем самым (4.11) доказано.

Наиболее интересным является случай $M(f) = 1$; именно он и возникает при аппроксимации дифференциальных уравнений разностными. Всюду в дальнейшем $M(f) = 1$.

Пусть $T^m(f)$ — множество точек $z \in T^m$, в которых $|f(z)| = 1$.

Лемма 4.3 (принцип локализации). 1°. *Существует $b > 0$ такое, что при $n \geqslant 0$*

$$\sum_{\|j\| \geqslant bn} |\Gamma_j^n| \leqslant c_1 e^{-c_2 n}, \quad c_2 > 0. \tag{4.13}$$

2°. *Устойчивость или неустойчивость задачи* (4.1), (4.2) *в C зависит только от поведения функции f в окрестности множества $T^m(f)$.*

Так как функция $f(z)$ голоморфна при $z \in T^m$, то $f(z)$ голоморфна при $1 - \varepsilon \leqslant |z| \leqslant 1 + \varepsilon$, $1 \leqslant s \leqslant m$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Пусть все $j > 0$ и $T_\varepsilon^m: |z_s| = 1 - \varepsilon$, $1 \leqslant s \leqslant m$. По теореме Коши

$$\Gamma_j^n = (2\pi i)^{-m} \int\limits_{T_\varepsilon^m} f^n(z) z^{j-1} dz,$$

$$|\Gamma_j^n| \leqslant q^n (1 - \varepsilon)^{\|j\|},$$

где $q = \max\limits_{z \in T_\varepsilon^m} |f(z)|$. Пусть $N(t)$ — число всех целочисленных векторов таких, что $\|j\| \leqslant t$, тогда

$$N(t) \sim c_0 t^m \quad (t \to +\infty, \ c_0 > 0). \tag{4.14}$$

Следовательно,

$$s = \sum_{j_\alpha > 0, \|j\| \geqslant bn} |\Gamma_j^n| \leqslant q^n \int\limits_{bn}^{\infty} (1 - \varepsilon)^t \, dN(t) =$$

$$= q^n \left[(1 - \varepsilon)^{bn} N(bn) - \ln(1 - \varepsilon) \int\limits_{bn}^{\infty} (1 - \varepsilon)^t N(t) \, dt \right].$$

Учитывая асимптотику $N(t)$, получаем

$$s \leqslant c n^m q^n (1 - \varepsilon)^{bn} \leqslant c_1 e^{-c_2 n}, \quad c_2 > 0,$$

если $b \gg 1$. Аналогично исследуется случай, когда j лежит в других октантах.

Докажем 2°. В случае $T^m(f) = T^m$ лемма очевидна. Пусть $T^m(f) \neq T^m$. Устроим на T^m разбиение единицы $1 = \tilde\varphi(z) + \tilde{\tilde\varphi}(z)$ класса C^∞, где $\tilde\varphi(z) = 0$ вне некоторой окрестности множества $T^m(f)$, и положим $\Gamma_j^n = \tilde\Gamma_j^n + \tilde{\tilde\Gamma}_j^n$. Так как $|f(z)| \leqslant 1 - \varepsilon$ на $\operatorname{supp} \tilde{\tilde\varphi}$, то тем же способом, что в лемме 4.2, можно показать, что

$$\left|\sum_j \tilde{\tilde{\Gamma}}_j^n\right| \leqslant c_1 e^{-c_2 n}, \quad c_2 > 0.$$

Таким образом, при $n \geqslant 0$

$$\gamma(n) = \sum_j |\tilde{\Gamma}_j^n| + O(e^{-cn}), \quad c > 0. \tag{4.15}$$

2. Критерии устойчивости и неустойчивости в C задачи (4.1), (4.2). Мы ограничимся исследованием случая, когда множество $T^m(f) = \{z \in T^m\colon |f(z)| = 1\}$ состоит из конечного числа изолированных точек. Пусть $z^0 \in T^m(f)$; положим

$$\Gamma_j^n(z^0) = (2\pi i)^{-m} \int_{T^m} f^n(z)\,\varphi(z, z^0)\,z^{j-1}dz,$$
$$\gamma(n, z^0) = \sum_j |\Gamma_j^n(z^0)|, \tag{4.16}$$

где функция $\varphi \in C_0^\infty(T^m)$, равна нулю вне некоторой окрестности точки z^0, равна 1 при z, близких к z^0. Назовем изолированную точку z^0 *точкой устойчивости*, если

$$\sup_{n \geqslant 0} \gamma(n, z^0) < \infty,$$

и *точкой неустойчивости* — в противном случае.

Лемма 4.4. *Если $T^m(f)$ состоит из конечного числа точек $z^1, \ldots, z^s$, то при $n \geqslant 0$*

$$\gamma(n) \geqslant c \max_k \gamma(n, z^k), \tag{4.17}$$

где $c > 0$ и не зависит от n.

Пусть $\Phi_k(z)$ — финитная функция, обладающая теми же свойствами относительно точки z^k, что и функция $\varphi(z, z^0)$ (см. (4.16)) относительно точки z^0. Разложим Φ_k в ряд Фурье (при $z \in T^m$): $\Phi_k = \sum_l \varphi_{lk} z^l$; тогда

$$\Gamma_j^n(z^k) = \sum_l \varphi_{lk} \Gamma_{j+l}^n.$$

Следовательно,

$$\gamma(n, z^k) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_j \Big(\sum_l |\varphi_{lk}|\,|\Gamma_{j+l}^n|\Big) \leqslant \sum_l |\varphi_{lk}| \Big(\sum_j |\Gamma_{j+l}^n|\Big) = \gamma(n) \sum_l |\varphi_{lk}|,$$

и (4.17) доказано, так как не все φ_{lk} равны нулю.

Следствие 4.1. *Если $T^m(f)$ состоит из конечного числа точек, то задача (4.1), (4.2) устойчива в C тогда и только тогда, когда все эти точки являются точками устойчивости.*

Итак, задача свелась к оценке сумм $\gamma(n, z^k)$. Положим $z = e^{i\varphi}$ при $z \in T^m$, т. е. $z_j = e^{i\varphi_j}$, $1 \leqslant j \leqslant m$,

$$F(\varphi) = \ln f(z). \tag{4.18}$$

Это представление мы используем только вблизи точки z^0, и выбор голоморфной ветви $\ln f(z)$ несуществен. Действительно, ветви логарифма отличаются на $2k\pi i$, $\exp(n2k\pi i) = 1$. Если $z^0 \in T^m(f)$, то $\operatorname{Re} F(\varphi^0) = 0$, $\operatorname{Re} \nabla F(\varphi^0) = 0$, так как z^0 — стационарная точка функции $|f|$ на T^m. Положим

$$j - in\nabla F(\varphi^0) = x, \tag{4.19}$$

где $i = \sqrt{-1}$. Тогда

$$\Gamma_j^n(z^0) = (2\pi i)^{-m} \exp[nF(\varphi^0) + i\langle j, \varphi^0\rangle] I(x, n),$$

$$I(x, n) = \int_{U^0} \exp[nS(\varphi, x/n)]\, h(\varphi)\, d\varphi. \tag{4.20}$$

Здесь U^0 — малая вещественная окрестность точки $\varphi = 0$, $h \in C_0^\infty(U^0)$,

$$S(\varphi, y) = F(\varphi + \varphi^0) - F(\varphi^0) - \langle F'_\varphi(\varphi^0), \varphi\rangle + i\langle y, \varphi\rangle. \tag{4.21}$$

Уточним принцип локализации.

Лемма 4.5. *Пусть z^0 — изолированная точка множества $T^m(f)$. Тогда при любом $\delta > 0$*

$$\gamma(n, z^0) = \gamma_\delta(n, z^0) + O(e^{-cn}), \tag{4.22}$$

где $c = c(\delta) > 0$,

$$\gamma_\delta(n, z^0) = \sum_{\|j\| < \delta n} |\Gamma_j^n(z^0)|. \tag{4.23}$$

Разобьем сумму $\gamma(n, z^0)$ на три: по областям D_1: $\|x\| \leqslant \delta n$, D_2: $\delta n \leqslant \|x\| \leqslant bn$, D_3: $|x| \geqslant bn$. Если $b > 0$ достаточно велико, то последняя сумма имеет порядок $O(e^{-cn})$, что доказывается так же, как и лемма 2.3, и п. 1°. При $\varphi \in U^0$ функция $\operatorname{Re} S$ (см. (4.21)) равна нулю в точке $\varphi = 0$ и отрицательна во всех остальных точках. Точка $\varphi = 0$ не является точкой перевала функции S, так как $S'_\varphi(0, y) = iy$, $\delta \leqslant \|y\| \leqslant b$. Следовательно, по леммо 1.2 можно заменить окрестность $C^0 \subset U^0$ точки $\varphi = 0$ контуром $\gamma \subset \mathbf{C}^m_*$, на котором $\operatorname{Re} S(\varphi, y) \leqslant -\varepsilon < 0$; это можно сделать равномерно по y, $\delta \leqslant \|y\| \leqslant b$. Тогда $\operatorname{Re} S(\varphi, y) \leqslant -\varepsilon_0 < 0$ на полученном контуре, так что

$$|\Gamma^n_j(z^0)| \leqslant (2\pi)^{-m} |I(x, n)| \leqslant Ce^{-\varepsilon_0 n}.$$

Из этой оценки и (4.14) получаем

$$\sum_{\delta n < \|j\| < bn} |\Gamma^n_j(z^0)| \leqslant ce^{-\varepsilon_0 n} N_0(bn) \leqslant c' n^m e^{-\varepsilon_0 n},$$

и лемма доказана.

Получим основные критерии устойчивости и неустойчивости изолированной точки множества $T^m(j)$. Нам понадобится

Лемма 4.6. *Пусть функция $H(x) \in C^\infty$ вещественна при $\|x\| \leqslant \delta$ и*

$$H'_x(0) = 0; \quad H(x) < 0, \quad \|x\| = \delta. \tag{4.24}$$

Тогда при $n \to +\infty$ и при достаточно малом $\delta > 0$

$$\sum_{\|x\| < \delta n} \exp\left[nH\left(\frac{x}{n}\right)\right] = \\ = n^m [1 + O(\delta)] \int_{\|x\| < \delta} \exp\left[nH\left(\frac{x}{n}\right)\right] dx + O(e^{-cn}), \quad c > 0. \tag{4.25}$$

Воспользуемся тождеством

$$\sum_a^b h(k) = \int_{a-1}^b h(y)\,dy + \int_{a-1}^b \psi(y)\,h'(y)dy, \quad \psi = y - [y],$$

где y — одно переменное, a, b — целые числа, $[y]$ — целая часть y. Сумма в (4.25) берется по всем целочисленным точкам x таким, что $-\delta n \leqslant x_j \leqslant \delta n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Фиксируем $x' = (x_2, \ldots, x_m)$, тогда

$$\sum_{|x_1| < \delta n} \exp\left[nH\left(\frac{x}{n}\right)\right] = \int_{-\delta n}^{\delta n} \exp\left[nH\left(\frac{x_1}{n}, \frac{x'}{n}\right)\right] dx_1 + \\ + \int_{-\delta n}^{\delta n} \psi(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} H\left(\frac{x}{n}\right) dx_1 + O(e^{-cn}), \quad c > 0. \tag{4.26}$$

Последнее слагаемое появляется из-за изменения пределов интегрирования (мы берем δn вместо $[\delta n]$ и т. д.), а оценка для него следует из (4.24) и c не зависит от n. Так как $H'_x(0) = 0$, то $H'_x(x) = O(\delta)$ при малых δ, и модуль второго интеграла в (4.26) не превосходит величины $c\delta I$, где I — первый интеграл, c не зависит от x'. Следовательно,

$$\sum_{|x_1|<\delta n} \exp\left[nH\left(\frac{x}{n}\right)\right] = $$
$$= (1 + O(\delta)) \int_{-\delta n}^{\delta n} \exp\left[nH\left(\frac{x}{n}\right)\right] dx_1 + O(e^{-cn})$$

равномерно по x'. Суммируя далее по $x_2, \ldots, x_m$, получаем, что сумма из левой части (4.25) равна

$$[1 + O(\delta)] \int_{\|x\|<\delta n} \exp\left[nH\left(\frac{x}{n}\right)\right] dx + O(e^{-cn}),$$

и (4.25) доказано.

Теорема 4.1. *Пусть* $z^0 \in T^m(f)$ *и*

$$\operatorname{Re} F''_{\varphi\varphi}(\varphi^0) < 0. \tag{4.27}$$

Тогда z^0 *— точка устойчивости, и при* $n \geqslant 0$

$$0 < c_1 \leqslant \gamma(n, z^0) \leqslant c_2. \tag{4.28}$$

В силу леммы 4.5 достаточно исследовать сумму $\gamma_\delta(n, z^0)$, где $\delta > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, но не зависящим от n. Положим $B = F''_{\varphi\varphi}(\varphi^0)$, тогда при малых $|\varphi|$ функция S (см. (4.21)) имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\langle B\varphi, \varphi\rangle + i\langle y, \varphi\rangle + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены порядка 3 и выше. При $y = 0$ уравнение $S'_\varphi = 0$ имеет при малых $|\varphi|$ единственное решение $\varphi = 0$, которое является невырожденной точкой перевала. При малых $\|y\|$ точка перевала, близкая к точке $\varphi = 0$, имеет вид

$$\tilde{\varphi}(y) = -iB^{-1}y + O(\|y\|^2),$$

и асимптотика интеграла $I(x, n)$ (см. (4.20)) по теореме 1.3 равна вкладу от этой точки при $\|y\| \leqslant \delta$, если $\delta > 0$

достаточно мало. Следовательно, при $n \to \infty$, $\|x/n\| \leqslant \delta$,

$$I(x, n) = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{m/2} \exp\left[nS\left(\tilde{\varphi}\left(\frac{x}{n}\right), \frac{x}{n}\right)\right][1 + O(\delta)]\,(\det B)^{-1/2} \tag{4.29}$$

при подходящем выборе ветви корня (см. (1.10), (1.11)). Далее,

$$nS\left(\tilde{\varphi}\left(\frac{x}{n}\right), \frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2n}\langle x, B^{-1}x\rangle\,[1 + O(\delta)]. \tag{4.30}$$

Так как по условию матрица $\operatorname{Re} B$ положительно определена, то матрица $\operatorname{Re} B^{-1}$ также положительно определена. Следовательно, существуют постоянные a_1, $a_2 > 0$ такие, что

$$-2a_1\|x\|^2 \leqslant \operatorname{Re}\langle x, B^{-1}x\rangle \leqslant -2a_2\|x\|^2$$

при всех вещественных x, и мы получаем оценку

$$A_1 n^{-m/2} \exp\left(-\frac{a_1\|x\|^2}{n}\right) \leqslant |I(x, n)| \leqslant A_2 \exp\left(-\frac{a_2\|x\|^2}{n}\right)$$

при $\|x\|/n \leqslant \delta$. Поэтому

$$\gamma_\delta(n, z^0) \leqslant A_2 n^{-m/2} \sum_{\|x\| < n\delta} \exp\left(-\frac{a_1\|x\|^2}{n}\right),$$

и справедлива аналогичная оценка снизу. Применяя лемму 4.6, получаем

$$\gamma(n, z^0) \leqslant Bn^{m/2} \int\limits_{\|x\|<\delta} \exp(-na_2\|x\|^2)\,dx =$$
$$= B'(1 + o(1)) \quad (n \to \infty), \quad B' \neq 0,$$

так как асимптотика последнего интеграла равна $\operatorname{const} n^{-m/2}$.

Аналогично доказывается оценка (4.28) снизу.

Теорема 4.2. *Пусть $z^0 \in T^m(f)$ и*

$$\det F''_{\varphi\varphi}(\varphi^0) \neq 0, \ \operatorname{rank} \operatorname{Re} F''_{\varphi\varphi}(\varphi^0) = r < m. \tag{4.31}$$

Тогда z^0 — точка неустойчивости, и при $n \geqslant 0$

$$0 < c_1 n^{(m-r)/4} \leqslant \gamma(n, z^0) \leqslant c_2 n^{(m-r)/2} \varepsilon(n),$$
$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0. \tag{4.32}$$

Так как φ^0 — точка максимума функции $\operatorname{Re} F(\varphi)$, то $\operatorname{Re} B \leqslant 0$, $B = F''_{\varphi\varphi}(\varphi^0)$. Покажем, что тогда $\operatorname{Re} B^{-1} \leqslant 0$, $\operatorname{rank} \operatorname{Re} B^{-1} = \operatorname{rank} \operatorname{Re} B$. Имеем

$$\operatorname{Re} B^{-1} = \frac{1}{2}\left(B^{-1} + \bar{B}^{-1}\right) = B^{-1} \operatorname{Re}\left(B\bar{B}^{-1}\right),$$

так что ранги матриц $\operatorname{Re} B$, $\operatorname{Re} B^{-1}$ равны. Так как $\operatorname{Re} B$ — вещественная симметричная матрица, то существует вещественная ортогональная матрица T такая, что $\operatorname{Re} B = T^{-1}\Lambda T$, где Λ — диагональная матрица. Положим $y = TB^{-1}x$, $x \in \mathbf{R}^n$, тогда

$$\langle\left(\operatorname{Re} B^{-1}\right) x, x\rangle = \langle \Lambda y, y\rangle = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Re} \lambda_i \,|\psi_i|^2 \leqslant 0,$$

так как $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant 0$, и потому $\operatorname{Re} B^{-1} \leqslant 0$.

В силу леммы 4.5 достаточно оценить сумму $\gamma_\delta(n, z^0)$ при малом $\delta > 0$. Из (4.29) и леммы 4.6 получаем оценку

$$\gamma_\delta(n, z^0) \leqslant cn^{m/2} I(n, \delta) + O(e^{-c'n}), \tag{4.33}$$

где обозначено

$$I(n, \delta) = \int\limits_{\|y\|<\delta} \exp[nH(y)]\,dy, \qquad H(y) = \operatorname{Re} S(\varphi(y), y), \tag{4.34}$$

и такая же оценка имеет место для γ_δ снизу. Далее, из (4.30) следует, что $H(y) = \langle H_0 y, y\rangle + O(\|y\|^3)$, где H_0 — симметричная матрица, $H_0 \leqslant 0$, $\operatorname{rank} H_0 = r$. В силу леммы 3.5.1 с помощью гладкой замены $y = \varphi(t)$, $\det \varphi'_t(0) \neq 0$ переменных можно привести H при малых $\|y\|$ к виду

$$H(y) = -\sum_{j=1}^{r} t_j^2 + H_1(t'), \quad t' = (t_{r+1}, \ldots, t_n),$$

где функция H_1 имеет нуль порядка $\geqslant 3$ в точке $t' = 0$. По построению, $H(y) < 0$ при малых $\|y\|$, $y \neq 0$, и это свойство сохраняется при переходе к переменным t. Следовательно, функция $H_1(t')$ имеет нуль порядка $\geqslant 4$ в точке $t' = 0$, $H_1(t') < 0$ при малых $t' \neq 0$, так что $H_1(t') \geqslant -c|t'|^4$. Переходя к переменным t, получаем

$$I(n, \delta) = \int\limits_{U} \det \varphi'_t(t) \exp(nH(y))\,dt,$$

где U — малая окрестность точки $t=0$. Применим метод Лапласа по переменным $t_1, \ldots, t_r$, тогда

$$I(n, \delta) = n^{-r/2} \int\limits_{U'} \exp[nH(t')][\psi(t') + O(n^{-1})]\, dt', \quad (4.35)$$

где $\psi(0) \neq 0$, U' — малая окрестность точки $t'=0$. В силу полученной выше оценки для H_1 имеем

$$I(n, \delta) \geqslant cn^{-r/2} \int\limits_{U'} \exp(-nc' |t'|^4)\, dt' \geqslant c'' n^{-r/2-(m-r)/4},$$

и оценка (4.32) снизу доказана. Интеграл, стоящий в правой части равенства (4.35), есть $o(1)$ при $n \to +\infty$, так что $I(n, \delta) = o(n^{-r/2})$, что доказывает оценку (4.32) сверху.

Замечание 4.1. В (4.32) имеются «ножницы» между оценками сверху и снизу. Это вызвано тем, что в данном случае поведение $\gamma_\delta(n, z^0)$ не определяется только квадратичными членами тейлоровского разложения функции $F(\varphi)$ по степеням $\varphi - \varphi^0$.

Разложим $F(\varphi)$ в ряд Тейлора при φ, близких к точке φ^0:

$$F(\varphi) = F(\varphi^0) + F_1(\varphi) + \ldots + F_q(\varphi) + \ldots, \quad (4.36)$$

где $F_q(\varphi)$ — однородный полином степени q от переменных $\varphi - \varphi^0$.

Следствие 4.1. *Пусть условия теоремы* 4.2 *выполнены*, $r=0$ *и*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} F_s(\varphi) = 0, \quad 3 \leqslant s \leqslant 2q-1; \\ &\operatorname{Re} F_{2q}(\varphi) < 0, \quad \varphi \neq \varphi^0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Тогда z^0 — *точка неустойчивости и*

$$0 < c_1 n^{\frac{m}{2}(1-q^{-1})} \leqslant \gamma(n, z^0) \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}(1-q^{-1})}. \quad (4.38)$$

Доказательство. Из условия (4.37) и доказательства теоремы 4.2 следует, что

$$\gamma_\delta(n, z^0) \leqslant cn^{m/2} \int\limits_{|x|<\delta} \exp\left[-nc' |x|^{2q}\right] dx,$$

и аналогичная оценка имеет место для γ_δ снизу. Последний интеграл имеет порядок $\mathrm{const}\, n^{-m/2q}$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим один пример вырожденной стационарной точки φ^0.

Теорема 4.3. *Пусть* $z^0 \in T^m(f)$ *и*

$$F_j(\varphi) = 0, \quad 2 \leqslant j \leqslant 2p-1; \quad \operatorname{Re} F_{2p}(\varphi) < 0, \quad \varphi \neq \varphi^0. \quad (4.39)$$

Тогда z^0 — *точка устойчивости, и при* $n \geqslant 0$ *выполняется неравенство* (4.28).

Из условий теоремы следует, что z^0 — изолированная точка множества $T^m(f)$. Оценка (4.28) снизу доказывается точно так же, как и оценка (4.12); докажем оценку сверху. Мы не можем в данном случае вычислить асимптотику интеграла Γ_j^n, так как точки перевала являются вырожденными, и получим только оценку для $|\Gamma_j^n|$. По условию $\operatorname{Re} F_{2p}(\varphi) \leqslant -c|\varphi-\varphi^0|^{2p}$, так что $\operatorname{Re} F(\varphi) \leqslant -c'|\varphi-\varphi^0|^{2p}$, $c' > 0$, при малых $|\varphi-\varphi^0|$. Следовательно,

$$|\Gamma_j^n| \leqslant \int\limits_{|\varphi-\varphi^0|<\delta} \exp\left[-nc'\,|\varphi-\varphi^0|^{2p}\right] d\varphi \leqslant cn^{-m/(2p)}.$$

Разобьем сумму $\gamma_\delta(n, z^0)$ на две: $\gamma_\delta^1 + \gamma_\delta^2$, где γ_δ^1 — сумма по x, $\|x\| \leqslant n^{1/2p}$. В силу полученной выше оценки имеем $\gamma_\delta \leqslant c_1$. Оценим γ_δ^2. Введем обозначения

$$y = \frac{x}{\|x\|}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\|x\|}{n}\right)^{1/(2p-1)}, \quad \mu = \left(\frac{\|x\|}{n}\right)^{1/(2p-1)}$$

и разобьем интеграл (4.20) на два: $I_1 + I_2$, где I_1 — интеграл по области $|\varphi-\varphi^0| \leqslant \varepsilon$.

Сделаем замену $\varphi-\varphi^0 = \varepsilon t$, тогда

$$I_1 = \varepsilon^m \int\limits_{\|t\|<1} \exp\left[\mu S(t, \varepsilon, y)\right] dt,$$

$$S = F_{2p}(t) + i\langle y, t\rangle + \varepsilon F_{2p+1}(t) + \ldots$$

Имеем $\operatorname{Re} S \leqslant -c < 0$ при $\|t\| = 1$, так что $|I_2| \leqslant \leqslant c\varepsilon^m \exp(-c'\mu)$, $c' > 0$. Уравнение $(F_{2p}(t))_t' + iy = 0$ не имеет вещественных решений при вещественных $y \neq 0$. Действительно, если t^0 — решение этого уравнения, то, в силу однородности F_{2p} и формулы Эйлера, $2pF_{2p}(t^0) = -i\langle y, t^0\rangle$, так что $\operatorname{Re} F_{2p}(t^0) = 0$, что противоречит условию (4.29). Применяя лемму 1.2, можно заменить область интегрирования контуром γ в $\mathbb{C}_\varphi^n$ таким, что $\operatorname{Re} S \leqslant -\delta_0 < 0$ на γ равномерно по y, $\|y\| = 1$. Это дает для I_1 ту же оценку, что и для I_2. Из полученных оценок для I_j

и леммы 4.6 получаем, что

$$\gamma_\delta^2 \leqslant c \int\limits_{n^{1/2p}}^{\delta n} \varepsilon^m \exp(-c'\mu)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{|x|\geqslant 1} \| x \|^{m/(2p-1)} \exp\left(-c' \| x \|^{2p/(2p-1)}\right) dx = \text{const}.$$

В теории разностных схем важную роль играет следующее понятие, которое является обобщением понятия характеристики дифференциального уравнения.

Множество $\tau(n)$ целочисленных m-векторов называется *зоной размазывания единичной ошибки* на n-м слое при $n \to \infty$, если

$$\sum_{j \in \tau(n)} |\Gamma_j^n| = o(1) \quad (n \to \infty).$$

Если $z^0 \in T^m(f)$ — изолированная точка этого множества, то обозначим $\tau(n, z^0)$ множество целочисленных векторов таких, что

$$\sum_{j \in \tau(n, z^0)} |\Gamma_j^n(z^0)| = o(1) \quad (n \to \infty).$$

Если множество $T^m(f)$ состоит из изолированных точек $z^1, \ldots, z^k$, то очевидно, что $\tau(n) = \bigcup\limits_{l=1}^{k} \tau(n, z^l)$.

Из доказательств теорем 4.1—4.3 следует, что

$$\tau(n, z^0) \subset \{j: \| j - i\nabla F(\varphi^0) \| \leqslant \varepsilon(n)\varphi(n)\},$$

где $\varepsilon(n)$ — любая такая функция, что $\varepsilon(+\infty) = +\infty$, и $\varphi(n) = \sqrt{n}$ в условиях теоремы 4.1, $\varphi(n) = \sqrt[2p]{n}$ в условиях следствия 4.1 и теоремы 4.3.

Аналогичные результаты получены в [61] для систем разностных уравнений и для систем уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами вида (3.1).

§ 5. Асимптотика некоторых коэффициентов ряда Фурье по сферическим гармоникам

Пусть r, θ, φ — сферические координаты в $\mathbf{R}^3$, M — сфера $r = a$, f — гладкая функция в $\mathbf{R}^3$. Обозначим $f(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ значение f в точке $(a, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ на сфере M, тогда справедливо разложение в ряд Фурье по сферическим гармоникам

$$f(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} f_{nm} P_n^{(|m|)} (\cos\tilde{\theta})\, e^{in\tilde{\varphi}}.$$

Задачи распространения волн приводят к исследованию асимптотики коэффициентов Фурье f_{nm} для функций f специального вида. Ниже приведены результаты, полученные в [92]. Пусть

$$f = e^{ik_N(R+S_0)}g,$$

где $R^2 = r^2 + a^2 - 2ar[\cos(\tilde{\varphi} - \varphi)\sin\theta \sin\tilde{\theta} + \cos\theta\cos\tilde{\theta}]$ (R — расстояние между точками (r, θ, φ) и $(a, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) \in M$), функции S_0, g зависят только от $z = r\cos\theta$ и гладкие. Далее,

$$(\nabla S_0)^2 = 1, \quad k_N = \sqrt{\pi N}/(ah),$$

где $h > 0$ — постоянная, $N \gg 1$. Исследуем асимптотику коэффициента Фурье f_{l0} при $N \to \infty$, $l = \sqrt{3N}$ (происхождение последнего условия см. в [91]).

Коэффициент f_{l0} имеет вид

$$f_{l0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi} P_l(\cos\tilde{\theta})\, f(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})\, d\tilde{\theta}.$$

Однако асимптотика полинома Лежандра $P_l(\cos\tilde{\theta})$ при $l \to \infty$ имеет весьма сложный вид, и потому весьма трудно найти асимптотику f_{l0} с помощью этой формулы. Приведем другую формулу для f_{l0} в предположении, что функции S_0, g голоморфны в окрестности сферы M.

Пусть D — область в комплексной плоскости t, содержащая отрезок $I = [-1, 1]$, функция $w(t)$ голоморфна в области D. В некоторой окрестности отрезка I функция $w(t)$ разлагается в ряд по полиномам Лежандра: $w(t) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l P_l(t)$. Для коэффициентов w_l справедлива формула

$$w_l = \frac{2l+1}{2\pi i} \oint_C w(t)\, Q_l(t)\, dt. \tag{5.1}$$

Здесь $Q_l(t)$ — присоединенные функции Лежандра, C — положительно ориентированная простая замкнутая кривая, лежащая в D и содержащая внутри себя отрезок I.

Возьмем в качестве C эллипс с фокусами -1; 1; его можно задать уравнением

$$t = \cos\tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = \alpha + i\rho \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi,\ \rho > 0).$$

При $l \to \infty$ равномерно по t, лежащим на C и вне C, справедлива асимптотическая формула [33]

$$Q_l(\cos\tilde{\theta}) = l^{-1/2} e^{il\tilde{\theta}} \psi(\tilde{\theta}) \left[1 + O(l^{-1})\right]. \tag{5.2}$$

Явный вид функции ψ несуществен; важно лишь, что она голоморфна вне C и то же самое верно для остаточного члена. Применяя формулу (5.1), получаем

$$f_{l0} = \frac{2l+1}{i} \int\limits_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int\limits_{i\rho}^{2\pi + i\rho} f Q_l(\cos\tilde{\theta}) \sin\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta}.$$

Полагая $l = \sqrt{3N}$ и учитывая явный вид функции f и (5.2), получаем

$$\begin{gathered} f_{l0} = A \int\limits_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int\limits_{i\rho}^{2\pi + i\rho} e^{i\sqrt{3N} S} w\, d\tilde{\theta}, \\ S = (R + S_0)(a\tilde{h})^{-1} + \tilde{\theta}, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где обозначено

$$A = -i(2l+1), \quad w = g(a\cos\tilde{\theta})\psi(\cos\tilde{\theta})[1 + O(l^{-1})],$$
$$\tilde{h} = h\sqrt{3/\pi}.$$

Заметим, что интеграл (5.3) берется по двумерному тору T^2: $|z| = 1$, $|t| = e^{-\rho}$ в двумерном комплексном пространстве, где $z = e^{i\tilde{\varphi}}$, $t = e^{i\tilde{\theta}}$. Точки перевала функции S определяются из системы

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{\theta}} = \frac{1}{a}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{1}{a}\frac{\partial S_0}{\partial \tilde{\theta}} - \tilde{h} = 0. \tag{5.4}$$

Так как функции R, S_0 удовлетворяют уравнению эйконала $(\nabla S)^2 = 1$, то на сфере M имеем $|a^{-1}\partial R/\partial\tilde{\theta}| \leqslant 1$, $|a^{-1}\partial S_0/\partial\tilde{\theta}| \leqslant 1$. Поэтому второе из уравнений (5.4) не имеет вещественных решений, если

$$\tilde{h} > 2. \tag{5.5}$$

В дальнейшем предполагается, что условие (5.5) выполнено. Тогда коэффициент Фурье f_{l0} экспоненциально убывает при $N \to \infty$. Действительно, в силу леммы 1.2 тор T^2 можно продеформировать в двумерное многообразие, на котором $\mathrm{Re}(iS) \leqslant -\delta < 0$.

Исследуем асимптотику интеграла (5.3). Если $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, то функция R не зависит от $\tilde\varphi$ и интеграл (5.3) превращается в одномерный. Пусть $\theta \neq 0$, π. Из уравнения $\partial S/\partial\tilde\varphi = 0$ находим $\sin\tilde\varphi \sin\tilde\theta = 0$, так что $\tilde\varphi = 0$ или $\tilde\varphi = \pi$, поскольку $\tilde\theta$ комплексно. Уравнение $\partial S/\partial\tilde\theta = 0$ распадается на два:

$$\frac{r}{R_\pm}\sin(\tilde\theta \mp \theta) + \frac{1}{a}\frac{\partial S_0}{\partial\tilde\theta} = \tilde h, \quad R_\pm^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\tilde\theta \mp \theta).$$

Пусть $S_0(\cos\tilde\theta)$ есть полином от $\cos\tilde\theta$, для простоты, тогда можно показать, что асимптотика интеграла (5.3) равна сумме вкладов от точек перевала (см. гл. 4, § 5, п. 6). Если $(\tilde\theta_0, \tilde\varphi_0)$ — невырожденная точка перевала, то вклад V от нее равен

$$V = A\frac{2\pi}{3N}\left(R''_{\tilde\varphi\tilde\varphi}S''_{\tilde\theta\tilde\theta}\right)^{-1/2}\exp\left(i\sqrt{3N}\,S\right)w.$$

В частности, если $S_0 = r\cos\theta$ (в этом случае функция $e^{ikS_0} = e^{ihz}$ есть плоская волна), то при $r/a \gg 1$ асимптотика I_{i0} равна сумме вкладов от точек перевала, в которых $\tilde\varphi = 0$ или $\tilde\varphi = \pi$ и при $\theta \neq 0$

$$\frac{1}{\sqrt{3N}}\ln|I_{i0}| \sim \sqrt{h_0^2 - 1}/h_0 - \ln\left(h_0 + \sqrt{h_0^2 - 1}\right),$$
$$h_0 = \tilde h\Big/\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

ГЛАВА VI

СЛИЯНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

§ 1. Стационарная точка вблизи границы

1. Эталонные интегралы. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda, \alpha) = \int_0^a \exp[-\lambda(x-\alpha)^2] f(x, \alpha)\, dx. \qquad (1.1)$$

Здесь $0 < a < \infty$, $\lambda > 0$ — большой параметр, α лежит на отрезке $I = [-\delta_0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$.

Функция $S = -(x-\alpha)^2$ достигает максимума на участке интегрирования в точке $x = \alpha$, если $\alpha > 0$, и в точке $x = 0$, если $\alpha \leqslant 0$, так что асимптотика F имеет разную структуру при разных α. При $\alpha \to 0$ происходит слияние стационарной точки и конца контура интегрирования. Асимптотика интеграла (1.1) при $\lambda \to +\infty$, равномерная по α при малых α, выражается через специальную функцию — *интеграл Френеля*:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \qquad (1.2)$$

Интеграл Френеля является целой функцией z. Главный член асимптотики интеграла (1.1) выражается через функцию

$$\Phi(\lambda, \alpha) = \int_0^\infty \exp[-\lambda(x-\alpha)^2]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left[1 - \Phi(-\alpha\sqrt{\lambda})\right]. \qquad (1.3)$$

Разложим функцию $f(x, \alpha)$ в ряд по таким функциям, которые имеют нули в точках $x = 0$, $x = \alpha$, причем кратности нулей растут с ростом номера, так как именно эти точки могут вносить основной вклад в интеграл (1.1) при фиксированном α.

Лемма 1.1. *Пусть* $f(x, \alpha) \in C^\infty(I \times J)$, *где* $I = [0, a]$, $J = [-\delta, \delta]$. *Тогда при любом целом* $N \geqslant 0$ *справедливо разложение*

$$f(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{N} a_k(\alpha)\,[x(x-\alpha)]^k + \\ + (x-\alpha) \sum_{k=0}^{N} b_k(\alpha)\,[x(x-\alpha)]^k + [x(x-\alpha)]^{N+1} R_N(x, \alpha), \tag{1.4}$$

где остаточный член $R_N \in C^\infty(I \times J)$, *функции* $a_k(\alpha)$, $b_k(\alpha) \in C^\infty(J)$.

Применим индукцию. Положим

$$f_1(x, \alpha) = f(x, \alpha) - a_0(\alpha) - b_0(\alpha)(x - \alpha),$$
$$a_0(\alpha) = f(\alpha, \alpha), \quad b_0(\alpha) = \alpha^{-1}[f(\alpha, \alpha) - f(0, \alpha)],$$

функции $a_0(\alpha)$, $b_0(\alpha) \in C^\infty(J)$ по построению, функция $f_1 \in C^\infty(I \times J)$ и $f_1(0, \alpha) = f_1(\alpha, \alpha) = 0$. Рассмотрим функцию $f_2(x, \alpha) = \dfrac{f_1(x, \alpha)}{x(x-\alpha)}$ и покажем, что $f_2 \in C^\infty(I \times J)$. Имеем

$$f_2 = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{f_1(x, \alpha)}{x - \alpha} - \frac{f_1(x, \alpha)}{x}\right] = \frac{\partial_x f_1(\alpha, \alpha) - \partial_x f_1(0, \alpha)}{\alpha} + \\ + \int_0^x \frac{\partial_t [f_1(t+\alpha, \alpha) - f_1(t, \alpha)]}{\alpha}(x - t)\,dt,$$

где обозначено $\partial_x f(u, \alpha) = \left.\dfrac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}\right|_{x=u}$ и аналогично определено ∂_t. Первое слагаемое в правой части принадлежит $C^\infty(J)$. Далее, $\alpha^{-1}[\partial_t(f_1(t+\alpha), \alpha) - f_1(t, \alpha)]$ принадлежит $C^\infty(I \times J)$, так что $f_2(x, \alpha) \in C^\infty(I \times J)$. Следовательно,

$$f(x, \alpha) = a_0(\alpha) + b_0(\alpha)(x - \alpha) + x(x - \alpha) R_1(x, \alpha).$$

Тем самым лемма доказана при $N = 0$. Чтобы доказать ее при $N = 1$, достаточно представить в таком же виде функцию R_1 и т. д.

Следствие 1.1. *Пусть функция $f(x, \alpha)$ голоморфна по (x, α) в окрестности точки $(0, 0)$. Тогда коэффициенты $a_k(\alpha)$, $b_k(\alpha)$ разложения (1.4) и остаточный член голоморфны при малых $|x|$, $|\alpha|$.*

Вычислим асимптотику интеграла (1.1).

Лемма 1.2. *Пусть $f(x, \alpha) \in C^\infty(I \times J)$, где $I = [0, a]$, $J = [-\delta_0, \delta]$, $\delta > 0$. Тогда для интеграла (1.1) при $\lambda \to +\infty$ равномерно по $\alpha \in J_0 = [-\delta_0, \delta]$, где $\delta_0 > 0$ достаточно мало, справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda, \alpha) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\alpha) \lambda^{-k} \Phi(\lambda, \alpha) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\alpha) \lambda^{-k-1} \exp(-\lambda\alpha^2), \tag{1.5}$$

где A_k, $B_k \in C^\infty(I)$. Это разложение можно дифференцировать по λ и по α любое число раз.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda, \alpha) = f(\alpha, \alpha)\Phi(\lambda, \alpha) + \\ + (2\alpha\lambda)^{-1}[f(\alpha, \alpha) - f(0, \alpha)] \exp(-\lambda\alpha^2) + O(\lambda^{-1}\Phi(\lambda, \alpha)). \tag{1.5'}$$

Для интеграла $\Phi(\lambda, \alpha)$ при $|\alpha|\sqrt{\lambda} \to +\infty$ имеют место асимптотические формулы

$$\Phi(\lambda, \alpha) \sim \begin{cases} -\dfrac{\exp(-\lambda\alpha^2)}{2\lambda\alpha} & (\alpha < 0), \\ \sqrt{\dfrac{\pi}{\lambda}} & (\alpha > 0). \end{cases} \tag{1.6}$$

Поэтому в формуле (1.5′) при фиксированном α, $\lambda \to +\infty$ главным членом является первое слагаемое, если $\alpha > 0$, и оба слагаемых, если $\alpha < 0$. При $\alpha \to 0$ второе слагаемое мало по сравнению с первым.

Фиксируем N и представим функцию f в виде (1.4). Тогда

$$F(\lambda, \alpha) = \sum_{k=0}^{N} a_k(\alpha) F_{1,k}(\lambda, \alpha;\ a) + \\ + \sum_{k=0}^{N} b_k(\alpha) F_{2,k}(\lambda, \alpha;\ a) + F_{N+1}(\lambda, \alpha), \tag{1.7}$$

где обозначено

$$F_{j,k}(\lambda,\ \alpha;\ a) = \int_0^a \psi_j(x)\,[x\,(x-\alpha)]^k \exp[-\lambda\,(x-\alpha)^2]\,dx,$$

$$\psi_1(x) = 1, \quad \psi_2(x) = x - \alpha, \tag{1.8}$$

$$F_{N+1}(\lambda,\ \alpha) = \int_0^a [x\,(x-\alpha)]^k R_{N+1}(x,\ \alpha) \exp[-\lambda\,(x-\alpha)^2]\,dx.$$

Представим $F_{j,k}$ в виде разности интегралов по полуосям $[0,\ \infty)$ и $[a,\ \infty)$. Тогда при $\alpha \in J$

$$F_{jk}(\lambda,\ \alpha;\ a) = F_{jk}(\lambda,\ \alpha) + O(e^{-c\lambda}), \tag{1.9}$$

где $F_{jk}(\lambda,\ \alpha) = F_{jk}(\lambda,\ \alpha;\ \infty)$, $c > 0$ не зависит от α, поскольку $(x-\alpha)^2 \geqslant (a-\delta)^2$ при $x \geqslant a$, $\alpha \in J$. Интегрируя по частям, получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} F_{1k}(\lambda,\ \alpha) &= \frac{1}{2\lambda}\,[(2k-1)\,F_{1,k-1}(\lambda,\ \alpha) + \\ &\quad + \alpha\,(k-1)\,F_{2,k-2}(\lambda,\ \alpha) + \alpha^2\,(k-1)\,F_{1,k-2}(\lambda,\ \alpha)], \\ F_{2k}(\lambda,\ \alpha) &= \frac{k}{\lambda}\,[2F_{2,k-1}(\lambda,\ \alpha) + \alpha F_{1,k-1}(\lambda,\ \alpha)] \end{aligned} \tag{1.10}$$

при $k \geqslant 1$. Далее,

$$F_{1,0} = \Phi(\lambda,\ \alpha), \quad F_{2,0} = \frac{1}{2\lambda}\,\frac{\partial F_{1,0}}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\lambda}\,e^{-\lambda\alpha^2}. \tag{1.11}$$

Из рекуррентных соотношений (1.10) и из (1.11) следует, что при $k \geqslant 1$

$$F_{jk} = \lambda^{-k+1}\left[A_{jk}^{(1)}(\alpha,\ \lambda^{-1})\,F_{10} + A_{jk}^{(2)}(\alpha,\ \lambda^{-1})\,F_{20}\right], \tag{1.12}$$

где $A_{jk}^{(i)}$ — полиномы от α, λ^{-1}, и, в частности, что

$$|F_{jk}(\lambda,\ \alpha)| \leqslant C_{jk}\lambda^{-k+1}(|F_{10}| + |F_{20}|) \tag{1.13}$$

при $\lambda \geqslant 1$, $\alpha \in J$, где постоянная C_{jk} не зависит от λ, α. Следовательно,

$$|F_N| \leqslant C_N\lambda^{-N}(|F_{10}| + |F_{20}|). \tag{1.14}$$

Подставляя (1.9), (1.12) в (1.7) и учитывая, что N можно взять любым, получаем (1.5). Дифференцирование интеграла (1.1) по λ и по α приводит к интегралу того же вида.

Вычислим главный член асимптотики. Имеем из (1.6) — (1.8)

$$F(\lambda, \alpha) = \\ = f(\alpha, \alpha) F_{10}(\lambda, \alpha) + \alpha^{-1}[f(\alpha, \alpha) - f(0, \alpha)] F_{20}(\lambda, \alpha) + \\ + \int_0^a x(x-\alpha) R_1(x, \alpha) \exp[-\lambda(x-\alpha)^2]\, dx.$$

Из (1.9) следует, что первые два слагаемых в правой части совпадают с первыми двумя слагаемыми в правой части (1.5′) с точностью до $O(e^{-\lambda c})$, $c > 0$, а последний интеграл равен

$$(2\lambda)^{-1} \int_0^a \exp[-\lambda(x-\alpha)^2] \frac{\partial}{\partial x}(x R_1(x, \alpha))\, dx + O(e^{-\lambda c}),$$

так как внеинтегральная подстановка в точке $x = a$ экспоненциально мала. Полученный интеграл есть $O(\Phi(\lambda, \alpha))$.

Следствие 1.2. *Пусть условия леммы 1.2 выполнены и $0 \leqslant \alpha \leqslant \delta$. Тогда главный член асимптотики имеет вид*

$$F(\lambda, \alpha) = f(0, \alpha)\Phi(\lambda, \alpha) + o(\Phi(\lambda, \alpha)).$$

При $\alpha < 0$ формулу (1.5′) уже нельзя упростить (из задачи 1.1 следует, что при $\alpha < 0$ фиксированном, $\lambda \to +\infty$ оба слагаемых в (1.5′) равноценны).

Рассмотрим интеграл с осциллирующей фазовой функцией:

$$F(\lambda, \alpha) = \int_0^a \exp[i\lambda(x-\alpha)^2] f(x, \alpha)\, dx. \tag{1.15}$$

Лемма 1.3. *Пусть I, J — те же интервалы, что и в лемме 1.2, функция $f(x, \alpha) \in C^\infty(I \times J)$ и обращается в нуль в окрестности точки $x = a$. Тогда при $\lambda \to +\infty$ равномерно по $\alpha \in J_0$ справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda, \alpha) = \sum_{k=0}^{N} (-i\lambda)^{-k} A_k(\alpha) \Phi(-i\lambda, \alpha) + \\ + \sum_{k=0}^{N} (-i\lambda)^{-k-1} B_k(\alpha) \exp(i\lambda\alpha^2) + O(\lambda^{-N-1}). \tag{1.16}$$

Здесь A_k, B_k — те же, что и в (1.5), *и $N \geqslant 0$ можно взять любым.*

Это разложение можно дифференцировать по λ и по α любое число раз.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda, \alpha) = f(\alpha, \alpha)\Phi(-i\lambda, \alpha) + \\ + (-2i\alpha\lambda)^{-1}[f(\alpha, \alpha) - f(0, \alpha)]\exp(i\lambda\alpha^2) + o(\lambda^{-1}). \quad (1.17)$$

Для интеграла $\Phi(-i\lambda, \alpha)$ имеют место асимптотические формулы (1.6) при $|\alpha|\sqrt{\lambda} \to +\infty$, в которых $\sqrt{-i\lambda} = e^{-i\pi/4}\sqrt{\lambda}$.

Распространим полученные результаты на случай комплексных λ, α. При этом необходимо, чтобы точка $x = a$ не давала вклада в асимптотику, что приводит к условию

$$\operatorname{Re}[\lambda(x-\alpha)^2]|_{x=a} \geqslant 0.$$

Лемма 1.4. *Пусть функция $f(x, \alpha)$ удовлетворяет условиям леммы 1.2 и голоморфна при малых $|x|$, $|\alpha|$. Тогда разложение* (1.5) *справедливо при $\lambda \in S_\varepsilon$, $|\lambda| \to \infty$, $|\alpha| \leqslant \delta_0$, равномерно по α, где S_ε — сектор $|\arg \lambda| \leqslant \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$, $\delta_0 > 0$ достаточно мало.*

При условиях леммы на λ, α имеем

$$\operatorname{Re}[\lambda(x-\alpha)^2] \geqslant c|\lambda|x^2 \quad (1.18)$$

при $x \geqslant a$, $c > 0$, где c не зависит от λ, α, так что (1.9) остается в силе. Интеграл $\Phi(\lambda, \alpha)$ может убывать как $\exp(-\lambda\alpha^2)$, т. е. медленнее, чем $\exp(-ca^2\lambda)$ при малых $|\alpha|$. Соотношения (1.10)—(1.12) и оценка (1.13), (1.14), таким образом, остаются в силе.

2. Общий случай. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda, \alpha) = \int_0^a \exp[\lambda S(x, \alpha)] f(x, \alpha)\,dx. \quad (1.19)$$

Введем обозначения: $I = [0, a]$, K_δ — круг $|\alpha| \leqslant \delta$ в комплексной плоскости α.

Будем предполагать, что функции f, $S \in C^\infty(I \times K_\delta)$ и голоморфны по (x, α) при $|x| \leqslant a_0 < a$, $\alpha \in K_\delta$, функция S вещественна при вещественных x, α.

Нас интересует случай, когда функция S имеет простую точку перевала $x_0(\alpha)$, которая при $\alpha \to 0$ стремится к концу $x = 0$ контура интегрирования. Достаточными условиями являются следующие:

$$S'_x(0, 0) = 0, \quad S''_{xx}(0, 0) \neq 0, \; S''_{x\alpha}(0, 0) \neq 0. \qquad (1.20)$$

Тогда при малых $|\alpha|$

$$x_0(\alpha) = -\alpha S''_{\alpha\alpha}(0, 0)\left(S''_{xx}(0, 0)\right)^{-1} + O(\alpha^2). \qquad (1.21)$$

Далее, максимум $S(x, 0)$ на отрезке I должен достигаться только в точке $x = 0$ (иначе основной вклад будет вносить точка $x = a$), т. е.

$$S(x, 0) < S(0, 0), \quad 0 < x \leqslant a. \qquad (1.22)$$

Сведем интеграл (1.19) к эталонному. Сделаем замену переменной $x = \varphi(t, \alpha)$ такую, чтобы

$$S(x, \alpha) - S(x_0(\alpha), \alpha) = -t^2, \qquad (1.23)$$

и положим

$$\zeta(\alpha) = \sqrt{S(x_0(\alpha), \alpha) - S(0, \alpha)}. \qquad (1.24)$$

Функция $\zeta(\alpha)$ голоморфна при малых $|\alpha|$; нормируем ее условием

$$\zeta(\alpha) \sim \alpha S''_{x\alpha}(0, 0)\left(-2S''_{xx}(0, 0)\right)^{-1/2} \quad (\alpha \to 0), \qquad (1.25)$$

где ветвь корня — арифметическая. Обозначим S_ε сектор

$$|\arg \lambda| \leqslant \pi/2 - \varepsilon < \pi.$$

Теорема 1.1. *Пусть функция S удовлетворяет условиям (1.21), (1.22) и функции f, S голоморфны по (x, α) при малых $|x|$, $|\alpha|$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_\varepsilon$, $|\alpha| \leqslant \delta$ и при $\delta > 0$ достаточно малом для интеграла (1.19) справедливо, равномерно по α, асимптотическое разложение*

$$F(\lambda, \alpha) \sim \exp\left[\lambda S(x_0(\alpha), \alpha)\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\alpha)\lambda^{-k}\Phi(\lambda, -\zeta(\alpha)) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\alpha)\lambda^{-k}\exp(-\lambda\zeta^2(\alpha))\right], \quad (1.26)$$

где A_k, B_k голоморфны при малых $|\alpha|$. Это разложение можно дифференцировать по λ и по α любое число раз.

Функция $\zeta(\alpha)$ определяется из (1.24), (1.25), Φ — интеграл (1.3).

Сделаем замену переменных (1.23) и затем $t \to t + \zeta(\alpha)$. Тогда

$$F(\lambda, \alpha) = \exp[\lambda S(x_0(\alpha), \alpha)] I(\lambda, \alpha),$$

$$I = \int_0^{a(\alpha)} \exp[-\lambda(t + \zeta(\alpha))^2] f^*(t, \alpha)\, dt,$$

где обозначено

$$a(\alpha) = \sqrt{S(x_0(\alpha), \alpha) - S(a, \alpha)} - \zeta(\alpha),$$

$$f^* = f(\psi(t + \zeta(\alpha)), \alpha)\, \psi_t'(t + \zeta(\alpha), \alpha).$$

Так как $S(a, 0) < 0$, то $a(\alpha) = b + O(\alpha)$, $b = \sqrt{-S(0, a)}$ при малых $|\alpha|$ и интеграл с точностью до слагаемого вида $O(\exp(-\lambda d))$, $d > 0$, равен интегралу по отрезку $[0, b]$. Применяя лемму 1.4, получаем (1.26).

Выпишем главный член асимптотики

$$F(\lambda, \alpha) = \exp[\lambda S(x_0(\alpha), \alpha)] \times \left[A(\alpha)\Phi(\lambda, -\zeta(\alpha)) + B(\alpha)\frac{\exp(-\lambda\zeta^2(\alpha))}{2\lambda\zeta(\alpha)}\right] + O\left(\lambda^{-1}|\Phi(\lambda, -\zeta(\alpha))|\right), \quad (1.27)$$

где обозначено

$$A(\alpha) = -f(x_0(\alpha), \alpha)\sqrt{-\frac{2}{S_{xx}''(x_0(\alpha), \alpha)}},$$

$$B(\alpha) = -A(\alpha) - \frac{2\zeta(\alpha) f(0, \alpha)}{S_x'(0, \alpha)}. \quad (1.28)$$

Вычислим асимптотику интеграла с быстроосциллирующей фазой

$$F(\lambda, \alpha) = \int_0^a \exp[i\lambda S(x, \alpha)] f(x, \alpha)\, dx. \quad (1.29)$$

Будем предполагать, что функции $f, S \in C^\infty$ при $(x, \alpha) \in I \times J_\delta$, функция $S(x, \alpha)$ вещественнозначна, функция f и все ее производные по x обращаются в нуль в точке $x = a$. Далее, функция S удовлетворяет условиям (1.20), (1.22) и

$$S_x'(x, 0) \neq 0, \quad 0 < x \leqslant a.$$

Теорема 1.2. *Пусть выполнены сформулированные выше условия. Тогда при $\lambda \to +\infty$, $-\delta_0 \leqslant \alpha \leqslant \delta_0$ и при $\delta_0 >$*

>0 *достаточно малом для интеграла* (1.29) *справедливо асимптотическое разложение, равномерное по* α:

$$F(\lambda, \alpha) \sim$$
$$\sim \exp[i\lambda S(x_0(\alpha), \alpha)] \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\alpha)(-i\lambda)^{-k} \Phi(-i\lambda, -\zeta(\alpha)) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\alpha)(-i\lambda)^{-k} \exp(-i\lambda\zeta(\alpha)) \right], \quad (1.30)$$

где $A_k, B_k \in C^\infty$ *при малых* α.

Это разложение можно дифференцировать по λ, α *любое число раз.*

Функция $\zeta(\alpha)$ по-прежнему определяется по формуле (1.24).

Главный член асимптотики имеет вид (1.27), где следует заменить λ на $-i\lambda$, а остаточный член есть $o(\lambda^{-1})$ (см. (1.16')).

Полученные результаты переносятся на многомерные интегралы. Пусть $x \in \mathbf{R}^n$, Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n_x$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ и функция $S(x, \alpha)$ имеет невырожденную стационарную точку $x^0(\alpha) \in \Omega$, которая при $\alpha \to 0$ выходит на границу области. Рассмотрим случай осцилляции:

$$F(\lambda, \alpha) = \int_{\Omega} \exp[i\lambda S(x, \alpha)] f(x, \alpha)\, dx. \quad (1.31)$$

Интегралы такого рода встречаются в задачах теории дифракции при исследовании дифракции от тел с краем. Перечислим условия на функции f, S.

1°. Функции f, $S \in C^\infty$ при $(x, \alpha) \in U \times J_\delta$, где U — окрестность в $\mathbf{R}^n$ точки $x^0 \in \partial\Omega$, функция S вещественнозначна, функция $f(x, \alpha)$ при $x \in \partial U$ обращается в нуль вместе со всеми производными по x.

2°. Функция $S(x, 0)$ имеет в области U единственную, и притом невырожденную, стационарную точку x^0 и

$$S''_{x\alpha}(x^0, 0) \neq 0, \quad \det S''_{\xi\xi}(x^0, 0) \neq 0. \quad (1.32)$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — координаты в касательной плоскости $T\partial\Omega_{x^0}$ в точке x^0. Тогда x^0 является невырожденной граничной стационарной точкой функции $S(x, 0)$ (см. гл. III, § 4, п. 2). Далее,

$$x^0(\alpha) = x^0 - \alpha \left(S''_{xx}(x^0, 0)\right)^{-1} S''_{x\alpha}(x^0, 0) + O(\alpha^2) \quad (1.33)$$
$$(\alpha \to 0).$$

Из этой формулы следует, что $x^0(\alpha)\to x^0$ по некоторому направлению. Потребуем, чтобы это направление было трансверсально к $\partial\Omega$ в точке x^0 (с точностью до членов второго порядка), т. е.

$$\langle (S''_{xx}(x^0, 0))^{-1} S''_{x\alpha}(x^0, 0), n_{x^0}\rangle \neq 0, \tag{1.34}$$

где n_{x^0} — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке x^0.

Теорема 1.3. *Пусть функции f, S удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда при $\lambda\to+\infty$, $-\delta_0\leqslant\alpha\leqslant\delta_0$ и при $\delta_0>0$ достаточно малом для интеграла* (1.31) *имеет место асимптотическое разложение, равномерное по α:*

$$F(\lambda, \alpha)\sim\lambda^{-(n-1)/2}\exp[i\lambda S(x^0(\alpha), \alpha)]\times$$
$$\times\left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\alpha)(-i\lambda)^{-k}\Phi(-i\lambda, \zeta(\alpha))+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty} B_k(\alpha)(-i\lambda)^{-k}\exp(i\lambda\zeta^2(\alpha))\right]. \tag{1.35}$$

Здесь $A_k(\alpha)$, $B_k(\alpha)\in C^\infty$ при малых α. Это разложение можно дифференцировать по λ, α любое число раз.

Формула для $\zeta(\alpha)$ и главный член асимптотики будут приведены ниже.

Выберем в окрестности точки x^0 локальные координаты $u=(u_1, \ldots, u_n)$, $x=\psi(u)$ так, чтобы $\partial\Omega$ имела вид $u_n=0$, $u_n>0$ в Ω и чтобы точке x^0 отвечала точка $u=0$. Тогда

$$F(\lambda, \alpha)=\int_V \varphi(u, \alpha)\exp[i\lambda\tilde S(u, \alpha)]\,du,$$

где обозначено

$$\tilde S(u, \alpha)=(S\circ\psi)(u, \alpha), \quad \varphi(u, \alpha)=(f\circ\psi)(u, \alpha)\det\psi'_u(u),$$

где V — полуокрестность точки $u=0$. Далее поступаем так же, как и при доказательстве теоремы 3.4.2. В качестве V выберем куб $-a\leqslant u_j\leqslant a$, $1\leqslant j\leqslant n-1$, $0\leqslant u_n\leqslant\leqslant a$, где $a>0$ достаточно мало. Имеем

$$\tilde S(u, \alpha)=S(x^0(\alpha), \alpha)+\frac{1}{2}b_{nn}(\alpha)(u_n-u_0^n(\alpha))^2+$$
$$+(u_n-u_0^n(\alpha))\langle b(\alpha), u'-u'^0(\alpha)\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\langle B(\alpha)(u'-u^{0\prime}(\alpha)), u'-u^{0\prime}(\alpha)\rangle+\ldots$$

где $u' = (u_1, \ldots, u_{n-1})$, $u^0(\alpha)$ — стационарная точка функции $\tilde{S}$, отвечающая точке $x^0(\alpha)$. Применяя метод стационарной фазы по переменным u', получаем асимптотическое разложение

$$F(\lambda, \alpha) \sim \lambda^{-(n-1)/2} \exp[i\lambda S(x^0(\alpha), \alpha)] \times \\ \times \int_0^a \exp[i\lambda g(u_n, \alpha)] \sum_{j=0}^{\infty} a_j(u_n, \alpha)\lambda^{-j} du_n.$$

Здесь коэффициенты $a_j \in C^\infty$ при малых α, $0 \leqslant u_n \leqslant a$, обращаются в нуль вместе со всеми производными при $u_n = a$, функция g имеет вид

$$g(u_n, \alpha) = \frac{1}{2}(b_{nn}(\alpha) - \langle b(\alpha), B^{-1}(\alpha) b(\alpha)\rangle \times \\ \times (u_n - u_0^n(\alpha))^2 + O(|u_n - u_0^n(\alpha)|^3).$$

Применяя к последнему интегралу теорему 1.2, получаем (1.35).

Выпишем главный член асимптотики в случае, когда граница $\partial\Omega$ выпрямлена в окрестности точки x^0. Пусть $x^0 = 0$ для простоты, $\partial\Omega = \{x\colon x_n = 0\}$, $x_n > 0$ при $x \in \Omega$ вблизи точки 0. Тогда

$$F(\lambda, \alpha) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{(n-1)/2} \exp\left(i\lambda S + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''_{x'x'}\right) \times \\ \times |S''_{x'x'}|^{-1/2} \sqrt{2}\,|_{x=x^0(\alpha)} [-f(x^0(\alpha), \alpha)\Phi(-i\lambda, -\zeta(\alpha)) + \\ + O(\lambda^{-1})]. \quad (1.36)$$

Здесь предполагается, что $S''_{x_n x_n}(0, 0) < 0$,

$$\zeta(\alpha) = \sqrt{S(x^0(\alpha), \alpha) - S(x'(0, \alpha), 0, \alpha)}, \quad (1.37)$$

$x'(x_n, \alpha)$ — решение уравнения

$$S'_{x'}(x, \alpha) = 0. \quad (1.38)$$

§ 2. Слияние двух точек перевала

1. Постановка задачи. Рассмотрим интеграл вида (1.1), где функция $S(x, \alpha)$ имеет при $\alpha \neq 0$ две невырожденные точки перевала, которые сливаются при $\alpha = 0$. Простейшим примером служит функция $S_0 = \alpha z - z^3/3$: при $\alpha \neq 0$ точки перевала $z_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{\alpha}$ невырождены, при $\alpha = 0$ они сливаются.

Покажем, что с помощью подходящей замены переменных можно привести S к виду S_0. При этом $S'_z(0, 0) = 0$, $S''_{zz}(0, 0) = 0$, так как функция $S(z, 0)$ имеет вырожденную точку перевала $z = 0$, $S'''_{zzz}(0, 0) \neq 0$, поскольку в противном случае при малых $|\alpha|$ функция $S(z, \alpha)$ будет иметь $\geqslant 3$ точек перевала, близких к точке $z = 0$.

Лемма 2.1. *Пусть функция $S(z, \alpha)$ голоморфна по совокупности переменных при малых $|z|$, $|\alpha|$ и*

$$S'_z(0, 0) = S''_{zz}(0, 0) = 0, \; S''_{z\alpha}(0, 0) \neq 0, \; S'''_{zzz}(0, 0) \neq 0. \quad (2.1)$$

Тогда при малых $|\alpha|$, $\alpha \neq 0$, функция $S(z, \alpha)$ имеет ровно две невырожденные точки перевала $z_{1,2}(\alpha)$ такие, что $z_{1,2}(0) = 0$. Функции $z_{1,2}(\alpha)$ являются голоморфными функциями от $\sqrt{\alpha}$ при малых $|\alpha|$, и

$$z_j(\alpha) = \sqrt{-\frac{2S''_{z\alpha}(0, 0)\,\alpha}{S'''_{zzz}(0, 0)}}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha^{k/2}\right), \quad j = 1, 2. \quad (2.2)$$

Значения $z_{1,2}$ отличаются выбором корня. Утверждение леммы следует из теоремы о неявной функции.

Теперь с помощью голоморфной замены переменной $z = z(\zeta, \alpha)$ приведем функцию S к кубическому трехчлену:

$$S(z, \alpha) = A(\alpha) - B(\alpha)\zeta + \zeta^3/3. \quad (2.3)$$

Вычислим $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$. Формально дифференцируя обе части этого равенства по z, получаем

$$\frac{d\zeta}{dz} = g'_z(z, \alpha)\,(\zeta^2 - B(\alpha))^{-1}.$$

Чтобы функция $\zeta(z, \alpha)$ была голоморфна по z, необходимо, чтобы $S'_z(z, \alpha) = 0$ при $\zeta = \pm\sqrt{B(\alpha)}$. Это дает соотношения

$$S(z_{1,2}(\alpha), \alpha) = A(\alpha) \mp (2B(\alpha)/3)^{3/2}, \quad (2.4)$$

откуда находим

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{2}\,[S(z_1(\alpha), \alpha) + S(z_2(\alpha), \alpha)], \\ B(\alpha) &= \left[\frac{3}{4}\,(S(z_2(\alpha), \alpha) - S(z_1(\alpha), \alpha))\right]^{2/3}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Лемма 2.2. *Пусть функция $S(z, \alpha)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Тогда функции $A(\alpha)$, $B(\alpha)$*

голоморфны в точке $\alpha = 0$, причем

$$B(\alpha) = -\alpha g_1'(0)(2/g_3(0))^{1/3}[1 + O(\alpha)]. \tag{2.6}$$

В силу леммы 2.1 имеем

$$z_{1,2}(\alpha) = a(\alpha) \pm \sqrt{D(\alpha)},$$

где $a(\alpha)$, $D(\alpha)$ голоморфны при $\alpha = 0$ и $a(0) = 0$, $D(0) \neq 0$, $D'(0) \neq 0$. При аналитическом продолжении по окружности с центром в точке $\alpha = 0$ ветви $z_1(\alpha)$, $z_2(\alpha)$ переходят друг в друга, т. е. $z_1(\alpha) \to z_2(\alpha)$, $z_2(\alpha) \to z_1(\alpha)$. Следовательно, $A(\alpha)$ — однозначная, а стало быть, и голоморфная функция α при малых $|\alpha|$. Далее,

$$S(z_1(\alpha), \alpha) - S(z_2(\alpha), \alpha) = \\ = 2\sqrt{D(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial z^{2k+1}} g(a(\alpha), \alpha)(D(\alpha))^{2k} = \\ = 2\sqrt{D(\alpha)}\,\tilde{g}(\alpha),$$

где $\tilde{g}(\alpha)$ — голоморфная функция при малых $|\alpha|$. Учитывая (2.2), получаем

$$\tilde{g}(\alpha) = g_z'(a(\alpha), \alpha) + \frac{1}{6} g_{zzz}'''(a(\alpha), \alpha) D(\alpha) + O(\alpha^2) = \\ = g_1(\alpha) + \frac{1}{6} g_3(\alpha) D(\alpha) + O(\alpha^2) = \frac{2}{3} g_1'(0)\alpha + O(\alpha^2).$$

Следовательно,

$$S(z_2(\alpha), \alpha) - S(z_1(\alpha), \alpha) = \left(\frac{4}{3} B(\alpha)\right)^{3/2} = \\ = 4/3(-g_1(0)\alpha)^{3/2}(2/g_3(0))^{1/2}(1 + \tilde{h}(\alpha)),$$

где $\tilde{h}$ голоморфна при малых $|\alpha|$ и $\tilde{h}(0) = 0$. Поэтому многозначная функция $B(\alpha)$ распадается на три ветви, голоморфные в точке $\alpha = 0$, для которых выполнено (2.5).

Лемма 2.3. *Пусть функция $S(z, \alpha)$ удовлетворяет условиям леммы 2.1. Тогда существуют числа $r_1', r_2' > 0$ и функция $\zeta = \zeta(z, \alpha)$, голоморфная при $|z| < r_1'$, $|\alpha| < r_2'$, такие, что при таких z, α функция $S(z, \alpha)$ имеет вид* (2.3).

Обратная функция $z = z(\zeta, \alpha)$ голоморфна по (ζ, α) в некоторой окрестности точки $(0, 0)$.

Здесь $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ определяются из (2.5), и при $z = z_{1,2}(\alpha)$ имеем $\zeta = \pm\sqrt{B(\alpha)}$ соответственно.

Рассмотрим соотношение (2.3) как уравнение относительно ζ: $F(\zeta, z, \alpha)=0$. Пусть точка (ζ_0, z_0, α_0) удовлетворяет уравнению $F=0$ и $F'_\zeta\neq 0$ в этой точке. Тогда по теореме о неявной функции существует решение $\zeta=\zeta(z, \alpha)$ уравнения (2.3), равное ζ_0 в точке (z_0, α_0) и голоморфное по (z, α) в окрестности этой точки. Поэтому решения $\zeta=\zeta(z, \alpha)$ уравнения (2.3) могут не быть голоморфными только в таких точках (z, α), при которых совместна система $F=0$, $F'_\zeta=0$. Исключая ζ, получаем дискриминантное уравнение $D(z, \alpha)=0$, где функция D голоморфна при малых $|z|$, $|\alpha|$. Это уравнение распадается на два:

$$S(z, \alpha)=S(z_j(\alpha), \alpha), \quad j=1, 2. \tag{2.7}$$

Пусть $|z|=r_1$, $0<|\alpha|\leqslant r_2$, где $r_j>0$ достаточно малы. Тогда уравнение (2.7) (относительно z) имеет ровно 3 корня $\{z_1(\alpha), z_1(\alpha), \tilde{z}_1(\alpha)\}$, лежащих в круге $|z|\leqslant r_0$. Нормируем функцию S условиями $S''_{z\alpha}(0, 0)=-1$, $S'''_{zzz}(0, 0)=2$ (для этого достаточно сделать преобразование подобия $z\to b_1 z$, $\alpha\to b_1\alpha$, b_j — постоянные). Тогда (см. (2.2))

$$z_1(\alpha)=\pm\sqrt{\alpha}\,p(\pm\sqrt{\alpha}), \quad \tilde{z}_1(\alpha)=\mp 2\sqrt{\alpha}\,q(\pm\sqrt{\alpha}),$$

где $p(\beta)$, $q(\beta)$ — голоморфные функции β в точке $\beta=0$, $p(0)=q(0)=1$. Ниже мы рассматриваем уравнение (2.3) и свойства его решений при фиксированном α, $0<|\alpha|\leqslant r_1$. Пусть $j=1$, тогда при z, близких к $z_1(\alpha)$, уравнение (2.7) имеет вид

$$\frac{1}{3}(\zeta-\sqrt{B})^2(\zeta+2\sqrt{B})=\frac{1}{2}(z-z_1(\alpha))^2 f''_{zz}(z_1, \alpha)+\ldots,$$

$$f''_{zz}(z_1, \alpha)=-2\sqrt{\alpha}\,(1+O\sqrt{\alpha})\neq 0.$$

Следовательно, в окрестности точки $z=z_1(\alpha)$ уравнение (2.7) имеет три решения, равных $\sqrt{B}$, $-\sqrt{B}$, $-2\sqrt{B}$ в этой точке и голоморфных в ее окрестности. Поэтому точка $z=z_1(\alpha)$ не является точкой ветвления функции ζ.

В окрестности точки $z=\tilde{z}_1(\alpha)$ уравнение (2.7) имеет вид

$$\frac{1}{3}(\zeta-\sqrt{B})^2(\zeta+2\sqrt{B})=(z-\tilde{z}_1(\alpha))\,f'_z(\tilde{z}_1(\alpha), \alpha)+\ldots,$$

$$f'_z(\tilde{z}_1(\alpha), \alpha)=3\alpha\,(1+O(\sqrt{\alpha}))\neq 0.$$

Следовательно, функция ζ имеет в окрестности точки $z=\tilde{z}_1(\alpha)$ голоморфную ветвь, равную $-2\sqrt{\bar{B}}$ в этой точке, и ветвь, равную $\sqrt{\bar{B}}$ в этой точке, для которой точка $\tilde{z}_1(\alpha)$ есть точка ветвления второго порядка.

Аналогично, точка $z=z_2(\alpha)$ не является точкой ветвления функции ζ; в окрестности этой точки имеются 3 голоморфные ветви, равные $-\sqrt{\bar{B}}$, $-\sqrt{\bar{B}}$, $2\sqrt{\bar{B}}$ в этой точке. Точка $z=\tilde{z}_2(\alpha)$ является точкой ветвления второго порядка; одна ветвь, равная $2\sqrt{\bar{B}}$, голоморфна в этой точке, и двузначная ветвь равна $-\sqrt{\bar{B}}$ в этой точке.

Итак, алгеброидная функция $\zeta=\zeta(z, \alpha)$ имеет при $0<|\alpha|\leqslant r_2$ в круге $|z|\leqslant r_1$ только две точки ветвления $z=\tilde{z}_{1,2}(\alpha)$, обе второго порядка. Покажем, что трехлистная риманова поверхность функции ζ распадается на двулистную риманову поверхность, листы которой «склеены» в точках $\tilde{z}_{1,2}(\alpha)$, и отдельный лист. Пусть $\zeta_0(z, \alpha)$ — элемент функции ζ, заданный в близкой к $\tilde{z}_1(\alpha)$ точке z_0, аналитическое продолжение которого вокруг точки $\tilde{z}_1(\alpha)$ даст двузначную функцию. Аналитически продолжим ζ_0 вдоль замкнутой кривой, обходящей точку $\tilde{z}_2(\alpha)$. Если $\zeta_0\to\zeta_0$ при таком обходе, то риманова поверхность функции ζ содержит двулистную поверхность, листы которой склеены в точке $\tilde{z}_1(\alpha)$. Но тогда с помощью аналогичных рассуждений получаем, что риманова поверхность R функции ζ содержит двулистную поверхность, листы которой склеены в точке $\tilde{z}_2(\alpha)$, так что R распадается на две двулистные поверхности. Это невозможно, так как R трехлистна.

Из этих рассуждений вытекает, что функция $\zeta(z, \alpha)$ имеет ветвь $\tilde{\zeta}(z, \alpha)$, голоморфную при $|z|\leqslant r_1$ по z, при каждом фиксированном α, $0<|\alpha|\leqslant r_2$ (ей отвечает отдельный лист), причем ветвь $\tilde{\zeta}$ равна $\sqrt{\bar{B}}$, $-\sqrt{\bar{B}}$, $-2\sqrt{\bar{B}}$, $2\sqrt{\bar{B}}$ в точках $z_1(\alpha)$, $z_2(\alpha)$, $\tilde{z}_1(\alpha)$, $\tilde{z}_2(\alpha)$ соответственно. Если же $\alpha=0$, то уравнение (2.3) имеет вид $\zeta^3=z^3g(z)$, $g(0)\neq 0$.

Функция g голоморфна в точке $z=0$, $g(0)=1$, так что $\tilde{\zeta}(z, 0)=z\sqrt[3]{g(z)}$, где $\sqrt[3]{g(0)}=1$; следовательно, ветвь $\tilde{\zeta}(z, \alpha)$ голоморфна по z при каждом фиксированном α в области $|z|<r_1$, $|\alpha|<r_2$. Далее, функция $\tilde{\zeta}(z, \alpha)$ голоморфна по совокупности переменных, если $D(z, \alpha)\neq 0$, и ограничена при малых $|z|$, $|\alpha|$. По теореме об устрани-

мых особенностях ([9]) функция $\tilde{\zeta}(z, \alpha)$ голоморфна по совокупности переменных в окрестности точки $(0, 0)$.

Итак, исследование асимптотики интеграла (1.1) с двумя близкими седловыми точками приводится к исследованию эталонного интеграла с кубической фазовой функцией (2.3).

2. Эталонные интегралы. Рассмотрим эталонный интеграл

$$\Phi(\lambda, \alpha) = \exp[ikA(\alpha)] \int_\gamma f(z, \alpha) \exp[kS_0(z, \alpha)]\, dz,$$
$$S_0 = i\left(-B(\alpha) z + \frac{z^3}{3}\right). \tag{2.8}$$

Его асимптотика выражается через функцию Эйри — Фока

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(tx + x^3/3)]\, dx \tag{2.9}$$

и ее производную. Функция $v(t)$ является решением уравнения Эйри

$$v'' - tv = 0. \tag{2.10}$$

Укажем выбор контура γ. Область $\operatorname{Re} S_0(z, 0) < 0$ состоит из трех секторов: S_1: $0 < \varphi < \pi/3$, S_2: $2\pi/3 < \varphi < \pi$, S_3: $\pi + \pi/3 < \varphi < \pi + 2\pi/3$, $\varphi = \arg z$. Выберем контур γ следующим образом: он совпадает с отрезком $[-a_0, a_0]$ вещественной оси вблизи точки $z = 0$, его начало z_1 лежит в секторе S_1, его конец z_2 лежит в секторе S_2. Тогда $\operatorname{Re} S_0(z_j, \alpha) \leqslant -c < 0$, $j = 1, 2$, если $|\alpha| \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало, c не зависит от α. Таким образом, подынтегральная функция имеет порядок $O(e^{-kc})$ при $k \to +\infty$ на концах контура. Это приводит к тому, что концы контура γ не будут давать вклада в асимптотику.

Лемма 2.4. *Пусть функция $f(z, \alpha)$ голоморфна в окрестности точки $(0, 0)$, функция $B(\alpha)$ голоморфна при малых $|\alpha|$, $B(0) = 0$. Тогда справедливо разложение*

$$f(z, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\alpha)(z^2 - B(\alpha))^j + z \sum_{j=0}^{\infty} q_j(\alpha)(z^2 - B(\alpha))^j, \tag{2.11}$$

равномерно сходящееся в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. Коэффициенты $p_j(\alpha)$, $q_j(\alpha)$ голоморфны в точке $\alpha = 0$.

Заметим, что $z^2 - \alpha = (S_0')_z(z, \alpha)$, $z = \frac{1}{2}(S_0'')_{zz}(z, \alpha)$. Далее,

$$p_0(\alpha) = \frac{1}{2}\left[f(\sqrt{B}, \alpha) + f(-\sqrt{B}, \alpha)\right],$$
$$q_0(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{B}}\left[f(\sqrt{B}, \alpha) - f(-\sqrt{B}, \alpha)\right]. \tag{2.12}$$

Вычислим асимптотику эталонного интеграла (2.8).

Лемма 2.5. *Пусть функция* $f(z, \alpha)$ *голоморфна в окрестности* U *точки* $(0, 0)$, *контур* γ *лежит в проекции* U *на плоскость* z *и выбран так, как указано выше. Тогда существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что при* $k \to +\infty$, $|\alpha| \leqslant \delta_0$ *и при любом целом* $N \geqslant 0$ *для интеграла* (2.8) *справедливо асимптотическое разложение*

$$\Phi(k, \alpha) = \exp\left[ikA(\alpha)\right]\Big[k^{-1/3}v\left(-k^{-2/3}B(\alpha)\right) \times$$
$$\times \left(\sum_{s=0}^{N} k^{-s}a_{1s}(\alpha) + O\left(k^{-N-1}\right)\right) +$$
$$+ k^{-2/3}v'\left(-k^{-2/3}B(\alpha)\right)\left(\sum_{s=0}^{N} k^{-s}a_{2s}(\alpha) + O\left(k^{-N-1}\right)\right)\Big]. \tag{2.13}$$

Это разложение равномерно по α, *коэффициенты* $a_{is}(\alpha)$ *голоморфны при малых* $|\alpha|$.

Представим f в виде суммы (2.11), где $0 \leqslant j \leqslant N$, и остаточного члена. Обозначим

$$F_{lj} = \int_\gamma \exp\left[kS_0(z, \alpha)\right]\psi_l(z)(z^2 - B)^\alpha\, dz, \tag{2.14}$$

где $\psi_1(z) = 1$, $\psi_2(z) = z$. Так как $\partial S_0/\partial z = i(-B + z^2)$, то, интегрируя по частям, получаем рекуррентные соотношения

$$F_{1j} = -\frac{2(j-1)}{ik}F_{2,j-2} + O(e^{-kc}),$$
$$F_{2j} = -\frac{2j-1}{ik}F_{1,j-1} - \frac{2(j-1)B}{ik}F_{2,j-2} + O(e^{-kc}). \tag{2.15}$$

Таким образом, функции F_{lj} выражаются через функции F_{l0}. Покажем, что

$$F_{10} = 2\sqrt{\pi}k^{-1/3}v(-\alpha k^{2/3}) + O(e^{-kc}),$$
$$F_{20} = -i2\sqrt{\pi}k^{-1/3}v'(-\alpha k^{2/3}) + O(e^{-kc}). \tag{2.16}$$

Продеформируем контур γ в ломаную, состоящую из отрезков $[z_1, 0]$, $[0, z_2]$, где z_j — концы контура. Тогда интеграл по отрезку $[0, z_2]$ равен разности интегралов по лучам $z = \rho z_2$, где $0 \leqslant \rho < \infty$, $1 \leqslant \rho < \infty$ для этих лучей. Последний интеграл имеет порядок $O(e^{-kc})$. Аналогично заменяем отрезок $[z_1, 0]$ лучом $z = -\rho z_1$, $0 \leqslant \rho < \infty$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — полученный контур; тогда

$$\int_{\tilde{\gamma}} \exp(kS_0)\,dz = k^{-1/3} \int_{\tilde{\gamma}} \exp\left(i\alpha k^{2/3} z - iz^3/3\right) dz = \\ = 2\sqrt{\pi}\, k^{-1/3} v\left(-\alpha k^{2/3}\right).$$

Тем самым первое из соотношений (2.16) доказано; аналогично доказывается второе. Следовательно, интеграл (2.8) равен сумме слагаемых указанного в (2.13) вида и остаточного члена вида R_N. Последний есть интеграл вида (2.8), где $f = f_N = (z^2 - B)^N g_N(z, \alpha)$, функция g голоморфна при малых $|z|$, $|\alpha|$.

Чтобы оценить остаточный член, получим следующую оценку:

$$\left| \int_{\gamma} \varphi(z) \exp(kS_0)\,dz \right| \leqslant \\ \leqslant C\left(k^{-1/3} \left| v\left(-k^{-2/3}\alpha\right)\right| + k^{-2/3} \left| v'\left(-k^{2/3}\alpha\right)\right|\right). \quad (2.17)$$

Здесь $\varphi(z)$ — голоморфная в окрестности контура функция. Напомним, что функция $v(t)$ имеет бесконечно много нулей, все они вещественны и отрицательны. То же самое верно для функции $v'(t)$; нули этих функций $v(t)$, $v'(t)$ перемежаются.

Пусть $|\alpha| k^{2/3} \leqslant a < \infty$, $I(\alpha, k)$ — интеграл из левой части (2.17). Делая замену $z \to k^{-1/3} z$ и разлагая функцию φ в ряд Тейлора, получаем

$$I(\alpha, k) = k^{-1/3} \varphi(0) \int_{\gamma_k} \exp\left(S_1(z, \zeta)\right) dz + \\ + \varphi'(0)\, k^{-2/3} \int_{\gamma_k} \exp\left(S_1(z, \zeta)\right) z\,dz + \\ + k^{-1/3} \int_{\gamma_k} \exp\left(S_1(z, \zeta)\right) R(z, k)\,dz, \quad (2.18)$$

где γ_k — контур, полученный из γ растяжением в $k^{1/3}$ раз, $\zeta = \alpha k^{2/3}$ — ограниченная величина. Оценим последний интеграл в (2.18). Имеем $|R(z, k)| \leqslant C |z k^{-1/3}|^2$ на γ_k.

Далее, заменим контур γ ломаной $\tilde{\gamma}$, состоящей из отрезков $l_1=[0, e^{i\pi/6}\rho_1]$, $l_2=[\rho_2 e^{i5\pi/6}, 0]$, где $\rho_j>0$; тогда $I(\alpha, k)$ равен сумме интеграла по $\tilde{\gamma}$ и величины порядка $O(e^{-ck})$. На l_1 имеем $\operatorname{Re} S_1 \leqslant \rho|\zeta| - \rho^3/3$, так что модуль интеграла по l_1 не превосходит $Ck^{-1}\int\limits_0^\infty \rho^2 \exp(|\zeta|\rho-\rho^3/3)\,d\rho \leqslant \leqslant Ck^{-1}$, так как величина $|\zeta|$ ограничена, а интеграл является непрерывной функцией от $|\zeta|$. Аналогично оценивается интеграл по l_2. Первые два интеграла в правой части (2.18) вычисляются, и мы получаем

$$2\sqrt{\pi}I(k, \alpha)=\varphi(0)k^{-1/3}v(-\zeta)-i\varphi'(0)k^{-2/3}v'(-\zeta)+O(k^{-1}).$$

Тем самым оценка (2.17) доказана, так как $|v(-\zeta)|+ +k^{-1/3}|v'(-\zeta)|\geqslant k^{-1/3}$, если $|\zeta|$ ограничен.

Докажем оценку (2.17) при $|\alpha|k^{2/3}\geqslant a$, где $a>0$ — фиксированное, но достаточно большое число. При $|\zeta|\to \to\infty$ асимптотика интеграла $I(\alpha, k)$ определяется точками перевала функции S_1: $z=\pm\sqrt{\zeta}$. Отметим, что $S_1(\pm\sqrt{\zeta}, \zeta)=\mp i\frac{2}{3}k\alpha^{3/2}$, а на концах контура γ_k имеем $\operatorname{Re} S_1\leqslant -Ck$, $C>0$, так что если $|\alpha|\leqslant\delta$ и $\delta>0$ достаточно мало, то вклад от концов экспоненциально мал по сравнению с вкладами от точек перевала. Повторяя в точности те же рассуждения, что и при вычислении асимптотики функции Эйри (см. гл. IV, § 3), получаем, что асимптотика $I(\alpha, k)$ равна вкладу от точки перевала $z=\sqrt{\zeta}$ в секторе D_0: $|\arg\alpha|\leqslant\pi-\varepsilon<\pi$ и сумме вкладов от точек $z=\pm\sqrt{\zeta}$ в оставшемся секторе D_1. В секторе D_0, как следует из асимптотики функции Эйри, $k^{-1/3}v'(-\zeta)= =O(\alpha|v(-\zeta)|)$, и оценка (2.17) доказана. Точно так же доказывается оценка (2.17) в секторе D_2, вне кружков K_j радиусов ρ_j с центрами в нулях ζ_j функции $v(-\zeta)$. Эти окрестности выбираются таким образом, чтобы $v(-\zeta)= =O(1)$ при $\zeta\in K_j$. В секторе D_2 в силу (4.36′) имеем

$$k^{-1/3}v(-\zeta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}k^{-1/3}(-\zeta)^{-1/4}\left[e^{-S}\left(1+O(\zeta^{-3/2})\right)+\right.$$
$$\left.+ie^{S}\left(1+O(\zeta^{-3/2})\right)\right],$$

где $S=\frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2}$, $S>0$ при $\alpha<0$. Асимптотика интеграла $I(\alpha, k)$ имеет тот же вид, только коэффициенты при $e^{\pm S}$ равны соответственно $i\varphi(\sqrt{\alpha})$, $\varphi(-\sqrt{\alpha})$. Так как в круге K_j экспоненты $e^{\pm s}$ ограничены, то

$$I(\alpha, k) = k^{-1/3}\varphi(0)v(-\zeta) + \\ + k^{-2/3}\varphi'(0)v(-\zeta) + O(\alpha k^{-1/3}|\zeta|^{-1/4}). \quad (2.19)$$

Поскольку в круге K_j правая часть неравенства не меньше, чем $k^{-2/3}|v'(-\zeta)| \geqslant Ck^{-2/3}|\zeta|^{1/4}$, то отношение остаточного члена в (2.19) к правой части (2.17) не превосходит $\mathrm{const}\,|\sqrt{\alpha}|$. Итак, оценка (2.17) полностью доказана. Очевидно, что эта оценка справедлива и в том случае, когда $\varphi = \varphi(z, \alpha)$, функция φ голоморфна по (z, α), когда z лежит в окрестности контура γ, $|\alpha| \leqslant \delta$.

Завершим доказательство леммы. Остаточный член R_N есть интеграл вида $I(\alpha, k)$, где $\varphi = (z^2 - \alpha)^N g_N(z, \alpha)$, функция g_N голоморфна при малых $|\alpha|$. Интегрируя по частям так же, как и при выводе рекуррентных соотношений (2.15), получаем, что R_N есть сумма слагаемых вида $I(\alpha, k)$ с множителями $k^{-\beta_{N_j}}$, где $\beta_{N_j} \to \infty$ при $N \to \infty$. Для этих интегралов имеет место оценка (2.17). Чтобы получить (2.13), достаточно выбрать $M > N$ достаточно большим, оставить только слагаемые, выписанные в формуле (2.13), а остальные отправить в остаточный член.

Выпишем главные члены разложения (2.13):

$$\Phi(k, \alpha) = \sqrt{\pi}\, k^{-1/3}\left[f(\sqrt{B}, \alpha) + \right. \\ \left. + f(-\sqrt{B}, \alpha) + O(k^{-1})\right] v(-k^{2/3}B) - \\ - \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}} k^{-2/3}\left[f(\sqrt{B}, \alpha) - f(-\sqrt{B}, \alpha) + \right. \\ \left. + O(k^{-1})\right] v'(-k^{-2/3}B). \quad (2.20)$$

Рассмотрим важный частный случай: функция $B(\alpha)$ вещественнозначна, функция f неаналитична.

Лемма 2.6. *Пусть функция $f \in C^\infty(I \times J_0)$, где I — отрезок $[-a, a]$, J_0 — отрезок $0 \leqslant \alpha \leqslant \delta$, функция f и все ее производные по x обращаются в нуль при $x = \pm a$, $\alpha \in J_0$. Пусть $B(\alpha) \sim c\alpha$ при $\alpha \to 0$, функция $B(\alpha)$ вещественна при вещественных α. Тогда для интеграла*

$$\Phi(k, \alpha) = \int_{-a}^{a} \exp(ikS_0(x, \alpha)) f(x, \alpha)\, dx \quad (2.21)$$

справедливо разложение (2.13) *при* $k\to+\infty$, $0\leqslant\alpha\leqslant\delta_0$, *где* $\delta_0>0$ *достаточно мало, равномерно по* α.

Точно так же, как и в лемме 1.1, можно доказать, что при любом целом $N\geqslant 0$ для функции f имеет место представление

$$f(x,\alpha)=\sum_{j=0}^{N}p_j(\alpha)(x^2-B)^j+x\sum_{j=0}^{N}q_j(\alpha)(x-B)^j+\\+(x^2-B)^N R_N(x,\alpha),$$

где $R_N\in C^\infty(I\times J_{\delta_0})$, если $\delta_0>0$ достаточно мало. Покажем, что если $f\in C^\infty(I\times J_{\delta_0})$, то

$$\Phi(k,\alpha)=\sqrt{2\pi}p_0(\alpha)v(-\zeta)k^{-1/3}+\\+i2\sqrt{\pi}q_0(\alpha)v'(-\zeta)k^{-2/3}+O(k^{-1/3}).\quad(2.22)$$

Имеем

$$\int_{-a}^{a}\exp(kS_0(x,\alpha))\,dx=2\sqrt{\pi}\,k^{-1/3}v(-\zeta)-\\-\int_{-\infty}^{a}\exp(kS_0(x,\alpha))\,dx-\int_{a}^{\infty}\exp(kS_0(x,\alpha))\,dx=\\=2\sqrt{\pi}\,k^{-1/3}v(-\zeta)+O(k^{-1}).$$

Действительно, функция S_0 чисто мнимая и не имеет стационарных точек на полуосях $x\geqslant a$, $x\leqslant -a$; поэтому асимптотика этих интегралов равна вкладу от конца $x=\pm a$ и потому имеет порядок $O(k^{-1})$. Аналогично,

$$\int_{-a}^{a}x\exp(kS_0)\,dx=-i2\sqrt{\pi}\,k^{-2/3}v'(-\zeta)+O(k^{-1}),$$

и, наконец,

$$\int_{-a}^{a}(x^2-\alpha)g_1(x,\alpha)\exp(kS_0)\,dx=\\=-ik^{-1}\exp(ikS_0(x,\alpha))g_1\big|_{-a}^{a}+O(k^{-1})=O(k^{-1}).$$

Заменим интеграл (2.21) интегралом $\widetilde{\Phi}$, в котором вместо f стоит функция $f\varphi$ и $\varphi(x)\in C_0^\infty$, $\varphi(x)=0$ при $|x|>a/2$, $\varphi(x)=1$ при малых $|x|$. Тогда при малых вещественных α имеем $\widetilde{\Phi}=\Phi+O(k^{-\infty})$ равномерно по α в силу принципа локализации. Далее доказательство проводится по тому же плану, что и в лемме 2.4. Именно, пусть $F_0(k, \alpha)$ — интегралы вида (2.14) со следующими отличиями: контур $\gamma = [-a, a]$, и подынтегральная функция содержит множитель $\varphi(x)$. Тогда соотношения (2.15) остаются в силе, только вместо $O(e^{-kc})$ в правой части будет стоять $O(k^{-\infty})$. Действительно, если интегрировать по частям так же, как и при выводе соотношений (2.15), то внеинтегральная подстановка обратится в нуль в силу финитности функции φ, но появится интеграл, содержащий функцию $\varphi'(x)$. Этот интеграл имеет порядок $O(k^{-\infty})$ при $k \to +\infty$, так как $\varphi'(x) = 0$ в окрестности точки $x = 0$, так что $\operatorname{supp} \varphi'$ не содержит стационарных точек $x = \pm\sqrt{B(\alpha)}$ функции S_0 при малых $|\alpha|$. Поэтому асимптотическое разложение для Φ имеет вид (2.13). Остаточный член оценивается так же, как и в лемме 2.5, только вместо (2.17) мы используем (2.22).

Замечание 2.1. Если функция $f(x, \alpha)$ имеет конечное, $\geqslant 3$, число непрерывных производных, то можно получить конечное число членов разложения (2.13).

3. Общий случай. Вычислим асимптотику интеграла

$$F(k, \alpha) = \int_\gamma f(z, \alpha) \exp(ikS(z, \alpha))\, dz \tag{2.23}$$

при $k \to +\infty$ и малых $|\alpha|$ в случае, когда функция S имеет при малых $|\alpha|$ две близкие простые седловые точки. Здесь γ — конечная простая гладкая кривая. Введем условия:

1°. Функции $f(z, \alpha)$, $S(z, \alpha)$ голоморфны по (z, α), когда z лежит в окрестности контура γ, $|\alpha| < \delta$.

2°. При малых $|z - z_0|$, $|\alpha|$

$$S(z, \alpha) = (-a\alpha + O(\alpha^2))(z - z_0) + \\ + (z - z_0)^2 O(\alpha) + \frac{1}{6}(b + O(\alpha))(z - z_0)^3, \tag{2.24}$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b = 0$.

Тогда в силу леммы 2.1 функция S имеет при малых $|\alpha|$ две простые близкие точки перевала $z_{1,2}(\alpha)$. Можно считать, что $b > 0$; этого можно добиться с помощью замены $z \to cz$.

Теорема 2.1. *Пусть условия 1°, 2° выполнены, $b > 0$ и контур γ выбран так же, как и в (2.8). Тогда при $k \to +\infty$, $|\alpha| \leqslant \delta_0$ и при $\delta_0 > 0$ достаточно малом для ин-*

теграла (2.23) *справедливо асимптотическое разложение* (2.13), *равномерное по* α. *Это разложение можно дифференцировать по* k, α *любое число раз. Здесь*

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}\left[S(z_1(\alpha), \alpha) + S(z_2(\alpha), \alpha)\right], \tag{2.25}$$

$$\zeta = -k^{2/3}\zeta_0(\alpha),$$
$$\zeta_0(\alpha) = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\left[S(z_2(\alpha), \alpha) - S(z_1(\alpha), \alpha)\right]^{2/3}. \tag{2.26}$$

Выпишем главный член асимптотики:

$$F(k, \alpha) = \exp\left[ikA(\alpha)\right]\sqrt{\pi}\,k^{-1/3} \times$$
$$\times \left[\left(f\sqrt{\frac{2\sqrt{B}}{S''_{zz}}}\Big|_{z=z_1(\alpha)} + f\sqrt{-\frac{2\sqrt{B}}{S''_{zz}}}\Big|_{z=z_2(\alpha)}\right)v(\zeta) + \right.$$
$$+ ik^{-1/3}\left(f\sqrt{-\frac{2}{\sqrt{B}\,S''_{zz}}}\Big|_{z=z_2(\alpha)} - \right.$$
$$\left.\left. - f\sqrt{\frac{2}{\sqrt{B}\,S''_{zz}}}\Big|_{z=z_1(\alpha)}\right)v'(\zeta)\right]. \tag{2.27}$$

Ветви корней выбраны следующим образом: при $a > 0$, $\alpha > 0$

$$\zeta_0 \sim c\alpha, \quad z_1(\alpha) \sim c_1\sqrt{\alpha} \quad (c > 0,\ c_1 > 0,\ \sqrt{\alpha} > 0). \tag{2.28}$$

Теорема 3.2. *Пусть функция* $f(x, \alpha)$, $S(x, \alpha) \in C^\infty$ *при* $|x| \leqslant a$, $|\alpha| \leqslant \delta$ (α *вещественно*), *функция* S *вещественнозначна, удовлетворяет условию* 2°, *функция* f *обращается в нуль при* $x = \pm a$ *вместе со всеми производными по* x, *и* $b > 0$.

Тогда все утверждения теоремы 3.1 *справедливы при* $k \to +\infty$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \delta_0$, *если* $\delta_0 > 0$ *достаточно мало, для интеграла*

$$F(k, \alpha) = \int_{-a}^{a}\exp\left[ikS(x, \alpha)\right]f(x, \alpha)\,dx. \tag{2.29}$$

В формуле (2.27)

$$S''_{xx}(x_1(\alpha), \alpha) < 0, \quad S''_{xx}(x_2(\alpha), \alpha) > 0, \tag{2.30}$$

ветви корней арифметические.

Пример 2.1. Рассмотрим функцию Бесселя $J_\nu(x)$ и исследуем ее асимптотику при ν, $x \to +\infty$, $x \approx \nu$. Имеем

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} \exp[kS(t, \beta)]\, dt, \qquad (2.31)$$

где обозначено

$$k = x\nu, \quad x = \frac{1}{\operatorname{ch}\beta}, \quad S = \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch}\beta. \qquad (2.32)$$

При $x = 1$, т. е. при $\beta = 0$, функция S имеет двукратную точку перевала $t = 0$. В окрестности точки $t = 0$, $\beta = 0$ имеем

$$S = -\frac{t\beta^2}{2}[1 + O(\beta^2)] + \frac{t^3}{6} + O(t^5),$$

т. е. S имеет вид (2.1), где $\alpha = \beta^2$. При малых $|\beta|$ функция S имеет две простые точки перевала $t_{1,2}(\beta) = \pm\beta[1 + O(\beta^2)]$, которые сливаются при $\beta = 0$. В качестве контура интегрирования в (2.31) выберем линию наибыстрейшего спуска γ функции $\operatorname{Re} S(t, 0)$, выходящую из точки $t = 0$ (см. гл. IV, § 4, п. 2). Далее, можно заменить контур γ его конечной дугой, содержащей внутри себя точку $t = 0$; тогда контур $\tilde{\gamma}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, а интеграл по контуру $\gamma \setminus \tilde{\gamma}$ имеет порядок $O(e^{-kc})$, $c > 0$, при $k \to +\infty$. К полученному интегралу применима теорема 2.1. Это позволяет получить равномерные по β при малых комплексных $|\beta|$. В частности, при $\beta > 0$ (т. е. при $x < 1$, $x \sim 1$, $\nu \to +\infty$) получаем

$$J_\nu\left(\frac{\nu}{\operatorname{ch}\beta}\right) = \sqrt{\frac{2b}{\operatorname{sh}\beta}} \frac{v(k^{2/3}b^2)}{k^{1/3}}\left[1 + O(k^{-1})\right],$$

где обозначено

$$k = \frac{\nu}{\operatorname{ch}\beta}, \quad b^3 = \frac{3}{2}(\beta \operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta),$$

$$b \sim 2^{-1/3}\beta \quad (\beta \to 0).$$

Рассмотрим многомерный интеграл

$$F(k, \alpha) = \int\limits_{\Omega} f(x, \alpha) \exp[ikS(x, \alpha)]\, dx, \qquad (2.33)$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, Ω — окрестность точки x^0, функция S вещественнозначна при вещественных x, α. Мы рассмотрим случай, когда функция $S(x, \alpha)$ при малых вещественных α имеет две невырожденные точки перевала, близкие к точке x^0. Пусть в окрестности точки $(x^0, 0)$ функция S имеет вид

$$S(x, \alpha) = S(x^0, \alpha) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(\alpha)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \ldots \tag{2.34}$$

Обозначим через $\lambda_j(\alpha)$ собственные значения матрицы $C(\alpha) = S''_{xx}(x^0, \alpha)$, и пусть

$$\lambda_1(\alpha) = \alpha, \quad \lambda_j(0) = \lambda_j \neq 0, \quad 2 \leqslant j \leqslant n. \tag{2.35}$$

Линейной невырожденной заменой переменных $x - x^0 = A(\alpha) y$ можно привести функцию S к виду

$$S(x, \alpha) = \\ = S(x^0, \alpha) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\alpha) y_j^2 + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^{n} c_{ijk}(\alpha) y_i y_j y_k + \ldots \tag{2.36}$$

Если

$$c_{111}(0) \neq 0, \tag{2.37}$$

то нетрудно видеть, что функция $S(x, \alpha)$ имеет при малых α ровно две стационарные точки $x^1(\alpha)$, $x^2(\alpha)$, которые при $\alpha = 0$ совпадают с точкой x^0. Обе эти точки вещественны и невырождены.

Теорема 2.3. *Пусть функции $f(x, \alpha)$, $S(x, \alpha) \in C^\infty(\Omega \times J_\delta)$, где J_δ — интервал $-\delta < \alpha < \delta$, и выполнены условия*:

1°. *Функция $S(x, \alpha)$ вещественнозначна, имеет вид* (2.34) *и удовлетворяет условиям* (2.35), (2.37).

2°. *Функция $f(x, \alpha)$ обращается в нуль вместе со всеми производными по x в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$ области Ω.*

Тогда при $k \to +\infty$, $-\delta_0 \leqslant \alpha \leqslant \delta_0$ и при $\delta_0 > 0$ достаточно малом для интеграла (2.33) *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(k, \alpha) \sim k^{-(n-1)/2} \exp[ikA(\alpha)] \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(k, \alpha, \zeta) k^{-m}, \tag{2.38}$$

где Φ_m — ряды вида (2.13), *равномерно по α. Это разложение можно дифференцировать по k, α любое число раз.*

Здесь $A(\alpha)$, $\zeta(\alpha)$ определяются по формуле (2.5).

Можно считать, не ограничивая общности, что $x^0=0$, $S(x,\alpha)$ имеет вид (2.36). Мы применим к интегралу (2.33) метод стационарной фазы по переменным $x_2, \ldots, x_n$, а к полученному интегралу применим теорему 2.2. Положим $x'=(x_2, \ldots, x_n)$, тогда точка перевала функции S, как функции от x', определяется из системы

$$\lambda_j(\alpha)x_j+\frac{1}{2}c_{11j}(\alpha)x_1^2+\ldots=0, \quad 2\leqslant j\leqslant n.$$

Эта система при малых x_1, α имеет, в силу условий (2.35), (2.37), единственное решение $\widetilde{x}'(x_1,\alpha)$, причем

$$\widetilde{x}'_j(x_1,\alpha)=-\frac{c_{11j}(\alpha)}{2\lambda_j(\alpha)}x_1^2[1+O(x_1)], \tag{2.39}$$

$$S_1(x_1,\alpha)\equiv S(x_1,\widetilde{x}(x_1,\alpha),\alpha)=$$
$$=S(0,\alpha)+\frac{\lambda_1(\alpha)}{2}x_1^2+\frac{c_{111}(\alpha)}{6}x_1^3+O(x_1^4).$$

Далее, можно считать, что функция f отлична от нуля только в малой окрестности V точки $x=0$ вида $|x_j|\leqslant\varepsilon$, $1\leqslant j\leqslant n$. Положим $V'=\{x'\colon |x_j|\leqslant\varepsilon,\ 2\leqslant j\leqslant n\}$. Тогда

$$F(k,\alpha)=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}dx_1\left(\int\limits_{V'}\exp(ikS)f\,dx'\right).$$

Стационарная точка $\widetilde{x}'(x_1,\alpha)$ невырождена при малых $|\alpha|$, и потому асимптотика интеграла по области V' равна вкладу от этой точки, так что

$$F(k,\alpha)\sim k^{-(n-1)/2}\sum_{j=0}^{\infty}k^{-j}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp[ikS_1(x_1,\alpha)]f_j(x_1,\alpha)\,dx_1. \tag{2.40}$$

Здесь функции $f_j\in C^\infty$ при $|x_1|\leqslant\varepsilon$, $|\alpha|\leqslant\delta$, если $\delta>0$ достаточно мало, и обращаются при $x=\pm\varepsilon$ вместе со всеми производными по x. Применяя к каждому из слагаемых (2.40) теорему 2.2, что возможно в силу (2.35), (2.37), получаем разложение (2.38).

Выпишем первые два члена асимптотики. Положим

$$D_j(\alpha) = S''_{xx}(x^j(\alpha), \alpha), \quad j = 1, 2, \qquad \delta_j(\alpha) = \operatorname{sgn} D_j(\alpha), \tag{2.41}$$

тогда первые два члена разложения (2.38) имеют вид $F(k, \alpha) \approx$

$$\approx (2\pi)^{n/2} k^{-n/2-1/6} \left[B^{1/4}(\varphi_2 + \varphi_1) v(\zeta) + B^{-1/4} i k^{-1/3} (\varphi_2 - \varphi_1)\right], \tag{2.42}$$

$$\varphi_j = \frac{\exp\left(i \frac{\pi}{4} \delta_j(\alpha)\right)}{\sqrt{|\det D_j(\alpha)|}} f(x_j(\alpha), \alpha).$$

§ 3. Слияние полюса и точки перевала

1. Эталонные интегралы. Рассмотрим интеграл

$$\Psi(z, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-zt^2)}{t - \varepsilon} dt, \tag{3.1}$$

где z — большой, ε — малый (невещественный) параметры. При $\varepsilon = 0$ сливаются полюс $t = \varepsilon$ подынтегральной функции и точка перевала $t = 0$.

Интеграл (3.1) выражается через интеграл Френеля (1.2).

Лемма 3.1. *Пусть $z \in D$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, где D — плоскость с разрезом по полуоси $(-\infty, 0)$. Тогда функция $F(z, \varepsilon)$ аналитически продолжается из области $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon > 0$ в область $D \times \mathbb{C}$, как голоморфная функция (z, ε) и*

$$\Psi(z, \varepsilon) = \pi i \exp(-\varepsilon^2 z)[1 - \Phi(-i\varepsilon\sqrt{z})]. \tag{3.2}$$

Пусть z, ε вещественны и положительны. Дифференцируя по z, получаем

$$\Psi'_z(z, i\varepsilon) = \varepsilon^2 \Psi(z, i\varepsilon) - i\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-zt^2)\, dt = \varepsilon^2 \Psi(z, i\varepsilon) - i\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{z}}.$$

Решая это уравнение и учитывая, что $\Psi(+\infty, i\varepsilon) = 0$, получаем

$$\Psi(z, i\varepsilon) = i\varepsilon\sqrt{\pi}\exp(\varepsilon^2 z)\int_z^{+\infty} t^{-1/2}\exp(-\varepsilon^2 t)\,dt =$$
$$= 2i\sqrt{\pi}\exp(\varepsilon^2 z)\int_{\varepsilon\sqrt{z}}^{+\infty}\exp(-t^2)\,dt =$$
$$= i\pi\exp(\varepsilon^2 z)\left(1 - \Phi\left(\varepsilon\sqrt{z}\right)\right),$$

где Φ — интеграл Френеля (см. (1.2)).

Следовательно, при $\operatorname{Re}\varepsilon = 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon > 0$, $z > 0$

$$\Psi(z, \varepsilon) = i\pi\exp(-\varepsilon^2 z)[1 - \Phi(-i\varepsilon\sqrt{z})].$$

Интеграл Френеля $\Phi(\zeta)$ является целой функцией ζ, так что по принципу аналитического продолжения функция $\Psi(z, \varepsilon)$ является целой функцией от аргумента $\varepsilon\sqrt{z}$. В частности, функция $F(z, \varepsilon)$ голоморфна по (z, ε), когда z лежит в плоскости с разрезом по полуоси $(-\infty, 0)$, а ε пробегает всю комплексную плоскость.

Рассмотрим другой эталонный интеграл

$$\Psi_0(z, \varepsilon) = \int_0^{\infty}\frac{\exp(-tz^2)}{t - \varepsilon}\,dt. \tag{3.3}$$

Здесь при $\varepsilon = 0$ происходит слияние точки перевала, полюса и конца контура интегрирования. Этот интеграл также выражается через специальные функции — интеграл Френеля и интегральный логарифм. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, $z > 0$; дифференцируя (3.3) по z, получаем уравнение

$$\frac{\partial\Psi_0(z, i\varepsilon)}{\partial z} = \varepsilon^2\Psi_0(z, i\varepsilon) - \frac{i\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{\pi}{z}} - \frac{1}{2z}.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что $\Psi_0(+\infty, i\varepsilon) = 0$, получаем

$$\Psi_0(z, i\varepsilon) = \frac{i\varepsilon\sqrt{\pi}}{2}\exp(\varepsilon^2 z)\int_z^{+\infty}\exp(-\varepsilon^2 t)\,t^{-1/2}dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\exp(\varepsilon^2 z)\int_z^{+\infty}\exp(-\varepsilon^2 t)\,t^{-1}dt =$$
$$= \exp(\varepsilon^2 z)\left[\frac{\pi i}{2}\left(1 - \Phi\left(\varepsilon\sqrt{z}\right)\right) - \frac{1}{2}Ei(-\varepsilon^2 z)\right],$$

где $Ei(x)$ — интегральная показательная функция

$$Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} e^{-t}t^{-2}dt, \quad x < 0.$$

Следовательно,

$$\Psi_0(z, \varepsilon) = \exp(-\varepsilon^2 z)\left[\frac{\pi i}{2}\left(1 - \Phi\left(-i\varepsilon\sqrt{z}\right)\right) - \frac{1}{2}Ei(\varepsilon^2 z)\right]. \tag{3.4}$$

Эта формула пригодна, например, при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $\varepsilon \notin [0, +\infty)$.

Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda, \varepsilon) = \int_{-a}^{a} \frac{\exp(-\lambda t^2)}{t - \varepsilon} h(t, \varepsilon)\, dt, \tag{3.5}$$

где $0 < a < \infty$, $\lambda > 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon < 0$.

Лемма 3.2. *Пусть функция $h(t, \varepsilon)$ голоморфна по (t, ε), когда t лежит в окрестности отрезка $[-a, a]$, и $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Тогда существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при*

$$\lambda \to +\infty, \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1, \quad \delta \leqslant \arg \varepsilon \leqslant \pi - \delta \quad (0 < \delta < \pi)$$

справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} h_t^{(k)}(0, \varepsilon) F_k(\lambda, \varepsilon) + O\left(\lambda^{-N/2}\right), \tag{3.6}$$

где обозначено

$$F_k(\lambda, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^k \exp(-\lambda t^2)}{t - \varepsilon}\, dt. \tag{3.7}$$

Здесь $N \geqslant 0$ — любое целое число, $O(\lambda^{-N/2})$ равномерно по ε.

Интегралы F_k выражаются через интеграл (3.1) и его производные. Именно,

$$F_{2n}(\lambda, \varepsilon) = \left(-\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^n \Psi_0(\lambda, \varepsilon),$$
$$F_{2n+1}(\lambda, \varepsilon) = \left(-\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^n \left[\varepsilon\Psi_0(\lambda, \varepsilon) + \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right], \tag{3.8}$$

так как $F_1 = \varepsilon\Psi_0 + \sqrt{\pi/\lambda}$.

В интеграле (3.5) можно заменить a на a', $0 < a' < a$; отброшенный интеграл имеет порядок $O(\exp(-\lambda a'^2))$. Поэтому $a > 0$ можно считать настолько малым, что функция $h(t, \varepsilon)$ голоморфна при $|t| < 2a$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Имеем

$$h(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} h_k(\varepsilon) t^k + h_N(t, \varepsilon), \quad |h_N(t, \varepsilon)| \leqslant C_N |t|^N$$

при $|t| \leqslant a$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Соответственно

$$F(\lambda, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} h_k(\varepsilon) \widetilde{F}_k(\lambda, \varepsilon) + R_N(\lambda, \varepsilon),$$

$$\widetilde{F}_k(\lambda, \varepsilon) = \int_{-a}^{a} \frac{t^k \exp(-\lambda t^2)}{t - \varepsilon} dt, \tag{3.9}$$

$$R_N = \int_{-a}^{a} \frac{h_N(t, \varepsilon) \exp(-\lambda t^2)}{t - \varepsilon} dt.$$

Оценим остаточный член. Положим $\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\varphi}$, $\pi - \delta \geqslant \varphi \geqslant \delta$, где $0 < \delta < \pi$. Тогда

$$\max_{t \in R} \frac{|t|}{|t - \varepsilon|} = \max_{t \in R} \frac{|t|}{|t - e^{i\varphi}|} \leqslant C < \infty,$$

так как $e^{i\varphi}$ невещественно. Следовательно, при

$$\delta \leqslant \arg \varepsilon \leqslant \pi - \delta, \quad \lambda \geqslant 1,$$

$$|R_N(\lambda, \varepsilon)| \leqslant C_N \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{N-1} \exp(-\lambda t^2) dt \leqslant C'_N \lambda^{-N/2}. \tag{3.10}$$

Наконец, $\widetilde{F}_k = F_k + O(\exp(-\lambda a^2))$, и (3.6) доказано.

Лемма 3.3. *Пусть условия леммы 3.2 выполнены. Тогда существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при $\lambda \to +\infty$, $\delta \leqslant \arg \varepsilon \leqslant 2\pi - \delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon$ справедливо асимптотическое разложение*

$$\int_{0}^{a} \frac{\exp(-\lambda t^2)}{t - \varepsilon} h(t, \varepsilon) dt = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} h_t^{(k)}(0, \varepsilon) F_k^+(t, \varepsilon) + O(\lambda^{-N/2}), \tag{3.11}$$

$$F_k^+(t, \varepsilon) = \int_{0}^{\infty} \frac{t^k}{t - \varepsilon} \exp(-\lambda t^2) dt. \tag{3.12}$$

Здесь $N \geqslant 0$ — любое целое число, $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, но не зависящим от ε.

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 3.3, за исключением оценки остаточного члена. При $0 \leqslant t \leqslant a$, $\delta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \delta$ ($\varphi = \arg \varepsilon$) имеем

$$\frac{t}{|t-\varepsilon|} \leqslant \max_{t \geqslant 0} \frac{t}{|t-e^{i\varphi}|} \leqslant C < \infty,$$

для остаточного члена получаем оценку (3.10).

Покажем еще, что разложение (3.6) пригодно в более широком секторе.

Лемма 3.4. *В условиях леммы 3.2 разложение (3.6) справедливо при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$, $-\pi/4 + \delta \leqslant \arg \varepsilon \leqslant 3\pi/4 - \delta$. Здесь $\delta > 0$ сколь угодно мало, но не зависит от ε.*

2. Общий случай. Рассмотрим интеграл

$$F(\lambda, \varepsilon) = \int\limits_{\gamma} \frac{\exp[\lambda S(t, \varepsilon)]}{f(t, \varepsilon)}\, dt, \tag{3.14}$$

где γ — конечная кривая в комплексной плоскости t. Введем условия:

1°. Функции f, S голоморфны по (t, ε), когда t лежит в окрестности контура γ, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

2°. Функция $S(t, 0)$ имеет простую точку перевала $t = 0$, которая лежит на γ, $\max\limits_{t \in \gamma} \operatorname{Re} S(t, 0)$ достигается только в точке $t = 0$.

Тогда функция $S(t, \varepsilon)$ имеет при малых ε невырожденную точку перевала $t_0(\varepsilon)$ такую, что $t_0(0) = 0$. Функция $t_0(\varepsilon)$ голоморфна при малых ε.

3°. $f(0, 0) = 0$, $f'_\varepsilon(0, 0) \neq 0$, $f'_t(0, 0) \neq 0$.

Тогда функция $[f(t, 0)]^{-1}$ имеет простой полюс $t = 0$, а при малых ε функция $[f(t, \varepsilon)]^{-1}$ имеет простой полюс $t = t_1(\varepsilon)$, причем

$$t_1(\varepsilon) \sim -\frac{\varepsilon f'_\varepsilon(0, 0)}{f'_t(0, 0)} \quad (\varepsilon \to 0). \tag{3.15}$$

Необходимо еще указать взаимное расположение точек $t_1(\varepsilon)$ и контура γ. Заметим прежде всего, что контур γ можно заменить его сколь угодно малой дугой, содержащей точку $t = 0$. Действительно, если $\gamma_0 = \gamma \cap \{t\colon |t| \leqslant \leqslant \delta\}$, то в силу условия 2° $\max\limits_{t \in \gamma \setminus \gamma_0} \operatorname{Re}(t, \varepsilon) \leqslant \operatorname{Re} S(0, 0) - c$, $c > 0$ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$, если $\varepsilon_1 > 0$ достаточно мало, так что интеграл по контуру $\gamma\setminus\gamma_0$ экспоненциально мал по сравнению с $\exp(\lambda S(0, 0))$. Поэтому можно считать, что γ — отрезок вида $[-a, a]$ или $[0, a]$, $a > 0$. Положим

$$\zeta_0(\varepsilon) = \sqrt{S(t_0(\varepsilon), \varepsilon) - S(t_1(\varepsilon), \varepsilon)}. \tag{3.16}$$

Так как $S'_t(t_0(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0$, то при малых ε

$$\zeta_0(\varepsilon) \sim (t_1(\varepsilon) - t_0(\varepsilon)) \sqrt{-\frac{1}{2} S''_{tt}(0, 0)}. \tag{3.17}$$

Ветвь корня будет указана ниже.

Теорема 3.1. *Пусть условия* 1°—3° *выполнены и*

$$\zeta_0(\varepsilon) \sim b\varepsilon, \quad \operatorname{Im} b > 0 \quad (\varepsilon \to 0). \tag{3.18}$$

Тогда существуют $\varepsilon_1 > 0$, $\delta > 0$ *такие, что при* $\lambda \to +\infty$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$, $|\arg \varepsilon| \leqslant \delta$ *справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\lambda, \varepsilon) = \\ = \exp[\lambda S(t_0(\varepsilon), \varepsilon)] \left[\sum_{k=0}^{N} h_k(\varepsilon) F_k(\lambda, \zeta_0(\varepsilon)) + O\left(\lambda^{-N/2}\right) \right] \tag{3.19}$$

равномерно по ε. *Здесь* $N \geqslant 0$ — *любое целое число, функции* $h_k(\varepsilon)$ *голоморфны при малых* $|\varepsilon|$.

Сделаем замену переменной $t = t(\zeta, \varepsilon)$ такую, что

$$S(t(\zeta, \varepsilon), \varepsilon) = S(t_0(\varepsilon), \varepsilon) - \zeta^2,$$

и функция t голоморфна в точке $(0, 0)$. Как обычно, можно ограничиться рассмотрением достаточно малой дуги контура γ, содержащей точку $t = 0$; оставшийся интеграл экспоненциально мал. По условию $\operatorname{Re} S''_{tt}(0, 0) < 0$, и выбор ветви корня в (3.16) следующий: $\operatorname{Re}\sqrt{-S''_{tt}(0, 0)} > 0$. При малых (t, ε) имеем $f(t, \varepsilon) = (t - t_1(\varepsilon)) f_1(t, \varepsilon)$, где $f_1(0, 0) \neq 0$, так что

$$f(t(\zeta, \varepsilon), \varepsilon) = (\zeta - \zeta_0(\varepsilon)) f_2(\zeta, \varepsilon),$$

где $f_2(0, 0) \neq 0$ и функция f_2 голоморфна при малых ζ, ε. Пусть $\tilde{\gamma}$ — образ контура γ в плоскости ζ.

Контур $\tilde{\gamma}$ образует в точке $\zeta = 0$ угол $\varphi_0 + O(\varepsilon)$, $\varphi_0 = \arg\sqrt{-S''_{tt}(0, 0)}$ при малых ε, и интеграл по $\tilde{\gamma}$ можно заменить интегралом по отрезку $\gamma_0 = [-de^{i\varphi_0}, de^{i\varphi_0}]$ с точностью до слагаемого порядка $O(e^{-\lambda c})$, $c > 0$. Далее,

$$\frac{t'_\zeta(\zeta, \varepsilon)}{f(t, \varepsilon)} = \frac{h(\zeta, \varepsilon)}{\zeta - \zeta_0(\varepsilon)},$$

где функция h голоморфна при малых ζ, ε. Окончательно получаем

$$\tilde{F}(\lambda, \varepsilon) = \int_{\gamma_0} \frac{\exp(-\lambda\zeta^2)}{\zeta - \zeta_0(\varepsilon)} h(\zeta, \varepsilon)\, d\zeta + O(e^{-\lambda c}). \qquad (3.20)$$

Если ε таково, что $b\varepsilon$ лежит на верхней мнимой полуоси, то $F(\lambda, \varepsilon)$ можно с экспоненциальной точностью заменить интегралом по отрезку $[-d, d]$. После этого остается воспользоваться леммой 3.3.

Главный член асимптотики имеет вид

$$F(\lambda, \varepsilon) = \exp[\lambda S(t_0(\varepsilon), \varepsilon)] \times$$
$$\times \left[-\frac{\zeta_0(\varepsilon)}{f(t_0(\varepsilon), \varepsilon)} \sqrt{-\frac{2}{S''_{tt}(t_0(\varepsilon), \varepsilon)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda\zeta^2)}{\zeta - \zeta_0(\varepsilon)}\, d\zeta + \right.$$
$$\left. + O(\lambda^{-1/2}) \right]. \qquad (3.21)$$

Это вытекает из (3.20) и того, что $h_0(\varepsilon) - h(0, \varepsilon)$.

§ 4. Слияние нескольких точек перевала

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$L(x, \lambda^{-1}D)\, u \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) (\lambda^{-1}D)^\alpha u, \qquad (4.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ — большой параметр, который при $\lambda \gg 1$ имеет быстро осциллирующие решения. К таким уравнениям относятся, например, уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + \lambda^2) u = 0,$$

уравнение Шредингера

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -h^2 \Delta \psi + U(x) \psi,$$

где $h=\lambda^{-1}$ — малый параметр и многие другие классические уравнения математической физики. Асимптотика решений при $\lambda\to+\infty$ в большом для таких уравнений была получена В. П. Масловым [26], [27]. Асимптотика решения в фиксированной точке общего положения есть сумма быстро осциллирующих экспонент, т. е. асимптотических рядов вида

$$\exp[i\lambda S_j(x)]\sum_{k=0}^{\infty}a_{jk}(x)(i\lambda)^{-k},$$

где S_j — вещественнозначные функции, удовлетворяющие уравнению Гамильтона — Якоби $L(x,\nabla S(x))=0$. В так называемых каустических точках асимптотика решения выражается через преобразование Фурье быстро осциллирующих экспонент. Приведем вид этих интегралов.

Асимптотика решения уравнения (4.1) строится с помощью канонического оператора Маслова. С уравнением (5.1) ассоциирована система Гамильтона

$$\frac{dx_j}{d\tau}=\frac{\partial L(x,p)}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{d\tau}=-\frac{\partial L(x,p)}{\partial x_j},\quad j=1,\ldots,n,$$

фазовые траектории которой лежат в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}=\mathbf{R}^n_x\times\mathbf{R}^n_p$. Пусть $\Lambda^n\subset\mathbf{R}^{2n}$ — многообразие размерности n класса C^∞. Многообразие Λ^n называется *лагранжевым*, если $\omega^2=\sum_{j=1}^{n}dp_j\wedge dx_j\equiv0$ на Λ^n. Эквивалентное определение таково: интеграл $\int_\gamma\sum_{j=1}^{n}p_jdx_j$, где γ — кривая, лежащая на Λ^n, не зависит от пути (локально).

Пример: многообразие, заданное уравнениями $p_j=\partial S(x)/\partial x_j$, $1\leqslant j\leqslant n$, x лежит в области $U\subset\mathbf{R}^n$, является лагранжевым. При $n=1$ всякая гладкая кривая есть лагранжево многообразие.

Пусть $\alpha=(l_1,\ldots,l_k)$, $\beta=(j_1,\ldots,j_{n-k})$ — непересекающиеся подмножества множества $\{1,2,\ldots,n\}$ (одно из них может быть пустым), $x_\alpha=(x_{l_1},\ldots,x_{l_k})$, $p_\beta=(p_{j_1},\ldots,p_{j_{n-k}})$. В аналитической механике доказано, что в малой окрестности любой точки $r^0\in\Lambda^n$ лагранжево многообразие задается уравнениями

$$p_\alpha=\frac{\partial S}{\partial x_\alpha},\quad x_\beta=-\frac{\partial S}{\partial p_\beta},\tag{4.2}$$

где $S = S(x_\alpha, p_\beta)$. Функция S называется производящей функцией лагранжева многообразия.

Пусть π_x — проекция фазового пространства на $\mathbf{R}^n_x$, т. е. $\pi_x(x, p) = p$. Точка $(x, p) \in \Lambda^n$ называется *неособой*, если некоторая ее окрестность диффеоморфно проектируется на $\mathbf{R}^n_x$ (в этом случае можно задать Λ^n уравнением $p = \nabla S(x)$). В противном случае точка называется *особой*, множество всех особых точек Σ называется *циклом особенностей*, а его проекция $\pi_x \Sigma = \Gamma$ называется *каустикой*.

Пусть U, V — области в $\mathbf{R}^{2n}$, отображение $f: U \to V$ есть диффеоморфизм. Это отображение называется лагранжевым, если оно переводит лагранжевы многообразия в лагранжевы (оно сохраняет форму ω^2, т. е. если $f(x, p) = (X, P)$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} dx_j \wedge dp_j = \sum\limits_{j=1}^{n} dX_j \wedge dP_j$). Возникает следующая задача: к какому наиболее простому виду можно локально привести производящую функцию лагранжева многообразия в окрестности особой точки? Полная классификация ростков лагранжевых отображений общего положения получена В. И. Арнольдом [49], [1] для многообразий размерности $n < 6$. Приведем эти результаты.

1°. $n \geqslant 1$ $\quad A_2$: $S = p_1^3$;

2°. $n \geqslant 2$ еще A_3: $S = \pm p_1^4 + x_2 p_1^2$;

3°. $n \geqslant 3$ еще A_4: $S = p_1^5 + x_2 p_1^3 + x_3 p_1^2$;

D_4: $S = p_1^3 \pm p_1 p_2^2 + x_3 p_1^2$;

4°. $n \geqslant 4$ еще A_5: $S = \pm p_1^6 + x_2 p_1^4 + x_3 p_1^3 + x_4 p_1^2$;

D_5: $S = p_1 p_2^2 + x_3 p_1^3 + x_4 p_1^2 \pm p_1^4$;

5°. $n \geqslant 5$ еще A_6: $S = p_1^7 + x_2 p_1^5 + x_3 p_1^4 + x_4 p_1^3 + x_5 p_1^2$;

D_6: $S = p_1 p_2^2 \pm p_1^5 + x_3 p_1^4 + x_4 p_1^3 + x_5 p_1^2$;

E_6: $S = p_1^3 \pm p_2^4 + x_3 p_1^2 p_2 + x_4 p_1 p_2 + x_5 p_1^2$.

Разумеется, в этих формулах x_j, p_j — новые переменные.

Пусть лагранжево многообразие Λ^n односвязно, инвариантно относительно сдвигов вдоль траекторий системы Гамильтона, $L(x, p) = 0$ на Λ^n и индекс Маслова [26] любого замкнутого пути, лежащего на Λ^n, равен нулю.

Тогда с помощью канонического оператора Маслова можно построить формальное асимптотическое решение $u(x, \lambda)$ уравнения (4.1). Это решение устроено следующим образом.

1°. Если $x^0 \notin \pi_x \Lambda^n$, то $u(x, \lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ $(\lambda \to +\infty)$ в некоторой окрестности точки x^0.

2°. Если $x^0 \in \pi_x \Lambda^n$, $x^0 \notin \Gamma$, то $u(x, \lambda)$ есть конечная сумма быстро осциллирующих экспонент, описанная выше.

3°. Пусть $x^0 \in \Gamma$ и пусть, для простоты, ровно одна точка $(p^0, x^0) \in \Lambda^n$ проектируется в точку x^0. Будем считать, что $p^0 = 0$, $x^0 = 0$, тогда Λ^n локально задается уравнениями вида (4.3),

$$u(x, \lambda) =$$
$$= \left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{n/2} \int \exp\left[i\lambda\left(S(x_\alpha, p_\beta) + (x_\beta, p_\beta)\right)\right] \varphi\left(x_\alpha, p_\beta, \lambda^{-1}\right) dp_\beta.$$

Здесь $(x_\beta, p_\beta) = \sum\limits_{s=1}^{n-k} x_{j_s} p_{j_s}$, φ — асимптотический ряд $\varphi \sim \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x_\alpha, p_\beta) \lambda^{-j}$, где φ_i — финитные функции класса C^∞, отличные от нуля лишь в малой окрестности точки $x_\alpha = 0$, $p_\beta = 0$ и интеграл берется по всему пространству.

Можно считать, что производящая функция S приведена к одному из канонических видов, описанных выше. Все полученные интегралы либо одномерные, либо двумерные. При этом достаточно исследовать интегралы, в которых φ — степенная функция, т. е. $\varphi = p_1^n$, если интеграл одномерный, $\varphi = p_1^n p_2^m$, если интеграл двумерный. Эти интегралы называются *специальными функциями волновых катастроф* (СВК). Если все $x_i = 0$, то точка $p_1 = 0$ в одномерном и точка $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ в двумерном случаях является вырожденной стационарной точкой фазы. В случае 1° имеем интегралы

$$I_n^{A_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\lambda\left(p^3 + xp\right)\right] p^n dp,$$

которые выражаются через функцию Эйри и ее производные. Заметим, что при $n \geqslant 1$ интеграл расходится, но его можно сделать сходящимся, заменив путь интегрирования подходящим контуром в комплексной плоскости p

(см. гл. 4, § 3). Это же замечание относится ко всем остальным СВК. Заметим, что если $n \leqslant 2$, то каустика Γ — гладкое многообразие в окрестности точки $x = 0$, $p = 0$.

С помощью замены переменной $\lambda^{1/3} p = \tilde{p}$ можно привести фазовую функцию к виду $\tilde{p}^3 + y\tilde{p}$, $y = x\lambda^{2/3}$. Поэтому во всех последующих интегралах мы положим $\lambda = 1$.

Во всех остальных случаях СВК не выражаются через известные специальные функции и являются новыми специальными функциями.

Следующей по сложности СВК является так называемый интеграл Пирси

$$I_0^{A_3}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(p^4 + x_2 p^2 + x_3 p\right)\right] dp.$$

В данном случае лагранжево многообразие Λ^3 задается уравнениями

$$p_2 = p_1^2, \quad p_3 = p_1, \quad x_1 = -4p_1^3 - 2x_2 p_1 - x_3.$$

Последнее уравнение запишем в виде $f(p_1, x) = 0$. Точка на Λ^3 будет особой, если p_1 — негладкая функция x, т. е. $\partial f/\partial p_1 = 0$. Исключая p_1 из системы $f = 0$, $\partial f/\partial p_1 = 0$, находим уравнение каустики Γ:

$$8x_2^3 + 81\left(x_1 + x_3\right)^2 = 0.$$

Прямая $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$ — ребро возврата каустики Γ, так что интеграл Пирси описывает поведение решения вблизи острия каустики. Интегралы

$$I_n^{A_3}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\lambda\left(p^4 + x_2 p^2 + x_3 p\right)\right] p^n dp$$

получаются из $I_0^{A_3}(x)$ дифференцированием по x_3.

Приведем список остальных СВК (при $n = 0$, $m = 0$). Интеграл

$$I^{A_4}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(p^5 + x_3 p^3 + x_2 p^2 + x_1 p\right)\right] dp$$

описывает поведение решения вблизи особенности каустики, которая называется «ласточкин хвост». Этот и другие термины, а также рисунки каустик см. в [1], [25]. Особенности каустики типа «бабочка» отвечает интеграл

$$I^{A_5}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(p^6 + x_4 p^4 + x_3 p^3 + x_2 p^2 + x_1 p\right)\right] dp.$$

Двумерные интегралы: особенности типа эллиптической омбилики — интеграл

$$I^{D_4^-}(x) = \iint_{\mathbf{R}^2} \exp\left[i\left(p_1^3 - p_1 p_2^2 + x_3 p_1^2 + x_2 p_1 + x_1 p_2\right)\right] dp_1 dp_2,$$

типа гиперболической омбилики — интеграл

$$I^{D_4^+}(x) = \iint_{\mathbf{R}^2} \exp\left[i\left(p_1^3 + p_1 p_2^2 + x_3 p_1^2 + x_2 p_1 + x_1 p_2\right)\right] dp_1 dp_2$$

и типа параболической омбилики — интеграл

$$I^{D_5}(x) = \iint_{\mathbf{R}^2} \exp\left[i\left(p_1^4 + p_1 p_2^2 + x_4 p_1^2 + x_3 p_2^2 + x_2 p_1 + x_1 p_2\right)\right] dp_1 dp_2.$$

СВК подробно изучены в работах Д. С. Лукина и других авторов (см. [25]). Созданы алгоритмы для ЭВМ, позволяющие вычислять СВК, составлен ряд таблиц, исследована асимптотика СВК в различных областях переменных x. В настоящее время СВК во многом исследованы почти столь же хорошо, сколь и классические специальные функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Книги

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.— М.: Наука, 1982.
2. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов.— М.: Наука, 1984.
3. Борель А. Линейные алгебраические группы.— М.: Мир, 1972.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.
5. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе.— М.: ИЛ, 1961.
6. Бурбаки Н. Функции действительного переменного.— М.: Наука, 1965.
7. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.
8. Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики.— М.: Изд-во МГУ, 1982.
9. Ван дер Варден. Алгебра.— М.: Наука, 1976.
10. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. I.— М.: ИЛ, 1949.
11. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных.— М.: Наука, 1966.
12. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1958.
13. Гельфонд А. О. Вычеты и их приложения.— М.: Наука, 1966.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
15. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции.— М.: Наука, 1979.
16. Евграфов М. А., Бежанов К. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Сборник задач по теории аналитических функций.— М.: Наука, 1972.
17. Зоммерфельд А. Оптика.— М.: ИЛ, 1953.
18. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.
19. Копсон Э. Асимптотические разложения.— М.: Мир, 1966.
20. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1987.

21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Наука, 1974.
23. Ли Цзун-дао. Математические методы в физике.— М.: Мир, 1965.
24. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.
25. Лукин Д. С., Палкин Е. А. Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах.— М.: Изд-во МФТИ, 1982.
26. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во МГУ, 1965.
27. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
28. Милнор Дж. Теория Морса.— М.: Мир, 1965.
29. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей.— М.: Мир, 1971.
30. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.
31. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел.— М.: Наука, 1971.
32. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов.— Рига: Зинатне, 1974, т. 1; 1977, т. 2; 1981, т. 3.
33. Сегё Г. Ортогональные многочлены.— М.: Физматгиз, 1962.
34. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1982.
35. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Пер. с англ. в под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Кармазиной.— М.: Наука, 1979.
36. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы.— М.: Мир, 1985.
37. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
38. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа.— М.: Физматгиз, 1963, т. 1.
39. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
40. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Сов. радио, 1970.
41. Харди Г. Расходящиеся ряды.— М.: ИЛ, 1951.
42. Хуанг К. Статистическая механика.— М.: Мир, 1966.
43. Шрёдингер Э. Статистическая термодинамика.— М.: ИЛ, 1948.
44. Эрдейи А. Асимптотические разложения.— М.: Физматгиз, 1962.
45. Berg I. Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen.— Berlin: DVW, 1968.
46. Cohn P. The analytic properties of *C*-function Harischandra // Lecture notes in mathematics.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1975.
47. Dingle R. B. Asymptotic expansions: their derivation and interpretation.— London: Academic Press, 1973.

Статьи

48. Абрамов Д. И., Славянов С. Ю. Асимптотические формулы для некоторого класса интегралов // Вестник ЛГУ.— 1950.— Т. 13.— С. 117—118.
49. Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функцион. анализ и его прил.— 1972.— Т. 6, № 4.— С. 3—25.
50. Бабич В. М. О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Мат. сб.— 1964.— Т. 65, № 4.— С. 576—630.
51. Бернштейн И. Н., Гельфанд С. И. Мероморфность функции p^λ // Функцион. анализ и его прил.— 1969.— Т. 3, № 1.— С. 84—86.
52. Брычков Ю. А., Широков Ю. М. О некоторых предельных формулах для обобщенных функций // Мат. заметки.— 1967.— Т. 2, № 1.— С. 81—90.
53. Брычков Ю. А., Широков Ю. М. Об асимптотическом поведении преобразований Фурье // ТМФ.— 1970.— Т. 4, № 3.— С. 301—309.
54. Брычков Ю. А. Асимптотические разложения обобщенных функций // ТМФ.— 1970.— Т. 5, № 4.— С. 98—109.
55. Брычков Ю. А. Об асимптотических разложениях обобщенных функций.— Мат. заметки.— 1972.— Т. 12, № 2.— С. 131—138.
56. Булдырев В. С. Обобщение метода седловых точек на случай двух близко расположенных седловых точек // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.
57. Вайнберг Б. Р. Асимптотика функции Грина для уравнения Соболева — Гальперна // ДАН СССР.— 1961.— Т. 136, № 5.— С. 1015—1018.
58. Вайнберг Б. Р. К методу стационарной фазы // Вестн. МГУ.— 1976.— № 1.— С. 50—58.
59. Гиндикин С. Г., Федорюк М. В. Асимптотика фундаментального решения для параболического по Петровскому дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами // Мат. сб.— 1973.— Т. 91, № 4.— С. 499—522.
60. Гиндикин С. Г., Федорюк М. В. Точки перевала параболических полиномов // Мат. сб.— 1974.— Т. 94, № 7.— С. 385—406.
61. Гиндикин С. Г., Федорюк М. В. Асимптотика функции Грина гипоэллиптических корректных по И. Г. Петровскому дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Задачи механики и математической физики. Посвящается памяти академика И. Г. Петровского.— М.: Наука, 1976.
62. Дубнов В. Л. Об абстрактном методе стационарной фазы // Тр. МИЭМ.— 1969.— Т. 5.— С. 252—286.
63. Евграфов М. А., Постников М. М. Асимптотика функций Грина параболических и эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. сб.— 1970.— Т. 82, № 1.— С. 3—29.

64. Заруцкая В. В. Асимптотика интегралов по кривым на римановых поверхностях // Тр. МИЭМ.— 1974.— Т. 30.— С. 51—92.
65. Каратыгин В. А., Розов В. А. Метод стационарной фазы для интеграла в конечных пределах с произвольно расположенной стационарной точкой // ЖВМ и МФ.— 1970.— Т. 10, № 2.— С. 300—312.
66. Каратыгин В. А., Розов В. А. Метод стационарной фазы для двойного интеграла с произвольно расположенной стационарной точкой // ЖВМ и МФ.— 1974.— Т. 12, № 6.— С. 1391—1404.
67. Конторович М. И., Муравьев Ю. К. Вывод законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задачи дифракции.— ЖТФ.— 1952.— Т. 22, № 3.— С. 394—409.
68. Кучеренко В. В. Об одном способе вычисления членов асимптотического разложения интеграла $\int e^{i\omega S(x)}\varphi(x)\,dx$, $x \in R^n$ при $\omega \to \infty$ // Тр. МИЭМ.— 1968.— Т. 4.— С. 189—216.
69. Ларичев В. Д. Асимптотическое поведение интегралов, содержащих большой параметр в аргументе функции Бесселя // ЖВМ и МФ.— 1973.— Т. 13, № 4.— С. 1029—1035.
70. Ле Ву Ань. Квазиклассическая асимптотика свободного уравнения Шредингера для вычисления поправок в методе стационарной фазы // ТМФ.— 1976.— Т. 25, № 2.— С. 270—276.
71. Маслов В. П., Федорюк М. В. Логарифмическая асимптотика интегралов Лапласа // Мат. заметки.— 1981.— Т. 30, № 5.— С. 763—768.
72. Повзнер А. Я., Сухаревский И. В. О нахождении асимптотики решений задач дифракции коротких волн // ЖВМ и МФ.— 1961.— Т. 1, № 12.— С. 224—245.
73. Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С., Царюк Л. Б. О применении метода стационарной фазы в некоторых работах по теории волн поверхности вязкой жидкости // ПММ.— 1970.— Т. 34, № 1.— С. 153—161.
74. Прудковский А. Г. Метод стационарной фазы и применение к интегралам, зависящим от параметра (неаналитический случай) // ЖВМ и МФ.— 1974.— Т. 14, № 2.— С. 299—311.
75. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения для вещественных корней некоторых трансцендентных уравнений // Ученые записки Латв. гос. ун-та.— 1959.— Т. 28, № 4.— С. 67—86.
76. Садыхов В. Э. Об асимптотике одного класса двойных интегралов, зависящих от двух параметров // ДАН СССР.— 1979.— Т. 247, № 5.— С. 1064—1068.
77. Садыхов В. Э. Асимптотический ряд для одного класса двойных интегралов // Научн. тр. МВ и ССО АзербССР.— 1979.— № 2.— С. 10—22.
78. Садыхов В. Э. К вопросу об асимптотике двукратных интегралов Лапласа // Научн. тр. МВ и ССО АзербССР.— 1979.— № 3.— С. 24—28.
79. Сердюкова С. И. Исследование устойчивости в C в явных разностных схемах с постоянными действительными коэффи-

циентами, устойчивость в l_2 // ЖВМ и МФ.— 1963.— Т. 3, № 2.— С. 365—370.
80. Соболев С. Л. Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} - \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y, z, t)$ // ДАН СССР.— 1959.— Т. 129, № 6.— С. 1246—1249.
81. Тихонов А. Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции // ДАН СССР.— 1959.— Т. 125, № 5.— С. 982—985.
82. Трофимов О. Н., Фризен Д. Г. Коэффициенты асимптотического разложения интегралов по методу Лапласа // Автометрия.— 1981.— Т. 2.— С. 94.
83. Федорюк М. В. Об асимптотике контурных интегралов // УМН.— 1961.— Т. 16, № 1.— С. 171—178.
84. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов // ЖВМ и МФ.— 1962.— Т. 2, № 1.— С. 145—150.
85. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы. Близкие седловые точки в многомерном случае // ЖВМ и МФ.— 1964.— Т. 4, № 4.— С. 671—681.
86. Федорюк М. В. Асимптотика функции Грина при $t \to +0$, $|x| \to \infty$ для корректных по Петровскому уравнений с постоянными коэффициентами и классы корректности задачи Коши // Мат. сб.— 1963.— Т. 62, № 4.— С. 397—468.
87. Федорюк М. В. Об устойчивости в C задачи Коши для разностных уравнений и уравнений с частными производными // ЖВМ и МФ.— 1967.— Т. 7, № 3.— С. 510—540.
88. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы в многомерном случае. Вклад от границы // ЖВМ и МФ.— 1970.— Т. 10, № 2.— С. 286—299.
89. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы и псевдодифференциальные операторы // УМН.— 1971.— Т. 26, № 1.— С. 67—112.
90. Федорюк М. В. Асимптотика преобразования Фурье экспоненты от полинома.— ДАН СССР.— 1976.— Т. 227, № 3.— С. 580—584.
91. Федорюк М. В. Излучение плоской замкнутой решетки из точечных монополей и диполей // Радиотехника и электроника.— 1981.— Т. 26, № 6.— С. 1138—1145.
92. Федорюк М. В. Дискретная аппроксимация поля цилиндрической и сферической излучающих поверхностей // Радиотехника и электроника.— 1981.— Т. 26, № 6.— С. 1146—1153.
93. Федорюк М. В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Тр. семинара С. Л. Соболева.— 1980.— № 1.— С. 113—131.
94. Федорюк М. В. Асимптотика волнового потенциала, сосредоточенного на прямой // Мат. заметки, 1984.— Т. 36, № 5.— С. 673—679.
95. Федорюк М. В. Рассеяние плоской волны на цилиндрической поверхности с длинным возмущением // Известия АН СССР, сер. матем.— 1985.— Т. 49, № 1.— С. 160—193.
96. Федорюк М. В. Особенности быстроосциллирующих интегралов и асимптотика решения смешанной задачи // УМН.— 1977.— Т. 32, № 6.— С. 66—115.

97. Хиронака Х. Разрешение особенностей // Математика.— 1965.— Т. 9, № 6.— С. 2—70; 1966.— Т. 10, № 1.— С. 3—89; 1966.— Т. 10, № 2.— С. 3—58.
98. Abi-Khuzam F. F. The asymptotic behavior of a Lindelof functions and its Taylor coefficients // J. of Math. Analysis and applications.— 1983.— V. 93.— P. 495—526.
99. Armstrong J. A., Bleistein N. Asymptotic expansions of integrals with oscillatory kernels and logarithmic singularities // SIAM J. Math. Anal.— 1980.— V. 11, № 2.— P. 300—307.
100. Attiyah M. F. Resolution of singularities and division of distributions // Comm. Pure and Appl. Math.— 1970.— V. 23, № 2.— P. 145—150.
101. Backhoom N. G. Asymptotic expansion of the function

$$F_k(x) = \int_0^\infty e^{-u^k + xu} du$$ // Proc. London Math. Soc. — 1933.— V. 33, № 2.— P. 83—100.
102. Berg L. Asymptotische Entwicklung einer Klasse von Integralen // Math. Nachr.— 1957.— B. 16, H. 3—4.— S. 207—214.
103. Berg L. Asymptotische Darstellungen für verallgemainerte Fourier integrale // Math. Nachr.— 1959. B. 20, H. 3—6.— S. 166—170.
104. Berg L. Cber das asymptotische Verhalten eines speziellen Faltungsintegrals // Studia Mathematica.— 1960.— B. 19.— S. 297—302.
105. Berg L. Asymptotische Entwicklungen mit hilfe von Neutrizen // Archiv der Matematik.— 1963.— B. 14, № 3.— S. 162—171.
106. Berg L. Asymptotische Entwicklungen für Parameterintegrale. II // Math. Nachr.— 1964.— B. 27, H. 3—4.— S. 133—143.
107. Berg L. Asymptotische Entwicklungen für Parameterintegrale. III // Math. Nachr.— 1964.— B. 27, H. 5—6.— S. 265—275.
108. Berg L. Cber das asymptotische Verhalten der inversen Laplace-Transformation // Math. Nach.— 1960.— B. 22, H. 1—2.— S. 87—91.
109. Bleinstein N. Asymptotic expansions of integral transforms of functions with logarithmis singularities // SIAM J. Math. Anal.— 1977.— V. 8, № 4.— P. 655—672.
110. Callias C. J., Uhlmann G. A. Singular asymptotic expansions to partial differential equations with isolated singularities in the coefficients // Bull. Amer. Math. Soc.— 1984.— V. 11, № 1.— P. 172—176.
111. Van der Corput K. G. Zur Methode der stationaren Phase. I // Compositio Math.— 1934.— B. 1.— P. 15—38.
112. Van der Corput J. G. Zur Methode der stationaren Phase. II // Compositio Math.— 1936.— B. 3.— P. 328—372.
113. Douglas S. J., Kline M. Asymptotic expansions of multiple integrals and the method of stationary phase // J. Math. and Phys.— 1958.— V. 37, № 1.— P. 1—28.
114. Duistermaat J. J. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities // Comm. Pure and Appl. Math.— 1974.— V. 27, № 2.— P. 207—281.
115. Erdélyi A. Asymptotic representation of Fourier integrals and the method of stationary phase // J. Soc. Industr. Appl. Math.— 1955.— V. 3, № 1.— P. 17—27.

116. Erdélyi A. Asymptotic expansions of Fourier integrals involving logarithmic singularities // J. Soc. Industr. Appl. Math.— 1956.— V. 4. № 1.— P. 38—47.
117. Erdélyi A. General asymptotic expansions of Laplace integrals // Arch. Rat. Mech. and Anal.— 1961.— V. 7, № 1.— P. 1—20.
118. Erdélyi A. Fractional integrals of generalized functions // J. of the Australian Math. Soc.— 1972.— V. 14, № 1.— P. 30—37.
119. Erdélyi A. Asymptotic evaluation of integrals involving a fractional derivative // SIAM J. Math. Anal.— 1974.— V. 5, № 2.— P. 159—170.
120. Erdélyi A., Wyman M. The asymptotic evaluation of certain integrals // Arch. Rat. Mech. and Anal.— 1963.— V. 14, № 3.— P. 217—260.
121. Focke J. Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationaren Phase // Ber. Verhandl. Sachsisch. Acad. Wiss.— Leipzig.— 1954.— B. 101, H. 3.
122. Herz C. S. Fourier transform to convex sets // Ann. of Math.— 1962.— V. 75, P. 81—92.
123. Hlawka E. Über Integrale auf konvexen Körpern, I // Monastch. Math.— 1950.— V. 54.— S. 1—36.
124. Hsu L. C. On the asymptotic evaluation of a class of multiple integrals involving a parameter // Amer. J. Math.— 1951.— V. 72, № 3.— P. 625—634.
125. Hsu L. C., Chou Y. S. An asymptotic formula for a type of singular oscillatory integrals // Math. of Computation.— 1981.— V. 37, № 156.— P. 503—507.
126. Luxemburg W. A. J. On an asymptotic problem concerning the Laplace transform // Applicable Analysis.— 1978.— V. 8.— P. 61—70.
127. McClure J. P., Wong R. Exact remainders for asymptotic expansions of fractional integral // J. Inst. Math. Applics.— 1979.— V. 23.— P. 139—147.
128. Nagel G. Asymptotische Auswertung spezieller Quotienten von Parameterintegralen // Math. Nachr.— 1965.— B. 29, H. 5—6.— S. 291—300.
129. Olver F. W. J. The asymptotic expansions of Bessel functions of large order // Phil. Trans. R. Soc. London.— 1954.— A.— 247, № 930.
130. Olver F. W. J. Error bounds for the Laplace approximations for definite integrals // J. of approximation theory.— 1968.— V. 1.— P. 293—313.
131. Ott H. Die Sattelpunksmethode in der Umgebung eines Pols // Ann. Phys.— 1943.— B. 43.— S. 393.
132. Randol B. On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicate function of a convex set // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— V. 139.— P. 271—278.
133. Riedel R. Asymptotische Darstellungen von Parameterintegralen mit Exponenten beliebiger Ordnung // Wiss. Z. Univ. Halle.— 1967.— B. 16, H. 1.— S. 109—123.
134. Riedel R. Asymptotische Darstellung verallgemeinerter Fourierintegrale. II // Beitrage zur Analysis.— 1981.— B. 25.— S. 109—116.
135. Schell H. J. Asymptotische Darstelungen für Parameterintegrale mit zwei reelen Parameters. I // Math. Nachr.— 1978.— B. 82.— S. 309—323.

136. Schell H. J. Asymptotische Darstellungen von Parameterintegrale mit. zwei reelen Parameters. II // Math. Nachr.— 1979.— B. 88.— S. 391—408.
137. Schielder M. A. A Laplace asymptotic formulas for Wiener integrals // Trans. Amer. Math. Soc.— 1966.— B. 1. S. 125.
138. Shivakumar P. N., Wong R. Asymptotic expansions of multiple Fourier transforms // SIAM J. Math. Anal.— 1979.— V. 10, № 6.— P. 1095—1104.
139. Soga H. Oscillating integrals with degenerate stationary points and their application to the scattering theory // Comm. in Partial Differ. Equat.— 1981.— V. 6, № 3.— P. 273—287.
140. Soni K. Exact error terms in the asymptotic expansions of a class of integral transforms. I (Oscillatory kernels) // SIAM J. Math. Anal.— 1980.— V. 11, № 5.— P. 828—841.
141. Svenson I. Estimates for the Fourier transform of the characteristic function of a convex set // Ark. för Math.— 1971.— V. 9, № 11.— P. 11—22.
142. Temme N. M. Remarks on the paper of A. Erdélyi // SIAM J. Math. Anal.— 1976.— V. 7, № 5.— P. 767—770.
143. Van der Waerden L. On the method of saddle points.— Appl. Scient. Res., ser. B.— 1951.— V. 2.— P. 33—45.
144. Williams J. J., Wong R. Asymptotic expansions of operator-valued Laplace transform. // J. of approximation theory.— 1974.— V. 12.— P. 378—384.
145. Wong R. On a uniform asymptotic expansion of a Fourier-type integral // Quart. of Applied Math.— 1980.— P. 225—234.
146. Wong R., Lin J. F. Asymptotic expansions of Fourier transforms of functions with logarithmic singularities // J. of Math. Anal. and applications.— 1978.— V. 66.— P. 173—180.