RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

ET

PROBLÈMES

DES TEMPS ANCIENS ET MODERNES

Extrait du catalogue

W. W. Rouse BALL	*Histoire des mathématiques*
Paul BARBARIN	*La géométrie non euclidienne*
Marcel BOLL	*La chance et les jeux de hasard*
Pierre BOUTROUX	*L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes*
Michel CHASLES	*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*
René DESCARTES	*La Géométrie*
Paul DUPUY	*La vie d'Évariste Galois*
F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)	*Exercices de géométrie* *comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*
Pierre FERMAT	*Précis des Œuvres mathématiques et de L'Arithmétique de Diophante,* par Émile Brassinne
J. FITZ-PATRICK	*Exercices d'arithmétique*
Édouard LUCAS	*Théorie des nombres*
Ernst MACH	*La Mécanique* *Exposé historique et critique de son développement*
Julius PETERSEN	*Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques* *avec application à plus de 400 problèmes*
George POLYA	*Comment poser et résoudre un problème*
Waclaw SIERPINSKI	*250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*

Réimpression autorisée de la 1re partie de la 2e édition française publiée par la Librairie Scientifique A. Hermann en 1907.

ISBN 2-87647-140-X

RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES
ET
PROBLÈMES
DES TEMPS ANCIENS ET MODERNES

PAR

W. ROUSE BALL

FELLOW AND TUTOR OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE

Deuxième édition française

traduite d'après la Quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick

---

PREMIÈRE PARTIE

Arithmétique, Algèbre et Théorie des Nombres

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRIE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1907

AVERTISSEMENT

Nous publions une nouvelle édition de la traduction française de l'ouvrage si remarquable de Rouse-Ball, faite sur la 4e édition anglaise. M. Fitz Patrick ne s'est pas borné au rôle de traducteur, il a enrichi l'ouvrage d'additions nombreuses et importantes. Dans cette première partie, notamment, il a introduit une histoire originale et anecdotique des nombres, et plus de cent problèmes extrêmement curieux, dont la solution, bien qu'élémentaire, est parfois délicate.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

CHAPITRE PREMIER

HISTOIRE DES NOMBRES

Les nombres ont-ils leur destinée ? De tout temps, et sans qu'il soit possible d'en donner les raisons, quelques-uns d'entre eux ont été regardés comme divins et d'autres comme fatals. A presque tous se rattache une légende quelconque et le but de ce chapitre est de donner simplement une idée du sujet.

Le nombre un. — Le premier des nombres, l'unité, n'a pas d'histoire.

Graphiquement, dans les hiéroglyphes égyptiens, l'unité était représentée par le doigt levé qui, par simplifications successives, devint une barre et même un point (le doigt levé resta pour représenter 1000). Dans les autres écritures, c'est généralement une barre : arabe, turc, chinois, etc., ou la première lettre de l'alphabet : hébreu, syriaque, grec; rarement un signe distinctif comme dans l'éthiopien.

L'astrologie qui cependant donnait une large place aux nombres, s'est fort peu occupée du nombre un; l'antiquité, au contraire, en faisait beaucoup de cas.

Pythagore avait fait de l'unité la représentation de la divinité qui contient tout et de qui tout découle. Ponr lui, l'unité, la *monade* est incréée; c'est Dieu, principe actif, opposé à la *dyade*, 2, principe passif.

Plotin, philosophe de l'Ecole d'Alexandrie, déclare dans sa dernière ennéade, que le *un* est l'intelligence universelle.

Au point de vue scientifique, le nombre 1 ne jouit d'aucune propriété remarquable.

On a discuté longuement pour savoir *si l'unité est un nombre* et on peut consulter à ce sujet la Logique de Port Royal, mais ce n'est là qu'une affaire de mots et on peut trancher la question par l'anecdote amusante de Chamfort reproduite par Rebière dans son ouvrage *Mathématiques et mathématiciens, pensées et curiosités.*

— Un major de place avait indiqué l'exercice pour telle heure. Il arrive et ne voit qu'un trompette : « Parlez donc, messieurs, pourquoi n'êtes-vous qu'un ? ». —

Le nombre deux. — C'est le premier des nombres pairs.

Il était regardé comme fâcheux par les anciens si l'on s'en rapporte au fameux

numero deus impare gaudet

qu'un écolier, aussi peu fort en latin qu'en arithmétique, avait ainsi traduit :

le nombre deux se réjouit d'être impair...

traduction qu'un arithméticien à peu près de la même force défendait par le raisonnement suivant :

Tout nombre premier est impair, or 2 est un nombre premier, donc il est impair !

La prévention que les anciens avaient pour le nombre 2 s'étendait à tous les nombres qui commençaient par le même chiffre 2. C'est pour cela que les Romains dédièrent à Pluton le second mois de l'année; et le second jour du même mois, ils expiaient les mânes des morts.

Pour Pythagore, le nombre 2 est le symbole de la justice, ou pour mieux dire, il considérait la justice comme un nombre divisible par 2. D'après ce philosophe, ce nombre, la *duade*, représentait ces êtres passifs ou plutôt ces phénomènes éphémères produits par le nombre 1 qui l'engendrait, ayant seul l'existence réelle. Il concluait en disant que le nombre impair est le type des choses parfaites, en opposition au nombre pair qui représentait les choses imparfaites.

A propos du nombre *deux* nous dirons quelques mots de l'*arithmétique binaire* que l'on doit à Leibnitz. Dans ce système dont la base est le nombre *deux* on peut écrire tous les nombres avec les caractères 1 et 0, en adoptant la convention, analogue à celle de la numération écrite du système décimal, que tout chiffre placé immédiatement à la gauche d'un autre représente des unités deux fois plus fortes. Il en résulte que, dans ce système, les nombres

un, deux, trois, quatre, cinq, ..., dix, onze, ..., etc.
s'écriront : 1, 10, 11, 100, 101, ..., 1010, 1011, ..., etc.

Dans l'arithmétique binaire les opérations ordinaires sont réduites à leur expression la plus simple. L'addition se réduit à ceci : 1 et 1 font *deux*, je pose 0 et je retiens 1. La table de multiplication n'existe pas, elle se réduit à 1 multiplié par 1 donne 1 ; la multiplication se fait, en résumé, par le déplacement transversal du multiplicande. Aucun tatonnement pour la division.

Le système binaire est incommode à cause de la grande quantité de caractères qui sont nécessaires pour figurer un nombre même peu considérable; ainsi le nombre *huit*, par exemple qui s'exprime par un seul chiffre dans le système décimal, s'écrit 1000 (avec quatre caractères) dans le système binaire.

Aussi Leibnitz en imaginant l'arithmétique binaire, n'était pas dans l'intention d'en rendre l'usage populaire; il prétendait seulement que dans les recherches difficiles elle aurait des avantages que ne présente pas le système décimal, et qu'elle conduirait à des spéculations plus élevées. Le P. Bouvet, missionnaire en Chine, à qui Leibnitz avait écrit l'idée de son *Arithmétique binaire*, lui manda qu'il était très persuadé que c'était là le véritable sens d'un ancienne énigme chinoise portant le nom de *Je-kim* ou *Jeking* (livre des mutations), et attribuée à l'Empereur Fohi, le plus ancien législateur de la Chine.

Cette énigme consistait en 64 petites figures composées chacune de six lignes horizontales superposées, les unes entières, les autres brisées par le milieu. Ce symbole était apparemment compris dans le siècle où vivait Fohi et plusieurs siècles après lui, mais le sens s'en était perdu malgré les efforts et les recherches des plus savants *lettrés*, qui ne voyaient dans le *Je-kim* que des allégories puériles et chimériques.

Or, si l'on représente l'unité par un trait horizontal simple ———, et le zéro par un trait brisé — — ; si on convient de plus, d'écrire les unités des divers ordres non pas de droite à gauche, mais de bas en haut ; comme enfin les zéros placés à la gauche d'un nombre n'en changent pas la valeur, on trouve que les caractères chinois, composés de six lignes et représentés ci-dessous, peuvent-être interprétés de la manière suivante :

Caractères chinois du Je-kim	䷁	䷗	䷆	䷒	䷎	䷣
Traduction dans le système binaire. .	000000	000001	000010	000011	000100	000101
Valeur dans le système décimal	0	1	2	3	4	5

Ajoutons cependant que l'accord est loin d'être fait au sujet de l'explication des Tables des 64 *koua* du prince philosophe Fohi et de leur signification arithmétique.

Nous venons de donner l'explication de Ed. Lucas, *Récréations Mathématiques* t. I, 2e édit. p. 149-151, mais il y a lieu de renvoyer également aux ouvrages suivants :

1° Les tomes VIII (1885) et XXIII (1893) des *Annales du Musée Guimet* sont consacrés à une étude des *koua*. Leur titre est : *Le Yi-King*, ou *Livre des changements de la dynastie des Tsheou*, traduit pour la première fois du chinois en français, par P.-L.-F. Philastre (Paris, E. Leroux).

L'auteur, ancien chargé d'affaires à Hué, avait résidé plusieurs années en Cochinchine (décédé le 11 septembre 1902).

Selon lui, *Fou : Hi* serait un mythe, personnification masculine des phases de la lune.

2° Du même, au tome I des *Annales* susmentionnées, un article sur l'Exégèse chinoise.

3° *Mariage*. — Numération par huit ; nous renvoyons pour cet ouvrage au nombre huit.

4° *The Monist* (janvier 1896). — Chinese philosophy, par le Dr P. Carus.

5° *Halamen*. — Oracle japonais (Revue de Paris, 1er décembre 1905, p. 589-604).

A son avis, le *Yi-King* est un livre sibyllin, rempli d'obscurités.

L'auteur énumère les 8 trigammes de *Fou-Hsi*, et les oracles que les devins en déduisent.

Nous pouvons conclure comme *Brocard*, à qui nous avons emprunté les quelques renseignements ci-dessus (1) que « là où les commentateurs orientaux, connaissant à fond les nuances de la langue chinoise, ont énormément de peine à tirer quelque chose du *Yi-King*, la mentalité européenne demeure absolument impuissante. »

Le nombre trois. — Trois est le nombre vénéré dès l'origine des civilisations.

Les Indous croyaient à une trinité divine composée de Brahma, le passé ou le créateur, Vichnou, le présent ou le conservateur, et Siva, le futur ou le destructeur, c'est ce qu'on appelle la trinité indoue ou Trimourti (2).

La trimourti de Brahma se rencontre dans le symbolisme qui a

(1) *Intermédiaire des Mathématiciens*, tome XIII, 1906, p. 72, 73.
(2) *Mission en Cochinchine de Lagrée*, p. 61.

présidé à l'érection des temples. Au mont Cròm, à Angcor Thôm, etc., tous les sanctuaires de l'époque Khmer sont précédés de 3 enceintes, élevés sur 3 terrasses et offrent la réunion de 3 tours émergeant de la luxuriante végétation qui les enserre et des lianes gigantesques qui croissent sur leurs ruines.

Fait qui paraît digne d'être remarqué : la tour principale est plus élevée que les deux latérales qui l'accompagnent, et lorsque le Wat ou Pagode se compose de plus de 3 tours comme à Baïon, ce qui est excessivement rare, celles-ci s'étagent en pyramide et la silhouette générale du monument est inscriptible dans un triangle. Il y a là, évidemment, une règle mystérieuse que l'étude de ces monuments n'a pu jusqu'à présent approfondir.

Mais ce nombre 3 est non seulement la règle générale adoptée pour l'élévation du monument, il est aussi la base de son ornementation.

L'entrée principale du sanctuaire d'Angcor Thôm (1) est flanquée de trois têtes colossales d'éléphants, en pierre, qui prennent appui sur leurs trompes comme sur trois colonnes. La base de ces colonnes se forme naturellement de l'extrémité de la trompe qui se recourbe et rejette des branches de lotus ; à l'angle de la tour et près des éléphants, sont placées trois têtes de paon qui, étagées et enveloppées par une aigrette finement sculptée, servent d'antéfixe à la corniche de ce curieux monument.

Au fronton de toutes les pagodes indo-chinoises, sur l'architrave qui couronne la porte, se trouve l'emblème de la triade brahmique où se rencontre l'éléphant tricéphale que monte le sage Boudha.

L'imagination déréglée des peuples de l'Hindoustan ne s'est point arrêtée à la représentation d'une triade ; elle s'est complue à représenter la succession de ces triades divines, et à sculpter ces statues

(1) On représente la Trimourti par trois têtes sur un seul corps. La première, avec une longue barbe, figure Brahmâ ; d'une main il porte la chaîne des êtres, de l'autre il tient l'urne contenant l'eau qui féconde la terre. A sa gauche est Vichnou, à la physionomie jeune et aimable ; à sa droite Siva, avec une expression de barbarie féroce.

de géants sur les épaules desquels viennent s'étager neuf têtes colossales, symbolisant les sphères superposées des cieux. Groupés sur deux files de cinquante-quatre statues (6×9), des géants forment la balustrade de la chaussée d'Angcor-Thôm ; statues qui semblent conserver leur rigide symbolisme et leur alignement mystérieux en tenant un cordon de pierre en forme de serpent que terminent neuf têtes groupées en éventail.

Les Perses après avoir admis le principe de la dualité, le bien et le mal, Ormuz et Ahriman, étaient arrivés à l'idée d'une trinité.

Cette même idée se retrouve chez les Egyptiens : la trinité des bords du Nil comprenait Osiris, le père ; Isis, la mère et Orus, le fils, constituant à eux trois le principe du bien. C'était la *triade* d'Abydos. A Thèbes, elle se composait de Ammon, Mouth et Khom ou Khnousou.

C'est peut-être en l'honneur de cette trinité que la théocratie égyptienne fit élever les pyramides, ces trois triangles gigantesques de l'espace. Cependant, le nombre 3 parait avoir été considéré comme défavorable dans ce pays ; ainsi les rois d'Egypte n'expédiaient jamais une affaire le troisième jour de la semaine qui était regardé comme funeste.

De l'Inde et de l'Egypte la vénération pour le nombre 3 passa en Grèce où Pythagore en popularisa le culte. Il faisait naître la triade de l'action de la monade sur la dyade et, pour lui, 3 était le symbole des choses parfaites ; comme chez les Indous il représentait le temps qui comprend le présent, le passé et l'avenir. Les successeurs de Pythagore allèrent encore plus loin ; ils avancèrent que le nombre, au lieu d'être le symbole numérique d'une vérité réelle, était le principe même des choses. Ils appelaient le nombre 3 l'harmonie parfaite.

Aristote ne reconnaissait que 3 couleurs fondamentales, rouge, vert, violet.

On s'explique dès lors aisément pourquoi les anciens, imbus de ces idées, avaient divisé l'univers en 3 parties : ciel, terre, enfer ; pourquoi ils avaient 3 grands dieux : Jupiter, Neptune, Pluton ;

3 grandes déesses, Minerve, Junon, Venus; pourquoi 3 Parques [1], 3 Furies, 3 Juges aux enfers, 3 Grâces, 3 Harpies, 3 Gorgones, 3 sibylles. Diane avait 3 visages, Cerbère 3 têtes, Géryon 3 corps. La Pythie jeûnait 3 jours avant de monter sur son siège aux 3 pieds.

Dans la mythologie des peuples du Nord on trouve trois déesses remplissant exactement le même rôle que les Parques : ce sont les *Nornes*, déesses du passé, du présent et de l'avenir.

Suivant la légende le dieu Odin s'étant approché un jour d'une belle piscine, vit trois cygnes merveilleux. « Il leur adressa la parole, leur demandant s'ils possédaient le secret de la sagesse. Les cygnes plongèrent tout à coup sous l'eau, et à leur place apparurent trois femmes, belles toutes trois, quoique à trois étages différents de la vie. C'étaient les Nornes. La première, nommée *Urda*, savait le passé; la seconde, nommée *Vérandi*, voyait sous ses yeux se dérouler le présent heure par heure, minute par minute, et quand aujourd'hui était devenu hier, sa sœur ainée recueillait le jour défunt et l'inscrivait sur son registre. Enfin *Skulda*, la troisième, la *Norne* de l'avenir, jouissait du don précieux de voir clairement s'agiter devant elle les germes des évènements futurs et de pouvoir prédire avec certitude l'époque et les conséquences de leur éclosion. »

Les Romains considéraient le nombre 3 comme ayant un pouvoir mystérieux et occulte. Dans les sacrifices on apportait le plus grand soin à faire certaines opérations trois fois, ou trois fois trois fois.

Le nombre 3 devait être regardé comme particulièrement agréable aux mânes, car, pendant les fêtes des Lémuries qui leur étaient

(1) Clotho qui présidait à la naissance et qui tenait à la main le fuseau sur lequel s'enroulait le fil de la vie; Lachésis qui filait les jours et les évènements de la vie, et enfin Atropos, l'ainée des trois sœurs, qui tranchait avec ses fatals ciseaux le fil de l'existence. Elles avaient reçu le nom d'*Epargneuses* (Parques vient de *parcere*, épargner), probablement parce qu'elles n'épargnaient personne.

Pour une raison semblable les Furies, Tisiphone, Mégère et Alecton qui exécutaient les arrêts de Pluton et de Minos étaient appelées *Euménides*, c'est-à-dire *douces*.

consacrées à Rome, on leur offrait des sacrifices pendant 3 nuits consécutives.

A la fête célébrée en l'honneur de Palès on avait coutume de sauter 3 fois par dessus un feu de paille allumé pour la circonstance. Cette coutume s'est conservée en certains pays de France au moment des feux de la Saint-Jean.

Les fêtes en l'honneur de Mars s'appelaient *Triclyes* parce qu'on sacrifiait 3 victimes à ce dieu.

Cette vénération pour le nombre 3 passa des payens aux chrétiens. Jésus aimait à le citer; il disait qu'il détruirait le temple et le relèverait en 3 jours. Des Pharisiens lui ayant dit un jour : « Maître, nous voudrions bien voir de vous un prodige dans le ciel; » Jésus répondit : « cette génération perverse demande un signe et il ne lui en sera pas donné d'autres que le signe du prophète Jonas, car, de même que Jonas fut 3 jours et 3 nuits dans le ventre de la baleine, de même le fils de l'homme sera 3 jours et 3 nuits dans le sein de la terre.

Les disciples du Galiléen l'imitèrent; on lit dans l'Apocalypse : les 3 animaux qui avaient chacun 6 ailes (3 de chaque côté) ne cessaient jour et nuit de dire : saint, saint, saint (3 fois saint) le Seigneur tout-puissant. Dans le même ouvrage on voit que, quand l'ange sonna de la trompette, la 3e partie de la terre fut brûlée, la 3e partie de la mer fut changée en sang, la 3e partie des navires périrent; que la 3e partie des eaüx et sources fut changée en eau d'absinthe et la 3e partie des hommes tués par les animaux apocalyptiques.

Une légende, répandue dans la Rome moderne, veut que les cardinaux meurent par trois; le hasard a justement donné raison en 1892 à cette croyance populaire; les cardinaux Théodoli, Battaglini et G. d'Annibale sont morts à quelques jours d'intervalle.

Le chiffre 3 serait donc fatal aux princes de l'Eglise.

Un homme à qui ce nombre 3 ne semble pas avoir été néfaste est l'ex-chancelier de l'Empire d'Allemagne, l'ennemi acharné de la France, le prince de Bismark. Sa devise était : *In trinitate robur* (la force règne dans la trinité). On a voulu y voir un sens prophétique et on s'est amusé à rechercher le rôle que le nombre 3 a joué dans la vie privée et dans la carrière politique de cet homme d'Etat.

Voici ce qu'on a trouvé : Bismark a eu 3 enfants, Herbert, Wilhem et Maria; 3 domaines, Friedrichsruhe, Varzin et Schœnhausen. Il a pris part à 3 grandes guerres (Danemark, Autriche, France) et signé 3 traités de paix. Il a été le créateur de la Triple-Alliance, l'organisateur de l'entrevue des 3 empereurs; il a servi 3 souverains : Guillaume Ier, Frédéric II, Guillaume II, et combattu 3 partis politiques. Enfin, sur toutes ses caricatures, Bismark était représenté avec 3 cheveux sur le crâne, seuls survivants d'une chevelure autrefois très luxuriante.

De la religion le 3 passa dans la théurgie et la magie. Les sorcières qui sacrifiaient à la triple Hécate le faisaient entrer dans leurs incantations. Dans le Macbeth de Shakespeare, le roi se présente devant 3 sorcières; la première dit : 3 fois le chat a miaulé; la seconde : à 3 reprises le jeune hérisson a gémi 3 fois et elles font assister Macbeth à 3 apparitions. C'est à cause de ce nombre qu'on attribuait un pouvoir occulte au trèfle, *trifolium*, qui a 3 feuilles.

Cette préoccupation des esprits d'employer le 3 se retrouve presque partout. Les francs-maçons se servent à chaque instant des 3 points (.·.); leurs travaux, dans leurs assemblées, sont réglés par des coups de maillet au nombre de 3.

Les enfants dans leurs jeux emploient ce nombre, à l'exclusion de tout autre, pour attirer l'attention; ne crient-ils pas : une, deux, trois ! (sous-entendu fois).

Il est temps, croyons-nous, d'arrêter cette longue dissertation historique qui pourrait facilement être étendue, mais le lecteur qui désirerait la poursuivre, pourra consulter avec fruit la brochure de A. l'Esprit intitulée : *Histoire des chiffres et des 13 premiers nombres* éditée chez Mendel (Paris, 1893), et dans laquelle nous avons beaucoup puisé.

Un italien, chanoine de Bergame, s'est également avisé de recueillir, dans une compilation aussi bizarre que mal assortie, toutes les singularités qui appartiennent au nombre 3 ; il y en a de philosophiques, de poétiques, de fabuleuses, de galantes et enfin de dévotes.

Le nombre quatre. — Pythagore, s'il fant en croire Stobée et d'autres écrivains, est l'auteur du poëme qu'on attribuait généralement à Orphée et qui renferme la *Légende sacrée*. Ce poëme débute, en effet, par l'invocation d'un principe tout pythagoricien : « Salut, nombre fameux, générateur des Dieux et des hommes ! » En voici les principaux dogmes, parfaitement d'accord avec l'enseignement de l'école pythagoricienne. L'intelligence s'efforce vainement d'épuiser la série des causes et des effets ; mais la raison, qui cherche l'unité dans la variété des choses, nous oblige de nous arrêter à une cause première. C'est là ce que Pythagore appelait la cause primordiale, créée d'elle-même, *autogène* : c'est le Dieu qui a pour corps l'univers, et qui est à la fois un et quadruple ; son nom est *tetractys* ou *quadrinité*. Il se nommait ainsi, parce qu'il contenait en lui-même : 1° l'éther, principe actif ou mâle par excellence, appelé aussi *monade* ; 2° la matière, principe femelle ou passif, qui s'appelait aussi *dyade*, parce qu'on la supposait composée d'eau et de terre ou de poussière suspendue dans l'eau, état chaotique de la matière, universellement répandue dans l'espace : 3° le temps, qui s'appelait *trinité*, parce qu'il renferme le passé, le présent et l'avenir ; 4° la loi universelle ou l'inexorable destin ; elle devait embrasser tout l'univers, l'espace, le temps et la matière : c'était le *contenant*, τὸ περιεχον, la reine *Tetractys* (1).

Le nombre 4 était donc en grande vénération chez les disciples de Pythagore qui faisaient ce serment : « Oui, je le jure ! par celui qui a donné à notre âme le Tetractys, la source ou racine de l'éternelle nature... ».

Le chiffre 4 et le carré qui en est la forme absolue ont toujours été considérés dans la vieille Asie comme la représentation idéo-

(1) Hœfer. — *Histoire des Mathématiques*, 4e édit. 1895, p. 90.

graphique de la terre. C'est sur cette figure que s'élevaient les tours astronomiques des Chaldéens et des Syro-Arabes, et le plan de tous les temples antiques était quadrangulaire. Grâce à son emploi, la porte de la Cella se trouvait orientée et le soleil venait, à son lever, saluer la statue déesse du sanctuaire. C'est au développement de ce principe symbolique que l'on est redevable des hermès grecs et des doubles hermès de Brahma, ainsi que de la décoration des tours des monuments kmers dont les quatre faces sont décorées de têtes gigantesques qui ont les yeux fixés sur les quatre points cardinaux.

Le caâba des Arabes, ou sanctuaire qui renfermait la fameuse pierre noire d'origine aérolithique, était carrée, ainsi que l'étymologie du mot l'indique.

La Chine dévoile dans ses rites (2 205 av. J.-C.) la figuration de la terre « La terre est représentée par la couleur jaune, sa figure spéciale est le carré. » — Les couleurs fondamentales correspondent aussi aux quatre points cardinaux [2].

Il a été publié une arithmétique tétractique, c'est-à-dire à base quatre.

Enfin le nombre quatre figure dans de nombreux dictons populaires : être tiré à quatre épingles, se mettre en quatre, couper un cheveu en quatre, faire le diable à quatre, n'y aller pas par quatre chemins, etc...

Le nombre cinq. — Si l'on considère ce fait physique que nous avons 5 doigts à chaque main, on est fondé à supposer que la numération, à l'origine, a dû être pentenaire. On en trouve une preuve dans le récit que le lieutenant Mage a publié de son voyage au Soudan ; cet officier a relevé le nom des dix premiers nombres chez plusieurs tribus de cette partie de l'Afrique, et il suffit de jeter un coup d'œil sur le tableau ci-après pour voir que le système pen-

[1] Rouge (S), Noir (N), Vert (E), Blanc (O).

tenaire est celui de ces peuples noirs; c'est-à-dire qu'à partir de 6 ils disent : 5 et 1, 5 et 2 etc., ou quelque chose d'analogue [1].

Manière de compter en langue

	Woloff	Peulh	Diallouké	Sousous
1	Ben	Go	Kédé	Killing
2	Niare	Didi	Fiddi	Firing
3	Niète	Tati	Sakkha	Sakhan
4	Nienète	Naï	Nani	Nani
5	Diouroum	Dioï	Soulou	Souli
6	Diouroum ben	Die gom	Chéeni	Senm
7	Diouroum niare	Diedidi	Soulou fidé	Solo firé
8	Diouroum niète	Diedati	Soulou méseré	Solo Massakha
9	Diouroum nienète	Die naï	Soulou ménémi	Soloma nani
10	Foucq	Sapo	Nafou	Fouh

La même remarque s'applique au Cambodgien.

Le système de numération Khmère est quintésimal.

Il résulte de ce fait que, dans beaucoup de langues de l'ancien et du nouveau monde, il y a coïncidence entre les mots main et cinq: cette influence se serait même fait sentir sur la forme du chiffre romain V.

Le Protée d'Homère comptait par cinq les phoques qu'il conduisait.

Au point de vue philosophique, le nombre 5 n'avait guère de valeur que chez les Egyptiens. Diodore de Sicile nous apprend qu'ils représentaient le monde par le nombre 5, parce qu'il y a cinq

[1] A. L'Esprit. — *Histoire des chiffres et des 13 premiers nombres*. Paris, Mendel, 1893.

éléments : terre, eau, air, feu et éther; et, selon Plutarque, le mot πεντε (cinq) viendrait de παν (tout) en raison de cette conception.

Junon, qui présidait au mariage, protégeait, selon Pythagore, le nombre 5, parce qu'il est composé de 2, premier nombre pair et de 3 premier nombre impair. Ces deux nombres réunis donnent l'emblême ou l'image du mariage. D'ailleurs le nombre 5 est remarquable, ajoutait-il, par une autre propriété, c'est qu'étant multiplié toujours par lui-même, le dernier chiffre à droite du produit est toujours un 5.

Hésiode considérait comme néfaste le 5^e jour de chaque mois; chez nous, c'est le 6^e jour de la semaine, le vendredi.

A propos du nombre cinq nous dirons quelques mots du pentagramme, l'un des symboles que les pythagoriciens employaient pour se reconnaître et qui était aussi appelé quelquefois le triple triangle. — τὸ τριπλοῦν τρίγωνον.

Le pentagramme qui est tout simplement un pentagone régulier étoilé était considéré comme symbolisant la santé, et les sommets étaient probablement désignés par les lettres du mot ὑγίεια, la diphtongue ει étant remplacée par un θ. La figure consiste en une simple ligne brisée à laquelle on attribuait une certaine importance mystique.

Jamblique, à qui nous devons la révélation de ce symbole, raconte qu'un Pythagoricien étant en voyage, tomba malade dans une auberge où il s'était arrêté pour passer la nuit; il était pauvre et fatigué, mais l'aubergiste, homme compatissant, le soigna charitablement et fit tout ce qui dépendait de lui pour le ramener à la santé. Cependant, en dépit de ses soins, l'état du malade empirait. Comprenant qu'il allait mourir et ne pouvant payer à l'aubergiste ce qu'il lui devait, le Pythagoricien demanda alors une tablette sur laquelle il traça la fameuse étoile symbolique; puis, la présentant à son hôte il le pria de la suspendre à l'extérieur de façon que tous les passants pussent la voir, en l'assurant qu'un jour ou l'autre sa charité serait récompensée. Le voyageur mourut, fut enterré convenablement et la tablette exposée comme il l'avait demandé.

Un long intervalle de temps s'était déjà écoulé lorsqu'un jour le symbole sacré attira l'attention d'un cavalier qui passait devant l'auberge; mettant pied à terre il entra dans l'établissement et après avoir entendu le récit de l'hôtelier le récompensa généreusement.

Telle est l'anecdote de Jamblique et il faut reconnaître que si elle n'est pas vraie, elle est tout au moins intéressante (1).

On raconte qu'aujourd'hui encore, dans certaines campagnes d'Alsace, la figure symbolique du pentagramme est placée au mur dès qu'une femme est malade.

Le pentagramme était gravé sur certaines monnaies grecques, ainsi que sur des pierres employées au moyen âge contre les sorcelleries et contre les maladies. Ces pierres portaient le nom d'*abraxas*, nom que l'on a fait venir de l'hébreu, du grec, du copte, etc.; quelques auteurs pensent que ce nom ne signifie absolument rien et qu'il est simplement formé de la réunion de *lettres numériques* donnant le nombre 365.

Ces pierres abraxas, qui proviennent de la Syrie, de l'Egypte, de l'Espagne, et qui étaient des talismans, portaient, outre le mot *abraxas*, des figures fantastiques : têtes de lion, de coq, de serpent, et enfin le pentagramme.

On voyait quelquefois aussi gravé ce mot magique : *abracadabra*, qui avait, paraît-il, la propriété de préserver des maladies. Mais ce mot n'avait toute son efficacité que si les lettres étaient disposées en triangle de manière qu'on pût le lire dans tous les sens (2).

ABRACADABRA
BRACADABR
RACADAB
ACADA
CAD
A

(1) *Histoire des Mathématiques* de W.-W. Rouse-Ball. Traduction française de L. Freund. Paris, Hermann 1906.

(2) A. Lévy. — *Curiosités scientifiques.* Hachette, 1884.

Ce mot, qui vient probablement du mot *abraxas*, était gravé sur une pierre ou écrit sur un morceau de papier carré. « Il fallait, dans ce dernier cas, plier le papier de manière à cacher l'écriture et le piquer en croix avec un fil blanc. Puis le malade suspendait cette amulette à son cou et la portait pendant neuf jours. Au bout de ce temps il devait aller en silence, de grand matin, sur le bord d'une rivière qui coulait vers l'orient, détacher de son cou le morceau de papier et le jeter derrière lui sans l'ouvrir ! »

Lucas mentionne la figure mystérieuse et magique formée par le mot ABRACADABRA, mais en l'écrivant sous la forme suivante :

A
B.B
R.R.R
A.A.A.A
C.C.C.C.C
A.A.A.A.A.A
D.D.D.D.D.D.D
A.A.A.A.A.A.A.A
B.B.B.B.B.B.B.B.B
R.R.R.R.R.R.R.R.R.R
A.A.A.A.A.A.A.A.A.A.A

qui, pense-t-il, représentait pour les initiés, les propriétés du triangle arithmétique et des combinaisons.

Il montre que le nombre de manières de lire le mot ABRACADABRA en commençant par la ligne supérieure et descendant après chaque lettre à l'une des deux lettres voisines de la ligne située immédiatement au-dessous est égal à 2^{10}. (1)

1 et 5 sont les deux seules sommes consécutives de deux carrés d'entiers consécutifs dont le produit égale une somme de deux carrés d'entiers consécutifs.

(1) Lucas. — *Théories des Nombres*. Paris, Gauthier-Villars, 1891. T. I p. 13.

La question revient à résoudre l'équation

$$\left[x^2 + (x+1)^2\right]\left[(x+1)^2 + (x+2)^2\right] = y^2 + (y+1)^2.$$

Cette équation peut s'écrire

$$4x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 16x + 5 = 2y^2 + 2y + 1,$$

ou, en retranchant 1 des deux côtés et divisant par 2,

$$2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 2 = y(y+1),$$

ou enfin

$$2(x+1)^4 = y(y+1).$$

Les facteurs y et $(y+1)$ étant premiers entre eux, il faut que l'un soit une quatrième puissance, et l'autre le double d'une quatrième puissance.

On peut donc poser

$$y = m^4 \quad \text{et} \quad y + 1 = 2n^4$$

d'où

$$x + 1 = mn.$$

Il en résulte

$$1 = 2n^4 - m^4 \quad \text{ou} \quad 1 + m^4 = 2n^4.$$

Mais la somme de deux bicarrés n'est jamais égale au double d'un bicarré, à moins qu'ils ne soient égaux ; donc

$$m = n = 1, \quad x = 0, \quad y = 1,$$

d'où la solution

$$(0^2 + 1^2)(1^2 + 2^2) = 1^2 + 2^2; \qquad 1 \times 5 = 1 + 4.$$

Nous n'avons pas à examiner l'hypothèse $y = 2m^4$ et $y + 1 = n^4$ qui conduirait à considérer des entiers négatifs.

1 *et* 5 *sont les deux seuls nombres entiers jouissant de la double propriété d'être à la fois somme des carrés de deux nombres consécutifs et d'avoir pour carré la somme des carrés de deux nombres consécutifs.*

Proposons nous, en effet, de trouver un nombre qui soit, ainsi que son carré la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

Il s'agit de résoudre l'équation

$$\left[x^2 + (x+1)^2\right]^2 = y^2 + (y+1)^2$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}(x + 1 + x\sqrt{-1})^2 (x + 1 - x\sqrt{-1})^2 \\ = \left[y + (y+1)\sqrt{-1}\right]\left[y - (y+1)\sqrt{-1}\right]\end{aligned}$$

si le premier membre est le carré d'un nombre premier, ses deux facteurs sont premiers entre eux, ainsi que les facteurs du second membre, qui sont alors nécessairement des carrés.

On doit donc avoir

$$(1)\left\{\begin{aligned} y + (y+1)\sqrt{-1} &= (x + 1 + x\sqrt{-1})^2 \\ &= 2x + 1 + 2x(x+1)\sqrt{-1} \\ y - (y+1)\sqrt{-1} &= (x + 1 - x\sqrt{-1})^2 \\ &= 2x + 1 - 2x(x+1)\sqrt{-1} \end{aligned}\right.$$

ou

$$(2)\left\{\begin{aligned} y + (y+1)\sqrt{-1} &= 2x + 1 - 2x(x+1)\sqrt{-1} \\ y - (y+1)\sqrt{-1} &= 2x + 1 + 2x(x+1)\sqrt{-1} \end{aligned}\right.$$

Le premier système donne

$$y = 2x + 1, \qquad y + 1 = 2x^2 + 2x$$

d'où

$$x^2 = 1, \qquad x = \pm 1$$

$x = -1$ donne

$$\left[(-1)^2 + 0^2\right]^2 = 0^2 + 1^2 \quad \text{ou bien} \quad (0^2 + 1^2)^2 = 0^2 + 1^2$$

$x = 1$ donne

$$(1^2 + 2^2)^2 = 3^2 + 4^2 \quad \text{ou} \quad 5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Le second système (2) conduit à des valeurs irrationnelles de x. D'autre part

$$5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2.$$

Le nombre six. — Le nombre 6, au rapport de Vitruve, devait tout son mérite à l'usage où étaient les anciens géomètres de diviser toutes les figures, soit qu'elles fussent terminées par des lignes droites, soit qu'elles fussent terminées par les lignes courbes, en six parties égales; et comme l'exactitude du jugement et la rigidité de la méthode sont essentielles à la géométrie, les Pythagoriciens, qui eux-mêmes faisaient beaucoup de cas de cette science, employèrent le nombre 6 pour symboliser la justice, marchant toujours d'un pas égal, ne se laissant séduire ni par le rang des personnes, ni par l'éclat des dignités, ni par l'attrait des richesses.

Le nombre 6 est le premier des nombres désignés sous le nom de nombres parfaits et que nous étudions un peu plus loin.

Comme curiosité relative au chiffre 6, nous citerons le nombre formé par la réunion de trois six, 666, qui désigne dans l'*Apocalypse*, suivant les procédés cabalistiques du temps, un personnage ayant exercé à Rome l'empire souverain, ayant succombé à une fin violente, et devant revenir ultérieurement, à la tête d'une formidable coalition et en qualité d'Antéchrist, pour réduire Rome en cendres. Tout indique que le personnage désigné ne pouvait être que Néron [1].

A la fin du second siècle, la signification du nombre 666 n'était pas encore tout à fait oubliée. Quelques uns y savaient encore lire le nom de Néron. Mais, plus tard, le sens du passage donnant la description de l'Antéchrist se perdit, en même temps que celui du

[1] Consulter l'intéressant article de Maurice Vernes dans la *Grande Encyclopédie*. Tome III, p. 340-341.

livre tout entier. La polémique acheva d'égarer l'exégèse. Les protestants se sont rattachés à une interprétation qui date d'Irénée et, dans le nombre 666, ont trouvé le mot *Lateinos*, c'est-à-dire le pape. Les catholiques y ont lu par contre *Lutheranos* et présenté le docteur Marthin Luther comme la bête de l'Apocalypse. Les piétistes anglais, allemands, suisses ont su y découvrir le nom de Bonaparte, etc. Plusieurs savants à la fois, parmi lesquels MM. Reuss à Strasbourg, Hitzig à Heidelberg, Benory à Berlin, Fritzsche à Halle, ont retrouvé la véritable interprétation.

Ajoutons ici qu'il résulte d'un très intéressant mémoire de Ambroise-Firmin-Didot (*Des Apocalypses figurés*, Paris, 1870) que le sens primitif de l'Apocalypse, — sa double désignation de Rome comme la grande prostituée et de Néron comme l'Antéchrist, — s'est conservé en Espagne jusqu'au XII[e] et, en partie même, jusqu'au XVI[e] siècle (1).

Le nombre sept. — Aucun nombre n'a été si bien accueilli que le nombre sept.

Dès la plus haute antiquité on trouve la trace de cérémonies religieuses dans lesquelles on élevait 7 autels et sacrifiait 7 victimes.

Au point de vue du symbolisme, voici ce que nous trouvons chez les Arabes, les Chaldéens et Phéniciens ou peuples dérivés.

A Nemrond, à Tlassar et dans tous les palais assyriens, s'élevait, en arrière du Harem, une énorme tour ou pyramide à *sept étages*. Ces sept étages égaux entre eux en hauteur, et disposés en retrait les uns sur les autres, étaient revêtus d'un stuc coloré différemment pour chacun, et présentaient ainsi aux regards les couleurs sacrées

(1) En dehors de la *Grande Encyclopédie*, voir *Les Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1854, p. 267.

Le *Bulletin de Bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques de Terquem*. Tome I, p. 81-106-107.

des sept corps sidéraux superposés de manière à commencer en bas par celle du moins important, et à finir, en haut, par celle du premier de tous. Blanc (Venus), Noir (Saturne), Pourpre (Jupiter), Bleu (Mercure), Vermillon (Mars), Argent (Lune) et Or (le Soleil). C'était, ajoute F. Lenormant (*Histoire ancienne*), l'antique pyramide à étages du premier empire sémitique de Chaldée, adoptée par les Assyriens, et très légèrement modifiée dans sa forme, par une extension moins grande de sa base et un retrait un peu moins prononcé des étages les uns sur les autres, de manière à être plutôt désormais une tour qu'une pyramide.

Dans la vallée de Mina où se passait, dès la plus haute antiquité, un des actes principaux du pélerinage des peuples syro-arabes, se dressaient 7 *pierres sacrées* ou *bétyles.*

C'étaient également des bétyles ou pierres aérolithiques les 7 termes entre lesquels Hérodote dit que les Arabes de son temps prêtaient leurs serments pour leur donner un caractère plus solennel et plus saint.

Le nombre des pierres sacrées, dans ces deux exemples, est important à noter, car c'est celui des planètes. Il prouve que le culte des bétyles avait, chez les arabes antiques, une liaison étroite avec le côté sidéral et planétaire de la religion. Il en était de même dans le bassin de l'Euphrate et dans la Syrie.

Les Chaldéens d'Ereth avaient eux aussi *leur temple des sept pierres noires*, dont nous parlent les inscriptions cunéiformes [1].

Lorsque vint Mahomet, il ne laissa subsister que trois des pierres debout de la vallée de Mina, prétendant qu'elles marquaient les trois places où le diable était apparu à Adam. Ayant ainsi réduit le nombre des pierres, il décida que le nombre des cailloux que l'on jetterait désormais à chacune d'elles serait de *sept*; prescriptions que les pèlerins suivent encore de nos jours et qui a maintenu le nombre total au chiffre sacré de 21 ou 7×3.

Dans la mythologie brahmique, Indra est le chef de *sept* autres

[1] F. Lenormant. — *Histoire ancienne.*

Vasous et de *sept* swacgas ou sphères célestes, et l'olympe védique mentionne que le nombre des adityas a été porté à 12 afin de leur faire représenter les douze formes solaires ou signes du zodiaque.

On sait que Pythagore accordait une place importante au *septenaire* ou période de sept années.

Dans le songe de Scipion, Ciceron dit textuellement : « il n'y a presque rien dont le nombre 7 ne soit le nœud. »

On connaît les *sept* merveilles et les *sept* sages des anciens.

On voit les Athéniens envoyer chaque année *sept* enfants pour être dévorés par le Minotaure.

Dans Rome, la ville aux 7 collines, on croyait que le Styx faisait 7 fois le tour de l'enfer divisé par Virgile en 7 demeures ; dans les jeux du cirque, le vainqueur dans la course des chars était celui qui avait fait 7 fois le tour de la borne surmontée de 7 dauphins et de 7 œufs.

C'est surtout chez les Hébreux et plus tard chez les Chrétiens que le nombre 7 prit un caractère sacré. Dès les premières lignes de la Bible on voit Dieu créer le monde en 7 jours ; le 7e jour de la semaine était le sabbat, jour de repos ; la 7e année était consacrée au repos de la terre, et les 7 semaines de 7 années précédaient le jubilé qui se célébrait tous les 50 ans. De Pâques, la grande fête juive, il y avait 7 semaines jusqu'à la Pentecôte.

L'ancien testament parle des 7 vaches grasses et des 7 vaches maigres, des 7 plaies d'Egypte. Les amis de Job offrirent un sacrifice de 7 veaux et 7 béliers. Abraham fit présent de 7 brebis à Abimelech pour les immoler. Les trompettes font tomber les murailles de Jéricho en en faisant 7 fois le tour. David, dans la translation de l'arche sainte, sacrifie aussi 7 victimes. On connaît le chandelier à 7 branches qui brûlait dans le temple, les 7 psaumes de la pénitence [1].

[1] A. L'Esprit. — *Histoire des chiffres et des 13 premiers nombres*, Mendel, 1893, p. 79.

L'historien Josèphe raconte qu'un nommé Jésus, fils d'Amanns, annonça la prise de Jérusalem en répétant sans cesse pendant 7 ans : malheur à Jésusalem !

Remarquons avec le poëte qu'il y a 7 lettres dans le nom de Jéhovah.

> Et dans l'immensité sept lettres tombèrent.
> (V. Hugo. — *Contemplations.*)

C'est avec ces antécédents que ce nombre entra dans la religion chrétienne où la plupart des choses vont par 7. On compte 7 péchés capitaux, 7 sacrements, 7 dons de l'esprit, (1) 7 douleurs de Marie, les 7 parties de l'Office, ou heures canoniales.

On connaît 7 princes de l'Enfer : Aziel, Ariel, Marbuel, Méphistophélès, Barbuel, Aziabel et Arifel.

Saint-Pierre demande à son maître : « Lorsque mon frère aura péché contre moi, combien de fois faut-il que je lui pardonne ? » et Jésus de répondre : « Je ne vous dis pas jusqu'à 7 fois, mais jusqu'à 77 fois 7 fois ». — C'est-à-dire toujours.

Remarquons que ce nombre 7 s'employait dans le sens d'une quantité indéterminée, mais considérable ; ainsi on lit dans le livre de Ruth : « Ce vous est plus avantageux que d'avoir 7 enfants ». Ce qui veut dire : que d'avoir un grand nombre d'enfants (2).

Ce sens de beaucoup, donné au 7, se retrouve aussi chez les Arabes ; on connaît leur proverbe : Avant de parler, tourne ta langue 7 fois dans ta bouche ».

Puisque nous parlons des Arabes, disons que Mahomet admet 7 cieux et les houris qui les peuplent ont toutes des perfections ou des qualités marchant par 70. Il leur suppose 70 robes, 70 tentes, 70000 esclaves, etc. Le Coran ordonne de jeuner pendant le 7e mois de l'année.

L'enfer de Mahomet est divisé en 7 étages destinés à recevoir autant de sortes de damnés, dans l'ordre suivant, à partir du

(1) Les rabbins comptaient 7 degrés de félicité céleste.

(2) A. l'Esprit. — Ouvrage déjà cité.

premier étage : mahométans, juifs, chrétiens, sabéens, mages, idolâtres, hypocrites.

Dans la littérature, le 7 joue un certain rôle et nous renvoyons à ce sujet au chant X de l'*Enfer* de Dante et à la scène 3 de l'acte I de Macbeth.

Sept est le seul nombre entier qui, augmenté de I, *donne le double d'un carré, et dont le carré, augmenté de* I, *donne également le double d'un carré.*

Soit N un nombre entier tel que l'on ait :

$$N = 2x^2 - 1.$$

Il vient en élevant les deux membres au carré

$$N^2 = 4x^4 - 4x^2 + 1 = (2x^2 + 1)^2 - 8x^2$$

ou encore

$$N^2 = 2(2x^2 + 1 - 2x)^2 - (2x^2 + 1 - 4x)^2.$$

Si donc l'on pose

$$(1) \qquad 2x^2 + 1 - 2x = y \quad \text{et} \quad 2x^2 + 1 - 4x = 1 \qquad (2)$$

on aura

$$(3) \qquad N^2 = 2y^2 - 1,$$

et la seconde condition sera remplie.

Or (1) peut s'écrire

$$y = x^2 + 1 + x^2 - 2x = (x - 1)^2 + x^2$$

et (3) donne également

$$y^2 = \frac{N^2 + 1}{2} = \left(\frac{N + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{N - 1}{2}\right)^2,$$

et le nombre N étant impair, il en résulte que y et y^2 sont des sommes de carrés de deux nombres entiers consécutifs.

Donc, d'après ce qui a été démontré plus haut au nombre 5

$$y = 5,$$

il en résulte $x = 2$ et $N = 7$.

Les équations (1) et (2) nous conduisent d'ailleurs aux mêmes valeurs

$$x = 2 \quad \text{et} \quad y = 5.$$

Le nombre huit. — Le nombre 8 était en vénération chez les Pythagoriciens, parce qu'il désignait, selon eux, la loi naturelle, cette loi primitive et sacrée qui suppose tous les hommes égaux.

C'est ce principe d'égalité qu'appliquait d'une si singulière façon Héliogabale quand il invitait à sa table 8 boîteux, 8 chauves, 8 borgnes et 8 bègues qu'il livrait ensuite aux bêtes féroces.

Aux jeunes gens désireux d'étudier les divers systèmes de numération, leurs avantages et leurs inconvénients, et en particulier la numération à base *huit*, nous conseillons la lecture d'un ouvrage fort bien écrit intitulé : *Le système octoval ou la numération et les poids et mesures réformés* par Colenne, 2e édit. Paris, 1845.

Nous ne pouvons mieux faire que de citer en passant un ouvrage publié en 1857 et dans lequel l'auteur, Aimé Mariage, s'efforce de démontrer que les nombres primitifs mentionnés dans les ouvrages chinois, dans la Bible, dans les livres d'Hésiode, d'Homère, d'Hérodote, etc., étaient exprimés dans l'origine suivant la numération à base *huit*. Il estime établir que les heures, les jours, les semaines, les mois, les ans et toutes les périodes des temps anciens existaient suivant la numération octovale. L'auteur donne également l'explication, d'après ce système, des 64 combinaisons de lignes des 8 figures constituant le *Je-kim* dont il a été question plus haut au nombre deux, et il faut avouer que son explication semble assez naturelle.

Faisons encore remarquer, à propos du chiffre 8 que dans une opération les multiplicateurs ..... 8, 98, 998, ...
peuvent être remplacés par 10, 100, 1000, ...

plus forts de deux unités. On obtient alors le résultat exact en retranchant du produit obtenu, deux fois le multiplicande. Voici enfin quelques exemples curieux :

8×1	$+ 1$	donne	9
8×12	$+ 2$	»	98
8×123	$+ 3$	»	987
8×1234	$+ 4$	»	9876
8×12345	$+ 5$	»	98765
8×123456	$+ 6$	»	987654
8×1234567	$+ 7$	»	9876543
8×12345678	$+ 8$	»	98765432
8×123456789	$+ 9$	»	987654321

Le nombre neuf. — Le nombre neuf était considéré avec crainte comme désignant la fragilité des fortunes humaines, presqu'aussitôt renversées qu'établies. C'est pour cela que les Pythagoriciens conseillaient d'éviter tous les nombres où le 9 domine, et principalement 81, produit de 9 par lui-même.

Le nombre 9 se retrouve dans les idées religieuses judaïques et chrétiennes : le 5e jour de la fête des expiations, les Hébreux devaient sacrifier 9 veaux. A cette superstition juive et païenne, la dogmatique chrétienne donne une plus grande force par suite de la croyance à la Trinité. Ce dogme, dit Larousse, fut violemment attaqué par les hérétiques et l'Eglise affecte, par cela même, de l'affirmer et d'en multiplier l'expression dans ses cérémonies. De là, par exemple, le *Trisagion*, ou 3 fois saint, chanté dans la liturgie, les signes de croix répétés 3 fois ; c'est en l'honneur de ce nombre qu'on dit 3 fois *Kyrie eleison*, 3 fois *Christe eleison*, 3 fois *Kyrie eleison*, soit 9 fois, c'est-à-dire 3 fois pour chaque personne divine. Ce doit être aussi l'origine des neuvaines, de *none*, office de la 9e heure, etc.

Les anges forment 9 chœurs devant l'Éternel, et le Dante, nourri des idées religieuses de son époque, suppose 9 cercles dans l'enfer.

Le livre sacré des anciens Persans prétend qu'il y a 99999 maladies produites par la puissance du diable.

Le 9 était aussi chiffre cabalistique. Chez les anciens Gaulois, l'île de Sein donnait asile à 9 prophétesses dites Vierges de Sein.

Shakespeare met le nombre 9 dans la bouche de ses sorcières.

A propos du nombre 9 faisons remarquer que multiplier un nombre par 9 revient à le multiplier par 10 et à retrancher du résultat le multiplicande.

De même les multiplicateurs 99, 999, 9999, ...
se remplacent par les nombres 100, 1000, 10000, ...
et des résultats obtenus on retranche une fois le multiplicande.

La division par 9 peut s'effectuer assez promptement au moyen du procédé suivant.

Soit, par exemple, à diviser 724 par 9.

On écrit le nombre 724 en séparant, par un trait vertical un chiffre à droite.

Au dessous on écrit, comme pour faire une addition, le nombre 72, le chiffre 2 étant placé sous le 4, à la droite du trait vertical.

72	4
7	2
	7
80	3

Enfin, sous le 2 on écrit le dernier chiffre qui reste 7. On additionne les nombres ainsi écrits.

La partie à gauche du trait vertical représente le quotient. Si la somme des chiffres contenus dans la première colonne verticale à droite du trait est moindre que 10, elle représente le reste de la division, si elle est supérieure à 10, cette somme doit être augmentée de la retenue.

Dans notre exemple 80 est le quotient et 4 le reste.

On a, en effet

$$724 = 72 \text{ dizaines } + 4 = 72 \text{ fois } 9 + 72 + 4$$
$$72 = 7 \text{ dizaines } + 2 = 7 \text{ fois } 9 + 7 + 2.$$

Donc

$$724 = 72 \text{ fois } 9 + 7 \text{ fois } 9 + 4 + 7 + 2 = 79 \text{ fois } 9 + 13$$
$$= 80 \text{ fois } 9 + 4.$$

823	7
82	3
8	2
	8
915	0

Prenons comme second exemple le nombre 8237.

En opérant comme on vient de l'expliquer, on trouve 915 pour quotient et 2 pour reste.

568	34
5	68
	5
574	07

Un procédé identique s'applique au diviseur 99, mais dans ce cas on sépare, par un trait vertical, deux chiffres (au lieu d'un) sur la droite du dividende.

Prenons pour exemple, le nombre 56834.

On trouve comme quotient 574 et pour reste 7 + la retenue = 8.

568274	91
5682	74
56	82
	56
574015	03

Divisons encore 56827491 par 99.

Le quotient de la division est 574015 et le reste 3 + la retenue 3 = 6.

426348	917
426	348
	426
426775	691

On peut étendre le procédé aux diviseurs 999, 9999... etc.

Divisons par exemple le nombre 426348917 par 999.

On trouve pour quotient 426775 et pour reste 691 + la retenue 1 = 692.

Le même procédé de division peut être étendu à des nombres qui diffèrent très peu de 100, 1000, ... etc., comme 98, 998, 996, ... etc.

576	34
11	52
	22
587	08
1	2
588	10

Soit, par exemple à diviser 57634 par 98.

98 = 100 — 2. Séparons par un trait vertical deux chiffres sur la droite de 57634 et multiplions 576 par 2.

Le produit 1152 s'écrit sous 57634 en plaçant les deux premiers chiffres à droite sous 34.

Additionnons les nombres qui se trouvent des deux côtés du trait vertical, on trouve d'une part 587 et de l'autre 108 qui s'écrit en plaçant le chiffre 1 sous le chiffre 7. Multiplions 1 par 2 et écrivons le produit dans la première colonne verticale.

L'addition finale nous donne le quotient 588 et le reste 10.

864	835
3	456
	12
867	303
1	4
868	307

Soit encore à diviser 864835 par 996.

996 = 1 000 — 4. Il faut donc séparer 3 chiffres à droite et multiplier par 4 les nombres qui restent. Le quotient de la division est 868 et le reste 307.

Ces divers procédés de division sont, croyons-nous, plus curieux que pratiques.

Nous terminerons en donnant quelques résultats de multiplications par 9 présentant une symétrie et une simplicité remarquables.

9 × 1	+ 2	donne	11
9 × 12	+ 3	»	111
9 × 123	+ 4	»	1111
9 × 1234	+ 5	»	11111
9 × 12345	+ 6	»	111111
9 × 123456	+ 7	»	1111111
9 × 1234567	+ 8	»	11111111
9 × 12345678	+ 9	»	111111111
9 × 123456789	+ 10	»	1111111111

Autres résultats curieux

9 × 9	+ 7	donne	88
9 × 98	+ 6	»	888
9 × 987	+ 5	»	8888
9 × 9876	+ 4	»	88888
9 × 98765	+ 3	»	888888
9 × 987654	+ 2	»	8888888
9 × 9876543	+ 1	»	88888888
9 × 98765432	+ 0	»	888888888

Le *Talkhys amali al hissàb* (1) (Résumé analytique des opérations du calcul) d'Ibn Al Banna, de Maroc, renferme, au chapitre de la

(1) La Traduction complète du *Talkhys amâli al hissàb* d'Ibn al Banna le Marocain, par Aristide Marre, a paru d'abord dans les *Atti dell' Accademia pontificia dé Nuovi Lincei*, t. XVII, 1864. Elle a été publiée en 1865, à

multiplication des nombres entiers, quelques procédés d'abréviation à l'aide desquels on obtient rapidement, dans certains cas particuliers, le produit de la multiplication de deux nombres entiers. Comme ces procédés méritent d'être connus et ne se rencontrent dans aucun Traité d'Arithmétique (bien que le *Talkhys* les ait donnés il y a près de six siècles), il nous paraît utile de les exposer rapidement ici.

Soit à multiplier par lui-même un nombre composé de chiffres tous égaux à 9, par exemple 99999 par 99999.

Règle. — Il suffit d'écrire le chiffre 8, de le flanquer à gauche d'autant de 9 et à droite d'autant de 0 qu'il y a de chiffres moins un dans l'un quelconque des facteurs, puis d'écrire à l'extrême droite du nombre qui en résulte, le chiffre 1.

Cette règle appliquée à l'exemple proposé donne comme produit.

9999800001.

Autre exemple. Soit 9999999 à multiplier par 9999999. A gauche du chiffre 8, j'écris (7 — 1) ou 6 chiffres tous égaux à 9 et à sa droite, 6 chiffres tous égaux à 0, ce qui donne

9999998000000

Puis à l'extrême droite de ce nombre, on pose le chiffre 1, ce qui fournit le produit cherché

99999980000001.

Autre exemple. Si l'on proposait de multiplier 9 par 9, le produit, en appliquant la règle, serait 81.

Dans ce cas, en effet, le nombre des chiffres de l'un quelconque des facteurs étant 1, ce nombre diminué de 1, devient égal à zéro,

Rome, à l'imprimerie des *Sciences Mathématiques et Physiques*, par les soins du Prince Balthasar Boncompagni.

L'extrait que nous donnons ici est emprunté aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1879, p. 262, 263.

et cela signifie que le chiffre 8 apparaît ici sans son escorte habituelle de 9 à gauche et de 0 à droite, et seulement accompagné du chiffre 1.

Soit maintenant à multiplier un nombre composé de chiffres tous égaux à 9 par un nombre composé de chiffres tous égaux entre eux, mais tous différents de 9.

On applique la règle suivante : on fait d'abord le produit d'un des chiffres du multiplicande par un des chiffres du multiplicateur, le chiffre des unités de ce produit préliminaire sera le chiffre des unités du produit demandé; quant au chiffre des dizaines de ce même produit préliminaire, il devra être flanqué à gauche d'autant de fois le chiffre du multiplicateur qu'il y a de chiffres moins un dans l'un quelconque des facteurs proposés, et à droite d'un même nombre de chiffres tous égaux à la différence entre le chiffre (9) du multiplicande et le chiffre du multiplicateur. C'est à l'extrême droite du nombre ainsi obtenu qu'on écrira le chiffre des unités du produit préliminaire, et l'on aura ainsi le produit demandé.

Exemple proposé

$$999 \times 666.$$

Le produit préliminaire 9×6 étant 54, il suffit d'écrire à la gauche du chiffre (5) des dizaines autant de fois le chiffre (6) du multiplicateur qu'il y a de chiffres moins un dans l'un ou l'autre facteur, c'est-à-dire deux fois, et à sa droite deux fois le chiffre (3) qui exprime la différence $9 - 6$, ainsi :

$$66533,$$

puis de complèter ce nombre, en écrivant à l'extrême droite le chiffre (4) des unités du produit préliminaire (54), et l'on aura ainsi pour le produit cherché

$$665334.$$

Autre exemple. Soit 9999999 à multiplier par 3333333. Le produit préliminaire est $9 \times 3 = 27$.

On écrit à la gauche du chiffre 2, chiffre des dizaines du produit préliminaire (7 — 1) ou 6 chiffres tous égaux à 3, puis à droite de ce même chiffre (2), 6 chiffres tous égaux à la différence (9 — 3) ou 6 des chiffres des deux facteurs. On complète le produit en écrivant à l'extrême droite du nombre 3 333 332 666 666 ainsi formé, le chiffre 7 des unités du produit préliminaire, ce qui donne le nombre

33 333 326 666 667.

Autre exemple. Soit à multiplier 99 par 22.

Produit préliminaire $9 \times 2 = 18$.

Produit cherché 2178.

On peut remarquer que la première règle est un cas particulier de la seconde : celui où la différence entre le chiffre du multiplicande et le chiffre du multiplicateur devient nulle.

Le nombre dix. — Les disciples de Pythagore regardaient ce nombre comme le tableau des merveilles de l'Univers, renfermant autant de nombres impairs que de nombres pairs.

Pour marquer qu'une chose surpassait de beaucoup une autre, ils disaient qu'elle était 10 fois plus grande, 10 fois plus admirable. Pour marquer simplement une belle chose, ils disaient qu'elle avait 10 degrés de beauté. D'ailleurs ce nombre passait pour un signe de paix, d'amitié, de bienveillance; et la raison qu'en donnaient les disciples de Pythagore, c'est que, quand deux personnes veulent se lier étroitement, elles se prennent les mains l'une à l'autre. Or, disaient-ils, deux mains jointes ensemble, forment 10 par le moyen des doigts.

Il résulterait de ce raisonnement que 5 serait le chiffre représentatif de la discorde; car, lorsqu'on donne un soufflet à autrui, ce sont bien les doigts de la main qui se font sentir.

Mais il ne faut pas trop demander de logique aux philosophes, même à Platon qui, parlant de la fondation d'une cité modèle dont il bannissait les poètes, voulait qu'elle n'eût pas plus de 5 040 défenseurs, parce que, disait-il, ce nombre est divisible par les 10 premiers nombres. On ne s'explique pas bien le rapport que les propriétés du nombre 5040 pouvaient avoir avec la fondation d'une cité.

Le chiffre 10 est rarement hiératique; cependant dans l'Apocalypse, on trouve la bête aux dix cornes ou 10 rayons représentant les 10 commandements de Dieu, le Décalogue de Moïse.

Dix est le seul nombre triangulaire égal à la somme des carrés de deux impairs consécutifs.

Proposons nous, en effet, de trouver les solutions entières de

$$\frac{x(x+1)}{2} = (2y-1)^2 + (2y+1)^2 = 8y^2 + 2.$$

Multiplions des deux côtés par 8 et ajoutons 1 aux deux membres, il vient :

$$(2x+1)^2 = 64y^2 + 17$$

ou

$$(2x+8y+1)(2x-8y+1) = 17.$$

Donc

$$2x + 8y + 1 = 17,$$

et

$$2x - 8y + 1 = 1,$$

d'où l'on tire

$$x = 4, \quad y = 1.$$

Alors

$$\frac{x(x+1)}{2} = 10 = 1^2 + 3^2.$$

Le nombre onze. — Ce nombre ne donne lieu à aucune observation particulière.

Nous ferons cependant quelques remarques sur les multiplicateurs 11, 111, 1111, ..., etc.

Pour multiplier un nombre par 11, on peut opérer comme il suit :

On suppose un zéro à la droite du multiplicande et un zéro à sa gauche, puis commençant par la droite, on ajoute les chiffres, 2 à 2, en tenant compte des retenues.

Soit, par exemple, 3628 à multiplier par 11.

On suppose opérer sur le nombre 036280 et l'on dit : 0 et 8, 8 que je pose ; 8 et 2 font 10, je pose 0 et je retiens 1 ; 1 de retenue et 2, 3, et 6 font 9 que j'écris ; 6 et 3 donnent 9 que j'écris, et enfin 3 et 0 donnent 3 que j'écris.

Le produit est donc

$$39908.$$

De même, pour multiplier un nombre par 111, on peut supposer deux zéros écrits à la droite du multiplicande et deux zéros écrits à sa gauche, puis, commençant par la droite, faire successivement la somme de 3 chiffres consécutifs en tenant compte des retenues.

Par exemple, pour multiplier 3728 par 111, on est supposé opérer sur le nombre 00372800 et l'on dit.

$0 + 0 + 8 = 8$ que je pose ; $0 + 8 + 2 = 10$, je pose 0 et je retiens 1 ; 1 et 8, 9 ; $9 + 2 + 7 = 18$, je pose 8 et je retiens 1 ; 1 de retenue et 7, 8 ; $8 + 3 + 0 = 11$, je pose 1 et je retiens 1 ; 1 et 3, 4 ; $4 + 0 + 0 = 4$ que j'écris.

Le produit est donc

$$413808.$$

On formulerait des règles identiques pour 1111, 11111, ... etc.

Quand il s'agit de multiplier par lui-même un nombre composé de chiffres tous égaux à l'unité, on applique avantageusement la règle suivante extraite du *Talkhys* (1).

Il suffit d'écrire le nombre des chiffres de l'un des facteurs, nombre qui pour que la règle s'applique doit être inférieur à 10, et de le flanquer symétriquement, à sa gauche et à sa droite, de la suite naturelle décroissante des chiffres moindres que lui. Par exemple,

(1) Voir la note de la page 29.

pour multiplier 11111 par 11111, on écrira 5, nombre des chiffres de l'un quelconque des facteurs, et symétriquement à droite et à gauche de 5, la suite naturelle décroissante des chiffres moindres que 5, c'est-à-dire 4, 3, 2 et 1, ce qui donne comme produit

123454321.

On forme ainsi le tableau suivant :

1 × 1	=	1
11 × 11	=	121
111 × 111	=	12321
1111 × 1111	=	1234321
11111 × 11111	=	123454321
111111 × 111111	=	12345654321
1111111 × 1111111	=	1234567654321
11111111 × 11111111	=	123456787654321
111111111 × 111111111	=	12345678987654321

Caractère de divisibilité par onze. — *Un nombre est divisible par* 11 *si en ajoutant les tranches de deux chiffres qu'il contient* (en commençant par la droite), *on obtient un nombre divisible par* 11.

N étant un nombre entier quelconque dont les chiffres sont de gauche à droite

$$abcdefghkl.$$

Partageons-le en tranches de deux chiffres, à partir de la droite, et écrivons ces tranches les unes au-dessous des autres afin de pouvoir les additionner :

$$\begin{array}{c} kl \\ gh \\ ef \\ cd \\ \underline{ab} \end{array}$$

La somme a pour expression

$$(l + h + f + d + b) + 10\,(k + g + e + c + a).$$

Cela posé, représentons par S cette somme, par S_i la somme $(l + h + f + d + b)$ des chiffres de rang impair, et par S_p la somme des chiffres de rang pair.

On a :

$$S = S_i + 10.S_p = S_i + 11.S_p - S_p,$$

d'où

$$S - 11.\,S_p = S_i - S_p.$$

Or, si N est divisible par 11, $S_i - S_p =$ multiple de 11 et on a alors $S =$ multiple de 11.

La condition est donc nécessaire.

Elle est d'ailleurs suffisante, car si S est un multiple de 11, on a $S_i - S_p =$ multiple de 11 et le nombre N est divisible par 11.

Remarque. — On formulerait un théorème identique pour les diviseurs 9 et 99.

Le nombre douze. — Ce nombre se rattache à l'Astronomie à cause des 12 signes du zodiaque, que les anciens rattachaient aux 12 travaux d'Hercule.

L'ancien et le nouveau testament font mention des 12 tribus d'Israël et des 12 apôtres. Saint Jean parla de 12 mille hommes marqués du sceau dans chacune des 12 tribus. Il dépeint la femme apocalyptique comme couronnée de 12 étoiles.

Sur la montagne de Sion, il vit 144000 personnes (12 × 12000) marquées sur le front du nom de l'Eternel; la nouvelle Jérusalem avait 12 portes, 3 à chacun des 4 points cardinaux, gardés par 12 anges; les murs avaient 12 fondements; la ville était carrée et avait 12000 stades de côté; la muraille avait 144 (12^2) coudées de hauteur et au milieu était l'arbre de la vie avec 12 fruits.

La théologie reconnaît 12 vertus.

Rappelons les 12 principales erreurs zoologiques populaires ayant une apparence de vérité :

La chauve-souris est un oiseau.
La baleine est un poisson.
L'écrevisse est un poisson rouge qui marche à reculons.
La piqûre de la vipère.
La langue de la vipère prise pour emblème de la calomnie.
Les deux ailes de l'abeille.
La souris est la femelle du rat.
La grenouille est la femelle du crapaud.
La guenon est la femelle du singe.
La corneille est la femelle du corbeau.
La colombe est la femelle du pigeon.
La perruche est la femelle du perroquet.

Le nombre 12 est particulièrement intéressant à cause de la discussion à laquelle il a donné lieu à propos de ses avantages comme base d'un système de numération.

Simon Stevin, de Bruges, avait imaginé le système de numération duodécimale, se rapprochant beaucoup plus de notre manière de compter les mois de l'année, les heures du jour et les degrés de la circonférence. On a fait justement remarquer, à ce sujet, les avantages du nombre 12 comme base du système de numération à cause de ses nombreux facteurs.

Le choix presque unanime du nombre dix comme base de la numération, provient fort probablement de la conformation de la main. De même, la plupart des unités, chez les anciens peuples, dérivent ordinairement des dimensions du corps humain : ainsi, par exemple, le doigt, le pied, le pouce, la coudée, etc.

Il faut également remarquer que nos pères se sont souvent servis de la douzaine pour compter : le sou valait 12 deniers, le gros, 72 (12×6) grains; le carat est la vingt-quatrième partie (12×2) du fin d'une matière précieuse. Bien des peuples, les Anglais par exemple, ont des mesures se rapprochant du système duodécimal.

Le pied se divisait en 12 pouces, le pouce en 12 lignes, la ligne en 12 points. On avait même été, dans ce sens, jusqu'aux unités de troisième ordre; après la douzaine venait la grosse ($12 \times 12 = 144$), mot et mesure qui s'emploient encore journellement dans le commerce, malgré toutes les défenses législatives.

Auguste Comte a remarqué que la structure de la main, composée de quatre doigts à trois phalanges, ou de douze phalanges, permet de représenter avec les deux pouces posés sur deux phalanges, tous les nombres jusqu'à 13 fois 12 ou cent cinquante six; alors les phalanges de la main gauche représentant les unités, celles de la main droite représenteraient les *grosses*.

Ce système, si ingénieux qu'il puisse paraître, n'a pas détrôné la manière ordinaire de compter sur les doigts qui date de Charlemagne, et il n'en reste plus guère aujourd'hui que la comparaison faite par Auguste Comte, des quatre doigts et du pouce de la main, au peloton des quatre hommes et du caporal ([1]).

Cependant Ch. Fourier et son disciple Transon ont fortement préconisé le système duodécimal naturel.

Le nombre treize. — Les Romains tenaient pour malheureux le lendemain des Ides, c'est-à-dire les 15 mars, 15 mai, 15 juillet et 15 octobre et le 13 pour les autres mois. Chez nous, cette superstition s'est accrue de ce fait d'ordre religieux qu'il y avait 13 personnes à table le jour de la Cène et que Jésus fut crucifié quelque temps après.

Bien des personnes ne veulent pas s'asseoir à une table où il y a 13 convives, parce que, dans ce cas, une des personnes présentes doit mourir dans l'année.

Autrefois un cultivateur n'osait même pas aller aux champs un 13. Quand des savants (?) annonçaient la fin du monde, c'était toujours pour un 13. Ainsi, un docteur écossais et un autre docteur

([1]) LUCAS. — *Arithmétique Amusante*. Paris, 1895, p. 161.

allemand avaient prédit qu'un cataclysme épouvantable anéantirait notre pauvre Terre le 13 juin 1857.

Dans les livres cabalistiques le 13 correspondait au mot prince. On ne saurait trop réagir contre ces superstitions. Louis XIII, qui n'était pas superstitieux, était le treizième roi de France de ce nom. Il s'appelait Luys de Bourbon, sa femme Anne d'Autriche; chacun de ces noms avait 13 lettres et, lorsqu'ils furent mariés, les époux avaient chacun 13 ans. Il choisissait volontiers les vendredis et les 13 pour entreprendre quelque chose d'important, et le dernier souci de ce prince à son lit de mort, un jeudi, fut de prier son médecin de faire tout son possible pour le prolonger jusqu'au lendemain afin de mourir un vendredi (1).

13 *est le seul nombre entier qui soit, ainsi que son bicarré, la somme des carrés de deux entiers consécutifs.*

Un nombre N égal à la somme de deux carrés peut être représenté par $a^2 + b^2$, ou, en introduisant les imaginaires

$$N = a^2 + b^2 = (a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1});$$

son bicarré

$$N^4 = (a^2 + b^2)^4 = (a + b\sqrt{-1})^4 (a - b\sqrt{-1})^4,$$

et, d'après l'hypothèse

$$N^4 = A^2 + B^2 = (A + B\sqrt{-1})(A - B\sqrt{-1}).$$

On peut donc poser

$$A + B\sqrt{-1} = (a + b\sqrt{-1})^4,$$
$$A - B\sqrt{-1} = (a - b\sqrt{-1})^4.$$

(1) A. l'Esprit. — *Histoire des Chiffres et des 13 Premiers Nombres*. Paris, 1893, p. 134.

Ces deux dernières équations donnent

$$(1) \qquad A = a^4 - 6a^2b^2 + b^4,$$
$$(2) \qquad B = 4a^3b - 4ab^3.$$

Mais a et b étant deux nombres entiers consécutifs, ces relations deviennent en y remplaçant b par $a + 1$

$$(3) \qquad A = -4a^4 - 8a^3 + 4a + 1,$$
$$(4) \qquad B = -8a^3 - 12a^2 - 4a.$$

Pour que A et B soient, comme a et b deux nombres entiers consécutifs, il suffit qu'on ait $A - B = 1$, ou, en tenant compte des équations (3) et (4)

$$4a^4 - 12a^2 - 8a = 0.$$

Les racines de cette équation sont $a = 0$, $a = 2$, $a = -1$, $a = -1$.

La valeur $a = 2$ convient seule à la question.

Il en résulte

$$b = 3, \quad A = -119, \quad B = -120$$
$$a^2 = 4, \quad b^2 = 9, \quad N = a^2 + b^2 = 13,$$
$$N^4 = A^2 + B^2 = 119^2 + 120^2 = 28561 = 13^4.$$

Le nombre quatorze. — Ce nombre a joué un grand rôle dans l'histoire de Henri IV.

Ce prince est né le 14 décembre 1553, à très-peu près : 14 siècles, plus 14 décades d'années et 14 ans après Jésus-Christ.

La somme des chiffres de l'année de sa naissance donne 14.

Il est mort le 14 mai 1610, et ce millésime est divisible par 14.

Il meurt assassiné à très peu près au bout du quadruple de 14 ans, plus 14 semaines, plus 14 jours.

Son nom était composé de 14 lettres (Henri de Bourbon).

Il a été roi de France et de Navarre 3 fois 14 ans.

Il a été blessé par Châtel 14 jours après le 14 décembre, en l'année 1594. Si on ajoute les chiffres de 1594 et si on retranche du total la somme 1 + 4 = 5 de cette date 14, on retrouve encore le nombre 14.

Entre ce jour (14 décembre 1594) et celui de sa mort, il y a 14 ans, 14 mois et cinq fois 14 jours.

C'est le 14 mars qu'il bat Mayenne à Ivry, dans le pays d'Evreux.

Enfin Ravaillac a été exécuté 14 jours après la mort du roi.

Louis XIV et le successeur de Louis XIII.

C'est le 14e roi de France du nom de Louis.

Son règne commence en 1643, date dont la somme des chiffres donne 14.

C'est à 14 ans qu'il est majeur. Légalement il n'aurait du être majeur qu'en 1652, date dont la somme des chiffres donne encore 14.

Il gouverne lui-même en 1661, date dont la somme des chiffres fait toujours 14.

Il règne pendant 72 ans, et $7 \times 2 = 14$.

Il meurt à 77 ans et $7 + 7 = 14$.

C'est un 14 que meurt son père, Louis XIII.

C'est également un 14 que meurt son aïeul, Henri IV.

Nous arrêterons ici cette étude sur les propriétés attribuées à certains nombres en renvoyant le lecteur à un ouvrage du P. Bungus intitulé : *De numerorum mysteriis* et dans lequel toutes les rêveries, toutes les divagations des anciens sur ce sujet, se trouvent réunies.

On a fait des rapprochements curieux entre les dates de naissances de personnages ayant joué un certain rôle dans l'histoire et les dates d'évènements marquants et on est arrivé à des résultats parfois singuliers.

Si, par exemple, nous prenons l'année 1803, apogée de la période consulaire, dernier terme de la première République, date significative de la rupture du traité d'Amiens qui rejette la France dans dix années de guerres continuelles et ouvre l'ère de la politique toujours militante de l'Empire, on voit que la somme des chiffres composant ce nombre 1803 ajoutée à l'année 1803 elle-même, donne une autre date remarquable :

	1803
	1
	8
	0
	3
Restauration des Bourbons	1815

Le même procédé appliqué à 1815, c'est-à-dire l'addition avec 1815 des chiffres qui constituent ce nombre, donne la date de la

	1815
	5
	1
	8
	1
Révolution de Juillet	1830

En opérant de même sur 1830 on arrive à 1842, date de la *mort du duc d'Orléans*, c'est-à-dire de la catastrophe qui ouvre la série des revers pour la famille d'Orléans.

N'abandonnons pas l'année 1830 sans citer ce fait curieux. A cette époque la chambre des députés, composée de 402 membres, était, comme toujours, divisée en deux partis. Le plus nombreux, qui s'était déclaré pour la révolution de juillet, se composait de 221 membres ; l'autre, d'opinion moins prononcée, n'en comptait que 181. La passion politique s'en mêlant, un anonyme s'avisa de désigner la première catégorie sous le nom de *la queue de Robespierre* et la seconde sous celui-ci : *les honnêtes gens*. Jusque-là rien de remarquable et nous pourrions nous croire en 1907, maisvoici la singularité.

L	12	L	12
A	1	E	5
Q	17	S	19
U	21	H	8
E	5	O	15
U	21	N	14
E	5	N	14
D	4	Ê	5
E	5	T	20
R	18	E	5
O	15	S	19
B	2	G	7
E	5	E	5
S	19	N	14
P	16	S	19
I	9		181
E	5		
R	18		
R	18		
E	5		
	221		

Ecrivons verticalement les deux phrases la queue de Robespierre, les honnêtes gens, en séparant les mots ; mettons en regard de chaque lettre le numéro d'ordre qu'elle occupe dans l'alphabet.

Additionnons maintenant les nombres de chaque colonne, on trouve pour résultats les nombres 221 et 181, c'est-à-dire précisément les nombres des membres de chaque parti.

Revenons à la date 1830.

Ajoutons à cette date, la somme des chiffres composant la date de la révolution de février 1848, le total donne précisément une autre date historique celle du coup d'état.

1830
1
8
4
8
―――
1851

1830
1
7
7
3
―――
1848

Louis Philippe I[er] devient roi de France en 1830.

Ajoutons encore à cette date la somme des chiffres de l'année de sa naissance 1773.

On trouve 1848, date de sa déchéance.

Il y a ici double coïncidence, car faisons le même calcul pour sa femme, Marie-Amélie de Bourbon née en 1782 et mariée en 1809

1	1
7	8
8	0
2	9
1830	1830
1848	1848

Avec Napoléon III nous arrivons à des résultats identiques :

Napoléon est né en 1808	1
	8
	0
	8
Année de son mariage avec Eugénie de Montijo	1853
Date de la déchéance	1870

Date de la naissance d'Eugénie de Montijo 1826	1	mariée en 1853 1
	8	8
	2	5
	6	3
Date de son mariage avec Napoléon	1853	1853
	1870	1870

La date du 2 décembre 1852, date à laquelle Napoléon fut nommé Empereur des Français, était elle-même fatale.

On a en effet :

$$1852 + 1 + 8 + 5 + 2 + \text{la date du jour (2 décembre)} = 1870.$$

L'Empire a vécu 17 ans et 9 mois, il lui était impossible d'atteindre une durée de 18 années complètes.

En effet, Napoléon est né en 1808, et $1 + 8 + 0 + 8 = 17$.

Eugénie de Montijo est née en 1826 et $1 + 8 + 2 + 6 = 17$.

Ils se sont mariés en 1853 et, on a encore $1 + 8 + 5 + 3 = 17$.

Le nombre géométrique de Platon. — Le VIII^e livre de la *République* de Platon contient, vers le commencement, un passage célèbre par son obscurité, devenue proverbiale depuis dix-huit siècles.

Il est question d'un nombre satisfaisant à certaines conditions géométriques. La tradition sur ce passage étant perdue, un problème intéressant à résoudre consiste à retrouver le nombre et à interpréter les conditions mathématiques auxquelles il satisfait.

Ce nombre mystérieux, sur lequel les traducteurs et les commentateurs sont loin d'être d'accord, paraît lié à l'égalité

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3,$$

analogue à celle dite de Pythagore

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Il s'agirait d'une période réglant les mariages et les naissances (d'où le nom de nombre nuptial ou de la grande année) au bout de laquelle le soleil, la lune et les planètes reprennent les mêmes positions relatives dans le ciel.

Voici quelques-unes des valeurs proposées :

50, somme des carrés des nombres 3, 4, 5 (Philon le Juif, d'après Jean Bodin).

1728, cube de 12 (Maffei, surnommé Volterranus, et Faber Stapulensis d'après Barocius).

$8128 = 2^6 (2^{7-1})$, le 4e des nombres parfaits (Jérôme Cardan).

216 (Schneider, philologue allemand).

$5040 = 12^2 \times 35 = (3 + 4 + 5)^2 \times (2^3 + 3^3)$ (Fries, philologue allemand).

$864 = (3 + 4 + 5)\ 72 =$ le périmètre d'un triangle rectangle dont les côtés sont 3×72, 4×72 et 5×72 (Vincent; Martin Théodore-Henri.

7500 (E. Zeller; J. Hunziker et Rothlauf).

2700 (Paul Tannery).

$21600 = 6^3 \times 10^2$ (J. Dupuis).

$760000 = 19 \times 40 \times 1000$ (J. Dupuis).

Nous renvoyons le lecteur aux mémoires de J. Dupuis sur le nombre géométrique de Platon. Paris, 1881 et 1882.

Simplifications et abréviations dans les calouls. — Simplifier, abréger les calculs, c'est à la fois économiser du temps et diminuer les chances d'erreur, deux avantages précieux que ne perdent jamais de vue les personnes qui ont l'habitude de manier les chiffres.

On ne saurait trop simplifier la pratique du calcul, on doit de bonne heure s'en faire une loi rigoureuse, on s'y rompt facilement et une fois le pli pris, on ne calcule plus sans abréviations.

Additions et soustractions simultanées. — Soit à retrancher de 25432, la somme des trois nombres 5836, 8347 et 3921.

$$\begin{array}{r} 5836 \\ 8347 \\ 3921 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline 25432 \end{array}$$

On dispose l'opération comme il est indiqué ci-contre, ensuite, faisant l'addition on écrit successivement dans l'intervalle laissé en blanc les chiffres 8, 2, 3 et 7 nécessaires pour compléter le nombre 25432 qui se trouve sous le trait horizontal. L'ensemble de ces chiffres donne le nombre 7328 qui est la différence cherchée.

Supposons, en second lieu, que de la somme des nombres écrits en A, on veuille soustraire la somme des nombres écrits en B.

$$\begin{array}{rl} 56243 & \\ 84564 & \\ 3252 & (A) \\ 26848 & \\ \hline 2942 & \\ 3654 & (B) \\ 2308 & \\ \hline 162003 & \end{array}$$

On ajoutera d'abord les chiffres de la première colonne de droite du tableau (B) en disant : 8 et 4, 12 et 2, 14 que l'on retranchera de la dizaine supérieure 20. Le reste 6 sera ajouté à la somme des chiffres de la 1re colonne de droite du tableau (A) en disant : 6 et 8, 14, et 2, 16, et 4, 20, et 3, 23. On écrira 3 au bas de la colonne, et comme il y a ici 2 dizaines, de même que dans le courant de la première opération sur les nombres (B), on ne retiendra rien.

Passons à la seconde colonne, on dira : 0 et 5, 5, et 4, 9, 9 de 10 (dizaine immédiatement supérieure) reste 1; 1 et 4, 5, et 5, 10, et 6, 16, et 4, 20; 20 de 20 reste 0, que j'écris sous la 2e colonne; et comme cette fois il y a 2 dizaines tandis qu'on n'en avait qu'une en (B), on retient 1 qu'on ôtera de la colonne suivante en (B). On aurait, au contraire, ajouté cette différence, si le nombre des dizaines trouvé en (A) eût été inférieur à celui trouvé en (B).

On continuera donc en disant : 2 (et non 3) et 6, 8, et 9, 17, de 20 reste 3; 3 et 8, 11, et 2, 13, et 5, 18, et 2, 20, je pose 0 et ne retiens rien, etc. Quand la différence ne pourra être ôtée dans le tableau (B), on l'ajoutera en (A) et on continuera l'opération.

La démonstration de ce procédé ingénieux est, pour ainsi dire, résumée dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{rrrrl} & 17 & & 14 & = 20 - 6 \\ & 19 & & 09 & = 10 - 1 \\ (A') & 17 & (B') & 18 & = 20 - 2 \\ & 19 & & 7 & = 10 - 3 \\ & 15 & & & \\ \hline & 170907 & - & 8904 & = 162003 \end{array}$$

La somme des nombres (A) et (B) peut se faire comme nous l'indiquons en (A′) et (B′).

Cela posé, retrancher la somme (B′) de la somme (A′) revient évidemment à retrancher 14 unités de 17 unités, puis 9 dizaines de 19 dizaines, 18 centaines de 17 centaines, etc.

Or $14 = 20 - 6$, par conséquent ôter 14 de 17, revient à ajouter 6 à 17, ce qui donne 23, puis à retrancher 20 du résultat et il reste 3 unités. De même, ôter 9 dizaines de 19 dizaines, revient à ajouter 1 à 19, ce qui donne 20, et à enlever 10 de ce nombre; il reste 10 dizaines, j'écris donc 0 dizaine et je retiens 1 centaine.

En passant à la colonne suivante, nous pouvons opérer de deux manières, ou ajouter la centaine de retenue à la 3e colonne de (A'), ou la retrancher de la même colonne de (B'), c'est cette seconde manière d'opérer que nous avons adoptée. Nous disons donc 18 centaines moins 1 centaine $= 17 = 20 - 3$.

$17 + 3 = 20$, et $20 - 20 = 0$; nous écrivons 0 sous la colonne des centaines.

A la colonne des mille, $19 - 7 = 19 - (10 - 3) = 19 + 3 - 10 = 22 - 10 = 12$. J'écris 2 et je retiens 1.

Comme je ne peux retrancher cette dizaine de mille des unités correspondantes de (B'), je l'ajoute aux 15 de (A'), ce qui me donne 16 que j'écris.

Quelques procédés d'abréviation dans la multiplication. — Pour multiplier un nombre de deux chiffres par un nombre d'un seul, il est avantageux de commencer par le chiffre des dizaines.

Les décompositions suivantes expliquent le mode d'opérer.

$$57 \times 6 = (50 + 7) \times 6 = 300 + 42 = 342$$
$$29 \times 5 = (20 + 9) \times 5 = 100 + 45 = 145.$$

— Multiplication par 5, par 25 (5^2), par 125 (5^3) etc.

Au lieu de multiplier par 5, on écrit un zéro à la droite du multiplicande et on divise par 2 le nombre ainsi formé

$$328 \times 5 = 328 \times \frac{10}{2} = \frac{3280}{2} = 1640.$$

Au lieu de multiplier par 25 (5^2), on écrit deux zéros à la droite du multiplicande et on divise par 4 le nombre ainsi formé

$$25 = \frac{100}{4}.$$

Au lieu de multiplier par 125 (5^3), on écrit trois zéros à la droite du multiplicande et on divise par 8 le nombre ainsi formé

$$125 = \frac{1\,000}{8}.$$

— Multiplication par un nombre dont le chiffre des unités est 5. Il est quelquefois avantageux de multiplier par le double du multiplicateur en prenant la moitié du multiplicande ou la moitié du produit obtenu.

$$76 \times 15 = \quad 38 \times 30 = 1\,140$$
$$89 \times 35 = \frac{1}{2}\,89 \times 70 = \frac{1}{2}\,6\,230 = 3\,115.$$

— Multiplication de deux nombres contenant chacun deux chiffres et commençant tous les deux par l'unité.

On ajoute au multiplicande les unités du multiplicateur, on place un zéro à la droite du résultat et on ajoute au nombre ainsi formé le produit des chiffres des unités.

$$\begin{aligned} 18 \times 13 &= 18\,(10 + 3) = 180 + 18 \times 3 = 180 + (10 + 8) \times 3 \\ &= 180 + 30 + 8 \times 3 = (18 + 3) \times 10 + 8 \times 3 \\ &= 210 + 24 = 234. \end{aligned}$$
$$19 \times 17 = (19 + 7) \times 10 + 63 = 260 + 63 = 323.$$

— Multiplication en réunissant les produits partiels exprimant des unités de même ordre.

La méthode se comprend facilement avec quelques exemples :

Soit à multiplier 47 par 23; le produit de 7 par 3 donne 21 ce

$$\begin{array}{r} 47 \\ 23 \\ \hline 1081 \end{array}$$

qui fait 1 unité, que l'on pose, et il reste 2 dizaines de retenue; les dizaines du produit proviennent encore du produit 12 de 4 dizaines par 3 unités et du produit 14 de 2 dizaines par 7 unités; en tout $2 + 12 + 14 = 28$ dizaines; on pose 8 et l'on retient 2 centaines que l'on ajoute au produit 8 centaines de 4 dizaines par 2 dizaines; le produit cherché est donc 1081.

On fait de même la multiplication de deux nombres de trois chiffres. — Soit, par exemple, 632 à multiplier par 218.

$$\begin{array}{r} 632 \\ 218 \\ \hline 137\,776 \end{array}$$

Les opérations successives peuvent s'énoncer ainsi :

unités : $2 \times 8 = 16$, je pose 6 et je retiens 1 ;

dizaines : $1 + 3 \times 8 + 2 \times 1 = 27$, je pose 7 et je retiens 2 ;

centaines : $2 + 6 \times 8 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 57$, je pose 7 et je retiens 5 ;

mille : $5 + 3 \times 2 + 6 \times 1 = 17$, je pose 7 et je retiens 1 ;

dizaines de mille : $1 + 6 \times 2 = 13$ que je pose.

Le cas de deux nombres de quatre chiffres se traite de la même manière. Soit à multiplier 3235 par 2653.

$$\begin{array}{r} 3235 \\ 2653 \\ \hline 8582\,455 \end{array}$$

unités : $5 \times 3 = 15$, je pose 5 et retiens 1.

dizaines : $1 + 3 \times 3 + 5 \times 5 = 35$, je pose 5 et je retiens 3.

centaines : $3 + 2 \times 3 + 6 \times 5 + 3 \times 5 = 54$, je pose 4 et je retiens 5.

mille : $5 + 3 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + 2 \times 5 = 52$, je pose 2 et retiens 5.

dizaines de mille : $5 + 3 \times 5 + 2 \times 3 + 2 \times 6 = 38$, je pose 8 et retiens 3.

centaines de mille : $3 + 2 \times 2 + 3 \times 6 = 25$, je pose 5 et retiens 2.

millions : $2 + 3 \times 2 = 8$ que j'écris.

Le produit est donc 8582455.

Et ainsi de suite. Lorsque les deux nombres n'ont pas la même quantité de chiffres, on complète le plus petit par des zéros.

Avec un peu d'exercice, on arrive à opérer très rapidement en employant cette méthode.

Nous avons déjà fait connaître des méthodes de multiplications abrégées par les facteurs

$$11,\ 111,\ 1111,\ \ldots,\ \text{etc.}$$

et par les facteurs

$$9,\ 99,\ 999,\ \ldots,\ \text{etc.}\ 8,\ 98,\ 998,\ \ldots,\ \text{etc.}$$

Quand le multiplicateur contient le chiffre 1, on peut utiliser le multiplicande comme produit partiel.

Exemples :

```
 4628  × 713          9627 × 31
 13884               28881
32396                ------
-------              298437
3299764
```

Il résulte de là que les produits par 12, 13, 14, ..., 19 peuvent s'écrire sans passer par les produits partiels.

Quand le multiplicateur est décomposable en parties multiples ou sous-multiples les unes des autres, le produit peut être formé de produits partiels semblablement multiples, ou sous-multiples, les uns des autres.

```
multiplication ordinaire          multiplication abrégée

          59846327                                 59846327
          21748546                                 21748546
  ----------------                         ----------------
         359077962       6 . . . . .              359077962
        239385308        54 = 6 × 9 .           3231701658
       299231635         48 = 6 × 8 .         2872623696
      478770616          7 . . . . .         418924289
     239385308           21 = 7 × 3 .     1256772867
    418924289                             ----------------
   59846327                               1301570595690542.
  119692654
  ----------------
  1301570595690542
```

Le deuxième produit partiel vaut 9 fois le premier;
le troisième » vaut 8 fois le premier;
le cinquième » vaut 3 fois le quatrième.

— Multiplication de deux nombres de deux chiffres ayant le même chiffre des dizaines.

Proposons-nous, par exemple, de multiplier 37 par 34.

On multiplie le nombre des dizaines du multiplicande par le multiplicateur augmenté du chiffre des unités du multiplicande, et on ajoute au produit ainsi obtenu, le produit des chiffres des unités.

$$37 \times 34 = 30 \times 41 + 7 \times 4 = 1230 + 28 = 1258.$$

De même

$$42 \times 49 = 40 \times 51 + 18 = 9058,$$
$$56 \times 52 = 50 \times 58 + 12 = 2912,$$
$$67 \times 68 = 60 \times 75 + 56 = 4556.$$

Ce procédé est une application immédiate de la formule

$$(a + b)(a + c) = a(a + b + c) + bc.$$

— Multiplication de deux nombres de deux chiffres lorsque les deux chiffres de l'un des facteurs sont identiques.

Soit, par exemple, à multiplier 48 par 33.

On ajoute à 48 le chiffre de ses dizaines, 4, ce qui donne 52.

On multiplie 52 par 30 et on ajoute au produit, le produit des chiffres des unités 8×3.

Ainsi

$$48 \times 33 = 52 \times 30 + 24 = 1584.$$

De même

$$63 \times 44 = 69 \times 40 + 12 = 2772,$$
$$96 \times 22 = 105 \times 20 + 12 = 2112.$$

Ce procédé est une application de la formule

$$(10 \,.\, a + b)\, 11 \,.\, c = (11 \,.\, a + b)\, 10 \,.\, c + bc.$$

— On obtient le carré d'un nombre de deux chiffres terminé par 5, en écrivant le nombre 25 à la suite du produit de son premier chiffre par le chiffre suivant.

Exemple :

$$75^2 = 7 \times 8 \times 100 + 25 = 5625.$$

La démonstration est intuitive :

$$(a5)^2 = (a \times 10 + 5)^2 = a^2 \times 100 + a \times 10 \times 5 \times 2 + 25$$
$$= a(a+1) \times 100 + 25.$$

On obtient le carré d'un nombre de deux chiffres dont le chiffre des dizaines est 5, en écrivant le carré du chiffre des unités à la suite de la somme obtenue en ajoutant à 25 le chiffre des unités.

Exemple :

$$53^2 = (25 + 3) \times 100 + 9 = 2809.$$
$$(5a)^2 = (5 \times 10 + a)^2 = 25 \times 100 + a \times 100 + a^2$$
$$= (25 + a) \times 100 + a^2.$$

Procédé de multiplication russe (1). — Les paysans russes, quand ils doivent effectuer une multiplication, procèdent ordinairement de cette manière; si, par exemple, il leur faut multiplier 35 par 42, ils divisent le multiplicande par 2, et en même temps doublent le multiplicateur, et si le multiplicande est impair, ils marquent le multiplicateur par un signe.

Si, par exemple, ils multiplient 35 par 42, ils écrivent comme suit les nombres à côté l'un et l'autre

35	42 +
17	84 +
8	168
4	336
2	672
1	1344 +

(1) *Journal de Mathématiques Elémentaires*. 1896. p. 22, 23 et 37.

Additionnant les nombres marqués du signe + on trouve le produit cherché 1470.

L'explication est simple : le produit ne change pas quand divisant le multiplicande par 2, on multiplie en même temps le multiplicateur par 2. Quand le multiplicande est pair, le produit n'a donc pas changé, tandis que si l'on a un multiplicande impair, dans le multiplicande suivant on néglige $\frac{1}{2}$, ce qui revient à négliger le multiplicateur précédent.

Ainsi

$$35 \times 42 = 17\frac{1}{2} \times 84 = 17 \times 84 + 42 = 8\frac{1}{2} \times 84 \times 2 + 42$$
$$= 8\frac{1}{2} \times 168 + 42 = 8 \times 168 + 84 + 42$$
$$= 4 \times 336 + 84 + 42 = 2 \times 672 + 84 + 42$$
$$= 1 \times 1344 + 84 + 42 = 1470.$$

Quelques procédés de divisions abrégées. — Nous avons déjà fait connaître des procédés de division par 9,99,999 ; .., et par 98,996, ... etc.

Division par 5. — On multiplie le dividende par 2 et on sépare un chiffre sur la droite.

La moitié du chiffre ainsi séparé représente le reste de la division ; la partie à gauche de la virgule est le quotient.

Division par $25 = 5^2$. — On multiplie le dividende par 4 (2^2) et on sépare deux chiffres sur la droite.

Le quart du nombre formé par les deux chiffres séparés donne le reste de la division, dont le quotient est représenté par la partie à gauche de la virgule.

Division par $125 = 5^3$. — On multiplie par 8 (2^3) et on sépare trois chiffres sur la droite.

Le 8e du nombre formé par les 3 chiffres séparés représente le reste, le quotient est donné par la partie à gauche de la virgule.

Division par un nombre terminé par 5. On double le dividende et le diviseur. On effectue la division, le quotient trouvé est le quotient cherché, mais le reste doit être divisé par 2.

Ainsi :

$$738 : 15 = 1\,476 : 30.$$

Le quotient est 49 et le reste $\frac{6}{2} = 3$.

Remarques sur les diviseurs 9, 19, 29, 39, ..., 99, 109, 119, ... **etc.** — Si l'on divise l'unité par 9 et par une suite de nombres se terminant par 9, on aperçoit entre les différentes fractions décimales consécutives une suite de relations dont la loi est évidente et d'où il ressort un procédé de division rapide.

En effet :

$$\frac{1}{9} = 0,11111\ ...$$

$$\frac{1}{19} = 0,052631578947368421\ ...$$

Le chiffre 5 une fois posé, on le divise par 2, ce qui donne 2 avec reste 1, on divise 12 par 2, ce qui donne 6, on divise 6 par 2, ce qui donne 3, on divise 3 par 2, ce qui donne 1 avec reste 1, on divise 11 par 2, ce qui donne 5, avec 1 pour reste, on divise 15 par 2, ce qui donne 7 avec 1 pour reste, on divise 17 par 2, ce qui donne 8 avec 1 pour reste, etc., etc.

$$\frac{1}{29} = 0,0344827586 2\ ...$$

Le chiffre 3 une fois posé, le reste étant 13, on dit, le tiers de 13 est 4 avec 1 pour reste, le tiers de 14 est 4 avec 2 pour reste, le tiers de 24 est 8, le tiers de 8 est 2 avec 2 pour reste, le tiers de 22 est 7 avec 1 pour reste, le tiers de 17 est 5 avec 2 pour reste, le tiers de 25 est 8 avec 1 pour reste, etc., etc.

$$\frac{1}{39} = 0,0256410256\ ...$$

Le chiffre 2 une fois posé, le reste étant 22, on dit : le quart de 22 est 5 avec 2 pour reste, le quart de 25 est 6 avec 1 pour reste, le quart de 16 est 4, le quart de 4 est 1, le quart de 1 est 0, le quart de 10 est 2 avec 2 pour reste, etc., etc.

$$\frac{1}{49} = 0{,}0204081632653061224489795\ \ldots$$

. . . .

$$\frac{1}{99} = 0{,}01111111\ \ldots$$

$$\frac{1}{109} = 0{,}0091743\ \ldots$$

$$\frac{1}{119} = 0{,}008403\ \ldots$$

. . . .

$$\frac{1}{199} = 0{,}00502512562814070351758793969\ \ldots$$

$$\frac{1}{209} = 0{,}00477$$

. . . . . .

$$\frac{1}{999} = 0.00111111\ \ldots$$

Dans le cas de $\frac{1}{9}$, chaque nombre décimal exprime le $\frac{1}{1}$ du nombre marqué par le chiffre antérieur : dans le cas de $\frac{1}{19}$, le $\frac{1}{2}$ du nombre marqué par le chiffre antérieur ; dans le cas de $\frac{1}{29}$, le $\frac{1}{3}$ du nombre marqué par le chiffre antérieur ; dans le cas de $\frac{1}{39}$, le $\frac{1}{4}$, etc. ; dans le cas de $\frac{1}{99}$, le $\frac{1}{10}$ du chiffre antérieur ; dans le cas de $\frac{1}{109}$, le $\frac{1}{11}$; dans le cas de $\frac{1}{119}$; le $\frac{1}{12}$, etc. ; dans le cas de $\frac{1}{199}$; le $\frac{1}{20}$; dans le cas de $\frac{1}{209}$, le $\frac{1}{21}$; etc. ; dans le cas de $\frac{1}{999}$, le $\frac{1}{100}$ du chiffre précédent ; etc., etc.

Lorsque la fraction exprimant le rapport des deux nombres décimaux consécutifs du quotient a pour dénominateur un multiple de 10, comme dans le cas de $\frac{1}{199}$ la fraction $\frac{1}{20}$, dans le cas de $\frac{1}{299}$ la fraction $\frac{1}{30}$, dans le cas de $\frac{1}{1999}$ la fraction $\frac{1}{200}$, il suffit évidemment de diviser par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... des tranches de 2, 3, ... chiffres.

Lorsque le dividende est plus grand que le diviseur, il est clair qu'il faut calculer d'abord la partie entière du quotient et le premier chiffre décimal, puis appliquer à ce premier nombre la fraction convenable.

Nous ajouterons ici une petite récréation, que nous empruntons au remarquable ouvrage de M. Laisant, l'*Initiation mathématique*. Si on demande quel est le plus grand nombre qu'on peut écrire en employant 3 fois le chiffre 1 et 3 fois le chiffre 0, au premier abord on serait tenté de dire que c'est le nombre 111000, ce n'est pas tout à fait exact. Le plus grand nombre que l'on peut écrire avec les chiffres 1 et 0 employés chacun 3 fois est l'unité suivi de dix milliards de zéros. C'est le nombre $10^{10^{10}}$.

Le nombre 10^{10} est égal à dix milliards. De même le plus grand nombre que l'on peut former avec le chiffre 9 pris 3 fois n'est pas 999, mais 9^{9^9}.

PREMIÈRE PARTIE

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

> « Les hommes ne sont jamais plus ingénieux que dans l'invention des jeux ; l'esprit s'y trouve à son aise... Après les jeux qui dépendent uniquement des nombres viennent les jeux où entre la situation... Après les jeux où n'entrent que le nombre et la situation viendraient les jeux où entre le mouvement... Enfin il serait à souhaiter qu'on eût un cours entier des jeux, traités mathématiquement. »
>
> (LEIBNITZ : *lettre à de Montmort*, 29 juillet 1715).

CHAPITRE II

QUELQUES QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE

On a souvent remarqué l'intérêt excité par la recherche des relations qui existent entre les nombres d'une certaine forme. La plupart des ouvrages sur les Récréations mathématiques contiennent bien des questions dont les solutions évidentes pour ceux qui ont quelques notions d'algèbre présentent cependant, à beaucoup de personnes, un attrait, un plaisir, analogue à celui qu'éprouve un mathématicien en découvrant une proposition d'arithmétique supérieure. Nous consacrons le présent chapitre à ces problèmes élémentaires que nous ferons suivre de quelques remarques sur une ou deux questions relatives à la théorie des nombres.

Avant d'entrer dans le cœur du sujet nous ajouterons que la plupart des questions élémentaires mentionnées ici et dans les deux chapitres suivants sont empruntées à une ou deux sources. La première est un ouvrage devenu classique, les *Problèmes plaisants et délectables*, par C. G. Bachet, sieur de Méziriac, ouvrage dont la première édition parut en 1612 et la seconde en 1624 : nos références s'appliquent à l'édition de 1624. Plusieurs des problèmes traités par Bachet sont puisés dans les écrits de Alcuin, Pacioli di Burgo, Tartaglia, ou Cardan, il est même possible que quelques-uns d'entre eux aient une origine orientale, mais nous n'avons fait aucune recherche pour vérifier cette assertion. La seconde source à laquelle il est fait allusion plus haut est un ouvrage d'Ozanam : *Les Récréations mathématiques et physiques*. La majeure partie de l'édition originale publiée en deux volumes à Paris, en 1694, est une compilation des ouvrages de Bachet, Leurechon, Mydorge, Van Etten et Oughtred ; cette partie est excellente, mais on n'en peut pas dire autant des additions dues à Ozanam. La *Biographie universelle* mentionne des éditions subséquentes parues en 1720, 1735, 1741, 1778 et 1790 ; l'édition de 1778 a été publiée à Paris chez Ant. Joubert, elle comporte quatre volumes. En 1696, une édition fut publiée à Amsterdam ; en 1723, six ans après la mort d'Ozanam, une nouvelle édition parut en trois volumes avec un quatrième volume supplémentaire contenant (entre autres choses) un appendice sur les jeux. Des éditions nouvelles furent publiées en 1741 et 1750 (le second volume de cette dernière porte la date de 1749), 1770 et 1790. On prétend que l'édition de 1750 a été corrigée par Montucla sous la condition que son nom ne serait pas mis en évidence, mais l'édition de 1790 est la plus récente dans laquelle il est fait mention de ces corrections et encore l'éditeur ne désigne l'auteur que par

M***. Montucla rectifia à peu près tout ce que les anciennes éditions renfermaient d'incorrect et ajouta plusieurs notes historiques, malheureusement il se fit un scrupule de retrancher la description d'un certain nombre d'expériences par trop communes et de banalités qui déparent l'ouvrage. Une traduction anglaise de l'édition originale parut en 1708 et parvint, croyons-nous, à quatre éditions dont la dernière fut publiée à Dublin en 1790. L'édition de 1790, expurgée par Montucla, fut traduite par C. Hutton et cette traduction donna naissance aux éditions de 1803 et 1814 et à celle de 1840 (en un seul volume). Les références de cet ouvrage s'appliquent aux éditions de 1803 et 1840.

Nous allons maintenant examiner quelques questions élémentaires sur les nombres qui, depuis près de trois siècles, constituent le fonds de tous les ouvrages sur les récréations ou amusements mathématiques. Nous en parlons ici, non à cause de l'intérêt qu'elles présentent au point de vue arithmétique, mais uniquement à cause de leur intérêt historique. Aux lecteurs qui, dès les premières lignes, n'y trouveraient pas l'attrait espéré, nous conseillons de passer de suite à la dernière partie de ce chapitre.

Ces questions sont, à proprement parler, des tours ou des amusettes et nous les présentons sous cette forme ; nous pouvons encore ajouter que plusieurs d'entre elles sont insignifiantes et ne devraient pas être proposées, même comme tours, à moins de bien dissimuler la façon d'opérer. Mais comme notre intention n'est pas de faire deviner des énigmes, nous nous abstenons de faire allusion aux divers moyens de déguiser les opérations à effectuer en nous contentant d'une simple énumération des calculs nécessaires pour arriver au résultat. Terminons en rappelant cette règle fondamentale qu'aucun tour, si agréable et si joli qu'il soit, ne souffre une répétition immédiate et que lorsqu'on se propose de le refaire, il est indispensable d'obtenir le résultat en suivant une autre méthode.

DEVINER UN NOMBRE PENSÉ

Un nombre pensé par une personne peut se déterminer de bien des façons différentes quand on connaît le résultat d'une suite d'opérations effectuées sur ce nombre. Nous nous bornerons à présenter ici quelques méthodes pouvant être considérées comme types. Les personnes familiarisées avec l'algèbre n'éprouveront aucune difficulté pour modifier les règles données ou pour en imaginer d'autres analogues.

Première méthode (¹). — 1° Dites à la personne qui a pensé un nombre de le tripler ;

2° Le produit obtenu est pair ou impair ; s'il est pair, faites-en prendre la moitié ; s'il est impair, commencez par faire ajouter 1 avant de prendre la moitié ;

3° Le résultat de l'opération doit être multiplié par 3 ;

4° Du produit obtenu faites retrancher 9 autant de fois que posssible et demandez combien de fois la soustraction a pu se faire : supposons que ce soit n fois ; (cela revient à faire diviser par 9 et à demander le quotient).

5° Vous pouvez alors affirmer que le nombre pensé est $2n$ ou $2n + 1$ suivant que le résultat de la première opération est pair ou impair.

La démonstration est évidente.

Tout nombre pair étant de la forme $2n$, la suite des opérations effectuées sur un pareil nombre nous donne successivement les résultats suivants :

1° $6n$; 2° $\frac{1}{2}\, 6n = 3n$; 3° $3n \times 3 = 9n$; 4° $\frac{9n}{9} = n$

(¹) Bachet. — *Problèmes plaisants*, Lyon, 1624. *Problème* I, p. 53.

6° D'où le nombre pensé $2n$.

Considérons, en second lieu, un nombre impair dont la forme générale est $2n + 1$, la suite des opérations nous donne encore :

1° $(2n + 1) \times 3 = 6n + 3$ nombre impair;

2° $\frac{1}{2}(6n + 3 + 1) = 3n + 2$; 3° $(3n + 2) \times 3 = 9n + 6$;

4° Ce nombre divisé par 9 donne pour quotient n et pour reste 6 :

5° Le nombre cherché est donc bien $2n + 1$.

Seconde méthode [1]. — On invite la personne qui a pensé un nombre à effectuer la série des opérations suivantes :

1° Multipliez le nombre pensé par 5.

2° Ajoutez 6 au produit;

3° Multipliez la somme obtenue par 4;

4° Ajoutez 9 au nouveau produit;

5° Enfin multipliez par 5 la dernière somme obtenue.

On se fait alors donner le résultat de cette série d'opérations, on en retranche mentalement 165, et en divisant par 100 ce qui reste, on obtient le nombre pensé.

Soit, en effet, n ce nombre; les opérations effectuées successivement nous donnent :

1° $5n$;

2° $5n + 6$;

3° $(5n + 6) \times 4 = 20n + 24$;

4° $20n + 24 + 9 = 20.n + 33$;

5° $(20.n + 33) \times 5 = 100n + 165$.

Ce dernier résultat justifie la règle.

Troisième méthode [2]. — Comme précédemment, la personne qui a pensé un nombre est invitée à effectuer cette suite d'opérations :

[1] Bachet donne une règle semblable. *Problème* IV, p. 74.

[2] Bachet. — *Problème* V, p. 80.

1° Multipliez le nombre pensé par un nombre quelconque, mais connu, a ;

2° Divisez le produit par un second nombre connu, b ;

3° Multipliez le quotient par un troisième nombre, c ;

4° Divisez le nouveau résultat par un quatrième nombre, d ;

5° Faites encore diviser ce dernier résultat par le nombre pensé ;

6° Au quotient, faites ajouter le nombre pensé et demandez le résultat final ;

7° En en retranchant le nombre $\frac{a.c}{b.d}$, le reste obtenu est le nombre cherché.

Car, désignons par n ce nombre inconnu, le résultat des quatre premières opérations est de la forme $n \times \frac{a.c}{b.d}$;
l'opération (5°) nous donne $\frac{a.c}{b.d}$.
et l'opération (6°) $n + \frac{a.c}{b.d}$.

Retranchant alors de ce résultat $\frac{a.c}{b.d}$, on obtient bien le nombre pensé n.

On donne aux lettres a, b, c, d, des valeurs numériques quelconques ; par exemple pour $a = 12$, $b = 4$, $c = 7$, et $d = 3$, on a :

$$\frac{a.c}{b.d} = \frac{12 \times 7}{4 \times 3} = 7,$$

et il suffit de retrancher 7 du résultat obtenu après la sixième opération.

Quatrième méthode [1]. — On demande à une personne de penser un nombre plus petit que 90, puis :

[1] *Educational Times*, 1er mai 1895, vol. XLVIII, p. 234.

1° Faites-le multiplier par 10 et faites ajouter au produit un nombre quelconque mais connu, a, choisi plus petit que 10 ;

2° La somme obtenue est divisée par 3 et on prend note du reste de l'opération, soit b ce reste ;

3° Le quotient précédent est multiplié par 10 et on fait ajouter au produit un nombre arbitraire mais connu, c, plus petit que 10 ;

4° Faites diviser le résultat par 3 et prenez encore note du reste de l'opération ; soit d ce reste ;

Soit également e le troisième chiffre, à partir de la droite, du quotient de la division.

Connaissant a, b, c, d et e, le nombre pensé se détermine sans difficulté.

Ce nombre est, en effet, de la forme $9x + y$ et, par hypothèse, on a :

$$x \leqslant 9 \quad \text{avec} \quad y \leqslant 8.$$

Si r est le reste obtenu en divisant par 9 l'expression

$$a - b + 3(c - d), \text{ on a : } x = e \quad \text{et} \quad y = 9 - r.$$

La démonstration peut se présenter comme il suit :

Le nombre pensé étant $9x + y$, la première opération nous donne :

$$(9.x + y) \times 10 + a, \quad \text{ou} \quad 90.x + 10y + a,$$

ou encore

$$90.x + 9.y + y + a,$$

et ce dernier nombre est de la forme $\text{mult. } 9 + (y + a)$.

Le reste de la division par 3 sera, par suite, le même que celui de la division de $y + a$ par 3 et nous pouvons poser

$$y + a = 3p + b, \ (b \text{ étant plus petit que } 3),$$

d'où

$$(9.x + y) \times 10 + a = 90.x + 9.y + 3p + b.$$

La division par 3 nous donne pour quotient $30.x + 3y + p$ et, pour reste, b.

On fait ensuite multiplier ce quotient par 10 et ajouter au produit c, plus petit que 10, ce qui nous fournit l'expression :

$$300x + 30y + 10.p + c,$$

que nous pouvons mettre sous la forme $300x + 30y + 9.p + p + c$.

Le reste de la division par 3 de ce nouveau nombre sera encore le même que celui de la division de $p + c$ par 3 et, si nous posons $p + c = 3.q + d$, on obtient pour quotient, en effectuant l'opération, $100x + 10y + 3p + q$ et pour reste d.

Cela posé, de $y \leqslant 8$ et $a \leqslant 9$, on déduit $y + a \leqslant 17$, il en résulte $p \leqslant 5$;
de $p \leqslant 5$, avec $c \leqslant 9$, on déduit : $p + c \leqslant 14$ et $q \leqslant 4$.

On a donc

$$10y + 3p + q \leqslant 80 + 15 + 4,$$

ou

$$10y + 3p + q \leqslant 99;$$

c'est-à-dire que le quotient $100x + 10y + 3p + q$ n'a que trois chiffres; son troisième chiffre, à partir de la droite, est donc bien x

$$e = x.$$

En second lieu, les relations $y + a = 3p + b$, $p + c = 3q + b$ nous donnent

$$3p + 3c + y + a = 9.q + 3.d + 3p + b,$$

d'où

$$a - b + 3(c - d) + y = \text{mult. } 9.$$

Or, y étant plus petit que 9, le reste r de la division par 9 de l'expression $a - b + 3(c - d)$ est le complément à 9 du nombre y

$$y + r = 9 \quad \text{d'où} \quad y = 9 - r.$$

(En raisonnant ainsi on suppose $a - b + 3(c - d) > 0$, si cette expression était négative, on voit de suite que $y = r$; on peut d'ailleurs assigner à a et c des valeurs convenables pour éviter que ce cas se présente).

En résumé, notre méthode nous permet de déterminer x et y et, par suite, de former le nombre pensé $9x + y$.

Cinquième méthode [1]. — Demandez à quelqu'un de penser un nombre plus petit que 60; puis :

1° Faites-le diviser par 3, et prenez note du reste de l'opération, soit a ce reste;

2° Faites diviser le même nombre pensé par 4 et prenez note du reste de l'opération, désignons-le par b;

3° Faites encore diviser le nombre pensé par 5 et notez le reste de l'opération, soit c.

Le nombre pensé est le reste obtenu en divisant par 60 l'expression $40a + 45.b + 36.c$.

Cette méthode peut être généralisée de façon à s'appliquer à un nombre pensé quelconque. Soit a', b', c'..., une série de nombres premiers entre eux deux à deux et dont le produit est p. (La règle donnée par Bachet s'applique au cas des trois nombres, 3, 4 et 5).

n étant un nombre quelconque plus petit que p, représentons par a, b, c..., les restes obtenus en divisant respectivement n par a', b', c'... Déterminons un nombre A, de la forme, multiple de $a' + 1$, qui soit en même temps multiple du produit $b'.c'.d'$...

De même, déterminons un nombre B de la forme mult. $b' + 1$, qui soit divisible par le produit $a'.c'.d'$... soient également C, D..., des nombres de la forme mult. $c' + 1$, mult. $d' + 1$..., déterminés

[1] Bachet. — *Problème* VI, p. 84. Bachet ajoute à la page 87 une note historique sur cette question.

de la même manière. Nous nous proposons de démontrer que n est égal au reste de la division par p, de l'expression $A.a + B.b + C.c + D.d + \ldots$

Posons $N = A.a + B.b + C.c + D.d \ldots$, et convenons de représenter par $M(x)$ un multiple de x.

$A = M(a') + 1$, par conséquent $A.a = M(a') + a$.

Dès lors, si le premier terme de N, c'est-à-dire $A.a$, est divisé par a', le reste de l'opération est a.

Par hypothèse, B est un multiple de $a'.c'.d'\ldots$ par suite $B.b$ est divisible par a'; il en est de même des termes $C.c$, $D.d\ldots$ etc. D'où cette conclusion que tous les termes de N, à l'exception du premier, sont des multiples de a'.

Donc, en divisant N par a', le reste de l'opération est a.

Or, le nombre n divisé par a' donne pour reste a;

On a, dès lors, l'égalité :

$$N - n = M(a'),$$

on trouve de même :

$$N - n = M(b'),$$
$$N - n = M(c').$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Mais les nombres a', b', c' ..., étant premiers entre eux deux à deux, on a, d'après un théorème connu

$$N - n = M(a'.b'.c'\ldots) = M(p),$$

ou encore

$$N = M(p) + n,$$

et comme n est plus petit que p, le reste obtenu en divisant N par p est bien n, c'est-à-dire le nombre pensé.

La théorie des nombres nous fournit des règles permettant de calculer A, B, C ...; mais si les diviseurs a', b', c', ..., sont choisis assez petits, les nombres correspondants A, B, C, ..., se déterminent sans difficulté après quelques tâtonnements.

La règle donnée par Bachet correspond au cas où

$$a' = 3, \quad b' = 4, \quad c' = 5,$$
$$p = 60, \quad A = 40, \quad B = 45 \quad \text{et} \quad c = 36.$$

Si le nombre pensé est plus petit que 420, on peut prendre

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5, \quad d = 7;$$
$$A = 280, \quad B = 105, \quad C = 336 \quad \text{et} \quad D = 120$$

Sixième méthode. — *Deviner un nombre pensé entre* 0 *et* 15 *inclusivement, sans poser aucune question.*

On commence par prier la personne d'ajouter 1 au nombre pensé, puis de tripler la somme ; la suite des opérations à effectuer se divise alors en 4 périodes qu'il importe de bien noter :

Première période. — On fait prendre la moitié du résultat obtenu et multiplier par 3, cette moitié ;

Deuxième période. — On fait prendre la moitié du dernier résultat et multiplier par 3 le résultat obtenu ;

Troisième période. — On fait encore prendre la moitié du dernier produit.

Quatrième période. — De nouveau et une dernière fois on divise par 2.

Ainsi qu'on le voit, on fait prendre 4 fois les moitiés des derniers résultats, mais si ces résultats sont impairs, on doit, avant de faire la division par 2, les augmenter de 1.

Cela posé examinons ce qui se produit avec les 15 premiers nombres.

Représentons par N le nombre pensé.

On se propose dans la première période, de faire prendre la moitié de l'expression 3 (N + 1).

La division par 2 ne pouvant se faire que si N est impair, il en résulte qu'on est fixé, dès la première période, sur la parité du nombre pensé.

Montrons maintenant comment les opérations effectuées dans les trois autres périodes permettent de déterminer N,

Supposons d'abord N impair

$$N = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \text{ ou } 15.$$

Deuxième période. — On fait diviser par 2 le nombre $\frac{1}{2}(N+1)3^2$ et le résultat obtenu est multiplié par 3.

Si la division peut se faire $N+1$ est de la forme mult. 4 c'est-à-dire que l'on a :

$$N = 3, 7, 11 \text{ ou } 15$$

Si la division ne peut pas se faire, $N = 1, 5, 9$ ou 13.

Donc après la deuxième période, le choix est limité entre 4 nombres.

Troisième période. — 1° Supposons que la division par 2 de $\frac{1}{2}(N+1)3^2$ ait pu se faire, $\frac{1}{2^2}(N+1)3^2$ est entier et $N = 3, 7, 11$ ou 15.

On a encore à diviser par 2 l'expression $\frac{1}{2^2}(N+1)3^3$.

(*a*) Si la division peut se faire $N+1$ est de la forme mult. 8 et $N = 7$ ou 15.

(*b*) Si la division n'est pas possible, on divise par 2 l'expression

$$\frac{N+1}{2^2} \times 3^3 + 1 \quad \text{et} \quad N = 3 \text{ ou } 11,$$

2° Supposons que l'expression $\frac{N+1}{2} \times 3^2$ ne soit pas divisible par 2, on a à choisir entre 1, 5, 9 ou 13, et on fait diviser par 2

$$\frac{N+1}{2} \times 3^2 + 1.$$

Le résultat est de la forme $\frac{(N+1)\,3^2+2}{2^2}$, on le fait multiplier par 3, ce qui donne

$$\frac{(N+1)\,3^3+2\times 3}{2^2}$$

et c'est cette nouvelle expression que l'on se propose de diviser par 2. Or, elle peut s'écrire

$$\frac{(27\,N+1)+32}{2^2}.$$

(*c*) Si la division est possible, $27\,N+1$ est de la forme mult. 8 alors $N=5$ ou 13.

(*d*) Si la division n'est pas possible, on fait diviser par 2

$$\frac{(N+1)\,3^3+2\times 3}{2^2}+1 \quad \text{et} \quad N=1 \text{ ou } 9.$$

Donc, après la troisième période, le choix est limité entre deux nombres.

Quatrième période. — 1° L'expression $\frac{(N+1)\,3^3}{2^3}$ est entière.

On divise par 2.

Si la division peut se faire $N+1$ est de la forme mult. de 16, et $N=15$.

Si la division ne peut se faire, on divise par 2,

$$\frac{(N+1)\,.\,3^3}{2^3}+1 \quad \text{ou} \quad \frac{3\,(9.\,N+1)+32}{2^3}$$

et $9N+1$ est de la forme mult. de 16, d'où $N=7$.

2° L'expression $\frac{(N+1)\,.\,3^3}{2^2}$ n'était pas divisible par 2.

C'est alors l'expression $\frac{1}{2}\left[\frac{(N+1)3^3}{2^2}+1\right]$ ou $\frac{(N+1)\,3^3+2^2}{2^3}$

qu'il s'agit de diviser par 2.

Si la division est possible $\frac{(27\,N - 1) + 32}{2^4}$ représente un nombre entier et $27\,N - 1$ est de la forme mult. 16, d'où $N = 3$.

Si la division n'est pas possible, l'expression

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(N+1)\,3^3 + 2^2}{2^3} + 1\right] \quad \text{ou} \quad \frac{(27\,N + 7) + 32}{2^4}$$

est entière, et $27\,N + 7 =$ mult. 16, d'où $N = 11$.

3° L'expression $\frac{(27\,N + 1) + 32}{2^3}$ représente un nombre entier.

On fait diviser ce nombre par 2.

Si la division est possible $27\,N + 1 =$ mult. de 16 et $N = 13$.

Si la division n'est pas possible $\frac{1}{2}\left[\frac{(27\,N + 1) + 32}{2^3} + 1\right]$ ou $\frac{9\,(3\,N + 1) + 32}{2^4}$ représente un nombre entier.

$$3\,N + 1 = \text{mult. de } 16 \quad \text{et} \quad N = 5.$$

4° L'expression $\frac{1}{2}\left[\frac{(N+1)\,3^3 + 2\,.\,3}{2^2} + 1\right]$ ou $\frac{(27\,N + 5) + 32}{2^3}$ est divisée par 2. Si la division peut se faire

$$27\,N + 5 = \text{mult. } 16 \text{ et } N = 1$$

Si la division n'est pas possible $N = 9$.

On ferait une analyse identique en partant de la supposition N pair.

Les opérations précédentes sont rappelées à la mémoire par l'un des huits mots ci-après. Chacun d'eux est composé de 3 syllabes et celles où se trouve la voyelle *i* indiquent les périodes où pour prendre la moitié on a été obligé de faire ajouter 1.

La quatrième période fait connaître celui des deux nombres attribués à chacun des 8 mots qui a été choisi. Si on peut prendre la moitié sans faire ajouter 1, c'est le nombre contenu dans la première colonne, dans le cas contraire, c'est le nombre de la deuxième colonne.

pi	lo	ri	. . . .	0	8
bou	li	mie.	. . . .	9	1
in	di	go	. . . .	10	2
me	lo	die	. . . .	11	3
fi	ga	ro	. . . .	12	4
do	mi	no	. . . .	5	13
mis	ti	gri	. . . .	14	6
ma	te	lot	. . . .	7	15

Exemple. — Supposons qu'on ait pensé le nombre 6.

$$(6 + 1)3 = 21$$

Première période. — La division ne pouvant se faire sans ajouter 1, le nombre pensé est l'un de ceux qui correspondent aux mots

pi	lo	ri	. . . .	0	8
in	di	go	. . . .	10	2
fi	ga	ro	. . . .	12	4
mis	ti	gri	. . . .	14	6

$$21 + 1 = 22 \quad , \quad \frac{22}{2} = 11 \quad , \quad 11 \times 3 = 33$$

Deuxième période. — La division par 2 ne pouvant encore se faire, le nombre pensé est l'un des 4 qui correspondent aux deux mots.

in	di	go	. . . .	14	6
mis	ti	gri	. . . .	10	2

$$33 + 1 = 34 \quad . \quad \frac{1}{2}\,34 = 17.$$

Troisième période. — La division par 2 n'étant pas possible, le nombre cherché est l'un des deux nombres 14, 6, qui correspondent au mot *mistigri*.

Quatrième période. — La dernière division par 2 ne pouvant se faire, le nombre cherché est celui de la deuxième colonne, c'est-à-dire le nombre 6.

TROUVER LE RÉSULTAT D'UNE SÉRIE D'OPÉRATIONS EFFECTUÉES SUR UN NOMBRE QUELCONQUE (QUE L'ON NE CONNAIT PAS) SANS POSER AUCUNE QUESTION

Tous les problèmes de cette nature dépendent de la façon de combiner les opérations que l'on fait effectuer ; il s'agit, en définitive de conduire les calculs de telle sorte que le nombre pensé disparaisse et ne figure pas dans le résultat. Quatre exemples suffiront :

Premier exemple (1). — Une personne ayant pensé un nombre que nous désignerons par n, dites-lui :

1° De le multiplier par un nombre arbitraire, a ;

2° D'ajouter au produit un second nombre arbitraire, mais connu, b ;

3° De diviser la somme obtenue par un troisième nombre, également quelconque, mais connu, c ;

4° Faites maintenant prendre la fraction $\frac{a}{c}$ du nombre pensé et

5° Faites retrancher cette fraction du résultat de la troisième opération.

Ce résultat est $\frac{na+b}{c}$ et la fraction déterminée par l'opération (4°) est $\frac{a.n}{c}$.

La différence entre ces deux nombres est égale à

$$\frac{n.a+b}{c}-\frac{n.a}{c}=\frac{b}{c}.$$

Elle nous est donc connue et nous pouvons l'annoncer.

(1) Bachet. — *Problème* VIII, p. 102.

Par exemple, si $a = 6$, $b = 12$, $c = 4$, on obtient comme résultat final $\frac{12}{4} = 3$.

Deuxième exemple [1]. — Invitez une personne A à prendre un nombre quelconque de jetons, n par exemple, mais sans désigner ce nombre, puis :

1° Dites à une autre personne, B, de prendre p fois autant de jetons, p étant un nombre quelconque que vous choisissez ;

2° Dites à la personne A de donner à B, q de ses jetons, q étant un second nombre quelconque que vous fixez.

3° La seconde personne B devra ensuite passer à A un nombre de jetons égal à p fois celui que A possède.

Il reste alors entre les mains de B, $q\,(p + 1)$ jetons : ce nombre vous est connu et le tour peut se faire, soit en mentionnant directement le résultat, soit de façon à exciter davantage la curiosité des spectateurs.

Le raisonnement est des plus simples : à la fin de l'opération (2°), A possède, $n - q$ jetons ; et B en a $pn + q$; à la fin de l'opération (3°), B a passé à A, $p\,(n - q)$ jetons et, par conséquent, il lui en reste : $p.n + q - (n - q)\,p$ ou $p.q + q = (p + 1)\,q$, nombre connu.

Par exemple, si à l'origine A prend un nombre quelconque de jetons et si nous supposons $p = 2$, $q = 3$, B devra prendre deux fois plus de jetons que A, puis A lui en passera 3.

B donnera ensuite à A un nombre de jetons égal au double de celui que cette personne possède et il lui restera :

$$(2 + 1) \times 3 = 9 \text{ jetons.}$$

Ce tour (comme aussi quelques-uns des problèmes suivants) peut

[1] BACHET. — *Probl.* XIII, p. 123. Bachet a présenté également cette récréation d'une façon un peu plus générale, mais moins réalisable pratiquement.

également se faire avec une seule personne en convenant de représenter par A sa main droite et par B sa main gauche.

Troisième exemple. — Faites effectuer la série d'opérations suivante :

1° Écrivez un nombre quelconque de trois chiffres ;

2° Écrivez le nouveau nombre obtenu en renversant l'ordre des chiffres du premier ;

3° Effectuez la différence de ces deux nombres ;

4° Écrivez le nouveau nombre formé en renversant l'ordre des chiffres de cette différence ;

5° Ajoutez ce dernier nombre avec la différence obtenue plus haut (3°).

Le résultat de cette dernière opération est toujours 1089 quel que soit le nombre primitivement pensé.

Le tableau récapitulatif suivant explique avec un exemple notre règle.

(1°)	732	$100.a + 10.b + c$	On suppose $c < a$.
(2°)	237	$100\,c + 10.b + a$	
(3°)	495	$100\,(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$	
(4°)	594	$100\,(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$	
(5°)	1089	$900 + 180 + 9$	

Remarque. — La question peut se généraliser et s'appliquer à un nombre écrit dans un système quelconque de numération.

Soit, en effet, b la base du système et représentons par m,n,p les unités du premier, du deuxième et du troisième ordres ; supposons d'ailleurs $m < p$.

On a successivement :

(1°) $p \times b^2 + n \times b + m$ ou $(p - 1)b^2 + nb + (b - 1)\,b + m + b$

(2°) $m \times b^2 + n \times b + p$

(3°) $(p - m - 1)\,b^2 + (b - 1)\,b + (m + b - p)$

(4°) $(m + b - p)\,b^2 + (b - 1)\,b + (p - m - 1)$

(5°) $b^2\,(b - 1) + 2b\,(b - 1) + (b - 1)$.

Ce résultat ne dépend donc que de la base du système de numération. Si $b = 10$, on a bien :

$$b^2(b-1) + 2b(b-1) + (b-1) =$$
$$= 100 \times 9 + 10 \times 9 \times 2 + 9 = 900 + 180 + 9.$$

Cette généralisation nous donne le moyen d'étendre la récréation à un nombre de plus de trois chiffres.

Quatrième exemple [1]. — La récréation suivante est du même genre et repose sur un principe identique : elle s'exécute avec des nombres complexes et, dans notre exemple, nous opérons sur les monnaies anglaises.

(1°) Écrivez une somme d'argent quelconque plus petite que 12 livres sterling, le nombre des livres étant différent de celui des pence :

(2°) Renversez cette somme, c'est-à-dire, faites écrire au-dessous de la première, la somme obtenue en intervertissant l'ordre des livres et des pence :

(3°) Faites la différence entre ces deux sommes et

(4°) Renversez cette différence

(5°) Additionnez enfin les résultats (3°) et (4°) et vous obtenez pour somme le nombre :

£ 12 18^s 11^d.

Prenons, par exemple, la somme £ 10 17^s 5^d, nous résumons, ci-après, les opérations effectuées [1] :

	£	s	d
(1°)	10	17	5
(2°)	5	17	10
(3°)	4	19	7
(4°)	7	19	4
(5°)	12	18	11

[1] *Educational Times Reprints*, 1890, vol. LIII, p. 78.
[2] Bachet. — *Problème* IX, p. 107.

Le tableau suivant explique la façon d'opérer et montre que le résultat final est indépendant de la somme écrite à l'origine.

	£	s	d				
(1°)	a	b	c				
(2°)	c	b	a				
(3°)	$a - c - 1$	19	$c - a + 12$	nous supposons $c < a$			
(4°)	$c - a + 12$	19	$a - c - 1$		£	s	d
(5°)	11	38	11	ou	12	18	11

Addition. — Citons encore une dernière récréation du même genre peu remarquée jusqu'ici, croyons-nous.

Faites écrire un nombre quelconque de trois chiffres tel que ses chiffres aillent en diminuant d'une unité de gauche à droite ; on forme un nouveau nombre en renversant l'ordre des chiffres du premier.

La différence entre ces deux nombres est constante et égale à 198.

C'est une application de cette proposition générale :

Dans tout système de numération, la différence entre un nombre de n *chiffres, dont les chiffres croissent d'une unité de droite à gauche, et ce nombre renversé est constante.*

QUESTIONS COMPRENANT DEUX NOMBRES

Passons actuellement aux problèmes dans lesquels interviennent deux nombres et dont nous allons donner quelques exemples.

Premier exemple [1]. — Considérons deux nombres, l'un pair

[1] Il faut se rappeler que la livre sterling vaut 20 shillings et que 1 shilling vaut 12 pence.

et l'autre impair, et invitons une personne A à choisir l'un d'eux, une seconde personne B prendra l'autre. Il s'agit de déterminer le nombre choisi par A.

Dites à A de multiplier le nombre qu'elle a pris par 2 (ou par un autre nombre pair quelconque), et à B de multiplier par 3 (ou par un autre nombre impair quelconque) le nombre qu'elle possède ; puis faites ajouter les produits obtenus et demandez le résultat. Si cette somme est paire, A avait en sa possession le nombre impair et, par suite, B avait le nombre pair ; si, au contraire, la somme est impaire, A avait pris le nombre pair et B le nombre pair.

La raison en est évidente.

Deuxième exemple (1). — Le procédé que nous venons de décrire a été étendu par Bachet à deux nombres quelconques premiers entre eux, mais tels que l'un d'eux au moins ne soit pas premier absolu.

Soient m et n les deux nombres en question premiers entre eux et représentons par p un diviseur de n.

Dites à la personne A de choisir l'un des nombres m ou n et à B de prendre l'autre. Soit q un nombre premier avec p. Faites multiplier par q le nombre pris par A et par p celui pris par B ; faites ajouter les produits et demandez le résultat. Suivant que cette somme est ou n'est pas divisible par p, la personne A a en sa possession le nombre n ou le nombre m.

On peut prendre comme exemple numérique :

$$m = 7, \qquad n = 15, \qquad p = 3, \qquad q = 2.$$

(1) Bachet. — *Problème* XI, p. 113.

PROBLÈMES REPOSANT SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN PUISSANCES SUCCESSIVES DE LA BASE DU SYSTÈME DE NUMÉRATION

Plusieurs des problèmes permettant de trouver deux ou plusieurs nombres reposent sur ce fait qu'un nombre entier quelconque peut s'écrire sous forme d'une somme de termes dont chacun est égal au produit d'un chiffre par la puissance de la base qui correspond à l'ordre des unités représentées par le chiffre considéré.

Par exemple dans le système décimal

$$2017 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10 + 7.$$

Trois applications numériques suffiront pour faire comprendre rapidement le principe de la méthode.

Premier exemple (1). — Un tour assez commun consiste à demander à un enfant de jeter deux dés sur la table ou de choisir au hasard, dans un jeu, un domino marqué sur chaque moitié. On prie alors l'enfant de bien se souvenir des deux nombres sortis, puis de multiplier l'un d'eux par 5, d'ajouter 7 au produit, de doubler ce résultat et finalement d'ajouter le second nombre. Si du nombre ainsi formé, la personne qui fait le tour retranche mentalement 14, elle obtient un nouveau nombre de deux chiffres qui sont précisément les deux chiffres sur lesquels l'enfant a opéré.

Supposons, par exemple, que les deux nombres sortis ou choisis soient a et b, ces deux nombres sont nécessairement plus petits

(1) Quelques questions semblables ont été données par Bachet dans le *problème* XII, p. 117 ; par Oughtred dans ses *Mathematica Récréations* (traduites ou tirées de l'ouvrage de Van Etten portant la date de 1633, Londres 1653, problème XXXIV ; et par Ozanam, part. 1, chap. x.

que 10 (puisqu'ils ont été obtenus avec des dés ou un jeu de dominos). Les opérations successivement faites nous donnent :

$$5a; \quad 5a + 7; \quad (5a + 7) \times 2 = 10.a + 14; \quad 10a + 14 + b;$$

et en retranchant 14 on a bien un nombre écrit dans le système décimal dans lequel b est le chiffre des unités et a le chiffre des dizaines.

Le tour peut se reprendre dans un autre système de numération si on juge utile de cacher le procédé.

Deuxième exemple [1]. — De même, si on fait choisir trois nombres a, b, c, plus petits que 10, on peut les trouver en opérant comme il suit :

1° Faites prendre un de ces nombres, le premier par exemple a, et faites-le multiplier par 2 ;

2° Faites ajouter 3 au produit ; le résultat est $2.a + 3$;

3° Ce résultat est multiplié par 5 et on fait ajouter 7, on obtient $10.a + 22$;

4° A cette somme faites ajouter le second nombre ;

5° Faites doubler le résultat obtenu ;

6° Puis dites d'ajouter 3 au nouveau produit ;

7° Enfin, faites multiplier par 5 et ajouter le troisième nombre.

Le résultat finalement obtenu est de la forme

$$100.a + 10.b + c + 235.$$

Connaissant le résultat il suffit d'en retrancher mentalement 235 pour avoir le nombre écrit dans le système décimal avec les trois chiffres a, b, c choisis à l'origine.

On peut appliquer une règle semblable pour déterminer le jour de la naissance et l'âge d'une personne. Le résultat obtenu est un nombre de six chiffres dont les deux premiers à gauche donnent le

[1] Bachet donne quelques questions semblables dans le *problème* XII, p. 117.

jour du mois de la naissance, les deux chiffres du milieu le rang de ce mois et les deux derniers à droite, l'âge actuel (supposé bien entendu moindre que 100.)

Troisième exemple [1]. — La règle suivante pour trouver l'âge d'une personne est analogue.

Prenez le chiffre des dizaines de l'année de la naissance;

1° Faites-le multiplier par 5 ;

2° Dites d'ajouter 2 au produit;

3° Faites multiplier le résultat par 2 ;

4° A ce nouveau produit faites ajouter le chiffre des unités de l'année de la naissance;

5° Enfin, faites retrancher la somme de 110 et le résultat obtenu représente l'âge de la personne en 1906 [2].

La démonstration algébrique de la règle est intuitive.

Soient a et b le chiffre des dizaines et celui des unités de l'année de la naissance. Les opérations successivement effectuées nous donnent :

$$(1^\circ)\ 5a; \quad (2^\circ)\ 5a + 2; \quad (3^\circ)\ 10.a + 4; \quad (4^\circ)\ 10.a + 4 + b:$$
$$(5^\circ)\ 110 - (10.a + 4 + b) = 106 - (10.a + b),$$

et, cette dernière expression représente bien l'âge de la personne en 1906.

Il est facile de modifier la règle pour obtenir l'âge à une époque déterminée.

[1] Une question de même genre est traitée par Laisant et Perrin dans leur *Algèbre*, Paris, 1892; et dans *l'Illustration* du 13 juillet 1895.

[2] L'âge de la personne en 1907 s'obtiendrait en retranchant la somme de 111, en 1908 il faudrait retrancher de 112 etc.

AUTRES PROBLÈMES AVEC DES NOMBRES ÉCRITS DANS LE SYSTÈME DÉCIMAL.

Nous mentionnerons encore ici deux ou trois autres questions dépendant du système de numération le plus répandu, c'est-à-dire du système décimal, et qui, autant que nous avons pu le vérifier, sont inconnues de la plupart des auteurs de livres de récréations.

Premier problème. — Prenez un nombre quelconque de trois chiffres, écrivez-le de nouveau en renversant l'ordre des chiffres, puis faites effectuer la différence entre ces deux nombres. Si alors, on nous donne le dernier chiffre de la différence, il est facile de déterminer les autres chiffres.

Soient, en effet, c le chiffre des centaines du nombre choisi, d le chiffre des dizaines et u celui des unités.

Le nombre en question s'écrit dans le système décimal

$$100.c + 10.d + u;$$

le nombre forme en renversant les chiffres est

$$100.u + 10.d + c,$$

et la différence est égale à $100 (c - u) + (u - c)$ ou à $99. (c - u)$. Mais, $(c - u)$ ne surpasse pas 9, et, par suite, la différence ne peut être que l'un des neuf nombres :

$$099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 \text{ ou } 891.$$

Dans chaque cas, le chiffre du milieu est un 9 et la somme des deux autres chiffres est également égale à 9 ; dès lors, connaissant le dernier chiffre, on aura immédiatement le premier chiffre qui est son complément à 9.

Second problème. — Voici une seconde question présentant quelque analogie avec la précédente.

1° Vous faites prendre un nombre quelconque ;

2° Faites-le écrire de nouveau mais en renversant l'ordre des chiffres ;

3° Faites effectuer la différence entre ces deux nombres ;

4° Cette différence est multipliée par un nombre quelconque que, comme les autres, vous ne connaissez pas ;

5° Faites biffer dans le produit un chiffre quelconque (pourvu que ce ne soit pas un zéro).

6° Demandez le nombre restant (1).

Alors en retranchant la somme des chiffres du nombre restant du multiple de 9 immédiatement supérieur à cette somme, on a le chiffre biffé.

C'est une conséquence immédiate de ce fait que le résultat de l'opération (3°) et, par suite, celui de l'opération (4°) est un multiple de 9. Or, la somme des chiffres d'un multiple de 9 est elle-même divisible par 9.

Troisième problème. — Deviner plusieurs nombres pensés.

Il s'agit de déterminer les nombres qui ont été pensés par un certain nombre d'élèves après s'être fait donner le produit de chacun des nombres pensés par la somme de tous les autres.

Nous allons exposer la théorie de cette récréation qui ne peut être faite que par une personne exercée aux calculs de décomposition en facteurs premiers.

(1) Il serait préférable, à notre avis, de faire effectuer la somme des chiffres du nombre restant et de demander connaissance de cette somme, au lieu de demander le nombre restant. On retranche la somme des chiffres du multiple de 9 immédiatement supérieur. La récréation présentée ainsi surprend davantage les élèves.

Considérons le cas de cinq nombres a, b, c, d et e, supposons que l'on ait trouvé

$$\begin{aligned} a\,(b + c + d + e) &= 180, \\ b\,(a + c + d + e) &= 294, \\ c\,(a + b + d + e) &= 418, \\ d\,(a + b + c + e) &= 444, \\ e\,(a + b + c + d) &= 510, \end{aligned}$$

il s'agit de trouver les nombres a, b, c, d, e.

On voit d'abord que les premiers facteurs a, b, c, d, e, doivent être croissants comme les nombres 180, 294, 418, etc. ; car, les les deux premiers produits, par exemple, revenant à

$$\begin{aligned} &ab + a\,(c + d + e), \\ &ab + b\,(c + d + e), \end{aligned}$$

puisque le second est plus grand que le premier, il faut que b soit plus grand que a.

On remarque ensuite que si l'on décompose les nombres trouvés 180, 294, etc, en deux facteurs, de toutes les manières possibles, parmi ces décompositions, chacun en fournira une qui donnera les deux facteurs du premier membre de l'égalité où il se trouve.

On peut remarquer aussi que si l'un des nombres a, b, c, d, e est plus grand que la somme des quatre autres, cela ne peut avoir lieu que pour le plus grand, c'est-à-dire pour celui qui correspond au plus grand produit. Si donc l'un des nombres donnés, le plus grand excepté, fournit un produit $p.q$, qui fasse connaître les facteurs du premier membre de l'égalité où il se trouve, le plus petit des facteurs p et q sera le premier facteur a ou b, etc., et l'autre sera le second facteur $(b + c + d + e)$ ou $(a + c + d + e)$, etc.

Remarquons enfin que la somme des deux facteurs de chacun des premiers membres étant la même dans toutes les égalités, les produits $p.q$, $p'.q'$, $p''.q''$, etc. qui les feront connaître seront tels qu'on aura

$$p + q = p' + q' = p'' + q'' = \ldots$$

et c'est ce qui les fera distinguer parmi tous les produits de deux facteurs que fourniront les nombres donnés.

Ces remarques faites, cherchons les diviseurs des nombres donnés, le plus grand excepté, et écrivons les pour chacun deux, la moitié sur une première ligne, dans l'ordre croissant à partir de 1, puis l'autre moitié sur une seconde ligne, dans l'ordre décroissant à partir du nombre lui-même ; en sorte que le produit de deux diviseurs placés l'un sous l'autre sera toujours égal au nombre qui commence la seconde ligne. Nous aurons :

Pour 180,	1,	2,	3,	$\overset{*}{4}$,	5,	6,	9,	10,	12,
	180,	90,	60,	45,	36,	30,	20,	18,	15 :
Pour 294,	1,	2,	3,	6,	$\overset{*}{7}$,	14,			
	294,	147,	98,	49,	42,	21 :			
Pour 418,	1,	2,	$\overset{*}{11}$,	22,					
	418,	209,	38,	19 :					
Pour 444,	1,	2,	3,	4,	6,	$\overset{*}{12}$,			
	444,	222,	148,	111,	74,	37 :			

Parmi les couples de facteurs dont le produit est 180 dans la première suite et 294 dans la seconde, nous devons en chercher deux dont la somme des facteurs soit la même : on trouve facilement que ce sont les deux produits 4×45 et 7×42, d'où l'on conclut que $a = 4$ et $b = 7$.

On cherche alors dans les autres suites, quels sont les couples dont la somme des facteurs est aussi 49, et l'on trouve 11×38 et 12×37, d'où l'on conclut que $c = 11$ et $d = 12$.

On connait ainsi les quatre premiers nombres 4, 7, 11 et 12 dont la somme est 34 ; le cinquième nombre e est donc 49–34 ou 15.

Avec un peu d'exercice et en posant la condition que les nombres pensés ne dépasseront pas une limite fixée, 20 par exemple, on arrive à déterminer promptement les facteurs cherchés.

Questions diverses :

A la suite de ces problèmes on peut placer un grand nombre de questions sur les nombres dont on trouve les solutions d'une façon empirique et qui ne présentent aucun intérêt mathématique spécial.

Nous citerons, par exemple les suivantes :

1. *Avec les dix caractères* 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 et 0 *former des nombres dont la somme soit égale à l'unité, chaque caractère ne devant être pris qu'une seule fois, mais la notation fractionnaire étant admise*

Voici une solution

$$\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1.$$

Si la somme des nombres formés devait être égale à 100, au lieu de 1, une des solutions serait

$$50 + 49 + \frac{1}{2} + \frac{38}{76} = 100.$$

2. Une question plus difficile consiste à former avec les neuf caractères 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 et 1 quatre nombres dont la somme est égale à 100.

Voici deux solutions

$$78 + 15 + \sqrt[2]{9} + \sqrt[3]{64} = 100,$$

$$74 + 25 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18} = 100.$$

3. Ecrire le nombre 31 avec 5 chiffres 3 seulement

$$31 = 3 + 3^3 + \frac{3}{3}.$$

4. Etant donnés les 4 nombres 111, 333, 555, 777, former le nombre 20 en prenant 1 chiffre seulement dans trois de ces nombres.

$$17 + 3 = 20.$$

5. Trouver 14 avec cinq chiffres impairs

$$14 = 1 + 1 + 1 + 11.$$

6. Former le nombre 13 avec quatre 1

$$11 + 1 + 1 = 13.$$

7. Former le nombre 34 avec 4 chiffres 3,

$$33 + \frac{3}{3}.$$

8. Former le nombre 20 avec quatre chiffres 9

$$9 + \frac{99}{9} = 20.$$

9. Former le nombre 100 avec quatre chiffres 9

$$99 + \frac{9}{9} = 100.$$

On pourrait multiplier à l'infini ce genre de récréations sur lequel nous n'insisterons pas.

PROBLÈMES EFFECTUÉS AVEC DES SERIES D'OBJETS NUMÉROTÉS

Toute collection d'objets pouvant se distinguer facilement les uns des autres, en particulier et principalement une suite d'objets portant des numéros consécutifs, se prête à des récréations reposant sur les propriétés élémentaires des nombres. Comme exemples, nous décrirons quelques tours connus, dont les deux premiers s'effectuent avec une *montre* et dont les trois derniers se comprennent mieux quand on les exécute avec un *jeu de cartes ;* c'est d'ailleurs ainsi que nous les présentons.

Premier exemple (1). — Dans cette récréation on utilise la subdivision en heures du cadran d'une pendule ou d'une montre.

(1) BACHET. —*Problème* XX, p. 155 ; OUGHTRED. — *Mathematical Récréations*, Londres, 1653, p. 28.

Voici comment on opère : on invite une personne à penser une heure, soit m par exemple, et à en désigner ou en marquer une autre, n. Partant alors de cette dernière heure la personne doit, en marchant en sens contraire des aiguilles, toucher successivement les heures en comptant mentalement m, $m+1$, $m+2$, ... jusqu'à $n+12$: L'heure sur laquelle elle s'arrête est précisément l'heure pensée.

Supposons, par oxemple, que cette personne ait pensé V et qu'elle ait désigné l'heure IX ; elle doit alors toucher successivement les heures IX, VIII, VII, VI, V, ... en marchant en sens contraire des aiguilles et en comptant 5, 6, 7, 8 ... jusqu'à IX + 12 ou 21, à ce moment elle se trouve sur l'heure pensée V.

L'explication de la règle est évidente, car on arrive finalement en comptant mentalement à la $(n+12-m)^{e}$ heure, mais puisqu'on marche en sens contraire des aiguilles, on doit passer sur $(n-m)$ heures pour arriver à l'heure m, et augmenter cette différence $(n-m)$ de 12, n'a pour effet que de faire faire un tour entier du cadran.

L'expression $n+12-m$ étant toujours positive puisque m est moindre que 12, en faisant pointer à la personne les heures jusqu'à la $(n+12-m)^{me}$, nous donnons à la règle une forme générale s'appliquant à tous les cas, que n soit plus petit ou plus grand que m.

Denxième exemple. — L'exercice suivant est une autre façon bien connue d'indiquer sur le cadran d'une montre ou d'une horloge l'heure pensée par quelqu'un. Nous ne connaissons pas l'inventeur du procédé.

Au moyen d'une baguette ou de tout autre objet léger on touche successivement les heures d'une pendule en partant d'une heure déterminée, VII, et en marchant dans le sens opposé à celui des aiguilles. La personne qui a pensé une heure compte mentalement en même temps jusqu'à 20, mais à partir de l'heure pensée (ainsi, si elle a choisi ou pensé l'heure X, elle dira mentalement XI lorsque vous touchez VII, XII lorsque vous frappez sur VI, et ainsi de suite). Lorsqu'elle arrive à 20, la baguette est sur l'heure pensée.

Supposons, en effet, qu'on ait pensé l'heure n, le 8^e coup est donné sur l'heure XII et il est compté mentalement par la personne comme la $(n + 8)^{me}$ heure, le coup compté comme $(n + 9)^{me}$ heure est donné sur l'heure XI ; et d'une façon générale, le coup compté mentalement par la personne comme la $(n + p)^{me}$ heure est donné sur l'heure $20 - p$. Par suite, si l'on fait $p = 20 - n$, lorsque la personne en est à la 20^e heure, la baguette marque l'heure pensée, n. Il va sans dire que l'on peut changer l'heure de départ (et c'est ce qu'il faut faire lorsqu'on reprend la récréation), mais dans ce cas l'heure finale doit également être modifiée. Si l'on part de IX, par exemple, il faut compter jusqu'à la 22^e heure (12 + IX + 1).

Extension de la récréation préoédente. — Il est évident que le même tour peut s'exécuter avec une collection de m objets comme des cartes ou des dominos, en supposant $m < 20$.

Supposons en effet, que ces m objets soient disposés sur une table dans un certain ordre numérique et qu'un des spectateurs choisisse celui occupant le n^e rang.

Il est bien certain que si, partant de l'objet occupant le rang $19 - m$, on remonte en sens inverse de celui primitivement adopté de $20 - m$ rangs, on tombe finalement sur le m^e objet ; de sorte que si, en même temps que vous touchez l'objet occupant le rang $19 - m$, la personne qui a choisi une carte ou un domino compte $n + 1$, lorsque vous toucherez l'objet du rang m (en marchant en sens inverse) cette personne comptera mentalement $(n + 20 - m)$, lorsque vous aurez atteint le $(m - 1)^{me}$ objet, la personne en sera mentalement au nombre $(n + 20 - m + 1)$ et en dernier lieu, l'objet de rang n, c'est-à-dire l'objet choisi, sera touché lorsque la personne aura compté jusqu'à $(n + 20 - n)$ ou 20.

Troisième exemple. — L'exemple suivant peut être considéré comme une variante de l'extension précédente ; il est très simple et, à notre connaissance, ne figure dans aucun ouvrage.

On présente un paquet de n cartes à une personne en l'invitant à en choisir une parmi les m premières et de bien se souvenir (sans toutefois le faire connaître) du rang qu'elle occupe à partir de la carte qui se trouve au-dessus du paquet. Pour fixer les idées, supposons que ce soit la x^{me}. En reprenant le paquet, on renverse l'ordre des m premières cartes (ce qui peut se faire facilement en les battant) et on fait passer y cartes (y étant plus petit que $n - m$) du dessous du paquet au-dessus. Cette opération a pour effet d'amener la carte, primitivement choisie, au $(y + m - x + 1)^{me}$ rang à partir de la carte supérieure. Le paquet de cartes est alors remis à la personne qui a fait le choix d'une carte en la priant de les abattre une à une en comptant mentalement $x + 1$ sur la carte supérieure, $x + 2$ sur la seconde carte et ainsi de suite jusqu'à $(y + m + 1)$, la carte abattue alors est celle qui avait été choisie.

On peut modifier comme on le veut la fin de cette récréation et faire varier y et m chaque fois qu'on la reprend ; les personnes peu familiarisées avec l'arithmétique se rendront difficilement compte de la façon dont on opère.

Quatrième exemple [1]. — Faites tirer une carte d'un jeu et faites la mettre sur une table (face couverte) en plaçant au-dessus autant de cartes qu'il en faut pour que leur nombre ajouté à celui des points de la carte donne 12 comme total. Par exemple, si la carte tirée est le cinq de trèfle, on devra mettre au-dessus sept cartes additionnelles. Les figures peuvent avoir une valeur conventionnelle quelconque assignée à l'avance, mais, en général, on les considère comme valant 10. On recommence l'opération avec une autre carte et on forme ainsi un nouveau paquet. L'opération est reprise ainsi trois ou quatre fois seulement, ou, si on le désire, autant de fois que possible avec le jeu que l'on possède. Supposons qu'on ait pu former ainsi p paquets et soit t le nombre des cartes qui restent, il s'agit de déterminer la somme des points des cartes choisies qui se trouvent à la base des paquets.

[1] Un cas particulier de ce problème est traité par BACHET, *problème* XVII, p. 138.

Cette somme est égale à $13(p-4)+r$.

Car si x représente le nombre des points de la carte à la partie inférieure d'un paquet quelconque, le nombre des cartes du paquet sera $13-x$.

Supposons que l'on opère avec un jeu de 52 cartes, ce nombre doit être égal à la somme des cartes contenues dans chaque paquet, augmentée des r cartes qui restent, c'est-à-dire que l'on a :

$$52=(13-x_1)+(13-x_2)+(13-x_3)+\ldots+(13-x_p)+r.$$
$$52=13\times p-(x_1+x_2+x_3+\ldots x_p)+r,$$

d'où l'on déduit :

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_p=13.p-52+r=13\ (p-4)+r,$$

Plus généralement, si on considère un paquet de m cartes et si dans chaque paquet la somme des points de la carte inférieure et du nombre des cartes placées au-dessus est égale à m, la somme des points de toutes les cartes à la base des paquets aura pour expression $(m+1)\,p+r-n$.

Dans un jeu d'écarté, $n=32$ et on fait généralement $m=15$, l'expression précédente devient alors

$$16p+r-32 \quad \text{ou} \quad 16\,(p-2)+r.$$

Cinquième exemple. — Faisons d'abord remarquer qu'en coupant un jeu de cartes on ne modifie pas la position relative des cartes à la condition de regarder le jeu comme non interrompu, c'est-à-dire de considérer la carte supérieure comme faisant immédiatement suite à la carte inférieure. La récréation suivante s'appuie sur cette remarque [1].

Prenez un jeu de cartes que vous abattez successivement, une à une, faces apparentes, sur une table, en ayant soin de bien noter la carte abattue la première et en priant une personne de faire choix d'une carte dont elle retiendra le numéro d'ordre. Ramassez alors le jeu que vous faites couper (mais non battre) autant de fois

[1] Bachet. — *Problème* XIX, p. 152.

qu'on le désire et demandez à la personne le rang de la carte pensée. Abattez alors de nouveau les cartes, comme la première fois, faces apparentes, et aussitôt que vous voyez passer la première carte abattue à l'origine, comptez mentalement 1, 2, 3,... au fur et à mesure que les cartes tombent jusqu'à ce que vous arriviez au numéro indiquant le rang de la carte choisie. La carte qui correspond à ce numéro est précisément celle qui a été pensée.

Il va sans dire que si toutes les cartes sont abattues avant d'atteindre le numéro donné, on ramasse de nouveau les cartes, on retourne le jeu et on recommence l'opération en continuant le comptage.

Voici une autre récréation à peu près du même genre.

On commence comme plus haut par abattre les cartes, faces apparentes, en priant une personne d'en choisir une et de retenir son numéro d'ordre à partir de celle du dessus. Supposons que ce soit la n^{me}. On lui demande alors à quel rang elle désire la voir sortir dans le jeu ; supposons qu'elle choisisse le m^{me} rang. En ramassant les cartes faites passer adroitement $m - n$ cartes de la partie inférieure du paquet à la partie supérieure (c'est l'inverse si n est plus grand que m, c'est-à-dire que, dans ce cas, on fera passer $n - m$ cartes du dessus du jeu au-dessous) et la carte choisie se trouvera au rang assigné.

Sixième exemple. — Deviner les cartes pensées.

On dispose sur une table les neuf premières cartes de même couleur, de l'as jusqu'au neuf, d'un jeu de 52 cartes, en invitant plusieurs personnes à penser chacune une carte. Il s'agit de deviner les cartes pensées.

On prie la première personne d'ajouter 1 au double du nombre des points de la carte pensée, et de multiplier le résultat par 5.

Ce produit étant écrit sur un morceau de papier, ou mieux sur une carte (sans que, bien entendu, il vous soit montré) on invite la première personne à passer la carte à la deuxième personne.

Cette deuxième personne est priée, à son tour, d'ajouter au résultat écrit sur le papier, le nombre des points de la carte qu'elle a pensée, et de doubler le total obtenu, d'ajouter ensuite 1 au produit, et enfin de multiplier par 5 le dernier résultat.

Elle passe alors le papier à la 3^{me} personne qui ajoute, au dernier résultat, le nombre des points de la carte qu'elle a pensée, double la somme obtenue, ajoute 1 au produit et multiplie par 5.

On continue ainsi jusqu'à la dernière personne.

On demande le résultat final obtenu, on en retranche (à part soi) un nombre formé d'autant de 5 qu'il y a de personnes ayant pensé une carte et le chiffre des plus hautes unités de la différence donne le nombre des points de la carte pensée par la première personne, le chiffre suivant représente le nombre des points de la carte pensée par la 2^{me} personne, et ainsi de suite.

L'explication est trop simple pour que nous nous y arrêtions.

Lorsque l'un des chiffres dans la différence est zéro (à l'exception du dernier à droite, qui l'est toujours), c'est que la personne dont le rang correspond au rang occupé par le zéro, s'est mêlée au jeu sans penser de carte.

On remarquera que le nombre que l'on retranche, constitué par autant de 5 qu'il y a de personnes ayant pris part à la récréation, est précisément celui que l'on obtiendrait par le calcul précédent, si toutes les personnes n'avaient pensé aucune carte.

Considérons, en particulier, le cas de 5 personnes. Si toutes ces personnes pensent la carte 1, le résultat trouvé serait 166.665 et on a bien 166.665 — 55.555 = 111.110.

Si chacune de ces 5 personnes avait pensé la carte 2, le résultat final serait 277.775.

Si chacune d'elles avait pensé la carte 3, le résultat final serait 388 885, et ainsi de suite.

On peut varier la récréation en commençant par faire quintupler puis multiplier par 2.

Enfin la même récréation peut se faire, dans une classe avec les neuf premiers nombres, ou encore avec des petits morceaux de carton sur lesquels les neuf premiers nombres sont inscrits et que l'on donne à choisir aux élèves.

PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE DATANT DU MOYEN-AGE

Avant d'abandonner ces quelques questions élémentaires, nous mentionnerons divers petits problèmes qui depuis quatre siècles déjà figurent dans presque toutes les collections de récréations mathématiques et qui, par conséquent, ont droit à une place dans un ouvrage de cette nature.

Premier exemple (1). — La récréation suivante est un exemple d'une certaine catégorie de ces questions.

Trois hommes volent chez un marchand un petit fût contenant 24 litres de vin, ils n'ont en leur possession que trois mesures dont les contenances sont 5, 11 et 13 litres. Comment s'y prendront-ils pour faire le partage en trois parts égales.

Les problèmes de cette nature se traitent par tâtonnements ; le cas présent offre plusieurs solutions. Nous en résumons une dans le tableau suivant :

Les contenances du fût et des trois mesures sont :	24 lit	13 lit	11 lit	5 lit
Les quantités de liquide contenues à l'origine sont :	24	0	0	0
1° On remplit 2 mesures et une partie de la troisième	0	8	11	5
2° On reverse 16 litres dans le fût . . .	16	8	0	0
3° On opère un transvasement.	16	0	8	0
4° On remplit la mesure de 13 litres. . .	3	13	8	0
5° » la mesure de 5 litres . . .	3	8	8	5
6° On obtient finalement	8	8	8	0

(1) Quelques problèmes semblables sont donnés par Bachet, appendice, *prob.* III. p. 206 ; *prob.* IX, p. 233, par Oughtred dans ses *Récréations*, p. 22, et par Ozanam, édition de 1803, vol. I, p. 74, édition de 1840, p. 79. Des exemples plus anciens figurent dans les écrits de Tartaglia, et dans la Triparty de Nicolas Chuquet (écrit en 1484).

La solution suivante est peut-être un peu plus simple :

1° On remplit deux mesures	8^{lit}	0^{lit}	11^{lit}	5^{lit}
2° On opère un transvasement.	8	11	0	5
3° On achève de remplir la mesure de 13 litres avec les 5 litres et on verse le surplus dans la mesure de 11 litres . .	8	13	3	0
4° On remplit de nouveau la mesure de 5 litres	8	8	3	5
On transvase	8	8	8	0

Deuxième exemple. — Cette récréation consiste en un jeu bien connu qui n'exige que la présence de deux personnes A et B. L'une d'elles, A si l'on veut, commence par choisir un certain nombre ne dépassant pas une limite déterminée, six par exemple ; B à son tour désigne un nouveau nombre ne dépassant pas six que l'on ajoute à celui pris par A. A cette somme A peut faire ajouter un troisième nombre remplissant toujours cette condition de ne pas surpasser six, et ainsi de suite. Celle des deux personnes qui, la première, atteint un nombre fixé à l'avance, cinquante par exemple, gagne la partie.

Il est évident que si le joueur A arrive le premier à la somme 43, quel que soit le nombre choisi par le second joueur B, A peut gagner à la prochaine fois. De même, si A arrive le premier à 36, B ne peut l'empêcher d'arriver également le premier, à 43. Il résulte clairement de là que la clef du jeu consiste à s'arranger de façon à atteindre le premier l'un des termes de la progression arithmétique.

$$\div\ 43.\ 36.\ 29.\ 22.\ 15.\ 8.\ 1.$$

Dans ces conditions celui qui ouvre le jeu peut toujours gagner.

On vérifie également, de la même manière et aussi facilement que si les joueurs s'imposent la condition de ne pas choisir un nombre supérieur m et que si n est le nombre qu'il s'agit d'atteindre le premier pour gagner la partie, les nombres que nous pouvons appeler « les nombres clefs » du jeu, forment les termes d'une progression arithmétique dont la raison est $m + 1$ et dont le plus petit est le reste obtenu en divisant n par $m + 1$.

Le même jeu peut se jouer sous une autre forme en plaçant sur une table n objets quelconques (pièces de monnaies, jetons, allumettes, etc.). Les deux joueurs enlèvent chacun à leur tour, un certain nombre de ces objets mais sans que ce nombre puisse surpasser m et, celui qui prend le dernier objet, gagne.

On voit sans peine, que « les nombres clefs » sont les multiples de $m + 1$ et le premier joueur qui a la faculté de laisser sur la table un multiple de $m + 1$ peut toujours gagner.

Le jeu peut également se présenter avec cette condition que le joueur perdant est celui qui prend le dernier objet. Dans ce dernier cas, chacun des « nombres clefs » surpasse de 1 un multiple de $(m + 1)$.

M. Loyd a également fait connaître [1] une variante qui revient à disposer n jetons en cercle et à inviter les deux joueurs à en retirer, chacun à leur tour, un certain nombre ne surpassant pas un nombre fixé à l'avance m, lequel est plus petit que n et plus grand que 1. Les jetons retirés doivent être pris à la suite et sans laisser de vides. Dans ces conditions le second des joueurs peut toujours gagner.

Généralisation récente de cette question. — Les jeux que nous venons d'exposer sont très simples, mais si nous ajoutons à la condition imposée aux joueurs dans la première question cette restriction que chacun d'eux ne peut ajouter le même nombre plus de trois fois, l'analyse du problème n'est plus si aisée. Il est difficile dans ce cas, de dire s'il y a avantage ou non à commencer à jouer. Comme nous n'avons vu cette généralisation traitée dans aucun

[1] *Tit-Bits*, Londres, 17 juillet et 7 août 1897.

ouvrage, nous allons la présenter ici pour compléter notre récréation.

Supposons que chaque joueur ait en sa possession dix-huit cartes, trois portant le nombre six, trois portant le nombre cinq, trois marquées quatre, trois marquées trois, trois marquées deux et enfin trois portant le chiffre un. Ils jouent alternativement : A commençant par poser une de ses cartes, puis B, et ainsi de suite. Celui qui le premier pose une carte telle que la somme des points ou des nombres inscrits sur toutes les cartes posées égale 50 gagne la partie ; mais la partie est perdue lorsqu'en posant une carte, la somme totale de tous les points surpasse le nombre limite 50.

Le jeu peut se pratiquer en comptant mentalement ou en inscrivant les nombres, au fur et à mesure, sur un papier ; les cartes ne sont donc pas indispensables.

Supposons que A et B jouent comme il suit :

$$\begin{array}{lccccccccccc}
 & & & 8 & & 17 & & 25 & & 34 & & 43 \\
\text{jeu de A} — & 4 & — & \overline{1} & — & \overline{3} & — & \overline{4} & — & \overline{4} & — & \overline{5} \\
\text{jeu de B} — & 3 & — & 6 & — & 4 & — & 5 & — & 4\,. & & \\
 & 7 & & \overline{14} & & \overline{21} & & \overline{30} & & \overline{38} & &
\end{array}$$

Le jeu est arrêté à quarante-trois, B peut maintenant gagner, car il a toute liberté pour placer un trois, tandis que A n'a pas un autre quatre à poser à la suite ; si A joue un nombre moindre que quatre, B gagne à la mise suivante.

Voici encore une autre partie :

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
 & & & 10 & & 19 & & 25 & & 31 & & 38 & & 45 \\
\text{jeu de A} — & 6 & — & \overline{1} & — & \overline{3} & — & \overline{2} & — & \overline{1} & — & \overline{2} & — & \overline{2} \\
\text{jeu de B} — & 3 & — & 6 & — & 4 & — & 5 & — & 5 & — & 5 & — & 3\,, \\
 & \overline{9} & & \overline{16} & & \overline{23} & & \overline{30} & & \overline{36} & & \overline{43} & & \overline{48}
\end{array}$$

A est alors forcé de jouer un et B gagne en posant le même nombre 1.

Le jeu peut également se faire en donnant à chaque joueur deux cartes de chaque espèce (c'est-à-dire portant le même numéro) au lieu de trois.

Troisième exemple. — La récréation suivante est un peu plus compliquée.

Trois personnes P, Q, R choisissent trois objets que pour simplifier nous représenterons par les trois lettres *a*, *e*, *i* et la question consiste à déterminer l'objet choisi par chacune des personnes [1].

On prend 24 jetons dont on donne 1 à P, 2 à Q, et 3 à R, puis les 18 jetons qui restent étant posés sur la table, on se met à l'écart et on invite : 1° la personne ayant choisi l'objet représenté par *a*, à prendre une fois autant de jetons qu'elle en a déjà ; la personne dont le choix s'est porté sur l'objet désigné par *e*, à prendre deux fois autant de jetons qu'elle en possède ; enfin 3° la personne ayant choisi l'objet *i* à prendre quatre fois autant de jetons qu'elle en a déjà.

On demande alors combien il y a de jetons sur la table. Les trois objets *a*, *e*, *i* peuvent être distribués de six manières différentes entre les trois personnes P, Q, R et le nombre des jetons qui restent sur la table n'est naturellement pas le même à chaque fois. Les six restes possibles sont :

1, 2, 3, 5, 6 ou 7.

Bachet résume ces résultats dans la phrase mnémonique suivante :

1	2	3	5	5	7
Par fer	*Cesar*	*jadis*	*devint*	*si grand*	*prince*

En correspondance avec chaque reste on a un mot ou deux mots contenant deux des trois syllabes *a*, *e*, *i* ; par exemple, au reste 5 correspond le mot *devint* : la voyelle *e* contenue dans la première syllabe spécifie l'objet pris par P, la voyelle *i* de la seconde syllabe indique l'objet choisi par Q et, par suite, la dernière personne R possède l'objet *a*.

Oughtred [2] a imaginé cette nouvelle phrase mnémonique :

1	2	3	5	6	7
Salve	*certa*	*animæ*	*semita*	*vita*	*quies*

(1) Bachet. — *Problème* XXV, p. 187.
(1) *Mathématicall Recreations*, Londres, 1653, p. 20.

Extension. — M. Bourlet dans une très obligeante notice (¹) sur la seconde édition de cet ouvrage a donné une solution plus élégante de cette question en l'étendant au cas de n personnes P_0, P_1, P_2, ... P_{n-1} dont chacune fait choix d'un objet dans une collection de n objets comme des dominos ou des cartes. Le problème consiste à déterminer le domino ou la carte choisie par chaque personne.

Supposons que les objets soient marqués successivement 0, 1, 2, 3, 4..., $n-1$, au lieu d'être représentés par des voyelles.

Donnons un jeton à P_1 ; deux jetons à P_2, et, d'une façon générale, k jetons à P_k ; notons le nombre des jetons qui restent sur la table. Cela fait, dites à la personne ayant choisi l'objet numéroté o, de prendre autant de jetons qu'elle en a déjà, et d'une façon générale, à la personne ayant pris l'objet portant le numéro h de prendre n^h fois autant de jetons qu'elle en a déjà : ainsi, en admettant que la personne P_k ait choisi l'objet munéroté h, cette personne devrait prendre $n^h k$ jetons.

On compte alors le nombre total des jetons pris, (on l'obtient par différence), il a pour expression générale $\Sigma n^h . k$.

Divisons ce nombre par n, le reste de l'opération sera le numéro de l'objet pris par P_0 ; divisons le quotient par n, le nouveau reste sera le numéro d'ordre de l'objet choisi par P_1 ; divisons encore le quotient par n et le reste de l'opération nous donne le numéro que porte l'objet pris par P_2 ; et ainsi de suite.

En d'autres termes, en écrivant le nombre $\Sigma n^h k$ qui est l'expression du nombre total des jetons pris, dans le système de numération à base n, le $(h+1)^{me}$ chiffre, en partant de la droite du nombre, représente le numéro d'ordre de l'objet choisi par la personne P_h.

Ainsi en appliquant cette méthode au problème de Bachet avec trois personnes et trois dominos, on devrait donner un jeton à Q, deux jetons à R et P ne recevrait rien ; on dirait ensuite à la personne ayant pris le domino marqué o ou a, de prendre autant de

(¹) *Bulletin des Sciences Mathématiques*. Paris, 1893, vol. XVII, pp. 105-107.

jetons qu'elle en a déjà, à la personne ayant choisi le domino marqué 1 ou *e*, de prendre 3^1, c'est-à-dire trois fois autant de jetons qu'elle en possède, et enfin, à la personne qui a le domino marqué 2 ou *i*, de prendre 3^2 ou neuf fois autant de jetons qu'elle en a déjà.

En comptant les jetons au début de l'opération et en remarquant qu'il en a été donné trois aux personnes Q et R, on peut déterminer le nombre total des jetons pris par les trois personnes. En divisant alors ce nombre par 3, le reste de l'opération sera le numéro du domino choisi par P ; en divisant le quotient par 3, le nouveau reste sera le numéro du domino pris par Q, et enfin le dernier quotient représentera le numéro du domino que R a choisi.

Ajoutons encore que Bachet a discuté le cas où $n = 4$, qui avait été primitivement traité par Diego Palomino en 1599 ; mais comme la méthode de M. Bourlet est générale, nous ne jugeons pas utile d'examiner d'autres cas particuliers.

Décimation. — Le dernier de ces anciens problèmes auquel nous ferons allusion ici, consiste à disposer circulairement un certain nombre d'hommes de telle sorte que, si en les comptant à partir de l'un deux, on tue tous ceux qui occupent successivement le neuvième rang, ceux qui restent soient désignés à l'avance. Lorsque la décimation était pratiquée d'une façon courante pour châtier des rebelles ou des troupes révoltées, la connaissance du procédé à suivre pour arriver à un pareil résultat n'aurait pas été sans offrir de l'intérêt et aurait permis aux chefs de se débarrasser à coup sûr des mauvaises têtes.

Hegesippe (1) raconte que Joseph sauva sa vie par un tel stratagème. Suivant son récit, après la prise par les Romains de la ville de Jotopat, Joseph et quarante de ses coreligionnaires se réfugièrent dans une caverne. A son grand désappointement Joseph constata que, malgré ses exhortations, tous ses compagnons, à l'exception d'un seul, étaient dans l'intention de se tuer pour ne pas tomber

(1) *De Bello Judaico*, livre III, chapitre, XVI et XVIII.

entre les mains de leurs vainqueurs. Craignant d'exciter leur colère en cherchant plus longtemps à les dissuader d'accomplir un pareil acte de désespoir, il feignit de partager leur idée, mais il les engagea à procéder sans confusion et d'une façon régulière.

Il fut donc décidé que toute la troupe se placerait en cercle et que chaque troisième homme serait tué jusqu'à ce qu'il n'en restât plus qu'un seul qui devait alors se suicider. D'après la légende, Joseph se plaça avec son compagnon respectivement au 31e et au 16e rang, et on se rend facilement compte, sur une figure, du résultat obtenu.

La question est généralement présentée sous cette forme : Un vaisseau portant comme passagers quinze chrétiens et quinze turcs est assailli par une tempête d'une telle violence que le pilote déclare que pour sauver le navire et son équipage il est nécessaire de précipiter à la mer la moitié des passagers. Pour choisir les victimes on décide que les passagers seront disposés en rond et qu'en les comptant à partir d'un point déterminé, chaque homme occupant le neuvième rang serait précipité par dessus bord. Le problème consiste à placer les passagers de telle sorte que les quinze chrétiens soient sauvés (1).

Toutes les questions de cette nature peuvent être résolus facilement en comptant, et il est impossible de formuler une règle générale. Dans le cas qui nous occupe et, en partant du passager compté le premier, les chrétiens doivent occuper les places 1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 29. Cet arrangement peut se retrouver par la position des voyelles dans la phrase suivante donnée par Bachet (2).

4	5	2	1 3 1	1
Mort	*tu*	*ne*	*failliras*	*pas*
2	2	3 1	2	2 1
En	*me*	*livrant*	*le*	*trépas !*

(1) Bachet. — *Problème* XXIII, p. 174. Le même problème avait été primitivement énoncé par Tartaglia.

(2) M. Ball donne comme phrase mnémonique le vers suivant :

From	*number's*	*aid*	*and*	*art,*	*never*	*will*	*fame*	*depart*
4	5 2	13	1	1	2 2	3	1 2	2 1

où *a* compte pour 1. *e* pour 2, *i* pour 3, *o* pour 4 et *u* pour 5. Par suite (en ne considérant que les voyelles) on obtient l'ordre suivant.

4 chrétiens, 5 turcs, 2 chrétiens, 1 turc, 3 chrétiens, 1 turc, 1 chrétien, 2 turcs, 2 chrétiens, 3 turcs, 1 chrétien, 2 turcs, 2 chrétiens et 1 turc.

Bachet et Ozanam donnent d'autres phrases mnémoniques en français et en latin.

Quelques paradoxes arithmétiques et algébriques. — Nous allons maintenant donner quelques exemples de démonstrations arithmétiques et algébriques (1) conduisant à des résultats mani-

(1) De tous les paradoxes donnés dans le texte, le premier, le troisième et le cinquième sont bien connus. Le deuxième et le quatrième sont empruntés aux premiers principes d'algèbre de Laisant et Perrin, le sixième n'est pas connu, et le plus ancien ouvrage dans lequel nous nous souvenons l'avoir vu est notre « Algèbre », éditée à Cambridge en 1890, p. 430. Le septième est donné par G. C. Chrystal dans son « Algèbre » éditée à Edimbourg, 1889, Vol. II, p. 159. Le dixième est dû à M. G. T. Walker et, aussi loin que nos recherches ont été faites, n'a été publié jusqu'ici dans aucun ouvrage ; le onzième est de d'Alembert. M. Chartres à démontré au moyen de la mécanique la relation $1 = 2$ dans le n° de juillet 1891 du journal *Knowledge*. M. Bertrand a fait voir qu'on pouvait démontrer l'égalité $1 = -1$ en s'appuyant sur cette proposition du calcul intégral que, si les limites sont constantes, l'ordre d'intégration est indifférent (*) ; c'est-à-dire que l'on pouvait poser :

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \varphi dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \varphi dx \right] dy$$

φ étant une fonction de x et de y, mais si

$$\varphi = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^2,$$

on obtient
$$\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

(*) M. Bertrand dans son calcul intégral parle de ce cas remarquable d'exception et l'exemple qu'il donne, analogue à celui traité par M. Ball, vient à l'appui de sa remarque. Voici d'ailleurs comment il s'exprime :

« Il faut toujours excepter le cas où les différentielles que l'on intègre passent « par l'infini dans l'étendue des intégrations. Les intégrales, dans ce cas, n'ont pas festement impossibles. Les artifices employés dans ces calculs sont si évidents que, lors de la préparation des deux premières éditions de cet ouvrage, nous n'avions pas jugé utile d'y introduire cette série de questions, mais plusieurs de nos correspondants qui ne partageaient pas notre façon de voir ayant insisté et réclamé pour leur publication, nous les insérons dans cette nouvelle édition en les présentant pour ce qu'ils valent en réalité.

Premier paradoxe. — C'est un des plus vieux, mais non des plus intéressants : le voici en quelques lignes :

Soient deux nombres égaux a et b.

$$a\,.\,b = a^2 \quad , \quad \text{d'où } ab - b^2 = a^2 - b^2$$

« toujours de signification déterminée, et les théorèmes dans lesquelles elles figurent,
« n'étant pas suffisamment démontrés, peuvent conduire à des contradictions.

« On n'a pas, par exemple.

$$(1) \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)\,d\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2},$$

« parce que pour $\alpha = 0$ l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)dx}{(\alpha^2 + x^2)^2} \text{ devient } - \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \infty.$$

« L'application pure et simple des règles ordinaires aux deux membres de « l'équation (1) donne, en effet. un résultat absurde. On a :

$$\int \frac{(\alpha^2 - x^2)dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{x}{\alpha^2 + x^2} \quad \int_0^1 \frac{(\alpha^2 - x^2)dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{1 - \alpha^2},$$

« et

$$\int_0^1 d\alpha \int_0^1 \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2}.$$

« On trouverait de même

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}\,d\alpha = -\frac{\pi}{2},$$

« et lés deux membres de (1) sont par conséquent inégaux.

ou

$$b(a-b)=(a+b)(a-b);$$

il en résulte

$$b=a+b \quad \text{ou} \quad b=2b,$$

ou enfin

$$1=2$$

Deuxième paradoxe. — On a identiquement $4-10=9-15$; 4 est le carré de 2 ; 10 est égal à 2 fois le produit de 2 par $\frac{5}{2}$; de même, 9 est le carré de 3 et 15 est égal à deux fois le produit de 3 par $\frac{5}{2}$; complétons les carrés en ajoutant aux deux membres le carré de $\frac{5}{2}$ ou $\frac{25}{4}$, et nous aurons ainsi :

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2.$$

Extrayant les racines carrées des deux membres

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$$

et, par conséquent $2=3$.

L'absurdité vient de l'omission du double signe en extrayant la racine.

Troisième paradoxe. — Un autre exemple assez puéril est le suivant : Soient a et b deux nombres inégaux dont nous représenterons par c la moyenne arithmétique.

On a :

$$a+b=2c,$$

et

$$(a+b)(a-b)=2c(a-b),$$

ou

$$a^2-b^2=2ac-2bc, \quad \text{ou encore} \quad a^2-2ac=b^2-2bc.$$

On déduit de là :

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$$

ou

$$(a - c)^2 = (b - c)^2;$$

d'où

$$a = b$$

donc *tous les nombres sont égaux.*

Quatrième paradoxe. — Soient a et b deux nombres quelconques ayant c pour différence. Alors

$$a - b = c.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $a - b$, il vient

$$a^2 - 2ab + b^2 = ca - cb,$$

ce qui peut s'écrire

$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Divisant les deux membres par $a - b - c$, on a : $a = b$.
Donc encore *tous les nombres sont égaux.*

Cinquième paradoxe. — Un autre exemple dont l'idée première appartient à Jean Bernouilli peut s'établir comme il suit :

Nous avons évidemment

$$(-1)^2 = 1,$$

d'où, en prenant les logarithmes

$$2 \log(-1) = \log 1 = 0,$$

ou

$$\log(-1) = 0, \quad -1 = e^0,$$

donc

$$-1 = 1.$$

On peut arriver d'une autre façon à la même conclusion. Représentons par x une quantité satisfaisant à l'équation

$$e^x = -1,$$

et élevons les deux membres au carré, il vient :

$$e^{2x} = 1, \quad \text{d'où} \quad 2x = 0,$$

$$x = 0,$$

et

$$e^x = e^0$$

mais $\quad e^x = -1 \quad$ et $\quad e^0 = 1, \quad$ donc $\quad -1 = 1.$

Sixième paradoxe. — Voici encore un nouvel exemple ; Nous savons que :

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$$

Si $x = 1$, la série résultante est convergente, nous avons alors :

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots..$$

d'où

$$2\log 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \ldots.,$$

Groupons les termes ayant le même dénominateur et simplifions :

$$2\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots.. = \log 2.$$

Par suite $2 = 1$.

Septième paradoxe. — Voici un nouvel exemple différant peu du précédent :

$$\begin{aligned}
\text{Log}\ 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots\right) \\
&= \left\{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right)\right\} \\
&\qquad - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots\right) \\
&\qquad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 0.
\end{aligned}$$

Dans les exemples qui précèdent, l'erreur de raisonnement est manifeste, mais elle se découvre peut-être moins facilement dans les trois exemples suivants :

Huitième paradoxe. — Nous pouvons mettre l'identité $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ sous la forme

$$\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}},$$

d'où :

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}, \qquad \text{et} \qquad (\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{1})^2,$$

c'est-à-dire $-1 = 1$.

Neuvième paradoxe. — Nous avons également

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Dès lors :

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)},$$

ou

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{1}:$$

c'est-à-dire :

$$-1 = 1.$$

Dixième paradoxe. — Dans la démonstration qui suit on s'appuie sur ce fait qu'une identité algébrique est vraie quels que soient les symboles qui y figurent.

Or, nous avons une identité,

(1) $$\sqrt{x-y} = i\sqrt{y-x}$$

dans laquelle i représente $+\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$.

Mais une identité en x et y est nécessairement vraie quels que soient les nombres représentés par x et y.

Posons tout d'abord :

(2) $x = a$ et $y = b$ $\sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a}$.

Faisons ensuite :

(3) $x = b$, $y = a$ $\sqrt{b-a} = i\sqrt{a-b}$.

Or, puisque (1) est une identité, il s'ensuit que dans (2) et (3) le symbole i doit être le même, c'est-à-dire qu'il représente dans les deux cas

$$+\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{-1}.$$

Par suite de (2) et (3) nous déduisons :

$$\sqrt{a-b} \times \sqrt{b-a} = i^2\sqrt{b-a} \times \sqrt{a-b},$$

ou

$$1 = i^2,$$

c'est-à-dire

$$1 = -1.$$

Onzième paradoxe. — L'artifice suivant est dû à d'Alembert (1). Lorsque quatre nombres sont tels que le produit de deux d'entre eux est égal au produit des deux autres, ces quatre nombres forment une proportion et si le premier terme de cette proportion est plus grand que le second, le troisième terme sera également plus grand que le quatrième.

Ainsi, de $a.d = b.c$ on déduit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, et si on a : $a > b$, on aura aussi $c > d$.

Posons maintenant $a = d = 1$ et $b = c = -1$, nous avons bien quatre nombres satisfaisant à la relation $a.d = b.c$ et tels que $a > b$, on devrait donc avoir aussi $c > d$, c'est-à-dire $-1 > 1$, ce qui est absurde.

Douzième paradoxe. — La théorie mathématique des probabilités conduit à de nombreux paradoxes dont il nous suffira de donner un spécimen (2).

Supposons que l'on lance en l'air trois pièces de monnaie en observant et notant si chacune d'elles tombe « pile » ou « face ». La probabilité que les trois pièces tombent toutes côté « face » est évidemment $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, ou $\frac{1}{8}$; de même, la probabilité que les trois tombent côté « pile », est également $\frac{1}{8}$. Par suite, la probabilité que les trois pièces tombent de la même manière (c'est-à-dire, soit toutes côté face, soit toutes côté pile) est $\frac{1}{4}$. Mais, parmi les trois pièces ainsi lancées, deux au moins tombent de la même manière; maintenant la probabilité que la troisième pièce tombe, côté face est $\frac{1}{2}$, et la probabilité qu'elle tombe, côté pile $\frac{1}{2}$; dès lors la probabilité de la voir tomber comme les deux autres est représentée

(1) *Opuscules mathématiques*, Paris, 1761, vol. I, p. 201.

(2) Voir le journal anglais *Nature*, 15 février et 1er mars 1894, vol. XLIX, pp. 365-366, 413.

par $\frac{1}{2}$. Il semblerait donc résulter de là que la probabilité que les trois pièces tombent de la même manière est $\frac{1}{2}$ et non $\frac{1}{4}$.

Nous laissons à nos lecteurs le soin de déterminer quelle est, de ces deux conclusions contradictoires, celle qui doit être rejetée.

Nous pensons intéresser le lecteur en citant encore ce paradoxe.

Effectuant la division de 1 par $1 + x$, on trouve la série :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots$$

posons

$$x = 1$$

et il vient ;

$$\frac{1}{1+1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots..$$

mais en groupant par 2 les termes du second membre, on trouve 0 pour résultat, donc $\frac{1}{2} = 0$.

Daniel Bernouilli a cherché à prouver par un raisonnement métaphysique fondé sur la nature même de la série $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ que sa valeur est $\frac{1}{2}$.

Nous le résumons par curiosité : la somme des termes de cette série est égale à 0 ou à l'unité, selon que le nombre des termes est pair ou impair ; or, l'infini n'étant ni pair ni impair, il s'ensuit qu'il n'y a pas plus de raison pour que la somme de la série infinie soit 0 ou 1, et qu'ainsi d'après les règles du calcul des probabilités, elle doit être :

$$\frac{1+0}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}.$$

Leibnitz avait déjà employé ce raisonnement (*Œuvres de Leibnitz*, tome III, lettre adressée à Wolf).

Un géomètre italien (le P. Grandi) au commencement du

XVIII[e] siècle, prenant ce résultat à la rigueur, a cru y trouver une démonstration de la création.

Ceci nous rappelle que le P. Gratry prétendait démontrer, non par $A + B$, mais par $\frac{A}{0}$, que Dieu ou l'infini peut créer quelque chose de rien. Parce que, disait-il, en multipliant $\frac{A}{0}$ qui est la représentation mathématique de l'infini, par 0, on obtient $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire une valeur quelconque.

Le père Enfantin traitait cette démonstration de très ingénieuse (?) mais il prouvait que le vaillant théologien aboutissait à démontrer le contraire de ce qu'il voulait établir puisque, disait-il, pour faire quelque chose avec zéro, il fallait au préalable être en possession de A qui, dans le langage algébrique, désigne une valeur parfaitement déterminée.

QUESTIONS DIVERSES

1. *Chargé par un ami de faire des aumônes,*
Je dois distribuer cent francs à cent personnes,
Et cent pièces en tout, les unes d'argent blanc :
Beaux écus de cent sous, belles pièces d'un franc ;
D'autres en cuivre rouge, à récents millésimes,
Très brillantes encore et valant dix centimes.
J'ai trouvé deux moyens en bon calculateur
De suivre exactement le vœu du donateur,
Et, comme il le voulut, de faire des largesses
En donnant les cent francs avec juste cent pièces.
Quels sont ces deux moyens ? Dis-le moi, cher lecteur.

Réponse. — 18 pièces de 5 francs, 2 de 1 franc et 80 de 0,10 c.
ou 9 » 5 » 51 de 1 » 40 de 0,10 c.

2. *Un marchand possède 17 moutons qu'il veut donner à ses trois fils dans la proportion suivante : la moitié à l'aîné, le tiers au second, et le*

neuvième au troisième. On demande combien il revient de moutons à chacun.

Solution fantaisiste. — Ne sachant comment répartir exactement les 17 moutons entre ses trois fils, notre marchand va consulter le juge de paix de son canton, qui, après mûre réflexion lui dit : « venez me trouver avec vos 17 moutons et un 18ᵉ que vous emprunterez pour un moment à l'un de vos voisins et je me charge de vous tirer d'embarras. » Voici comment il s'y est pris :

En possession des $17 + 1 = 18$ moutons, il en donne la moitié à l'aîné des enfants, soit 9 ; au second des enfants, il donne le $\frac{1}{3}$ de 18 soit 6, et enfin au troisième, le neuvième de 18, c'est-à-dire 2.

Les 17 moutons sont donc ainsi répartis entre les trois enfants et le marchand satisfait peut rendre le mouton emprunté.

3. *Un chasseur affamé rencontre deux bergers qui consentent à partager avec lui des petits fromages qu'ils allaient manger. L'un avait 5 fromages et l'autre 3. En partant, le chasseur leur laisse 8 francs pour payer les fromages. Comment doit être partagée cette somme ?*

Le premier berger dit qu'il prendrait 5 francs et laisserait les 3 autres à son camarade. Ce dernier répliqua qu'il fallait d'abord partager également les 8 francs, 4 à chacun et que, lui, il rembourserait le prix d'un fromage.

Pour se mettre d'accord il vont trouver l'instituteur du village le plus voisin qui leur dit : vous avez partagé chaque fromage en trois parts égales. et vous avez mangé, le chasseur et vous, chacun huit parts. Vous, le premier berger qui aviez cinq fromages ou quinze parts, vous en avez cédé sept au chasseur. Vous, le second berger, qui n'aviez que trois fromages ou neuf parts, vous n'avez pu qu'en donner une au chasseur. Le premier de vous a donc gagné *sept* francs et le second *un* franc [1].

[1] Cette question et la précédente sont d'origine arabe.

4. *On trace sur le tableau 20 traits verticaux et on demande de les effacer tous, en cinq coups de torchon, de telle sorte qu'à chaque coup, on efface un nombre impair.*

Interprétée à la lettre cette question est impossible, parce que 5 nombres impairs ne peuvent jamais faire un nombre pair.

Mais il y a une manière de s'entendre qui permet de résoudre la question. Il suffit en traçant les traits de les numéroter comme ci-dessous.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Du premier coup de torchon on efface les 4 premiers traits avec les chiffres correspondants 1, 2, 3, 4.

Au 2[e] coup, on efface les 4 suivants 5, 6, 7, 8, et ainsi de suite. On efface chaque fois un nombre impair, 1 ou 3 du premier coup, 5 et 7 au second.

5. *Partager le nombre 11 en deux parties telles que la différence entre le carré de leur somme et la somme des carrés de ces parties soit égale à 56.*

Le double produit des deux parties est égal à 56. Le produit des deux parties vaut donc $\frac{1}{2}$ 56 ou 28.

Il s'agit de partager 28 en deux facteurs dont la somme donne 11. On reconnaît sans peine que ces deux facteurs sont 4 et 7.

6. *Un marchand achète 11 moutons à 35 francs pièce. Il en perd un certain nombre et revend ceux qui lui restent en augmentant par tête le prix d'achat d'autant de fois 5 francs qu'il a perdu de moutons. En opérant ainsi ce marchand n'a ni gagné ni perdu. On demande combien il a perdu de moutons.*

Le prix d'achat des moutons est 35×11 ou 385 francs, c'est également le prix de vente des moutons qui restent.

Le nombre des moutons qui restent est un diviseur de 385 et en effectuant la division on trouve pour quotient un nombre égal à 35 augmenté d'autant de fois 5 qu'il y a d'unités dans le nombre des moutons vendus.

Or, 385 ne contient qu'un seul facteur 5.

Donc le diviseur de 385 qui représente le nombre des moutons qui restent ne contient pas ce facteur 5, c'est-à-dire que ce diviseur est l'un des nombres 1, 7, 11 ou 77.

Il ne peut être ni 11, ni 77, il est donc nécessairement 7. Le marchand a donc perdu 11 — 7 ou 4 moutons.

7. *Une fermière envoie ses trois filles au marché en leur disant : Voilà 90 œufs. Suzanne, l'aînée, en a 50 dans son panier. Charlotte, la cadette, en a 30, et Marie, la plus jeune, en a 10. Vous vendrez chacune vos œufs le même prix et vous me rapporterez la même somme d'argent.*

Comment s'arrangèrent les trois jeunes filles pour remplir les instructions de leur mère ?

Les jeunes filles commencent par vendre leurs œufs à raison de 7 pour 1 sou. Suzanne, l'aînée, en vend donc 49 pour 7 sous et il lui reste 1 œuf. Charlotte, la cadette, en vend 28 pour 4 sous et il lui reste 2 œufs. Marie, vend 7 œufs pour 1 sou, et il lui reste 3 œufs. A la fin du marché, les œufs devenant rares, les sœurs vendent ceux qui leur restent, à raison de 3 sous pièce.

Suzanne en a 1 qu'elle vend 3 sous.

Charlotte vend les 2 qui lui restent pour 6 sous.

Et Marie donne les 3 qui lui restent pour 9 sous.

Les trois sœurs ont donc reçu chacune 10 sous et les œufs ont été vendus le même prix.

8. *Le nombre un*

Un 1 se trouvant à la tête
De quelques numéros posé;
Autant que mille était prisé
Et de lui chacun faisait fête.

Le lendemain, étrange cas !
Notre 1 se trouve un peu plus bas ;
Et dix fois moins considérable
Chacun le trouve aussitôt.
De ce revers qu'il trouve inconcevable
A son voisin il demande le mot.
« Ami, dit-il au 9, comment de grâce,
« En un seul jour, puis-je être ainsi changé ?. »
— « Ce n'est point, lui répond le chiffre interrogé,
Vous qui l'êtes, c'est votre place !
« Gardez avec soin votre rang,
« Car c'est ce rang que l'on honore !
« Demain, si vous baissez d'un cran,
« Vous vaudrez dix fois moins encore ! »
Ceci vous montre, cher lecteur,
Quelle est au juste la valeur
D'un, premier de tous les nombres,
Quand il est seul, sans autres nombres,
C'est l'unité ; mais c'est bien différent
Lorsque devant plusieurs on lui fait prendre rang.

9. *Le voyage d'une pièce d'or.* — Si un homme gagne à voyager, il n'en est pas de même pour une pièce d'or. — Alfred de Vigny a voulu se rendre un compte exact de la perte provenant d'un change continuel. Il partait pour ce voyage d'au-delà du Rhin que font aujourd'hui tous les personnages politiques et tous les penseurs. En quittant la France, il se rendit en premier lieu à Francfort. Là, il s'adressa à un riche négociant, auquel il était recommandé, et il le pria de lui changer une pièce de vingt francs en diverses monnaies du pays. Le poète prit cette monnaie et il la plaça dans une bourse particulière. Arrivé à Munich, il changea la monnaie de Francfort contre une égale somme de monnaie bavaroise. A Berlin, il changea l'argent de Munich contre l'argent prussien. A Vienne, il fit le même jeu, puis à Milan, puis à Naples, puis à Rome. Après avoir parcouru l'Italie, il passa en Suisse, descendit le Rhin, traversa la Hollande et la Belgique, changeant

toujours la monnaie du pays qu'il quittait pour la monnaie du pays dans lequel il arrivait s'adressant partout à des personnes dignes de confiance, et s'assurant qu'on ne le trompait pas et qu'on ne lui retenait rien pour l'escompte. Tout en cheminant, la bourse aux vingt francs perdait sensiblement de son poids. De pays en pays, la monnaie devenait plus légère et moins nombreuse. A la fin du voyage, c'est-à-dire le 15 mars 1847, l'auteur de Stello changea les débris de sa pièce contre de la monnaie de France, et savez-vous ce qui restait de cette pièce d'or qui n'avait rien dépensé ? Il restait *soixante centimes*. Alfred de Vigny en prit occasion pour écrire sur son carnet l'aphorisme que voici ; *pour un artiste voyageur, un napoléon ne vaut que douze sous.*

10. *Démontrer que sur la terre deux hommes au moins ont le même nombre de cheveux.*

Un Anglais, le docteur Erasmus Wilson, à la suite de patientes investigations, est arrivé à déterminer le nombre de cheveux qui ornent une tête humaine. Il a estimé que chaque pouce carré de la tête contient 1 066 cheveux. Or, la superficie de la tête étant à peu près de 120 pouces carrés, la tête entière est couverte en moyenne de 127920 cheveux.

Partant de là, on peut avancer que toute personne a au moins 1 cheveu et au plus 130 000 cheveux.

Cela posé, considérons 1000000 d'hommes, chiffre inférieur à la seule population de la France. Si vous ne voulez pas admettre que quelques-uns d'entre eux aient le même nombre de cheveux, c'est que chacun d'eux a un nombre différent de cheveux. Il faut donc pour cela que l'un d'eux ait un cheveu, un autre 2 cheveux, un autre encore 3 cheveux, et ainsi de suite jusqu'à 130 000. Mais le 130 001 et les suivants, qu'auront-ils puisqu'une tête humaine ne peut pas avoir plus de 130 000 cheveux et moins de un.

Il faut donc nécessairement que quelques hommes et, par suite, au moins deux, aient le même nombre de cheveux.

Il paraîtrait que cette question fut posée et expliquée par Nicole, un des auteurs de la Logique de Port Royal à la duchesse de Longueville, qui n'y aurait d'ailleurs rien compris.

On établirait de même, qu'il est nécessaire que deux oiseaux aient autant de plumes, deux poissons autant d'écailles, deux arbres autant de feuilles, de fleurs ou de fruits, et peut-être autant de feuilles, fleurs et fruits tout ensemble.

On peut encore dire que dans un livre, dont le nombre des pages est plus grand que celui des mots contenus dans chaque page, on trouvera certainement deux pages contenant le même nombre de mots.

Deux hommes peuvent-ils être à la fois oncle et neveu l'un de l'autre (1).

Sans entrer dans des détails prolixes auxquels le lecteur suppléera facilement, nous donnons trois solutions de cette question amusante. H et H_1 sont deux veufs qui ont chacun une fille F_h et F'_h.

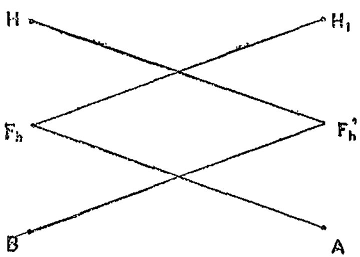

Fig 1.

H_1 épouse la fille F_h de H et de ce mariage naît un fils A.

H épouse la fille F'_h de H_1 et de ce mariage est issu un fils B.

Examinons la parenté de A et de B.

B fils de H est frère de F_h qui est la mère de A, donc B est l'oncle de A.

B est le fils de F'_h qui est la sœur de A, donc B est le neveu de A.

Au lieu de prendre deux veufs, on peut examiner le cas de deux veuves V et V_1 ayant chacune un fils F_v, F'_v.

(1) Macfarlane. — *Problèm in relationship. Edinb. Proc.* XV, 1888, p. 116-117.

W. Ahrens, Mathematische unterhalungen und spiele. Leipzig, 1901, p. 78, 79.

V épouse le fils F'_v de V_1 et du mariage naît un fils A.

V_1 épouse de son côté le fils F_v de V et du mariage est issu un fils B.

A et B sont encore oncle et neveu.

Considérons, en troisième lieu, le cas d'un veuf V et d'une veuve V' ayant le premier un fils F_v et la seconde une fille F'.

V épouse la fille F_v' de V' et de ce mariage naît un fils B.

V' épouse le fils F_v de V et de ce mariage naît un fils A.

B fils de V est frère de F_v qui lui, est le père de A, donc B est l'oncle de A.

B fils de F'_v sœur de A, est également le neveu de A.

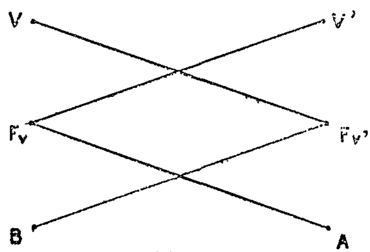

Fig. 2.

Il est évident que la question peut être variée en considérant les cas de parentés suivants ; Tante et nièce ; — oncle et nièce ; tante et neveu.

Mais le dernier exemple donné prête, en jouant sur les mots, à une curieuse facétie.

F_v fils du veuf V a épousé V', c'est-à-dire la mère de la femme F'_v, de son père ; mais la mère de la femme de son père est sa grand'mère ; donc F_v est marié avec sa grand'mère ; de plus, le mari de sa grand'mère est son grand-père ; donc enfin F_v est son propre grand-père.

Nous rapprocherons de cette question la suivante empruntée à l'ouvrage de Legouvé, *soixante ans de souvenirs* (tome II, p. 194, 195).

Est-il possible que deux hommes aient une même sœur et ne soient pas parents ?

L'explication est simple : un homme A se marie, B est sa femme et de cette union une fille C est issue.

A et B divorcent.

A se remarie et a un fils D de ce second mariage.

B se remarie à son tour et a un fils E,

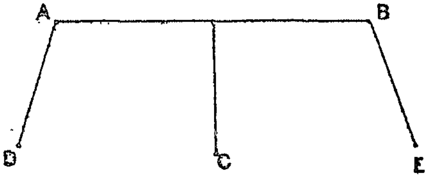

Fig. 3.

D est frère de C par le père, E est également frère de C par sa mère et cependant D et E ne sont pas parents.

Le cas que nous citons était celui d'Eugène Sue et d'Ernest Legouvé. M. Sue (A) s'était marié avec M[lle] Sauvan (B). Ils eurent une fille (C) Flore Sue.

Après divorce, M. Sue s'étant remarié, eut un fils (D), Eugène Sue, le romancier connu.

M[lle] Sauvan de son côté se maria avec M. Legouvé et eut comme fils Ernest Legouvé (E).

Eugène Sue et Ernest Legouvé avaient donc tous les deux pour sœur, Flore Sue.

Le problème des poids de Bachet (1). — L'un des plus difficiles problèmes proposés par Bachet consiste à déterminer le plus petit nombre de poids à employer pour peser un nombre quelconque de livres de 1 à 40 livres inclusivement. Bachet donne deux solutions qui sont :

1° La série des poids de 1, 2, 4, 8, 16 et 32 livres ;

2° La série des poids de 1, 3, 9 et 27 livres.

Si les poids ne peuvent être placés que dans un seul des plateaux de la balance, la première série donne la solution de la question, comme l'avait déjà fait remarquer Tartaglia en 1556 (2).

(1) BACHET. — Appendice. *Problème* V, p. 215. Dans le problème de Bachet il s'agit de la livre, ancienne mesure de poids, mais le lecteur peut substituer le mot *kilo* au mot *livre*.

(2) *Trattato de numeri e mesure*, Venise, 1556, vol. II, livre I, chap. XVI, art. 32.

Mais, en admettant, comme Bachet, que les poids peuvent être indifféremment placés dans les deux plateaux de la balance, la seconde série donne le plus petit nombre de poids pour résoudre la question.

Son raisonnement est le suivant : pour peser 1 livre, un poids de 1 livre est nécessaire. Pour peser 2 livres, il nous faut soit un poids de 2 livres, soit un poids de 3 livres ; mais si nous ne voulons prendre qu'un seul nouveau poids (en plus du poids de 1 livre déjà en notre possession) aucun poids supérieur à 3 ne nous donnera le moyen d'effectuer la pesée de 2 livres. Il nous faut donc choisir entre les poids 2 et 3.

Or, si nous prenons le poids de 2 livres, nous pourrons peser 1 livre, 2 livres et 3 livres. Tandis que si nous prenons le poids de 3 livres, nous pourrons former les poids de 1 livre $(3 - 1)$ ou 2 livres, 3 livres et $(3 + 1)$ ou 4 livres. Par conséquent, il est plus avantageux de prendre le poids de 3 livres.

De même, pour nous permettre de peser 5 livres, il nous faut un autre poids ne dépassant pas 9 livres, et avec un pareil poids il nous est possible d'effectuer toutes les pesées de 1 livre à 13 livres. C'est donc le poids de 9 livres qu'il faut choisir.

Le nouveau poids à prendre doit être $2\,(1 + 3 + 9) + 1$, c'est-à-dire 27 livres, et nous pourrons alors faire toutes les pesées de 1 livre à 40 livres inclusivement.

En résumé, 4 poids seulement sont nécessaires, ce sont les poids de 1 livre, 3 livres, 3^2 livres et 3^3 livres.

On montrerait de la même manière que la série des poids $1, 3, 3^2, 3^3 \ldots 3^{n-1}$ livres nous permettrait de peser un nombre entier quelconque de livres depuis 1 livre jusqu'à $(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1})$ livres, c'est-à-dire jusqu'à $\frac{1}{2}\,(3^{n-1})$ livres et c'est le plus petit nombre de poids avec lesquels ces pesées peuvent être effectuées.

Pour déterminer l'arrangement des poids nous permettant d'effectuer une pesée d'un nombre quelconque N de livres, il suffit d'écrire ce nombre N dans le système de numération à base 3, en ayant soin, au fur et à mesure que l'on obtient les chiffres successifs, d'opérer de façon à n'avoir pour restes que 0, 1 ou -1 : ainsi, le reste 2 devra être pris sous la forme $3 - 1$, c'est-à-dire que l'on augmentera, dans ce cas, le quotient obtenu d'une unité en prenant pour reste -1. Cette règle est expliquée dans tous les traités élémentaires d'algèbre.

Bachet, dans son raisonnement, ne montre pas que son résultat soit unique ou qu'il conduise au plus petit nombre possible de poids demandés. Cette lacune a été comblée récemment par le Major Macmahon qui a discuté le problème bien plus difficile (dont celui de Bachet n'est, d'ailleurs, qu'un cas particulier) consistant à déterminer toutes les séries possibles de poids (qui ne sont pas nécessairement inégaux), permettant d'effectuer une pesée d'un nombre entier quelconque de livres (ou de kilos) de 1 à n inclusivement : 1° quand les poids ne peuvent être mis que sur un seul plateau ; 2° quand les poids peuvent être placés indifféremment dans les deux plateaux. Il a aussi étudié les modifications qu'il est nécessaire de faire subir aux résultats quand on impose l'une ou les deux conditions suivantes :

a) Il n'est pas possible d'effectuer d'autres pesées avec les poids entrant dans chaque série ;

b) Chaque pesée ne peut s'effectuer que d'une seule manière, c'est-à-dire est unique (1) ;

Pour le premier cas, la méthode revient à décomposer en facteurs l'expression $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, chaque facteur étant de la forme $1 + x^a + x^{2a} + \ldots + x^{ma}$; le nombre des solutions dépend de la composition de $n + 1$.

Pour le second cas, la méthode consiste à décomposer l'expression $x^{-n} + x^{-n+1} + \ldots + x^{-1} + 1 + x + \ldots + x^{n-1} + x^n$ en fac-

(1) Voir son article dans le *Quarterly Journal of Mathematics*, 1886. Vol. XXI, pp. 367-373. Un aperçu de la méthode est donné dans le journal *Nature*, 4 décembre 1890. Vol. XLII, pp. 113-114.

teurs de la forme $x^{-ma} + \ldots + x^{-a} + 1 + x^{a} + \ldots + x^{ma}$; le nombre des solutions dépend de la composition de $2n + 1$.

Le problème de Bachet entre dans le second cas, $n = 40$.

L'analyse de Macmahon montre qu'il y a huit manières de décomposer en facteurs l'expression

$$x^{-40} + x^{-39} + \ldots + 1 + \ldots + x^{39} + x^{40},$$

tout d'abord, il y a l'expression elle-même dans laquelle $a = 1$. $m = 40$; en second lieu l'expression est égale à $\frac{1 - x^{81}}{x^{40}(1 - x)}$ et sous cette forme, on voit qu'elle peut se transformer en un produit de deux facteurs $\frac{1 - x^{3}}{x(1 - x)}$ et $\frac{1 - x^{81}}{x^{39}(1 - x^{3})}$ par conséquent, elle peut être décomposée en deux facteurs de la forme ci-dessus en supposant dans l'un $a = 1$, $m = 1$ et dans l'autre $a = 3$, $m = 13$.

Comme troisième solution, on trouve une décomposition en deux facteurs dans l'un desquels $a = 1$, $m = 4$, et dans l'autre $a = 9$, $m = 4$.

Pour la quatrième solution, nous avons trois facteurs : dans le premier $a = 1$, $m + 1$; dans le second $a = 3$, $m = 1$, et dans le troisième $a = 9$, $m = 4$.

Cinquième solution; décomposition en deux facteurs; dans l'un $a = 1$, $m = 13$, et dans l'autre $a = 27$, $m = 1$.

Sixième solution; décomposition en trois facteurs; dans le premier, $a = 1$, $m = 1$; dans le second, $a = 3$, $m = 4$ et dans le second, $a = 3$, $m = 4$ et dans le troisième, $a = 27$, $m = 1$.

Septième solution; nouvelle décomposition en trois facteurs : dans le premier, $a = 1$, $m = 4$; dans le second, $a = 9$, $m = 1$ et dans le troisième, $a = 27$, $m = 1$.

Enfin, huitième solution; décomposition en quatre facteurs; dans le premier, $a = 1$, $m = 1$; dans le second, $a = 3$, $m = 1$; dans le troisième, $a = 9$, $m = 1$ et dans le dernier $a = 27$, $m = 1$.

Ces résultats montrent qu'il existe huit séries de poids avec lesquels il est possible de peser un nombre entier quelconque de livres de 1 à 40 inclusivement en s'imposant les conditions 2° (*a*) et (*b*) spécifiées plus haut.

Si nous convenons de représenter n poids égaux chacun à p par la notation p^n, ces huit solutions sont :

$$1^{40};\ 1,\ 3^{13};\ 1^4, 9^4;\ 1,\ 3,\ 9^4;\ 1^{13},\ 27;\ 1,\ 3^4 27;\ 1^4,\ 9,\ 27;\ 1,\ 3,\ 9,\ 27.$$

La dernière est celle de Bachet ; non seulement elle est celle qui utilise le plus petit nombre de poids ; mais elle est aussi la seule dont tous les poids sont inégaux [1].

Terminons ce chapitre en montrant sur trois exemples comment il arrive fréquemment que la solution d'un problème conduit à des résultats différents de ceux qu'un examen trop superficiel avait laissé entrevoir.

1. — Deux commis sont payés à raison : le premier de 1 000 francs par an avec une augmentation annuelle de 20 francs, le second à raison de 1 000 francs, comme le premier, avec une augmentation semi-annuelle de 5 francs. Sachant que les paiements se font tous les ans pour le premier et tous les six mois pour le second, on demande quel est celui qui gagne le plus.

C'est le dernier et en voici la raison :

A la fin de la première année le premier commis touche 1 000 fr. tandis que le second a reçu 500 fr. + 505 fr. ou 1 005 francs.

A la fin de la seconde année, le premier commis reçoit 1 020 fr., et le second a touché 510 fr. + 515 fr. ou 1025 francs.

A la fin de la troisième année, le premier commis touche 1 040 fr. et le second a reçu 520 fr. + 525 fr. ou 1 045 francs.

On voit donc, sans aller plus loin, que le second commis gagne tous les ans 5 francs de plus que le premier.

[1] C'est dans l'*Arithmetica integra* de Stifel (Norimberge, 1554) qu'on voit pour la première fois énoncer cette propriété des termes de la progression 1, 3, 9, 27, ...

2. — Un homme parie $\frac{1}{n}$ de sa fortune sur un événement à chances égales (par exemple qu'une pièce de monnaie lancée en l'air, tombe côté face ou côté pile). Il recommence toujours ainsi, pariant à chaque fois $\frac{1}{n}$ de ce qu'il possède. En supposant finalement que le nombre de fois qu'il a gagné est égal au nombre de fois qu'il a perdu, on désire savoir s'il y a eu pour lui profit ou perte. — En réalité il a perdu.

3. — Voici encore une autre question bien simple pour laquelle nous avons reçu souvent des réponses erronées.

Deux gobelets de capacité égale sont remplis à moitié, le premier avec du vin, le second avec de l'eau. On prend dans le premier une certaine quantité quelconque de vin (par exemple une cuillère) que l'on verse dans le second gobelet, puis on prend dans ce dernier la même quantité du mélange obtenu, que l'on verse dans le gobelet contenant le vin. Comme résultat de cette double opération la quantité de vin enlevée du premier gobelet est-elle plus grande ou plus petite que la quantité d'eau enlevée du second ?

Sur vingt personnes, dix-neuf répondront certainement qu'elle est plus grande, et cependant il n'en est rien.

CHAPITRE III

QUELQUES PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE *(suite)*

QUELQUES PROBLÈMES TIRÉS DE L'ANTHOLOGIE GRECQUE [1]

SOCRATE. — *Polycrate, tyran de Samos, demande à Pythagore le nombre de ses élèves.*

Fortuné Pythagore, rejeton héliconien des Muses, dis-moi combien, dans ton école, tu as d'athlètes que tu dresses aux glorieux exercices de la philosophie. — Je vais te le dire, Polycrate : la moitié étudie les belles sciences mathématiques; l'éternelle nature est l'objet des travaux d'un quart; un septième s'exerce au silence et à la méditation; il y a de plus

[1] L'Anthologie grecque est une collection de petits poëmes nommés épigrammes dont l'édition la plus complète est celle qui a été donnée par Frédéric Jacobs (1813-17) en 3 vol. in-8°. Parmi ces poèmes il y en a plusieurs qui renferment des énoncés où il s'agit de trouver des nombres remplissant certaines conditions. On trouve le texte grec, la traduction en vers latins et les solutions de 45 de ces épigrammes dans l'*Histoire des Mathématiques* de Heilbronner (p. 845).

trois femmes dont Théano est la plus distinguée. Voilà le nombre de mes disciples qui sont aussi ceux des Muses.

Imitation en vers latins

Dic, Heliconiădum decus, ô sublime Sororum
Pythagora ! tua quot tyrones tecta frequentent,
Qui, sub te, sophiæ sudant in agone magistro ?
Dicam; tuque animo mea dicta, Polycrates hauri.
Dimidia horum pars præclara mathemata discit;
Quarta immortalem naturam nosse laborat,
Septima, sed tacite, sedet atque audita revolvit;
Tres sunt fæminei sexûs.

Il s'agit de trouver un nombre dont une moitié, un quart, un septième, en y ajoutant 3, fassent ce nombre lui-même.

On trouve facilement que ce nombre est 28.

— *Je suis une Minerve d'or massif. Le métal est un don de jeunes poëtes; Charisius en a fourni la moitié; Thespia, la huitième partie; Solon, la dixième; Thémison, la vingtième. Les neuf autres talents et l'œuvre même de ma statue, on les doit à Aristonice.*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \text{ du poids total} = \frac{31}{40} \text{ du poids.}$$

Les $\frac{9}{40}$ du poids total $= 9$ talents
et le poids cherché $= 40$ talents.

— *Cypris dit à l'Amour qui avait l'air chagrin : « Quel est, mon fils, le sujet de ta peine ? » — « Les Muses m'ont à l'envi pillé les pommes que j'avais cueillies sur l'Hélicon. Clio m'en a pris le cinquième; Euterpe, le douzième; la divine Thalie, le huitième; Melpomène, le vingtième; Terpsichore, le quart; Erato, le septième; Polymnie m'en a volé trente; Uranie cent vingt; Calliope s'en est chargée de trois cents;*

et moi, je viens vers toi, les mains presque vides, emportant ce qu'ont laissé les déesses, cinquante pommes. »

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{715}{840} \text{ et } 30+120+300+50=500$$

donc les $\frac{125}{840}$ du nombre total valent 500.

Ce nombre est donc $500 \times \frac{840}{125} = 3360$.

— *Le puissant Alcide demandait à Augias le nombre de ses bœufs. Le roi lui répondit : « sur les bords de l'Alphée, il y en a la moitié; le huitième de mon troupeau est à paître sur la colline de Saturne; le douzième est près de la borne de Taraxippe; le vingtième pâture aux environs de la divine Elis. J'en ai laissé le trentième dans les herbages d'Arcadie; tu verras ici le reste du troupeau, cinquante bœufs.* »

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{95}{120}$$

donc les $\frac{25}{120}$ du nombre des bœufs $= 50$.

Le nombre des bœufs $= 50 \times \frac{120}{25} = 240$.

— *O toi qui indiques si bien les heures, combien s'en est-il écoulé depuis ce matin ? Il reste deux fois les deux tiers des heures écoulées.*

Les heures écoulées + les heures qui restent donnent 12 heures [1].

Les heures qui restent valent les $\frac{4}{3}$ des heures écoulées.

Donc les $\frac{7}{3}$ des heures écoulées valent 12.

Heures écoulées $= 12 \times \frac{3}{7} = 5$ h. $\frac{1}{7}$, heures qui restent 6 h. $\frac{6}{7}$.

[1] La durée du jour est divisée en 12 parties, comme faisaient les anciens.

Traduction en vers latins

Dic quota nunc hora est ? Superest tantum ecce diei
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

— *Je suis un lion de bronze; deux jets jaillissent de mes yeux, un autre de ma gueule, un autre de mon pied. En deux jours, mon œil droit remplit le bassin, mon œil gauche en trois, et mon pied en quatre jours. Pour le remplir six heures suffisent au jet d'eau de ma gueule. Si tous les jets, et de mes yeux et de ma gueule et de mon pied, coulent à la fois, en combien d'heures le bassin sera-t-il rempli ?*

En 1 heure, les yeux, la gueule et le pied coulant ensemble, remplissent $\frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{1}{96} + \frac{1}{6}$ ou $\frac{61}{288}$ du bassin.

Donc le bassin sera rempli en $\frac{288}{61}$ d'heure ou en 4 h. $\frac{44}{61}$.

Sur les trois statues de Zéthus, d'Amphion et de leur mère.

Ensemble, nous pesons 20 mines. Si tu prends de moi Zéthus le tiers et d'Amphion le quart, tu trouveras six, et tu auras le poids de notre mère.

x poids de Zéthus, y poids d'Amphion.

$$x + y = 20 - 6 = 14 \quad \text{et} \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6$$

ou

$$4x + 3y = 6 \times 12$$

d'où

$$x = 42 - y + \frac{y}{4}, \quad y = 4 \text{ ou } 8,$$

d'où

$$x = 10 \text{ ou } 6.$$

Zéthus pèse 6 mines. Amphion 8 mines.

Les Grâces portaient des paniers de pommes, et dans chaque panier il y avait le même nombre de fruits. Les neuf muses les rencontrèrent, *et leur demandèrent des pommes. Elles en donnèrent à chacune une quantité égale, et les neuf muses et les trois Grâces en eurent toutes autant. Dites combien elles en donnèrent, et comment elles en avaient toutes un nombre égal.*

Imitation latine

Aurea mala ferunt Charites, æqualia cuique
Mala insunt calatho; Musarum his obvia turba
Mala petunt, Charites cunctis æqualia donant;
Tunc æqualia tres contingit habere, navemque.
Dic quantum dederint numerus sit ut omnibus idem ?

Le nombre total des pommes (ou des oranges suivant l'imitation latine) que possédaient le 3 Grâces est évidemment un multiple de 3. Après le partage, les Grâces et les Muses ont chacune le même nombre de pommes, donc le nombre cherché est encore divisible par 12. 3 étant facteur de 12, nous n'avons à considérer que ce dernier nombre qui est le plus petit de tous ceux satisfaisant à la question.

Tous les multiples de 12 répondent également à la question.

Fais-moi une couronne d'or, de cuivre, d'étain aussi et de fer, du poids de 60 mines. Que l'or avec le cuivre y entrent pour deux tiers, l'or et l'étain pour trois quarts, en même temps que l'or et le fer pour trois cinquièmes. Combien faut-il, dis-moi, que tu emploies d'or ? Combien de cuivre ? Dis aussi combien d'étain, enfin combien de fer, pour me fabriquer cette couronne de soixante mines.

Si x, y, z et u sont les poids d'or, de cuivre, d'étain et de fer, on a :

$$x + y + z + u = 60$$
$$x + y = 40$$
$$x + z = 45$$
$$x + u = 36$$

d'où

$$x = 30 \text{ mines } \frac{1}{2}, \qquad y = 9 \text{ mines } \frac{1}{2},$$

$$z = 14 \text{ mines } \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u = 5 \text{ mines } \frac{1}{2}.$$

— A. *J'ai ce qu'a le second et le tiers de la part du troisième;*
B. *J'ai ce qu'a le troisième et le tiers de ce qu'a le premier;*
C. *Et moi, j'ai dix mines et le tiers de la part du second.*

Si x, y et z représentent les parts de A, B et C, on a :

$$x = y + \frac{1}{3} z, \quad y = z + \frac{1}{3} x, \quad z = 10 + \frac{1}{3} y$$

d'où

$$x = 45 \text{ mines}, \quad y = 37 \text{ mines } \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad z = 22 \text{ mines } \frac{1}{2}.$$

— *Ino et Sémélé distribuèrent un jour des pommes à douze jeunes filles, leurs amies, qu'elles avaient rencontrées. Aux unes Sémélé en donna un nombre pair, aux autres sa sœur en donna un nombre impair, et il lui en restait; car à trois de ses compagnes elle fit don des trois septièmes de ses pommes, et à deux autres du cinquième. Astynomé lui en enleva onze, et sa part fut réduite à deux. Sémélé, de son côté, offrit à quatre jeunes filles les deux quarts de ses pommes, à la cinquième elle en remit le sixième. La part d'Eurychore fut de quatre, et Sémélé resta avec quatre autres pommes.*

x = nombre de pommes d'Ino
y = » de Sémélé

$$x - \frac{3}{7} x - \frac{1}{5} x - 11 = 2, \quad \text{ou} \quad x - \frac{22}{35} x = 13 \quad \text{d'où} \quad x = 35$$

$$y - \frac{3y}{6} - \frac{y}{6} - 4 = 4, \quad \text{ou} \quad y - \frac{2}{3} y = 8 \qquad y = 24.$$

— *Cette tombe renferme Diophante. O merveille! elle dit mathématiquement combien il a vécu. Dieu lui accorda le sixième de sa vie pour son enfance; il ajouta un douzième pour que ses joues se couvrissent du duvet des adolescents; en outre, pendant sept ans, il fit brûler pour lui le flambeau d'hymen, et après cinq ans de mariage il lui donna un fils, hélas! unique et malheureux enfant, auquel la Parque ne permit de voir que la moitié de la vie de son père. Pendant quatre ans encore, consolant sa douleur par l'étude des chiffres, il atteignit enfin le terme de sa vie.*

Il s'agit de trouver un nombre tel que son sixième, son douzième, son septième et sa moitié, joints ensemble et le tout augmenté de 5 et de 4, fassent le nombre lui-même.

Ce nombre est 84.

Traduction latine

Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitæ
Illius, mira denotat arte tibi.
Egit sex tantem juvenis; lanugine malas
Vestire hinc cœpit parte duodecima.
Septante uxori post hæc sociatur, et anno
Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquam attigit ille paternæ,
Infelix subita morte peremptus obit.
Quatuor æstater genitor lugere superstes
Cogitur, hinc annos illius assequere.

Imitation versifiée

Passant, sous ce tombeau repose Diophante,
Et quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort :
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie une encor s'écoula,
Puis, s'étant marié, sa femme lui donna

Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
Reçut de jours, hélas ! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut :
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

Solution

Représente par x le nombre en question
Et, sans rien oublier, pose une équation
Où dans le premier membre on trouve le sixième,
Puis le douzième d'x, augmente du septième.
Ajoutez-y neuf ans : le tout égalera
L'inconnue x. Transpose, ajoute..., et cœtera.
Tu verras aisément, sans qu'on puisse en rabattre,
Que l'âge du bonhomme est bien quatre-vingt-quatre.

H. Eutrope.

— *Nous sommes ici trois Amours qui versons dans ce beau canal l'eau des bains. A droite, moi, avec l'eau qui s'échappe de mes ailes, je remplirai le bassin dans la sixième partie du jour. L'Amour de gauche, de l'urne qu'il porte, le remplira en quatre heures. Celui du milieu, avec son arc dont l'eau jaillit, y emploiera la moitié du jour. Cherche en combien d'heures nous pourrions remplir le canal avec l'eau de nos ailes, de l'arc et de l'urne.*

Supposons la journée de 12 heures.
Les 3 Amours coulant ensemble, rempliront dans un heure

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12} \text{ du canal.}$$

Le canal sera donc rempli en 1 heure et $\frac{1}{11}$.

Traduction latine

Qui jaculamur aquas tres hic adstamus Amores;
Sed varie liquidas Euripo immittimus undas.
Dexter ego; summis et quæ mihi manat ab alis
Ipsum lympha replet solo sextante diei.

Quatuor ast horis laevus versa influit urna;
Dimidiatque diem medius dum fundit ab arca.
Dic, age, quam paucis Euripum implebimus horis,
Ex arca simul atque alis urnaque fluentes.

— A. *Donne moi dix mines, et je deviens le triple de toi;*
B. *Et moi, si tu me donnes dix mines aussi, je deviens le quintuple de toi.*

Soit $(3x + 2)$ le nombre de mines que possède A.

$$(3x + 2) + 10 = 3(x + 4).$$

Donc $(x + 4)$ représentera le nombre de mines possédées par B.
Par suite

$$x + 4 + 10 = 5(3x + 2)$$

d'où

$$x = \frac{2}{7}$$

A possède donc 2 mines $\frac{6}{7}$ et B, 4 mines $\frac{2}{7}$.

— A. *Donne moi deux mines, et je deviens le double de toi.*
B. *Et moi, si tu me donnes aussi deux mines, je deviens le triple de toi.*

Soit $2x$ le nombre de mines de A

$$2x + 2 = 2(x + 1)$$

donc le nombre de mines de B pourra être représenté par $x + 1$.

$$x + 1 + 2 = 6x \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3}{5}.$$

Les nombres cherchés sont donc 1 mine $\frac{1}{5}$ et 1 mine $\frac{3}{5}$.

Problème attribué à Archimède et dit « de bovino » [1]. — La dernière épigramme grecque que nous croyons intéressant de citer renferme une question d'analyse indéterminée; elle a été découverte en 1773 par Lessing dans la bibliothèque de Brunswick et il l'a publiée dans le tome I, p. 421, de son ouvrage intitulé : *Beitrage zur geschichete und litteratur* : documents pour l'histoire et la littérature. Il y a neuf conditions à remplir.

Nous croyons inutile de donner le texte grec, nous nous contentons d'en reproduire une traduction vers pour vers et presque littérale.

Problème que, dans une lettre adressée à Eratosthène de Cyrène, Archimède a proposé à ceux qui s'occupent de ces matières à Alexandrie.

O ami ! calcule-moi le nombre de bêtes à cornes de Hélios,
Mais penses-y sérieusement si tu prétends à la science.
En quel nombre paissaient-elles dans les plaines de la Sicile,
l'île aux trois angles ? Elles se partageaient en quatre troupeaux
divers en couleurs. L'un était blanc comme du lait,
l'autre brillait d'une couleur noire,
un autre était roux, et encore un tacheté. Chaque troupeau
renfermait des taureaux en grand nombre et ils étaient
les uns aux autres dans ces rapports : I. *Les blancs étaient autant*
que la moitié et le tiers ensemble des noirs
plus tous les roux; ainsi remarque bien cela.
II. *Ensuite les noirs égalaient la quatrième*
et cinquième part des tachetés, plus encore tous les roux.
III. *Considère les tachetés encore restants;*
au sixième et au septième des taureaux blancs,

[1] *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques* par TERQUEM, t. I, 1855, pp. 113, 124, 130, 165, 172 et tome II 1856, pp. 39, 42.

plus au nombre total des roux, il sont égaux.
Il y a encore les vaches. IV. *Les blanches*
étaient du troupeau noir entier
exactement le tiers plus le quart.
V. *Les vaches noires autant qu'un quart*
et un cinquième de tout le troupeau tacheté,
lorsque ce troupeau paît ensemble avec les taureaux.
VI. *Les vaches tachetées faisaient un cinquième plus un sixième de*
toute la partie rousse.
VII. *Les vaches rousses autant qu'un demi-tiers*
et un septième de toute la partie blanche du troupeau.
Ainsi, si tu me dis maintenant nettement le nombre des bêtes à cornes
à part le nombre des taureaux bien nourris, [*de Hélios,*
à part les vaches et combien de chaque couleur,
on ne t'appellera pas maladroit ni inexpert dans les nombres,
cependant on ne te comptera pas encore parmi les savants. Car, viens
encore ce qu'on rencontrait chez les bêtes à cornes de Hélios. [*et dis moi*
VIII. *Si la foule des taureaux blancs se réunissait*
aux noirs, ils présentaient une surface égale
en longueur et en largeur. Alors leur grande étendue
remplissait de son aire toutes les plaines de l'île aux trois angles.
IX. *Ensuite, si les taureaux roux réunis aux tachetés*
se formaient avec un en tête et croissaient successivement de un,
ils formaient la figure d'un triangle, sans qu'il y eût avec eux
des taureaux d'une autre couleur et sans remarquer leur absence.
Si tu trouves cela et le mets dans ton esprit,
si tu peux, ô ami, indiquer la mesure de tous ces nombres,
alors avance glorieux, triomphant; sois convaincu
que tu es un homme accompli en cette science.

NOTA. — Les chiffres romains indiquent les neuf conditions.

L'épigramme est suivie d'une scolie grecque qui donne les nombres suivants sans dire comment on les a trouvés.

soient

Nombres		Nombres	
B	Taureaux blancs	b	Vaches blanches
N	» noirs	n	» noires
R	» roux	r	» rousses
T	» tachetés	t	» tachetées

1° $B = 829\,318\,560 = \frac{5}{6}N + R$		
$b = 576\,508\,800 = \frac{7}{12}$ de 2°		
$1\,405\,827\,360$		$1\,405\,827\,360$
2° $N = 596\,441\,120 = \frac{9}{20}T + R$		
$n = 391\,459\,680 = \frac{9}{20}$ de 3°		
$988\,300\,800$		$988\,300\,800$
3° $T = 588\,644\,800 = \frac{13}{42}B + R$		
$t = 281\,265\,600 = \frac{11}{30}$ de 4°		
$869\,910\,400$		$869\,910\,400$
4° $R = 331\,950\,960$		
$r = 435\,137\,040 = \frac{13}{42}$ de 1°		
$767\,088\,000$		$767\,088\,000$
Total des 4 troupeaux . . .		$4\,031\,126\,560$

Ces nombres ne sont pas les plus simples, mais satisfont aux sept premières conditions. Le scoliaste ajoute que $B + N$ est un carré [1] et $T + R$ un nombre triangulaire; ce qui serait conforme à la huitième et à la neuvième conditions; mais cela n'existe pas.

(1) Le mathématicien Vincent n'interprétait pas ainsi la huitième condition; il supposait que l'auteur de l'épigramme avait voulu dire simplement que si les bœufs blancs et noirs réunis étaient rangés en carré, en comptant tous ceux du circuit, la somme des premiers rangs sur tout le périmètre du carré, égalerait la mesure des plaines de la Sicile.

En deux mots, le *quadruple de la racine carrée* du nombre des bœufs blancs et noirs serait la *mesure de la Sicile.*

Vincent ajoute que cette condition ne lui paraît pas devoir être prise en

On voit de suite que ces nombres sont tous divisibles pas 80 et en effectuant la division on trouve :

1^er troupeau	$B = 10\,366\,482$	
	$b = 7\,206\,360$	
		17 572 842
2^e troupeau	$N = 7\,460\,514$	
	$n = 4\,893\,246$	
		12 353 760
3^e troupeau	$T = 7\,358\,060$	
	$t = 3\,515\,820$	
		10 873 880
4^e troupeau	$R = 4\,149\,387$	
	$r = 5\,439\,213$	
		9 588 600

Le total se monte à. . . 50 389 082 et comprend
Taureaux 29 334 443
Vaches 21 054 639

rigueur, c'est-à-dire exiger une racine carrée exacte : quel que soit le nombre des hommes d'une troupe, on peut toujours proposer de les disposer en bataillon carré ou supposé tel : l'auteur dit simplement : « quand ils étaient placés de manière à avoir la même mesure en largeur et en profondeur ».

Voici d'ailleurs comment Vincent s'exprime en ne considérant que les nombres simples que nous donnons page 134 et qui ne s'appliquent qu'aux taureaux seuls (*).

« Je reviendrai tout à l'heure sur la manière de satisfaire à cette condi-
« tion (il s'agit de la 8^e) ; je dois auparavant examiner la suivante. Celle-ci
« ne comporte pas la même tolérance que la précédente ; il y est dit expres-

(*) Vincent pense, en effet, que tout ce qui est relatif aux vaches a été ajouté depuis le vers 17^e jusqu'au 26^e inclusivement. Les vers 1 à 16 lui semblent présenter un énoncé complet, auquel les vers 27 et 30 forment un épilogue convenable. Il pense que le rédacteur primitif n'avait pas songé à distinguer les sexes et prenait *taureau* tout simplement pour *bœuf*. Le problème ainsi réduit a pour solution la plus simple ou principale les 4 nombres donnés à la présente page.

$29334443 = 6299 \times 4657$ deux nombres premiers qui ne divisent pas le nombre des vaches.

La huitième condition est que B + N soit un carré, or

$$B + N = 17826996 = 4.11.29.4657$$

En multipliant donc tous les nombres qui précèdent par

$$3.11.29.4657 = 4456749,$$

« sivement que les bœufs roux joints aux tachetés doivent former un « nombre triangulaire, *sans qu'il en manque ni qu'il en reste aucun.*

« Or, tout nombre triangulaire devant être de la forme $\frac{1}{2}x(x+1)$, il « faut donc faire en sorte que le nombre 2471, qui représente la somme « T + R, ou que le facteur 353, nombre premier qui est le septième de « 2471, puisse être identifié à l'un des nombres x, $x+1$, ou à leurs moi- « tiés. Les hypothèses qui se présentent le plus naturellement sont celles-ci :

$$\begin{aligned} x &= 2471, & \tfrac{1}{2}(x+1) &= 1236, \\ x+1 &= 2471, & \tfrac{1}{2}x &= 1235, \\ \tfrac{1}{2}x &= 2471, & x+1 &= 4943, \\ \tfrac{1}{2}(x+1) &= 2471, & x &= 4941, \\ \tfrac{1}{2}x &= 353, & x+1 &= 707 = 7 \times 101. \end{aligned}$$

« Pour chaque cas, le nombre qui multiplie 2471 dans le produit $\frac{1}{2}x(x+1)$, « est le facteur par lequel il faut multiplier tous les nombres de la solution « principale.

« Ainsi dans la cinquième hypothèse le multiplicateur sera 101.

« Maintenant, il faut, en revenant à la première condition supplémen- « taire, que le multiplicateur adopté puisse conduire à la mesure de la « Sicile, ce qui déterminerait complètement le problème. Deux nombres se présentent en premier lieu de manière à satisfaire approximativement à cette condition. Ce sont les nombres 12354950 et 12355050. En on satisfait à la huitième condition et l'on trouve :

1[er] troupeau	$B = 46\,200\,808\,287\,018$	
	$b = 32\,116\,937\,723\,640$	
		$78\,317\,746\,010\,658$
2[e] troupeau	$N = 33\,249\,638\,308\,986$	
	$n = 21\,807\,969\,217\,254$	
		$55\,057\,607\,526\,240$
3[e] troupeau	$T = 32\,793\,026\,546\,940$	
	$t = 15\,669\,127\,269\,180$	
		$48\,462\,153\,816\,120$
4[e] troupeau	$R = 18\,492\,776\,362\,863$	
	$r = 24\,241\,207\,098\,537$	
		$42\,733\,983\,461\,400$
	Total.	$224\,571\,490\,814\,418$
Comprenant :	Taureaux.	$130\,736\,249\,505\,807$
	Vaches	$93\,835\,241\,308\,611$

Il ne reste plus que la neuvième condition à remplir, savoir que

« effet, d'abord chacun d'eux fournit un nombre triangulaire quand on
« le multiplie par 2471, puisque le premier donne pour produit

$$\frac{247\,099 \cdot 247\,100}{2}$$

« et le second

$$\frac{247\,101 \cdot 247\,100}{2}.$$

« Ensuite, si on les multiplie respectivement par 3828, ils donnent pour
« produit

$$47\,294\,748\,600 \quad \text{et} \quad 47\,295\,131\,400,$$

« dont les racines carrées sont (à une unité près)

$$217\,473 \quad \text{et} \quad 217\,474,$$

« et les quadruples de ces racines

$$869\,892 \quad \text{et} \quad 869\,896.$$

Vincent calcule alors, d'après des données puisées dans Strabon que la surface de la Sicile est de 857 000 stades carrées. Et il ajoute :

« On conçoit d'ailleurs que cette évaluation est nécessairement au-dessous

R + T égale un nombre triangulaire; mais B + N devant toujours rester un carré, il faut multiplier tous les nombres

« de la vraie valeur du territoire de l'île, à cause des sinuosités du contour,
« dont la formule appliquée pour calculer la surface fait abstraction.

« On peut donc considérer les deux nombres ci-dessus trouvés, 869 892 et « 869 896 comme représentant approximativement l'aire totale de la Sicile, « conformément à l'énoncé. En conséquence, on a pour solution de la « première et de la troisième parties de la question, les formules

$$\begin{aligned} B &= 2226k, \\ N &= 1602k, \\ T &= 1580k, \\ R &= 891k, \end{aligned}$$

« dans lesquelles $k = 12\,355\,000 \pm 50$.

« On peut d'ailleurs arriver à un résultat plus rapproché de 857 000 en « multipliant 2471 par 99, ce qui donne 244 629, et posant

$$T + R = \frac{244\,629 \times 244\,628}{2}.$$

« Alors, faisant

$$B + N = 3828 \times 99 \times \frac{244\,628}{2} = 46\,353\,581\,208,$$

« on a pour la racine carrée 215 298 qui, multiplié par 4, donne 861 182, « ce qui est bien près du résultat cherché.

« Enfin, on aurait un résultat trop faible en multipliant 2471 par 98, ce « qui donne 242 158, et posant

$$T + R = \frac{242\,158 \times 242\,159}{2}.$$

« Il faut alors faire

$$B + N = 3828 \times 49 \times 242\,159 = 45\,422\,247\,948;$$

« la racine carrée est 213 124 et le quadruple de cette racine donne 852 496. »

Nous arrêtons ici les commentaires de Vincent en renvoyant le lecteur qui serait désireux d'être instruit d'une façon plus complète sur cette question aux articles du *Bulletin bibliographique* visés plus haut et auxquels nous avons emprunté les renseignements qui précèdent.

trouvés par la quantité indéterminée u^2 et nous devrons satisfaire à

$$(R + T)\, u^2 = 51\,285\,802\,909\,803.\, u^2 = \frac{x(x+1)}{2}.$$

$$102\,571\,605\,819\,606.\, u^2 = x^2 + x$$

$$2x = -1 \pm \sqrt{4.102571605819606u^2 + 1}$$

La quantité qui multiplie 4 est paire sans être divisible par 4 ; donc le coefficient de u^2 n'est pas un carré parfait ; par conséquent il existe une infinité de valeurs rationnelles et entières de u qui donnent pour radical un nombre entier nécessairement impair (¹), et x sera entier et positif; il s'ensuit, en définitive, que la question a un nombre infini de solutions.

Si l'on n'avait égard qu'aux taureaux, on aurait pour satisfaire aux trois premières conditions.

$$\begin{aligned} B &= 2226, \\ N &= 1602, \\ T &= 1580, \\ R &= 891, \\ B + N &= 3828, \\ T + R &= 2471. \end{aligned}$$

Plusieurs savants se sont occupés de ce problème.

Le recteur Christian Leist a montré non seulement l'exactitude des nombres donnés par le scoliaste, mais a trouvé les nombres les plus simples donnés ci-dessus. Son travail est inséré dans l'ouvrage de Lessing.

En 1821, à l'occasion d'une solennité académique, l'opuscule suivant fut publié : *Altes griechisches Epigramm, mathematischen inhalts von Lessing erst einmal zum Drucke befordert jetzt neu abgedruckt und mathematisch und kristisch behandelt*; Ancienne épigramme

(¹) LEGENDRE. — *Théorie des nombres.*

grecque d'une teneur mathématique, publiée pour la première fois par Lessing ; éditée de nouveau et traitée sous le point de vue mathématique et critique par le Dr J. Struve, directeur du gymnase royal à Altona et le Dr K.-L. Struve, directeur du gymnase communal de Konigsberg père et fils. Altona : in-8 de 47 pages.

Les calculs donnés dans cette brochure sont de Struve père qui émet cette opinion que le nom d'Archimède est une pure invention. En effet, cette épigramme est complètement étrangère à l'esprit des travaux qui appartiennent incontestablement au géomètre sicilien ; Struve père pense même que les deux dernières conditions ont été ajoutées depuis (1). C'est encore probable, car les solutions du scoliaste pour les sept premières conditions sont justes et on lui fait dire une chose fausse pour les deux dernières conditions. D'ailleurs, la neuvième et dernière condition consiste à résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée

$$ax^2 + l = y^2$$

a n'étant pas un carré ; solutions que l'on ne connaît que depuis Pell (1666).

L'opuscule en question est terminé à partir de la page 38 par les observations critiques qui sont de Struve fils, lequel déclare enfin ne rien comprendre aux vers 35 et 36.

Une autre solennité académique donna lieu à la brochure suivante de 12 pages in-4.

Ad memoriam Kregelio-Sternbachianam in auditoris Jureconsultorum die XVII juli MDCCCXXVIII *celebrandam invitant ordinum academiæ Lips. Decani Seniores ceterique adsessores. De archimedis problemate bovino.*

Un homme généreux, Charles de Sternbach, avait institué un prix d'encouragement pour l'étude à l'Université de Leipzig, et pour célébrer l'anniversaire du donateur, la production dont nous

(1) C'est également l'opinion de Vincent.

venons de donner le titre, fut lue par son auteur Hermann (Godefroy).

Cet auteur critique vivement l'œuvre des Struve en blâmant certaines jovialités qui sont d'un goût un peu hasardé, et il propose une exégèse qui amène des nombres complètement différents de ceux de Struve.

D'après lui, la sixième condition serait celle-ci : Les vaches tachetées formaient les quatre cinquièmes plus les quatre sixièmes de toute la partie rousse. Alors les nombres suivants satisfont aux sept conditions :

1er troupeau	$B = 48\,066\,018$	
	$b = 47\,981\,940 = \frac{7}{12}$ de 2°	
		96 047 958
2° troupeau	$N = 34\,591\,986$	
	$n = 47\,673\,054 = \frac{9}{20}$ de 3°	
		82 265 040
3° troupeau	$T = 34\,116\,940$	
	$t = 71\,823\,180 = \frac{44}{30}$ de 4°	
		105 940 120
4° troupeau	$R = 19\,239\,363$	
	$r = 29\,730\,987 = \frac{13}{42}$ de 1°	
		48 970 350

Le nombre des vaches est plus grand que celui des taureaux, tandis que c'est le contraire dans le calcul précédent.

Le changement le plus important est dans les vers 35 et 36 que Hermann lit et ponctue d'une façon différente et auxquels il donne ce sens : Quant à ce qui concerne les côtés qui circonscrivent de toutes parts, les plaines de la Sicile étaient remplies de *briques* ; c'est-à-dire que chaque côté du carré $B + N$ doit être un *nombre brique* ;

de sorte qu'on doit satisfaire, dit l'auteur de la brochure, à ces équations :

$$(B+N)\,x = 3\,828.\ x = \text{le carré d'un nombre brique} = y^2(y-z)^2$$

$$(T+R)x = 2\,471\ x = \text{un nombre triangulaire} = \frac{1}{2}u\,(u+1),$$

$$(B+N+T+R)\,x = 6\,229\ x = \text{un nombre triangulaire} = \frac{1}{2}v(v+1).$$

Pour satisfaire à la première équation il faut que l'on ait :

$$x = 1914\,p^2$$

et, par conséquent,

$$4942.1\,914.\,p^2 = u^2 + u,$$
$$12598.1\,914.\,p^2 = v^2 + v$$

Il est impossible de satisfaire simultanément à ces deux équations mais la troisième équation n'est pas exigée.

La seconde équation donne un nombre indéfini de solutions ; la première équation devient

$$3\,828.\,p = y\,(y-z) \qquad z = y - \frac{3828.\,p}{y};$$

il suffit de prendre

$$y = p \quad \text{et} \quad p > 3828\,;$$

il y a donc une infinité de solutions.

Hermann croit que l'épigramme est d'Archimède, parce qu'elle est citée sous ce nom dans une scolie sur le *Charmide* de Platon et dans l'ouvrage de Héron d'Alexandrie sur la nomenclature des vocables géométriques. Enfin cet auteur avance que Gauss se serait occupé de la question.

Nesselmann, dans son célèbre ouvrage sur l'histoire de l'Algèbre chez les Grecs (1), consacre les cinq dernières pages à notre pro-

(1) *Die algebra der Greichen*, Berlin, 1842 ; in-8°.

blème. Adoptant l'opinion de Klügel et de Struve, il fait ressortir l'impossibilité d'attribuer une telle production à Archimède, et, d'après le mauvais goût que l'on remarque dans le style et la facture poétique, Nesselmann pense qu'on peut l'attribuer à un écrivain du XIV[e] siècle et même plus récent. Car Planude et Krephalas, auteurs du XIV[e] siècle, qui recherchaient avec ardeur de semblables bagatelles, n'ont pas admis ce problème dans leurs collections.

La huitième et la neuvième conditions sont, selon l'opinion d'Hermann et de Nesselmann, une superfétation postérieure à la solution donnée par le scoliaste.

QUELQUES PROBLÈMES EXTRAITS DE L'OUVRAGE KHÉLASAT AL HISAB OU ESSENCE DU CALCUL DE BEHA-EDDIN MOHAMMED BEN AL-HOSAIN AL AAMOULI (1)

1. *Diviser* 10 *en deux parties, de telle sorte que si l'on ajoute à chacune d'elles sa racine carrée, et si l'on multiplie les deux sommes l'une par l'autre, il en résulte un nombre donné.*

2. *Si, à un carré l'on ajoute* 10, *la somme doit avoir une racine carrée, et si l'on en soustrait* 10, *le reste doit de même avoir une racine carrée.*

(1) Le *Khélasat al Hisàb* (Essence du calcul) jouit d'une réputation considérable dans la Perse et dans l'Inde; on le regarde comme le traité par excellence.

L'auteur est né en l'an 1547 de notre ère, il mourut en 1622.

L'extrait que nous donnons est emprunté à la traduction de M. Aristide Marre faite d'après la version allemande de Nesselmann publiée à Berlin en 1843.

(Voir les *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1846, p. 263 et suivantes).

3. *A Zaïd l'on promet* 10 *moins la racine carrée de la part d'Amrou et à Amrou* 5 *moins la racine carrée de la part qui a été promise à Xaïd.*

4. *Un nombre cube doit être partagé en deux parties, qui soient aussi des nombres cubes.*

5. *Dix est partagé en deux parties. Si nous divisons chacune d'elles par l'autre, et si nous additionnons les deux quotients, alors la somme est égale à l'une des deux parties de dix.*

6. *Trois carrés en proportion continue, dont la somme est un carré.*

7. *Si à un carré on ajoute sa racine et* 2, *si ensuite de ce même carré on retranche sa racine et* 2, *alors on doit pouvoir extraire la racine carrée de la somme et du reste.*

L'auteur ajoute expressément que ces quelques questions sont inaccessibles aux algébristes de son temps. Les unes sont impossibles les autres conduisent à des équations de degré supérieur, qui n'ont aucune racine rationnelle ; ainsi la troisième donne l'équation finale :

$$x^4 + 20\,x^2 + x + 95 = 0.$$

La dernière question fournit les deux équations :

$$x^2 + x + 2 = y^2 \qquad \text{et} \qquad x^2 - x - 2 = z^2$$

qui ne donnent pour x que la valeur négative $-\frac{17}{16}$.

La quatrième est la plus intéressante, son impossibilité dépend du fameux théorème, énoncé pour la première fois par Fermat. en 1657, et démontré par Euler. Ainsi les Arabes l'ont eu quelques siècles avant nous.

Nous ne citons les deux questions suivantes qu'à titre de curiosité historique ; elles se trouvent dans une ancienne arithmétique chinoise ayant pour titre *Kin tschang*, rédigée vers 2600 avant J.-C. et publiée, croit-on, vers 1250 avant J.-C. par *Tsin-Kin-Tschaou.*

1. *Au milieu d'un étang ayant la forme d'un carré de* 10 *pieds de côté, croît un roseau, qui s'élève depuis le fond jusqu'à un pied au-dessus*

du niveau de l'eau. Si l'on tire ce roseau vers le milieu d'un des côtés il atteint juste le bord de l'étang. Quelle est la profondeur de l'eau?

(HEIS)

$$OB = OC = OD + 1 \text{ pied}.$$

$$\overline{OB}^2 = \overline{OD}^2 + 25, \text{ donc } \overline{OB}^2 = \overline{OD}^2 + 2OD + 1 = \overline{OD}^2 + 25$$

$$2OD = 24 \qquad \text{et} \qquad OD = 12 \text{ pieds}.$$

2. *Un bambou de* 10 *pieds de haut se trouve brisé à une certaine hauteur. Quand on ramène la partie supérieure vers la terre, et qu'on lui fait toucher le sol, le sommet du bambou se trouve à* 3 *pieds de la base. A quelle hauteur est-il brisé?*

(HEIS)

$$CB = CD = AB - AC = 10 - AC,$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + 9 = 100 - 20\,AC + \overline{AC}^2.$$

Donc

$$20AC = 100 - 9 = 91.$$

et

$$AC = 4^p.55.$$

QUELQUES PROBLÈMES TIRÉS DES ANCIENS AUTEURS

1. *Trouver quatre nombres tels que leurs produits deux à deux augmentés de l'unité, soient des carrés* (Diophante, Liv. IV prob. XXI).

Voici une élégante solution du problème, qui détermine quatre nombres entiers en fonction de deux nombres entiers indéterminés m et n.

Si l'on désigne par a, b, c, d les quatre nombres cherchés on a :

$$a = m$$
$$b = n\,(m.n + 2)$$
$$c = (n + 1)\,(m.n + m + 2)$$
$$d = 4\,(m.n + 1)\,(m.n + m + 1)\,(m.n^2 + m.n + 2n + 1).$$

En effet :

$$ab + 1 = (m.n + 1)^2,$$
$$ac + 1 = (m.n + m + 1)^2,$$
$$ad + 1 = (2\,m^2.n^2 + 2\,m^2.n + 4\,m.n + 2\,m + 1)^2,$$
$$bc + 1 = (m.n^2 + m.n + 2\,n + 1)^2,$$
$$bd + 1 = (2\,m^2.n^3 + 2\,m^2.n^2 + 6.m.n^2 + 4.m.n. + 4\,n + 1)^2,$$
$$cd + 1 = (2\,m^2.n^3 + 4\,m^2.n^2 + 6\,m.n^2 + 2\,m^2.n + 8\,m.n + 4.n + 2.m + 3)^2.$$

Ainsi, pour $m = 1$ et $n = 2$, on a :

$$a = 1, \qquad b = 8, \qquad c = 15, \qquad d = 528$$

et

$$1.8 + 1 = 3^2, \qquad 1.15 + 1 = 4^2 \qquad 1.528 + 1 = 23^2$$
$$8.15 + 1 = 11^2, \qquad 8.528 + 1 = 65^2 \qquad 15.528 + 1 = 89^2.$$

(Solution due à M. Boije af Gennäs de Gothembourg).
Voir les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1880, p. 278.

2. *Ung homme a despendu* (dépensé) *le* $\frac{1}{3}$ *de son argent. Et puis encores les* $\frac{2}{3}$ *du remenant* (du reste). *Et luy sont encores demourez* 12 *escus. Assauoir moult combien* (On demande combien) *il auoit au cōmancemēnt.*

(Chuquet) [1].

[1] Ces problèmes, énoncés en vieux français, sont extraits du plus ancien recueil de problèmes que fournisse la littérature mathématique française. Il s'agit du recueil de Maistre Nicolas Chuquet, écrit en 1484 sous le titre d'*Inuencions de nombres en general lesquelz par la Rigle des premiers* (par l'algèbre) *se treuuent*, et qui fait suite à son *Triparty en la science des nombres*.
On trouve dans cet ouvrage bon nombre de problèmes devenus aujourd'hui classiques et qui, avant de passer dans les *Algèbres* de Clavius, en 1608, de Newton, en 1669, d'Euler, en 1768, de Bertrand, en 1851, et enfin des auteurs plus modernes, ont exercé plus d'un arithméticien et plus d'un algoriste de la Renaissance et du Moyen Age. C'est aux recherches

Cet homme a dépensé les $\frac{3}{9} + \frac{4}{9}$ ou les $\frac{7}{9}$ de son avoir.

Les $\frac{2}{9}$ de son avoir valent 12 écus.

Il possédait donc au commencement 54 écus.

3. *Une piece drap est taincte en noyr le* $\frac{1}{3}$ *et le* $\frac{1}{4}$. *Et* 8 *aulnes qui est le remenant en gris. Assauoir mol't quantes aulnes de long a celle piece.*

(Chuquet).

Réponse : $19\frac{1}{5}$.

4. *Ung marchant a este a troys foires dont a la première il a double ses deniers et diceulx en a despendu.* 5. *A la seconde foyre il a triple son argent et a despendu.* 9. *A la tierce il a quadruple son argent et si a despendu.* 12. *Et à la fin luy sont demourez.* 8. *Assauoir mol't quantes pièces il auoit au cōmancemēnt.*

(Chuquet).

Réponse : 4 deniers $\frac{5}{6}$.

d'Aristide Marre que l'on doit la découverte des manuscrits oubliés du Père de l'Algèbre française, qui ont été publiés dans le Bulletin du prince B. Boncompagni. Les *Inuencions de nombres* contiennent beaucoup de questions empruntées à l'école italienne : les travaux de Léonard de Pise ou les écrits, aujourd'hui perdus, de ses premiers disciples, n'étaient point inconnus de Chuquet ; plusieurs de ces problèmes reparaissent chez Lucas Pacioli (1494), qui les aurait puisés aux mêmes sources que Chuquet.

A côté des problèmes du premier degré, Chuquet donne aussi des questions d'analyse indéterminée, et enfin des *Jeux et esbatements qui par la science des nombres se font.* Parmi ces jeux, citons « le jeu du novenaire pour scauoir le nombre que aulcune personne aura ymagine et quil tient en sa pensee » ; — le jeu du loup, de la chèvre et du chou, et celui des « troys maryz » qui se trouvent déjà chez Alcuin ; le jeu du tavernier, « lequel na que une mesure de troys pintes. survient ung aultre hôme aportant une mesure tenant 5 pintes, lequel demande au tavernier 4 pintes de son vin ; etc. » Citons enfin le « jeu » du patron de galère qui, ayant 15 chrétiens et 15 juifs sur son vaisseau, « est contraint pour la tempeste des undes de la mer de descharger sa nef de la moitie de ses gens, etc., etc. »

5. *Ung charpentier a marchande de faire une maison en 30 jours par tel si que* (sous telle condition que) *chascun jour qu'il besongnera il gaugnera 5 escus. Et chascun jour quil se reposera il perdera 6 escus. Aduient que au chef des 30 jours que la maison est faicte cellui charpentier a tant besongne et sest tant repose quil na gangne ne perdu. Assauoir moult quantz jours il a besongne et quants jours il sest repose ?*

(Chuquet).

Réponse : $16 \frac{4}{11}$ et $13 \frac{7}{11}$.

6. *Un père voulant encourager son fils dans la pratique du calcul, fait avec lui cet accord : pour chaque problème parfaitement résolu, le fils recevra 8 sous de son père ; mais il lui remettra, au contraire, 5 sous pour chaque problème non résolu. Après 26 problèmes proposés, ils font leur compte, et il se trouve que le fils ne reçoit rien et ne doit rien. Combien de problèmes a-t-il résolus ?*

(imité de Clavius).

Pour 5 problèmes résolus le fils reçoit 5×8 ou 40 sous.
» 8 » non résolus, le fils donne $8 \times 5 = 40$ sous.
Ainsi, sur 13 problèmes, si le fils en résout 5 et échoue dans la solution de 8 autres, il se trouve dans la même situation qu'au début.

Donc sur 26 problèmes, si le fils ne gagne ni ne perd, il aura résolu $5 \times 2 = 10$ problèmes.

7. *Si je donnais 7 deniers à chacun des pauvres qui sont devant ma porte, il me resterait 24 deniers : si je voulais leur donner à chacun 9 deniers, il me manquerait 32 deniers. Quel est le nombre de ces pauvres, et combien de deniers ai-je ?*

(Clavius).

Les 24 deniers qui restent ne me permettent pas de donner

2 deniers de plus à chaque pauvre, il me manque en plus 32 deniers.

Ainsi, une fois 7 deniers distribués à chaque pauvre, si j'avais en plus $24 + 32 = 56$ deniers, je pourrais en donner encore 2 à chaque pauvre.

Le nombre des pauvres est donc $\frac{56}{2} = 28$ et j'ai $28 \times 7 + 24 = 220$ deniers.

8. *Un maître promet à son serviteur de lui donner à la fin de l'année 10 pièces d'or et un manteau. Au terme du septième mois, il le congédie en lui donnant le manteau et 2 pièces d'or. Quelle était la valeur de ce manteau?* (CLAVIUS).

Au bout de 7 mois il n'est dû que les $\frac{7}{12}$ de 10 pièces et les $\frac{7}{12}$ de la valeur du manteau.

Le serviteur recevant le manteau et 2 pièces d'or, il en résulte que les $\frac{5}{12}$ de la valeur du manteau valent la différence entre les $\frac{7}{12}$ de 10 pièces d'or et 2 pièces d'or.

La valeur du manteau est donc de 9 pièces d'or $\frac{1}{5}$.

9. *Deux marchands de vins entrent dans Paris, l'un avec 64 barriques et l'autre avec 20 barriques, du même prix. Mais, comme il n'ont pas assez d'argent pour acquitter les droits d'entrée, le premier paie avec 5 barriques et ajoute 40 francs. L'autre acquitte avec 2 barriques et on lui rend 40 francs. Quels sont les prix de la barrique et du droit d'entrée de chacune d'elles ?* (1)

(1) LE VERRIER donnait à ce problème le nom de *problème piège*, car il faut remarquer que les barriques laissées à l'octroi ne paient pas d'entrée. Ce problème se trouve déjà, à la forme près, dans les *Inuencions de nombres* de CHUQUET : « Deux marchans viennent de foyre dont lung diceulx si a. 20. sacz de layne pour lesquelz il a paye a la gabelle ung sac de layne et on lui retorne 2 l. de monnoye. Et laultre si a. 60. sacz pour lesquelz il a paye deux saczs de layne et 6 l. auec. Assauoir mol't a combien est extime chascun sac de layne. » La réponse exacte est 11 1/2 livres.

x prix de la barrique, y droit d'entrée

$$59.y = 5.x + 40$$
$$18.y = 2.x - 40$$

d'où

$$x = 110 \text{ francs et } y = 10 \text{ francs.}$$

10. *Un homme pénétra dans un verger qui avait 3 gardiens et y fit une provision de pommes; ayant rencontré le premier gardien, il lui donna la moitié de sa provision, plus 2 pommes; rencontrant le second, il lui donna la moitié de ce qui lui restait, plus deux pommes; enfin, rencontrant le troisième, il dut lui donner la moitié de ce qui lui restait encore, plus deux pommes, et il sortit alors n'ayant plus qu'une seule pomme. Combien de pommes avait-il recueillies* (1).

x nombre de pommes recueillies.

Le premier gardien reçoit $\frac{x}{2} + 2$, le premier reste est donc $\frac{x}{2} - 2$,

Le deuxième gardien reçoit $\frac{x}{4} - 1 + 2 = \frac{x}{4} + 1$, le deuxième est $\frac{x}{2} - 2 - \frac{x}{4} - 1 = \frac{x}{4} - 3$.

Le troisième gardien reçoit $\frac{x}{8} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{x}{8} + \frac{1}{2}$; le troisième reste est $\frac{x}{4} - 3 - \frac{x}{8} - \frac{1}{2} = \frac{x}{8} - \frac{7}{2}$

donc

$$\frac{x}{8} - \frac{7}{2} = 1, \quad \text{d'où } x = 36.$$

(1) Extrait du *Liber augmenti et diminutionis*, qui est la traduction d'une Algèbre composée au XII^e siècle soit par le rabbin ABEN EZRA (1093-1168), soit par un arabe IBRAHIM. Le *Liber augmenti* a été publié en 1838 par LIBRI (*Hist. des Math. en Italie*, t. II).

11. *Une personne a un anneau d'or du poids de* 5 mitsquâl *avec un chaton en rubis. La valeur de l'or est de* 4 ashya (ou deniers d'argent) *pour* 1 mitsquâl, *et la valeur du rubis est de* 10 ashya *pour* 1 mitsquâl.

L'anneau, avec son rubis, coûte 24 ashya. *Déterminer le poids de l'or dans l'anneau et le poids du rubis, par* Al-jebr wel muqâbala (par l'Algèbre) [1].

Réponse : l'or pèse $4\frac{1}{3}$ mitsquâl et le rubis $\frac{2}{3}$ mitsquâl.

12. Problème de l'Héritage. — *Il est ung pere de famille qui a denffans on nescet le nombre. Et si a en son arche* (*arca*, coffre) *une somme de deniers dont on nescet le compte Et dit cellui pere av pmier de ses enffans va en larche et prens* 1. *d. et* $\frac{1}{10}$ *du remenant* (du restant). *Au second il dit va apres ton frere et apres ce quil aura pris prens* 2. *ds. en larche et la* $\frac{1}{10}$ *partie du residu Au tiers il dit va apres tes freres et apres ce quilz auront pris chascun leur porcion prens* 3. *ds. et la* $\frac{1}{10}$ *partie de la reste Et ainsi dit aux aultres en augmentant tousiours jusques au derrenier auquel il dit va en larche et prens tous les deniers que tes freres y ont laysse. Et ce fait les enffans se treuuent quilz ont autant de deniers lung que laultre. Assauoir moult quantz enffans cestui homme a. Quantz deniers auoit en larche et quantz chascun deulx en a eu.*

(Chuquet).

Généralisons la question en supposant que chaque enfant prenne a, $2a$, $3a$, ... deniers et la n^e partie du reste.

Première méthode de solution (Euler). — Soient x la somme totale partagée, y la part de chaque enfant et z leur nombre.

[1] Ce problème, extrait d'un très ancien manuscrit persan, a été publié, en 1884, par L. Rodet.

On égale les parts des deux premiers enfants

$$a + \frac{x-a}{n} = 2a + \frac{1}{n}\left[x - \left(a + \frac{x-a}{n}\right) - 2a\right].$$

$$x = (n-1)^2 a, \quad y = a + \frac{x-a}{n} = (n-1)a \quad z = \frac{x}{y} = n-1.$$

Seconde méthode. — On égale les parts du dernier et du premier.

$$az = a + \frac{1}{n}(az^2 - a), \quad \text{par suite} \quad z = n-1 \quad \text{ou} \quad z = 1.$$

Troisième méthode (Catalan). — On égale y_p et y_{p+1}. Il vient :

$$pa + \frac{x - y_1 - y_2 - \dots - y_{p-1} - pa}{n} = (p+1)a$$
$$+ \frac{x - y_1 - y_2 - \dots - y_p - (p+1)a}{n}.$$

D'où

$$y_p = (n-1)a.$$

Le second membre étant indépendant de l'indice p, qui désigne le rang de la part considérée, toutes les parts sont égales, conformément à l'énoncé.

On obtient x en reprenant le premier nombre de l'équation qui représente y_p et on fait $p = 1$ (1).

13. *Ilz sont quatre homes qui ont deniers en telle proporcion que si le pmier et le second auoient.* 100. *deniers des deux aultres ilz auroient le triple de ce qui leur demeure. Et le second auec le tiers dit que sil auoit.* 106. *ds. du quart et du pmier ilz auroient le quadruple de leur reste. Le tiers et le quart disent que silz auoient.* 145. *deniers des deux aultres ilz auroient le quintuple de leur reste. Et disent le quart et le pmier que silz auoient.* 170. *ds. des deux aultres ils auroient le*

(1) Pour d'autres solutions, avec discussion complète de la question. Voir le journal *Mathesis* (11e année 1891, pp. 112, 136 et 187).

sextuple de leur reste. Assauoir moult quantz deniers a ung chascun diceulx (1). (Chuquet).

Equations du problème

$$(A)\begin{cases} x+y+100=3(z+u-100) & \text{ou} \quad x+y-3z-3u=-\ 400,(1)\\ y+z+106=4(u+x-106) & \text{»} \quad y+z-4u-4x=-\ 530,(2)\\ y+u+145=5(x+y-145) & \text{»} \quad z+u-5x-5y=-\ 870,(3)\\ u+x+170=6(y+z-170) & \text{»} \quad u+x-6y-6z=-\ 1190.(4)\end{cases}$$

Le système est indéterminé; mais cette indétermination n'est pas absolue, c'est-à-dire que le système permet de déterminer trois quelconques des inconnues en fonction de la quatrième.

Multiplions en effet (1) par 5 et ajoutons (3), il vient :

$$z+u=205.$$

Multiplions les deux membres de (2) par 6 et ajoutons (4) :

$$u+x=190$$

Multiplions les deux membres de (3) par 3 et ajoutons (1) :

$$x+y=215.$$

Enfin $$y+z=230.$$

Ajoutons membre à membre ces quatre dernières équations, il vient

$$x+y+z+u=420.$$

$$y=230-z, \quad u=205-z, \quad x=z-15 \quad \text{et} \quad z=\frac{0}{0}\ (2)$$

(1) Cette question appartient à un type de problèmes qui se rencontre fréquemment chez Diophante. Ces problèmes diophantins ont inspiré des énoncés nombreux et variés à Chuquet, à son contemporain Lucas Pacioli (*Summa*, 1494), et surtout à leur prédécesseur Léonard de Pise : ce dernier a traité des problèmes de ce genre, souvent très compliqués, dans son *Flos super solutionibus quarumdam quæstionum*, dans son *De qvibus* et dans son *Liber quadratorum*.

Voyez les *Nouvelles Annales de Math.* t. XV, 1856, pp. 1-11 et 42 71, et *Tre scritti inediti di Leonardi Pisano*, publié par le prince Boncompagni, Florence, 1854.

(2) Comme *response* à ce problème, qui est le LXXVIIIe problème de ses *Inuencions de nombres*, Chuquet donne : « le pmier a. 100. ds. Le second a. 115. ds. Le tiers a. 115. ds. et le quart 90-ds. ou bien Le premier a. 80-ds. Le second a. 135. ds. Le tiers-95 ds. Le quart 110. ds. etc. ». Puis

14. *Des singes s'amusaient : de la troupe brayante*
Un huitième au carré gambadait dans les bois ;
Douze criaient tous à la fois
Au haut de la colline verdoyante.
Combien d'êtres comptait la caste remuante ? (1)

Si x représente le nombre des singes, on a l'équation

$$x - \frac{x^2}{64} = 12 \quad \text{ou} \quad x^2 - 64x + 768 = 0$$

d'où

$$x = 48 \quad \text{ou} \quad 16.$$

15. *Vois cette essaim de mouches à miel.*
De la moitié prends la racine :
Dans un champ de jasmins cette troupe butine.
Huit neuvièmes du tout voltigent dans le ciel.
Une abeille solitaire
Entend dans un lotus un frelon bourdonner :
Attiré par l'odeur pendant la nuit dernière,
Il s'était fait prisonnier.
Dis moi : quel chiffre atteint la troupe buissonnière ?

il ajoute : « Et par ainsi appert que telles raisons ont responses necessre de deux en deux mais de vng a vng Ilz ont telle response que l'on veult. » Il serait intéressant de connaître la méthode employée par Chuquet.

(1) Ce problème et le suivant sont empruntés à la *Lilàvati* ou traité d'arithmétique de Bhascara, auteur hindou du XII[e] siècle. La traduction est de L. Rodet (*Journal Asiatique*, janvier 1878).

Bhascara était aussi célèbre comme astrologue que comme mathématicien. Cette science lui ayant fait connaître que le mariage de sa fille Lilavati serait pour lui un évènement fatal, il fit en sorte d'écarter tous les prétendants, et comme une sorte de consolation, non seulement il donna le nom de sa fille au premier livre de son ouvrage (*Traité d'astronomie* dont 4 chapitres ont été traduits), mais il rédigea plusieurs problèmes qu'il propose sous forme de questions qu'il est censé lui adresser. — Voir l'*Histoire des mathématiques de Rouse Ball*, édition française traduite sur la 3[e] édition anglaise par L. Freund, pp. 159-164.

Soit $2x^2$ le nombre des abeilles :

$$x + \frac{16x^2}{9} + 2 = 2x^2, \quad \text{d'où} \quad x = 6.$$

Le nombre des abeilles est donc 72.

16. *Trouver un nombre carré qui, augmenté et diminué de 5, reste toujours un nombre carré* [1].

Cette question a son histoire :

La réputation de Léonard de Pise était si grande que l'empereur Frédéric II s'arrêta à Pise en 1225, pour présider une sorte de tournoi mathématique où on devait mettre à l'épreuve le talent de Léonard dont on lui avait dit merveille. Les compétiteurs avaient été informés à l'avance des questions dont quelques unes étaient dues à Jean de Palerme qui figurait dans la suite de Frédéric. C'est le premier exemple que nous offre l'histoire de ces défis si communs dans le XVIe et dans le XVIIe siècles et dans lesquels on proposait à résoudre certains problèmes particuliers.

L'énoncé que nous avons reproduit est celui de la première question posée.

Léonard répondit à maître Jean que le nombre carré est

$$11 + \frac{2}{3} + \frac{1}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2.$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2. \text{ [2]}$$

[1] Voir le *Bulletin* du prince BONCOMPAGNI t. I, p. 173. (*Tre scritti inediti di Leonardo Pisano,* publiés d'après un manuscrit de la bibliothèque ambrosienne de Milan. — In-8° de 122 pages et 1 planche.)

Le premier écrit est intitulé *Flos* (1-44).

Le deuxième *De Avibus* (44-54).

Le troisième *Liber quadratorum* (55-122).

[2] Nous nous servons des signes actuellement en usage mais qui n'étaient pas employés du temps de LÉONARD.

17. *Trois hommes ont en commun une somme inconnue* t; *la part du premier est* $\frac{1}{2}t$; *celle du second* $\frac{1}{3}t$, *et par conséquent celle du troisième* $\frac{1}{6}t$. *Voulant déposer cette somme en lieu plus sûr, ils prennent au hasard, le premier* x *qui n'en dépose que* $\frac{1}{2}x$, *le second* y *et n'en dépose que* $\frac{1}{3}y$, *et le troisième* z *et n'en dépose que* $\frac{1}{3}z$; *de sorte que la somme déposée se monte à* $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z$, *et lorsqu'ils retirent ce dépôt, chacun en prend le tiers; il s'agit de trouver les valeurs de* x, y, z (1).

Posons

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=u.$$

Le premier a gardé $\frac{1}{2}x$ et reçoit u; donc on a

$$\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}t-u;$$

de même pour le second

$$\frac{2}{3}y+u=\frac{1}{3}t-u,$$

et pour le troisième

$$\frac{5}{6}z+u=\frac{1}{6}t-u.$$

(1) C'est la troisième et dernière question posée par Jean de Palerme à Léonard. (Voir la question précédente.)

De tribus hominibus pecuniam communem habentibus.

Léonard pose $u=7$. Il en déduit :

$$t=47,\quad x=33,\quad y=13,\quad z=1.$$

Il dit qu'il y a trois modes de solutions qu'il a donnés, *in libro nostro quem de Numero composui.* C'est son traité *de Abaco.*

Les nombres sont écrits tantôt en chiffres romains, tantôt en chiffres arabes.

On tire de là

$$x = t - 2u,$$
$$y = \frac{1}{2} t - \frac{3}{2} u,$$
$$z = \frac{1}{3} t - \frac{6}{5} u,$$

$$x + y + z = t = \frac{17}{10} t - \frac{47}{10} u, \qquad \frac{7}{10} t = \frac{47}{10} u, \qquad 7t = 47u;$$

le problème est indéterminé.

18. *Une ânesse portait du vin côte à côte avec un mulet, et écrasée sous le poids, elle se plaignait fortement. Alors le mulet met fin à ses plaintes en lui disant : « Qu'as-tu à te plaindre comme une petite fille, la mère ? Si je prenais une de tes mesures, ma charge serait double de la tienne, et si tu en prenais une des miennes, j'en aurais encore autant que toi. « Dis-moi, savant mathématicien, combien de mesures ils portent chacun?*

Puisque le mulet, donnant une de ses mesures à l'ânesse, se trouve également chargé que l'ânesse, il est évident que la différence des nombres de mesures que chacun porte est égale à 2.

Si le mulet reçoit une mesure de celles de l'ânesse, la différence entre les deux nouveaux nombres de mesures sera 4, mais alors le mulet aura le double du nombre des mesures de l'ânesse. 4 représente donc le nombre actuel de mesures portées par l'ânesse, et lorsque le mulet lui restituera la mesure enlevée, elle se trouvera en avoir 4 + 1, ou 5.

Le mulet de son côté, en avait 5 + 2 ou 7.

Traduction en vers latins.

Una cum mulo vinum portabat asella,
Atque suo graviter sub pondere pressa gemebat
Talibus at dictis mox increpat ipse gementem
Mater, quid luges, teneræ de more puellæ ?
Dupla tuis, si des mensuram, pondera gesto;
At si mensuram accipias, æqualia porto.
Dic mihi mensuras, sapiens geometer, istas ?

La solution du problème a aussi été exprimée en assez mauvais vers latins que nous donnons ici pour la singularité.

Unam asina accipiens, amittens mulus et unam,
Si fiant æqui, certe utrique ante duobus.
Distabant a se. Accipiat si mulus at unam,
Amittatque asina unam, tunc distantia fiet
Inter eos quatuor. Muli at cum pondera dupla
Sint asinæ, huic simplex, mulo est distantia dupla.
Ergo habet hæc quatuor tantum, mulusque habet octo.
Unam asinæ si addas, si reddat mulus et unam,
Mensuras quinque hœc, et septem mulus habebunt.

19. Problème des bœufs de Newton.

Sachant que 75 *bœufs ont brouté en* 12 *jours l'herbe d'un pré de* 60 *ares, et que* 81 *bœufs ont brouté en* 15 *jours l'herbe d'un pré de* 72 *ares, on demande combien il faudra de bœufs pour brouter en* 18 *jours l'herbe d'un pré de* 96 *ares. On suppose que dans les trois prés l'herbe est à la même hauteur au moment de l'entrée des bœufs, et qu'elle continue de croître uniformément depuis leur entrée.*

Remarquons d'abord que l'herbe qui croît en 1 jour sur 1 are équivaut à la quantité d'herbe qui recouvre actuellement une certaine superficie que nous pouvons désigner momentanément par s.

D'après l'énoncé, 75 bœufs ont brouté en 12 jours l'herbe d'un pré de 60 ares, et, en plus, 12×60 fois l'herbe qui recouvre la superficie s.

De même, 81 bœufs ont brouté en 15 jours l'herbe d'un pré de 72 ares, et, en plus 15×72 fois l'herbe qui recouvre la même superficie s.

De la première condition, il résulte qu'un bœuf broute en 1 jour l'herbe d'un pré de $\frac{60}{12 \times 75}$ ares, et, en plus, $\frac{60}{75}$ de l'herbe contenue dans la superficie s.

De la seconde condition nous concluons qu'un bœuf broute en

1 jour l'herbe d'un pré de $\frac{72}{15 \times 81}$ ares, et, en plus, $\frac{72}{81}$ de l'herbe contenue dans la superficie s.

Mais ces deux quantités d'herbe sont évidemment égales; d'ailleurs $\frac{60}{12 \times 75}$ est une quantité plus grande que $\frac{72}{15 \times 81}$ et la différence représente l'herbe d'un pré de

$$\frac{60}{12 \times 75} - \frac{72}{15 \times 81} = \frac{1}{9 \times 15} \text{ are.}$$

Au contraire, la quantité $\frac{60}{75}$ est moindre que $\frac{72}{81}$, et la différence

$$\frac{72}{81} - \frac{60}{75} = \frac{4}{9 \times 5}$$

représente l'herbe contenue dans une fraction de s égale à $\frac{4}{9 \times 5}$.

Pour qu'il y ait compensation, il faut donc que les $\frac{4}{9 \times 5}$ de s valent $\frac{1}{9 \times 15}$ d'are, d'où cette conclusion que la superficie s est égale à

$$\frac{1}{9 \times 5} : \frac{4}{9 \times 5} = \frac{5}{4 \times 15} = \frac{1}{12} \text{ d'are.}$$

En résumé, les quantités d'herbe qui poussent dans les trois prairies pendant le séjour des bœufs sont respectivement égales aux quantités d'herbe actuellement contenues dans les superficies de

$$\frac{12 \times 60}{12} = 60 \text{ ares,}$$

$$\frac{15 \times 72}{12} = 90 \text{ ares,}$$

$$\frac{18 \times 96}{12} = 144 \text{ ares.}$$

La question proposée revient alors à la suivante :

Un troupeau de 75 bœufs broutent en 12 jours l'herbe d'un pré de 120 ares; un deuxième troupeau de 81 bœufs broutent en 15 jours l'herbe d'un pré de 162 ares; on demande, d'après cela, combien il faudra de bœufs pour brouter en 18 jours l'herbe d'un pré de 240 ares, sachant d'ailleurs que l'herbe est à la même hauteur dans les trois prés et qu'elle ne pousse pas pendant le séjour des bœufs.

D'après ce qui précède, les deux conditions énoncées rentrent l'une dans l'autre; nous ne considérerons que la première et nous dirons :

Si 75 bœufs broutent en 12 jours l'herbe d'un pré de 120 ares, l'herbe d'un pré de même étendue sera broutée en 1 seul jour par un troupeau de 75×12 bœufs, et en 18 jours par un troupeau de $\frac{75 \times 12}{18}$ bœufs. Si l'herbe d'un pré de 120 ares est broutée en 18 jours par un troupeau de $\frac{75 \times 12}{18}$ bœufs, l'herbe d'un pré de 1 are sera broutée dans le même temps par un troupeau de $\frac{75 \times 12}{18} \times \frac{1}{120}$ bœufs, et enfin, pour brouter, dans le même temps, l'herbe d'un pré de 240 ares il faudra un nombre de bœufs représenté par

$$\frac{75 \times 12}{18} \times \frac{240}{120} = 100.$$

La réponse est donc 100 bœufs.

20. *Un moine entre dans une chapelle où se trouvent les trois saints : saint Pierre, saint Paul et saint Jean.*

S'adressant d'abord au premier il lui dit : « Bienheureux saint Pierre ! Je prie qu'il vous plaise de doubler l'argent que j'ai là dans ma poche, et pour vous en marquer ma gratitude, je ferai présent de 6 francs à cette église. » — Et ainsi fut fait.

Se tournant alors vers saint Paul, il fit cette prière : « Grand saint Paul ! je prie qu'il vous plaise de doubler l'argent que j'ai en poche, et je vous en marquerai ma gratitude, en faisant présent de 6 francs à cette église. » — Et ainsi fut fait comme la première fois.

Enfin le moine adressa la même prière à saint Jean qui lui accorda à son tour ce qui lui était démandé.

Le moine sortit de l'Eglise sans un sou. Combien avait-il en entrant ?

Le moine vient de donner 6 francs à l'église après sa prière à saint Jean, il avait donc en poche 3 francs après avoir donné 6 francs pour la seconde fois.

Donc aussitôt après sa prière à saint Paul il possédait $6 + 3 = 9$ f. et avant sa prière il avait 4 fr. 50.

Aussitôt après sa prière à saint Pierre, il se trouvait avoir $4{,}50 + 6 = 10{,}50$ et en entrant dans l'église, il possédait $\frac{1}{2}$ $10{,}50 = 5$ f. 25

21. *Un homme entre dans une église avec une somme d'argent entièrement composée de pièces de 2 francs; il donne aux pauvres autant de sous qu'il a de pièces de 2 francs; Dieu change les pièces qui lui restent en pièces de 5 francs. Le dévot dépense 7 pièces de 5 francs et rentre chez lui avec le double de ce qu'il possédait en entrant dans l'église. Quelle somme d'argent avait-il d'abord ?*

Cette personne donne aux pauvres 1 sou par chaque pièce de 2 francs qu'elle possède, c'est-à-dire le $\frac{1}{40}$ de ce qu'elle avait en entrant dans l'église; il lui en reste donc les $\frac{39}{40}$.

Ce reste est composé de pièces de 2 francs qui sont transformées en pièces de 5 francs, ou rendues 2 fois et $\frac{1}{2}$ fois plus grandes. Ce qui lui restait devient, par suite, les $\frac{39}{40} \times \frac{5}{2}$ ou les $\frac{39}{16}$ de la somme possédée primitivement.

Le dévot dépense alors 35 francs, et il lui reste le double de son premier avoir ou les $\frac{32}{16}$ de ce premier avoir.

35 francs représentent donc les $\frac{7}{16}$ de la première somme, d'où cette conclusion que la somme cherchée est égale à

$$35 \times \frac{16}{7} = 5 \times 16 = 80 \text{ francs.}$$

22. *Partager un centime entre quatre personnes, en échangeant des pièces de monnaie, de manière que chaque personne reçoive le quart d'un centime.*

Pour résoudre cette question, il suffit de se rappeler qu'un sou vaut 4 liards ou 5 centimes. Par suite, si l'on donne 1 liard à chaque personne, et si chacune d'elles rend 1 centime, on aura donné 4 liards ou 1 sou, et on aura reçu 4 centimes ou 1 sou moins 1 centime. On a donc laissé 1 centime entre les mains des 4 personnes et chacune en a reçu le quart.

23. Problème du même genre

Un pauvre avec un sou, dans sa triste détresse
Donne à vingt mendiants, dans un jour d'allégresse :
Il sut en partageant ce minime secours,
Offrir à chacun d'eux une pièce du cours ;
Comment donc s'y prit-il dans cette circonstance,
Pour leur distribuer cette faible assistance ?

(CHAVIGNAUD).

Il suffit de supposer le pauvre en possession de 5 sous = 20 liards.

Il donne 1 liard à chaque mendiant et en reçoit 1 centime.

Il a ainsi distribué 20 liards ou 5 sous et reçu 20 centimes ou 4 sous.

Il a donc laissé entre les mains des mendiants 1 sou et chacun d'eux en a le vingtième.

Remarque. — Ce dernier problème est extrait de l'ouvrage suivant : *Nouvelle Arithmétique appliquée au Commerce et à la Marine*, mise en vers par L. CHAVIGNAUD, ex-maître de pension, ancien professeur de Mathématiques à l'Institut Rollin. 4ᵉ édit. Toulouse, imprimerie Delsol, in-8 de 92 pages; 1843.

L'Epitre dédiée aux marins termine par ces trois vers :

Traduisant de Bourdon la docte Arithmétique,
Je serai trop heureux, si mes utiles vers,
En charmant vos instants, vous suivent sur les mers.

L'auteur décrit toutes les opérations de l'arithmétique de Bourdon en vers techniques; il débute ainsi :

Définitions.

L'utile Arithmétique, en ses peintures sombres,
Nous fait connaître à fond la science des nombres,
Dans ses divers rapports les fait envisager,
Assembler, retrancher, composer, partager,
Donne des moyens sûrs à l'homme qui s'exerce,
Et grave en son esprit les règles du commerce.

Les opérations sont généralement assez bien indiquées pour ceux qui les connaissent, et ces vers peuvent servir à certaines intelligences pour les retenir.

Voici encore le début de la règle d'escompte :

Lorsque le créancier veut faire une remise,
Le débiteur alors, et la loi l'autorise,
En retranche l'escompte au susdit commerçant,
Qui change son billet pour de l'argent comptant.

Cela suffit pour donner une idée de l'ouvrage. On a omis les extractions des racines.

Un Anglais nommé Guillaume Buckley a publié une *Arithmetica memorativa* en vers latins. Wallis a acheté cet ouvrage qui était joint à la *Logique* de Seton, publiée à Cambridge en 1631. Il ignore si l'*Arithmétique* est antérieure ou non à la *Logique* (WALLIS, *Opera*, t. II, p. 38). On y trouve le plus ancien exemple connu de l'extraction approchée de la racine carrée, au moyen des décimales, en ces quatre vers hexamètres :

Quadrato numero, senas præfigito cyphras
Producti quadri radix per mille secetur,
Integra dat quotiens; et pars ita recta manebit
Radici ut veræ ne pars millesima desit (subintellige *unius*).

Pour la division, il indique cette disposition :

Au-dessus du diviseur, on tire deux traits laissant entre eux un certain intervalle, pour écrire les chiffres successifs du quotient; on écrit le diviseur au-dessous du dernier trait et vers l'extrémité gauche; on cherche le quotient qu'on met à la place indiquée; on fait le produit et l'on écrit le résidu au-dessus du diviseur; on barre la partie du dividende employée; ensuite on fait avancer le diviseur vers la droite, et ainsi de suite. Ces diverses opérations sont résumées dans un seul vers :

Divide, multiplica, subduc, transferque secantem.

Voici la preuve :

Per divisorem, quotientem multiplicabis;
Producto reliquum, si quod fuit, adde priorque
Exhibet numerus, nisi te deceperit error.

Leslie, dans sa *Philosophy of arithmetic* (p. 237) donne des extraits de cette arithmétique.

Rappelons encore que Neper, dans sa *Rabdologie*, a inséré des vers numériques pour expliquer l'emploi de ses baguettes.

24. *Un jour, le cuisinier d'un puissant personnage,*
Afin de contenter trois filles du village,
Qui demandaient des œufs, leur dit en les voyant :
Je vais donner tous ceux que j'ai dans le moment.

Il donne la moitié d'abord à la première
Et la moitié d'un œuf, par faveur singulière ;
A la seconde il offre aussi du meilleur cœur,
La moitié qui lui reste, avec même faveur
De la moitié d'un œuf dont la fille s'empare ;
Enfin continuant son partage bizarre,
Il donne à la troisième avec même amitié,
De ~~son troisième reste encore l'humble moitié~~,
Plus la moitié d'un œuf : il eut donc l'avantage
De tout distribuer. Dans cet heureux partage,
Qui paraît singulier, combien en avait-il ?
Et comment a-t-il eu l'esprit asez subtil,
Pour donner des moitiés à chaque jeune fille
Sans en casser un seul, ni s'échauffer la bile ?

(CHAVIGNAUD).

Le cuisinier donne à la 3e personne la moitié de ce qui lui reste, avec un demi-œuf en plus, et il ne lui reste plus rien.

Ce demi-œuf représente donc évidemment ce qui lui reste après avoir donné à la 3e personne.

Mais il a donné à cette 3e personne la moitié de son second reste.

Ce second reste est donc nécessairement de 1 œuf.

Il lui reste 1 œuf après avoir donné à la 2e personne la moitié de son premier reste et un $\frac{1}{2}$ œuf en plus.

Si donc il n'avait pas donné ce $\frac{1}{2}$ œuf en plus, il lui serait resté 1 œuf $\frac{1}{2}$. 1 œuf $\frac{1}{2}$ représente donc la moitié du premier reste qui est dès lors de 3 œufs.

Il lui reste 3 œufs après avoir donné à la première personne la moitié de ce qu'il a et un $\frac{1}{2}$ œuf en plus de cette moitié.

La moitié du nombre total des œufs est donc de 3 œufs $\frac{1}{2}$.

Par suite le cuisinier possédait en commençant 7 œufs.

QUELQUES QUESTIONS DIVERSES

1. *On observe l'heure marquée par une pendule entre 4 et 5 heures, puis entre 7 et 8 heures; on constate que dans l'intervalle de ces deux observations, les aiguilles des heures et des minutes ont échangé leurs positions. Démontrer qu'à chaque observation les aiguilles étaient également inclinées sur la verticale.*

Représentons par α et β les distances en minutes, comptées sur la circonférence graduée, des extrémités des aiguilles à la verticale.

A la première observation, il est $(30 + \alpha)$ minutes après 4 heures.

L'aiguille des heures parcourt le $\frac{1}{12}$ de cette distance et

$$\beta = 10 - \frac{30 + \alpha}{12}, \quad \text{d'où} \quad 12.\beta + \alpha = 90.$$

A la seconde observation, il est $(30 - \beta)$ minutes après 7 heures.

L'aiguille des heures a parcouru $\frac{30 - \beta}{12}$ divisions

$$\alpha = 5 + \frac{30 - \beta}{12}, \quad 12.\alpha + \beta = 90.$$

Donc $\alpha = \beta$.

2. *Déterminer des nombres entiers, pouvant être décomposés en 4 parties également entières et telles que les résultats obtenus en ajoutant 2 à la première partie, en retranchant 2 de la seconde partie, en multipliant par 2 la troisième partie, et enfin, en divisant par 2 la quatrième partie, soient égaux entre eux.*

Représentons par N l'un des nombres cherchés et par a, b, c, d, les quatre parties. Il résulte des conditions imposées que l'on doit avoir :

$$a + 2 = b - 2 = c \times 2 = \frac{d}{2},$$

On en tire ces conséquences.

La 2[e] partie est égale à la première augmentée de 4.

La 3[e] partie est égale à la moitié de la première, plus 1.

La 4[e] partie est égale à 4 fois la troisième.

Il résulte donc de là que la première partie doit être un nombre pair, sa plus petite valeur est donc 2.

On peut former le tableau suivant donnant les différentes valeurs de N et les diverses parties.

1re partie	2e partie	3e partie	4e partie	N
2	6	2	8	18
4	8	3	12	27
6	10	4	16	36
8	12	5	20	45
10	14	6	24	54
12	16	7	28	63
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

Les diverses valeurs de N forment une progression arithmétique dont le premier terme est 18 et la raison $\frac{18}{2}$ ou 9.

Les premières parties sont constituées par la suite naturelle des nombres pairs.

Les deuxièmes parties sont également constituées par la suite naturelle des nombres pairs en commençant par 6.

Pour les troisièmes parties on a la suite naturelle des nombres entiers en commençant par 2.

Enfin les quatrièmes parties sont données par les termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est 8 et la raison $\frac{8}{2} = 4$.

Cette même question traitée en supposant que les 4 parties soient telles que les résultats obtenus en ajoutant 3 à la première, en retranchant 3 de la seconde, en multipliant par 3 la troisième et enfin en divisant par 3 la quatrième, soient égaux, nous fournit le tableau suivant.

1re partie	2e partie	3e partie	4e partie	N
3	9	2	18	32
6	12	3	27	48
9	15	4	36	64
12	18	5	45	80
15	21	6	54	96
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

En prenant la constante 4 au lieu de 3, on obtient ces nouveaux résultats.

4	12	2	32	50
8	16	3	48	75
12	20	4	64	100
16	24	5	80	125
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

On remarquera que les troisièmes parties sont toujours constituées par la suite naturelle des nombres entiers en commençant par 2.

3. *Partager le nombre 10 en deux parties, de manière qu'en ajoutant leur produit à la somme de leurs carrés, le total donne 76.*

Le double du produit des deux parties augmenté de la somme des carrés de ces parties donne, comme on sait, le carré de la somme de ces deux parties, c'est-à-dire 10×10 ou 100.

Donc le simple produit des deux parties est égal à $100 - 76$ ou à 24.

Il suffit donc de décomposer 24 en deux facteurs dont la somme soit 10. On voit de suite que les deux facteurs en question sont 4 et 6. On a bien d'ailleurs

$$4 \times 6 + 4^2 + 6^2 = 76.$$

4. *Trouver deux nombres entiers sachant que leur somme est un multiple de leur produit.*

Soient a et $a + x$ les deux nombres.

$$2a + x = q \cdot a(a + x)$$

ce qui peut s'écrire

$$a(qa - 2) + x(qa - 1) = 0.$$

Pour $qa > 2$, le 1^er^ membre est plus grand que 0,
Pour $qa = 1$, le 1^er^ membre est plus petit que 0.
Donc $qa = 2$, par suite $q = 1$ ou 2, et $a = 2$ ou 1.
Dans ces conditions, l'équation se réduit à $x = 0$.
Les nombres demandés sont donc égaux entre eux et égaux à 1 ou à 2.

5. *Trouver trois nombres entiers dont la somme soit égale au produit.*

Soient a, $a + x$ et $a + y$ les trois nombres

$$3a + x + y = a(a + x)(a + y) = a^3 + a^2x + a^2y + axy.$$

d'où :

$$a(a^2 - 3) + (x + y)(a^2 - 1) + axy = 0,$$

Pour $a > 1$ le premier membre est plus grand que 0, donc nécessairement $a = 1$.

L'équation se réduit alors à $xy = 2$, d'où $x = 1$ et $y = 2$.

Les 3 nombres cherchés sont donc 1, 2 et 3.

6. *Trouver un nombre de deux chiffres sachant qu'en l'écrivant 3 fois de suite et en écrivant ensuite le chiffre* 1, *on forme un nombre de 7 chiffres qui est un cube parfait.*

Soit x le nombre cherché

$$(1) \quad 10000\,x + 1\,000\,x + 10\,x + 1 = 101010\,.\,x + 1 = N^3$$

$$(2) \qquad 10^6 \leqslant N^3 < 10^7.$$

D'après la double inégalité (2), N est compris entre 100 et $100\sqrt[3]{10}$ ou 215.

N^3 se termine par 1, et il en est par suite de même de N.

L'égalité (1) peut s'écrire

$$101010\,x = N^3 - 1 = (N-1)\,N\,(N+1) + (N-1).$$

$N - 1$ est multiple de 10.

101010 et $(N-1)\,N\,(N+1)$ sont des multiples de 30.

Donc : $N - 1 =$ multiple de 30.

Les seuls multiples de 30 compris entre 99 et 214, sont :

120, 150, 180 et 210.

En prenant pour valeur de N, l'un de ces nombres augmenté de 1, on constate que pour $N = 211$ seulement, la valeur de x est entière et égale à 93.

7. *Trouver* 4 *nombres entiers tels que leur somme soit égale à la somme obtenue en ajoutant au produit du plus grand par le plus petit, le produit des deux autres.*

Soient a, $a + x$, $a + y$ et $a + z$ les 4 nombres rangés par ordre de grandeur croissante.

$$4a + x + y + z = a\,(a + z) + (a + x)\,(a + y).$$

Cette relation peut s'écrire

$$2a(a-2)+(a-1)(x+y+z)+xy=0.$$

En prenant $a \geqslant 2$ le premier membre est plus grand que zéro. Donc $a=1$ et l'équation se réduit à $xy=2$, ce qui entraîne $x=1$ et $y=2$.

L'équation étant indépendante de z, il en résulte que cette inconnue peut être choisie à volonté.

Les nombres cherchés sont donc 1, 2, 3 et 1 + un nombre indéterminé. Ce qui revient à dire que les trois plus petits des quatre nombres demandés sont 1, 2 et 3, le plus grand pouvant être choisi à volonté.

8. *Un nombre de 4 chiffres est un carré parfait. Trouver ces 4 chiffres sachant que les deux premiers sont égaux ainsi que les deux derniers.*

x et y étant les deux chiffres différents du nombre cherché N, on a :

$$N = 1\,000\,x + 100\,x + 10\,y + y$$

ou encore

$$N = 11\,(100\,.\,x + y).$$

N étant carré parfait, le facteur $100\,.\,x+y$ doit être divisible par 11, c'est à-dire que l'on doit avoir

$$x+y = \text{mult. de } 11,$$

Mais x et y sont tous les deux moindres que 10. Donc :

$$x+y=11 \quad \text{et} \quad y=11-x.$$

Par suite ;

$$100\,x+y = 100\,x + 11 - x = 11\,(9\,.\,x+1)$$
$$\text{et } N = 11^2\,.\,(9\,.\,x+1).$$

Le nombre $9\,.\,x+1$ étant alors carré parfait, ne peut être terminé que par l'un des chiffres 1, 4, 5, 6 ou 9, d'où il résulte que le chiffre des unités du produit $9 . x$ ne peut être que 0, 3, 4, 5 ou 8.

Les seules valeurs admissibles pour x sont dès lors, 2, 5, 6 ou 7.

Pour $x = 2$, $9x + 1 = 19$ ce nombre n'est pas carré parfait.
$x = 5$, $9x + 1 = 46$ »
$x = 6$, $9x + 1 = 55$ »
$x = 7$, $9x + 1 = 64 = 8^2$.

On a donc $x = 7$, $y = 4$
et $N = 7744$.

9. *Trouver un nombre de 4 chiffres, carré parfait, sachant que les deux premiers chiffres ainsi que les deux derniers forment deux nombres carrés parfaits.*

Le carré parfait cherché N^2 est de la forme

$$N^2 = 100\, x^2 + y^2$$

N a deux chiffres.

Le premier chiffre à gauche de N est évidemment x et comme x^2 est plus grand que 10, ce chiffre est au moins égal à 4. Ce chiffre ne peut pas, d'ailleurs, surpasser 4 ; autrement, dans l'extraction de la racine carrée de N^2, le premier chiffre à gauche du reste y^2 ne contiendrait pas le produit $2x$.

Donc $x = 4$ et le premier chiffre de y^2 est au moins égal à 8, on en déduit $y^2 = 81$ et $N^2 = 1681$, $N = 41$.

Nous avons supposé, comme cela arrive généralement, que le premier chiffre de y^2 était au moins égal à $2x$. Dans le cas contraire, le second chiffre de N est zéro, de sorte que l'on peut considérer comme répondant à la question, les carrés des nombres.

$$40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80 \text{ et } 90.$$

10. *Trouver 3 nombres entiers sachant que leur produit est égal à la somme de leurs produits deux à deux.*

Soient a, $a+x$ et $a+y$, les 3 nombres cherchés rangés par ordre de grandeur croissante.

$$a(a+x)(a+y) = a(a+x) + a(a+y) + (a+x)(a+y);$$

Cette relation peut s'écrire

$$a^2(a-3) + a(x+y)(a-2) + xy(a-1) = 0.$$

Si l'on fait $a > 3$, le premier membre est plus grand que zéro.
Si l'on fait $a = 3$, le premier membre devient $3(x+y) + 2xy$ et cette somme ne peut être nulle que si $x = y = 0$.
Dans ce cas les nombres répondant à la question sont

$$3 \quad , \quad 3 \quad , \quad 3.$$

Si $a = 1$, le premier membre est plus petit que zéro.
Donc nécessairement $a = 2$.
L'équation se réduit alors à $xy = 4$.
Relation qui entraîne, soit $x = 1$ avec $y = 4$,
Soit $x = 2$ avec $y = 2$.
On a donc les 3 systèmes de solutions 3, 3, 3
2, 3, 6
et 2, 4, 4.

11. *Trouver les nombres dont les carrés s'écrivent toujours de la même façon dans tout système de numération analogue au système décimal, dont la base est plus grande que 4.*

(Nouvelles Annales 1871. p. 431),
Soit

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + k \cdot x + l$$

un nombre écrit dans le système dont la base est $x > 4$.

Pour que son carré s'écrive de la même manière, quel que soit x, il faut et il suffit que dans le développement de

$$(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + kx + l)^2$$

chaque coefficient soit inférieur à la plus petite base, c'est-à-dire à 5, ce qui aura lieu si ces trois conditions sont remplies :

1° Qu'aucun chiffre ne soit supérieur à 2 ;

2° Que la somme des produits de deux chiffres consécutifs et des chiffres qui en sont équidistants ne soit pas > 2 ;

3° Que le carré d'un chiffre plus la somme des doubles produits des chiffres qui en sont équidistants ne soit pas supérieur à 4.

Voici les nombres de 1, 2, 3, 4, chiffres qui satisfont à ces conditions

1, 2; 10, 11, 12, 20, 21 ; 100, 101, 102, 110, 111, 120, 200, 201, 210 ; 1000, 1001, 1002, 1010, 1011, 1012, 1020, 1021, 1100, 1101, 1102, 1110, 1111, 1200, 1201, 2000, 2001, 2002, 2010, 2011, 2012, 2100, 2102.

12. *Trouver un nombre entier tel qu'en écrivant à sa droite le nombre suivant, on obtienne un nombre de 6 chiffres carré parfait.*

Soient x le nombre entier cherché, N^2 le nombre de 6 chiffres carré parfait

$$1001\,x + 1 = N^2 \quad \text{d'où} \quad 7 \times 11 \times 13 \,.\, x = N^2 - 1 = (N - 1)(N + 1).$$

N^2 étant un carré de 6 chiffres, N aura 3 chiffres et il en sera de même de x.

N est compris entre 316 et 1000.

$N - 1$ est au moins égal à 316 et $N + 1$ au plus égal à 1000.

Aucun des deux nombres $N + 1$ et $N - 1$ ne peut contenir à la fois les trois facteurs premiers 7, 11 et 13 dont le produit est égal à 1001 ; mais chacun d'eux peut contenir deux de ces trois facteurs, le second nombre étant alors divisible par le troisième facteur.

Il suffit donc de considérer tous les multiples de l'un des produits

$$7 \times 11 \quad , \quad 7 \times 13 \quad \text{et} \quad 11 \times 13,$$

qui sont compris entre 316 et 1 000, puis de ne prendre dans chacune de ces 3 séries de multiples que ceux qui sont respectivement de l'une des formes

$$\text{mult. } 13 \pm 2 \quad , \quad \text{mult. } 11 \pm 2 \quad \text{et} \quad \text{mult. } 7 \pm 2.$$

Les seuls nombres répondant à cette condition sont :

$$7.11.11 = 847 = \text{mult. } 13 + 2 \quad , \quad 7.13.8 = 728$$
$$= \text{mult. } 11 + 2 \quad , \quad 11.13.3 = 429 = \text{mult. } 7 + 2$$
et $11.13.4 = 572 = \text{mult. } 7 - 2.$

On a, par suite, les 4 solutions

$$x = 11. \frac{847 - 2}{13} = 715, \quad x = 8. \frac{728 - 2}{11} = 528$$

$$x = 3 \times \frac{429 - 2}{7} = 183 \quad \text{et} \quad x = 4. \frac{472 + 2}{7} = 328.$$

13. *Trouver un nombre de 4 chiffres égal au carré de la somme du nombre formé par ses deux premiers chiffres et du nombre formé par ses deux derniers chiffres.*

Ce nombre est un carré parfait, désignons-le par N^2 et représentons par x et y les nombres formés par les deux premiers chiffres et les deux derniers. On a ;

$$N^2 = 100.x + y = (x + y)^2$$

donc

$$N = x + y$$

et

$$N(N - 1) = 99.x.$$

Le produit des deux nombres consécutifs $N - 1$ et N étant divisible par $99 = 11 \times 9$; l'un de ces deux nombres au moins est divisible par 9 ou par 11.

D'ailleurs N^2 étant compris entre 1 000 et 10 000, N ou $N - 1$ est compris entre 30 et 100.

Il suffit donc d'associer à un multiple de 9 compris entre 30 et 100, un multiple de 11 qui lui soit consécutif et soit compris entre les mêmes limites (sauf pour 99).

La série des multiples de 9 est 36, 45, 54, 63, 72, 81, 99
et celle des multiples de 11 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

L'examen de ces deux suites nous montre que les nombres à associer sont 44 et 45, 54 et 55.

On ne peut donc prendre pour N que les valeurs

$$45, \quad 55 \quad \text{ou} \quad 99$$

dont les carrés sont 2 025, 3 025 et 9 801.

Ce sont les 3 seuls nombres répondant à la question.

14. *Trouver un nombre de 2 chiffres tel qu'en l'écrivant deux fois de suite et en écrivant ensuite le chiffre* 1, *on forme un nombre de* 5 *chiffres carré parfait.*

Soient u et d les chiffres des unités et des dizaines du nombre cherché.

Par hypothèse

$$dudu1 = y^2 \qquad \text{ou} \qquad du \times 1000 + du \times 10 + 1 = y^2$$

On déduit de là

$$du \times 1010 + 1 = y^2$$

d'où

$$du \times 101 \times 10 = y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1).$$

Le facteur premier 101 doit diviser l'un des facteurs du second membre. Soit

$$y + 1 = 101.\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad y = 101\,\alpha - 1$$

y^2 ayant cinq chiffres, on a

$$100 \leqslant y < 317,$$

et les seules hypothèses à faire pour α sont

$$\alpha = 1,\ 2,\ 3.$$

D'ailleurs y^2 se termine par le chiffre 1, y doit donc se terminer par 1 ou 9 et les hypothèses $\alpha = 1$ ou 3 sont à rejeter.

Il reste $\alpha = 2$ qui donne $y = 201$ dont le carré est 40 401.

$$du = 40, \qquad u = 0 \qquad \text{et} \qquad d = 4$$

En supposant $y - 1 = 101\,\alpha$, on voit facilement qu'il n'existe pas de valeur de α convenant à la question.

15. *Dans un système quelconque de numération les nombres* 121, 12 321, 1 234 321, 123 454 321, *sont des carrés parfaits.*

On peut remarquer de suite que, dans le système décimal, ces nombres représentent les carrés de 11, 111, 1 111.

Si, dans un système quelconque, à base b par exemple, on effectue le produit de 111 par 111, le produit de chaque chiffre du multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur sera toujours 1, il n'y aura pas de retenue à faire et le produit sera

$$11\,100 + 1\,110 + 111 = 12\,321.$$

D'une façon générale 123 ..... n ..... 321 représente le carré du nombre 111 ... 111 composé de n chiffres 1, n étant, cela va sans dire, un chiffre plus petit que la base du système employé.

Il résulte de là que les nombres 123 ..... n ..... 321 et 11 ... 1 (n fois le chiffre 1) étant écrits dans le système b, donneront, en les écrivant dans le système décimal, l'identité

$$b^{2n-2} + 2\,b^{2n-3} + 3\,b^{2n-4} + \ldots + 3\,b^2 + 2\,b + 1 =$$
$$(b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b + 1)^2.$$

Corollaire. — Le nombre 12 345 654 321 *est divisible par* 12 321 *dans tout système de numération dont la base est plus grande que* 6.

16. *Deux horloges* H *et* H′ *sonnent l'heure en même temps* ; H *avance de* 3 *secondes sur* H′. *Les coups de l'horloge* H *se succèdent de* 5 *secondes en* 5 *secondes ; ceux de* H′ *de* 4 *secondes en* 4 *secondes, et lorsque l'intervalle qui sépare deux coups ne surpasse pas une seconde, l'oreille ne perçoit qu'un son. On a entendu* 14 *coups ; quelle heure est-il ?*

(Laisant)

Lorsqu'il y a coïncidence absolue entre un coup de l'horloge H et un coup de l'horloge H′, l'oreille confond également le coup précédent de H avec le coup précédent de H′, puisque l'intervalle de ces coups est de $5^s - 4^s = 1^s$. La même remarque s'applique au coup suivant des deux horloges.

Inversement, deux coups séparés par un intervalle d'une seconde, sont évidemment précédés ou suivis de deux coups en coïncidence parfaite.

Il résulte de là que chaque fois qu'un coup de l'horloge H tintera en même temps qu'un coup de l'horloge H′, l'oreille ne percevra qu'un son pour les coups précédents et suivants des deux horloges, ce qui revient à dire que l'on n'entendra que 3 coups au lieu de

$$3 \times 2 \text{ ou } 6 \text{ coups}$$

Cherchons donc le rang des coups en coïncidence parfaite et supposons que le n^{me} coup de l'horloge H coïncide avec le p^{me} coup de H'. Le temps employé par H pour sonner n coups sera évidemment égal au temps nécessaire à l'horloge H' pour sonner p coups, augmenté des 3 secondes d'avance de H sur H'. On peut donc poser l'égalité

$$5(n-1) = 3 + 4(p-1) \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{5n}{4} - 1,$$

Il résulte de là que la fraction $\frac{5n}{4}$ représente un nombre entier, c'est-à-dire que n est un multiple de 4.

D'un autre côté on doit avoir

$$p \text{ ou } \frac{5n}{4} - 1 < 14, \qquad \text{d'où} \qquad n < 12$$

Les seules valeurs admissibles de n sont dès lors 4 ou 8. Pour

$$n = 4, \qquad p = 4,$$

et pour

$$n = 8, \qquad p = 9.$$

Les 4^{me} et 8^{me} coups de l'horloge H coïncident avec les 4^{me} et 9^{me} coups de H', ce qui montre que sur les 14 coups entendus il y avait 6 coups doubles.

Le nombre réel des coups est donc 14 + 6 ou 20, et il est 10 heures.

Remarque. — Nous avons dit que deux coups séparés par l'intervalle d'une seconde étaient précédés ou suivis de 2 coups en coïncidence parfaite. Ceci n'est pas absolument exact, car il peut se faire que l'une des horloges cesse de sonner à ce moment; mais on vérifie facilement que ce n'est pas le cas dans le problème qui nous occupe.

17. *Quelles sont les heures auxquelles on peut faire permuter les*

deux aiguilles d'une horloge de façon que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge (1)?

Soit x l'une des heures cherchées. Prenons pour origine sur le cadran la position des aiguilles à midi, et pour unité l'heure elle-même, si bien que le tour du cadran tout entier est mesuré par 12.

La position de la petite aiguille est indiquée par x ; si le nombre y indique la position de la grande aiguille, nous avons

$$(1) \qquad 12\,x = y + k.12.$$

Pour que la position résultant de la permutation soit la conséquence même du mouvement de l'horloge, c'est-à-dire réponde à une heure possible, il faut donc qu'on ait :

$$(2) \qquad 12\,y = x + k.12.$$

Eliminant y entre ces deux relations, il vient

$$144.x = x + k.12$$

ou

$$(3) \qquad 143.x = m.12, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{12\,k}{143}.$$

Pour obtenir toutes les heures cherchées, il faut donner à k les valeurs successives 0, 1, 2, 3, ..., 142, après quoi l'on retombera sur les solutions déjà obtenues.

(1) Cette question a été proposée par Laisant dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*. (T. VI, 1882, p. 168).

M. d'Ocagne l'a également proposée sous une forme un peu différente dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. II, p. 384). Moret-Blanc en a donné une solution qui est incomplète (p. 523).

Celle que nous présentons est de Laisant (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. III, p. 383).

Cette solution comprend, en particulier, les heures de *superposition* des aiguilles, obtenues en donnant à k les onze valeurs

$$0,\ 13,\ 26,\ 39,\ 52,\ 65,\ 78,\ 91,\ 104,\ 117 \text{ et } 130,$$

Quant aux 132 autres résultats, ils se correspondent deux à deux, et les valeurs *associées* de k, que nous appellerons k' et k'' sont telles que l'on a

$$k' \equiv 12\, k'' \ (\text{mod. } 143).$$

d'où réciproquement

$$k'' \equiv 12\, k' \ (\text{mod. } 143).$$

Par exemple à $k' = 34$, répondra $k'' = 122$. Ces deux valeurs donnent respectivement pour x, en faisant la conversion en heures et minutes

$$2^h 51^m \frac{27}{143} \qquad \text{et } 10^h 14^m \frac{38}{143}.$$

Si donc une horloge marque $2^h 51^m \frac{27}{143}$ et si à ce moment on fait permuter les deux aiguilles, elle marquera exactement

$$10^h, 14^m \frac{38}{143}.$$

Si l'un des nombres k', k'' s'écrit $\alpha\beta$ dans le système de numération duodécimal, l'autre s'écrira $\beta\alpha$. Il s'ensuit nécessairement que les nombres associés à eux-mêmes sont ceux qui s'écrivent 11, 22, ... c'est-à-dire 13, 26, ..., comme nous venons de le faire observer tout à l'heure.

La solution du problème est donnée, en somme, par la relation (3). Or cette relation est évidemment celle qui donnerait les heures de rencontre, sur un cadran, entre la petite aiguille et une autre marchant 144 fois aussi vite, c'est-à-dire 12 fois aussi vite que l'aiguille des minutes.

La question de réciprocité que nous nous sommes proposée se ramène donc à un simple problème de rencontre.

18. *Trouver tous les nombres carrés parfaits formés de 4 chiffres pairs.*

Tout carré parfait de 4 chiffres pairs est compris dans l'un des 4 intervalles

2 000 à 3 000 ; 4 000 à 5 000 ; 6 000 à 7 000 ; 8 000 à 9 000

La racine qui est un nombre pair ne peut se trouver que dans l'un des intervalles correspondants

44 à 55 ; 63 à 71 ; 77 à 84 ; 89 à 95.

Remarquons maintenant qu'en multipliant un nombre pair par lui-même, les chiffres à droite de chaque produit partiel sont pairs. Pour que le carré soit terminé par deux chiffres pairs, il faut donc que le chiffre des dizaines du premier produit partiel soit pair et cette condition n'est remplie qu'autant que la retenue précédente, fournie par le chiffre des dizaines du carré des unités, est un nombre pair. Il résulte de cette remarque que tous les nombres terminés par 4 ou par 6 sont à écarter.

Les nombres cherchés sont dès lors nécessairement compris parmi les carrés des 10 nombres suivants

48, 50, 52, 68, 70, 78, 80, 82, 90 et 92.

L'essai direct donne les 4 solutions

$$68^2 = 4\,624, \quad 78^2 = 6\,084, \quad 80^2 = 6\,400 \quad \text{et} \quad 92^2 = 8\,464$$

Remarque. — On peut établir par un raisonnement analogue, *qu'il n'existe aucun carré parfait de 4 chiffres impairs.*

19. *Deux vases A et B, contiennent respectivement a litres de vin et b litres d'eau. On enlève c litres du vase A et on les remplace par de l'eau ;*

on enlève également du vase B, c litres, qui sont remplacés par les c litres pris dans A. On recommence cette opération une seconde fois, puis une troisième, et ainsi de suite jusqu'à n fois. On demande la quantité de vin que contient le second vase B au bout de ces n opérations.

Représentons par $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ les quantités de vin contenues dans le vase B, après $1, 2, 3, \ldots, n$ opérations.
si on pose

$$\left(1 - \frac{c}{a}\right) = p \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{c}{b}\right) = q$$

on trouve facilement

$$q_1 = c = c\,\frac{p - q}{p - q},$$
$$q_2 = c\,\frac{p^2 - q^2}{p - q},$$
$$q_3 = c\,\frac{p^3 - q^3}{p - q},$$
$$\cdots\cdots$$

et d'une façon générale

$$q_n = c\,\frac{p^n - q^n}{p - q} = \frac{b\left[\left(1 - \frac{c}{a}\right)^n - \left(1 - \frac{c}{b}\right)^n\right]}{1 - \frac{b}{a}}$$

si $a = b$

$$q_n = nc\left(1 - \frac{c}{a}\right)^{n-1}.$$

20. *Trouver un nombre de quatre chiffres, carré parfait et tel que le nombre formé par les deux premiers chiffres à gauche surpasse de 1 le nombre formé par les deux derniers chiffres.*

En représentant par α le nombre formé par les deux derniers chiffres à gauche, le carré parfait en question peut s'écrire,

$$100(\alpha + 1) + \alpha$$

soit β la racine carrée de ce nombre.

$$100(\alpha + 1) + \alpha = 101\,\alpha + 100 = \beta^2$$

d'où

$$101 . \alpha = \beta^2 - 100 = (\beta + 10)(\beta - 10).$$

L'un des facteurs $\beta + 10$, $\beta - 10$ est divisible par le nombre premier 101. Mais β a deux chiffres au plus.

La seule hypothèse admissible est donc $\beta + 10 = 101$

d'où $\beta = 91$.

Le carré cherché est 8 281.

21. *Trouver un nombre de trois chiffres qui soit égal à la somme des six nombres de deux chiffres qu'on peut former en combinant de toutes les manières possibles deux des chiffres du nombre inconnu.*

Soient c, d et n les chiffres des centaines, des dizaines et des unités du nombre cherché N.

$$N = c \times 10 + d + c \times 10 + u + d \times 10 + u + d \times 10 + c + u \times 10 + d + u \times 10 + c$$

$$\text{ou} \quad \mathrm{N} = 22(c + d + u). \tag{1}$$

Le nombre N est donc divisible par 11, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$u + c - d = \text{multiple de } 11.$$

Ou encore, puisque ces 3 chiffres sont moindres que 10,

$$u + c - d = 0 \quad \text{ou} \quad 11$$

L'hypothèse $u + c - d = 11$ est à rejeter, car, en remplaçant dans la relation (1), N par $100.c + 10.d + u$
et d par $u + c.11$,

il vient, tous calculs faits, $u - 4 = 2c$, d'où $c = \frac{u}{2} - 2$.

Mais, d'après l'égalité (1), le nombre N est pair ; par suite, les seules valeurs de u donnant pour c des valeurs entières, sont :

$$u = 8 \quad , \quad 6 \quad \text{ou} \quad 4$$

on en déduit $c = 2$, 1 ou 0, et pour la somme $u + c$, les valeurs 10 , 7 ou 4.

On ne pourrait donc, dans ce cas, retrancher 11 de $u + c$ pour déterminer d.

Dès lors $u + c - d = 0$ d'où $u + c = d$ et, en opérant sur (1) comme nous venons de le faire

$$2c = u \quad , \quad c = \frac{u}{2}.$$

u ne peut être que l'un des chiffres	0,2,4,6	ou	8
il en résulte pour c les valeurs	0,1,2,3	ou	4
et enfin pour d	0,3,6,9	ou	12

En résumé, les trois nombres suivants répondent à la question

$$132, 264, 396$$

22. *Trouver un nombre entier de trois chiffres qui, divisé par le produit de ses chiffres, donne pour quotient le chiffre des centaines.*

Soient c, d et u les chiffres des centaines, des dizaines et des unités du nombre cherché N.

$$\frac{c.\,100 + d.\,10 + u}{c.\,d.\,u} = c$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{10\,(c.\,10 + d)}{c^2.\,d - 1}.$$

u étant entier et plus petit que 10, on a nécessairement

$$\frac{c^2.\,d - 1}{10.\,c + d} = 10, \text{ ou } 5 \text{ ou } 2.$$

Nous allons examiner ces trois hypothèses.

1° Pour $\frac{c^2 . d - 1}{10 . c + d} = 10$, on a : $d = \frac{100 . c + 1}{c^2 - 10}$.

La plus petite valeur possible de c est 4.

$100 . c + 1$ étant un nombre impair, il en est de même de $c^2 - 10$.

Les seules valeurs admissibles pour c sont donc 5, 7 ou 9.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pour } c = 5,\ d = \frac{167}{5} \\ \text{pour } c = 7,\ d = \frac{701}{39} \\ \text{et pour } c = 9,\ d = \frac{901}{71} \end{array}\right\} \text{ces trois valeurs ne conviennent donc pas.}$$

2° Pour $\frac{c^2 . d - 1}{10 . c + d} = 5$, on a : $d = \frac{50 . c + 1}{c^2 - 5}$.

La plus petite valeur de c est 3.

Le dénominateur $c^2 - 5$ représente un nombre impair, comme $50 . c + 1$.

c est donc pair, et on ne peut faire que les 3 suppositions

$$c = 4 \quad , \quad 6 \quad \text{ou} \quad 8.$$

Ces valeurs de c nous donnent respectivement pour d les valeurs $\frac{201}{11}$, $\frac{301}{31}$ et $\frac{401}{59}$ qui sont inadmissibles.

3° Pour $\frac{c^2 . d - 1}{10 . c + d} = 2$, $\qquad d = \frac{20 . c + 1}{c^2 - 2}$.

c est plus grand que 1 et doit être impair, les seules valeurs admissibles sont donc 3, 5, 7 ou 9.

Les valeurs 3, 5 et 9 nous donnent pour d des valeurs fractionnaires.

Pour $c = 7$, on a $d = \frac{141}{47} = 3$ et alors $u = \frac{10}{2} = 5$.

Le nombre cherché est donc 735.

23. *Trouver un nombre de 4 chiffres qui soit égal au cube de la somme de ses chiffres.*

Soient m, c, d et u les quatre chiffres du nombre cherché N^3

$$N^3 = 1000 . m + 100 . c + 10 . d + u,$$
$$\text{et } N = m + c + d + u.$$
$$N^3 - N = (N - 1)N(N + 1) = 9(111 . m + 11 . c + d).$$

L'un des trois nombres consécutifs $N - 1$, N et $N + 1$, dont un seul est divisible par 3, doit être un multiple de 9.

D'ailleurs N^3 étant compris entre 1000 et 10000
N est compris entre 10 et 22.

Parmi les nombres compris entre 10 et 22 les nombres 17, 18 et 19 sont les seuls qui soient multiples de 9, ou multiples de 9 ± 1.

On a $17^3 = 4193$, $18^3 = 5832$, $19^3 = 6859$.

Les nombres 4913 et 5832 conviennent seuls.

Remarque. — Si l'on se proposait la détermination de tous les nombres égaux au cube de la somme de leurs chiffres, on trouverait d'une manière analogue, les quatre autres solutions.

$$1^3 = 1,\ 8^3 = 512,\ 26^3 = 17576,\ 27^3 = 19683.$$

On démontre qu'il n'y a pas de solution comprenant plus de 5 chiffres.

24. *Trouver un nombre qui soit égal à la somme des chiffres de son cube.* (LAISANT)

Le nombre et son cube divisés par 9 doivent donner le même reste; un cube étant nécessairement de l'une des formes $9m$, $9m - 1$, $9m + 1$, il en est de même des nombres satisfaisant à la condition imposée.

Le cube d'un nombre de trois chiffres ayant au plus neuf chiffres, la somme des chiffres de son cube est inférieure à 9×9 ou $81 < 100$.

Donc les nombres demandés ne peuvent se trouver que dans les nombres d'un ou deux chiffres.

Le cube d'un nombre de deux chiffres ayant au plus six chiffres, la somme des chiffres de son cube est inférieure à $6 \times 9 = 54$.

Le nombre 53 dont le cube est terminé par un 7 étant à exclure, la somme ne peut excéder 52 ; de même les nombres 44, 45, 46 dont les cubes, composés de cinq chiffres, et terminés respectivement par 4, 5 ou 6, sont à exclure ; la somme des chiffres ne peut excéder 42

En formant les cubes des nombres de l'une des formes $9m - 1$, $9m$ et $9m + 1$, de 1 à 37, on trouve les solutions suivantes :

Nombres. . .	1,	8,	17,	18,	26,	27.
Cubes. . . .	1,	512,	4 193,	5 832,	17 576,	19 683

Il n'y a pas d'autre solution.

Remarque. — Il y a lieu de remarquer que la somme des 6 nombres qui précèdent augmentée de l'exposant 3, est égale à 100, carré de 10.

25. *Trouver un nombre entier qui surpasse de 1 le triple de la partie entière de sa racine carrée.*

Désignons par x la partie entière de la racine carrée.
et par $x^2 + y$ le nombre entier cherché.

Par hypothèse $$x^2 + y = 3x + 1.$$

Cette équation peut s'écrire successivement

$$x^2 - 3x = 1 - y$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} - y,$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} - y.$$

D'où $$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4} - y}.$$

y est positif, et pour que x soit réel, il faut que l'on ait $y < \frac{13}{4}$.

De plus x étant un nombre entier, $\sqrt{\frac{13}{4} - y}$ est un nombre de la forme $\frac{1}{2}(2m + 1)$.

m est un entier tel que l'on ait $\qquad 2m + 1 \leqslant 3$.

Les seules valeurs admissibles pour m sont donc 0 et 1.

Par suite
$$\sqrt{\frac{13}{4} - y} = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{3}{2}.$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}, \; x = 2,\ 1,\ 3 \text{ ou } 0.$$

$$3x + 1 = 7,\ 4 \text{ ou } 10.$$

Les seules valeurs admissibles sont donc 7 et 10.

26. *Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que leur produit soit de la forme $k.\ x^3$, k étant un nombre premier.*

Représentons par a le plus petit des trois nombres, on doit avoir

$$a(a + 1)(a + 2) = k.\ x^3.$$

1° Si a est impair, le premier membre se compose de trois facteurs premiers entre eux, et comme de trois nombres consécutifs un seul peut être un cube, il restera deux facteurs dont le produit donnera pour k un nombre non premier, sauf si $a = 1$; mais alors ni $a + 1$ ni $a + 2$ ne forment un cube.

2° Si a est pair, il vient en posant $a = 2a'$,

$$4a'(a' + 1)(2a' + 1) = k.\ x^3\,;$$

a', $a' + 1$ et $2a' + 1$ sont premiers entre eux. Or x doit contenir 2 en facteur, car k nombre premier, ne peut égaler 4.

Si $a' = 2a''$, $\qquad 8a''(2a'' + 1)(4a'' + 1) = k.\ x^3$;

a'', $(2a'' + 1)$ et $(4a'' + 1)$ sont premiers entre eux ; donc, comme dans le premier cas, il ne peut y avoir de solution que si $a'' = 1$, et cela n'en donne point.

Si $a' = 2\,a'' + 1$

$$8\,(a'' + 1)\,(2\,a'' + 1)\,(4a'' + 3) = k.\,x^3\,;$$

le même raisonnement exige : $a'' + 1 = 1$, ce qui fournit *la seule solution du* problème

$$3 \times 8 = k.\,x^3 = 2.\,3.\,4.$$

[Voir *Intermédiaire des Mathématiciens*. Tome II, 1895, p. p. 304, 369 et Tome III. p. 227].

27. *Déterminer trois nombres entiers dont le produit surpasse la somme d'une unité.*

Représentons par a, b, c les trois nombres cherchés, on a par hypothèse

$$a.\,b.\,c = a + b + c + 1 \qquad (1)$$

Ces trois nombres ne peuvent être tous les trois impairs ou tous les trois pairs, car dans les deux cas les deux membres de l'égalité (1) seraient de parités différentes.

Pour une raison semblable, deux des trois nombres a, b, c ne peuvent être impairs.

Donc en résumé, on peut poser

$$a = 2\,p + 1, \qquad b = 2\,k \text{ et } c = 2k'.$$

Mettons alors l'égalité (1) sous la forme

$$a\,(b\,c - 1) = b + c + 1,$$

on en tire

$$a = \frac{b + c + 1}{b\,c - 1}.$$

a étant un nombre entier, on doit avoir

$$\text{ou } b + c + 1 > b\,c - 1, \text{ ou } b + c + 1 = b\,c - 1.$$

La première hypothèse est à rejeter, car on en déduit, en remplaçant b et c par $2\,k$ et $2\,k'$,

$$2\,k + 2\,k' + 1 > 4\,k.\,k' - 1, \text{ ou } 2\,k.\,k' < k + k' + 1\,;$$

mais on a aussi $k.\,k' > k$, $\qquad k.\,k', > k'$

d'où $\qquad 2\,k.\,k', > k + k',$

et ces deux nombres $2\,k\,k'$, $(k + k')$ étant entiers, leur différence est au moins 1, c'est-à-dire que l'on a :

$$2\,k.\,k' \geqslant k + k' + 1.$$

On ne peut d'ailleurs avoir à la fois

$$k.\,k' = k, \text{ d'ou } k' = 1,$$
$$\text{et } k.\,k' = k', \text{ d'où } k = 1,$$

car il en résulterait pour a la valeur fractionnaire $\frac{5}{3}$.

Ainsi $b + c + 1 = b\,c - 1$, et le nombre impair a est égal à 1.

De l'égalité précédente on déduit

$$b = \frac{c+2}{c-1} = 1 + \frac{3}{c-1}.$$

$c - 1$ doit donc diviser 3, c'est-à-dire que l'on a :

$$\text{ou } c - 1 = 1, \text{ d'où } c = 2 \text{ et } b = 4,$$
$$\text{ou } c - 1 = 3, \text{ d'où } c = 4 \text{ et } b = 2.$$

Les nombres cherchés sont donc, en définitive

1, 2 et 4.

28. *Trouver un nombre de 6 chiffres, carré parfait, et tet qu'en le retournant on ait encore un carré parfait.*

Soient N le nombre cherché et N_1 le nombre renversé.

N_1 étant carré parfait, le premier chiffre à gauche de N ne peut être que 1, 4, 5, 6 ou 9.

La somme de deux nombres renversés composés d'un nombre pair de chiffres est divisible par 11, donc

$$N + N_1 = \text{mult. de } 11.$$

La somme de deux carrés n'est divisible par 11 que si ces carrés sont eux-mêmes divisibles par 11, donc

$$N = \text{mult. de } 11.$$

et si p est la racine carrée de N, on aura aussi

$$p = \text{mult. de } 11.$$

D'ailleurs $10^5 < N < 10^6$
et comme le 1er chiffre à gauche de N est 1, 4, 5, ou 6, on a :

$$\left.\begin{array}{r} 100\,000 < N < 200\,000 \\ 400\,000 < N < 500\,000 \\ 500\,000 < N < 600\,000 \\ 600\,000 < N < 700\,000 \\ 900\,000 < N < 1\,000\,000 \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} 316 < p < 448, \\ 632 < p < 708, \\ 707 < p < 775, \\ 774 < p < 837, \\ 948 < p < 1000. \end{array}\right.$$

Il faut prendre entre ces limites le nombre p divisible par 11 et dont le carré jouisse de la propriété énoncée.

Le premier chiffre à gauche de N ne peut être 5 car le chiffre des dizaines de N_1 serait 2, et les deux premiers chiffres à gauche de N étant alors 52, on aurait $520\,000 < N < 530\,000$ d'où $721 < p < 729$.

Entre ces limites, le seul nombre divisible par 11 est 726 dont le carré ne répond pas à la question.

Remarquons que lorsque le dernier chiffre d'un carré est 1, 4 ou 9, le chiffre des dizaines est pair, et que lorsque le dernier chiffre est 6, le chiffre des dizaines est impair. Si donc le 1er chiffre de N est 1, 4 ou 9 le second doit être pair, et si le premier chiffre de N est

6, le second doit être impair. Cette remarque limite les recherches : on n'a à considérer que les nombres suivants :

$$319, 330, 352, 407, 429, 638, 649, 682, 693, 836, 990$$

parmi lesquels 3 satisfont au problème ; ce sont 330, 836 et 990 dont les carrés sont 108900, 698896 et 980100.

29. *Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.*

(Brocard. — Nouvelles Annales 1871, p. 44.)

Il est d'abord évident qu'il suffit de chercher les nombres proposés parmi les nombres inférieurs à 100. En effet, prenons un nombre supérieur à 100 ; appelons α le nombre formé par les centaines et β le nombre formé par les unités, de telle sorte que l'on ait :

$$A = \alpha \times 100 + \beta.$$

On aura :

$$A^2 = (\alpha \times 100 + \beta)^2 = \alpha^2.100^2 + 2\alpha.\beta.100 + \beta^2$$

Si donc β^2 est terminé par 2 chiffres égaux, il en sera de même de A^2 puisque la valeur de α ne peut influer que sur les centaines.

Si maintenant β est un nombre inférieur à 25 qui jouisse de cette propriété, nous aurons, jouissant de la même propriété les nombres

$$50 - \beta,\ 50 + \beta \text{ et } 100 - \beta.$$

En effet, on a :

$$(50 \pm \beta^2) = 2\,500 \pm 100\,\beta \pm \beta^2$$

Donc les deux derniers chiffres de $(50 \pm \beta)^2$ sont les mêmes que ceux de β. Il suffit, en conséquence, de chercher parmi les nombres inférieurs à 25 ceux qui jouissent de la propriété demandée. Nous pouvons exclure immédiatement les nombres terminés par 5 dont le carré est terminé par 25, et les nombres terminés par un zéro, qui ont toujours leurs carrés terminés par 2 zéros. Il nous reste donc à essayer les nombres 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23 et 24. Les trois premiers, n'ayant qu'un chiffre au carré, doivent être exclus.

Parmi les dix-sept nombres qui nous restent, nous n'avons que le nombre 12 dont le carré 144 soit terminé par deux chiffres égaux. Nous trouverons donc les nombres 12, 38, 62 et 88, dont le carré soit terminé par deux chiffres égaux et nous remarquerons que ces chiffres sont deux 4.

Donc

Tout nombre terminé par 12, 38, 62, *ou* 88 *aura son carré terminé par* 44 ; *ces nombres seuls ont leurs carrés terminés par deux chiffres égaux.*

(Solution de M. Morel).

30. *Tout nombre entier est une somme de puissances de* 2, *chacune d'elles étant prise au plus une fois.*

Considérons un nombre entier pair quelconque, 62 par exemple et proposons-nous de l'exprimer au moyen de la numération binaire qui n'admet que les deux caractères 1 et 0. La base étant 2, on obtiendra, comme l'on sait, le chiffre des unités du premier ordre en divisant 62 par 2 ; le reste représente ces unités, et le quotient 31 nous donne le nombre des unités du second ordre. On aura le nombre des unités du 3^{me} ordre en divisant encore 31 par 2 ; le reste 1 représente le chiffre des unités du 2^{e} ordre et le quotient 15 est le nombre des unités du 3^{e} ordre. Une nouvelle division de 15 par 2 nous fournit le chiffre des unités du 3^{e} ordre et le nombre des unités du 4^{me} ordre, etc. Le tableau suivant résume ces diverses opérations.

Dividendes	Diviseur	Restes	Dividendes	Diviseur	Restes
62	2	0	7	2	1
31	2	1	3	2	1
15	2	1	1		1

de sorte que le nombre 62 s'écrit dans le système binaire

$$111\,110$$

Si l'on revient maintenant du système binaire au système décimal, on aura, en exprimant l'ordre des unités de chaque chiffre

$$(111\,110)_2 = 0 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = (62)_{10}$$

Ce qui démontre bien le théorème pour le cas d'un nombre pair.

Considérons en second lieu, un nombre impair quelconque, 53 par exemple, sur lequel nous opérerons de la même manière.

Ce nombre 53, traduit dans le système binaire, s'exprime par 110101, et en revenant du système binaire au système décimal, on a

$$(110\,101)_2 = 1 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^5 = (53)_{10}.$$

Remarque. — Cette propriété des nombres nous fournit l'explication d'une récréation donnée par Bachet dans ses *Problèmes plaisants et délectables* (Prob. X de l'édition Labosne) et exposée par Lucas dans son arithmétique amusante sous le nom de l'*éventail mystérieux.*

Il s'agit d'*inscrire des nombres sur différents cartons de manière que, connaissant les cartons où se trouve un nombre pensé, on puisse deviner ce nombre immédiatement.*

Supposons, par exemple, que l'on veuille deviner tous les nombres jusqu'à 2^6 ou 64.

On commence par écrire sur 6 cartons séparés et en tête de chacun d'eux les nombres 1, 2, 4, 8, 16 et 32. Cela fait on inscrit les autres nombres dans chacun des cartons qui contiennent les puissances de 2 dont il est la somme, par exemple 3 dans les cartons qui contiennent 1 et 2, 5 dans ceux qui contiennent 1 et 4, 6 dans ceux qui contiennent 2 et 4, 7 dans ceux qui contiennent 1, 2 et 4, et ainsi de suite comme le représente le tableau ci-contre.

Pour deviner un nombre qu'une personne a pensé il suffit de lui présenter les cartons en lui demandant de désigner ceux qui con-

32	16	8	4	2	1
33	17	9	5	3	3
34	18	10	6	6	5
35	19	11	7	7	7
36	20	12	12	10	9
37	21	13	13	11	11
38	22	14	14	14	13
39	23	15	15	15	15
40	24	24	20	18	17
41	25	25	21	19	19
42	26	26	22	22	21
43	27	27	23	23	23
44	28	28	28	26	25
45	29	29	29	27	27
46	30	30	30	30	29
47	31	31	31	31	31
48	48	40	36	34	33
49	49	41	37	35	35
50	50	42	38	38	37
51	51	43	39	39	39
52	52	44	44	42	41
53	53	45	45	43	43
54	54	46	46	46	45
55	55	47	47	47	47
56	56	56	52	50	49
57	57	57	53	51	51
58	58	58	54	54	53
59	59	59	55	55	55
60	60	60	60	58	57
61	61	61	61	59	59
62	62	62	62	62	61
63	63	63	63	63	63

tiennent le nombre pensé. On détermine alors ce nombre en faisant la somme des puissances de 2 inscrites en tête des cartons désignés.

Pour varier le jeu, on pourra deviner des noms au lieu de deviner des nombres; il suffira d'affecter un nom à chacun des nombres précédemment écrits, comme Paul, Emile, Louise, Emma, etc., et d'écrire le nom dans chaque carton à côté du nombre qui lui est assigné. La connaissance des cartons où se trouve le nom fera connaître le nombre qui lui est assigné (comme on vient de l'expliquer), et, par suite, il suffira de regarder dans l'un de ces cartons quel est le nom qui se trouve à côté de ce nombre.

On peut aussi opérer sur des mots, des noms de choses, au lieu de noms de personnes.

Bachet ajoute « On pourrait faire un jeu semblable avec les puissances de 3, mais il serait un peu moins simple. ».

Delannoy a donné dans l'*Intermédiaires des Mathématiciens* (T. XII, 1905, p. 119, 120), la solution pour les $3^3 - 1 = 26$ premiers nombres (1).

On écrit ces nombres dans le système de numération ternaire :

1	1	10	101	19	201
2	2	11	102	20	202
3	10	12	110	21	210
4	11	13	111	22	211
5	12	14	112	23	212
6	20	15	120	24	220
7	21	16	121	25	221
8	22	17	122	26	222
9	100	18	200	27	1000

Un nombre quelconque est égal à une somme dont les termes sont des puissances de 3 ou le double de ces puissances, par exemple

$$(122)_3 = 3^2 + 2.3^1 + 2.3^0 = 17,$$
$$(212)_3 = 2.3^2 + 3^1 + 2.3^0 = 23.$$

(1) Voir aussi t. XII, 1905, p. 144.

Inscrivons sur un premier carton les nombres dont le dernier chiffre dans le système ternaire est 1 ; sur un deuxième, les nombres dont le dernier chiffre est 2 ; sur un troisième ceux dont le deuxième chiffre à partir de la droite est 1 ; sur un quatrième ceux dont ce deuxième chiffre est 2 ; sur un cinquième ceux dont le troisième chiffre à partir de la droite est 1 ; enfin sur un sixième ceux dont le troisième chiffre est 2. L'ensemble de ces six cartons est représenté dans le tableau ci-après.

Supposons que le nombre pensé soit 17, on le trouve dans le cinquième, le quatrième et le deuxième carton ; d'après la manière dont ces cartons ont été formés, le nombre pensé s'écrira donc 122 dans le système ternaire ; par suite il sera égal à

$$3^2 + 2.3^1 + 2.3^0.$$

Pour plus de simplicité, on inscrit les nombres 1, 2, 3, 6, 9, 18 au bas de chaque carton et l'on n'a alors qu'à additionner les nombres portés sur les cartons indiqués.

18	9	6	3	2	1
19	10	7	4	5	4
20	11	8	5	8	7
21	12	15	12	11	10
22	13	16	13	14	13
23	14	17	14	17	16
24	15	24	21	20	19
25	16	25	22	23	22
26	17	26	23	26	25
18	9	6	3	2	1

Si, au lieu de 26 nombres, on en prenait $3^n - 1$, il faudrait $2n$ cartons.

31. *Un nombre de trois chiffres écrit dans un certain système de numération est doublé quand on renverse l'ordre de ses chiffres. Montrer que le nombre formé avec le premier et le dernier chiffres jouit de la même propriété et déterminer la base du système.*

c, d et u sont les trois chiffres du nombre en commençant par les plus hautes unités.

Soit α la base du système

deux fois le nombre $\quad c.\alpha^2 + d.\alpha + u$

donne $\quad u.\alpha^2 + d.\alpha + c.$

Donc le chiffre u est plus grand que c.

Par suite

$$2u = \alpha + c \tag{1}$$

$$2d + 1 = d + \alpha \quad \text{ou} \quad d = \alpha - 1 \tag{2}$$

enfin

$$2c + 1 = u. \tag{3}$$

De (1) et (3) on déduit :

$$2\alpha.c + \alpha = u.\alpha, \qquad 2\alpha.c = u.\alpha - \alpha$$

$$2\alpha.c + 2u = u.\alpha - \alpha + \alpha + c = u.\alpha + c,$$

ou enfin

$$2(c.\alpha + u) = u.\alpha + c.$$

On a aussi

$$4c + 2 = 2u = \alpha + c \quad \text{ou} \quad 3c = \alpha - 2.$$

c étant entier, α est nécessairement de la forme mult. $3 + 2$.

On ne peut donc prendre pour α que les valeurs

5, 8, 11, 14, 17, 20, etc.

32. *Deux bicyclistes* A *et* B *partant au même instant, l'un de Paris et l'autre d'Orléans, parcourent en marchant d'une façon uniforme, le premier en a heures et le second en b heures, la distance d*

qui sépare ces deux villes. Ils se rencontrent sur la route m heures avant l'arrivée de A à Orléans et n heures avant l'arrivée de B à Paris. Montrer que l'on a :

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{m}{n}.$$

$\frac{d}{a}$ est la vitesse de A, $\frac{d}{b}$ est la vitesse de B.

Au moment de la rencontre A a marché pendant $(a - m)$ heures et a parcouru

$$(a - m)\frac{d}{a}.$$

De même B a marché pendant $(b - n)$ heures et a parcouru une distance

$$(b - n)\frac{d}{b}.$$

On a d'ailleurs

$$a - m = b - n$$

et

$$(a - m)\frac{d}{a} + (b - n)\frac{d}{b} = d,$$

ou

$$(a - m).b + (b - n).a = a.b,$$
$$(a - m)(a + b) = ab, \qquad a^2 = m(a + b)$$
$$(b - n)(a + b) = a\,b, \qquad b^2 = n(a + b)$$

d'où enfin

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{m}{n}.$$

33. *Expliquer pourquoi les produits du nombre* 142857 *par* 1, 2, 3, 4, 5 *et* 6 *sont composés des mêmes chiffres*

1

7 4

5 2

8

se suivant dans le même ordre circulaire et pourquoi le produit par 7 est composé d'une suite de 9.

Il suffit de remarquer que 142857 constitue la partie périodique de la fraction décimale périodique simple à laquelle donne lieu la conversion de la fraction ordinaire $\frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857...$$

Dès lors

$$\frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7} = \frac{100}{7} - \frac{98}{7} = \frac{100}{7} - 14 = 14,285714285714... - 14$$
$$= 0,285714285714...$$
$$0,142857142857... \times 2 = 0,285714285714...$$

d'où

$$142857 \times 2 = 285714.$$

$$\frac{1}{7} \times 3 = \frac{3}{7} = \frac{10}{7} - \frac{7}{7} = \frac{10}{7} - 1 = 1,428571428571... - 1 =$$
$$= 0,428571428571...$$
$$0,142857142857... \times 3 = 0,428571428571...$$

d'où

$$142857 \times 3 = 428571.$$

De même

$$\frac{1}{7} \times 4 = \frac{4}{7} = \frac{10000}{7} - \frac{9996}{7} = \frac{10000}{7} - 1428$$
$$= 0,571428571428...$$
$$142857 \times 4 = 571428$$

$$\frac{5}{7} = \frac{100000}{7} - \frac{99995}{7} = \frac{100000}{7} - 14285 = 0,714285714285...$$

$$\frac{6}{7} = \frac{1000}{7} - \frac{994}{7} - \frac{1000}{7} - 142 = 0,857142857142...$$

Enfin

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999}, \qquad \frac{1}{7} \times 7 = \frac{142857 \times 7}{999999} = 1$$

d'où

$$142857 \times 7 = 999999.$$

34. *Un épicier possède une balance fausse dont il se sert pour l'achat et la vente de ses marchandises de façon à réaliser un bénéfice surpassant de 11 °/₀ le gain légitime qu'il réaliserait si la balance était juste. Si on intervertissait l'ordre des plateaux dans lesquels les marchandises achetées et vendues sont pesées, le bénéfice serait nul. Déterminer, d'après cela, le gain légitime pour 100 francs.*

Soient p, p_1 les poids apparents d'une certaine quantité de marchandises d'abord achetée, puis vendue. p est plus petit et p_1 plus grand que le poids réel.

Soient q le prix d'achat de l'unité de poids,
x le gain légitime par 100 francs.

Une marchandise achetée $p.q$ est vendue $p_1\left(q + \frac{xq}{100}\right)$.

On a donc

$$p_1\left(q + \frac{qx}{100}\right) - pq = \frac{(x+11)}{100}.p.q,$$

ou

$$(1) \qquad p.q\left(1 + \frac{x+11}{100}\right) = p_1 q\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

En intervertissant l'ordre des plateaux, la même quantité de marchandise qui coûte $p_1 q$, est vendue $p.q\left(1 + \frac{x}{100}\right)$.

D'où

$$(2) \qquad p_1 q = pq\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

De (1) et (2) on déduit

$$1 + \frac{x + 11}{100} = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2, \quad \text{d'où} \quad x = 10.$$

Nous allons donner une deuxième solution du même problème, et calculer le rapport des bras du fléau dont se sert le commerçant.

Désignons par p le prix que le marchand payerait une certaine quantité de marchandises, s'il se servait d'une balance juste, et q le prix qu'il revendrait la même quantité de marchandise dans les mêmes conditions, enfin f le rapport du plus petit bras de levier de la balance qu'il emploie au plus grand.

Le bénéfice légitime pour cent du marchand est :

$$\frac{q - p}{p}$$

mais en se servant de sa balance, ce bénéfice devient

$$\frac{\frac{q}{f} - pf}{pf}$$

on a donc

$$\frac{\frac{q}{f} - pf}{pf} = \frac{q - p}{p} + \frac{11}{100}$$

ou en désignant $\frac{p}{q}$ par z

$$\frac{\frac{1}{f} - zf}{zf} = \frac{1 - z}{z} + \frac{11}{100}$$

ou

(1) $$100 = 100f^2 + 11\,zf^2$$

mais quand il se sert de sa balance dans l'ordre inverse, son bénéfice devient

$$\frac{qf - \frac{p}{f}}{\frac{p}{f}} = 0$$

on a donc :

$$qf^2 = p \quad \text{ou} \quad f^2 = z = \frac{p}{q}$$

remplaçant dans (1) f^2 par z on a l'équation :

$$11z^2 + 100z - 100 = 0$$

d'où on tire :

$$z = \frac{10}{11}.$$

Si on a

$$\frac{p}{q} = \frac{10}{11}$$

on en déduit

$$\frac{q-p}{p} = \frac{1}{10}.$$

Quant à la valeur de f elle est égale à

$$\sqrt{\frac{10}{11}}$$

environ

$$0{,}95 \quad \text{ou} \quad \frac{19}{20}.$$

Ainsi en se servant d'une balance dont les bras du fléau sont entre eux comme les nombres 19 et 20 le commerçant augmente son bénéfice de 11 %.

35. *A deux de ses clients un marchand pèse avec une balance fausse, c'est-à-dire dont les bras du fléau sont inégaux, un même poids de marchandise. Pour le premier, il met les poids marqués dans le plateau* A *et la marchandise dans le plateau* B. *Pour le second, il fait l'inverse. On demande s'il gagne ou s'il perd.*

Représentons par a et b les longueurs des deux bras du fléau, longueurs inégales par hypothèse.

Soit p le poids de la marchandise demandé par les deux clients.

Le marchand sert le premier en plaçant dans le plateau A le poids p et dans le plateau B le poids q de marchandise déterminé par la relation

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{a}, \quad \text{d'où} \quad q = \frac{a}{b} \cdot p.$$

Le marchand sert le second client en mettant dans le plateau B le poids marqué p et dans l'autre plateau un poids q' de marchandise déterminé par la relation

$$\frac{q'}{p} = \frac{b}{a}, \quad \text{d'où} \quad q' = p \cdot \frac{b}{a}.$$

Le poids total de marchandise donné aux deux clients est donc

$$p\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

Or la somme d'une fraction et de son inverse ne peut être moindre que 2, donc

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

et le marchand perd puisqu'il sert un poids de marchandise plus grand que $2p$.

36. *Trouver le plus petit nombre entier qui soit égal à quatre fois le produit de ses chiffres.*

Le nombre cherché contient au moins 2 chiffres ; en les représentant par d et u, on a :

$$10 . d + u = 4 . d . u, \text{ d'où } d = \frac{u}{4 . u - 10}.$$

La plus petite valeur de u est 3.

De plus on a : $u \geqslant 4u - 10$, d'où $3u \leqslant 10$, c'est-à-dire que la plus grande valeur de u est 3.

Donc nécessairement $u = 3$ et on en déduit pour d, la valeur fractionnaire $\frac{3}{2}$ qui ne convient pas.

Le nombre cherché a dès lors plus de 2 chiffres.

Considérons un nombre de trois chiffres c, d et u.

$$100 . c + 10 . d + u = 4 . c . d . u$$

égalité d'où l'on tire

$$c = \frac{10 . d + u}{4 . d . u . - 100}.$$

Le numérateur vaut, au plus 100 ; on a, par suite

$$4 . d . u - 100 \leqslant 10 . d + u < 100, \text{ d'où } d . u < 50.$$

mais $4 . d . u$ étant plus grand que 100 ; on a aussi $d . u > 25$.

Le produit $d . u$ est donc compris entre 25 et 50.

D'ailleurs $10 . d . + u$ est divisible par $4 . d . u - 100$, et, par suite, par 4 ; il en résulte que les seules valeurs admissibles pour u sont

2, 4, 6 et 8.

On en déduit pour les limites supérieures des valeurs de d 24, 12, 8 et 6 et pour les limites inférieures 13, 7, 5 et 4.

On voit donc que la valeur $u = 2$ est à écarter et que

(A) pour $u = 4$, d peut prendre une des trois valeurs 7, 8, 9,
(B) pour $u = 6$, d « des quatre valeurs 5, 6, 7, 8, 9,
(C) pour $u = 8$, d « des trois valeurs 4, 5, 6.

Examinons ces trois hypothèses

A) $u = 4$ et $d = 7, 8, 9$. Les nombres 74 et 94 ne sont pas divisibles par 4. On ne peut avoir que $d = 8$, d'où $c = 3$.

d'où le nombre 384.

(B) $u = 6$ et $d = 5$, 6, 7 ou 8. Les nombres 66 et 86 ne sont pas divisibles par 4.

On ne peut avoir que $d = 5$ ou 7.

$$\text{Pour } d = 5,\ c = \frac{14}{5} \text{ et pour } d = 7,\ c = \frac{19}{17}.$$

(C) $u = 8$ et $d = 4$, 5 ou 6. On ne peut prendre que $d = 4$ ou 6.

$$\text{Pour } d = 4,\ c = \frac{12}{7} \text{ et pour } d = 6,\ c = \frac{68}{92}.$$

Le nombre 384 convient donc seul à la question.

37. *Trois vases cubiques* A, B, C *dont les capacités sont entre elles comme les nombres* 1, 8, 27 *contiennent chacun une certaine quantité d'eau dont les volumes, en litres, sont entre eux comme les nombres* 1, 2 *et* 3. *On transvase du liquide de* A *en* B, *puis de B en C, de manière à amener le liquide au même niveau dans les trois vases. On fait passer ensuite* 6 *litres d'eau de* C *en* B, *autant de* B *en* A, *il se trouve alors que* B *contient deux fois plus de liquide que* A *et que dans ce dernier vase il y a deux litres de moins qu'à l'origine. Trouver les volumes d'eau contenus primitivement dans les trois vases.*

$$\left.\begin{array}{rl} x = & \text{volume d'eau en A} \\ 2x = & \quad \text{»} \qquad \text{en B} \\ 3x = & \quad \text{»} \qquad \text{en C} \end{array}\right\} \text{volume total } 6x.$$

Quand le liquide est au même niveau dans les 3 vases, les volumes sont entre eux comme les bases, c'est-à-dire comme 1, 4 et 9.

$$\text{Donc alors volume en A} = \frac{6x}{9+4+1} = \frac{6x}{14} = \frac{3x}{7},$$

$$\text{volume en B} = \frac{12x}{7},$$

$$\text{volume en C} = \frac{27x}{7}.$$

Après la seconde opération A contient $(x - 2)$ litres,

B » $2(x-2)$ » ,

et C » $\frac{27x}{7} - 6$.

Donc

$$x - 2 + 2(x-2) + \frac{27x}{7} - 6 = 6x$$

et $$x = 14 \text{ litres.}$$

38. *Une équipe d'ouvriers s'est engagée à entreprendre un ouvrage dont l'exécution demanderait p heures si tous les ouvriers commencaient en même temps. Mais ils n'arrivent sur le chantier que l'un après l'autre et à des intervalles de temps égaux. Le travail est ainsi poursuivi jusqu'à complet achèvement. Sachant que le salaire de chaque ouvrier a été proportionnel au temps pendant lequel il a travaillé, et que celui qui a commencé le premier a reçu m fois autant que le dernier, on demande le temps employé pour faire l'ouvrage.*

Représentons par x le nombre des ouvriers, par y le nombre d'heures pendant lesquelles le dernier a travaillé, et par z l'intervalle de temps (en heures) qui s'est écoulé entre l'arrivée du premier ouvrier sur le chantier et l'arrivée du second, entre l'arrivée du second et celle du troisième, et ainsi de suite.

D'après l'énoncé $y + (x-1)z = m.y$ (1)

Si T représente le travail fait dans une heure, le travail total aura pour expression

$$\{y + (y+z) + (y+2z) + \dots + [y + (x-1)z]\}\,T,$$

mais ce même travail est également égal à $p.T.x$.

Donc

$$y + (y+z) + (y+2z) + \dots + [y + (x-1)z] = p.x,$$

ou

$$[2y + (x - 1)z]\frac{x}{2} = p.\,x, \text{ ou encore } 2y + (x - 1)z = 2p.$$

Comparant à (1) on en déduit

$$y = \frac{2p}{m+1},$$

et le temps total $m.\,y$ a pour expression

$$\frac{2p.\,m}{m+1}.$$

39. *Une certaine quantité de grain doit servir à la nourriture d'un troupeau de n dindons. Cette quantité est calculée de façon à durer un temps déterminé si chaque dindon mange un boisseau chaque semaine. En faisant la distribution on constate que le troupeau diminue d'un dindon chaque semaine et de ce fait le grain dure deux fois plus de temps. On demande la quantité de grain en boisseaux et le temps qu'il a duré.*

Désignons par x le nombre des boisseaux et par y le nombre des semaines qu'ils doivent durer.

On a

$$\frac{x}{y} = n, \quad \text{ou} \quad x = n.y.$$

Mais

$n =$	le nombre des boisseaux donnés dans la	1re	semaine,
$n - 1 =$	»	2e	»
$n - 2 =$	»	3e	»
. . . . .	. . . . .	. . .	. . .
$n - p + 1 =$	»	p^{me}	»
. . . . .	. . . . .	. . .	. . .

Ainsi de suite jusqu'à la $2y^{me}$ semaine

Par suite

$$n+(n-1)+(n-2)+\dots+(n-p+1)+\dots+(n-2y+1)=x$$

$$(2n+1-2y)\frac{2y}{2}=x, \qquad 2n-2y+1=\frac{x}{y}=n$$

d'où

$$y=\frac{n+1}{2}.$$

Alors

$$x=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad 2y=n+1.$$

40. *Trouver l'expression de la somme de toutes les fractions comprises entre deux nombres entiers donnés m et n et ayant* 3 *pour dénominateur.*

Les fractions et les nombres entiers compris entre m et n sont

$$\frac{3m+1}{3}, \quad \frac{3m+2}{3}, \quad \frac{3m+3}{3}, \dots, \frac{3n-1}{3}.$$

La somme de tous ces nombres est égale à

$$\left(\frac{3m+1}{3}+\frac{3n-1}{3}\right)\frac{(3n-1)-3m}{2}=\frac{(m+n)\left[3(n-m)-1\right]}{2}.$$

Mais la somme de tous les nombres entiers compris entre m et n est égale à

$$(m+1)+(m+2)+(m+3)+\dots+(n-1)$$
$$=\{(m+1)+(n-1)\}\frac{n-1-m}{2}=\frac{(m+n)(n-m-1)}{2}.$$

Donc la somme des fractions a pour expression

$$\frac{(m+n)\left[3(n-m)-1\right]-(m+n)(n-m-1)}{2}=n^2-m^2.$$

41. *Trois hommes, Pierre, Paul et André vont à la foire avec leurs femmes. Les noms de ces trois femmes sont Catherine, Marthe et Suzanne.*

Chacune de ces 6 personnes achète un certain nombre d'objets qu'elle paye chacun un nombre de francs égal au nombre des objets qu'elle a achetés.

Pierre a acheté 23 objets de plus que Marthe, et Paul 12 de plus que Catherine. Chaque mari a dépensé 63 francs de plus que sa femme.

On demande quelle est la femme de Pierre, celle de Paul et celle d'André?

x nombre des objets achetés par l'un des hommes.
y celui des objets achetés par sa femme

$$x^2 - y^2 = 63 = (x + y)(x - y) = 63.1 = 21.3 = 9.7.$$

On peut par conséquent, poser

$$\begin{array}{lclcl} x + y = 63 & \text{ou} & x + y = 21 & \text{ou} & x + y = 9 \\ x - y = 1 & » & x - y = 3 & » & x - y = 7. \end{array}$$

D'où l'on tire les solutions suivantes :

$$\begin{array}{lclcl} x = 32 & \text{ou} & x = 12 & \text{ou} & x = 8 \\ y = 31 & » & y = 9 & » & y = 1. \end{array}$$

Mais Pierre a acheté 23 objets de plus que Marthe et Paul 11 de plus que Catherine; donc

Pierre a acheté	32	objets
Marthe	9	»
Paul	12	»
Catherine	1	»

Il suit de là que la solution $x = 32$, $y = 31$ concerne Pierre et Suzanne; que la solution $x = 12$, $y = 9$ concerne Paul et Marthe, et enfin que la solution $x = 8$, $y = 11$ intéresse André et Catherine.

Donc Pierre a pour femme Suzanne; Paul, Marthe et André, Catherine.

42. *Trouver la somme de tous les nombres de la forme* 121, 12321, 1234321, *etc., écrits dans le système de numération à base d.*

$$\begin{aligned}
121 &= d^2 + 2d + 1 = (d+1)^2 \\
12321 &= d^4 + 2d^3 + 3d^2 + 2d + 1 \\
&= d^2(d+1)^2 + 2d(d+1) + 1 = (d^2+d+1)^2 \\
1234321 &= d^6 + 2d^5 + 3d^4 + 4d^3 + 3d^2 + 2d + 1 \\
&= d^4(d^2+2d+1) + 2d^2(d^2+2d+1) + d^2 + 2d + 1 = \\
&= (d^4 + 2d^2 + 1)(d+1)^2 = (d^2+1)^2(d+1)^2 \\
&= (d^3 + d^2 + d + 1)^2
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

La somme demandée a pour expression

$$(d+1)^2 + (d^2 + d + 1)^2 + (d^3 + d^2 + d + 1)^2 + \dots$$
$$\text{jusqu'à } d - 1 \text{ termes}$$

ou

$$\left(\frac{d^2-1}{d-1}\right)^2 + \left(\frac{d^3-1}{d-1}\right)^2 + \left(\frac{d^4-1}{d-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{d-1}{d-1}\right)^2$$

ou encore

$$\frac{1}{(d-1)^2}\left\{d^4 + d^6 + \dots + {}^2d - 2d^2(1 + d + \dots + d^{-2}) + d - 1\right\}$$

ou enfin

$$\frac{1}{(d-1)^2}\left\{\frac{d^4(d^{18}-1)}{d^2-1} - 2d^2\frac{d^{-1}-1}{d-1} + d - 1\right\}$$

43. *Montrer que le nombre* 12345654321 *est divisible par* 12321 *dans tout système de numération dont la base est supérieure à* 6.

Ecrivons ces deux nombres dans le système de numération à base $d > 6$.

$$\begin{aligned}12345654321 &= d^{10} + 2d^9 + 3d^8 + 4d^7 + 5d^6 + 6d^5 + 5d^4 \\ &+ 4d^3 + 3d^2 + 2d + 1 = (d^5 + d^4 + d^3 + d^2 + 1)^2 \\ &= \left(\frac{d^6 - 1}{d - 1}\right)^2\end{aligned}$$

$$12321 = d^4 + 2d^3 + 3d^2 + 2d + 1 = (d^2 + d + 1)^2 = \left(\frac{d^3 - 1}{d - 1}\right)^2.$$

Donc

$$\frac{12345654321}{12321} = \left(\frac{d^6 - 1}{d - 1}\right)^2 : \left(\frac{d^3 - 1}{d - 1}\right)^2 = \left(\frac{d^6 - 1}{d^3 - 1}\right)^2 = (d^3 + 1)^2$$
$$= \text{un nombre entier} = 100\,200\,1.$$

44. *On donne le dividende, le diviseur et le reste d'une division, comment peut-on trouver tous les chiffres du quotient en allant de droite à gauche ?*

En commençant par retrancher le reste du dividende, on voit que la question se ramène à la suivante : Trouver de droite à gauche les chiffres du quotient de deux nombres entiers divisibles l'un par l'autre.

Quatre cas peuvent se présenter ; le diviseur est terminé :

1° Par un chiffre pair significatif;

2° Par un 5;

3° Par un zéro;

4° Par un chiffre impair autre que 5.

On ramène le premier et le deuxième cas au quatrième, en divisant les nombres entiers donnés par la plus haute puissance, soit de 2, soit de 5, qui divise exactement le diviseur.

Le troisième cas se ramène à un des trois autres, en divisant les deux nombres par la plus haute puissance de 10 qui divise le diviseur.

Il résulte de là qu'on peut toujours amener le diviseur a être terminé par un chiffre impair autre que 5.

Cela posé : les produits des dix premiers nombres par un même chiffre impair autre que 5 sont terminés par des chiffres différents.

Par suite, les chiffres des unités d'un dividende et d'un diviseur, divisibles l'un par l'autre, suffisent pour déterminer le chiffre des unités du quotient, lorsque dans le diviseur ce chiffre est impair et autre que 5.

Enfin si deux nombres sont divisibles l'un par l'autre, le chiffre des dizaines du quotient est le chiffre des unités du quotient d'une division ayant, pour diviseur, le diviseur donné et dont le dividende s'obtient en supprimant un zéro à la droite de la différence entre le dividende donné et le produit du diviseur par le chiffre des unités du quotient correspondant.

	Dividende	Diviseur	Chiffres du quotient
Exemple	173 861 836 110 000	5 428 432 500	»
	1 738 618 361 100	54 284 325	»
	69 544 734 444	2 171 373	8
	69 527 363 46	»	2
	69 483 936 0	»	0
	69 483 936	»	2
	65 141 19	»	3

Le quotient est donc 32 028

45. *Deux horloges sonnent une certaine heure en même temps et on a entendu 19 coups. Elles sont en avance l'une sur l'autre de 2 secondes et les coups de l'une se succèdent de 3 secondes en 3 secondes tandis que ceux de l'autre sont espacés de 4 secondes. On demande l'heure sonnée, sachant que l'oreille ne perçoit qu'un son quand les horloges sonnent dans la même seconde, c'est-à-dire que l'oreille ne peut*

distinguer s'il y a eu un seul coup donné par une horloge ou deux coups donnés par les deux horloges, et qu'il en est ainsi pour le dernier coup de l'horloge qui a l'avance.

Soit x l'heure cherchée.

L'horloge qui a l'avance, c'est-à-dire qui a sonné la première et dont les coups sont espacés de 3 secondes, donne son troisième coup quand l'autre horloge, qui sonne toutes les 4 secondes et qui est en retard de 2 secondes sur la première, fait entendre son deuxième coup.

Il y a ainsi, pour la première fois, superposition de 2 coups.

Après cette rencontre chaque quatrième coup de l'horloge qui a l'avance coïncidera avec un coup de l'autre horloge, puisque

$$4 \times 3 \text{ secondes} = 3 \times 4 \text{ secondes.}$$

$(x - 3)$ représente donc le nombre des coups qui restent à sonner à l'horloge qui a l'avance après que les deux auront sonné ensemble pour la première fois.

$\frac{x-3}{4} + 1$ représente le nombre de fois que les deux horloges sonnent ensemble.

et $2x =$ le nombre total de coups donnés par les deux horloges, donc

$$2x - \left(\frac{x-3}{3} + 1\right) = 19, \qquad \text{d'où} \qquad x = 11.$$

46. *Un impôt d'importation de p francs par quintal est mis sur les blés étrangers quand le prix du blé sur le marché français atteint q fr. le quintal. m et n sont les quantités, en quintaux, de blé français et étranger consommées dans une année. Du fait de l'impot, le prix du blé s'est élevé à* $q + \frac{p}{d}$ *le quintal, mais la consommation est descendue à un chiffre tel que la dépense annuelle est restée la même. En supposant que*

la quantité m du blé récolté en France soit demeurée constante, trouver la valeur de p produisant le revenu maximum.

Par année libre d'impôt, la dépense totale s'élève à $q\,(m + n)$. Le nombre de quintaux frappés d'imposition est de

$$\frac{q\,(m+n)}{q+\frac{p}{d}} - m = \frac{qnd - p.m}{q.d + p}.$$

Le revenu produit par l'impôt est donc de

$$\left[\frac{qnd - pm}{qd + p} \times p\right] \text{ francs.}$$

Soit x la valeur de cette expression;
l'équation

$$\frac{qnd - pm}{qd + p} \,.\, p = x,$$

peut s'écrire

$$p^2m - p\,(qnd - x) + qdx = 0,$$

d'où

$$p = \frac{qnd - x \pm \sqrt{(qnd - x)^2 - 4\,mqdx}}{2\,m}.$$

Cette valeur de p n'est réelle que si l'on a

$$(qnd - x)^2 \geqslant 4\,mqdx.$$

x est maximum quand on a

$$4\,mqdx = (qnd - x)^2,$$

et dans ce cas

$$p = \frac{qnd - x}{2\,m} \qquad \text{ou} \qquad 2\,pm = (qnd - x)$$

élevant au carré

$$4p^2m^2 = (qnd - x)^2 = 4mqdx,$$

ou en remplaçant x par $qnd - 2pm$;

$$4p^2m^2 = 4mqd\,(qnd - 2pm).$$

D'où l'on tire

$$p = qd\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{n}{m}}\right).$$

47. *Une personne parcourt d'une façon continue le périmètre d'un champ de forme carrée, en marchant avec une vitesse uniforme et toujours dans le même sens. Une autre personne se déplace, avec la même vitesse uniforme, suivant la diagonale du champ, en revenant sur ses pas chaque fois qu'elle parvient à l'une des extrémités.*

Montrer que, suivant les positions initiales des deux personnes, deux cas seulement peuvent se présenter :

1° *ou elles ne se rencontreront jamais;*

2° *ou elles se rencontreront une fois, mais une fois seulement.*

Désignons par p la personne qui se déplace suivant le périmètre du champ et par d celle qui parcourt la diagonale.

p marche dans la direction ABCD, A, B, C et D étant les sommets du carré dans leur ordre successif, AC est la diagonale parcourue.

Les deux personnes se rencontreront au sommet A, si d se déplace vers A et si, au même moment, p se trouve soit à la même distance de A que d, soit à cette même distance augmentée de 2.AC.

Ou plus généralement, si, au même moment, la distance de d à A augmentée de $2\,m$.AC = la distance de p au sommet A augmentée de $4\,n$ fois le côté du carré.

Les deux personnes se rencontreront encore en A, si d se déplace vers C, et si, au même moment, la distance de p au sommet A est égale à la diagonale + la distance de d à c.

Ou, plus généralement, lorsque, au même moment, la distance de d au sommet c augmentée de $(2m + 1)$ fois la diagonale, égale la distance de p au sommet A, augmentée de $4n$ fois le côté du carré ; m et n étant des nombres entiers.

Les deux personnes se rencontreront de la même manière au sommet C. Mais, lorsqu'elles se sont rencontrées une première fois, une seconde rencontre est impossible, puisqu'elles décrivent des espaces égaux en des temps égaux et que le côté et la diagonale du carré sont des longueurs incommensurables.

De même les deux personnes ne se rencontreront jamais si leurs positions au départ sont deux quelconques de celles où elles se trouveraient simultanément après l'hypothèse d'une première rencontre en A ou en C.

48. — *Trois cloches commencent à sonner en même temps et font entendre leurs coups à des intervalles respectivement égaux, pour chacune d'elles à 25, 29 et 33 secondes. La première cloche cesse de sonner au bout d'un temps moindre qu'une demi-heure ; la seconde et la troisième continuent à sonner respectivement pendant 18 secondes et 21 secondes, puis cessent leur sonnerie.*

On demande pendant combien de temps chaque cloche a sonné.

Représentons par $25t$ le nombre des secondes pendant lesquelles la première cloche a sonné.

Le nombre des coups donnés par la première cloche sera

$$t + 1,$$

Le nombre des coups donnés par la deuxième cloche sera

$$1 + \frac{25t + 18}{29} = 1 + x,$$

Le nombre des coups donnés par la troisième cloche sera

$$1 + \frac{25t + 21}{33} = 1 + y.$$

Les relations

$$1 + \frac{25t + 18}{29} = 1 + x \quad \text{et} \quad 1 + \frac{25t + 21}{33} = 1 + y,$$

peuvent s'écrire

$$29x - 18 = 25t, \qquad 33y - 21 = 25t,$$

d'où l'équation indéterminée

$$(1) \qquad 33y - 29x = 3.$$

On en déduit

$$x = 33.m - 24,$$

et

$$y = 29m - 21.$$

D'ailleurs puisque $25t$ est moindre que 1800 secondes, on a

$$x < 62 \quad \text{et par suite} \quad m < 3.$$

On ne peut donc faire que les hypothèses

$$m = 1, \quad \text{ou} \quad m = 2.$$

Pour

$$m = 1, \quad x = 9, \quad y = 8,$$
$$m = 2, \quad x = 42, \quad y = 37.$$

On a aussi

$$29x - 18 = 25t,$$

pour $x = 9$, t n'est pas entier
pour

$$x = 42, \quad t = 48.$$

Donc les trois valeurs

$$t = 48, \quad x = 42 \quad \text{et} \quad y = 37$$

satisfont à la question.

La première cloche cesse donc de sonner au bout de $48 \times 25 = 1\,200$ secondes.

Les cloches ont donné respectivement 49 coups, 43 coups et 38 coups.

49. *Deux lignes égales ayant une longueur commune de l mètres sont divisées respectivement en m et en n parties égales (m et n étant deux nombres premiers entre eux). On les place à côté l'une de l'autre avec leurs extrémités en coïncidence. Montrer que la plus petite distance entre deux divisions ne peut être moindre que $\frac{l}{m.n}$ et qu'il y a deux groupes de divisions qui sont à cette distance.*

Cas où $m = 250$ et $n = 243$.

Soient d_1 et d_2 les distances à l'extrémité A de la x^{me} division de la droite (1) et de la y^{me} division de la droite (2).

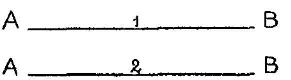

Fig. 4.

$$d_1 = \frac{x}{m} l, \quad d_2 = \frac{y}{n} l \quad \text{et} \quad d_1 - d_2 = l\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{n}\right),$$

d'où

$$nx - my = \frac{m.n}{l}(d_1 - d_2).$$

Or $nx - my$ est un nombre entier dont la plus petite valeur numérique est 1.

La plus petite valeur de $\frac{mn}{l}(d_1 - d_2)$ est donc aussi 1, ce qui revient à dire que la plus petite valeur de $d_1 - d_2$ est $\frac{l}{mn}$.

Il y a deux groupes de divisions pour lesquelles $d_1 - d_2 = \frac{l}{mn}$, ils sont donnés par les équations.

$$nx - my = 1, \quad \text{et} \quad nx - my = -1.$$

Application. Pour $m = 250$ et $n = 243$, nous avons à résoudre les équations indéterminées

$$243x - 250y = \pm 1.$$

En appliquant la méthode des fractions continues, on trouve avec la première

$$x = 107, \quad y = 104,$$

et avec la seconde

$$x = 143, \quad y = 139.$$

50. *Deux cloches sont mises en mouvement en même temps pendant 1 heure, l'une sonne 244 fois et l'autre 251 fois, le premier et le dernier coup de chacune tombant au commencement et à la fin de l'heure. Trouver ceux de ces coups qui s'approchent le plus de la coïncidence et déterminer la position que doit occuper une personne sur la ligne droite joignant les deux cloches pour que les coups s'approchant le plus de la coïncidence, lui paraissent absolument en coïncidence. On prendra pour la vitesse du son 340 mètres par seconde.*

La première partie de la question se trouve résolue par la précédente, puisque les coups de la première cloche divisent l'heure en 243 parties égales et ceux de la seconde en 250 parties égales.

Les *divisions* les plus voisines de la coïncidence sont donc :

la 104^{me} pour la première cloche avec la 107^{me} pour la seconde,
ou la 139^{me} « avec la 143^{me} «

Les coups qui s'approchent le plus de la coïncidence sont donc :

le 105^{me} pour la première cloche avec le 108^{me} pour la seconde,
ou le 140^{me} « avec le 144^{me} «

Soient maintenant B_1 et B_2 les positions des deux cloches, M le milieu de la droite qui les joint et P la position que doit occuper une personne pour entendre simultanément le 105^me^ coup de B_1 et le 108^me^ coup de B_2.

Fig. 5.

La cloche B_1 donne son 105^me^ coup au bout de $\frac{104}{243} \times 60 \times 60$ secondes après le commencement de l'heure.

La cloche B_2 donne son 108^me^ coup au bout de $\frac{107}{250} \times 60 \times 60$ secondes.

En P le 105^me^ coup est entendu $\left(\frac{B_1P}{340} + \frac{104}{243} \times 60 \times 60\right)$ se-secondes après le commencement de l'heure.

Au même point, le 108^me^ coup de B_2 est entendu au bout de $\left(\frac{PB_2}{340} + \frac{107}{250} \times 60 \times 60\right)$ secondes.

Ces deux temps étant égaux, on a :

$$\frac{1}{340}(B_1P - PB_2)\, 60 \times 60 \left(\frac{107}{250} - \frac{104}{243}\right)$$

ou

$$2\,MP = \frac{3600 \times 340}{250 \times 243} \quad \text{d'où} \quad MP = 10^{m}\,\frac{2}{7}.$$

De même, Q étant la position que doit occuper la personne pour entendre en même temps le 140^me^ coup de B_1 et le 144^me^ coup de B_2, on a $MQ = 10^{m}\,\frac{2}{7}$.

Si la distance des deux cloches est inférieure à $20^{m}\,\frac{4}{7}$, les points P et Q n'existent plus.

Si la distance $B_1B_2 = 20^m \frac{4}{7}$, le son du 105^{me} coup de B_1 arrive en B_2 juste au moment où cette cloche donne son 108^{me} coup; dès lors les deux coups seront entendus simultanément par une personne située en un point quelconque du prolongement de B_1B_2 au delà de B_2.

Dans les mêmes conditions le 140^{me} coup de B_1 et le 144^{me} coup de B_2 sont entendus simultanément par une personne située en un point quelconque du prolongement de B_2B_1 au delà de B_1.

51. *On marque n points sur une droite en observant la règle suivante : la distance des deux premiers points est égale à d centimètres, la distance du* 3^e *point au second est égale à d plus la m*^{e} *partie de d, la distance du* 4^e *point au* 3^e *point est égale à d, plus la m*^{e} *partie de la distance du* 2^e *au* 3^e. *D'une façon générale la distance entre les* p^e *et* $(p+1)^e$ *points surpasse d de la m*^{e} *partie de la distanee des* $(p-1)^e$ *et* p^e *points. Trouver d'après cela la distance des deux derniers points et la distance entre le premier et le dernier.*

Appliquer au cas où $m = n = 10$ et où $d = 1$ centimètre.

Distance entre les points

$$1 \text{ et } 2 = d,$$

$$2 \text{ et } 3 = d + \frac{d}{m} = d\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

$$3 \text{ et } 4 = d + \frac{d}{m}\left(1 + \frac{1}{m}\right) = d\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\right),$$

. . . .

$$(n-1)^e \text{ et } n^e = d\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \dots + \frac{1}{m^{n-2}}\right) = d\frac{1 - \frac{1}{m^{n-1}}}{1 - \frac{1}{m}}.$$

La distance entre le premier point et le dernier point est donc égale à

$$d + d\left(1+\frac{1}{m}\right) + d\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}\right) + \dots + d\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\dots+\frac{1}{m^{n-2}}\right) =$$

$$= d\left[1 + \frac{1-\frac{1}{m^2}}{1-\frac{1}{m}} + \frac{1-\frac{1}{m^3}}{1-\frac{1}{m}} + \frac{1-\frac{1}{m^4}}{1-\frac{1}{m}} + \dots + \frac{1-\frac{1}{m^{n-1}}}{1-\frac{1}{m}}\right]$$

$$= d\,\frac{1}{1-\frac{1}{m}}\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)+\left(1-\frac{1}{m^2}\right)+\left(1-\frac{1}{m^3}\right)+\dots+\left(1-\frac{1}{m^{n-1}}\right)\right]$$

$$= d\,\frac{1}{1-\frac{1}{m}}\left[n-1-\frac{1}{m}\times\frac{1-\frac{1}{m^{n-1}}}{1-\frac{1}{m}}\right].$$

Pour $m = n = 10$ et $d = 1$, cette distance est égale à

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\left(9-\frac{1}{10}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^9}}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{10}{9}\left(9-\frac{10^9-1}{10^9\times 9}\right) = \frac{10}{9}(9-0,111111111)$$

ou enfin

$$10-\frac{1}{9}\,1,11111111 = 9,87654321$$

52. *Deux forgerons A et B commencent en même temps à battre le fer sur l'enclume. A frappe 12 coups en 7 minutes et B frappe 17 coups en 9 minutes. On demande de désigner les coups qui s'approcheront le plus de la coincidence dans la première demi-heure de travail.*

Supposons que le x^e coup de A coïncide avec le y^e coup de B. Les temps mis depuis l'origine du travail pour arriver à ces deux coups étant égaux, on a :

$$x \times \frac{12}{7} = y \times \frac{17}{9} \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{y} = \frac{119}{108}.$$

Mais

$$\frac{119}{108} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Les fractions convergentes sont $\frac{1}{1}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{54}{49}$, $\frac{119}{108}$.

Ces fractions en allant de gauche à droite s'approchent de plus en plus de la dernière $\frac{119}{108}$, et $\frac{54}{49}$ est celle qui en est la plus proche.

Mais A ne peut donner que 51 coups dans une demi-heure. La fraction à prendre pour la valeur de $\frac{x}{y}$ est donc $\frac{11}{10}$, c'est-à-dire que pendant la première demi-heure de travail, le 11e coup de A et le 10e coup de B sont ceux qui s'approchent le plus de la coïncidence.

53. *Trois mobiles* A, B, C *animés d'un mouvement uniforme partent d'un même point d'une circonférence et les temps mis par chacun d'eux pour faire une révolution complète sont entre eux comme* 3 *nombres premiers.*

A *et* B *pour se trouver de nouveau au point de départ mettent* 6 *minutes de moins que* A *et* C *et* 28 *minutes de moins que* B *et* C. *On sait de plus que* A *et* B *avant d'arriver ensemble au point de départ, se sont rencontrés autant de fois que* B *et* C *avant d'arriver également ensemble.*

Enfin les mobiles se retrouvent tous les trois au point d'où ils sont partis, $1^h,55^m30^s$ *après leur départ.*

Calculer, d'après cela, les temps mis par chacun d'eux pour faire le tour de la circonférence.

Représentons par ka, kb et kc les temps en minutes mis par chaque mobile pour faire le tour de la circonférence; a, b et c sont des nombres premiers par hypothèse.

Soit p le développement de la circonférence.

Dans l'unité de temps A et B parcourent, $\frac{p}{ka}$ et $\frac{p}{kb}$; la distance qui les sépare au bout de l'unité de temps est

$$\frac{p}{ka}-\frac{p}{kb}=\frac{p}{k}\,\frac{b-a}{a.b}.$$

Ces deux mobiles se rencontreront au bout d'un temps représenté par

$$p:\frac{p}{k}\,\frac{b-a}{a.b}=\frac{k.ab}{b-a}.$$

Mais les distances parcourues respectivement pendant ce temps sont égales à

$$\frac{b}{b-a}\cdot p \quad \text{et} \quad \frac{a}{b-a}\cdot p.$$

Quand les deux mobiles arrivent ensemble au point de départ, ce qui se produit au bout du temps $ka.b$, A a parcouru la distance pb et B la distance $p.a$.

Les deux mobiles se sont rencontrés $(b-a)$ fois.

On fait voir de la même manière que A et C se retrouvent au point de départ au bout du temps $k.a.c$ après s'être rencontrés $(c-a)$ fois. Enfin B et C arrivent ensemble au point de départ au bout du temps $k.b.c$ après s'être rencontrés $(c-b)$ fois.

D'après l'énoncé

$$kab = kac - 6 \quad \text{ou} \quad ka\,(c-b)=6$$
$$kab = k.bc - 28 \quad \text{ou} \quad kb\,(c-a)=28$$

$$kabc = 115\,\frac{1}{2}$$

$$b-a=c-b.$$

On en déduit $\frac{a}{c} = \frac{3}{11}$ et comme a et c sont des nombres premiers.

$$a = 3, \quad c = 11.$$

Par suite

$$b = 7, \quad k = \frac{1}{2}.$$

Les 3 mobiles mettent respectivement 1 minute $\frac{1}{2}$, 3 minutes $\frac{1}{2}$ et 5 minutes $\frac{1}{2}$ pour faire le tour de la circonférence.

54. *A midi, un certain jour, une pendule et une montre sont mises à l'heure. On constate que la pendule, à un instant quelconque, indique l'heure avec une erreur égale à celle de la montre lorsque cette dernière marquera la même heure que la pendule, et que la pendule indique minuit une seconde avant la montre.*

Trouver en fractions de seconde, l'avance et le retard journalier de la pendule et de la montre.

Soient x l'avance de la pendule, en secondes et par jour
y le retard de la montre »

Alors 86400 secondes (temps réel) $= (86400 + x)$ secondes, temps de la pendule,
« $= (86400 - y)$ secondes, temps de la montre.

Désignons par t une heure quelconque indiquée par la pendule. L'heure exacte est $\frac{86400}{86400 + x} \times t$, et l'heure résultant de l'indication de la pendule est égale à $t - \frac{86400}{86400 + x} \times t$.

On voit de même que l'erreur de la montre est égale à

$$\frac{86400}{86400 - y} \times t - t.$$

D'après l'énoncé

$$t - \frac{86\,400}{86\,400 + x} \times t = \frac{86\,400}{86\,400 - y} \times t - t$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{86\,400}{86\,400 - y} + \frac{86\,400}{86\,400 + x} = 2.$$

Puisqu'il est minuit à la pendule 1 seconde avant la montre, on a également

$$(2) \qquad \left(\frac{86\,400}{86\,400 - y} - \frac{86\,400}{86\,400 + x}\right) \times 43\,200 = 1.$$

Les équations (1) et (2) donnent :

$$x = \frac{86\,400}{86\,400 - 1} \quad \text{et} \quad y = \frac{86\,400}{86\,400 + 1}.$$

La pendule gagne 1 seconde $\frac{1}{86\,399}$ par jour et la montre perd $\frac{86\,400}{86\,401}$ de seconde.

55. *Deux mobiles* A *et* B *partent en même temps d'un même point et marchent dans la même direction. Chaque fois que la distance qui les sépare est un nombre pair de kilomètres,* A *augmente sa vitesse de* $\frac{1}{4}$ *de kilomètre par heure, et chaque fois que cette distance est un nombre impair de kilomètres,* B *augmente sa vitesse de* $\frac{1}{2}$ *kilomètre par heure. Quand* A *a* 4 *kilomètres d'avance sur* B, *le chemin qu'il a parcouru surpasse de* 1 *kilomètre* $\frac{1}{3}$ *celui qu'il aurait fait si sa vitesse s'était maintenue uniforme; de son côté* B *a parcouru, à ce moment, une distance de* 30 *kilomètres* $\frac{2}{3}$.

Déterminer les vitesses de A et B au départ.

Soient x et y les distances en kilomètres parcourues par A et B dans une heure.

Représentons par t_1 le nombre d'heures qui s'écoulent depuis le moment du départ jusqu'à ce que A soit de 1 kilomètre en avance sur B.

par t_2 le nombre d'heures qui s'écoulent depuis le moment où A est à 1 kilomètre en avance jusqu'à celui où il est en avance de 2 kilomètres.

par t_3 le nombre d'heures entre le moment où A est de 2 kilomètres en avance et celui où il est en avance de 3 kilomètres.

et enfin par t_4 le nombre d'heures entre le moment où A est en avance de 3 kilomètres et celui où il est en avance de 4 kilomètres.

La vitesse de A pendant les temps t_1 et t_2 est de x kilomètres par heure; et pendant les temps t_3 et t_4 elle est de $x + \frac{1}{4}$.

La vitesse de B pendant le temps t est de y kilomètres par heure; pendant les temps t_2 et t_3, elle est de $y + \frac{1}{2}$ et pendant le temps t_4 elle est de $y + 1$.

D'après l'énoncé

$$(t_3 + t_4)\frac{1}{4} = 1\,\frac{1}{3},$$

et

$$(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)y + (t_2 + t_3)\frac{1}{2} + t_4 = 30\,\frac{2}{3}.$$

mais

$$(x - y)t_1 = 1, \quad \left(x - y - \frac{1}{2}\right)t_2 = 1, \quad \left\{x + \frac{1}{4} - \left(y + \frac{1}{2}\right)\right\}t_3 = 1$$

et

$$\left\{x + \frac{1}{4} - (y + 1)\right\} t_4 = 1.$$

On déduit de là l'équation

$$\frac{1}{x - y - \frac{1}{4}} + \frac{1}{x - y - \frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$$

d'où en posant $x - y = z$

$$z^2 - \frac{11}{8} z + \frac{3}{8} = 0 \quad z = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{8}$$

pour

$$z = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad t_3 = \frac{4}{3}, \quad t_4 = 4, \quad y = 3 \quad \text{et} \quad x = 4.$$

56. *Trois mobiles se déplacent uniformément sur trois routes qui se coupent en* O *et partent au même instant du point* O. *Les routes parcourues par* A *et* B *sont à angle droit et celle suivie par* C *est comprise entre les deux autres. La droite qui joint les positions de* A *et* C *à un moment quelconque de leurs mouvements est parallèle à la route suivie par* B ; *de même la droite qui joint à un instant quelconque les positions de* B *et* C *est parallèle à la route suivie par* A.

Quand le mobile C *a parcouru* 8 *kilomètres de plus que* A, *il retourne sur ses pas, et quand il a parcouru* 5 *kilomètres* $\frac{1}{3}$ *de plus que* B, *il se trouve en ligne droite avec* A *et* B. *Trouver les rapports des vitesses de* A, B *et* C.

Soient x, y, z les vitesses respectives de A, B, C en kilomètres et par heure.

D'après l'énoncé A, B et C se déplacent respectivement sur les côtés adjacents d'un rectangle et sur la diagonale issue de O.

Soit m la position de C quand ce mobile a parcouru 8 kilomètres de plus que A, les positions des deux mobiles A et B sont alors les pieds des perpendiculaires abaissées de m sur les directions OD, OE.

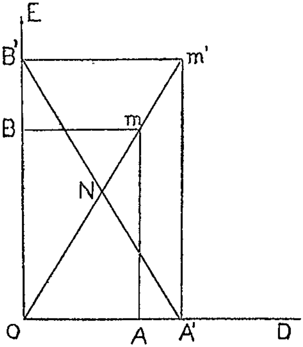

Fig. 6.

Soit N la position occupée par le mobile C lorsqu'en revenant sur ses pas il se trouve en ligne droite avec les deux autres mobiles qui occupent alors les positions A' et B'. Si le mobile C au lieu de revenir sur ses pas avait continué sa route, il se trouverait en m', point où les perpendiculaires élevées en A' et B' sur OD et OE coupent la diagonale.

Il en résulte que $mN = mm'$, c'est-à-dire que si C continuant sa route arrivait en m', il aurait parcouru 5 kilomètres $\frac{1}{3}$ de plus que B.

Cela posé on a :

temps mis par C pour aller de O en $m = \dfrac{8}{z - x}$

temps mis par C pour parcourir Om et revenir en N $= \dfrac{5\frac{1}{3}}{z - y}$.

$$Nm = mm' = \frac{1}{2}\,ON = \frac{1}{3}\,Om, \qquad Om + mN = \frac{4}{3}\,Om$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{z-x} = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{z-y}, \quad \text{ou} \quad z = 2y - x, \quad \text{mais} \quad z^2 = x^2 + y^2$$

donc

$$4y^2 - 4yx + x^2 = x^2 + y^2, \qquad 3y = 4x, \qquad z = \frac{8x}{3} - x = \frac{5x}{3}.$$

Les vitesses sont donc entre elles comme les nombres 3, 4 et 5.

57. *Les quantités de liquide contenues dans trois vases* A, B, C *sont entre elles comme les nombres* 3, 2 *et* 1 *et les prix par litre de ces mêmes liquides sont respectivement entre eux comme* 1, 2 *et* 3. *On prend une certaine quantité du contenu de* A *et on la verse dans* B, *la même quantité du mélange contenu alors dans* B *est enlevée de ce vase et versée dans* C; *la même quantité est encore prise dans le mélange contenu dans* C *puis versée dans* B; *enfin on puise toujours la même quantité dans* B *et on la verse dans* A.

La valeur du liquide contenu alors dans A *vaut les* $\frac{35}{27}$ *de ce qu'elle était au début.*

On sait également que, si la même opération était reprise mais cette fois-ci en enlevant 1 *litre de plus à chaque fois, la valeur finale du liquide contenu dans* A *serait à sa valeur initiale comme* 3 *à* 2.

Trouver les quantités de liquide contenues dans chaque vase.

Soient $3x$, $2x$ et x les nombres de litres contenus dans chaque vase au début et y, $2y$ et $3y$ les prix respectifs d'un litre de chaque liquide.

Soit z le nombre de litres enlevés la première fois.

Après le premier prélèvement fait dans A, les quantités de liquide contenues dans les 3 vases deviennent respectivement

$$3x - z, \qquad 2x + y \qquad \text{et} \qquad x + z$$

et les valeurs de ces quantités de liquide sont

$$(3x - z).y, \qquad (4x + z)\,y \qquad \text{et} \qquad 3xy + \frac{z}{2x + z}(4x + z)\,y$$
$$= \frac{y}{2x + z}(6x + z)(x + z).$$

En même temps, la quantité de liquide contenue dans B redevient $2x$ et la valeur de ces $2x$ litres est

$$\frac{2xy\,(4x + z)}{2x + z} \qquad \text{ou} \qquad \frac{y}{2x + z}(8x^2 + 2xz).$$

Après le transvasement de z litres de C en B, la quantité de liquide contenue dans B devient encore $2x + z$ et la valeur de ce liquide est

$$\frac{y}{2x+z}(8x^2 + 2xz) + \frac{yz(6x+z)(x+z)}{(2x+z)(x+z)}$$
$$= \frac{y}{2x+z}(8x^2 + 8xz + z^2).$$

Après le transvasement de z litres de B dans A, la quantité de liquide contenue dans ce vase devient $3x$ et la valeur de ce liquide est

$$(3x - z)y + \frac{z}{2x+z} \cdot \frac{y}{2x+z}(8x^2 + 8xz + z^2)$$
$$= y\left\{3x + 4x.z\frac{x+z}{(2x+z)^2}\right\}.$$

D'après l'énoncé, on a l'équation

$$(1) \qquad 1 + \frac{4}{3}z \cdot \frac{x+z}{(2x+z)^2} = \frac{35}{27}$$

ou

$$(7z + 8x)(z - x) = 0$$

d'où $x = z$.

Remplaçons maintenant, pour tenir compte de la seconde condition, z par $z + 1 = u$ et $\frac{35}{17}$ par $\frac{3}{2}$, on arrive à l'équation

$(5u + 6)(u - 2) = 0$, d'où $u = z + 1 = 2$ et $z = x = 1$.

Les trois vases contiennent donc respectivement 3 litres, 2 litres et 1 litre.

58. *Deux bicyclistes* A *et* B *n'ayant à leur disposition qu'une bicyclette ont à parcourir ensemble et en 2 heures* $\frac{62}{63}$ *une certaine distance*

mesurée par un nombre entier pair de kilomètres. Ils conviennent alors de monter à tour de rôle et de kilomètre en kilomètre sur la machine qui est laissée à chaque borne kilométrique jusqu'à l'arrivée de celui qui marche à pied.

B *monte le premier et sa vitesse à bicyclette est le double de sa vitesse de marche à pied; la vitesse de* A *à bicyclette est d'ailleurs la même que celle de* B. *Les deux hommes se retrouvent ensemble à la* 7^e^ *borne kilométrique; ils estiment alors qu'il est nécessaire d'augmenter leurs vitesses et ils conviennent de faire en marchant* $\frac{1}{2}$ *kilomètre de plus par heure. C'est encore* B *qui monte le premier, mais cette fois-ci sa vitesse à bicyclette est le double de la vitesse de* A *marchant à pied;* A *à bicyclette a encore la même vitesse que* B.

Les deux hommes arrivent ensemble à destination. On demande la distance parcourue et les vitesses initiales.

Soit $2x$ la distance totale en kilomètres.

En premier lieu A marche pendant 4 kilomètres et pédale pendant 3 kilomètres.

B marche pendant 3 kilomètres et pédale pendant 4 kilomètres.

Donc A parcourt 4 kilomètres à pied pendant que B parcourt 3 kilomètres à pied et 1 kilomètre à bicyclette.

Mais la vitesse à bicyclette est double de la vitesse à pied : donc A parcourt 4 kilomètres à pied pendant que B parcourt 3 kilomètres $\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$ de kilomètre. Les vitesses de marche de A et B peuvent donc être représentées par $8y$ et $7y$.

En second lieu, il reste à parcourir $(2x - 7)$ kilomètres.

Cette fois-ci A marche pendant $(x - 3)$ kilomètres et pédale pendant $(x - 4)$ kilomètres.

B marche pendant $(x - 4)$ kilomètres et pédale pendant $(x - 3)$ kilomètres.

Donc, pendant que A parcourt $(x - 3)$ kilomètres à pied, B parcourt $(x - 4)$ kilomètres à pied et 1 kilomètre en pédalant.

Mais la vitesse à bicyclette est le double de la vitesse de marche de A, donc pendant que A parcourt $\left(x - 3 - \frac{1}{2}\right)$ kilomètres ou $\left(x - \frac{7}{2}\right)$ kilomètres, B parcourt $(x - 4)$ kilomètres.

Les vitesses sont alors respectivement $8y + \frac{1}{2}$ et $7y + \frac{1}{2}$.

Les distances parcourues sont proportionnelles aux vitesses

$$\frac{x - \frac{7}{2}}{x - 4} = \frac{8y + \frac{1}{2}}{7y + \frac{1}{2}} \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{30.y + 1}{4.y}.$$

Temps total de la course

$$\frac{4}{8y} + \frac{3}{14.y} + \frac{x - 3}{8y + \frac{1}{2}} + \frac{x - 4}{2\left(8y + \frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{7.y} + \frac{3x - 10}{16y + 1}$$
$$= \frac{670.y + 41}{28y\,(16.y + 1)}.$$

On a donc

$$\frac{670.y + 41}{28.y\,(16.y + 1)} = 2\,\frac{62}{63} \quad \text{ou} \quad 84224.y^2 - 36946.y - 2583 = 0,$$

d'où $y = \frac{1}{2}$. Alors $x = 8$.

La distance parcourue est donc de 16 kilomètres. Les vitesses initiales sont 4 kilomètres et 3 kilomètres $\frac{1}{2}$.

59. *Déterminer un nombre de 10 chiffres tel que son carré soit terminé par ces mêmes 10 chiffres dans le même ordre.*

Si N représente le nombre cherché, on doit avoir

$$N^2 - N = p.10^{10} \qquad \text{ou} \qquad N\,(N - 1) = p.10^{10}.$$

Si p est un nombre premier, on ne peut faire que l'hypothèse

$$N = p \qquad \text{avec} \qquad N - 1 = 10^{10}$$

d'où

$$N = 10\,000\,000\,001,$$

ce qui donne une première solution.

Si p n'est pas premier, ce nombre peut toujours être décomposé en deux facteurs m et n et on a, dans ce cas,

$$N(N-1) = m.n.5^{10}.2^{10}$$

d'où

$$N = m.5^{10} \quad \text{avec} \quad N - 1 = n.2^{10};$$

ou

$$N = m.2^{10} \quad \text{avec} \quad N - 1 = n.5^{10}.$$

La première hypothèse nous donne

$$m.5^{10} - n.2^{10} = 1$$

d'où

$$n.2^{10} = m.5^{10} - 1 \quad \text{et} \quad m = 841.$$

Alors

$$N = 841.5^{10} = 841 \times 9\,765\,625 = 8\,212\,890\,625.$$

Avec la seconde hypothèse

$$m.2^{10} - n.5^{10} = 1 \quad \text{et} \quad m = 1\,745\,224$$

d'où

$$N = 1\,745\,224 \times 1\,024 = 1\,787\,109\,376.$$

Remarque. — Si l'on remarque que toutes les puissances des nombres terminés par N sont de la forme

$$(10^{10}.x + N)^p$$

et que l'on a

$$(10^{10}.x + N)^p \equiv N^p \quad (\text{mod. } 10^{10}).$$

On en conclut ce théorème général :

Toutes les puissances des nombres terminés par l'un ou l'autre des groupes de dix chiffres 8212890625, 1787109376, *sont terminées par ces mêmes dix chiffres disposés dans le même ordre.*

60. *Déterminer deux nombres décimaux ayant la même partie décimale et tels que leur produit soit également terminé par cette même partie décimale.*

Représentons les deux nombres par

$$a + p, \quad b + p$$

et leur produit par $c + p$.

a, b, c étant les parties entières et $p < 1$.

Par hypothèse

$$(a + p)(b + p) = c + p,$$

d'où l'équation

$$p^2 + p(a + b - 1) + ab - c = 0,$$

qui donne

$$p = \frac{-(a + b - 1) \pm \sqrt{(a + b - 1)^2 + 4(c - ab)}}{2},$$

et

$$c > ab$$

p étant positif, le radical doit être pris avec le signe $+$.

D'autre part p étant plus petit que 1, on a :

$$-(a + b - 1) + \sqrt{(a + b - 1)^2 + 4(c - ab)} < 2$$

ou

$$(a + b - 1)^2 + 4(c - ab) < (a + b + 1)^2$$

ou enfin

$$c < ab + a + b.$$

On peut prendre a, b, c quelconques, pourvu que

$$c > ab \quad \text{et} \quad c < ab + a + b.$$

Pour

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = 1,$$

ou

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 2$$

il vient

$$p = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0{,}618034.$$

$$2{,}618034 \times 0{,}618034 = 1{,}618034$$

ou

$$1{,}618033 \times 1{,}618034 = 2{,}918034.$$

à un millionième près.

Pour

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 3$$

il vient

$$p = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = 0{,}4142136$$

$$2{,}4142136 \times 1{,}4142136 = 3{,}41421370642496$$

ou à un millionième près

$$2{,}4142136 \times 1{,}4142136 = 3{,}414213.$$

61. *Une montre a 3 aiguilles égales des heures, minutes et secondes. Elles sont montées sur le même pivot. Est-il possible qu'à un moment donné ces trois aiguilles aient leurs extrémités aux sommets d'un triangle équilatéral ?*

Lorsque les 3 aiguilles ont leurs extrémités aux sommets d'un triangle équilatéral, ces extrémités sont respectivement distantes l'une de l'autre de 20 divisions du cadran.

Si donc, à ce moment, l'extrémité de l'aiguille marque θ divisions à partir de XII, l'extrémité de l'aiguille des minutes sera sur la division $\theta + 20$ et celle de l'aiguille des secondes sur la division $\theta + 40$. Ou inversement, l'extrémité de l'aiguille des secondes sera sur la division $\theta + 20$. et celle de l'aiguille des minutes sur la division $\theta + 40$.

Il est facile de voir que ces deux cas ne peuvent se présenter.

On aurait, en effet, dans le premier

$$60.n + \theta + 20 = 12\,\theta \quad \text{et} \quad 60.n' + \theta + 40 = 720\,\theta,$$

ou

$$60.n + 20 = 11.\theta \quad \text{et} \quad 60.n' + 40 = 719.\theta.$$

D'où

$$\frac{6.n + 2}{6.n' + 4} = \frac{11}{719} = \frac{3.n + 1}{3.n' + 2}, \qquad 11\,(3\,n' + 2) = 719\,(3\,n + 1)$$

mais

$$11 = 3.q + 2 \quad \text{et} \quad 719 = 3.q' + 2.$$

La relation précédente conduirait donc à la suivante :

$$(1) \qquad (3\,q + 2)\,(3\,n' + 2) = (3\,q' + 2)\,(3\,n + 1)$$

or

$$(3\,q + 2)\,(3\,n' + 2) = \text{multiple de } 3 + 1$$

et

$$(3\,q' + 2)\,(3\,n + 1) = \text{multiple de } 3 + 2.$$

La relation (1) est donc impossible.

On aurait de même dans le second cas

$$60.n' + \theta + 20 = 720\,\theta, \quad \text{d'où} \quad 60.n' + 20 = 719\,\theta,$$

et

$$60.n' + \theta + 40 = 12\,\theta, \quad \text{d'où} \quad 60.n + 40 = 11\,\theta.$$

On déduit de là la relation impossible

$$\frac{3n+2}{3n'+1}=\frac{11}{719}.$$

62. *Un champ rectangulaire est divisé par deux parallèles à deux côtés adjacents en 4 rectangles tels que le plus grand côté du plus petit d'entre eux coïncide avec le plus petit côté du rectangle donné. Le périmètre du plus grand de ces 4 rectangles vaut 4 fois celui du plus petit et les périmètres des deux autres rectangles sont dans le rapport de 3 à 2.*

Si les deux parallèles avaient été tracées de telle sorte que les côtés du plus petit des 4 rectangles fussent doubles de ce qu'ils sont actuellement, la surface du plus grand des rectangles alors formés aurait été 4 fois plus grande que celle du plus petit des rectangles, et la différence des surfaces des deux autres rectangles aurait été égale à 5 ares.

Trouver d'après cela la surface du champ en ares.

Représentons par x le plus grand côté du plus petit des 4 rectangles, et par y le demi-périmètre du champ.

D'après le mode de décomposition de la figure, le rectangle le plus petit est opposé au plus grand et la somme de leurs périmètres = le périmètre du champ.

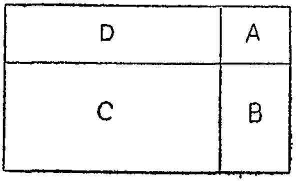

Fig. 7.

Par suite

$$\frac{1}{2}\text{ périmètre de B}=\frac{2}{5}\cdot y \quad , \quad \frac{1}{2}\text{ périmètre de D}=\frac{3}{5}y.$$

$$\frac{1}{2}\text{ périmètre de A}=\frac{1}{5}y \quad , \quad \frac{1}{2}\text{ périmètre de C}=\frac{4}{5}\cdot y$$

Les côtés de A sont x et $\frac{y}{5}-x$; ceux de B, $\frac{y}{5}-x$ et $\frac{y}{5}+x$;

ceux de C $\frac{y}{5}+x$ et $\frac{3y}{5}-x$; ceux de D x et $\frac{3y}{5}-x$.

Dans le cas de la seconde construction, les longueurs des côtés seraient :

$$\text{pour A} : 2x \quad \text{et} \quad 2\left(\frac{y}{5} - x\right); \quad \text{pour} \quad \text{B} : 2\left(\frac{y}{5} - x\right) \quad \text{et} \quad \frac{y}{5};$$
$$\text{pour C} : \frac{y}{5} \quad \text{et} \quad \frac{2y}{5}; \text{pour D} : 2x \quad \text{et} \quad \frac{2y}{5}.$$

D'après les conditions de l'énoncé

$$x > \frac{y}{5} - x \quad \text{ou} \quad 2x > \frac{y}{5}$$

il en résulte que la nouvelle surface de D est plus grande que celle de C, et que la nouvelle surface de C est plus grande que celle de B.

B et D seraient donc, dans ce cas, les deux rectangles extrêmes.

On a donc

$$2x . \frac{2y}{5} = 4 . \frac{2y}{5} . \left(\frac{y}{5} - x\right) \quad \text{d'où} \quad y = \frac{15x}{2}.$$

Les côtés de A et C seraient alors, pour A : $2x$ et x pour C, $\frac{3x}{2}$ et $3x$.

On a alors l'équation

$$\frac{9x^2}{2} - 2x^2 = 5 \quad \text{d'où} \quad x^2 = 2.$$

Par suite la surface du champ $= 14x^2 = 28$ ares.

63. Bacchus et Silène.

Bacchus, ayant vu Silène
Auprès de sa cuve endormi,
Se mit à boire sans gêne
Au dépens de son ami.

Ce jeu dura pendant le triple du cinquième
Du temps qu'à boire seul Silène eût employé :
Il s'éveille bientôt, et son chagrin extrême
Dans le reste du vin est aussitôt noyé.
S'il eût bu près de Bacchus même,
Ils auraient, suivant le problème,
Achevé six heures plus tôt :
~~*Alors Bacchus eût eu, pour son écot,*~~
Deux tiers de ce qu'à l'autre, il laisse.
Ce qui maintenant m'intéresse
Est de savoir exactement,
Le temps qu'à chaque drôle il faut séparément
Pour vider la cuve entière,
Sans le secours de son digne confrère.

Soient x le temps mis par Bacchus seul pour vider le tonneau et y le temps employé par Silène.

Tous les deux buvant ensemble videront la cuve dans un temps marqué par

$$\frac{xy}{x+y}.$$

Bacchus boit seul pendant le temps $\frac{3}{5}\cdot y$, et dans ce temps il vide la fraction $\frac{3}{5}\frac{y}{x}$ du tonneau.

Il laisse à Silène

$$1-\frac{3y}{5x}=\frac{5x-3y}{5x}$$

et celui-ci a mis pour boire cette quantité de vin un temps égal à

$$\frac{5x-3y}{5.x}:\frac{1}{y}=\frac{(5x-3y)\,y}{5x}.$$

D'après l'énoncé

$$\frac{3}{5}\cdot y+\frac{(5x-3y)\,y}{5x}-\frac{xy}{x+y}=6,$$

ou

$$(1) \qquad 3y^3 - 5xy^2 - 3x^2y + 30\,xy + 30\,x^2 = 0.$$

Bacchus boit avec Silène, pendant $\frac{x+y}{xy}$ heures, et pendant ce temps il vide une fraction du tonneau égale à $\frac{y}{x+y}$. On a donc la seconde équation

$$\frac{y}{x+y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5x - 3y}{5x}$$

ou :

$$(2) \qquad 6y^2 + 11\,xy - 10\,x^2 = 0.$$

En résolvant ces deux équations (1) et (2), on trouve

$$x = 15 \quad \text{et} \quad y = 10.$$

Vers 1848, un élève du lycée Charlemagne, a donné cette réponse comme il suit :

Dans cette occasion Silène eut tout l'honneur.
En quinze heures Bacchus acheva la besogne ;
Il n'en fallut que dix au digne précepteur :
J'en conclus qu'il était de moitié plus ivrogne !

Nous avons emprunté cette question à la *Nouvelle Correspondance mathématique* de Catalan (tome 1^{er}, page 32).

Catalan indique en note que cet énoncé lui avait été communiqué par le savant professeur et philologue Vincent.

On en trouve une version un peu différente dans les *Problèmes plaisants et délectables*, de Bachet.

64. *Un marchand se fait adresser une caisse de bouteilles de champagne qu'il se propose de vendre de façon à gagner* 10 % *sur le prix d'achat.*

Il charge un de ses garçons du placement qui s'effectue en 3 *jours.*

Le premier jour le garçon détourne une bouteille et verse à la caisse le produit de sa vente. Le second jour il détourne le gain réalisé sur la vente d'une bouteille et verse à la caisse l'argent qui lui reste. Dans la soirée, le marchand compte ce qui lui reste de bouteilles et estime que la vente de ce reliquat doit produire 264 *francs. Enfin le troisième jour le commis détourne encore une bouteille, le gain réalisé sur la vente d'une bouteille et verse sa recette à la caisse.*

Le marchand une fois ses comptes faits, constate que le gain réalisé n'est que de 0 *fr.* 60 *par bouteille et que les sommes portées comme gains journaliers sont égales.*

Déterminer d'après cela le nombre des bouteilles achetées, le prix d'achat et le nombre de bouteilles vendues chaque jour.

On sait d'ailleurs que le nombre de bouteilles contenues dans la caisse est un multiple de 5.

Soient x le nombre de bouteilles prises le premier jour.
y » le deuxième jour.
z » le troisième jour.
et 10 p. le prix d'achat, le prix de vente est alors 11. p.

	Sommes versées à la caisse —	Bénéfices, c'est-à-dire différences entre les sommes encaissées et le prix d'achat des bouteilles portées comme vendues —
le 1er jour	$(x-1)\ 11.p,$	$(x-1)\ 11.p - x.10p = x.p - 11.p,$
le 2e »	$y \times 11.p - p,$	$y.11.p - p - y \times 10p = y.p - p.$
le 3e »	$(z-1)\,11p - p$	$(z-1)\,11p - p - z.10p = zp - 12p.$

D'après l'énoncé

$$x.p - 11.p = y.p - p = z.p - 12.p.$$

ou :

$$x - 11 = y - 1 = z - 12,$$

d'où :

$$y = x - 10 \quad \text{et} \quad z = x + 1.$$

Le nombre total des bouteilles est donc :

$$x + y + z = 3x - 9.$$

Le bénéfice total

$$= (x + y + z)\, p - 24\, p = 3p\,(x - 11).$$

et le bénéfice par bouteille a pour expression

$$\frac{3p\,(x - 11)}{3x - 9} = \frac{p\,(x - 11)}{x - 3}.$$

On a donc

$$\frac{p\,(x - 11)}{x - 3} = 0{,}60,$$

d'où :

$$(1) \qquad 5p\,(x - 11) = 3\,(x - 3).$$

En second lieu

$$z.11\,p = 264 \quad \text{ou} \quad z.p = 24$$

ou encore

$$(2) \qquad (x + 1)\,p = 24.$$

Divisant alors membre à membre (1) par (2), on trouve

$$\frac{5\,(x - 11)}{x + 1} = \frac{3\,(x - 3)}{24} = \frac{x - 3}{8}$$

d'où l'équation

$$x^2 - 42x + 437 = 0.$$

$$x = 23 \text{ ou } 19 \quad , \quad 3x - 9 = 60 \text{ ou } 48.$$

Le nombre des bouteilles est donc 60.

$$p = \frac{24}{24} = 1.$$

Le nombre des bouteilles prises chaque jour est donc

$$x = 23 \quad , \quad y = 13 \quad \text{et} \quad z = 24.$$

Le prix d'achat était de 10 francs et le prix de vente 11 francs.

65. *Deux tireurs A et B, engagent une partie de tir en deux séances d'après les conditions suivantes : chacun d'eux a un nombre pair de coups à tirer fixé à l'avance, et chaque fois que l'un des deux touche le but, il doit recevoir de l'autre autant de francs qu'il y a d'unités dans le nombre de fois que le but a été manqué par ce même tireur.*

Dans la première séance, le second tireur B, a manqué le but autant de fois que le premier tireur A, l'a touché dans la seconde séance, et le premier tireur a manqué le but le double du nombre de fois que le second tireur l'a touché dans la seconde séance. A la fin de cette première séance le second tireur est redevable au premier d'une somme de 4 francs. Dans la seconde séance, chacun d'eux touche le but le nombre de fois qui lui est le plus avantageux, et à la fin, le second tireur est redevable au premier d'une somme de 36 francs.

Déterminer d'après cela, le nombre de fois, que chacun des tireurs a touché le but.

On voit facilement que, dans la seconde séance, le cas le plus avantageux pour les tireurs a lieu lorsque chacun d'eux a touché le but autant de fois qu'il l'a manqué.

Soit alors x le nombre de fois que le premier tireur A, touche et manque le but dans cette seconde séance.

Soit également y le nombre de fois que le second tireur B touche et manque le but dans cette même séance.

Dans la première séance, A a manqué $2y$ fois le but et l'a touché $2x - 2y$ fois,

et B a manqué x fois le but et l'a touché $2y - x$ fois.

D'après l'énoncé on a les deux équations

$$(2x - 2y)\, 2 . y - (2y - x)\, x = 4$$

ou

$$2xy - 4y^2 + x^2 = 4 \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 = 36.$$

Posons

$$x + y = 2u \quad , \quad x - y = 2v,$$

d'où :

$$x = u + v \quad \text{et} \quad y = u - v.$$

$$2(u^2 - v^2) - 4(u^2 - 2u.v + v^2) + u^2 + 2u.v + v^2 = 4$$

ou

$$10.u.v - u^2 - 5v^2 = 4$$

également

$$4.u.v = 36 \quad \text{d'où} \quad u.v = 9.$$

Donc :

$$u^2 + 5v^2 = 86 \quad , \quad u^2 + 5v^2 \pm 2u.v\sqrt{5}$$
$$= 86 \pm 18\sqrt{5} \quad , \quad u \pm v\sqrt{5} = 9 \pm \sqrt{5}.$$

Donc

$$u = 9 \text{ et } v = 1, \quad \text{d'où} \quad x = 10 \text{ et } y = 8$$

Dans la première séance, le premier tireur à touché 4 fois le but et l'a manqué 16 fois.

Le second tireur a touché 6 fois le but et l'a manqué 10 fois.

Dans la seconde séance, le premier tireur a touché 10 fois le but et l'a manqué 10 fois.

Le second tireur a touché 8 fois le but et l'a manqué 8 fois.

66. *Un escalier dessert les trois étages d'une maison; le nombre des marches contenues dans la volée du* 1^er^ *est égal aux* $\frac{8}{9}$ *de celui des marches de l'escalier du* 3^e^, *et la moitié du premier de ces nombres surpasse de* 2 *le septième du nombre total des marches de l'escalier.*

Une personne qui a l'habitude de mettre 13 secondes $\frac{1}{2}$ pour monter seulement la volée du 3e étage, se trouvant pressée, commence l'ascension de l'escalier avec une vitesse 3 fois plus grande que sa vitesse habituelle, en montant la volée du 2e, sa vitesse n'est plus que les $\frac{5}{6}$ de ce qu'elle était au départ, et en montant les $\frac{2}{3}$ de l'escalier du 3e sa vitesse diminue encore et devient les $\frac{2}{3}$ de cè qu'elle était au début. Arrivée en ce point cette personne est obligée de s'arrêter pendant 31 secondes pour se reposer, et elle termine l'ascension en montant, en 5 secondes, 1 marche de moins que si elle montait avec sa vitesse usuelle. Elle constate alors que le temps mis pour faire l'ascension est à celui qu'elle aurait mis si elle avait monté l'escalier à son allure habituelle, comme 69 est à 50. Trouver d'après cela le nombre total des marches de l'escalier.

Soit x le nombre des marches que la personne peut monter dans une seconde avec sa vitesse usuelle. $13\,\frac{1}{2}$, x représentera le nombre des marches contenues dans l'escalier qui dessert le troisième étage. $\frac{8}{9}.\ 13\,\frac{1}{2}.\ x$, ou $12\,x$, est le nombre des marches contenues dans l'escalier conduisant au premier. $(6x - 2) \times 7$ est le nombre total des marches de l'escalier.

Par conséquent, le nombre des marches de l'escalier du deuxième étage, est égal à

$$(6x - 2) \times 7 - 13\,\frac{1}{2}\,x - 12\,x \quad \text{ou} \quad \text{à } 16\,\frac{1}{2}\,x - 14.$$

Pour faire l'ascension de l'escalier, en temps ordinaire, la personne met $\frac{7\,(6x - 2)}{x}$ secondes.

Pour faire l'ascension de la volée du premier, la personne met $\frac{12x}{3\,x}$ ou 4 secondes.

Pour monter l'escalier du deuxième, elle met en secondes,

$$\frac{16\frac{1}{2}x - 14}{\frac{5}{2}x} = \frac{33x - 28}{5x} = \frac{33}{5} - \frac{28}{5x}.$$

Pour monter les $\frac{2}{3}$ de l'escalier du troisième, il lui faut $\dfrac{\frac{2}{3}.\ 13\frac{1}{2}x}{2x}$ $= \frac{9}{2}$ secondes, et le $\frac{1}{3}$ restant du même escalier exige, en secondes,

$$\frac{\frac{1}{3}.\ 13\frac{1}{2}x}{x - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{9}{2}x}{x - \frac{1}{5}}.$$

Or le temps total de l'ascension ainsi faite est égal aux $\frac{69}{50}$ du temps mis pour monter l'escalier à la vitesse ordinaire.

On a donc l'équation

$$4 + \frac{33}{5} - \frac{28}{5x} + \frac{9}{2} + \frac{\frac{9}{2}x}{x - \frac{1}{5}} + 31 = \frac{69}{50}.\frac{7(6x-2)}{x}.$$

Cette équation devient successivement

$$\frac{45x}{2(5x-1)} - \frac{28}{5x} + \frac{461}{10} = \frac{483}{50}.\frac{6x-2}{x},$$

$$\frac{45x}{2(5x-1)} = \frac{593}{50} - \frac{343}{25.x},$$

$$\frac{45x}{5x-1} = \frac{593.x - 686}{25.x},$$

$$\frac{45x}{5x-1} - 9 = \frac{593,x - 686}{25.x} - 9,$$

$$\frac{9}{5x-1} = \frac{368.x - 686}{25.x} = \frac{368(x-2)+50}{25.x},$$

$$\frac{368(x-2)}{25.x} = \frac{2}{x} - \frac{9}{5x-1} = \frac{x-2}{x(5x-1)}.$$

Il en résulte

$$x - 2 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = 2;$$

ou

$$\frac{368}{25} = \frac{1}{5x - 1}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{393}{1840} \text{ valeur inadmissible.}$$

Par suite le nombre total des marches de l'escalier est

$$7.(6x - 2) = 7 \times 10 = 70.$$

La volée du premier contient 24 marches,
La volée du second en contient 19,
et enfin la volée du troisième 27.

67. *Les périmètres de trois rectangles* A, B, C *sont proportionnels aux nombres* 2, 3 *et* 5; *les surfaces de ces mêmes rectangles sont entre elles comme les nombres* 2, 3 *et* 7. *Un rectangle semblable à* B *et dont la surface est égale à la somme des surfaces des trois rectangles contient dans la mesure de son périmètre autant de fois un centimètre que la somme des surfaces de* A *et de* B *contient de fois un centimètre carré. Le périmètre d'un rectangle semblable à* A *et dont la surface est égale à l'excès de la somme des surfaces de* B *et* C *sur la surface de* A, *contient* 8 *centimètres de moins que le périmètre d'un carré ayant pour surface la somme des surfaces des trois rectangles.*

Déterminer d'après cela les dimensions des 3 *rectangles.*

Soient $2p$, $3p$ et $5p$ les périmètres des 3 rectangles A, B, C, et $2a$, $3a$ et $7a$ leurs surfaces respectives.

La somme des surfaces des 3 rectangles égale $12a$ ou 4 fois la surface de B.

Donc un rectangle semblable à B et ayant pour surface $12a$ aura ses côtés 2 fois plus grands que ceux de B et pour périmètre $6p$.

D'après l'énoncé

$$(1) \qquad 6p = 5a.$$

Le côté d'un carré dont la surface égale la somme des surfaces de A, B et C, est égal à $\sqrt{12a}$ ou à $2\sqrt{3a}$. Son périmètre $= 8\sqrt{3a}$.

Le rectangle égal à B + C — A a pour surface $8a$ ou 4 fois la surface de A, et puisque cette figure est semblable à A, ses côtés sont deux fois plus grands que ceux de A et son périmètre $= 4p$.

Donc :

$$4p + 8 = 8\sqrt{3a}, \quad \text{ou en tenant compte de (1)}$$

$$5a + 12 = 12\sqrt{3a} \quad \text{d'où} \quad a = 12 \text{ ou } a = \frac{12}{25}.$$

Désignons maintenant par x et y les côtés de A.

$$x + y = p = \frac{5a}{6} = 10 \qquad x = 6 \text{ ou } 4$$

$$xy = 2a = 24 \qquad y = 4 \text{ ou } 6.$$

La seconde valeur de a, $a = \frac{12}{25}$ ne convient pas.

On trouve de même pour les côtés de B, 12 centimètres et 3 centimètres, et pour les côtés de C, 21 centimètres et 4 centimètres.

68. *Deux équipes de rameurs* A *et* B *prennent part à une course. Les deux canots partent en même temps, mais* A *a une avance de* 100 *mètres. Le canot* A *doit atteindre un but* D *et le canot* B *un second but* C.

Tout d'abord les vitesses des 2 canots sont dans le rapport de 40 à 39, mais quand la distance entre A *et* B *est le* $\frac{1}{6}$ *de la distance qu'il reste à* A *à parcourir, la vitesse de ce canot diminue dans le rapport de 79 à 80, de telle sorte que 2 minutes après, la distance entre les deux canots surpasse de 3 mètres la moitié de la distance qui reste à* B *à parcourir. A ce moment de la course, la vitesse de* B *qui, jusqu'ici avait été uniforme, augmente de 8 mètres par minute, tandis que celle de* A *diminue encore de 6 mètres par minute et au bout d'une minute,* B *atteint le but* C. A *est alors à* 3 *mètres du but* D. *Trouver la distance* CD.

Représentons par $40x$ la vitesse initiale de A, en mètres et par $39x$ celle de B.

Soit de même y le nombre de minutes pendant lesquelles le canot B a accompli sa course totale.

$(y - 3)$ sera le nombre de minutes pendant lesquelles le canot A a marché sans modifier sa vitesse.

$39xy + 8$ représente le parcours total, en mètres, du canot B; et le parcours total du canot A aura pour expression

$$40x(y - 3) + 2 . \frac{79x}{2} + \left(\frac{79x}{2} - 6\right) + 3.$$

La distance entre A et B, quand A change pour la première fois sa vitesse $= x(y - 3) + 100$ et la distance que A a encore à parcourir est égale à

$$79{,}x + \frac{1}{2} 79x - 3.$$

Par conséquent

$$(1)\ x(y - 3) + 100 = \frac{1}{6}\left(79x + \frac{1}{2} 79x - 3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{79x}{2} - 1\right)$$

2 minutes après la distance entre les deux canots est égale à $x(y - 2) + 100$ et la distance qu'il reste à B à parcourir est égale à $39x + 8$.

Par suite :

$$(2) \qquad x(y - 2) + 100 = \frac{1}{2}(39x + 8) + 3.$$

Les équations (1) et (2) nous donnent $x = 6$ et $y = 6$.

Le parcours de A est donc de $240 \times 3 + 3 \times 79 \times 3 - 3 = 1428$ mètres.

Le parcours de B est donc de $39 \times 36 + 8 = 1412$ mètres.
et la distance $CD = 1428 - 1412 + 100 = 116$ mètres.

69. *Les distances* AB, BC *et* CA *de trois villages sont respectivement égales à* 24 *kilomètres,* 14^k400 *et* $28^k,800$. *Pour aller de* A *en* B *la route est plane mais le village* C *est situé sur une montagne. Deux bicyclistes* P *et* Q *se proposent d'effectuer le parcours* ABC. *Les vitesses du premier P sur les rampes et les pentes sont respectivement les* $\frac{3}{4}$ *et les* $\frac{4}{3}$ *de sa vitesse sur une route plane, les vitesses de* Q *en rampe et en pente sont respectivement les* $\frac{4}{5}$ *et les* $\frac{6}{5}$ *de sa vitesse en plan.*

Pour effectuer le parcours ACB, P *met* 30 *minutes de moins que* Q *pour effectuer le même parcours, mais en sens opposé.*

Q *pour effectuer le parcours dans la direction* ACB *met* $1^h,48$ *de plus que* P *pour effectuer le même parcours en sens opposé.*

Déterminer les vitesses respectives de P *et* Q *sur une route plane.*

On demande de plus de trouver le point où se rencontreront les deux bicyclistes en supposant qu'ils partent en même temps de A, *mais dans des directions opposées.*

Représentons par $12\,x$ la vitesse en kilomètres et par heure, de P sur une route plane ; sa vitesse en rampe sera $9x$ et sa vitesse en pente $16\,x$.

Représentons par $5y$ la vitesse en kilomètres et par heure de Q, sur un plan : sa vitesse en rampe sera $4y$ et sa vitesse en pente $6y$.

D'après l'énoncé on a :

$$(1) \quad \frac{28,800}{9x} + \frac{14,400}{16x} + \frac{24}{12x} = \frac{24}{5y} + \frac{14,400}{4y} + \frac{28,800}{6y} - \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \frac{28,800}{16x} + \frac{14,400}{9x} + \frac{24}{12x} = \frac{24}{5y} + \frac{14,400}{6y} + \frac{28,800}{4y} - 1\,\frac{48}{60}$$

L'équation (1) nous donne

$$\frac{132}{y} - \frac{61}{x} = 5$$

et l'équation (2)

$$\frac{8}{y} - \frac{3}{x} = 1$$

d'où

$$x = 1 \qquad \text{et} \qquad y = 2.$$

Les vitesses de P et Q, sur une route plane, sont donc de 12 kilomètres et 10 kilomètres à l'heure.

Supposons maintenant que P parte dans la direction ABC et Q dans la direction ACB.

P arrive en C en $\frac{24}{12x} + \frac{14,40}{9x}$ ou en $3^h,6$ et Q arrive au village C dans le temps $\frac{28,8}{4y}$ ou $3^h,6$, c'est-à-dire dans le même temps. La rencontre a donc lieu en C.

Supposons que Q parte dans la direction AB. P arrive en C en $\frac{28,8}{9} = 3^h,2$, Q atteint le village B en $\frac{24}{10}$ ou $2^h.4$ et arriverait en C en $\frac{14,4}{8}$ ou $1^h,8$ de plus. Q rencontre donc P entre B et C et à une distance z de C donnée par l'équation

$$3,2 + \frac{z}{16} = 2,4 + \frac{14,4 - z}{8} \qquad \text{d'où} \qquad z = 5^k,\frac{1}{3}.$$

70. *Deux écoliers* A *et* B *s'exercent à la course sur une piste circulaire de* 1 *kilomètre de tour. Ils partent ensemble dans le même sens.* A *prend immédiatement l'avance et rencontre* 3 *fois* B, *il continue encore pendant* 12 *minutes, puis revient sur ses pas à la même allure; il croise encore* 3 *fois* B, *puis* 6 *minutes après la dernière rencontre, il reprend sa direction primitive et dépasse encore* 4 *fois* B. *Ils s'arrêtent tous les deux à la* 10^{me} *rencontre. La durée de l'épreuve a été de* 3 *heures et* A *a parcouru* 8 *kilomètres de plus que B. Déterminer les vitesses respectives des deux écoliers sachant d'ailleurs que* A *a réduit sa vitesse de* 1 *kilomètre pendant les deux dernières heures de course et que la vitesse de* B *a été également réduite de* 1 *kilomètre pendant la dernière heure.*

x = nombre de kilomètres parcourus par A pendant la première heure de course

$y =$ nombre de kilomètres parcourus par B pendant la première heure de course.

Distance parcourue par A en 3 heures

$$x + 2(x - 1) = 3x - 2,$$

Distance parcourue par B en 3 heures

$$2y + y - 1 = 3y - 1.$$

$$3x - 2 - 3y + 1 = 8, \qquad \text{ou} \qquad x - y = 3.$$

A gagne un tour sur B en $\frac{1}{3}$ d'heure. A rencontre donc B pour la troisième fois à la fin de la première heure.

Pendant la dernière heure de course la différence des vitesses est égale à 3 comme dans la première heure, et puisque A rencontre B pour la dixième fois à la fin de la troisième heure, nous en concluons que les 4 dernières rencontres se sont faites pendant la dernière heure ; la première de ces 4 rencontres ayant lieu exactement au commencement de la troisième heure ou à la fin de la seconde heure.

Les rencontres 4, 5, 6 ont eu lieu pendant la deuxième heure de course.

Or 12 minutes après la troisième rencontre, la distance entre A et B est égale à

$$\frac{x - y - 1}{5} = \frac{2}{5} \text{ de kilomètre.}$$

La quatrième rencontre aura donc lieu au bout d'un temps marqué par :

$$\frac{2}{5} : (x + y - 1) = \frac{2}{5(x + y - 1)},$$

La cinquième rencontre au bout d'un temps représenté par

$$\frac{1}{x + y - 1},$$

La sixième rencontre demande le même temps $\frac{1}{x+y-1}$.

6 minutes après cette rencontre la distance entre A et B est égale à $\frac{x+y-1}{10}$.

A change alors de direction et la septième rencontre a lieu au bout d'un temps représenté par

$$\frac{x+y-1}{10} : (x-1-y) \qquad \text{ou} \qquad \frac{x+y-1}{20}.$$

Cette rencontre ayant lieu exactement à la fin de la seconde heure, on a :

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5(x+y-1)}+\frac{2}{x+y-1}+\frac{1}{10}+\frac{x+y-1}{20}=1,$$

ou

$$(x+y)^2-16(x+y)+63=0$$

d'où

$$x+y=9 \text{ ou } 7 \qquad x=6 \text{ ou } 5 \qquad y=3 \text{ ou } 2.$$

71. *Quatre mobiles* A, B, C, D, *se déplacent d'une façon uniforme et avec des vitesses en progression géométrique sur* 4 *droites parallèles équidistantes dont les extrémités sont situées sur* 2 *autres droites parallèles. Ils partent en même temps des extrémités situées sur une même droite, et quand ils arrivent à l'autre extrémité ils reviennent et ainsi de suite d'une façon continue.*

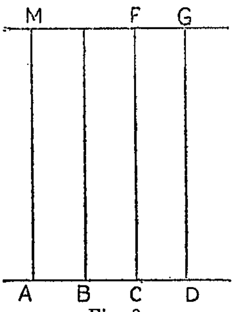

Fig. 8.

Au bout d'un certain temps, les 3 *mobiles* B, C, D *sont en ligne droite pour la première fois; au bout d'un temps double* A, B, C *sont en ligne droite pour la première fois;* 36 *secondes après* A, C, D *sont en ligne droite pour la seconde fois, et l'espace qui a été parcouru par* B *surpasse de*

14 centimètres celui parcouru par A, quand les 4 mobiles se retrouvent en ligne droite.

Déterminer les vitesses des 4 mobiles.

Soient x, rx, r^2x et r^3x les vitesses de A, B, C, D en centimètres et par seconde. y la longueur commune des 4 droites.

Le fait que B, C, D, sont en ligne droite avant les 3 mobiles A, B, C montre que les vitesses de A, B, C et D vont en croissant, et il est visible alors que B, C et D seront en ligne droite pour la première fois quand B et C se déplacent encore dans le sens AM, tandis que D est à son premier retour.

Soit t le temps en secondes qui s'est écoulé depuis le départ jusqu'au moment où B, C, D sont en ligne droite.

Les distances des 3 mobiles aux points de départ sont respectivement

$$t.r.x, \qquad tr^2x \qquad \text{et} \qquad 2y - tr^3x$$

et on a

$$tr^2x - t.r.x = (2y - t.r^3x) - tr^2x$$

ou

$$(1) \qquad t.x.r(r^2 + 2r - 1) = 2y.$$

Pour trouver quand A, B, C sont en ligne droite, il suffit de changer x en $\frac{x}{r}$, il vient alors

$$(2) \qquad 2t.x(r^2 + 2r - 1) = 2y$$

De ces deux équations on déduit $r = 2$, c'est-à-dire que les vitesses de A, B, C, D sont respectivement :

$$x,\ 2x,\ 4x \quad \text{et} \quad 8x.$$

Les vitesses de A, C, D étant proportionnelles à 1, 4, et 8, on voit sans difficulté que ces 3 mobiles se trouvent une seconde fois en ligne droite quand C est sur son premier retour de F et que D se dirige pour la seconde fois vers G.

Soit t_1 le temps en secondes qui s'est écoulé depuis le départ jusqu'à cette position des 3 mobiles A, C, D. Les distances de ces 3 mobiles aux points de départ sont :

$$t_1 x \qquad 2y - t_1.4x \qquad \text{et} \qquad t_1.8x - 2y.$$

On a :

$$(2y - t_1.4x) - t_1 x = 2\{(t_1.8x - 2y) - (2y - t_1.4x)\}$$

d'où

$$t_1 = \frac{10y}{29.x}.$$

Mais

$$t_1 = 2t + 36$$

et (1) donne

$$t = \frac{y}{7x}$$

donc

$$\frac{10y}{29x} = \frac{2y}{7x} + 36. \tag{3}$$

Enfin, d'après les rapports des vitesses A, B, C et D, on voit que ces 4 mobiles seront de nouveau en ligne droite quand A aura parcouru $\frac{2y}{3}$. Par snite

$$\frac{2y}{3} + 14 = \frac{10y}{29.x}\,2x\,;$$

$$y = 609 \qquad x = 1$$

et les vitesses cherchées sont respectivement

$$1^{cm},\ 2^{cm},\ 4^{cm} \quad \text{et} \quad 8^{cm}.$$

72. *Un instituteur dispose en cercle un certain nombre d'élèves et leur distribue des billes en marchant en sens inverse des aiguilles d'une*

montre et de façon que chaque enfant reçoive une bille de plus que son voisin de gauche. Revenu à l'élève servi le premier et qui, par conséquent, possède le plus petit nombre de billes, il invite le voisin de gauche qui possède le plus grand nombre de billes, à en donner 1 à son voisin de gauche, celui-ci à donner à son voisin de gauche 2 billes, ce dernier à remettre à son voisin de gauche 3 billes et ainsi de suite. Cette nouvelle distribution qui se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, se continue aussi longtemps que possible. Au moment où l'opération ne peut plus être continuée dans les conditions indiquées, il se trouve que les nombres des billes possédées par le premier et le dernier élèves sont tels que l'un de ces nombres vaut 4 fois l'autre; trouver d'après cela le nombre des élèves, le nombre des billes remis au premier enfant et le nombre total des billes.

Soit x le nombre des enfants.

Si y représente le nombre de billes remis au premier enfant, son voisin de gauche ou le x^{me} enfant en recevra

$$x + y - 1.$$

D'après les conditions du problème, le x^{me} enfant donne 1 bille au $(x - 1)^{me}$, celui-ci en donne 2 au $(x - 2)^{me}$, et ainsi de suite, de sorte qu'après un tour complet, il y a x billes en circulation et chaque enfant se trouve avoir 1 bille de moins.

Au bout de y tours, le premier enfant n'a plus rien, mais il vient de passer yx billes au x^{me} enfant, le deuxième enfant n'a plus qu'une bille, mais il vient d'en passer $xy - 1$ au premier, et ainsi de suite.

En continuant le mouvement de distribution, le x^{me} enfant donne $(xy + 1)$ billes au $(x - 1)^{me}$, il lui en reste donc

$$(y + x - 1) - y + x.y - (xy + 1) = x - 2.$$

Le $(x - 1)^{me}$ enfant donne $(x.y + 2)$ billes au $(x - 2)^{me}$, et ainsi de suite jusqu'au second qui en reçoit $x.y + x - 2$ et en passe $x.y + x - 1$ au premier.

Or, celui-ci n'a plus rien, il ne peut donc en passer $xy + x$ à son voisin et le jeu cesse.

On a donc alors, ou

$$4(x.y + x - 1) = x - 2.$$

ou

$$x.y + x - 1 = 4(x - 2).$$

La première relation ne conduit à aucune solution entière.

De la seconde on déduit

$$y = 3 - \frac{7}{x}$$

d'où

$$x = 7,$$

alors

$$y = 3 - 1 = 2$$

Il y avait donc 7 enfants, le premier a reçu 2 billes, le dernier 8 et l'instituteur en a distribué 35.

73. *Un groupe de* 50000 *électeurs doit nommer un membre d'une Assemblée. L'élection est à deux degrés : ces* 50 000 *votants sont divisés en sections comprenant chacune le même nombre d'électeurs; chaque section désigne un de ses membres et c'est le vote des membres ainsi choisis qui décide du choix du mandataire chargé de représenter les* 50000 *votants.*

Deux candidats A *et* B *sont en présence; dans les sections qui désignent des membres favorables à* A, *la majorité représente le double de la minorité; tandis que dans les sections qui désignent des membres favorables à* B, *la minorité ne forme que le* $\frac{1}{10}$ *de l'ensemble.*

Il y a ballottage. Un troisième candidat C *surgit, il est accepté et élu par un nombre de votes surpassant de* 3 *celui attribué à* A *et de* 14 *celui attribué à B.*

Si C *ne s'était pas présenté* A, *aurait été élu, mais sa majorité n'aurait surpassé que de* 19 *le nombre actuel des votes attribués à* C. *Si les* 50 000 *électeurs avaient voté directement pour* A *et* B, B *aurait eu une majorité de* 6 000 *voix.*

Trouver le nombre des sections?

Soit x le nombre des sections = le nombre des électeurs appelés à voter directement pour A et B.

$\frac{50\,000}{x}$ = le nombre des votants dans chaque section.

Soit y le nombre des sections favorables à A, le nombre des sections en faveur de B sera $x - y$.

Le nombre des votants dans les sections favorables à A $= \frac{50\,000}{x} \times y$ et d'après l'énoncé, ces sections comptent

$$y \times \frac{100\,000}{3x} \quad \text{votes pour A} \quad \text{et} \quad \frac{y \times 50\,000}{3x} \text{ votes pour B.}$$

Dans les sections favorables à B, le nombre des votants

$$= (x - y)\,\frac{50\,000}{x}$$

et il y a dans ces sections

$$(x - y)\,\frac{45\,000}{x}$$

votes pour B. et

$$(x - y)\,\frac{5\,000}{x}$$

votes pour A.

Soit enfin z le nombre des électeurs directs ayant voté pour C. On a

$$z + (z - 3) + (z - 14) = x, \qquad y - (x - y) = z - 19$$

et

$$y \times \frac{100\,000}{3x} + (x-y)\frac{5\,000}{x} = y \times \frac{50\,000}{3x} + (x-y)\frac{45\,000}{x} - 6\,000$$

On en déduit

$$x = 100, \qquad y = 60 \qquad \text{et} \qquad z = 39.$$

74. *Un régiment marche à la cadence de 120 pas par minute; on demande quels sont les soldats qui poseront le pied droit sur le sol en même temps que la musique.*

Même problème en changeant la cadence.

(Lucien Lévy. — *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1894, p. 210) (¹).

Suivant une observation de Catalan, il est nécessaire de spécifier la donnée numérique relative à la vitesse du son. En admettant, pour cette vitesse, 330 mètres par seconde, on voit que si la troupe formée en colonne, musique en tête, suit une route rectiligne, à la cadence de 120 pas par minute, c'est-à-dire d'un double pas par seconde, les hommes — marchant ou simplement marquant le pas — poseront le pied droit, par exemple, à chaque seconde, et le pied

(¹) Nous reproduisons la solution donnée par M. H. Brocard avec la note suivante du journal.

En nous adressant cette solution, M. Brocard nous informe que lui-même a proposé cette question à des élèves du cours de physique dès 1877, puis en 1885 et en 1888, et qu'il a fait mention de la même observation dans la deuxième édition de son cours lithographié à Versailles en 1879-80 (§ 58).

Voici comment l'énoncé est formulé :

« Dans une *colonne* de troupes en marche à la cadence de 120 pas par minute, à quelles distances sont répartis les hommes se trouvant au même pas que la musique. On prendra $\frac{1\,000^{m}}{3}$ pour la *vitesse du son.* » (10 janvier 1885).

Au § 8 de mon cours lithographié de 1880, je disais ceci : « Dans une colonne de troupes marchant à la cadence de la musique, les hommes qui gauche une-demi seconde après. A la cadence désignée ci-dessus, les hommes placés à des distances représentées par des multiples entiers de 330 mètres seront, pour un observateur de l'ensemble, au même pas que la musique. Si celle-ci vient à cesser de jouer, les hommes placés aux distances de 330 mètres, 660 mètres..., feront encore un, deux..., doubles pas. Le mouvement de marche — exécuté ou simulé — présentera donc l'aspect de pendules identiques échelonnés, battant la même durée, à la même phase de leur oscillation à tous les intervalles de 330 mètres et arrivant progressivement à leur point le plus bas.

La physionomie de ce mouvement mériterait, croyons-nous d'être étudiée au kinétographe.

Les développements ci-dessus exposés font voir que la longueur du pas, si elle était indiquée, serait une donnée étrangère à la question. La véritable donnée utile n'est donc point la longueur du pas, mais sa vitesse.

Un changement de cadence revient donc à dire que les hommes feraient le double pas en N secondes. Mais, en N secondes, le son parcourt 330 N mètres. Les hommes placés aux distances multiples de 330 N seront donc au même pas que les musiciens.

occupent les extrémités de la colonne ne se trouvent point au même pas. C'est ce que l'on peut aisément observer lorsque la colonne a une centaine de mètres de longueur ».

Le 13 décembre 1888, j'ai donné aux élèves la question suivante (je copie textuellement) :

« Dans une colonne de troupes en marche, à la cadence de 120 pas par minute, à quelles distances se trouvent : 1° les hommes qui posent le pied gauche au même instant que les musiciens ; 2° ceux qui posent le pied gauche pendant que les musiciens posent le pied droit ?

« Quelle physionomie doit présenter la cadence du pas sur la profondeur de la colonne ?

« On admettra pour vitesse du son 1 kilomètre par 3 secondes et pour longueur du pas $0^{m},66$. »

Récemment, d'ailleurs, le même problème a été proposé dans les *Tablettes du Chercheur* (1er mars 1894).

Afin de rester dans les limites de la pratique, il conviendra de réduire à quelques unités seulement les modifications à proposer pour la cadence.

Soit, pour fixer les idées, une vitesse de 130 pas par minute.

Le double pas est alors de $0^s,923$ de durée. Par conséquent les hommes posant le même pied que les musiciens seront à la distance que le son franchira en $0^s,924$, c'est-à-dire à $304^m,59$ et aux multiples entiers de cette distance.

Remarque. — Ce problème peut s'énoncer d'une autre manière :

A quelle distance se trouvent les auditeurs d'un orchestre jouant sur un rythme *uniforme*, pour que les sons de la musique semblent correspondre aux mesures marquées par le chef d'orchestre ?

En réalité l'occasion, est rare de pouvoir observer avec facilité sur une colonne suffisamment longue de troupes, le serpentement dont il vient d'être parlé ci-dessus, mais il est assez fréquemment donné de constater que, vu à certaines distances, un groupe de musiciens en marche est à un pas différent de celui qui correspond aux sons qui parviennent à l'oreille du spectateur, pour ensuite, à d'autres distances, se retrouver au même pas.

75. *Disposer les neuf premiers nombres entiers aux sommets et sur les côtés d'un triangle, de telle sorte que la somme des carrés des 4 nombres placés sur un côté soit constante, quelque soit le côté considéré.*

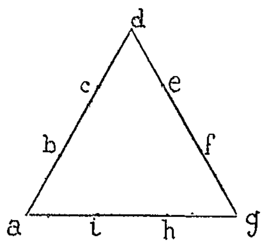

Fig. 9.

En représentant par a, b, c, d, e, f, g, h et i les neuf premiers nombres disposés sur le périmètre d'un triangle et aux sommets, de manière à remplir les conditions de l'énoncé, on a, par hypothèse :

$$(1)\qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= S \\ d^2 + e^2 + f^2 + g^2 &= S \\ g^2 + h^2 + i^2 + a^2 &= S \end{aligned}$$

S représentant la somme constante inconnue.

Additionnant membre à membre, ces 3 égalités, il vient :

$$a^2 + d^2 + g^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2) = 3\,\mathrm{S}$$

Or, la quantité entre parenthèses égale $\dfrac{9(9+1)(2\times 9+1)}{6} = 285$

donc

$$a^2 + d^2 + g^2 = 3(\mathrm{S} - 95).$$

Il résulte de là que la somme des carrés des 3 nombres placés aux sommets du triangle doit être divisible par 3, et que, par conséquent, ces carrés sont de la forme

$$\text{mult. de } 3 \qquad \text{ou} \qquad \text{mult. de } 3 + 1.$$

Les seules hypothèses que l'on puisse faire sur les nombres a, d, g sont donc

$$a = 3 \qquad d = 6 \qquad g = 9$$

ou

$$a = 1 \qquad d = 4 \qquad g = 7$$

ou

$$a = 2 \qquad d = 5 \qquad g = 8$$

La première hypothèse n'est pas admissible.

On en déduit, en effet

$$a^2 + d^2 + g^2 = 126 = 3\,(\mathrm{S} - 95)$$

d'où

$$\mathrm{S} = 137.$$

La première des égalités (1) devient alors

$$b^2 + c^2 = \mathrm{S} - (a^2 + d^2) = 92$$

d'où

$$(b + c)^2 = 92 - 2\,bc$$

et

$$(b+c)^2 = \text{multiple de } 4.$$

La somme $b+c$ étant paire, b et c seraient de même parité ; or, en combinant de toutes les manières possibles, les nombres pairs 2, 4, 8, ou les nombres impairs 1, 5, 7, on ne peut obtenir pour somme des carrés de deux quelconques d'entre eux, le nombre 92.

La deuxième hypothèse est également à écarter, car elle nous donne

$$a^2 + d^2 + g^2 = 66 = 3\,(S - 95)$$

d'où

$$S = 117.$$

La première des égalités (1) devient alors

$$b^2 + c^2 = S - (a^2 + d^2) = 120,$$

ou encore

$$(b+c)^2 = \text{mult. de } 4.$$

b et c sont de même parité, mais la somme des carrés de deux quelconques des nombres entiers 3, 5, 9 ne peut égaler 120, et il en est de même de la somme des carrés de deux quelconques des nombres pairs 2, 6 ou 8. Il nous reste donc les valeurs

$$a = 2 \qquad d = 5 \qquad \text{et} \qquad g = 8.$$

On en déduit

$$3(S - 95) = 93 \qquad \text{et} \qquad S = 126$$

Par suite

$$b^2 + c^2 = 97$$
$$e^2 + f^2 = 37$$
$$h^2 + i^2 = 58.$$

D'ailleurs, les 6 nombres qui restent 1, 3, 4, 6, 7 et 9 sont tous de la forme multiple de 3 ou multiple de 3 + 1 ; leurs carrés sont, par suite, de l'une des formes, multiple 3 ou multiple 3 + 1, et comme la somme S est divisible par 3, il en résulte, puisque $a^2 = 4$ et $d^2 = 25$, que l'un des carrés b^2, c^2 est de la forme multiple de $3 + 1$, et l'autre de la forme multiple de 3.

La même observation s'applique aux carrés e^2, f^2 et h^2, i^2.

De plus, la somme $b^2 + c^2$ étant impaire, l'un de ces deux nombres est pair et l'autre impair. On ne peut donc avoir que :

$$b = 1 \text{ ou } 7, \qquad 3 \text{ ou } 9, \qquad 4, \qquad 6$$

avec

$$c = 6, \qquad 4, \qquad 3 \text{ ou } 9, \qquad 7 \text{ ou } 1$$

et l'examen de ces diverses hypothèses nous montre que l'on a :

$$b = 9 \quad \text{avec} \quad c = 4 \qquad \text{ou} \qquad b = 4 \quad \text{avec} \quad c = 9$$

Les mêmes essais faits pour e^2, f^2 avec les nombres qui restent 1, 3, 6 et 7, nous donnent

$$e = 1 \quad \text{avec} \quad f = 6$$

ou

$$e = 6 \quad \text{avec} \quad f = 1.$$

Enfin

$$i = 3 \quad \text{avec} \quad h = 7$$

ou

$$i = 7 \quad \text{avec} \quad h = 3.$$

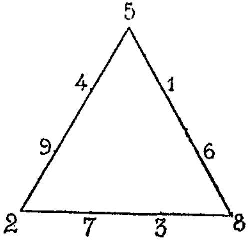

Fig. 10.

La question admet donc la solution indiquée par la figure ci-contre.

Il faut remarquer que l'on a, en même temps

$$a + b + c + d = d + e + f + g$$
$$= g + h + i + a = 20.$$

On peut considérer comme une généralisation de la question qui précède la récréation suivante exposée par Laquière au Congrès de l'*Association française* de Rouen (1880).

Placer un certain nombre des entiers naturels consécutifs aux points d'intersection d'une série de circonférences concentriques avec une série de diamètres, ainsi qu'au centre, de telle sorte que la somme des termes contenus soit sur une même circonférence, soit sur un même diamètre, reste toujours la même.

Soit n le nombre des couronnes ; m celui des diamètres, z le nombre central, Σ la somme totale des termes, s la somme constante des termes d'une couronne ou d'un diamètre ; le nombre des termes sera : $2mn + 1$, et l'on aura :

$$\Sigma = (2\,m.n + 1)\,(m.n + 1) = n.s + z = m.s - (m - 1)\,z$$

relations qui déterminent s et z dans chaque cas particulier défini par les valeurs de m et de n.

On en tire :

$$\frac{s}{z} = \frac{m}{m - n}.$$

Le nombre m des diamètres doit donc être toujours supérieur au nombre n des couronnes si la série des entiers commence à l'unité, et toutefois exceptionnellement en nombre égal si l'on fait entrer le zéro, placé dès lors au centre, dans la série des nombres entiers naturels.

Les expressions de z et de s en fonction de m et n sont :

$$\frac{\Sigma}{mn + m - n} = \frac{s}{m} = \frac{z}{m - n} = \frac{(2mn + 1)\,(m.n + 1)}{mn + m - n}.$$

Il en résulte, en dehors de la solution $z = 0$, que pour que le problème admette une solution, chacun des deux produits :

$$(2m.n + 1)\,(m.n + 1)$$

et

$$(2m.n + 1)\,(m.n + 1)\,(m - n)$$

doit être divisible par :

$$m.n + m - n$$

double condition qui détermine les règles de possibilité du problème sur lesquelles nous reviendrons tout à l'heure.

Premier cas. — $m = n$.

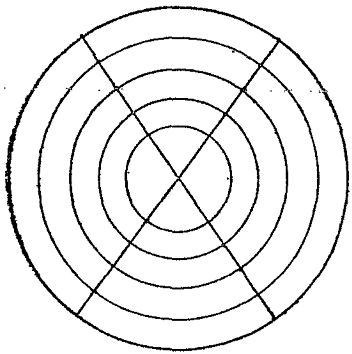

Fig. 11.

Il en résulte $z = 0$. Le zéro étant placé au centre, on obtiendra une solution immédiate ~~et évidente en jumelant deux~~ à deux les nombres à égale distance des extrêmes dans la progression arithmétique des $2m.n$ nombres entiers de 1 à $2m.n$, tels que k et $2m.n - k$, et plaçant indifféremment à une case libre quelconque l'un des nombres de chaque groupe binôme et à la case diamétralement symétrique son complément.

Il y a donc :

$$2^{mn}\,(mn)\,!$$

solutions du problème.

2^e cas. — $m = n + 1$.

Il vient

$$z = 2m.n + 1.$$

Le nombre central est alors le plus fort de tous, et l'on obtiendra comme ci-dessus $2^{mn}(mn)!$ solutions en plaçant successivement dans un ordre absolument arbitraire tous les groupes de termes dont la somme est égale au nombre central, les deux termes du groupe occupant les deux cases symétriques par rapport au centre.

Le nombre central z joue dans chaque somme diamétrale le rôle des deux nombres placés aux points d'intersection de ce diamètre avec chacune des circonférences.

Cette observation nous amène à remarquer que dans toute solution la moyenne des sommes des nombres symétriquement placés sera toujours forcément égale au nombre central.

Soit $m = n + \mu$ et g la moyenne des sommes formées dans chaque groupe de nombres symétriques deux à deux par rapport au centre, $\left(\text{d'où } g = \frac{\Sigma - z}{m.n}\right)$ il faudra que le nombre central z remplace dans chaque diamètre μ doubles intersections diamétrales pour que s soit la même dans les diamètres et les couronnes ; donc

$$z = \mu.g = \mu.\frac{\Sigma - z}{m.n}.$$

Conséquemment :

$$(mn + 1)\,z = \mu\Sigma$$

ou bien, d'après les équations de condition :

$$\frac{\Sigma}{z} = \frac{\mu}{m.n + 1} = \frac{m - n}{m.n + m - n}.$$

Or

$$m - n = \mu\,; \quad \text{donc} \quad \mu = 1,$$

Conclusion. — Le problème n'est possible qu'avec un nombre m de diamètres égal à celui des couronnes, ou supérieur d'une unité seulement à ce dernier nombre n. Le chiffre central sera dans le premier cas zéro, dans le second le plus fort des nombres de la série.

On aura ainsi :

$$\begin{aligned}
n &= \text{nombre des couronnes},\\
m &= n + 1 \text{ nombre des diamètres},\\
z &= 2n^2 + 2n + 1 = n^2 + m^2 \text{ nombre central}.\\
s &= m.z = (n + 1)\left[n^2 + (n + 1)^2\right] = (n + 1)^3 + n^3 + n^2\\
\Sigma &= \left[n(n + 1) + 1\right]z = 2\,(n^2 + n + 1)^2 - (n^2 + n + 1),
\end{aligned}$$

les nombres de 1 à $m.n$ étant indifféremment distribués sous la seule condition, après avoir placé arbitrairement l'un d'eux, de mettre le complémentaire à z sur la case symétrique.

Dans ces conditions les valeurs de s et z sont toujours entières, ce sont celles qu'entraîne la double équation de possibilité signalée plus haut, c'est-à-dire que :

$$(2m.n + 1)(m.n + 1)\,m \quad \text{et} \quad (2m.n + 1)(m.n + 1).n$$

soient séparément divisibles par :

$$m.n + m - n = n^2 + n\mu + \mu.$$

En effectuant la division par le dénominateur des deux facteurs communs des numérateurs :

$$(2n^2 + 2n.\mu + 1)(n^2 + n.\mu + 1)$$

on voit que cette divisibilité est ramenée à celle de :

$$(2\mu - 1)(\mu - 1)\,\mu \quad , \quad (2\mu - 1)(\mu - 1)\,m,$$
$$(2\mu - 1)(\mu - 1)\,n$$

par

$$n^2 + n.\mu + \mu,$$

qui est vérifiée par

$$\mu = 0,\ \mu = \frac{1}{2},\ \mu = 1.$$

76. *Combien faudrait-il de caractères pour imprimer une table de multiplication étendue jusqu'à* $N \times N$? *en particulier jusqu'à* $(10^p - 1) \times (10^p - 1)$? (1)

Soit n le nombre des chiffres du carré N^2. Considérons les nombres

$$A = 10^{n-1} - 1\ ;\ B = 10^{n-2} - 1\ ;\ C = 10^{n-3};\ \ldots,\ 999\ ;\ 99\ ;\ 9,$$

ainsi que les plus grands carrés contenus dans ces nombres

$$a^2 \quad , \quad b^2 \quad , \quad c^2, \ldots, \quad 31^2 \quad , \quad 9^2 \quad , \quad 3^2$$

(1) Cette question a été proposée sous le n° 183, par H. Dellac, dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (t. I, p. 95).

Elle est également posée, pour N = 100, dans les *Tablettes du Chercheur* sous le n° 999 (1893, p. 192) et résolue dans le même recueil (1893, désignons par s la somme de ces carrés

$$s = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + 31^2 + 9^2 + 3^2,$$

et appelons P_N le nombre demandé des caractères d'imprimerie nécessaires pour imprimer une table de multiplication étendue jusqu'à $N \times N$; on trouve la formule suivante où la lettre E indique, comme d'habitude, la partie entière de la fraction devant laquelle elle est écrite.

$$P_N = n.N^2 - s$$

$$-2\left[\sum_{K=a+1}^{K=N} E\left(\frac{A}{K}\right) + \sum_{K=b+1}^{K=N} E\left(\frac{B}{K}\right) + \ldots + \sum_{K=10}^{K=N} E\left(\frac{99}{K}\right) + \sum_{K=4}^{K=N} E\left(\frac{9}{K}\right)\right]$$

On démontre cette formule en constatant qu'elle est exacte pour les faibles valeurs de N et en faisant voir qu'elle est vraie pour N si elle l'est pour N — 1. Pour ce dernier objet il y a deux cas à distinguer.

1° $(N-1)^2$ et N^2 ont le même nombre de chiffres.

Si l'on écrit les deux formules pour N et N — 1, en observant qu'alors n est le même, ainsi que A, B, C ... et, par suite, la somme s, on a

$$P_N = nN^2 - s - 2\left[\sum_{K=a+1}^{K=N} E\left(\frac{A}{K}\right) + \sum_{K=b+1}^{K=N} E\left(\frac{B}{K}\right) + \ldots\right].$$

$$P_{N-1} = n.\,(N-1)^2 - s$$

$$-2\left[\sum_{K=a+1}^{K=N-1} E\left(\frac{A}{K}\right) + \sum_{K=b+1}^{K=N-1} E\left(\frac{B}{K}\right) + \ldots\right]$$

p. 233), par une analyse assez ingénieuse. L'auteur de la solution qui signe *Un vieil X*, trouve comme résultat 36296.

La solution que nous donnons est due à C. MOREAU (*Intermédiaire des Mathématiciens*, t. II, 1895, p. 341-343).

d'où, en faisant la différence,

$$P_N - P_{N-1} = n(2N - 1) - 2\left[E\left(\frac{A}{N}\right) + E\left(\frac{B}{N}\right) + E\left(\frac{C}{N}\right) + \dots\right]$$

2° $(N-1)^2$ a un chiffre de moins que N^2, c'est-à-dire $n-1$. Les formules donnant p_N et P_{N-1} s'écriront :

$$P_N = nN^2 - s$$
$$-2\left[E\left(\frac{A}{N}\right) + \sum_{K=b+1}^{K=N} E\left(\frac{B}{K}\right) + \sum_{K=c+1}^{K=N} E\left(\frac{C}{K}\right) + \dots\right],$$
$$P_{N-1} = (n-1)(N-1)^2 - \left[s - (N-1)^2\right]$$
$$-2\left[\sum_{K=b+1}^{K=N-1} E\left(\frac{B}{K}\right) + \sum_{K=c+1}^{K=N-1} E\left(\frac{C}{K}\right) + \dots\right].$$

Dans la première de ces formules, le premier terme de la quantité entre crochets se réduit à $E\left(\frac{A}{N}\right)$, car il est clair que, dans ce cas, a est égal à $N-1$; dans la seconde formule, le nombre A ne doit évidemment pas intervenir ni, par conséquent. le carré $a^2 = (N-1)^2$ qui alors doit être retranché de la somme s. En faisant la différence de ces valeurs de P_N et de P_{N-1}, on trouve, comme dans l'autre cas,

$$P_N - P_{N-1} = n(2N-1) - 2\left[E\left(\frac{A}{N}\right) + E\left(\frac{B}{N}\right) + E\left(\frac{C}{N}\right) + \dots\right].$$

Cela posé si l'on se reporte par la pensée aux tables de multiplication étendues jusqu'à $(N-1)(N-1)$ et jusqu'à $N \times N$, il est visible que la différence entre ces deux tables est constituée par les nombres qui se trouvent dans la dernière rangée et dans la dernière colonne de la table relative à N et que la différence entre P_N et

P_{N-1}, est égale au nombre total des chiffres de ces $2N-1$ nombres ; or, le plus grand d'entre eux N^2, a n chiffres et les autres, qui sont égaux deux à deux, sont les $N-1$ premiers multiples de N : on peut donc écrire

$$P_N - P_{N-1} = n(2N-1) - 2(R_1 + 2R_2 + 3R_3 + \ldots)$$

R_i représentant combien il y a de multiples de N qui ont i chiffres de moins que N^2. Mais, d'après la définition des nombres A, B, C... on reconnait facilement que l'on a

$$R_1 = E\left(\frac{A}{N}\right) - E\left(\frac{B}{N}\right), \quad R_2 = E\left(\frac{B}{N}\right) - E\left(\frac{C}{N}\right),$$
$$R_3 = E\left(\frac{C}{N}\right) - E\left(\frac{D}{N}\right); \ldots$$

il vient alors

$$P_N - P_{N-1} = n(2N-1) -$$
$$2\left\{\begin{array}{c}\left[E\left(\frac{A}{N}\right) - E\left(\frac{B}{N}\right)\right] + 2\left[E\left(\frac{B}{N}\right) - E\left(\frac{C}{N}\right)\right] \\ + 3\left[E\left(\frac{C}{N}\right) - E\left(\frac{D}{N}\right)\right] + \ldots + hE\left(\frac{M}{N}\right)\end{array}\right\}$$

ou, en réduisant,

$$P_N - P_{N-1} = n(2N-1) - 2\left[E\left(\frac{A}{N}\right) + E\left(\frac{B}{N}\right) + E\left(\frac{C}{N}\right) + \ldots\right],$$

expression identique à celle qui a été trouvée précédemment au moyen de la formule que l'on se proposait de démontrer et qui est ainsi établie d'une manière générale.

Remarque. — Pour le cas particulier de $N = 10$, on a :

$$P_{10} = 3.100 - 90 - 2\left[\sum_{K=10}^{K=10} E\left(\frac{99}{K}\right) + \sum_{K=4}^{K=10} E\left(\frac{9}{K}\right)\right] = 178.$$

Pour $N = 100$, on trouve

$$P_{100} = 5.100^2 - (99^2 + 31^2 + 9^2 + 3^2) -$$

$$2\left[\sum_{K=100}^{K=100} E\left(\frac{9999}{K}\right) + \sum_{K=33}^{K=100} E\left(\frac{999}{K}\right) + \sum_{K=10}^{K=100} E\left(\frac{99}{K}\right) + \sum_{K=4}^{K=100} E\left(\frac{9}{K}\right)\right] = 36296$$

QUELQUES QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE

Au début du chapitre premier nous faisions allusion à l'intérêt tout spécial, à l'attrait, que les mathématiques trouvent dans l'étude de certains théorèmes d'arithmétique dont voici un exemple en passant :

Tout nombre premier de la forme $4n + 1$, peut, ainsi que ses puissances, être décomposé en une somme de deux carrés (1) *et la décomposition de la première et de la seconde puissances ne peut se faire que d'une seule manière.*

Ainsi

$$13 = 3^2 + 2^2,\ 13^2 = 12^2 + 5^2,\ 13^3 = 46^2 + 9^2\,;$$

de même

$$41 = 5^2 + 4^2,\ 41^2 = 40^2 + 9^2,\ 41^3 = 236^2 + 115^2,$$

et ainsi de suite.

Les propositions de cette nature sont traitées dans les ouvrages spéciaux sur la théorie des nombres et par conséquent, sortent de notre programme, mais il existe une ou deux questions d'arithmé-

(1) FERMAT. — *Diophante*, Toulouse, 1670, livre III, prop. 22, p. 127 ; ou *Précis* de Brassinne, Paris, 1853, p. 65.

tique supérieure présentant encore quelques points obscurs et dont nous croyons devoir dire quelques mots.

Nombres premiers. — La première de ces questions est relative à la possibilité de déterminer rapidement si un nombre donné est premier ou non. Euler et Gauss attachaient une grande importance à ce problème, mais ils échouèrent dans les tentatives faites pour trouver une méthode d'essai conduisant à un résultat absolument certain. Il paraitrait cependant que Fermat possédait des procédés lui permettant d'assurer, d'après sa composition, si un nombre donné (ou tout au moins un nombre appartenant à de certaines formes déterminées), était premier ou non. C'est ainsi que dans une réponse à Mersenne qui lui demandait s'il pouvait lui dire, sans y consacrer trop de temps, si le nombre 100895598169 était premier, Fermat écrivait, le 7 avril 1643, que ce nombre était le produit des deux suivants 898423, 112303, tous les deux premiers. Nous avons signalé dans une autre publication une méthode permettant d'obtenir ce résultat, et M. F. W. Laurence en a fait connaître une autre qui peut avoir été celle employée par Fermat dans le cas particulier visé.

Nombres de Mersenne (¹). — Une autre preuve venant à l'appui de cette assertion que Fermat (ou quelques-uns de ses contemporains) disposait d'une méthode lui permettant de reconnaître si certains nombres étaient premiers ou non, résulte d'un passage des *Cogitata Physico-mathematica* de Mersenne qui furent publiés en 1644. On lit dans la préface de cet ouvrage que le nombre $2^p - 1$ est premier pour les seules valeurs suivantes de p non supérieures à 257 : 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 21, 31, 67, 127, et 257. Le nombre 67 a probablement été écrit par erreur pour 61. Avec cette correction, la proposition paraît être exacte et elle a été vérifiée pour toutes les valeurs de p à l'exception de dix-neuf qui sont : 71, 101, 103,

(¹) Pour les références voir le chapitre.

107, 109, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 199, 227, 229, 241, 257. Daprès Mersenne, parmi toutes ces valeurs, $p = 257$ donne seule pour $2^p - 1$ un nombre premier ; pour les autres $2^p - 1$ est un nombre composé.

Les démonstrations pour les cas $p = 89$, et $p = 127$ n'ont pas encore été publiées. Les facteurs de $2^p - 1$ quand $p = 89$ ne sont même pas connus et leur recherche présenterait peut être de l'intérêt à ceux qui s'occupent de la théorie des nombres.

Le résultat auquel est arrivé Mersenne ne peut s'obtenir d'une façon empirique et il est inadmissible qu'il ait étudié chaque cas en particulier d'où cette conclusion que celui qui le premier a mis en évidence cette propriété, que ce soit Mersenne ou un autre, devait connaître certains théorèmes d'arithmétique supérieure qui n'ont pas été retrouvés jusqu'ici.

Théorème de Goldbach. — Ce problème intéressant d'arithmétique supérieure s'énonce ainsi :

Tout nombre pair 2n est la somme de deux nombres premiers.

On trouve cette question posée par Waring dans ses *Meditationes analyticæ* (1). Elle est mentionnée pour la première fois, croyons-

(1) D'après Terquem, ce théorème empirique généralement attribué à Goldbach, semblerait dû à Waring. Voici en effet, ce qu'il écrivait dans son *Bulletin* de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques, 1859, p. 2.

On lit dans la 3e édition (1782) des *Meditationes analyticæ*, au haut de la page 379 :

Omnis par numerus constat a duobus primis numeris et omnis impar numerus vel est primus, numerus, vel constat è tribusprimis numeris.

Il est évident que si un nombre pair est la somme de deux nombres premiers, tout nombre impair, premier ou non, est la somme de trois nombres premiers.

Ainsi, ce théorème, d'un énoncé si simple et dont la démonstration est bien plus difficile que celle du théorème de Fermat, appartient à Waring et non à Goldbach ; je l'ai dit par erreur (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 111) d'après la *Correspondance mathématique et physique* (Fuss).

nous dans une lettre adressée à Goldbach, par Euler, le 30 juin 1742, où l'on voit que Goldbach était l'auteur du théorème. Cette lettre a été imprimée par Fuss dans sa *Correspondance mathématique et physique*, t. I, p. 135 (Saint-Pétersbourg, 1843).

Euler écrit qu'il considère le théorème comme tout à fait certain quoiqu'il ne sache pas le démontrer. Dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, p. 356 ; 1879, Lionnet a publié un article très intéressant sur la question, il arrive à cette conclusion que la proposition est très probablement fausse pour de grands nombres.

Georges Cantor a envoyé au Congrès de Caen (Association française pour l'avancement des sciences, 1894, p. 117 à 134) un tableau où se trouvent, pour chaque nombre pair inférieur à 1 000, *toutes* les décompositions de ce nombre en deux nombres premiers. Il fait cette remarque empirique que si l'on appelle N_{2n} le nombre de décompositions en une somme de deux nombres premiers dont $2n$ est susceptible, on a pour toutes les valeurs de p, à partir de $p = 4$ et y compris $p = 4$,

$$N_{6p} > N_{6p-2} \qquad \text{et} \qquad N_{6p} > N_{6p-4}$$

c'est-à-dire que des maxima relatifs de N ont lieu de 3 en 3 pour les multiples de 6 dans toute l'étendue de la table.

Aubry a continué le travail de Cantor et a fait une table de décomposition des nombres pairs de 1 002 à 2 000 ; de son examen il résulte que dans ces limites, le théorème empirique de Goldbach se vérifie ainsi que les relations trouvées par Cantor.

Le travail le plus récent et le plus complet sur la loi empirique de Goldbach est celui de M. Robert Haussner (professeur à l'école supérieure technique de Karlsruhe), publié sous le titre *Tafeln fur das Goldbach'sche Gesetz* (Halle, 1897).

Les tables dressées par M. Haussner vérifient le théorème jusqu'à

$$2n = 5000$$

En résumé, on ne connaît pas de nombre pair > 2 qui ne soit que d'une seule manière la somme de deux nombres premiers, et l'on ne peut affirmer avec certitude qu'il en existe un, à moins, sans doute, qu'il ne soit très grand, ce qui retardera d'autant la vérification désirée (1).

Théorème de Lagrange. (2) — Un autre théorème qui, autant qu'il nous a été possible de le vérifier est encore à démontrer est le suivant :

Tout nombre premier de la forme $4n - 1$ est la somme d'un nombre premier de la forme $4n + 1$ et du double d'un second nombre premier ayant la même forme $4n + 1$. »

En faisant connaître cette proposition Lagrange ajoutait qu'il ne l'avait obtenue que par induction.

Des nombres parfaits. — Il existe une classe de nombres qui jouissent d'une propriété singulière et curieuse et auxquels on a donné le nom de *nombres parfaits*.

On appelle ainsi tout nombre égal à la somme de ses diviseurs, abstraction faite du nombre lui-même.

6 est un nombre parfait, car ses diviseurs sont 1, 2 et 3 dont la somme donne bien 6.

Le nombre 28 jouit de la même propriété, car ses diviseurs sont 1, 2, 4, 7 et 14 dont la somme est 28.

(1) Comme références à consulter au sujet du théorème de Goldbach, nous citerons une note intitulée : une polémique entre Goldbach et Bernouilli (D'aniel) dans le *Bulletin du P. Boncompagni*, 1885.

Des articles parus dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1879, p. 304 et 1880, p. 487.

L'*Intermédiaire des Mathématiciens*. T. I, 1894, p. 202 ; t. II, 1895, p. 179 ; t. III, 1896, p. 75 ; t. IV, 1897, p. 60 ; t. IX, 1902, p. 226 ; t. X, 1903, pp. 61, 166-168 et p. 283 ; t. XI, 1904, p. 83 ; t. XII, 1905, pp. 107-109, et p. 131. Consulter aussi un article de M. Haussner : *Ueber das Goldbasch'sche Gesetz* dans le volume V du *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (Leipzig).

(2) *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, Berlin, 1775, p. 356.

Un nombre premier ne saurait être parfait, car il n'a pas d'autres diviseurs que lui-même et l'unité.

Une puissance quelconque d'un nombre premier ne peut être un nombre parfait.

Considérons, par exemple, le nombre premier a élevé à la m^{me} puissance ; on ne peut avoir

$$a^m = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^{m-1}$$

puisque les deux nombres a^m et $a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^{m-1}$ étant divisibles par a, leur différence 1 devrait l'être aussi.

On sait d'ailleurs que l'expression

$$a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots\ldots + a^3 + a^2 + a + 1$$

est égale à $\dfrac{a^m - 1}{a - 1}$, quantité évidemment plus petite que a^m.

Forme des nombres parfaits. — Puisqu'aucun nombre parfait ne peut être de la forme a ou a^m, cherchons si un pareil nombre peut avoir la forme $a^m b$, a et b désignant des nombres premiers.

Le nombre $a^m b$ devant être égal à la somme de ses diviseurs, abstraction faite du nombre $a^m b$ lui-même, on a

$$a^m.b = (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^m)(1 + b) - a^m.b$$

ou

$$a^m.b = (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^m) \times 1 + (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^m)\, b$$

ou encore

$$b\left[a^m - (1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^{m-1})\right] = a^m + (1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-1})$$

d'où l'on tire

$$b = \frac{a^m + (1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^{m-1})}{a^m - (1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^{m-1})} = \frac{a^m + Q}{a^m - Q}$$

en désignant par Q la quantité entre parenthèses.

Or, b doit être entier et il résulte que le dénominateur doit être égal à 1, car autrement le reste de la division de $a^m + Q$ par $a^m - Q$ serait $+ 2Q$ ou $2(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{m-1})$, et a étant un nombre entier positif, ce reste ne se réduirait pas à zéro.

On doit donc avoir :

$$a^m - (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{m-1}) = 1$$

ou

$$a^m - \frac{a^m - 1}{a - 1} = 1,$$

ou encore

$$(a^m - 1)(a - 2) = 0.$$

Le nombre a étant plus grand que 1, on ne peut admettre que la valeur $a = 2$, qui donne pour b

$$b = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^m.$$

On a, par suite

$$a^m.b = 2^m(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^m)$$

et pourvu que les nombres a et b soient premiers, cette valeur de $a^m.b$ jouit de la propriété énoncée.

Ainsi, on aura une suite de nombres parfaits en faisant la somme des puissances successives de 2, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 .... jusqu'à ce qu'on obtienne, comme somme, un nombre premier, et en multipliant cette somme par la dernière puissance de 2 à laquelle on s'est arrêté, le produit satisfait à la question.

Si l'on observe que

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^m = \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} = 2^{m+1} - 1$$

on en déduit en désignant par N, un nombre parfait de la forme $a^m.b$

$$N = (2^{m+1} - 1)\, 2^m.$$

D'où la règle suivante plus facile à appliquer que la précédente.

On obtient une suite de nombres parfaits en formant la suite des puissances de 2, c'est-à-dire en écrivant la progression géométrique

$$\div\div\; 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : \ldots\ldots,$$

et en prenant tous les termes qui, diminués de l'unité, sont des nombres premiers.

Ceux à qui convient cette propriété sont ;

$$4, 8, 32, 128, 8192, \ldots, \text{etc.}$$

car ces nombres, diminués de l'unité, donnent les nombres premiers

$$3, 7, 31, 127, 8191, \ldots\ldots$$

En multipliant chacun de ces nombres par le terme de la progression géométrique qui précède celui dont il dérive, par exemple 3 par 2, 7 par 4, 31 par 16, etc., on détermine les nombres parfaits

$$6, 28, 496, 8128, \ldots\ldots, \text{etc.}$$

La première règle que nous avons donnée est due à Euclide, qui l'énonçait ainsi (1) :

« *Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si, avec cette somme multipliée par le dernier, on forme un nombre, ce produit sera un nombre parfait* ».

Cette règle qui ne donne que des nombres *pairs* est tout ce qu'Euclide a laissé sur les nombres dits parfaits.

Il en est fait aussi mention dans Théon de Smyrne qui leur consacre le XXXII^e chapitre de son livre sur l'*Arithmétique* (2).

(1) Livre IX, proposition 36. Voir édition Peyrard, Paris, Patris; 1816, 4 vol. in-4°, t. II, p. 107.

(2) Voir édition d'Ismael Bouillaud : *Lutetiæ Parisiorum*, LUDOVICUS DE HEUQUEVILLE, in-4° ; 1644.

Presque toutes les Arithmétiques qui ont vu le jour avant la fin du XVIe siècle font mention plus ou moins longuement des nombres parfaits. Presque toutes commettent des erreurs, faute de savoir reconnaître si un nombre (511 par exemple) est premier ou non.

La question des nombres parfaits a préoccupé un grand nombre de mathématiciens, et plusieurs en ont cherché d'*impairs* (1).

Descartes écrivait à Frénicle, le 20 décembre 1638 : « ... et je ne « sais pourquoi vous jugez qu'on ne saurait parvenir par ce moyen « à l'invention d'un vrai nombre parfait ; que si vous en avez « une démonstration, j'avoue qu'elle est au-delà de ma portée et « que je l'estime extrêmement ; car, pour moi, je juge qu'on peut « trouver des nombres impairs véritablement parfaits. »

Quoiqu'il en soit la question de savoir s'il existe ou non des *nombres parfaits impairs* n'a pas encore été résolue scientifiquement, et on n'en connaît pas d'autres que ceux qu'on déduit de la formule

$$2^m(2^{m+1} - 1)$$

établie précédemment.

Il est d'ailleurs facile d'établir, *à priori*, que cette formule est l'expression générale des nombres *pairs* tels que chacun d'eux soit égal à la somme de tous les diviseurs, abstraction faite du nombre lui-même.

L'expression générale des nombres pairs est en effet

$$2^m\, a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \,.....$$

a, b, c, ... étant des nombres premiers quelconques.

La somme de tous les diviseurs de ce nombre, y compris le nombre lui-même, est

$$(1+2+2^2+\ldots+2^m)(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+b^3+\ldots+b\ )$$
$$(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma)\,.....$$

(1) Sur la Théorie des nombres parfaits on peut consulter les références bibliographiques données par SETNOF, BROCARD, A.-P. ERICSSON et E.-B. ESCOTT dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, t. II, 1895, pp. 52-54 ; t. VI, 1899, p. 108 ; t. VIII, 1901, pp. 103, 176 et t. XII, 1905, p. 19.

On doit donc avoir l'égalité

$$2^m.a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots = (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^m)(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma) \ldots \ldots - 2^m.a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots$$

qui peut s'écrire

$$2^{m+1}.a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots = (2^{m+1} - 1)(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma) \ldots\ldots$$

ou encore

$$(2^{m+1} - 1)a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots - a_\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots = (2^{m+1} - 1)(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b_\beta)(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma) \ldots$$

d'où l'on tire

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma) = \ldots = a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots + \frac{a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots\ldots}{2^{m+1} - 1}.$$

Le premier membre de cette égalité étant un nombre entier, il en est de même du second membre; par suite la fraction

$$\frac{a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots\ldots}{2^{m+1} - 1}$$

représente un nombre entier. Mais, le premier terme du second membre se trouve aussi dans le premier membre comme produit des derniers termes des expressions entre parenthèses; il en résulte donc que le quotient $\frac{a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots\ldots}{2^{m+1} - 1}$ doit contenir tous les autres termes du premier membre développé.

Or, m est au moins égal à 1; le dénominateur $2^{m+1} - 1$ est plus grand que 3 et le quotient est, par suite, plus petit que

$$a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots\ldots$$

Cette fraction ne peut donc représenter que l'un des termes du développement du premier membre, d'où cette conclusion que le nombre des termes du développement du premier membre est limité à 2.

D'ailleurs ce nombre des termes a pour expression

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots$$

Il en résulte donc l'égalité

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots\ldots = 2.$$

Cette égalité n'est manifestement possible que si l'un des exposants α par exemple, est égal à 1, tous les autres, β, γ, ... étant nuls. On a alors

$$1 + \alpha = a + \frac{a}{2^{m+1} - 1}$$

d'où

$$a = 2^{m+1} - 1.$$

Les nombres cherchés sont donc de la forme

$$2^m(2^{m+1} - 1),$$

m étant tel que $2^{m+1} - 1$ soit un nombre premier.

Nous donnons ci-après une table des neuf premiers nombres parfaits connus jusqu'à ce jour.

$2\ (2^2 - 1) =$ 6
$2^2\ (2^3 - 1) =$ 28
$2^4\ (2^5 - 1) =$ 496
$2^6\ (2^7 - 1) =$ 8 128
$2^{12}(2^{13} - 1) =$ 33 550 336
$2^{16}(2^{17} - 1) =$ 8 589 869 056
$2^{18}(2^{19} - 1) =$ 137 348 691 328
$2^{30}(2^{31} - 1) =$ 2 305 843 008 139 952 128
$2^{60}(2^{61} - 1) =$ 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176

Ainsi l'on voit que de 1 à 10, il n'y a qu'un nombre parfait; il n'y en a également qu'un dans les intervalles de 10 à 100, de 100 à 1000 et de 1000 à 10000; mais cette loi ne se poursuit pas, car on n'en trouve plus qu'un depuis 10000 jusqu'à 800 millions. La rareté des nombres parfaits, a dit un auteur, est un symbole de celle de la perfection.

On voit aussi que les nombres parfaits sont terminés par 6 ou 28; cette loi d'alternance n'est pas générale comme Boëce l'avait énoncé par erreur. D'ailleurs les anciens ne connaissaient que les quatre premiers nombres parfaits qui sont bien alternativement terminés par 6 et 28.

Remarques diverses. — 1. En multipliant par 8 les nombres parfaits donnés par la formule générale

$$2^m(2^{m+1}-1)$$

et, en ajoutant l'unité au produit, on forme les carrés des nombres de la forme $(2^{m+2}-1)$. On a bien, en effet

$$2^m(2^{m+1}-1)\times 2^3+1=2^{2m+4}-2^{m+3}+1=$$
$$(2^{m+2})^2-2.2^{m+2}+1=(2^{m+2}-1)^2.$$

2. Pour que le facteur $2^{m+1}-1$ soit un nombre premier, il faut que l'exposant $m+1$ soit lui-même un nombre premier.

On ne peut, en effet, avoir $m+1=p.q$, car on en déduirait

$$2^{m+1}-1=2^{pq}-1=(2^p)^q-1^q=(2^q)^p-1^q$$

et le facteur $2^{m+1}-1$, étant ainsi divisible par 2^p-1 et par 2^q-1 ne serait pas premier.

Il résulte aussi de là que, sauf le cas où $m=1$, qui donne $m+1=2$, nombre premier pair, tous les autres nombres premiers $m+1$ sont impairs, et, par suite, m est pair.

La condition que nous venons d'énoncer est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante; si nous faisons, en effet, $m=10$, on a

$$2^{m+1}-1=2^{11}-1=23\times 89.$$

Sachant que $m+1$ est un nombre premier, nous ne pouvons donc pas affirmer que l'expression $2^{m+1}-1$ le soit également, et nous ne connaissons pas les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce facteur soit premier; on est donc réduit à vérifier, pour les différentes valeurs de m qui donnent pour $m+1$ un nombre premier si $2^{m+1}-1$ n'a pas d'autre diviseur que lui-même et l'unité.

3. Il résulte de la remarque précédente que : *Tout nombre parfait pair, autre que* 6, *est divisible par* 4, *et que tout nombre parfait pair autre que* 6 *et* 28 *est divisible par* 16.

4. Tout nombre premier $m+1$ plus grand que 3 est de l'une des formes $(6q+1)$ ou $(6q+5)$, d'autre part, on a :

$$2^3 \equiv -1 \pmod{9}$$
$$2^{6q} \equiv +1 \pmod{9}$$

par suite pour

$$m+1 = 6q+1,\ 2^m(2^{m+1}-1) \equiv 1(2-1) \equiv 1 \pmod{9}$$
$$m+1 = 6q+5,\ 2^m(2^{m+1}-1) \equiv 1(2^2-1) \equiv 1 \pmod{9}$$

donc : *Tout nombre parfait pair, autre que* 6, *est un multiple de* 9 *augmenté de* 1.

Il en résulte que si l'on fait le total des chiffres d'un nombre parfait autre que 6, puis la somme des chiffres du total, et ainsi de suite, on arrive à 10 ou à un multiple de 10 (Kraft, *Novi Comm. Petrop.*, 1734).

5. On a de même, pour le module 7, la congruence $2^3 \equiv 1$; par suite pour

$$(m+1) = 6q+1,\ 2^m(2^{m+1}-1) \equiv 1(2-1) \equiv +1 \pmod{7}$$
$$(m+1) = 6q+5,\ 2^m(2^{m+1}-1) \equiv 1(2^2-1) \equiv -1 \pmod{7}$$

donc : *Tout nombre parfait pair, autre que* 28, *est un multiple de* 7 *augmenté ou diminué de* 1.

De même, pour le module 13, la congruence $2^6 \equiv 1$, appliquée aux nombres des formes

$$(m+1) = 12q+1,\ 5,\ 7,\ 11$$

donne cette proposition : *Tout nombre parfait pair, autre que* 6, *est un multiple de* 13 *augmenté de* 1, 2, 3 *ou* 8.

On a encore $2^9 \equiv -1 \pmod{19}$; en appliquant ce résultat aux nombres d'Euclide pour les nombres des formes

$$(m+1) = 18.q + 1, 5, 7, 11, 13, 17$$

il vient : *Tout nombre parfait pair, autre que* 6 *et* 28, *est un multiple de* 19 *augmenté de* 1, 2, 3, 7, 10 ou 15.

On a enfin $2^{10} \equiv -1 \pmod{25}$; en appliquant ce résultat aux nombres d'Euclide pour les exposants $(m+1)$ des formes

$$(m+1) = 20.q + 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$$

on trouve : *Tout nombre parfait pair, autre que* 496, *est un multiple de* 25 *augmenté de* 1, 3, 6, 11 ou 16.

En combinant ce résultat avec le premier, il en résulte que : *Tout nombre parfait pair, autre que* 6 *ou* 496, *est terminé par l'ensemble des deux chiffres* 16, 28, 36, 56, ou 76.

On trouverait de même les restes des nombres parfaits pairs pour les modules 11, 23, 29, 31, 37, 41, 43 et 1000 (*Mathésis*. t. IX).

6. Sur les nombres parfaits impairs, Lionnet a énoncé le théorème suivant (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1879, p. 306).

S'il existe des nombres parfaits impairs, ils sont donnés par la formule

$$n = a^{4\alpha+1}p^2 \tag{1}$$

dans laquelle a *désigne un nombre premier de forme* $(4q+1)$ *et* p *un nombre impair, plus grand que* 1, *non divisible par* a.

Le nombre n étant, en effet, décomposé en ses facteurs premiers, supposons que l'on ait :

$$n = a^\alpha.b^\beta.c^\gamma \ldots$$

et ce nombre étant parfait on doit avoir ;

$$2n = (1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)(1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma) \ldots..$$

ou en posant

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha &= A \\ 1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta &= B \\ 1 + c + c^2 + \ldots + c^\gamma &= C \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2n = A.B.C \ldots\ldots \end{aligned}$$

Or, n étant impair, un seul des nombres A, B, C, ... est double d'un impair, A par exemple, et les autres B, C, ... sont impairs. Mais puisque a, b, c, ... sont impairs, on a :

$$A \equiv \alpha + 1 \quad B \equiv \beta + 1 \quad C \equiv \gamma + 1 \ldots \quad (\text{mod. } 2)$$

il faut donc que β, γ, ... soient pairs et que $(\alpha + 1)$ soit le double d'un nombre impair ; donc si l'on remplace α par $4\alpha + 1$ et β, γ, ... par 2β, 2γ, ... il vient

$$(2) \qquad n = a^{4\alpha+1}.b^{2\beta}.c^{2\gamma} \ldots$$

d'autre part, a étant impair, on ne peut faire que les deux hypothèses $a \equiv +1$ et $a \equiv -1$ (mod. 4) : par suite, a est un nombre premier de forme $(4q + 1)$.

D'ailleurs les nombres β, γ, ... ne peuvent être tous nuls en même temps ; car on aurait, dans le cas contraire

$$2a^\alpha = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \qquad \text{ou} \qquad a^\alpha(2 - a) = 1$$

ce qui donnerait $a = 1$ et $n = 1$. D'où résulte encore cette proposition : *Il n'existe aucun nombre parfait impair de forme* $(4q + 3)$.

Enfin J. J. Sylvester a prouvé l'impossibilité de l'existence d'un nombre parfait impair qui ne contient pas au moins cinq diviseurs premiers distincts (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, CVI, 522, 1888) et Stuyvaert a démontré qu'un nombre parfait impair s'il en existe, est la somme de deux carrés (*Mathesis*, XVI, 132 ; 1896).

En résumé l'existence de nombres parfaits impairs n'est pas établie; il est seulement démontré que de tels nombres, s'il en existe, doivent être très grands.

Des nombres amiables. — Deux nombres N et N' sont dits *amiables* lorsqu'ils jouissent de la propriété suivante :

La somme des diviseurs du premier nombre N, *abstraction faite de ce nombre lui-même, est égale à* N' *et réciproquement, la somme des diviseurs de* N', *abstraction faite de* N', *est égale à* N.

Par exemple, les deux nombres 220 et 284 sont amiables, car le premier 220 est égal à la somme $1 + 2 + 4 + 71 + 142$ des parties aliquotes de 284, et réciproquement 284 est égal à la somme des parties aliquotes 1. 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110 du nombre 220.

Le problème qui consiste à trouver deux nombres jouissant de la propriété que nous venons d'énoncer est plus qu'indéterminé.

Supposons, en effet, N et N' décomposés en leurs facteurs premiers, et soient

$$N = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma} \ldots.., \qquad N' = a_1^{\alpha'}.b_1^{\beta'}.c_1^{\gamma'} \ldots..$$

en appelant S et S' les sommes des parties aliquotes de ces nombres on doit avoir

$$S = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \times \ldots.. - N = N'$$

$$S' = \frac{a_1^{\alpha'+1} - 1}{a_1 - 1} \times \frac{b_1^{\beta'+1} - 1}{b_1 - 1} \times \frac{c_1^{\gamma'+1} - 1}{c_1 - 1} \times \ldots.. - N' = N$$

d'où la relation

$$\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \times \ldots =$$
$$\frac{a_1^{\alpha'+1} - 1}{a_1 - 1} \times \frac{b_1^{\beta'+1} - 1}{b_1 - 1} \times \frac{c_1^{\gamma'+1} - 1}{c_1 - 1} \times \ldots$$

Cette relation est trop générale pour qu'il soit possible d'en déduire des formules donnant des couples de nombres amiables ; mais si nous assignons à N et N′ les formes particulières plus simples

$$N = 2^n.a, \qquad N' = 2^n.b.c$$

dans lesquelles a, b, c sont des facteurs premiers impairs, on peut déterminer des couples de nombres remplissant les conditions énoncées.

On a, en effet

$$(2^{n+1} - 1)(a + 1) = (2^{n+1} - 1)(b + 1)(c + 1) = 2^n(a + bc)$$

d'où l'on déduit

$$a = bc + b + c,$$

et en éliminant a

$$(b - 2^n + 1)(c - 2^n + 1) = 2^{2n} = 2^{n+\alpha}2^{n-\alpha}$$

en supposant $\alpha < n$.

On peut donc poser

$$b = 2^n - 1 + 2^{n-\alpha}$$
$$c = 2^n - 1 + 2^{n+\alpha}$$

et en déduire

$$a = (2^\alpha + 1)^2\, 2^{2n-\alpha} - 1$$

avec les conditions que a, b, c soient des nombres premiers ; par suite α est impair, car autrement a serait composé.

Pour $\alpha = 1$, on trouve une première forme de nombres amiables en supposant

$$a = 3^2.2^{2n-1} - 1$$
$$b = 3.2^{n-1} - 1$$

et

$$c = 3.2^n - 1$$

si l'on donne à n les valeurs successives 2, 3, 4, ... en ne conservant que celles pour lesquelles les nombres a, b, c sont premiers, on trouve les solutions

n	a	b	c	N	N'
2	71	5	11	284	220
4	1151	23	47	18416	17296
7	73727	191	383	9437056	9363584

On ne peut supposer $\alpha = 3$; car dans ce cas, l'un des nombres b ou c serait une différence de deux carrés ; il reste à étudier les cas de $\alpha = 5, 7, \ldots$ ce qui parait assez difficile.

Le mémoire classique d'Euler : *De numeris amicabilibus opuscula varii arg.*, p. 23 ; 1750. — L. Euleri *Commentationes arithmeticæ collectæ Petropoli* vol. I, p. 102-145 ; 1749) contient un catalogue de soixante et un nombre amiables de formes diverses et des investigations ingénieuses à ce sujet. En outre, dans le vol. II des *Comment. arith.* (p. 627-639) se trouvent deux compléments, dont l'un contient encore quatre couples de nombres amiables.

Euler mentionne le couple 6232 et 6368 (*Comm. arith*, vol. I, p. 145) qui peut s'écrire $2^3.19.41$ et $2^5.199$, mais dont la forme générale n'est pas donnée.

Euler donne également le couple des 2 nombres impairs

$$3^5.7^2.13.19.53.6959; \qquad 3^5.7^2.13.19.179.2087.$$

La bibliographie du sujet jusqu'à Euler se trouve dans ses mémoires. Au XIX^e siècle, Le Lasseur s'est occupé des nombres amiables il a constaté qu'il n'existe pas pour $n < 35$ d'autres nombres amiables de la forme

$$N = 2^n.a, \qquad N' = 2^u.bc$$

(a, b, c étant des nombres premiers des formes indiquées ci-dessus) que les trois couples qui figurent dans le tableau plus haut [1].

Théorème de Fermat sur les puissances binaires. — Fermat a enrichi les mathématiques d'un grand nombre de propositions inconnues jusqu'à lui. Sauf deux exceptions, toutes ont été reconnues exactes par la suite. La première de ces exceptions constitue le théorème sur les puissances binaires qui s'énonce ainsi :

Tout les nombres de la forme $2^m + 1$ où $m = 2^n$ sont premiers.

Il écrivait à Pascal :

« C'est une vérité de laquelle je vous réponds. La démonstration en est très malaisée, et je vous avoue que je n'ai pu encore la trouver pleinement ; je ne vous la proposerais pas pour la chercher si j'en étais venu à bout. »

Et à Mersenne, le 25 décembre 1640 :

« Si je puis une fois tenir la raison fondamentale que

$$3,\ 5,\ 7,\ 17,\ 257,\ 65537,\ \ldots$$

sont nombres premiers, il me semble que je trouverai de très belles choses en cette matière, car déjà j'ai trouvé des choses merveilleuses dont je vous ferai part. »

On démontre facilement que $2^m + 1$ est composé si m n'est pas une puissance de 2.

Si, en effet, m était un nombre premier différent de 2, et, par suite un nombre impair, l'expression $2^m + 1$ serait divisible par $2^1 + 1$ ou 3 et ne représenterait un nombre premier que pour la valeur particulière $m = 1$.

Si m est un nombre de la forme $a.b.c$, les facteurs premiers a, b, c étant impairs, on aurait

$$2^m + 1 = 2^{a.b.c} + 1 = (2^a)^{bc} + 1 = (2^b)^{ac} + 1 = (2^c)^{ab} + 1 = (2^{ab})^c + 1 = (2^{ac})^b + 1 = (2^{bc})^a + 1,$$

(1) *Intermédiaire des Mathématiciens.* T. VII, 1900, p. 380.
Encyclopädie der Math. Wiss. (Leipzig, Teubner, 1898 et suiv.). T. I, p. 578.

ce qui montre que $2^m + 1$ est divisible respectivement par

$$2^a + 1,\ 2^b + 1,\ 2^c + 1,\ 2^{ab} + 1,\ 2^{ac} + 1,\ 2^{bc} + 1.$$

Enfin, si un seul des facteurs premiers de m était impair, tous les autres étant égaux à 2, l'expression $2^m + 1$ se présenterait sous la forme

$$2^{2^n \times p} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^p + 1 = (2^p)^{2^n} + 1$$

et serait divisible par $2^{2^n} + 1$ et par $2^p + 1$.

Ainsi si m n'est pas une puissance de 2, l'expression $2^m + 1$ représente un nombre composé, mais il ne s'ensuit pas que cette expression représente nécessairement un nombre premier, si m est une puissance de 2.

L'inexactitude de la proposition de Fermat a été signalée pour la première fois en 1732, par Euler (¹), qui a montré que pour $n = 5$

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 6\,700\,417 \times 641.$$

Dans ces trente dernières années, il a été établi que l'expression $2^{2^n} + 1$ représentait un nombre composé pour

$$n = 6,\ 9,\ 11,\ 12,\ 18,\ 23,\ 36 \text{ et } 38.$$

Avec ces deux dernières valeurs les résultats contiennent plusieurs millions de chiffres. (²)

Avant Fermat, Stifel avant avancé que la formule $2^{2n+1} - 1$ ne donnait que des nombres premiers, sans cependant en renfermer

(¹) *Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ*, Saint-Pétersbourg, 1738, vol. VI, p. 104; voir aussi *Novi Comm. Acad. Scient. Pétrop.*, Saint-Pétersbourg, 1764, vol. IX, p. 101, ou *Commentationes Arithmeticæ Collectæ*, Saint-Pétersbourg, 1849, vol. I, pp. 2, 357.

(²) Pour la composition des facteurs et les références bibliographiques, voir le mémoire de A.-J.-C. Cunningham et A.-E. Western inséré dans les *Transactions of the London Mathematical Society*, 14 mai, 1903, 2ᵉ série, vol. I, p. 175.

la totalité ; mais cette assertion a été également reconnue fausse car pour $n = 4$, on a

$$2^{2\times4+1} - 1 = 511 = 13.37.$$

La proposition de Fermat a d'ailleurs été modifiée comme il suit : « Tous les nombres, et les seuls nombres premiers, qui surpassent de l'unité les puissances de 2, sont ceux de la suite

$$2 + 1,\ 2^2 + 1,\ 2^{2^2} + 1,\ 2^{2^{2^2}} + 1,\ 2^{2^{2^{2^2}}} + 1, \ldots »$$

De plus, Eisenstein a énoncé ce théorème dont il possédait probablement la démonstration :

« Il y a une infinité de nombres premiers de la forme $2^{2^n} + 1$. »

Les démonstrations de ces deux propriétés sont encore à trouver (1).

Parmi plusieurs autres, Euler a donné les trois formules suivantes (*Mém.* de Berlin pour 1772, p. 36).

$$x^2 + x + 17,$$
$$2x^2 + 29,$$
$$x^2 + x + 41,$$

qui fournissent respectivement, pour les valeurs entières successives de x, à partir de zéro, 17, 29 et 40 nombres premiers.

M. F-B Escott (2) a obtenu d'autres nombreuses formules donnant des nombres premiers pour un groupe étendu de valeurs de x. On peut citer les suivantes

$$47x^2 + 5x + 1$$
$$67x^2 + 5x - 1$$

(1) A consulter : *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 236. — *Journal de Crelle*, t. XVII, p. 87. — *Journal de Sylvester*, t. II, p. 238. — *Bulletins de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg* (nov. 1877 et janvier 1878).

(2) Voir *Intermédiaires des Mathématiciens*. T. V, 1898, pp. 114 et 184 ; t. VI, 1899, p. 10.

La première formule peut s'écrire $41x^2 + (2x + 1)(3x + 1)$. Elle donne donc, pour $x = 20$, un nombre composé (divisible par 41).

La seconde peut s'écrire $71x^2 - (x - 1)(4x - 1)$. Pour $x = 18$ elle donne un nombre composé (divisible par 71).

M. Escott fait d'ailleurs remarquer que la formule d'Euler

$$x^2 + x + 41$$

ne donne pas seulement des nombres premiers pour les valeurs positives de x, 1, 2, 3, ..., 39, mais qu'elle en donne aussi pour les valeurs négatives -1, -2, -3, ..., -40. Et en remplaçant x par $x - 40$ il obtient une formule donnant des nombres premiers pour

$$x = 0, 1, 2, \ldots, 79$$

Il détermine par ce moyen, les formules suivantes fournissant des nombres premiers pour plus de 40 valeurs de x.

Formules originales	Quantité de nombres premiers	Substitution	Formules nouvelles	Quantité de nombres premiers
$x^2 + x + 41$	40	$x - 40$	$x^2 - 79x + 1601$	80
$6x^2 + 6x + 31$	29	$x - 29$	$6x^2 - 342x + 4903$	58
$2x^2 + 29$	29	$x - 28$	$2x^2 - 112x + 1597$	57
$x^2 + 21x + 1$	18	$x - 38$	$x^2 - 55x + 647$	56
$2x^2 + 40x + 1$	18	$x - 37$	$2x^2 - 108x + 1259$	55
$x^2 + 17x - 1$	16	$x - 32$	$x^2 - 47x + 479$	48
$3x^2 + 33x + 1$	19	$x - 29$	$3x^2 - 141x + 1567$	48
$2x^2 + 30x - 1$	15	$x - 29$	$2x^2 - 86x + 811$	44
$3x^2 + 3x + 23$	22	$x - 22$	$3x^2 - 129x + 1409$	44

Mais ces formules et toutes celles analogues, ne peuvent représenter exclusivement des nombres premiers, car on a la proposition connue :

Le polynome à coefficients entiers

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

ne peut donner continuellement des nombres premiers, pour toutes les valeurs entières de x.

Le dernier théorème de Fermat. — Consacrons maintenant quelques lignes à la seule autre proposition de Fermat n'ayant pas encore été démontrée ; on la désigne quelquefois sous le nom de *dernier théorème de Fermat* et elle s'énonce ainsi :

L'équation $x^n + y^n = z^n$ ne peut être satisfaite pour aucune valeur entière de x, y, z, si n est un nombre entier plus grand que 2 (1).

Cette proposition est très célèbre parcequ'il n'en a pas encore été présenté une démonstration générale malgré les recherches des plus grands savants, mais il n'y a pas jusqu'ici, de raison pour douter de son exactitude.

Fermat paraît l'avoir démontrée premièrement (2) pour $n = 3$. et ensuite pour $n = 4$. Sa démonstration pour le premier cas a été perdue, mais celle pour le second existe (3) et une démonstration identique, pour $n = 3$ a été présentée par Euler (4). Ces démonstrations reposent sur ce fait que, si on peut trouver trois valeurs entières x, y, z satisfaisant à l'équation, il sera également possible de trouver trois autres valeurs entières, moindres que les premières, qui satis-

(1) On trouvera l'énoncé de Fermat dans son édition des œuvres de *Diophante*, Toulouse, 1670, livre II, qu. 8, p. 61 ; ou dans le *Précis* de Brassinne, Paris, 1853, p. 53.

(2) Voir la lettre de Fermat citée dans notre *Histoire des mathématiques*, Londres, chapitre xv.

(3) Fermat. — *Diophantus*, note de la page 339 ; ou *Précis* de Brassinne, p. 127.

(4) *Algèbre d'Euler* (traduction anglaise, 1797), vol. II, chap. xv, p. 247.

feront encore à l'équation posée ; de sorte que, finalement, l'équation serait satisfaite par trois valeurs qui manifestement ne répondent pas à la question. Par suite, aucune solution en nombres entiers n'est admissible. On a remarqué que cette méthode ne s'applique qu'aux cas de $n = 3$ et $n = 4$.

La découverte par Fermat du théorème général ne fut faite que plus tard.

Il est facile d'en donner une démonstration en admettant que tout nombre peut être décomposé en facteurs premiers (de forme complexe) et que cette décomposition ne peut s'effectuer que d'une seule manière. Cette supposition a été faite par plusieurs auteurs, mais elle n'est pas vraie dans tous les cas. Il est possible que Fermat ait fait une pareille supposition, mais il est plus probable qu'il avait en sa possession une démonstration rigoureuse.

Ce qu'il y a de certain c'est qu'il affirmait posséder une telle démonstration — *demonstratio mirabilis sane* — et le fait que tous les théorèmes sur le même sujet, dont il avait, disait-il, une démonstration, ont été reconnus exacts par la suite, constitue un témoignage sérieux à l'appui de son affirmation. Il faut encore tenir compte de cette remarque qu'en énonçant la seule de ses propositions dont l'inexactitude a été constatée, il ne manquait pas d'ajouter qu'il n'avait pas réussi à en trouver une démonstration satisfaisante.

Il faut aussi se rappeler que Fermat était un mathématicien de premier ordre dont toutes les recherches ont eu spécialement pour objet la théorie des nombres. Or, ce sujet d'étude, bien que présentant beaucoup d'intérêt et conduisant à des démonstrations vraiment élégantes, est, au point de vue pratique, d'une faible importance, et, depuis son temps, il n'a été abordé que par quelques mathématiciens dont la plupart même n'en faisaient pas leur principal objet d'étude. Ceci explique pourquoi plus d'un siècle s'est écoulé avant que les résultats les plus simples énoncées par Fermat fussent examinés et vérifiés ; il est donc bien évident que la démonstration d'un théorème qu'il est arrivé à établir après avoir consacré son existence à de telles recherches, doit présenter de grandes difficultés.

En 1823, Legendre (1) démontrait le théorème pour le cas de $n = 5$; en 1832, Lejeune Dirichlet (2) présentait une démonstration pour $n = 14$, et en 1840, Lamé et Lebesgue (3) l'établirent pour $n = 7$.

La proposition paraît être vraie dans toute sa généralité. En 1849, Kummer (4), au moyen des nombres premiers idéaux, démontra la proposition pour tous les nombres, à l'exception de ceux (si toutefois ils existent) qui remplissent trois conditions. On ne sait pas s'il existe des nombres remplissant ces trois conditions, mais cela paraît peu probable et dans tous les cas, il n'y en a aucun plus petit que 100. La démonstration est compliquée et fort difficile à saisir ; sans aucun doute elle est basée sur des considérations complètement inconnues à Fermat. Ajoutons que pour démontrer le théorème quand n est plus grand que 4, il suffit évidemment de se limiter aux cas où n est un nombre premier, et Kummer débute dans sa démonstration en établissant que dans ces conditions l'un des nombres x, y, z doit être divisible par n.

Naturellement on a fait bien des conjectures sur la façon dont Fermat était arrivé à un tel résultat. Les méthodes modernes de l'arithmétique supérieure sont basées sur une notation spéciale introduite par Gauss qui a montré que la théorie des grandeurs discontinues différait essentiellement de celle des grandeurs continues, mais jusqu'à la fin du XVIII^e siècle, la théorie des nombres était considérée et traitée comme une branche de l'algèbre; les démonstrations de Fermat que nous possédons encore ne s'appuient que sur les principes élémentaires de la géométrie et de l'algèbre et même certaines d'entre elles ne renferment aucun signe. Quelques

(1) Voir sa *Théorie des Nombres*, Paris, 1830, vol. II, pp. 361-368 : voir aussi pp. 5 et 6.

(2) *Jonrnal de Crelle*, vol. IX, pp. 390-393.

(3) *Journal de Liouville*, 1841, vol. V, pp. 195-215, 276-9, 348-9.

(4) On trouvera les références aux mémoires de Kummer dans le rapport présenté par Smith à l'Association britannique sur l'étude de la *Théorie des Nombres*, Londres, 1860.

auteurs en ont inféré que Fermat n'employait que des méthodes algébriques élémentaires; cela peut être vrai, mais la remarque suivante qui, pensons-nous, n'a pas encore été faite, conduirait à une conclusion contraire. Il avait proposé, comme problème, aux mathématiciens anglais, de démontrer que l'équation $x^2 + 2 = y^3$ ne pouvait être satisfaite que pour une seule valeur entière de x et de y : la solution est évidemment $x = 5$, $y = 3$. A ce sujet il avait rédigé une note (1) pour établir que le fait de trouver une solution en fractions à termes entiers n'offrait aucune difficulté et qu'il était en possession d'une méthode entièrement nouvelle — *sane pulcherrima et subtilissima* — qui lui permettait de résoudre en nombres entiers toutes les équations de cette nature. Son intention était de publier toutes ses recherches (2) sur la théorie des nombres, mais son ouvrage n'a jamais été complété et ses méthodes d'analyse nous sont très peu connues. Cependant une opinion personnelle, que nous nous risquons à formuler ici, est que la théorie des fractions continues joua un rôle important dans ses recherches; nous ajouterons pour justifier cette conjecture que quelques-uns de ses résultats les plus abstraits — par exemple le théorème déjà énoncé plus haut : *tout nombre premier de la forme $4n + 1$ peut être décomposé en une somme de deux carrés* — s'établissent relativement avec assez de facilité en faisant intervenir les propriétés de ces fractions.

Combien y a-t-il de chiffres dans la suite des nombres de 1 à N inclusivement ? (3). — Ecrivons les uns au-dessous des autres, les N premiers nombres.

N étant supposé avoir m chiffres, complétons tous les nombres du

(1) FERMAT. — *Diophantus*, livre VI, prop. 19, p. 320; ou *Précis* de BRASSINNE, p. 122.

(2) FERMAT. — *Diophantus*, livre IV, prop. 31, p. 181; ou *Précis* de BRASSINNE, p. 82.

(3) Ce qui suit est extrait d'une note publiée par M. d'OCAGNE dans le *Journal de Sciencias mathematicas* de M. GOMES TEIXEIRA (année 1886).

tableau en leur ajoutant des zéros sur la gauche, de façon à les composer tous de m caractères.

Enfin, ajoutons, en tête de cette liste une ligne de m zéros.

Pour avoir le nombre cherché, il faut évaluer le nombre total des caractères figurant au tableau ainsi formé et en retrancher le nombre de zéros qu'on y a ajoutés.

Or, le premier de ces nombres est évidemment

$$m(N+1).$$

Passons au nombre des zéros.

De 10^{m-1} à N, nous n'en avons point ajouté. Maintenant, au-dessus de 10^{m-1}, dans la première colonne de gauche, nous avons ajouté 10^{m-1} zéros; au-dessus de 10^{m-2}, dans la deuxième colonne, nous en avons ajouté 10^{m-2}; etc...; au-dessus de 10, dans la deuxième colonne de droite, nous en avons ajouté 10; au-dessus de 1, dans la première colonne de droite, nous en avons ajouté 1. Nous en avons donc ajouté en tout :

$$10^{m-1}+10^{m-2}+\ldots+10+1$$

c'est-à-dire

$$\frac{10^m-1}{9},$$

et le nombre cherché X est donné par l'égalité

$$X=m(N+1)-\frac{10^m-1}{9}.$$

Cette formule peut se traduire en langage ordinaire de la manière suivante :

Pour savoir combien il y a de chiffres dans la suite des N *premiers nombres, il suffit de multiplier le nombre* N + 1 *par le nombre des chiffres qui entrent dans le nombre* N, *et de retrancher, du produit, un nombre formé d'autant de* 1 *qu'il y a de chiffres dans le nombre* N.

Par exemple, dans la suite des 365 premiers nombres il y aura

$$3 \times 366 - 111 = 1098 - 111 = 987 \text{ chiffres.}$$

Examinons le cas particulier où $N = 10^m - 1$.
Alors

$$X = m \times 10^m - \frac{10^m - 1}{9}.$$

On a donc, dans ce cas, X, en retranchant d'un nombre formé de m suivi de m zéros, un nombre formé de m fois le chiffre 1. Le premier chiffre à droite de la différence sera évidemment un 9; avec l'unité de retenue, le chiffre suivant du plus petit nombre devient 2 et, par suite, le deuxième chiffre à droite de la différence est un 8; il en est de même des $m - 2$ chiffres qui précèdent, et le dernier chiffre à gauche est $m - 1$ (si m n'a qu'un chiffre), autrement les premiers chiffres à gauche constituent le nombre $m - 1$.

Exemples : le nombre de chiffres que l'on doit écrire pour faire le tableau des 99 premiers nombres est 189; pour les 999 premiers nombres, il en faut 2889; pour les 9999 premiers nombres, 38889, etc.

Déterminer dans la suite naturelle des nombres, le k^{me} chiffre écrit. — Représentons les nombres 189, 2889, 38889, 488889, ... etc., par les notations symboliques $\mathcal{N}(1)$, $\mathcal{N}(2)$, $\mathcal{N}(3)$, $\mathcal{N}(4)$, ... etc.

Cela posé, il est facile de déterminer un nombre n tel que l'on ait :

$$\mathcal{N}(n-2) < k \leqslant \mathcal{N}(n-1)$$

et on en conclut que le chiffre inconnu de rang k appartient à un nombre de n chiffres que nous représenterons par N.

On a, d'ailleurs, le rang occupé, dans la suite des nombres de n chiffres, par le chiffre inconnu, en faisant la différence

$$k - \mathcal{N}(n-2).$$

Pour avoir, le rang occupé, dans la suite des nombres de n chiffres par le nombre de n chiffres N, auquel appartient k, il suffit évidemment de diviser

$$k - \mathcal{N}(n-2) \quad \text{par } n.$$

Désignons par q le quotient et par r le reste de cette division, il vient :

$$k - \mathcal{N}(n-2) = q \times n + r,$$

et nous distinguerons deux cas suivant que r est différent de zéro ou nul.

1° $r \gtrless 0$. Le rang occupé par N dans la suite des nombres de n chiffres est alors $q+1$, et r représente le rang occupé par le chiffre inconnu dans N (en comptant de gauche à droite).

Or, le premier nombre de n chiffres étant égal à 10^{n-1}, on a :

$$N = 10^{n-1} + q = 10^{n-1} + \frac{k - \mathcal{N}(n-2) - r}{n},$$

ou encore

$$N = \frac{k + n \times 10^{n-1} - \mathcal{N}(n-2)}{n} - \frac{r}{n}.$$

Mais, la différence $n \times 10^{n-1} - \mathcal{N}(n-2)$ est égale à un nombre composé de n fois le chiffre 1, et il vient, par conséquent,

$$k + 111^{n \text{ fois}} \ldots 11 = n \times N + r;$$

d'ailleurs r est plus petit que n, d'où cette conclusion que N peut être considéré comme le quotient de la division du nombre

$$k + 111^{n \text{ fois}} \ldots 11$$

par n, r étant alors le reste de cette division.

2° $r = 0$. Le quotient q est alors le rang occupé par le nombre de n chiffres N et le chiffre à déterminer est évidemment égal au dernier chiffre à droite (en allant de gauche à droite) de N.

On a dans ce cas

$$N = 10^{n-1} + q - 1 = 10^{n-1} - 1 + \frac{k - \mathfrak{N}(n-2)}{n},$$

ou encore

$$N = \frac{k + n \times 10^{n-1} - \mathfrak{N}(n-2)}{n} - 1,$$

et si l'on remarque, comme plus haut, que la différence

$$n \times 10^{n-1} - \mathfrak{N}(n-2)$$

est égale à un nombre composé de n fois le chiffre 1, il vient :

$$k + 111^{n \text{ fois}} \ldots 11 = (N + 1)\, n,$$

d'où

$$\frac{k + 111^{n \text{ fois}} \ldots 11}{n} = N + 1 = Q,$$

et le chiffre demandé est le premier à droite de $Q - 1$.

On voit donc, en résumé, qu'en posant

$$(1/1) = 1, \quad (2/1) = 11, \quad (3/1) = 111, \ldots$$

et en général

$$(n/1) = 111^{n \text{ fois}} \ldots 11.$$

On peut formuler la règle suivante donnée par M. d'Ocagne [1].

Pour trouver le chiffre de rang k, on détermine le nombre n tel que

$$\mathfrak{N}(n-2) < k \leqslant \mathfrak{N}(n-1)$$

puis on effectue la division de $k + (n/1)$ par n; soient Q *le quotient et* R *le reste :*

1° *Si* R *n'est pas nul, le chiffre cherché est le* R^{me} *(à partir de la gauche) du nombre* Q;

2° *Si* R *est nul, le chiffre cherché est le premier (à partir de la droite) du nombre* $Q - 1$.

[1] *Académie des Sciences.* Comptes rendus, 1890, p. 190.

Exemples : Soit à déterminer le 85642[e] chiffre de la suite naturelle des nombres.

On a :

$$38889 < 85642 < 488889;$$

il suffit donc de diviser par 5 la somme

$$85642 + 11111 = 96753.$$

Le quotient étant 19350 et le reste 3; le chiffre cherché est 3.

Déterminons encore le millionième chiffre écrit dans la suite naturelle des nombres.

$$k = 1000000$$

et comme

$$\mathfrak{N}(4) = 488889, \quad \mathfrak{N}(5) = 5888889,$$

on voit que

$$\mathfrak{N}(4) < k < \mathfrak{N}(5).$$

Donc $n = 6$. En outre

$$k + (n/1) = 1000000 + 111111 = 1111111;$$

en divisant ce nombre par 6, on trouve pour quotient 185185 et pour reste 1.

Le millionième chiffre est donc le premier, à gauche, du nombre 185185, c'est à-dire le chiffre 1.

Autre exemple : Quel est le 123456789[e] chiffre écrit ?

Ici $n = 8$, et l'on a :

$$123456789 + 11111111 = 134567900.$$

Divisant ce dernier nombre par 8, on trouve

$$Q = 16820987, \quad R = 4.$$

Le 123456789[e] chiffre écrit, dans la suite naturelle des nombres, est donc le 4[e] chiffre de 16820987, c'est-à-dire 2.

CHAPITRE IV

LES NOMBRES DE MERSENNE

L'une des questions énigmatiques de l'arithmétique supérieure, à laquelle il a déjà été fait allusion dans le premier chapitre de cet ouvrage, est celle qui a trait à la découverte de la méthode, suivie par Mersenne, ou par ses contemporains, pour déterminer les valeurs de p pour lesquelles un nombre de la forme $2^p - 1$ est premier.

Pour la commodité de notre exposition nous appellerons *Nombres de Mersenne* les nombres premiers de la forme $2^p - 1$ et pour abréger nous les représenterons par la lettre N.

Nous avons déjà présenté, d'une façon abrégée, l'historique de la question dans un mémoire paru en 1891 dans le *Messenger of mathematics*, nous le reproduisons ici avec plus de détails et en le complétant par un aperçu des méthodes pouvant être employées pour résoudre le problème.

Les résultats associés avec le nom de Mersenne se trouvent énoncés dans la préface de ses *Cogitata* (¹). Voici le passage en question.

« Vbi fuerit operae pretium aduertere XXVIII numeros a Petro Bungo pro perfectis exhibitos, capite XXVIII, libri de Numeris, non esse omnes Perfectos, quippe 20 sunt imperfecti, adeovt (adeunt ?) solos octo perfectos habeat... qui sunt è regione tabulae Bungi, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 12 et 29 : quique soli perfectì sunt, vt qui Bungum habuerint, errori medicinam faciant.

Porrò numeri perfecti adeo rari sunt, vt vndecim dumtaxat potu-

(¹) *Cogitata Physico Mathematica*, Paris 1644, praefatio generalis, article 19.

erint hactenus inueniri : hoc est, alii tres a Bongianis differentes : neque enim vllus est alius perfectus ab illis octo, nisi superes exponentem numerum 62, progressionis duplae ab 1 incipientis. Nonus enim perfectus est potestas exponentis 68 minus 1. Decimus, potestas 258, minus 1, hoc est potestas 257, vnitate decurtata, multiplicata per potestatem 256.

Qui vndecim alios repererit, nouerit se analysim omnem, quae fuerit hactenus, superasse : memineritque interea nullum esse perfectum à 17 000 potestate ad 32 000 ; et nullum potestatum interuallum tantum assignari posse, quin detur illud absque perfectis. Verbi gratia, si fuerit exponens 1 050 000, nullus erit numerus progressionis duplae vsque ad 2 090 000, qui perfectis numeris seruiat, hoc est qui minor vnitate, primus existat.

Vnde clarum est quàm rari sint perfecti numeri, et quàm merito viris perfectis comparentur ; esseque vnam ex maximis totius Matheseos difficultatibus, praescriptam numerorum perfectorum multitudinum exhibere ; quemadmodum et agnoscere num dati numeri 15, aut 20 caracteribus constantes, sint primi necne, cùm nequidem sæculum integrum huic examini, quocumque modo hactenus cognito, sufficiat.

Il est évident que le nombre N est composé si p n'est pas lui-même un nombre premier et à la simple inspection on peut former deux, ou plus de deux, facteurs de N. Il suffit donc, dans ce qui suit, de se limiter aux cas ou les valeurs attribuées à p sont des nombres premiers.

Mersenne a avancé que les seules valeurs de p, non supérieures à 257, qui donnent pour N un nombre premier, sont 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 et 257 ; le nombre 67 a été, pensons-nous, écrit par erreur, pour 61. En tenant compte de cette correction, nous n'avons aucune raison pour mettre en doute l'exactitude de la proposition mais elle n'a pas encore été établie d'une façon complète.

Il y a 56 nombres premiers non supérieurs à 257. Pour les 9 valeurs de p moindres que 20, il n'est pas difficile de vérifier si N est un nombre premier ou un nombre composé : ce nombre est composé pour une seule des valeurs de p.

Pour 2 des 46 valeurs de p restantes (à savoir pour $p = 23$ et $p = 37$), la décomposition de N a été donnée par Fermat.

Pour 9 autres valeurs de p (à savoir $p = 29$, 43, 73, 83, 131, 179, 191, 239 et 251), les facteurs de N ont été trouvés par Euler, qui a également démontré que N était premier pour $p = 31$.

Plana a décomposé N en facteurs pour $p = 41$.

Landry et Le Lasseur ont découvert les facteurs de N pour les 10 valeurs suivantes de p : 47, 53, 59, 79, 97, 113, 151, 211, 223 et 233, mais leur analyse de la question n'a pas été publiée.

Seelhoff a montré que N était premier pour $p = 61$.

Cunningham et Cole ont déterminé les facteurs de N, le premier pour $p = 197$, et le second pour $p = 67$.

On a également avancé que N était composé pour $p = 89$ et premier pour $p = 127$, mais la démonstration n'en a pas encore été publiée ou le fait vérifié, du moins à notre connaissance.

On voit donc qu'il reste 21 valeurs de p pour lesquelles la proposition énoncée par Mersenne n'a pas été vérifiée. Ces 21 valeurs sont ; 71, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 199, 227, 229, 241 et 257.

Suivant Mersenne, le nombre N est premier pour les deux valeurs, $p = 127$ et 257, qui sont comprises dans les 21 ci-dessus, et est composé pour les autres valeurs de p, mais comme nous venons de le dire, il est probable que la forme de N est comme pour $p = 89$ et 127.

On peut présenter les faits d'une autre façon. D'après Mersenne (en tenant toujours compte de la correction faite plus haut, c'est-à-dire en écrivant 61 au lieu de 67), sur les 56 nombres premiers inférieurs à 258, 44 donnent pour N un nombre composé et les 12 qui restent donnent pour N un nombre premier.

Parmi les 44 valeurs de p qui donnent pour N un nombre composé nous connaissons les diviseurs de N pour 25 d'entre elles et la proposition reste à vérifier pour les 19 qui restent.

Sur les 12 valeurs de p qui, d'après Mersenne, font de N un nombre premier, la proposition a été vérifiée pour 10 et reste à vérifier pour 2.

D'après les termes du dernier membre de phrase de la citation faite plus haut on a émis cette conjecture que les résultats énoncés par Mersenne lui avaient été communiqués et qu'il les a fait connaître sans se préoccuper de la façon dont ils avaient été obtenus. Le fait en lui-même semble probable. Mersenne était un bon mathématicien sans être un génie exceptionnel et il serait étrange qu'il eut réussi à établir une proposition devant laquelle ont échoué des hommes tels qu'Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Jacobi et d'autres mathématiciens de premier ordre. Mais si la proposition est due à Fermat avec lequel Mersenne entretenait une correspondance suivie, la question se trouve changée et non seulement on s'explique l'absence de démonstrations, mais encore on n'est pas certain d'avoir attaqué convenablement le problème.

Les résultats connus en ce qui concerne la composition de N pour les diverses valeurs de p sont donnés dans le tableau ci-après, sur lequel figure également, dans chaque cas et lorsque N est composé, le plus petit diviseur de ce nombre.

Les cas non encore vérifiés sont marqués d'un astérisque.

Avant d'aborder l'examen des méthodes pouvant être employées pour résoudre le problème, il nous paraît utile d'établir d'une façon plus complète quand et par qui les résultats donnés ci-dessus ont été trouvés.

Les diviseurs (lorsqu'il y en a) des valeurs de N moindres qu'un million peuvent être vérifiés facilement : ils sont connus depuis longtemps et nous jugeons inutile de nous y arrêter.

Les facteurs de N pour $p = 11, 23$ et 37 ont été donnés par Fermat [1] quelques années avant la publication de l'ouvrage de

[1] *Œuvres de Fermat*, Paris, vol. II, 1894, p. 210 ; ou *Opera Mathematica*, Toulouse, 1679, p. 164 ; ou *Précis* de Brassine, Paris, 1853, p. 144.

p	Valeurs de $N = 2^p - 1$		
1	1	premier	
2	3	»	
3	7	»	
5	31	»	
7	127	»	
11	$2047 = 23 \times 89$	composé	
13	8191	premier	
17	131071	»	
19	524287	»	
23	$8388607 = 47 \times 178481$	composé	Fermat
29	$536870911 = 233 \times 1103 \times 2089$	»	Euler
31	2147483647	premier	Euler
37	$137438953471 = 223 \times 616318177$	composé	Fermat
41	$2199023255551 = 13367 \times 164511353$	»	Plana
43	$8796093022207 = 431 \times 9719 \times 2099863$	»	Euler
47	$2351 \times 4513 \times 13264529$	»	Landry
53	$6361 \times 69431 \times 20394401$	»	Landry
59	$179951 \times 3203431780337$	»	Landry
61	2305843009213693951	premier	Seelhoff
67	$\equiv 0 \ (193707721)$	composé	Cole
71	2361183241434822606847	*	
73	$\equiv 0 \ (439)$	composé	Euler
79	$\equiv 0 \ (2687)$	»	Le Lasseur
83	$\equiv 0 \ (167)$	»	Euler
89	618970019642690137449562111	*	
97	$\equiv 0 \ (11447)$	composé	Le Lasseur
101	2535301200456458802993406410751	*	
103	10141204801825835211973625643007	*	
107	162259276829213363391578010288127	*	
109	649037107316853453566312041152511	*	
113	$\equiv 0 \ (3391)$	composé	Le Lasseur
127	170141183460469231731687303715884105727	*	
131	$\equiv 0 \ (263)$	composé	Euler

p	Valeurs de $N = 2^p - 1$		
137	. . . .	*	
139	. . . .	*	
149	. . . .	*	
151	$\equiv 0$ (18121)	composé	Le Lasseur
157	. . . .	*	
163	. . . .	*	
167	. . . .	*	
173	. . . .	*	
179	$\equiv 0$ (359)	composé	Euler
181	. . . .	*	
191	$\equiv 0$ (383)	composé	Euler
193	. . . .	*	
197	$\equiv 0$ (7487)	composé	Cunningham
199	. . . .	*	
211	$\equiv 0$ (15193)	composé	Le Lasseur
223	$\equiv 0$ (18287)	»	Le Lasseur
227	. . . .	*	
229	. . . .	*	
233	$\equiv 0$ (1399)	composé	Le Lasseur
239	$\equiv 0$ (479)	composé	Euler
241	. . . .	*	
251	$\equiv 0$ (503)	composé	Euler
257	. . . .	*	

Mersenne, dans une lettre datée du 18 octobre 1640. Voici le passage visé :

En la progression double, si d'un nombre carré, généralement parlant, vous ôtez 2 ou 8 ou 32, etc., les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui mesureront le reste, feront l'effet requis. Comme de 25, qui est un carré, ôtez 2 ; le reste 23 mesurera la 11^e puissance — 1 ; ôtez 2 de 49, le reste 47 mesurera la 23^e puissance — 1 ; ôtez 2 de 225, le reste 223 mesurera la 37^e puissance — 1, etc.

Les diviseurs de N pour $p = 29, 43$ et 73 ont été donnés par Euler en 1732 ([1]). Le fait que N représente un nombre composé pour les valeurs $p = 83, 131, 179, 191, 239$ et 251 découle de cette proposition énoncée à la même époque par Euler : si $4n + 3$ et $8n + 7$ sont des nombres premiers
on a :

$$2^{4n+3} - 1 \equiv 0 \pmod{8n + 7}.$$

et démontrée par Lagrange ([2]) dans son mémoire classique de 1775.

Cette proposition qui comprend également les cas de $p = 11$ et $p = 23$ constitue le seul théorème général sur le sujet qui ait été démontré jusqu'à présent.

Le fait que N est premier pour $p = 31$ a été établi par Euler ([3]) en 1771. Fermat avait avancé, dans la lettre mentionnée ci-dessus, que les seuls facteurs premiers possibles de $2^p \pm 1$, quand p était premier, étaient de la forme $np + 1$, n représentant un nombre entier.

Cette assertion a été vérifiée en 1748 par Euler ([4]) qui a fait remarquer de plus que, l'expression $2^p \pm 1$ représentant un nombre impair, tous ses facteurs doivent être impairs, et, par suite, si p est impair, n doit être pair. Mais si p est un nombre donné, n peut être défini d'une façon plus complète et Euler a montré que les facteurs premiers de $2^{31} - 1$ (s'il y en a) étaient nécessairement de la forme $248n + 1$ ou $248n + 63$, ils doivent également être inférieurs à $\sqrt{2^{31} - 1}$, c'est-à-dire plus petits que 46339. Dès lors,

([1]) *Commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ*, 1738, vol. VI, p. 103; ou *Commentationes Arithmeticæ Collectæ*, vol. I, p. 2.

([2]) *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1775, pp. 323-356.

([3]) *Histoire de l'Académie des Sciences* pour 1772, Berlin, 1774, p. 36.

Voir aussi *Théorie des Nombres* de LEGENDRE 3e édit. Paris, 1830, vol. I, pp. 222-229.

([4]) *Novi Commentarii Academiæ scientiarum Petropolitanæ*, vol. I, p. 20; ou *Commentationes Arithmeticæ Collectæ*, Saint-Pétersbourg, 1849, vol. I, pp. 55, 56.

pour vérifier si le nombre $2^{31} - 1$ est premier ou non, il suffit seulement d'essayer quarante diviseurs.

Les facteurs de N pour $p = 41$ ont été donnés par Plana (1) en 1859. Il a montré que ces facteurs premiers (s'il y en a) étaient de l'une des formes $328n + 1$ ou $328n + 247$, et compris entre 1231 et $\sqrt{2^{41} - 1}$, ou 1048573. Il résulte de là que pour constater si le nombre $2^{41} - 1$ est composé il suffit d'essayer 513 diviseurs; le dix-septième d'entre eux fournit les facteurs cherchés.

C'est là la façon d'aborder le problème qui avait déjà été employée par Euler en 1771, mais pour les valeurs de p supérieures à 41 cette méthode est très laborieuse. Plana (2) a fait connaître les formes des diviseurs premiers de N quand p n'est pas supérieur à 101.

Il paraîtrait que Lucas (3) a vérifié en 1876 et 1877 que N est premier pour $p = 127$, mais la démonstration n'a pas été publiée.

La découverte des facteurs de N pour $p = 47$, 53 et 59 paraîtrait due à F. Landry qui a établi également quelques théorèmes sur les facteurs (en supposant qu'il y en ait) des nombres de certaines formes. Au lieu de publier ses résultats, il proposa en défi, à tous les mathématiciens, la solution du problème général. Ces détails se trouvent dans un mémoire publié à Paris, en 1867, et devenu rare. Nous en possédons un exemplaire dans lequel les diviseurs de certains nombres sont donnés et, à la page 8, il indique qu'il est parvenu à trouver les facteurs de $2^p - 1$ pour $p = 47$, 53 et 59.

Il semblerait qu'il a communiqué ses résultats à Lucas, car ce dernier les a mentionnés dans le mémoire rappelé plus bas (4).

(1) G. A. A. Plana, *Memorie della Reale Academia dell Scienze de Torino*, série 2, vol. XX, 1863, p. 130.

(2) *Ibid.*, p. 137.

(3) *Sur la Théorie des Nombres premiers*, Turin, 1876, p. 11; et *Recherches sur les ouvrages de Léonard de Pise*, Rome, 1877, p. 26, mentionnées par le lieutenant-colonel A. J. Cunningham, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 14 nov. 1895, vol. XXVII, p. 54

(4) *American Journal of Mathematics*, 1878, vol. I, p. 236.

Les facteurs de N pour $p = 79$ et 113 ont été donnés pour la première fois par Le Lasseur, et ont été mentionnés par Lucas dans le même mémoire

Un facteur de N pour $p = 233$, découvert plus tard par Le Lasseur a été encore cité par Lucas en 1882 ([1]).

Par la suite, les diviseurs de N pour $p = 97$, 151, 211 et 223 furent déterminés par Le Lasseur et également rappelés par Lucas en 1883 ([2]).

Landry avait été conduit à penser que N était premier pour $p = 61$, et en 1886, Seelhoff ([3]) présentait une démonstration qui prête à la critique. Mais le fait ayant été vérifié par d'autres mathématiciens ([4]), peut être regardé comme démontré.

Lucas semblerait avoir vérifié en 1891 ([5]) que le nombre N est composé pour $p = 89$, mais sa démonstration n'a pas été publiée et, bien plus, on ne connait pas les diviseurs de N pour cette valeur de p.

En 1895 A. J. C. Cunningham ([6]) a montré que le nombre 7487 était un diviseur de N pour $p = 197$.

Lucas aurait vérifié en 1876 et 1877 ([7]) que le nombre N n'est pas premier pour $p = 67$; E. Fauquembergue ([8]) a confirmé le fait

([1]) *Recreations*, 1882-1883, vol. I, p. 241.

([2]) *Ibid.*, vol. II, p. 230.

([3]) P.-H.-H. Seelhoff, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1886, vol. XXXI, p. 178.

([4]) Voir Weber-Wellstein, *Encyclopaedie der Elementar-Mathematik*, p. 48; et F.-N. Cole, *Bulletin of the American Mathematical Society*, décembre 1903, p. 136.

([5]) *Théorie des Nombres*, Paris, 1891, p. 376.

([6]) *Proceedings of the London Mathematical Society*, mars 14, 1895, vol. XXVI, p. 261.

([7]) *Sur la Théorie des Nombres premiers*, Turin, 1876, p. 11 mentionné par le lieutenant-colonel Cunningham, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 14 nov. 1895, vol. XXVII, p. 54 et *Recherches sur les ouvrages de Léonard de Pise*, Rome 1877, p. 26.

([8]) L'*Intermédiaire des Mathématiciens*, Paris, sept. 94, vol. I, p. 148.

qui fut de nouveau mentionné par Lucas en 1891 (1). Les diviseurs ont été donnés par Cole en 1903 (2).

Bickmore dans le mémoire cité plus bas (3), a montré que 1433 est un autre facteur de N pour $p = 179$; et que les nombres 1913 et 5737 sont également d'autres facteurs de N pour $p = 239$.

Nous allons nous occuper maintenant des méthodes au moyen desquelles ces résultats pourraient être obtenus. Il est impossible d'admettre que Mersenne ait fait reposer son affirmation sur une simple conjecture empirique, mais au bout de près de 250 ans, le procédé qui lui a permis de faire une telle découverte nous est encore inconnu.

Nous ne prétendons pas résoudre cette énigme. Mais il peut être intéressant de faire connaître quelques uns des procédés mis en œuvre pour la résolution de la question.

Le but que l'on se propose est de trouver un diviseur premier q (autre que N et 1) d'un nombre N de la forme $2^p - 1$, lorsque p est premier.

On peut facilement montrer que q doit être de la forme $2pt + 1$. q doit aussi être de l'une des formes $8i \pm 1$; car N est de la forme $2A^2 - B^2$, A représentant un nombre pair et B un nombre impair; dès lors (4) tout facteur de N doit être de la forme $2a^2 - b^2$, c'est-à-dire de l'une des formes $8i \pm 1$, et 2 est résidu quadratique de q.

La théorie des résidus paraît, toutefois, n'être que d'un faible secours pour la question qui nous occupe, bien que la possibilité de trouver un jour une suite complète de solutions au moyen de cette théorie ne doive pas être négligée (5).

(1) *Théorie des Nombres*, Paris, sept. 1891, p. 376.

(2) *On the Factoring of large numbers, Bulletin of the American Mathematical Society*, décembre 1903, pp. 134-137.

(3) C.-E. Bickmore, *Messenger of Mathematics*, Cambridge, 1895, vol. XXV, p. 19.

(4) Legendre, *Théorie des Nombres*, 3e édition, Paris, 1830, vol. I, § 143. Dans le cas des nombres de Mersenne, $B = b = 1$.

(5) Pour les méthodes permettant le calcul des indices, voir Bickmore, *Messenger of Mathematics*, mai 1895, vol. XXV, pp. 15-21; voir aussi un

Tout ce que nous savons actuellement en ce qui concerne les moyens de décomposer le nombre N en facteurs se résume dans cette assertion [1] qu'un diviseur premier de la forme $2pt + 1$ peut être trouvé directement en appliquant les règles dues à Legendre, Gauss et Jacobi, quand $t = 1, 3, 4, 8$ ou 12 et que tout facteur de la forme $2p.t.t' + 1$ peut être déterminé indirectement par une méthode, due à Bikmore, quand $t = 1, 3, 4, 8$ ou 12 et que t' représente un nombre entier impair plus grand que 3.

Ceci montre bien le peu de progrès accompli jusqu'ici dans la recherche d'une solution générale du problème.

Première méthode. — Nous avons d'abord la méthode simple mais primitive qui consiste à essayer tous les diviseurs premiers possibles q de la forme $2pt + 1$, et en même temps de l'une des formes $8i \pm 1$.

Les principaux résultats connus pour les plus petits facteurs peuvent être résumés en disant qu'un nombre premier de cette forme divise N,

quand $t = 1$, si $p = 11$, 23, 83, 131, 179, 191, 239 et 251;
quand $t = 3$, si $p = 37$, 73 ou 233;
quand $t = 5$, si $p = 43$;
quand $t = 15$, si $p = 113$;
quand $t = 17$, si $p = 79$;
quand $t = 19$, si $p = 29$ ou 197;
quand $t = 25$, si $p = 47$;
quand $t = 41$, si $p = 223$;
quand $t = 59$, si $p = 97$;
quand $t = 163$, si $p = 41$;
quand $t = 1525$, si $p = 59$;

article du lieutenant-colonel Cunningham dans les *Proceedings of the London mathematical Society*, 1895-1896, vol. XXVII, pp. 85-122.

[1] *Transactions of the British Association for the Advancement of Science* (Congrès d'Ipswich), 1895, p. 614.

quand $t = 4$, si $p = 11, 29, 179$ ou 239;
quand $t = 8$, si $p = 11$;
quand $t = 12$, si $p = 239$;
quand $t = 36$, si $p = 29$ ou 211;
quand $t = 60$, si $p = 53$ ou 151;
et quand $t = 1445580$, si $p = 67$.

Parmi les 25 cas pour lesquels nous savons que l'assertion de Mersenne est exacte en ce qui concerne le caractère composé de N, tous à l'exception de 3 peuvent être vérifiés par des essais de ce genre. Car, en négligeant toutes les valeurs de t ne dépassant pas un certain nombre, 60 par exemple, qui donnent pour q un nombre composé ou non de l'une des formes $8i \pm 1$, nous n'avons seulement à essayer dans chaque cas, qu'environ 20 diviseurs.

Pour les 3 autres cas, l'un d'eux ($p = 41$) a été vérifié par Plana qui a avoué franchement qu'il était arrivé au résultat « par un heureux hasard »; la vérification d'un autre cas ($p = 59$) est due à Landry qui n'a pas expliqué comment il avait trouvé les facteurs de N; et le troisième cas ($p = 67$) a été vérifié par Cole en cherchant les résidus quadratiques de N ce qui l'a entrainé dans un travail des plus laborieux.

Parmi les 10 cas pour lesquels nous connaissons l'exactitude de l'assertion de Mersenne en ce qui concerne la forme de N qui représente un nombre premier, tous à l'exception d'un seul, peuvent être vérifiés par des essais du même genre, attendu que le nombre des diviseurs possibles n'est pas considérable.

Le cas faisant exception correspond à la valeur $p = 61$ et Seelhoff ainsi que d'autres mathématiciens ont montré que le nombre $2^{61} - 1$ était premier.

Ainsi, nous pouvons pratiquement dire que de simples essais empiriques nous conduiraient aussitôt à toutes les conclusions connues, à l'exception des cas. $p = 41, 59, 61$ et 67, vérifiés respectivement par Plana, Landry, Seelhoff et Cole.

En fait, les quatre cas donnés ci-dessus étant négligés, une personne un peu familiarisée avec les calculs arithmétiques pourrait vérifier en quelques heures les conclusions formulées par tous les mathématiciens jusqu'à ce jour.

A mesure que p augmente, le nombre des diviseurs à essayer augmente lui-même à un point tel qu'il devient pratiquement impossible d'appliquer le procédé à la recherche des grands facteurs lorsque p représente un grand nombre. C'est là un point important attendu qu'on a affirmé qu'il n'y avait pas de facteurs inférieurs à 50000 dans les cas où la vérification n'a pas encore été faite. On peut raisonnablement en conclure que la méthode dont nous venons de parler, n'est certainement pas celle suivie pour la détermination des résultats à l'origine, et qu'elle n'est pas à utiliser ici pour trouver les diviseurs encore inconnus.

Il n'y a, bien entendu, rien d'impossible à ce qu'il existe des méthodes au moyen desquelles le nombre des valeurs possibles de t puisse être limité d'une façon plus complète, et si nous pouvions les trouver, le nombre des diviseurs à essayer serait naturellement réduit; mais il y a lieu, toutefois, de faire observer, que les valeurs de N ayant jusqu'ici échappé à toute vérification sont très grandes, par exemple pour $p = 257$, N ne contient pas moins de 78 chiffres.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que lorsque q est connu et n'a pas une valeur très grande, il est possible de déterminer si cette valeur représente ou non un facteur de N, sans qu'il soit utile d'effectuer la division.

Si on se propose, par exemple, de vérifier que $q = 13367$ est un diviseur de N pour $p = 41$, on peut procéder comme il suit :

Nous avons, par rapport au module q

$$2^{14} = 16384 \equiv 3017 \equiv 7 \times 431,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} 2^{28} &\equiv 49\,(-1377) \equiv -638, \\ 2^{27} &\equiv -319, \\ 2^{14+27} &\equiv (3017)\,(-319) \equiv 1, \end{aligned}$$

et enfin

$$2^{41} \equiv 1.$$

Seconde méthode. — Nous pouvons ramener le problème à la résolution d'une équation indéterminée.

Il est clair que l'on peut trouver un diviseur de N s'il est possible d'exprimer ce nombre sous la forme d'une différence de deux carrés, ou plus généralement de deux n^{mes} puissances de deux nombres entiers u et v. Bien plus, si l'on peut mettre un multiple de N, mN par exemple, sous cette forme, il sera possible de trouver un diviseur de mN (avec certaines limitations évidentes en ce qui concerne la valeur de m), et ce diviseur fournira un facteur de N.

Ajoutons aussi que si la valeur de m peut être choisie telle que $\frac{N}{m}$ soit exprimable sous forme d'une fraction continue d'une certaine forme, un certain continuant (1) défini par la forme de cette fraction continue est un diviseur de N.

Puisque N peut toujours être exprimé comme une différence de deux carrés, cette façon d'aborder le problème semble naturelle.

Si nous posons

$$N = n^2 + a = (n + b)^2 - (b^2 + 2bn - a),$$

nous pouvons utiliser les formes connues de u et de v, et obtenir ainsi une équation indéterminée entre deux variables x et y, de la forme

$$x^2 = (2py + H)^2 - 4(K - y)$$

H et K étant des nombres pouvant être aisément calculés.

Les valeurs entières de x et de y, y étant plus petit que K, détermineront les valeurs de u et v et donneront ainsi les facteurs de N.

On peut aussi traiter la question d'une autre manière, mais toujours au moyen d'une équation indéterminée. Les facteurs de N doivent, en effet, être de la forme $2pt + 1$ et $8p.s + 1$, par suite.

$$(2pt + 1)(8ps + 1) = N = 2^p - 1 = 2(2^{p-1} - 1) + 1.$$

(1) Voir J.-G. Birch dans le *Messenger of Mathematics* du mois d'oût 1902. Vol. XXII, pp. 52-55.

Par conséquent

$$4s + t + 8pst = \frac{2^{p-1} - 1}{p}.$$

On peut donc poser, par exemple

$$4s + t + 8pst = \alpha + 8p\beta.$$

Dès lors

$$4s + t = \alpha + 8p.x \quad \text{et} \quad st = \beta - x$$

x diffère de β et t est impair.

Ces résultats nous conduisent encore à une équation indéterminée.

Dans les deux cas, à moins que p ne soit un petit nombre, les équations résultantes ne sont pas abordables.

Troisième méthode. — Une méthode connue conduisant à la solution des problèmes de la nature de celui que nous avons en vue, c'est-à-dire des problèmes ayant pour objet la décomposition des grands nombres en facteurs, est basée sur la théorie des formes quadratiques [1]. La méthode est d'un emploi difficile, et nous n'avons aucune raison nous laissant supposer qu'elle a pu être utilisée par un mathématicien du 17e siècle. Nous nous contentons donc d'y faire allusion ici.

Quatrième méthode. — Voici encore une autre manière de traiter la question.

Le problème sera résolu si nous pouvons trouver un nombre

[1] Pour un aperçu de la question voir G.-B. Mathews, *Theory of numbers*, part. I, Cambridge, 1891, pp. 261-271. Voir aussi la note de Cole dans le *Bulletin of the American mathematical Society*, sur la décomposition des grands nombres en facteurs, décembre, 1903, pp. 134-137; et *Quadratic partitions* par A.-J.-C. Cunningham, Londres, 1904.

premier impair q tel que l'on ait par rapport à ce nombre pris comme module

$$2^{p+y} \equiv z \qquad \text{et} \qquad 2^y \equiv z,$$

y et z pouvant prendre toutes les valeurs possibles.

En admettant la possibilité de trouver des valeurs de q, y et z remplissant les conditions indiquées, on aurait

$$2^y\,(2^p - 1) \equiv 0$$

et, par suite $2^p \equiv 1$, c'est-à-dire que q serait diviseur de N.

Par exemple, par rapport au module 23, on a :

$$2^8 \equiv 3, \qquad 2^{16} \equiv 3^2\,;$$

également

$$2^5 \equiv 3^2.$$

Par conséquent

$$2^{16} - 2^5 \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad 2^{11} - 1 \equiv 0.$$

sans nous étendre plus longtemps sur ce sujet, nous pouvons dire que la détermination *à priori* des valeurs de q, y et z nous entraînerait dans le domaine de l'inconnu.

Il est possible (bien que peu probable selon nous) que la clef de l'énigme repose sur la détermination des règles permettant de trouver des valeurs de q, y et z remplissant les conditions ci-dessus énoncées.

Par exemple, s'il était possible de connaître le reste de la division de 2^x par un nombre premier q de la forme $2pt + 1$, et si les restes étaient les mêmes pour $x = u$ et $x = v$, nous aurions par rapport au module q

$$2^u \equiv 2^v$$

et, par conséquent

$$2^{u-v} \equiv 1.$$

Il y a lieu cependant de prendre note de ce fait que le *Canon* *arithmétique* de Jacobi et celui semblable dressé par Cunningham, s'ils étaient poursuivis suffisamment loin, nous permettraient de résoudre le problème par cette méthode.

Le *canon* de Cunningham donne la solution de la congruence $2^x \equiv R$ pour tous les modules premiers moindres que 1 000, mais il ne peut servir à la détermination des facteurs de N plus grands que 1 000. Il est cependant possible que pour de certaines formes de R ou de q, un tel canon puisse être construit tel qu'il nous conduirait à une solution du problème.

Cinquième méthode. — Il est à remarquer que les valeurs impaires de p indiquées par Mersenne sont des nombres premiers de l'une des quatres formes $2^q \pm 1$ ou $2^q \pm 3$, mais on ne doit pas en conclure que tous les nombres premiers de ces formes donnent pour N un nombre premier : par exemple, ce nombre N est composé pour

$$p = 2^3 + 3 = 11 \quad \text{ou pour} \quad p = 2^5 - 3 = 29.$$

Cette observation a suggéré à plusieurs mathématiciens l'idée qu'il serait possible de découvrir l'essai qu'il y aurait lieu de faire pour se rendre compte de la forme du nombre N quand p est de l'une des quatre formes précitées. Ceci bien entendu n'est qu'une simple conjecture. Il faut cependant dire à l'appui de cette opinion, qu'il est connu que Fermat (¹) s'est occupé des nombres de cette forme.

Sixième méthode. — Le nombre N exprimé dans le système de numération binaire est représenté par une suite de p chiffres 1. On a dès lors pensé que la question relative à la détermination des facteurs de N pourrait avantageusement être traitée en faisant usage de ce système de numération. G. de Longchamps (²) a indiqué une

(¹) Voir plus haut page 294.
(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, Nov. 1877, vol. LXXXX pp. 950-952.

méthode basée sur les propriétés du système, mais telle qu'elle est exposée elle ne pourrait être utilisée pour la recherche des grands diviseurs.

Nous inclinerions cependant à croire qu'il serait encore plus avantageux de faire intervenir le système de numération à base $4p$ ou à base $8p$. — Les nombres qui résulteraient de cette application étant alors exprimés par un nombre raisonnable et suffisamment petit de chiffres. En fait, si on adopte la dernière base mentionnée, sur les 25 cas pour lesquels les diviseurs de N sont connus, dans un seul seulement le plus petit facteur contient plus de 2 chiffres.

Septième méthode. — Nous avons réservé pour la fin l'exposition de la méthode qui nous semble la plus heureuse.

D'après le théorème de Fermat, si $x + 1$ est un nombre premier $2^x - 1$ est divisible par $x + 1$. Dès lors, si $2pt + 1$ représente un nombre premier, nous aurons par rapport au module $2pt + 1$

$$2^{pt} - 1 \equiv 0,$$

d'où

$$(2^p - 1)\left(1 + 2^p + 2^{2p} + \ldots + 2^{(2t-1)p}\right) \equiv 0.$$

Par conséquent, on connaitra un diviseur de $2^p - 1$, si on peut trouver une valeur de t telle que $2pt + 1$ soit un nombre premier, premier avec le second facteur.

Cette méthode peut être employée pour établir le théorème d'Euler de 1732; car si nous posons $t = 1$ et si $2p + 1$ est un nombre premier, nous avons, par rapport au module $2p + 1$

$$(2^p - 1)(2^p + 1) \equiv 0.$$

Par suite, $2^p \equiv 1$, si $2^p + 1$ est premier avec $2p + 1$.

Tel est le cas pour $p = 4m + 3$. Alors $2p + 1$ est facteur de N pour $p = 11$, 23, 83, 131, 179, 191, 239 et 251, car pour ces diverses valeurs $2p + 1$ est premier.

Le problème des nombres de Mersenne est un cas particulier du problème relatif à la détermination des facteurs de $a^n - 1$. Cette dernière question a fait l'objet des recherches de bien des mathématiciens et un aperçu des conclusions auxquelles ils sont arrivés a été donné par Bickmore (1). Nous devons également mentionner la méthode générale suggérée par F. W. Lawrence (2) pour la décomposition en facteurs d'un grand nombre quelconque : il est possible que Fermat ait employé quelque méthode analogue.

Enfin nous ajouterons qu'on a imaginé des machines (3) permettant de vérifier si un nombre est premier ou non, mais il n'est pas venu à notre connaissance qu'il ait encore été construit de telles machines convenables pour des nombres aussi grands que ceux compris dans les nombres de Mersenne.

(1) *Messenger of Mathematics*, Cambridge, 1895-1896, vol. XXV, pp. 1-44; également 1896-1897, vol. XXVI, pp. 1-38; voir aussi une note par M. E.-B. Escott dans le *Messenger*, 1903-1904, vol. XXXIII, p. 49.

(2) *Messenger of Mathematics*, Cambridge, 1894-1895, vol. XXIV, pp. 100-109; *Quarterly Journal of Mathematics*, 1896, vol. XXVIII, pp. 285-311 ; et *Transactions of the London mathematical Society*, mai 13, 1897, vol. XXVIII, pp. 465-475.

(3) F.-W. Lawrence, *Quarterly Journal of mathematics*, 1896, déjà mentionné pp. 310-311 ; voir aussi C.-A. Laisant, *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, 1891 (Marseille), vol. XX, pp. 165-8.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

CHAPITRE II

CHAPITRE III

CHAPITRE IV