

П. КНЕППО Л. И. ТИТОМИР

БИОМАГНИТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ



МОСКВА
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
1989

УДК 577.3:537.612

Кнеппо П., Титомир Л.И. Биоманнитные измерения. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 288 с.: ил. — ISBN 5-283-00557-7

Изложены теоретические, технические и прикладные вопросы измерения магнитных полей биологического происхождения. Рассмотрены современные представления о биоэлектрических генераторах и методы математического описания их электромагнитного поля. Описаны современные приборы и автоматизированные системы, предназначенные для измерения и анализа слабых магнитных полей. Дан обзор практических приложений методов измерения слабого магнитного поля в области исследования биологических объектов и организма человека.

Книга написана учеными СССР и ЧССР и подготовлена к изданию также издательством "Альфа" в ЧССР.

Для научных работников и инженеров, интересующихся методами измерения и анализа магнитного поля, а также приложениями этих методов в биологии, биофизике, медицине и других областях.

Рецензент чл.-корр. АН УССР И.М. Дмитренко

Kneppo P., Titomir L.I. Biomagnetic measurements

Theoretical, technological and practical problems of measuring magnetic fields created by biological objects are discussed. Modern conception of bioelectric generators as well as methods for mathematical description and modeling of their electromagnetic field are considered. A short review of typical devices and automatized systems for measurement and analysis of the weak magnetic fields is presented. Possibilities of the magnetic measurements described are illustrated with some examples of practical techniques both for scientific investigation in electrophysiology and for medical diagnostics.

The book is useful for scientists, engineers, postgraduates and everyone else interested in theory, techniques and equipment for measurement and analysis of biomagnetic fields.

К 1901000000-582 35-89
051 (01)-89

ISBN 5-283-00557-7

© Энергоатомиздат, 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема "биологические объекты и магнитное поле" подразделяется на несколько направлений, основные из которых принято называть магнитобиологией и биомагнетизмом. Первое включает исследования, посвященные влиянию внешних магнитных полей на состояние и деятельность биологических систем, второе — исследования, посвященные магнитным полям биологического происхождения [8, 49]. В предлагаемой книге рассматриваются в основном измерительные и теоретические аспекты биомагнетизма, или область биомагнитометрии.

Любой биологический объект в процессе жизнедеятельности порождает изменяющиеся во времени и сложным образом распределенные в пространстве физические поля — тепловые, низкочастотные и высокочастотные электромагнитные, акустические и др. [17]. В частности, многие органы животных и человека являются своеобразными электрохимическими (или, как часто говорят, биоэлектрическими) генераторами. Эти генераторы фактически представляют собой потоки ионов, движущихся под воздействием химических концентрационных градиентов в тканях и жидкостях тела. Они создают низкочастотное (с частотами до 1 кГц) электромагнитное поле, отражающее функционирование соответствующих органов и систем организма. Электрическая составляющая этого поля (биоэлектрическое поле) в виде записей изменяющегося во времени электрического потенциала уже много десятилетий широко используется как в электрофизиологических исследованиях, так и в диагностике состояний и заболеваний человека; на этом основаны различные электрографические методы диагностики (электрокардиография, электроэнцефалография и т.п.). Иначе обстоит дело с магнитной составляющей электромагнитного поля организма (биомагнитным полем) — ее серьезное изучение и попытки практического использования начались сравнительно недавно, около 20 лет тому назад. Тот факт, что биоэлектрические генераторы должны создавать наряду с электрическим полем также и магнитное, не вызывает сомнений, так как соответствует общеизвестным физическим законам. Тем не менее на пути активного использования биомагнитного поля как источника информации о состоянии и функциях организма стоят трудности как технического, так и теоретического характера. Прежде всего, конечно, они пока связаны со сложностью измерения и регистрации магнитной индукции, однако все сильнее чувствуется недостаточная разработка фундаменталь-

ных вопросов происхождения и диагностической интерпретации биомагнитного поля.

Нужно отметить, что под биомагнитными полями в широком смысле подразумевают магнитные поля, которые можно подразделить на три основные группы в зависимости от их конкретной природы: во-первых, это поля биоэлектрических генераторов, о которых говорилось выше; во-вторых — поля микроскопических магнитных частиц, попавших в организм извне или имеющих биологическое происхождение, с упорядоченной ориентацией (под влиянием сильного внешнего магнитного поля); в-третьих — поля, возникающие из-за неоднородности магнитной восприимчивости тела под влиянием сильного внешнего магнитного поля.

Хотя для измерения биомагнитных полей трех указанных типов используются по существу одни и те же принципы и приборы, мы будем рассматривать лишь поля первого типа, так как они тесно связаны с функциональной активностью различных органов тела, сопровождающейся работой биоэлектрических генераторов, и фактически являются неотъемлемой частью электромагнитного поля этих органов, благодаря чему их потенциальная диагностическая информативность не подлежит сомнению.

Главная трудность при исследовании биомагнитных полей связана с тем, что это очень слабые поля — их максимальные амплитуды в миллионы раз меньше, чем постоянная составляющая магнитного поля Земли, в сотни и тысячи раз меньше, чем флуктуации естественных и искусственных магнитных полей окружающей среды.

Исследования в области биомагнетизма и биомагнитометрии развивались неравномерно и зависели прежде всего от доступной измерительной техники. Подлинный качественный скачок в этой области произошел в начале прошлого десятилетия, когда появилась возможность использовать для измерения слабых магнитных полей прибор нового типа, основанный на квантовых явлениях в сверхпроводнике — сквид-магнитометр. Этот прибор в сочетании с целым рядом методических и технических усовершенствований измерительной процедуры вскоре позволил получить записи индукции магнитного поля биологических объектов, практически не уступающие по качеству записям биоэлектрических потенциалов. С этого времени биомагнетизм развивается очень быстрыми темпами, охватывая все новые объекты, осваивая эффективные способы интерпретации данных, становясь признанным методом исследования научных проблем электрофизиологии и приближаясь к решению конкретных задач медицинской диагностики [9].

Согласно данным, приведенным в сборнике [73], в 1984 г. в области биомагнетизма во всем мире уже работало от 40 до 60 научных групп и представлялось к опубликованию 50–60 статей. Начиная с 1976 г. регулярно, обычно с интервалом два года, проводятся международ-

ные конференции по биомагнетизму. Первая из них состоялась в США, последующие — во Франции, Западном Берлине, Италии, Канаде, Финляндии и Японии. Если на первой конференции было всего 22 участника, то в 1984 г. в Ванкувере (Канада) — уже 150 официальных участников и в полтора раза больше научных докладов, чем на предыдущей конференции в 1982. Таким образом, биомагнетизм представляет собой весьма быстро развивающуюся область науки. Наиболее продуктивно работающие в этой области научные группы существуют в США, Канаде, Италии, Западном Берлине, Франции, Финляндии, из социалистических стран — в СССР, ЧССР, ГДР и ПНР.

Важнейшими особенностями области биомагнетизма являются, во-первых, ее междисциплинарный характер и, во-вторых, тесное переплетение глубоких фундаментальных исследований и чисто прикладных аспектов, которые уже сегодня могут найти практическое применение в медицине.

Исследования и разработки в области биомагнетизма требуют согласованного и четкого взаимодействия специалистов разных отраслей науки и техники — инженеров, физиков, биологов, медиков. Их традиционные сферы деятельности сильно различаются и объектами, и методологией исследования, а иногда требуют разных стилей мышления. Наибольших успехов добиваются те научные коллективы, в которых специалистам удастся не только найти общий язык и проникнуться общими целями, но и достаточно глубоко овладеть смежными специальностями.

Вероятно, нет смысла специально подчеркивать полезность биомагнитометрии для практических приложений — сейчас очевидно, что каждое методическое достижение в этой области может тут же быть использовано для получения новых сведений о живом организме, для проверки уже высказанных гипотез, в ряде случаев — для выявления патологических состояний при медицинском обследовании.

Одно из очевидных преимуществ биомагнитометрии перед общепринятыми биоэлектрометрическими методами — это возможность получать ценную информацию, не контактируя с объектом, а при исследовании на клеточном уровне — не повреждая клетки внутриклеточным микроэлектродом. Физические принципы, используемые в современных датчиках магнитной индукции, в частности, обеспечивают измерение медленно изменяющихся или постоянных биомагнитных полей. Очевидные недостатки биомагнитометрии — сложность, дороговизна и труднодоступность аппаратуры, а также сравнительно высокие технические требования к условиям измерения и к самой измерительной процедуре. Однако наблюдаемые сейчас тенденции в развитии приборостроения, измерительной и вычислительной техники вселяют надежду, что указанные трудности будут в обозримое время преодолены.

Важный аргумент в пользу биомагнитометрии заключается в том, что она способна дать информацию об организме, которую трудно или

вообще невозможно получить другими методами, в том числе при помощи биоэлектрметрии. В какой степени эта информация нова и независима от измерений электрического поля, — это вопрос, интенсивно исследуемый как теоретически, так и экспериментально.

Соотношение между электрическим и магнитным полями одного и того же биоэлектрического генератора существенно зависит от его конфигурации, т.е. пространственного распределения стороннего тока. Можно сказать, что магнитное поле несет ту же самую информацию о биоэлектрическом генераторе, что и электрическое поле, однако подвергнутую определенному преобразованию — как бы спроектированную на некую новую ось, благодаря чему во многих случаях облегчается ее выделение из помех и содержательная интерпретация.

Более того, теоретически возможны такие конфигурации биоэлектрического генератора, которые вообще не порождают во внешней среде электрическое поле, так что судить о них можно было бы лишь на основании данных биоманнитометрии. Тем не менее, поскольку конфигурация генератора обычно не известна заранее, вряд ли можно с уверенностью отдать во всех случаях предпочтение биоманнитометрическому методу.

По-видимому, наиболее целесообразный методологический подход к диагностической оценке состояния биологического объекта — это комплексное и всестороннее исследование его физических полей с использованием современной измерительной и вычислительной техники при тесной кооперации инженеров, биофизиков, физиологов, психологов, медиков и специалистов других профилей. Именно такой подход успешно реализуется, например, в Институте радиотехники и электроники АН СССР под руководством акад. Ю.В. Гуляева и проф. Э.Э. Годика [17].

Если иметь в виду более узкую диагностическую задачу, а именно оценку электрофизиологического состояния отдельных органов или, еще конкретнее, определение присущего им эквивалентного электрического генератора, то здесь представляется разумным измерять и анализировать их электрическое и магнитное поля (в низкочастотном диапазоне) совместно, учитывая их тесную взаимосвязь и используя оптимальным образом их сочетание. В то же время нельзя отрицать, что область биоманнитометрии имеет по сравнению с биоэлектрметрией ряд специфических особенностей, как в технических или чисто измерительных аспектах, так и в подходах к интерпретации измеренных данных. Несмотря на то что количество публикаций по биоманнитизму и, соответственно, по биоманнитометрии в последние годы резко возросло, до сих пор еще недостаточно работ, отражающих в обобщенном виде методологию этой области, достигнутые в ней теоретические и практические результаты. Имеется ряд обзорных статей на эту тему; к наиболее содержательным относится обзор Романи, Уильямсона и Кауфмана "Аппаратура для исследования биоманнитных по-

лей", опубликованный в русском переводе в 1982 г. [39]; в нем приведены главным образом сведения о технике измерений и совершенно недостаточно сказано об экспериментальных и прикладных аспектах, а также о физико-математической теории биомагнитометрии. Значительным вкладом в литературу по биомагнетизму явилась вышедшая недавно первая монография, посвященная данной проблеме — книга В.Л. Введенского и В.И. Ожогина "Сверхчувствительная магнитометрия и биомагнетизм" [9].

Цель авторов настоящей работы заключается в том, чтобы дать систематизированное изложение технических, прикладных и теоретических вопросов биомагнитометрии, уделяя особое внимание свойствам и теории происхождения биомагнитных полей. При обсуждении каждого вопроса мы стремились отразить современный уровень его разработки; в значительно меньшей мере освещены хронологические этапы развития исследований, проблемы научного приоритета и т.п. В связи с этим в книге интенсивно использованы некоторые статьи обобщающего и обзорного характера (особенно это относится к данным, полученным в ранний период развития биомагнитометрии); ссылки на первоисточники можно найти непосредственно в этих статьях. Естественно, что ограниченность объема работы не позволила рассмотреть все вопросы с максимальной подробностью, освобождая специалиста от необходимости обращения к другим материалам, излагающим результаты конкретных исследований и разработок. Но это и не входило в задачу авторов. Нам представляется, что эта работа может служить лишь введением в быстро развивающуюся и весьма перспективную область — биомагнитометрию.

Книга была написана в процессе сотрудничества словацких и советских специалистов в области биоэлектрических и биомагнитных измерений. Изложение технических и экспериментальных аспектов принадлежит в основном словацкому соавтору, изложение вопросов происхождения и математического описания биомагнитного поля — в основном советскому соавтору.

Авторы приносят искреннюю благодарность чл.-корр. АН УССР И.М. Дмитренко и доктору техн. наук В. Зрубецу за внимательный разбор рукописи и ценные замечания, канд. мед. наук Г.А. Шекутьеву, канд. биол. наук Ю.С. Левику и доктору биол. наук Е.И. Пальцеву за полезное обсуждение отдельных параграфов, а также Н.Е. Бариновой и М. Сламовой за помощь при подготовке рукописи к печати.

Мы будем считать свою работу не напрасной, если книга поможет специалистам, и особенно тем, кто начинает работать в области биомагнитометрии или пока только интересуется ее проблемами, уяснить ее основные идеи, методы, трудности, достигнутые результаты и ожидаемые полезные приложения.

П. Кнеппо, Л.И. Титомир

ТЕХНИКА БИОМАГНИТОМЕТРИИ

1.1. Объекты и условия измерения

Активные и пассивные электрические свойства биологических объектов. Биоэлектрическое и биомagnetное поля являются результатом жизнедеятельности биологических тканей и органов, клетки которых обладают электрогенными мембранами. К таким тканям относятся прежде всего возбудимая мышечная и нервная ткань, к органам — сердце, мозг, органы чувств и другие, состоящие в основном из этих тканей [6, 16, 19, 31, 34, 46, 48]. Во всех этих случаях ткань представляет собой совокупность клеток, причем внутреннее пространство каждой клетки, заполненное внутриклеточным веществом, отделено от окружающей клетку среды (внеклеточной жидкости) мембраной, которая обладает особыми свойствами. А именно, она имеет разные проницаемости для ионов разных типов, обычно присутствующих и внутри клетки, и вне ее. При этом концентрации ионов во внутриклеточном веществе и во внеклеточной жидкости сильно различаются. Особенно это относится к ионам натрия, калия, хлора и органических анионов. Например, в стационарных условиях в мышцах и нервах молокопитающих концентрация ионов калия существенно (в десятки раз) выше внутри клетки, чем снаружи, а концентрация ионов натрия и хлора, наоборот, существенно выше снаружи. Под действием концентрационных градиентов (и отчасти под действием так называемых сил активного переноса) ионы движутся через мембрану, преодолевая ее сопротивление. Эти потоки ионов, возникающие под влиянием неэлектрических сил, образуют так называемые сторонние токи, которые при описании электрофизиологических процессов в терминах электродинамики являются первичным биоэлектрическим генератором, порождающим как биоэлектрическое, так и биомagnetное поле.

Поскольку в состоянии покоя возбудимой ткани клеточная мембрана обладает наиболее высокой проницаемостью для ионов калия, они начинают вытекать из клетки, но при этом на мембране образуется разность потенциалов, препятствующая их вытеканию, и устанавливается равновесие. Эта равновесная разность между потенциалами внутренней и наружной поверхностей мембраны — трансмембранный по-

тенциал покоя (или просто потенциал покоя) обычно имеет значение приблизительно -90 мВ.

Важной особенностью возбудимых мембран является их способность избирательно изменять свою проницаемость для разных ионов под влиянием различных воздействий, или стимулов (физических, химических и др.). При этом происходит соответствующее изменение трансмембранного потенциала. Трансмембранный потенциал может быть изменен и непосредственным электрическим воздействием. Изменение трансмембранного потенциала, превышающее определенное пороговое значение, приводит к соответствующим изменениям мембранных проницаемостей (обычно быстрому возрастанию проницаемости для ионов натрия), и возникает импульс возбуждения — быстрое изменение трансмембранного потенциала в положительном направлении, т.е. в сторону деполяризации клетки, после чего в результате сложных процессов изменения и восстановления ионных проницаемостей восстанавливается потенциал покоя. Такое импульсное изменение трансмембранного потенциала называют трансмембранным потенциалом действия (или просто потенциалом действия). Амплитуда потенциала действия может достигать нескольких десятков милливольт. При развитии потенциала действия через мембрану начинает течь ток, в отличие от состояния покоя, когда суммарный электрический ток по нормали к мембране в каждой ее точке равен нулю. Таким образом, потенциал действия сопровождается импульсом мембранного тока.

Как потенциал действия, так и мембранный ток существуют не в отдельной точке, а на определенном участке мембраны. Вследствие того что возникает разность потенциалов между этим участком и окружающими проводящими областями, начинают течь токи, которые деполяризуют соседние области мембраны, и это приводит к распространению импульса возбуждения (потенциала действия) по клетке. Таким образом, мембранные токи, соответствующие потенциалу действия, осуществляют электрическую стимуляцию соседних участков мембраны. Если клетки ткани связаны между собой по типу электрического синцития (как, например, в миокарде), т.е. между их внутриклеточными областями имеются контакты с малым сопротивлением, то стимулирующее действие мембранного тока распространяется и на соседние клетки, приводя к непрерывному процессу охвата возбуждением всей ткани. При другом типе соединения между клетками — синаптическом (например, в нервной ткани) передача возбуждения на соседнюю клетку происходит благодаря тому, что возбужденная клетка в области контакта с соседней клеткой — в синапсе — воздействует определенными химическими веществами (медиаторами) на мембрану соседней клетки, вызывая избирательное изменение ее проницаемости для разных ионов. Это порождает изменение ионных потоков через мембрану, ее деполяризацию и развитие потенциала действия. Наряду с таким возбуждающим синаптическим воздействием возможно и тор-

мозащее, т.е. приводящее к смещению трансмембранного потенциала в отрицательном направлении — гиперполяризации. В ткани органов чувств специальные рецепторные клетки могут возбуждаться и генерировать потенциал действия под влиянием таких физических стимулов, как давление, свет и др.

Следует заметить, что при определенных условиях в ткани могут существовать сравнительно устойчивые локальные изменения трансмембранного потенциала, не приводящие к возникновению потенциала действия. Они могут быть вызваны патологическими изменениями или повреждением мембраны клеток на отдельных участках ткани (например, при очаговой ишемии миокарда). При этом между участками с разными значениями трансмембранного потенциала протекают очень медленно изменяющиеся, или квазипостоянные, токи.

Мембранные токи, растекающиеся по окружающей среде от возбужденных клеток, а также квазипостоянные токи создают электрическое и магнитное поля, которые могут быть зарегистрированы в области тела и вне его. Хотя первичным генератором этих полей являются мембранные концентрационные потоки ионов, для математического описания биоэлектрического генератора обычно удобнее использовать трансмембранный потенциал как функцию точки в пространстве и времени. Трансмембранный потенциал представляет собой довольно устойчивую характеристику, тесно связанную с электрофизиологическим состоянием ткани и поддающуюся экспериментальному измерению. Формулировка и анализ биоэлектрического генератора в терминах трансмембранного потенциала рассмотрены в гл. 3.

Поскольку токи, порождаемые биоэлектрическим генератором, растекаются в теле, которое имеет сложную анатомическую структуру и неоднородно по своим пассивным электрическим характеристикам, биоэлектрическое и биомagnetное поля также существенно зависят от этих характеристик.

Тело человека имеет "компарментальное" строение, т.е. подразделяется анатомически на отдельные органы, ткани и жидкости; по линейным размерам оно обычно вписывается в область с радиусом около 1 м. Расстояние области измерения биоэлектрического и биомagnetного полей человека от области биоэлектрических генераторов также обычно не превышает 1 м.

Тело характеризуется значительной неоднородностью пассивных электрических характеристик на всех структурных уровнях — на клеточном (микроскопическом) и тканевом (макроскопическом), а также на уровнях отдельных органов и тела в целом, причем некоторые ткани обладают явно выраженной анизотропией. Основными пассивными электрическими характеристиками вещества являются диэлектрическая и магнитная проницаемости, удельная электрическая проводимость (величина, обратная удельному сопротивлению).

Приведем некоторые экспериментальные данные для частот изменения электромагнитного поля не выше нескольких тысяч герц, указанные в [14, 20, 37, 38, 43, 154, 171, 176, 205 и др.] .

Относительная диэлектрическая проницаемость биологических материалов для постоянного электрического поля при температурах около 20 °С составляет от нескольких единиц (для вещества клеточных мембран) до 90 (для вещества мозга). По магнитным свойствам биологические материалы в подавляющем большинстве относятся к диамагнетикам (хотя в организме имеются и парамагнитные вещества). Их магнитная восприимчивость отрицательна, а относительная магнитная проницаемость несколько меньше единицы, однако это отличие не превышает 10^{-5} . Магнитные восприимчивости разных тканей и органов несколько различаются. Наибольшее различие существует между магнитными восприимчивостями легких, с одной стороны, и сердца с кровью в полостях — с другой. Для легких она вдвое меньше по абсолютной величине.

Биологические материалы, составляющие тело, чрезвычайно сильно различаются по значению удельной электрической проводимости. Минимальную удельную проводимость, около 10^{-7} См/м, имеет костная ткань, максимальную, около 1,5 См/м, — сыворотка крови и спинномозговая жидкость. Значительно различаются удельные проводимости внутриклеточного вещества у клеток разных типов; например, для разных отделов сердца они составляют от 0,05 до 0,95 См/м.

Клеточные мембраны, обычно имеющие относительно большую площадь поверхности и малую толщину, удобно характеризовать электрической проводимостью на единицу площади и емкостью на единицу площади. В частности, для клеток миокарда проводимость на единицу площади мембраны составляет от 0,7 до 80 См/м², а емкость на единицу площади — от $0,8 \cdot 10^4$ до $25 \cdot 10^4$ мкФ/м². Для нервных клеток эти величины находятся в пределах от 2 до 400 См/м² и от $0,55 \times 10^4$ до $1,1 \cdot 10^4$ мкФ/м² (эти данные получены в экспериментах на животных).

Если макроскопические участки ткани, состоящие из большого числа довольно плотно упакованных клеток, рассматриваются с позиций электродинамики как непрерывная, или континуальная, среда, то для ткани вводят характеристики, полученные в результате осреднения действительных характеристик электромагнитного поля и среды по объему, большому в сравнении с отдельной клеткой, но малому в сравнении с участками ткани, состояние которых изучается в данной конкретной задаче (локальное осреднение). В частности, осредненные, или эффективные, диэлектрические проницаемости и удельные электрические проводимости при низких частотах представлены для разных биологических сред в табл. 1.1.

Важно отметить, что скелетные мышцы и миокард обладают значительной анизотропией — удельная электрическая проводимость в на-

Таблица 1.1. Пассивные электрические параметры органов, тканей и жидкостей тела (эффективные, или локально осредненные, значения)

Орган, ткань, жидкость	Относительная диэлектрическая проницаемость для частоты, Гц			Удельная электрическая проводимость, См/м
	10^2	10^3	10^4	
Кровь	—	—	—	0,62
Мышца сердца:	800 000	300 000	100 000	
вдоль волокон				0,40
поперек волокон				0,18
Скелетные мышцы:	800 000	130 000	50 000	
вдоль волокон				0,67
поперек волокон				0,04
Мозг:	270 000	50 000	—	
серое вещество				0,40
белое вещество				0,15
Череп	—	—	—	0,005
Скальп	—	—	—	0,30
Легкие	450 000	90 000	30 000	0,05
Печень	900 000	150 000	50 000	0,14
Жировая ткань	150 000	50 000	20 000	0,04
Туловище человека в целом	—	—	—	0,22

Примечание. Значения диэлектрической проницаемости для частоты 10 Гц в 3–10 раз больше, чем для частоты 10^2 Гц.

правлении осей клеток в несколько раз превышает удельную электрическую проводимость поперек осей. То же самое можно сказать об участках белого вещества мозга с упорядоченным (параллельным) расположением волокон.

Согласно результатам экспериментов максимальные частоты изменения электромагнитного поля возбудимых тканей, представляющие интерес при электрофизиологических исследованиях, не превышают 1000 Гц.

Свойства биомагнитного поля (характер его изменения во времени и распределения в пространстве) зависят от свойств конкретной биологической ткани, порождающей это поле. Наиболее типичные параметры биомагнитных сигналов различных органов человека даны в табл. 1.2. Приведенные здесь данные фактически указывают лишь порядок измеряемых величин, так как они могут различаться в конкретных экспериментах в зависимости от объекта, методики и техники измерения и т.п.

Следует отметить, что имеется довольно высокая корреляция между амплитудами и частотами электрических и магнитных сигналов от одного и того же биологического объекта. Например, амплитуды наиболее сильного биоэлектрического сигнала — электрокардиограммы —

Таблица 1.2. Параметры биоманнитных сигналов [159, с. 123]

Орган тела и генерируемый им биоманнитный сигнал	Амплитуда магнитной индукции, пТл	Границы спектра магнитной индукции, Гц
Сердце, магнитокардиограмма	50	0,05–100
Сердце, магнитокардиограмма высокого разрешения	0,2	0,05–300
Сердце плода, магнитокардиограмма плода	1	0,05–100
Мозг, магнитоэнцефалограмма	1	0,5–30
Мозг, вызванные биоманнитные поля (зрительные, осязательные, слуховые)	0,1	0–60
Скелетные мышцы, магнитомиограмма	10	0–2000
Глаз, магнитоокулограмма	10	0
Глаз, магниторетинограмма	0,1	0,1–30

имеют порядок милливольт, а амплитуды вызванных биоэлектрических полей мозга — порядок микровольт. Дополнительные сведения о свойствах биоманнитных сигналов можно найти в обзорах [9, 39, 81, 149, 205].

Магнитные помехи. Наряду с исследуемым биоманнитным полем в области измерения всегда присутствуют мешающие магнитные поля, или магнитные помехи. Их можно подразделить на две категории: магнитные поля того же самого биологического объекта, не подлежащие исследованию в данном конкретном эксперименте (см. табл. 1.2), и магнитные поля, обусловленные внешними по отношению к объекту генераторами (естественного и искусственного происхождения) [9, 37, 39, 72, 144, 159, 191, 205].

Из внешних магнитных полей наиболее сильным является естественное поле Земли, обусловленное электрическими токами в земной коре. Характеризуя интенсивность поля, будем обычно использовать модуль вектора магнитной индукции (при использовании других характеристик делаются соответствующие оговорки). Постоянная составляющая магнитного поля Земли, или геомагнитного поля, равна 50–70 мкТл (в зависимости от географического положения), причем около 80 % этого значения определяется магнитным диполем, расположенном в центре земного шара. Пространственный градиент геомагнитного поля невелик — он составляет 10–20 пТл/м. Геомагнитное поле медленно изменяется во времени в результате планетарных взаимодействий и ионосферных процессов. Такие изменения наблюдаются в частотном диапазоне 10^{-4} – 10^2 Гц и зависят от географического положения, сезона и времени суток. Спектральное среднеквадратичное значение этих флуктуаций быстро убывает с увеличением частоты, причем это

значение на частоте 1 Гц обычно равно 20–100 пТл/Гц^{1/2}. Пространственный градиент флуктуаций очень мал, его спектральное среднеквадратичное значение не превышает 0,1 пТл/(м·Гц^{1/2}).

Равномерность геомагнитного поля может быть заметно искажена под влиянием крупных предметов из ферромагнитного материала (элементы конструкций зданий из стали и т.п.). Например, на расстоянии 1 м от ферромагнитного объекта с объемом 1 см³ градиент поля изменяется приблизительно на 50 пТл/м, т.е. на значение, превышающее градиент геомагнитного поля. Значительные помехи, связанные с геомагнитным полем, могут возникнуть при движениях измерительного прибора, особенно вращательных. Например, поворот его вокруг горизонтальной оси на 10⁻⁸ рад приводит к изменениям измеряемой составляющей магнитного поля приблизительно на 0,5 пТл.

Из искусственных источников магнитных помех наиболее сильным является сеть электропитания; она создает магнитное поле с амплитудой до нескольких сотен тысяч пикотесл и с градиентом 500–20 000 пТл/м. Вдали от промышленных центров амплитуда такой помехи имеет порядок 10 пТл, а в сильно зашумленных местах — около 100 000 пТл. Источниками магнитных помех являются также различные технические устройства, двигатели, транспортные средства и предметы из материалов, хорошо проводящих электрический ток (в них индуцируются вихревые токи, порождающие магнитное поле). Магнитные помехи создаются также высокочастотными радиоволнами. Наконец, магнитные помехи самого низкого уровня порождаются электрическими токами, обусловленными тепловым шумом в электропроводящих телах.

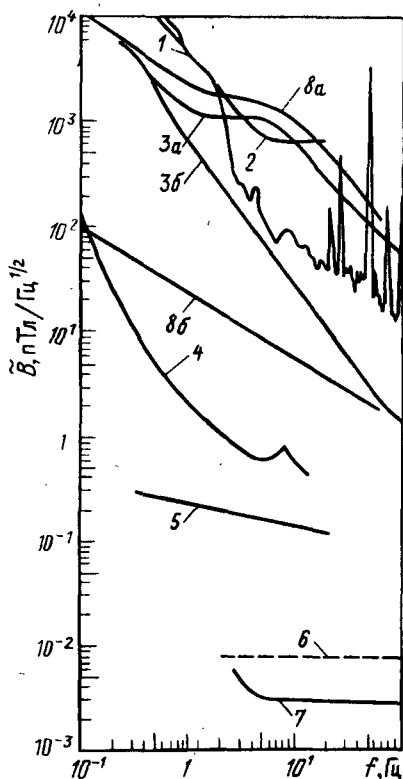
Для того чтобы уменьшить влияние магнитных помех от искусственных источников, экспериментальные лаборатории, в которых проводятся биомагнитные измерения, по возможности размещают на большом удалении от промышленных предприятий и крупных населенных пунктов. Другой способ уменьшения влияния внешних магнитных помех — создание специальных экспериментальных комнат, или камер с магнитной экранировкой. Спектры магнитных помех для некоторых конкретных условий измерения представлены на рис. 1.1.

Магнитное экранирование. Во многих случаях требования к биомагнитным измерениям таковы, что их необходимо осуществлять вблизи мощных источников магнитных помех. При этом наиболее эффективный способ борьбы с помехами — конструирование магнитной экранировки, защищающей объект исследования и измерительную аппаратуру от влияния внешних полей.

Известны два основных принципа экранирования — пассивное и активное [9, 72, 208 и др.]. При пассивном экранировании используют явления намагничивания мягких ферромагнитных материалов и индуцирования вихревых токов в материалах, хорошо проводящих электрический ток; при активном экранировании искусственно создают маг-

Рис. 1.1. Спектры магнитных помех в различных условиях, выраженные как спектральные среднеквадратичные значения магнитной индукции B в зависимости от частоты [39, с добавлением]:

1 — госпиталь в Хельсинки; 2 — лаборатория в Западном Берлине; 3 — лаборатория в Хельсинки (а — в условиях сильного шума, б — в условиях слабого шума); 4 — г. Станфорд (типичная геомагнитная активность); 5 — камера с экранированием при помощи вихревых токов в г. Тампере; 6 — комната с магнитной экранировкой в Массачусетском технологическом институте; 7 — камера с магнитной экранировкой в Западном Берлине; 8 — лаборатория в Братиславе (а — в условиях сильного шума, б — в условиях слабого шума). На кривой 1 показана типичная структура, изменяющаяся в зависимости от уровня активности различных источников помехи и отражающая шумы на частоте сети электропитания и на гармониках этой частоты. Остальные кривые сглажены, вследствие чего на них отсутствуют мелкие детали



нитное поле, компенсирующее внешнюю магнитную помеху. В конструкции экспериментальных комнат, или камер с магнитной экранировкой, нередко используют сочетание разных принципов экранирования.

Для ферромагнитного экранирования применяют материалы с относительной магнитной проницаемостью порядка $10^4 - 10^5$ (железо, пермаллой, мю-металл и др.). Пространство, где проводятся измерения, окружают полностью или частично стенками из такого материала. Ферромагнитный слой является областью малого магнитного сопротивления, в которой концентрируется большая часть внешнего магнитного потока, благодаря чему уменьшается магнитный поток внутри камеры. Наиболее эффективны экраны из нескольких слоев ферромагнитного материала толщиной несколько миллиметров каждый. Для увеличения магнитной проницаемости экрана осуществляют его "встряхивание" при помощи сильного переменного внешнего магнитного поля (для этой цели на стенках камеры устанавливают специальные катушки). Такое магнитное экранирование эффективно в области частот от нуля до нескольких мегагерц. При повышении частоты характеристики экрана ухудшаются.

Для экранирования при помощи вихревых токов применяют металлы с большой удельной проводимостью около $10^7 - 10^8$ См/м (медь, алюминий). Если пространство измерения окружено оболочкой из такого материала, то внешнее переменное магнитное поле индуцирует в ней вихревые токи, магнитное поле которых компенсирует внешнее магнитное поле в самом экране и во внутреннем пространстве камеры. Эффективность экрана с вихревыми токами зависит от соотношения между его толщиной и частотой магнитного поля помехи, причем толщина должна быть тем больше, чем ниже подавляемые частоты. Так, для защиты от магнитного поля, создаваемого сетью электропитания, необходима оболочка толщиной несколько сантиметров.

Для того чтобы обеспечить удовлетворительное экранирование в достаточно широком диапазоне частот, стенки камер изготавливают из нескольких чередующихся слоев ферромагнитного материала и материала с большой удельной электрической проводимостью.

Для магнитного экранирования небольших участков пространства (соизмеримых с размерами отдельных частей тела) возможно применение сверхпроводящих оболочек, однако реализация этого метода затруднена из-за необходимости поддержания достаточно низких температур в области экрана.

Система активного экранирования обычно состоит из нескольких магнитометров, измеряющих поле помехи в области измерения, совокупности катушек, создающих компенсирующее поле, и специальной схемы регулирования, управляющей катушками по принципу обратной связи. Достичь значительной компенсации магнитных помех особенно трудно при сложной пространственной форме поля помехи. Обычно активное экранирование используют не самостоятельно, а в сочетании с пассивным для улучшения характеристик экранирования на низких частотах.

В разных научных лабораториях построены экранированные камеры разных форм (цилиндрические, сферические, кубические и др.). Размеры камеры выбирают таким образом, чтобы в ней можно было разместить по крайней мере испытуемого, нужные приборы и экспериментатора.

При строительстве экранированных камер возникает целый ряд сложных проблем: обеспечение хорошего электрического и магнитного контакта между отдельными конструктивными элементами ферромагнитной и высокопроводящей оболочек, уменьшение влияния неоднородности материала и нарушений непрерывности оболочки (из-за наличия входной двери камеры и отверстий для соединительных устройств), сведение к минимуму механических колебаний и деформаций и т.д. В связи с этим стоимость изготовления экранированных камер для биомагнитных измерений очень высока. В настоящее время достаточно совершенными экранированными камерами располагают лишь около десяти научных учреждений мира.

Современные устройства экранирования обеспечивают подавление магнитной помехи от сети электропитания на 40–80 дБ. Наилучшие образцы экранированных камер снижают уровень магнитных помех на низких частотах по сравнению с пространством вне камеры в 10^4 – 10^6 раз, причем на частотах выше 5 Гц уровень помехи не превышает 0,003 пТл/Гц^{1/2}.

Более подробные сведения о методах защиты от магнитных помех и конструкциях конкретных экранированных камер приведены в [9].

Эффективным средством компенсации мешающего магнитного поля в измерительных приборах являются специальные системы катушек типа градиометров. Они обеспечивают исключение магнитного поля удаленных источников из измеряемого сигнала, если это поле обладает определенными свойствами пространственной равномерности. Этот вопрос будет обсужден ниже при рассмотрении конструкции сквид-магнитометров.

Целесообразность применения различных способов борьбы с магнитным полем помехи (удаление от источников помехи, экранирование, применение градиометрических приборов) должна быть определена конкретными задачами и условиями биомагнитного исследования.

1.2. Сквид-магнитометры

Основные типы магнитометров. Поскольку биомагнитные поля в тысячи и даже миллионы раз слабее, чем естественные и искусственные магнитные поля окружающей среды, к приборам для их измерения, или магнитометрам, предъявляются очень высокие требования. Они должны обладать высокой чувствительностью и в то же время должны быть пригодны для измерения слабых исследуемых полей в присутствии очень сильных магнитных помех. Известно несколько основных типов таких приборов, основанных на разных физических принципах (см. [9, 39, 159, 205]). Исторически первыми были применены для биомагнитных измерений магнитометры, основанные на индукционных катушках, или индукционные магнитометры. Позже были предприняты попытки использовать для этих целей магнитометры с датчиками типа феррозондов, а также с квантовыми резонансными (в том числе с оптической накачкой) и магнитострикционными датчиками. В последние годы доминирующее положение в биомагнитометрии заняли так называемые сквид-магнитометры, базирующиеся на сверхпроводниковых квантовых интерферометрах (их сокращенное название "сквид" эквивалентно английской аббревиатуре SQUID). По своей исключительно высокой чувствительности они находятся практически вне конкуренции. Однако им присущи и недостатки — слишком сложная конструкция, высокая стоимость изготовления и эксплуатации и, главное, трудности и неудобства, связанные с необходимостью поддержания сверхпроводящих элементов прибора при тем-

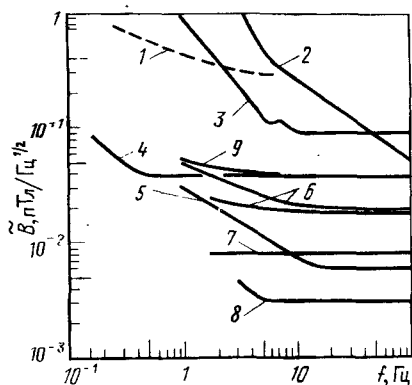


Рис. 1.2. Спектры шумов магнитометров различных типов в реальных условиях работы, выраженные как спектральные среднеквадратичные значения магнитной индукции $\vec{B}$ в зависимости от частоты [39, 190]:

1 — феррозондовый магнитометр НАСА в камере с магнитной экранировкой; 2 — магнитометр с индукционной катушкой (диаметр около 20 см) в камере с экранированием при помощи вихревых токов; 3 — сквид-магнитометр с градиометром второго порядка (диаметр катушек 2,4 см, база 3,2 см) в городской лаборатории; 4 — сквид-магнитометр с градиометром второго порядка (диаметр катушек 2,9 см, база 5 см, возможна балансировка по градиенту) в пригородной лаборатории; 5 — сквид-магнитометр с градиометром второго порядка (диаметр катушек 4,8 см, база 12 см) вдали от источников магнитных помех; 6 — сквид-магнитометр с градиометром первого порядка в пригородной лаборатории (во время работы местной радиостанции и когда она не работает); 7 — простой сквид-магнитометр (диаметр катушки 2,8 см) в камере с магнитной экранировкой Массачусетского технологического института, где чувствительность измерений ограничивалась собственным шумом датчика; 8 — простой сквид-магнитометр (диаметр катушки 5 см) в камере с магнитной экранировкой в Западном Берлине, где чувствительность измерений ограничивалась внешними магнитными помехами; 9 — сквид-магнитометр с градиометром второго порядка (диаметр катушек 2,7 см, база 4,5 см) в неэкранированной лаборатории "Биомаг" в Братиславе

пературах ниже критической (несколько градусов по термодинамической шкале). Поэтому пока не утратили своего значения магнитометры других типов. В некоторых случаях их успешно применяют для измерения магнитных полей биологических объектов [25, 47, 106, 159 и др.]. Сравнение спектров шумов магнитометров разных типов представлено на рис. 1.2.

Принцип действия сквид-магнитометра. Сквид-магнитометр был впервые применен для измерения биоманитного поля Козном с соавторами в 1970 г. [84], а в настоящее время приборы этого типа используются подавляющим большинством исследователей, работающих в области биоманитизма. Теория магнитометрических приборов, основанных на эффектах Джозефсона, разработана довольно подробно и изложена в многочисленных книгах и статьях [9, 12, 15, 21, 26–28, 33, 36, 39, 53, 70, 72, 118, 119, 165, 179, 182, 192, 205, 207, 208, 210 и др.]. Сведения о сквид-магнитометрах, используемых для биоманитных измерений в СССР, можно найти в [7, 9]. Ниже будет дано лишь самое общее представление о принципе действия, конструкции и условиях эксплуатации сквид-магнитометров.

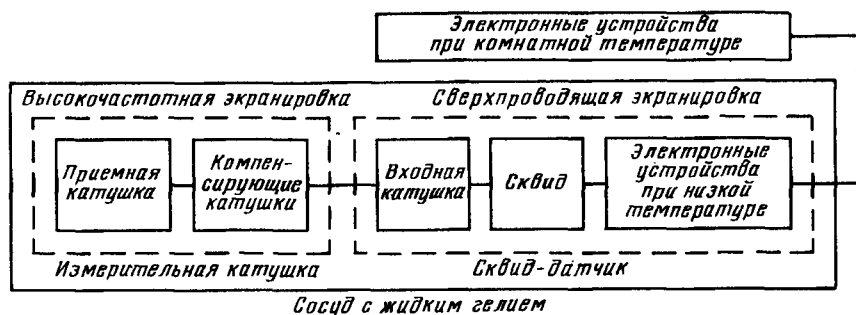


Рис. 1.3. Структурная схема сквид-магнитометра [159, с. 123]

Основными частями сквид-магнитометра являются: измерительная катушка (или система катушек), сквид-датчик и электронная схема управления (рис. 1.3). Главный элемент сквид-датчика — это сверхпроводниковый квантовый интерферометр, или сквид, чувствительный к магнитному потоку. Сквид представляет собой кольцеобразную структуру из сверхпроводящего материала (например, из ниобия) с одним или двумя так называемыми слабыми звеньями, или слабыми связями (джозефсоновскими контактами). Кольцо с одним контактом возбуждается высокочастотным сигналом, поэтому соответствующий датчик называется высокочастотным сквид-датчиком. Кольцо с двумя контактами возбуждается постоянным током, и соответствующий датчик называется сквид-датчиком постоянного тока. Известны различные топологические модификации скивдов, причем физические свойства слабой связи могут различаться в зависимости от технологии ее изготовления. Наиболее известны слабые связи типа точечного контакта, туннельного перехода и мостика. На рис. 1.4 показаны некоторые практические конструкции скивдов. На высокочастотном скивде непосредственно устанавливают сверхпроводящую входную катушку и высокочастотную катушку колебательного контура управляющей электронной схемы. Применяются и более сложные конструкции скивдов, в том числе многопетлевые, с катушками различных форм и т.д.

Для намотки измерительной катушки, или антенны, применяют проволоку из сверхпроводника. Во многих случаях измерительная катушка имеет сложную структуру — состоит из нескольких определенным образом соединенных катушек, что обеспечивает подавление (компенсацию) магнитных помех от удаленных источников. Такие системы катушек, называемые градиометрическими, будут рассмотрены ниже. Входная катушка также является сверхпроводящей и вместе с измерительной катушкой создает замкнутую сверхпроводящую цепь — трансформатор магнитного потока, который преобразует изменения измеряемого магнитного потока в пропорциональные им изменения магнитного потока, создаваемого входной катушкой.

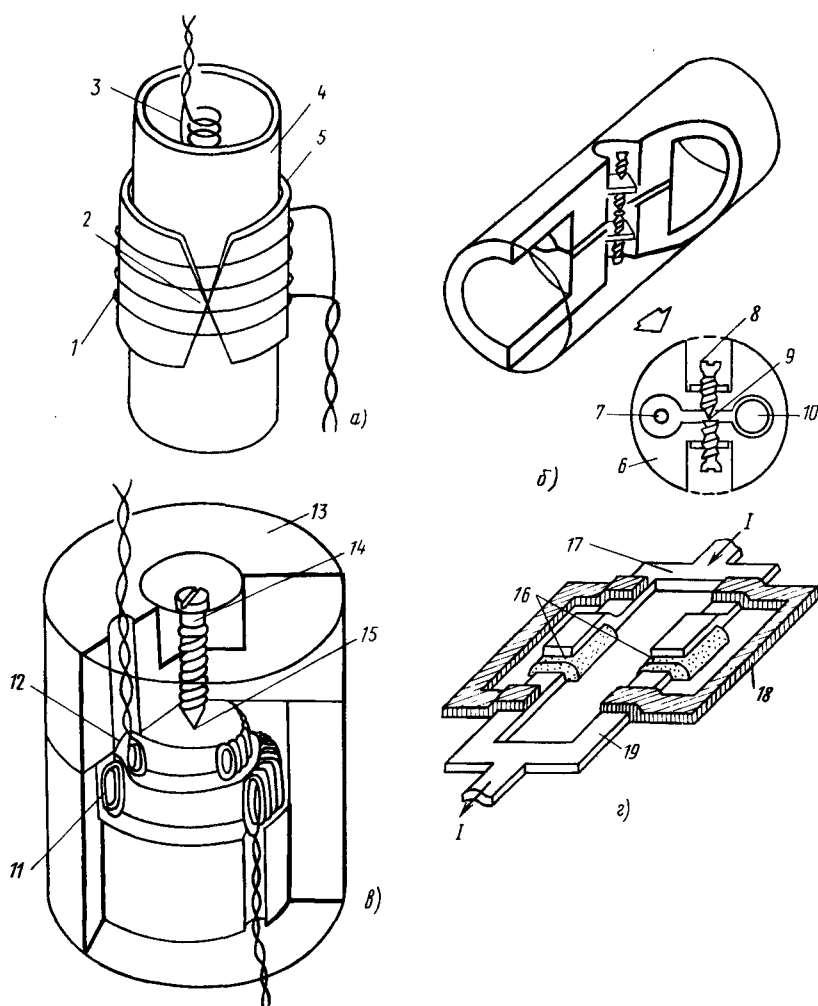


Рис. 1.4. Некоторые типы скиндов [39; 72, с. 69]:

а — цилиндрический тонкопленочный высокочастотный скиндив (1 — входная катушка, 2 — слабая связь типа мостика, 3 — высокочастотная катушка, 4 — диэлектрический каркас, 5 — тонкая сверхпроводящая пленка); *б* — двухдырочный высокочастотный скиндив (6 — ниобиевый корпус, 7 — высокочастотная катушка, 8 — винт с заостренным концом, 9 — слабая связь типа точечного контакта, 10 — входная катушка); *в* — тороидальный высокочастотный скиндив (11 — входная катушка, 12 — высокочастотная катушка, 13 — ниобиевый корпус, 14 — винт с заостренным концом, 15 — слабая связь типа точечного контакта); *г* — скиндив постоянного тока (16 — диэлектрические барьеры, образующие слабую связь типа туннельного перехода, 17 — сверхпроводник, 18 — резистивный шунт, 19 — сверхпроводник)

Все сверхпроводящие элементы сквид-магнитометра размещены в криостате. Обычно это сосуд Дьюара с жидким гелием, имеющий хорошую тепловую изоляцию; в нем поддерживается температура 4,2 К, обеспечивающая требуемое состояние сверхпроводимости.

Работа сквид-датчика основана на сложном физическом явлении — макроскопической квантовой интерференции. В сверхпроводящем кольце, тесно связанном индуктивно с входной катушкой, возникает электрический ток, который является сложной функцией параметров джозефсоновского контакта, индуктивности кольца и магнитного потока входной катушки, а также зависит от способа возбуждения сквид-датчика. Сигнал сквида поступает в электронную схему управления, которая вырабатывает выходное напряжение, пропорциональное магнитному потоку, воздействующему на сквид, а следовательно, и измеряемому магнитному потоку. Сквид-датчик можно уподобить преобразователю тока в напряжение, обладающему очень большим коэффициентом усиления, чрезвычайно низким уровнем шума, большим динамическим диапазоном, линейностью передаточной характеристики и широкой полосой пропускания, начинающейся от нулевой частоты. Типичный коэффициент преобразования сквид-датчика имеет порядок 10^7 В/А.

В высокочастотном сквид-магнитометре (рис. 1.5, а) кольцо сквида индуктивно связано с высокочастотным колебательным контуром, который накачивается при помощи внешнего генератора с частотой от нескольких десятков до нескольких сотен мегагерц, равной собственной частоте контура. Влияние на этот колебательный контур квантовых электродинамических процессов, происходящих в сквиде, можно рассматривать феноменологически как изменение полного сопротивления контура. При изменении входного магнитного потока (создаваемого током входной катушки) полное сопротивление и, следовательно, выходное напряжение контура испытывают изменения, периодические по потоку с периодом, равным кванту магнитного потока $\Phi_0 = 2,07 \times 10^{-15}$ Вб. Управляющая электронная схема, содержащая обратные связи, обеспечивает усиление и детектирование высокочастотного сигнала, линеаризацию выходного напряжения по отношению к входному магнитному потоку, а также поддержание оптимального режима работы сквида и колебательного контура. При этом сквид фактически служит нуль-индикатором, а сквид-датчик в целом работает как высококачественный параметрический усилитель, на выходе которого получается сигнал, пропорциональный измеряемому магнитному потоку.

В сквид-магнитометре постоянного тока (рис. 1.5, б) кольцо сквида имеет два джозефсоновских контакта с одинаковыми характеристиками, причем на кольцо подается постоянный ток, протекающий параллельно через оба слабых звена. В этом случае изменения входного магнитного потока через кольцо при определенном уровне постоянного тока, индуктивности кольца и определенных параметрах джозеф-

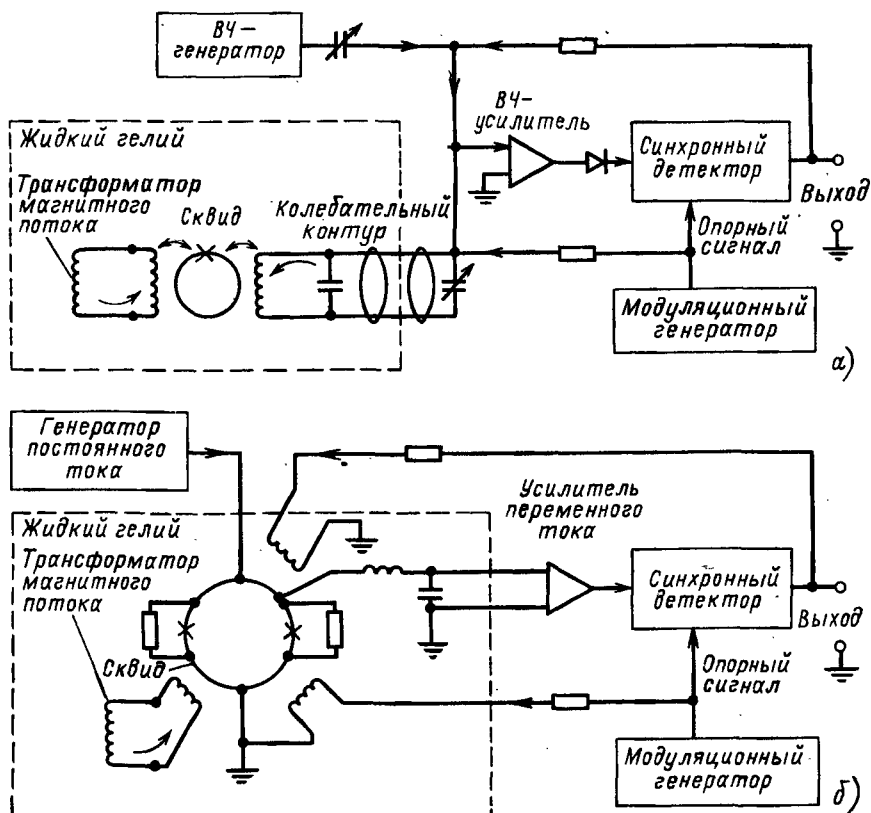


Рис. 1.5. Структурные схемы высокочастотного сквид-магнитометра (а) и сквид-магнитометра постоянного тока (б) [39]

соновских контактов оказывают влияние на выходное напряжение. Таким образом, здесь выходное напряжение сквида, как и выходное напряжение колебательного контура высокочастотного сквид-датчика, является периодической по магнитному потоку функцией входного магнитного потока с периодом, равным кванту магнитного потока. Обычно сквид-датчик постоянного тока также имеет управляющую электронную схему с обратной связью, которая поддерживает постоянство магнитного потока через кольцо сквида и обеспечивает получение выходного сигнала, пропорционального измеряемому магнитному потоку. В схеме предусмотрены дополнительные устройства — резистивные шунты для слабых звеньев, устраняющие явление гистерезиса, контур для согласования малого полного сопротивления сквида с большим входным полным сопротивлением усилителя и др.

Шумы на выходе сквид-датчика по происхождению делятся на три группы: собственный шум сквида, шум колебательного контура и шум усилителя. Обычно у высокочастотных сквид-датчиков преобладают шумы колебательного контура и усилителя, тогда как у сквид-датчиков постоянного тока — собственный шум сквида.

Существуют разные способы оценки суммарного влияния всех указанных выше шумов на чувствительность сквид-датчика. Практически наиболее удобная характеристика — это входная энергетическая чувствительность, которая определяется как средняя спектральная плотность энергии, подаваемой на входную катушку сквида, при которой напряжение на выходе сквид-датчика имеет спектральную плотность мощности, равную спектральной плотности мощности суммарного шума. Входная энергетическая чувствительность зависит от частоты и выражается в единицах джоуль на герц. Входные энергетические чувствительности в функции частоты для сквид-датчиков некоторых типов представлены на рис. 1.6. Благодаря технологическим усовершенствованиям входная энергетическая чувствительность сквид-датчиков сейчас уже достигает значений около 10^{-34} Дж/Гц, т.е. фактически приближается к квантовому пределу.

Теоретические и экспериментальные исследования последних лет показывают, что сквид-датчики постоянного тока обеспечивают более высокую чувствительность по сравнению с высокочастотными сквид-датчиками, особенно в области сравнительно высоких частот. Кроме того, сквид-датчики постоянного тока проще и удобнее в эксплуатации, так как для них требуются менее сложные управляющие электронные устройства. Вместе с тем они довольно сложны в изготовлении, однако эта трудность преодолевается благодаря развитию технологии тонких пленок. В настоящее время в области биомагнитометрии часто используются высокочастотные сквид-датчики; более перспективными являются сквид-датчики постоянного тока.

Криогенное оборудование. Важная роль, которую играют низкотемпературные условия при биомагнитных измерениях, объясняется прежде всего тем, что чувствительность датчиков любых типов, включая и магнитные, в принципе ограничена равновесными термодинамическими флуктуациями (иначе говоря, тепловыми флуктуациями, или шумом Найквиста); эти флуктуации могут быть уменьшены посредством охлаждения датчика. Кроме того, сквид-датчики, использующие явление сверхпроводимости, могут функционировать лишь ниже определенного температурного уровня — температуры перехода в сверхпроводящее состояние, или критической температуры (для ниобия она равна 9,2 К). Для поддержания таких условий используются специальные устройства — криостаты. Наиболее широко распространены криостаты с жидким гелием, который при атмосферном давлении имеет температуру кипения около 4,2 К. Для хранения жидкого гелия и применения его в качестве хладагента служат специальные вакуумно-изолирован-

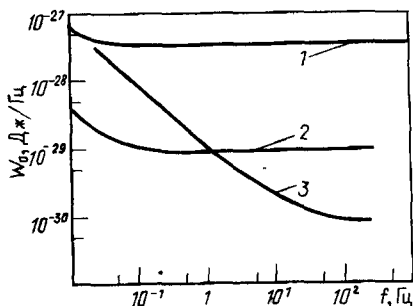


Рис. 1.6. Частотные зависимости входной энергетической чувствительности W_0 некоторых сквид-датчиков [39]:

1 — датчик с тороидальным высокочастотным сквидом, входная индуктивность $L_{вх} = 2$ мкГн; 2 — датчик со сквидом постоянного тока первого поколения, $L_{вх} = 0,4$ мкГн; 3 — датчик с более современным сквидом постоянного тока, $L_{вх} = 2,3$ мкГн

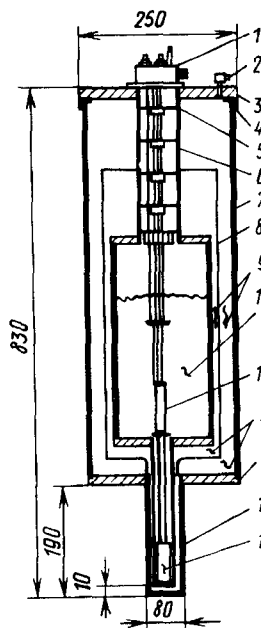


Рис. 1.7. Типичный сосуд Дьюара с магнитометром для биомангнитных измерений [73, с. 21]:

1 — зонд магнитометра; 2 — клапан для откачки; 3 — верхняя крышка; 4 — резиновая герметичная прокладка; 5 — отражательные экраны; 6 — горловина; 7 — наружный корпус; 8 — экранировка, охлаждаемая парами гелия; 9 — суперизоляция; 10 — жидкий гелий в резервуаре; 11 — сквид-датчик; 12 — вакуумное пространство; 13 — нижний фланец; 14 — хвостовик; 15 — измерительная катушка (размеры указаны в миллиметрах)

ные сосуды Дьюара. Типичные сосуды Дьюара для магнитометров вмещают от 5 до 15 л жидкого гелия, причем из них испаряется от 1 до 3 л гелия в сутки соответственно.

Упрощенная схема сосуда Дьюара с зондом магнитометра внутри показана на рис. 1.7. Обычно сосуды изготовляют из упрочненных пластмасс, например из смеси эпоксидной смолы и стекловолокна. Резервуар для гелия подвешивается к верхней пластине корпуса своей горловиной, через которую осуществляется доступ в резервуар. Горловина изготовлена в виде тонкостенной трубки для уменьшения теплопроводности; она является наиболее слабым элементом конструкции сосуда, поэтому необходимо предусмотреть для нее повышенный запас прочности на случай больших нагрузок при транспортировке. В нижней части гелиевого резервуара обычно имеется хвостовик уменьшенного диаметра, в котором размещается измерительная катушка. Из прост-

ранства между гелиевым резервуаром и наружным корпусом откачивают воздух, чтобы уменьшить проведение тепла через газ. На внешней поверхности гелиевого резервуара приклеен газопоглотитель с "молекулярным ситом" или древесным углем для захвата просочившегося сюда газа. Для уменьшения радиационного теплообмена вакуумное пространство заполняется тепловым экраном, состоящим из одной или нескольких пластин, охлаждаемых потоком паров гелия, и так называемой суперизоляции — многочисленных слоев алюминированного майлара. Суперизоляция отражает тепловое излучение, а охлаждаемые парами гелия пластины (изготовленные из пластмассы и армированные тонкой проволокой или полосками из алюминия или меди) поглощают тепловое излучение и проводят тепло к горловине, где оно передается холодному потоку испарившегося гелия, медленно поднимающемуся вверх по горловине.

Металлические элементы сосуда Дьюара могут создавать помехи для сквид-датчика под влиянием тепловых шумов, вихревых токов, наводимых внешними магнитными полями, и токов, порождаемых существующими в сосудах большими температурными градиентами. Для уменьшения этих шумов принимают специальные меры, которые в основном сводятся к уменьшению сплошных металлических масс и исключению замкнутых проводящих контуров в конструкции сосуда.

Дороговизна гелия, трудоемкость и неудобство работы с сосудами Дьюара заставляют исследователей обращать внимание на криорефрижераторные устройства для получения температур сверхпроводимости, не требующие применения жидкого гелия. К ним относятся криорефрижераторы, работающие на основе цикла Стирлинга, эффекта Джоуля—Томсона и других физических принципов, в том числе одноступенчатые и многоступенчатые, с комбинированными ступенями, миниатюрные пластмассовые и другие, однако пока не создано устройство такого типа, вполне удовлетворяющее требованиям к аппаратуре для биоманнитометрии. Более подробно методы получения низких температур для этих целей описаны в [9, 39, 72, 73].

Трансформатор потока и градиометрические измерительные катушки. Хотя известны сквид-датчики, в которых сквид непосредственно воспринимает измеряемое магнитное поле [207, 208], обычно в приборах для биоманнитных измерений применяется измерительная катушка, связанная со сквидом при помощи трансформатора магнитного потока. Целенаправленный выбор размеров и геометрической формы измерительной катушки позволяет свести к минимуму влияние мешающих внешних магнитных полей.

Трансформатор потока представляет собой замкнутую сверхпроводящую цепь, состоящую из измерительной катушки и входной катушки, индуктивно связанной со сквидом. В общем случае измерительная катушка может иметь довольно сложную, так называемую градиометрическую структуру, в которую входит основная, или приемная, катуш-

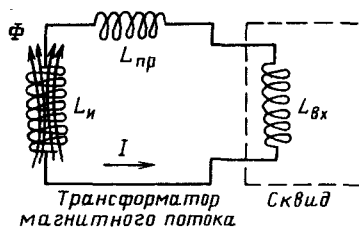


Рис. 1.8. Схема трансформатора магнитного потока

ка (ближайшая к исследуемому биоэлектрическому генератору) и одна или несколько компенсирующих катушек. Обычно трансформатор потока изготавливают из ниобиевой проволоки. Схема трансформатора потока представлена на рис. 1.8. Измерительная и входная катушки имеют индуктивности $L_{и}$ и $L_{вх}$ соответственно, индуктивность соединительных проводов $L_{пр}$ относительно мала, и ею обычно пренебрегают.

Замкнутый сверхпроводящий контур обладает следующими характеристическими свойствами: если пронизывающий его магнитный поток, создаваемый внешним источником, изменяется, то в контуре возникает ток, который порождает магнитный поток, равный по абсолютной величине и противоположный по знаку изменению потока от внешнего источника, т.е. компенсирующий это изменение.

Пусть на измерительную катушку воздействует внешний магнитный поток Φ . В контуре трансформатора потока индуцируется ток I и возникает соответствующий магнитный поток, равный $I(L_{и} + L_{вх})$. Вышеуказанное условие равенства внешнего и собственного потоков контура дает

$$I = \Phi / (L_{и} + L_{вх}) \quad (1.1)$$

(поток Φ условимся считать положительным, если он образует правовинтовую систему с током в контуре). Пусть измерительная катушка имеет структуру простого магнитометра (состоит из одной приемной катушки); тогда магнитный поток через нее можно выразить как

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции и $d\mathbf{S}$ — векторная элементарная площадь поверхности, ограниченной витками катушки (положительное направление $d\mathbf{S}$ образует правовинтовую систему с током в контуре).

При использовании плоской измерительной катушки с $N_{и}$ витками и площадью витка $A_{и}$ и допущении, что магнитная индукция равномерно распределена в пределах катушки, вместо (1.2) можно записать

$$\Phi = A_{э,и} \cdot \mathbf{B} = A_{э,и} B_{и} = N_{и} A_{и} B_{и}, \quad (1.3)$$

где $A_{э,и}$ — эффективная векторная площадь витка измерительной катушки, $A_{э,и} = N_{и} A_{и}$ — ее абсолютное значение и $B_{и}$ — проекция вектора магнитной индукции в области катушки (в дальнейшем она

называется просто магнитной индукцией в точке измерения) на направление векторной площади витка (совпадающее с осью катушки).

Подстановка (1.3) в (1.1) дает

$$I = N_{\text{и}} A_{\text{и}} B_{\text{и}} / (L_{\text{и}} + L_{\text{вх}}). \quad (1.4)$$

Индуктивность измерительной катушки можно выразить как [72]

$$\sim L_{\text{и}} = \mu_0 G_{\text{и}} N_{\text{и}}^2 \sqrt{A_{\text{и}}}, \quad (1.5)$$

где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; $G_{\text{и}}$ — безразмерный параметр порядка единицы, зависящий от геометрической формы катушки, и α — параметр, зависящий от расстояния между витками. Для круглой катушки $G_{\text{и}} = \pi^{-1/2} [\ln(8R/R_{\text{пр}}) - 2]$, где R — радиус катушки и $R_{\text{пр}}$ — радиус проволоки, из которой она изготовлена. Значения α изменяются от 0 (для плотно намотанной катушки) до 1 (для катушки, у которой расстояние между витками достаточно велико, чтобы можно было не учитывать их взаимную индуктивность). Таким образом, для плотно намотанной катушки

$$L_{\text{и}} = \mu_0 G_{\text{и}} N_{\text{и}}^2 \sqrt{A_{\text{и}}}. \quad (1.6)$$

Анализ уравнения (1.4) показывает, что максимум тока I и, соответственно, магнитного потока через сквид обеспечивается при $L_{\text{и}} = L_{\text{вх}}$, причем магнитный поток, создаваемый в измерительной катушке током I , практически равен потоку во входной катушке сквида.

При биомагнитных измерениях на измерительную катушку обычно воздействует суммарное магнитное поле от исследуемого биоэлектрического генератора и от внешних мешающих генераторов разного происхождения, причем эти магнитные помехи обычно во много раз превышают по абсолютной величине измеряемое поле. Однако по форме пространственного распределения вектора магнитной индукции в области измерения поле помехи существенно отличается от исследуемого поля. Благодаря тому что мешающие генераторы обычно расположены значительно дальше от измерительной системы, чем исследуемый объект, их поля характеризуются намного большей равномерностью, чем исследуемое поле. Это позволяет для исключения помехи из измеряемого сигнала использовать принцип дифференциального, или градиометрического, измерения.

Измерительную катушку изготавливают из нескольких отдельных составляющих катушек, или секций, отстоящих одна от другой на определенное расстояние. Собственно измерительной является теперь только составляющая катушка, расположенная ближе всего к объекту; ее называют приемной. Остальные составляющие катушки, которые называются компенсирующими, будучи достаточно удаленными от объекта, практически не воспринимают его поле, но воспринимают

поле помехи и, возможно, некоторые его пространственные производные. Компенсирующие катушки включены в цепь трансформатора потока последовательно с приемной катушкой таким образом, чтобы воспринимаемые ими характеристики поля (отражающие практически только магнитную помеху) вычитались из характеристик суммарного поля, воспринимаемого приемной катушкой. Так осуществляется пространственная селекция — отделение полезного сигнала от помехи.

Сложные измерительные катушки, устроенные вышеописанным образом, называют градиометрическими катушками, или просто градиометрами. Заметим, что нередко градиометром называют и измерительный прибор в целом, если он снабжен градиометрической катушкой. Однако мы в дальнейшем измерительный прибор будем по-прежнему называть магнитометром, даже если в нем применена градиометрическая катушка.

Допустим, что градиометр состоит из K составляющих катушек, включенных последовательно. Тогда его магнитный поток будет равен сумме потоков составляющих катушек. С учетом (1.3) он выражается как

$$\Phi = \sum_{i=1}^K A_{\partial i} \cdot B(r_i), \quad (1.7)$$

где $A_{\partial i}$ — эффективная векторная площадь i -й составляющей катушки и $B(r_i)$ — вектор магнитной индукции в центре этой катушки, который расположен в точке, определяемой радиус-вектором r_i (напомним, что магнитная индукция считается равномерно распределенной по плоскости катушки).

Для того чтобы количественно охарактеризовать свойства градиометра, удобно представить вектор магнитной индукции в каждой точке r_i в виде разложения в ряд Тейлора относительно начала заданной общей декартовой системы координат [130]:

$$\Phi = \sum_{i=1}^K A_{\partial i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (r_i \cdot \nabla)^n \Big|_{r_i=0} B(r_i), \quad (1.8)$$

где $(r_i \cdot \nabla)$ — оператор дифференцирования по направлению вектора с умножением на его модуль $r_i = |r_i|$.

Для точного измерения заданной компоненты вектора магнитной индукции все составляющие катушки градиометра должны быть сориентированы в пространстве так, чтобы их плоскости были перпендикулярны к направлению этой компоненты. Предположим, что магнитометр должен измерять компоненту магнитной индукции по оси z декартовой системы координат. При соответствующем распо-

ложении катушек (1.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^K A_{\text{э}i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{r}_i \cdot \nabla)^n \Big|_{\mathbf{r}_i=0} B_z(\mathbf{r}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^K A_{\text{э}i} \left(B_{z0} + r_i \frac{\partial B_z}{\partial r_i} \Big|_{\mathbf{r}_i=0} + \frac{1}{2} r_i^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial r_i^2} \Big|_{\mathbf{r}_i=0} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1}{n!} r_i^n \frac{\partial^n B_z}{\partial r_i^n} \Big|_{\mathbf{r}_i=0} + \dots \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где B_{z0} — компонента магнитной индукции в начале координат и $\partial/\partial r_i$ обозначает производную по направлению вектора $\mathbf{r}_i$.

Хотя в принципе возможны различные варианты взаимного расположения катушек градиометра, т.е. выбора векторов $\mathbf{r}_i$, чаще всего используется соосная, или диагональная, структура, в которой оси всех катушек совпадают между собой и направлены параллельно измеряемой компоненте магнитной индукции B_z . Иногда применяют так называемую недиагональную структуру градиометра, в которой составляющие катушки лежат в одной и той же плоскости, а их центры расположены на прямой, перпендикулярной к направлению B_z . Здесь мы ограничимся рассмотрением соосной структуры как наиболее типичной. Недиагональную структуру можно проанализировать на основе совершенно аналогичного подхода.

Для соосного градиометра выражение для магнитного потока (1.9) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^K A_{\text{э}i} \left(B_{z0} + z_i \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{1}{2} z_i^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1}{n!} z_i^n \frac{\partial^n B_z}{\partial z^n} \Big|_{z=0} + \dots \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

или

$$\begin{aligned} \Phi &= U_0 B_{z0} + U_1 \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{1}{2} U_2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} U_n \frac{\partial^n B_z}{\partial z^n} \Big|_{z=0} + \dots, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$U_n = \sum_{i=1}^K A_{\pm i} z_i^n \quad (1.12)$$

— коэффициент чувствительности n -го порядка для данного градиометра.

Измерительную катушку называют градиометром m -го порядка, если у нее все коэффициенты чувствительности до $(m-1)$ -го порядка включительно равны нулю, т.е. $U_n = 0$ при $n < m$.

Наиболее простая измерительная катушка с соосной градиометрической структурой состоит из двух катушек с одинаковыми произведениями числа витков на площадь, отстоящих одна от другой на определенное расстояние, которое называется базой градиометра, и соединенных встречно, т.е. таким образом, чтобы при воздействии на них одинаковых магнитных полей (точнее, одинаковых компонент магнитной индукции по оси катушек) и трансформаторе потока возникали противоположно направленные и взаимно компенсирующиеся токи. Для такой измерительной катушки $U_0 = 0$, и она называется градиометром первого порядка. Заметим, что для сохранения единства терминологии простую (одиночную) измерительную катушку иногда называют градиометром нулевого порядка.

Таким образом, градиометр первого порядка дает нулевой суммарный ток в трансформаторе потока при равномерном распределении магнитного поля в направлении оси градиометра, и в то же время он воспринимает любое поле, значения которого у составляющих катушек градиометра различаются, или, говоря приблизительно, поле, имеющее ненулевой градиент по этой оси. Генератор полезного сигнала обычно находится достаточно близко от приемной катушки — на расстоянии, малом по сравнению с базой градиометра. Поэтому его поле в области удаленной компенсирующей катушки будет пренебрежимо мало по сравнению с полем в области приемной катушки, так что градиометр будет фактически измерять не градиент, а полное значение исследуемого поля.

В тех случаях, когда поле помехи в области измерения недостаточно однородно, т.е. имеет значительный градиент, можно скомпенсировать не только равномерную составляющую помехи, но и ее градиент, усложнив конструкцию градиометра. При этом измерительная катушка будет иметь структуру, соответствующую двум одинаковым, соединенным последовательно градиометрам первого порядка с противоположными направлениями намотки. Расстояние между центрами градиометров первого порядка служит базой, полученного таким путем градиометра второго порядка. Применяя аналогичный подход, можно построить и градиометры более высоких порядков.

На рис. 1.9 показана общая схема построения таких соосных симметричных градиометров первого, второго и третьего порядков. В прин-

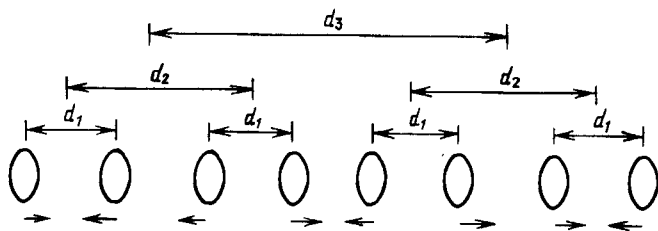


Рис. 1.9. Схема построения градиометров высших порядков из градиометров низших порядков. Под условными изображениями катушек (овалы) показаны стрелками направления потоков составляющих катушек при протекании тока в цепи трансформатора потока (d_1 , d_2 и d_3 — базы градиометров первого, второго и третьего порядков соответственно) [194]

ципе возможны различные соотношения между базами градиометров низших и высших порядков, составляющих рассматриваемый градиометр. Однако для упрощения конструкции и анализа градиометров обычно выбирают значение базы градиометра высшего порядка как целое кратное значению базы градиометра первого порядка. Это минимальное расстояние между катушками и называют базой для градиометра любого порядка. Кроме того, возможно совмещение части однонаправленных и исключение части противоположно направленных катушек при сохранении симметрии градиометра. Это позволяет получить несколько различных вариантов схем градиометров второго и более высоких порядков [194]. Наиболее удобны и поэтому широко распространены схемы симметричных соосных градиометров с минимальным числом составляющих катушек, представленные на рис. 1.10.

По определению градиометр порядка m нечувствителен ко всем производным ниже m -го порядка магнитной индукции вдоль своей оси, следовательно, для такого градиометра равны нулю соответствующие коэффициенты чувствительности:

$$U_n = \sum_{i=1}^K A_{zi} z_i^n = 0 \quad \text{при } n=0,1,\dots,m-1. \quad (1.13)$$

Выберем начало координат в центре приемной катушки $i=1$ и направим ось z в сторону остальных катушек градиометра. Тогда (1.13) принимает вид

$$\sum_{i=1}^K A_{zi} (i-1)^n d^n = 0 \quad \text{при } n=0,1,\dots,m-1, \quad (1.14)$$

где d — база градиометра, или

$$\sum_{i=1}^K A_{zi} (i-1)^n = 0 \quad \text{при } n=0,1,\dots,m-1. \quad (1.15)$$

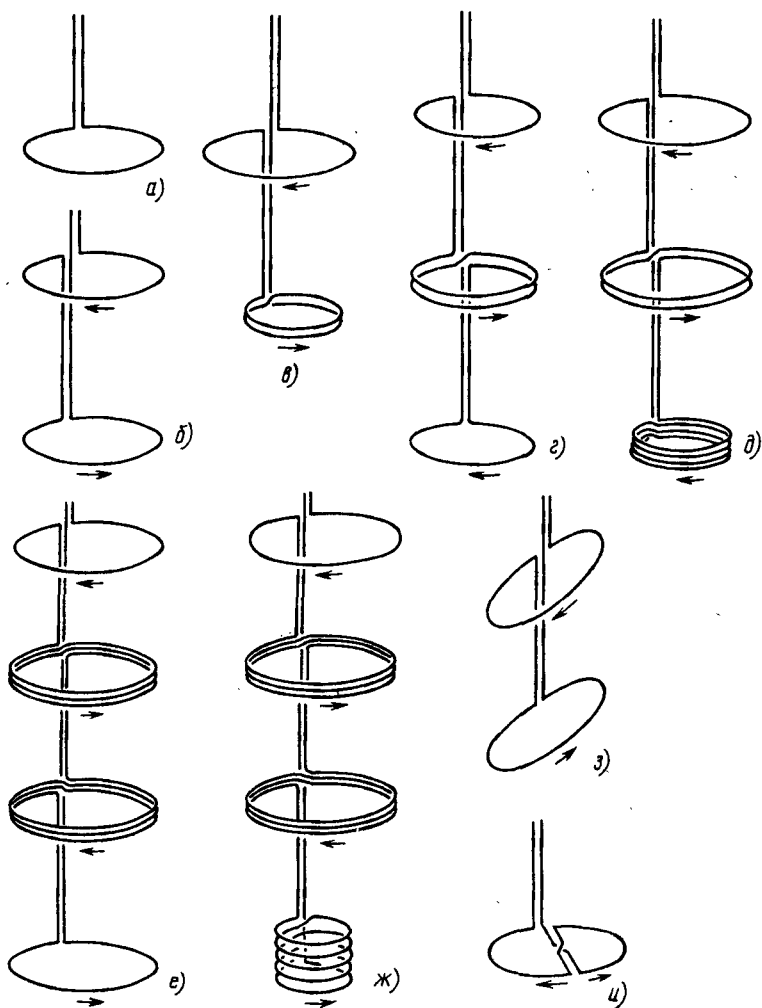


Рис. 1.10. Схемы градиометрических измерительных катушек, применяемых в сквид-магнитометрах для биоманнитных измерений (стрелками указано относительное направление токов в составляющих катушках) [39, 73]:

a – простой магнитометр (градиометр нулевого порядка); *б, в и г* – симметричные градиометры первого, второго и третьего порядков соответственно; *д, е и ж* – асимметричные градиометры первого, второго и третьего порядков соответственно; *з* – наклонный градиометр первого порядка; *и* – недиагональный (копланарный) градиометр первого порядка

Из этого уравнения получается система уравнений, определяющая соотношение между эффективными площадями катушек, которое обеспечивает указанные свойства градиометра. Говоря конкретнее, следующая система уравнений определяет отношения эффективных площадей компенсирующих катушек к эффективной площади приемной катушки:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=2}^K \frac{A_{\text{э}i}}{A_{\text{э}1}} &= -1, \\ \sum_{i=2}^K \frac{A_{\text{э}i}}{A_{\text{э}1}} (i-1) &= 0, \\ \sum_{i=2}^K \frac{A_{\text{э}i}}{A_{\text{э}1}} (i-1)^2 &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{i=2}^K \frac{A_{\text{э}i}}{A_{\text{э}1}} (i-1)^{m-1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Можно показать, что эта система имеет решение относительно величин $A_{\text{э}i}/A_{\text{э}1}$ при условии $K \geq m+1$.

Рассмотрим структуры градиометров с минимальным числом катушек, изображенные на рис. 1.10. Для градиометра первого порядка $m=1$, $K=2$, и система уравнений (1.16) дает $A_{\text{э}2}/A_{\text{э}1} = -1$; для градиометра второго порядка $m=2$, $K=3$, и получаем $A_{\text{э}2}/A_{\text{э}1} = -2$, $A_{\text{э}3}/A_{\text{э}1} = 1$; для градиометра третьего порядка $m=3$, $K=4$ и аналогично получаем $A_{\text{э}2}/A_{\text{э}1} = -3$, $A_{\text{э}3}/A_{\text{э}1} = 3$, $A_{\text{э}4}/A_{\text{э}1} = -1$ (знак минус указывает, что данная составляющая катушка имеет противоположное направление намотки по отношению к приемной). Таким образом, при заданной эффективной площади приемной катушки можно легко рассчитать требуемые эффективные площади компенсирующих катушек для градиометра любого порядка.

К анализу пространственной структуры градиометра можно также подойти с позиций теории цифровых фильтров [73, с. 67]. Действительно, градиометрическая система выполняет операцию, эквивалентную высокочастотной пространственной фильтрации измеряемой магнитной индукции, т.е. подавление ее составляющих, медленно изменяющихся в пространстве. Необходимо обратить внимание на то, что градиометрическая система всегда вносит искажения в измеряемую компоненту магнитной индукции. Эти искажения нужно учитывать,

если целью исследований является решение обратной задачи — определение параметров генератора по измеренным характеристикам поля. Способы оценки искажений, возникающих в градиометрических системах, будут описаны ниже.

Симметричные соосные градиометры широко распространены и находят применение при биомангнитных измерениях практически всех видов. Однако, отступив от этой общепринятой структуры, можно получить градиометры, обладающие специальными заданными свойствами по отношению к генераторам магнитного поля определенной конфигурации. Например, была предложена схема соосного градиометра с асимметрично расположенными катушками, который имеет относительно высокую чувствительность к генераторам в форме магнитного диполя, расположенным в области перед приемной катушкой, и наоборот, относительно низкую чувствительность в области, прилегающей к компенсирующим катушкам [130]. Асимметричный осевой градиометр специальной структуры, состоящий из катушек с разными радиусами, предлагали применять для идентификации источника магнитного поля в форме одиночного магнитного диполя [73, с. 61]. Использование структуры соосного симметричного градиометра в виде сочетания нескольких пар катушек Гельмгольца с разными диаметрами позволило получить градиометр с более равномерной и повышенной чувствительностью по сравнению с обычными градиометрами для магнитных диполей, расположенных на небольших расстояниях от приемной катушки [159, с. 153].

При использовании градиометров более актуальной становится проблема оптимального согласования сложной измерительной катушки и входной катушки сквида, так как магнитный поток в трансформаторе потока теперь распределяется между всеми катушками, включая совокупность компенсирующих катушек. Для учета этого фактора удобно рассмотреть эквивалентную измерительную катушку, которая воспринимает тот же магнитный поток, что и градиометр в целом, и имеет индуктивность, равную суммарной индуктивности составляющих катушек. Если составляющие катушки имеют плотную намотку, а взаимное влияние между ними пренебрежимо мало, то согласно (1.6) суммарная индуктивность

$$L_{\Sigma} = \sum_{i=1}^K \mu_0 G_i N_i^2 \sqrt{A_i}. \quad (1.17)$$

Для рассмотренных выше симметричных соосных градиометров первого, второго и третьего порядков, учитывая соотношение между числами витков составляющих катушек, получим соответственно

$$\begin{aligned} L_{\text{Iи}} &= 2L_1 & \text{для } m=1, \\ L_{\text{IIи}} &= 6L_1 & \text{для } m=2, \\ L_{\text{IIIи}} &= 20L_1 & \text{для } m=3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

(римские цифры в индексах указывают порядок градиометра).

Можно показать, что для соосных симметричных градиометров первого, второго и третьего порядка добавление компенсирующих катушек уменьшает чувствительность примерно в 1,4; 2,5 и 4,5 раза соответственно по сравнению с простым магнитометром. Это объясняется тем, что магнитный поток, создаваемый током в цепи трансформатора потока, должен распределяться между всеми катушками, в том числе и компенсирующими. Для ослабления указанного вредного эффекта желательно уменьшить индуктивность компенсирующих катушек при сохранении заданного произведения числа витков на площадь (что необходимо для обеспечения компенсации внешних полей помехи). Это достигается благодаря асимметричной конструкции градиометра, в которой компенсирующие катушки имеют намного большую площадь, чем приемная, как показано на рис. 1.10.

Рассмотрим один из способов согласования индуктивности в цепи трансформатора потока градиометра — изменение числа витков всех составляющих катушек градиометра в одно и то же число раз (с сохранением заданного соотношения между эффективными площадями отдельных катушек) [211].

Если число витков $N_{\text{и}}$ увеличено в β раз по сравнению с заданным минимальным числом $N_{\text{ин}}$, то в соответствии с (1.17) эквивалентная индуктивность измерительной катушки

$$L_{\text{и}} = \beta^2 L_{\text{ин}}, \quad (1.19)$$

где $L_{\text{ин}}$ — заданная начальная индуктивность измерительной катушки; поток в ней увеличился в β раз. Условие оптимального распределения потока в пренебрежении индуктивностью соединительных проводов запишем как

$$\beta_0^2 L_{\text{ин}} = L_{\text{вх}}, \quad (1.20)$$

где β_0 — значение β при оптимальном распределении потока. При выполнении этого условия ток в цепи трансформатора потока согласно (1.1)

$$I_0 = \beta_0 \Phi / (2L_{\text{вх}}), \quad (1.21)$$

и отношение токов несогласованного и оптимально согласованного трансформаторов

$$\frac{I}{I_0} = 2 \left(\sqrt{\frac{L_{\text{и}}}{L_{\text{вх}}}} + \sqrt{\frac{L_{\text{вх}}}{L_{\text{и}}}} \right)^{-1}. \quad (1.22)$$

Эта зависимость изображена на рис. 1.11. График показывает, что при отклонении индуктивности градиометра от оптимальной в 2,5 раза обес-

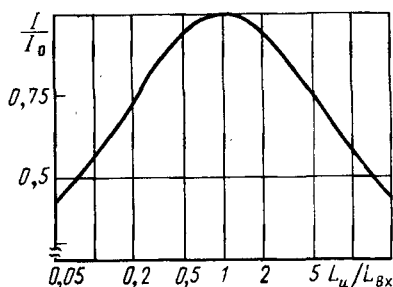


Рис. 1.11. Зависимость отношения токов несогласованного и оптимально согласованного трансформаторов потока от отношения индуктивностей градиометра и входной катушки сквида (от степени согласования индуктивностей) [211]

печивается передача на сквид 90 % максимального воздействующего магнитного потока, так что к точности согласования индуктивностей трансформатора не предъявляются слишком высокие требования. Тем не менее необходимо учитывать различие индуктивностей сквида при его работе с разомкнутой и с замкнутой цепью отрицательной обратной связи.

Выбор структуры и геометрических параметров градиометра. К важнейшим характеристикам устройства для биомагнитных измерений относятся структура и геометрические параметры градиометра, определяющие число, форму, размеры и взаимное расположение составляющих катушек. Конечная цель, преследуемая при выборе этих параметров, неоднозначна. Она зависит от конкретной задачи, решаемой в данном исследовании при помощи биомагнитометрии. Обычно к магнитометрам предъявляют требования двух типов — требование максимальной чувствительности и (или) требование максимальной точности. Под чувствительностью подразумевается способность прибора обнаружить магнитное поле исследуемого объекта в присутствии внешней магнитной помехи и собственных шумов магнитометра, под точностью — способность точно определять искомую компоненту магнитного поля в заданной точке измерения. Эти два требования часто вступают в противоречие между собой, так как изменение некоторых параметров оказывает противоположное влияние на чувствительность и точность.

При выборе структуры и параметров градиометра необходимо учитывать следующие объективные условия: свойства конкретного объекта исследования, точнее, местоположение и конфигурацию биоэлектрического генератора, порождающего исследуемое поле; характер внешнего магнитного поля помехи; уровень собственного шума сквид-датчика; конструктивные ограничения, характерные для работы со сквид-магнитометром.

Порядок и общую структуру градиометра выбирают, исходя главным образом из условий окружающей среды в области измерения, а также известных априори свойств биоэлектрического генератора и конкретных характеристик поля, подлежащих измерению. Так, прос-

тую измерительную катушку и градиометр первого порядка целесообразно применять в лабораториях с магнитной экранировкой, градиометры первого и второго порядков — при отсутствии экранировки, но на достаточном удалении от мощных источников магнитных помех (вдали от крупных промышленных центров), градиометры второго и более высоких порядков необходимы для измерений в обычных городских условиях.

Наряду с наиболее широко распространенными соосными симметричными градиометрами и градиометрами с увеличенным диаметром компенсирующих катушек для решения конкретных измерительных задач можно применять градиометры более специализированного типа, в частности вышеуказанные градиометры с асимметричной базой и градиометры с катушками Гельмгольца. Если нужно измерять компоненту магнитной индукции, направленную под заданным углом к общей оси магнитометра, то используют градиометр с наклонными катушками (рис. 1.10, з). Для измерения пространственной производной компоненты магнитной индукции по направлению, перпендикулярному к измеряемой компоненте, используют недиагональный градиометр первого порядка с катушками, лежащими в одной плоскости вблизи друг друга (рис. 1.10, и); он обладает особенно высокой чувствительностью к полю дипольного генератора тока, расположенного под градиометром параллельно границе между катушками.

При исследовании биомagnetных полей нередко возникает необходимость одновременного измерения магнитного поля по нескольким каналам. Такие измерения нужны, в частности, при изучении распределения на заданной поверхности компоненты магнитной индукции поля сердца или мозга, а также при определении пространственного вектора магнитной индукции в векторной магнитокардиографии. Соответственно для многоканальных сквид-магнитометров требуются специальные конструкции градиометров [73, 105, 128, 137, 159, 177]. К векторным градиометрам предъявляются дополнительные требования — все три взаимно перпендикулярные компоненты магнитной индукции необходимо измерять в одной и той же точке пространства, причем должно быть исключено взаимное влияние между составляющими катушками разных каналов. Конструирование таких градиометров осложняется необходимостью компактного размещения нескольких измерительных катушек внутри криостата.

В современных градиометрах применяют катушки с разными формами сечения — не только круглые, но и прямоугольные, квадратные, овальные и др. Форма сечения обычно диктуется конструктивными и технологическими условиями, а также стремлением приблизить катушку к объекту исследования. Независимо от формы катушки наиболее существенным параметром ее является площадь витка. Примеры конструкций одноканальных и многоканальных градиометров приведены на рис. 1.12–1.14.

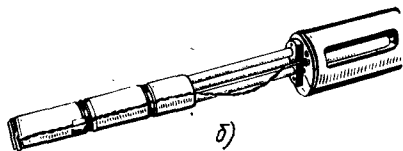
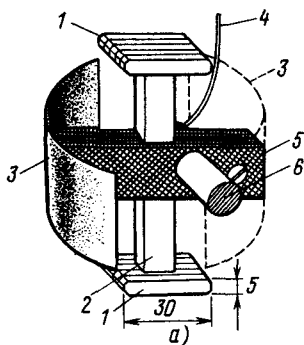


Рис. 1.12. Примеры конструктивных решений одноканальных градиометров:

a — недиагональный градиометр первого порядка (1 — кварцевые пластины с катушками трансформатора потока, 2 — кварцевый стержень с параллельными торцами, 3 — пружины из стекловолокна, 4 — коаксиальный высокочастотный кабель, 5 — опора из стекловолокна, 6 — сквид в ампуле) [9]; *б* — соосный градиометр второго порядка

Основными геометрическими параметрами градиометра являются размеры катушек и значение базы. Рассмотрим вопросы оптимального выбора этих параметров на примере соосного симметричного градиометра с круглыми катушками. Сначала предположим, что цель состоит в достижении возможно более высокой чувствительности, т.е. отношения полезного сигнала к помехе. В этом случае размеры приемной катушки желательно увеличивать, так как при увеличении ее площади снижается уровень собственного шума сквид-магнитометра, приведенного к приемной катушке. Ограничения на размеры катушки налагаются главным образом размерами криостата в области градиометра.

Выбор оптимального значения базы можно осуществить лишь на основе некоторых гипотез о характеристиках исследуемого биоэлектрического генератора и генераторов, создающих магнитную помеху, поскольку возможности градиометрического подавления помехи зависят от скорости пространственного изменения исследуемого и мешающего полей.

Рассмотрим решение задачи оптимизации базы градиометров первого и второго порядков, используя гипотетический источник магнитного поля в виде круглого контура с током и методику, изложенную в [211]. Контур имеет радиус R_k , в нем течет ток I_k . Градиометр расположен соосно с контуром на его оси z , причем расстояние от контура до ближайшей к нему (приемной) катушки равно z_1 (рис. 1.15).

Если начало координат совпадает с центром контура, то магнитная индукция на оси z направлена по этой оси, а ее абсолютная величина выражается как [50]

$$B = \frac{\mu_a I_k R_k^2}{2(z^2 + R_k^2)^{3/2}}, \quad (1.23)$$

где μ_a — абсолютная магнитная проницаемость среды.

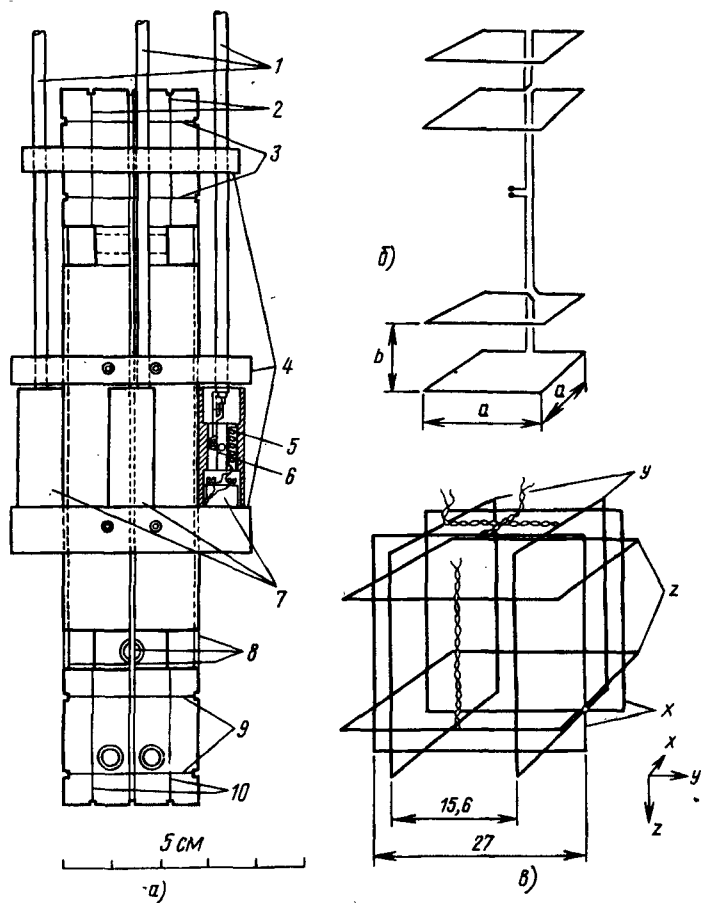


Рис. 1.13. Трансформатор потока векторного магнитометра [159, с. 66]:

a – общая структура трансформатора потока (1 – меднобериллиевые кабели, 2, 3 – верхние катушки градиометров каналов *x* и *z* соответственно, 4 – опорные пластины, 5 – входная катушка, 6 – высокочастотная катушка, 7 – сквиды, 8 – ниобиевые трубки, 9, 10 – нижние катушки градиометров каналов *z* и *x* соответственно; б – схема градиометра канала *z* ($a/b = \sqrt{3}$); в – схема нижних катушек градиометров ортогональных каналов *x*, *y* и *z* (верхние катушки расположены аналогично, указаны размеры катушек в миллиметрах, база градиометров 120 мм)

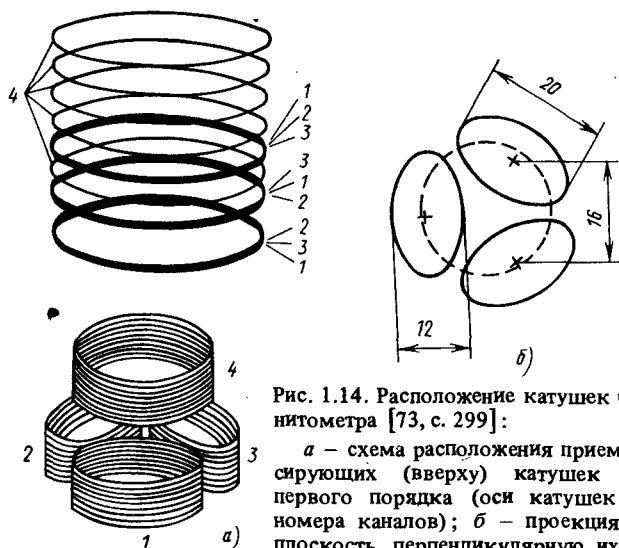
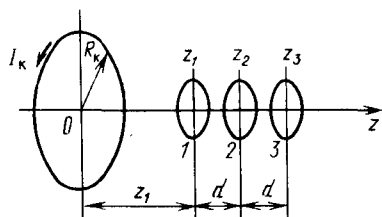


Рис. 1.14. Расположение катушек четырехканального магнитометра [73, с. 299]:

a — схема расположения приемных (внизу) и компенсирующих (вверху) катушек четырех градиометров первого порядка (оси катушек параллельны, указаны номера каналов); *б* — проекция приемных катушек на плоскость, перпендикулярную их осям (указаны размеры в миллиметрах, база градиометров 60 мм)

Рис. 1.15. Взаимное расположение градиометра и источника магнитного поля



При достаточно малой площади приемной катушки входной сигнал для градиометров первого и второго порядка согласно (1.7) пропорционален соответственно величинам

$$B_I = B_1 - B_2 \quad (1.24)$$

и

$$B_{II} = B_1 - 2B_2 + B_3, \quad (1.25)$$

где индексы указывают составляющую катушку градиометра в соответствии с обозначениями рис. 1.15 (*I* — приемная катушка).

Предположим, что источник помехи находится на сравнительно большом расстоянии от места измерения, так что $R_K \ll z$; тогда (1.23) для магнитной индукции помехи принимает вид

$$B_{II} = \frac{\mu_a I_K R_K^2}{2z^3} \quad (1.26)$$

(фактически при этих условиях поле контура тока сводится к полю магнитного диполя, ориентированного вдоль оси контура). Учитывая, что координаты катушек определяются соотношениями

$$z_2 = z_1 + d, \quad z_3 = z_1 + 2d, \quad (1.27)$$

где d — база градиометра, получаем из (1.24) — (1.27)

$$B_{\text{Iп}} = \frac{\mu_a I_K R_K^2}{2} \left[\frac{1}{z_1^3} - \frac{1}{(z_1 + d)^3} \right], \quad (1.28)$$

$$B_{\text{IIп}} = \frac{\mu_a I_K R_K^2}{2} \left[\frac{1}{z_1^3} - \frac{2}{(z_1 + d)^3} + \frac{1}{(z_1 + 2d)^3} \right]. \quad (1.29)$$

Поскольку $d \ll z_1$, эти уравнения можно упростить, разлагая их в ряд Тейлора и пренебрегая членами высших порядков:

$$B_{\text{Iп}} = \frac{3\mu_a I_K R_K^2 d}{2z_1^4}, \quad (1.30)$$

$$B_{\text{IIп}} = \frac{6\mu_a I_K R_K^2 d^2}{z_1^5}. \quad (1.31)$$

Степень подавления помехи определяется отношением этих величин к помехе в точке расположения приемной катушки:

$$B_{\text{Iп}}/B_{\text{Iп1}} = 3d/z_1, \quad (1.32)$$

$$B_{\text{IIп}}/B_{\text{IIп1}} = 12d^2/z_1^2. \quad (1.33)$$

Из (1.30) и (1.31) следует, что при относительном изменении базы, заданном коэффициентом γ , т.е. при переходе к базе

$$d = \gamma d_H, \quad (1.34)$$

где d_H — заданное начальное значение базы, помеха на выходе градиометра изменится в p раз,

$$p = B_{\text{п}}/B_{\text{п,н}}, \quad (1.35)$$

где $B_{\text{п,н}}$ и $B_{\text{п}}$ — исходная (начальная) помеха и помеха после изменения базы соответственно, причем для градиометров первого и второго порядка

$$p_I = \gamma, \quad (1.36)$$

$$p_{II} = \gamma^2. \quad (1.37)$$

Источник полезного сигнала находится вблизи градиометра, поэтому для него неприемлема аппроксимация (1.26) и нужно использовать точное уравнение (1.23). Введем обозначения $D = d/R_K$ и $Z_1 = z_1/R_K$ и запишем выражение для коэффициента изменения полезного сигнала при замене базы d_H на $d = \gamma d_H$ (соответственно относительной длины базы D_H на D)

$$s = \frac{B_c}{B_{c,H}}, \quad (1.38)$$

где $B_{c,H}$ — полезный сигнал при некоторой исходной базе D_H и B_c — полезный сигнал после ее изменения. Из (1.23) — (1.25) и (1.27) получаем

$$s_I = \frac{(1 + Z_1^2)^{-3/2} - [1 + (Z_1 + \gamma D_H)^2]^{-3/2}}{(1 + Z_1^2)^{-3/2} - [1 + (Z_1 + D_H)^2]^{-3/2}}, \quad (1.39)$$

$$s_{II} = \frac{(1 + Z_1^2)^{-3/2} - 2[1 + (Z_1 + \gamma D_H)^2]^{-3/2} +}{(1 + Z_1^2)^{-3/2} - 2[1 + (Z_1 + D_H)^2]^{-3/2} +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ [1 + (Z_1 + 2\gamma D_H)^2]^{-3/2}}{+ [1 + (Z_1 + 2D_H)^2]^{-3/2}}. \quad (1.40)$$

Допустим, что на величину Z_1 наложено ограничение $Z_1 \geq 1$, соответствующее взаимному расположению исследуемого объекта и градиометра. В этом случае как полезный сигнал, так и помеха уменьшаются при уменьшении базы ($\gamma < 1$) и увеличиваются при увеличении базы ($\gamma > 1$). Существенное значение имеет отношение

$$w = s/p, \quad (1.41)$$

характеризующее изменение отношения сигнала к помехе при изменении базы. Эта величина при уменьшении γ монотонно возрастает, приближаясь при $\gamma \rightarrow 0$ к следующему пределу:

$$w_{Io} = \frac{3 D_H Z_1}{(1 + Z_1^2)^{5/2} \{ (1 + Z_1^2)^{-3/2} - [1 + (Z_1 + D_H)^2]^{-3/2} \}}, \quad (1.42)$$

$$w_{IIo} = \frac{3 D_H^2 (4 Z_1^2 - 1)}{(1 + Z_1^2)^{7/2} \{ (1 + Z_1^2)^{-3/2} - 2 [1 + (Z_1 + D_H)^2]^{-3/2} +$$

$$\rightarrow \frac{+ [1 + (Z_1 + 2D_H)^2]^{-3/2} \}}{+ [1 + (Z_1 + 2D_H)^2]^{-3/2}}. \quad (1.43)$$

Изменение величин s и w в зависимости от γ при $Z_1 = 1$ и некоторых значениях D_H показано на рис. 1.16.

Таким образом, теоретически при рассматриваемых условиях наибольшее отношение сигнала к помехе достигается при $\gamma = 0$. Однако приблизиться к этому пределу невозможно из-за конструктивных трудностей изготовления катушек с очень малой базой и нецелесообразно в связи с тем, что в реальных условиях кроме внешних помех существует собственный шум сквид-датчика, и при слишком короткой базе полезный сигнал может уменьшиться настолько, что отношение сигнала к помехе ухудшится из-за собственного шума сквид-датчика. Чтобы оценить, насколько в каждом конкретном случае можно приблизиться к теоретически оптимальному отношению сигнала к помехе, найдем коэффициент оптимальности

$$\xi = w/w_0. \quad (1.44)$$

Он выражается для градиометров первого и второго порядка как

$$\xi_I = \frac{1 + Z_1^2 - (1 + Z_1^2)^{5/2} [1 + (Z_1 + D)^2]^{-3/2}}{3DZ_1} \quad (1.45)$$

и

$$\xi_{II} = \frac{(1 + Z_1^2)^2 + (1 + Z_1^2)^{7/2} \left\{ [1 + (Z_1 + 2D)^2]^{-3/2} - \right.}{3D^2(4Z_1^2 - 1)} \rightarrow$$

$$\left. - 2[1 + (Z_1 + D)^2]^{-3/2} \right\} \quad (1.46)$$

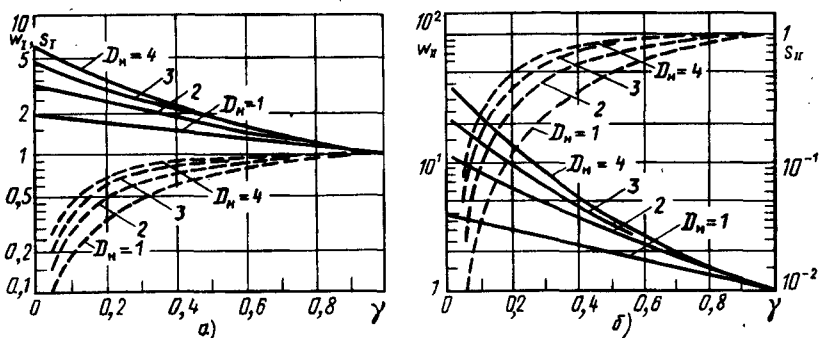


Рис. 1.16. Зависимость изменения отношения сигнала к помехе w (—) и изменения полезного сигнала s (---) от изменения базы градиометра γ при $Z_1 = 1$ и разных значениях относительной начальной базы D_H для градиометра первого порядка (а) и для градиометра второго порядка (б) [211]

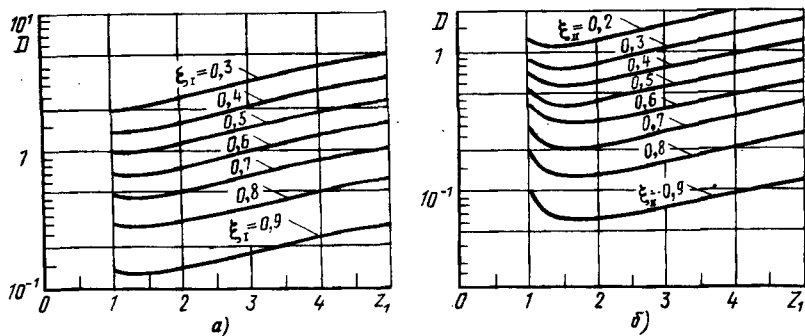


Рис. 1.17. Зависимость между относительной базой D и относительным расстоянием между источником поля и градиометром Z_1 при разных значениях коэффициента оптимальности ξ для градиометра первого порядка (а) и для градиометра второго порядка (б) [211]

Зависимость между величинами Z_1 и D при разных значениях ξ представлена на рис. 1.17. Полученные кривые сходны по форме для градиометров первого и второго порядков, хотя для градиометра первого порядка достигается меньшая степень улучшения отношения сигнала к помехе.

При анализе реального сквид-магнитометра необходимо учитывать собственный шум сквид-датчика. Допустим, что при изменении базы градиометра его индуктивность не изменяется и остается постоянным коэффициент преобразования магнитного потока на входе градиометра во входной поток сквида. Обозначим через $\tilde{B}_{\text{ш}}$, $\tilde{B}_{\text{п}}$ и $\tilde{B}_{\text{с}}$ среднеквадратичные значения собственного шума сквид-датчика, приведенного ко входу градиометра, внешней магнитной помехи и полезного сигнала соответственно. Тогда после изменения базы градиометра среднеквадратичные значения сигнала и суммарного шума с учетом (1.35) и (1.38) выражаются как

$$\tilde{B}_{\text{с}} = s\tilde{B}_{\text{с,н}}, \quad (1.47)$$

$$\tilde{B}_{\text{ш}} \Sigma = \sqrt{p^2 \tilde{B}_{\text{п,н}}^2 + \tilde{B}_{\text{ш}}^2}, \quad (1.48)$$

и отношение сигнала к помехе равно

$$S = \frac{s\tilde{B}_{\text{с,н}}}{\sqrt{p^2 \tilde{B}_{\text{п,н}}^2 + \tilde{B}_{\text{ш}}^2}}. \quad (1.49)$$

Анализ этого уравнения, который является довольно сложным и здесь не приведен, показывает, что условие максимизации отношения сигнала к помехе практически совпадает с условием равенства среднеквадратичных значений внешней помехи и собственного шума сквид-

датчика. Обозначим символами с индексом нуль значения соответствующих величин, при которых достигается этот оптимум. Тогда

$$p_0^2 \tilde{B}_{\pi, \text{н}}^2 = \tilde{B}_{\text{ш}}^2, \quad (1.50)$$

$$\gamma_{10} = p_0 = \tilde{B}_{\text{ш}} / \tilde{B}_{\pi, \text{н}}, \quad (1.51)$$

$$\gamma_{110} = \sqrt{p_0} = \sqrt{\tilde{B}_{\text{ш}} / \tilde{B}_{\pi, \text{н}}} \quad (1.52)$$

и отношение сигнала к помехе

$$S_0 = \frac{s_0 \tilde{B}_{\text{с, н}}}{\sqrt{2} \tilde{B}_{\text{ш}}} \quad (1.53)$$

Соотношение между сигналом и помехой часто характеризуют отношением максимального размаха сигнала $\hat{B}_{\text{с}}$ к максимальной амплитуде шума $\hat{B}_{\text{ш}} \Sigma$. Последняя величина приближенно выражается как

$$\hat{B}_{\text{ш}} \Sigma = 2,58 \tilde{B}_{\text{ш}} \Sigma, \quad (1.54)$$

следовательно, указанное отношение при оптимальном соотношении между внешней помехой и собственным шумом принимает вид

$$\hat{S}_0 = s_0 \hat{B}_{\text{с, н}} / (3,65 \tilde{B}_{\text{ш}}). \quad (1.55)$$

Итак, для оптимизации базы градиометра вышеописанными методом нужно знать уровни полезного сигнала и внешней помехи в области измерения, а также уровень собственного шума сквид-датчика и основные характеристики источника полезного сигнала. Задается достаточно большое исходное значение базы, затем при помощи формул (1.51) или (1.52) и (1.34) определяется ее оптимальное значение. По (1.53) или (1.55) можно найти отношение сигнала к помехе. Наконец, при помощи графиков на рис. 1.17 можно оценить, в какой степени используется теоретическая возможность повышения отношения сигнала к помехе при оптимизации конкретного сквид-магнитометра с заданным собственным шумом. Рассмотренные соотношения между полезным сигналом и помехами иллюстрируются на рис. 1.18.

Во многих экспериментальных исследованиях к магнитометру предъявляется прежде всего требование точного измерения соответствующей компоненты магнитной индукции, которую предполагается использовать для содержательного анализа и интерпретации данных (например, для решения обратной электродинамической задачи в целях идентификации биоэлектрических генераторов). В этих случаях оптимальный выбор параметров градиометра должен предусматривать минимизацию погрешностей, обусловленных, во-первых, осреднением магнитной индукции по поверхности, охватываемой измерительной катушкой,

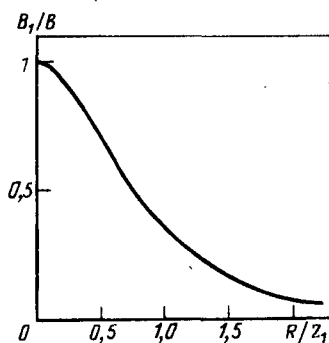
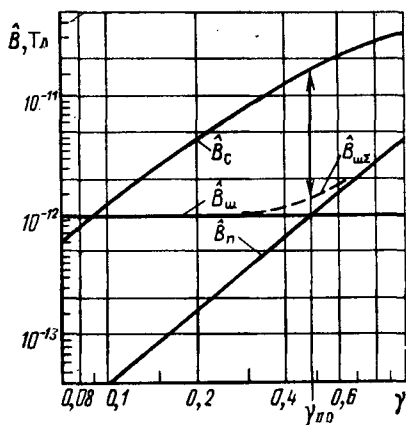


Рис. 1.18. Соотношение между полезным сигналом $\hat{B}_c$, помехой $\hat{B}_n$ и шумом $\hat{B}_{ш}$ в зависимости от изменения базы γ для градиометра второго порядка ($\gamma_{\text{по}}$ — оптимальный коэффициент изменения базы) [211]

Рис. 1.19. Зависимость отношения измеренного значения магнитной индукции к точному ее значению от относительного радиуса приемной катушки магнитометра

и, во-вторых, влиянием части исследуемого поля, воспринимаемой компенсирующими катушками градиометра.

Для оценки погрешности из-за осреднения магнитной индукции в катушке рассмотрим снова ту же самую схему расположения генератора и градиометра (см. рис. 1.15) и предположим, что градиометр имеет круглую приемную катушку с радиусом R . Найдем магнитный поток, пересекающий плоскость катушки, учитывая для простоты анализа только дипольную часть поля, создаваемого генератором—контуром тока (в этом случае получается несколько завышенная оценка искомой погрешности, так как эквивалентный магнитный диполь имеет менее равномерное поле в области катушки, чем исходный контур с током, расположенный на таком же расстоянии от нее).

Компонента магнитной индукции по оси z магнитного диполя, расположенного в начале координат и имеющего такой же дипольный момент, как контур с током, выражается как

$$B_z = \frac{\mu_a I_K R_K^2 (3z^2 - r^2)}{4r^5}, \quad (1.56)$$

где r — расстояние точки наблюдения от начала координат. Магнитный поток через приемную катушку, ограничивающую поверх-

ность S ,

$$\Phi_1 = \int_S B_z dS = \frac{\pi \mu_a I_K R_K^2 R^2}{2(z_1^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (1.57)$$

Средняя магнитная индукция (измеряемый сигнал) равна отношению этой величины к площади катушки:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{\pi R^2} = \frac{\mu_a I_K R_K^2}{2(z_1^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (1.58)$$

тогда как истинное значение магнитной индукции B в центре катушки определяется уравнением, аналогичным (1.26). Их отношение, равное

$$B_1/B = (1 + R^2/z_1^2)^{-3/2}, \quad (1.59)$$

представлено на рис. 1.19. Приведенная зависимость свидетельствует о том, что в тех случаях, когда размеры приемной катушки соизмеримы с расстоянием между ней и генератором, осреднение магнитной индукции может привести к значительной погрешности измерения. Если это расстояние превышает диаметр приемной катушки вдвое, то погрешность составляет около 5 % истинного значения магнитной индукции.

Теперь оценим значение погрешности, вносимой компенсирующими катушками градиометров первого и второго порядков, используя те же самые геометрические соотношения между генератором и градиометром и пренебрегая погрешностью из-за осреднения магнитной индукции катушками. При помощи (1.23) – (1.25) и (1.27) нетрудно получить выражения для отношения измеряемого сигнала к истинному значению магнитной индукции (последнее определяется как магнитная индукция в центре приемной катушки) для генератора магнитного поля в форме круглого контура тока:

$$\frac{B_I}{B} = 1 - \left[\frac{1 + \left(\frac{R_K}{z_1} \right)^2}{\left(1 + \frac{d}{z_1} \right)^2 + \left(\frac{R_K}{z_1} \right)^2} \right]^{3/2}, \quad (1.60)$$

$$\frac{B_{II}}{B} = 1 - 2 \left[\frac{1 + \left(\frac{R_K}{z_1} \right)^2}{\left(1 + \frac{d}{z_1} \right)^2 + \left(\frac{R_K}{z_1} \right)^2} \right]^{3/2} +$$

$$+ \left[\frac{1 + \left(\frac{R_K}{z_1} \right)^2}{\left(1 + \frac{2d}{z_1} \right)^2 + \left(\frac{R_K}{z_1} \right)^2} \right]^{3/2}. \quad (1.61)$$

Если вместо контура тока рассматривается эквивалентный ему магнитный диполь, расположенный в начале координат, то эти уравнения упрощаются:

$$B_I/B = 1 - (1 + d/z_1)^{-3}, \quad (1.62)$$

$$B_{II}/B = 1 - 2(1 + d/z_1)^{-3} + (1 + 2d/z_1)^{-3}. \quad (1.63)$$

Эти величины представлены графически на рис. 1.20. Видно, что погрешности существенно зависят от соотношения между тремя геометрическими характеристиками — базой градиометра, расстоянием от него до генератора и пространственной протяженностью генератора в направлениях, перпендикулярных к оси градиометра. Погрешности увеличиваются при уменьшении базы и при увеличении поперечной протяженности генератора. При прочих равных условиях градиометр второго порядка характеризуется несколько большей погрешностью, чем градиометр первого порядка. Если радиус генератора приблизительно равен расстоянию между приемной катушкой и генератором (такое соотношение можно считать типичным для биомагнитных измерений), то для того чтобы относительная погрешность не превышала 5 %, градиометры первого и второго порядков должны иметь базу, не меньше чем в 2,5 и 3 раза соответственно превышающую расстояние до генератора.

Аналогичные оценки получены для гипотетического генератора в форме диполя тока, расположенного в проводящем полупространстве и ориентированного параллельно его поверхности, причем градиометр находится над этой поверхностью, а его ось перпендикулярна к ней (рис. 1.21 и 1.22). Иллюстрация зависимости значения измеряемого сигнала от порядка и базы градиометра приведена на рис. 1.23. Описание оптимизации параметров градиометра содержится в [73, 159, 160, 194 и др.].

Балансировка градиометра. Точность реализации выбранной структуры градиометра на практике неизбежно ограничена из-за погрешностей изготовления его элементов и сборки конструкции. К таким погрешностям относятся отклонения от заданных размеров и площадей катушек, произведений числа витков на площадь, нарушение параллельности плоскостей витков, неравенство расстояний между катушками заданной базы (для градиометров высших порядков) и т.д. Качество градиометра можно описать при помощи векторов чувствительности. Каждый такой вектор направлен по перпендикуляру к плоскости со-

Рис. 1.20. Зависимость отношения измеренного значения магнитной индукции к точному ее значению от относительных размеров источника магнитного поля для градиометров первого порядка (—) и второго порядка (-----); D_M — для источника поля в виде магнитного диполя

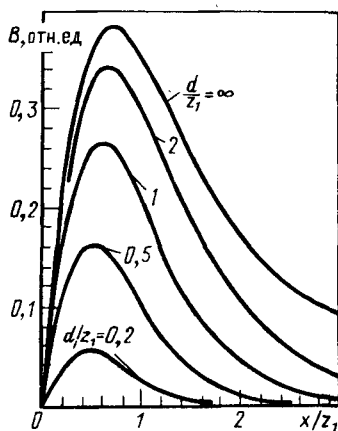
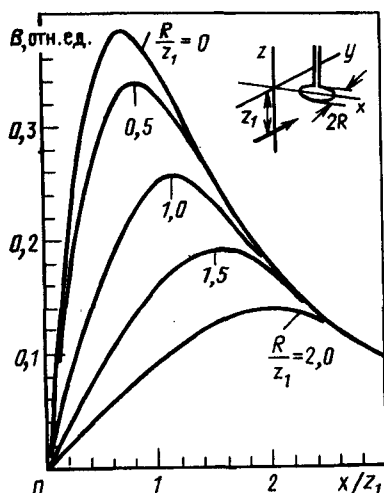
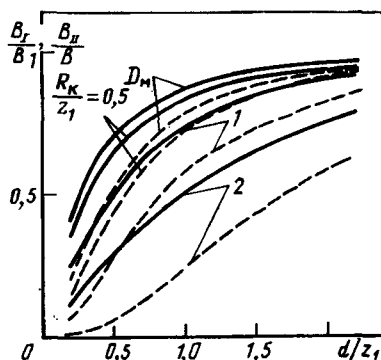


Рис. 1.21. Зависимость измеренного значения магнитной индукции B от положения градиометра по отношению к генератору магнитного поля в виде диполя тока при разных значениях относительного радиуса приемной катушки; вверху справа показано взаимное расположение диполя тока (жирная стрелка) и катушки [39]

Рис. 1.22. Зависимость измеренного значения магнитной индукции B от положения градиометра при разных значениях относительной базы градиометра для тех же условий, что указаны на рис. 1.21 (градиометр второго порядка) [39]

ответствующей катушки, а его модуль определяется как произведение числа витков на площадь. Кроме того, эти векторы зависят от многих других факторов — параметров сверхпроводящей цепи, температуры, частоты приложенного магнитного поля и др. Погрешности дисбаланса определяются отклонением этих векторов от заданных значений.

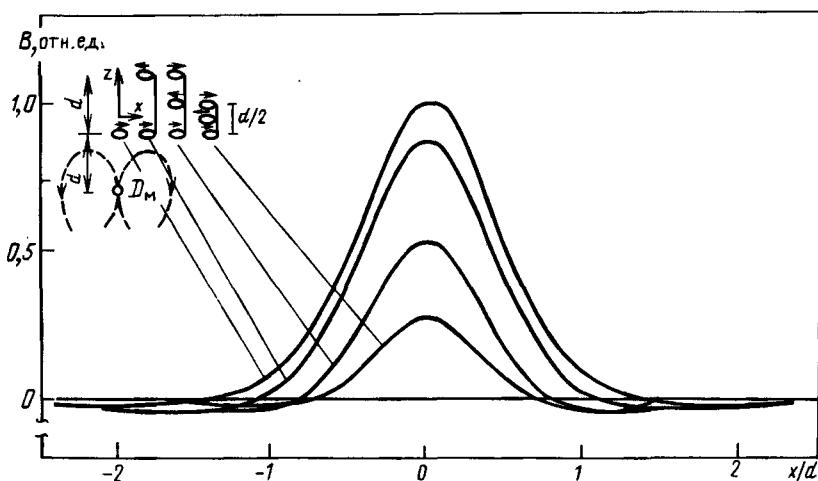


Рис. 1.23. Зависимость измеренного значения магнитной индукции B от положения градиометра по отношению к генератору магнитного поля в виде магнитного диполя для градиометров некоторых типов (вверху слева показана структура градиометра и положение магнитного диполя D_M по отношению к нему) [71, с. 3]

Степень дисбаланса градиометра по отношению к равномерному магнитному полю можно выразить количественно как относительное значение поля, которое воспринимается градиометром при условии, что вектор магнитной индукции направлен параллельно оси градиометра (совпадающей с компонентой поля по координатной оси z) или же перпендикулярно к ней, т.е. по осям x и y . Соответственно дисбаланс по отношению к полю с равномерным градиентом выражается относительным значением градиента, воспринимаемого градиометром при условии, что поле имеет равномерно распределенный в пространстве градиент. Сопоставление значений внешних мешающих полей и исследуемых биомagnetных полей показывает, что максимальный допустимый дисбаланс имеет порядок 10^{-6} для поля и 10^{-4} для градиента поля. Однако непосредственно при изготовлении, например, градиометров второго порядка удается их сбалансировать с максимальной точностью около 10^{-3} для поля и с более низкой точностью для градиента (это обусловлено в основном неточностью намотки катушек на каркасы и прокладки выводов). Поэтому требуется дополнительное улучшение степени балансировки после изготовления прибора. Математический анализ процедуры балансировки градиометров высокого порядка с использованием векторных и тензорных методов представлен в [73, 159, 194].

Для практического осуществления балансировки градиометров предлагали различные методы, в частности добавление к цепи транс-

форматора потока вспомогательных витков или катушек, размещение в соответствующих местах вблизи градиометра небольших сверхпроводящих пластинок или проволочных петель для частичной экранировки катушек, непосредственную регулировку некоторых геометрических параметров градиометра, а также измерение характеристик поля специальными датчиками и корректировку сигнала градиометра при помощи сигналов этих датчиков.

Чаще всего применяют балансировочные пластинки (триммеры), закрепляемые в фиксированном положении при первоначальной грубой балансировке или перемещаемые при помощи регулируемых штоков, которыми можно манипулировать во время работы сквид-магнитометра для более тонкой его настройки. Схема такого устройства для балансировки градиометра второго порядка показана на рис. 1.24. Три маленькие сверхпроводящие пластинки, плоскости которых перпендикулярны осям прямоугольной системы координат, могут устанавливаться в нужное положение относительно плоскостей катушек градиометра. Пластинки, параллельные оси катушек, расположены у кромки одной из катушек и могут сдвигаться вверх или вниз, что приводит к отклонению соответствующих поперечных компонент магнитной индукции, заставляя ее проходить через катушку сверху или снизу. Этим корректируется погрешность в расположении плоскости катушки по отношению к оси градиометра. Для корректировки различия в площадях катушек нужно поместить третью пластинку (перпендикулярную оси градиометра) в соответствующее положение между приемной и средней катушками. Тем самым уменьшается чувствительная площадь ближайшей катушки. Таким образом регулируется эффективное значение произведения числа витков на площадь катушки и достигается нечувствительность градиометра к равномерному осевому полю. Балансировка градиометра второго порядка по отношению к осевому градиенту поля осуществляется изменением базы для одной из пар состав-

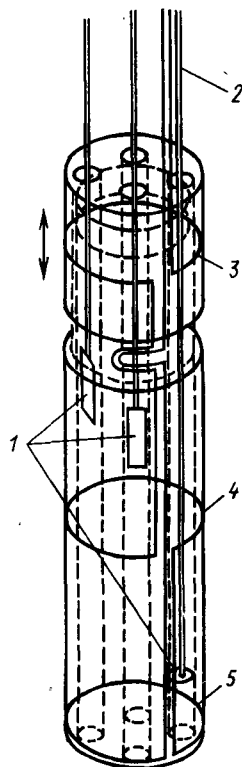


Рис. 1.24. Схема устройства для балансировки градиометра второго порядка [39]:

1 - свинцовые пластинки; 2 - регулировочные штоки; 3 - верхняя компенсирующая катушка (может перемещаться вдоль оси); 4 - средняя компенсирующая катушка; 5 - приемная катушка

ляющих катушек при помощи специального дифференциального винта, которым, как и триммерами, можно манипулировать, не проникая внутрь криостата.

Для выполнения балансировки на практике можно воспользоваться магнитным полем Земли. Поворачивая и перемещая магнитометрическую систему в этом поле, регулируют балансировочные устройства так, чтобы измеряемый сигнал стал минимальным. Можно также определить полярность магнитометра, учитывая, что северный магнитный полюс Земли находится в южном полушарии.

Более эффективная процедура балансировки основана на применении специальных больших катушек для создания равномерного магнитного поля и поля с равномерным градиентом. Обычно используют системы катушек Гельмгольца. Если токи в них имеют одинаковые направления, то в средней части пространства между катушками магнитное поле является практически равномерным. Если же токи текут в противоположных направлениях, то поле в этой области будет обладать равномерным градиентом. Применяются и более сложные системы, например система из пяти одинаковых квадратных катушек со специально подобранными числами витков [72, с. 85]. Очевидно, катушки должны быть достаточно большими, чтобы можно было разместить в области равномерного поля (или градиента) магнитометрическую систему (их размеры должны быть порядка метров). Методы балансировки с применением триммеров позволяют достичь точности балансировки 10^{-6} . Дополнительные сведения о методах балансировки градиометров можно найти в [9, 39, 51, 58, 59, 72 и др.].

В заключение этого параграфа отметим, что наряду с экранированием помещений, где проводятся измерения, а также компенсацией помех при помощи градиометрической конструкции трансформатора потока важную роль в борьбе с помехами и шумами играют методы, основанные непосредственно на обработке выходного сигнала магнитометра при помощи аналоговых и (или) цифровых электронных средств. Особенно важное значение имеет такая обработка для устранения помехи, порождаемой сетью электропитания. Наиболее простой и распространенный метод — это пропускание выходного сигнала системы через гребенчатые и полосовые заграждающие фильтры. При очень сильных шумах применяют следующий метод компенсации: из выходного сигнала измерительной системы вычитается "опорный" сигнал, регистрируемый специальными датчиками, расположенными таким образом, чтобы они воспринимали только сигналы помехи и не воспринимали полезный сигнал. Один из самых совершенных методов борьбы с помехами представляет собой так называемая адаптивная фильтрация, или адаптивная компенсация. Она базируется на изменении параметров одного или нескольких опорных сигналов в соответствии с изменениями характеристик помехи с тем, чтобы при вычитании опорных сигналов из измеренного обеспечивалась оптимальная компенсация. Такие ме-

тоды могут быть реализованы при помощи аналогового или цифрового оборудования, в реальном масштабе времени или при автономной обработке данных. Более подробные сведения о них, а также ссылки на конкретные опубликованные исследования по этому вопросу содержатся в [39, 72].

1.3. Современная аппаратура и автоматизированные системы для биомагнитометрии

Магнитометр SKM-2 [22, 186, 190, 192, 193]. Сквид-магнитометр SKM-2 разработан и изготовлен в Институте измерения и измерительной техники Центра электрофизических исследований Словацкой Академии наук (Братислава, ЧССР) и предназначен для измерения очень слабых магнитных полей, в том числе магнитных полей, порождаемых биологическими объектами.

В магнитометре используется сквид в форме сверхпроводящего кольца двухдырочного типа, показанный схематически на рис. 1.25, а. В массивном блоке из сверхпроводящего металла цилиндрической формы, срезанном с двух сторон по плоскостям, имеются два симметричных цилиндрических отверстия с осями, параллельными оси блока. В одном из отверстий помещается входная катушка сквида $L_{вх}$, к которой подсоединяется измерительная катушка (простая или с градиометрической структурой), в другом отверстии — высокочастотная катушка (катушка накачки, или просто катушка сквида) $L_{вч}$. В стенке между цилиндрическими отверстиями имеется прорезь. На одной стороне прорези установлен ниобиевый винт со специально обработанным заостренным концом, имеющим радиус закругления 1 мкм, который упирается в шайбу, установленную на противоположной стороне, образуя точечный контакт. При биомагнитных измерениях совместно со сквид-датчиком применяется симметричный градиометр второго порядка с диаметром катушек 2,7 и базой 4,5 см (общая длина градиометра 9 см).

Электронная управляющая схема сквид-магнитометра представлена на рис. 1.25, б. При измерении магнитного поля исследуемого объекта прибор работает с замкнутой отрицательной обратной связью, причем ток обратной связи создает в катушке сквида магнитное поле, равное по абсолютной величине и противоположное по знаку измеряемому полю. Выходное напряжение прибора получается за счет тока обратной связи. Рабочий режим сквида устанавливается посредством задания требуемых уровней высокочастотного сигнала накачки (возбуждения) с частотой 30 МГц, модуляционного сигнала, изменяющегося по прямоугольному закону, с частотой 50 кГц и тока обратной связи. Катушка накачки вместе с емкостями коаксиального кабеля K , конденсаторов C_1 и C_2 и настроенного диода VD образует высокочастотный резонансный контур. Под воздействием сквида в этом контуре возникает реак-

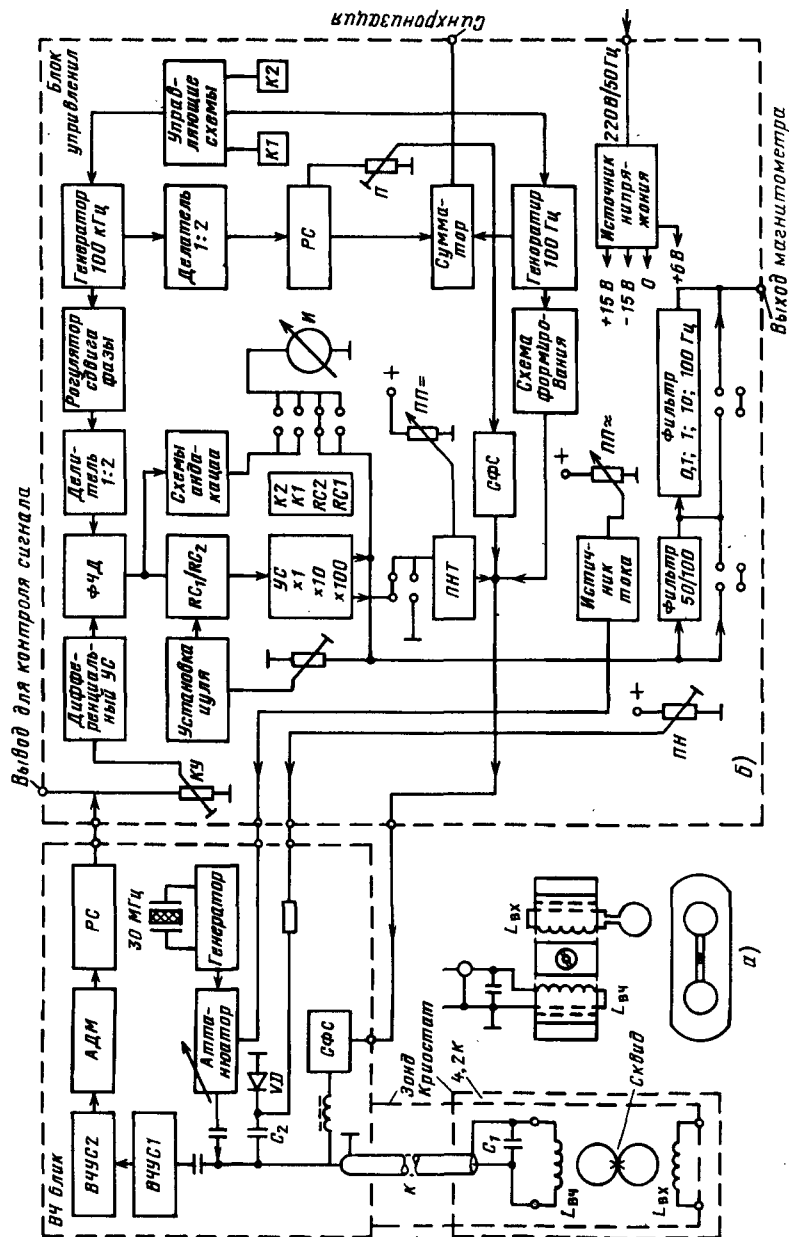


Рис. 1.25. Схема сквида двухдыроного типа (а) и структурная схема магнитометра СКМ-2 (б)

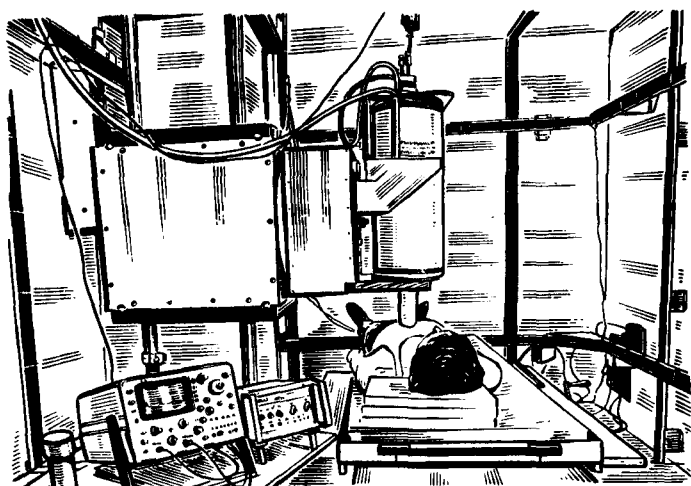
ция напряжения в форме модулированного по амплитуде высокочастотного сигнала накачки. Именно этот сигнал несет информацию об измеряемом магнитном поле. Резонансный контур подключен ко входу каскадного предусилителя *ВЧУС1* с малым шумом. Для обеспечения высокой чувствительности прибора в целом необходимо обеспечить согласование контура и предусилителя по шуму, а также достаточно низкий уровень собственного шума предусилителя. После селективного усиления сигнал поступает в двухступенчатый широкополосный усилитель *ВЧУС2*, а после детектирования по амплитуде в демодуляторе *АДМ*, пройдя через разделительную ступень *РС*, подается на блок управления. Высокочастотная часть электронной схемы содержит также генератор с частотой 30 МГц на кварцевом кристалле, аттенюатор, управляемый источником тока через прецизионный потенциометр *ПП* $\approx$, которые обеспечивают требуемый уровень высокочастотной накачки, а также схему формирования сигнала с частотой 50 кГц *СФС* в цепи отрицательной обратной связи.

Уровень сигнала, поступающего в блок управления, устанавливается потенциометром *КУ*, который регулирует коэффициент усиления всего замкнутого контура. После усиления сигнала в симметричном дифференциальном усилителе происходит синхронное детектирование модуляционного сигнала с частотой 50 кГц в фазочувствительном детекторе *ФЧД*. После детектирования сигнал упорядочивается по частоте в регуляторе с переключаемыми постоянными времени *RC₁/RC₂*. Регулятор имеет цепи ручной и автоматической установки нуля. Значение выходного напряжения магнитометра, при котором происходит автоматическая установка нуля, можно задавать при помощи потенциометра в пределах $\pm (0,1-10)$ В.

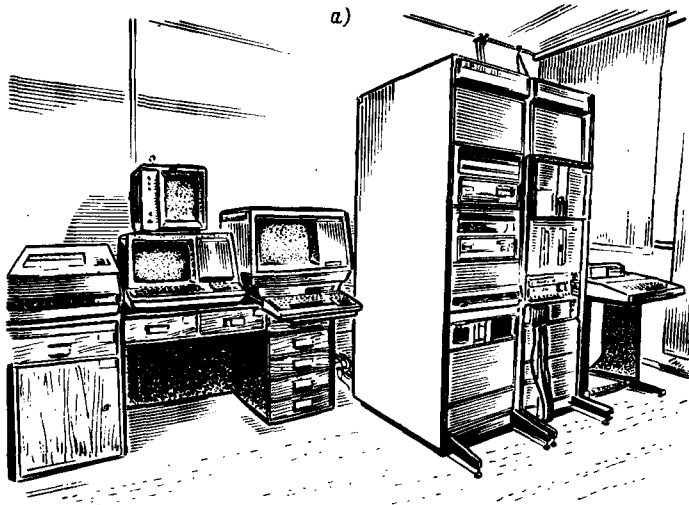
После усиления в усилителе с переключаемым коэффициентом усиления *УС* $\times 1$, $\times 10$, $\times 100$ сигнал подается параллельно на стрелочное измерительное устройство *И* и на выводы магнитометра через фильтры, в которых может селективно подавляться 1-я и 2-я гармонические составляющие помехи от сети электропитания и ограничиваться полоса частот выходного сигнала сверху частотой 0,1; 1; 10 и 100 Гц при наклоне характеристики 40 дБ/дек. Шумы на частотах выше 10 кГц подавляются при наклоне характеристики 20 дБ/дек.

На втором выходе усилителя *УС* $\times 1$, $\times 10$, $\times 100$ уровень сигнала при переключении чувствительности не изменяется. Этот сигнал подается на преобразователь напряжения в ток *ПНТ* и в виде тока обратной связи — на сквид, где замыкается цепь отрицательной обратной связи. Блок управления содержит также следующие элементы: генератор колебаний с частотой 50 кГц (осциллятор на кварцевом кристалле с частотой 100 кГц и делитель), сигнал которого через регулятор фазового сдвига подается в виде импульсов сцепления на фазочувствительный детектор и через потенциометр *П* и схему формирования сигнала с частотой 50 кГц *СФС* в виде модуляционного сигнала на сквид; регу-

лировочный источник постоянного тока, который дает возможность при помощи прецизионного потенциометра $ППП=$ сдвигать рабочую точку сквида в пределах $3\Phi_0$; генератор тестового сигнала с частотой 100 Гц, который в режиме настройки $K1$ магнитометра подключается к сквиду; управляющие логические схемы, которые в режимах настройки $K1$ и $K2$ и измерения блокируют и запускают генераторы коле-



а)



б)

Рис. 1.26. Расположение испытуемого и аппаратуры при измерении магнитного поля сердца (а) и вычислительные устройства для обработки данных (б)

баний с частотой 100 Гц и 50 кГц; схемы индикации, которые при настройке магнитометра обрабатывают сигнал из фазочувствительного детектора и подают его на измерительное устройство И; стабилизированный источник напряжения ± 15 В, +6 В, который может питаться от сети электропитания или от аккумуляторов с напряжением ± 24 В; источник тока с прецизионным потенциометром $\Pi\Pi\approx$, посредством которого регулируется аттенуатор в высокочастотной части прибора; потенциометр $\Pi\mathcal{H}$, напряжение которого используется для изменения емкости диода VD в целях настройки всего резонансного контура на частоту 30 МГц.

Конструктивно прибор состоит из зонда, в котором размещен сквид-датчик, работающий при температуре жидкого гелия (4,2 К), высокочастотного блока и блока управления. Последние связаны многожильным кабелем длиной 5 м, что позволяет удалить от чувствительных входных частей прибора другую аппаратуру, обслуживающий персонал и прочие источники помех.

Основные технические данные прибора SKM-2:

Входная энергетическая чувствительность, Дж/Гц	$\approx 2 \cdot 10^{-28}$
Входная индуктивность, Гн	$2 \cdot 10^{-6}$
Минимальное измеримое значение спектральной среднеквадратичной магнитной индукции для измерительной катушки с диаметром 5 см, $\mu\text{Тл}/\text{Гц}^{1/2}$	$\approx 2 \cdot 10^{-2}$
Максимальная амплитуда измеряемого магнитного потока ($\Phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-15}$ Вб)	$\pm 1000 \Phi_0$
Максимальная скорость регистрации, с^{-1} , не менее	$10^4 \Phi_0$
Ширина частотного спектра измеряемого сигнала, кГц	0–10

Внешний вид магнитометра SKM-2, измерительного и вычислительного оборудования для исследования магнитного поля сердца показан на рис. 1.26.

Магнитометр SKM-2 используется в составе измерительно-вычислительной системы для исследования магнитного поля сердца человека в незранированном помещении (рис. 1.27). Управление экспериментом и обработка измеренных сигналов осуществляются расположенной в отдельном помещении малой ЭВМ, которая контролирует качество сигналов, улучшает отношение сигнала к помехе путем осреднения измерений на заданном числе кардиоциклов магнитокардиограммы и выполняет предварительную цифровую обработку измеренных данных. Одновременно с сигналом магнитной индукции регистрируется электрокардиографический сигнал в стандартном отведении II, зубец R которого служит для синхронизации последовательно записанных магнитокардиограмм. После предварительной обработки сигналы записываются запоминающим устройством на диск для дальнейшей

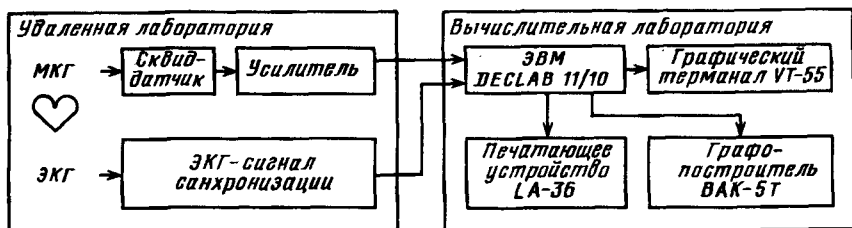


Рис. 1.27. Структурная схема измерительно-вычислительной системы для исследования магнитного поля сердца (Институт измерения и измерительной техники Центра электрофизических исследований Словацкой Академии наук, ЧССР)

цифровой обработки, которую можно выполнять в автономном режиме. Обычно измеряют вертикальную компоненту магнитной индукции в точках фронтальной плоскости у передней поверхности грудной клетки лежащего испытуемого.

Векторный магнитометр [137, 160, с. 13]. Векторный сквид-магнитометр, разработанный в Тамперском технологическом университете (Тампере, Финляндия), предназначен для измерения трех ортогональных компонент магнитного вектора сердца. В нем применена система измерительных катушек однопозиционного типа, состоящая из трех симметричных или асимметричных градиометров первого порядка с круглыми катушками во всех каналах или с круглыми катушками в вертикальном канале и прямоугольными катушками в горизонтальных каналах. В зависимости от условий оптимизации круглые приемные катушки имеют диаметр от 2,8 до 6 см, прямоугольные катушки — ширину 6 и высоту 2,9 см. База градиометров равна 15 см.

Прибор работает на основе временного мультиплексирования трех каналов, причем для управления высокочастотными сквид-датчиками и схемами фиксации магнитного потока используется цифровая управляющая система, показанная на рис. 1.28. Сквид-датчики контролируются поочередно при помощи высокочастотных коммутаторов в блоке предусилителя, тогда как ток обратной связи поддерживается непрерывным во всех каналах. Таким образом, для всех каналов может использоваться одна и та же высокая частота, общие высокочастотный усилитель и детектор. Обработка сигналов, поступающих с выхода датчиков, и регулировка тока обратной связи осуществляются цифровым методом при помощи быстродействующего цифрового процессора TMS32010. Устройство поочередно, синхронно с переключением высокочастотного коммутатора воспринимает состояние каждого сквид-датчика, преобразует его в цифровую форму, и полученные данные считываются процессором. Затем вычисляются нужные значения сигналов обратной связи и записываются в устройстве фиксации цифро-аналогового преобразователя соответствующего канала. Состояние этого преобразо-

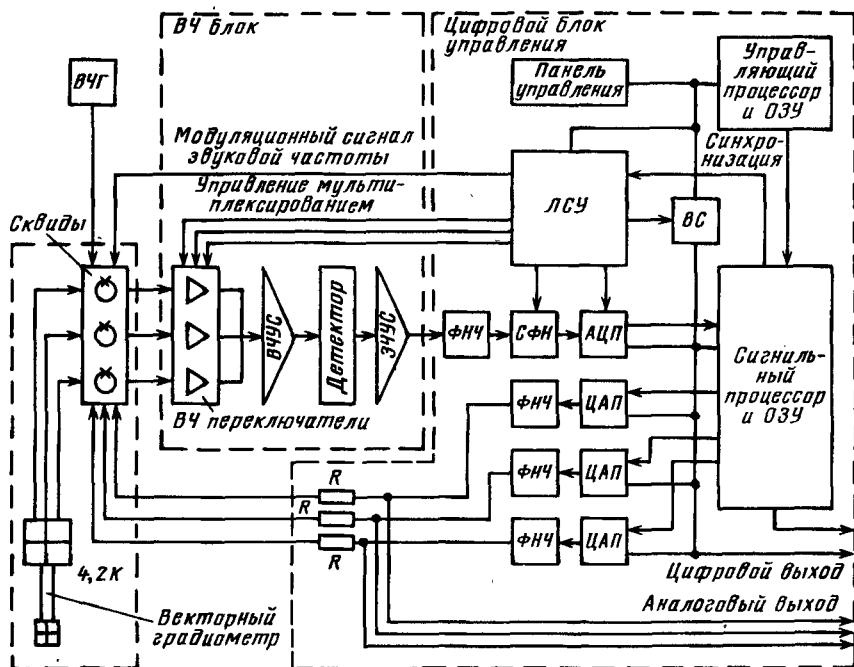


Рис. 1.28. Структурная схема векторного магнитометра с цифровой управляющей системой [160, с. 13]:

ВЧГ – высокочастотный генератор; *ВЧУС* – усилитель высокой частоты; *ЗЧУС* – усилитель звуковой частоты; *ФНЧ* – фильтр нижних частот; *СФН* – схема фиксации напряжения; *ЛСУ* – логические схемы управления; *АЦП* – аналого-цифровой преобразователь; *ЦАП* – цифро-аналоговый преобразователь; *ВС* – вентиляционные схемы; *ОЗУ* – оперативное запоминающее устройство; *R* – сопротивление обратной связи

вателя не изменяется, пока на устройство фиксации не поступит следующая порция данных обратной связи. Сигналы с выхода цифро-аналогового преобразователя, пройдя через сглаживающие фильтры, поступают на сквид-датчики. Частота дискретизации по времени в системе равна 30 кГц. При работе с тремя каналами на каждый канал приходится частота 10 кГц. Поскольку спектр магнитокардиографического сигнала значительно уже, частота дискретизации выходных данных для дальнейшей обработки может быть во много раз меньше.

Непосредственная обработка сигнала осуществляется 16/32-битным процессором с использованием 12-разрядных аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей, что соответствует динамическому диапазону около 72 дБ.

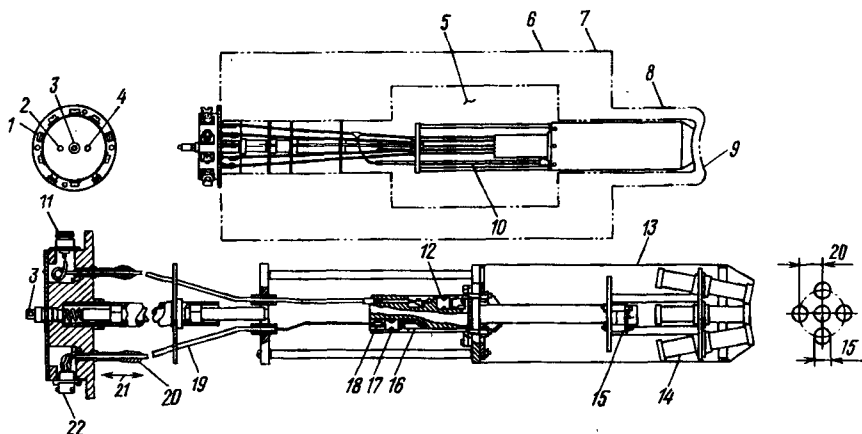


Рис. 1.29. Конструкция пятиканального сквид-магнитометра [73, с. 46]:

1 — измеритель уровня гелия; 2 — вентиль быстрого выпуска; 3 — вентиль для заливки гелия; 4 — вентиль медленного выпуска; 5 — жидкий гелий (объем приблизительно 10 л); 6 — очертания сосуда Дьюара; 7 — главное отделение сосуда диаметром 33 см и длиной 70 см; 8 — хвостовое отделение сосуда диаметром 13 см и длиной 16 см; 9 — сферическая поверхность радиусом 9 см; 10 — датчик уровня жидкого гелия; 11 — канал высокочастотного сквида (один из четырех); 12 — высокочастотный сквид; 13 — защитная оболочка и высокочастотная экранировка; 14 — измерительная катушка канала полезного сигнала (одна из пяти); 15 — измерительные катушки опорных каналов; 16 — выводная панель; 17 — сквид постоянного тока; 18 — панель электронных цепей сквид-датчика постоянного тока; 19 — жесткая высокочастотная экранировка; 20 — гибкая часть экранировки; 21 — ход 6 мм; 22 — канал сквида постоянного тока (один из пяти)

Для управления обработкой сигнала применяется микропроцессор МС 6809, обеспечивающий взаимодействие с оператором и управление мультиплексированием и выбором каналов. Предусмотрен режим настройки, позволяющий вручную отрегулировать рабочие точки каждого сквид-датчика, в то время как процессор сигнала поддерживается в исходном состоянии с разомкнутой цепью обратной связи. Чувствительность системы по каждому каналу равна $0,021 \text{ пТл/Гц}^{1/2}$.

Пятиканальный магнитометр [73, с. 46]. Пятиканальный сквид-магнитометр, разработанный в Нью-Йоркском университете (Нью-Йорк, США), предназначен для топографического (многоканального) исследования нейромагнитного поля при отсутствии экранировки.

В одном сосуде Дьюара размещены девять сквид-датчиков (рис. 1.29). Пять из них (на сквидах постоянного тока) предназначены для измерения исследуемого магнитного поля в пяти точках у поверхности головы испытуемого, другие четыре (на высокочастотных сквидах), регистрирующие три ортогональные компоненты внешнего мешающего поля и компоненту его градиента по оси сосуда Дьюара, — для электронного подавления внешней помехи.

Система сквид-датчиков и измерительных катушек установлена на зонде, который подвешен внутри сосуда из стекловолокна объемом 10 л. Сквиды размещены внутри сверхпроводящего экранирующего корпуса на дне расширенной части сосуда Дьюара. Входные катушки сквидов соединены экранированными сверхпроводящими проводами с соответствующими измерительными катушками, которые поддерживаются каркасом, надежно закрепленным на дне хвостовика сосуда. Таким образом, измерительные катушки являются первичными элементами сверхпроводящих трансформаторов магнитного потока, а их вторичными элементами являются входные катушки, связанные магнитной связью со сквидами. Каждая из пяти измерительных катушек в каналах полезного сигнала имеет структуру градиометра второго порядка с диаметром катушек 1,5 см и базой 4 см, разделяющей соседние катушки. Система этих сигнальных градиометров состоит из одного центрального градиометра, направленного по оси сосуда Дьюара, и четырех равноотстоящих один от другого градиометров, у которых центры приемных катушек лежат на окружности диаметром 4 см и с центром на оси среднего градиометра. Оси этих четырех периферических градиометров отклонены от оси среднего градиометра на угол 10° таким образом, что оси всех пяти градиометров сходятся в одной точке на расстоянии приблизительно 9 см от дна хвостовика сосуда, т.е. в точке, с которой совмещают центр черепа испытуемого. Дно хвостовика сосуда Дьюара имеет форму вогнутой сферической поверхности с радиусом 9 см, так что его можно расположить близко к скальпу, и благодаря наклону периферических градиометров их оси проходят через окружность с диаметром 3,4 см на поверхности скальпа.

В каждом из пяти сигнальных каналов используется сквид постоянного тока типа DYNABIAS SQUID™. Несмотря на близость измерительных катушек между собой, взаимное влияние каналов согласно расчетам не превышает 0,2 %.

Непосредственно над сигнальными измерительными катушками расположена система из четырех измерительных катушек опорных каналов, которые служат первичными элементами для трансформаторов магнитного потока, подключенных к высокочастотным сквидам типа HYBRID SQUID™. Три из этих катушек, имеющие структуру простого магнитометра, ориентированы взаимно ортогонально и воспринимают осевую и две трансверсальные компоненты внешнего магнитного поля. Четвертая катушка имеет структуру градиометра первого порядка и ориентирована в осевом направлении (она воспринимает осевой градиент внешнего поля).

Сосуд Дьюара со сквид-датчиками установлен в специальном координаторном устройстве — сканнере, который обеспечивает возможность движения хвостовика сосуда по сферической поверхности с заданным радиусом, причем ось сосуда Дьюара всегда направлена к центру этой сферы, совпадающему с центром черепа испытуемого. Сосуд установ-

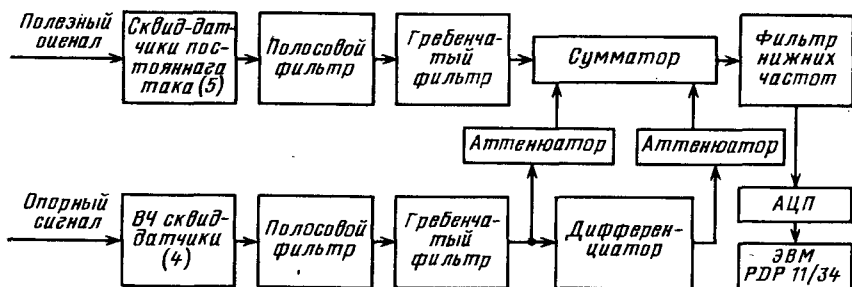


Рис. 1.30. Структурная схема электронной системы для подавления внешней помехи пятиканального сквид-магнитометра [73, с. 46]

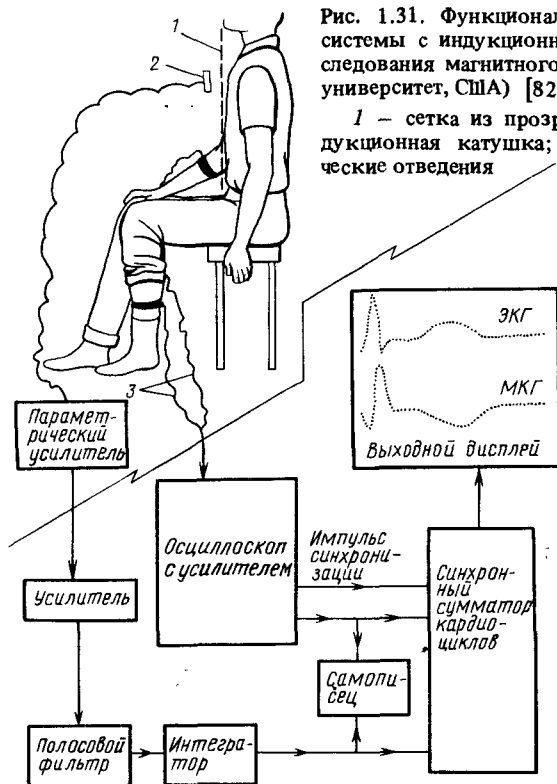


Рис. 1.31. Функциональная схема измерительной системы с индукционным магнитометром для исследования магнитного поля сердца (Иллинойский университет, США) [82]:

1 — сетка из прозрачной пластмассы; 2 — индукционная катушка; 3 — электрокардиографические отведения

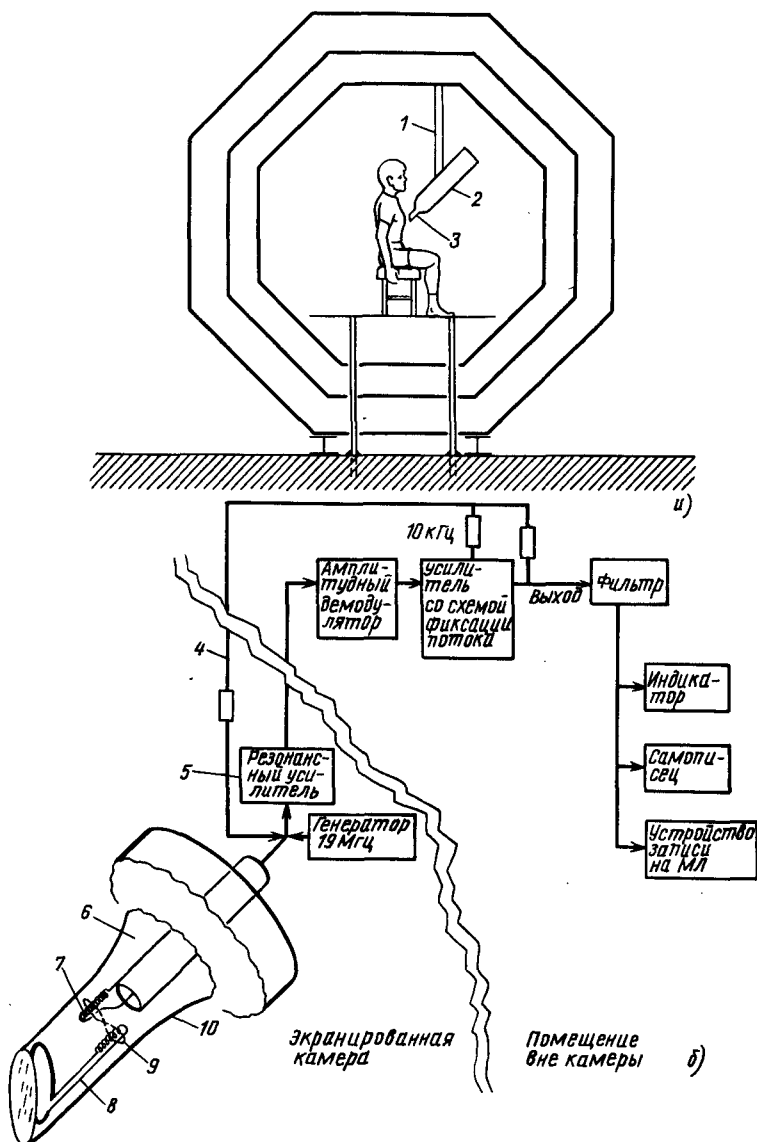


Рис. 1.32. Система со сквид-магнитометром для исследования магнитного поля сердца (Массачусетский технологический институт, США) [89]:

a – расположение испытуемого и сквид-магнитометра в камере с магнитной экранировкой (1 – устройство крепления магнитометра, 2 – сосуд Дьюара, 3 – хвостовик сосуда с датчиком); *б* – функциональная схема измерительной системы (4 – кабели, выведенные через специальную накладную панель, 5 – небольшой электронный блок, установленный на сосуде Дьюара, 6 – жидкий гелий, 7 – высокочастотная катушка, 8 – трансформатор потока, 9 – сквид, 10 – хвостовик сосуда)

лен на каретке, которая может двигаться по двум параллельным направляющим в форме полукруга; концы этих дуг закреплены на рамах, обеспечивающих их поворот относительно горизонтального диаметра. Этот диаметр является полярной осью сферической системы координат сосуда Дьюара: вращение дуг соответствует изменению азимута, а движение каретки — изменению полярного угла. Специальные указатели на сканнере позволяют определить положение и ориентацию измерительных катушек относительно черепа испытуемого с точностью до угла $0,5^\circ$, или расстояния 1 мм по поверхности скальпа.

Структурная схема электронных устройств описанной магнитометрической системы представлена на рис. 1.30. Напряжение в каждом из пяти сигнальных и четырех опорных каналов проходит через полосовой фильтр с наклоном характеристики 48 дБ/окт для выделения требуемой полосы частот, а затем — через гребенчатый фильтр для подавления помехи на частоте сети электропитания и ее гармоник. Определяются производные во времени каждого опорного сигнала для облегчения компенсации влияния вихревых токов и гистерезисных магнитных материалов во внешней среде. Эти производные вместе с исходными опорными сигналами калибруются в аттенюаторах ручным или автома-

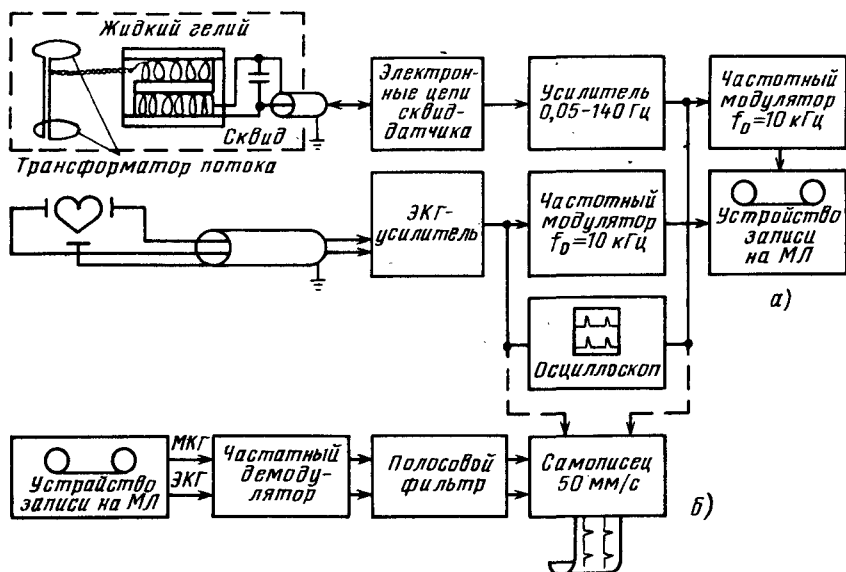


Рис. 1.33. Функциональная схема измерительной системы со сквид-магнитометром для исследования магнитного поля сердца (Хельсинкский технологический университет, Финляндия) [172]:

а — запись сигнала; б — воспроизведение сигнала

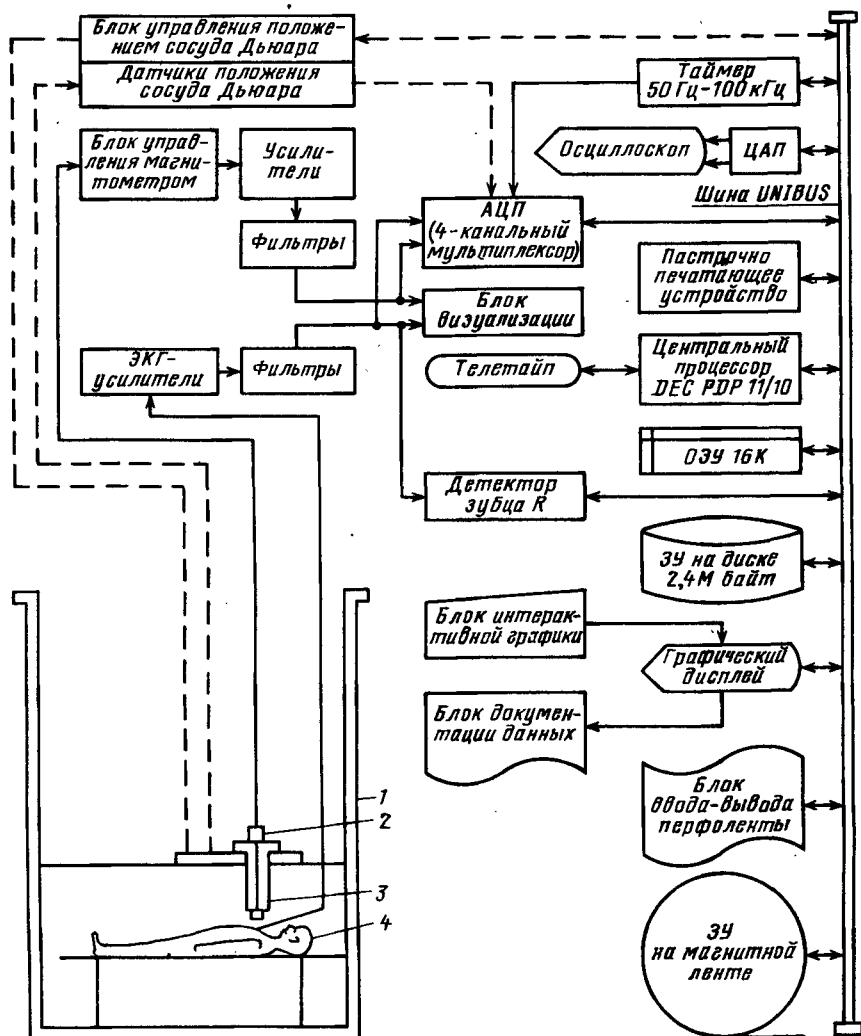


Рис. 1.34. Функциональная схема измерительно-вычислительного комплекса со сквид-магнитометром для исследования магнитного поля сердца (Станфордский университет, США) [199]:

1 — магнитная экранировка из молибденпермаллоя; 2 — высокочастотный блок; 3 — дифференциальный сквид-магнитометр в сосуда Дьюара; 4 — испытуемый

тическим способом при помощи ЭВМ и вычитаются из сигнала каждого из пяти сигнальных каналов в блоке суммирования (всего нужно выбрать 40 весовых коэффициентов). Пять сигналов с выхода блока суммирования поступают в фильтры нижних частот для устранения погрешностей из-за совмещения спектров, а затем вводятся в ЭВМ PDP 11/34 для дальнейшей обработки и интерпретации. Оптимальный выбор весо-

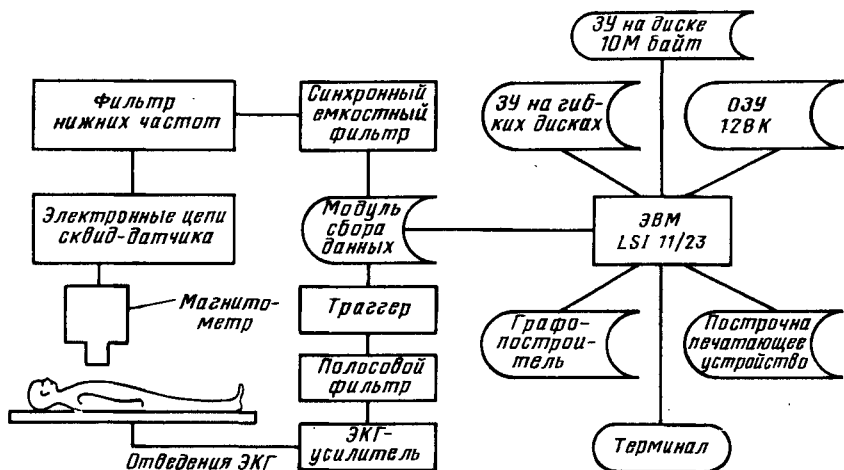


Рис. 1.35. Функциональная схема измерительно-вычислительного комплекса со сквид-магнитометром для исследования магнитного поля сердца (Университет Западного Резерва Кейса, США) [159, с. 255]

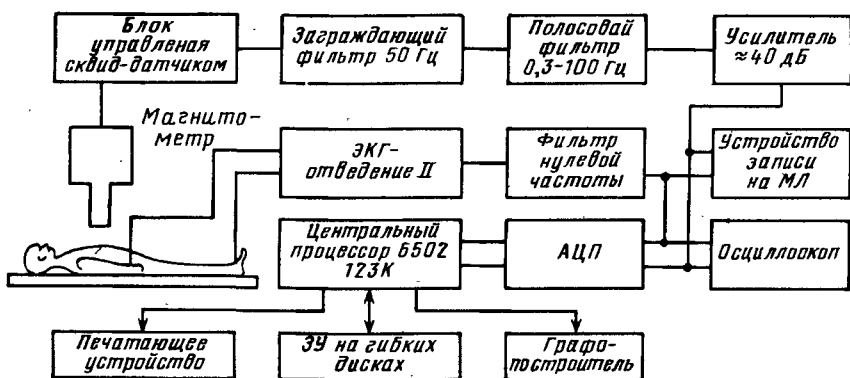
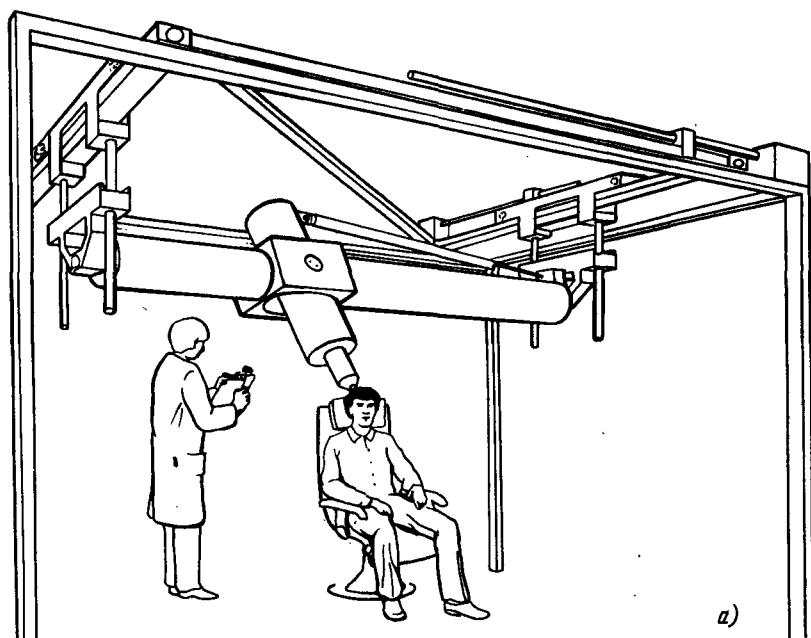
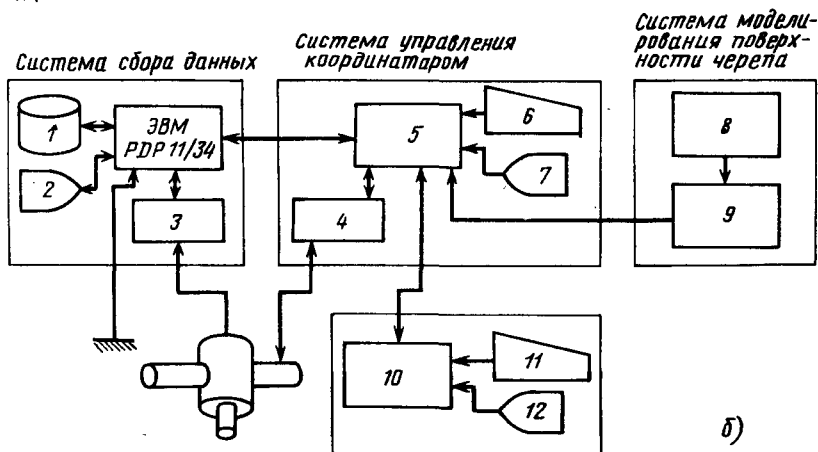


Рис. 1.36. Функциональная схема измерительно-вычислительного комплекса со сквид-магнитометром для исследования магнитного поля сердца (Туринский политехнический институт, Италия) [73, с. 153]



а)



б)

Рис. 1.37. Измерительно-вычислительный комплекс со сквид-магнитометром для исследования магнитного поля мозга (фирма CTF Systems, Канада) [73, с. 52]:

а - расположение испытуемого и сквид-магнитометра, установленного на специальном порталном координаторном устройстве, которым управляет ЭВМ; б - функциональная схема измерительно-вычислительного комплекса (1 - запоминающее устройство на диске, 2 - дисплей, 3 - блок управления сквид-датчиком, 4 - блок управления координатором, 5 - контроллер, 6 - пульт, 7 - дисплей, 8 - блок обмера черепа, 9 - блок геометрического описания черепа, 10 - блок предъявления стимула, 11 - пульт, 12 - дисплей)

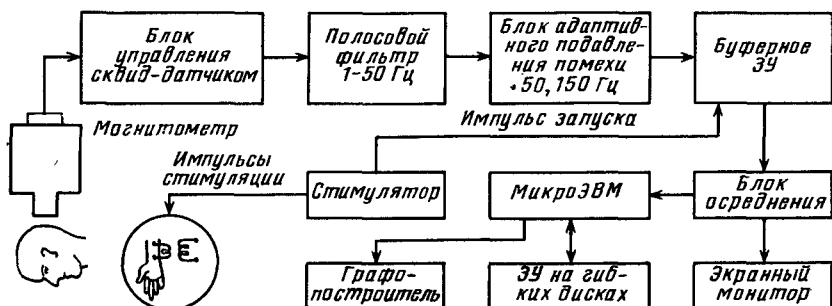


Рис. 1.38. Функциональная схема измерительно-вычислительного комплекса со сквид-магнитометром для исследования магнитного поля мозга (Хоккайдский университет, Япония) [160, с. 32]

вых коэффициентов для опорных сигналов, компенсирующих внешние помехи, осуществляется при помощи специальной процедуры настройки с использованием системы больших катушек Гельмгольца, создающих равномерное магнитное поле и поле с равномерным градиентом. Собственный шум сигнальных каналов системы составляет около $0,02 \text{ пТ/Гц}^{1/2}$ в полосе примерно от 0,5 Гц до высоких частот.

Примеры автоматизированных систем для биомагнитных измерений. Развитие биомагнетометрии в течение последнего десятилетия характеризуется не только почти повсеместным переходом от магнитометров с индукционными катушками к сквид-магнитометрам, но и усовершенствованием процедуры измерения, существенным повышением уровня автоматизации как собственно измерительного процесса, так и последующей обработки данных. Возможности для этого значительно расширились благодаря применению цифровой вычислительной техники, а в последнее время — ЭВМ на микропроцессорной основе. Большое внимание уделяется созданию многоканальных и "многоточечных" магнитометров, позволяющих одновременно измерять магнитную индукцию во многих точках, распределенных на заданной поверхности; так, имеются сообщения о разработке приборов с несколькими десятками (больше 30) каналов [9, 73]. Наиболее перспективным представляется использование магнитометров в составе специализированных измерительно-вычислительных комплексов на базе ЭВМ, обеспечивающих оптимальное решение конкретных экспериментальных задач, которые возникают при исследовании магнитных полей биологических объектов. На рис. 1.31–1.38 представлены функциональные схемы некоторых описанных в научной литературе систем биомагнетометрии, начиная от более ранних, использующих магнитометры с индукционными катушками и аналоговую аппаратуру для обработки данных, и до последних высокоавтоматизированных измерительно-вычислительных комплексов для исследования магнитных полей сердца и мозга.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ БИОМАГНИТОМЕТРИИ

2.1. Измерение магнитного поля сердца

Общие сведения о кардиомагнитометрии. Первые измерения магнитного поля сердца были осуществлены в середине 60-х годов при помощи магнитометров с индукционными катушками сначала Болом и Макфи [67], позже — Сафоновым с соавторами [40, 45] и Коэном [78]. Хотя сердце создает довольно сильное магнитное поле по сравнению с другими органами тела (с типичной амплитудой вблизи передней поверхности грудной клетки 50 пТл), это поле в миллионы раз слабее внешних мешающих магнитных полей окружающей среды, в том числе магнитного поля Земли. Поэтому в первых измерениях для подавления помех использовали градиометрическую структуру магнитометра, осреднение сигнала по многим кардиоциклам, а также применяли специальную магнитную экранировку помещения, где проводились эксперименты (рис. 2.1).

Качество магнитных измерений существенно повысилось, когда в начале 70-х годов Коэн с соавторами и другие исследователи [80, 84, 164] стали применять сквид-магнитометр. Дальнейшее усовершенствование измерительной процедуры благодаря применению сквид-магнитометров с градиометрической структурой измерительной катушки

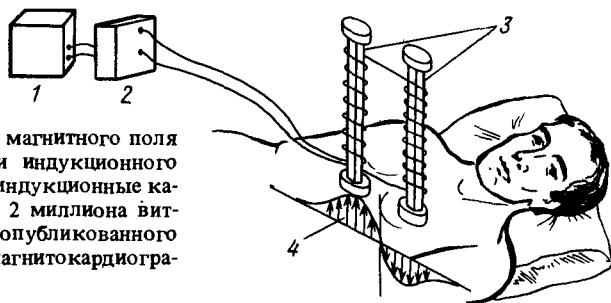


Рис. 2.1. Измерение магнитного поля сердца при помощи индукционного магнитометра. Две индукционные катушки содержат по 2 миллиона витков (из первого опубликованного исследования по магнитокардиографии [67]):

- 1 — устройство регистрации;
- 2 — усилитель с низким уровнем шума;
- 3 — ферритовые сердечники с торцевыми шляпками;
- 4 — предполагаемое распределение магнитной индукции

позволило измерять кардиомагнитное поле без обязательной процедуры осреднения и в помещениях без специальной экранировки [151, 209].

Наиболее существенные этапы развития кардиомагнитных измерений приведены в табл. 2.1 (здесь указаны в основном технические и экспериментальные достижения и не отражены теоретические результаты).

Таблица 2.1. Основные этапы развития кардиомагнитометрии [73, с. 93]

Год	Достижение	Авторы
1963	Первая запись МКГ (с использованием индукционного магнитометра и осреднения сигналов)	Бол и Макфи (Baule and McFee)
1967	Первая запись МКГ в камере с магнитной экранировкой (с использованием индукционного магнитометра и осреднения сигналов)	Сафоиов и др., Коэн (Cohen)
1970	Запись МКГ в реальном времени в камере с магнитной экранировкой (с использованием сквид-магнитометра)	Коэн и др.
1970	Первое векторное представление МКГ	Бол и Макфи
1971	Запись МКГ без экранировки с использованием сквид-магнитометра с градиометрической измерительной катушкой первого порядка	Циммерман и Фредерик (Zimmerman and Frederick)
1973	Первое моделирование МКГ на ЭВМ	Горачек (Hogašek)
1974	Запись МКГ в лаборатории и в клинике с использованием сквид-магнитометра с градиометрической измерительной катушкой второго порядка	Опфер и др. (Opfer et al.)
1974	Первое исследование МКГ при различных заболеваниях сердца	Сааринен и др. (Saarinen et al.)
1974	Исследование МКГ для диагностической категории нормы и разработка стандартной сетки измерительных позиций	Силтанен и др. (Siltanen et al.)
1975	Запись МКГ постоянных токов	Коэн и Кауфман (Cohen and Kaufman)
1978	Первая запись МКГ, отражающей активность системы Гиса-Пуркинье	Фаррелл и др. (Farrell et al.)
1981	Первое моделирование МКГ системы Гиса-Пуркинье на ЭВМ	Трипп и Фаррелл (Tripp and Farrell)
1983	Первая запись МКГ, порождаемой задержанными потенциалами миокарда	Эрне и др. (Erné et al.)

Записи индукции магнитного поля сердца по аналогии с электрокардиограммой (ЭКГ) обычно называют магнитокардиограммой (МКГ).

Измерение и интерпретация магнитного поля сердца — это в настоящее время наиболее хорошо разработанная часть области биомagnetизма.

Сердце как электрический генератор. Сердце человека состоит в основном из мышечной возбудимой ткани, его масса около 0,3 кг, в грудной клетке оно занимает пространство диаметром около 10 см. Главные отделы сердца — это два предсердия со стенками толщиной около 0,3 см и два желудочка с более толстыми стенками (правый имеет толщину стенки около 0,5 см, левый 1–2 см).

Сердце расположено в грудной клетке несимметрично. Геометрический центр желудочков находится приблизительно в трансверсальной плоскости, проходящей между четвертым и пятым межреберьями у края грудины, и смещен в этой плоскости влево и вперед относительно середины сечения грудной клетки этой плоскостью (рис. 2.2). Основная нагрузка по перекачке крови в системе кровообращения приходится на левый желудочек, поэтому он существенно преобладает над другими отделами сердца по массе возбудимой и сокращающейся мышечной ткани — миокарда и как область возникновения биоэлектрических генераторов вносит основной вклад в электромагнитное поле, создаваемое сердцем во внешнем пространстве.

В нормальных условиях перед началом каждого цикла возбуждения все клетки миокарда находятся в невозбужденном, т.е. электрически поляризованном состоянии. Это означает, что между внутренней и наружной поверхностями мембраны каждой клетки поддерживается разность потенциалов, приблизительно равная -90 мВ (трансмембранный потенциал покоя). Поверхности соприкосновения соседних клеток миокарда имеют многочисленные контактные зоны — участки низкого сопротивления для токов, протекающих между внутриклеточными пространствами клеток. Некоторые структуры миокарда, в частности так называемая проводниковая система, состоят из совокупностей электрически связанных клеток, которые до некоторой степени обособлены от окружающей ткани и образуют волокна, проводящие возбуждение в направлении своей продольной оси. Основная масса сердца образована сократительным миокардом — совокупностью связанных вышеуказанным образом клеток; эту сложную объемную структуру сетчатого типа называют электрическим функциональным синцитием, учитывая ее способность генерировать и проводить импульсы электрического возбуждения, сопровождающиеся согласованными сокращениями соответствующих мышечных волокон.

Цикл возбуждения сердца начинается с возникновения импульса возбуждения в синусовом узле, расположенном в верхней части правого предсердия (рис. 2.3). Здесь клетки возбуждаются автоматически, образуя нормальный водитель ритма сердца. Возбуждение заключается в электрической деполяризации мембран и соответствует крутой восходящей части импульса трансмембранного потенциала (потенциала действия).

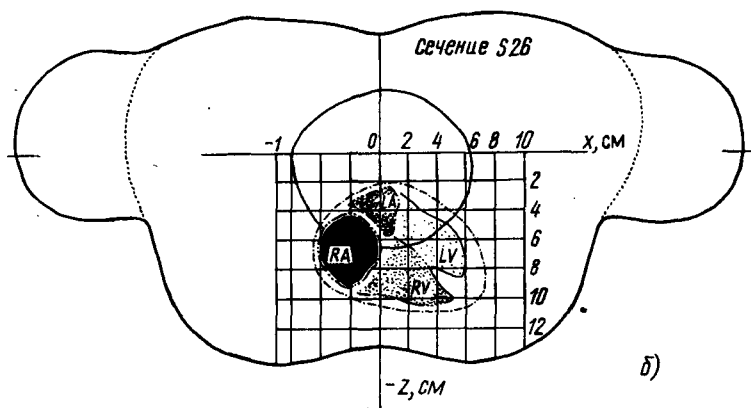
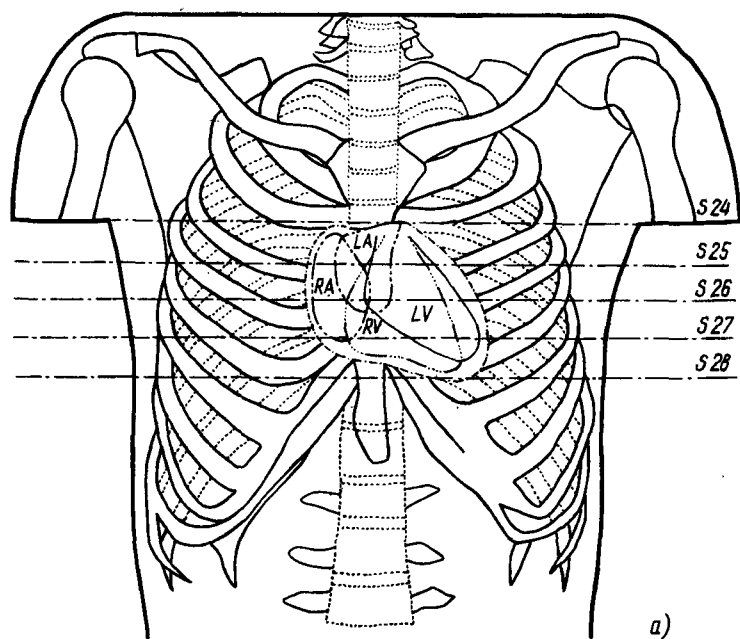


Рис. 2.2. Расположение сердца в грудной клетке (упрощенная схема из [146]):

a — фронтальная проекция; *б* — трансверсальное сечение на уровне геометрического центра желудочков (сечение S26); LA, RA — левое и правое предсердия; LV, RV — левый и правый желудочки

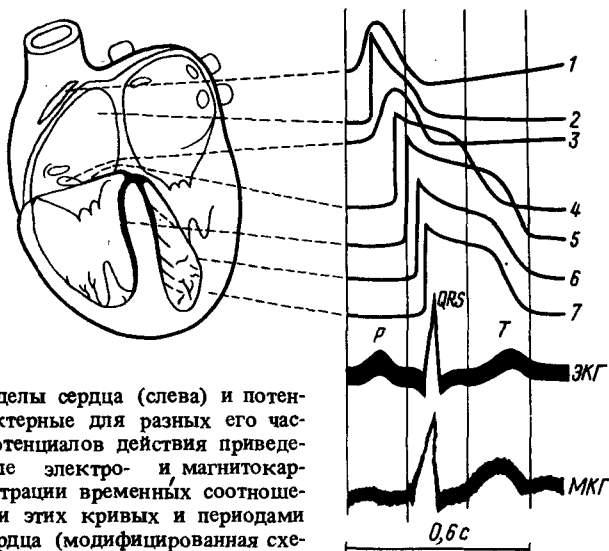


Рис. 2.3. Основные отделы сердца (слева) и потенциалы действия, характерные для разных его частей (справа). Ниже потенциалов действия приведены упрощенные кривые электро- и магнитокардиограммы для иллюстрации временных соотношений между элементами этих кривых и периодами возбуждения частей сердца (модифицированная схема из [41]):

1 — синусовый узел; 2 — правое предсердие; 3 — атриовентрикулярный узел; 4 — пучок Гиса; 5 — ножки пучка Гиса; 6 — конечные волокна Пуркинью; 7 — сократительный миокард левого желудочка

Импульс распространяется во всех направлениях от синусового узла, и начинается сокращение правого предсердия. Одновременно возбуждение распространяется с более высокой скоростью по путям предпочтительного проведения к левому предсердию и к атриовентрикулярному узлу (у заднего правого края межпредсердной перегородки), где распространение возбуждения резко замедляется (происходит так называемая атриовентрикулярная задержка). Далее импульс возбуждения распространяется с высокой скоростью по проводниковой ткани пучка Гиса, который разветвляется, образуя правую и левую ножки, проводящие возбуждение соответственно к правому и левому желудочкам. С более мелких расветвлений ножек пучка Гиса возбуждение переходит на субэндокардиальные волокна Пуркинью, которые густой сетью пронизывают внутренний (эндокардиальный) слой миокарда желудочков, проникая в левом желудочке внутрь стенки почти на треть ее толщины. Импульс возбуждения по этой сети проводниковых волокон очень быстро охватывает эндокардиальный слой стенки желудочков и продолжает широким фронтом с меньшей скоростью распространяться в толще стенки изнутри наружу — от эндокарда к эпикарду (наружной поверхности сердца). Здесь волна возбуждения, или фронт деполяризации (граница невозбужденных и возбужденных областей), имеет довольно большие размеры — она соизмерима с раз-

мерами сердца. Выходя на эпикард, фронт деполяризации разрывается. Продолжая охватывать миокард, фронты деполяризации перемещаются в заднюю часть основания желудочков, которая возбуждается последней. Возбуждение распространяется широкими фронтами, почти параллельными поверхностям стенки, главным образом в межжелудочковой перегородке и в стенке левого желудочка. В предсердиях и в правом желудочке возбуждение очень быстро выходит на наружную поверхность стенки и продолжает распространяться узким фронтом, поверхность которого почти нормальна к поверхностям стенки.

После завершения процесса деполяризации клеток они некоторое время находятся в полностью возбужденном (деполяризованном) состоянии, соответствующем фазе плато потенциала действия. Затем начинается процесс их восстановления, или реполяризации, когда трансмембранный потенциал постепенно приобретает все большее отрицательное значение, пока не восстановится потенциал покоя. Этот процесс происходит значительно медленнее, чем процесс деполяризации (он соответствует пологой нисходящей части потенциала действия); поэтому в миокарде нет резкой границы между деполяризованными и уже реполяризованными областями. Фактически в период реполяризации все клетки миокарда длительное время находятся в "промежуточном" состоянии, т.е. значения трансмембранного потенциала у них лежат между минимальным (потенциалом покоя) и максимальным, хотя эти значения различаются в разных областях. Иными словами, в среде существует некоторое пространственное распределение трансмембранного потенциала, которое, изменяясь во времени, постепенно принимает значение потенциала покоя во всех областях, чем и завершается цикл возбуждения. Форма распределения трансмембранного потенциала в миокарде во время реполяризации зависит от двух основных факторов — от последовательности возбуждения миокарда, которая определяет моменты времени начала деполяризации каждой клетки, и от длительности потенциала действия, которая является одним из локальных свойств миокарда и может различаться в разных местах сердца. В нормальных условиях реполяризация предсердий обычно совпадает по времени с деполяризацией проводниковой системы между предсердиями и желудочками и началом деполяризации желудочков. Основные тенденции процесса восстановления желудочков таковы: область верхушки сердца реполяризуется несколько раньше, чем область основания, эпикард реполяризуется несколько раньше, чем эндокард.

В нормальных условиях в периоды покоя и полного возбуждения всего миокарда трансмембранный потенциал по существу распределен между клетками равномерно, имея соответственно минимальное и максимальное значения. При некоторых патологических состояниях сердца в определенных областях миокарда возникают устойчивые электрофизиологические изменения. Тогда в периоды покоя и полно-

го возбуждения в миокарде могут существовать узкие области сравнительно крутого изменения трансмембранного потенциала, отделяющие патологические участки от нормальных (области повреждения).

Вышеуказанные фазы сердечного цикла и электрофизиологические состояния миокарда находят отражение в электрическом потенциале, измеряемом на поверхности тела. В частности, на стандартной электрокардиограмме, отводимой от поверхности тела (рис. 2.3), зубец *P* порождается процессом деполяризации предсердий, комплекс *QRS* — процессом деполяризации желудочков и зубец *T* — процессом реполяризации желудочков. Горизонтальные участки электрокардиограммы *T-P* и *S-T* соответствуют состояниям покоя и полного возбуждения. При наличии в сердце областей повреждения на электрокардиограмме наблюдается относительное смещение участков *T-P* и *S-T*. Аналогичные по характеру отклонения регистрируются при записи пространственных компонент вектора магнитной индукции; на них обычно можно выделить участки быстрого изменения, соответствующие комплексу *QRS*, а также участки, соответствующие зубцам *P* и *T*.

Таким образом, электрофизиологические процессы в возбуждающейся мышце сердца порождают в окружающей среде электромагнитное поле. Измерение и интерпретация электрической составляющей этого поля, точнее, электрических потенциалов положены в основу электрокардиографических методов диагностики. Интересующая нас в данном случае магнитная составляющая электромагнитного поля сердца порождается теми же самыми биоэлектрическими генераторами, что и электрическая составляющая, поэтому вопрос о структуре этих генераторов имеет важное значение и при анализе магнитного поля сердца.

В принципе первичным электрическим генератором миокарда, как и других возбудимых тканей, являются ионные токи, возникающие под влиянием химических, или концентрационных сил в мембранах клеток (в соответствии с терминологией электродинамики это сторонние токи).

Реальный миокард, как было указано выше, имеет сложную синциотальную структуру, в нем при микроскопическом рассмотрении чередуются области с существенно различающимися электрическими свойствами — внутриклеточная, внеклеточная (межклеточная) и мембранная. Для удобства исследования кардиоэлектрического и кардиомагнитного полей, создаваемых макроскопическими участками миокарда и сердцем в целом, целесообразно перейти от реальной дискретной структуры миокарда к континуальной (непрерывной) среде. При этом характеристики биоэлектрического генератора и его поля, существующие в реальных дискретных областях, также рассматриваются как непрерывно распределенные и существующие в каждой точке гипотетической непрерывной (обычно однородной) среды. Их значения являются результатом осреднения реальных характеристик на участках пространства, больших по сравнению с отдельной клеткой, но малых по

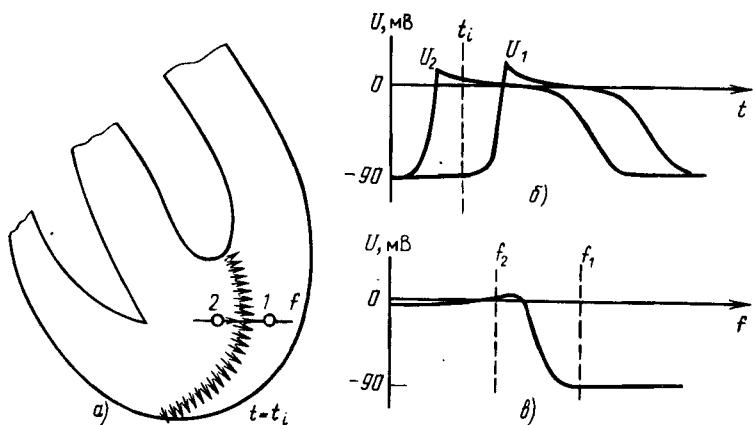


Рис. 2.4. Эквивалентный электрический генератор сердца в период деполяризации желудочков:

а — область волны деполяризации в стенке левого желудочка в один из моментов t_i периода деполяризации (стрелками показано векторное поле эквивалентного генератора); *б* — временное изменение трансмембранного потенциала U в двух противоположащих точках (1 и 2) и передней и задней границ волны деполяризации; *в* — моментное распределение трансмембранного потенциала вдоль прямой f , нормальной к границам волны деполяризации

сравнению с областями ткани, состояние которых подлежит изучению. При некоторых допущениях, обоснованность которых обсуждена в [44], для такого континуального рассмотрения в качестве эквивалентного электрического генератора можно использовать векторное поле плотности стороннего тока в области возбудимого миокарда, пропорциональное в каждой точке локально осредненному градиенту трансмембранного потенциала (рис. 2.4); этот генератор существует в однородной анизотропной среде, соответствующей осредненным пассивным электрическим свойствам ткани миокарда. Очевидно, при решении конкретных задач электро- и магнитокардиологии возможны дальнейшие упрощения математического описания кардиогенератора.

Методика магнитокардиографических измерений. Первые зарегистрированные кривые изменения магнитного поля сердца, или магнитокардиограммы, не обладали достаточно высоким качеством, чтобы можно было надежно оценить их форму, выделить информативные элементы и сопоставить их параметры с электрофизиологическим состоянием сердца. Нередко из-за шумов не удавалось вообще зарегистрировать отклонение, отражающее возбуждение предсердий, другие элементы магнитокардиограммы записывались неустойчиво, с большими искажениями. Трудности интерпретации этих кривых усугублялись слишком большими различиями в измерительной аппаратуре у разных ис-

следователей, отсутствием общепринятой методики измерения, предписывающей определенное расположение точек измерения, направление осей, вдоль которых должны измеряться компоненты магнитной индукции, и других стандартных правил. Тем не менее был выявлен целый ряд важных свойств магнитокардиограммы — сходство ее по форме с электрокардиограммой, в частности наличие явно выраженных участков, соответствующих зубцу *P*, комплексу *QRS* и зубцу *T* электрокардиограммы, зависимость от положения тела испытуемого и от фазы дыхательного цикла и др.

В связи с распространением сквид-магнитометров и накоплением экспериментальных данных более высокого качества постепенно формируются основные методические подходы к измерению и визуальному отображению магнитного поля сердца, а также его диагностической интерпретации. Следует отметить, что многое в этих подходах было непосредственно заимствовано из области электрокардиографии, однако целый ряд особенностей методики диктуется свойствами магнитного поля сердца, в частности тем фактом, что измеряемая магнитная индукция является векторной величиной.

Наиболее распространенный способ записи магнитокардиограмм — это измерение магнитного поля сердца в точках, равномерно распределенных на передней поверхности грудной клетки или во фронтальной плоскости в непосредственной близости от этой поверхности, иногда во фронтальной плоскости, касательной к поверхности спины. В этих областях магнитное поле сердца достаточно ощутимо, чтобы его можно было измерить при помощи существующего оборудования.

Для получения наиболее полного представления о магнитном поле нужно измерять в каждой точке три ортогональные компоненты вектора магнитной индукции, однако чаще измеряют только компоненту, нормальную к поверхности грудной клетки (или к фронтальной плоскости). Это обосновывается тем, что указанная компонента в меньшей степени зависит от внутренних неоднородностей тела, чем компоненты, тангенциальные к поверхности тела (см. гл. 3).

Обычно точки измерения (общим числом от 30 до 50) располагают в узлах сетки, образованной линиями пересечения трансверсальных (горизонтальных) плоскостей с поверхностью тела или же с фронтальной плоскостью, расположенной у передней поверхности тела, причем применяются два способа построения такой сетки — геометрический и анатомический. В первом случае обычно задают одинаковые интервалы между точками по вертикали и по горизонтали, постоянные для всех испытуемых; во втором случае интервалы между точками остаются равными между собой, но общие размеры сетки для каждого конкретного испытуемого приспособляются к анатомическим ориентирам его грудной клетки (т.е. к ее размерам). Например, в исследованиях Козна с соавторами [82, 88, 89] использовалась сетка точек измерения с шагом по вертикали и горизонтали около 5 см, содержа-

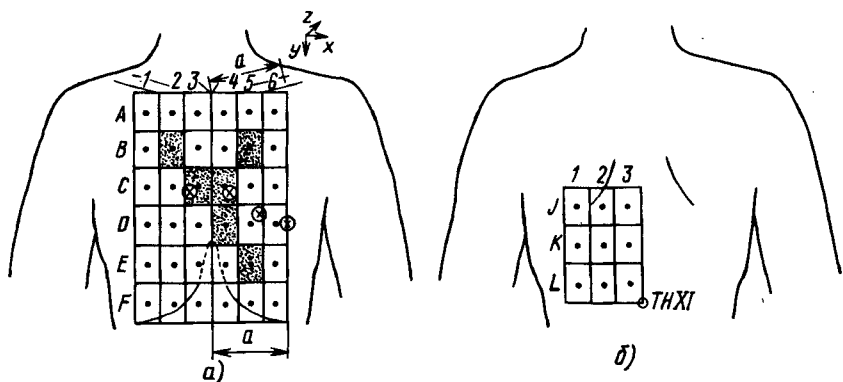


Рис. 2.5. Стандартная сетка измерительных позиций для магнитокардиографии у передней (а) и задней (б) поверхностей грудной клетки. Светлыми кружками с крестиками показаны положения грудных электродов $V_1 - V_4$ общепринятой системы электрокардиографических отведений, затемненными прямоугольниками — упрощенная 6-позиционная сетка, ТН XI — остистый отросток одиннадцатого позвонка [173, 178]

щая 49 или 36 точек (с размерностью 7×7 или 6×6 соответственно). Приемная катушка удалена от поверхности тела примерно на 2 см. Для стандартизации положения сетки по отношению к телу опорная точка (позиция в четвертой строке и третьем столбце) устанавливается напротив мечевидного отростка грудины. Исследования с расположением точек измерения по геометрическому принципу описаны также в [102, 108, 145 и др.].

Сааринен с соавторами [173, 178] предложили прямоугольную сетку точек измерения во фронтальной плоскости, привязанную к анатомическим ориентирам, т.е. приспособляемую к размерам грудной клетки каждого конкретного испытуемого (рис. 2.5); эти размеры у разных испытуемых могут различаться более чем вдвое. Такая "анатомическая нормировка" дает возможность проводить эффективную статистическую обработку измеренных данных [174]. Верхняя граница передней (основной) сетки — горизонтальная прямая, проходящая на уровне надгрудинной вырезки. Ширина сетки равна удвоенному расстоянию от нижней части надгрудинной вырезки до середины ключицы. Нижняя граница сетки — прямая, соединяющая пересечение нижней границы костного скелета грудной клетки (нижней кромки ребер) и боковых границ сетки. Сетка симметрична относительно средней линии грудины. Поверхность сетки разделена на 36 одинаковых прямоугольников (шесть строк и шесть столбцов), причем ширина каждого прямоугольника равна $1/6$ длины ключицы, а высота — $1/6$ высоты сетки. Точки измерения находятся в центрах этих прямоугольников. Предусмотрена также задняя сетка для измерения на задней стенке груд-

ной клетки. Нижний правый угол задней сетки расположен напротив остистого отростка одиннадцатого грудного позвонка. Сетка находится в левой части задней поверхности грудной клетки и состоит из девяти прямоугольников (три строки и три столбца) с такими же размерами, как и прямоугольники передней сетки. При необходимости к этим исходным сеткам можно добавлять дополнительные строки или столбцы. Обе сетки лежат во фронтальных плоскостях на минимально возможном расстоянии от поверхности тела. Для клинических приложений предлагается упрощенный вариант сетки, содержащий только 6 точек, в которых измерения наиболее информативны с диагностической точки зрения [178]. Другой пример сетки с размером 6×6 , привязанной к анатомическим ориентирам, описан в [150].

При измерении магнитного поля вне тела можно воспользоваться понятием фиктивных магнитных источников, причем соотношение между этими источниками и измеряемым магнитным полем будет вполне аналогично соотношению между электрическими источниками и электрическим полем. Следовательно, магнитные источники можно представить в форме мультипольного ряда и в первом приближении рассмотреть его член первого порядка — магнитный диполь. По аналогии с векторными отведениями в электрокардиографии (ортогональными векторкардиографическими отведениями) предлагали различные системы векторных магнитометров, измеряющих три ортогональные компоненты магнитного вектора сердца. В большинстве случаев при конструировании таких систем исходят из гипотезы, что фиктивные магнитные источники сводятся к одному диполю, который расположен в неподвижном центре сердца и во время кардицикла изменяет свои интенсивность и ориентацию. На самом деле фиктивные магнитные диполи распределены по всему объему проводника, где протекают токи, и существенно зависят от пассивных электрических характеристик тела. Наиболее тесно связана с электрофизиологическим состоянием сердца та часть тока, которая локализуется в миокарде и является первичным, или сторонним, током. Поэтому векторные магнитокардиографические отведения конструировали с таким расчетом, чтобы они наиболее точно измеряли суммарный магнитный дипольный момент токов в области сердца, обладая по возможности одинаковой чувствительностью к элементарным магнитным диполям сердца независимо от их расположения. Для этого нередко использовали теорию поля отведения (т.е. поля, создаваемого отведением при подключении источника к его выходу), основанную на принципе взаимности Гельмгольца (см. § 3.4) [66, 68, 141, 155].

Чтобы получить высококачественные векторные магнитокардиографические отведения, принимают специальные меры для формирования нужных полей отведения — выбирают оптимальное количество и расположение измерительных катушек. При этом необходимо также предусмотреть удобство работы с векторным магнитометром при исследо-

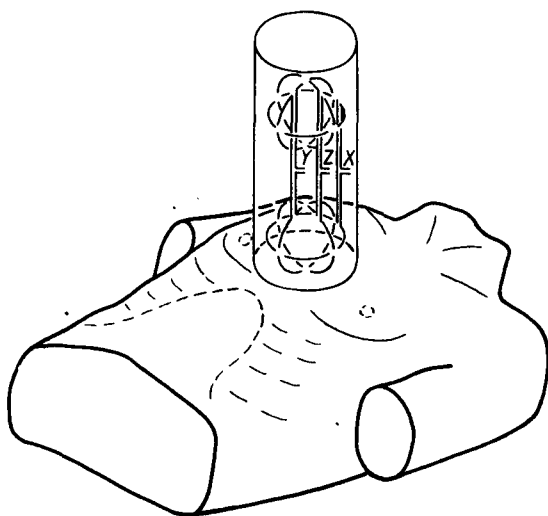


Рис. 2.6. Расположение катушек однопозиционной векторной магнитокардиографической системы отведений с градиометрической структурой. Система воспринимает ортогональные компоненты вектора магнитной индукции в точке, совпадающей с общим центром трех приемных (нижних) катушек, плоскости которых взаимно перпендикулярны [29]

вании реальных испытуемых. Задача выбора скорректированной векторной магнитокардиографической системы близка по смыслу к задаче выбора скорректированной ортогональной системы отведений в электрокардиографии [43].

Первая векторная магнитокардиографическая система с индукционными датчиками была предложена Болом и Макфи [69]. В векторной магнитокардиографической системе, предложенной Малмивуо [141], отведения образуются ортогональными парами соосных катушек, расположенных у двух противоположных сторон тела. Такие системы оказались неудобными из-за большого числа катушек, трудности их размещения по отношению к телу и удаленности от биоэлектрических генераторов сердца. В связи с этим были разработаны так называемые однопозиционные векторные магнитокардиографические системы отведений [29, 141], примеры которых показаны на рис. 1.13 и 2.6.

В результате теоретического исследования и экспериментов на физических моделях грудной клетки, учитывающих влияние ограниченности и внутренней неоднородности тела на магнитное поле сердца, было показано, что оптимальное положение приемных катушек однопозиционной магнитокардиографической системы отведений — над четвертым межреберьем у края грудины (что соответствует позиции грудного отведения V_2 стандартной электрокардиографической системы отведений). Для того чтобы измеренные значения компонент магнитной индукции в задне-переднем, право-левом, и ниже-верхнем направлениях были пропорциональны соответствующим компонентам магнитного вектора сердца, они должны быть умножены на коэффициенты 1, -1 и -1 соответственно.

В [160, с. 63; 200] показано, что характер изменения магнитной индукции при изменении расстояния точки измерения от сердца может существенно отличаться от изменения, соответствующего одному точечному магнитному диполю. В [163] также получены довольно большие ошибки при попытках аппроксимировать поперечную составляющую магнитного поля сердца в нескольких десятках точек передней поверхности грудной клетки при помощи магнитного диполя. Поэтому для достаточно точного описания фиктивных магнитных источников их нужно представлять в виде распределенных по объему магнитных диполей или же в форме мультипольного ряда с учетом нескольких первых его членов.

Очевидно, применение однопозиционных векторных магнитометров не ограничивается измерением векторных магнитокардиограмм на основе гипотезы о магнитном диполе сердца с фиксированной точкой расположения. В принципе такой магнитометр позволяет осуществить измерение пространственного вектора магнитной индукции в заданных точках, например в точках, распределенных у передней поверхности тела на заданной сетке, как было указано выше.

В последнее десятилетие были предприняты попытки установить определенные стандарты на измерительную процедуру магнитокардиографии. Так, на конференциях по биомагнетизму в США (1976 г.), в Западном Берлине (1980 г.) и в Италии (1982 г.) рекомендованы следующие правила магнитокардиографических измерений [73, 139]:

1. Основная сетка точек измерения должна содержать 36 передних и 9 задних позиций, привязанных к анатомическим ориентирам грудной клетки, как показано на рис. 2.5.

2. Нужно использовать прямоугольную систему координат x, y, z с таким же направлением осей, как и в векторной электрокардиографии (ось x направлена влево, ось y — вниз и ось z — назад). Если эта система координат не используется, то измеряемая компонента магнитного поля должна быть направлена по нормали к поверхности тела в точке измерения. В любом случае нужно измерять компоненту по оси z , чтобы иметь возможность сопоставлять данные в разных экспериментах.

3. Сквид-магнитометр должен иметь градиометрический трансформатор потока с диаметром приемной катушки меньше 5 см и с базой больше 10 см, его чувствительность должна быть не хуже $0,05 \text{ пТл/Гц}^{1/2}$ в диапазоне частот 0,05–100 Гц.

4. При изображении данных положительный знак должен иметь магнитный поток, направленный к исследуемому пациенту.

5. При записи сигналов на бумажную ленту рекомендуется скорость ленты 50 мм/с и масштаб по вертикали 25 пТл/см (это требование не относится к магнитокардиографическим измерениям высокого разрешения).

6. Физические величины следует выражать в единицах системы СИ.

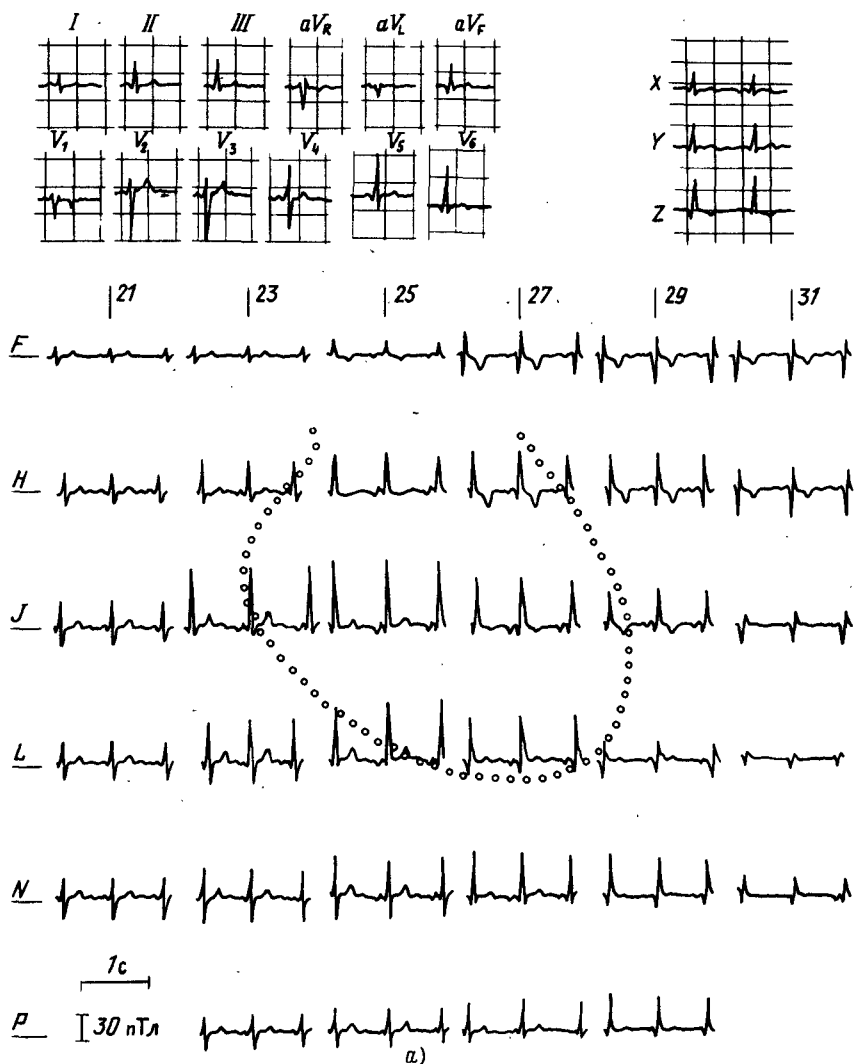
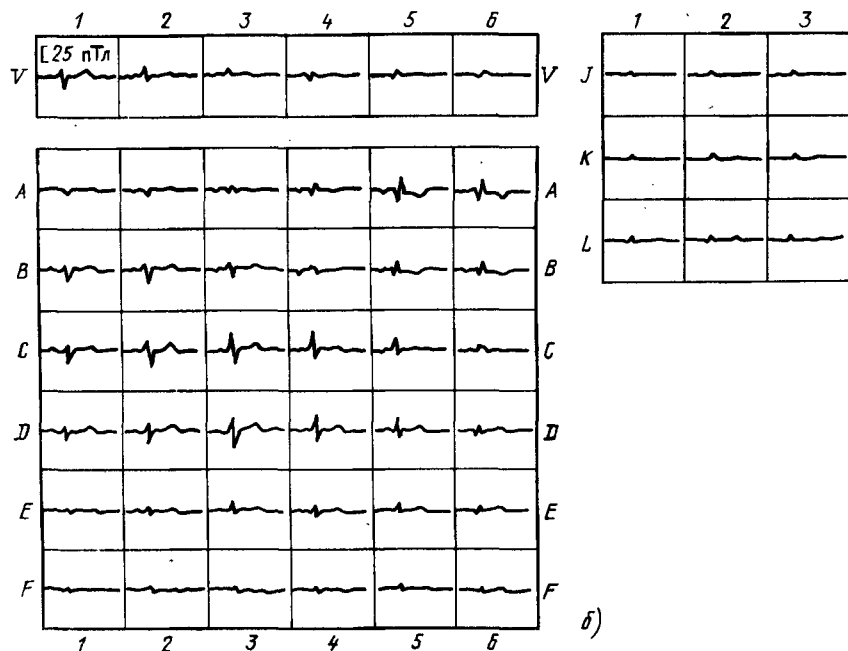


Рис. 2.7. Табличные магнитокардиограммы для состояния "норма":

a — запись компоненты магнитной индукции, нормальной к поверхности тела, казан контур сердца, вверху приведена стандартная электрокардиограмма и ортомаритерной сетке (вверху слева приведены записи в позициях стандартных груд-

7. В тех случаях, когда изложение результатов исследования не соответствует этим правилам, оно должно содержать описание расположения измерительных устройств, а также указания, касающиеся принятой полярности магнитной индукции и используемых единиц физических величин.

Графическое представление кардиомагнитного поля. Наиболее широкое распространение получил метод изображения кардиомагнитных данных в виде кривых изменения во времени измеряемой компоненты магнитной индукции. Кривые, записанные этим способом, выглядят вполне аналогично стандартной электрокардиограмме, и их обычно называют магнитокардиограммой (или скалярной магнитокардиограммой, в отличие от векторной, записываемой в форме векторных петель — проекций траектории конца измеряемого вектора). Если магнитное поле измеряется в точках регулярной сетки, определенным образом расположенной по отношению к телу (и сердцу), то магнитокардио-



в прямоугольной измерительной сетке с размером клеток 5×5 см (кружками погонная электрокардиограмма по Франку) [88]; б — запись в стандартной из-
 ных электрокардиографических отведений V_1-V_6 [174]

граммы удобно представить в "табличной форме", расположив каждую кривую в клетке таблицы, соответствующей измерительной сетке [88, 89, 174 и др.]. Примеры табличных магнитокардиограмм приведены для поперечной компоненты магнитной индукции на рис. 2.7 и для трех ортогональных компонент — на рис. 2.8.

Динамика изменения магнитного поля сердца в пространстве (точнее, на поверхности измерения) может быть представлена в более наглядном виде с сохранением фазовых соотношений между изменяющимися сигналами разных точек при помощи картографических, или топографических изображений, показывающих распределение измеряемой компоненты магнитной индукции в заданные моменты кардицикла. Очевидно, для построения этих карт необходимо иметь значения магнитной индукции в заданные моменты времени во всех точках измерения, т.е. исходные сигналы должны быть записаны синхронно или же синхронизированы при помощи опорного сигнала (обычно электрокардиографического). Например, было предложено строить такие моментные карты магнитного поля сердца, вычерчивая в каждой точке отведения квадрат, размеры которого пропорциональны измеренному значению магнитной индукции в данной точке, а ее знак определяется видом квадрата (светлый или темный), как показано на рис. 2.9. Другой тип картографического изображения магнитного поля сердца — это моментные карты, на которых нанесены линии равных значений измеряемой компоненты магнитной индукции (рис. 2.10). По аналогии с моментными картами распределения электрического потенциала, применяемыми в электрокардиологии, такие изображения иногда называют эквииндукционными, изоиндукционными или изопольевыми. Для выделения на моментных картах зон с определенными значениями магнитной индукции можно использовать цветное раскрашивание и (или) изменение яркости изображения [13, 30 и др.].

Чтобы выявить связь между моментными картами и тем самым отобразить непрерывное во времени развитие процесса возбуждения сердца, рассматривают последовательность моментных карт, в которой интервалы времени между соседними картами малы по сравнению с характерными временами изучаемого процесса. Таким образом получают "динамическую карту", содержащую всю доступную информацию о пространственно-временной эволюции кардиомагнитного поля. Автоматизированная система для измерения магнитного поля сердца и визуализации его динамической карты в виде цветного фильма на экране дисплея описана в [30]. Пример последовательности моментных карт, дающей слитную картину развития процесса возбуждения в миокарде, представлен на рис. 2.11. Заметим, что эта "динамическая магнитная карта" содержит исчерпывающую информацию о кардиомагнитном поле. В частности, с ее помощью можно одновременно анализировать изменения кривых магнитокардиограммы и соответствующие пространственные распределения магнитного поля. Такой подход от-

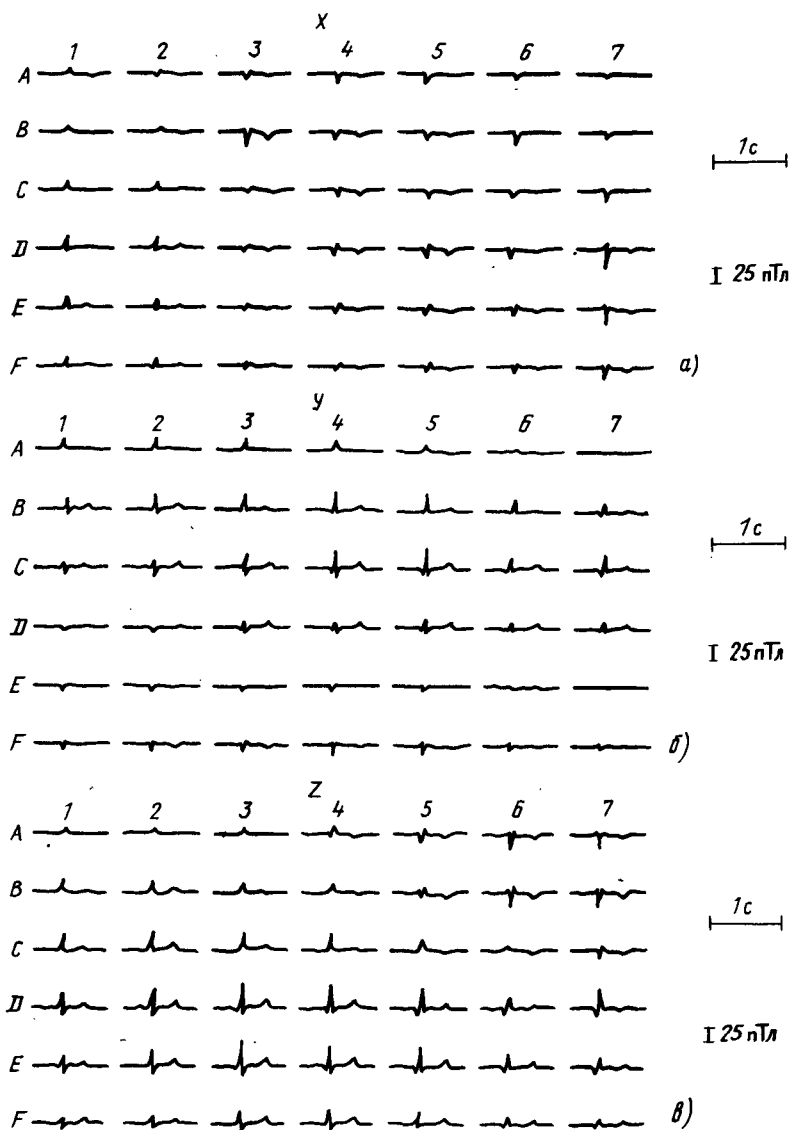


Рис. 2.8. Табличные магнитокардиограммы для трех ортогональных компонент магнитной индукции для состояния "норма" [159, с. 166]:

а – компонента X (по право-левой оси); б – компонента Y (по верхне-нижней оси); в – компонента Z (по передне-задней оси)

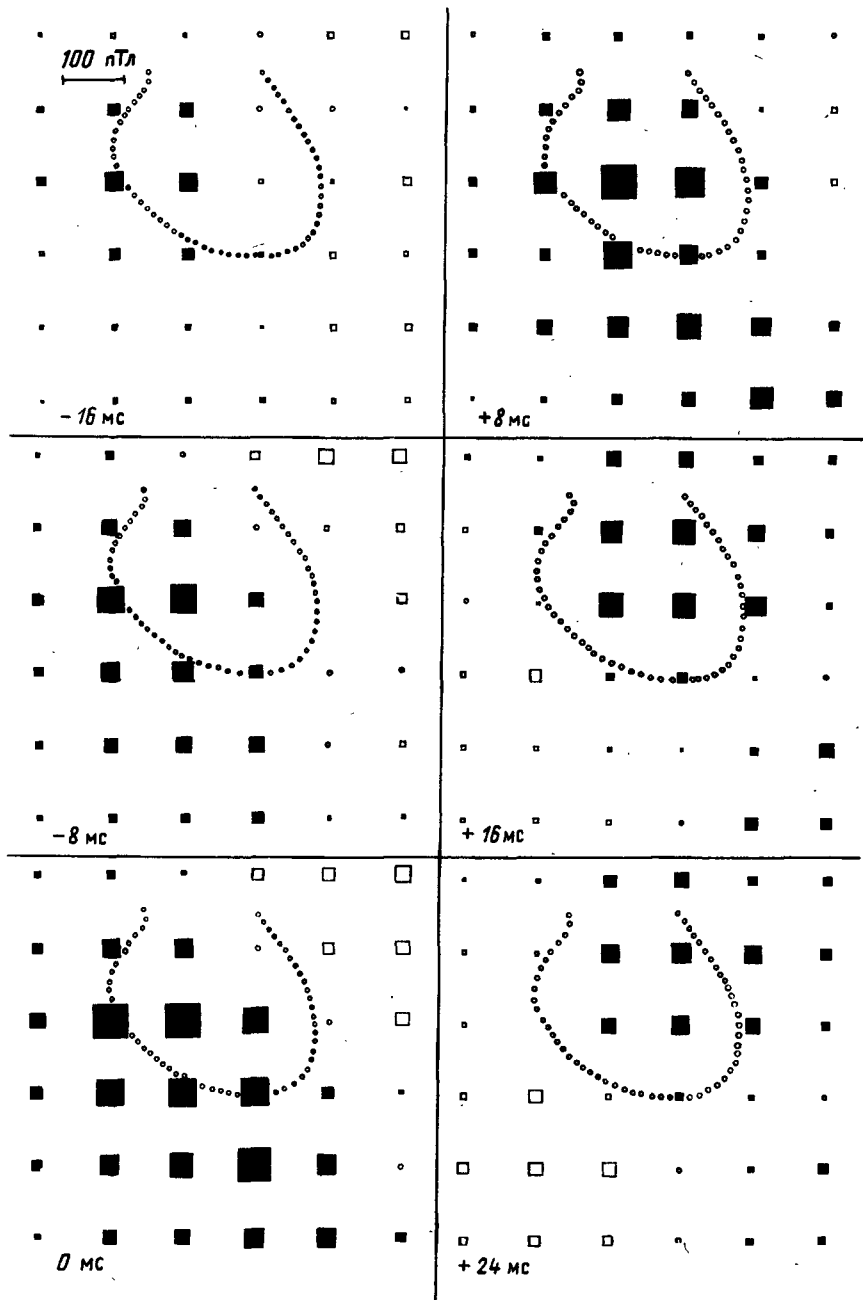


Рис. 2.9

крывает широкий простор для будущих диагностических исследований. Кроме того, динамическая карта является основной формой представления данных при решении обратной задачи — определении изменяющихся характеристик генератора — в кардиомангнитных исследованиях.

Применяются также различные способы псевдотрехмерного графического представления магнитной индукции как функции двух переменных (рис. 2.12).

Возможно картографическое представление производных характеристик распределения магнитной индукции; например, в [124] описано построение и дана физическая интерпретация дифференциальных карт, на которых стрелками изображается проекция ротора векторного поля, совпадающего с нормальной к поверхности тела компонентой магнитной индукции (рис. 2.13).

Анализ моментных карт распределения магнитной индукции (или ее дифференциальных характеристик) с позиций электродинамики часто дает возможность получить качественное или приближенное количественное решение обратной задачи, т.е. определить характеристики генератора по измерениям его поля. Это удастся сделать на основе наиболее простых гипотез о структуре электрического или фиктивного магнитного генератора. Например, допуская, что генератор имеет структуру диполя, приближенно определяют его интенсивность, ориентацию и расположение (необходимые для этого математические соотношения приведены в гл. 3).

При измерении трех компонент вектора магнитного диполя сердца обычно наряду с изображением скалярных кривых изменения этих компонент во времени вычерчивают векторные петли — траектории конца магнитного вектора сердца — по такому же принципу, как в вектор-

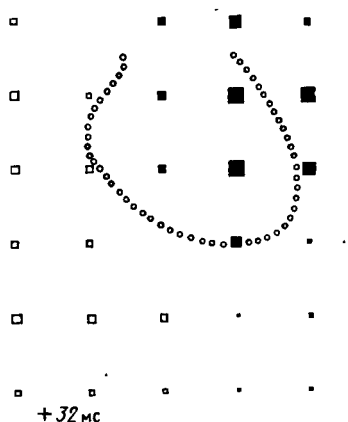


Рис. 2.9. Последовательность моментных карт магнитного поля сердца для того же испытуемого, что и табличные магнитокардиограммы на рис. 2.7, а. Центр каждого квадрата расположен в определенной позиции измерительной сетки, а длина его стороны равна компоненте магнитной индукции, нормальной к поверхности тела. Темные квадраты обозначают положительные значения этой компоненты индукции (направление наружу от тела), светлые квадраты — отрицательные значения. На каждой карте слева внизу указан момент времени ее регистрации относительно максимума комплекса QRS в стандартном электрокардиографическом отведении III (карты охватывают основную часть периода деполяризации желудочков)

[88, 150]

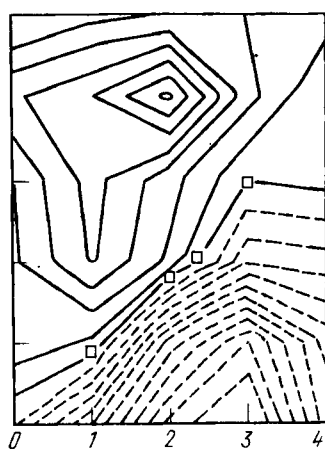
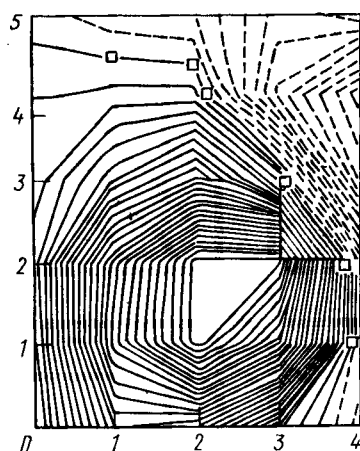
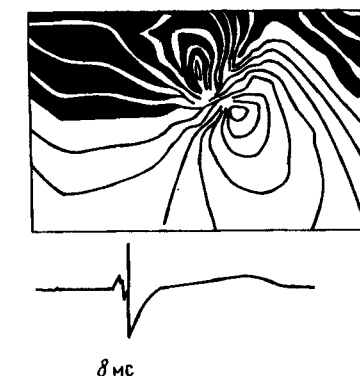


Рис. 2.10. Моментная эквииндукционная карта магнитного поля сердца для средней части периода деполяризации желудочков для состояния "норма". Вверху для сравнения показана эквипотенциальная карта электрического поля сердца на полной развертке поверхности грудной клетки, разрезанной сзади по средней линии спины. Затемнена область отрицательного потенциала, интервал между указанными уровнями потенциала равен 0,2 мВ. На электрокардиографическом цикле, изображенном под этой картой, отмечен вертикальной чертой момент времени, которому соответствуют приведенные карты. Внизу слева приведена эквииндукционная карта поперечной компоненты магнитного поля, измеренной во фронтальной плоскости у передней поверхности грудной клетки, внизу справа – аналогичная карта, измеренная у задней поверхности грудной клетки. Точки измерения находятся в узлах ортогональной сетки с интервалом по вертикали и по горизонтали 4 см. Позиция (1; 1) передней сетки расположена напротив нижнего конца грудины, позиция (1; 3) задней сетки – напротив позвоночника на том же горизонтальном уровне, что и нижний конец грудины. Положительные эквииндукционные линии изображены сплошными кривыми, отрицательные – пунктирными, квадратами отмечены нулевые линии, интервал между указанными уровнями индукции равен 70 нТл [159, с. 311]

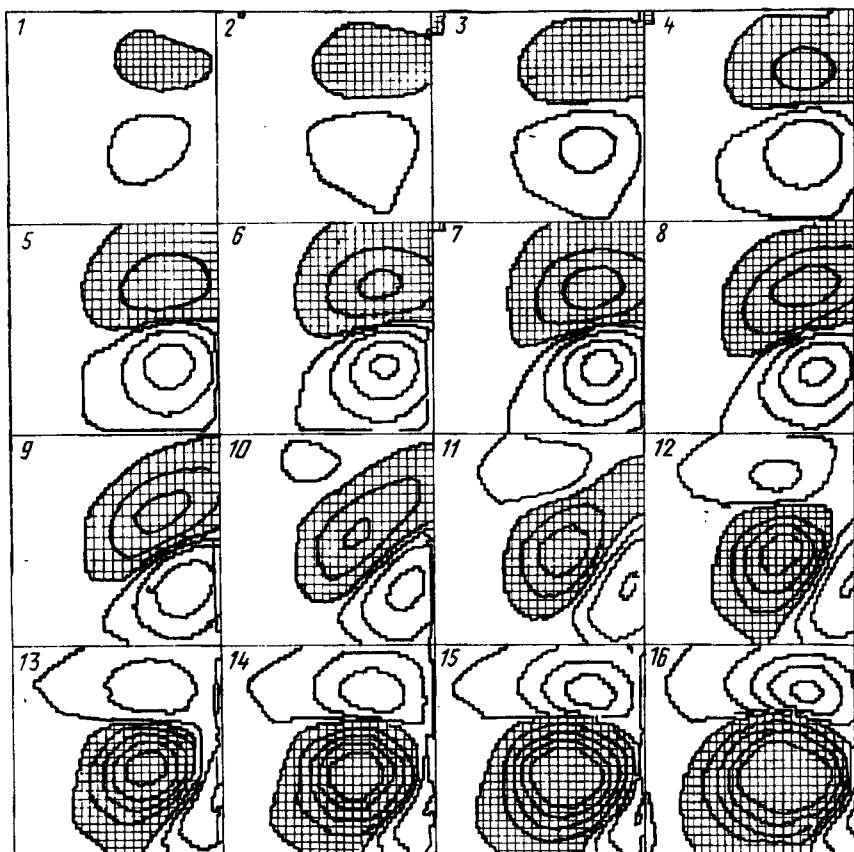


Рис. 2.11. Последовательность эквиндукционных карт магнитного поля сердца с временным интервалом 1 мс. Затемненная область – положительные значения магнитной индукции, светлая область – отрицательные значения. Последняя карта соответствует моменту времени за 25 мс до максимума комплекса *QRS* электрокардиограммы в стандартном отведении II. Автоматическая система обеспечивает получение черно-белых или цветных карт [30]

ной электрокардиографии строят векторкардиограммы для электрического вектора сердца (рис. 2.14).

Нормальная и патологическая магнитокардиограммы. Поскольку записанные к настоящему времени разными авторами магнитокардиограммы (их общее количество составляет несколько сот) различаются по методике записи, применяемой аппаратуре, интерпретируемым параметрам и т.д., дать четкую обобщенную оценку магнитокардиографических данных для разных состояний организма пока не представля-

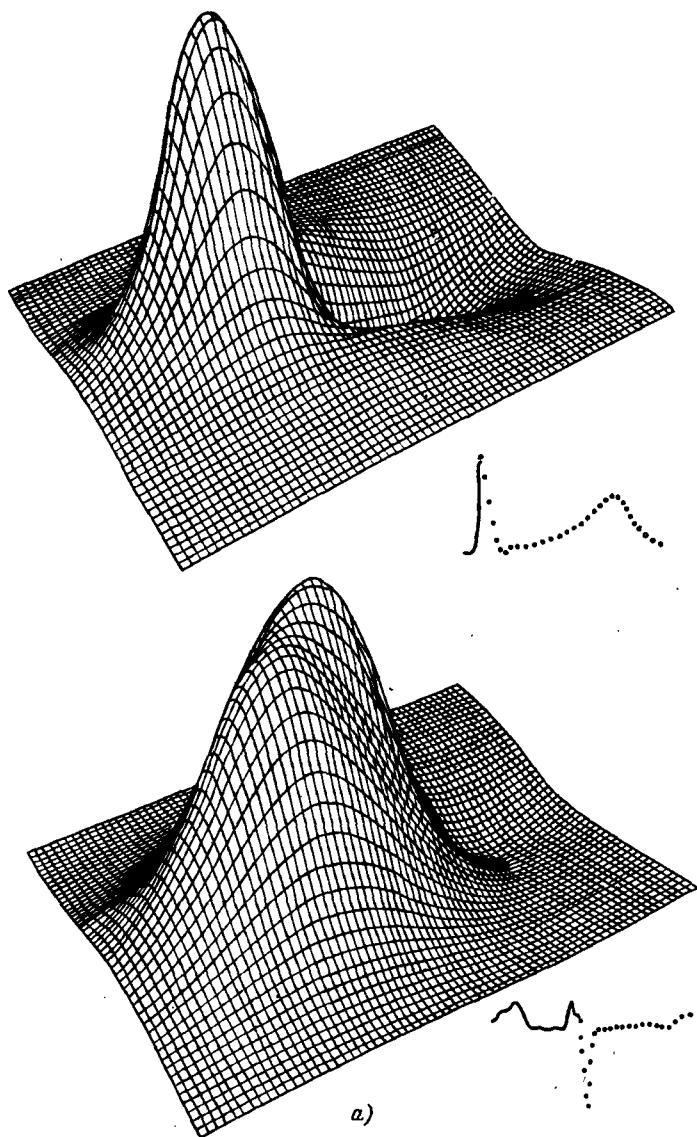
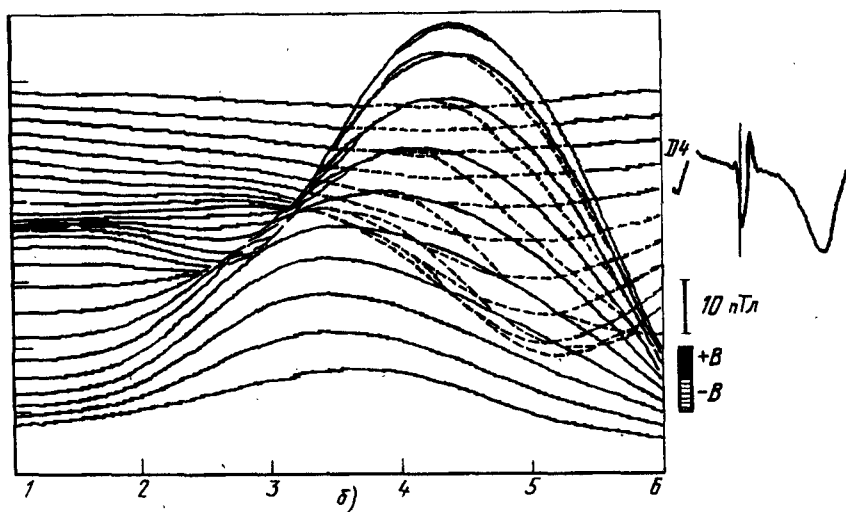


Рис. 2.12. Псевдотрехмерные изображения распределения поперечной компоненты клетки (для моментов времени, отмеченных на скалярной записи одного цикла

a — перспективная аксонометрическая проекция рельефа магнитной индукфаркта миокарда) [178]; *б* — изображение в виде совмещенных сечений рельефа изображения) [13]

ется возможным. Тем не менее уже выявлен ряд устойчивых закономерностей, типичных для магнитного поля сердца в состоянии "норма" и при некоторых патологических изменениях. Существует два основных подхода к оценке данных кардиомагнитометрии. Наиболее естественный и простой путь, который можно назвать эмпирическим, заключается в использовании тех же параметров, которые приняты для оценки кривых в стандартной электрокардиографии и векторкардиографии — характерных амплитуд и интервалов для скалярных кривых и параметров плоских векторных петель для векторкардиографических кривых. Другой подход, который можно назвать биофизическим, — анализ измеренных данных с позиций электродинамики и нахождение параметров принятой модели сердца как электрического генератора, которой придается определенный физический и электрофизиологический смысл.

Рассмотрим свойства кардиомагнитных измерений для сердца в норме и при некоторых патологических изменениях на основе терминологии стандартной электрокардиографии и векторкардиографии, используя в основном данные работ [62, 71, 73, 88, 89, 102–104, 132, 138, 147, 160, 163, 172, 174, 178]. Приведенное ниже описание скалярных кривых магнитной индукции, которые по аналогии со стандартной



магнитной индукции во фронтальной плоскости у передней поверхности грудной магнитокардиограммы):

ции (вверху для состояния "норма", внизу — для состояния хронического ишемического сердца) (черно-белый фотоснимок цветного

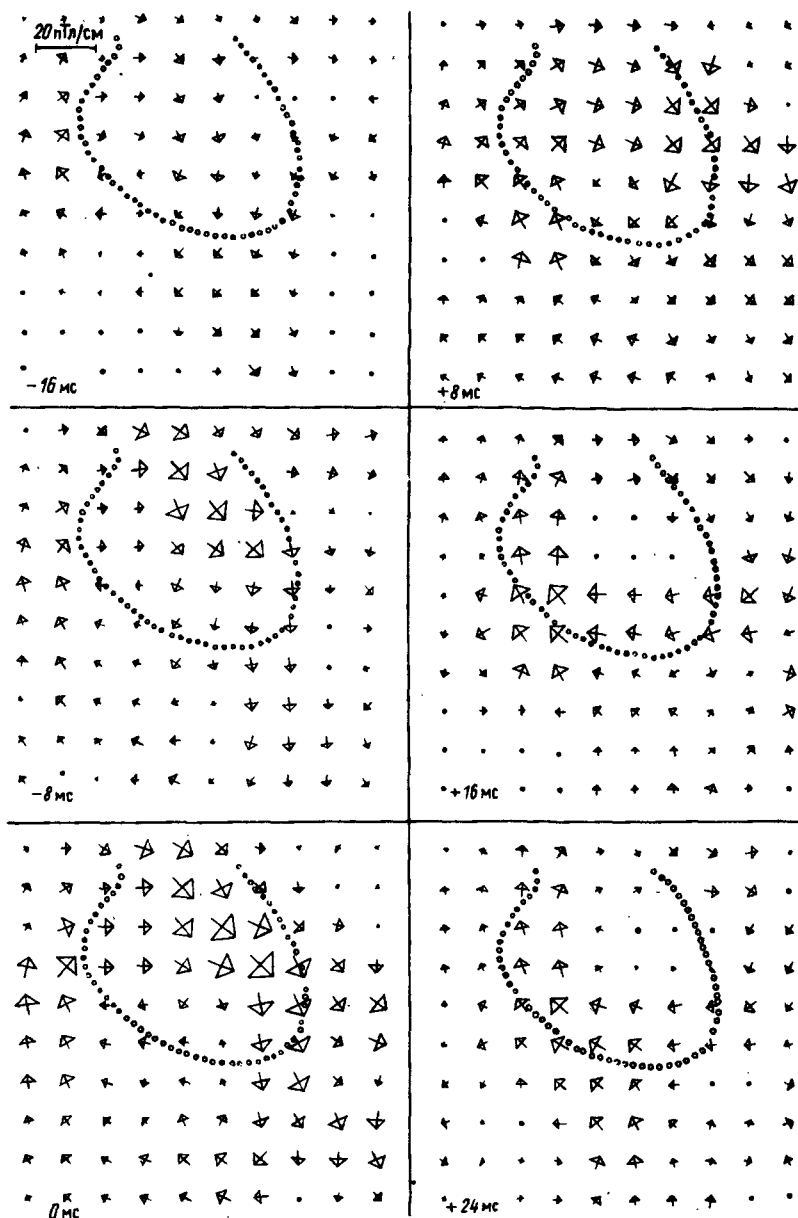


Рис. 2.13. Последовательность моментных дифференциальных карт магнитного поля сердца для того же испытуемого, что и изображения на рис. 2.7, а и 2.9. Каждая стрелка совпадает по направлению с проекцией ротора вектора нормальной компоненты магнитной индукции, а размеры стрелки пропорциональны значению этой проекции [124]

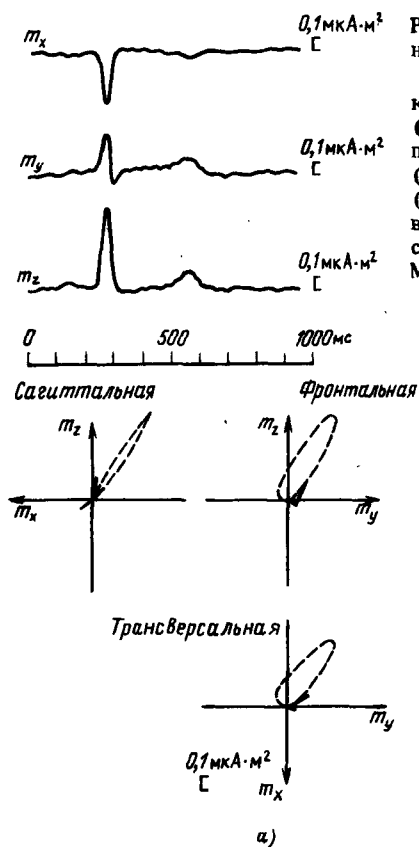
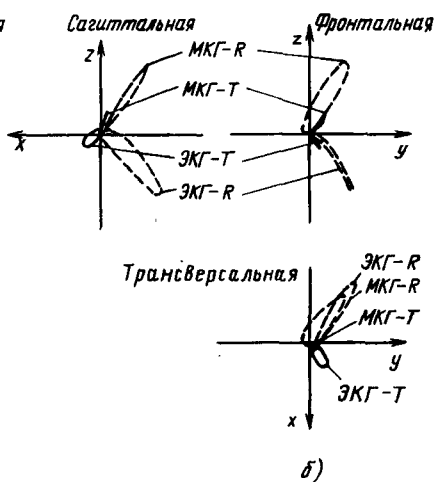


Рис. 2.14. Представление векторной магнитокардиограммы в виде плоских петель:

а — скалярные записи ортогональных компонент магнитного вектора сердца (вверху) и соответствующие векторные петли в трех координатных плоскостях (внизу) для случая состояния "норма" (оси x , y и z направлены вперед, влево и вверх соответственно) [29]; б — сопоставление ориентаций петель векторной МКГ и векторной ЭКГ [199]



электрокардиограммой (ЭКГ) называются здесь сокращенно МКГ, базируется главным образом на исследованиях, в которых измеряли компоненту магнитной индукции, перпендикулярную к фронтальной плоскости грудной клетки.

Сходство МКГ со стандартной ЭКГ позволяет фактически использовать для МКГ номенклатуру зубцов, сегментов и интервалов, разработанную в стандартной электрокардиографии. Рассмотрение табличных МКГ (см. рис. 2.7 и 2.8) показывает, что у здорового человека наибольшие амплитуды МКГ регистрируются вблизи сердца в средней и верхней частях передней измерительной сетки, наименьшие амплитуды — на задней стенке грудной клетки (это объясняется быстрым уменьшением магнитной индукции при удалении от области генератора). Фактически измеримые с достаточной точностью значения магнитной индукции имеются только в приближенных к сердцу областях поверх-

ности тела (поэтому МКГ, измеренные на задней стенке, часто вообще не рассматриваются).

Табличные МКГ и ЭКГ, реконструированные по осредненным значениям параметров для группы из 21 человека (здоровые мужчины), представлены на рис. 2.15. Осредненные петли векторной МКГ, полученной при помощи скорректированного однопозиционного векторного магнитометра, описанного выше, представлены на рис. 2.16 (это исследование было проведено на группе здоровых испытуемых обоих полов в количестве 60 человек).

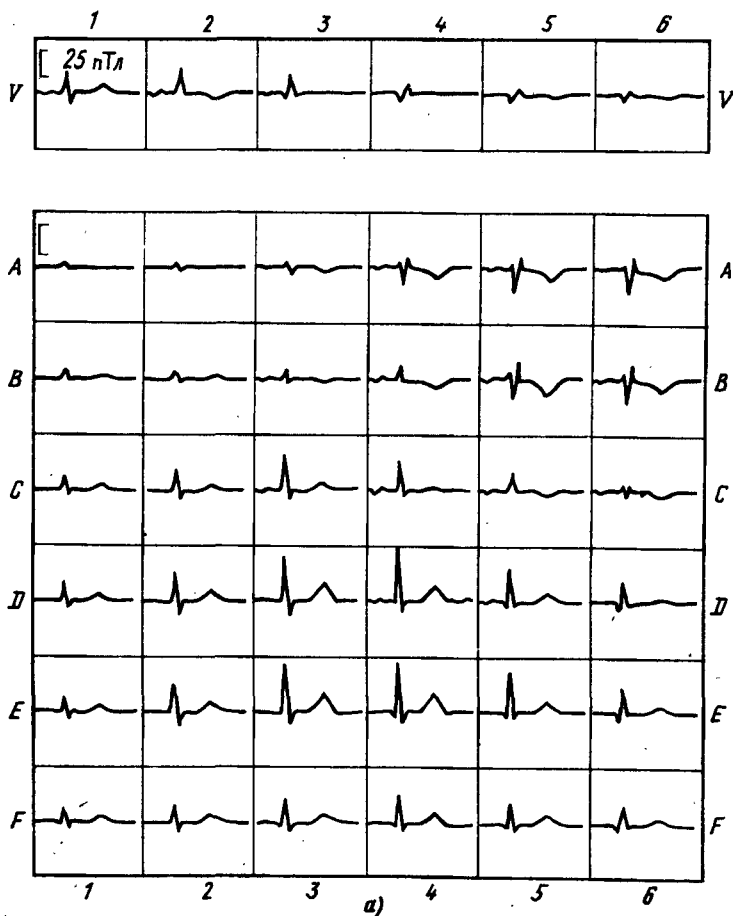
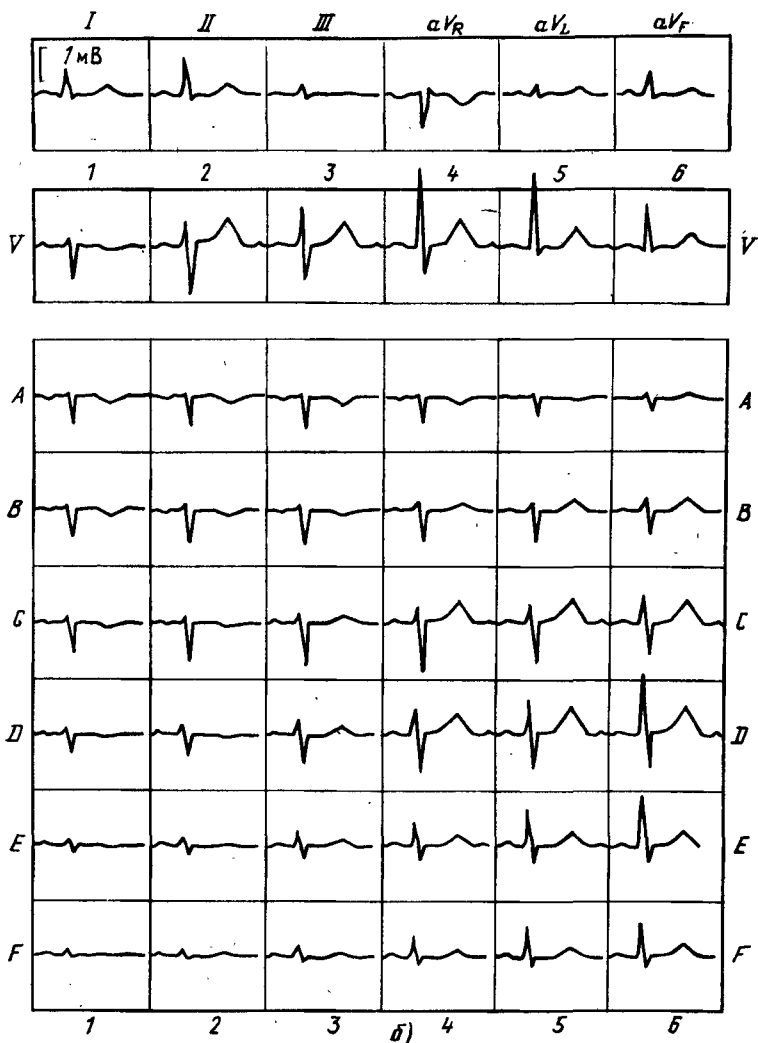


Рис. 2.15. Реконструированные осредненные магнитокардиограммы в позициях (а) и электрокардиограммы в тех же позициях и в стандартных отведениях (б)

Сопоставление векторных петель ЭКГ и МКГ (см. рис. 2.14) показывает, что в трансверсальной плоскости они имеют почти одинаковые ориентации, тогда как в сагиттальной и фронтальной плоскостях они почти взаимно перпендикулярны (средний угол между осями петель составляет около 95° [62]).



стандартной сетки и в позициях грудных электрокардиографических отведений для группы из 21 человека (здоровые мужчины) [174]

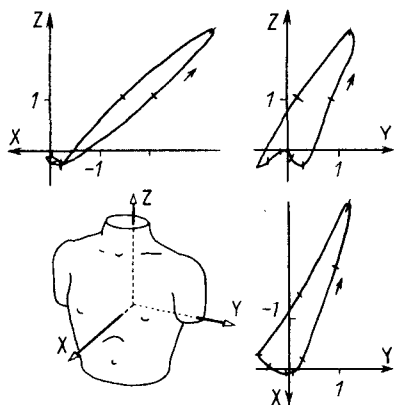


Рис. 2.16. Осредненные петли векторной магнитокардиограммы для группы из 60 здоровых испытуемых обоих полов [160, с. 69]

Зубец P наиболее четко выявляется на нормальной МКГ в левой верхней части сетки, обычно имеет максимальную амплитуду в позициях $B4$, $B5$ и двухфазную форму. Он состоит из начального отрицательного и конечного положительного отклонений (первое соответствует

возбуждению правого предсердия, второе — возбуждению левого). Медиана амплитуды максимального начального отклонения, наблюдаемого в позиции $B5$, равна -4 пТл, а медиана амплитуды конечного отклонения в той же позиции равна 2 пТл. Отношение амплитуд P/R у здоровых людей меньше для МКГ, чем для ЭКГ, у больных — наоборот, меньше для ЭКГ, чем для МКГ.

Сегмент $P-R$ нормальной МКГ обычно несколько приподнят по отношению к уровню $T(U)-P$ (см. МКГ в позициях $B4$, $B5$, $C4$, $C5$); однако это явление наблюдается более отчетливо у лиц с предсердной перегрузкой. Смещение сегмента $P-R$, вероятно, обусловлено в основном токами реполяризации предсердий, которые сильнее проявляются на МКГ, чем на ЭКГ.

Комплекс QRS нормальной МКГ имеет следующие формы: qRS в левой нижней части измерительной сетки с максимальным зубцом q в позиции $E6$; rSR' в левой верхней части сетки с максимальным зубцом R в позициях $A5$, $A6$, $B5$, $B6$; RS или rS в правой половине сетки. Зубец R максимален в позиции $D4$, а зубец S — в позициях $A6$ и $B6$. Медиана амплитуды зубца R в позиции $D4$, где она максимальна, равна 40 пТл. На амплитуды комплекса QRS влияет положение тела и некоторые антропометрические факторы; так, перемещение испытуемого в положение стоя и уменьшение массы тела приводят к увеличению этих амплитуд.

Сегмент $S-T$ нормальной МКГ может быть смещен вниз, что обычно наблюдается в левой верхней части сетки, где комплекс QRS , как правило, имеет форму rSR' . Максимальное снижение $S-T$, равное в среднем -5 пТл, имеет место в позиции $B5$.

Зубец T нормальной МКГ отрицателен в левой верхней части сетки, ему обычно предшествует комплекс типа rSR' . Максимальный отрицательный зубец T чаще всего наблюдается в позициях $B5$, $B6$ и имеет медиану около -15 пТл. Иногда у здоровых испытуемых встречается

двухфазный зубец T (+ -), причем его отрицательная фаза совпадает во времени с зубцом U ЭКГ (его можно нормализовать при помощи гипервентиляции). Угол между векторами R и T векторной МКГ примерно втрое меньше, чем векторной ЭКГ. Это свидетельствует о том, что МКГ и ЭКГ по-разному отражают явление реполяризации миокарда.

Зубец U встречается на МКГ чаще, чем на ЭКГ. Он обычно положителен и имеет максимальную медиану амплитуды около 3 мТл в позиции $D4$. Иногда у здоровых лиц, и в особенности при некоторых патологических состояниях, зубцы T и U сливаются и являются неразличимыми.

Теперь приведем некоторые сведения о характеристиках МКГ при патологических состояниях сердца. Эти сведения следует воспринимать как предварительные и подлежащие дальнейшему уточнению, поскольку они являются результатом исследований на сравнительно небольших группах испытуемых, выполненных разными авторами с использованием несколько различающихся методик измерения. Тем не менее полученные данные указывают на перспективность диагностических приложений кардиомагнитометрии.

Временные соотношения между кардиоциклами на МКГ не отличаются от соотношений между кардиоциклами на ЭКГ. Представляет интерес сопоставление проявлений на МКГ и ЭКГ нарушения ритма сердца по типу экстрасистол.

Предсердные экстрасистолы характеризуются на МКГ изменением морфологии зубца P , как и на ЭКГ. Однако на МКГ эти изменения иногда трудно выявить, если одновременно не имеет места предсердная перегрузка. При предсердной фибрилляции сильные волны фибрилляции можно наблюдать в тех позициях измерительной сетки, где в норме амплитуда зубцов P максимальна.

Желудочковые экстрасистолы на МКГ имеют более сильные морфологические изменения, чем на ЭКГ. Это, вероятно, связано с тем, что эктопическое возбуждение вызывает преимущественно тангенциальные токи. Изменения комплекса QRS желудочковой экстрасистолы могут быть ясно видны на МКГ, тогда как на ЭКГ они минимальны или вообще отсутствуют. Поэтому отношение снижения сегмента $S-T$ к амплитуде зубца R экстрасистолы для МКГ больше, чем для ЭКГ. В остальном морфология желудочковых экстрасистол на МКГ так же связана с морфологией отклонений при блокадах плевой или правой ножек пучка Гиса, как и на ЭКГ.

Блокада правой ножки пучка Гиса, полная или неполная, отражается на МКГ как более или менее расширенный комплекс rSR' с широким зубцом R' и сниженным сегментом $S-T$ в верхней половине или верхних двух третьих частях сетки и как комплекс qrS с широким размазанным зубцом S и подъемом сегмента $S-T$ в нижней трети сетки. Максимальные амплитуды комплекса rSr' наблюдаются в позиции $D4$. В периферических строках A и F и столбцах 1 и 6 сетки эти

амплитуды. обычно малы, за исключением случаев с гемодинамической перегрузкой правого желудочка.

Блокада левой ножки пучка Гиса проявляется на МКГ как широкий зубец *R* со снижением сегмента *S-T* на двух самых нижних строках сетки и комплекс *QS* с подъемом сегмента *S-T* в верхней половине сетки. Зубец *R* с максимальной амплитудой и размазанной вершиной часто наблюдается ниже и левее позиции, где в нормальных условиях имеется самый высокий зубец *R*, т.е. в позиции *E5*.

Как при блокаде правой ножки пучка Гиса, так и при блокаде левой ножки активация более аберрантна в поздней части комплекса *QRS*. Относительная амплитуда конечной части комплекса *QRS* при блокадах больше на МКГ, чем на ЭКГ. Это свидетельствует о большей чувствительности МКГ к аберрантному проведению. Как и в случае желудочковой экстрасистолы, отношение снижения сегмента *S-T* к амплитуде зубца *R* при блокадах ножек пучка Гиса заметно больше для МКГ, чем для ЭКГ. Наиболее характерные морфологические изменения можно заметить в позициях *B2*, *B5*, *C3*, *C4*, *D4* и *E5*. Если из практических соображений нужно уменьшить число измерительных точек, то следует сохранить по крайней мере эти шесть позиций.

Некоторое число описанных случаев с *синдромом Вольфа-Паркинсона-Уайта* позволяет предположить, что при помощи МКГ удастся более точно определять ориентацию вектора дельта-волны, чем при помощи ЭКГ. Магнитокардиограмма обладает значительно большей чувствительностью к токам деполяризации предсердий, чем ЭКГ; об этом свидетельствует большее отношение амплитуд *P/R* на МКГ, чем на ЭКГ. Изменения зубца *P* на МКГ при перегрузках правого и левого предсердий аналогичных по характеру соответствующим изменениям на ЭКГ.

Перегрузка правого предсердия приводит к появлению большого отрицательного начального отклонения зубца *P*. Оно лучше всего заметно в позиции *C4*, где в норме наблюдается максимальная амплитуда зубца *P*. При экстремальной гипертрофии правого предсердия начальное отклонение зубца *P* может иметь положительный знак в правой нижней части сетки.

Перегрузка левого предсердия проявляется как слишком большое положительное конечное отклонение зубца *P*. Это отклонение обычно максимально в позиции *C4*, как и у нормального зубца *P*. Однако большая удаленность левого предсердия от катушки магнитометра приводит к тому, что конечное отклонение зубца *P* увеличивается сравнительно мало. Увеличение общего объема сердца, обычно имеющее место при изменениях левой части сердца, усиливает этот "эффект близости", так что в некоторых случаях, например при регургитации аорты, перегрузка левого предсердия может диагностироваться по изменениям МКГ в позициях задней (спинной) сетки.

При гипертрофии правого предсердия амплитуда начального отклонения зубца *P* превышает амплитуду конечного отклонения, тогда как при гипертрофии левого предсердия, наоборот, амплитуда конечного отклонения зубца *P* превышает амплитуду начального отклонения.

При перегрузках левого или правого предсердия сегмент *P-R* на МКГ часто в большей или меньшей степени смещен вверх. По-видимому, это смещение отражает токи реполяризации предсердий. Таким образом, в правой нижней части сетки, где наблюдается зубец *P* в патологических случаях, его начальное отклонение иногда положительно и сопровождается небольшим снижением сегмента *P-R*. Это явление встречается и при гипертрофической обструктивной кардиомиопатии. На соответствующих ЭКГ не выявляются подобные смещения сегмента *P-R*.

При гипертрофиях желудочков как правого, так и левого, возрастание амплитуды МКГ по сравнению с нормальными условиями значительно больше, чем аналогичное различие амплитуд ЭКГ. Это указывает на большую диагностическую эффективность МКГ при данном патологическом состоянии.

Гипертрофия правого желудочка, обусловленная объемной перегрузкой, вызывает задержку возбуждения дистальных частей правого желудочка, что дает комплекс *rSR'* на МКГ в правых позициях (как и на ЭКГ). Эта морфология комплекса напоминает морфологию при неполной блокаде правой ножки пучка Гиса. При расширении сердца максимальные отклонения наблюдаются в верхних позициях, причем комплексы *QRS* видны более отчетливо на периферии сетки.

Гипертрофия правого желудочка, обусловленная перегрузкой давления, проявляется в максимальных амплитудах зубца *R* в верхних строках сетки наряду со снижением сегмента *S-T* и отрицательным зубцом *T*, который в норме не наблюдается в верхней правой части сетки. Кроме того, в нижней половине сетки появляются глубокие зубцы *S* или *QS*, значительно превышающие по амплитуде зубцы *S* в этой области для нормальных условий. Информация, достаточная для диагностики этого состояния, может быть получена в позициях *B2*, *B5*, *C3*, *C4*, *D4* и *E5*.

Гипертрофии левого желудочка, обусловленные объемной перегрузкой и перегрузкой давления, невозможно различать по МКГ (как и по ЭКГ). Характерным изменением МКГ для этих патологических состояний является максимальная амплитуда зубца *R*, наблюдаемая левее и ниже, чем при нормальных условиях; по всей нижней половине сетки наблюдается снижение сегмента *S-T* и инверсия зубца *T*, тогда как в верхней половине преобладают глубокие зубцы *S* или *QS* и подъем сегмента *S-T* с положительным зубцом *T*. Информация, достаточная для диагностики этих состояний, может быть получена в позициях *B2*, *B5*, *C3*, *C4*, *D4* и *E5*. Гипертрофия левого желудочка часто приводит к изменениям зубца *U*.

Гипертрофическая обструктивная кардиомиопатия характеризуется комплексом *QRS* с зубцами нерегулярной формы как на МКГ, так и на ЭКГ. В некоторых случаях на МКГ реполяризационная часть почти нормальна, тогда как на ЭКГ она может быть сильно изменена. В большинстве случаев, однако, изменения участка *S-T* на МКГ значительно превышают аналогичные изменения на ЭКГ; МКГ может содержать очень большой зубец *U*, слившийся с зубцом *T*.

Клинические данные по МКГ в острых начальных стадиях инфаркта миокарда отсутствуют, однако имеются экспериментальные наблюдения, указывающие на большую потенциальную информативность МКГ для выявления стабильных токов повреждения, возникающих при таких патологических состояниях (этот вопрос рассмотрен несколько подробнее в одном из следующих параграфов). Большой интерес представляют клинические наблюдения, касающиеся ишемических изменений и послеинфарктных состояний сердца.

Ишемия миокарда у испытуемого в спокойном состоянии не дает каких-либо специфических изменений МКГ, кроме заметно уменьшенной амплитуды всех зубцов. Наблюдалось снижение сегмента *S-T* после физической нагрузки, причем табличная МКГ иногда дает смещение сегмента *S-T*, не наблюдаемое на ЭКГ после нагрузки. Отношение снижения сегмента *S-T* к амплитуде зубца *R* после физической нагрузки на МКГ больше, чем на ЭКГ. Анализ МКГ после нагрузки позволяет различать ишемические и неишемические смещения сегмента *S-T*.

Для интерпретации МКГ при инфаркте миокарда часто используется представление об эквивалентном инфарктном диполе тока, который описывает дополнительный генератор поля в области, пораженной инфарктом.

Передний инфаркт не находит явного отражения на МКГ, так как его эквивалентный диполь тока имеет передне-заднюю (перпендикулярную к фронтальной плоскости) ориентацию. Если инфаркт распространяется на перегородку, то об этом может говорить отсутствие зубца *Q* на МКГ в левой нижней части сетки. Основные изменения МКГ при передне-перегородочном инфаркте состоят в общем уменьшении амплитуды зубца *R*, за исключением левой нижней части сетки, где зубец *Q* очень мал или отсутствует, в ряде случаев — снижении сегмента *S-T* и инверсии зубца *T*. Вместо комплекса *rSR'* в верхней половине сетки наблюдается комплекс *rS*, а в верхней правой части сетки появляется зубец *Q*.

Передне-боковой инфаркт характеризуется эквивалентным инфарктным диполем тока, направленным вправо, вниз и назад. Поэтому отклонения МКГ в верхней половине сетки, и особенно в ее верхней правой части, становятся более положительными, а в левой нижней части — более отрицательными.

Нижний, или диафрагмальный, инфаркт характеризуется эквивалентным инфарктным диполем тока, направленным вверх и слегка влево.

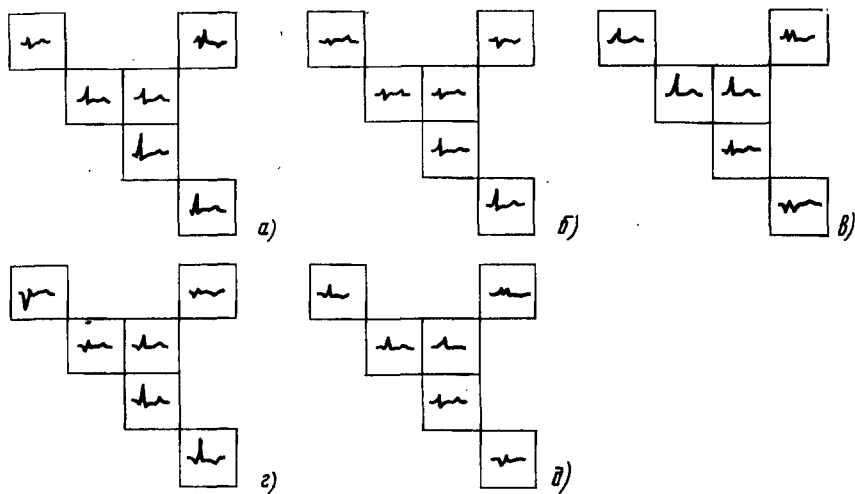


Рис. 2.17. Магнитокардиограмма в норме и при разных типах инфаркта миокарда в позициях сокращенной (6-позиционной) измерительной сетки [178]:

а — норма; б — передне-перегородочный инфаркт; в — передне-боковой инфаркт; г — нижний (диафрагмальный) инфаркт; д — задне-боковой инфаркт

Поэтому в правой верхней части сетки появляются более или менее четкие зубцы Q или QS , никогда не наблюдаемые в норме; иногда происходит снижение сегмента $S-T$ и инверсия зубца T в левой нижней части сетки.

Задний и задне-боковой инфаркты характеризуются эквивалентным инфарктным диполем, направленным вправо, вперед и часто слегка вниз. Однако при строго заднем инфаркте этот вектор направлен вперед и поэтому слабо отражается на МКГ. Возможные изменения МКГ при задне-боковом инфаркте состоят в том, что все амплитуды в нижней половине сетки становятся более отрицательными, а в верхней половине — более положительными; в левой нижней части сетки появляется комплекс QS .

Схематическое представление изменений МКГ на 6-позиционной (сокращенной) сетке при типичных инфарктах миокарда дано на рис. 2.17. В общем, при диагностике инфарктов МКГ не обладает какими-либо заметными преимуществами перед ЭКГ, за исключением возможности в некоторых случаях более точной локализации поврежденного участка.

Магнитокардиограмма в перинатальный период. Благодаря тому что магнитное поле удаленных от магнитометра биозлектрических генераторов ослабляется значительно сильнее, чем их электрическое поле,

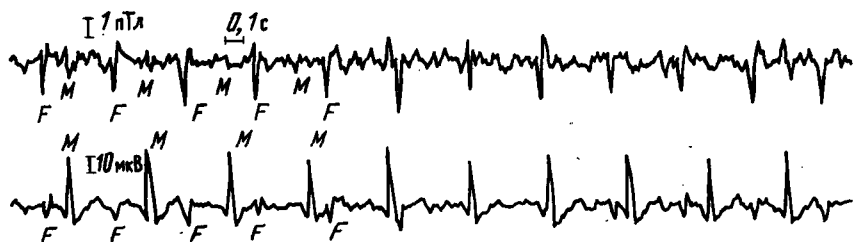


Рис. 2.18. Магнитокардиограмма (вверху) и электрокардиограмма (внизу) матери и плода (датчики расположены в области живота матери). Кардиоциклы матери обозначены буквой *M*, кардиоциклы плода – буквой *F* [131]

имеется возможность регистрировать МКГ плода в теле матери с меньшими искажениями из-за влияния магнитного поля сердца матери [127, 129, 131]. На рис. 2.18 показан пример одновременной записи МКГ и ЭКГ плода на 38-й неделе беременности. Хотя амплитуда МКГ плода примерно в 10 раз меньше амплитуды МКГ взрослого человека (составляет около 5 пТл), его кардиоциклы четко выделяются на записи и могут быть использованы для надежного слежения за ритмом сердца плода. Это особенно важно в тот период беременности (между 27-й и 35-й неделями), когда вокруг плода образуется частично изолирующая его оболочка, которая существенно ослабляет сигнал ЭКГ.

Магнитокардиографический контроль состояния сердца ребенка может быть продолжен после рождения. МКГ новорожденного имеет максимальную амплитуду около 20 пТл, т.е. приблизительно вдвое меньше, чем МКГ взрослого, и существенно отличается по морфологии (рис. 2.19). При анализе магнитного поля сердца плода иногда используют векторные МКГ [131].

Магнитокардиография высокого разрешения. Под магнитокардиографией высокого разрешения подразумевают измерение на поверхности тела сверхслабых магнитных полей, порождаемых электрической активностью специализированных структур сердца или небольших поврежденных участков миокарда, в целях изучения и клинического использования их электрофизиологических свойств [107; 159, с. 231]. Измеряемые сигналы здесь обычно имеют амплитуду меньше 1 пТл, и для их регистрации требуются специальные меры повышения чувствительности оборудования и борьбы с помехами (применение градиометров высокого порядка, экранирование помещения, осреднение сигналов).

Одна из задач, решаемых магнитокардиографией высокого разрешения, – это изучение электрофизиологических процессов в проводниковой ткани сердца – системе Гиса–Пуркинье. В начале 70-х годов было обнаружено своеобразное отклонение на участке *P–R* электрокардиограммы, обычно начинающееся приблизительно за 40 мс до начала комп-

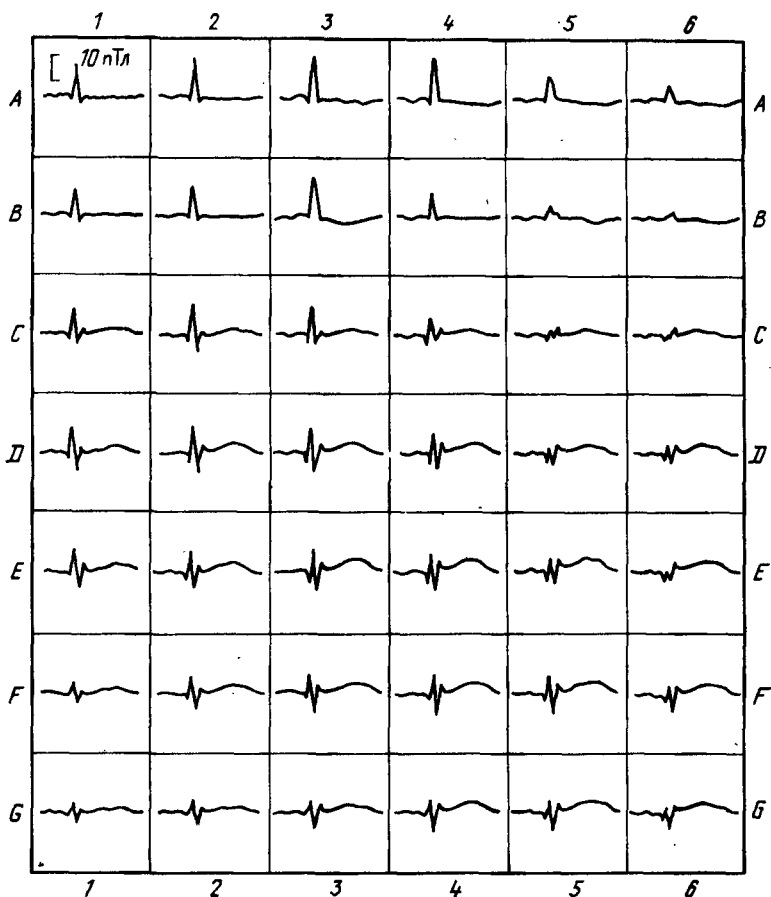


Рис. 2.19. Табличная магнитокардиограмма новорожденного. Измерена поперечная компонента магнитной индукции во фронтальной плоскости на расстояниях 2–4 см от поверхности тела. Интервал между позициями измерительной сетки равен 2 см по вертикали и 3 см по горизонтали, позиция D4 расположена непосредственно над сердцем [72, с. 299]

лекса QRS и имеющее форму наклонной прямой. У испытуемых с патологическими изменениями проводниковой системы на этом наклонном сегменте наблюдаются зазубрины и изгибы, которые, как полагают, можно использовать для определения характера поражения проводниковой системы, что весьма важно для диагностики нарушений ритма сердца. Позже наклонный сегмент был выявлен также на МКГ, причем его форма и имеющиеся на нем более мелкие отклонения аналогичны отклонениям на ЭКГ (рис. 2.20). Типичной особенностью наклонного

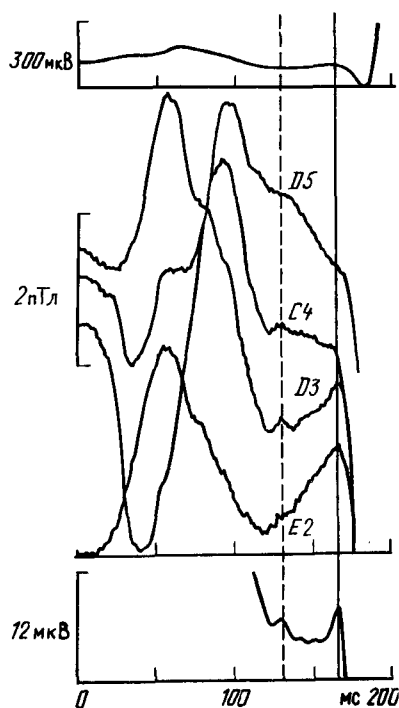


Рис. 2.20. Магнитокардиограммы высокого разрешения для участка $P-Q$ кардиоцикла, записанные в позициях $D5$, $C4$, $D3$ и $E2$ стандартной сетки у здорового испытуемого (средняя часть рисунка). Для сравнения приведены одновременно записанные участки электрокардиограммы в отведении от конечностей (вверху) и электрокардиограммы высокого разрешения в двухполюсном грудном отведении V_6-V_6R (внизу). Вертикальной штриховой линией отмечен момент характерного "спайка" в начале наклонного сегмента [159, с. 231]

сегмента является то, что знак его наклона изменяется при переходе точки измерения через проекцию продольной оси сердца (направление основание — верхушка) на поверхности грудной клетки (эта линия соответствует общему расположению пучка Гиса и волокон Пуркинье). Выше этой линии амплитуда наклонного сегмента увеличивается

(наклон положителен), ниже амплитуда уменьшается (наклон отрицателен). Это отчетливо видно на табличной МКГ для участка $P-R$, представленной на рис. 2.21.

На основании таких экспериментальных измерений, сопоставлений с электрокардиографическими измерениями и модельных исследований наклонный сегмент обычно интерпретируют как изменение поля, порождаемое волной деполяризации, распространяющейся вдоль системы Гиса—Пуркинье [107, 159, с. 231, с. 280; 189]. Однако имеются данные, позволяющие предположить, что происхождение наклонного сегмента связано в основном с процессом реполяризации предсердий [73, с. 142; 159, с. 266]. Вместе с тем согласно некоторым оценкам вклад процесса реполяризации предсердий в образование наклонного сегмента существенно меньше, чем вклад процесса деполяризации системы Гиса—Пуркинье [159, с. 255]. Таким образом, вопрос о том, какие именно структуры сердца ответственны за отклонение МКГ (и ЭКГ) на участке $P-R$, остается пока не решенным окончательно, хотя его решение может сыграть существенную роль в диагностике нарушений ритма сердца.

Другой объект приложения магнитокардиографии высокого разрешения — это изменения кардиомагнитного поля, соответствующие так

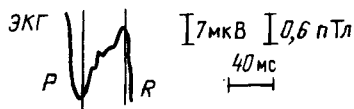
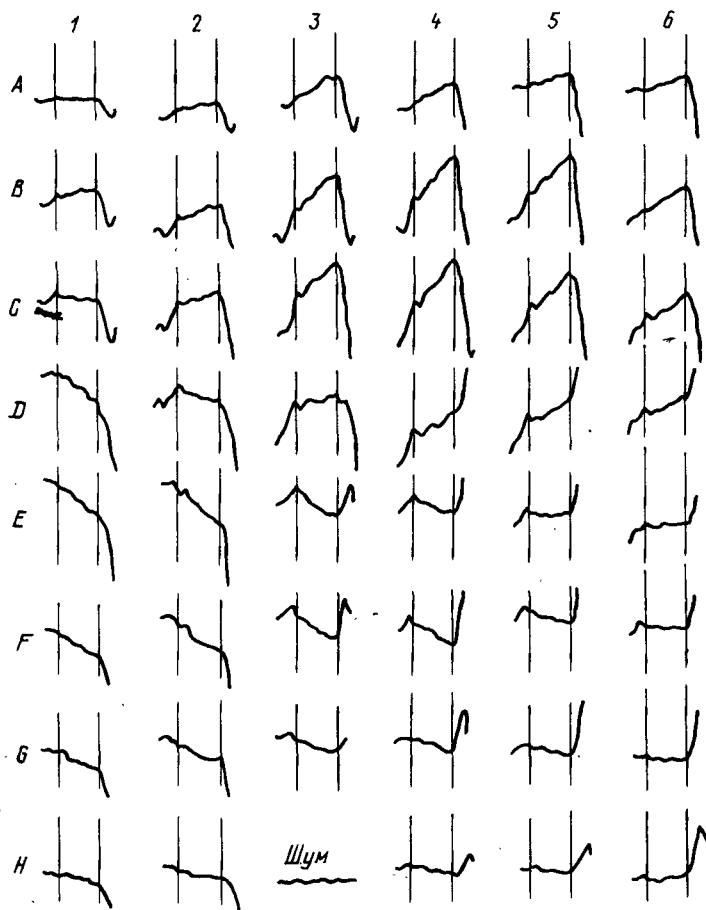


Рис. 2.21. Табличная магнитокардиограмма высокого разрешения для участка $P-Q$ кардиоцикла, записанная у здорового испытуемого. Использована измерительная сетка со стандартными размерами, однако с числом строк 8 вместо 6 (для повышения пространственной разрешающей способности). Полярность сигналов противоположна по отношению к стандартной. Внизу для сравнения приведен одновременно записанный участок электрокардиограммы высокого разрешения в двухполюсном грудном отведении V_6-V_{6R} [159, с. 231]

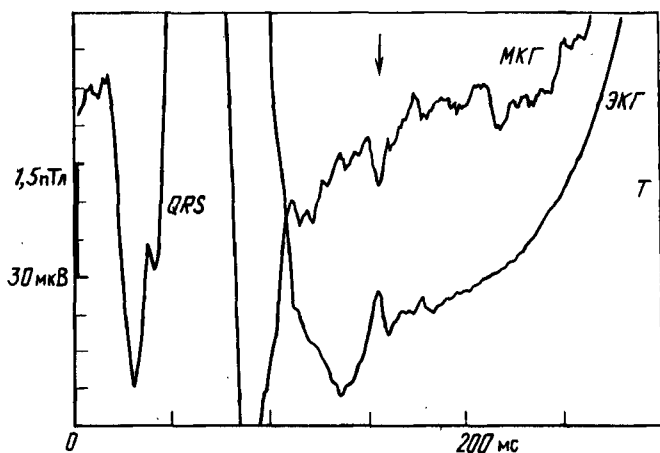


Рис. 2.22. Магнитокардиограмма высокого разрешения для участка $S-T$ кардиоцикла, записанная в позиции $E2$ стандартной сетки у испытуемого, перенесшего инфаркт миокарда, и одновременно записанная электрокардиограмма высокого разрешения. Стрелкой показан характерный "спайк", присутствующий на обеих кривых [159, с. 231]

называемым задержанным потенциалам, или импульсам задержанной деполяризации [159, с. 231, с. 291]. Эти потенциалы являются следствием замедления проведения импульса деполяризации при патологических изменениях миокарда, когда отдельные небольшие участки желудочков могут деполяризоваться уже после окончания основного комплекса QRS — в области $S-T$ или T ; на ЭКГ в этой области наблюдаются небольшие по амплитуде отклонения. Соответствующие отклонения могут быть зарегистрированы на эпикарде в виде четких одиночных или двойных импульсов в области $ST-T$ или же в виде слабого многофазного импульса, растянутого на всем участке $S-T$. В последнее время было зарегистрировано магнитное поле, порождаемое, по всей вероятности, теми же биоэлектрическими генераторами, что и задержанные потенциалы. Благодаря более высокой чувствительности к генераторам, локализованным в малых объемах пространства вблизи датчика, МКГ позволяет регистрировать импульсы задержанной деполяризации с большими подробностями, чем ЭКГ (рис. 2.22). Поскольку появление этих импульсов, особенно при ишемической болезни сердца и в послеинфарктный период, свидетельствует о высокой вероятности возникновения опасных желудочковых аритмий, их обнаружение и анализ имеют важное значение для диагностики и прогноза состояния сердца.

Исследование квазипостоянных магнитных полей сердца. При некоторых патологических состояниях сердца в миокарде возникают устой-

чивые биоэлектрические генераторы, не связанные непосредственно с процессами деполяризации или реполяризации. На обычной ЭКГ они вызывают смещение сегмента $S-T$, которое является важным диагностическим параметром. Анализируя структуру генераторов, порождающих наблюдаемые смещения сегмента $S-T$, можно показать, что они бывают двух типов [175]. Структура этих генераторов и соответствующие механизмы смещения сегмента $S-T$ показаны схематически на рис. 2.23.

В первом случае происходит истинное (первичное, или систолическое) смещение $S-T$. В диастолический период (интервал $T-Q$) весь миокард поляризован равномерно, однако после прохождения через него волны деполяризации патологическая область не полностью деполяризуется или слишком рано реполяризуется, в результате чего в период систолы ($S-T$) между нормальной и патологической областями возникает градиент трансмембранного потенциала. Этот градиент порождает почти постоянные (медленно изменяющиеся, или квазипостоянные) токи, которые иногда называют систолическими токами повреждения. Они протекают от нормально деполяризованной области к не полностью поляризованной области, образуя биоэлектрический генератор и соответствующее электромагнитное поле, которое и регистрируется в виде постоянного отклонения сегмента $S-T$ от его исходного положения, совпадающего с изолинией.

Во втором случае происходит кажущееся (вторичное, или диастолическое) смещение $S-T$. В диастолический период (интервал $T-Q$) имеется область миокарда с уровнем поляризации ниже нормального, в результате чего в этот период между нормальной и патологической областями возникает градиент трансмембранного потенциала и, соответственно, почти постоянные токи, называемые диастолическими токами повреждения (или просто токами повреждения). Они протекают от не полностью поляризованной (частично деполяризованной) к нормально поляризованной области, образуя биоэлектрический генератор и соответствующее электромагнитное поле. После прохождения через миокард волны деполяризации, в период систолы (интервал $S-T$) весь миокард оказывается равномерно деполяризованным, отсутствуют градиенты трансмембранного потенциала, токи повреждения, биоэлектрический генератор и электромагнитное поле. Таким образом, в этом случае фактически сегмент $S-T$ находится на уровне истинной изолинии, а сегмент $T-Q$ смещен относительно него. Возможны такие состояния сердца, когда в миокарде возникают биоэлектрические генераторы обоих вышеописанных типов. При этом смещение сегмента $S-T$ относительно сегмента $T-Q$ определяется как сумма первичного и вторичного смещений.

При электрокардиографических измерениях на электроды отведений воздействуют различные постоянные и медленно изменяющиеся внешние электрические поля (наводки, кожные потенциалы и др.), которые создают помехи; они устраняются из сигнала при использова-

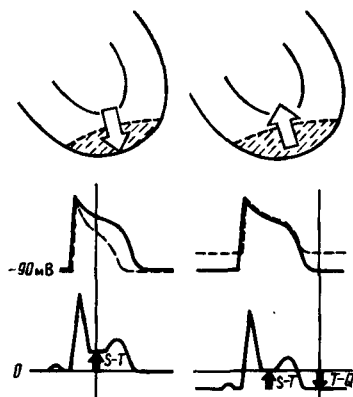


Рис. 2.23. Механизмы первичного (слева) и вторичного (справа) смещения сегмента $S-T$ электро- и магнитокардиограммы. Вверху — схематический разрез сердца с заштрихованной патологической областью (стрелкой показан эквивалентный дипольный момент токов повреждения). В средней части рисунка — импульсы трансмембранного потенциала действия в неизменной части миокарда (сплошная линия) и на патологическом участке (штриховая линия). Внизу — цикл магнитокардиограммы со смещенными сегментами $S-T$ и $T-Q$ относительно истинной изолинии (смещения показаны жирными стрелками) [175]

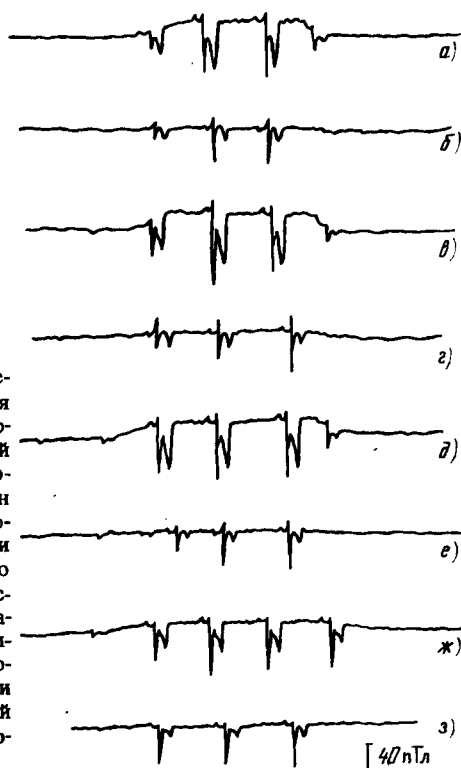


Рис. 2.24. Магнитокардиограмма, записанная с поверхности грудной клетки собаки в эксперименте с перекрытием коронарной артерии. Начало каждой записи — истинная изолиния, которая регистрируется, когда объект находится на достаточно большом расстоянии от магнитометра; после приближения объекта к магнитометру на требуемое расстояние начинают регистрироваться различные кардиоциклы (средняя часть каждой кривой); по удалении объекта от магнитометра запись возвращается на уровень изолинии. Смещение изолинии (в области достаточно сильного сигнала) равно по абсолютной величине и противоположно по направлению кажущемуся смещению сегмента $S-T$ [87]:

a — во время первого 2-минутного перекрытия артерии; b — после окончания второго 2-минутного перекрытия артерии; c — во время 5-минутного перекрытия артерии; z — непосредственно после окончания 5-минутного перекрытия артерии; d — через 15 мин после начала 28-минутного перекрытия артерии; e — через 30 с после окончания 28-минутного перекрытия артерии; $ж$ — во время второго кратковременного перекрытия артерии после окончания 28-минутного перекрытия; $з$ — непосредственно после окончания второго кратковременного перекрытия артерии

нии общепринятых в электрокардиографии усилителей переменного тока. Таким образом, изолиния ЭКГ выбирается произвольно, причем по принятому соглашению она обычно считается совпадающей с сегментом $T-P$ (или $T-Q$). Поэтому на ЭКГ невозможно наблюдать собственное смещение указанных сегментов, а наблюдается только относительное смещение сегмента $S-T$ по отношению к выбранной изолинии. Если фактически происходит смещение сегмента $T-Q$ под влиянием диастолических токов повреждения, то видимое на ЭКГ различие уровней сегментов $T-Q$ и $S-T$ обычно трактуется как смещение сегмента $S-T$, хотя в данном случае оно является вторичным (сегмент $S-T$ неподвижен, а сегмент $T-Q$, принятый за изолинию, смещается относительно него).

В отличие от электрокардиографии при помощи магнитокардиографии удастся четко различать первичные и вторичные смещения сегмента $S-T$. В [87] описаны измерения МКГ в экспериментах на собаках, у которых искусственно вызывали ишемические изменения в миокарде, сопровождающиеся диастолическими токами повреждения. При этом происходило смещение изолинии (сегмента $T-Q$), приводящее к вторичному (кажущемуся) смещению сегмента $S-T$ (рис. 2.24).

Возможность дифференцированного подхода к анализу первичных и вторичных смещений сегмента $S-T$ у человека подтверждена экспериментальными исследованиями, описанными в [90, 92, 175]. При регистрации МКГ у испытуемых с ранней реполяризацией желудочков и с блокадой левой ножки пучка Гиса, у которых диастолические токи повреждения отсутствуют, наблюдались только первичные смещения сегмента $S-T$. У испытуемого с заболеванием коронарных артерий запись МКГ с физической нагрузкой обнаруживает в основном вторичное смещение сегмента $S-T$, т.е. фактическое смещение сегмента $T-Q$, так как в миокарде возникают токи повреждения (одновременно происходит небольшое первичное смещение $S-T$). Отмечаются практические трудности измерения квазипостоянного магнитного поля сердца, связанные с влиянием квазипостоянных магнитных полей, генерируемых другими органами, особенно желудочно-кишечным трактом.

Изучение квазипостоянных магнитных полей миокарда представляется чрезвычайно важным применительно к оценке состояния сердца при ишемии и остром инфаркте миокарда [55, 87, 92, 175].

Биофизические подходы к кардиомагнитометрии. Наряду с эмпирическими методами оценки магнитокардиографических данных на основе "электрокардиографической номенклатуры" параметров МКГ (амплитуд зубцов и длительностей интервалов) и клинико-статистических исследований в последнее время все шире используется биофизический подход, основанный на формулировке электродинамической модели кардиогенератора — объемный проводник (тело) и решении так называемой обратной задачи для определения искомых характеристик кардиогенератора. В биофизическом подходе обычно рассмат-

ривается наиболее простая модель кардиогенератора — один или несколько диполей тока, которые характеризуют в целом волну возбуждения (деполяризации), движущуюся в миокарде, или же участок этой волны, "выпавший" из нее в результате поражения отдельного участка миокарда инфарктом. Для нахождения параметров этих диполей используются характерные свойства магнитного поля, порождаемого диполем тока, причем обычно анализируют распределение компоненты магнитной индукции, нормальной к фронтальной плоскости у поверхности грудной клетки. Если приближенно считать, что эта поверхность является плоскостью, отделяющей однородный объемный проводник от диэлектрического пространства, где осуществляется измерение, то находящийся в проводнике диполь будет создавать магнитное поле, которое в области измерения зависит только от тангенциальной компоненты диполя, т.е. компоненты, параллельной к указанной плоскости. Тогда распределение измеряемой магнитной индукции имеет характерную форму — максимум и минимум, расположенные таким образом, что середина соединяющей их прямой находится над диполем, а перпендикуляр к этой прямой в плоскости измерения указывает направление его тангенциальной компоненты (см. рис. 3.14). При указанных упрощающих допущениях можно вычислить момент диполя и глубину его расположения по значениям экстремумов магнитной индукции и расстоянию между ними.

При анализе магнитного поля сердца, пораженного инфарктом, используют понятие инфарктного диполя тока, который характеризует изменение исходной нормальной волны деполяризации в результате того, что определенная часть возбудимого миокарда замещается некротической тканью. Согласно принимаемому допущению расположение и дипольный момент этого диполя характеризуют локализацию и размеры некротической зоны, образовавшейся в результате инфаркта. Для определения инфарктного диполя были предложены различные методы, в основе которых лежит один и тот же подход: из распределения магнитной индукции конкретного испытуемого вычитают распределение, которое принято за нормальное. Результат этого вычитания рассматривается как поле "инфарктного генератора" (или инфарктного диполя, так как результирующее поле обычно имеет дипольную форму). В качестве распределения магнитной индукции в норме используют осредненное распределение для ранее исследованных здоровых лиц; другая возможность — нахождение наилучшего приближенного описания данного исследуемого распределения функциями, которые считаются характерными для нормы (в частности, это может быть распределение магнитной индукции от одного диполя, представляющего нормальную волну деполяризации) [73, с. 153; 160, с. 59, с. 61 и др.]. Пример разностной карты магнитной индукции, по которой определяется инфарктный диполь, приведен на рис. 2.25. Определение локализации дипольного генератора в период деполяризации сердца описано, например, в [52, 145, 159, с. 311].

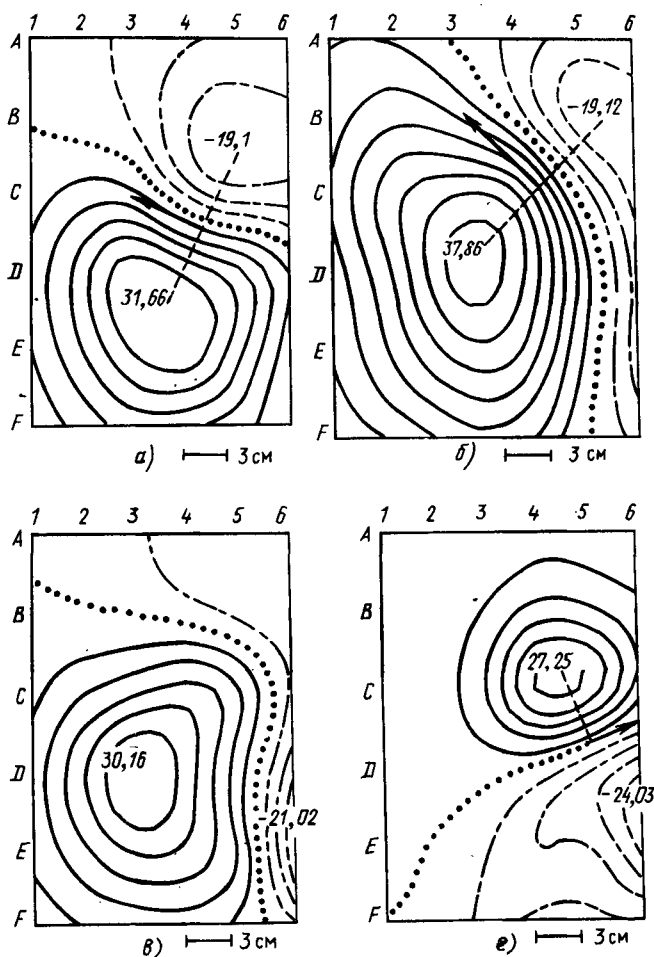


Рис. 2.25. Моментные эквииндукционные карты поперечной компоненты магнитной индукции, построенные по измерениям в стандартной сетке для момента максимума комплекса QRS стандартного электрокардиографического отведения (сплошные и штриховые кривые – положительные и отрицательные эквииндукционные линии соответственно указаны значения экстремумов в пикотеслах) [73, с. 153]:

а, б – карты двух здоровых испытуемых (нормальные карты); в – карта больного с высоким боковым инфарктом миокарда (инфарктная карта); г – разностная карта, полученная в результате вычитания нормальной карты а из инфарктной карты в. Стрелкой показано предполагаемое расположение инфарктного диполя

Биофизический подход к анализу магнитного поля сердца был применен для различения частично пересекающихся во времени электрических процессов разной природы, происходящих в сердце в период $P-R$ [73, с. 132, с. 137; 159, с. 280]. Предполагается, что каждый из этих процессов, а именно деполяризация предсердий, реполяризация предсердий и деполяризация проводниковой системы (системы Гиса–Пуркинье), порождает электрический генератор, который может быть представлен одним диполем тока. Этот диполь определяется посредством аппроксимации измеренного распределения магнитной индукции в соответствующий период времени. Поскольку деполяризация системы Гиса–Пуркинье начинается раньше, чем заканчивается реполяризация предсердий, эти процессы совмещены во времени, что затрудняет исследование процесса распространения возбуждения по проводниковой системе. Для того чтобы выделить этот процесс, из суммарного распределения магнитной индукции, измеренного на интервале $P-R$ непосредственно перед началом комплекса QRS , вычитают распределение магнитной индукции, обусловленное исключительно реполяризацией предсердий и измеренное сразу после их деполяризации (по окончании зубца P). Таким образом получают распределение магнитной индукции, по которому можно определить дипольный генератор, характеризующий волну деполяризации системы Гиса–Пуркинье (рис. 2.26). Аналогично картирование распределения магнитной индукции в период реполяризации желудочков выявило различные типы магнитного поля генераторов задержанной деполяризации у испытуемых, перенесших инфаркт миокарда [159, с. 291]. Как видно на рис. 2.27, магнитное поле сердца в норме в начальный период реполяризации желудочков имеет плавно изменяющуюся в пространстве и стабильную во времени форму, тогда как после инфаркта реполяризирующийся миокард содержит нерегулярно распределенные и быстро изменяющиеся во времени генераторы, обусловленные задержкой процесса деполяризации в пораженной ткани.

Более общий подход к модельному представлению электрического генератора сердца основан на использовании так называемого мультипольного эквивалентного генератора (его формулировка подробно описана в гл. 3). Математическая аналогия между скалярным потенциалом электрического поля и скалярным потенциалом, который можно ввести для магнитного поля в его безвихревой части (вне тела), позволяет сформулировать для фиктивных магнитных источников, распределенных в проводящей области, мультипольное разложение, совершенно аналогичное мультипольному разложению электрических источников, широко применяемому в электрокардиологии [133, 185].

Магнитные мультипольные компоненты в данном случае, как и сами фиктивные магнитные источники, отражают распределение суммарного тока по всему объему проводника и, следовательно, зависят не только от первичного биоэлектрического генератора, но и от структу-

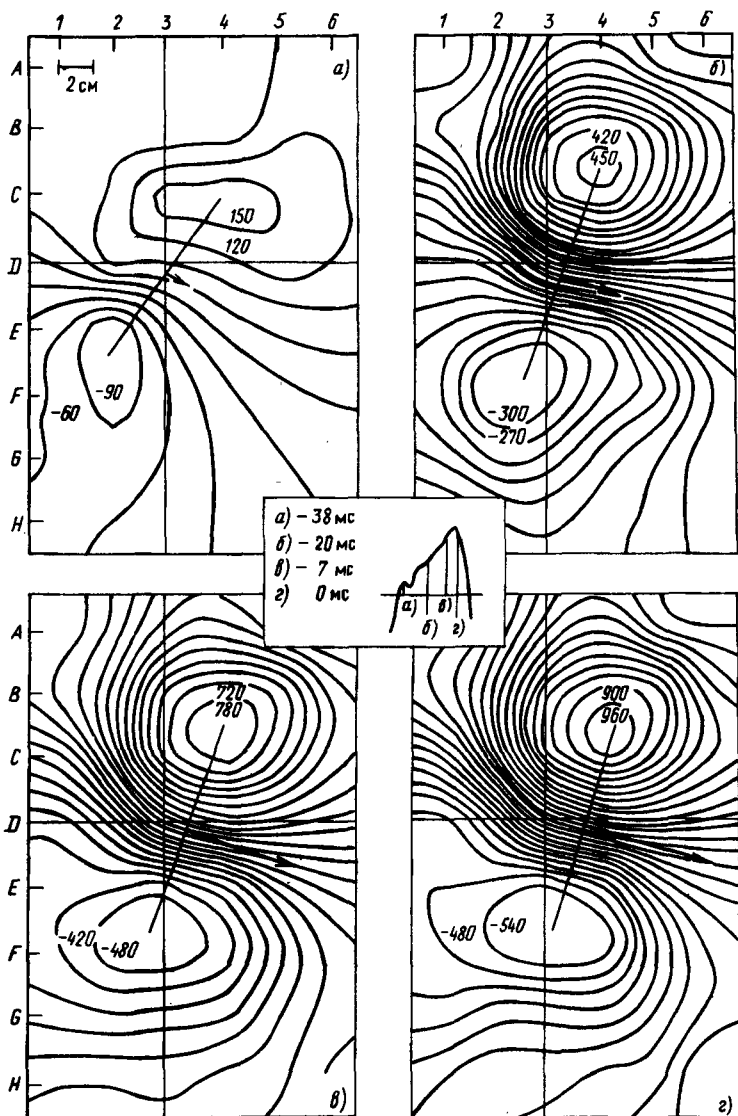


Рис. 2.26. Моментные эквииндукционные карты, построенные по данным, которые изображены в виде табличной магнитокардиограммы на рис. 2.21. В центре рисунка указаны моменты времени на участке $P-Q$ кардиоцикла, которым соответствуют четыре приведенные карты. Значения магнитной индукции у эквииндукционных линий даны в фемтотеслах. Стрелкой показано расположение эквивалентного диполя [159, с. 280]

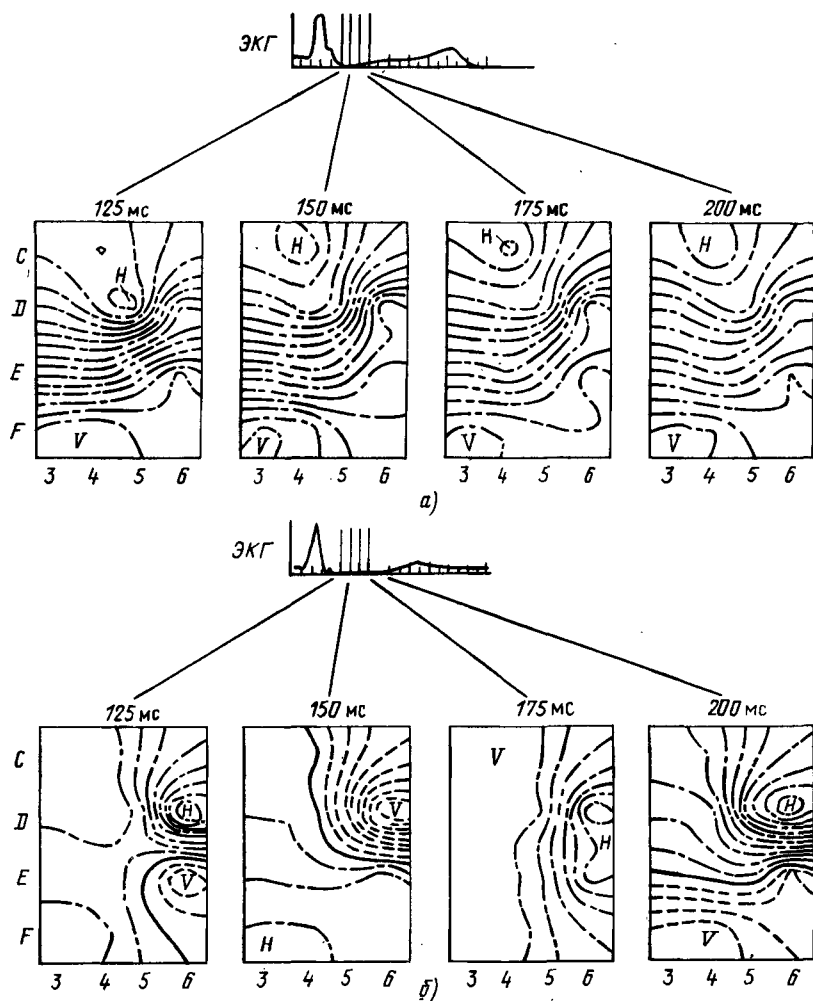


Рис. 2.27. Моментные эквиндукционные карты для периода S-T, построенные по магнитокардиограммам в сокращенной стандартной измерительной сетке для здорового испытуемого (а) и для больного с передним инфарктом миокарда (б). Моменты времени, которым соответствуют приведенные карты, отмечены вертикальными прямыми на записи электрокардиограммы в стандартном отведении от конечностей (над картами). Значения магнитной индукции в области экстремумов имеют порядок сотен фемтотесл (V – минимум; H – максимум) [159, с. 291]

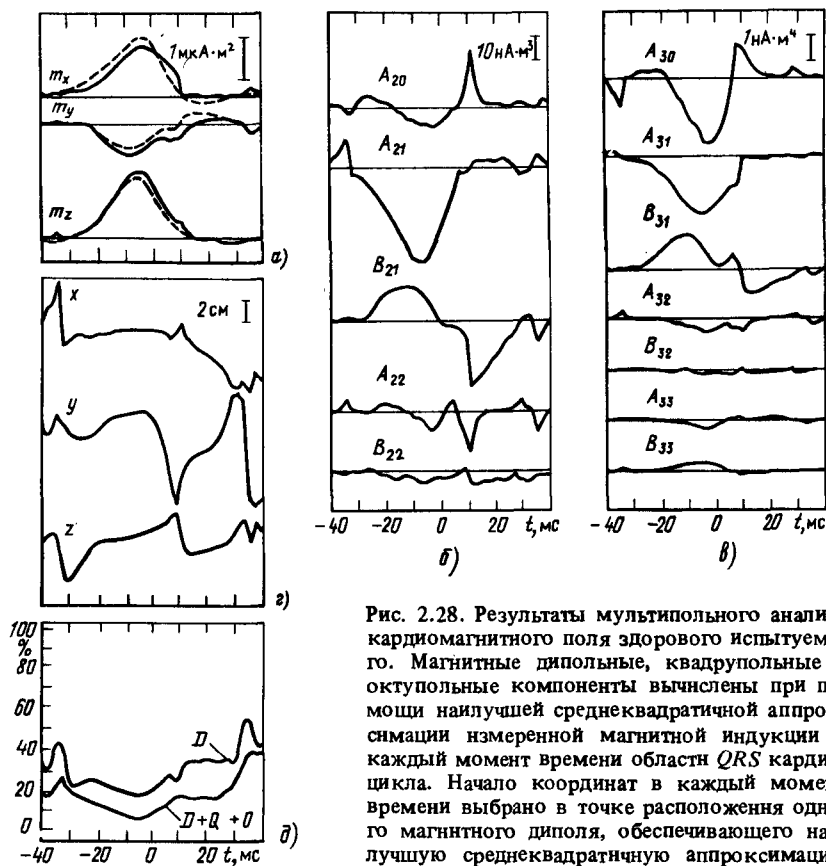


Рис. 2.28. Результаты мультипольного анализа кардиомагнитного поля здорового испытуемого. Магнитные дипольные, квадрупольные и октупольные компоненты вычислены при помощи наилучшей среднееквadrатичной аппроксимации измеренной магнитной индукции в каждый момент времени области QRS кардиоцикла. Начало координат в каждый момент времени выбрано в точке расположения одного магнитного диполя, обеспечивающего наилучшую среднееквadrатичную аппроксимацию измеренной магнитной индукции. Нулевая точка на оси времени соответствует максимуму комплекса QRS электрокардиографического

сигнала, используемого для синхронизации записей магнитной индукции [133]:

a — магнитные дипольные компоненты, полученные при аппроксимации магнитной индукции с помощью одного магнитного диполя (штриховые линии) и с помощью совокупности диполя, квадруполя и октуполя (сплошные линии); *б, в* — магнитные квадрупольные и октупольные компоненты соответственно; *г* — координаты траектории одного аппроксимирующего магнитного диполя (начало координат магнитного мультипольного разложения); *д* — относительная среднееквadrатичная ошибка аппроксимации измеренной магнитной индукции с помощью одного магнитного диполя (*D*) и с помощью совокупности диполя, квадруполя и октуполя (*D + Q + O*)

ры объемного проводника-тела (его формы, внутренней неоднородности). Магнитный эквивалентный мультипольный источник можно в принципе точно определить по распределению магнитной индукции на замкнутой поверхности, охватывающей область источников и расположенной вне минимальной сферы, включающей эту область. Поскольку на практике магнитное поле измеряют в ограниченной области у передней поверхности грудной клетки, можно решить эту задачу приближенно, находя совокупность магнитных мультиполей, поле которых наилучшим образом аппроксимирует измеренную магнитную индукцию в данной области [133].

Пример магнитных мультипольных компонент низших порядков, найденных таким аппроксимационным методом, приведен на рис. 2.28. Здесь определялись не только значения магнитных мультипольных компонент, но и начало координат (точка, где расположены магнитные мультиполи) из условия наиболее точной аппроксимации измеренной нормальной компоненты магнитной индукции при помощи одного подвижного магнитного диполя. Хотя такое мультипольное описание магнитных источников позволяет довольно сильно сжать исходную информацию — представить ее в виде небольшого числа переменных параметров (мультипольных компонент) вместо нескольких десятков магнитокардиограмм, интерпретация этих параметров затруднена, в частности, из-за того, что они зависят как от первичного биоэлектрического генератора, так и от внесердечных факторов (из-за токов проводимости в объемном проводнике). Экспериментальные и теоретические исследования показывают, однако, что влияние структуры проводника меньше сказывается на распределении магнитного поля, чем электрического.

Возможны и другие формулировки мультипольного разложения для магнитного поля сердца, более явно учитывающие тот факт, что электродинамические возбудители магнитного поля имеют вихревой характер (см. гл. 3).

В настоящее время уже выявились некоторые перспективные направления применения кардиомагнитометрии. К ним можно отнести в первую очередь изучение процесса деполяризации предсердий, электрофизиологических явлений, происходящих в сердце в период $P-Q$, возбуждения субэндокарда, синдрома преждевременного возбуждения желудочков, процессов деполяризации при фиброзных поражениях проводниковой системы и возникновения задержанных потенциалов, диастолической деполяризации поврежденного миокарда в период $T-P$, смещения сегмента $S-T$, морфологии зубцов T и U [73]. Безусловно, проведение таких исследований потребует еще более глубокого биофизического осмысления происхождения магнитного поля сердца и его связи с первичными биоэлектрическими генераторами миокарда.

2.2. Измерение магнитного поля мозга, нервной и мышечной ткани

Общие сведения о нейромагнитометрии. Под нейромагнитометрией понимается измерение магнитного поля биоэлектрических источников мозга, а также отдельных нервных клеток и их популяций. Магнитное поле головного мозга человека было впервые измерено Козном при помощи индукционной катушки с ферритовым сердечником [79]. Для уменьшения влияния шумов использовалась магнитная экранировка и осреднение сигнала с привязкой к одновременно записываемой электроэнцефалограмме. В дальнейшем для измерения магнитного поля головного мозга, как и других органов, стали применять сквид-магнитометры, которые наряду с усовершенствованными способами подавления шумов позволили получить записи сигналов магнитной индукции мозга, не уступающие по качеству электроэнцефалограмме (см. обзоры [9, 161, 205]).

С самого начала были отмечены некоторые преимущества методики измерения магнитного поля мозга по сравнению с электроэнцефалографией — отсутствие проблемы выбора положения индифферентного электрода, которая при измерении электрического поля может оказаться довольно трудной, и бесконтактность измерений, значительно облегчающая многоканальную регистрацию поля. Кроме того, более высокая чувствительность магнитных измерений к локализации биоэлектрических источников в объемном проводнике позволяла надеяться на получение новых данных о расположении активных зон в мозге. При исследованиях на отдельном нервном волокне магнитные измерения дают возможность определять электрофизиологические характеристики нерва, не повреждая его внутриклеточными электродами, как это делается при обычных микроэлектродных электрофизиологических измерениях.

Развитие нейромагнитометрии идет по двум основным направлениям. Одно состоит в исследовании магнитного поля, обусловленного самопроизвольной электрической активностью различных частей нервной системы (в частности, ритмических сигналов мозга), другое — в исследовании магнитного поля, обусловленного вызванной электрической активностью нервной системы, т.е. ее реакцией на внешние раздражители и внутренние события.

Мозг как электрический генератор. Головной мозг представляет собой наиболее развитую часть центральной нервной системы и имеет сложное анатомическое строение. Головной мозг человека имеет массу около 1500 г (с большим межиндивидуальным разбросом), состоит в основном из нервной ткани и подразделяется на несколько отделов. Отделы головного мозга различаются как анатомическим строением, так и функциональными свойствами [20, 31]. Наиболее развитой структурой его является кора, выполняющая высшие функции восприятия и аналитической деятельности. Толщина коры головного мозга челове-

ка и приматов составляет от 1 до 5 мм. Кора образует многочисленные складки, или извилины, и борозды, служащие границами между извилинами (рис. 2.29, а). Кора мозга подразделяется на анатомические структурные элементы — лобную, височную, теменную и затылочную доли и на функциональные участки — первичные проекционные зоны сенсорных анализаторов (зрительная, слуховая, соматосенсорная), вторичные проекционные зоны, где формируются сложные зрительные или слуховые образы, моторную кору (связанную с мышцами) и ассоциативную кору, ответственную за восприятие окружающей обстановки в целом и целенаправленное поведение.

Непосредственно под корой находится масса белого вещества, состоящего из миелинизированных аксонов, которые передают возбуждение между разными участками коры. Здесь же проходят афферентные и эфферентные аксоны, соединяющие кору с другими образованиями мозга.

В мозге имеется еще целый ряд образований и структур, выполняющих сложные функции связи между мозгом и другими частями тела, между разными отделами мозга, а также функции управления активностью и состояниями центральной нервной системы.

Мозг окружен несколькими тонкими оболочками. К коре прилегает мягкая, или сосудистая, оболочка (с кровеносными сосудами), далее расположены слой цереброспинальной жидкости, паутинная оболочка и твердая мозговая оболочка, прилегающая к костям черепа. Последние состоят из двух плотных пластин и рыхлого ячеистого слоя между ними. В черепных костях имеются отверстия. Снаружи на черепных костях находятся мягкие ткани головы — мышцы, подкожно-жировая клетчатка и кожный покров — скальп.

Кора мозга состоит из клеток двух основных видов — нейронов, перерабатывающих информацию, и глиальных клеток, поддерживающих метаболизм нейронов (количество глиальных клеток на единицу объема обычно несколько превышает количество нейронов). Известны нейроны разных типов, причем большую часть нейронов коры (около 70 %) составляют так называемые пирамидные нейроны, которые упорядочены по ориентации (их продольные оси направлены преимущественно по нормали к поверхности коры) и играют наиболее важную роль в создании внеклеточного электромагнитного поля. Остальные нейроны — это так называемые звездчатые и веретенообразные клетки. Пирамидный нейрон имеет характерное строение (рис. 2.30). Его сома (тело) находится в глубине коры, от сомы вниз отходит аксон и вверх — апикальный дендритный ствол, обычно доходящий до верхнего слоя коры и разветвляющийся там по горизонтали. В нижней части от сомы отходят базальные дендриты.

Кора имеет слоистое строение; различают в основном шесть ее слоев. Самый верхний — плексиформный — образуется ветвлением апикальных дендритов пирамидных нейронов. Следующий, внешний зернис-

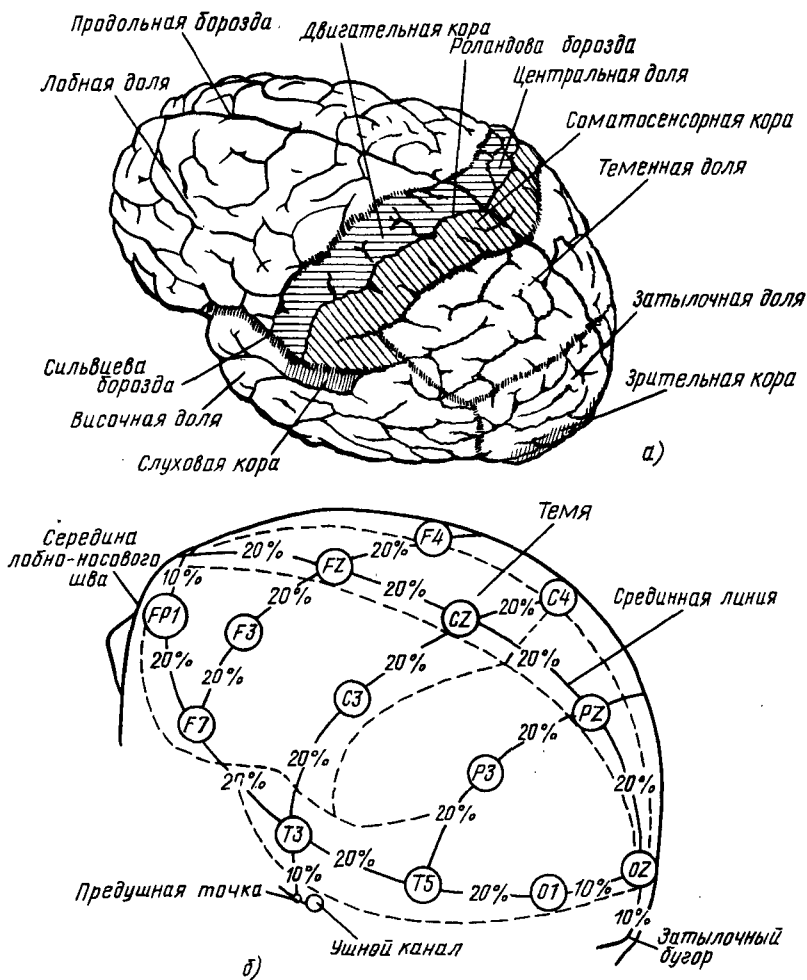


Рис. 2.29. Строение поверхности мозга человека (а) и расположение электродов стандартной электроэнцефалографической системы отведений на скальпе (б). Расстояния вдоль срединной линии указаны в процентах расстояния по поверхности черепа между средней точкой лобно-носового шва и затылочным бугром, трансверсальные расстояния — в процентах длины линии, проходящей по поверхности черепа через его верхушку между точками, расположенными перед ушными раковинами [205]

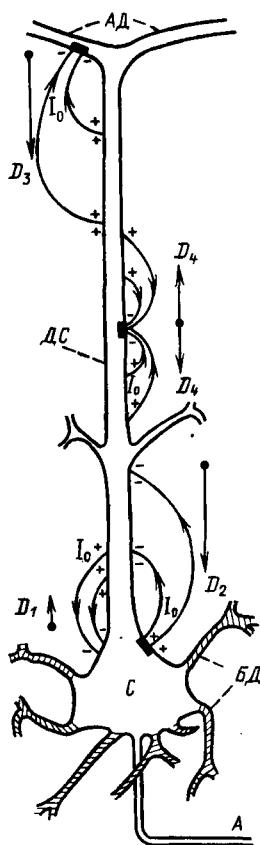


Рис. 2.30. Пирамидный нейрон и дипольные генераторы, возникающие под влиянием постсинаптических потенциалов в областях, отмеченных черными прямоугольниками. Показаны линии тока I_0 во внеклеточной среде [14]:

C — сома; A — аксон; $БД$ — базальные дендриты; $ДС$ — дендритный ствол; $АД$ — дендриты апикального ветвления; $D_1 - D_4$ — векторы диполей клеточного генератора (соматического диполя при импульсном разряде, соматического диполя при тормозном постсинаптическом потенциале, дендритного диполя при возбуждающем постсинаптическом потенциале и противоположно направленных диполей при возбуждающем постсинаптическом потенциале на дендритном стволе соответственно)

тый слой состоит в основном из мелких пирамидных и звездчатых клеток. Третий, пятый и шестой слои содержат главным образом средние и крупные пирамидные нейроны. Четвертый, внутренний зернистый слой состоит в основном из мелких звездчатых клеток. Наиболее крупные пирамидные нейроны расположены в пятом слое. Соотношение клеток различных видов в слоях зависит от функционального назначения зоны коры.

Связь между нейронами осуществляется в основном через посредство синапсов. Распространяющийся по аксону нервный импульс, или спайк, приходит к синаптическому окончанию и вызывает выделение из пресинаптической мембраны особого вещества — нейромедиатора, который изменяет проницаемость постсинаптической мембраны для определенных ионов. В результате возникает сдвиг потенциала на постсинаптической мембране, длящийся 15—20 мс и вызывающий изменение трансмембранного потенциала клетки, воспринимающей нервный импульс. В зависимости от типа синапса происходит увеличение поляризационного трансмембранного потенциала — гиперполяризация (для тормозных синапсов) или уменьшение этого потенциала — деполяризация (для возбуждающих синапсов). Если сома деполяризована относительно дендрита, то вследствие различия их трансмембранных потенциалов внутри клетки начинает течь ток в направлении дендрита, из которого он вытекает во внеклеточную среду, причем в области сомы ток

направлен, наоборот, из внеклеточной среды в клетку. Таким образом, по отношению к внеклеточному пространству нейрон приобретает структуру генератора тока дипольного типа, ориентированного положительным полюсом к поверхности коры и отрицательным — в глубину коры. Если же сома гиперполяризована относительно дендрита, то образуется аналогичный клеточный генератор противоположной полярности.

Импульс возбуждения может воздействовать на нейрон со стороны ветвлений дендритного ствола. Тогда процесс деполяризации обуславливает возникновение клеточного дипольного генератора, ориентированного положительным полюсом в глубину коры, а отрицательным — к ее поверхности. Соответственно гиперполяризация дендритного ствола порождает дипольный генератор противоположной полярности. Если же импульс возбуждения действует на среднюю часть дендритного ствола, то деполяризация приводит к образованию двух противоположно направленных и в значительной степени взаимно компенсирующихся дипольных генераторов [10, 18, 20].

Поскольку тормозные синаптические окончания преимущественно локализуются на соме, а возбуждательные — на дендритах, синхронно воздействующие на синапсы нейрона импульсы создают однонаправленные дипольные моменты, которые могут быть объединены в суммарный дипольный момент пирамидной клетки.

Было показано, что генератор внеклеточного поля пирамидной клетки можно рассматривать как совокупность двух диполей, один из которых образуется сомой и дендритным стволом, а другой — ветвлением апикальных дендритов и дендритным стволом; в соответствии с этим основными генераторными слоями коры являются глубинные слои, содержащие преимущественно сомы крупных пирамидных нейронов, и наружный слой, образованный ветвлением апикальных дендритов [18, 20]. Другие нервные клетки, хотя и генерируют внеклеточное электромагнитное поле, дают незначительный вклад в сигналы, измеряемые во внешней среде, так как они не имеют упорядоченной пространственной организации и ориентации, а их поля в значительной степени взаимно компенсируются.

Многочисленные возбуждательные и тормозные импульсы постсинаптического потенциала, суммируясь на мембране пирамидной клетки, создают непрерывные колебания трансмембранного потенциала с амплитудой от 5 до 20 мВ. Когда этот потенциал достигает порогового значения, клетка генерирует импульсный разряд (потенциал действия) с амплитудой трансмембранного потенциала около 70 мВ и длительностью около 1 мс, распространяющийся по ее аксону к синаптическим окончаниям.

Дипольные генераторы внеклеточного поля мозга по существу порождаются указанными подпороговыми, или градуальными, колебаниями трансмембранного потенциала. Их интенсивность (дипольный момент) определяется амплитудой этих колебаний, а ориентация сов-

падает с осью дендритного ствола. При отведении от скальпа в некоторых случаях (в начальной фазе импульса вызванного ответа) регистрируемое электромагнитное поле может быть результатом суммарных потенциалов действия аксонов группы клеток, однако при регистрации спонтанной активности мозга его электромагнитное поле можно полностью отнести за счет градуальных потенциалов коры.

Наличие в коре системы одинаково ориентированных (по перпендикуляру к поверхности) пирамидных клеток, у которых изменение градуальных потенциалов и соответственно дипольных моментов до некоторой степени скоррелировано, дает основу для представления эквивалентного электрического генератора мозга в виде двойного слоя источников тока, параллельного поверхности коры [20].

Вследствие того что у человека из-за наличия извилин и борозд коры ее поверхность не везде параллельна поверхности скальпа, соответствующий генераторный двойной слой на разных участках коры по-разному ориентирован по отношению к этой поверхности. Элементарные дипольные генераторы, составляющие генераторный слой в области борозд, ориентированы в основном тангенциально по отношению к поверхности скальпа, а между бороздами в области извилин — нормально к этой поверхности.

Для исследования мозга широко применяют измерение и анализ генерируемого им электрического поля. Это поле существенно зависит от состояния и патологических изменений мозга, приводящих к изменению пространственного распределения, интенсивности и временной динамики эквивалентного генератора мозга, основная конфигурация которого в норме была рассмотрена выше.

Запись спонтанно изменяющегося электрического потенциала с поверхности скальпа, черепной кости или твердой мозговой оболочки называется электроэнцефалограммой (ЭЭГ) [19]. На рис. 2.29, б показано расположение электродов стандартной электроэнцефалографической системы отведений на поверхности головы. Спектр сигналов ЭЭГ лежит в полосе частот 0,5–100 Гц, которую обычно подразделяют на следующие диапазоны: 0,5–4 Гц — дельта-активность, 4–8 Гц — тета-активность, 8–13 Гц — альфа-активность, 13–22 Гц — бета-активность и 22–30 Гц — гамма-активность.

Когда человек находится в спокойном состоянии с закрытыми глазами, в ЭЭГ преобладает альфа-активность. При открывании глаз и фиксации внимания на каких-либо внешних раздражителях альфа-активность подавляется, и на ЭЭГ усиливаются высокочастотные колебания с малой амплитудой. Различным состояниям возбуждения, психической деятельности, сна, обучения и т.д., а также патологическим изменениям мозга соответствуют различные сочетания его ритмических активностей. Следует отметить, что при этом редко наблюдается длинная последовательность волн с устойчивой частотой, фазой и формой; обычно ЭЭГ имеет вид последовательности волн разной формы как куполо-

образных, так и остроконечных, асимметричных, с разными амплитудами и длительностями. В связи с этим существуют специальные системы словесного описания рисунка (паттерна) ЭЭГ в норме и при патологических состояниях.

При некоторых нарушениях работы мозга, в частности при фокальной эпилепсии, на ЭЭГ появляются последовательности спайков — пиков и острых волн, часто в сочетании с медленными волнами и низкочастотными колебаниями (дельта- и тета-активности), характерные для эпилепсии данного вида и отличающиеся тем, что их генераторы локализуются в определенных местах коры мозга; поэтому ЭЭГ имеет наибольшую амплитуду в отведениях, приближенных именно к этим участкам мозга.

Наряду со спонтанной активностью мозга рассматривают и так называемую вызванную активность, или вызванные ответы, которые отражаются на электроэнцефалографической записи в виде вызванных потенциалов. Это потенциалы, возникающие при предъявлении испытуемому кратковременных стимулов (например, вспышек света, звуковых сигналов, импульсных воздействий на участки тела) или при непосредственном раздражении каких-либо структур мозга, а также при включении непрерывных стимулов. Вызванные ответы регистрируются наиболее четко при непосредственном отведении от коры мозга, обычно их амплитуда возрастает с увеличением интенсивности стимула. При достаточно сильном стимуле вызванный ответ хорошо выделяется на фоне спонтанной ЭЭГ.

Вызванные ответы классифицируют по названиям соответствующих анализаторов — зрительные, слуховые и т.п., а также по времени регистрации их компонент после стимула — коротколатентные (в пределах от 1 до 100 мс) и длиннотентные (позже 100 мс). Коротколатентные ответы обусловлены проведением возбуждения от периферических частей анализатора до первичных корковых проекционных зон, тогда как длиннотентные ответы отражают распространение возбуждения в непроекционные зоны коры.

В экспериментах было показано, что реагирующие на раздражитель нейроны приобретают свойства дипольного генератора электрического тока, ориентированного таким образом, что положительный потенциал на поверхности коры соответствует возбуждению нейронов, а отрицательный потенциал — торможению нейронов.

Методика магнитоэнцефалографических измерений. Магнитное поле мозга в настоящее время измеряют при помощи сквид-магнитометров, применяя всевозможные способы борьбы с помехами, неизбежные при записи столь слабых сигналов, — магнитное экранирование помещения, градиометрическую структуру катушек магнитометра, специальную фильтрацию и др.

Магнитометр располагают таким образом, чтобы центр его приемной катушки находился в заданной точке у поверхности скальпа сидящего

испытуемого. Обычно плоскость катушки параллельна поверхности скальпа в данной точке, так что измеряется компонента магнитной индукции, нормальная к этой поверхности. Если представляется целесообразным измерять тангенциальную компоненту магнитной индукции, то можно применить магнитометр с измерительной катушкой типа недиагонального градиометра, показанной на рис. 1.12, а. Приемная катушка находится в непосредственной близости от поверхности скальпа (обычно на расстоянии от нее, не превышающем 2 см).

Расположение точек измерения для магнитоэнцефалографии пока не стандартизовано, поэтому в зависимости от конкретных задач исследования и от характера предполагаемого анализа измеренных данных магнитоэнцефалографические сигналы регистрируют либо независимо в отдельных точках, расположение которых привязывается к стандартным электроэнцефалографическим позициям, или же в регулярно распределенных по поверхности скальпа точках (в целях совместного анализа полученных сигналов, обычно с учетом их фазовых соотношений во времени). При измерениях этого последнего, топографического типа для расположения точек измерения иногда используют сетки, или матрицы, содержащие по несколько десятков точек с интервалом между ними 2, 3 или 4 см по двум взаимно перпендикулярным направлениям вдоль поверхности скальпа [64, 73, с. 304; 159, с. 538; 160, с. 42]. В некоторых исследованиях для регулярного размещения точек измерения использовали сферическую систему координат, аппроксимируя поверхность головы сферой и располагая на ней точки измерения с заданным интервалом по угловым координатам (например, с интервалом 15°) [71, с. 353; 160, с. 11]. Для привязки выбранной измерительной сетки к анатомическим ориентирам применяются различные приспособления (колпаки из тонкой прозрачной пластмассы с нанесенными на них измерительными позициями и т.д.).

Топографические измерения предъявляют высокие требования к устройствам, осуществляющим перемещение магнитометра из одной точки измерения в другую и точное его расположение и ориентацию относительно измерительной сетки, черепа и анатомических ориентиров головы. В создаваемых в настоящее время измерительно-вычислительных комплексах для нейромагнитометрии предусматриваются аппаратные и программные средства для автоматизации процедуры сканирования магнитометром заданной области измерения (см. рис. 1.37).

Для выполнения топографических измерений магнитного поля мозга с сохранением пространственно-временных соотношений между сигналами в разных точках поверхности измерения можно использовать одноканальный магнитометр при условии, что имеется возможность синхронизировать сигналы, измеренные в разных точках последовательно во времени при помощи одновременно измеряемого электроэнцефалографического сигнала (последний должен иметь характерные опорные элементы — спайки). Существенное уменьшение трудоем-

кости и повышение точности топографических измерений достигается при использовании специальных многоканальных магнитометров (см. гл. 1). Топографические методы и, следовательно, многоканальная измерительная аппаратура приобретают особенно важное значение в связи с тем, что они обеспечивают возможность эффективного биофизического анализа измеренных данных на основе электродинамических моделей нейроэлектрических генераторов и мозга как объемного проводника и достижения практической цели — определения локализации областей и структур мозга, осуществляющих определенные функции по восприятию и переработке информации [73, с. 221].

В специальном исследовании было показано, что сквид-магнитометры, приспособленные для измерения магнитного поля головного мозга человека, можно успешно применять и для нейромагнитометрии мелких млекопитающих, в частности, при биологическом моделировании на них фокальной эпилепсии [73, с. 237].

Нормальная и патологическая магнитоэнцефалограммы. Сопоставление записей магнитной индукции спонтанно изменяющегося магнитного поля мозга — магнитоэнцефалограммы (МЭГ) с ЭЭГ проводилось как на уровне качественного описания кривых, так и на количественном уровне, в частности, посредством сравнения их спектров, а также некоторых характеристик, зависящих от пространственного расположения точки измерения [13, 79, 126, 162, 205, 212, 213]. Установлено, что имеются как существенные черты сходства, так и определенные различия между МЭГ и ЭЭГ. Наибольшее сходство наблюдается при доминирующей альфа-активности. Отмечают корреляцию амплитуд альфа-активностей на МЭГ и ЭЭГ, а также тенденцию совпадения их по фазе на левой стороне головы и противоположности фаз на правой. Это можно объяснить тем, что магнитное поле направлено из черепа наружу с одной стороны, огибает голову и входит в череп с другой стороны. Такая форма поля соответствует эквивалентному дипольному генератору тока для альфа-активности, лежащему в сагиттальной плоскости и параллельному срединной линии черепа.

Были отмечены также различия в форме МЭГ и ЭЭГ у спящего испытуемого. Весьма значительные различия между МЭГ и ЭЭГ выявляются при их частотном анализе. Особенно сильно различаются спектры в области самых низких частот.

На рис. 2.31 приведен пример МЭГ с преобладающей альфа-активностью, а рис. 2.32 иллюстрирует различие в спектральном составе МЭГ и ЭЭГ.

Значительное внимание в последние годы было уделено записи и анализу МЭГ при патологических состояниях центральной нервной системы, в частности при различных видах эпилепсии. В этих случаях также имеется сходство между МЭГ и ЭЭГ в одних аспектах и различие в других. Например, отклонения типа спайков, присутствующие на ЭЭГ, наблюдаются также на МЭГ, тогда как волнообразные откло-

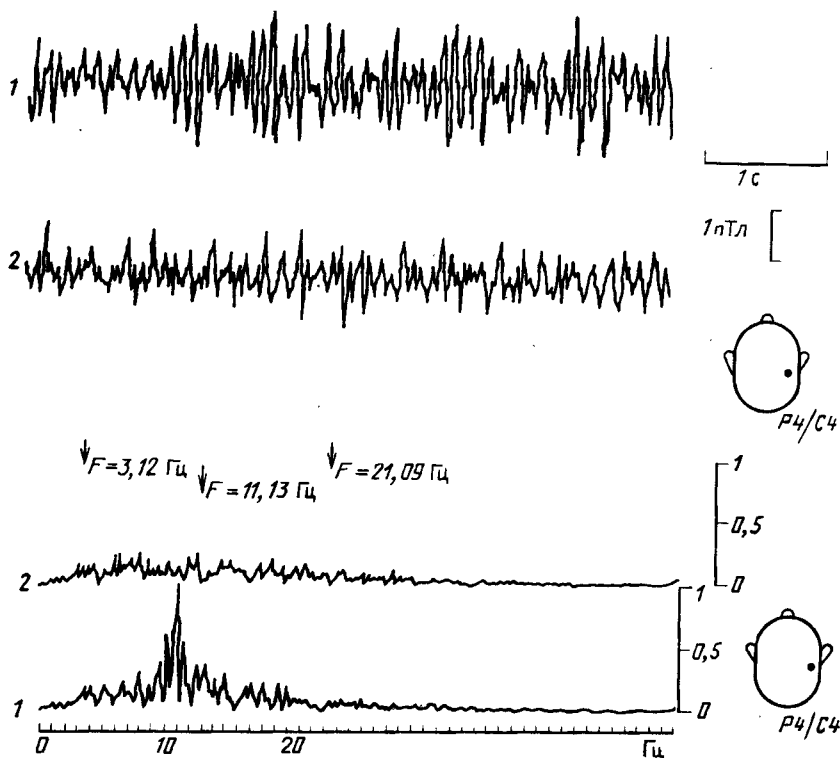


Рис. 2.31. Магнитоэнцефалограмма здорового испытуемого (вверху) и ее спектр (внизу) при закрытых глазах (1) и при открытых глазах (2). Точка измерения находится между позициями P4 и C4 стандартной электроэнцефалографической системы. В спектре 1 виден пик, соответствующий альфа-активности [13]

нения нередко видны только на ЭЭГ и неразличимы на МЭГ. Иногда медленные волны на ЭЭГ, которые нельзя интерпретировать как признак эпилепсии, проявляются на МЭГ в виде спайковых разрядов, характерных для эпилепсии. В соответствии с теоретическими предположениями биомагнетометрии вид МЭГ в значительной степени определяется ее высокой чувствительностью к пространственному расположению локальных электрических генераторов. В особенности это относится к генераторам мозга, расположенным в его внешних слоях. Если патологические очаги, генерирующие электрический ток, находятся в этих слоях, то МЭГ нередко содержит диагностически важные элементы, отсутствующие в ЭЭГ. В частности, спектры МЭГ всегда имеют максимальные амплитуды соответствующих линий вблизи области поражения коры. И наоборот, если очаги находятся в средних и глубоких слоях мозга, то вследствие их удаленности от катушек

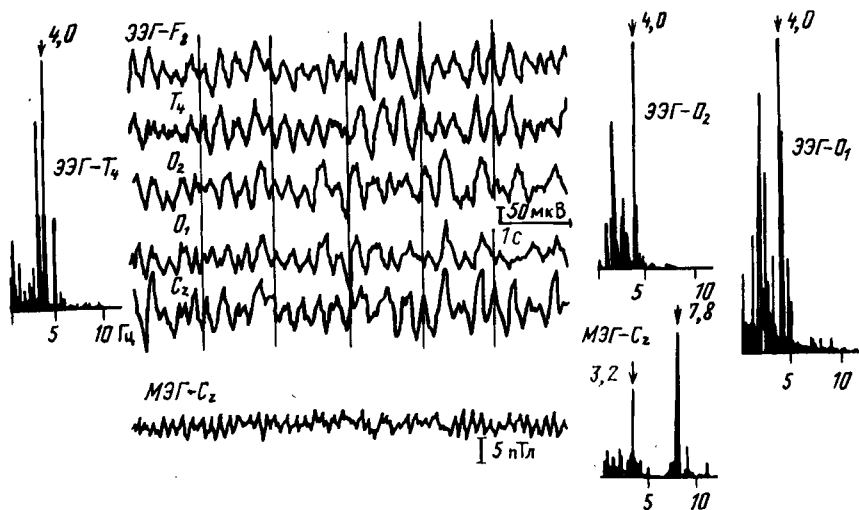


Рис. 2.32. Магнитоэнцефалограмма (внизу) и ЭЭГ (вверху), записанные в нескольких стандартных позициях (указанных у соответствующих кривых); слева и справа приведены их спектры. Альфа-активность четко проявляется в спектре МЭГ (частота около 8 Гц), но отсутствует в спектрах ЭЭГ; и наоборот, дельта-активность сильно выражена в спектре ЭЭГ (частота 4 Гц) и слабо выражена в спектре МЭГ (частота 3,2 Гц) [126]

магнитометра и, возможно, неблагоприятной ориентации на МЭГ иногда вообще не отражается их активность, тогда как на ЭЭГ соответствующие элементы присутствуют. Здесь записи МЭГ и ЭЭГ взаимно дополняют друг друга по своей диагностической информативности.

Известны различные подходы к реализации высокой чувствительности магнитных измерений к расположению генератора. При наличии лишь одноканального магнитометра измерения в разных точках у поверхности скальпа могут осуществляться только последовательно, и из-за отсутствия циклической повторяемости сигналов спонтанной активности не удастся синхронизировать эти сигналы, измеряемые в разных точках. Поэтому исследуют распределение у поверхности скальпа характеристик МЭГ интегрального типа, получаемых в результате осреднения сигналов во времени, спектрального или корреляционного анализа [64; 73, с. 205, с. 249, с. 304; 159, с. 538, с. 547; 160, с. 42].

На рис. 2.33 показано для примера распределение на поверхности скальпа амплитуды альфа-активности МЭГ, измеряемой магнитометром с осью катушки, нормальной к этой поверхности. Наличие здесь двух экстремумов говорит о том, что порождающий МЭГ эквивалентный генератор может иметь дипольную структуру. Однако для такого утверждения это распределение является лишь необходимым, но не достаточным условием. Так, взаимно корреляционная функция сигнала

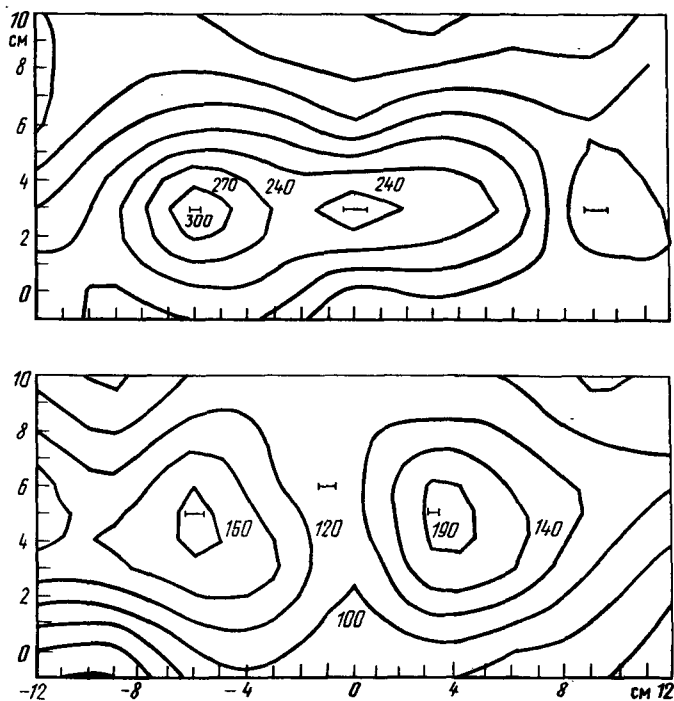


Рис. 2.33. Эквииндукционные карты распределения амплитуды альфа-активности на поверхности скальпа для двух испытуемых. Начало координат совпадает с затылочным бугром. Значения магнитной индукции у эквииндукционных линий указаны в фемтотеслах [159, с. 538]

лов МЭГ в точках максимумов распределения имеет относительно небольшую абсолютную величину, поэтому сравнительно невелика та часть измеренного магнитного поля, которая изменяется синхронно и в противофазе в этих точках и, следовательно, может быть приписана одному дипольному генератору. На самом деле генератор может быть существенно сложнее, но подробные детали его структуры теряются при осреднении сигналов во времени и переходе в частотную область.

При некоторых типах фокальной эпилепсии электрическая активность мозга имеет характер четко выраженных спайков, которые ритмически повторяются, благодаря чему их можно выделить с достаточной точностью и синхронизировать в точках измерения, распределенных на исследуемом участке скальпа. По этим данным можно получить распределения магнитной индукции в последовательные моменты времени (или в представляющие интерес фазы спайка) и исследовать динамику изменения электрического генератора мозга, возникающего при данном патологическом процессе [64, 65]. Обычно в области, где на-

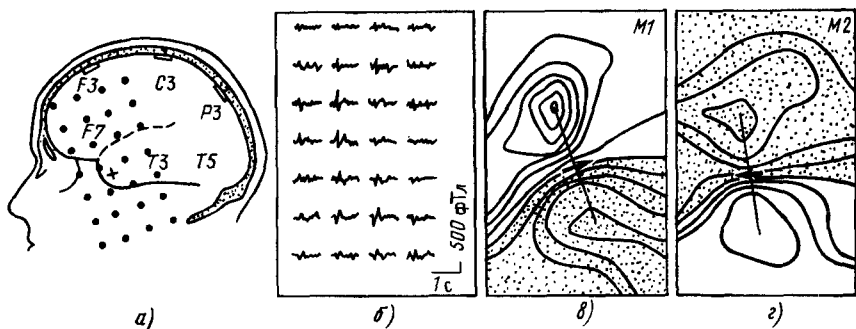


Рис. 2.34. Локализация дипольных генераторов эпилептического спайка в левой височной доле мозга [64]:

а — измерительная сетка на левой стороне головы (интервал между позициями 2 см); *б* — магнитные спайки, осредненные при помощи опорного электроэнцефалографического сигнала (начальный пик *M1* спайка изменяет полярность на противоположную, переходя в волну *M2*); *в*, *г* — эквииндукционные карты, соответствующие отклонениям *M1* и *M2* (интервал индукции между соседними эквииндукционными линиями равен 150 фТл, в затемненных областях магнитная индукция направлена внутрь черепа, в светлых — наружу, стрелками показаны расположение и ориентация эквивалентного диполя тока)

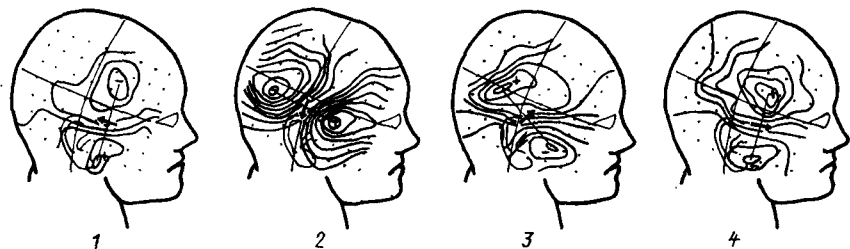
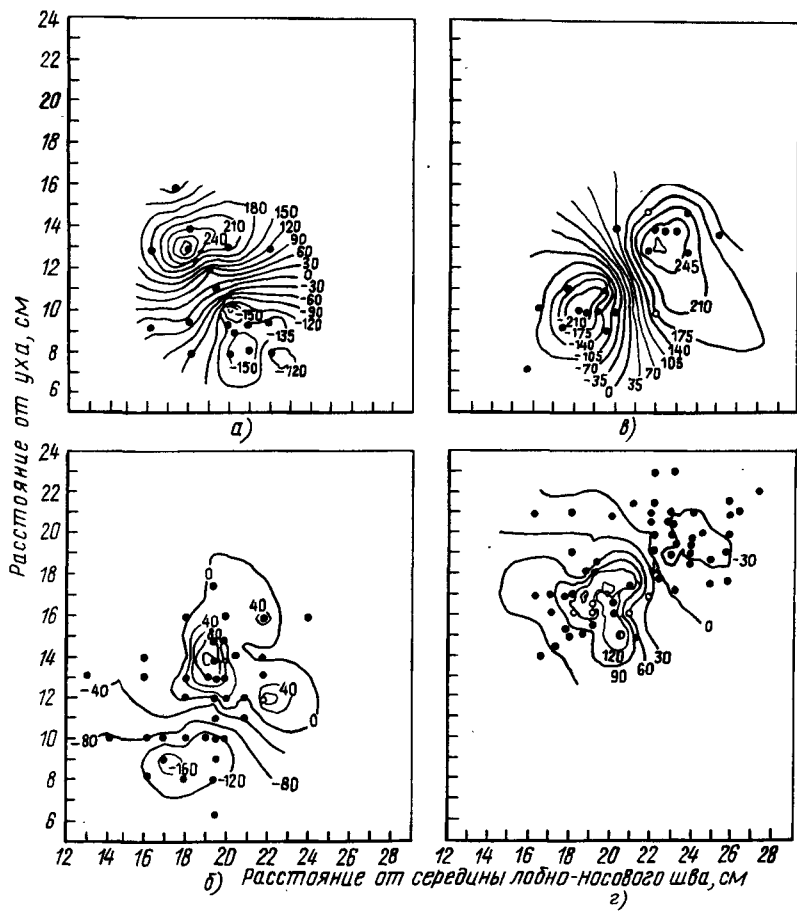


Рис. 2.35. Локализация дипольных генераторов эпилептического спайка в правой височной доле мозга. Приведены эквииндукционные карты для четырех последовательных отклонений спайка 1–4 (интервал индукции между соседними эквииндукционными линиями равен 100 фТл, отрицательная магнитная индукция направлена внутрь черепа, положительная — наружу, стрелками показаны расположение и ориентация эквивалентного диполя тока). Появляющийся при отклонении 1 первый эквивалентный диполь к концу спайка, при отклонении 4, появляется вновь, но с противоположной полярностью; второй эквивалентный диполь, смещенный в пространстве относительно первого приблизительно на 1 см, появляется при отклонении 2 и затем при отклонении 3 также меняет свою полярность [65]



блюдаются патологические спайки, карты распределения магнитной индукции имеют два противоположных по знаку экстремума, так что в первом приближении порождающий их генератор считают дипольным. Основываясь на этом допущении и применяя электродинамическую модель с дипольным генератором в сферическом проводнике (см. гл. 3), определяли интенсивность и расположение диполя. Было показано, в частности, что на протяжении эпилептического спайка существенно изменяются расположение, ориентация и абсолютная величина эквивалентного диполя (рис. 2.34 и 2.35); это отвечает гипотезе о перемещении в пространстве фокуса эпилепсии.

Магнитные вызванные ответы. В последние годы областью плодотворного приложения нейромагнитометрии стало исследование вызванных ответов, которые характеризуют реакцию головного мозга на внешние раздражения [71, с. 353; 159, с. 379; 205 и др.]. Это можно объяснить тем, что указанные выше особенности магнитных измерений позволяют более четко идентифицировать локальные электрические генераторы мозга, особенно те, которые расположены в его поверхностных слоях. Фактически сигналы магнитной индукции по своей информативности приближаются в этом смысле к электрокортикограмме, т.е. сигналам электрического потенциала, непосредственно отводимым от поверхности мозга, тогда как электрические измерения на поверхности скальпа имеют более "распределенную" чувствительность и в большей степени зависят от структуры объемного проводника (на них сильно влияет наличие черепной кости, цереброспинальной жидкости и т.п.). Благоприятным обстоятельством при анализе вызванных ответов (как электрических, так и магнитных) является возможность их многократного повторения и осреднения измеренного сигнала с использованием стимула в качестве опорного сигнала для синхронизации.

Магнитометрические исследования вызванных ответов в своем подавляющем большинстве преследуют цель определения локализации участков мозга, возбуждающихся при приеме и переработке информации, поступающей в мозг во время стимуляции рецепторов. Так, были опре-

←

Рис. 2.36. Локализация дипольных генераторов вызванных ответов при осознательной стимуляции сериями кратковременных электрических импульсов [159, с. 379]:

a—*г* — эквииндукционные карты на левой поверхности головы при стимуляции большого пальца, указательного пальца, мизинца правой руки и лодыжки правой ноги соответственно (положительная магнитная индукция направлена наружу, отрицательная — внутрь черепа, значения магнитной индукции у эквииндукционных линий указаны в фемтотеслах); *д* — эквивалентные диполи тока, найденные по эквииндукционным картам и определяющие соответствующие активные области коры для большого пальца (*a*), указательного пальца (*б*), мизинца (*в*) и лодыжки (*г*), штриховыми линиями показаны роландова и сальвиева борозды

делены области генерации вызванного магнитного поля для основных видов раздражителей — осязательных, слуховых и зрительных; иными словами, при помощи нейромагнитометрии осуществляют "функциональное картирование" проекционных зон соответствующих рецепторов.

В большинстве случаев метод количественного определения активного участка мозга, или, точнее говоря, электрического генератора, порождающего наблюдаемое магнитное поле, состоит из трех основных этапов: измерения нормальной компоненты магнитной индукции в достаточно многочисленных точках у поверхности скальпа; синхронизации измеренных сигналов магнитной индукции по опорному импульсу и построения эквииндукционных (изополевых) карт; вычисления момента и расположения эквивалентного дипольного генератора при помощи простой математической модели (голова как объемный проводник аппроксимируется однородным проводящим шаром, а генераторная область — одним диполем тока, расположенным внутри шара и ориентированным тангенциально к его поверхности). Изменяя параметры стимула и определяя соответствующие изменения параметров эквивалентного генератора, изучают закономерности работы центральной нервной системы при восприятии и переработке поступающей извне информации.

Определение локализации активных областей коры мозга при осязательной и слуховой стимуляции иллюстрируется на рис. 2.36 и 2.37 соответственно. Обобщенные результаты таких исследований представлены для сравнения на рис. 2.38.

Закономерности электрофизиологических процессов, происходящих в центральной нервной системе при восприятии визуальной информации, изучают на основе анализа магнитных вызванных ответов при зрительной стимуляции. Возможность изменять в широких пределах качественные и количественные характеристики стимулов в сочетании с высокоизбирательной пространственной чувствительностью магнитометрического метода позволяет выявлять особенности структуры связи мозга со зрительными органами и судить о характере переработки визуальной информации в различных частях мозга [159, с. 379; 160, с. 40]. Здесь приведем лишь один пример картирования проекционной зоны зрительных рецепторов (рис. 2.39),

Методы магнитометрии начинают использовать для изучения и других электрофизиологических процессов в мозге — более сложных, чем первичная реакция на физические свойства предъявляемого стимула. В частности, исследуют магнитные проявления двигательной активности — изменения магнитного поля мозга, непосредственно предшествующие каким-либо намеренным действиям человека, например движениям конечностями [159, с. 379, с. 484], а также реакции мозга на неожиданные (редко появляющиеся) стимулы [159, с. 379, с. 505]. Расчеты на основе экспериментальных измерений показывают, что в этих случаях эквивалентный дипольный генератор оказывается распо-

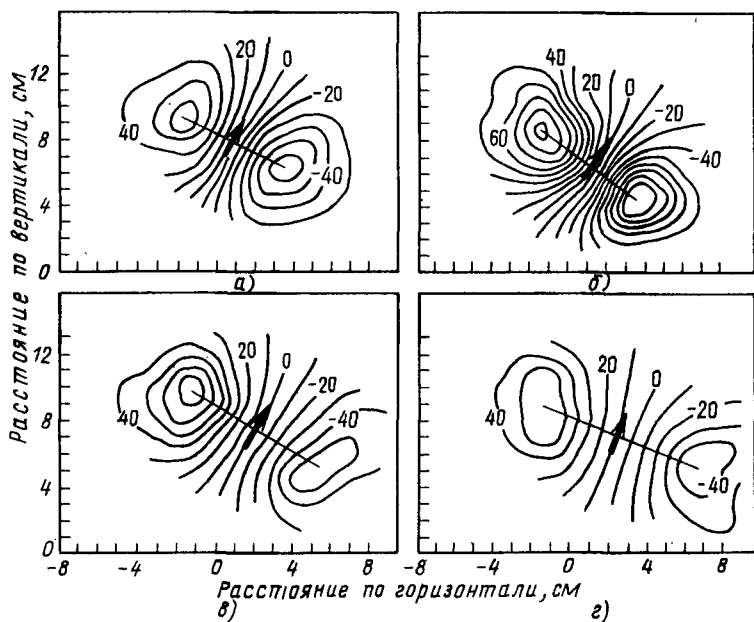
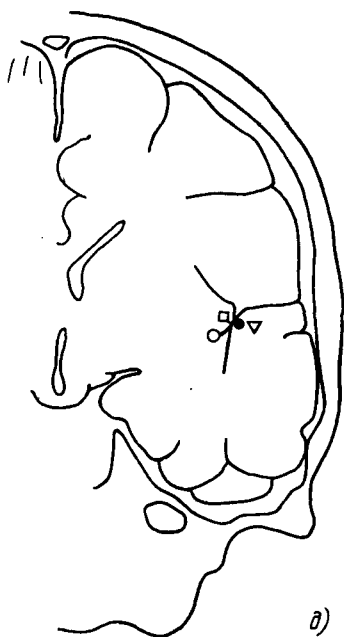


Рис. 2.37. Локализация дипольных генераторов вызванных ответов при слуховой стимуляции сигналами разной частоты [159, с. 379]:

а-г — эквиндукционные карты на правой поверхности головы при стимуляции тонами с частотой 200, 600, 2000 и 5000 Гц соответственно (положительная магнитная индукция направлена наружу, отрицательная — внутрь черепа, значения магнитной индукции у эквиндукционных линий указаны с фемтотеслах, начало координат совпадает с отверстием правого уха, стрелками показаны эквивалентные диполи тока); д — расположение активных областей коры, найденных по эквиндукционным картам для тонов с частотой 200 Гц (∇), 600 Гц ($\bullet$), 2000 Гц ($\square$) и 5000 Гц ($\circ$) в проекции на стандартное фронтальное сечение мозга



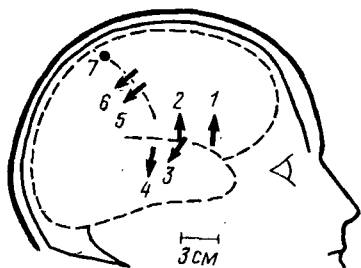


Рис. 2.38. Обобщенные данные о расположении эквивалентных диполей тока при разных типах стимуляции (направление каждой стрелки указывает ориентацию диполя, соответствующую основному отклонению импульса вызванного ответа) [160, с. 29]:

1 — электрическая стимуляция зубной пульпы; 2 — электрическая стимуляция малоберцового нерва (активация соматосенсорной коры *SI*); 3 — стимуляция углекислым газом слизистой оболочки носа; 4 — слуховая стимуляция короткими тоновыми сигналами; 5 — электрическая стимуляция большого пальца; 6 — электрическая стимуляция мизинца; 7 — электрическая стимуляция малоберцового нерва (активация соматосенсорной коры *SI*, диполь направлен вверх перпендикулярно к плоскости рисунка)

ложенным не в поверхностных слоях мозга, а значительно глубже, возможно, в области гиппокампа.

При расширении диапазона задач, решаемых методами магнитометрии, и углубленном изучении магнитного поля мозга становится очевидным, что вышеуказанная расчетная модель "диполь в однородном шаре" далеко не всегда адекватна конфигурации реального биоэлектрического генератора, возникающего в мозге при различных видах его функциональной деятельности. Восприятие относительно сложных зрительных стимулов, обучение, состояние настороженности, речевое возбуждение сопровождаются появлением в мозге довольно сложных генераторов тока, которые могут быть близки по структуре к нескольким диполям, расположенным в разных местах, в том числе и в глубинных областях мозга; они могут быть распределенными в обширных областях мозга и могут изменять свою форму во времени. Иными словами, сложные процессы переработки информации в мозге связаны с образованием сложных систем генераторов, для изучения которых нужно будет использовать адекватные им модели, не сводящиеся к одному диполю [160, с. 24].

Однако даже при сравнительно простых гипотетических структурах генератора могут возникнуть большие (иногда непреодолимые) трудности при попытках определять его параметры по магнитным измерениям. Особенно неблагоприятные условия имеют место, когда искомые генераторы в принципе могут быть расположены в любых местах мозга. Например, один диполь, находящийся в глубине мозга на расстоянии 6 см от поверхности скальпа, создает на этой поверхности магнитное поле, экстремумы которого практически не отличимы от экстремумов магнитного поля двух диполей, удаленных один от другого

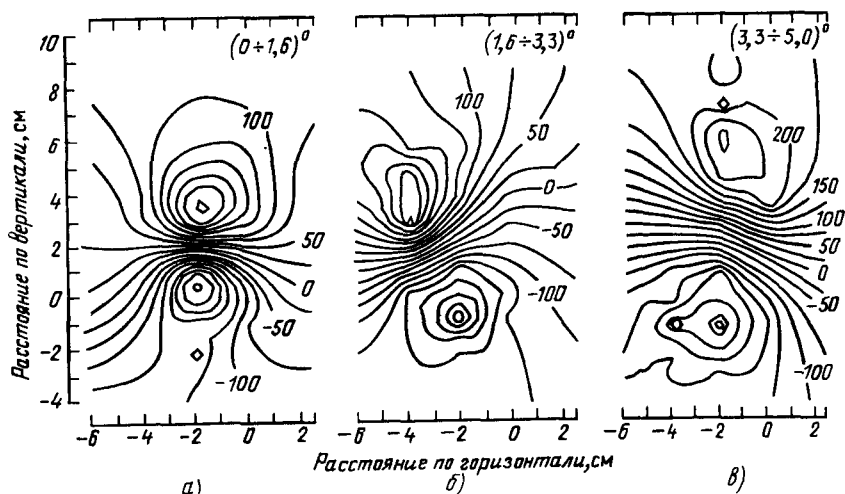
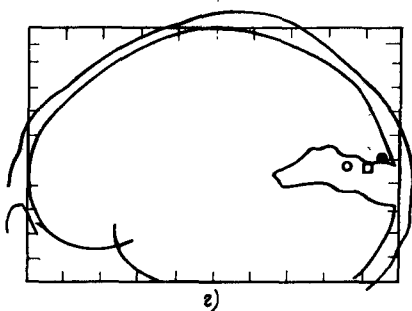


Рис. 2.39. Локализация дипольных генераторов вызванных ответов при зрительной стимуляции с разными эксцентриситетами стимула в виде светящейся решетки [159, с. 379]:

а-в — эквииндукционные карты на поверхности головы при предъявлении решетки в правом полукруге поля зрения с угловым радиусом $1,6^\circ$, в правом полукольце, ограниченном окружностями с угловыми радиусами $1,6^\circ$ и $3,3^\circ$, и в правом полукольце, ограниченном окружностями с угловыми радиусами $3,3^\circ$ и 5° соответственно (положительная магнитная индукция направлена наружу, отрицательная — внутрь черепа, значения магнитной индукции у эквииндукционных линий указаны в фемтотеслах, начало координат совпадает с затылочным бугром); г — расположение активных областей коры, найденных по эквииндукционным картам для стимулов в правом полукруге с радиусом $1,6^\circ$ (●), в правом полукольце с граничными радиусами $1,6^\circ$ и $3,3^\circ$ (□) и в правом полукольце с граничными радиусами $3,3^\circ$ и 5° (○) в проекции на среднесагиттальное сечение мозга



на несколько сантиметров и находящихся на глубине 3 см [159, с. 505]. Неопределенность при нахождении характеристик эквивалентных генераторов может возникнуть и в тех случаях, когда они заведомо находятся в поверхностных слоях коры мозга, но вблизи борозды. Например, на рис. 2.40 иллюстрируются два варианта расположения элементарных генераторов в сенсомоторной зоне коры, которые нельзя различить по измерениям поверхностного магнитного поля.

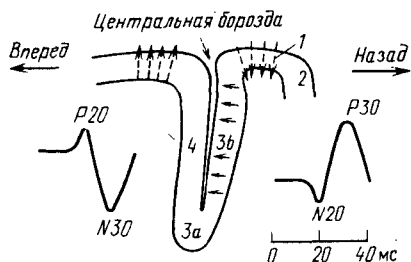


Рис. 2.40. Расположение гипотетических дипольных генераторов в сагиттальном сечении левой сенсомоторной зоны при регистрации комплексов $P20-N30$ и $N20-P30$ вызванных ответов в лобной и теменной частях скальпа соответственно. Тангенциальные дипольные генераторы, расположенные в соматосенсорной зоне 3b задней стенки центральной борозды (сплошные стрелки), могут создавать на поверхности головы такое же

электромагнитное поле, как и радиальные диполи, расположенные в венечной части коры спереди и сзади борозды — в соматосенсорной зоне 1 (пунктирные стрелки) [73, с. 191]

Измерение магнитного поля нерва. Надежное измерение магнитного поля изолированного нерва стало возможным и было осуществлено в 1980 г. Виксво с соавторами благодаря созданию специального датчика с миниатюрной индукционной катушкой [11, 56, 117, 166, 196, 198, 202]. При возбуждении нервной клетки и распространении вдоль аксона импульса в мембране клетки возникают биоэлектрические генераторы, как показано на рис. 2.41, а. Для осесимметричной цилиндрической клетки эти первичные генераторы, направленные внутри мембраны радиально, порождают мембранный, внутриклеточный и внеклеточный токи и соответствующее электромагнитное поле во всем рассматриваемом пространстве. Прохождение возбуждения по нерву сопровождается специфическим однофазным импульсом трансмембранного потенциала, или потенциалом действия, восходящий участок которого характеризует процесс деполяризации нервной клетки, а нисходящий участок — процесс ее реполяризации (в отличие от потенциала действия клеток миокарда этот импульс не имеет фазы плато между участками деполяризации и реполяризации). Например, гигантский аксон лангуста, исследованный экспериментально [73, с. 78; 159, с. 512], имеет потенциал действия с амплитудой около 100 мВ и длительностью около 1 мс, причем при его распространении ширина области деполяризации в пространстве составляет около 3 мм. Поскольку скорость распространения импульса возбуждения вдоль оси клетки можно считать постоянной, в каждый зафиксированный момент времени распределение трансмембранного потенциала вдоль оси клетки будет подобно по форме импульсу потенциала действия во времени. При этом ток внутри аксона, направленный вдоль его оси (осевой ток), пропорционален производной трансмембранного потенциала по направлению оси, и его распределение имеет двухфазную структуру. Магнитное поле клетки имеет осесимметричную форму, его линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности, ось которых совпа-

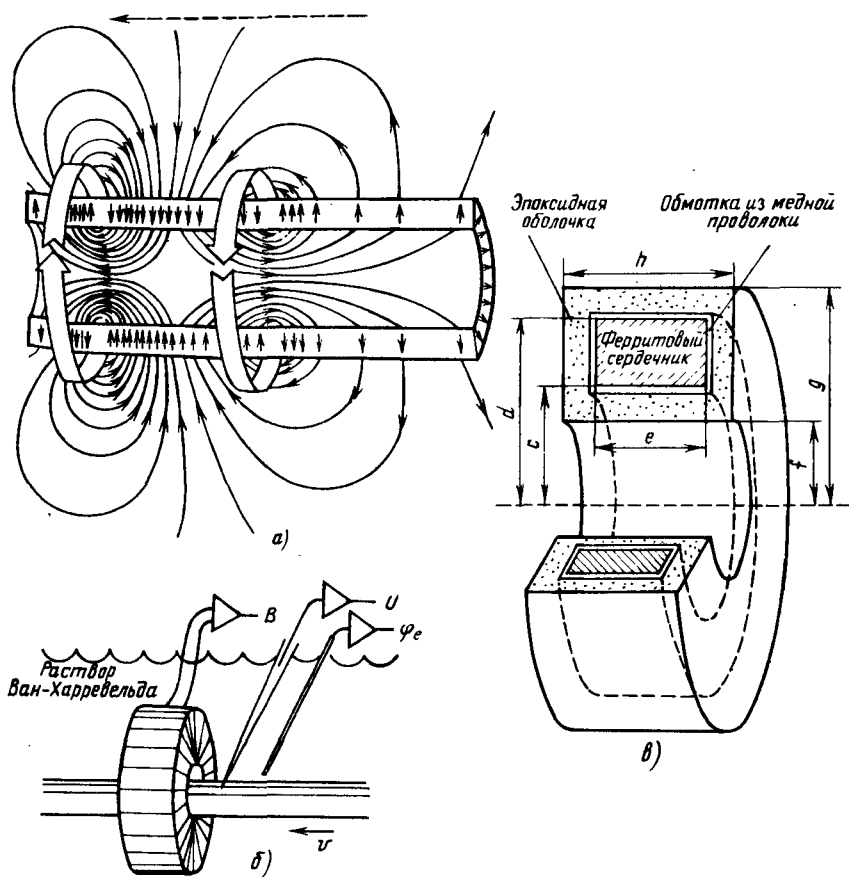


Рис. 2.41. Измерение магнитного поля нервного волокна индукционным датчиком [160, с. 3; 166]:

a — продольное (осевое) сечение аксона, по которому распространяется импульс возбуждения (направление электрических токов показано тонкими линиями со стрелками, направление магнитной индукции — широкими лентообразными стрелками, направление распространения импульса — штриховой стрелкой); b — схема измерения (B , U , φ_e — измеренные значения магнитной индукции, трансмембранного потенциала и внеклеточного потенциала соответственно, v — направление распространения возбуждения); c — конструкция индукционного датчика ($c = 1,05$ мм, $d = 1,95$ мм, $e = 1,25$ мм, $f = 0,75$ мм, $g = 2,25$ мм, $h = 1,90$ мм)

дает с осью клетки. Строго говоря, это магнитное поле определяется токами, протекающими во всем проводящем пространстве.

При рассмотрении внеклеточного поля целесообразно ввести эквивалентные генераторы достаточно простой структуры, причем структура их может быть тем проще, чем дальше от аксона осуществляется измерение. Если место измерения находится на расстоянии от аксона, соизмеримом с пространственной протяженностью потенциала действия, то эквивалентный генератор можно представить в виде линейно распределенного вдоль оси аксона генератора, интенсивность которого пропорциональна осевому току, а для более отдаленной области измерения — в виде двух противоположно направленных осевых диполей тока, характеризующих фазы деполяризации и реполяризации потенциала действия.

При прохождении импульса возбуждения вдоль аксона магнитное поле в тороидальной катушке, охватывающей аксон, пропорционально суммарному току, протекающему через отверстие катушки; этот ток состоит из тока внутри аксона и так называемого возвратного тока, растекающегося в объемном проводнике (обычно физиологическом растворе) вокруг аксона и частично проходящего через отверстие катушки (рис. 2.41, б). При измерениях принимают меры к тому, чтобы свести возвратный ток через тороид к минимуму; тогда магнитное поле в катушке можно считать пропорциональным осевому внутриклеточному току, причем в обмотке катушки наводится ток, пропорциональный производной этого поля по времени. Для получения сигнала, пропорционального магнитному полю и осевому току аксона, необходимо подвергнуть сигнал на выходе тороидальной катушки дополнительной обработке. Измерив магнитное поле при помощи вышеописанного датчика с тороидальной катушкой, можно найти не только осевой внутриклеточный ток, но и трансмембранный потенциал. Для этого разработаны специальные математические модели, описывающие электромагнитное поле возбуждающейся нервной клетки [57, 166, 183]. Эти модели подробно рассмотрены в гл. 3. Исследование электрической активности нервных волокон [56, 198], отдельных аксонов [73, с. 78; 159, с. 512; 160, с.3], а также волокон проводниковой системы сердца [159, с. 368] при помощи магнитометрии обладает определенными преимуществами по сравнению с общепринятыми методами, основанными на непосредственном измерении трансмембранного потенциала. В частности, этот метод не требует повреждения мембраны, которое неизбежно при обычном использовании внутриклеточных микроэлектродов, и позволяет непосредственно определять значение внутриклеточного осевого тока. Примеры экспериментальных записей, полученных при помощи магнитного датчика с тороидальной катушкой, показаны на рис. 2.42.

Описанный метод открывает также возможности диагностической оценки состояния нерва при операциях, связанных с восстановлением

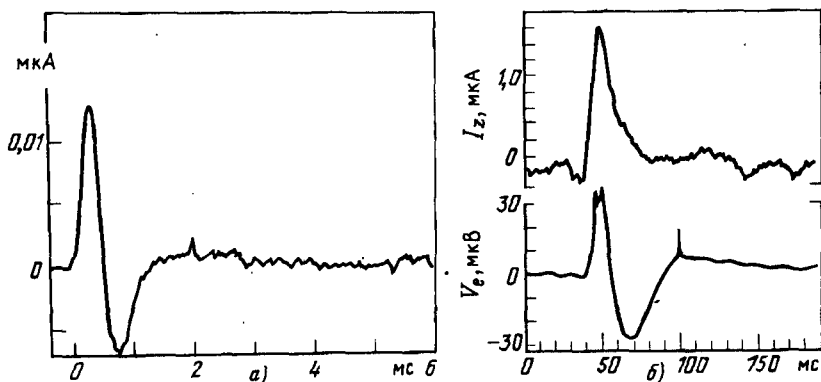


Рис. 2.42. Регистрация внутриклеточного осевого тока (тока действия) при помощи магнитного датчика с тороидальной катушкой, схема которого представлена на рис. 2.41:

a — осредненный импульс тока действия седалищного нерва лягушки [160, с. 3]; *б* — осредненные импульсы тока действия пучка волокон Пуркинье I_z и электрического потенциала, измеренного, внеклеточными электродами, V_e [159, с. 368]

поврежденных нервов (рис. 2.43). Для таких приложений предназначен вариант датчика с разъемной тороидальной катушкой, которую можно надевать на нервное волокно, не нарушая его непрерывность, в любом месте, где необходимо проконтролировать проведение нервного импульса.

Магнитомиограмма. Козн и Гивлер впервые экспериментально показали при помощи сквид-магнитометра, что скелетная мышца создает магнитное поле как постоянное, так и импульсное, которое вблизи поверхности тела (у локтя) может достигать 20 пТл [85].

Скелетные мышцы, как и миокард, относятся к типу поперечно-полосатых и состоят из волокон (клеток), на которых оканчиваются разветвления соответствующего нерва, управляющего состоянием мышцы. В каждой двигательной единице, т.е. совокупности мышечных волокон и иннервирующих их разветвлений аксона определенного двигательного нейрона, мышечные волокна сокращаются почти одновременно под влиянием приходящих по аксону импульсов возбуждения. Механизм генерации и распространения импульса электрического возбуждения в мышечном волокне очень близок к механизму электрического возбуждения нерва (особенно это относится к так называемым быстрым мышечным волокнам). В частности, каждый импульс начинается с локальной деполяризации клеточной мембраны, в результате которой развивается потенциал действия. При этом возникают клеточные генераторы и соответствующее электромагнитное поле в окружающем мышцу пространстве. Плавное сокращение мышцы фактически

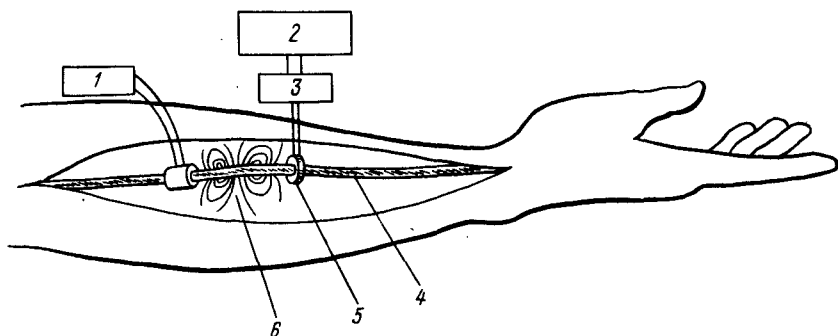


Рис. 2.43. Определение во время операции протяженности поврежденного участка периферического нерва при помощи магнитного датчика с разъемной тороидальной катушкой [160, с. 3]:

1 — электрический стимулятор; 2 — электронное устройство управления магнитным датчиком; 3 — усилитель магнитного датчика; 4 — нерв, погруженный в физиологический раствор; 5 — тороидальная катушка датчика, надетая на нерв при помощи специальной защелки; 6 — импульс возбуждения нерва

ки является результатом суммации действий многих двигательных единиц. Эти действия складываются из последовательности быстрых кратковременных толчков, порождаемых импульсами возбуждения.

Электрические потенциалы, записанные с поверхности тела вблизи сокращающейся мышцы, называют поверхностной электромиограммой (ЭМГ). Поскольку в процесс мышечного сокращения вовлекается одновременно большое число мышечных волокон и пучков, ЭМГ имеет довольно сложную форму и состоит из нерегулярной последовательности импульсов, спектр которой лежит в диапазоне от 10 до нескольких тысяч герц [16, 34].

Аналогичный вид имеет запись магнитного поля мышцы, или магнитомиограмма (ММГ). Было отмечено, что форма спектра ММГ зависит от типа исследуемой мышцы. Например, при измерении в области локтя спектр ММГ имеет максимум вблизи частоты 40 Гц, а при измерении в области ладони — максимум вблизи частоты 80 Гц.

Типичная запись ММГ от передней большеберцовой мышцы показана на рис. 2.44, а. Для оценки формы отдельного импульса применяли метод осреднения, предусматривающий суммирование последовательных импульсов, превышающих заданный уровень амплитуды (предполагается, что эти импульсы идентичны по форме) [159, с. 642]. На осредненной записи, приведенной на рис. 2.44, б, четко виден отдельный импульс; сопоставление его параметров с имеющимися экспериментальными данными о потенциале действия двигательной единицы позволяет заключить, что данный импульс магнитной индукции отражает электрическую активность одной двигательной единицы передней большеберцовой мышцы.

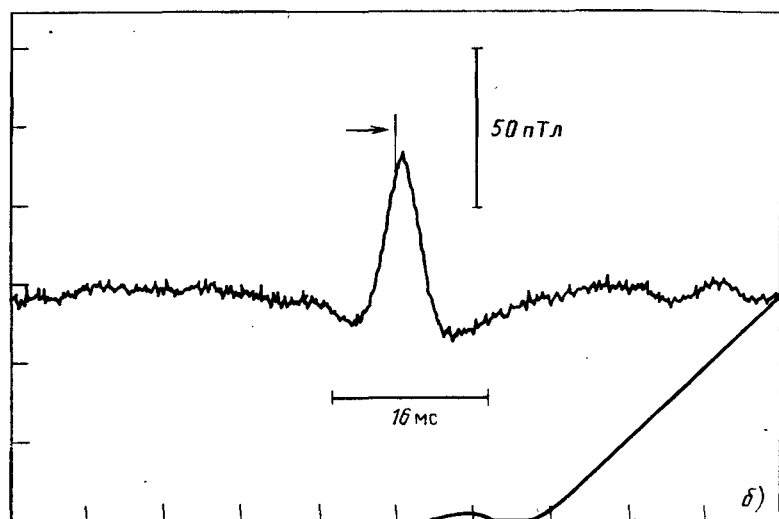
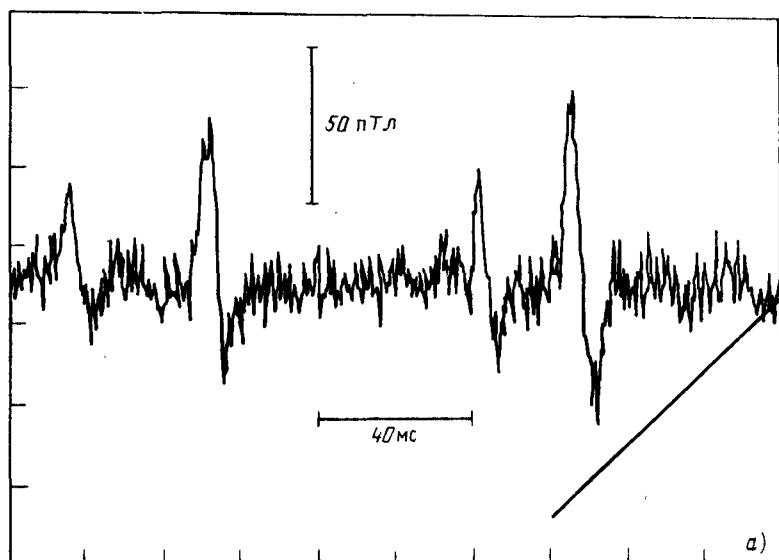


Рис. 2.44. Магнитомиограмма передней большеберцовой мышцы ноги (измеряется компонента магнитной индукции, нормальная к поверхности кожи ноги) [159, с. 642]:

а — типичная последовательность импульсов на записи магнитной индукции при сокращении мышцы; *б* — импульс, полученный в результате осреднения 32 последовательных импульсов ММГ с использованием опорного уровня, показанного стрелкой (острый выброс на записи в этой области является артефактом)

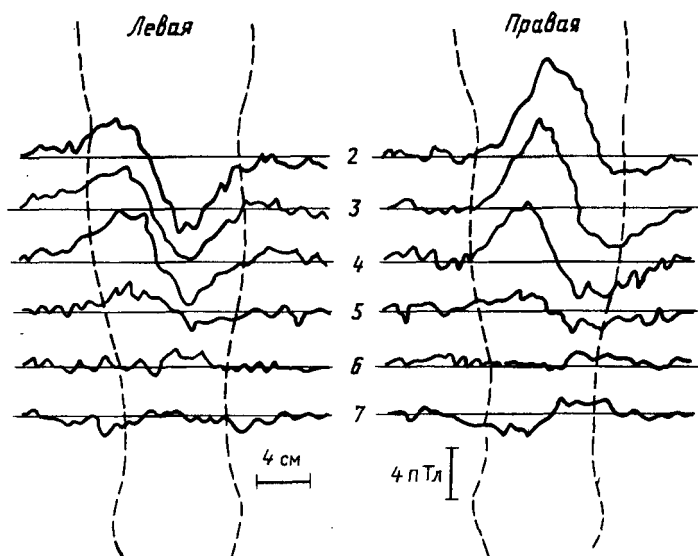


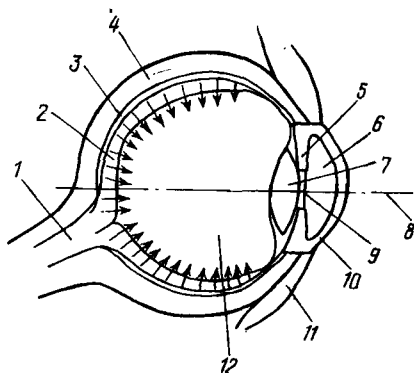
Рис. 2.45. Квазипостоянное магнитное поле мышц ноги. Показано распределение компоненты магнитной индукции, перпендикулярной фронтальной плоскости, вдоль прямых 2–7 в этой плоскости, перпендикулярных продольным осям ног (очертания ног даны штриховыми линиями) [159, с. 650]

Как было отмечено в [91], при сокращении мышцы наряду с магнитным полем импульсного типа возникает квазипостоянное (медленно изменяющееся) магнитное поле, которое постепенно уменьшается в период расслабления мышцы. Такое поле, измеренное у поверхности голени, имеет характерную форму, почти одинаковую у разных испытуемых (рис. 2.45), хотя в количественном отношении наблюдается значительная межиндивидуальная изменчивость [159, с. 650]. Начальные амплитуды магнитной индукции (половина разности между максимальным и минимальным значениями) находились в пределах от 1 до 4 пТл и обычно уменьшались вдвое в течение 30 мин после начала расслабления мышцы.

В качестве эквивалентного генератора, который может создать пространственную форму магнитного поля, близкую к измеренной, было предложено использовать линейно распределенный генератор в виде токов, текущих в противоположных направлениях по двум прямым, расположенным вблизи от продольной оси ноги. В пределе такая структура генератора сводится к линейному диполью тока. По отношению к магнитному полю этот эквивалентный генератор можно рассматривать и как распределение вдоль линий тока фиктивных магнитных диполей, перпендикулярных к этим линиям [120].

Рис. 2.46. Схема глаза человека (стрелками показаны дипольные генераторы сетчатки) [38]:

1 — зрительный нерв; 2 — сетчатка; 3 — сосудистая оболочка; 4 — склера; 5 — радужная оболочка; 6 — водянистая влага; 7 — хрусталик; 8 — оптическая ось; 9 — зрачок; 10 — роговица; 11 — конъюнктура; 12 — стекловидное тело



Квазипостоянное магнитное поле регистрировали не только вблизи конечностей, но и в области желудочно-кишечного тракта, у поверхности головы и в других местах тела. Высказывались предположения, что квазипостоянные электрические и магнитные поля могут быть следствием медленных потоков ионов в жидкостях тела под действием локальных различий в концентрациях [91].

Магнитоокулограмма и магниторетинограмма. Магнитное поле, порождаемое биоэлектрическими генераторами сетчатой оболочки глаза, было впервые зарегистрировано при помощи сквид-магнитометра Карпом с соавторами [134, 205].

Глазное яблоко расположено в глазной орбите и окружено мышечной и жировой тканью, которая имеет, как правило, меньшую удельную электрическую проводимость, чем внутренняя область глаза (рис. 2.46). Сетчатая оболочка, или сетчатка, образует заднюю внутреннюю стенку глазного яблока и состоит в основном из пигментного эпителия и нейросенсорных слоев. В результате биохимических процессов, происходящих в клетках пигментного эпителия, фоторецепторах и некоторых других клетках, в сетчатке протекают токи, т.е. возникают биоэлектрические генераторы, поддерживающие на противоположных сторонах сетчатки разность потенциалов порядка 100 мВ. Интенсивность этих генераторов зависит от условий освещения сетчатки. По своей структуре клеточные генераторы сетчатки близки к диполям, ориентированным по нормали к ее поверхности [6]. Если рассматривается суммарное электромагнитное поле, генерируемое всей сетчаткой в окружающей среде, то в качестве эквивалентного генератора можно рассматривать генераторный двойной слой на поверхности, аппроксимирующей сетчатку. Для приближенных расчетов магнитного поля глаза у поверхности головы иногда используют еще более простой эквивалентный генератор — точечный диполь, расположенный в центре сетчатки [72, с. 341].

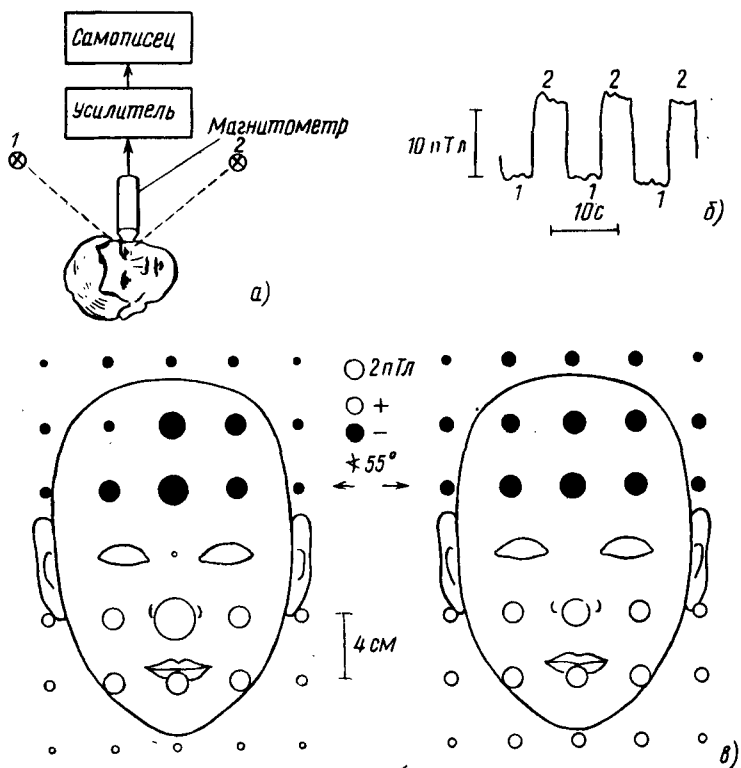


Рис. 2.47. Запись МОГ и соответствующего магнитного поля глаза [72, с. 341]:

а — схема эксперимента; б — пример записи МОГ при попеременном наблюдении испытуемым источников света 1 и 2; в — измеренное (слева) и рассчитанное по теоретической модели (справа) распределения магнитной индукции во фронтальной плоскости у поверхности головы испытуемого при отклонении глаз влево на угол 55° в горизонтальной плоскости (представлена компонента магнитной индукции, перпендикулярная фронтальной плоскости, диаметры кружков пропорциональны ее значению, светлые кружки характеризуют направление магнитной индукции внутрь черепа, черные кружки — наружу)

При движениях глазного яблока вышеуказанные генераторы смещаются, что влечет за собой изменение их электромагнитного поля. Регистрируемые при этом электрические потенциалы на коже вблизи глаза называют электроокулограммой (ЭОГ). Соответственно регистрируемые в этой же области сигналы магнитной индукции можно назвать магнитоокулограммой (МОГ) [134]. На рис. 2.47 приведен пример МОГ и распределения нормальной компоненты магнитной индукции во фронтальной плоскости при отклонении глаз в левую сторону.

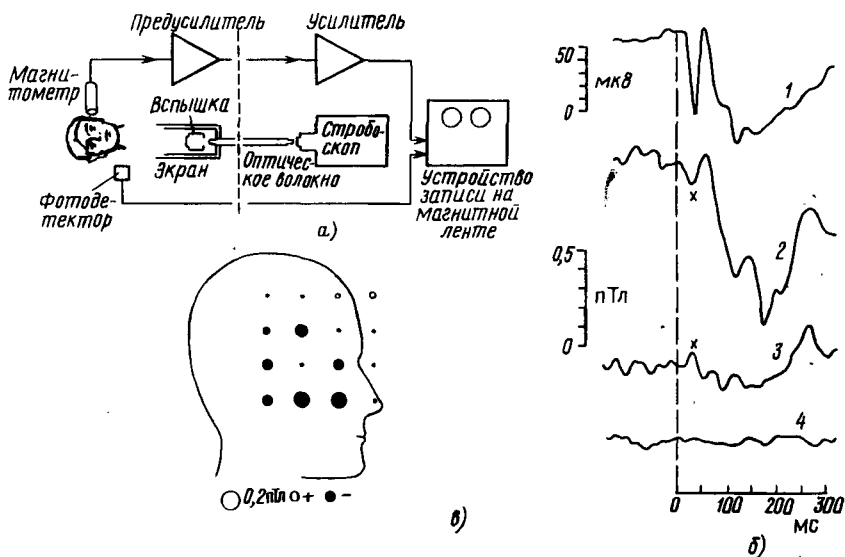


Рис. 2.48. Запись ЭРГ, МРГ и соответствующего магнитного поля глаза [72, с. 341]:

а – схема эксперимента; *б* – осредненные записи (1 – электроретинограмма, записанная при помощи накожных электродов, 2, 3 – магнито ретинограммы, записанные у глазной орбиты и со смещением датчика на 2 см к виску соответственно, 4 – контрольная запись при закрытых глазах, волна *а* отмечена крестиком); *в* – распределение магнитной индукции в сагиттальной плоскости у правой поверхности головы для амплитуды МРГ между волной *а* и следующей за ней волной *б* (обозначения те же, что на рис. 2.47)

При воздействии на глаз кратковременными вспышками света в клетках сетчатой оболочки происходят реакции, сопровождающиеся генерацией токов и соответствующего электромагнитного поля. Сигналы электрического потенциала, отводимые при этом от роговой оболочки глаза (относительно какой-либо удаленной индифферентной точки тела), называются электро ретинограммой (ЭРГ), а соответствующие сигналы магнитной индукции можно назвать магнито ретинограммой (МРГ) [134]. Примеры ЭРГ и МРГ показаны на рис. 2.48. Вследствие того что МРГ имеет очень малую амплитуду (порядка 0,1 пТл), для подавления шума при ее регистрации приходится интенсивно использовать метод осреднения сигналов. При теоретических расчетах магнитного поля глаза в качестве эквивалентного генератора МРГ, как и МОГ, нередко используют один диполь, представляющий суммарную электрическую активность сетчатки.

Как известно, моргание глазом сопровождается электрическими импульсами на поверхности головы. Были зарегистрированы также

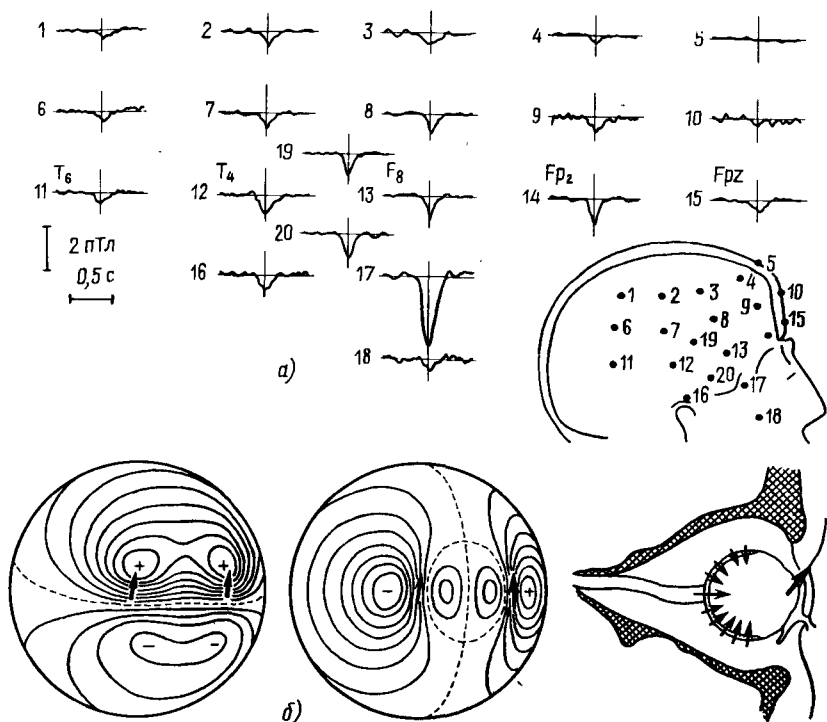


Рис. 2.49. Магнитные сигналы моргания и соответствующее магнитное поле глаза [73, с. 373]:

а — осредненные записи компоненты магнитной индукции, нормальной к поверхности головы, на расстоянии около 2 см от этой поверхности в указанных позициях измерительной сетки (сигналы положительны, если магнитная индукция направлена внутрь черепа, и отрицательны, если она направлена наружу); *б* — вычисленные распределения электрического потенциала (слева) и нормальной компоненты магнитной индукции (в центре) при моргании для модели головы в форме шарового проводника и одной из возможных конфигураций эквивалентного генератора рассматриваемых сигналов — диполя тока в передней верхней части глаза (справа), эквивалентные диполи показаны стрелками, нулевые линии поля — пунктиром

сигналы магнитной индукции при моргании [54; 73, с. 373]. Такие сигналы, записанные у правой поверхности головы, показаны на рис. 2.49, *а*. Согласно гипотезе, высказанной и подтвержденной модельными расчетами в [73, с. 373], эквивалентный генератор этих сигналов скорее всего представляет собой диполь тока, который образуется вследствие того, что при моргании изменяется структура проводника в верхней части глаза, которая закрывается веком. Здесь начинают течь вторичные токи, действие которых можно описать при помощи дополнительного (вторичного) диполя (рис. 2.49, *б*); напомним, что первичным, или истинным, генератором являются токи сетчатки.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БИОМАГНИТОМЕТРИИ

3.1. Общие сведения из электродинамики

Уравнения Максвелла и электродинамические потенциалы. Понятия, используемые в теории электромагнитного поля, или электродинамике, соответствуют физической реальности лишь в той мере, в какой обозначаемые ими объекты, свойства и явления могут наблюдаться (прямо или косвенно) в экспериментах и практической деятельности. Эти понятия, однако, неизбежно содержат некоторый элемент идеализации, поскольку для их количественного описания приходится использовать формальный математический аппарат, в частности математическую теорию поля. Для достижения максимальной степени общности математического описания электродинамических явлений, вплоть до уровня атомов и элементарных частиц материи, с учетом конечности скорости распространения взаимодействий и других уже известных свойств материи, пространства и времени приходится привлекать методы теории относительности и квантовой механики.

Однако при изучении электромагнитных явлений в живой природе размеры объектов, скорости их относительного движения и способы наблюдения (измерения) электромагнитного поля таковы, что для математического описания биоэлектрических и биомagnetных явлений целесообразно применять электродинамику неподвижных сплошных сред, или теорию Максвелла. Она характеризуется как теория феноменологическая, теория макроскопическая и теория близкодействия. Это означает, что не рассматриваются внутренние (в масштабах атомов и элементарных частиц) механизмы возникновения полей и происхождение свойств среды, влияющих на электромагнитные характеристики; рассматриваемые величины представляют собой результат осреднения соответствующих физических величин микроструктурного уровня материи по "физически бесконечно малым" объемам пространства и интервалам времени, т.е. объемам и интервалам, которые очень велики по сравнению с элементами микроструктуры вещества (молекулами, ячейками кристалла) и характерными длительностями внутримолекулярных процессов, но очень малы по сравнению с пространственными и временными изменениями поля и среды, учитываемыми и измеряемыми макроскопическими методами; рассматривается взаимо-

действие между телами через посредство физического поля, причем скорость распространения электромагнитных взаимодействий считается конечной и равной скорости света.

В теории Максвелла электромагнитные явления описываются следующей системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженностей электрического и магнитного полей (эти величины иногда называют просто электрическим и магнитным полем соответственно); $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — векторы электрической и магнитной индукции соответственно; $\mathbf{J}$ — вектор объемной плотности электрического тока (тока проводимости); q — объемная плотность свободных электрических зарядов и t — время.

Дифференциальные уравнения Максвелла дополняются так называемыми материальными уравнениями, которые устанавливают связь между векторами электромагнитного поля и характеристиками среды, в которой существует это поле:

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^*, \quad (3.7)$$

где ϵ_a , μ_a и σ — абсолютная диэлектрическая проницаемость, абсолютная магнитная проницаемость и удельная электрическая проводимость среды соответственно и $\mathbf{J}^*$ — вектор объемной плотности стороннего тока. Для установления связи между величинами, характеризующими электромагнитное поле, с одной стороны, и механическими и термодинамическими величинами, через посредство которых возможно практическое наблюдение электромагнитных явлений, с другой стороны, наряду с вышеприведенными уравнениями используют следующее выражение для объемной плотности энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.8)$$

Заметим, что все входящие в эти уравнения и используемые в

дальнейшем физические величины выражаются в системе единиц МКСА или СИ.

Уточним физический смысл некоторых рассматриваемых величин. Электрический ток — это всякое упорядоченное движение в пространстве свободных зарядов, т.е. электронов и ионов, которые могут отрываться от атомов и молекул и перемещаться между ними. Различают ток проводимости, порождаемый в проводнике действием электрического поля и внешних электродвижущих сил, и так называемый конвективный ток, обусловленный перемещением в пространстве заряженных тел. Под сторонним током здесь понимается та часть общего тока, которая создается силами неэлектрического происхождения, внешними по отношению к рассматриваемой электродинамической системе. Это могут быть, например, концентрационные градиенты ионов в биологических жидкостях и другие силы биохимического происхождения. Можно рассматривать сторонние электродвижущие силы, которые описываются как поле сторонних сил с напряженностью E^* , связанной с плотностью стороннего тока соотношением

$$J^* = \sigma E^*. \quad (3.9)$$

Характеристики электромагнитного поля являются векторными или скалярными функциями времени и точки в пространстве (пространственных координат), а характеристики среды — функциями пространственных координат, не зависящими от времени и от характеристик поля. В дальнейшем изложении предполагается, что среда изотропна, неподвижна и не содержит веществ с особыми физическими свойствами — ферромагнетиков, сегнетоэлектриков и постоянных магнитов, причем характеристики среды — скалярные функции. Вышеприведенную систему уравнений, однако, можно распространить и на более сложные структуры среды, в частности на анизотропную среду, характеристики которой выражаются как тензоры второго ранга.

Абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды при вышеуказанных допущениях выражаются соответственно как

$$\epsilon_a = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (3.10)$$

и

$$\mu_a = \mu_r \mu_0, \quad (3.11)$$

где $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ А} \cdot \text{с} / (\text{В} \cdot \text{м}) = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ и $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ В} \cdot \text{с} / (\text{А} \cdot \text{м}) = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ — электрическая и магнитная проницаемости вакуума соответственно (величины, определяемые принятой системой единиц); ϵ_r и μ_r — соответствующие относительные проницаемости для данной среды — безразмерные величины, не зависящие от системы единиц. Удельная электрическая проводимость — это величина, обратная удельному сопротивлению ρ :

$$\sigma = 1/\rho. \quad (3.12)$$

Основными уравнениями Максвелла (соответственно первым и вторым) считаются уравнения (3.1) и (3.2), два следующих уравнения (часто называемых третьим и четвертым уравнениями Максвелла) могут быть получены из первого и второго при некоторых дополнительных предположениях, отражающих физические ограничения на возможные распределения характеристик электромагнитного поля в пространстве.

Дифференциальные уравнения Максвелла справедливы только для регулярных точек поля, т.е. точек, где характеристики поля (скалярные и векторные) и характеристики среды конечны, непрерывны и имеют непрерывные производные. Однако в задачах электродинамики нередко возникает необходимость учитывать наличие поверхностей, при переходе через которые характеристики поля претерпевают разрыв. Такие разрывы могут быть обусловлены, в частности, поверхностями раздела сред с разными значениями ϵ_a , μ_a и σ , а также присутствием поверхностных (бесконечно тонких) слоев свободных зарядов или токов.

Чтобы получить математические граничные условия для основных векторов электромагнитного поля на поверхностях разрыва, можно рассмотреть слой пространства конечной толщины, в котором все величины изменяются непрерывно, и затем выполнить предельный переход к бесконечно тонкому слою при условии, что уравнения Максвелла (3.1) — (3.4) остаются в силе. В результате получим следующие граничные условия:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_S, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = q_S, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial q_S}{\partial t}, \quad (3.17)$$

где индексами 1 и 2 обозначены соответствующие векторы поля в двух смежных точках на противоположных сторонах поверхности разрыва; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к этой поверхности (здесь и в дальнейшем изложении он считается направленным от точки 1 к точке 2); q_S — поверхностная плотность свободного заряда и $\mathbf{J}_S$ — поверхностная плотность тока на поверхности разрыва. Обозначая индексами n и τ соответственно компоненты векторов по нормали и по любой касательной к этой поверхности, получим из вышеприведенных уравнений:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0, \quad (3.18)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = q_S, \quad (3.19)$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (3.20)$$

$$J_{2n} - J_{1n} = - \frac{\partial q_S}{\partial t}. \quad (3.21)$$

При отсутствии поверхностных токов для напряженности магнитного поля получаем условие, аналогичное (3.18):

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0. \quad (3.22)$$

Система уравнений Максвелла вместе с указанными дополнительными условиями является полной в том смысле, что с ее помощью можно однозначно определить все характеристики электромагнитного поля в любой момент времени и в любой точке заданной области, конечной или бесконечной, если заданы значения векторов электрического и магнитного полей во всех этих точках в начальный момент времени. Для конечной области должны быть дополнительно заданы только тангенциальные компоненты электрического или магнитного полей на поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, для всего рассматриваемого периода времени от начального момента — этим учитывается влияние изменений поля, порождаемых процессами, происходящими вне данной конечной области. Однозначность решения системы уравнений Максвелла сохраняется и при переходе к бесконечному (неограниченному) пространству, если обеспечено достаточно быстрое убывание векторов поля в бесконечности. Последнее условие формулируется математически в виде так называемого условия излучения. Учитывая тот факт, что возмущения электромагнитного поля распространяются в пространстве с конечной скоростью (скоростью света), можно показать, что условия однозначности решения системы уравнений Максвелла выполняются во всех случаях, представляющих практический интерес.

Теория Максвелла является обобщением и формализованным изложением многочисленных эмпирических и экспериментальных наблюдений, а также некоторых более частных закономерностей для электрических и магнитных явлений.

Однако прийти к системе уравнений (3.1) — (3.8) в приведенной выше форме можно разными путями. Подход, который условно назовем индуктивным [2, 5, 42, 50, 122 и др.], заключается в обобщении некоторых соотношений, имеющих более частный характер и найденных при исследовании конкретных электродинамических задач в макроскопических масштабах. Так, первое уравнение Максвелла (3.1) можно получить из закона электромагнитной индукции Фарадея: в любом замкнутом контуре L , находящемся в переменном магнитном поле, возникает электродвижущая сила U , пропорциональная скорости изменения потока магнитной индукции, или просто магнитного потока Φ через поверх-

ность S , ограниченную этим контуром,

$$U = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.23)$$

Учитывая соотношение

$$U = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.24)$$

(здесь применена теорема Стокса, связывающая интеграл от ротора вектора по поверхности S с интегралом от этого вектора по замкнутой линии L , ограничивающей данную поверхность) и определение магнитного потока

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.25)$$

получим

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.26)$$

Поскольку это равенство справедливо для любой замкнутой линии и для всех ограниченных ею поверхностей, из него следует уравнение (3.1) — дифференциальное выражение закона электромагнитной индукции.

Второе уравнение Максвелла (3.2) можно получить из закона полного тока Ампера: линейный интеграл от напряженности магнитного поля вдоль любого замкнутого контура L равен полному току проводимости, проходящему через любую поверхность S , ограниченную этим контуром,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.27)$$

(направление обхода контура и направление нормали к поверхности образуют правовинтовую систему).

Для обеспечения замкнутости цепей любых непостоянных токов к плотности тока проводимости формально добавляется величина $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, называемая плотностью тока смещения. Если к тому же преобразовать левую часть (3.27) по теореме Стокса, то получим

$$\int_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.28)$$

Поскольку это равенство справедливо для любой замкнутой линии

и для всех ограниченных ею поверхностей, из него следует уравнение (3.2) — дифференциальное выражение закона полного тока.

Третье и четвертое уравнения Максвелла (3.3) и (3.4) можно получить из двух первых, учитывая закон сохранения количества электричества, выражаемый уравнением непрерывности электрического тока

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = - \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (3.29)$$

Иначе эти уравнения можно получить из теоремы Гаусса—Остроградского, связывающей интеграл от дивергенции вектора по объему V с интегралом от этого вектора по замкнутой поверхности S , ограничивающей данный объем. Так, для электрического поля

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V q dV \quad (3.30)$$

и для магнитного поля

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.31)$$

Уравнения (3.5) и (3.6) описывают линейную связь между векторами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ соответственно, а (3.7) представляет собой обобщенный закон Ома в дифференциальной форме.

Уравнение (3.8) выражает плотность энергии в каждой точке объема V , в котором существует электромагнитное поле с суммарной энергией

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (3.32)$$

На основании уравнений (3.23), (3.24), (3.27), (3.28), (3.30) и (3.31) можно записать так называемую систему уравнений Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.33)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \frac{d\Psi}{dt}, \quad (3.34)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (3.35)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (3.36)$$

где $\Psi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ — поток электрической индукции через поверх-

ность, ограниченную контуром L ; I — суммарный ток через эту же поверхность и Q — суммарный свободный заряд в объеме, окруженном замкнутой поверхностью S .

Интегральная форма уравнений Максвелла несколько легче трактуется в приложении к практическим задачам по сравнению с дифференциальной формой, так как она записана для конечных областей пространства. Дифференциальная форма более абстрактна с физической точки зрения; в то же время она позволяет выявить целый ряд важных свойств электромагнитного поля и связанных с ним величин, изучение которых позволяет предсказать и количественно описать явления, происходящие в различных конкретных условиях. В частности, уравнения (3.1) — (3.3) показывают, что причинами возникновения и изменения электромагнитного поля можно считать наличие электрических зарядов, их движение и изменения во времени самого поля. Согласно (3.4) поле магнитной индукции $\mathbf{B}$ не имеет источников, т.е. является соленоидальным.

Для удобства анализа уравнений электромагнитного поля вводят вспомогательные величины — потенциалы. В частности, свойство соленоидальности вектора $\mathbf{B}$ позволяет ввести векторный потенциал электромагнитного поля $\mathbf{A}$, определяемый уравнением

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (3.37)$$

причем тождественно выполняется уравнение (3.4). Подстановка (3.37) в первое уравнение Максвелла (3.1) дает

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.38)$$

Таким образом, векторное поле $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ не содержит вихрей, т.е.

является консервативным, или потенциальным. Поэтому его можно выразить как градиент некоторой скалярной функции. В частности, используется скалярный потенциал электромагнитного поля φ , определяемый уравнением

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = - \text{grad } \varphi. \quad (3.39)$$

Из (3.6), (3.37) и (3.39) получаются выражения для электрической и магнитной напряженностей через потенциалы:

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\text{rot } \mathbf{A}}{\mu_0}. \quad (3.41)$$

Следует отметить, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ однозначно определяются заданными потенциалами $\mathbf{A}$ и φ , тогда как потенциалы заданного электромагнитного поля определяются неоднозначно: векторный — с точностью до градиента произвольной функции, а скалярный — с точностью до производной по времени от той же функции. Последнее обстоятельство позволяет выбирать потенциалы так, чтобы они удовлетворяли одному произвольному дополнительному условию. В качестве последнего часто вводят так называемое нормировочное, или калибровочное, соотношение

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu_a \sigma \varphi = 0, \quad (3.42)$$

благодаря которому удастся значительно упростить уравнения для потенциалов при решении конкретных электродинамических задач; можно показать, что это соотношение фактически является следствием уравнения непрерывности (3.29).

Заметим, что наряду с вышеуказанным индуктивным подходом к математическому описанию электромагнитного поля возможен дедуктивный подход [23, 24 и др.]. В качестве исходной величины, характеризующей свойства поля, вводят так называемый 4-потенциал, компонентами которого являются скалярный потенциал φ и три компоненты векторного потенциала $\mathbf{A}$, и рассматривают взаимодействие малой заряженной частицы с электромагнитным полем в континуальном четырехмерном релятивистском пространстве. В результате получается система уравнений Лоренца—Максвелла для "микроскопических" условий, применимая к электромагнитному полю в пустоте с находящимися в нем точечными зарядами. Затем осуществляется осреднение величин, входящих в эти уравнения, по физически бесконечно малым объемам пространства с учетом основных процессов, происходящих в среде под воздействием электромагнитного поля: переноса заряженных частиц (электрического тока), смещения заряженных частиц разных знаков, входящих в электрически нейтральный микроскопический элемент структуры среды (электрическая поляризация среды) и поворота магнитных дипольных моментов частиц среды (магнитная поляризация среды). В результате получается система уравнений (3.1) — (3.8).

Решение уравнений Максвелла для однородной среды и гармонических полей. Допустим, что электромагнитное поле существует в однородной (и изотропной) среде, и получим отдельные уравнения для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Чтобы вывести уравнение для $\mathbf{E}$, нужно выразить величины $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{J}$ в (3.1) и (3.2) через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с помощью (3.5) — (3.7), продифференцировать (3.2) по времени, подставить в него (3.1) и преобразовать, используя соотношение векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}, \quad (3.43)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, и уравнение (3.3).

В результате получаем уравнение для вектора $\mathbf{E}$:

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_a} \text{grad } q + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}^*}{\partial t}. \quad (3.44)$$

Аналогичным образом, однако дифференцируя по времени (3.1) и подставляя в него (3.2), получим уравнение для вектора $\mathbf{H}$:

$$\Delta \mathbf{H} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{J}^*. \quad (3.45)$$

Уравнения (3.44) и (3.45) — это дифференциальные уравнения в частных производных гиперболического типа, описывающие электромагнитное поле, которое возбуждается свободными зарядами и сторонними токами (определяющими правые части уравнений) и распространяется с затуханием в однородной среде общего вида.

Во многих случаях для облегчения анализа электромагнитного поля целесообразно вместо дифференциальных уравнений для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ рассматривать дифференциальные уравнения для вышеприведенных потенциалов $\mathbf{A}$ и φ . Подставим в (3.2) уравнения (3.5), (3.7), (3.40) и (3.41) и преобразуем результат с учетом некоторых известных соотношений векторного анализа и калибровочного соотношения (3.42). В итоге получим следующее уравнение для векторного потенциала $\mathbf{A}$:

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_a \mathbf{J}^*. \quad (3.46)$$

Взяв дивергенцию от (3.39) и преобразовав результат с использованием (3.3), (3.5) и (3.42), получим следующее уравнение для скалярного потенциала φ :

$$\Delta \varphi - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu_a \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{q}{\epsilon_a}. \quad (3.47)$$

Два последних уравнения совпадают по форме левой части с (3.44) и (3.45), однако имеют иные правые части — пропорциональные заряду и стороннему току, а не их производным. Для рассматриваемого изменяющегося электромагнитного поля общего вида между (3.46) и (3.47), как и между (3.44) и (3.45), имеется связь, обусловленная уравнением непрерывности электрического тока (3.29).

Роль основного независимого внешнего воздействия обычно играют сторонние токи, совокупность которых мы будем иногда называть просто генератором. Задать независимо также и заряды в общем слу-

чае нельзя, поскольку заряды связаны с током уравнением непрерывности (3.29), хотя эта зависимость отсутствует для стационарного поля. Часто встречаются задачи, в которых требуется определить электромагнитное поле (его векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$) по заданным характеристикам некоторого независимого процесса, который влияет на поле через посредство стороннего тока с плотностью $\mathbf{J}^*$ (такие задачи относятся к классу прямых электродинамических задач). Возможный путь нахождения решения в этом случае — определение векторного потенциала из (3.46), затем — скалярного потенциала из (3.42) и, наконец, напряженностей поля из (3.40) и (3.41).

Для некоторых конкретных типов среды полученные уравнения для напряженностей и потенциалов упрощаются. Например, для диэлектрика ($\sigma = 0$) уравнения (3.44) — (3.47) принимают соответственно следующий вид:

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_a} \text{grad } q + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}^*}{\partial t}, \quad (3.48)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{J}^*, \quad (3.49)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \mathbf{J}^*, \quad (3.50)$$

$$\Delta \varphi - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{q}{\epsilon_a}, \quad (3.51)$$

а калибровочное соотношение сводится к условию Лоренца:

$$\text{div } \mathbf{A} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.52)$$

Выражения (3.48) — (3.51) имеют вид неоднородного волнового уравнения, или уравнения Даламбера. Если правая часть такого уравнения равна нулю, то его часто называют просто волновым.

При решении многих теоретических и практических задач электродинамики рассматривают электромагнитные поля, характеристики которых изменяются во времени гармонически, причем компоненты всех векторных величин по пространственным осям являются синусоидальными функциями времени. Эти периодические во времени поля можно назвать стационарными в том смысле, что остаются неизменными величины, однозначно определяющие поле в каждой данной точке, — амплитуды и частоты изменения его характеристик. Произвольное волновое поле может быть представлено как сумма гармонических полей. Значительное облегчение математического анализа при этом

достигается благодаря введению комплексных векторных и скалярных величин.

Каждую переменную величину, входящую в уравнения Максвелла, а также электродинамические потенциалы при их гармоническом изменении можно представить как вещественную часть комплексной переменной, которая является произведением комплексной амплитуды (вектора с комплексными компонентами или комплексного скаляра, не зависящего от времени) и функции $e^{j\omega t}$, где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, f — частота и t — время. Например, для электрической напряженности и заряда

$$\underline{E} = \text{Re } \underline{E} e^{j\omega t}, \quad q = \text{Re } \underline{q} e^{j\omega t}, \quad (3.53)$$

где $\underline{E}$ и $\underline{q}$ — векторная и скалярная комплексные амплитуды соответственно. (Иногда представляется более удобным определить периодические величины как мнимую, а не вещественную часть комплексных переменных, и показатель степени e брать с отрицательным знаком; однако это чисто условное различие, не влияющее на результаты анализа.)

Вследствие линейности системы уравнений Максвелла ее можно переписать для гармонически изменяющегося поля, непосредственно заменив все переменные величины соответствующими комплексными переменными, и затем сократить все уравнения на множитель $e^{j\omega t}$. В результате получаются уравнения, связывающие комплексные амплитуды соответствующих величин. При формальном переходе к таким уравнениям исходные уравнения, не содержащие производных по времени, не изменяются, а в уравнениях, содержащих такие производные, нужно заменить операцию дифференцирования умножением на $j\omega$. В частности, уравнения (3.1), (3.2), (3.29), (3.40) и (3.42) принимают соответственный вид

$$\text{rot } \underline{E} = -j\omega \underline{B}, \quad (3.54)$$

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{J} + j\omega \underline{D}, \quad (3.55)$$

$$\text{div } \underline{J} = -j\omega \underline{q}, \quad (3.56)$$

$$\underline{E} = -\text{grad } \underline{\varphi} - j\omega \underline{A}, \quad (3.57)$$

$$\text{div } \underline{A} + j\omega \epsilon_a \mu_a \underline{\varphi} + \mu_a \sigma \underline{\varphi} = 0. \quad (3.58)$$

После решения уравнений относительно комплексных амплитуд можно определить искомые вещественные величины по формулам типа (3.53).

Запишем уравнения для комплексных амплитуд векторного и скалярного потенциалов, соответствующие уравнениям (3.46) и (3.47).

Уравнение (3.46) дает

$$\Delta \underline{A} + (\omega^2 \epsilon_a \mu_a - j\omega \mu_a \sigma) \underline{A} = -\mu_a \underline{J}^*, \quad (3.59)$$

или

$$\Delta \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu_a \underline{J}^*, \quad (3.60)$$

где

$$k^2 = \omega^2 \mu_a \epsilon_c = -j\omega \mu_a \sigma_c, \quad (3.61)$$

$$\epsilon_c = \epsilon_a \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega \epsilon_a} \right), \quad (3.62)$$

$$\sigma_c = \sigma \left(1 + \frac{j\omega \epsilon_a}{\sigma} \right). \quad (3.63)$$

Величину ϵ_c иногда называют комплексной проницаемостью, а величину σ_c — комплексной удельной электрической проводимостью среды.

Аналогичным образом вместо (3.47) получаем

$$\Delta \underline{\varphi} + k^2 \underline{\varphi} = -\frac{q}{\epsilon_a}. \quad (3.64)$$

Уравнения (3.60) и (3.64) — это так называемые уравнения Гельмгольца относительно комплексных амплитуд электродинамических потенциалов $\underline{A}$ и $\underline{\varphi}$ (аналогичные уравнения можно получить и непосредственно для комплексных амплитуд напряженностей $\underline{E}$ и $\underline{H}$).

Если предположить, что среда, в которой существует электромагнитное поле, является однородной и неограниченной во всех направлениях, а сторонние токи (генератор) находятся в некоторой ограниченной области пространства, то решения уравнений Гельмгольца для потенциалов записываются в интегральной форме следующим образом:

$$\underline{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\underline{J}^* e^{-jkR}}{R} dV, \quad (3.65)$$

$$\underline{\varphi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{q e^{-jkR}}{R} dV, \quad (3.66)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ — модуль вектора $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, направленного к заданной точке наблюдения поля с радиус-вектором $\mathbf{r}$ от текущей точки интегрирования с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$. Интегрирование осуществляется по всему неограниченному пространству V .

Чтобы выразить скалярный потенциал, как и векторный, через плотность стороннего тока, сначала найдем выражение для плотности заря-

да, используя (3.56), а также уравнения (3.3), (3.5) и (3.7), записанные для комплексных амплитуд. В результате получаем

$$\underline{q} = - \frac{\epsilon_a}{\sigma + j\omega\epsilon_a} \operatorname{div} \underline{J}^* \quad (3.67)$$

Подстановка этого уравнения в (3.66) дает

$$\underline{\varphi}(\mathbf{r}) = - \frac{1}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon_a)} \int_V \frac{\operatorname{div} \underline{J}^* e^{-jkR}}{R} dV \quad (3.68)$$

или

$$\underline{\varphi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon_a)} \int_V \frac{\underline{W} e^{-jkR}}{R} dV, \quad (3.69)$$

где

$$\underline{W} = - \operatorname{div} \underline{J}^* \quad (3.70)$$

— комплексная амплитуда плотности источников тока.

Таким образом, в однородной среде каждая точка области генератора (области, где не равен нулю сторонний ток) создает сферическую волну, распространяющуюся с убывающей амплитудой. При этом потенциалы A и φ , соответствующие каждой точке генератора, распространяются во всех направлениях со скоростью $c/\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$ (где c — скорость света в вакууме) и с амплитудой, изменяющейся обратно пропорционально расстоянию R .

Рассмотренные здесь математические соотношения получены с учетом ряда упрощающих допущений, касающихся в основном свойств физической среды. Тем не менее при решении конкретных электродинамических задач применение этих соотношений в полном объеме приводит к довольно сложным уравнениям, иногда слишком трудным для анализа. Поэтому в каждом конкретном приложении электродинамики желательно с самого начала подробно оценить условия измерения и свойства исследуемых объектов, с тем чтобы по возможности внести дальнейшие упрощения в исходное математическое описание, в то же время не снижая реально достижимую и требуемую точность анализа. Ниже будут рассмотрены возможности упрощения математических соотношений с учетом особенностей биоэлектрических и биоманнитных измерений, а также характеристик биологических материалов.

Переход к уравнениям электродинамики стационарных токов. Основные условия измерения электрических и магнитных полей биологических объектов и характеристики биологических тканей и жидкостей были обсуждены в § 1.1.

Прежде всего заметим, что, поскольку относительные магнитные проницаемости биологических материалов отличаются от единицы

не больше чем на 10^{-5} , в уравнениях электромагнитного поля, используемых при исследовании биоэлектрических процессов, можно положить абсолютную магнитную проницаемость μ_a всегда равной магнитной проницаемости вакуума μ_0 .

Далее с учётом результатов исследований [35, 93, 111, 154] рассмотрим другие факторы, пренебрежение которыми при анализе биоэлектрических и биомангнитных полей позволяет упростить общие уравнения электродинамики.

Тело человека и животных состоит в основном из хорошо проводящих электрический ток тканей и жидкостей, оно неоднородно, занимает ограниченную область пространства и окружено диэлектрической средой — воздухом. Тем не менее для приближенной оценки влияния на характеристики поля диэлектрических свойств проводящей среды (емкостных эффектов) и конечной скорости распространения поля можно воспользоваться уравнениями (3.65) и (3.68), полученными для однородной среды общего вида.

Емкостные эффекты приводят к фазовому сдвигу между изменениями компонент векторов генератора (плотности стороннего тока) и его электрического поля, а также к изменениям амплитуды скалярного потенциала по сравнению с условиями "чисто резистивной" среды. Под такой средой подразумевается проводник, у которого комплексная удельная электрическая проводимость σ_c практически совпадает с удельной электрической проводимостью σ , т.е. можно пренебречь значением второго члена в скобках правой части (3.63) по сравнению с единицей $\left(\left| \frac{j\omega\epsilon_a}{\sigma} \right| \ll 1 \right)$. Из упомянутых в § 1.1 однородных биологических материалов (кроме костной ткани) наибольшее значение отношения $\omega\epsilon_a/\sigma = 2\pi f\epsilon_r\epsilon_0/\sigma$ имеет вещество мозга, для которого $\epsilon_r \approx 90$ и $\sigma \approx 0,15$ См/м. В этом случае при максимальной частоте изменения интенсивности биоэлектрического генератора $f \approx 1000$ Гц получаем $\left[\frac{\omega\epsilon_a}{\sigma} \right]_{\max} \approx 0,3 \cdot 10^{-4}$ и соответствующий фазовый сдвиг $\left[\arctg \frac{\omega\epsilon_a}{\sigma} \right]_{\max} \approx (1,7 \cdot 10^{-3})^\circ$, т.е. такие значения величин, что ими вполне можно пренебречь.

Однако для макроскопических участков ткани, имеющей сложную клеточную структуру, на результаты измерений влияют эффективные, или локально осредненные значения диэлектрической проницаемости и удельной электрической проводимости, приведенные в табл. 1.1. Эффективные значения диэлектрической проницаемости ткани значительно больше истинных значений для отдельных элементов ткани в связи с тем, что в ткани распределены микроскопические участки с ма-

лой удельной электрической проводимостью (например, клеточные мембраны); это эквивалентно распределенной емкости. Из табл. 1.1 видно, что для получения несколько завышенной оценки максимального эффективного отношения $\omega\epsilon_a/\sigma$ можно положить $f\epsilon_r = 3 \cdot 10^8$ Гц и $\sigma = 0,22$ См/м. Тогда $[\omega\epsilon_a/\sigma]_{\max} \approx 0,09$ и соответствующий фазовый сдвиг $\left[\arctg \frac{\omega\epsilon_a}{\sigma} \right]_{\max} \approx 5^\circ$. Для подавляющего большинства

практических задач анализа биоэлектрических и биоманнитных полей этими величинами можно пренебречь и рассматривать биологические ткани как чисто резистивных.

Эффект конечной скорости распространения поля от области генератора до точки наблюдения характеризуется величиной e^{-jkR} , которую можно разложить в ряд

$$e^{-jkR} = 1 - jkR - \frac{k^2 R^2}{2} + j \frac{k^3 R^3}{6} + \dots \quad (3.71)$$

Ошибки, вносимые в (3.65) и (3.68) при пренебрежении конечностью скорости распространения поля, определяются соответственно значениями второго и третьего членов этого разложения. Второй член не является существенным для (3.68), так как его подстановка в это уравнение дает величину, пропорциональную суммарной интенсивности источников тока во всем пространстве и, следовательно, равную нулю. Учитывая вышеприведенную оценку значения μ_a и емкостных эффектов, запишем вместо (3.61)

$$k^2 = -j\omega\mu_0\sigma. \quad (3.72)$$

Отсюда

$$k = \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma} (1 - j). \quad (3.73)$$

Максимальное влияние эффекта конечной скорости распространения поля для биологических объектов оценим, полагая $f = 1000$ Гц, $\sigma = 0,5$ См/м и $R = 1$ м; в результате получаем: $|kR|_{\max} \approx 0,06$; $[\arctg R \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}]_{\max} \approx 2,5^\circ$; $|k^2 R^2/2|_{\max} \approx 0,002$; $[\arctg R^2 \pi f \mu_0 \sigma]_{\max} \approx 0,1^\circ$. Таким образом, рассматриваемый фактор определяет до 6 % векторного потенциала и меньше 1 % скалярного потенциала при соответствующих незначительных фазовых сдвигах. Этими величинами при исследовании электромагнитного поля биологических объектов почти всегда можно пренебречь.

Индуктивные эффекты, обусловленные влиянием изменяющегося магнитного поля на электрическую напряженность в соответствии с (3.40), можно охарактеризовать значением второго члена правой части (3.57) по отношению к значению первого члена $\frac{|\omega \underline{A}|}{|\text{grad } \varphi|}$. Сопостав-

ление этих величин затрудняется тем, что они существенно зависят от пространственной конфигурации генератора. Учитывая, что в биологических объектах обычно не возникают генераторы типа замкнутых контуров стороннего тока, при наличии которых магнитная составляющая поля имеет более резко выраженный характер по сравнению с электрической, можно в грубом приближении считать, что искомая оценка для генератора в целом совпадает с оценкой для его дифференциального элемента $\underline{J}^* \delta V$. Согласно (3.65) с учетом вышеуказанных упрощений векторный потенциал для этого элементарного генератора

$$\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \underline{J}^* \delta V. \quad (3.74)$$

Подставляя это уравнение в калибровочное соотношение (3.58), получим после соответствующих преобразований

$$\underline{\varphi} = - \frac{j\omega\mu_0 R \cdot \underline{J}^*}{4\pi k^2 R^3} \delta V, \quad (3.75)$$

где $\underline{R}$ — вектор, проведенный в точку наблюдения из точки расположения генератора. Выберем декартову систему координат x, y, z , начало которой совпадает с расположением генератора, а ось z ориентирована по направлению вектора $\underline{J}^* \delta V$. Тогда (3.75) дает

$$\underline{\varphi} = - \frac{j\omega\mu_0 z}{4\pi k^2 R^3} \underline{J}^* \delta V. \quad (3.76)$$

Вследствие симметрии электрического поля рассматриваемого элементарного генератора относительно оси z легко вычислить его градиент для точек наблюдения, расположенных на оси z или в координатной плоскости xOy (проходящей через генератор). В первом случае

$$\text{grad}_z \underline{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{x=0, y=0} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi k^2 R^3} \underline{J}^* \delta V \quad (3.77)$$

и во втором случае

$$\text{grad}_z \underline{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{j\omega\mu_0}{4\pi k^2 R^3} \underline{J}^* \delta V. \quad (3.78)$$

Для получения искомой оценки используем меньшую из этих величин, определяемую последним уравнением. Уравнения (3.74) и (3.78) дают

$$\left[\frac{|\omega \underline{A}|}{|\text{grad}_z \underline{\varphi}|} \right]_{\max} = \left[\frac{\omega \underline{A}}{\text{grad}_z \underline{\varphi}} \right]_{\max} = |k^2 R^2|_{\max}. \quad (3.79)$$

Таким образом, условие пренебрежения индуктивными эффектами практически совпадает с условием пренебрежения конечностью скорости распространения поля, которое, как было показано выше, для биологических объектов выполняется с достаточной точностью.

К оценке влияния индуктивных эффектов, или самоиндукции, можно подойти иначе, взяв за основу закон Фарадея (3.23) и экспериментальные данные о средней магнитной напряженности биоэлектрических источников в теле [35]. Записав (3.23) — (3.25) для комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля, получим из них следующее выражение для напряженности электрического поля, возникающего в круговом контуре с радиусом r_0 при пересечении ограниченной им поверхности переменным магнитным полем с равномерно распределенной индукцией:

$$\underline{E} = -j\pi f r_0 \underline{B}, \quad (3.80)$$

где $\underline{E}$ — компонента электрического поля в направлении контура и $\underline{B}$ — нормальная компонента магнитной индукции в плоскости контура.

Рассмотрим для примера одно из наиболее сильных биоманнитных полей, а именно магнитное поле сердца. Подставим в последнюю формулу явно завышенные абсолютные величины входящих в нее переменных для условий кардиомагнитных измерений: $|\underline{B}| = 500 \text{ пТл} = 5 \times 10^{-10} \text{ (В} \cdot \text{с)}/\text{м}^2$, $r_0 = 1 \text{ м}$ и $f = 1000 \text{ Гц}$. Для абсолютной величины наведенного в теле электрического поля получим $|\underline{E}|_{\text{max}} \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ В/м}$. В то же время максимальное значение напряженности электрического поля сердца, обычно измеряемого в эксперименте, оценивается как $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ В/м}$. Сравнение этих оценок подтверждает возможность пренебрежения индуктивными эффектами.

Рассмотрим емкостные эффекты, которые могут возникнуть в связи с наличием в среде поверхностей раздела между макроскопическими областями, проводящими и не проводящими электрический ток. Общее граничное условие для границы двух областей среды с разными характеристиками найдем из уравнений (3.19) и (3.21), записанных для комплексных амплитуд с учетом (3.5) и (3.7):

$$\sigma_1 \left(1 + \frac{j\omega\epsilon_{a1}}{\sigma_1} \right) \underline{E}_{1n} = \sigma_2 \left(1 + \frac{j\omega\epsilon_{a2}}{\sigma_2} \right) \underline{E}_{2n}. \quad (3.81)$$

Как было показано выше, для биологических сред вторым членом в скобках можно пренебречь по сравнению с 1. В частном случае, когда биологический объект соприкасается с диэлектрической (непроводящей) средой, например с воздухом (это типичные условия для электрофизиологического исследования *in situ*), и для этой области (обозначаемой индексом 2) нужно положить $\sigma_2 = 0$, условие (3.81) принимает

вид

$$\left(1 + \frac{j\omega\epsilon_{a1}}{\sigma_1}\right) \underline{E}_{1n} = \frac{j\omega\epsilon_{a2}}{\sigma_1} \underline{E}_{2n}. \quad (3.82)$$

При типичных значениях $f = 1000$ Гц и $\sigma = 0,22$ См/м, положив диэлектрическую проницаемость воздуха равной диэлектрической проницаемости вакуума, получим $[\omega\epsilon_{a2}/\sigma_1] \approx 2,5 \cdot 10^{-7}$. Поскольку значение $\underline{E}_{2n}$ не превышает максимальную амплитуду электрического поля исследуемого биологического объекта, значение $\underline{E}_{1n}$ оказывается пренебрежимо малым, т.е. нормальную компоненту электрического поля на внутренней стороне поверхности биологического объекта, окруженного воздухом, можно считать равной нулю.

Итак, проведенный анализ показывает, что при исследовании электромагнитного поля биологических объектов в дифференциальных уравнениях электродинамики (уравнениях Максвелла и уравнениях для потенциалов) члены с производными по времени оказывают несущественное влияние на характеристики поля, поэтому при решении прикладных задач ими можно пренебречь. Это означает переход к так называемым квазистатическим условиям, или к электродинамике стационарных токов. Все дальнейшие рассуждения будут проведены на основе соотношений электродинамики стационарных токов. Теперь первое и второе уравнения Максвелла принимают соответственно следующий вид:

$$\text{rot } \underline{E} = 0, \quad (3.83)$$

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{J}, \quad (3.84)$$

а вместо (3.40) имеем следующее соотношение между электрической напряженностью и скалярным потенциалом, не зависящее от векторного потенциала:

$$\underline{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (3.85)$$

Принимая во внимание, что исследуемые биологические объекты (в частности, тело человека и животных) имеют "компарментальную" структуру, можно допустить, что физическая среда, в которой существует электромагнитное поле, является кусочно-однородной, т.е. состоит из небольшого числа однородных областей с разными значениями ϵ_a и σ , разделенных граничными поверхностями (значение μ_a обычно считается постоянным и равным μ_0 для всего пространства). В качестве одной из таких областей рассматривается окружающая тело диэлектрическая среда (воздух), для которой $\sigma = 0$.

Запишем некоторые дополнительные уравнения, поясняющие свойства электромагнитного поля стационарных токов в однородных областях кусочно-однородной среды. Применяя к обеим частям (3.84) опера-

цию дивергенции, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (3.86)$$

а подстановка (3.6) в (3.4) дает

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (3.87)$$

Подставляя (3.5) в (3.3) и учитывая (3.7) и (3.86), находим

$$q = - \frac{\epsilon_a}{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{J}^* = \frac{\epsilon_a}{\sigma} W, \quad (3.88)$$

где

$$W = -\operatorname{div} \mathbf{J}^* \quad (3.89)$$

— плотность источников тока. Таким образом, в проводящих областях пространства можно рассматривать эквивалентную электростатическую задачу, в которой величина, выражаемая уравнением (3.88), играет роль плотности источников, а среда является диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_a .

Там, где отсутствуют токи (в частности, в диэлектрической среде вокруг биологического объекта), $\mathbf{J} = 0$ и из (3.84) следует

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (3.90)$$

Уравнения (3.83), (3.86) и (3.87) показывают, что во всем пространстве электрическое поле не содержит вихрей, т.е. является потенциальным, тогда как магнитное поле $\mathbf{H}$ и поле полной плотности тока $\mathbf{J}$ не содержат источников, т.е. являются соленоидальными. Кроме того, согласно (3.90) в областях с нулевой плотностью тока магнитное поле $\mathbf{H}$ (и поле магнитной индукции $\mathbf{B}$) не содержит вихрей, что позволяет ввести по аналогии с (3.85) скалярный потенциал магнитного поля, или скалярный магнитный потенциал φ^M , определяемый уравнением

$$\mathbf{B} = -\operatorname{grad} \varphi^M. \quad (3.91)$$

Чтобы при исследовании потенциального магнитного поля в полной мере использовать аналогию с электрическим полем, вводят понятие фиктивного магнитного генератора, заменяющего действительно существующие токи в проводящих областях (по отношению к скалярному магнитному потенциалу, определенному только для областей, где токи отсутствуют). Этот генератор описывается вектором магнетизации

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{J}, \quad (3.92)$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор данной точки проводника в произвольно выбранной системе координат. Соответствующая плотность фиктивных магнитных источников выражается уравнением, аналогичным

(3.89):

$$W^M = -\operatorname{div} \mathfrak{M}. \quad (3.93)$$

Для условия стационарных токов калибровочное соотношение (3.42) принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu_0 \sigma \varphi = 0. \quad (3.94)$$

Уравнения для потенциалов (3.46) и (3.47) с учетом (3.88) записываются как

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}^* \quad (3.95)$$

и

$$\Delta \varphi = \frac{\operatorname{div} \mathbf{J}^*}{\sigma} = -\frac{W}{\sigma}, \quad (3.96)$$

т.е. в виде уравнений Пуассона, соответственно векторного и скалярного. В областях, где отсутствуют сторонние токи ($\mathbf{J}^* = 0$), эти уравнения сводятся к векторному и скалярному уравнениям Лапласа соответственно:

$$\Delta \mathbf{A} = 0 \quad (3.97)$$

и

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3.98)$$

В безвихревых областях магнитного поля (где $\mathbf{J} = 0$) для скалярного магнитного потенциала также можно получить уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi^M = 0. \quad (3.99)$$

Для среды с наиболее простой структурой — однородного, изотропного и неограниченного во всех направлениях объемного проводника — решения уравнений Пуассона и Лапласа для потенциалов известны, они могут быть получены, в частности, путем соответствующих упрощений из (3.65), (3.68) и (3.69):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}^*}{R} dV, \quad (3.100)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{J}^*}{R} dV = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \frac{W}{R} dV. \quad (3.101)$$

Аналогично для скалярного магнитного потенциала

$$\varphi^M(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{W^M}{R} dV \quad (3.102)$$

(здесь имеется в виду среда, однородная в отношении магнитной проницаемости и содержащая как проводящие, так и непроводящие области).

Поскольку при исследовании магнитного поля (в отличие от электрического) обычно измеряют не потенциал (векторный или скалярный), а магнитную индукцию (или напряженность магнитного поля), представляет интерес выражение для магнитной индукции, обусловленной заданным генератором $\mathbf{J}^*$. Для того чтобы получить это выражение, а также некоторые другие полезные соотношения, потребуются следующие соотношения из векторного анализа:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{J}^*}{R} \right) = \frac{\operatorname{div} \mathbf{J}^*}{R} + \mathbf{J}^* \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \right), \quad (3.103)$$

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{J}^*}{R} \right) = \frac{\operatorname{rot} \mathbf{J}^*}{R} - \mathbf{J}^* \times \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \right), \quad (3.104)$$

$$\int_V \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{J}^*}{R} \right) dV = \oint_S \frac{1}{R} \mathbf{J}^* \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.105)$$

$$\int_V \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{J}^*}{R} \right) dV = - \oint_S \frac{1}{R} \mathbf{J}^* \times d\mathbf{S}, \quad (3.106)$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая область пространства V .

Подставим (3.100) в (3.37), преобразуем подынтегральное выражение при помощи (3.104) и учтем, что операция ротора выполняется по координатам точки наблюдения. Тогда первый член подынтегральной суммы обратится в нуль, и для магнитной индукции получим выражение

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}^* \times \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV \quad (3.107)$$

(индекс r_0 указывает, что операция градиента выполняется по координатам текущей точки в области генератора).

Преобразуем последнее уравнение при помощи (3.104) и (3.106), принимая во внимание, что все пространственные производные берутся по координатам текущей точки в области генератора. Если генератор $\mathbf{J}^*$ занимает конечную область пространства, то поверхность S всегда можно выбрать так, чтобы интегралы в (3.106) обратились в нуль. В итоге получаем для магнитной индукции

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot} \mathbf{J}^*}{R} dV. \quad (3.108)$$

Преобразование (3.101) при помощи (3.103) и (3.105) дает для электрического потенциала

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV. \quad (3.109)$$

Вместе с тем для магнитной индукции можно получить векторное уравнение Пуассона, исходя из (3.84) и (3.6) и учитывая векторное соотношение

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B}, \quad (3.110)$$

в котором первый член правой части равен нулю в соответствии с (3.4). В результате получается уравнение

$$\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \text{rot } \mathbf{J}, \quad (3.111)$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{J}}{R} dV. \quad (3.112)$$

Аналогично (3.107) для этих условий можно получить выражение

$$-\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J} \times \text{grad}_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV. \quad (3.113)$$

Сопоставление последних двух уравнений с (3.108) и (3.107) показывает, что в общем случае магнитное поле определяется полной плотностью тока $\mathbf{J}$, тогда как для однородного неограниченного проводника оно определяется только плотностью стороннего тока $\mathbf{J}^*$, так как магнитное поле токов, обусловленных электрическим полем (кулоновской составляющей полного тока), оказывается равным нулю.

Приведенные выше уравнения справедливы для генератора фактически любой структуры, т.е. на генератор в виде векторного поля объемной плотности стороннего тока $\mathbf{J}^*$ не были наложены какие-либо существенные ограничения. При этом, как показывают уравнения (3.101) и (3.108), в однородной среде электрическое и магнитное поля определяются возбудителями поля генератора двух видов — источниками ($\text{div } \mathbf{J}^*$) и вихрями ($\text{rot } \mathbf{J}^*$) соответственно, которые являются математически независимыми (более подробно вопрос об их зависимости обсужден в конце этого параграфа).

При решении электродинамических задач, однако, нередко используются идеализированные конфигурации (структуры) генератора, его возбудителей и полной плотности тока, облегчающие математическое описание конкретных объектов исследуемой электродинамической системы. К таким конфигурациям относятся поверхностно распределенные (поверхностные), линейно распределенные (линейные) и точеч-

ные генераторы или возбудители. Ниже рассмотрены наиболее важные из них.

Источник тока, распределенный по некоторой поверхности S , называют простым слоем источников тока, а его интенсивность выражают поверхностной плотностью источников W_S . По аналогии с (3.101) можно получить следующее выражение для электрического потенциала простого слоя источников тока в однородной неограниченной среде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_S \frac{W_S}{R} dS, \quad (3.114)$$

где dS — элементарная площадь поверхности простого слоя.

Поверхностный источник другого типа, называемый двойным слоем источников тока, получается в результате предельного перехода при сближении двух параллельных простых слоев с равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку плотностями источников в смежных точках. При этом расстояние между слоями стремится к нулю, плотность источников стремится к бесконечности, а произведение плотности на расстояние остается постоянным и характеризует интенсивность результирующего двойного слоя. Это произведение называется поверхностной плотностью дипольного момента, мощностью или моментом двойного слоя источников. Используя (3.114) для каждого из исходных простых слоев, получим в результате указанного предельного перехода следующее выражение для электрического потенциала двойного слоя источников с мощностью D_S :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\sigma} \int_S D_S \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \int_S D_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS, \end{aligned} \quad (3.115)$$

где $d\mathbf{S}$ — векторная элементарная площадь поверхности двойного слоя и $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по единичной нормали к этой поверхности n , направленной от отрицательной к положительной стороне двойного слоя. Телесный, или пространственный, угол, под которым видна поверхность S из точки наблюдения, определяется как

$$\Omega = - \int_S \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS, \quad (3.116)$$

где

$$d\Omega = - \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS$$

— элементарный телесный угол (его значение положительно, когда единичная нормаль к поверхности S направлена от точки наблюдения). Теперь (3.115) можно записать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_S D_S d\Omega, \quad (3.117)$$

и для равномерного двойного слоя (величина D_S постоянна по всей поверхности S)

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{D_S}{4\pi\sigma} \Omega, \quad (3.118)$$

откуда следует, что замкнутый равномерный двойной слой источников тока не создает во внешнем пространстве электрического поля.

Простой и двойной слои источников тока обладают следующими важными свойствами: при переходе через поверхность простого слоя компонента электрической напряженности, нормальная к этой поверхности, претерпевает разрыв, а электрический потенциал изменяется непрерывно; при переходе через поверхность двойного слоя, наоборот, электрический потенциал претерпевает разрыв, а электрическая напряженность изменяется непрерывно.

По аналогии с поверхностными источниками электрического тока (напомним, что они с точностью до знака совпадают с источниками поля генератора, или плотности стороннего тока $\mathbf{J}^*$), можно рассмотреть поверхностные вихри плотности стороннего тока. Если на некоторой поверхности S распределены вихри, направленные тангенциально к этой поверхности и имеющие поверхностную плотность G_S , то для магнитной индукции такого "простого слоя" вихрей стороннего тока по аналогии с (3.108) получим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{G}_S}{R} dS. \quad (3.119)$$

Можно сформулировать поверхностную структуру вихрей, подобную двойному слою источников тока. Для этого рассматриваются два параллельных "простых слоя" вихрей с равными по абсолютной величине, но противоположными по знаку плотностями вихрей в смежных точках, и выполняется предельный переход при сближении этих "простых слоев" аналогично тому, как это было сделано для двойного слоя источников. При этом остается постоянным векторное произведение вектора расстояния между слоями, направленного наружу от результирующего "двойного слоя" по нормали к нему, на плотность вихрей. Это произведение имеет смысл поверхностной плотности стороннего тока, которую обозначим через $\mathbf{J}_S^*$. В результате указанного предельно-

го перехода получаем следующее выражение для магнитной индукции "двойного слоя вихрей", или поверхностного стороннего тока, в однородной неограниченной среде:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \mathbf{J}_S^* \times \text{grad}_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{1}{R} \right) dS. \quad (3.120)$$

Важными свойствами поверхностных вихрей стороннего тока и поверхностных сторонних токов являются непрерывность магнитной индукции при переходе через поверхность с распределенными вихрями стороннего тока и разрыв ее тангенциальной компоненты при переходе через поверхность, на которой распределены поверхностные сторонние токи.

Аналогично поверхностным генераторам можно рассматривать линейные генераторы, т.е. генераторы, распределенные вдоль заданной линии. Так, для целей совместного анализа электрического и магнитного полей биологических объектов удобно сформулировать некоторые идеализированные структуры генератора, содержащие как источники, так и вихри и подходящие по своим геометрическим свойствам для описания конкретных активных элементов, генерирующих биоэлектрические токи.

Рассмотрим в качестве такого идеализированного генератора бесконечно тонкую нить стороннего тока L , имеющую произвольную форму в пространстве и характеризующуюся постоянным значением тока I^* (рис. 3.1). В этом случае электрическое поле определяется двумя униполями на концах нити, где дивергенция поля генератора не равна нулю. Униполь представляет собой точечный источник, занимающий бесконечно малый объем пространства и характеризующийся конечным суммарным значением тока — положительным, если ток истекает из этой точки в среду, или отрицательным, если ток стекает в эту точку из среды (поэтому такие униполи иногда называют точечным исто-

ком и точечным стоком соответственно). В точке расположения униполя характеристики электрического поля обращаются в бесконечность, и соответствующую ему плотность источников можно формально описать объемной дельта-функцией. Тогда, исходя из (3.101), можно

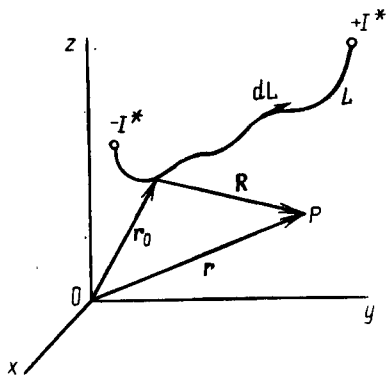


Рис. 3.1. Нитевидный генератор (P — точка наблюдения)

получить следующее выражение для электрического потенциала униполя с суммарным током I^* в однородной неограниченной среде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = I^*/(4\pi\sigma R), \quad (3.121)$$

где R — расстояние от униполя до точки наблюдения.

Рассматриваемый нитевидный генератор имеет на одном конце униполь-исток с током I^* и на другом конце — униполь-сток с током $-I^*$.

Для магнитной индукции рассматриваемого нитевидного генератора в однородном неограниченном проводнике по аналогии с (3.107) можно получить уравнение (известное под названием закона Био—Савара):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I^*}{4\pi} \int_L \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{L} = -\frac{\mu_0 I^*}{4\pi} \int_L \frac{1}{R^3} \mathbf{R} \times d\mathbf{L}, \quad (3.122)$$

где $d\mathbf{L}$ — векторная элементарная длина нити генератора (направление этого вектора совпадает с направлением тока).

Важный частный случай нитевидного генератора — это замкнутый нитевидный генератор, или контур стороннего тока. Выделим область пространства, окруженную замкнутой поверхностью, которая тесно охватывает контур тока вместе с его внутренней частью, так что эту область можно рассматривать как бесконечно тонкую и совпадающую с некоторой поверхностью, ограниченной контуром. Вне выделенной области магнитное поле является безвихревым, и для него можно определить скалярный потенциал φ^M .

Равномерный двойной слой фиктивных магнитных источников с мощностью D_S^M создает в однородной неограниченной среде скалярный магнитный потенциал, который по аналогии с (3.115) и (3.118) выражается как

$$\varphi^M(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 D_S^M}{4\pi} \int_S \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\mu_0 D_S^M}{4\pi} \Omega, \quad (3.123)$$

где S — поверхность двойного слоя и Ω — телесный угол, под которым видна эта поверхность из точки наблюдения. Подставив это уравнение в (3.91), получим для магнитной индукции

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 D_S^M}{4\pi} \text{grad } \Omega. \quad (3.124)$$

Вычисляя изменения телесного угла при перемещении точки наблюдения на малое расстояние по любому направлению, можно показать, что [42, 50]

$$\text{grad } \Omega = -\oint_L \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{L}, \quad (3.125)$$

где интеграл берется по замкнутому контуру тока. Подстановка этого уравнения в (3.124) дает

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 D_S^M}{4\pi} \oint_L \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{L}. \quad (3.126)$$

Сопоставление последнего уравнения с (3.122) показывает, что замкнутый контур стороннего тока, равного I^* , создает такое же магнитное поле, как и двойной слой фиктивных магнитных источников на любой поверхности, ограниченной этим контуром, имеющий мощность $D_S^M = I^*$ и полярность, соответствующую правовинтовой системе по отношению к направлению тока в контуре. Точно так же, как при переходе через электрический двойной слой происходит разрыв электрического потенциала при сохранении непрерывности электрической напряженности, при переходе через магнитный двойной слой претерпевает разрыв скалярный магнитный потенциал, тогда как магнитная индукция остается непрерывной.

Заметим, что при рассмотрении неоднородной (в частности, кусочно-однородной) среды, в которой магнитное поле зависит не только от сторонних, но и от кулоновских токов, также справедливы уравнения (3.122) – (3.126), в которых, однако, нужно использовать вместо стороннего суммарный ток (если генератор состоит только из замкнутых контуров стороннего тока, то суммарный ток сводится к сторонним токам).

При математическом моделировании биоэлектрических процессов весьма важную роль играют идеализированные точечные источники и генераторы. Точечный источник униполярного типа был рассмотрен выше.

Совокупность двух униполей с равными по абсолютной величине I^* , но противоположными по знаку токами, расположенных на ненулевом расстоянии d один от другого, иногда называют конечным диполем тока (в отличие от идеального, или точечного, диполя, который обсуждается ниже). Конечный диполь можно охарактеризовать вектором дипольного момента $\mathbf{D}$, направленным от отрицательного униполя к положительному и равным по абсолютной величине произведению I^*d . От конечного диполя можно перейти к идеальному, точечному, диполю, сближая униполюсы и осуществляя соответствующий предельный переход. Заданная совокупность униполей в принципе может порождаться бесконечным числом различных пространственных распределений генератора (стороннего тока); например, в рассматриваемом случае два униполя могут быть соединены бесконечно разнообразными нитями стороннего тока. Если исследуется только электрическое поле, то можно ограничиться рассмотрением источников и сформулировать точечные генераторы нужной структуры независимо от генератора во всей его полноте. Если же представляют интерес как электрическая, так и маг-

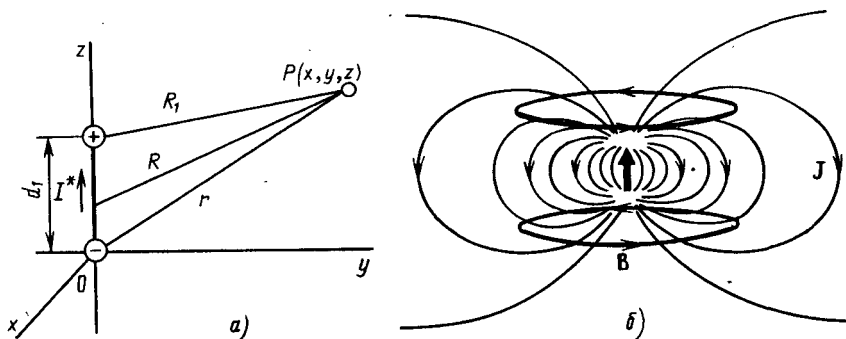


Рис. 3.2. Токовый диполь и его поле:

a — построение дипольного генератора (токового диполя) из прямолинейного нитевидного генератора; *б* — линии тока (тонкие кривые) и линии магнитной индукции (жирные кривые) токового диполя (стрелка в центре) в однородном неограниченном проводнике

нитная составляющая биоэлектрического генератора, то необходимо рассматривать генератор в целом, а не только его источники.

Так, если области, где биохимическими процессами порождаются сторонние токи, достаточно малы по сравнению с расстоянием между ними и точками наблюдения, то для описания генератора удобно использовать понятие идеального, или точечного, дипольного генератора, который в отличие от дипольного источника определяется не только источниками, но и вихрями стороннего тока; он имеет структуру элементарного стороннего тока, расположенного в бесконечно малой области пространства, но эквивалентного реальному распределенному току в малой, хотя и конечной области пространства, порождающему исследуемое внешнее электромагнитное поле.

При построении точечного дипольного генератора (в дальнейшем он иногда называется сокращенно токовым диполем) будем исходить из нитевидного генератора, на который наложим дополнительное ограничение: он должен иметь минимальную длину нити, т.е. совпадать с отрезком прямой, соединяющим полюса. Во избежание слишком громоздких формул выберем такую декартову систему координат x, y, z , чтобы отрицательный униполь находился в начале координат, а положительный — на оси z на расстоянии d_1 от него (рис. 3.2). Используя (3.121) и (3.122), можно записать соответственно следующие выражения для электрического потенциала и компонент магнитной индукции рассматриваемого "конечного токового диполя":

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{I^*}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right); \quad (3.127)$$

$$\left. \begin{aligned} B_x(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I^* y}{4\pi(x^2 + y^2)} \left(\frac{z-d_1}{R_1} - \frac{z}{r} \right), \\ B_y(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0 I^* x}{4\pi(x^2 + y^2)} \left(\frac{z-d_1}{R_1} - \frac{z}{r} \right), \\ B_z(\mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.128)$$

где R_1 — расстояние от положительного униполюса до точки наблюдения P .

В результате приближения положительного полюса генератора к отрицательному и перехода к пределу при стремлении расстояния между ними d_1 к нулю и тока генератора I^* к бесконечности с сохранением постоянного значения произведения $I^* d_1$ получим следующие выражения для электрического потенциала и компонент магнитной индукции:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{I^* d_1 z}{4\pi\sigma r^3}, \quad (3.129)$$

$$B_x(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I^* d_1 y}{4\pi r^3},$$

$$B_y(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I^* d_1 x}{4\pi r^3}, \quad B_z(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.130)$$

Обобщая эти уравнения для произвольной ориентации дипольного генератора относительно координатной системы, можно записать

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{D} \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{D} \cdot \text{grad}_r \left(\frac{1}{R} \right), \quad (3.131)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{D} \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{D} \times \text{grad}_r \left(\frac{1}{R} \right), \quad (3.132)$$

где $\mathbf{D}$ — вектор дипольного момента данного токового диполя, имеющий абсолютную величину $D = I^* d_1$ и направленный от отрицательного полюса к положительному; индексы r_0 и r указывают, что вычисление градиента осуществляется по отношению к точке расположения диполя и к точке наблюдения соответственно. Как будет показано ниже, процедуру построения токового диполя можно обобщить для получения более сложных точечных генераторов — токовых мультиполей.

Для магнитного поля можно сформулировать фиктивный точечный дипольный источник, или фиктивный магнитный диполь, исходя из

уравнений для магнитного поля замкнутого контура тока. Рассмотрим малый контур тока I , лежащий в одной плоскости и ограничивающий плоскую поверхность S . Как было показано выше, его скалярный магнитный потенциал равен потенциалу равномерного двойного слоя фиктивных магнитных источников с мощностью I на поверхности, ограниченной этим контуром, и согласно (3.123) выражается как

$$\varphi^M(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.133)$$

Предположим, что размеры контура тока уменьшаются, а значение тока увеличивается при неизменном значении

$$\mathbf{D}^M = I \int_S d\mathbf{S} = I\mathbf{S}, \quad (3.134)$$

где $\mathbf{D}^M$ — суммарный магнитный дипольный момент контура тока, или "конечного магнитного диполя" и $\mathbf{S}$ — векторная площадь контура, равная по абсолютной величине площади плоской поверхности, ограниченной контуром.

Устремим площадь контура к нулю и перейдем к пределу при указанных условиях. В результате получается выражение для скалярного магнитного потенциала, совершенно аналогичное выражению для электрического потенциала (3.131):

$$\varphi^M(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{D}^M \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{D}^M \cdot \text{grad}_r \left(\frac{1}{R} \right). \quad (3.135)$$

Заметим, что к формулировкам точечных генераторов и источников (как электрических, так и фиктивных магнитных) можно прийти разными путями, исходя из различных распределенных структур генераторов и источников — объемных, поверхностных и линейных. И, наоборот, беря за основу точечные источники и генераторы требуемой структуры, можно сформулировать соответствующие непрерывно распределенные источники и генераторы. Так, по аналогии с токовым диполем сформулируем поверхностно распределенный генератор типа двойного слоя тока, создающий как электрическое, так и магнитное поле, — токовый двойной слой.

Обратимся к рассмотренному выше двойному слою источников тока и предположим, что каждый его элемент с дипольным моментом $D_S d\mathbf{S}$ образован соответствующим токовым диполем с таким же дипольным моментом. Тогда наряду с электрическим полем, потенциал которого выражается уравнением (3.115), полученный токовый двойной слой будет создавать также и магнитное поле с индукцией, выра-

жающейся с учетом (3.132) как

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S D_S \operatorname{grad}_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{S}, \quad (3.136)$$

где интеграл вычисляется по поверхности двойного слоя S . Для частного случая равномерного токового двойного слоя с постоянной мощностью D_S , применяя обобщенную теорему Стокса [2], получаем

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 D_S}{4\pi} \int_S \operatorname{grad}_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 D_S}{4\pi} \oint_L \frac{1}{R} d\mathbf{L}, \quad (3.137)$$

где $d\mathbf{L}$ — векторная элементарная длина линии, причем интегрирование осуществляется по замкнутому контуру L , ограничивающему поверхность двойного слоя S (по краю двойного слоя). Таким образом, магнитное поле равномерного токового двойного слоя, как и его электрическое поле, определяется только мощностью двойного слоя и формой его границы. В частности, замкнутый равномерный токовый двойной слой не создаст во внешнем пространстве ни электрического, ни магнитного поля. Сопоставление (3.118) и (3.137) показывает, что электрическое и магнитное поля по-разному отражают форму границы равномерного двойного слоя. Так, деформации границы, не приводящие к изменению телесного угла, под которым она видна, не изменяют электрическое поле, но могут изменить магнитное поле в точке наблюдения.

Интегральные уравнения электромагнитного поля для кусочно-однородной среды. При исследовании биоэлектрических и биомангнитных полей адекватное представление среды обычно достигается, если использовать кусочно-однородную модель, учитывающую "компарментальное" строение биологических объектов. Допускается, что объект состоит из небольшого числа соприкасающихся однородных областей, соответствующих определенным органам, тканям или жидкостям тела, которые можно считать в данных условиях однородными по электрическим свойствам. В одной из этих однородных областей расположен биоэлектрический генератор. При исследовании на клеточном уровне рассматривается истинный, или первичный, генератор биологического происхождения, находящийся в мембранах клеток возбудимых тканей. При исследовании на макроскопических уровнях обычно переходят к эквивалентному генератору, распределенному по всему рассматриваемому участку ткани или органу (нередко используют несколько этапов такой аппроксимации, переходя к эквивалентному генератору нужного уровня сложности).

Наличие областей с разными электрическими характеристиками оказывает влияние как на электрическое, так и на магнитное поле био-

электрического генератора. Для оценки этого влияния используются интегральные уравнения электромагнитного поля.

Прежде чем перейти непосредственно к рассмотрению интегральных уравнений, представим дополнительные соотношения — граничные условия, которые должны выполняться на поверхностях, где имеют место разрывы характеристик поля и, следовательно, теряют силу приведенные выше дифференциальные уравнения. Поверхностные разрывы характеристик поля могут быть физически обусловлены существованием поверхностно распределенных возбудителей (источников или вихрей), а также скачкообразным изменением пассивных характеристик среды на поверхностях раздела областей с разными свойствами. Форма задания граничных условий в каждом случае определяется конкретно решаемой задачей.

Исходные соотношения для формулировки граничных условий — это уравнения (3.13) — (3.22). Ниже они будут конкретизированы для условий электродинамики стационарных токов и для некоторых поверхностей разрыва наиболее важных типов (индексы величин в формулах сохраняют вышеуказанный смысл).

При помощи уравнения (3.21) с учетом (3.85) можно показать, что в однородной проводящей области с удельной электрической проводимостью σ при наличии простого слоя источников тока с поверхностной плотностью источников W_S выполняются соотношения

$$E_{2n} - E_{1n} = W_S / \sigma, \quad (3.138)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{W_S}{\sigma}, \quad (3.139)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad (3.140)$$

а при наличии двойного слоя источников тока с мощностью D_S выполняются соотношения

$$E_{1n} - E_{2n} = 0, \quad (3.141)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0, \quad (3.142)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = D_S / \sigma. \quad (3.143)$$

При решении некоторых задач встречаются поверхности с распределенными и униполярными, и дипольными источниками, т.е. на которых одновременно существует и простой, и двойной слои источников тока; на них происходит разрыв как потенциала, так и напряженности электрического поля.

Типичной поверхностью разрыва магнитного поля является поверхность, по которой текут поверхностные токи. При переходе через нее

векторный потенциал изменяется непрерывно, а тангенциальная компонента магнитной напряженности претерпевает разрыв в соответствии с (3.14). Другие типы разрывов магнитного поля, в том числе обусловленные границами раздела областей с разными физическими (магнитными) свойствами, здесь не рассматриваются.

Теперь определим граничные условия, связанные со структурой среды. Если рассматривать неограниченное во всех направлениях пространство, когда сторонние токи (первичный генератор) расположены в ограниченной его области, то условием на "внешней границе" пространства, т.е. в бесконечности, будет стремление к нулю всех характеристик электромагнитного поля при удалении точки наблюдения от области генератора в бесконечность. Основными внутренними граничными условиями в проводящей среде являются условия на поверхностях раздела областей с разными удельными электрическими проводимостями. Обычно допускают, что первичный генератор целиком лежит внутри одной из однородных проводящих областей.

Пусть две смежные однородные области разделены поверхностью, которая в общем случае обладает некоторым сопротивлением по отношению к пересекающему ее току. Это сопротивление характеризуется значением проводимости на единицу площади поверхности по нормали к поверхности σ_S . При помощи (3.21) и (3.85) можно показать, что при переходе через такую поверхность происходит разрыв как нормальной компоненты электрической напряженности, так и электрического потенциала, причем граничные условия имеют вид

$$\sigma_1 E_{1n} - \sigma_2 E_{2n} = 0, \quad (3.144)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0, \quad (3.145)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_S} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\sigma_2}{\sigma_S} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}. \quad (3.146)$$

Возможны следующие важные частные случаи этих граничных условий. Если нормальная проводимость границы σ_S бесконечно велика (области непосредственно соприкасаются), то (3.146) сводится к уравнению

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0. \quad (3.147)$$

Если удельная электрическая проводимость одной из соприкасающихся областей, например области 2, равна нулю (эта область является диэлектрической), то (3.145) сводится к уравнению

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0, \quad (3.148)$$

а (3.146) — к уравнению (3.147). Если удельная электрическая проводимость одной из соприкасающихся областей, например области 2, бесконечно велика (эта область является сверхпроводящей), то (3.145) сводится к уравнению

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0. \quad (3.149)$$

Условия (3.144) — (3.147) характерны для границ между различными органами, тканями и жидкостями биологического объекта, условия (3.147) и (3.148) — для границы между биологическим объектом и окружающим его воздухом, условие (3.149) — для случая, когда биологический объект окружен веществом с очень высокой удельной электрической проводимостью, например металлической оболочкой.

Интегральные уравнения, связывающие характеристики генератора с характеристиками электрического и магнитного полей в кусочно-однородной среде, можно вывести разными способами — с помощью теоремы Грина, теоремы Гельмгольца или же на основе рассмотрения свойств поверхностей разрыва поля [35, 43, 60, 61, 114, 115, 154, 156]. Возьмем в качестве исходного соотношения теорему Грина, которая записывается как

$$\int_V (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) dV = \oint_S \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS, \quad (3.150)$$

где Φ и Ψ — конечные, непрерывные и дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции, заданные в области пространства V , ограниченной замкнутой поверхностью S (область V и поверхность S должны удовлетворять некоторым дополнительным математическим требованиям, которые здесь не существенны), и n — внешняя нормаль к поверхности S .

Рассмотрим кусочно-однородную область, представляющую среду, в которой происходят исследуемые биоэлектрические процессы (рис. 3.3), и для каждой однородной составляющей области запишем уравнение теоремы Грина (3.150), положив в нем $\Phi = \varphi$ и $\Psi = 1/R$, где φ — электрический потенциал, создаваемый биоэлектрическим источником, и R — расстояние от текущей точки интегрирования внутри области до неподвижной точки наблюдения. Чтобы не нарушать условия применимости теоремы Грина, точку наблюдения, где $R = 0$, исключим из области интегрирования, окружив малой сферической поверхностью с центром в этой точке. Кроме того, введем большую сферическую поверхность также с центром в этой точке, охватывающую все рассматриваемые области пространства. Просуммируем полученные уравнения для всех областей, расположенных между поверхностями указанных малой и большой сфер, предварительно умножив каждое уравнение на удельную электрическую проводимость соответ-

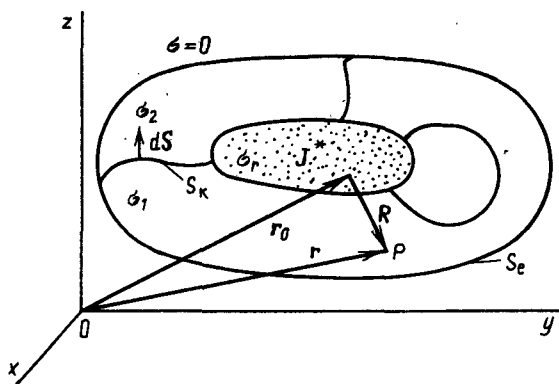


Рис. 3.3. Представление биологического объекта в виде кусочно-однородного проводника, окруженного диэлектриком (область генератора затемнена)

вующей области:

$$\begin{aligned} \Sigma \int_V \sigma \left[\varphi \Delta \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \Delta \varphi \right] dV = \\ = \Sigma \oint_S \sigma \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения, учитывая, что $\Delta \left(\frac{1}{R} \right) = 0$, а величина $\Delta \varphi$, не равная нулю только в области генератора, определяется уравнением (3.96). Правую часть также преобразуем, принимая во внимание граничные условия (3.145) и (3.147). Кроме того, устремим радиус большой сферы к бесконечности, а радиус малой сферы — к нулю; нетрудно показать, что при этом интеграл правой части уравнения по поверхности большой сферы обратится в нуль, а интеграл по поверхности малой сферы принимает значение $4\pi \sigma_r \varphi$, где σ_r — удельная электрическая проводимость области, в которой находится точка наблюдения, и φ — потенциал в этой точке. В итоге (3.151) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_V \frac{w}{R} dV = 4\pi \sigma_r \varphi(r) + \\ + \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS, \end{aligned} \quad (3.152)$$

где S_k — участок поверхности раздела между областями с удельными электрическими проводимостями σ_1 и σ_2 , а общее число таких участков равно N ; единичная нормаль к поверхности раздела n направле-

на от области, обозначенной индексом 1, к области, обозначенной индексом 2. Последнее уравнение можно записать в более удобной форме с учетом (3.101) и (3.109):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_r} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV - \\ - \frac{1}{4\pi\sigma_r} \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.153)$$

(векторная элементарная площадь поверхности раздела $d\mathbf{S}$ направлена по единичной нормали $\mathbf{n}$). Сопоставляя это уравнение с (3.109) и (3.115), видим, что потенциал в неоднородном (кусочно-однородном) проводнике складывается из двух частей: потенциала, создаваемого в однородном неограниченном проводнике с удельной электрической проводимостью области наблюдения σ_r , первичным генератором $\mathbf{J}^*$, и потенциала, создаваемого в таком же проводнике двойными слоями источников с мощностью $-(\sigma_1 - \sigma_2)\varphi$ на поверхности раздела однородных областей. Эти двойные слои можно рассматривать как вторичные источники, действие которых эквивалентно влиянию неоднородности среды.

В реальных условиях объемный проводник, образующий биологический объект, обычно окружен непроводящей средой. Если из суммы последнего члена уравнения (3.153) выделим слагаемое, соответствующее этой наружной поверхности S_e , полагая для внешней области $\sigma_2 = 0$, то получим уравнение

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_r} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV - \\ - \frac{1}{4\pi\sigma_r} \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} - \\ - \frac{1}{4\pi\sigma_r} \oint_{S_e} \sigma_e \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.154)$$

где σ_e — удельная электрическая проводимость областей, примыкающих изнутри к наружной поверхности проводника; S_k — внутренние граничные поверхности. Здесь наряду с внутренними вторичными источниками имеется вторичный источник на наружной поверхности проводящего объекта — двойной слой с мощностью $-\sigma_e \varphi$.

Другое полезное интегральное соотношение для электрического поля в кусочно-однородной среде можно получить, применяя теорему Грина точно так же, как и в вышеописанном случае, ко всем областям

тям, находящимся внутри поверхности S_e , в предположении, что точка наблюдения находится вне этой поверхности. Вместо уравнения (3.152) получим

$$\int_V \frac{w}{R} dV = \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS + \\ + \oint_{S_e} \sigma_e \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS. \quad (3.155)$$

Разделим каждый член этого уравнения на $4\pi\sigma$, где σ — произвольно заданная величина, которую можно рассматривать как удельную электрическую проводимость некоторой однородной среды, и преобразуем его с учетом (3.85):

$$\frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \frac{w}{R} dV = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS + \\ + \frac{1}{4\pi\sigma} \oint_{S_e} \sigma_e \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS + \\ + \frac{1}{4\pi\sigma} \oint_{S_e} \frac{\sigma_e}{R} \mathbf{E}_e \cdot dS, \quad (3.156)$$

где $\mathbf{E}_e$ — электрическая напряженность у внутренней стороны поверхности S_e . Согласно (3.101) последнее уравнение выражает электрический потенциал, который создавал бы в однородной неограниченной среде с удельной электрической проводимостью σ первичный генератор, через его потенциал в кусочно-однородной среде и характеристики среды в форме вторичных источников. Заметим, что здесь влияние внешней поверхности S_e представлено в виде совокупности поверхностных вторичных источников — двойного слоя с мощностью $\sigma_e \varphi$ и простого слоя с поверхностной плотностью источников $\sigma_e E_{en}$, где E_{en} — нормальная компонента электрической напряженности у внутренней стороны поверхности S_e . В случае, когда объект окружен диэлектриком и $E_{en} = 0$, уравнение (3.156) соответственно упрощается:

$$\frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \frac{w}{R} dV = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS + \\ + \frac{1}{4\pi\sigma} \oint_{S_e} \sigma_e \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS. \quad (3.157)$$

Это уравнение можно записать в форме, аналогичной (3.154):

$$0 = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV - \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{4\pi\sigma} \oint_{S_e} \sigma_e \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.158)$$

Если по условиям конкретной решаемой задачи можно пренебречь внутренней неоднородностью среды, т.е. положить для всех внутренних поверхностей раздела $\sigma_1 = \sigma_2$, то (3.154) и (3.158) принимают более простой вид:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.159)$$

(точка наблюдения внутри проводника),

$$0 = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.160)$$

(точка наблюдения вне проводника).

Здесь σ — принятая удельная электрическая проводимость рассматриваемой однородной проводящей области, ограниченной поверхностью S , вне которой находится диэлектрическая среда.

Для того чтобы получить выражение для магнитной индукции, создаваемой генератором $\mathbf{J}^*$ в кусочно-однородной среде, воспользуемся уравнением (3.113), в которое подставим выражение для полной плотности тока (3.7) с учетом (3.85). Аналогично тому, как это было сделано выше при применении теоремы Грина, выделим точку наблюдения малой сферой, а все рассматриваемое пространство ограничим снаружи большой сферой с центром в точке наблюдения. Магнитная индукция, обусловленная токами, которые текут во всей рассматриваемой области между большой и малой сферами, выражается как сумма магнитных индукций от каждой составляющей однородной области:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \int_V (\mathbf{J}^* - \sigma \text{grad}_{r_0} \varphi) \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}^* \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV - \\ &- \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \int_V \sigma \text{grad}_{r_0} \varphi \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Преобразуем подынтегральное выражение последнего члена правой части этого уравнения с помощью формул векторного анализа:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \left(\frac{\varphi}{R} \right) &= \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{grad} \varphi}{R} \right) + \operatorname{rot} \left[\varphi \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \right] = \\ &= \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \times \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \left[\varphi \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \right) = \operatorname{rot} \left[\varphi \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \right] \quad (3.162)$$

и

$$\int_V \operatorname{rot} \left[\varphi \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV = - \oint_S \varphi \operatorname{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \times dS \quad (3.163)$$

(интегрирование в правой части этого уравнения осуществляется по замкнутой поверхности S , ограничивающей объем V).

Подставим (3.162) и (3.163) в последний член уравнения (3.161) и устремим радиус большой сферы, охватывающей все рассматриваемые области, к бесконечности, а радиус малой сферы, окружающей точку наблюдения, — к нулю. Нетрудно показать, что в пределе интегралы вида (3.163) по этим сферам обратятся в нуль, а (3.161) после дополнительных простых преобразований запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}^* \times \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV + \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times dS, \end{aligned} \quad (3.164)$$

где обозначения имеют тот же смысл, что и в уравнении (3.153). Если рассматриваемый объемный проводник окружен поверхностью S_e , вне которой находится диэлектрическая среда, то, выделяя соответствующее слагаемое из суммы в уравнении (3.164), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}^* \times \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV + \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times dS + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_e} \sigma_e \varphi \operatorname{grad} r_0 \left(\frac{1}{R} \right) \times dS. \quad (3.165)$$

Сопоставление (3.164) и (3.165) с (3.107), (3.136), (3.153) и (3.154) показывает, что магнитная индукция в неоднородном (кусочно-однородном) проводнике аналогично электрическому потенциалу складывается из двух частей: магнитной индукции, создаваемой в однородном неограниченном проводнике первичным генератором $\mathbf{J}^*$, и магнитной индукции, создаваемой в таком же проводнике вторичными генераторами на поверхностях раздела однородных областей в виде токовых двойных слоев с такой же мощностью, как и эквивалентные двойные слои источников для электрического поля этого же первичного генератора, а именно с мощностью $-(\sigma_1 - \sigma_2)\varphi$ для внутренних поверхностей раздела и $-\sigma_e \varphi$ для наружной поверхности объекта, окруженного диэлектриком.

Если допустимо пренебрежение внутренней неоднородностью объекта, то выражение для магнитной индукции (3.165) соответствующим образом упрощается:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}^* \times \operatorname{grad} r_0 \left(\frac{1}{R} \right) dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \sigma \varphi \operatorname{grad} r_0 \left(\frac{1}{R} \right) \times dS. \quad (3.166)$$

Заметим, что при помощи (3.160) и (3.166) можно по измерениям электрического потенциала на поверхности однородного ограниченного проводника и магнитной индукции в любой точке наблюдения вне проводника определить электрический потенциал и магнитную индукцию, которые создавал бы тот же самый первичный генератор при условии, что вся неограниченная среда является однородным проводником с такой же удельной электрической проводимостью, как и исследуемый объект с первичным генератором внутри него:

$$\varphi_h(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi \operatorname{grad} r_0 \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS, \quad (3.167)$$

$$\mathbf{B}_h(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \sigma \varphi \operatorname{grad} r_0 \left(\frac{1}{R} \right) \times dS, \quad (3.168)$$

где электрический потенциал и магнитная индукция в однородной неограниченной среде отмечены индексом h , а соответствующие реально измеряемые величины не имеют индексов.

Наконец, если в уравнение теоремы Грина (3.151) подставим вместо электрического потенциала скалярный магнитный потенциал и учтем, что вся неограниченная среда однородна в отношении магнитной прони-

цаемости, фиктивные магнитные источники находятся только в проводящей области, ограниченной поверхностью S , а точка наблюдения — вне этой области, то применение (3.151) к области проводника дает после преобразований, аналогичных вышеописанным,

$$\begin{aligned}\varphi^M(r) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{w^M}{R} dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi^M \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{R} B \cdot dS,\end{aligned}\quad (3.169)$$

т.е. уравнение, вполне аналогичное уравнению для электрического потенциала (3.156).

Следует отметить, что интегральные соотношения для электромагнитного поля стационарных токов в кусочно-однородной среде можно представить в иной форме, выражая влияние неоднородности не через потенциал, а через нормальную компоненту электрической напряженности на поверхностях раздела (причем эквивалентные вторичные источники будут представляться в виде простых, а не двойных слоев) [114, 115]. Такая трактовка неудобна тем, что при ее использовании для решения ряда электродинамических задач нужно знать электрическую напряженность у поверхностей раздела, которую трудно измерить. Здесь этот подход не рассматривается.

3.2. Скалярное мультипольное разложение и совместный анализ биоэлектрического и биоманнитного полей

Мультипольное разложение электрического потенциала. Мультипольное разложение скалярного потенциала будет рассмотрено сначала в применении к электрическому полю, а затем — к безвихревому магнитному полю. Излагая эти вопросы, мы будем следовать в основном работам [2, 32, 44, 50, 110, 112, 133, 152–154]. Дополнительные сведения по теории мультиполей содержатся в [203, 204].

Метод мультипольного разложения электрического поля основан на принципе единства трех определений мультипольных компонент — они одновременно являются, во-первых, коэффициентами разложения скалярного потенциала в однородном неограниченном проводнике вне области источников тока в ряд сферических функций; во-вторых, интегральными характеристиками источников, аналогичными "механическим" моментам распределения масс в пространстве; в-третьих, параметрами идеализированных источников — точечных мультиполей, расположенных в начале координат. Ниже будут приведены математические соотношения, соответствующие этим определениям.

Выберем правую декартову прямоугольную систему координат x, y, z (в дальнейшем она называется просто декартовой) и сферическую си-

стему координат $r\theta\psi$ таким образом, чтобы центр сферической системы совпадал с началом декартовой, ее ось, от которой отсчитывается угловая координата θ (полярное расстояние), — с осью z декартовой системы, а линия начала отсчета угловой координаты ψ (долготы) — с осью x декартовой системы. Декартовы и сферические координаты любой точки пространства связаны обычными уравнениями:

$$x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta; \quad (3.170)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \psi &= \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & y < 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.171)$$

Поскольку в любой точке (r, θ, ψ) вне генератора потенциал электрического поля φ удовлетворяет уравнению Лапласа, его можно представить в виде следующего разложения в ряд пространственных сферических функций:

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(a_{nm} r^{-n-1} + a'_{nm} r^n) P_n^m(\cos \theta) \cos m \psi + \\ + (b_{nm} r^{-n-1} + b'_{nm} r^n) P_n^m(\cos \theta) \sin m \psi], \end{aligned} \quad (3.172)$$

где P_n^m — присоединенная функция Лежандра 1-го рода степени n и порядка m (n и m — неотрицательные целые числа), $P_n^0 = P_n$ — полином Лежандра и a_{nm} , a'_{nm} , b_{nm} , b'_{nm} — постоянные коэффициенты.

При заданном значении r выражение (3.172) представляет собой разложение потенциала φ на сферической поверхности с радиусом r в ряд поверхностных сферических функций:

$$Y_{nm}^e = P_n^m(\cos \theta) \cos m \psi, \quad Y_{nm}^o = P_n^m(\cos \theta) \sin m \psi.$$

Выражения в сферических и декартовых координатах для полиномов и присоединенных функций Лежандра, а также для поверхностных сферических функций до 3-го порядка включительно даны, например, в [44].

Допустим, что среда, в которой расположены генератор и точка наблюдения, является однородным и неограниченным проводником с удельной электрической проводимостью σ . Поскольку генератор занимает ограниченную область пространства, должно выполняться условие $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и, следовательно, в разложении (3.172) нужно положить $a'_{nm} = 0$, $b'_{nm} = 0$. Кроме того, введем величины $A_{nm} = 4\pi\sigma a_{nm}$ и $B_{nm} = 4\pi\sigma b_{nm}$. Тогда (3.172) принимает вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} r^{-n-1} P_n^m(\cos\theta) \cos m\psi + B_{nm} r^{-n-1} P_n^m(\cos\theta) \sin m\psi]. \quad (3.173)$$

Таким образом, потенциал представлен здесь в виде суммы характерных членов, которые в зависимости от координаты r изменяются пропорционально $1/r^{n+1}$, где n — порядок члена разложения. При постоянном значении r , т.е. на сферической поверхности, каждый член разложения пропорционален поверхностной сферической функции, "пространственная частота" которой определяется величинами n и m .

Постоянные коэффициенты A_{nm} , B_{nm} , определяемые для области вне сферы минимального радиуса с центром в начале координат, полностью охватывающей генератор, называются мультипольными компонентами электрического поля, или просто электрическими мультипольными компонентами, а разложение (3.173) для этой области — мультипольным разложением электрического потенциала. Член разложения порядка n представляет собой сумму $2n+1$ слагаемых с соответствующими коэффициентами A_{nm} , B_{nm} :

$$\varphi_n = \frac{1}{4\pi\sigma r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [A_{nm} P_n^m(\cos\theta) \cos m\psi + B_{nm} P_n^m(\cos\theta) \sin m\psi]. \quad (3.174)$$

Приведем выражения для членов мультипольного разложения потенциала до 2-го порядка в сферических и декартовых координатах:

$$\varphi_0 = \frac{A_{00}}{4\pi\sigma r}, \quad (3.175)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4\pi\sigma r^2} (A_{10} \cos\theta + A_{11} \sin\theta \cos\psi + B_{11} \sin\theta \sin\psi) = \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma r^3} (A_{10} z + A_{11} x + B_{11} y), \end{aligned} \quad (3.176)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\sigma r^3} & \left[\frac{1}{4} A_{20} (1 + 3 \cos 2\theta) + \frac{3}{2} A_{21} \sin 2\theta \cos \psi + \right. \\ & + \frac{3}{2} B_{21} \sin 2\theta \sin \psi + \frac{3}{2} A_{22} (1 - \cos 2\theta) \cos 2\psi + \frac{3}{2} B_{22} (1 - \\ & - \cos 2\theta) \sin 2\psi \left. \right] = \frac{1}{4\pi\sigma r^3} \left[\frac{1}{2} A_{20} (2z^2 - x^2 - y^2) + 3A_{21}xz + \right. \\ & + 3B_{21}yz + 3A_{22}(x^2 - y^2) + 6B_{22}xy \left. \right]. \end{aligned} \quad (3.177)$$

Теперь выясним, как связаны электрические мультипольные компоненты с пространственной структурой собственно генератора. Известно, что функцию $1/R$ можно разложить в сходящийся ряд пространственных сферических функций, имеющий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \cdot \\ \cdot P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos [m(\psi_0 - \psi)], \end{aligned}$$

при $r < r_0$; (3.178)

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \cdot \\ \cdot P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos [m(\psi_0 - \psi)] \end{aligned}$$

при $r > r_0$, (3.179)

где r_0, θ_0, ψ_0 и r, θ, ψ — сферические координаты текущей точки в области генератора и точки наблюдения потенциала соответственно и ϵ_m — множитель Неймана, $\epsilon_0 = 1, \epsilon_m = 2$ при $m \neq 0$.

Обратимся теперь к уравнениям (3.101) и (3.109) и представим их в виде разложения в ряд сферических функций, используя для левой части (3.173) и для правой части (3.179). Почленное сопоставление разложений левой и правой частей дает следующие равноценные выражения для мультипольных компонент:

$$\left. \begin{aligned} A_{nm} \\ B_{nm} \end{aligned} \right\} = \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \text{grad} \left[r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{Bmatrix} \right] dV,$$

(3.180)

$$\left. \begin{matrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{matrix} \right\} = \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_V W r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \left\{ \begin{matrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{matrix} \right\} dV \quad (3.181)$$

(здесь и в дальнейшем применяется сокращенная запись, в которой совмещены аналогичные выражения для A_{nm} и B_{nm} , различающиеся лишь функциями $\cos m \psi_0$ и $\sin m \psi_0$). Заметим, что компоненты вектора $\text{grad} \left[r^n P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \cos m \psi \\ \sin m \psi \end{matrix} \right\} \right]$ в декартовой системе координат x, y, z , связанной обычными соотношениями (3.170) и (3.171) со сферической системой координат r, θ, ψ , выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[r^n P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \cos m \psi \\ \sin m \psi \end{matrix} \right\} \right] = \\ & = \frac{1}{2} r^{n-1} \left[(n+m)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1}(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \cos(m-1)\psi \\ \sin(m-1)\psi \end{matrix} \right\} - \right. \\ & \quad \left. - P_{n-1}^{m+1}(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \cos(m+1)\psi \\ \sin(m+1)\psi \end{matrix} \right\} \right], \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left[r^n P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \cos m \psi \\ \sin m \psi \end{matrix} \right\} \right] = \\ & = \frac{1}{2} r^{n-1} \left[(n+m)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1}(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} -\sin(m-1)\psi \\ \cos(m-1)\psi \end{matrix} \right\} - \right. \\ & \quad \left. - P_{n-1}^{m+1}(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \sin(m+1)\psi \\ -\cos(m+1)\psi \end{matrix} \right\} \right], \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[r^n P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \cos m \psi \\ \sin m \psi \end{matrix} \right\} \right] = \\ & = r^{n-1} (n+m) P_{n-1}^m(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \cos m \psi \\ \sin m \psi \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.182)$$

Запишем выражения для мультипольных компонент до 2-го порядка, преобразуя подынтегральные выражения в (3.180) и (3.181) при помощи (3.182) и учитывая следующие соотношения для присоединенных функций Лежандра:

$$n(n-1) P_{n-1}^{-1}(\cos \theta) = -P_{n-1}^1(\cos \theta),$$

$$P_n^m(\cos \theta) = 0 \text{ при } m > n.$$

Из уравнения (3.180)

$$A_{00} = 0;$$

$$(3.183)$$

$$A_{10} = \int_V J_z^* dV, \quad A_{11} = \int_V J_x^* dV, \quad B_{11} = \int_V J_y^* dV; \quad (3.184)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= \int_V (-J_x^* x_0 - J_y^* y_0 + 2J_z^* z_0) dV, \\ A_{21} &= \int_V (J_x^* z_0 + J_z^* x_0) dV, \quad B_{21} = \int_V (J_y^* z_0 + J_z^* y_0) dV, \\ A_{22} &= \frac{1}{2} \int_V (J_x^* x_0 - J_y^* y_0) dV, \\ B_{22} &= \frac{1}{2} \int_V (J_x^* y_0 + J_y^* x_0) dV, \end{aligned} \right\} \quad (3.185)$$

где J_x^*, J_y^*, J_z^* — компоненты вектора генератора J в системе координат x, y, z . Из уравнения (3.181)

$$A_{00} = \int_V W dV; \quad (3.186)$$

$$A_{10} = \int_V W z_0 dV, \quad A_{11} = \int_V W x_0 dV, \quad B_{11} = \int_V W y_0 dV; \quad (3.187)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= \frac{1}{2} \int_V W (-x_0^2 - y_0^2 + 2z_0^2) dV, \\ A_{21} &= \int_V W x_0 z_0 dV, \quad B_{21} = \int_V W y_0 z_0 dV, \\ A_{22} &= \frac{1}{4} \int_V W (x_0^2 - y_0^2) dV, \quad B_{22} = \frac{1}{2} \int_V W x_0 y_0 dV. \end{aligned} \right\} \quad (3.188)$$

Как показывают уравнения (3.180), (3.181), (3.183) — (3.188), электрические мультипольные компоненты отражают определенные свойства пространственной конфигурации генератора, причем только такие свойства, которые зависят от распределения его источников. Они выражаются через объемные интегралы от этого распределения с некоторыми весовыми коэффициентами и могут быть названы интегральными характеристиками генератора или его источников. Однако описание источников при помощи мультипольных компонент является ограниченным в том смысле, что оно характеризует лишь свойства распределения источников, которые обуславливают существование скалярного потенциала вне области источников. Отметим еще следующий важный факт: уравнение (3.183) свидетельствует о том, что если генератор задан в виде распределения плотности стороннего тока в ог-

раниченной области пространства, то униполярный член мультипольного разложения (т.е. суммарный ток источников) равен нулю. Именно это условие характерно для задач биоэлектродинамики.

Рассмотрим теперь такие частные конфигурации генератора, у которых источники тока являются поверхностно распределенными или точечными. Конкретно, пусть источники тока представляют собой простой или двойной слой. Тогда, действуя точно таким же образом, как и при выводе уравнений (3.180) и (3.181), получим из (3.114) и (3.115) соответственно следующие выражения для мультипольных компонент простого слоя источников тока с поверхностной плотностью источников W_S :

$$\begin{Bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{Bmatrix} = \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_S W_S r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{Bmatrix} dS \quad (3.189)$$

и для мультипольных компонент двойного слоя источников тока с поверхностной плотностью дипольного момента D_S :

$$\begin{Bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{Bmatrix} = \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_S D_S \text{grad} \left[r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{Bmatrix} \right] \cdot dS, \quad (3.190)$$

где S — поверхность источника тока (простого или двойного слоя) и dS — векторная элементарная площадь этой поверхности.

Выражение для мультипольных компонент точечного униполярного источника тока можно получить из (3.181), представляя объемно распределенный источник в виде пространственной дельта-функции, а выражение для мультипольных компонент точечного дипольного источника тока — в результате обычного предельного перехода при бесконечном сближении двух униполярных источников. В частности, для униполя с током I^*

$$\begin{Bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{Bmatrix} = \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} I^* r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{Bmatrix} \quad (3.191)$$

и для диполя с вектором дипольного момента D

$$\begin{Bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{Bmatrix} = \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} D \cdot \text{grad} \left[r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{Bmatrix} \right], \quad (3.192)$$

где r_0 , θ_0 , ψ_0 — сферические координаты точечного источника (униполя или диполя). Приведем подробные выражения для мультипольных компонент этих точечных источников до 2-го порядка. Для

униполя

$$A_{00} = I^*; \quad (3.193)$$

$$A_{10} = I^* z_0, \quad A_{11} = I^* x_0, \quad B_{11} = I^* y_0; \quad (3.194)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= \frac{1}{2} I^* (-x_0^2 - y_0^2 + 2z_0^2), \\ A_{21} &= I^* x_0 z_0, \quad B_{21} = I^* y_0 z_0, \\ A_{22} &= \frac{1}{4} I^* (x_0^2 - y_0^2), \quad B_{22} = \frac{1}{2} I^* x_0 y_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.195)$$

Для диполя

$$A_{00} = 0; \quad (3.196)$$

$$A_{10} = D_z, \quad A_{11} = D_x, \quad B_{11} = D_y; \quad (3.197)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= -D_x x_0 - D_y y_0 + 2D_z z_0, \\ A_{21} &= D_x z_0 + D_z x_0, \quad B_{21} = D_y z_0 + D_z y_0, \\ A_{22} &= \frac{1}{2} (D_x x_0 - D_y y_0), \quad B_{22} = \frac{1}{2} (D_x y_0 + D_y x_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.198)$$

Потенциал электрического поля вне сферы с центром в начале координат, полностью охватывающей источники (в области сходимости мультипольного разложения), можно рассматривать как сумму потенциалов неограниченного числа идеализированных источников тока — точечных мультиполей, расположенных в начале координат, и формально выразить как

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} M_n \frac{\partial^n}{\partial l_{n1} \partial l_{n2} \dots \partial l_{nn}} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3.199)$$

где M_n — модуль (абсолютная величина) момента мультиполя n -го порядка и $\frac{\partial}{\partial l_{ni}} = \alpha_{ni} \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{ni} \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{ni} \frac{\partial}{\partial z}$ — оператор дифференцирования по направлению l_{ni} , которое определяется направляющими косинусами $\alpha_{ni}, \beta_{ni}, \gamma_{ni}$ по отношению к осям x, y, z декартовой системы координат соответственно.

Потенциал, создаваемый мультиполем n -го порядка в однородном неограниченном проводнике с удельной электрической проводимостью σ

$$\varphi_n = \frac{M_n}{4\pi\sigma} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial l_{n1} \partial l_{n2} \dots \partial l_{nn}} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3.200)$$

совпадает с членом n -го порядка мультипольного разложения электрического потенциала источника произвольной структуры, находящегося в этой же среде (3.174). Выражение (3.200) фактически описывает последовательность построения мультиполя порядка n из мультиполей предшествующих порядков $i < n$. Каждый мультиполь порядка i образуется в результате предельного перехода при сближении по направлению l_{ni} двух мультиполей предыдущего порядка $i-1$, имеющих равные по абсолютной величине M_{i-1} , но противоположные по знаку моменты, причем величина момента стремится к бесконечности, расстояние между мультиполями $d_i \rightarrow 0$, а произведение абсолютной величины момента на расстояние остается постоянным и определяет абсолютную величину момента мультиполя i -го порядка:

$$M_i = i M_{i-1} d_i. \quad (3.201)$$

Построение системы электрических мультиполей начинают с мультиполя нулевого порядка — точечного источника тока, или униполя. Момент униполя M_0 принимается равным полному току источника. В результате предельного перехода из двух униполей получается мультиполь первого порядка — диполь, из двух диполей получается мультиполь второго порядка — квадруполь, из двух квадруполей — октуполь, из двух октуполей — гексадекаполь и т.д. Название каждого мультиполя отражает общее число исходных униполей, использованных при его построении; для мультиполя n -го порядка это число равно 2^n .

В процессе построения мультиполей при увеличении порядка мультиполя на 1 к определяющим его параметрам добавляются две независимые величины — углы, задающие направление сближения мультиполей предыдущего порядка (направляющие косинусы вектора сближения связаны соотношением $\alpha_{ni}^2 + \beta_{ni}^2 + \gamma_{ni}^2 = 1$, поэтому независимыми являются лишь два из них). Следовательно, общее число независимых величин, определяющих мультиполь n -го порядка, равно $2n+1$ и совпадает с числом коэффициентов члена порядка n в разложении скалярного потенциала по сферическим функциям (3.173). Как (3.174), так и (3.200) можно представить в виде суммы произведений постоянных коэффициентов, не зависящих от координат точки наблюдения потенциала, и сферических функций, зависящих от этих координат. Сопоставляя эти выражения почленно, получим соотношения между характеристиками интенсивности и ориентации мультиполей M_n , α_{ni} , β_{ni} , γ_{ni} , с одной стороны, и мультипольными компонентами A_{nm} , B_{nm} , с другой стороны; эти соотношения позволяют рассматривать компоненты A_{nm} , B_{nm} как параметры соответствующих мультиполей. В частности, для мультиполей до 2-го порядка — униполя ($n=0$), диполя ($n=1$) и квадруполя ($n=2$) можно записать

$$A_{00} = M_0; \quad (3.202)$$

$$A_{10} = M_1 \gamma_{11}, A_{11} = M_1 \alpha_{11}, B_{11} = M_1 \beta_{11}; \quad (3.203)$$

$$A_{20} = \frac{M_2}{2} (-\alpha_{21} \alpha_{22} - \beta_{21} \beta_{22} + 2\gamma_{21} \gamma_{22}),$$

$$A_{21} = \frac{M_2}{2} (\alpha_{21} \gamma_{22} + \gamma_{21} \alpha_{22}), B_{21} = \frac{M_2}{2} (\beta_{21} \gamma_{22} + \gamma_{21} \beta_{22}),$$

$$A_{22} = \frac{M_2}{4} (\alpha_{21} \alpha_{22} - \beta_{21} \beta_{22}), B_{22} = \frac{M_2}{4} (\alpha_{21} \beta_{22} + \beta_{21} \alpha_{22}). \quad (3.204)$$

Таким образом, униполь характеризуется одной скалярной величиной, а мультиполи более высоких порядков — несколькими скалярными величинами, которые можно сгруппировать в тензоры. В частности, диполь можно представить в виде вектора, квадруполь — в виде тензора второго ранга с пятью независимыми элементами и т.д. [3, 74, 203].

Электрические поля мультиполей имеют характерную форму распределения потенциала в пространстве, зависящую от порядка мультиполя и от конкретного значения его компонент. При увеличении расстояния точки наблюдения от мультиполя r потенциал изменяется пропорционально величине $1/r^{n+1}$ и, следовательно, убывает тем быстрее, чем выше порядок мультиполя.

Поле униполя обладает сферической симметрией относительно начала координат, его потенциал на поверхности сферы с центром в начале координат постоянен и имеет такой же знак, как и момент униполя. Мультиполи более высоких порядков создают поля, имеющие на поверхности указанной сферы положительные и отрицательные экстремумы потенциала, число которых возрастает с увеличением порядка мультиполя. На рис. 3.4 для иллюстрации приведены эквипотенциальные карты полей диполя, квадруполь и октополя на сферической поверхности. Представлены эквипотенциальные карты для мультиполей, имеющих только одну ненулевую компоненту, которая указана у соответствующей карты. Верхняя и нижняя границы карты соответствуют полюсам сферы (пересечению ее соответственно с полуосями $+z$ и $-z$ декартовой системы координат), левая и правая границы — нулевому меридиану (пересечению ее с плоскостью xOz).

Чтобы получить представление о том, насколько полно мультипольные компоненты A_{nm} , B_{nm} отражают конфигурацию генератора, точнее, распределения источников тока, воспользуемся разложением электрического потенциала еще одного типа. Разложим функцию $1/R$ в ряд Тейлора относительно начала координат и заменим дифференцирование по координатам точки области генератора x_0, y_0, z_0 дифферен-

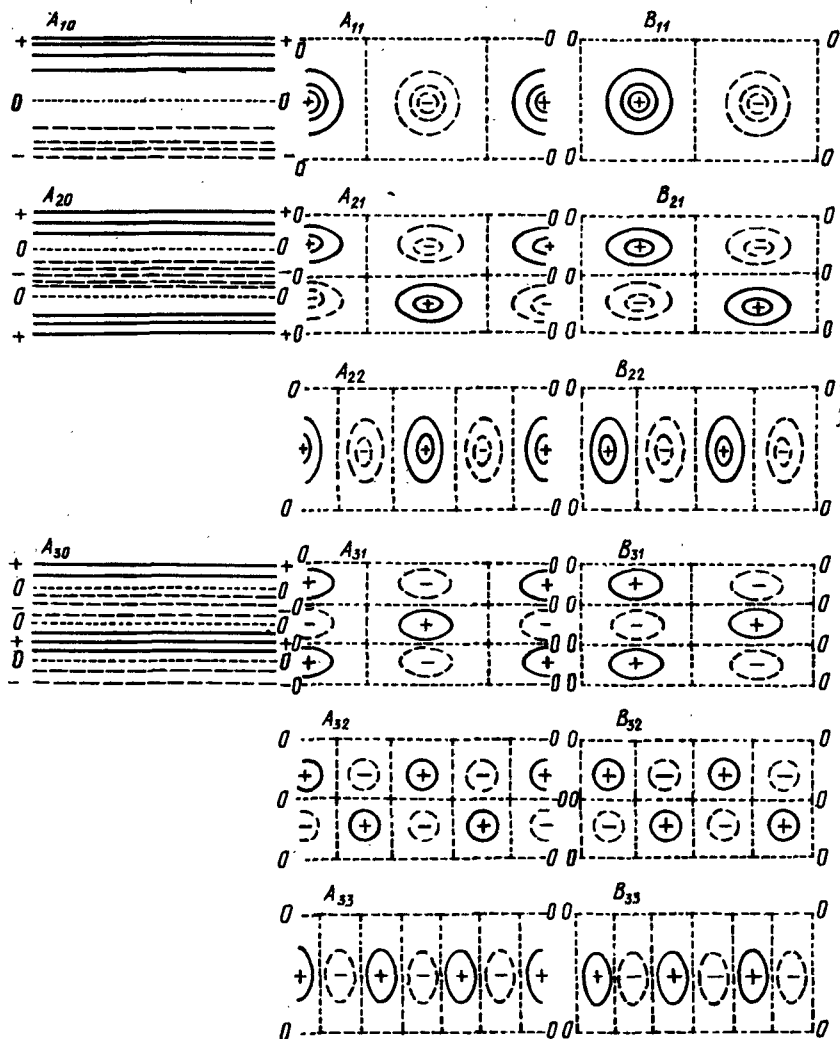


Рис. 3.4. Эквипотенциальные карты электрических полей мультиполей 1–3-го порядков на сферической поверхности с центром в начале координат, спроектированной на прямоугольный участок плоскости (ненулевые компоненты мультиполей указаны над соответствующими картами). Верхняя и нижняя границы карты соответствуют полюсам сферы, левая и правая границы – нулевому меридиану. Плюсы – точки максимума, минусы – точки минимума потенциала; сплошные линии – положительные эквипотенциалы, штриховые – отрицательные эквипотенциалы, пунктирные – нулевые эквипотенциалы

цированием по координатам точки наблюдения потенциала x, y, z ; в результате получим выражение

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(-1)^n}{l!k!(n-l-k)!} \cdot x_0^l y_0^k z_0^{n-l-k} \frac{\partial^n}{\partial x^l \partial y^k \partial z^{n-l-k}} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3.205)$$

где n, l, k — неотрицательные целые числа, подчиненные условию $n \geq l+k$ для каждого члена разложения. Подставляя последнее выражение в (3.101), приходим к следующему разложению потенциала в точке наблюдения:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(-1)^n}{l!k!(n-l-k)!} \cdot C_{nkl} \frac{\partial^n}{\partial x^l \partial y^k \partial z^{n-l-k}} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3.206)$$

где

$$C_{nkl} = \int_V W x_0^l y_0^k z_0^{n-l-k} dV. \quad (3.207)$$

Разложение (3.206) иногда так же, как и разложение по сферическим функциям, называют мультипольным разложением потенциала, однако оно обладает некоторыми важными особенностями. Число независимых коэффициентов C_{nkl} для члена разложения n -го порядка равно $(n+1)(n+2)/2$. Если уподобить распределение источников тока W пространственному распределению масс, то величины C_{nkl} будут представлять собой "механические" моменты этого распределения. При некоторых условиях распределение масс определяется однозначно с любой точностью его моментами (число которых может быть неограниченным). Основным условием этого является ограниченность области распределения масс в пространстве. Поскольку все рассматриваемые биоэлектрические источники расположены в области возбуждающихся клеток, они удовлетворяют этому условию. Итак, можно заключить, что коэффициенты C_{nkl} при принятом допущении об однородности среды с любой точностью однозначно описывают распределение источников тока [154].

Напомним, что в обычном мультипольном разложении (3.173) число независимых мультипольных компонент A_{nm}, B_{nm} порядка n равно $2n+1$ и совпадает с числом независимых параметров мультиполя, по-

строенного из точечных источников. Для членов разложения второго и более высоких порядков это число оказывается меньше, чем число независимых коэффициентов C_{nkl} . Это объясняется тем, что мультипольные компоненты A_{nm} , B_{nm} отражают не все свойства распределения источников, а только те, которые обуславливают существование потенциала вне области источников. Поэтому мультипольные компоненты A_{nm} , B_{nm} не дают однозначного описания конфигурации источников, тогда как коэффициенты C_{nkl} дают такое описание, отражая все свойства распределения источников, в том числе и те, что не находят отражения в потенциале.

Например, при симметричном распределении источников, для которого $C_{202} = C_{220} = C_{200} > 0$ и $C_{211} = C_{210} = C_{201} = 0$ (отрицательный точечный источник, расположенный в начале координат и окруженный равномерно распределенным положительным источником с таким же суммарным током на сфере с центром в начале координат), потенциал вне области генератора равен нулю, так как в этом случае

$$C_{202} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + C_{220} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + C_{200} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = 0. \quad (3.208)$$

Следовательно, по потенциалу, измеренному вне области источников, в общем случае невозможно определить все моменты распределения источников C_{nkl} и восстановить структуру распределения (если отсутствует необходимая дополнительная информация об этом распределении). В то же время мультипольные компоненты A_{nm} , B_{nm} могут быть найдены по измеренному потенциалу.

Если распределение источников задано, то для него можно вычислить коэффициенты C_{nkl} , а по этим коэффициентам определить мультипольные компоненты A_{nm} , B_{nm} . Очевидно, задача обратного перехода от компонент A_{nm} , B_{nm} к коэффициентам C_{nkl} для мультипольных членов выше первого порядка не имеет однозначного решения.

Уравнения, связывающие коэффициенты C_{nkl} с мультипольными компонентами A_{nm} , B_{nm} для мультипольных членов любого порядка, легко получить, сопоставляя (3.181) и (3.207). В частности, для мультипольных членов до 2-го порядка они имеют следующий вид:

$$A_{00} = C_{000}; \quad (3.209)$$

$$A_{10} = C_{100}, \quad A_{11} = C_{101}, \quad B_{11} = C_{110}; \quad (3.210)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= \frac{1}{2} (2C_{200} - C_{202} - C_{220}), \\ A_{21} &= C_{201}, \quad B_{21} = C_{210}, \\ A_{22} &= \frac{1}{4} (C_{202} - C_{220}), \quad B_{22} = \frac{1}{2} C_{211}. \end{aligned} \right\} \quad (3.211)$$

Нередко возникает необходимость дать сравнительную количественную оценку членов мультипольного разложения для конкретных конфигураций генератора. Поскольку непосредственное сравнение электрических мультипольных компонент разных порядков не имеет смысла (они различаются физической размерностью), целесообразно сравнивать осредненные каким-либо способом значения соответствующих потенциалов в заданной области (обычно на замкнутой поверхности вокруг генератора). В связи с этим возникает вопрос о нахождении потенциалов, соответствующих заданным мультипольным компонентам.

Согласно (3.181) мультипольные компоненты являются собственными характеристиками генератора и не зависят от структуры среды, в которой расположен генератор. Для однородного неограниченного проводника потенциал вне области генератора выражается уравнением (3.173) (поэтому мультипольные компоненты A_{nm} , B_{nm} иногда называют мультипольными компонентами для однородного неограниченного проводника). Если же среда неоднородна, то это уравнение использовать нельзя, однако источники по-прежнему можно описывать их мультипольными компонентами A_{nm} , B_{nm} . Эти величины можно трактовать как параметры мультипольного источника (совокупности мультиполей разных порядков), эквивалентного исходному, или истинному распределению источников. Чтобы определить потенциал в области измерения для неоднородной среды, нужно будет при заданных конкретных условиях решить соответствующую прямую задачу для каждого мультиполя. Решение обычно находят либо итерационными вычислительными методами (при математическом моделировании на ЭВМ), либо на физических моделях. Исключение представляют только простейшие структуры объемного проводника, для которых удастся получить решение в виде аналитических формул. Например, если проводник — однородный шар с удельной электрической проводимостью σ и радиусом r , окруженный диэлектриком и содержащий источники тока, то, выбрав систему координат с началом в центре шара и решая задачу с учетом граничного условия (3.148) на его поверхности, получим следующее выражение для потенциала, обусловленного членом n -го порядка мультипольного разложения:

$$\varphi_n = \frac{2n+1}{4\pi\sigma nr^{n+1}} \sum_{m=0}^n [A_{nm}P_n^m(\cos\theta)\cos m\psi + B_{nm}P_n^m(\cos\theta)\sin m\psi]. \quad (3.212)$$

Это выражение отличается от выражения для однородного неограниченного проводника (3.174) только множителем $(2n+1)/n$.

Для сферической поверхности S с центром в начале координат легко получить формулы для среднеквадратичного потенциала любой

мультипольной компоненты. Общее выражение для среднеквадратичного потенциала на поверхности сферы имеет следующий вид:

$$\tilde{\varphi}_S = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \varphi_S^2 \sin \theta d\theta d\psi}, \quad (3.213)$$

где φ_S — заданное распределение потенциала на сферической поверхности. Подставляя сюда выражения для потенциалов мультипольных компонент (3.174) и (3.212), получим для среднеквадратичных значений потенциала мультипольных компонент на сферической поверхности с радиусом r в однородном неограниченном проводнике

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_S(A_{nm}) \\ \tilde{\varphi}_S(B_{nm}) \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi\sigma r^{n+1}} \sqrt{\frac{(n+m)!}{\epsilon_m(2n+1)(n-m)!}} \left\{ \begin{array}{l} A_{nm} \\ B_{nm} \end{array} \right\} \quad (3.214)$$

и на поверхности однородного шара с радиусом r , окруженного диэлектриком,

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_S(A_{nm}) \\ \tilde{\varphi}_S(B_{nm}) \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi\sigma n r^{n+1}} \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m)!}{\epsilon_m(n-m)!}} \left\{ \begin{array}{l} A_{nm} \\ B_{nm} \end{array} \right\}. \quad (3.215)$$

Таким образом, среднеквадратичный потенциал мультипольного члена n -го порядка на сфере с радиусом r как для неограниченного, так и для ограниченного проводника пропорционален величине $1/r^{n+1}$ и при удалении от генератора убывает все быстрее с повышением порядка члена. Полные среднеквадратичные потенциалы $\tilde{\varphi}_{Sn}$ мультипольных членов 1-го и 2-го порядков выражаются для однородного неограниченного проводника как

$$\tilde{\varphi}_{S1} = \frac{1}{4\pi\sigma r^2} \sqrt{\frac{1}{3} (A_{10}^2 + A_{11}^2 + B_{11}^2)}, \quad (3.216)$$

$$\tilde{\varphi}_{S2} = \frac{1}{4\pi\sigma r^3} \sqrt{\frac{1}{5} (A_{20}^2 + 3A_{21}^2 + 3B_{21}^2 + 12A_{22}^2 + 12B_{22}^2)} \quad (3.217)$$

и для однородного шара, ограниченного диэлектриком, как

$$\tilde{\varphi}_{S1} = \frac{1}{4\pi\sigma r^2} \sqrt{3(A_{10}^2 + A_{11}^2 + B_{11}^2)}, \quad (3.218)$$

$$\tilde{\varphi}_{S2} = \frac{1}{4\pi\sigma r^3} \sqrt{\frac{5}{4} (A_{20}^2 + 3A_{21}^2 + 3B_{21}^2 + 12A_{22}^2 + 12B_{22}^2)}. \quad (3.219)$$

Для того чтобы охарактеризовать пространственно-временную динамику генератора, целесообразно ввести систему координат, которая определялась бы только конфигурацией самого генератора и не зависела бы от выбора исходной системы координат, в которой вычисляются мультипольные компоненты. Такую систему координат, изменяющуюся вместе с генератором (подвижную), назовем собственной системой координат генератора.

Возможность выбора собственной системы координат, обладающей некоторыми полезными свойствами, обусловлена особым характером изменения мультипольных компонент заданного распределения источников при переходе от одной системы координат к другой (это изменение определяется тензорными свойствами мультипольных членов). Если заданы мультипольные компоненты A_{nm} , B_{nm} в исходной системе координат и известно положение некоторой новой системы координат относительно исходной (координаты начала и углы наклона осей по отношению к исходной системе), то по этим данным можно непосредственно вычислить мультипольные компоненты в новой системе координат.

При параллельном переносе осей координат к каждой мультипольной компоненте добавляются слагаемые, равные произведениям мультипольных компонент более низких порядков на коэффициенты, пропорциональные различным степеням координат начала новой системы. Следовательно, если все мультипольные компоненты низших порядков равны нулю, то мультипольные компоненты данного порядка при параллельном переносе осей координат остаются неизменными. Это последнее свойство наиболее актуально в применении к члену мультипольного разложения первого порядка (дипольному). Как было указано выше, в рассматриваемых условиях член нулевого порядка (униполь) всегда равен нулю, поэтому параллельный перенос осей координат не приводит к изменению дипольных компонент.

При повороте системы координат в пространстве без смещения ее начала происходит перераспределение величин между компонентами каждого члена n -го порядка в мультипольном разложении. Более конкретно, каждая мультипольная компонента в новой системе координат выражается как сумма произведений компонент этого же порядка в исходной системе на коэффициенты, определяемые углами поворота осей координат.

Общие выражения для вычисления новых мультипольных компонент любого порядка при изменении системы координат в принципе могут быть получены на основе известных теорем сложения для сферических функций.

Приведем эти выражения для мультиполей 1-го и 2-го порядков. При параллельном переносе осей декартовой системы координат x, y, z и расположении начала новой системы x', y', z' в точке с координатами x_c, y_c, z_c новые мультипольные компоненты выражаются через исход-

ные следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A'_{10} &= A_{10}, \quad A'_{11} = A_{11}, \quad B'_{11} = B_{11}, \\ A'_{20} &= A_{20} - 2z_c A_{10} + x_c A_{11} + y_c B_{11}, \\ A'_{21} &= A_{21} - x_c A_{10} - z_c A_{11}, \quad B'_{21} = B_{21} - y_c A_{10} - z_c B_{11}, \\ A'_{22} &= A_{22} - \frac{1}{2} x_c A_{11} + \frac{1}{2} y_c B_{11}, \\ B'_{22} &= B_{22} - \frac{1}{2} y_c A_{11} - \frac{1}{2} x_c B_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (3.220)$$

При повороте осей декартовой системы координат на углы α_x , α_y , α_z относительно соответствующей оси (против часовой стрелки при наблюдении со стороны положительной оси поворота) новые мультипольные компоненты выражаются через исходные следующим образом:

поворот относительно оси x

$$\left. \begin{aligned} A'_{10} &= \cos \alpha_x \cdot A_{10} - \sin \alpha_x \cdot B_{11}, \quad A'_{11} = A_{11}, \\ B'_{11} &= \sin \alpha_x \cdot A_{10} + \cos \alpha_x \cdot B_{11}, \\ A'_{20} &= \frac{1}{4}(1 + 3 \cos 2\alpha_x) A_{20} - \frac{3}{2} \sin 2\alpha_x \cdot B_{21} - \frac{3}{2} (1 - \cos 2\alpha_x) A_{22}, \\ A'_{21} &= \cos \alpha_x \cdot A_{21} - 2 \sin \alpha_x \cdot B_{22}, \\ B'_{21} &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha_x \cdot A_{20} + \cos 2\alpha_x \cdot B_{21} + \sin 2\alpha_x \cdot A_{22}, \\ A'_{22} &= -\frac{1}{8} (1 - \cos 2\alpha_x) A_{20} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha_x \cdot B_{21} + \frac{1}{4} (3 + \cos 2\alpha_x) A_{22}, \\ B'_{22} &= \frac{1}{2} \sin \alpha_x \cdot A_{21} + \cos \alpha_x \cdot B_{22}; \end{aligned} \right\}$$

поворот относительно оси y

$$\left. \begin{aligned} A'_{10} &= \cos \alpha_y \cdot A_{10} + \sin \alpha_y \cdot A_{11}, \\ A'_{11} &= -\sin \alpha_y \cdot A_{10} + \cos \alpha_y \cdot A_{11}, \quad B'_{11} = B_{11}, \\ A'_{20} &= \frac{1}{4} (1 + 3 \cos 2\alpha_y) \cdot A_{20} + \frac{3}{2} \sin 2\alpha_y \cdot A_{21} + \\ &+ \frac{3}{2} (1 - \cos 2\alpha_y) A_{22}, \end{aligned} \right\}$$

$$A'_{21} = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha_y \cdot A_{20} + \cos 2\alpha_y \cdot A_{21} + \sin 2\alpha_y \cdot A_{22},$$

$$B'_{21} = \cos \alpha_y \cdot B_{21} + 2 \sin \alpha_y \cdot B_{22},$$

$$A'_{22} = \frac{1}{8} (1 - \cos 2\alpha_y) A_{20} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha_y \cdot A_{21} + \frac{1}{4} (3 + \cos 2\alpha_y) A_{22},$$

$$B'_{22} = -\frac{1}{2} \sin \alpha_y \cdot B_{21} + \cos \alpha_y \cdot B_{22};$$

поворот относительно оси z

$$A'_{10} = A_{10}, \quad A'_{11} = \cos \alpha_z \cdot A_{11} + \sin \alpha_z \cdot B_{11},$$

$$B'_{11} = -\sin \alpha_z \cdot A_{11} + \cos \alpha_z \cdot B_{11},$$

$$A'_{20} = A_{20},$$

$$A'_{21} = \cos \alpha_z \cdot A_{21} + \sin \alpha_z \cdot B_{21},$$

$$B'_{21} = -\sin \alpha_z \cdot A_{21} + \cos \alpha_z \cdot B_{21},$$

$$A'_{22} = \cos 2\alpha_z \cdot A_{22} + \sin 2\alpha_z \cdot B_{22},$$

$$B'_{22} = -\sin 2\alpha_z \cdot A_{22} + \cos 2\alpha_z \cdot B_{22}.$$

(3.221)

Собственную систему координат генератора удобно выбрать так, чтобы ее начало находилось вблизи геометрического центра распределения источников, т.е. характеризовало его среднее пространственное положение, а оси были ориентированы в направлениях, характеризующих преимущественное направление дипольных элементарных генераторов и форму их распределения в пространстве. Распределение источников биоэлектрического генератора обычно имеет относительно большую дипольную составляющую, которая вносит наиболее значительный вклад в измеряемый потенциал по сравнению с другими мультипольными членами, если начало координат мультипольного разложения находится внутри области источников.

Если учесть указанное свойство распределения источников, то в качестве начала собственной системы координат целесообразно выбрать точку, обеспечивающую наименьший вклад в потенциал недипольных членов. Поскольку наиболее существенным из этих членов является квадрупольный, в первом приближении можно ограничиться минимизацией квадрупольного потенциала [112]. Следует иметь в виду, что такая минимизация возможна лишь при условии, что не равен нулю ди-

полный член, так как в противном случае квадрупольные компоненты не зависят от расположения начала координат.

Найдем положение начала собственной системы координат из условия минимизации среднеквадратичного квадрупольного потенциала на поверхности сферы с центром в начале координат. Согласно (3.217) и (3.219) средний квадрат квадрупольного потенциала на поверхности сферы с центром в начале новой системы координат и для неограниченного, и для ограниченного однородных проводников выражается как

$$\bar{\varphi}_{S2}^2 = K (A_{20}'^2 + 3A_{21}'^2 + 3B_{21}'^2 + 12A_{22}'^2 + 12B_{22}'^2), \quad (3.222)$$

где K — постоянный коэффициент и $A_{20}', A_{21}', B_{21}', A_{22}', B_{22}'$ — квадрупольные компоненты генератора в новой системе координат. Пусть начало новой системы координат находится в точке, имеющей координаты x_c, y_c, z_c в старой системе координат, а оси новой системы параллельны соответствующим осям старой. Подставим в (3.222) выражения (3.220), связывающие квадрупольные компоненты в этих двух системах координат:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{S2}^2 = & K [(A_{20} + A_{11}x_c + B_{11}y_c - 2A_{10}z_c)^2 + \\ & + 3(A_{21} - A_{10}x_c - A_{11}z_c)^2 + 3(B_{21} - A_{10}y_c - B_{11}z_c)^2 + \\ & + 12\left(A_{22} - \frac{1}{2}A_{11}x_c + \frac{1}{2}B_{11}y_c\right)^2 + \\ & + 12\left(B_{22} - \frac{1}{2}B_{11}x_c - \frac{1}{2}A_{11}y_c\right)^2]. \end{aligned} \quad (3.223)$$

Для нахождения минимума этой величины по координатам x_c, y_c, z_c продифференцируем последнее выражение по этим переменным и приравняем производные нулю. В результате получается линейная система из трех уравнений относительно искоемых величин x_c, y_c, z_c , решение которой находится обычным способом. Его удобно записать, используя обозначения $D_x = A_{11}, D_y = B_{11}, D_z = A_{10}$ — компоненты вектора дипольного момента, $D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}$ — модуль и $C_x = D_x/D, C_y = D_y/D, C_z = D_z/D$ — направляющие косинусы этого вектора (значения этих величин одинаковы в обеих системах координат):

$$\begin{aligned} x_c = & \frac{1}{4D} [-C_x(1 + C_z^2)A_{20} + 2C_z(2 - C_x^2)A_{21} - \\ & - 2C_xC_yC_zB_{21} + 2C_x(4 - C_x^2 + C_y^2)A_{22} + 4C_y(2 - C_x^2)B_{22}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{1}{4D} [-C_y(1+C_z^2)A_{20} - 2C_xC_yC_zA_{21} + 2C_z(2-C_y^2)B_{21} - \\
 &\quad - 2C_y(4+C_x^2-C_y^2)A_{22} + 4C_x(2-C_y^2)B_{22}], \\
 z_c &= \frac{1}{4D} [C_z(3-C_z^2)A_{20} + 2C_x(2-C_z^2)A_{21} + \\
 &\quad + 2C_y(2-C_z^2)B_{21} - 2C_z(C_x^2-C_y^2)A_{22} - 4C_xC_yC_zB_{22}].
 \end{aligned}
 \tag{3.224}$$

Положение начала новой системы координат не зависит от выбора исходной системы; это легко показать путем непосредственной подстановки в (3.224) мультипольных компонент данного генератора, определенных относительно любой другой исходной системы.

Вокруг начала собственной системы координат, определяемого найденными величинами x_c, y_c, z_c , группируются в пространстве источники тока, образующие генератор. Поскольку распределение источников (конфигурация генератора) изменяется во времени, положение начала собственной системы координат также может изменяться. Поэтому такую точку иногда называют подвижным электрическим центром биоэлектрического генератора. Заметим, что принятый критерий в принципе не исключает возможности расположения начала собственной системы координат вне области источников. Например, такие условия возникают при наличии близких по абсолютной величине и противоположно направленных генераторов дипольного типа.

После нахождения начала новой системы координат можно осуществить параллельный перенос системы координат в эту точку и вычислить мультипольные компоненты в новой системе; в частности, для мультипольных членов низших порядков этот расчет осуществляется по формулам (3.220). В соответствии с критерием определения начала новой системы координат при переходе к этой системе квадрупольные компоненты генератора должны в среднем уменьшиться.

Направление осей координат удобно выбрать так, чтобы вектор D был направлен по оси z . Определим угловые координаты конца вектора D в сферической системе координат при помощи (3.171):

$$\begin{aligned}
 \theta_D &= \arccos \frac{D_z}{D}, \\
 \psi_D &= \begin{cases} \arccos \frac{D_x}{\sqrt{D_x^2 + D_y^2}}, & D_y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{D_x}{\sqrt{D_x^2 + D_y^2}}, & D_y < 0 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.225}$$

и повернем систему координат xyz сначала относительно оси z на

угол ψ_D , а затем относительно новой оси y на угол θ_D . Мультипольные компоненты в новой системе координат, полученной после этих поворотов, можно вычислить по (3.221). Кроме того, перенесем начало координат в электрический центр. В результате получим

$$A_{11} = B_{11} = 0, \quad A_{20} = A_{21} = B_{21} = 0. \quad (3.226)$$

Таким образом, если начало новой системы координат находится в подвижном электрическом центре, а ее ось z ориентирована в направлении вектора дипольного момента, то две из трех дипольных и три из пяти квадрупольных компонент принимают нулевое значение. Результирующие значения мультипольных компонент не зависят от того, в каком порядке осуществляется переход к новой системе координат, т.е. что выполняется раньше — параллельный перенос или поворот осей координат.

Наконец, еще одним поворотом системы координат относительно оси z можно свести к нулю одну из оставшихся квадрупольных компонент, скажем, компоненту B_{22} . Приравнявая нулю соответствующую компоненту в новой системе координат ($B'_{22} = 0$), получим из (3.221) для искомого угла поворота относительно оси z

$$\operatorname{tg} 2\alpha_z = \frac{B_{22}}{A_{22}}, \quad \alpha_z = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{B_{22}}{A_{22}} \pm \frac{K\pi}{2}, \quad (3.227)$$

где K — целое число. После этого поворота координат единственная ненулевая квадрупольная компонента выражается как

$$A'_{22} = \pm \sqrt{A_{22}^2 + B_{22}^2}. \quad (3.228)$$

В итоге приходим к собственной системе координат, в которой не равны нулю лишь две из восьми мультипольных компонент первого и второго порядков — дипольная компонента D_z , характеризующая суммарную дипольную интенсивность генератора, и квадрупольная компонента A_{22} , характеризующая некоторые существенные особенности его геометрической формы. Общее пространственное расположение генератора относительно исходной неподвижной системы координат характеризуется расположением начала и углами ориентации осей собственной системы координат, которая совершает эволюции в пространстве вместе с генератором. Более тонкие свойства конфигурации генератора можно описать при помощи мультипольных компонент следующих порядков (октупольных и т.д.), которые в общем случае не равны нулю в сформулированной собственной системе координат.

Мультипольное разложение скалярного магнитного потенциала. При рассмотрении мультипольного разложения для электрического поля были сформулированы точечные мультипольные источники, которые создают вне области заданного генератора электрические поля,

совпадающие с соответствующими членами мультипольного разложения поля. Такие мультиполи, по определению, порождают в однородном неограниченном проводнике электрическое поле известной формы, но не порождают магнитного поля (из-за симметричной структуры токов унипольных источников). Если эти мультиполи используются для описания какого-либо генератора, заданного в соответствии с его физической природой как векторное поле $\mathbf{J}^*$, то они отражают лишь характер источников генератора и не связаны с его вихрями.

Для целей совместного анализа электрического и магнитного полей одного и того же генератора удобно рассмотреть такие идеализированные точечные генераторы, которые аналогичны по строению мультиполям, однако порождают не только мультипольные электрические поля, но и магнитные поля характерной формы, однозначно определяемые параметрами мультиполей. В отличие от описанных выше мультиполей, которые мы иногда называем мультипольными источниками, мультиполи последнего типа будем называть токовыми мультипольными генераторами или просто токовыми мультиполями. Выше было уже сформулировано понятие токового диполя, электрический потенциал и магнитная индукция которого выражаются соответственно уравнениями (3.131) и (3.132). Используя мультипольные обозначения, получим из этих уравнений следующие выражения для электрического потенциала и компонент магнитной индукции токового диполя, расположенного в начале координат и ориентированного по оси z , в однородном неограниченном проводнике с удельной электрической проводимостью σ :

$$\varphi = \frac{M_1 z}{4\pi\sigma r^3} = \frac{A_{10} z}{4\pi\sigma r^3}; \quad (3.229)$$

$$\left. \begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0 M_1 y}{4\pi r^3} = -\frac{\mu_0 A_{10} y}{4\pi r^3}, \\ B_y &= \frac{\mu_0 M_1 x}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 A_{10} x}{4\pi r^3}, \quad B_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.230)$$

Для того чтобы аналогичным образом описать токовые мультиполи следующих порядков, электрическое и магнитное поля которых однозначно определяются компонентами обычных электрических мультиполей, воспользуемся тензорными свойствами мультиполей, позволяющими таким образом повернуть систему координат в пространстве, чтобы данный мультиполь представлялся в виде совокупности осевых мультиполей [32]. Например, при построении осевого мультиполя второго порядка — квадруполь — исходные диполи расположены на одной прямой, проходящей через начало координат, а векторы их дипольных моментов ориентированы вдоль этой же прямой, как показано на

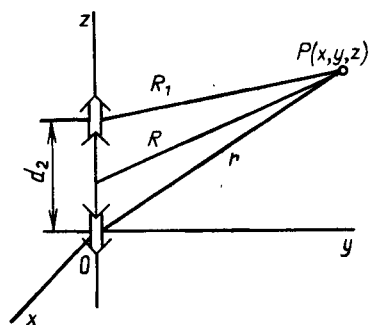


Рис. 3.5. Построение квадрупольного генератора (осевого токового квадруполь) из двух дипольных генераторов

рис. 3.5 для частного случая, когда диполи расположены на оси z координатной системы. Исходя из (3.229) и (3.230) и выполняя предельный переход, получим для электрических и магнитных полей осевых квадрупольных генераторов, ориентированных вдоль координатных осей: по оси x

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\sigma r^5} \left[\frac{1}{2} A_{20}^{(x)} (2z^2 - x^2 - y^2) + 3A_{22}^{(x)} (x^2 - y^2) \right], \\ B_x &= 0, \quad B_y = \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} A_{20}^{(x)} xz = -\frac{3\mu_0}{2\pi r^5} A_{22}^{(x)} xz, \\ B_z &= -\frac{3\mu_0}{4\pi r^5} A_{20}^{(x)} xy = \frac{3\mu_0}{2\pi r^5} A_{22}^{(x)} xy; \end{aligned} \right\} \quad (3.231)$$

по оси y

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\sigma r^5} \left[\frac{1}{2} A_{20}^{(y)} (2z^2 - x^2 - y^2) + 3A_{22}^{(y)} (x^2 - y^2) \right], \\ B_x &= -\frac{3\mu_0}{4\pi r^5} A_{20}^{(y)} yz = -\frac{3\mu_0}{2\pi r^5} A_{22}^{(y)} yz, \\ B_y &= 0, \quad B_z = \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} A_{20}^{(y)} xy = \frac{3\mu_0}{2\pi r^5} A_{22}^{(y)} xy; \end{aligned} \right\} \quad (3.232)$$

по оси z

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{8\pi\sigma r^5} A_{20}^{(z)} (2z^2 - x^2 - y^2), \\ B_x &= -\frac{3\mu_0}{8\pi r^5} A_{20}^{(z)} yz, \quad B_y = \frac{3\mu_0}{8\pi r^5} A_{20}^{(z)} xz, \quad B_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.233)$$

где $A_{20}^{(x)}, A_{22}^{(x)}, A_{20}^{(y)}, A_{22}^{(y)}, A_{20}^{(z)}$ — не равные нулю компоненты соответствующих осевых квадрупольей.

Далее повернем систему координат в пространстве так, чтобы матрица компонент рассматриваемого квадрупольного источника общего вида стала диагональной. При этом обращаются в нуль все квадрупольные компоненты, кроме двух, A_{20} и A_{22} . Полученный квадруполь можно представить в виде двух осевых квадрупольей, направленных по любой паре осей координат. Компоненты осевых квадрупольей однозначно определяются по компонентам A_{20} и A_{22} повернутого исходного квадруполья:

для осевых квадрупольей по осям x и y

$$A_{20}^{(x)} = \frac{1}{2}(A_{20} - 2A_{22}), \quad A_{22}^{(x)} = -\frac{1}{4}(A_{20} - 2A_{22}), \quad (3.234)$$

$$A_{20}^{(y)} = \frac{1}{2}(A_{20} + 2A_{22}), \quad A_{22}^{(y)} = \frac{1}{4}(A_{20} + 2A_{22});$$

для осевых квадрупольей по осям y и z

$$A_{20}^{(y)} = 2A_{22}, \quad A_{22}^{(y)} = A_{22}, \quad A_{20}^{(z)} = A_{20} - 2A_{22}; \quad (3.235)$$

для осевых квадрупольей по осям x и z

$$A_{20}^{(x)} = -2A_{22}, \quad A_{22}^{(x)} = A_{22}, \quad A_{20}^{(z)} = A_{20} + 2A_{22}. \quad (3.236)$$

Подставляя эти выражения в (3.231) — (3.233), находим, что все три варианта замены исходного квадрупольного генератора осевыми квадрупольями дают следующие значения электрического потенциала и компонент магнитной индукции:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma r^5} \left[\frac{1}{2}A_{20}(2z^2 - x^2 - y^2) + 3A_{22}(x^2 - y^2) \right]; \quad (3.237)$$

$$\left. \begin{aligned} B_x &= -\frac{3\mu_0}{8\pi r^5}(A_{20} + 2A_{22})yz, \\ B_y &= \frac{3\mu_0}{8\pi r^5}(A_{20} - 2A_{22})xz, \\ B_z &= \frac{3\mu_0}{2\pi r^5}A_{22}xy. \end{aligned} \right\} \quad (3.238)$$

Таким образом, для сформулированного квадрупольного генератора компоненты $A_{20}, A_{21}, B_{21}, A_{22}, B_{22}$ однозначно определяют его элек-

трическое и магнитное поля. В последнее уравнение входят компоненты квадрупольного с диагонализированной матрицей, т.е. матрицей, полученной после соответствующего поворота системы координат. Аналогичным образом можно сформулировать и токовые мультипольные генераторы следующих порядков, порождающие электрическое и магнитное поля.

Введем локальную декартову систему координат $l, l\theta, l\psi$, начало которой совпадает с точкой наблюдения полей и каждая ось ориентирована в направлении возрастания соответствующей сферической координаты (рис. 3.6). Компоненты магнитной индукции в этой системе координат выражаются через компоненты в системе координат x, y, z следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} B_r &= B_x \sin \theta \cos \psi + B_y \sin \theta \sin \psi + B_z \cos \theta, \\ B_\theta &= B_x \cos \theta \cos \psi + B_y \cos \theta \sin \psi - B_z \sin \theta, \\ B_\psi &= -B_x \sin \psi + B_y \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.239)$$

При помощи этих уравнений и (3.230) находим для дипольного генератора, расположенного в начале системы координат x, y, z и ориентированного вдоль оси z ,

$$B_r = 0, \quad B_\theta = 0, \quad B_\psi = [\mu_0 / (4\pi r^2)] A_{10} \sin \theta. \quad (3.240)$$

Аналогично, используя (3.238), находим для квадрупольного генератора с ненулевыми компонентами A_{20} и A_{22} :

$$\left. \begin{aligned} B_r &= 0, \quad B_\theta = -\frac{3\mu_0}{4\pi r^3} A_{22} \sin \theta \sin 2\psi, \\ B_\psi &= \frac{3\mu_0}{16\pi r^3} (A_{20} - 2A_{22} \cos 2\psi) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.241)$$

Таким образом, магнитные поля мультипольных генераторов имеют только тангенциальную компоненту (направленную по касательной к сфере с центром в начале координат).

Магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$, создаваемое произвольным генератором в однородном неограниченном проводнике, не может быть описано скалярным потенциалом, ибо оно является вихревым во всем пространстве. Следовательно, к нему нельзя непосредственно применить вышеописанный метод мультипольного разложения. Представим это поле вне области генератора как сумму двух полей (рис. 3.7):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2, \quad (3.242)$$

причем выберем в качестве составляющей $\mathbf{B}_2$ магнитное поле, со-

Рис. 3.6. Основная декартова система координат x, y, z , сферическая система координат r, θ, ψ и локальная декартова система координат ρ, φ, ψ

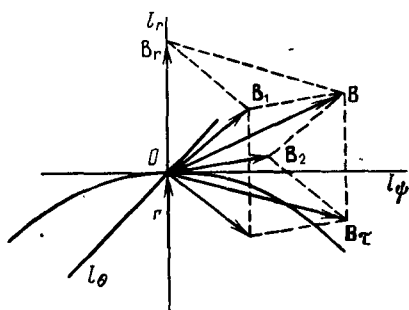
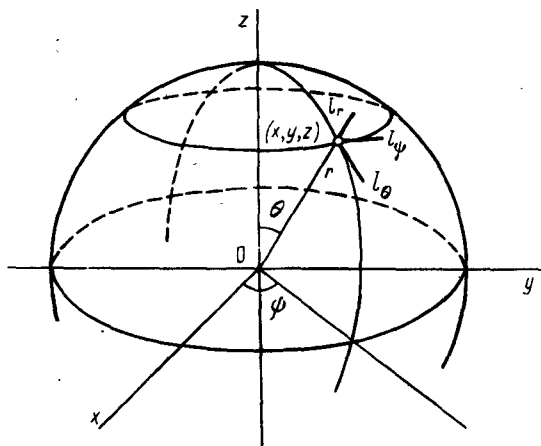


Рис. 3.7. Разложение магнитной индукции B на безвихревую составляющую B_1 и вихревую составляющую B_2

здаваемое мультипольным эквивалентным генератором, который соответствует мультипольному разложению электрического поля исходного генератора [187]. Эквивалентный генератор представляет собой последовательность мультиполей, расположенных в начале координат, и, по определению, порождает вне сферы минимального радиуса с центром в начале координат, охватывающей исходный генератор, такое же электрическое поле, как и исходный генератор; кроме того, он порождает магнитное поле, индукция которого имеет тангенциальное направление и полностью определяется параметрами мультиполей A_{nm} , B_{nm} (электрическими мультипольными компонентами). Поэтому составляющая B_1 должна быть обусловлена генератором, который представляется как разность между исходным генератором и мультипольным эквивалентным генератором и, по определению, не создает вне вышеуказанной сферы электрического поля и электрических токов. Следовательно, поле B_1 вне области генератора является безвихревым, а его радиальная компонента совпадает с радиальной компонентой исходного поля B . Поле B_1 может быть описано скалярным

магнитным потенциалом φ^M , который может быть представлен мультипольным разложением, вполне аналогичным мультипольному разложению для электрического поля (3.173):

$$\varphi^M = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm}^M r^{-n-1} P_n^m(\cos\theta) \cos m\psi + B_{nm}^M r^{-n-1} P_n^m(\cos\theta) \sin m\psi], \quad (3.243)$$

где A_{nm}^M, B_{nm}^M — мультипольные компоненты безвихревого магнитного поля, или просто магнитные мультипольные компоненты. В соответствии с (3.91) радиальная компонента магнитной индукции безвихревого (и суммарного) магнитного поля выражается как проекция отрицательного градиента потенциала на ось l_r :

$$B_r = -\frac{\partial \varphi^M}{\partial l_r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) [A_{nm}^M r^{-n-2} P_n^m(\cos\theta) \cos m\psi + B_{nm}^M r^{-n-2} P_n^m(\cos\theta) \sin m\psi]. \quad (3.244)$$

Согласно (3.107) компоненты магнитной индукции $\mathbf{B}$ в декартовой системе координат хуз выражаются как

$$\left. \begin{aligned} B_x(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[J_y^* \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{1}{R} \right) - J_z^* \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV, \\ B_y(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[J_z^* \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{R} \right) - J_x^* \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV, \\ B_z(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[J_x^* \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{1}{R} \right) - J_y^* \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV. \end{aligned} \right\} \quad (3.245)$$

Учитывая (3.239), получаем для радиальной компоненты

$$B_r(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \sin\theta \cos\psi \int_V \left[J_y^* \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{1}{R} \right) - J_z^* \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV + \right.$$

$$+ \sin \theta \sin \psi \int_V \left[J_z^* \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{R} \right) - J_x^* \frac{\partial}{\partial z_0} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV + \\ + \cos \theta \int_V \left[J_x^* \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{1}{R} \right) - J_y^* \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV \Bigg\}. \quad (3.246)$$

Разложим в этом выражении функцию $1/R$ в ряд сферических функций (3.179). Тогда ее производная по координате x_0 будет выражаться как

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{R} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0} [r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \cos m \psi_0] \cos m \psi + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_0} [r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \sin m \psi_0] \sin m \psi \right\}.$$

Выражения для производных по y_0 и z_0 аналогичны. Подставляя выражения для производных в (3.246) и учитывая (3.182), получим разложение радиальной компоненты магнитной индукции в ряд сферических функций, где каждый член порядка n соответствует члену порядка $n+1$ в разложении функции $1/R$. Вычислим члены разложения B_r , соответствующие значениям $n = 1, 2$ и 3 в разложении функции $1/R$ (для выполнения необходимых преобразований воспользуемся рекуррентными соотношениями для сферических функций, приведенными, например, в [110]).

При $n = 1$ получаем $B_r = 0$. При $n = 2$

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\int_V (-J_x^* y_0 + J_y^* x_0) dV \right] P_1(\cos \theta) + \\ + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\int_V (-J_y^* z_0 + J_z^* y_0) dV \right] P_1^1(\cos \theta) \cos \psi + \\ + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\int_V (-J_z^* x_0 + J_x^* z_0) dV \right] P_1^1(\cos \theta) \sin \psi. \quad (3.247)$$

Сопоставляя это выражение с рядом (3.244), находим, что оно должно совпадать с членом ряда порядка $n = 1$, причем магнитные мультипольные компоненты 1-го порядка, или магнитные дипольные компо-

ненты выражаются как

$$\left. \begin{aligned} A_{10}^M &= \frac{1}{2} \int_V (-J_x^* y_0 + J_y^* x_0) dV, \\ A_{11}^M &= \frac{1}{2} \int_V (-J_y^* z_0 + J_z^* y_0) dV, \\ B_{11}^M &= \frac{1}{2} \int_V (-J_z^* x_0 + J_x^* z_0) dV. \end{aligned} \right\} \quad (3.248)$$

При $n = 3$

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0}{4\pi r^4} \left[\int_V 3(-J_x^* y_0 z_0 + J_y^* x_0 z_0) dV \right] P_2(\cos \theta) + \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi r^4} \left\{ \int_V [-J_x^* x_0 y_0 + J_y^* (x_0^2 - z_0^2) + \right. \\ &+ J_z^* y_0 z_0] dV \left\{ P_2^1(\cos \theta) \cos \psi + \frac{\mu_0}{4\pi r^4} \left\{ \int_V [-J_x^* (y_0^2 - \right. \right. \\ &- z_0^2) + J_y^* x_0 y_0 - J_z^* x_0 z_0] dV \left\{ P_2^1(\cos \theta) \sin \psi + \right. \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi r^4} \left[\int_V \left(-\frac{1}{2} J_x^* y_0 z_0 - \frac{1}{2} J_y^* x_0 z_0 + \right. \right. \\ &+ J_z^* x_0 y_0) dV \left. \right] P_2^2(\cos \theta) \cos 2\psi + \frac{\mu_0}{4\pi r^4} \left\{ \int_V \frac{1}{2} \left[J_x^* x_0 z_0 - \right. \right. \\ &- J_y^* y_0 z_0 - J_z^* (x_0^2 - y_0^2)] dV \left. \right\} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\psi. \end{aligned} \quad (3.249)$$

Сопоставляя это выражение с рядом (3.244), находим, что оно должно совпадать с членом ряда порядка $n = 2$, причем магнитные мультипольные компоненты 2-го порядка, или магнитные квадрупольные компоненты, выражаются как

$$\left. \begin{aligned} A_{20}^M &= \int_V (-J_x^* y_0 z_0 + J_y^* x_0 z_0) dV, \\ A_{21}^M &= \frac{1}{3} \int_V [-J_x^* x_0 y_0 + J_y^* (x_0^2 - z_0^2) + J_z^* y_0 z_0] dV, \\ B_{21}^M &= \frac{1}{3} \int_V [-J_x^* (y_0^2 - z_0^2) + J_y^* x_0 y_0 - J_z^* x_0 z_0] dV, \end{aligned} \right\} \quad (3.250)$$

$$A_{22}^M = \frac{1}{6} \int_V (-J_x^* y_0 z_0 - J_y^* x_0 z_0 + 2J_z^* x_0 y_0) dV,$$

$$B_{22}^M = \frac{1}{6} \int_V [J_x^* x_0 z_0 - J_y^* y_0 z_0 - J_z^* (x_0^2 - y_0^2)] dV.$$

Уравнения (3.248) и (3.250) ясно показывают, что магнитные мультипольные компоненты, как и электрические, являются интегральными характеристиками генератора J^* . Однако сравнение этих выражений с (3.184) и (3.185) выявляет существенные различия. В частности, одноименные электрические и магнитные мультипольные члены определяются интегралами, в которых подынтегральные выражения содержат координаты в степенях, различающихся на единицу; в этом отношении магнитные дипольные компоненты соответствуют электрическим квадрупольным, магнитные квадрупольные — электрическим октупольным и т.д. Вообще, магнитные мультипольные компоненты отражают некоторые свойства генератора, не оказывающие влияния на электрические мультипольные компоненты.

В итоге получено разложение суммарного магнитного поля исходного генератора в однородном неограниченном проводнике в виде суммы двух рядов, из которых один представляет собой обычное мультипольное разложение потенциальной составляющей магнитного поля, а другой — последовательность магнитных полей, порождаемых токовым мультипольным эквивалентным генератором, сформулированным для электрического поля исходного генератора:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \text{grad } \varphi^M(A_{nm}^M, B_{nm}^M) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \mathbf{B}_2(\overset{\vee}{A}_{nm}, \overset{\vee}{B}_{nm}). \end{aligned} \quad (3.251)$$

Второе слагаемое однозначно определяется электрическим полем через посредство электрических мультипольных компонент A_{nm} , B_{nm} (значок над символами указывает, что они обозначают компоненты соответствующего мультиполя после приведения его к осевой форме). Следовательно, для идентификации свойств генератора, находящихся отражение только в магнитных измерениях, достаточно рассмотреть лишь первое слагаемое в (3.251).

Отметим следующее важное свойство магнитных дипольных компонент: в отличие от электрических, они изменяются при параллельном переносе системы координат. Предположим, что задана декартова система координат, оси которой параллельны соответствующим осям ис-

ходной системы, а начало находится в точке с координатами x_c, y_c, z_c в исходной системе. Тогда для магнитных дипольных компонент в новой системе координат будут справедливы следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} A_{10}' &= A_{10}^M + \frac{1}{2}y_c A_{11} - \frac{1}{2}x_c B_{11}, \\ A_{11}' &= A_{11}^M + \frac{1}{2}z_c B_{11} - \frac{1}{2}y_c A_{10}, \\ B_{11}' &= B_{11}^M + \frac{1}{2}x_c A_{10} - \frac{1}{2}z_c A_{11}, \end{aligned} \right\} \quad (3.252)$$

где A_{10}, A_{11}, B_{11} и $A_{10}^M, A_{11}^M, B_{11}^M$ — электрические и магнитные дипольные компоненты генератора в исходной системе координат соответственно. Это изменение магнитных дипольных компонент объясняется тем, что вместе с системой координат изменяет свое положение (относительно истинного генератора) сфера, вне которой определено потенциальное магнитное поле, в результате чего происходит перераспределение фиктивных магнитных источников внутри этой сферы.

Для анализа свойств генератора путем совместного рассмотрения его электрических и магнитных мультипольных компонент удобно прежде всего выразить мультипольные компоненты в собственной системе координат генератора, которую можно определить при помощи (3.224), (3.225) и (3.227). В этой системе уравнения переноса осей координат для магнитных мультипольных компонент (3.252) принимают вид

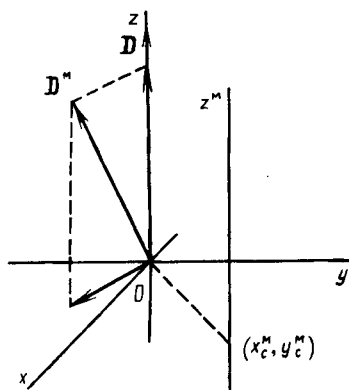
$$A_{10}' = A_{10}^M, \quad A_{11}' = A_{11}^M - \frac{1}{2}y_c A_{10}, \quad B_{11}' = B_{11}^M + \frac{1}{2}x_c A_{10}. \quad (3.253)$$

Назовем магнитным центром генератора начало новой системы координат, смещенной относительно собственной системы x_{0y} параллельно плоскости xOy таким образом, чтобы исчезла компонента магнитного дипольного момента, перпендикулярная к электрическому дипольному моменту (рис. 3.8). Ось z^M , проходящую через магнитный центр и параллельную электрическому дипольному моменту, назовем магнитной осью генератора. Координаты x_c^M, y_c^M начала новой системы координат определяются из условия равенства нулю компонент A_{11}^M, B_{11}^M , а по оси z система координат не смещается. При этих условиях уравнения (3.253) дают

$$x_c^M = -\frac{2B_{11}^M}{A_{10}}, \quad y_c^M = \frac{2A_{11}^M}{A_{10}}, \quad z_c^M = 0. \quad (3.254)$$

К определению мультипольных компонент безвихревого магнитного поля можно подойти с более общих позиций. При таком более

Рис. 3.8. Определение магнитного центра и магнитной оси генератора в собственной системе координат x, y, z ($\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^M$ — электрический и магнитный дипольные моменты соответственно)



“дедуктивным” рассмотрении применяют разложение векторного потенциала в ряд векторных сферических функций [72, с. 237; 121; 159, с. 660]. Для кучочно-однородной среды можно воспользоваться выражением для векторного потенциала (3.100), преобразовав

его таким образом, чтобы оно учитывало влияние неоднородности за счет добавления вторичных генераторов, о которых говорилось выше:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\mathbf{J}^*}{R} dV - \sum_{k=1}^N \int_{S_k} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \varphi}{R} dS \right]. \quad (3.255)$$

Разложение этого выражения в ряд векторных сферических функций и подстановка результата в (3.37) позволяет получить разложение для магнитной индукции в электрической области вне минимальной сферы, охватывающей проводящие области объекта, которое совпадает по форме с обычным скалярным разложением (3.243). Его компоненты выражаются как

$$\left. \begin{matrix} A_{nm}^M \\ B_{nm}^M \end{matrix} \right\} = \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!(n+1)}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \int_V \text{grad} \left[r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{Bmatrix} \right] \cdot \mathbf{r}_0 \times \mathbf{J}^* dV - \right. \\ & - \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi \text{grad} \left[r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{Bmatrix} \right] \cdot \mathbf{r}_0 \times d\mathbf{S} - \\ & \left. - \int_{S_e} \sigma_e \varphi \text{grad} \left[r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{Bmatrix} \right] \cdot \mathbf{r}_0 \times d\mathbf{S} \right\}, \quad (3.256) \end{aligned}$$

т.е. являются интегральными характеристиками первичных и вторичных генераторов, соответствующих вектору магнетизации (3.92). В частности, для компонент магнитного дипольного момента это уравнение с учетом (3.182) дает

$$\begin{aligned}
 A_{10}^M &= \frac{1}{2} \int_V l_z \cdot r_0 \times J^* dV - \\
 &- \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi l_z \cdot r_0 \times dS - \frac{1}{2} \int_{S_e} \sigma_e \varphi l_z \cdot r_0 \times dS, \\
 A_{11}^M &= \frac{1}{2} \int_V l_x \cdot r_0 \times J^* dV - \\
 &- \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi l_x \cdot r_0 \times dS - \frac{1}{2} \int_{S_e} \sigma_e \varphi l_x \cdot r_0 \times dS, \\
 B_{11}^M &= \frac{1}{2} \int_V l_y \cdot r_0 \times J^* dV - \\
 &- \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi l_y \cdot r_0 \times dS - \frac{1}{2} \int_{S_e} \sigma_e \varphi l_y \cdot r_0 \times dS,
 \end{aligned} \quad (3.257)$$

где l_x , l_y и l_z — единичные векторы, направленные по соответствующим координатным осям. Следовательно, вектор магнитного дипольного момента можно выразить как

$$\begin{aligned}
 D^M &= \frac{1}{2} \int_V r_0 \times J^* dV - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi r_0 \times dS - \\
 &- \frac{1}{2} \int_{S_e} \sigma_e \varphi r_0 \times dS.
 \end{aligned} \quad (3.258)$$

Вместе с тем применение разложения (3.179) к (3.157) дает для электрического дипольного момента

$$D = \int_V J^* dV = \sum_{k=1}^N \int_{S_k} (\sigma_1 - \sigma_2) \varphi dS + \int_{S_e} \sigma_e \varphi dS. \quad (3.259)$$

Последнее уравнение подтверждает тот факт, что электрический дипольный момент генератора не зависит от выбора начала координат. Кроме того, используя это уравнение, легко показать, что магнитный дипольный момент, определяемый уравнением (3.258), также не зависит от

положения начала координат (добавление к радиус-вектору текущей точки интегрирования $\mathbf{r}_0$ произвольного постоянного вектора не приводит к изменению величины $\mathbf{D}^M$).

Описанный выше способ разложения магнитного поля в однородной неограниченной среде на безвихревую и вихревую составляющие $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ можно трактовать как введение сферической поверхности с центром в начале координат, охватывающей все генераторы (как первичные, так и вторичные), и замены проводника вне этой сферы диэлектриком, после чего магнитные мультипольные компоненты определяются для этой внешней области. Рассмотрим для простоты проводящую среду без внутренней неоднородности ($\sigma_1 - \sigma_2 = 0$) и предположим, что ограничивающая ее поверхность S является сферой, центр которой всегда совпадает с началом координат ($\mathbf{r}_0 \times d\mathbf{S} = 0$). Тогда в (3.256) два последних слагаемых обращаются в нуль, и оно принимает вид

$$\left. \begin{matrix} A_{nm}^M \\ B_{nm}^M \end{matrix} \right\} = \epsilon_m \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!(n+1)} \cdot \int_V \text{grad} \left[r_0^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} \cos m \psi_0 \\ \sin m \psi_0 \end{Bmatrix} \right] \cdot \mathbf{r}_0 \times \mathbf{J}^* dV. \quad (3.260)$$

Конкретизация этого выражения для каждого значения n непосредственно дает уравнения для магнитных дипольных компонент (3.248), квадрупольных компонент (3.250) и т.д.

Некоторые интересные примеры применения скалярного мультипольного разложения магнитного поля приведены в [180].

Вычисление мультипольных компонент по экспериментальным измерениям. Поскольку для описания генератора используются электрические и магнитные мультипольные компоненты, возникает вопрос о способе их нахождения при таких условиях измерения, которые характерны для диагностического исследования, когда электрический потенциал φ может быть измерен на поверхности объекта, а магнитная индукция $\mathbf{B}$ — в любой точке вне объекта.

При помощи (3.167) и (3.168) можно по данным измерений определить значения φ_h и $\mathbf{B}_h$ для любой точки вне объекта и, в частности, для точек сферической поверхности, окружающей его. Прямое измерение φ_h и $\mathbf{B}_h$ возможно в специальных экспериментальных условиях, когда объект окружен однородной средой большого объема с удельной электрической проводимостью, близкой к его средней удельной электрической проводимости.

Далее, используя применительно к разложениям (3.173) и (3.244) тот факт, что поверхностные сферические функции $P_n^m(\cos \theta) \cos m\psi$ и $P_n^m(\cos \theta) \sin m\psi$ образуют ортогональную систему на поверхности

сферы с центром в начале координат, можно получить следующие выражения для электрических и магнитных мультипольных компонент:

$$\left. \begin{matrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{matrix} \right\} = \sigma r^{n-1} \epsilon_m \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \int_S \varphi_h P_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{Bmatrix} dS, \quad (3.261)$$

$$\left. \begin{matrix} A_{nm}^M \\ B_{nm}^M \end{matrix} \right\} = \frac{r^n \epsilon_m}{\mu_0} \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+1)(n+m)!} \int_S B_{hr} P_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{Bmatrix} dS, \quad (3.262)$$

где r — радиус произвольной сферической поверхности S с центром в начале координат, полностью охватывающей область генератора.

Как видно из сопоставления (3.261) и (3.262), выражения для магнитных мультипольных компонент отличаются от соответствующих выражений для электрических коэффициентом $r/[n+1)\sigma\mu_0]$ и вместо потенциала φ_h содержат под интегралом радиальную компоненту магнитной индукции B_{hr} .

Уравнение (3.262) в принципе можно применить для вычисления магнитных мультипольных компонент непосредственно по измерениям магнитного поля на сферической поверхности вокруг объекта, т.е. без предварительного расчета значения B_{hr} [184]. Однако в этом случае получаются значения мультипольных компонент, существенно зависящие от формы поверхности тела и не удовлетворяющие уравнению (3.260).

Известны также соотношения, позволяющие вычислить электрические мультипольные компоненты непосредственно по измерениям потенциала на поверхности объекта без промежуточного определения потенциала в однородном неограниченном проводнике [109, 110]. Для их получения нужно в обоих слагаемых уравнения (3.160) разложить функцию $1/R$ в ряд сферических функций (3.179) и почленно сопоставить разложения. В итоге получается следующее выражение для электрических мультипольных компонент через потенциал на поверхности S ограниченного проводника с удельной электрической проводимостью σ :

$$\left. \begin{matrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{matrix} \right\} = \sigma \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_S \varphi \operatorname{grad} \left[r^n P_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{Bmatrix} \right] \cdot dS, \quad (3.263)$$

где r, θ, ψ — сферические координаты точек поверхности S .

Важный частный случай — это однородный проводник в форме шара с радиусом r . Если выбрать начало координат в центре шара и применить уравнение (3.263), то оно принимает следующий вид:

$$\left. \begin{matrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{matrix} \right\} = \sigma r^{n-1} \epsilon_m \frac{n(n-m)!}{(n+m)!} \int_S \varphi P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{Bmatrix} dS, \quad (3.264)$$

где S — поверхность шара. Это выражение отличается от соответствующего выражения для однородного неограниченного проводника (3.261) только множителем $n/(2n+1)$. Заметим, что (3.264) можно получить и иным путем, а именно из (3.212), воспользовавшись свойством ортогональности сферических функций.

Для поверхности S произвольной формы удобно развернуть скалярное произведение под знаком интеграла, учитывая (3.182), и записать его в проекциях на оси декартовой системы координат x, y, z ; тогда (3.263) принимает вид

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{matrix} \right\} &= \sigma \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_S \varphi r^{n-1} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2} \left\{ \left[(n+m)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos(m-1)\psi \\ \sin(m-1)\psi \end{Bmatrix} - \right. \right. \\ &- P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos(m+1)\psi \\ \sin(m+1)\psi \end{Bmatrix} \Big] dS_x + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(n+m)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1}(\cos\theta) \begin{Bmatrix} -\sin(m-1)\psi \\ \cos(m-1)\psi \end{Bmatrix} - \right. \\ &- P_{n-1}^{m+1}(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \sin(m+1)\psi \\ -\cos(m+1)\psi \end{Bmatrix} \Big] dS_y + \\ &+ (n+m) P_{n-1}^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{Bmatrix} dS_z \Big\}, \end{aligned} \quad (3.265)$$

где dS_x, dS_y, dS_z — компоненты векторной элементарной площади поверхности dS . Отсюда можно получить следующие выражения для вычисления электрических мультипольных компонент до 2-го порядка:

$$A_{10} = \sigma \int_S \varphi dS_z, \quad A_{11} = \sigma \int_S \varphi dS_x, \quad B_{11} = \sigma \int_S \varphi dS_y; \quad (3.266)$$

$$A_{20} = \sigma \int_S \varphi (-x dS_x - y dS_y + 2z dS_z),$$

$$A_{21} = \sigma \int_S \varphi (z dS_x + x dS_z),$$

$$\begin{aligned}
 B_{21} &= \sigma \int_S \varphi (z dS_y + y dS_z), \\
 A_{22} &= \frac{1}{2} \sigma \int_S \varphi (x dS_x - y dS_y), \\
 B_{22} &= \frac{1}{2} \sigma \int_S \varphi (y dS_x + x dS_y).
 \end{aligned}
 \tag{3.267}$$

Как было указано выше, эквивалентный генератор, создающий в однородном неограниченном проводнике вне заданной области, содержащей первичный генератор, такое же электрическое поле, как и первичный генератор, и часть магнитного поля, обусловленную токовым мультипольным эквивалентным генератором, может быть представлен в виде токового сферического двойного слоя, охватывающего область генератора с центром в начале координат и радиусом r . Если разложить мощность такого двойного слоя DS в ряд сферических функций и сравнить выражение для коэффициентов ряда со следующим выражением для мультипольных компонент двойного слоя, полученным из общего выражения (3.115):

$$\left. \begin{matrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{matrix} \right\} = r^{n-1} \epsilon_m \frac{n(n-m)!}{(n+m)!} \int_S DS P_n^m(\cos \theta) \left\{ \begin{matrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{matrix} \right\} dS,$$

(3.268)

где S — поверхность сферы с радиусом r , то нетрудно показать, что мощность этого двойного слоя выражается в виде ряда сферических функций с коэффициентами, пропорциональными электрическим мультипольным компонентам A_{nm} , B_{nm} :

$$\begin{aligned}
 DS &= DS_0 + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2n+1}{n} [A_{nm} r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) \cos m\psi + \\
 &+ B_{nm} r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) \sin m\psi],
 \end{aligned}
 \tag{3.269}$$

где DS_0 — произвольная постоянная, характеризующая свойства генератора, не находящие отражения в электрических мультипольных компонентах. Данный эквивалентный двойной слой, как и токовый мультипольный генератор, создает во внешней области вихревое магнитное поле с индукцией B_2 , которую с помощью (3.136) и (3.269) можно

представить в виде разложения в ряд:

$$B_2(r) = -\frac{\mu_0}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2n+1}{n} r^{-n-1} \cdot \left[A_{nm} \int_S P_n^m(\cos\theta_0) \cos m\psi_0 \operatorname{grad} r_0 \left(\frac{1}{R} \right) \times dS + \right. \\ \left. + B_{nm} \int_S P_n^m(\cos\theta_0) \sin m\psi_0 \operatorname{grad} r_0 \left(\frac{1}{R} \right) \times dS \right]. \quad (3.270)$$

Записывая эти интегралы в сферической системе координат, получим

$$B_2(r) = -\frac{\mu_0}{16\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2n+1}{n} r^{-n} \cdot \left[A_{nm} \int_{\psi_0=0}^{2\pi} \int_{\theta_0=0}^{\pi} P_n^m(\cos\theta_0) \cos m\psi_0 \frac{\partial}{\partial\psi_0} \left(\frac{1}{R} \right) l_{\theta_0} d\theta_0 d\psi_0 - \right. \\ \left. - B_{nm} \int_{\psi_0=0}^{2\pi} \int_{\theta_0=0}^{\pi} P_n^m(\cos\theta_0) \sin m\psi_0 \sin\theta_0 \frac{\partial}{\partial\theta_0} \left(\frac{1}{R} \right) l_{\psi_0} d\theta_0 d\psi_0 \right]. \quad (3.271)$$

где l_{θ_0} и l_{ψ_0} — единичные векторы соответствующих осей локальной системы координат в текущей точке интегрирования (область генератора).

Если в однородном неограниченном проводнике вне генератора измерена магнитная индукция, то, используя ее радиальную компоненту, можно вычислить безвихревую составляющую. Разность между суммарной магнитной индукцией и безвихревой составляющей в каждой точке области измерения дает вихревую составляющую B_2 , по которой в принципе можно с помощью (3.271) определить соответствующие электрические мультипольные компоненты. Таким образом, магнитные измерения при этих условиях позволяют получить всю доступную информацию об электромагнитном поле вне генератора.

Фундаментальные задачи биоэлектродинамики. При исследовании электрического и магнитного полей биологических объектов постоянно приходится в той или иной форме решать две фундаментальные задачи, которые в соответствии с терминологией теории поля принято называть прямой и обратной. В теории поля под прямой задачей подразумевается определение напряженности или потенциала векторного

поля по его возбудителям (источникам и вихрям), а под обратной задачей — определение возбудителей векторного поля по его напряженности или потенциалу [1 и др.]. Рассматриваемая электродинамическая система описывается несколькими векторными полями, из которых наиболее существенными являются поле плотности стороннего тока $\mathbf{J}^*$, электрическое поле $\mathbf{E}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$ (или поле магнитной индукции $\mathbf{B}$), связанные дифференциальными уравнениями Максвелла.

Принимая во внимание биофизический смысл указанных полей по отношению к изучаемым объектам, а также некоторые условия реального исследования, в частности тот факт, что для измерения доступна лишь ограниченная область пространства, обычно полагают, что прямая задача заключается в определении характеристик электромагнитного поля в области, которая считается пригодной для измерения, или наблюдения, по заданным характеристикам генератора, а обратная задача — в определении характеристик генератора по заданным (измеренным) характеристикам электромагнитного поля. Под характеристиками электромагнитного поля понимаются электрическая напряженность, магнитная напряженность (индукция) или соответствующие потенциалы (скалярный или векторный), а под характеристиками генератора — само векторное поле плотности стороннего тока, распределение в пространстве его источников и вихрей или же некоторые параметры этого распределения. В отношении электрического поля такая формулировка вполне соответствует вышеуказанной строгой формулировке, применяемой в теории поля, так как источники электрического поля и поля плотности стороннего тока совпадают (с точностью до постоянного коэффициента). В отношении магнитного поля эта формулировка имеет существенное отличие от строгой, так как его вихри не совпадают с вихрями поля плотности стороннего тока — они определяются полной плотностью тока, которая, в отличие от плотности стороннего тока, существенно зависит от структуры среды, окружающей область стороннего тока. Тем не менее при заданных свойствах среды магнитное поле однозначно определяется вихрями и источниками поля $\mathbf{J}^*$.

Нередко при формулировке прямой и обратной задач вместо указанных характеристик генератора фигурируют другие величины, по тем или иным причинам удобные для описания электрического процесса. Например, иногда в качестве решения обратной задачи используют распределение потенциала в некоторой области (обычно на поверхности) в непосредственной близости от генератора.

Представляется все же наиболее обоснованным считать искомыми величинами обратной задачи характеристики поля плотности стороннего тока, описывающего либо сам первичный генератор (внутримембранный сторонний ток), либо некоторый эквивалентный ему генератор, сформулированный на основе конкретных требований задачи и отождествляемый в последующем анализе с этим первичным генера-

тором. В частности, иногда при изучении электрического процесса в целом органе или в крупных его отделах удобно перейти от дискретной клеточной структуры к непрерывной среде — однородному проводнику, имеющему некоторую среднюю удельную электрическую проводимость, и от стороннего тока, локализованного в мембранах, — к непрерывно распределенному в этом проводнике стороннему току. В рамках сформулированной таким образом эквивалентной задачи можно полученный непрерывно распределенный эквивалентный генератор рассматривать в качестве первичного генератора J^* , характеристики которого подчиняются приведенным выше соотношениям.

Итак, под прямой задачей мы будем понимать определение напряженности (индукции) или потенциала электрического и магнитного полей в заданной области (или в заданных точках) по известным характеристикам генератора (истинного или эквивалентного), а под обратной задачей — определение характеристик генератора по известным (измеренным) напряженности (индукции) или потенциалу электрического и магнитного полей в заданной области (или в точках).

Постановка и решение прямой задачи обычно базируются на теоретических моделях изучаемого биоэлектрического процесса, причем не налагаются какие-либо жесткие ограничения на характер используемых величин. Для описания генератора можно взять его источники или вихри в форме непрерывно распределенных или точечных конфигураций, для описания электрического поля — его напряженность или скалярный потенциал, магнитного поля — его напряженность (индукцию), векторный или скалярный потенциал. Решение прямой задачи в общем случае является однозначным.

Иная ситуация имеет место при постановке и решении обратной задачи. Почти всегда конечной целью является диагностика состояния исследуемого объекта (рассматриваемая в узком смысле — как диагностика "электрического состояния") на основе данных, доступных для измерения существующими способами. Это определяет характер заданных величин — электрическое поле описывают его потенциалом, а магнитное поле — его напряженностью или индукцией. Что касается описания самого генератора, то оно тесно связано с некоторыми общими аспектами постановки и решения обратной задачи.

В общем случае, когда в качестве исходных данных можно использовать и электрические, и магнитные измерения, целесообразно выделить следующие три ключевых аспекта решения обратной задачи: определение характеристик поля, зависящих только от генератора и не зависящих от конкретной структуры среды (приведение характеристик поля к некоторой стандартной среде с заданными свойствами); определение характеристик собственно генератора по измеренным характеристикам электрического и магнитного полей; выявление взаимозависимости между электрическим и магнитным полями, а также свойств генератора, которые отражаются каждым из этих полей.

Решение первого вопроса, т.е. устранение влияния неоднородности среды на электрическое и магнитное поля в принципе возможно, если достаточно подробно известны пассивные электрические характеристики и геометрическая структура среды, в частности координаты поверхностей раздела областей с разными удельными электрическими проводимостями и электрический потенциал на этих поверхностях. Используя указанные данные, можно вычислить характеристики электрического и магнитного полей, которые создавал бы тот же самый первичный генератор, помещенный в однородный неограниченный проводник с заданной удельной электрической проводимостью.

Что касается второго вопроса — определения характеристик собственно генератора по характеристикам его электрического и магнитного полей, то оно осложняется тем, что однозначное определение генератора по измерениям его электромагнитного поля вне области расположения генератора в принципе невозможно, если конфигурация генератора совершенно произвольна (за исключением естественного ограничения, которое всегда имеется при изучении реальных объектов, что поле первичного генератора J^* существует лишь в ограниченной области пространства). Преодолеть эту трудность можно двумя способами. Один способ — считать допустимой лишь некоторую ограниченную совокупность конфигураций генератора (или модель), в пределах которой генератор однозначно определяется измерениями электромагнитного поля. Обычно в качестве допустимых выбирают точечные генераторы мультипольного (в частности, дипольного) типа. Этот путь называют методом эквивалентного генератора, так как он предусматривает замену истинного генератора генератором известной и более простой структуры, который эквивалентен истинному по некоторому заданному критерию. В дальнейшем интерпретация результатов решения обратной задачи и принятие диагностического решения осуществляются на основе анализа эквивалентного генератора. Этот подход условно назовем модельным. Другой способ — без каких-либо дополнительных ограничений на допустимую конфигурацию генератора описывать его с помощью некоторых характеристик интегрального типа, или параметров, отражающих наиболее общие и важные для диагностики свойства истинного генератора. Предусматривается, что эти характеристики могут быть однозначно определены в результате решения обратной задачи. В дальнейшем можно выносить диагностическое решение либо непосредственно по интегральным характеристикам, либо для облегчения их интерпретации привлечь понятие эквивалентного генератора, причем в качестве критерия эквивалентности тогда нужно использовать равенство интегральных характеристик истинного и эквивалентного генераторов. Этот подход условно назовем параметрическим (дальнейшее обсуждение его содержится в § 3.4).

Наконец, вопрос о взаимозависимости между электрическим и магнитным полями первичного генератора также тесно связан с естественными ограничениями, которым подчинен генератор в изучаемом объекте. Этот вопрос довольно подробно обсужден в [71, с.177; 72, с.311; 101, 135, 155, 168, 170, 197, 201], дополнительные соображения содержатся в § 3.4. Отметим следующее: согласно математической теории поля векторное поле генератора $\mathbf{J}^*$, как и любое другое векторное поле, можно представить в виде суммы двух составляющих полей — поля без вихрей, источниками которого являются источники (дивергенция) исходного поля, и поля без источников, вихрями которого являются вихри (ротор) исходного поля; источники и вихри определяют соответственно скалярный и векторный потенциалы, удовлетворяющие уравнению Пуассона; составляющие поля, обусловленные источниками и вихрями, определяются как отрицательный градиент скалярного потенциала и ротор векторного потенциала соответственно (теорема Гельмгольца [158 и др.]). Если на функцию $\mathbf{J}^*$ не наложены никакие дополнительные ограничения (кроме математических условий применимости теоремы Гельмгольца), то ее источники и вихри являются независимыми в том смысле, что для однозначного задания функции необходимо задать отдельно возбудители каждого вида. Если же на рассматриваемую функцию наложены определенные ограничения (как обычно бывает при исследовании биоэлектрического генератора), то при заданных возбудителях одного вида возбудители другого вида могут быть выбраны лишь из ограниченного класса, обеспечивающего выполнение указанных ограничений (которые часто могут быть заданы в виде интегрального уравнения). Электрическое поле является безвихревым, и его источники с точностью до постоянного коэффициента совпадают с источниками поля первичного генератора $\mathbf{J}^*$, поэтому электрическая напряженность пропорциональна составляющей поля первичного генератора, обусловленной его источниками. Магнитное поле не имеет источников, а его вихри равны полной плотности тока (можно показать также, что последняя идентична вихревой составляющей поля первичного генератора). Поэтому по отношению к полю первичного генератора магнитная индукция пропорциональна векторному потенциалу его вихревой составляющей.

Анализ интегральных уравнений электромагнитного поля стационарных токов с учетом приведенных соотношений показывает, что между электрическим и магнитным полями, измеряемыми вне области генератора, существует довольно сложная взаимосвязь, причем информация о генераторе, содержащаяся в электрических измерениях, частично "пересекается" с информацией, доставляемой магнитными измерениями; степень этого пересечения зависит от конкретных условий измерения, в частности наличия непроводящих областей среды.

Если измерения осуществляются в однородном неограниченном проводнике, причем на поле генератора и на взаимное расположение гене-

ратора и области измерения не наложены никакие ограничения; то электрические и магнитные измерения содержат независимую информацию об источниках и вихрях поля генератора. Однако больший интерес представляет не этот тривиальный случай, а условия решения обратной задачи, более близкие к реальным. Так, если генератор находится в ограниченной области однородного бесконечно протяженного проводника, а измерения осуществляются вне этой области, то электрические измерения содержат только информацию об источниках поля генератора, тогда как магнитные измерения содержат информацию как об источниках, так и о вихрях поля генератора (благодаря связи между источниками и вихрями, обусловленной ограниченностью генератора в пространстве).

В принципе по магнитным измерениям можно получить всю информацию о генераторе, содержащуюся в электрических, и некоторую дополнительную информацию о структуре генератора. Следует отметить, однако, что если генератор задан в виде непрерывно распределенного поля плотности стороннего тока без каких-либо ограничений на это поле, то указанные измерения (как электрические, так и магнитные) не позволяют однозначно определить поле генератора, а определяют лишь некоторую совокупность его интегральных характеристик. В частности, по измеренному электрическому потенциалу можно найти систему электрических мультипольных компонент для источников поля генератора. По измеренной магнитной индукции можно сначала найти магнитные мультипольные компоненты, содержащие информацию о генераторе, отсутствующую в электрическом потенциале, затем определить безвихревую составляющую магнитного поля, вычесть ее из суммарного магнитного поля и по разности этих полей определить электрические мультипольные компоненты. Если налагать на структуру поля генератора все большие ограничения, то результатом будет, во-первых, увеличение степени определенности решения обратной задачи и, во-вторых, усиление зависимости между электрическими и магнитными измерениями. Примерами конфигураций генератора, имеющих довольно значительные "геометрические" ограничения, однако не определяемых однозначно, являются разомкнутая нить стороннего тока и токовый равномерный двойной слой.

Далее, возможны предельные случаи, когда конфигурация генератора задана в виде вполне определенной геометрической структуры, которая может быть однозначно определена по электрическим или же по магнитным измерениям (в этом случае электрическое и магнитное поля связаны взаимно однозначной зависимостью). К таким конфигурациям относится, например, точечный токовый диполь. Известны также конфигурации генератора, создающие только магнитное поле и поэтому не поддающиеся идентификации с помощью электрических измерений. Примером может служить замкнутая нить стороннего тока.

Если же измерения осуществляются в диэлектрической среде вне ограниченной проводящей области, внутри которой расположен гене-

ратор, то информация об источниках поля генератора, получаемая при помощи магнитных измерений, в значительной степени искажается из-за действия вторичных источников, отражающих влияние неоднородности среды — наличия внешней ограничивающей поверхности и, возможно, внутренних границ между областями с разными удельными электрическими проводимостями. При этих условиях для получения всех доступных сведений о генераторе необходимо наряду с магнитной индукцией во внешней среде измерять электрический потенциал на поверхности исследуемого объекта.

3.3. Математическое описание электромагнитного поля на уровне возбудимых клеток

Эквивалентные генераторы для клетки произвольной формы. При анализе биоэлектрического и биоманитного полей на клеточном уровне обычно рассматривают упрощенные модели клеточного генератора, имеющие достаточно простое математическое описание и в то же время создающие в области измерения практически такие же электрический потенциал и магнитную индукцию, как и реально существующий биоэлектрический генератор. Важным требованием к такому идеализированному, или эквивалентному, генератору является то, что его параметры должны быть достаточно четко связаны с существенными анатомическими и электрофизиологическими характеристиками изучаемого объекта, в данном случае отдельной клетки возбудимой ткани. Существенной анатомической характеристикой клетки является геометрическая форма ее оболочки (мембраны), а в качестве основной электрофизиологической характеристики, которая поддается непосредственному экспериментальному измерению, обычно используют трансмембранный потенциал — разность электрических потенциалов между двумя противоположными точками на внутренней и наружной поверхностях клеточной мембраны.

Обычно при экспериментальных измерениях, как и в естественных условиях, клетки окружены хорошо проводящей средой сравнительно большого объема. Хотя эта среда может быть неоднородной, ее удельная электрическая проводимость везде равна или больше удельной проводимости внутриклеточного вещества и во много раз больше удельной проводимости мембраны. Поэтому неоднородность внешней среды мало влияет на свойства клетки как электрического генератора, и при описании последнего мы допустим, что клетка окружена однородным бесконечно протяженным проводником. Предположим также, что клетка имеет произвольную форму, ее мембрана представляет собой замкнутую оболочку, толщина которой конечна, но невелика по сравнению с размерами клетки, и заполнена однородным внутриклеточным веществом (рис. 3.9). Первичным генератором является поле плотности стороннего тока J^* , обусловленного биохимическими силами (концентрационными градиентами ионов) и существующего только в области самой мембра-

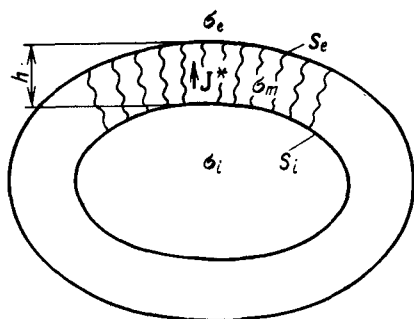


Рис. 3.9. Первичный биоэлектрический генератор малого участка клеточной мембраны

ны. Полагая, что точка наблюдения находится вне клетки, применим к внутриклеточной и внеклеточной областям уравнение теоремы Грина (3.151) с учетом того, что ни в одной из этих областей нет поля генератора; просуммируем эти уравнения и преобразуем результат по аналогии с выводом (3.152):

$$\begin{aligned} \varphi(r) = & \frac{1}{4\pi\sigma_e} \left[\oint_{S_e} \sigma_e \varphi_e \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS - \right. \\ & - \oint_{S_i} \sigma_i \varphi_i \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS - \oint_{S_e} \frac{\sigma_e}{R} \operatorname{grad}_{r_0} \varphi_e \cdot dS + \\ & \left. + \oint_{S_i} \frac{\sigma_i}{R} \operatorname{grad}_{r_0} \varphi_i \cdot dS \right], \end{aligned} \quad (3.272)$$

где S_e и S_i — наружная и внутренняя поверхности мембраны соответственно.

Поскольку толщина мембраны существенно меньше протяженности ее поверхности и расстояния от нее до точек наблюдения поля, заменим интегрирование по ее поверхностям интегрированием по одной промежуточной поверхности S_m , аппроксимирующей мембрану в целом. Тогда в силу граничного условия (3.145) сумма двух последних интегралов в (3.272) обратится в нуль, и окончательно получим

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\sigma_e} \oint_{S_m} (\sigma_e \varphi_e - \sigma_i \varphi_i) \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS. \quad (3.273)$$

Исходя из (3.113) и действуя аналогично выводу уравнений (3.161) и (3.273), найдем, что магнитная индукция вне клетки выражается как

$$\mathbf{B}(r) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_m} (\sigma_e \varphi_e - \sigma_i \varphi_i) \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times dS. \quad (3.274)$$

Таким образом, в соответствии с (3.115) и (3.136) приходим к эквивалентному клеточному генератору в виде токового двойного слоя, расположенного в однородном неограниченном проводнике с характеристиками σ_e и μ_0 ; этот двойной слой лежит на поверхности, аппроксимирующей мембрану, и имеет мощность

$$D_S = \sigma_e \varphi_e - \sigma_i \varphi_i. \quad (3.275)$$

Выражения для электрического потенциала и магнитной индукции рассматриваемой модели клетки можно получить, непосредственно применяя к ней уравнения (3.153) и (3.164):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\sigma_e} \left[\int_{V_m} \mathbf{J}^* \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV - \right. \\ & - \oint_{S_i} (\sigma_i - \sigma_m) \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} - \\ & \left. - \oint_{S_e} (\sigma_m - \sigma_e) \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} \right], \end{aligned} \quad (3.276)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{V_m} \mathbf{J}^* \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV + \right. \\ & + \oint_{S_i} (\sigma_i - \sigma_m) \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{S} + \\ & \left. + \oint_{S_e} (\sigma_m - \sigma_e) \varphi \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{S} \right], \end{aligned} \quad (3.277)$$

где V_m — объем области мембраны. После замены поверхностей интегрирования общей аппроксимирующей поверхностью и некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\sigma_e} \left[\int_{V_m} \mathbf{J}^* \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV + \right. \\ & + \oint_{S_m} (\sigma_e \varphi_e - \sigma_i \varphi_i) \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} + \\ & \left. + \oint_{S_m} \sigma_m U \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} \right], \end{aligned} \quad (3.278)$$

$$\begin{aligned}
B(r) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{V_m} \mathbf{J}^* \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV - \right. \\
& - \oint_{S_m} (\sigma_e \varphi_e - \sigma_i \varphi_i) \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times dS - \\
& \left. - \oint_{S_m} \sigma_m U \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times dS \right], \quad (3.279)
\end{aligned}$$

где

$$U = \varphi_i - \varphi_e \quad (3.280)$$

— трансмембранный потенциал. Сопоставление последних уравнений с (3.273) и (3.274) свидетельствует о том, что в рассматриваемом приближении бесконечно тонкой мембраны первый и последний интегралы в (3.278) и (3.279) взаимно уничтожаются. Однако выведенные соотношения имеют существенно интегральный характер, т.е. строго справедливы для замкнутой клеточной мембраны в целом. Представляет интерес соотношение между значениями членов уравнений (3.278) и (3.279) в локальном масштабе, т.е. для каждого малого участка мембраны, с учетом того факта, что такие малые участки составляют замкнутую мембрану.

Поскольку толщина мембраны h мала, а концентрационные силы, порождающие поле генератора $\mathbf{J}^*$, направлены преимущественно по нормали к поверхностям мембраны, можно допустить, что поверхности рассматриваемого малого участка мембраны являются параллельными плоскостями, причем поле $\mathbf{J}^*$ в области мембраны постоянно и направлено по перпендикуляру к этим плоскостям. В соответствии с моделью Ходжкина—Хаксли (см. [43, 154]) плотность тока $\mathbf{J}^*$ для ионов каждого вида можно представить как произведение равновесного трансмембранного потенциала U^i на поверхностную удельную проводимость мембраны G^i , при этом удельная электрическая проводимость мембраны выражается как $\sigma_m = G^i h$. При этих допущениях первые слагаемые в (3.278) и (3.279) можно представить в следующем виде:

$$\int_{V_m} \mathbf{J}^* \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV = \oint_{S_m} \sigma_m U^i \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS, \quad (3.281)$$

$$\int_{V_m} \mathbf{J}^* \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV = - \oint_{S_m} \sigma_m U^i \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times dS. \quad (3.282)$$

Заметим далее, что потенциалы U и U^i имеют один и тот же порядок 10^2 мВ, удельные электрические проводимости σ_i и σ_e — порядок

не меньше 10^{-3} См/см, толщина мембраны h — порядок 10^{-6} см и ее удельная проводимость G^i — порядок $10^{-3} - 10^{-1}$ См/см² (см. [43, 154]), откуда получаем порядок σ_m от 10^{-9} до 10^{-7} См/см. Следовательно, элементарные составляющие эквивалентного генератора, определяемые подынтегральными выражениями первого и последнего слагаемых в (3.278) и (3.279), в $10^4 - 10^6$ раз меньше, чем составляющая, определяемая подынтегральным выражением второго слагаемого, и этими малыми величинами можно пренебречь, даже рассматривая локально отдельные участки мембраны. Аналогичные оценки были получены в [157, 183].

Хотя рассмотренный эквивалентный генератор типа двойного слоя весьма точно описывает как электрическое, так и магнитное внеклеточное поле, он неудобен тем, что в выражение для его мощности (3.275) непосредственно входят внутриклеточный и внеклеточный потенциалы. На пути дальнейшего упрощения модели можно получить более удобные выражения, содержащие не внутриклеточный и внеклеточный потенциалы, а их разность — трансмембранный потенциал. Для этого нужно либо допустить равенство внутренней и наружной удельных электрических проводимостей ($\sigma_i = \sigma_e$), либо предположить, что изменения наружного потенциала во времени и в пространстве существенно меньше изменений внутреннего, так что наружный потенциал можно принять за общий уровень отсчета потенциала и положить равным нулю (последнее условие характерно для экспериментальных измерений на отдельных клетках и волокнах возбудимой ткани). В обоих случаях мощность эквивалентного токового двойного слоя мембраны выражается как $D_S = -\sigma_i U$, тогда уравнения (3.273) и (3.274) соответствующим образом упрощаются:

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \frac{\sigma_i}{4\pi\sigma_e} \oint_{S_m} U \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.283)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \sigma_i}{4\pi} \oint_{S_m} U \operatorname{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{S}. \quad (3.284)$$

Уравнения (3.273), (3.274), (3.283) и (3.284) можно записать в иной форме, используя определение телесного угла (3.116) и формулу (3.137). Так, если часть поверхности мембраны S_k имеет постоянный трансмембранный потенциал и, следовательно, может быть представлена в виде равномерного токового двойного слоя, то создаваемые ею внеклеточные поля определяются величинами

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_i U}{4\pi\sigma_e} \Omega_k, \quad (3.285)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \frac{\mu_0 \sigma_i U}{4\pi} \oint_{L_k} \frac{1}{R} d\mathbf{L}, \quad (3.286)$$

где Ω_k — телесный угол, под которым видна граница L_k поверхности эквивалентного генератора S_k . В простейшем случае, когда клеточная мембрана состоит только из двух областей — невозбужденной (поляризованной) с трансмембранным потенциалом U_a и возбужденной (деполяризованной) с трансмембранным потенциалом U_r , разделенных границей L (рис. 3.10), электрический потенциал и магнитная индукция выражаются как

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_i}{4\pi\sigma_e} (U_r - U_a) \Omega_r, \quad (3.287)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \frac{\mu_0 \sigma_i}{4\pi} (U_r - U_a) \oint_L \frac{1}{R} d\mathbf{L}, \quad (3.288)$$

где Ω_r — телесный угол, под которым видна покоящаяся часть поверхности мембраны; при вычислении последнего интеграла направление положительного обхода контура L образует правовинтовую систему с положительной стороной покоящейся части поверхности мембраны.

Кроме рассмотренного здесь эквивалентного клеточного генератора типа токового двойного слоя известны и другие поверхностно распределенные эквивалентные генераторы, в частности, имеющие структуру простого слоя источников тока и поверхностных токов. Подробно о них сказано, например, в [43, 154]. Здесь укажем лишь, что для клеток, окруженных объемным проводником большой протяженности, внеклеточный электрический потенциал можно с высокой точностью вычислить по формуле

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_e} \oint_{S_m} \frac{W_m}{R} dS, \quad (3.289)$$

где W_m — плотность тока, направленного по нормали к поверхности мембраны (мембранного тока). В этом случае эквивалентный источник сформулирован как простой слой источников тока на поверхности мембраны с плотностью источников W_m .

Эквивалентные генераторы для цилиндрической клетки. Во многих случаях клетки и волокна возбудимой ткани имеют продолговатую форму, и их мембрану с достаточной точностью можно аппроксимировать круговым цилиндром бесконечной длины; говоря точнее, клетку рассматривают как цилиндрический пространственный кабель неограниченной длины (рис. 3.11). Предполагается, что стенка цилиндра с радиусом a имеет бесконечно малую толщину и обладает электрическими ха-

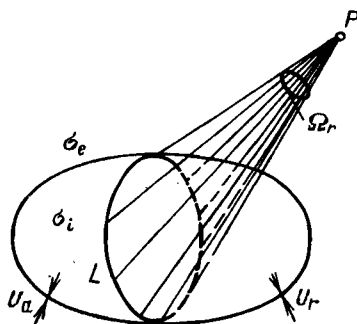


Рис. 3.10. Представление клеточного генератора в виде токового двойного слоя

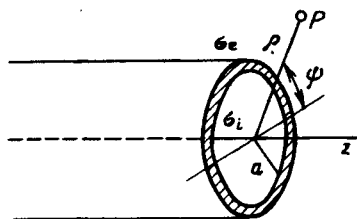


Рис. 3.11. Цилиндрическая кабельная модель возбудимой клетки

рактическими характеристиками мембраны возбудимой клетки (например, нерва). Внутри цилиндра находится однородная среда, удельная электрическая проводимость которой σ_i равна средней удельной проводимости внутриклеточного вещества, а снаружи цилиндра — однородная и бесконечно протяженная во всех направлениях среда с удельной электрической проводимостью σ_e , равной средней удельной проводимости внеклеточной области. Такая геометрическая структура обладает осевой симметрией относительно продольной оси кабеля, которая совпадает с осью z используемой цилиндрической системы координат $\rho \psi z$. Далее допускается, что характеристики электромагнитного поля, возникающего при возбуждении клетки, также симметричны относительно оси z , т.е. они постоянны по угловой координате и зависят в каждый момент времени только от двух пространственных координат — радиальной ρ и осевой z . Для этой модели было найдено решение уравнения Лапласа для электрического потенциала в цилиндрической системе координат с помощью разложения внутриклеточного и внеклеточного потенциалов по модифицированным бесселевым функциям с учетом граничных условий, определяемых свойствами клеточной мембраны [76, 77, 113]. Потенциалы во внутриклеточной и внеклеточной областях выражаются через трансмембранный потенциал следующими уравнениями:

$$\varphi_i(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\rho, k) e^{-jkz} dk, \quad \rho < a, \quad (3.290)$$

$$\varphi_e(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_e(\rho, k) e^{-jkz} dk, \quad \rho > a, \quad (3.291)$$

где

$$\varphi_i(\rho, k) = \frac{U(k) I_0(|k|\rho)}{\beta(|k|a) I_0(|k|a)}, \quad (3.292)$$

$$\varphi_e(\rho, k) = \frac{U(k) K_0(|k| \rho)}{\alpha(|k| a) K_0(|k| a)} \quad (3.293)$$

— преобразования Фурье от внутриклеточного и внеклеточного потенциалов соответственно; $U(k)$ — преобразование Фурье от трансмембранного потенциала $U(z)$, определенное как

$$U(k) = \int_{-\infty}^{\infty} U(z) e^{ikz} dz \quad (3.294)$$

и

$$\alpha = -1 - \frac{\sigma_e K_1(|k| a) I_0(|k| a)}{\sigma_i K_0(|k| a) I_1(|k| a)},$$

$$\beta = 1 + \frac{\sigma_i K_0(|k| a) I_1(|k| a)}{\sigma_e K_1(|k| a) I_0(|k| a)};$$

здесь I_0, I_1, K_0, K_1 — модифицированные бесселевы функции первого и второго рода порядка 0 и 1 соответственно; k — переменная преобразования.

На основе этих уравнений можно получить выражения для магнитной индукции рассматриваемой модели клетки [166, 183]. Применим закон полного тока Ампера, который выражается уравнением (3.27), к круглому замкнутому контуру с радиусом ρ и с центром на оси клетки, лежащему в плоскости, перпендикулярной к оси. Для этих условий получаем из (3.27)

$$B(\rho, z) = \frac{\mu_0}{2\pi\rho} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.295)$$

и с учетом (3.7) и (3.85)

$$B(\rho, z) = - \frac{\mu_0}{2\pi\rho} \left[\int_{S_a} \sigma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dS + \int_{S_{ar}} \sigma_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} dS \right], \quad (3.296)$$

где B — абсолютная величина магнитной индукции, направленной по касательной к рассматриваемому контуру (в силу осевой симметрии модели); S_a и S_{ar} — участки плоскости, ограниченной контуром, внутри и снаружи клетки соответственно.

Преобразуем по Фурье это уравнение аналогично трансмембранному потенциалу в уравнении (3.294), учитывая уравнения (3.292) и (3.293):

$$B(\rho, k) = \frac{\mu_0 ik U(k)}{\rho |k|} \left\{ \frac{\sigma_i a I_1(|k| a)}{\beta(|k| a) I_0(|k| a)} + \right.$$

$$+ \left. \frac{\sigma_e [aK_1(|k|a) - \rho K_1(|k|\rho)]}{a(|k|a) K_0(|k|a)} \right\}. \quad (3.297)$$

При выводе этого уравнения были использованы следующие соотношения для модифицированных бесселевых функций:

$$\int I_0(x) x dx = x I_1(x),$$

$$\int K_0(x) x dx = -x K_1(x).$$

Окончательное выражение для магнитной индукции определяется обратным преобразованием

$$B(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\rho, k) e^{-jkz} dk. \quad (3.298)$$

Уравнения (3.290) — (3.298) дают возможность точно рассчитать электрический потенциал и магнитную индукцию на любом расстоянии от возбуждающейся цилиндрической клетки, вплоть до ее поверхности. В частности, с помощью данной модели была проведена оценка точности других способов расчета внеклеточных полей, основанных на формулировке простых по структуре эквивалентных генераторов (см. [43] и др.). Так, было показано, что для экспериментальных исследований на препаратах клеток в физиологическом растворе достаточно высокую точность обеспечивают уравнения (3.283) — (3.289), базирующиеся на представлении клеточного генератора в виде эквивалентных генераторов, распределенных на поверхности клетки. Из этого следует, что электрическое поле во внеклеточной проводящей среде практически определяется только мембранным током (нормальной составляющей тока на поверхности клетки), а магнитное поле — осевым внутриклеточным током (тангенциальной составляющей тока).

Очевидно, для цилиндрической клетки ограниченной длины, являющейся частным случаем клетки произвольной формы, применимы описанные выше поверхностные эквивалентные генераторы. Наряду с ними цилиндрическая модель позволяет легко сформулировать и другие эквивалентные генераторы как распределенного, так и сосредоточенного типа. Рассмотрим (без формального вывода, который можно найти в [43, 154, 157]) некоторые варианты эквивалентных генераторов. Их можно трактовать как распределенные токовые диполи, создающие и электрическое, и магнитное поля (формулировка эквивалентных источников, отдельно описывающих только ту часть генератора, которая создает электрическое поле, здесь не рассматривается, о них подробно сказано в [43]). Для цилиндрической модели с ограниченной длиной, когда диаметр клетки значительно (в несколько раз) меньше ее длины, обычно учитывают граничные условия на концах клетки: если концы клетки закрыты неповрежденной мембраной, то выполняются так назы-

ваемые условия изолированного конца — равенство нулю осевого внутриклеточного тока, а следовательно, и производной трансмембранного потенциала в направлении оси клетки; если же конец клетки полностью разрушен, то выполняется так называемое условие полного повреждения — равенство нулю трансмембранного потенциала (возможны и промежуточные случаи).

Объемно распределенный эквивалентный генератор для цилиндрической клетки представляет собой распределение внутри клетки токовых диполей с объемной плотностью дипольного момента $-\sigma_i \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)$, ориентированных в направлении оси клетки z , причем плотность дипольного момента в каждом сечении не зависит от радиальной координаты. Этот эквивалентный генератор формально совпадает с распределенным сторонним током, имеющим такое же значение, как и плотность дипольного момента эквивалентного генератора. Используя (3.101) и (3.107) — (3.109) с учетом цилиндрической формы клетки, получим следующие выражения для внеклеточных электрического потенциала и магнитной индукции в однородной неограниченной среде с удельной электрической проводимостью σ :

$$\varphi(r) = - \frac{\sigma_i}{4\pi\sigma} \int_{z_1}^{z_2} \int_A \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) dA dz, \quad (3.299)$$

$$\begin{aligned} B(r) &= - \frac{\mu_0 \sigma_i}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_A \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{I}_z \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dA dz = \\ &= - \frac{\mu_0 \sigma_i}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_A \frac{1}{R} \text{rot} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{I}_z \right) dA dz, \end{aligned} \quad (3.300)$$

где A — поверхность поперечного сечения клетки; z_1, z_2 — координаты концов клетки; $\mathbf{I}_z$ — единичный вектор в направлении оси z .

При некоторых условиях целесообразно дальнейшее упрощение эквивалентного генератора. Если имеется область резкого перепада трансмембранного потенциала, протяженность которой вдоль оси клетки мала по сравнению с расстоянием от клетки до точки наблюдения, то достаточно точным будет поверхностный эквивалентный генератор в виде токового двойного слоя в плоскости поперечного сечения клетки, расположенной в области наиболее крутого изменения трансмембранного потенциала. Мощность двойного слоя определяется как суммарный дипольный момент на единицу площади поперечного сечения клетки, а электрический потенциал и магнитная индукция вне клетки выражаются уравнениями (3.115) и (3.136), в которых интегралы берутся по поверхности поперечного сечения клетки, где находится эквивалентный двойной слой.

Если область наблюдения расположена на расстоянии от клетки, много большем ее диаметра, то можно воспользоваться линейным эквивалентным генератором в виде распределения токовых диполей на оси клетки, ориентированных вдоль этой оси. Этот эквивалентный генератор формально совпадает с линейным распределением стороннего тока, имеющего такое же значение, как и линейная плотность дипольного момента эквивалентного генератора, или дипольный момент на единицу длины генератора. Он определяется как суммарный дипольный момент на единицу длины клетки, который для круглой цилиндрической модели клетки с радиусом a в соответствии с (3.299) равен

$$D_L = -\pi a^2 \sigma_i \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.301)$$

Уравнения (3.107) и (3.109), преобразованные применительно к генератору, распределенному вдоль линии, дают с учетом (3.301) следующие выражения для электрического потенциала и магнитной индукции вне клетки:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{a^2 \sigma_i}{4\sigma} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) dz = \\ &= \frac{a^2 \sigma_i}{4\sigma} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \right) dz; \end{aligned} \quad (3.302)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 a^2 \sigma_i}{4} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial}{\partial l_\rho} \left(\frac{1}{R} \right) \mathbf{l}_\psi dz, \quad (3.303)$$

где $\mathbf{l}_\rho$ и $\mathbf{l}_\psi$ — единичные векторы соответствующих осей локальной декартовой системы координат $l_\rho l_\psi l_z$ в точке наблюдения.

Клеточные эквивалентные генераторы рассмотренных типов иллюстрируются на схеме рис. 3.12. Они находят применение при необходимости точного расчета электромагнитного поля нервных и мышечных волокон в электрофизиологических экспериментальных исследованиях и при математическом моделировании возбудимой ткани (см. [18, 43, 57, 154, 181 и др.]).

Однако в большинстве случаев можно обеспечить удовлетворительную точность описания клеточных полей, формулируя эквивалентные генераторы еще более простой структуры — токовые диполи. Такая аппроксимация целесообразна для участков кругового изменения трансмембранного потенциала в области перехода клетки от состояния покоя к возбужденному состоянию (область деполяризации) и возвращения от возбужденного состояния к состоянию покоя (область реполяризации). Дипольный момент эквивалентного диполя для каждой из этих

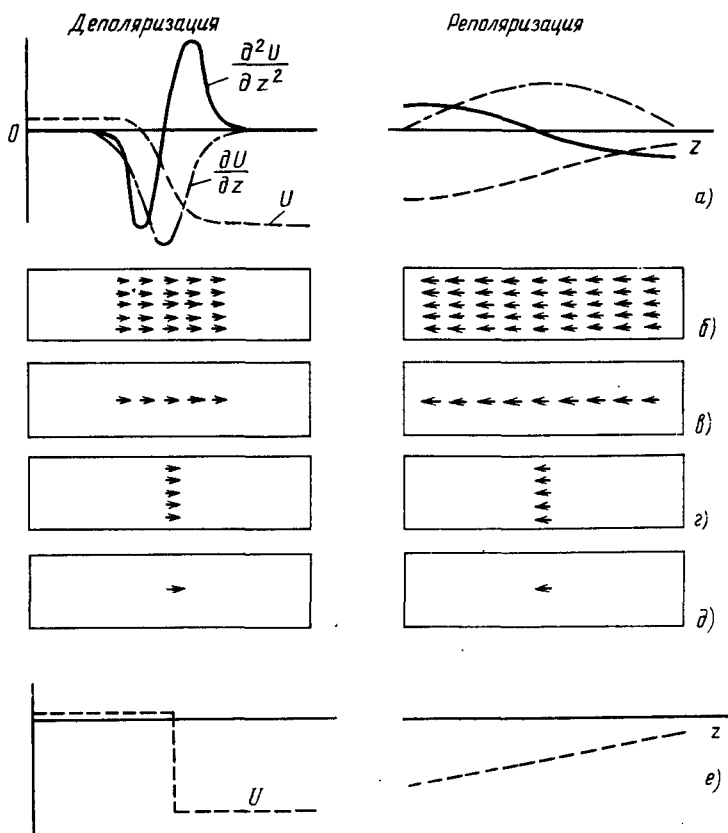


Рис. 3.12. Эквивалентные генераторы для цилиндрической модели клетки миокарда в фазе деполяризации и в фазе конечной реполяризации:

а – изменение трансмембранного потенциала U (---) и его производных dU/dz (-.-.-) и d^2U/dz^2 (—) вдоль оси клетки z в определенный момент времени соответствующей фазы возбуждения; *б* – объемно распределенный эквивалентный генератор; *в* – линейно распределенный (осевой) эквивалентный генератор; *г* – поверхностно распределенный (в плоскости поперечного сечения клетки) эквивалентный генератор; *д* – сосредоточенный (дипольный) эквивалентный генератор; *е* – идеализированные распределения трансмембранного потенциала (ступенчатое и прямолинейное)

областей естественно принять равным суммарному дипольному моменту первичного генератора. В силу осевой симметрии поля вектор дипольного момента направлен по оси клетки. Оптимальное расположение диполя выбирается в точке наиболее крутого пространственного изменения трансмембранного потенциала (рис. 3.12). Пользуясь понятиями теории мультипольного разложения, можно определить эту точку на основе ми-

нимизации недипольной части внеклеточного потенциала, разложенного в мультипольный ряд. Чтобы получить значение дипольного момента клеточного эквивалентного генератора, проинтегрируем (3.301) по длине клетки:

$$D = \int_{z_1}^{z_2} D_L dz = \pi a^2 \sigma_i (U_1 - U_2), \quad (3.304)$$

где U_1 и U_2 — трансмембранные потенциалы на соответствующих концах клетки. Таким образом, дипольный момент клетки не зависит от характера изменения трансмембранного потенциала по оси, а полностью определяется его значениями на концах клетки. Теперь на основании (3.131) и (3.132) можно записать выражения для электрического потенциала и магнитной индукции клеточного дипольного генератора:

$$\varphi(r) = \frac{a^2 \sigma_i}{4\sigma} (U_1 - U_2) l_z \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right), \quad (3.305)$$

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 a^2 \sigma_i}{4} (U_1 - U_2) l_z \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (3.306)$$

Выберем систему координат с началом в точке расположения диполя. Тогда (3.305) и (3.306) дают следующие простые формулы для электрического потенциала и компонент магнитной индукции, соответствующие (3.229) и (3.230):

$$\varphi(r) = \frac{a^2 \sigma_i (U_1 - U_2) z}{4\sigma r^3}; \quad (3.307)$$

$$\left. \begin{aligned} B_x(r) &= - \frac{\mu_0 a^2 \sigma_i (U_1 - U_2) y}{4r^3}, \\ B_y(r) &= \frac{\mu_0 a^2 \sigma_i (U_1 - U_2) x}{4r^3}, \\ B_z(r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.308)$$

Следует отметить, что описание клеточного генератора одним диполем целесообразно лишь в тех случаях, когда дипольная составляющая его поля действительно является доминирующей. Например, импульс трансмембранного потенциала, или потенциал действия, возбуждающейся клетки миокарда имеет такую длительность, что обычно клетка сначала охватывается фазой деполяризации, на протяжении которой в пределах

клетки имеется только один крутой перепад трансмембранного потенциала; затем клетка охватывается фазой реполяризации, когда вдоль нее также имеется перепад трансмембранного потенциала, хотя и менее крутой (рис. 3.12). В обеих фазах внеклеточное электромагнитное поле довольно хорошо аппроксимируется при помощи одного токового диполя. Однако в тех случаях, когда пространственная протяженность потенциала действия меньше длины клетки, как это бывает при распространении возбуждения по нейрону, в клетке одновременно существуют две области перепада трансмембранного потенциала противоположных знаков, вследствие чего внеклеточное поле имеет "квадрупольную" форму, и для его описания целесообразно применять эквивалентный генератор в виде двух противоположных по направлению диполей (соответствующих фазам потенциала действия) или в виде линейного квадруполя. Эти вопросы, а также особенности формулировки клеточных эквивалентных генераторов для клеток и волокон с изгибами и разветвлениями подробно обсуждены в [18].

Эквивалентные генераторы для макроскопических участков возбудимой ткани. В экспериментальных электрофизиологических исследованиях чаще всего приходится иметь дело не с отдельными клетками, а с препаратами возбудимых тканей — пучками мышечных и нервных волокон или участками ткани, содержащими большое число (от тысяч до миллионов) клеток; клетки более или менее сильно связаны между собой электрической связью и охватываются возбуждением регулярно в том смысле, что распределение трансмембранного потенциала на рассматриваемом участке ткани имеет достаточно гладкую форму, характеризующую постепенное распространение возбуждения по мембранам клеток.

Наиболее простая макроскопическая структура — пучок клеток, или волокон, кабельного типа, расположенных параллельно и слабо связанных между собой в поперечном направлении. Предполагается, что каждая клетка имеет цилиндрическую форму, а трансмембранный потенциал имеет постоянное значение во всех точках мембраны для каждого поперечного сечения клетки. Иными словами, возбуждение распространяется от одного конца клетки к другому (хотя в общем случае в одном и том же поперечном сечении пучка трансмембранные потенциалы отдельных клеток могут иметь разные значения, т.е. потенциалы действия могут различаться по фазе). Для формулировки эквивалентного генератора такого пучка клеток можно взять за основу приведенный выше объемно распределенный эквивалентный генератор для цилиндрической клетки, ориентированной вдоль оси z , с плотностью дипольного момента $-\sigma_i \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)$ и осреднить его на макроскопическом участке поперечного сечения пучка, учитывая плотность упаковки клеток в пучке. Тогда плотность дипольного момента для объемно распределенного эквивалентного генератора пучка выражается как

$$J^* = -A_c \sigma_i \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (3.309)$$

где A_c — отношение площади поперечного сечения клеток и общей площади поперечного сечения пучка (в данной модели эта величина совпадает с относительным объемом клеток в общем объеме ткани).

В частности, если волна деполяризации распространяется вдоль пучка достаточно монолитным фронтом (т.е. ее пространственная протяженность вдоль пучка невелика), то объемно распределенный эквивалентный генератор можно свести к поверхностно распределенному — токовому двойному слою, мощность которого определяется путем интегрирования уравнения (3.309) по z :

$$D_S = A_c \sigma_i (U_a - U_r), \quad (3.310)$$

где U_a и U_r — максимальное и минимальное значения трансмембранного потенциала соответственно (предполагается, что возбуждение распространяется в положительном направлении оси z).

Если область наблюдения находится на расстоянии от пучка, существенно превышающем его диаметр, то этот эквивалентный генератор для фазы деполяризации сводится к токовому диполю. Его дипольный момент выражается формулой (3.310), в которую вместо относительной площади клеток A_c нужно подставить непосредственно суммарную площадь поперечного сечения клеток. Иными словами, пучок сводится к одной клетке с площадью поперечного сечения, равной суммарной площади поперечного сечения всех его клеток.

Во многих случаях возбудимую ткань нельзя рассматривать как совокупность клеток, относительно независимых в функциональном отношении. Так, в миокарде, состоящем из клеток продолговатой формы, концы, а иногда и участки боковой поверхности каждой клетки соприкасаются с соседними клетками, образуя соединения с малым электрическим сопротивлением между внутриклеточными областями. Множество связанных таким образом клеток образует сложную сетчатую структуру — объемный электрический функциональный синцитий. Промежутки между клетками, заполненные межклеточной жидкостью, также связаны между собой и образуют межклеточную сетчатую структуру. Геометрические и электрические параметры такой ткани оказывают существенное влияние на характер распределения трансмембранного потенциала и формирование генераторов внеклеточного электромагнитного поля при возбуждении макроскопических участков ткани. В данном случае целесообразно использовать не совокупность отдельных клеточных эквивалентных генераторов, а перейти к непрерывно распределенному, или континуальному эквивалентному генератору, учитывающему в обобщенном виде как активные, так и пассивные электрические свойства ткани. Для этого нужно осреднить все характеристики поля по областям,

размеры которых велики по сравнению с отдельной клеткой, но малы по сравнению с расстояниями, на протяжении которых учитывается изменение этих характеристик; все распределенные величины (в частности, плотность тока, интенсивность генератора и удельную электрическую проводимость) следует отнести к общему объему ткани. На основе такого подхода рассматривались более сложные модели электрического генератора для пучков возбудимой ткани [167, 169, 206].

Используя (3.7) и (3.85) и учитывая, что первичный генератор существует только внутри клеточных мембран, запишем выражения для плотностей тока во внутриклеточной и внеклеточной областях:

$$J_i = -\sigma_i \operatorname{grad} \varphi_i, \quad (3.311)$$

$$J_e = -\sigma_e \operatorname{grad} \varphi_e. \quad (3.312)$$

Эти уравнения справедливы для дискретного представления ткани, близкого к ее реальной микроанатомии. А именно, рассматриваются две сетчатые структуры, плотно заполняющие общее пространство ткани и разделенные бесконечно тонкой граничной поверхностью (мембраной). Поэтому плотности тока и удельные электрические проводимости здесь отнесены к площади сечения и объему соответствующей области (внутриклеточной или внеклеточной), причем величины σ_i и σ_e считаются постоянными в пределах данной области.

Чтобы перейти к континуальному представлению, или "модели двух совмещенных пространств", отнесем плотность тока не к площади сечения каждой из двух рассматриваемых областей, а к общей площади сечения участка ткани и обозначим соответствующие величины как J_i и J_e . При этом новые, непрерывные среды — внутриклеточная и внеклеточная — будут совмещены в пространстве [143]. Однако для них остаются в силе уравнения типа (3.311) и (3.312):

$$\check{J}_i = -\check{\sigma}_i \operatorname{grad} \varphi_i, \quad (3.313)$$

$$\check{J}_e = -\check{\sigma}_e \operatorname{grad} \varphi_e, \quad (3.314)$$

где $\check{\sigma}_i$ и $\check{\sigma}_e$ — эффективные удельные электрические проводимости, характеризующие свойства непрерывных сред.

Многочисленными исследованиями установлено, что возбудимые ткани типа функционального синцития в таком макроскопическом представлении являются анизотропными. Это объясняется особенностями их клеточного строения: например, миокард состоит из слоев клеток, имеющих продолговатую форму и ориентированных продольными осями преимущественно в направлениях, параллельных поверхностям стенки сердца (см. [43 и др.]). Поэтому для наиболее точного описания свойств анизотропной ткани следовало бы в (3.313) и (3.314) использовать в качестве величин $\check{\sigma}_i$ и $\check{\sigma}_e$ тензоры второго ранга, в отличие от

скалярных величин σ_i и σ_e , которые не зависят от направления в пространстве. Здесь, однако, для простоты анализа величины $\check{\sigma}_i$ и $\check{\sigma}_e$ также будут считаться скалярными, т.е. мы пренебрежем влиянием макроскопической анизотропии ткани. Приближенная оценка ее влияния дана, например, в [44].

Поскольку рассматриваемые среды совмещены в пространстве, можно применить уравнение непрерывности электрического тока (3.29) для стационарных условий, которое запишется в форме

$$-\operatorname{div} \check{\mathbf{J}}_i = \operatorname{div} \check{\mathbf{J}}_e = \check{W}_m, \quad (3.315)$$

где $\check{W}_m$ — мембранный ток, отнесенный к общему объему ткани (положительным считается ток, вытекающий изнутри клетки во внеклеточное пространство). Подставляя в последнее уравнение выражения для плотностей тока (3.313) и (3.314), получим в декартовой системе координат x, y, z :

$$\check{\sigma}_e \left(\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial z^2} \right) = -\check{\sigma}_i \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right). \quad (3.316)$$

Воспользуемся определением трансмембранного потенциала (3.280) и исключим из последнего уравнения величину φ_i ; после упрощений получим

$$(\check{\sigma}_i + \check{\sigma}_e) \Delta \varphi_e = -\check{\sigma}_i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right). \quad (3.317)$$

Сопоставление этого уравнения с (3.96) показывает, что его правая часть, взятая с обратным знаком, играет роль плотности источников тока по отношению к внеклеточному электрическому полю, существующему в однородной изотропной среде с удельной электрической проводимостью $\check{\sigma}_i + \check{\sigma}_e$. Если изучается только электрическое поле, то в качестве векторного поля эквивалентного генератора в принципе можно рассматривать любое векторное поле, дивергенция которого равна правой части уравнения (3.317). В частности, удобно определить генератор как векторное поле

$$\mathbf{J}^* = -\check{\sigma}_i \operatorname{grad} U. \quad (3.318)$$

В соответствии с вышесказанным этот генератор создает в однородной среде с удельной электрической проводимостью $\check{\sigma}_i + \check{\sigma}_e$ такое же электрическое поле, как и действительный биоэлектрический генератор во внеклеточной среде для рассмотренной модели с однородными свойствами во всем пространстве. Согласно (3.109) его потенциал выражается

как

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \frac{\check{\sigma}_i}{4\pi(\check{\sigma}_i + \check{\sigma}_e)} \int_V \text{grad } U \cdot \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV. \quad (3.319)$$

Обоснованность такого эквивалентного генератора по отношению к магнитному полю зависит от того, насколько форма эквивалентных сторонних токов соответствует принятой зависимости (3.318):

Примем дополнительное допущение о "локальной одномерности" электромагнитного поля, т.е. рассмотрим такие процессы возбуждения, для которых поверхности постоянных значений трансмембранного потенциала имеют не очень большую кривизну [44]. При этом плотности тока во внутриклеточной и внеклеточной средах равны по абсолютной величине и противоположны по направлению, и из (3.313) и (3.314)

$$\check{\mathbf{J}}_i = -\check{\sigma}_i \text{grad } \varphi_i = \check{\sigma}_e \text{grad } \varphi_e. \quad (3.320)$$

С учетом (3.280) получаем

$$\check{\mathbf{J}}_i = - \frac{\check{\sigma}_i \check{\sigma}_e}{\check{\sigma}_i + \check{\sigma}_e} \text{grad } U. \quad (3.321)$$

Поскольку внутриклеточная и внеклеточная среды совмещены в пространстве, последняя величина играет роль плотности стороннего тока для внеклеточной среды, а эквивалентная плотность стороннего тока в среде с удельной электрической проводимостью $\check{\sigma}_i + \check{\sigma}_e$ может быть получена путем умножения последнего выражения на $(\check{\sigma}_i + \check{\sigma}_e)/\check{\sigma}_e$. В результате приходим к сформулированному ранее эквивалентному генератору (3.318), а выражение для магнитной индукции получим подстановкой уравнения (3.318) в (3.107):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \frac{\mu_0 \check{\sigma}_i}{4\pi} \int_V \text{grad } U \times \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) dV. \quad (3.322)$$

По-видимому, формулировка эквивалентного генератора, адекватно описывающего как электрическую, так и магнитную составляющую электромагнитного поля макроскопических участков синцитиальной ткани, должна учитывать реальную форму распределения фаз возбуждения в ткани и пассивные свойства ткани, в том числе ее макроскопическую анизотропию.

Сформулированный простейший вариант объемно распределенного континуального эквивалентного генератора позволяет легко перейти к поверхностно распределенному эквивалентному генератору, который играет важную роль при изучении электрической активности миокарда

[4]. Применим к функциям U и $1/R$ следующее уравнение теоремы Грина [50]:

$$\int_V \left[U \Delta \left(\frac{1}{R} \right) + \text{grad } U \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \right] dV = \oint_S U \text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS, \quad (3.323)$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая область V ; положительной считается внешняя нормаль к этой поверхности, а точка наблюдения находится вне поверхности. Учитывая, что $\Delta(1/R) = 0$, и подставляя это уравнение в (3.319), получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \frac{\check{\sigma}_i}{4\pi(\check{\sigma}_i + \check{\sigma}_e)} \oint_S U \text{grad}_{r_0} \left(\frac{1}{R} \right) \cdot dS. \quad (3.324)$$

Таким образом, если поверхность S охватывает всю область, в которой могут существовать пространственные изменения трансмембранного потенциала, то для вычисления электрического поля вне этой поверхности можно использовать поверхностно распределенный генератор в виде токового двойного слоя на поверхности S с мощностью $D_S = -\check{\sigma}_i U$, пропорциональной трансмембранному потенциалу на этой поверхности.

На основе "модели двух совмещенных пространств" были получены выражения для электрического потенциала и магнитной индукции цилиндрического пучка волокон миокарда, погруженного в однородный неограниченный проводник [169]. Эти выражения аналогичны уравнениям (3.292), (3.293) и (3.297), однако содержат дополнительные параметры, характеризующие структуру ткани.

3.4. Математическое описание электромагнитного поля на уровне целых органов

Идентификация электрического состояния органа с помощью эквивалентных генераторов дипольного типа. Основные исследовательские и практические задачи биомагнитометрии направлены на идентификацию, или определение, состояния изучаемых биологических объектов. Здесь имеется в виду электрическое состояние, т.е. характеристики электрических процессов, происходящих в возбудимых тканях и органах, хотя конечной целью чаще всего бывает оценка анатомического и функционального их состояния. При решении таких задач диагностического типа, и особенно в случаях, когда объекты исследуются в естественных условиях, область измерения находится на определенном удалении от области биоэлектрического генератора, и определение характеристик последнего требует решения обратной электродинамической задачи. Как уже говорилось выше, она в принципе не может быть решена однозначно при произвольной структуре генератора, даже если имеются достаточно подробные измерения и электрического, и магнитного полей.

При исследовании органов тела в естественных условиях задача сильно затруднена и тем, что электрическое и магнитное поля существенно зависят не только от первичного генератора, но и от структуры среды, которая очень сложна из-за разнородности и сложности анатомического строения тела.

В связи с этим приходится прибегать к многочисленным допущениям и упрощениям электродинамической задачи, сводя ее к возможно более простым моделям. Общепринятый подход, который уже был рассмотрен в связи с анализом клеточных генераторов, — это так называемый метод эквивалентного генератора. В нем реальный биоэлектрический генератор и реальную среду заменяют модельным, или эквивалентным, генератором и, соответственно, модельной, или эквивалентной, средой. Эквивалентные генератор и среда должны быть достаточно просты, чтобы можно было доступными средствами решить обратную задачу, и в то же время получаемые характеристики генератора должны содержать искомую информацию о реальном генераторе и по возможности должны поддаваться адекватной электрофизиологической интерпретации.

В настоящее время при магнитометрическом исследовании органов (сердца, мозга и др.) для диагностических целей обычно используют простейшие модели генератора сосредоточенного типа — токовые или магнитные диполи, иногда мультиполи, а среду считают однородным проводником, бесконечно протяженным либо ограниченным, но имеющим достаточно простую геометрическую форму [86 и др.].

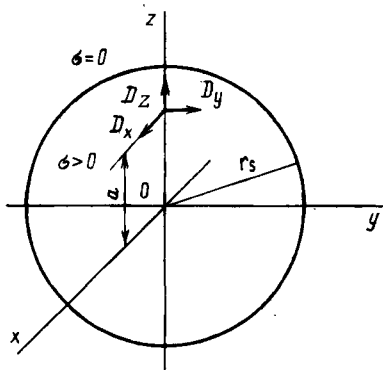
Рассмотрим наиболее распространенный тип эквивалентного генератора — токовый диполь с дипольным моментом D , расположенный в однородном объемном проводнике шаровой формы с радиусом r_S и удельной электрической проводимостью σ . Выберем декартову систему координат x, y, z с началом в центре шара и предположим, что диполь находится на оси z на расстоянии a от центра, $a < r_S$ (рис. 3.13).

Выражения для электрического потенциала на поверхности шара имеют следующий вид (см. [43] и др.):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma r_S^2 f} \left\{ \frac{D_x \cos \psi + D_y \sin \psi}{\sin \theta} \left[\frac{f^3 - 3f^2 \cos \theta + 3f - \cos \theta}{(1 + f^2 - 2f \cos \theta)^{3/2}} + \cos \theta \right] + D_z \left[\frac{1 - f^2}{(1 + f^2 - 2f \cos \theta)^{3/2}} - 1 \right] \right\}, \quad (3.325)$$

где $f = a/r_S$ — эксцентриситет диполя; θ, ψ — угловые координаты точки наблюдения на поверхности шара в сферической системе координат

Рис. 3.13. Токовый диполь в однородном проводящем шаре (показаны компоненты D_x , D_y , D_z токового диполя D)



$r\theta\psi$, связанной с декартовой системой x, y, z обычными соотношениями (3.170) и (3.171).

Чтобы получить выражения для магнитной индукции вне шара, опишем плотность стороннего тока, соответствующую токовому диполю, пространственной дельта-функцией и подставим ее непосредственно в (3.260). Из этого уравнения видно, что при радиальной ориентации диполя, когда он параллелен вектору r_0 , все магнитные мультипольные компоненты обращаются в нуль. Следовательно, компонента D_z диполя не создает магнитного поля вне шара, и достаточно вывести выражения для тангенциальных компонент D_x и D_y . Ниже представлен вывод этих выражений, основанный на [121].

Рассмотрим тангенциальный диполь с моментом D , расположенный в квадранте xOz и направленный параллельно оси l_θ локальной системы координат l_r, l_θ, l_ψ (см. рис. 3.6). Такой генератор можно описать функцией плотности стороннего тока

$$J^* = l_\theta D \delta(a - r) \delta(\theta_0 - \theta) \delta(0 - \psi), \quad (3.326)$$

где r, θ, ψ — сферические координаты произвольной точки внутри шара; l_θ — единичный вектор в направлении оси l_θ и $a, \theta_0, 0$ — координаты диполя в сферической системе координат. Подстановка последнего выражения в (3.260) дает

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} A_{nm}^M \\ B_{nm}^M \end{matrix} \right\} &= \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!(n+1)} \cdot \\ \int_V \text{grad} \left[r^n P_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m \psi \\ \sin m \psi \end{Bmatrix} \right] \cdot l_\psi a D \delta(a - r) \delta(\theta_0 - \theta) \delta(0 - \psi) dV = \\ &= \epsilon_m \frac{(n-m)! m D}{(n+m)!(n+1)} \int_V r^n P_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} -\sin m \psi \\ \cos m \psi \end{Bmatrix} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{\sin \theta} \delta(a - r) \delta(\theta_0 - \theta) \delta(0 - \psi) dV = \\ &= \epsilon_m \frac{(n-m)! m D}{(n+m)!(n+1)} a^n P_n^m(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sin \theta_0}, \end{aligned} \quad (3.327)$$

где l_ψ — единичный вектор в направлении оси l_ψ . Таким образом, компоненты $A_{nm}^M = 0$; чтобы получить компоненты B_{nm}^M для составляющей D_x диполя, расположенного на оси z , нужно в последнем выражении перейти к пределу при $\theta_0 \rightarrow 0$:

$$B_{nm}^M = \lim_{\theta_0 \rightarrow 0} \epsilon_m \frac{m(n-m)! D_x a^n}{(n+m)!(n+1)} \frac{P_n^m(\cos \theta_0)}{\sin \theta_0} =$$

$$= \lim_{\theta_0 \rightarrow 0} \epsilon_m \frac{m(n-m)! D_x a^n}{(n+m)!(n+1)} \sin^{m-1} \theta_0 \frac{d^m P_n(\cos \theta_0)}{(d \cos \theta_0)^m}. \quad (3.328)$$

Эта величина не равна нулю только при $m = 1$. Учитывая, что

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow 0} \frac{dP_n(\cos \theta_0)}{d \cos \theta_0} = \frac{n(n+1)}{2},$$

получаем для ненулевых магнитных мультипольных компонент

$$B_{n1}^M = \frac{D_x a^n}{n+1}. \quad (3.329)$$

Подстановка этого выражения в (3.243) дает уравнение для скалярного магнитного потенциала в виде разложения в ряд

$$\varphi^M = \frac{\mu_0 D_x}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+1)r^{n+1}} P_n^1(\cos \theta) \sin \psi. \quad (3.330)$$

В частности, для магнитного диполя ($n = 1$) получаем

$$\varphi^M = \frac{\mu_0 D_x a}{8\pi r^2} \sin \theta \sin \psi. \quad (3.331)$$

Разложение в ряд (3.330) можно представить в виде замкнутой формулы [121]. Используем разложение

$$\frac{1}{(a^2 - 2ar \cos \theta + r^2)^{1/2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^n} P_n(\cos \theta). \quad (3.332)$$

Если продифференцировать обе части последнего уравнения по $\cos \theta$, а затем проинтегрировать по a в пределах от 0 до a , то получается следу-

ющее выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+1)r^{n+1}} P_n^1(\cos\theta) = \frac{1}{a \sin\theta} \left[\frac{a \cos\theta - r}{(a^2 - 2ar \cos\theta + r^2)^{1/2}} + 1 \right]. \quad (3.333)$$

Подставляя это выражение в (3.330) и учитывая, что для скалярного магнитного потенциала компоненты диполя D_y получается аналогичное выражение, в которое вместо $\sin\psi$ входит $-\cos\psi$, получаем окончательно

$$\varphi^M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{D_x \sin\psi - D_y \cos\psi}{a \sin\theta} \left[\frac{a \cos\theta - r}{(a^2 - 2ar \cos\theta + r^2)^{1/2}} + 1 \right]. \quad (3.334)$$

Важной особенностью этого уравнения является то, что оно не содержит радиуса шара; следовательно, внешнее магнитное поле не изменяется при изменении радиуса шара (которое допустимо в пределах $a < R \leq r$). При перемещении диполя в центр шара ($a = 0$) выражение (3.334) обращается в нуль; это естественно, поскольку все компоненты диполя становятся радиальными.

Дифференцированием уравнения (3.334) нетрудно получить выражения для компонент магнитной индукции в локальной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(D_x \sin\psi - D_y \cos\psi) a \sin\theta}{(a^2 - 2ar \cos\theta + r^2)^{3/2}}, \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{D_x \sin\psi - D_y \cos\psi}{ar} \left[\frac{ar(a \cos\theta - r)}{(a^2 - 2ar \cos\theta + r^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r \cos\theta - a}{\sin^2\theta (a^2 - 2ar \cos\theta + r^2)^{1/2}} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \right], \\ B_\psi &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{D_x \cos\psi + D_y \sin\psi}{ar \sin^2\theta} \left[\frac{a \cos\theta - r}{(a^2 - 2ar \cos\theta + r^2)^{1/2}} + 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.335)$$

Если увеличивать радиус шара, сохраняя неизменным взаимное положение диполя и точки наблюдения, то кривизна поверхности раздела проводника и диэлектрика будет оказывать все меньшее влияние на внешние электрическое и магнитное поля. Распределения электрическо-

го потенциала и магнитной индукции будут приближаться к распределениям для однородного проводящего полупространства, отделенного от диэлектрической среды бесконечной плоскостью. Чтобы получить необходимые выражения для этого случая, сначала преобразуем (3.325) и (3.334), введя новые геометрические параметры — расстояние R_1 между диполем и точкой наблюдения и угол θ_1 между осью z и прямой, соединяющей диполь с точкой наблюдения. Тогда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma R_1^2} \left\{ \frac{D_x \cos\psi + D_y \sin\psi}{\sin\theta_1} \left[2\sin^2\theta_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R_1}{r_S} - \frac{R_1 \left(1 - \frac{R_1}{r_S} \right) \cos\theta_1}{r_S \left(\sqrt{1 - \frac{R_1^2}{r_S^2} \sin^2\theta_1} - \frac{R_1}{r_S} \cos\theta_1 \right)} \right] + \right. \\ \left. + D_z \left[2\cos\theta_1 + \frac{R_1 \left(1 - \frac{R_1}{r_S} \right)}{r_S \left(\sqrt{1 - \frac{R_1^2}{r_S^2} \sin^2\theta_1} - \frac{R_1}{r_S} \cos\theta_1 \right)} \right] \right\}, \quad (3.336)$$

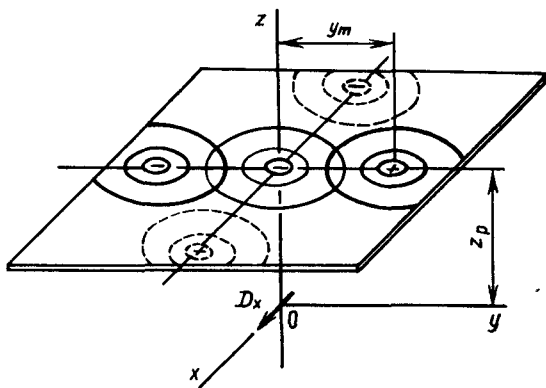
$$\varphi^M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(D_x \sin\psi - D_y \cos\psi)}{R_1 \sin\theta_1} \frac{1 - \frac{R_1}{r} \sin^2\theta_1 - \cos\theta_1 \sqrt{1 - \frac{R_1^2}{r^2} \sin^2\theta_1}}{\sqrt{1 - \frac{R_1^2}{r^2} \sin^2\theta_1} - \frac{R_1}{r} \cos\theta_1}. \quad (3.337)$$

Найдем предельные значения этих величин при стремлении радиуса шара к бесконечности ($r_S \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$), сохраняя неизменными величины R_1 и θ_1 ; в результате получим для электрического потенциала на плоской поверхности проводящего полупространства и скалярного магнитного потенциала во всей внешней диэлектрической области (рис. 3.14):

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\sigma R_1^2} (D_x \sin\theta_1 \cos\psi + D_y \sin\theta_1 \sin\psi + D_z \cos\theta_1), \quad (3.338)$$

$$\varphi^M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(D_x \sin\psi - D_y \cos\psi) (1 - \cos\theta_1)}{R_1 \sin\theta_1}. \quad (3.339)$$

Рис. 3.14. Электрическое и магнитное поля, порождаемые токовым диполем на поверхности проводящего полупространства. Диполь расположен на глубине $z p$ под поверхностью проводника и ориентирован тангенциально к этой поверхности по оси x . Жирными сплошными кривыми изображены эквииндукционные линии для компоненты магнитной индукции B_z , тонкими сплошными кривыми — для компоненты B_y и штриховыми кривыми — эквипотенциальные линии для электрического поля; плюсами и минусами показаны соответствующие экстремумы



В декартовой системе координат $x y z$ с началом в точке расположения диполя эти уравнения имеют вид

$$\varphi = \frac{D_x x + D_y y + D_z z}{2\pi\sigma(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.340)$$

$$\varphi^M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{D_x y - D_y x}{x^2 + y^2} \left[1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right]. \quad (3.341)$$

Из (3.341) в соответствии с (3.91) можно получить выражения для компонент магнитной индукции в декартовой системе координат. Ниже они приведены для компоненты диполя D_x (для компоненты D_y аналогичные выражения получаются путем поворота системы координат на угол $\pi/2$ относительно оси z):

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 D_x}{4\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \left\{ 2 - \frac{z[x^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)]}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}, \\ B_y &= \frac{\mu_0 D_x}{4\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left\{ -x^2 + y^2 - \frac{z[y^2(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + z^2)]}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}, \\ B_z &= \frac{\mu_0 D_x}{4\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.342)$$

Сравнение (3.338) и (3.340) с (3.176) показывает, между прочим, что на плоской границе однородного проводника, простирающегося на трехмерное полупространство, потенциал всегда вдвое больше, чем на этой же плоскости в однородном неограниченном проводнике; сравнение (3.342) с (3.230) показывает, что компонента магнитной индукции, нормальная к плоской границе проводника, совпадает с компонентой магнитной индукции в этом же направлении, если диполь находится в однородном бесконечно протяженном проводнике, т.е. наличие границы между проводником и диэлектриком на нее не влияет. Сопоставляя (3.340) и (3.342), видим, что на плоской поверхности проводника (в плоскости наблюдения) распределение нормальной компоненты магнитной индукции B_z тангенциального диполя, направленного по оси x , совершенно аналогично распределению электрического потенциала тангенциального диполя, направленного перпендикулярно к рассматриваемому диполю (по оси y). Распределение нормальной компоненты магнитной индукции симметрично относительно координатной плоскости yOz , перпендикулярной к оси диполя, и антисимметрично относительно координатной плоскости xOz , проходящей через ось диполя. Вдоль линии пересечения координатной плоскости yOz с плоскостью наблюдения это распределение имеет два экстремума — максимум по одну сторону от проекции диполя на плоскость наблюдения и минимум по другую сторону (рис. 3.14). При помощи (3.342) нетрудно получить координаты расположения и значения этих экстремумов на плоскости наблюдения, где $z = z_P$:

$$x_m = 0, \quad y_m = \pm z_P / \sqrt{2}, \quad z_m = z_P; \quad (3.343)$$

$$B_{zm} = \pm \frac{\mu_0 D_x}{2\pi z_P^2 \sqrt{2}}. \quad (3.344)$$

Отсюда получаются формулы для оценки характеристик генератора по магнитным измерениям на поверхности проводника, в котором находится дипольный генератор. Расположение диполя в тангенциальной плоскости (параллельной плоскости наблюдения) определяется средней точкой между двумя экстремумами нормальной компоненты магнитной индукции, глубина диполя (расстояние его от плоскости наблюдения) определяется по расстоянию между экстремумами $2|y_m|$ при помощи формулы

$$z_P = \frac{2|y_m|}{\sqrt{2}} \quad (3.345)$$

и дипольный момент — при помощи формулы

$$D_x = \frac{2\pi z_P^2 B_{zm} \sqrt{2}}{\mu_0} \approx \frac{4\pi z_P^2 B_{zm}}{0,385 \mu_0} \quad (3.346)$$

(максимум, расположенный над положительной осью y , соответствует положительному дипольному моменту, направленному по оси x).

Уравнения (3.342) показывают, что тангенциальная компонента магнитной индукции, параллельная оси x (оси диполя), остается равной нулю в координатных плоскостях xOz и yOz , тогда как тангенциальная компонента, параллельная оси y , имеет экстремум над диполем, т.е. в точке его проекции на плоскость наблюдения, а ее абсолютная величина убывает до нуля в бесконечности по всем тангенциальным направлениям от этой точки (рис. 3.15). Значение экстремума равно

$$B_{yt} = -\frac{\mu_0 D_x}{8\pi z^2 r}, \quad (3.347)$$

т.е. близко к экстремумам нормальной компоненты магнитной индукции, определяемой по (3.344).

Рассмотренные здесь свойства электрического и магнитного полей простейшего генератора — токового диполя, действующего в среде довольно простой структуры — проводящем полупространстве или проводящем шаре, выявляют основные тенденции влияния ограниченности проводника на поле, измеряемое во внешнем пространстве. Наиболее важным является тот факт, что дипольный генератор, ориентированный радиально в шаре или нормально к граничной плоскости в проводящем полупространстве, не создает внешнего магнитного поля; следовательно, он в принципе не может быть идентифицирован по магнитным измерениям вне проводника, и для его идентификации нужно использовать измерения электрического поля, которое вне проводника и на его поверхности не равно нулю для любой компоненты диполя. Частичная "компенсация" внешнего магнитного поля обусловлена свойствами симметрии объемного проводника.

Анализ уравнения (3.256) позволяет сделать некоторые более общие выводы о влиянии на магнитное поле не только формы поверхности, ограничивающей проводник, но и его внутренней неоднородности [72, с. 101; 98, 121]. Если объемный проводник и находящиеся в нем генераторы симметричны относительно какой-либо оси, то внешнее магнитное поле обращается в нуль, т.е. происходит полная взаимная компенсация собственного магнитного поля генератора и магнитного поля кулоновского тока. Это заключение справедливо и для проводников с внутренней неоднородностью, которая не нарушает осевой симметрии. Для неоднородного проводника со сферической симметрией — шара с концентрическими областями, имеющими разные удельные электрические проводимости, — внешнее магнитное поле везде равно нулю для дипольных генераторов, ориентированных радиально. Как частный случай такой структуры можно рассматривать многослойное проводящее полупространство, в котором слои с разной удельной электрической проводимостью разделены плоскостями, параллельными плоской границе

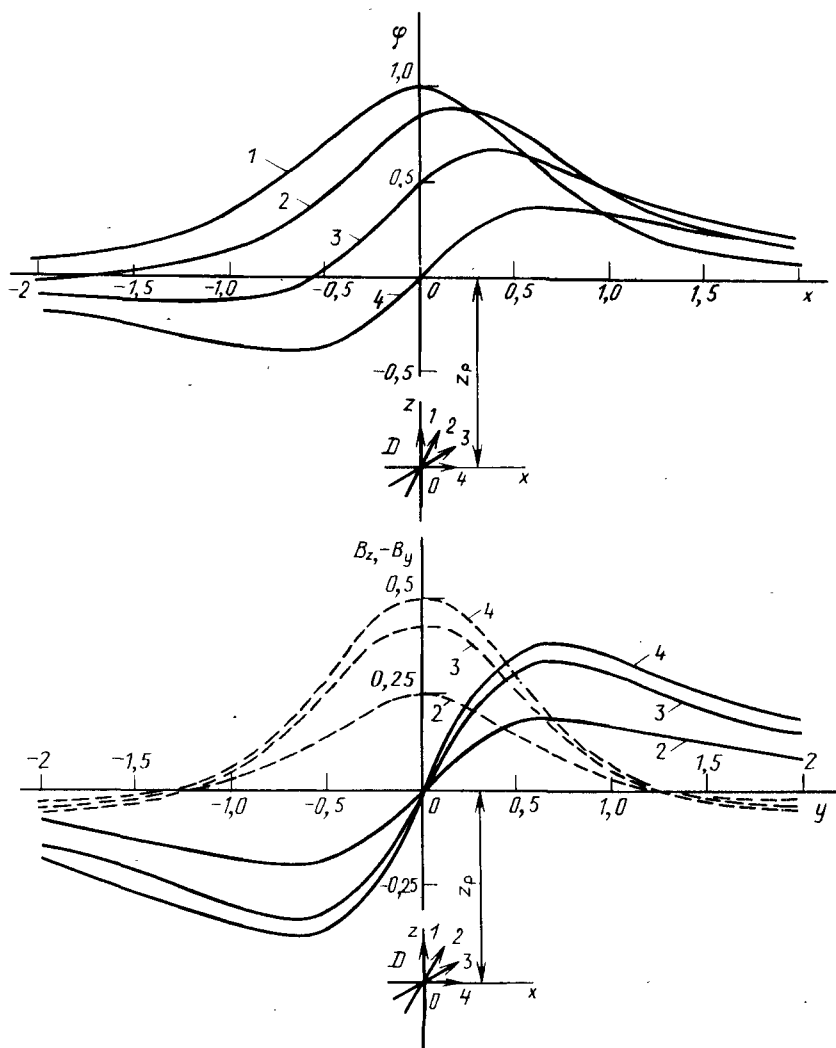


Рис. 3.15. Распределение электрического потенциала φ на поверхности проводящего полупространства в координатной плоскости xOz (верхний график) и компонент магнитной индукции на этой же поверхности в координатной плоскости yOz (нижний график, B_z — сплошные кривые, $-B_y$ — штриховые кривые). Генератор представляет собой токовый диполь с дипольным моментом D , расположенный на глубине z_p в плоскости xOz под углом 0, 30, 60 и 90° к оси z (эти ориентации диполя и соответствующие кривые обозначены цифрами 1, 2, 3 и 4). Электрический потенциал отнесен к величине $D/(2\pi\sigma z_p^2)$, магнитная индукция — к величине $\mu_0 D/(4\pi z_p^2)$, расстояния вдоль осей — к величине z_p

между проводником и изолятором, когда диполи ориентированы по нормали к этим плоскостям.

Другое важное свойство электродинамических структур со сферической симметрией заключается в том, что радиальная (нормальная к поверхности проводника) компонента магнитной индукции вне проводника определяется только собственным магнитным полем генератора и не зависит от внутренней неоднородности проводника. Важно отметить, что любые изменения структуры среды, не приводящие к нарушению вышеуказанной симметрии (например, изменения радиусов поверхностей раздела однородных областей шара) не влияют на эти свойства внешнего магнитного поля.

Отклонения от симметрии структуры делают недействительными указанные закономерности, однако при небольших отклонениях от симметрии их можно все же использовать для приближенного решения задач. В частности, теоретические оценки на моделях показывают, что деформация сферы в эллипсоид дает относительное изменение измеряемых характеристик магнитного поля такого же порядка, как относительное изменение линейных размеров проводника [98, 188].

Насколько в реальных измерениях можно основываться на вышеуказанных свойствах магнитного поля в симметричном проводнике, зависит от конкретных условий исследования, а именно от типа биологического объекта, взаимного расположения генератора и измерительного устройства и т.п. Очевидно, для такой сложной структуры, как тело в целом, условия симметрии нарушены очень сильно. Влияние реальной среды на магнитное поле исследовали на математических моделях, достаточно подробно описывающих грудную клетку человека с учетом ее реальной внешней формы и основных внутренних неоднородностей (внутриполостной крови сердца и ткани легких), причем использовался модельный биоэлектрический генератор сердца довольно сложной структуры в виде совокупности токовых диполей или токовых двойных слоев, воспроизводящих реальный процесс электрического возбуждения сердца [94, 123, 125; 159, с. 301, 324]. Эти исследования, выполненные численными методами, подтверждают, что структура проводника оказывает существенное влияние на внешнее магнитное поле (как и на поверхностное электрическое поле). Конкретные количественные различия между значениями магнитной индукции, полученными для симметричной структуры проводника (например, в форме сферы или полупространства) и реальной моделируемой структуры, зависят от многих факторов (конкретной модели генератора, положения точки наблюдения и т.п.), причем средние оценки этих различий лежат приблизительно в пределах 20–60% максимальных значений магнитной индукции. Для электрического поля были получены результаты, близкие к указанным. В экспериментах с электрически изолированным сердцем собаки было показано, что при измерениях на расстоянии до 10 см от сердца можно пренебречь влиянием магнитного поля вторичных токов в объеме тела [136].

Вместе с тем при графическом изображении магнитного поля, например, в форме карт нормальной компоненты магнитной индукции во фронтальной прекордиальной области, искажения этих карт, обусловленные несимметричным строением проводника, не приводят к слишком сильным изменениям формы карты, т.е. основные (глобальные) характеристики, по которым можно отличать одну карту от другой визуально (количество и взаимное расположение экстремумов и нулевых линий, общая форма), обычно не изменяются. Поэтому при визуальном, чисто качественном анализе магнитных измерений можно ориентироваться на свойства простейших симметричных сред. Аналогичные результаты получены при математическом моделировании головы как неоднородного проводника с несколькими однородными областями (мозг, череп, скальп), внутри которого находится дипольный генератор [83, 100; 160, с. 36]. В то же время модельное исследование головы с включением в модель внутренней неоднородности в виде областей с увеличенной или уменьшенной удельной электрической проводимостью, характеризующей возможные патологические изменения ткани внутри мозга, показало, что такая неоднородность может изменить карты как магнитного, так и электрического поля до неузнаваемости [73, с. 289].

Чрезвычайно широкое применение модели генератора в форме токового диполя в биомагнитометрических (как и в биоэлектрометрических) исследованиях объясняется несколькими причинами. Прежде всего, дипольный элемент стороннего тока является физически реальной составной частью генератора любой сложности, поэтому вполне естественно, что он используется при решении прямых задач, формулируемых на разных структурных уровнях биологического объекта для исследования вопросов происхождения биоэлектрического и биомагнитного полей и влияния на них различных факторов. Далее, благодаря простоте структуры дипольного генератора удается во многих случаях найти достаточно простые математические зависимости для анализа и расчета его поля, причем выявляются наиболее существенные закономерности, которые можно обобщить и на генератор более сложной структуры. Наконец, дипольный генератор предоставляет возможность однозначного и точного решения обратной задачи — определения характеристик генератора по измерениям его поля.

Следует отметить, что наряду с токовым диполем при анализе магнитного поля в его безвихревой области (вне проводника) иногда используют фиктивный магнитный диполь, который, как и токовый диполь, характеризуется достаточно простыми и удобными математическими соотношениями. Однако из-за трудности установления непосредственной связи магнитного диполя с реальным биоэлектрическим генератором, по-видимому, ему следует отвести лишь вспомогательную роль при биомагнитометрических исследованиях. В дальнейшем при отсутствии специальных оговорок будет рассматриваться именно токовый диполь.

В основу применения токового диполя для решения обратной задачи могут быть положены различные концепции, или методологические подходы. Наиболее простой подход заключается в том, что полностью абстрагируются от возможной структуры реального генератора и рассматривают его формально как токовый диполь, расположенный в проводнике с заданной структурой. Решение обратной задачи заключается в определении дипольного момента и координат расположения этого генератора. Практическая процедура решения зависит от конкретных условий — принятой гипотезы о структуре среды, расположения точек измерения, предполагаемого уровня шума, искажающего данные, и т.п.

Следует иметь в виду, что электрическое и магнитное поля токового диполя однозначно определяются его характеристиками — дипольным моментом и координатами расположения. И, наоборот, по измерениям любого из этих полей можно однозначно определить характеристики диполя. Однако при измерении магнитного поля вне проводника существенную роль играют вышеописанные закономерности влияния на магнитное поле структуры проводника, и особенно свойств его симметрии. В отношении возможностей решения обратной задачи это влияние противоречиво: положительный аспект состоит в том, что нормальная к поверхности проводника компонента магнитной индукции мало зависит от структуры среды и практически отражает только свойства самого генератора; отрицательный аспект — практическое отсутствие чувствительности магнитных измерений к компоненте диполя, нормальной к поверхности проводника. Таким образом, если идентификация генератора осуществляется по чисто магнитным измерениям, то фактически рассматриваются только тангенциальные к поверхности проводника диполи. При этом решение обратной задачи сводится к следующим трем этапам: измерение магнитного поля в точках, распределенных на заданной поверхности наблюдения; первичная обработка данных (синхронизация, фильтрация и т.д.) и построение эквииндукционной карты; определение характеристик дипольного генератора (двух компонент дипольного момента и трех координат положения). Такой подход можно считать обоснованным в тех случаях, когда изучаемый реальный биоэлектрический процесс с достаточной точностью сводится к одному дипольному генератору; это может быть локальная возбуждающаяся область мозга, волна возбуждения проводниковой системы сердца, инфарктный очаг миокарда и т.п. Метод определения характеристик диполя зависит от конкретных условий исследования и реально достижимого уровня точности.

При использовании простейшей модели среды — проводящего полупространства слоистой структуры — и при измерении нормальной компоненты магнитной индукции положение диполя в плоскости, параллельной плоской границе проводника, определяется как точка пересечения линии нулевой магнитной индукции и линии, соединяющей точки экстре-

мумов магнитной индукции, а расстояние диполя от поверхности проводника и его дипольный момент вычисляются по (3.345) и (3.346) соответственно.

Для более точного определения характеристик диполя нужно уточнить модель объемного проводника. Так, если рассматриваются биоэлектрические генераторы мозга, то объемный проводник можно аппроксимировать шаром, эллипсоидом или же использовать локальные характеристики кривизны поверхности головы для математического описания модели головы как объемного проводника [73, с. 294; 140]. Для уменьшения ошибок, связанных со случайными погрешностями измерительной процедуры, можно определять характеристики диполя не по локальным характеристикам измеренного поля (экстремумам магнитной индукции), а на основе процедуры аппроксимации, или наилучшего приближения, измеренной магнитной индукции во всей области измерения при помощи точного распределения магнитной индукции токового диполя, рассчитанного для принятой модели среды; при этом желательно учитывать конкретные характеристики измерительного оборудования, априорные данные о биоэлектрическом генераторе и другие факторы, имеющие значение для конкретной решаемой задачи [63, 96 и др.].

Если принять во внимание тот факт, что искомый дипольный генератор может быть ориентирован не строго тангенциально, а под некоторым углом к границе проводника, то для его полной идентификации (т.е. определения трех компонент дипольного момента и трех координат его положения) магнитные измерения приходится дополнять электрическими [73, с. 191, с. 283]. Более того, не следует забывать, что при указанных условиях электрические измерения на поверхности проводника в принципе сами по себе позволяют определить характеристики диполя. Обобщая данные, полученные разными исследователями, можно сказать, что при помощи электрических измерений удастся локализовать одиночный дипольный генератор в сердце с погрешностью приблизительно ± 1 см. Магнитные измерения дают примерно такую же точность для диполя, ориентированного тангенциально. При исследовании биоэлектрических генераторов в поверхностных слоях мозга магнитные измерения обеспечивают для тангенциального диполя большую точность локализации — с погрешностью несколько миллиметров [95, 97, 195].

Если основная гипотеза о структуре генератора (что он является дипольным) не соответствует действительности, то указанные выше методы теряют обоснованность и становятся неэффективными [148]. Отклонения генератора от дипольности можно условно подразделить на явные и скрытые. Под явной недипольностью генератора подразумеваются такие свойства его структуры, которые обуславливают "недипольную" форму измеренного распределения электрического потенциала или магнитной индукции (наличие больше или меньше двух экстремумов противоположной полярности, сильные искажения симметрии

распределения). При помощи математического моделирования поля биоэлектрических генераторов мозга было показано, что при одновременном присутствии двух или большего числа диполей карта распределения как электрического потенциала, так и магнитной индукции на поверхности головы может резко отличаться от карты распределения, порождаемого одним диполем [73, с. 273; 160, с. 38]. Поэтому предварительный визуальный анализ таких карт позволяет заранее отказаться от дипольной модели и ориентироваться на эквивалентные генераторы более сложной структуры. Возможны, однако, ситуации, когда даже при значительных отличиях генератора от диполя форма измеренного поля практически неотличима от "дипольной", т.е. имеет место скрытая недипольность. Были предложены способы выявления такой слабо выраженной недипольности магнитного поля путем использования вместо карт распределения нормальной компоненты магнитной индукции иных форм графического изображения магнитного поля. Например, присутствие в проводнике двух или большего числа диполей может быть более четко выражено на картах пространственной производной нормальной компоненты магнитной индукции [124] и на картах распределения тангенциальной компоненты магнитной индукции [160, с. 17].

Поскольку на практике точность измерений неизбежно ограничена случайными погрешностями, вокруг любой точки исследуемого объекта всегда существует окрестность таких размеров, что перемещения дипольного генератора в пределах этой окрестности не могут быть статистически точно идентифицированы по измерениям внешнего поля. Иными словами, генераторы любой структуры как дискретной, так и непрерывно распределенной, находящиеся в пределах этой малой области и имеющие один и тот же суммарный дипольный момент, нельзя различить по измерениям внешнего поля. Как показывают расчеты на математических моделях, при исследовании биоэлектрических генераторов мозга размеры этой минимальной "зоны различимости диполя" для реальных условий эксперимента составляют 1–2 см [73, с. 266]. Соответственно можно предполагать, что два одновременно присутствующих дипольных генератора будут идентифицироваться как отдельные диполи лишь тогда, когда расстояние между ними не меньше размеров указанной области. Таким образом, точечный диполь, определяемый по внешнему полю и приписываемый некоторой точке изучаемого объекта, можно трактовать как обобщенную характеристику электрической активности данного малого участка ткани, не вникая в микроскопическую структуру электрического процесса, действительно происходящего на данном участке [96]. Если биоэлектрический генератор может занимать пространство, превышающее "зону различимости диполя", и возникает необходимость его идентификации, то нужно сформулировать эквивалентный генератор более сложной структуры, чем один токовый диполь, и решить соответствующую обратную электродинамическую задачу.

Эквивалентные генераторы сложной структуры и обратная задача. Для адекватного описания сложных электрических процессов в целых органах (сердце, мозг, крупных мышцах) применяют эквивалентные генераторы более сложной структуры, чем один токовый диполь. Их можно подразделить на две категории — дискретные и непрерывно распределенные. Дискретные эквивалентные генераторы обычно представляют собой совокупность точечных диполей, расположенных в определенных точках изучаемого органа таким образом, чтобы каждый диполь характеризовал электрическую активность соответствующего участка. К дискретным эквивалентным генераторам можно отнести также мультипольный генератор, который, однако, отличается тем, что его параметры (особенно компоненты высших порядков) не имеют прямой связи с конкретной структурой биоэлектрического процесса. Непрерывно распределенные эквивалентные генераторы — это сторонние токи, распределенные по объему, поверхности или линии. Формулировка таких эквивалентных генераторов направлена на возможно более точное описание реального биоэлектрического процесса с учетом его распределенной в пространстве структуры. Если рассматриваются поверхностные или линейные генераторы, то в зависимости от ориентации вектора стороннего тока по отношению к поверхности или линии, на которой он распределен, получаются распределенные генераторы с разными свойствами (токовый двойной слой, поверхностный ток, нитевидный генератор и др.). Довольно подробные сведения о дискретных и непрерывно распределенных эквивалентных генераторах, используемых при исследовании сердца и мозга, содержатся, например, в [18, 20, 43]. Различные варианты генераторов распределенного типа, предназначенных главным образом для анализа биоманнитного поля, рассмотрены в [73, с. 278, с. 456; 99, 101]. Заметим, что непрерывно распределенный генератор описывается не обязательно детерминированными характеристиками. Это может быть непрерывное распределение дипольных источников со случайными дипольными моментами, описываемое статистическими характеристиками [20, 99].

При решении прямой и обратной электродинамических задач численными методами обычно непрерывно распределенный генератор представляют совокупностью конечного числа элементов, т.е. фактически преобразуют в дискретный. Поэтому подразделение эквивалентных генераторов на категории дискретных и непрерывно распределенных становится в значительной степени условным.

При решении прямой задачи для эквивалентных генераторов любой сложности не возникает принципиальных трудностей, хотя результат может быть получен в аналитическом виде только для простейших моделей генератора и объемного проводника. Для более сложных моделей необходимо численное решение интегральных уравнений типа (3.153) и (3.164).

Решение обратной задачи связано со значительными трудностями, обусловленными тем, что она в общей постановке является существенно некорректной, и прежде всего из-за физической неоднозначности генератора, создающего электромагнитное поле в любой внешней области заданной физической среды. Типичный пример конфигурации биоэлектрического генератора, имеющий вполне реальное практическое значение и в то же время наглядно иллюстрирующий такую неоднозначность, — это равномерный токовый двойной слой: ни электрическое, ни магнитное поле не зависит от его общей формы, а определяется только его границей. Другой аспект некорректности обратной задачи (косвенно связанный с физической неоднозначностью генератора) заключается в слишком большой чувствительности решения к случайным ошибкам исходных данных (измерений поля и заданных характеристик среды) даже для таких структур генератора, которые при абсолютно точных исходных данных идентифицируются однозначно.

Если начинать рассмотрение с некоего эквивалентного генератора достаточно произвольной структуры, которому присущи оба вышеуказанных аспекта некорректности решения обратной задачи, то можно выделить два основных подхода, обеспечивающих преодоление указанных трудностей. Первый заключается в том, что исходный генератор заменяют дискретным эквивалентным генератором, причем последний выбирают с достаточно малым числом параметров, при котором гарантируется устойчивое решение обратной задачи. Условно можно этот подход подразделить на два этапа: сначала сам по себе переход от произвольного генератора к дискретному устраняет физическую неоднозначность; затем дальнейшее упрощение структуры эквивалентного генератора с соответствующим уменьшением числа параметров устраняет неустойчивость решения по отношению к случайным ошибкам. Следует отметить, в частности, что переход к дискретному описанию генератора в виде совокупности токовых диполей (или токовых мультиполей) устанавливает однозначную зависимость между электрическим и магнитным полями данного генератора. После дискретизации генератора обратная задача формулируется как система линейных алгебраических уравнений, которая фактически представляет собой дискретный аналог интегральных уравнений типа (3.153) и (3.164). Неизвестными величинами в уравнениях являются параметры генератора, известными — измеренные значения электрического потенциала и (или) магнитной индукции, а коэффициенты задаются как известные характеристики, зависящие от принятой структуры среды (для их определения может потребоваться решение соответствующей прямой задачи). Устойчивость решения повышается благодаря тому, что число уравнений (равное числу точек измерения или независимо измеренных величин) может значительно превышать число неизвестных параметров генератора. При таком методе в качестве измеренных величин можно использовать электрический потенциал и магнитную индукцию по отдельности или совместно. Недостаток этого

подхода состоит в том, что выбор дискретного эквивалентного генератора, подчиненный главным образом требованию обеспечения устойчивости решения обратной задачи, может в конечном итоге привести к чисто формальному математическому описанию, утратившему явную связь с изучаемым реальным биоэлектрическим процессом. Типичным примером реализации данного подхода может служить исследование 20-дипольной модели биоэлектрического генератора сердца [116].

Второй возможный подход к формулировке и решению обратной задачи заключается в том, что исходный генератор сначала описывают системой интегральных характеристик, не налагая на его структуру каких-либо жестких ограничений (в частности, не прибегая к его дискретизации). Эти характеристики таковы, что для них может быть получено устойчивое решение обратной задачи, хотя оно и не является однозначным в силу неизбежной физической неоднозначности определения генератора по измеренному полю. Однако эти характеристики содержат всю информацию о генераторе, которая в принципе может быть извлечена из его электрического и магнитного полей (при заданной точности измерения). Интегральные характеристики в зависимости от конкретных условий можно либо непосредственно использовать для оценки свойств генератора, либо по ним можно определять характеристики эквивалентного генератора, структура которого выбрана из условий содержательного описания изучаемого биоэлектрического процесса, а параметры однозначно определяются интегральными характеристиками (такой эквивалентный генератор может быть как дискретным, так и непрерывно распределенным). Таким образом, в этом втором подходе в отличие от первого сначала обеспечивается устойчивость решения обратной задачи (определение устойчивых интегральных характеристик), а затем устраняется физическая неоднозначность решения (путем задания структуры эквивалентного генератора и определения его параметров по интегральным характеристикам). Преимуществом данного подхода является универсальность, свобода выбора структуры эквивалентного генератора, удобство совместного анализа электрического и магнитного полей с сохранением присущей им информации о генераторе; недостаток его — некоторая усложненность математического анализа обратной задачи.

В качестве интегральных характеристик генератора целесообразно использовать компоненты его мультипольного разложения. Известны различные формулировки мультипольного разложения; особенно широкое распространение получило скалярное мультипольное разложение для электрического потенциала, описывающее только источники поля генератора и не зависящее от его вихрей (см. [43] и др.). Совершенно аналогично можно использовать скалярное мультипольное разложение для магнитного скалярного потенциала, описывающее фиктивные источники безвихревого магнитного поля [133 и др.]. Было предложено описывать генератор в целом при помощи векторного мультипольного разложения [72, с. 237; 121; 159, с. 660].

Непосредственно использовать для содержательного описания генератора целесообразно только мультипольные компоненты самых низких порядков. В частности, в векторной электрокардиографии уже давно находит применение электрический мультиполь первого порядка — электрический дипольный момент сердца, который часто называют просто электрическим вектором сердца. Он имеет вполне четкую связь с описываемым электрическим процессом: характеризует направление распространения, общую интенсивность и размеры волны возбуждения (деполяризации), а также интенсивность и ориентацию процесса восстановления (реполяризации) миокарда. Дать аналогичное истолкование электрическим мультиполям более высоких порядков значительно труднее. Для скалярного мультипольного разложения магнитного поля сложности возникают даже при интерпретации его первого члена — магнитного дипольного момента (его нередко называют просто магнитным вектором сердца) в связи с тем, что в обычном мультипольном разложении скалярного магнитного потенциала дипольный момент зависит не только от поля генератора, но и от кулоновских токов в проводнике.

Эти трудности удается преодолеть (по крайней мере для электрического мультипольного разложения), следуя второму из вышеуказанных подходов к решению обратной задачи. А именно, можно формулировать электрофизиологически осмысленные эквивалентные генераторы, параметры которых определяются по мультипольным компонентам. Например, по электрическим мультипольным компонентам нескольких низших порядков можно вычислять параметры эквивалентного генератора в виде двойного слоя, описывающего волну деполяризации сердца [44]. Правда, такому эквивалентному генератору свойственна взаимно однозначная связь между его электрическим и магнитным полями, поэтому для его идентификации достаточно только электрических измерений.

Если исследуемый объект может содержать структуры генератора с достаточно большой степенью независимости электрического и магнитного полей, то для их идентификации удобно совместно со скалярным мультипольным разложением электрического поля использовать скалярное мультипольное разложение магнитного поля в форме, описанной в § 3.2. Проиллюстрируем это на примере эквивалентного нитевидного генератора произвольной формы.

Пусть эквивалентный генератор представляет собой бесконечно тонкую разомкнутую нить стороннего тока в объемном проводнике, имеющую произвольную форму, расстояние между концами d и значение тока I^* (рис. 3.16). Такую структуру генератора можно использовать как модель длинного тонкого возбудимого волокна сердечной мышцы в период реполяризации, когда в нем течет продольный внутриклеточный ток с почти постоянным значением по длине волокна, так как трансмембранный потенциал изменяется вдоль волокна линейно. Для такого генератора источниками электрического поля являются два униполя противоположной полярности с абсолютной интенсивностью I^* на кон-

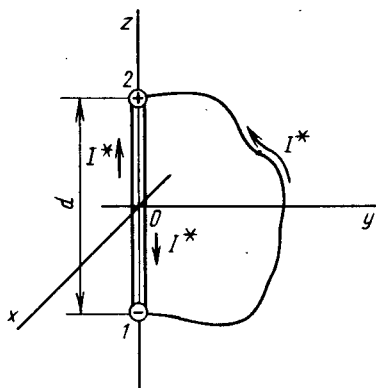


Рис. 3.16. Нитевидный генератор произвольной формы, представленный как совокупность прямолинейного и замкнутого генераторов

цах нити — в точках 1 и 2. При помощи (3.193)–(3.195), (3.224)–(3.228) найдем электрические мультипольные компоненты и собственную систему координат генератора x_{uz} . Ее ось z направлена вдоль прямой, соединяющей концы нити, от отрицательного униполя к положи-

тельному, а начало находится в середине отрезка, соединяющего эти точки. В собственной системе координат

$$\left. \begin{aligned} A_{10} &= I^*d, \quad A_{11} = B_{11} = 0, \\ A_{20} &= A_{21} = B_{21} = A_{22} = B_{22} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.348)$$

Таким образом идентифицируется часть генератора, порождающая его электрическое поле (определяется дипольный момент и локализация "конечного" диполя, образуемого источниками).

В то время как электрические мультипольные компоненты генератора зависят только от тока и расположения концов нити, магнитные мультипольные компоненты определяются формой нити на всем ее протяжении. В частности, при помощи уравнений (3.248), преобразованных применительно к линейно распределенному генератору, получаем

$$\left. \begin{aligned} A_{10}^M &= -\frac{I^*}{2} \int_{L_{12}} y dx + \frac{I^*}{2} \int_{L_{12}} x dy = I^* s_z, \\ A_{11}^M &= -\frac{I^*}{2} \int_{L_{12}} z dy + \frac{I^*}{2} \int_{L_{12}} y dz = I^* s_x, \\ B_{11}^M &= -\frac{I^*}{2} \int_{L_{12}} x dz + \frac{I^*}{2} \int_{L_{12}} z dx = I^* s_y, \end{aligned} \right\} \quad (3.349)$$

где интегрирование выполняется от точки стока 1 к точке истока 2 (в направлении тока) по линии генератора L , а величины s_x, s_y, s_z равны площадям, ограниченными проекциями отрезка оси z между точками 1 и 2 и генератора на координатные плоскости yOz, zOx и xOy соответственно (знаки их зависят от направления тока генератора по отношению к осям координат). Координаты магнитного центра согласно уравне-

ниям (3.254) определяются как

$$x_c^M = -2s_y/d, \quad y_c^M = 2s_x/d, \quad z_c^M = 0. \quad (3.350)$$

Для прямолинейного нитевидного генератора (совпадающего с отрезком оси z) магнитный дипольный момент равен нулю ($A_{10}^M = A_{11}^M = B_{11}^M = 0$), и магнитный центр совпадает с электрическим. Следовательно, значения магнитного дипольного момента и смещения магнитной оси (или магнитного центра) характеризуют отклонение нитевидного генератора от прямолинейной формы. Рассмотрение электрических и магнитных мультипольных компонент более высоких порядков позволяет еще подробнее идентифицировать конфигурацию нитевидного генератора.

Если заданный генератор имеет сложную структуру, например включает большое число нитевидных элементарных генераторов с различными формами, ориентациями и локализациями в пространстве, то, зная электрические и магнитные мультипольные компоненты такого генератора, можно найти параметры некоторого нитевидного генератора, рассматривая его как эквивалентный, дающий интегральное описание сложного заданного генератора.

Нитевидный генератор произвольной формы можно представить в виде совокупности прямолинейного и замкнутого генераторов. Введем между концами нити два воображаемых прямолинейных генератора, имеющих одинаковые по абсолютной величине I^* , но противоположно направленные токи. Тогда исходный генератор можно заменить вполне эквивалентной ему (в отношении создаваемых полей) совокупностью прямолинейного генератора, направленного от точки 1 к точке 2, и замкнутого генератора, состоящего из криволинейного исходного генератора и прямолинейного участка нити, направленного от точки 2 к точке 1. Первый, прямолинейный генератор создает такое же электрическое поле, как и исходный генератор, и соответственно описывается теми же электрическими мультипольными компонентами. Кроме того, он создает часть исходного магнитного поля. Вторым, замкнутым генератором создается только магнитное поле, которое зависит от размеров и формы его контура (оно совпадает с полем равномерного двойного слоя фиктивных магнитных источников, ограниченного этим контуром). Назовем последнее магнитное поле остаточным. Магнитное поле прямолинейного генератора однозначно определяется по электрическим измерениям, а для определения остаточного магнитного поля необходимы магнитные измерения.

Для количественной оценки соотношения между магнитным полем прямолинейного генератора и остаточным магнитным полем предположим, что точка наблюдения находится на расстоянии от генератора, намного превышающем его общие размеры. Тогда с достаточной точностью можно аппроксимировать прямолинейный генератор точечным диполь-

ным генератором с абсолютной величиной дипольного момента $D = I \cdot d$, а замкнутый генератор — фиктивным магнитным дипольным источником с абсолютной величиной магнитного дипольного момента $D^M = I \cdot s$ (где s — площадь, ограниченная проекцией замкнутого генератора на плоскость, перпендикулярную к вектору его магнитного дипольного момента). Пусть эти точечные диполи находятся в начале декартовой системы координат x, y, z . Тогда в соответствии с (3.132) для магнитного поля дипольного генератора получаем

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (D_y z - D_z y), \\ B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (D_z x - D_x z), \\ B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (D_x y - D_y x). \end{aligned} \right\} \quad (3.351)$$

Для магнитного поля фиктивного магнитного дипольного источника, скалярный потенциал которого выражается аналогично электрическому потенциалу уравнением (3.135), можно записать

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [D_x^M (2x^2 - y^2 - z^2) + 3D_y^M xy + 3D_z^M xz], \\ B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3D_x^M xy + D_y^M (2y^2 - x^2 - z^2) + 3D_z^M yz], \\ B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3D_x^M xz + 3D_y^M yz + D_z^M (2z^2 - x^2 - y^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.352)$$

Таким образом, магнитная индукция дипольного генератора изменяется в пространстве обратно пропорционально квадрату расстояния от генератора, а магнитная индукция фиктивного магнитного диполя — обратно пропорционально кубу этого расстояния.

Предположим, к примеру, что исходный нитевидный генератор имеет такую степень искривленности, что выполняется соотношение $s = d^2$. Тогда на расстоянии r от него максимальные абсолютные величины индукции первой и второй (остаточной) составляющих магнитного поля будут равны $I \cdot d / (4\pi r^2)$ и $I \cdot d^2 / (2\pi r^3)$ соответственно, т.е. последняя будет в $r / (2d)$ раз меньше.

Поле отведения в биоэлектрических и биомангнитных измерениях. При исследовании электрического поля биологического объекта обычно измеряют разность потенциалов между двумя точками его поверхности.

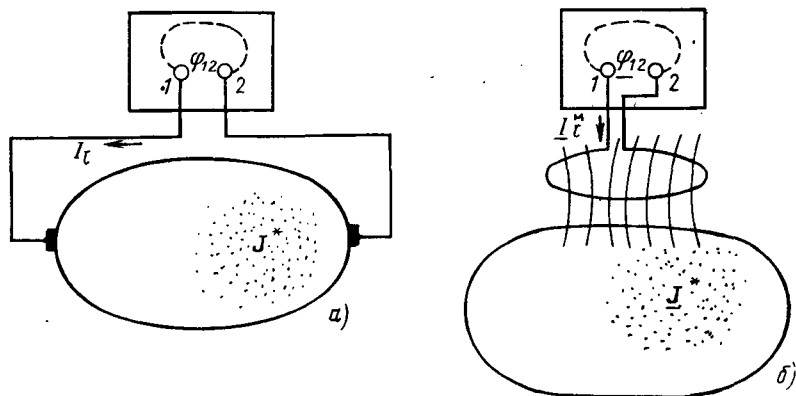


Рис. 3.17. Схемы генерации поля электрического отведения (а) и поля магнитного отведения (б)

Эта совокупность точек съема потенциала измерительной цепи (в которую в общем случае могут быть включены пассивные весовые резисторы) называется отведением; будем для большей определенности называть такое отведение электрическим. Аналогично при исследовании магнитного поля биологического объекта можно назвать отведением (точнее, магнитным отведением) совокупность точек съема потенциала на магнитном датчике — катушке, в которой наводится ток измеряемым магнитным полем.

Для анализа измерительных свойств как электрических, так и магнитных отведений и особенно для конструирования отведений с заданными характеристиками часто оказывается полезным понятие поля отведения. Полем отведения обычно называют электрическое поле, создаваемое в объемном проводнике (исследуемом объекте) единичным током, приложенным к отведению извне (рис. 3.17). Между характеристиками генератора, характеристиками поля отведения и сигналом на выходе отведения, когда оно используется в режиме измерения, существует простое соотношение, которое является одним из выражений так называемого принципа взаимности. Это соотношение сначала нашло применение в области биоэлектрических и несколько позже — биоманнитных измерений [68; 71, с. 353; 72, с. 101; 142, 155]. Известны разные подходы к его формулировке; в изложении этого вопроса будем следовать главным образом работам [72, с. 101; 155].

Возьмем в качестве исходного соотношения теорему Гаусса для векторного поля Φ , удовлетворяющего условиям непрерывности:

$$\int_V \operatorname{div} \Phi \, dV = \oint_S \Phi \cdot dS, \quad (3.353)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V (положительной считается внешняя нормаль к поверхности).

Чтобы получить искомое уравнение для электрического отведения, положим, что векторное поле Φ определяется тремя скалярными полями — удельной электрической проводимостью среды σ , электрическим потенциалом φ , который порождается исследуемым генератором в объемном проводнике, и электрическим потенциалом φ_l , который существовал бы в объемном проводнике, если бы при отсутствии исследуемого генератора ток I_l втекал в проводник через точку отведения 1 и вытекал через точку 2:

$$\Phi = \sigma(\varphi \operatorname{grad} \varphi_l - \varphi_l \operatorname{grad} \varphi). \quad (3.354)$$

Подставляя это выражение в (3.353), получаем после преобразований:

$$\begin{aligned} \int_V [\varphi \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi_l) - \varphi_l \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi)] dV = \\ = \oint_S (\sigma \varphi \operatorname{grad} \varphi_l - \sigma \varphi_l \operatorname{grad} \varphi) \cdot dS. \end{aligned} \quad (3.355)$$

Учитывая (3.7) и (3.85), находим, что в левой части этого уравнения первый член подынтегрального выражения равен нулю, так как поле тока отведения не имеет источников внутри проводника, а второй член равен $-\varphi_l \operatorname{div} \mathbf{J}^*$. В правой части второй член подынтегрального выражения равен нулю, так как ток исследуемого генератора не пересекает поверхность S , а интеграл от первого члена сводится к величине $I_l(\varphi_1 - \varphi_2)$, где φ_1 и φ_2 — потенциалы точек отведения в режиме измерения. В итоге получаем для сигнала отведения выражение

$$\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_V \frac{\varphi_l}{I_l} \operatorname{div} \mathbf{J}^* dV, \quad (3.356)$$

которое можно преобразовать к виду

$$\varphi_{12} = \int_V \frac{1}{I_l} \operatorname{grad} \varphi_l \cdot \mathbf{J}^* dV = - \int_V \frac{1}{I_l} \mathbf{E}_l \cdot \mathbf{J}^* dV. \quad (3.357)$$

По определению, векторное поле $\mathbf{E}_l/I_l$ является полем электрического отведения. Таким образом, измеренный отведением потенциал выражается как сумма (с отрицательным знаком) скалярных произведений вектора генератора и вектора поля отведения в каждой точке проводника.

Чтобы получить искомое уравнение для магнитного отведения, положим, что векторное поле Φ определяется четырьмя векторными полями — электрическим полем $\mathbf{E}$ и магнитным полем $\mathbf{H}$, которые порождаются исследуемым генератором $\mathbf{J}^*$, а также электрическим полем $\mathbf{E}_l^M$ и магнитным полем $\mathbf{H}_l$, которые существовали бы в пространстве,

если бы при отсутствии исследуемого генератора ток I_l^M втекал в измерительную катушку через точку отведения 1 и вытекал через точку 2:

$$\underline{\Phi} = \underline{\dot{E}} \times \underline{H}_l - \underline{E}_l^M \times \underline{H}. \quad (3.358)$$

Поскольку ток в проводнике может быть возбужден только переменным магнитным полем, в данном случае рассматриваются гармонически (синусоидально) изменяющиеся во времени поля, а символы с чертой внизу обозначают соответствующие комплексные амплитуды. Подставляя последнее выражение в уравнение (3.353), получаем

$$\begin{aligned} \int_V (\underline{H}_l \cdot \text{rot} \underline{E} - \underline{E} \cdot \text{rot} \underline{H}_l - \underline{H} \cdot \text{rot} \underline{E}_l^M + \underline{E}_l^M \cdot \text{rot} \underline{H}) dV = \\ = \oint_S (\underline{E} \times \underline{H}_l - \underline{E}_l^M \times \underline{H}) \cdot d\underline{S}. \end{aligned} \quad (3.359)$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя (3.54), (3.55) и (3.5) – (3.7), и распространим интегрирование на все бесконечное пространство. Тогда интеграл в правой части обратится в нуль, и после необходимых преобразований находим

$$\int_V \underline{E} \cdot \underline{J}_l^* dV = \int_V \underline{E}_l^M \cdot \underline{J}^* dV, \quad (3.360)$$

где $\underline{J}_l^*$ – комплексная амплитуда плотности стороннего тока, возбуждающего поле отведения. Допустим, что этот ток течет внутри измерительного устройства вдоль некоторого контура произвольной формы между точками отведения 2 и 1, и его суммарное значение равно $\underline{I}_l^M$. Тогда интеграл в левой части уравнения преобразуется в интеграл по указанному контуру, и независимо от формы контура последнее уравнение можно записать как

$$\underline{I}_l^M (\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_2) = - \int_V \underline{E}_l^M \cdot \underline{J}^* dV \quad (3.361)$$

или

$$\underline{\varphi}_{12} = - \int_V \frac{1}{\underline{I}_l^M} \underline{E}_l^M \cdot \underline{J}^* dV. \quad (3.362)$$

Таким образом, поле магнитного отведения $\underline{E}_l^M / \underline{I}_l^M$ связано с сигналом магнитного отведения соотношением, аналогичным (3.357), которое было получено выше для электрического отведения.

Важным свойством полученных соотношений является то, что они не содержат в явном виде характеристик проводящей среды независимо от

ее сложности. Влияние структуры среды на электрическое и магнитное поля исследуемого генератора отражается в форме самого поля отведения. Существенным различием между полями электрического и магнитного отведений является то, что первое не содержит вихрей, т.е. является потенциальным, тогда как второе содержит вихри.

Следует отметить, что иногда поле магнитного отведения определяют иначе — как векторный потенциал, создаваемый единичным внешним током в области исследуемого генератора [71, с. 353]. Это в некоторых случаях облегчает рассмотрение конкретных измерительных систем, однако не вносит принципиальной новизны по сравнению с обычным определением, описанным выше.

Понятие поля отведения успешно используется для синтеза отведений, обладающих заданными свойствами. Типичным примером может служить конструирование электрического отведения, обладающего равномерной чувствительностью к компоненте биоэлектрического генератора сердца по заданной оси координат. Совокупность трех таких отведений для декартовой системы координат составляет векторную электрокардиографическую систему отведений (ее обычно называют ортогональной векторкардиографической системой). Аналогично можно сконструировать магнитное отведение, обладающее равномерной чувствительностью к компоненте фиктивных магнитных диполей биоэлектрического генератора сердца по заданной оси координат, а совокупность трех таких отведений для декартовой системы координат составляет векторную магнитокардиографическую систему отведений. Силовые линии каждого такого электрического отведения представляют собой прямые, параллельные оси отведения, а силовые линии магнитного отведения — концентрические окружности относительно оси отведения.

Преимуществом метода анализа отведений с применением поля отведения является то, что на измерительные свойства отведения влияет только форма поля отведения в области генератора; это особенно облегчает синтез отведений с использованием физического моделирования полей [141].

Общая концепция автоматизированной системы диагностики, основанной на измерении электромагнитных полей организма. Медицинская функциональная диагностика является важнейшей областью практического применения методов измерения и анализа электрических, а в последние годы и магнитных полей организма. "Электрографические" методы диагностики (электрокардиография, электроэнцефалография и т.п.) около трех десятилетий тому назад стали объектом автоматизации с применением ЭВМ, и с тех пор были достигнуты большие успехи как в разработке аппаратуры для автоматизированных систем диагностики, так и в создании общей методологии, или концепции таких систем. Методы диагностики на основе биоманитных измерений стали развиваться значительно позже, однако концепция современной автоматизированной диагностической системы в равной мере относится

к системам, использующим электрические или магнитные измерения.

Рассматривая последовательные этапы развития автоматических методов диагностики, некоторые авторы выделяют алгоритмы, диагностические программы ЭВМ и соответствующие автоматизированные системы 1-го и 2-го поколений (в дальнейшем мы будем обобщенно называть системой всю эту совокупность автоматизированных диагностических средств). Под системами 1-го поколения понимаются автоматизированные системы, которые реализуют средствами ЭВМ формализованные диагностические правила, общепринятые в клинической диагностике на основе стандартной методики регистрации и параметризации сигналов соответствующих физических полей организма. Системами 2-го поколения считаются системы, в которых интенсивно используются статистические методы распознавания и классификации объектов, причем правила принятия диагностического решения вырабатываются предварительно в клинико-статистических исследованиях достаточно больших по численности и хорошо верифицированных групп испытуемых. Количественными характеристиками измеренных сигналов в этих исследованиях могут служить как общепринятые, так и любые другие параметры, извлекаемые из исходной записи; статистическая обработка позволяет оценить диагностическую информативность этих параметров для конкретной исследуемой популяции.

В свете имеющихся достижений в области измерительной и вычислительной техники, а также, что особенно важно, в области электрофизиологии и биофизики, математического моделирования электродинамической системы, порождающей биоэлектрические сигналы, сейчас уже можно говорить о появлении автоматизированных диагностических систем 3-го поколения. В них количественное описание исходных сигналов и выделение параметров базируется на содержательных с электрофизиологической и биофизической точек зрения математических моделях изучаемого органа как генератора биоэлектрических токов и тела как объемного проводника, в котором существует измеряемое электромагнитное поле. Использование таких параметров сужает область поиска решения при статистической обработке данных, приближает терминологию диагностики к электрофизиологическим и анатомическим понятиям, способствуя более осмысленной интерпретации данных врачом, в частности, при сопоставлении этих данных с результатами других клинических исследований.

Наконец, можно предвидеть создание автоматизированных диагностических систем, которые, реализуя все известные автоматические способы внешней обработки данных, включают в процесс принятия решения, как существенное звено этого процесса, внутренние механизмы анализа данных и принятия решения врача. Такие системы, условно называемые нами системами 4-го поколения, по своей структуре и функциям близки к так называемым экспертным системам. (Следует от-

метить, что при рассмотрении автоматизированных систем медицинской диагностики иногда системы, аналогичные тем, которые здесь отнесены к системам 1-го и 2-го поколений, называют диагностическими системами 1-го поколения, а медицинские экспертные системы — диагностическими системами 2-го поколения.)

В системе 4-го поколения должна быть предусмотрена возможность максимально активного участия врача в решении любой диагностической задачи, и в то же время система обеспечивает автоматизацию всех операций обработки данных, которые могут быть представлены на языке алгоритмов и программ ЭВМ.

Работой системы управляет пользователь — врач, который взаимодействует со всеми ее элементами через посредство автоматизированного интерфейса "человек—машина", оборудованного необходимыми устройствами ввода информации и выдачи информации в текстовой, числовой и графической формах, включая различные виды образного представления данных.

Система автоматически осуществляет внешнюю обработку измеренных данных, включая предварительную обработку сигналов и основную вычислительную обработку данных выбранными методами, причем врач может получать от системы сообщения в текстовой, числовой и графической формах о любых исходных и промежуточных данных, участвующих в процессе решения задачи. Окончательная информация, предоставляемая врачу, содержит результаты работы алгоритмов автоматической классификации и образное представление электрического процесса возбуждения данного органа для визуальной оценки, снабженное соответствующим содержательным комментарием. Наряду с этими сведениями врач получает дополнительные клинические данные об испытуемом, в том числе результаты неэлектрофизиологических исследований. Вся эта информация подвергается врачом внутренней обработке на основе его собственной интуитивной модели принятия решения с привлечением профессиональных знаний (в частности, по физиологии возбуждения изучаемого органа и накопленного клинического опыта), в результате чего выносится окончательное диагностическое заключение (диагностическое резюме). Процесс внутренней обработки происходит при активном взаимодействии врача с устройствами внешней обработки и объектом исследования (при необходимости целенаправленно изменяют параметры алгоритмов вычислительной обработки данных, а иногда и состояние испытуемого).

По-видимому, относительная степень использования сведений каждого вида, воспринимаемых врачом, будет зависеть от уровня его квалификации. Чем выше этот уровень, тем большую роль играют образные данные об электрическом процессе в органе и дополнительные клинические данные; и наоборот, при низком уровне квалификации врач в основном ориентируется на заключение о состоянии организма, выдаваемое алгоритмом автоматической классификации.