А.В.Русаков, В.Г.Сухов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ. МЕХАНИКА

Физико-математическая школа N2 г.Сергиев Посад 1998 г.

Данное учебное пособие представляет собой сборник задач по механике, составленный на основе задач, предлагаемых учащимся физике - математической школы № 2 г. Сергиева Посада. Сборник задач соответствует программе углубленного курса физики для средней школы. Все задачи снабжены ответами, а задачи, являющиеся, по мнению авторов, наиболее сложными, снабжены указаниями. Многие из задач, включенных в сборник, предлагались на вступительных экзаменах в ведущие ВУЗы Москвы (МФТИ, МГУ, МИФИ и др.). В данном пособии широко представлены задачи физических олимпиад различных уровней.

Пособие может быть полезно для учащихся и учителей средних школ, лиц, занимающихся подготовкой к поступлению в ВУЗы и самообразованием.

Авторы с благодарностью примут все конструктивные замечания и предложения читателей.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Равномерное движение. Средняя скорость

1.1. В течение какого времени пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью 54 км/ч, будет видеть встречный поезд, идущий со скоростью 36 км/ч, если его длина 150 м?

1.2. По двум параллельным путям в одном направлении идут два поезда: товарный длиной 630 м со скоростью 48,6 км/ч и электричка длиной 120 м со скоростью 102,6 км/ч. В течение какого времени электричка будет обгонять товарный поезд?

1.3. Катер идет по течению реки из пункта А в пункт В 3 часа, а обратно - 6 часов. За какое время проплывет расстояние АВ спасательный круг?

1.4. Между двумя пунктами, расположенными на реке на расстоянии 100 км друг от друга, курсирует катер. Катер проходит это расстояние за 4 ч, а обратно - за 10 ч. Определить скорость течения реки.

1.5. Из середины колонны автомобилей, движущейся со скоростью 10 км/ч, одновременно выезжают два мотоциклиста: один в голову колонны, другой - в хвост. С какой скоростью двигались мотоциклисты, если их скорости были одинаковыми, а время движения одного мотоциклиста оказалось вдвое меньше, чем другого?

1.6. Рыбак плывет вверх по реке. Проезжая под мостом, он уронил в воду запасное весло. Через час он обнаружил потерю и, повернув назад, догнал весло в 6 км ниже моста.

Какова скорость течения реки, если рыбак все время греб одинаково?

1.7. Человек бежит по эскалатору. В первый раз он насчитал 50 ступенек. Во второй раз, двигаясь в ту же сторону со скоростью в три раза большей, он насчитал 75 ступенек. Сколько ступенек насчитал бы человек на неподвижном эскалаторе?

1.8. По дороге бежит колонна спортсменов длиной L со скоростью v. Ей навстречу бежит тренер со скоростью $u < v$. Поравнявшись с тренером, спортсмены разворачиваются и бегут в обратном направлении с прежней скоростью. Определить новую длину колонны после разворота последнего спортсмена.

1.9. Колонна автомобилей, движущаяся со скоростью v_1, въезжает на ремонтируемый участок дороги, по которой она может двигаться со скоростью не больше v_2. При каком минимальном расстоянии между автомобилями они не будут сталкиваться, если длина каждого автомобиля равна l ?

1.10. Движущийся автомобиль издает звуковой сигнал длительностью t_1. Сигнал отражается от стены большого здания, находящегося в направлении движения автомобиля. Длительность отраженного сигнала, измеренная в автомобиле, равна t_2. С какой скоростью движется автомобиль, если скорость звука в воздухе равна c ?

1.11. Автомобиль, движущийся параллельно длинной стене, издает короткий звуковой сигнал. Через время t водитель услышал отраженный от стены сигнал. Определить скорость автомобиля, если он едет на расстоянии L от стены, а скорость звука равна c.

1.12. Два тела движутся навстречу друг другу и расстояние между ними уменьшается на $S_1 = 16$ м за каждые $t_1 = 10$ с. Если эти тела с такими же скоростями движутся в одну сторону, то расстояние между ними увеличивается на $S_2 = 3$ м за каждые $t_2 = 5$ с. Найти скорость каждого тела.

1.13. Два автобуса одновременно выехали из пункта А в пункт В. Один из них первую половину пути ехал со скоростью v_1, а вторую половину - со скоростью v_2. Второй автобус двигался со скоростью v_1 первую половину времени своего движения от А до В, а вторую половину - со скоростью v_2. Определить среднюю скорость движения каждого автобуса, если $v_1 = 30$ км/ч, а $v_2 = 40$ км/ч.

1.14. Поезд половину пути проехал со скоростью 72 км/ч, а вторую половину - в 1,5 раза медленнее. Определить среднюю скорость на всем пути.

1.15. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью $v_1 = 12$ км/ч. Далее половину оставшегося времени движения он ехал со скоростью $v_2 = 6$ км/ч, а затем до конца шел пешком со скоростью $v_3 = 4$ км/ч. Определить среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

1.16. Мотоциклист за первые два часа проехал расстояние 90 км, а следующие 3 часа двигался со скоростью 50 км/ч. Какова средняя скорость на всем пути?

1.17. Катер прошел первую половину пути со скоростью в два раза большей, чем вторую. Средняя скорость на всем пути составила 1 м/с. Найти скорость катера на первой половине пути.

1.18. Первую половину времени тело движется со скоростью 60 м/с под углом 30^0 к заданному направлению, а вторую - под углом 120^0 к тому же направлению со скоростью 80 м/с. Найти среднюю скорость перемещения.

1.19. Два автомобиля одновременно выезжают из города А в город В. Один автомобиль ехал с постоянной скоростью v по прямой дороге, соединяющей города А и В. Второй ехал по дороге, представляющей дугу полуокружности, диаметром которой является прямая АВ. В город В автомобили приехали тоже одновременно. Определить среднюю скорость второго автомобиля.

1.20. Автомобиль, двигаясь из одного города в другой, на участки пути, длины которых относятся как 1:2:3:4, затратил времена, которые относятся как 4:3:2:1. Какова была средняя скорость движения автомобиля, если его скорость на последнем участке пути равнялась 120 км/ч?

1.21. Два автомобиля одновременно выехали из одного города в другой. Первый автомобиль ехал всю дорогу с постоянной скоростью v. Второй автомобиль ехал по той же дороге со скоростью, зависимость которой от времени представляет полуокружность в осях v от t (рис. 1.1). Определить начальную скорость второго автомобиля v_0, если в конечный пункт оба автомобиля приехали одновременно.

рис. 1.1

1.22. Велосипедист первую половину времени движения между двумя пунктами ехал со скоростью 30 км/ч, а вторую - со скоростью 15 км/ч. С какой средней скоростью велосипедист проехал вторую половину пути?

1.23. По дороге едет колонна автомобилей со скоростью 20 км/ч. Из середины колонны одновременно отправляются два мотоциклиста: один в голову колонны, другой в хвост. Первый мотоциклист приехал к месту на 6 минут раньше второго. Какова длина колонны, если скорость мотоциклистов одинакова и равна 30 км/ч?

1.24. Катер проходит расстояние между двумя пунктами на реке по течению за время $t_1 = 3$ часа, а против течения за $t_2 = 6$ часов. Средняя скорость катера при движении туда и сразу обратно $v_{ср} = 10$ км/ч. Найти собственную скорость катера и скорость течения реки.

1.25. Зависимость скорости автомобиля от времени представлена на рис. 1.2. Определить среднюю скорость автомобиля.

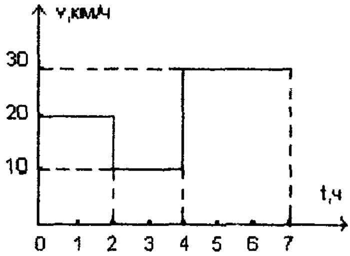

рис. 1.2

1.26. На рис. 1.3 представлен график зависимости скорости автомобиля от времени. При этом средняя скорость автомобиля оказалась равна 30 км/ч. Определить скорость автомобиля на участке равномерного движения.

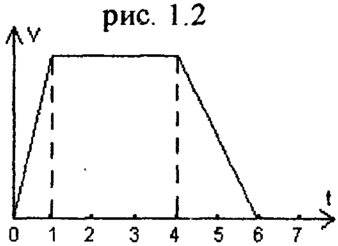

рис. 1.3

1.27. Летящий звездолет посылает вперед радиосигналы длительностью t_1. Внезапно он начинает принимать сигналы отраженные от находящегося впереди препятствия, длительность которых t_2. С какой скоростью приближается звездолет к препятствию, если скорость распространения радиосигналов равна с?

1.28. Под каким углом к берегу должна плыть лодка, чтобы волны от нее доходили до берега одновременно? Скорость лодки v, скорость волн на воде u ($v > u$).

1.29. Две вертикальные стенки образуют двугранный угол равный 15^0 (рис. 1.4). В этот угол параллельно одной из стенок влетает маленький шарик. Сколько столкновений сделает шарик прежде чем начнет двигаться в обратном направлении? Столкновения со стенками упругие.

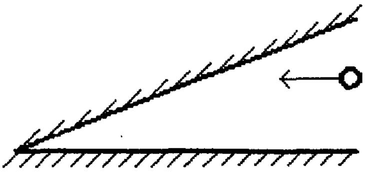

рис. 1.4

1.30. Стержень изготовлен из большого числа чередующихся отрезков, изготовленных из двух разных материалов. Длина отрезков из одного материала равна L_1, а скорость звука в них равна v_1. Для отрезков из другого материала длина и скорость звука равны L_2 и v_2. Какова средняя скорость звука в стержне?

2. Равноускоренное движение

2.1. Скорость автомобиля за 20 с уменьшилась с 20 м/с до 10 м/с. С каким средним ускорением двигался автомобиль?

2.2. Тело, свободно падающее из состояния покоя, в конце первой половины пути достигло скорости $v = 20$ м/с. С какой высоты падало тело?

2.3. Определить начальную скорость и ускорение автомобиля, если, двигаясь равноускоренно, за первые $t_1 = 3$ с он прошел путь $L_1 = 18$ м, а за первые $t_2 = 5$ с - $L_2 = 40$ м.

2.4. Во сколько раз необходимо увеличить начальную скорость вертикально вверх брошенного тела, чтобы высота подъема увеличилась вдвое?

2.5. Тело свободно падает с высоты 540 м. Разделите эту высоту на три части, на прохождение которых тело затрачивает одинаковое время.

2.6. От движущегося поезда отцепился последний вагон. Поезд продолжает двигаться с той же скоростью. Найти отношение расстояний, пройденных поездом и вагоном к моменту остановки вагона. Движение вагона равнозамедленное.

2.7. Тело, двигаясь равноускоренно, проходит последовательно два одинаковых отрезка пути длиной $L = 10$ м за времена $t_1 = 1{,}06$ с и $t_2 = 2{,}2$ с. Найти начальную скорость и ускорение тела.

2.8. Двигаясь равноускоренно, тело проходит некоторое расстояние. Скорость тела в начале пути v_1, а в конце - v_2. Определить среднюю скорость движения тела.

2.9. Бросив камень в колодец, наблюдатель через время t услышал всплеск воды. Определить глубину колодца. Скорость звука в воздухе равна с.

2.10. Двигаясь равноускоренно из состояния покоя, тело проходит некоторое расстояние. Найти отношение средней скорости тела на второй половине пути к средней скорости на первой половине пути.

2.11. Тело движется равноускоренно из состояния покоя в течении некоторого времени. Найти отношение средних скоростей движения тела за вторую и за первую половины времени движения.

2.12. Двигаясь равноускоренно, тело прошло за первую секунду движения расстояние 1 м, за вторую - 2 м, за третью - 3 м и т. д. Определить начальную скорость и ускорение тела.

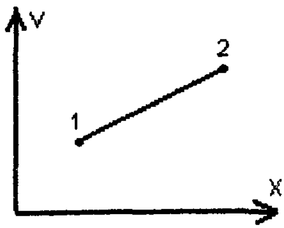

рис. 2.1

2.13. На рис. 2.1 приведена зависимость скорости тела от координаты. Где ускорение тела больше: в точке 1 или в точке 2?

2.14. Тело, пущенное вверх вдоль наклонной плоскости со скоростью v_1 = 1,5 м/с, вернулось обратно со скоростью v_2 = 1 м/с. Найти среднюю скорость тела на всем пути. Вверх и вниз тело двигалось с постоянным ускорением.

2.15. Два тела одновременно брошены с одинаковыми скоростями v_0: одно вниз с высоты H, другое вверх. На какой высоте тела встретятся?

2.16. Тело движется равноускоренно из состояния покоя. Найти отношение скоростей тела в конце четвертого и в конце первого метров пути.

2.17. Тело начинает двигаться равноускоренно из состояния покоя. Спустя время t_0 ускорение тела меняет знак на противоположный, оставаясь прежним по модулю. Через какое время после начала движения тело пройдет через исходную точку?

2.18. Тело, движущееся с ускорением 1 м/с^2, в некоторый момент времени проходит через точку А, имея скорость 10 м/с. На каком расстоянии от точки А находилось тело секунду назад?

2.19. Отходящий от станции поезд на первом километре пути увеличил свою скорость на 10 м/с, а на втором - на 5 м/с. На каком километре среднее ускорение поезда было больше?

2.20. Тело совершает колебательное движение: в течение времени t ускорение тела равно a, затем в течение того же времени t ускорение равно $-a$, затем опять a и т. д. Найти расстояние между крайними положениями тела.

2.21. Тело движется равноускоренно из состояния покоя с ускорением a. Через время t ускорение тела становится отрицательным. При какой величине нового ускорения тело через время t пройдет через исходную точку?

2.22. Если мимо стоящего на перроне пассажира первый вагон тронувшегося поезда проходит за 10 с, то за какое время мимо него пройдет весь поезд, состоящий из 16-ти вагонов? Поезд движется равноускоренно.

2.23. Поезд трогается с места и равноускоренно проходит мимо неподвижного пассажира. При этом первый вагон прошел мимо него за время t_1, а последний - за время t_2. За какое время мимо пассажира прошел весь поезд, если первоначально пассажир стоял у головы поезда?

2.24. Тело движется из состояния покоя равноускоренно. Во сколько раз путь, пройденный телом за восьмую секунду движения, больше пути, пройденного за третью секунду?

2.25. Торможение поезда началось на расстоянии 200 м от станции. На каком расстоянии от станции окажется поезд, идущий со скоростью 30 м/с, через 7 с после начала торможения с ускорением -5 м/с^2?

2.26. Расстояние между двумя свободно падающими каплями через время t = 2 с после начала падения второй капли было L = 25 м. На сколько позднее первой начала падать вторая капля?

2.27. Равнозамедленно движущееся тело проходит два последовательных одинаковых участка длиной L за времена t и $2t$. Найти скорость тела в начале первого участка и ускорение.

2.28. Тело движется вдоль прямой с ускорением, зависимость которого от времени показана на рис. 2.2. В какой момент времени скорость тела максимальна?

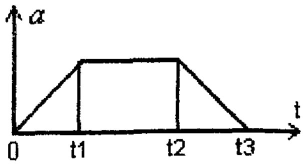

рис. 2.2

2.29. С высоты H = 100 м свободно падает камень. Через $\Delta t = 1$ с с той же высоты вертикально вниз бросают еще один камень. С какой скоростью необходимо бросить второй камень, чтобы оба камня упали на землю одновременно?

2.30. Материальная точка начала движение вдоль оси x с постоянным ускорением $a_1 = -2$ м/с^2. В момент времени $t_1 = 10$ с величина проекции ускорения скачком приняла значение $a_2 = 3$ м/с^2, а в момент $t_2 = 15$ с обратилась в 0. Определить координату и путь, пройденный телом, через 20 с после начала движения. Начальная координата $x_0 = 0$.

2.31. В момент $t = 0$ точка вышла из начала координат вдоль оси x. Ее скорость меняется по закону: $\mathbf{v} = \mathbf{v_0}(1 - t/T)$, где $\mathbf{v_0}$ - вектор начальной скорости ($v_0 = 10$ м/с), а $T = 5$ с. Найти координату точки в момент $t_1 = 6$ с и путь, пройденный точкой за первые $t_2 = 8$ с движения.

2.32. Ракета, имея начальную скорость $v_0 = 4$ км/с, движется с постоянным ускорением в течение времени $t = 1000$ с и в последнюю секунду проходит расстояние $S = 1$ км. Определить ускорение ракеты.

2.33. Тело брошенное вертикально вниз со скоростью $v_0 = 10$ м/с, на первую половину пути потратило вдвое большее время, чем на вторую. С какой высоты было брошено тело?

2.34. Автомобиль равноускоренно проходит расстояние AB. Причем его скорость в точке A равна v_1, а в точке B - v_2. Какова скорость автомобиля в середине участка AB?

2.35. Тело свободно падало ($v_0 = 0$) с некоторой высоты со средней скоростью $v_{ср} = 10$ м/с. С какой высоты падало тело?

2.36. Закон движения точки: $x(t) = 2t - t^2/2$. Определить среднюю скорость движения точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

2.37. Тело движется вдоль оси x так, что его скорость меняется по закону: $v = \alpha\sqrt{x}$ (α = const). Определить зависимость скорости тела от времени и среднюю скорость за первые S метров пути. Начальная координата $x_0 = 0$.

2.38. При свободном падении средняя скорость тела за последнюю секунду падения вдвое больше, чем за предыдущую. С какой высоты падало тело?

2.39. Тело движется равноускоренно. Начальная скорость равна 0,5 м/с, а ускорение равно 1 м/с^2. Какое расстояние проходит тело за n-ю секунду движения?

2.40. Приближаясь к астероиду со скоростью v, звездолет послал вперед короткий звуковой сигнал и через время t получил отраженный сигнал. С каким минимальным ускорением должен начать тормозить звездолет, чтобы не врезаться в астероид? Скорость света равна c.

2.41. Плита поднимается с постоянной скоростью v = 5 м/с. Мяч начал падать когда расстояние между ним и плитой было равно H = 5 м. Найти время между последующими упругими ударами мяча о плиту.

2.42. Мяч, брошенный мальчиком вниз со скоростью v, после упругого удара о пол достигает потолка зала. С какой скоростью должен мальчик бросить вниз мяч с подставки высотой h, чтобы он опять достиг потолка?

2.43. Поезд начинает тормозить и останавливается, пройдя путь 75 м. Найти начальную скорость поезда, если за предпоследнюю секунду торможения он прошел 2,25 м.

2.44. Двигаясь со скоростью 10 м/с, автомобиль начинает тормозить и останавливается через 2 секунды, пройдя расстояние 8 м. С каким ускорением тормозил автомобиль?

2.45. Падающее с вершины башни тело пролетело расстояние L, когда второе тело начало падать из точки, расположенной на h ниже вершины башни. Оба тела достигли земли одновременно. Определить высоту башни.

2.46. Летающая тарелка стартует с постоянным ускорением a, забыв одного из инопланетян. В течение какого времени после взлета оставшемуся инопланетянину имеет смысл звать тарелку назад, если скорость звука в воздухе равна с?

2.47. Ракета взлетает вертикально с постоянным ускорением a. Люди, стоящие у места старта, через время τ услышали звук выключения двигателя. Определить скорость ракеты в момент выключения двигателя, если скорость звука в воздухе равна с.

2.48. Летящий вертикально вверх снаряд взорвался на максимальной высоте. Осколки снаряда выпадали на землю в течение времени τ. Найти максимальную скорость осколков момент взрыва.

2.49. Велосипедист, двигаясь с постоянной скоростью $v_1 = 4$ м/с, проезжает мост. Через $\tau = 3$ мин этот мост проезжает мотоциклист, имея скорость $v_2 = 19$ м/с и сразу после моста начинает тормозить с ускорением $a = 0{,}15$ м/с^2.

Через какое время после начала торможения и на каком расстоянии от моста мотоциклист догонит велосипедиста?

2.50. Точка движется по закону: $x(t) = t^2 + 8t - 9$, где x измеряется в метрах, а t - в секундах. Найти скорость точки в начале координат.

2.51. Два тела движутся с постоянными ускорениями. В момент $t = 0$ скорости тел были равны: $v_{01} = 10$ м/с и $v_{02} = 20$ м/с и направлены навстречу друг другу, а ускорения направлены в противоположные стороны и равны: $a_1 = 2$ м/с^2 и $a_2 = 1$ м/с^2 соответственно. При каком максимальном начальном расстоянии между телами они еще встретятся?

2.52. Летающая тарелка стартует с поверхности земли вертикально вверх с постоянным ускорением a. В процессе подъема тарелка излучает короткие звуковые сигналы и регистрирует их отражение от поверхности земли. Через какое время после старта будет послан последний сигнал, отражение которого еще можно зарегистрировать? Скорость звука равна с.

2.53. Шайбу толкнули вверх вдоль наклонной плоскости со скоростью 10 м/с. Обратно она вернулась со скоростью 5 м/с. С какой скоростью вернется шайба, если на половине высоты, до которой она поднялась, поставить стенку, от которой шайба отражается без потери скорости?

2.54. Два мяча брошены одновременно навстречу друг другу с одинаковыми скоростями: один вертикально вверх с поверхности земли; другой вертикально вниз с высоты H. Найти эти скорости, если к моменту встречи один из мячей пролетел расстояние 1/3H.

3. Свободное движение тела, брошенного под углом к горизонту

3.1. С башни высотой 45 м горизонтально брошен камень со скоростью 10 м/с. На каком расстоянии от башни он упадет на землю?

3.2. Тело, брошенное под углом 45^0 к горизонту, через 2 с имело вертикальную составляющую скорости 10 м/с. Определить дальность полета тела.

3.3. Тело брошено со скоростью 10 м/с под углом 60^0 к горизонту. Определить скорость тела в верхней точки траектории.

3.4. В мишень с расстояния 20 м сделано два выстрела при горизонтальной наводке винтовки. Скорость первой пули 100 м/с, а второй - 200 м/с. Определить расстояние между пробоинами в мишени.

3.5. Камень, брошенный под углом к горизонту, упал на землю через 2 с. Чему равна дальность полета камня, если за время полета его максимальная скорость была вдвое больше минимальной?

3.6. Тело брошено горизонтально со скоростью 4 м/с. При этом оказалось, что дальность его полета равна высоте бросания. С какой высоты бросили тело?

3.7. С вышки бросили камень в горизонтальном направлении. Через 10 с он упал на расстоянии 50 м от вышки. Определить начальную скорость камня.

3.8. Из горизонтально установленной винтовки стреляют в мишень, расположенную на расстоянии $S = 300$ м от винтовки. При этом пуля попадает в центр мишени. На сколько нужно передвинуть мишень по горизонтали, чтобы пуля попала в нее на $\Delta h = 25$ см выше центра? Скорость вылета пули $v = 600$ м/с.

3.9. Камень брошен горизонтально со скоростью $v = 15$ м/с. Через какое время вектор его скорости будет направлен под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту?

3.10. Камень брошен под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через какое время вектор его скорости будет направлен под углом $\beta = 30^0$ к горизонту?

3.11. Тело с высоты $H = 4$ м бросают в горизонтальном направлении так, что оно подлетает к земле под углом $\alpha = 45^0$. Какое расстояние по горизонтали пролетело тело?

3.12. С обрыва в горизонтальном направлении бросают камень со скоростью $v_0 = 27$ м/с. Через какое время касательное ускорение камня будет равно нормальному?

3.13. Миномет установлен на расстоянии $L = 8000$ м от вертикального обрыва высотой $H = 105$ м. Как близко к основанию обрыва (рис. 3.1) могут «подобраться» мины если их начальная скорость $v_0 = 300$ м/с?

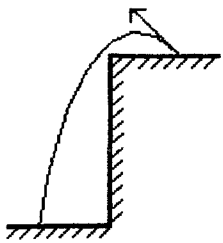
рис. 3.1

3.14. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Определить радиус кривизны траектории в точке бросания и в точке максимального подъема.

3.15. Тело брошено под углом к горизонту. При каком угле бросания радиус кривизны траектории в точке максимального подъема будет равен высоте этой точки?

3.16. На какое максимальное расстояние можно бросить мяч в спортивном зале высотой $H = 8$ м, если начальная скорость мяча $v_0 = 20$ м/с? Рассмотреть случай $H = 15$м?

• **3.17.** Какую максимальную площадь можно полить из шланга, если скорость воды на выходе из шланга $v_0 = 10$ м/с?

3.18. С вершины горы горизонтально брошен камень, который упал на расстоянии L от вершины. С какой скоростью бросили камень, если склон горы составляет угол α с горизонтом?

3.19. Тело, брошенное со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту, дважды проходит высоту $h = 1{,}6$ м. На каком расстоянии находятся точки прохождения этой высоты?

3.20. Из шланга, лежащего на земле, под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту вытекает струя воды и падает на землю на расстоянии $L = 10$ м от шланга. Какая масса воды находится на высоте выше $h = 2$ м, если сечение выходного отверстия шланга $S = 10$ см^2?

3.21. Тело брошено с обрыва со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Через какое время направление скорости тела станет перпендикулярным направлению начальной скорости?

3.22. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Через какое время радиус-вектор тела, проведенный из точки бросания, и вектор его скорости будут перпендикулярны?

3.23. Под каким углом к горизонту необходимо бросить тело, чтобы равенство его кинетической и потенциальной энергий достигалась в высшей точке траектории?

3.24. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. На какой высоте кинетическая энергия тела будет равна потенциальной?

3.25. В цилиндрический сосуд налита вода до уровня H. На высоте $h_1 = 1/3H$ от дна в стенке проделано маленькое отверстие. На какой высоте от дна надо проделать еще одно отверстие, чтобы обе струи падали в одну точку (рис. 3.2)? Скорость вытекания струи из отверстия равна $v = \sqrt{2gh}$, где h - высота уровня воды над отверстием.

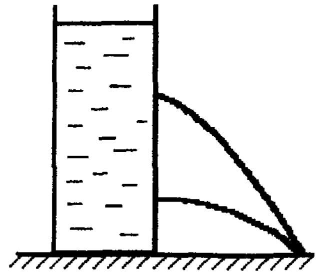

рис. 3.2

3.26. В цилиндрический сосуд налита вода до уровня H. На какой высоте от дна сосуда в боковой стенке необходимо проделать отверстие, чтобы дальность полета струи была максимальной?

3.27. Бросив камень под углом к горизонту, необходимо поразить цель, находящуюся на высоте h и на расстоянии L от места бросания. С какой минимальной скоростью необходимо бросить камень?

3.28. Тело брошено под углом α к горизонту. При этом отношение максимальной высоты подъема к дальности полета $H/L = a$. Каким будет отношение H_1/L_1, если тело бросить под углом $\alpha_1 = 90^0 - \alpha$ к горизонту?

рис. 3.3

3.29. На горизонтальной поверхности лежит полусфера радиусом R (рис. 3.3). С какой минимальной скоростью v_0 и под каким углом к горизонту α необходимо бросить камень, чтобы он перелетел через полусферу, не задев ее?

3.30. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии 5,1 км друг от друга. Через сколько времени снаряд, вылетевший с начальной скоростью 240 м/с, достигнет цели?

3.31. Человек находится на расстоянии L = 5 м от вертикальной стены. С какой минимальной скоростью человек должен бросить мяч, чтобы после упругого столкновения он вернулся обратно?

3.32. С какой минимальной скоростью необходимо бросить мяч, чтобы он перелетел через дом высотой H = 25 м и шириной L = 12,5 м?

3.33. Под каким углом к горизонту необходимо бросить камень, чтобы он все время удалялся от точки бросания?

3.34. Бросив камень под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту, необходимо попасть в цель, находящуюся на расстоянии L = 12 м от места бросания и на высоте h = 2 м. С какой скоростью необходимо бросить камень?

• **3.35.** Самолет летит на высоте h = 1500 м со скоростью v = 200 м/с. Из орудия стреляют по самолету когда он находится точно над орудием. Под каким углом к горизонту следует стрелять, если начальная скорость снаряда v_0 = 900 м/с?

3.36. По горизонтальной поверхности с постоянной скоростью едет тележка, верхняя плоскость которой наклонена к горизонту под углом $\alpha = 15^0$. На тележку с высоты H = 15 м без начальной скорости падает маленький шарик (рис. 3.4). При какой скорости тележки шарик, после упругого столкновения с тележкой упадет на нее в ту же точку? Будут ли последующие падения шарика попадать в ту же точку? Высотой тележки пренебречь.

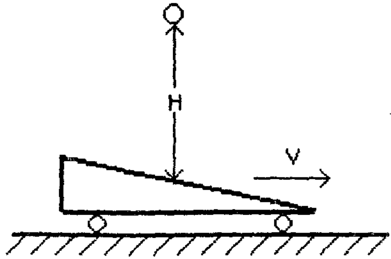

рис. 3.4

3.37. Лодка плывет со скоростью 10 м/с параллельно берегу на расстоянии 5 м от берега. Мальчик бросает камень в лодку в момент когда она проплывает мимо него. С какой скоростью мальчик должен бросить камень, если угол бросания 45^0 к горизонту?

3.38. Тело, брошенное с 10-метровой высоты, упало на землю через 2 с на расстоянии 3 м по горизонтали от места бросания. С какой скоростью бросили тело?

3.39. Самолет летит горизонтально на высоте h со скоростью v_0. Летчик должен сбросить груз в цель, находящуюся впереди самолета. Под каким углом к горизонту летчик должен видеть цель в момент сбрасывания груза?

3.40. Тело брошено под углом к горизонту со скоростью v_0. Найти скорость тела на высоте h.

3.41. Два тела бросают из одной точки в одном направлении под углом 30^0 к горизонту с интервалом 2 секунды с одинаковой скоростью 60 м/с. Через какое время после бросания первого тела расстояние между телами в процессе полета будет минимальным?

3.42. Мяч, брошенный одним мальчиком другому под углом к горизонту со скоростью v_0 = 20 м/с, достиг высшей точки траектории через секунду. На каком расстоянии находятся мальчики?

3.43. С вышки из двух разных точек одновременно горизонтально брошены два камня с одинаковыми скоростями 5 м/с. Разность высот точек бросания равна 10 м, а разность расстояний от точек падения до вышки равна 5 м. С какой высоты бросили каждый камень?

3.44. Мяч, брошенный под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту, через $t = 1$ с попадает в точку, находящуюся на высоте $h = 1$ м. Найти расстояние, которое пролетел мяч по горизонтали.

3.45. Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, равна $L = 10$ м, а время полета $t = 5$ с. Определить наибольшую высоту подъема тела, угол бросания и радиус кривизны траектории в точке наибольшего подъема.

3.46. Камень брошен со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту. На какой высоте вектор его скорости будет направлен под углом $\beta = 30^0$ к горизонту?

3.47. Самолет летит горизонтально по окружности радиусом 1 км на высоте 1,5 км с постоянной скоростью 100 м/с. С интервалом времени 10,5 с с самолета сбрасывают два мешка. На каком расстоянии друг от друга мешки упадут на землю?

3.48. Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, равна $L = 10$ м, а время полета $t = 5$ с. Определить наибольшую высоту подъема, угол бросания тела и радиус кривизны траектории в точке наибольшего подъема.

4. Кинематика движения по окружности

4.1. Радиус рукоятки колодезного ворота в 3 раза больше радиуса вала, на который наматывается трос. Какова линейная скорость конца рукоятки, если ведро с глубины 10 м поднимается за 20 с?

4.2. С какой скоростью автомобиль должен проходить середину выпуклого моста радиусом 40 м, чтобы центростремительное ускорение равнялось ускорению свободного падения?

4.3. Маховик делает 3 оборота в минуту. Найти угловую скорость вращения маховика.

4.4. Угловая скорость вращения лопастей колеса ветродвигателя 6 c^{-1}. Найти центростремительное ускорение концов лопастей, если их линейная скорость равна 20 м/с.

4.5. Период вращения платформы карусельного станка 3,14 с. Найти центростремительное ускорение крайних точек платформы, если ее диаметр 5 м.

4.6. Тело движется по окружности с постоянной скоростью 10 м/с. Определить изменение скорости тела за четверть периода; полпериода; период.

4.7. Минутная стрелка часов в 1,5 раза длиннее часовой. Во сколько раз линейная скорость конца минутной стрелки больше конца часовой?

4.8. Какова скорость поезда, если его колеса, имеющие диаметр 1,2 м, делают 160 оборотов в минуту?

4.9. Определить скорость и ускорение точек поверхности Земли, находящихся на широте 30^0. Радиус Земли равен 6400 км.

4.10. Стержень длиной l = 50 см вращается вокруг оси перпендикулярной стержню. При этом линейные скорости концов стержня равны v_1 = 10 см/с и v_2 = 15 см/с. Найти угловую скорость вращения стержня.

4.11. Через блок радиусом R = 50 мм, вращающийся вокруг горизонтальной оси, перекинута нить. Грузы, привязанные к концам нити, движутся с постоянной скоростью v = 20 см/с друг относительно друга. Определить угловую скорость вращения блока.

4.12. Горизонтальная платформа радиусом 2 м равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью 2,5 об/мин. По краю платформы шагает человек со скоростью 1 м/с относительно платформы. Определить ускорение человека, если он шагает; а) в направлении вращения; б) в противоположном направлении.

4.13. Цилиндр радиусом R зажат между двумя параллельными рейками (рис. 4.1). Рейки движутся параллельно самим себе с постоянными скоростями v_1 и v_2. Определить угловую скорость вращения цилиндра и линейную скорость его центра. Проскальзывания нет.

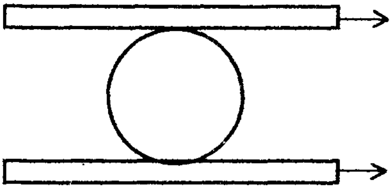

рис. 4.1

4.14. Пропеллер самолета радиусом 1,5 м вращается с частотой 2000 об/мин. Скорость самолета относительно земли 162 км/ч. Определить скорость точки на конце пропеллера. Что представляет собой траектория движения этой точки?

4.15. Скорость точки А вращающегося диска равна 50 см/с, а скорость точки В, находящейся на 10 см ближе к оси диска, равна 40 см/с. Определить угловую скорость вращения диска.

4.16. По горизонтальной дороге без проскальзывания катится тонкий обруч радиуса R со скоростью v_0 (рис. 4.2). Найти зависимость скорости точек обруча от угла α ($v(\alpha)$).

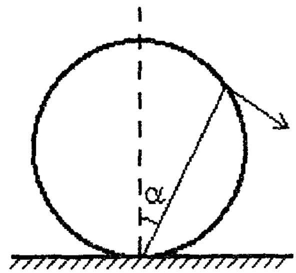

рис. 4.2

4.17. Диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью v по горизонтальной дороге. Радиус диска равен R. Найти геометрическое место точек на диске, скорости которых в данный момент времени равны v.

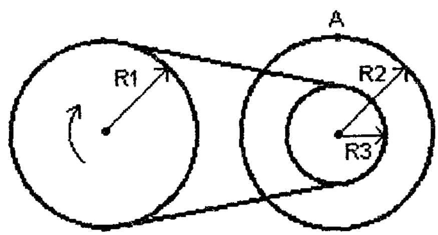

рис. 4.3

4.18. Два диска связаны между собой шкивом. Левый диск крутится с угловой скоростью ω. Определить линейную скорость точки А правого диска (рис 4.3).

4.19. Кривошип ОА, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 2{,}5\ c^{-1}$, приводит в движение колесо радиусом r = 5 см, катящееся по неподвижному колесу радиусом R = 15 см. Найти скорость точки В (рис. 4.4).

4.20. Кривошип OA, вращаясь вокруг точки O, приводит в движение колесо 1 радиусом R = 20 см, катящееся по внутренней поверхности круга 2. Колесо 1, соприкасаясь с колесом 3, заставляет его вращаться вокруг точки O (рис. 4.5). Во сколько раз угловая скорость колеса 3 больше угловой скорости кривошипа, если радиус колеса 3 равен r = 10 см?

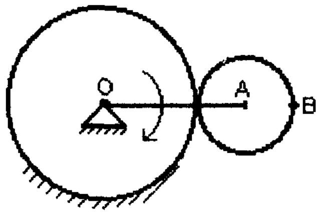

рис. 4.4

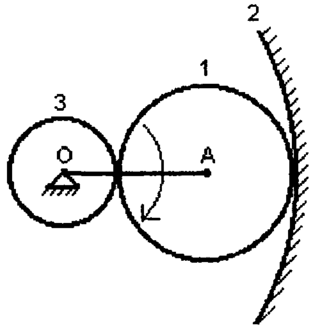

рис. 4.5

4.21. Точка движется по окружности со скоростью $v = at$, где $a = 0{,}5$ м/с^2. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет 0,1 длины окружности после начала движения.

4.22. Если колесо катится по горизонтальной дороге без проскальзывания, то траекторией любой точки обода колеса является линия, называемая циклоидой (рис. 4.6). Определить радиус кривизны циклоиды в верхней точке, если радиус колеса R.

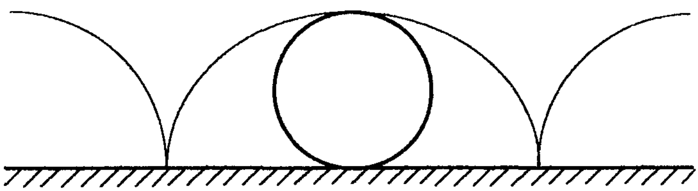
рис. 4.6

4.23. Малый радиус несущей части трамвайного колеса равен r, а большой радиус - R. Определить радиус кривизны циклоиды в верхней точке (рис. 4.7).

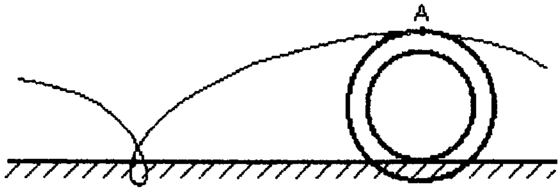

рис. 4.7

4.24. По вертикальной цилиндрической проволочной спирали с постоянной скоростью v соскальзывает бусинка (рис. 4.8). Определить ускорение бусинки, если радиус витков спирали равен R, а шаг спирали - h.

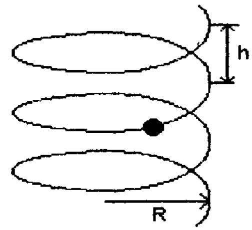

рис. 4.8

4.25. Тело движется по окружности радиуса R со скоростью, которая зависит от времени по закону: $v(t) = k \cdot t$. Найти зависимость полного ускорения от времени.

4.26. Через какое время встречаются минутная и часовая стрелки часов?

4.27. Зависимость координат движущегося тела от времени имеют вид: $X(t) = R \cdot \sin(\omega t)$; $Y(t) = R \cdot \cos(\omega t)$. Определить траекторию движения и ускорение тела.

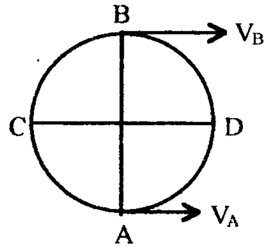

рис. 4.9

4.28. Плоский обруч движется так, что в некоторый момент времени скорости концов диаметра AB лежат в плоскости обруча, перпендикулярны AB и равны v_A и v_B. Определить скорости точек C и D, если CD тоже диаметр перпендикулярный AB и эти скорости тоже лежат в плоскости обруча (рис. 4.9).

4.29. Точка начинает двигаться по окружности радиуса R с тангенциальным ускорением a. Как зависит от времени угол между векторами скорости и полного ускорения?

4.30. При движении точки по окружности радиуса R центростремительное ускорение зависит от пройденного пути по закону $a_ц = \alpha \cdot S$, где α - известная постоянная. Определить зависимость скорости точки от времени ($v_0 = 0$).

4.31. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Определить среднюю за время полета угловую скорость вращения вектора скорости тела.

4.32. Направление вращения Земли вокруг своей оси совпадает с направлением ее вращения вокруг Солнца. Сколько суток было бы в году, если бы Земля вращалась вокруг своей оси в противоположную сторону?

4.33. Внешний радиус подшипника равен R, а радиус шариков - r. Подшипник катится по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v (рис. 4.10). При этом внутренняя втулка не вращается. Определить угловую скорость вращения шариков. Проскальзывания нет.

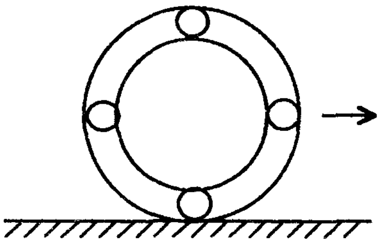

рис. 4.10

4.34. Тело начинает двигаться по окружности из состояния покоя с равномерно возрастающей скоростью. Сколько оборотов сделает тело к моменту когда центростремительное ускорение станет равно тангенциальному?

5. Относительное движение. Движение со связями

5.1. Рыбак переправляется через реку, выдерживая курс перпендикулярно берегу. На какое расстояние снесет лодку, если ширина реки 100 м, а скорость лодки относительно воды вдвое больше скорости течения реки?

5.2. Рыбак переправляется через реку шириной 100 м. Скорость лодки относительно воды вдвое меньше скорости течения. На какое минимальное расстояние относительно берега может снести лодку? Какое расстояние при этом пройдет лодка?

рис. 5.1

5.3. Корабль выходит из пункта А под углом α к линии берега. Одновременно из пункта В выпускают торпеду (рис 5.1). Под каким углом к берегу необходимо направить торпеду, чтобы она поразила корабль? Скорость корабля v_1, скорость торпеды v_2.

5.4. Человек находиться на расстоянии S от прямой дороги, по которой едет автобус со скоростью v. В тот момент, когда человек заметил автобус, расстояние между ними было равно L. С какой наименьшей скоростью должен бежать человек, чтобы успеть встретиться с автобусом?

5.5. Поезд движется в восточном направлении со скоростью 27 км/ч и пассажиру кажется, что ветер дует с севера. Сохраняя прежнее направление движения, поезд увеличил скорость до 54 км/ч и пассажиру уже кажется, что ветер дует с северо-востока. Определить направление ветра и его скорость.

5.6. Два корабля плывут навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. В момент когда расстояние между ними равно L, с одного из кораблей взлетает голубь и летит к другому кораблю. Долетев до него, голубь разворачивается и летит обратно. Вернувшись к первому кораблю, голубь опять разворачивается и летит к второму и т. д. Какое расстояние пролетит голубь до момента встречи кораблей, если он летает со скоростью v?

5.7. По двум прямым дорогам, угол между которыми равен 60^0, удаляясь от перекрестка, движутся два автомобиля со скоростями 10 м/с и 20 м/с. В момент t = 0 расстояние между автомобилями равно 300 м. Через какое время расстояние между ними удвоится?

5.8. Две частицы движутся со скоростями v_1 и v_2 по двум взаимно перпендикулярным прямым к точке их пересечения. В момент t = 0 частицы находились на расстояниях L_1 и L_2 от перекрестка. Через какое время расстояние между частицами будет минимальным?

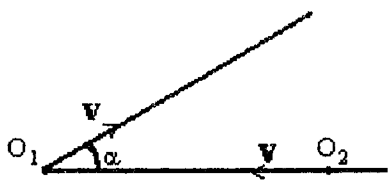

рис. 5.2

5.9. Два тела равномерно движутся по прямым, пересекающимся под углом α (рис. 5.2). Скорости тел одинаковы и равны v. В момент t = 0 тела находились в точках O_1 и O_2. Расстояние O_1O_2 = L. Через какое время расстояние между телами будет наименьшим и каково это расстояние?

5.10. Теплоход движется по озеру параллельно берегу со скоростью v_1 = 25 км/ч. От берега отходит катер со скоростью v_2 = 40 км/ч. Через какое наименьшее время катер сможет догнать теплоход, если в начальный момент теплоход и катер находились на одной нормали к берегу и расстояние между ними было S = 1 км?

5.11. Мальчик ростом 1,5 м бежит со скоростью 3 м/с под фонарем, который висит на высоте 3 м. С какой скоростью перемещается тень от головы мальчика?

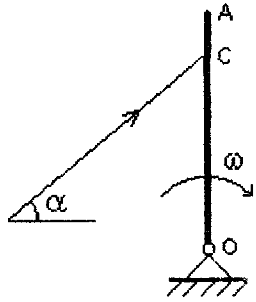

рис. 5.3

5.12. Луч света падает на экран OA, который вращается вокруг оси O (рис. 5.3). Луч образует на экране зайчик C. Угловая скорость вращения экрана ω, угол между лучом и горизонтом α. С какой скоростью перемещается зайчик по экрану, когда экран проходит вертикальное положение? Расстояние OC в этот момент равно l.

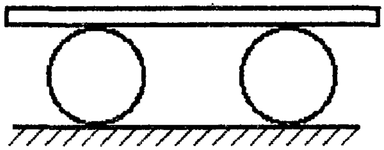
рис. 5.4

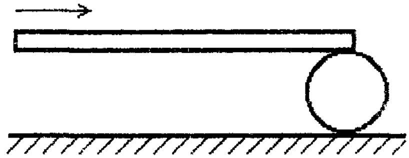
рис. 5.5

5.13. Платформа перемещается на двух круглых одинаковых катках (рис. 5.4). На сколько передвинулся каждый каток, если платформа передвинулась на 10 см?

5.14. Доска длиной l одним концом лежит на цилиндре, а другой конец удерживается человеком (рис. 5.5). Человек начинает толкать доску вперед, вследствие чего цилиндр катится без проскальзывания. Какой путь должен пройти человек, чтобы дойти до цилиндра?

5.15. Снаряд, летящий горизонтально со скоростью v, разрывается на большое число осколков, разлетающихся во все стороны с одинаковыми скоростями. Найти скорость осколков, летящих вертикально относительно земли, если максимальная скорость осколков равна u.

5.16. Прожектор O установлен на расстоянии $l = 100$ м от стены AB и бросает светлое пятно на стену (рис. 5.6). Прожектор вращается, делая один оборот за T = 20 с. Написать уравнение движения X(t) светлого пятна по стене. За начало отсчета принять момент, когда пятно находится в точке C.

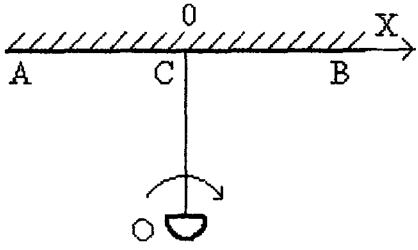

рис. 5.6

5.17. Три черепахи находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Они начинают одновременно двигаться с постоянными по модулю скоростями v, причем первая черепаха все время держит курс на вторую, вторая - на третью, а третья - на первую. Через какое время черепахи встретятся и какое расстояние они пройдут до встречи?

5.18. Прямая y = 2x начинает двигаться со скоростью v вдоль оси y. С какой скоростью движется точка пересечения этой прямой с осью x?

5.19. Две прямые, пересекающиеся под углом α, движутся с одинаковыми по модулю скоростями v в направлениях, перпендикулярных сами себе (рис. 5.7). С какой скоростью движется точка их пересечения?

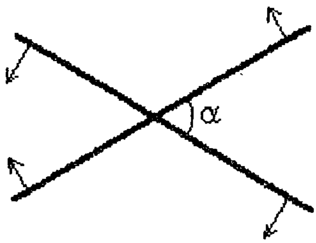

рис. 5.7

5.20. Решить задачу № 5.19, если скорости прямых направлены как на рис. 5.8.

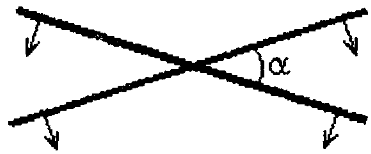

рис. 5.8

5.21. Из двух точек, расположенных на одной высоте и на расстоянии l друг от друга, одновременно бросают два тела: одно вертикально вверх со скоростью v_1; другое горизонтально со скоростью v_2 в направлении первого тела. Найти наименьшее расстоянии между телами.

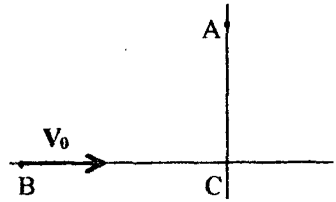

рис. 5.9

5.22. Из точки В бросают камень в горизонтальном направлении ВС с начальной скоростью v_0 = 10 м/с. Одновременно из точки А, лежащей на 10 м выше горизонтали ВС начинает свободно падать второй камень (рис. 5.9). Через какое время расстояние между камнями будет минимальным и чему оно равно? Расстояние ВС = 10 м.

5.23. Из одной и той же точки одновременно бросают два камня с одинаковыми начальными скоростями v_0 = 10 м/с: один - вертикально вверх, другой - под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Определить расстояние между камнями через t = 2 с после броска.

5.24. По грязной дороге едут друг за другом две машины со скоростью v. При каком минимальном расстоянии между машинами грязь, срывающаяся с колес передней машины, не будет попадать на заднюю? Считать, что в момент отрыва скорость комков грязи равна скорости соответствующей точки колеса. Радиус колеса считать малым по сравнению с дальностью полета грязи.

5.25. Магнитофонная лента сматывается с бобины с постоянной скоростью v. Найти зависимость радиуса ленты на бобине от времени, если начальный радиус R_0, а толщина ленты $d \ll R_0$.

5.26. Два тела одновременно брошены из одной точки с одинаковыми скоростями v_0 под углами α и $\pi/2 - \alpha$ к горизонту. Как зависит от времени расстояние между телами?

5.27. По сторонам прямого угла движется стержень. Конец В стержня движется вправо с постоянной скоростью v (рис. 5.10). Написать зависимость от времени скорости точки А. За начало отсчета принять момент, когда стержень стоял вплотную к вертикальной стене. Определить траекторию движения середины стержня С и скорость точки С в момент, когда угол между стержнем и вертикалью равен $\alpha = 45^0$. Конец А стержня скользит все время по вертикальной стене. Длина стержня l.

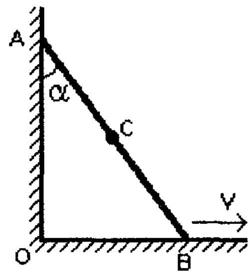

рис. 5.10

5.28. Стержень АВ движется произвольным образом. В некоторый момент времени скорость точки А равна v и направлена под углом α к оси стержня, а скорость точки В направлена под углом β к той же оси (рис. 5.11). Определить скорость точки С - середины стержня - в этот же момент.

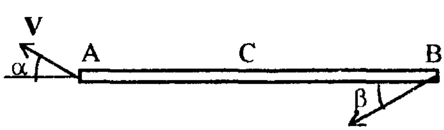

рис. 5.11

5.29. С каким ускорением должна двигаться наклонная плоскость вправо, чтобы не мешать телу свободно падать (рис.5.12)? Угол наклона плоскости - α.

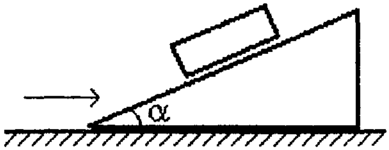

рис. 5.12

5.30. Велосипедист, не вращая педалями, движется по горизонтальной окружности. При этом переднее колесо велосипеда движется по окружности радиусом R. Найти радиус окружности, по которой движется заднее колесо, если расстояние между осями колес равно l ($R > l$).

5.31. Горизонтальная платформа движется со скоростью v. По платформе, с одинаковыми относительно платформы скоростями u, движутся два тела. Скорость одного из них по направлению совпадает с вектором **v**, а второго - перпендикулярна вектору **v**. Определить угол между скоростями тел в неподвижной системе отсчета.

5.32. За катером, движущимся со скоростью 30 км/ч, едет спортсмен на водных лыжах (рис. 5.13). Углы между векторами скоростей катера и лыжника и тросом равны: $\alpha = 150^0$; $\beta = 60^0$. Определить скорость лыжника.

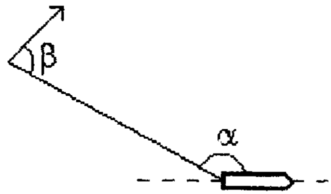

рис. 5.13

5.33. Груз поднимается при помощи двух неподвижных блоков. Определить скорость груза в момент когда угол между нитями равен α, если нити вытягиваются с одинаковыми и постоянными ско-

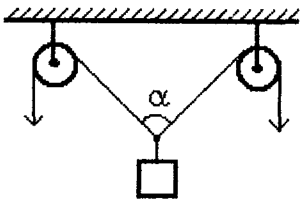

рис. 5.14

ростями v (рис. 5.14).

5.34. Груз поднимается при помощи двух неподвижных и одного подвижного блоков. Определить скорость груза в момент когда угол между нитями равен α, если нити вытягиваются со скоростями u и v (рис. 5.15).

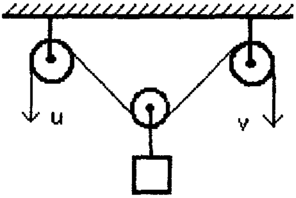

рис. 5.15

5.35. Две расположенные рядом платформы вращаются в противоположных направлениях с одинаковыми угловыми скоростями $\omega = 1\ c^{-1}$. В точках A_1 и A_2 стоят два наблюдателя. Известно: $O_1O_2 = 5$ м; $O_1A_1 = O_2A_2 = 2$ м. Найти скорость наблюдателя A_1 относительно наблюдателя A_2 в указанный на рис. 5.16 момент времени.

5.36. Стержень AB приводится в движение нитью BC (рис. 5.17). Когда стержень проходит вертикальное положение скорость точки C равна v, а угол между нитью и стержнем - α. Найти скорость точки B в этот момент.

5.37. Горизонтальная платформа равномерно вращается вокруг вертикальной оси. По краю платформы с постоянной скоростью идет человек A (рис. 5.18). Ускорение человека относительно платформы равно 0,5 м/с^2, а переносное

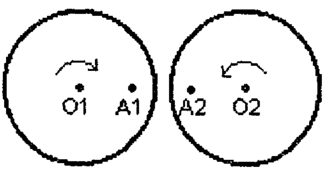

рис. 5.16

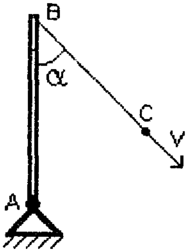

рис. 5.17

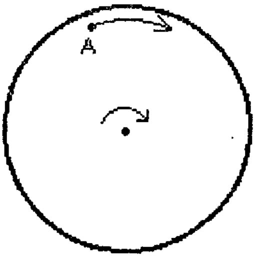

рис. 5.18

ускорение точек края платформы - 2 м/с^2. Найти абсолютное ускорение человека.

рис. 5.19

5.38. Горизонтальный стержень длиной l вращается вокруг вертикальной оси O с угловой скоростью ω (рис. 5.19). На движущийся конец стержня насажено колесо радиусом r. Угол между осью колеса и стержнем равен α, а само колесо катится по горизонтальному столу. Найти угловую скорость вращения колеса.

5.39. Колесо радиусом R катится без проскальзывания с постоянной скоростью v по горизонтальной поверхности. Приняв положение точки A на рис. 5.20 за начальное, написать зависимости ее координат X_A и Y_A от времени.

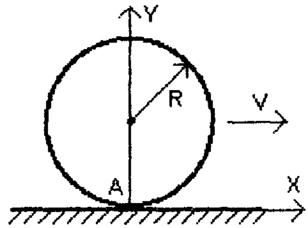

рис. 5.20

5.40. Шар может свободно вращаться вокруг горизонтального стержня OA, который, в свою очередь, вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси (рис. 5.21). Определить угловую скорость вращения шара, если проскальзывания нет

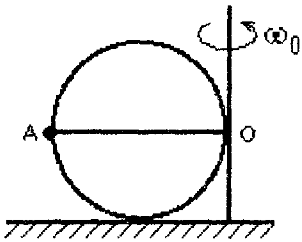

рис. 5.21

6. Динамика материальной точки

6.1. К телу, лежащему на гладкой горизонтальной поверхности, приложена некоторая сила, под действием которой тело, двигаясь из состояния покоя, на пути 1 м приобрело скорость 10 м/с. Какую силу приложили к телу, если его масса 1 кг?

6.2. Тело массой m = 1 кг удерживается нитью, переброшенной через блок. Одинакова ли сила приложенная к нити в положениях 1 и 2? Какая сила действует на блок в положениях 1 и 2 (рис. 6.1)?

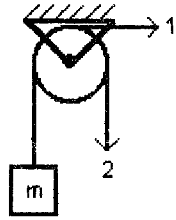

рис. 6.1

6.3. На гладкой горизонтальной поверхности лежат два тала массами m_1 и m_2, связанные нитью. Силу F, направленную горизонтально, прикладывают сначала к телу m_1, а затем к телу m_2. Найти силу натяжения нити в том и другом случаях (рис. 6.2).

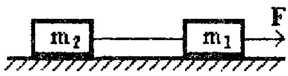

рис. 6.2

6.4. На гладком горизонтальном столе лежат четыре тела одинаковой массы m, связанные нитями. К телу 1 приложена горизонтальная сила F. Найти ускорение системы и силы натяжения всех нитей (рис. 6.3).

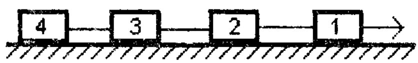

рис. 6.3

6.5. Шайба остановилась через 5 с после удара клюшкой на расстоянии 20 м от места удара. Масса шайбы 100 г. Определить силу трения между шайбой и льдом.

6.6. Два тела с массами m_1 и m_2 привязаны к нити, перекинутой через невесомый неподвижный блок. Найти ускорение грузов и силу натяжения нити (рис. 6.4).

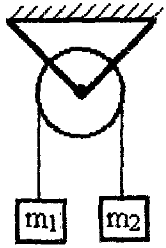

рис. 6.4

6.7. В первом случае тело лежит на гладком горизонтальном столе. К нему привязана невесомая нить, перекинутая через блок на краю стола, к другому концу которой подвешено такое же тело. Во втором случае это же тело тянут с горизонтальной силой равной силе тяжести. Во сколько раз отличаются ускорения тела в этих случаях?

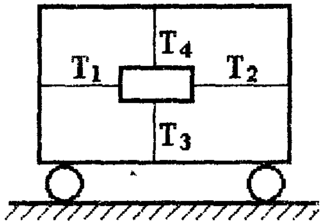

рис. 6.5

6.8. Груз закреплен на тележке на четырех нитях. Силы натяжения горизонтальных нитей равны T_1 и T_2, а вертикальных - T_3 и T_4 (рис. 6.5). С каким горизонтальным ускорением движется тележка?

6.9. Стержень длиной l лежит на горизонтальном гладком столе На один из концов стержня вдоль его оси начинает действовать сила F (рис. 6.6). Какая сила действует в поперечном сечении, находящемся на расстоянии x от этого конца?

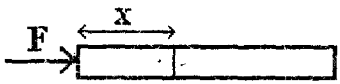

рис. 6.6

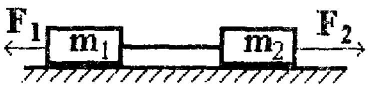

рис. 6.7

6.10. Два тела массами m_1 и m_2 связаны нитью, выдерживающей силу натяжения T. К телам приложены переменные силы $F_1 = \alpha t$ и $F_2 = 2\alpha t$. В какой момент времени нить оборвется (рис. 6.7)? Трения нет.

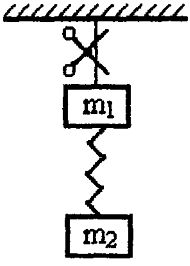

рис. 6.8

6.11. Два тела массами m_1 и m_2 соединены пружиной и подвешены на нити к потолку (рис. 6.8). Нить перерезают. С какими ускорениями начнут двигаться тела?

6.12. Котенок, идущий по полу, подпрыгивает и хватается за вертикальный шест, подвешенный на нити к потолку. В этот момент нить обрывается. С каким ускорением падает шест, если котенок взбирается по шесту так, что все время находится на одной высоте от пола? Масса котенка m, а масса шеста M.

6.13. К потолку вагона на нити подвешен шарик. На какой угол от вертикали отклонится нить, если вагон будет поворачивать, двигаясь с постоянной скоростью v по окружности радиусом R? Положение нити считать установившимся.

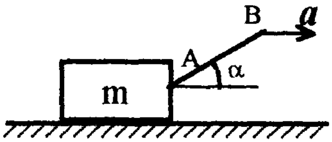

рис. 6.9

6.14. Брусок скользит по гладкой горизонтальной плоскости под действием нити AB. Масса бруска равна m, ускорение точки B равно a и направлено горизонтально, угол наклона нити к горизонту - α (рис. 6.9). Найти силу давления бруска на плоскость и силу натяжения нити.

6.15. На нити, выдерживающей силу натяжения 10 Н, поднимают груз массой 500 г из состояния покоя вертикально вверх. Считая движение равноускоренным, а силу сопротивления движению постоянной и равной 1 Н, найти предельную высоту, на которую можно поднять груз за 1 с.

6.16. На гладкой наклонной плоскости лежит брусок. С каким горизонтальным ускорением необходимо двигать наклонную плоскость, чтобы брусок по ней не скользил? Угол наклона плоскости равен α (рис. 6.10).

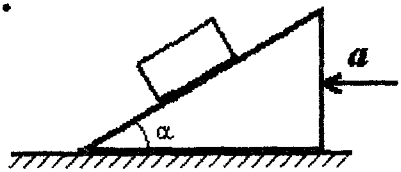

рис. 6.10

6.17. Капля дождя, падая с большой высоты, испаряется. Увеличивается или уменьшается при этом скорость ее падения?

6.18. Тело массой $m = 100$ г падает с высоты $h = 20$ м за время $t = 2{,}5$ с. Определить среднюю за время падения силу сопротивления воздуха.

6.19. Веревка длиной $L = 12$ м и массой $m = 6$ кг перекинута через невесомый блок. Какова сила натяжения веревки в ее середине в тот момент, когда длина веревки по одну сторону от блока равна $l = 8$ м?

6.20. На плоскости с углом наклона α лежит брусок массой m, привязанный нитью к плоскости. Наклонная плоскость движется вправо с ускорением a (рис. 6.11). Найти силу натяжения нити и силу давления бруска на плоскость. При каком ускорении брусок оторвется от плоскости?

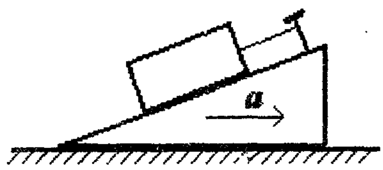

рис. 6.11

6.21. Два тела с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг связаны нитью, перекинутой через блок. Тело m_1 лежит на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 20^0$, а тело m_2 висит на нити. Коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. Найти ускорение тел (рис. 6.12).

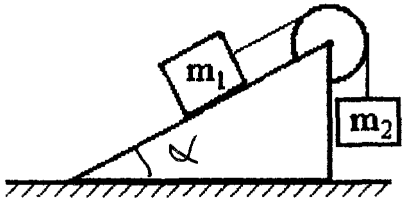

рис. 6.12

6.22. С наклонной плоскости без трения скатывается тележка, на которой лежит груз массы m. Какова сила трения между грузом и тележкой, если верхняя плоскость тележки горизонтальна? Угол наклона плоскости α (рис. 6.13). При каком предельном значении угла груз еще не будет скользить по тележке, если коэффициент трения равен μ?

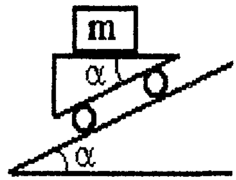

рис. 6.13

6.23. Какую горизонтальную силу необходимо приложить к тележке массой M, чтобы тела массами m_1 и m_2 относительно нее не скользили? Трения нет (рис. 6.14).

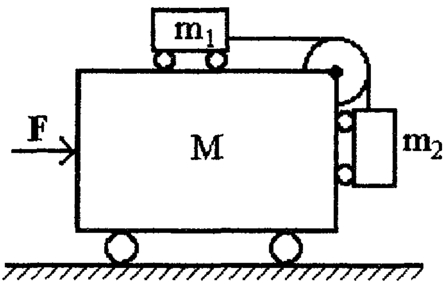

рис. 6.14

6.24. Два одинаковых груза 1 и 2 массой m находятся на разных склонах наклонной плоскости. Коэффициенты трения грузов о плоскость μ_1 и μ_2, а углы наклона склонов α и β соответственно.

Тело 2 начинает скользить вниз. Найти ускорение тел (рис. 6.15).

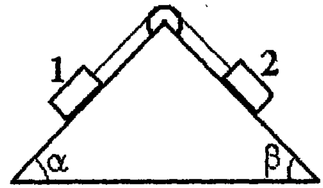

рис. 6.15

6.25. Для равномерного поднятия груза массой $m = 100$ кг вверх по наклонной плоскости с углом $\alpha = 30^0$ необходимо приложить силу $F = 600$ Н, направленную вдоль плоскости. С каким ускорением будет скатываться груз, если его отпустить?

6.26. Из одной точки на длинной наклонной плоскости одновременно пускают два тела с одинаковыми скоростями: первое - вверх вдоль плоскости, второе - вниз. Найти отношение расстояний, пройденных телами к моменту остановки первого тела. Трения нет.

6.27. Брусок толкнули со скоростью 10 м/с вверх вдоль доски, наклоненной под углом 30^0 к горизонту. Обратно он вернулся со скоростью 5 м/с. С какой скоростью вернется брусок, если его толкнуть с той же скоростью вдоль той же доски, наклоненной под углом 45^0 к горизонту?

6.28. На вершине равнобедренного клина с углом при основании $\alpha = 45^0$ находится невесомый блок, через который перекинута нить. К нити привязаны два бруска с массами m_1 и m_2 (рис. 6.16). Если бруску m_1 сообщить некоторую скорость, направленную вниз, то система остановится через время t_1, если с той же скоростью толкнуть вниз брусок m_2, то система остановится через время t_2. Определить отноше-

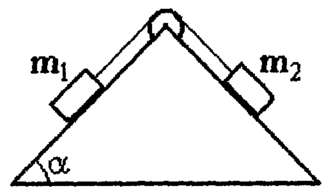

рис. 6.16

ние масс m_1/m_2, если известно, что $t_2/t_1 = 2$, а коэффициент трения между брусками и клином равен $\mu = 0{,}5$.

6.29. Наклонная плоскость разделена по длине на две равные части. Если тело отпустить без начальной скорости с самого верха, то оно доедет до низа с нулевой скоростью. Каков коэффициент трения между телом и плоскостью на нижней половине плоскости, если на верхней половине он равен μ_1? Угол наклона плоскости - α.

6.30. На наклонной плоскости лежит шайба. Причем коэффициент трения между шайбой и наклонной плоскостью $\mu > \mathrm{tg}\alpha$, где α - угол наклона плоскости. К шайбе прикладывают горизонтальную силу. При этом шайба начинает двигаться в горизонтальном направлении с постоянной скоростью v_1. Найти установившуюся скорость v_2 скатывания шайбы с плоскости (рис. 6.17).

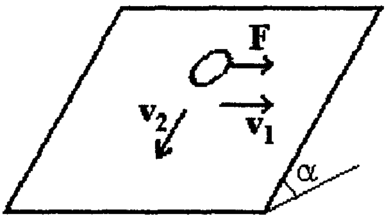

рис. 6.17

6.31. На гладкой наклонной плоскости с углом наклона α лежат два бруска с массами m_1 и m_2, связанные нитью, перекинутой через неподвижный блок. Коэффициент трения между брусками равен μ. При каком отношении масс m_1/m_2 бруски будут неподвижны (рис. 6.18)?

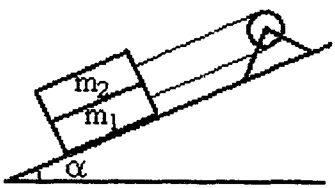

рис. 6.18

6.32. На наклонной плоскости лежит шайба (рис. 6.19). Угол наклона плоскости α, коэффициент трения μ, масса шайбы m. Известно, что $\mu > \operatorname{tg}\alpha$. Какую горизонтальную силу F, направленную вдоль плоскости, надо приложить к шайбе, чтобы сдвинуть ее с места?

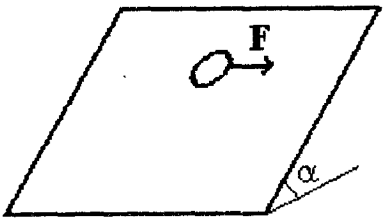

рис. 6.19

6.33. Клин массой M лежит на горизонтальной плоскости. По его боковой грани, наклоненной под углом α к горизонту, скользит без трения брусок массой m (рис. 6.20). При каком коэффициенте трения между клином и плоскостью клин будет стоять на месте?

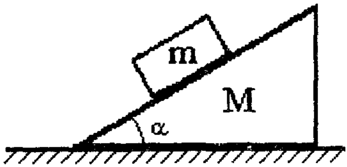

рис. 6.20

6.34. Тело массой m = 1 кг лежит у основания наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^0$. На тело начинает действовать постоянная сила F, направленная вверх вдоль плоскости. Спустя время t_0 сила прекращает действовать, а спустя еще $3t_0$ тело возвращается обратно к основанию плоскости. Определить величину силы F, если трения нет.

6.35. На гладкой горизонтальной поверхности лежит гладкий клин массой M с углом наклона α. На клин кладут

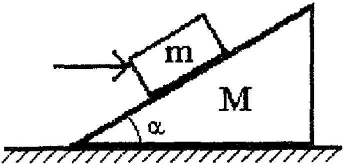

рис. 6.21

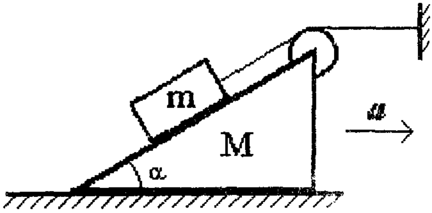

рис. 6.22

брусок массой m. С какой горизонтальной силой нужно действовать на брусок, чтобы он не скользил по клину (рис.6.21)?

6.36. Определить ускорение клина в системе, изображенной на рис. 6.22. Трения нет, нить и блок идеальны. Верхний участок нити горизонтален.

6.37. Определить ускорения тел в приведенной системе (рис. 6.23). Массы тел одинаковы, коэффициент трения тоже одинаков и равен μ. Нить и блок идеальны.

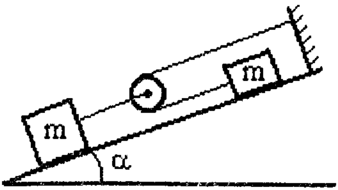

рис. 6.23

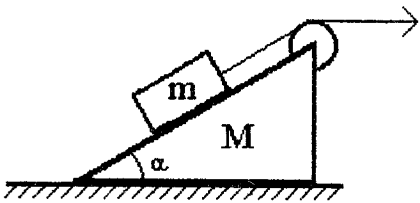

рис. 6.24

6.38. Клин с углом наклона α и массой M лежит на горизонтальной поверхности. На него кладут брусок массой m, к которому привязана нить, перекинутая через блок. С какой горизонтальной силой надо тянуть за нить, чтобы брусок по клину не скользил (рис. 6.24)? Трения нет.

6.39. На гладкой горизонтальной поверхности лежит клин массой M с углом при основании α. По клину без трения соскальзывает брусок массой m. Определить ускорение клина.

6.40. Наклонная плоскость длиной l = 1 м наклонена под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Сверху без начальной скорости отпускают небольшое тело. Одновременно снизу вверх вдоль плоскости толкают такое же тело. С какой скоростью необходимо толкнуть нижнее тело, чтобы верхнее после абсолютно упругого столкновения с нижним доехало до своей исходной точки. Трения нет. Одинаковые тела при встречном абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

6.41. Два тела, связанные нитью, движутся вниз с ускорением вдвое большим ускорения свободного падения. Во сколько раз сила натяжения нити, за которую тянут тела больше силы натяжения нити, связывающей тела? Масса нижнего тела в три раза больше массы верхнего.

6.42. При какой максимальной силе F верхний брусок еще не будет скользить по нижнему (рис. 6.25)? Массы брусков m_1 и m_2, коэффициент трения между брусками μ, поверхность стола гладкая.

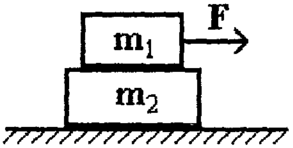

рис. 6.25

6.43. Какую силу необходимо приложить к нижнему бруску, чтобы выдернуть его из-под верхнего (рис. 6.26)? Коэффициенты трения для верхнего и нижнего брусков - μ_1 и μ_2, а их массы m_1 и m_2.

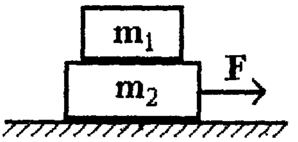

рис. 6.26

6.44. Горизонтальная поверхность совершает горизонтальные колебания. При этом в течение времени τ поверхность движется с постоянной скоростью u в одном направлении, затем в течение того же времени и с той же скоростью в противоположном направлении и т. д. На поверхность кладут кусочек мела. Коэффициент трения мела о поверхность - μ. Какой длины след оставит мел на поверхности?

6.45. Тонкое резиновое кольцо жесткостью k и массой m, лежащее на горизонтальной поверхности, начинают медленно раскручивать вокруг его оси. При какой угловой скорости длина кольца увеличится вдвое? При какой угловой скорости кольцо обязательно разорвется? Считать, что закон Гука выполняется вплоть до момента разрыва кольца.

6.46. Если к пружине поочередно подвешивать грузы с массами m_1 и m_2, то ее длина оказывается равна соответственно l_1 и l_2. Определить жесткость пружины и ее собственную длину.

6.47. Два шара с массами M и m соединены нитью и подвешены к пружине как показано на рис. 6.27. Если перерезать нить в случае а), то шар M придет в движение с ускорением a_1. Каково будет ускорение шара m, если перерезать нить в случае б)?

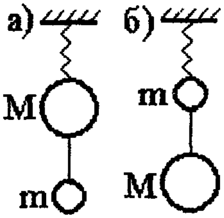

рис. 6.27

6.48. Два тела с массами m_1 и m_2 соединены пружиной жесткости k. На тело m_2 начинает действовать постоянная сила F в направлении тела m_1 (рис. 6.28). Найти деформацию пружины при установившемся движении. Каким будет ускорение тел сразу после прекращения действия силы? Трения нет.

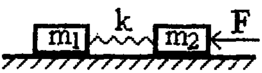

рис. 6.28

6.49. На горизонтальном столе лежат два одинаковых груза массой m, скрепленных пружиной жесткости k. К грузам на нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешен третий

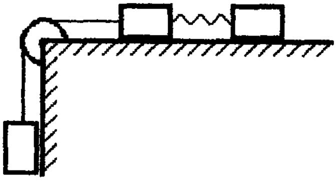
рис. 6.29

такой же груз (рис. 6.29). Найти удлинение пружины при установившемся движении системы. Трения нет.

6.50. Тело массой m тянут по гладкому горизонтальному столу двумя последовательно соединенными пружинами, жесткость которых равна k_1 и k_2 (рис. 6.30). Найти суммарное удлинение пружин, если приложенная сила равна F.

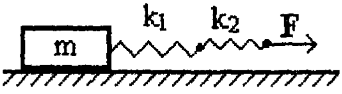

рис. 6.30

6.51. Однородный тяжелый канат, подвешенный за один конец, рвется, если его длина превышает L_0. Пусть тот же канат выскальзывает без трения из горизонтальной трубы. При какой максимальной длине канат выскользнет не порвавшись?

6.52. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси с частотой n = 10 об/мин. На каком расстоянии от центра диска может удержаться лежащее на нем небольшое тело, если коэффициент трения равен μ = 0,2?

6.53. На вращающийся горизонтальный диск кладут брусок. На него сверху кладут такой же брусок, привязанный нитью к оси диска (рис. 6.31). При какой угловой скорости вращения диска нижний брусок выскользнет, если, когда он лежит один, то начинает скользить при угловой скорости ω_0? Коэффициенты трения между всеми поверхностями одинаковы.

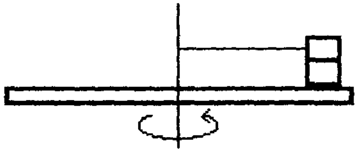
рис. 6.31

6.54. Груз массой m, прикрепленный пружиной жесткости k к вертикальной оси, движется вокруг этой оси по горизонтальной окружности радиусом R с угловой скоростью ω. Какова длина недеформированной пружины?

6.55. Муфта массой m насажена на гладкий горизонтальный стержень длиной $2l_0$ и скреплена двумя одинаковыми пружинами с осью OO_1 и упором на конце стержня (рис. 6.32). В отсутствие вращения пружины ненагружены, а их жесткости равны k. Систему раскручивают вокруг оси OO_1. Найти зависимость расстояния от оси до муфты от угловой скорости вращения. Размерами муфты пренебречь.

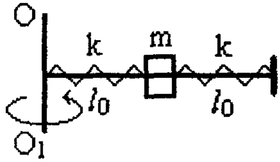

рис. 6.32

6.56. Человек массой m = 70 кг качается на качелях. Длина веревок l = 8 м. Человек проходит положение равновесия со скоростью v = 6 м/с. Какова сила натяжения веревок в этот момент?

6.57. Шарик, подвешенный на нити длиной l, вращается в горизонтальной плоскости так, что нить составляет угол α с вертикалью (конический маятник). Определить скорость вращения шарика.

6.58. На горизонтальном диске лежит небольшой брусок, привязанный нитью длиной l к оси диска. Нить натянута и составляет с вертикалью угол α (рис. 6.33). Диск начинают медленно раскручивать. При какой угловой скоро-

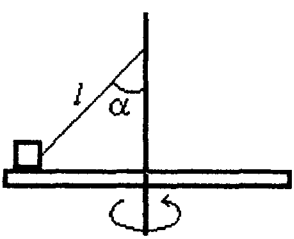

рис. 6.33

сти вращения диска брусок оторвется от него? Какова при этом будет сила натяжения нити? Масса бруска равна m.

6.59. Автомобиль массой m = 1000 кг въехал на выпуклый мост длиной l = 156 м со скоростью v_0 = 36 км/ч. По мосту он движется с ускорением a = 1 м/с^2. Определить силу давления автомобиля на мост в середине моста, где радиус кривизны R = 200 м.

6.60. Два тела массой m, связанные нитью длиной l, движутся со скоростью v, направленной перпендикулярно нити, по горизонтальному гладкому столу. Середина нити натыкается на вбитый в стол гвоздь (рис. 6.34). Какова сила натяжения нити сразу после этого?

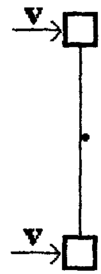

рис. 6.34

6.61. Два одинаковых тела массой m связаны тонкой нитью длинной $2l$ и лежат на гладком столе. За середину нити начинают тянуть с постоянной скоростью v в направлении перпендикулярном начальному направлению нити. Как зависит величина силы, которую необходимо прикладывать к нити, от угла α между вектором **v** и нитью (рис. 6.35)?

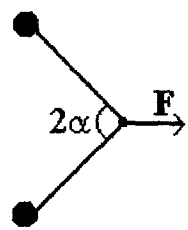

рис. 6.35

6.62. Автомобиль, движущийся по горизонтальной дороге со скоростью v, въезжает в горизонтальный поворот с радиусом закругления R. Какое максимальное тангенциальное ускорение может развить автомобиль на повороте, если коэффициент трения между колесами и дорогой равен μ. Обе оси автомобиля ведущие.

6.63. На горизонтальном диске на расстоянии R = 1 м от его оси лежит небольшой брусок. Диск начинает раскручиваться с угловым ускорением $\varepsilon = 4$ с$^{-2}$. Через какое время брусок начнет скользить по диску, если коэффициент трения равен $\mu = 0{,}5$?

6.64. Втулка массой m может без трения скользить по горизонтальному стержню. Через кольцо втулки продета нить, один конец которой закреплен, а на втором висит груз массой m (рис. 6.36). Определить угол между нижним участком нити и вертикалью в режиме установившегося движения системы. Нить гладкая и невесомая, ее верхний конец горизонтален.

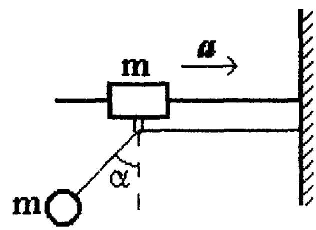

рис. 6.36

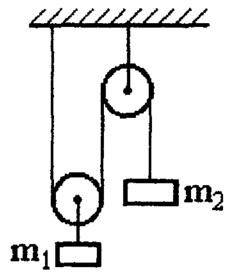

рис. 6.37

6.65. Определить ускорения грузов и силу натяжения нити в системе из подвижного и неподвижного блоков (рис. 6.37). Нить и блоки идеальны, массы грузов равны m_1 и m_2.

6.66. К дну сосуда с водой на тонкой нити привязан деревянный шарик. Нить обрывается и шарик начинает всплывать. Как при этом изменяется сила давления сосуда на поверхность? Вязкость воды не учитывать.

6.67. Через невесомый блок перекинута невесомая, нерастяжимая нить, к концам которой привязаны грузы массами m_1 и m_2 (рис. 6.38). С какой силой нужно тянуть за

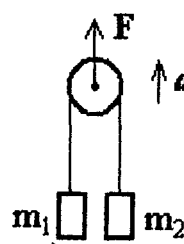

рис. 6.38

блок, чтобы он поднимался с ускорением a?

6.68. Воздушный шар массой M неподвижно висит на высоте H над землей. Из шара выбрасывают груз массой m. Какое расстояние будет между шаром и грузом в момент падения груза на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

6.69. Определить ускорения грузов в системе из подвижного и неподвижного блоков. Блоки и нити идеальны, массы грузов равны m_1 и m_2 (рис. 6.39).

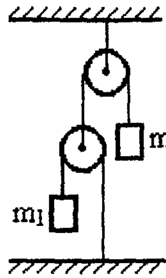

рис. 6.39

6.70. На тело, лежащее на горизонтальной поверхности, начинает действовать горизонтальная сила по величине равная силе тяжести тела. Спустя время t сила прекращает действовать, а спустя еще 3t тело останавливается. Определить коэффициент трения.

6.71. В точке A диска закреплен один конец пружины, жесткость которой k = 100 Н/м. К другому концу пружины прикреплен груз массой m = 20 г. Расстояние OA = 5 см, собственная длина пружины l = 10 см (рис. 6.40). Какой станет длина пружины, если диск будет вращаться с угловой скоростью ω = 100 $с^{-1}$? Трения нет.

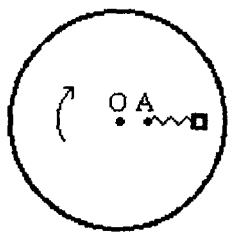

рис. 6.40

6.72. Вертикальный вал вращается. С валом шарнирно соединен невесомый стержень длиной l = 10 см, на другом конце которого имеется маленький массивный шарик (рис. 6.41). На какой угол от вертикали отклонится стержень при угловых скоростях вращения вала: $\omega_1 = 14\ c^{-1}$ и $\omega_2 = 7\ c^{-1}$?

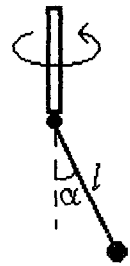

рис. 6.41

6.73. Шайбу толкают по горизонтальному столу. Если толкнуть ее со скоростью v_1, то она проедет до остановки расстояние 16 см. Если толкнуть ее со скоростью v_2, то она проедет расстояние 36 см. Какое расстояние проедет шайба, если толкнуть ее со скоростью v_1+v_2?

6.74. Воздушный шар опускается с постоянной скоростью. Когда из него выбросили груз массой m, он начал подниматься с той же постоянной скоростью. Найти силу сопротивления воздуха при этой скорости.

6.75. Брусок лежит на горизонтальной поверхности. Если ему сообщить скорость v_1, то он проедет до остановки расстояние 30 см. Если же ему сообщить в перпендикулярном направлении скорость v_2, то он проедет расстояние 40 см. Какое расстояние проедет брусок, если ему сообщить скорость $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$?

6.76. Определить ускорения грузов в представленной системе (рис 6.42). Нить и блоки идеальны.

6.77. Нить и однородный стержень вращаются с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси (рис. 6.43). Будут ли нить и стержень направлены вдоль одной прямой?

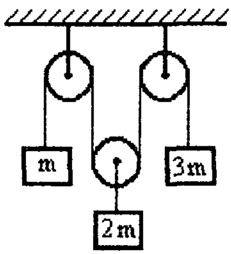

рис. 6.42

6.78. Космическая станция вращается вокруг своей оси, за счет чего на ней создается искусственная сила тяжести. Космонавт отпускает предмет в точке А. Упадет ли предмет в точку В (рис. 6.44)?

рис. 6.43

6.79. По вертикальной цилиндрической проволочной спирали соскальзывает бусинка. Найти установившуюся скорость бусинки, если коэффициент трения равен μ. Радиус спирали R, шаг спирали h (рис. 6.45).

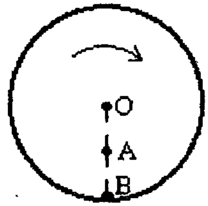

рис. 6.44

6.80. Найти ускорения брусков в представленной системе (рис. 6.46). Массы брусков m_1 и m_2, нить и блок идеальны.

6.81. Груз массой m_1 лежит на горизонтальном столе. К нему привязана нить, перекинутая через неподвижный блок, к другому концу которой привязан груз массой m_2. Найти силу натяжения нити, если стол движется вправо с ускорением a. Коэффициент трения равен μ (рис. 6.47).

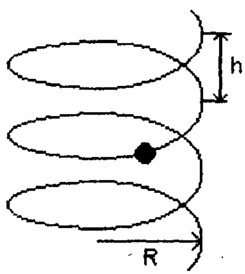

рис. 6.45

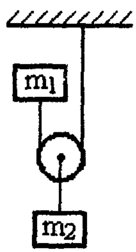

рис. 6.46

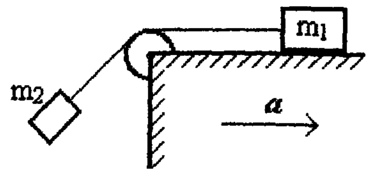

рис. 6.47

6.82. Почему автомобиль поворачивает когда поворачивают его передние колеса?

6.83. К бруску, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложена сила F ($F < mg$). Нарисовать график зависимости силы трения от угла наклона силы к горизонту.

6.84. Почему скрипит несмазанная дверь?

6.85. Упавшую в скважину трубу можно поднять с помощью представленного на рис. 6.48 устройства. Стержни АВ и АС шарнирно соединены с тросом и упираются в стенки трубы. Их длина равна l, коэффициент трения между стержнями и трубой равен μ. При каком диаметре трубы ее можно поднять вне зависимости от ее массы?

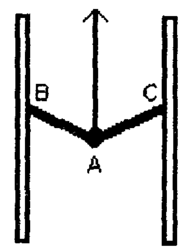

рис. 6.48

6.86. С какой силой надо тянуть телегу с искривленной осью, чтобы она ехала с постоянной скоростью (рис. 6.49)? Масса телеги М, угол схождения колес α, коэффициент трения между колесами и дорогой μ, центр масс телеги находится посередине между осями.

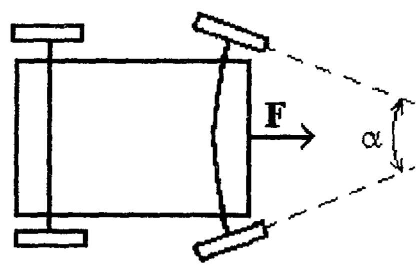

рис. 6.49

6.87. Когда движущийся с большой скоростью автомобиль на скользкой дороге начинает тормозить с блокировкой колес, то его часто начинает сносить вбок. Почему это происходит?

6.88. Если с летящего самолета выпустить ракету в направлении противоположном движению самолета, то ракета разворачивается и начинает догонять самолет. Почему?

6.89. Дождевая капля падала с большой высоты. Когда ускорение капли было равно a = 7,5 м/с^2, ее скорость была равна v = 20 м/с. Вблизи земли капля падала с постоянной скоростью и, попав на боковое стекло движущегося автомобиля, оставила на нем след, наклоненный под углом α = 30^0 к вертикали. Найти скорость автомобиля. Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, ветра нет.

6.90. Тележка массой M = 12,5 кг может без трения перемещаться по горизонтальному столу. На тележке лежит брусок массой m = 10 кг. К бруску привязана нить, перекинутая через блок, которую начинают тянуть вверх с силой F = 80 Н. Найти ускорение тележки, если коэффициент трения между бруском и тележкой равен μ = 0,6 (рис. 6.50).

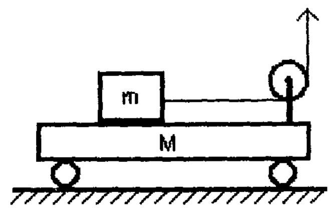

рис. 6.50

6.91. В системе, изображенной на рис. 6.51, трения нет, а нить и блоки идеальные. В какую сторону поедет груз M, если тянуть за нить в направлениях 1 и 2?

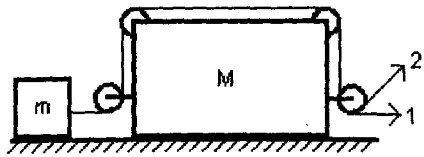

рис. 6.51

6.92. Два небольших одинаковых шарика связаны легкой нитью длиной l и лежат на гладком столе высотой H. При этом H слегка больше чем l (рис. 6.52). Один из шариков перевешивается со стола и система соскальзывает со стола. На каком расстоянии от стола упадет второй шарик?

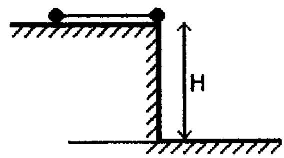

рис. 6.52

6.93. Изогнутая по дуге окружности трубка заполнена жидкостью и в ней имеется пузырек воздуха. Трубка движется с горизонтальным ускорением и пузырек отклонился от вертикального положения на угол α (рис. 6.53). В какую сторону и с каким ускорением движется трубка?

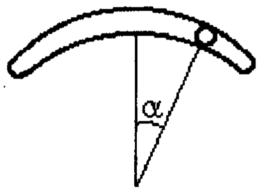

рис. 6.53

6.94. Математический маятник состоит из шарика массой $m = 50$ г, подвешенного на нити длиной $l = 1$ м. Определить наименьшую силу натяжения нити, если шарик проходит положение равновесия со скоростью $v = 1{,}4$ м/с.

6.95. Математический маятник совершает колебания. В положении наибольшего отклонения ускорение груза в 20 раз меньше, чем при прохождении положения равновесия. Найти угол максимального отклонения.

7. Всемирное тяготение

7.1. Первая космическая скорость для Земли $v_з = 8$ км/с. Какова первая космическая скорость для планеты, масса которой такая же как у Земли, а радиус в два раза больше?

7.2. Какова первая космическая скорость для планеты, плотность которой такая же как у Земли, а радиус в 2 раза больше?

7.3. Два спутника вращаются вокруг некоторой планеты по круговым орбитам, радиусы которых относятся как $R_2/R_1 = 2$. Как относятся периоды их обращения T_2/T_1?

7.4. Две звезды, суммарная масса которых равна M, вращаются вокруг общего центра масс на расстоянии R друг от друга. Найти период их обращения.

7.5. Космический корабль движется по круговой орбите радиуса R вокруг Земли со скоростью v, вдвое большей скорости свободного движения по той же орбите. Какую силу тяги развивают двигатели корабля, если его масса равна M?

7.6. Зная, что солнечный диск виден с Земли под углом $\alpha = 5^0$, определить среднюю плотность Солнца.

7.7. На какой высоте ускорение свободного падения уменьшается в 2 раза? Радиус Земли равен $R_з = 6400$ км.

7.8. Ускорение свободного падения на поверхности планеты равно g_1, а на высоте h - g_2. Найти радиус планеты.

7.9. Какое расстояние пролетит за 1 секунду тело, свободно падающее с высоты 1000 км?

7.10. Расстояние от Земли до Луны 380000 км, а масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. На каком расстоянии от центра Земли равнодействующая сил тяготения равна нулю?

7.11. Какова будет первая космическая скорость если Землю сжать, уменьшив ее радиус в 2 раза?

7.12. Белый карлик Сириус В имеет радиус 0,02 радиуса Солнца, а массу равную массе Солнца. Найти ускорение свободного падения на поверхности Сириуса В и его плотность. Радиус Солнца - R_c = 696 тыс. км, радиус Земной орбиты - R = 150 млн. км.

7.13. При какой продолжительности суток тела на экваторе Земли были бы невесомыми?

7.14. Какой была бы продолжительность года, если бы при неизменной плотности все линейные размеры в Солнечной системе уменьшились в два раза?

7.15. Пассажир массой m = 70 кг находится в автобусе, который едет со скоростью v = 72 км/ч вдоль экватора Земли: сначала с запада на восток; затем в обратном направлении. Определить разность веса пассажира в этих двух случаях.

7.16. Вес тела на полюсе планеты в n раз больше, чем на экваторе. Определить среднюю плотность планеты, если продолжительность суток на ней равна T.

7.17. Вес тела на полюсе Земли равен P_0, а ускорение свободного падения g_0. Найти вес тела на широте φ.

7.18. Ускорение свободного падения на экваторе Земли равно $g = 9{,}8$ м/с^2. С какой силой тело массой $m = 1$ кг притягивает Землю?

7.19. Груз свободно висит на нити. При какой продолжительности суток нить будет располагаться параллельно оси вращения Земли? Опыт проводится на широте Москвы.

7.20. Спутник вращается вокруг планеты на малой высоте с периодом T. Какова средняя плотность планеты?

7.21. Ракета стартует вертикально вверх и движется равноускоренно с ускорением $a = 0{,}5g$. На какой высоте вес космонавта равен нормальному?

7.22. В бесконечной однородной жидкости с плотностью ρ находится шарик массой m. На расстоянии l от шарика образовался сферический воздушный пузырек радиусом R. Найти гравитационную силу, действующую со стороны жидкости на шарик.

7.23. Внутри однородного шара с плотностью ρ имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии l от центра шара. Найти напряженность поля тяготения внутри полости.

7.24. Вокруг шарообразной планеты радиусом R по круговой орбите движется спутник. Период обращения спутника равен T, а ускорение свободного падения у поверхности планеты равно g. Определить радиус орбиты. Как будет изменяться скорость спутника, если он начнет тормозиться в верхних слоях атмосферы?

8. Импульс. Движение центра масс

8.1. Металлический шарик массой m падает на металлическую горизонтальную поверхность. В момент столкновения скорость шарика равна v и направлена под углом α к нормали. Столкновение абсолютно упругое. Определить изменение импульса шарика, если: а) поверхность неподвижна; б) поверхность движется со скоростью u навстречу шарику вдоль нормали.

8.2. Шарик массой m падает с высоты h на горизонтальную поверхность. Приняв длительность удара равной τ, определить среднюю силу удара в случаях: а) удар абсолютно упругий; б) удар абсолютно неупругий; в) удар абсолютно упругий, а поверхность наклонена под углом α к горизонту.

8.3. Тело массой m брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти изменение импульса тела за время полета.

8.4. Под каким углом к горизонту необходимо бросить камень, чтобы модуль изменения импульса за все время полета был равен модулю начального импульса?

8.5. Шарик массой m падает с высоты h на неподвижную горизонтальную плиту. Считая столкновения шарика с плитой абсолютно упругими, определить среднюю силу давления шарика на плиту.

8.6. С высоты h на горизонтальную поверхность сыпется песок. За одну секунду высыпается масса песка равная m. Найти зависимость силы давления песка на поверхность от времени.

8.7. Тонкая стальная цепочка висит вертикально, касаясь нижним концом стола. Масса цепочки равна m, длина - l. В момент t = 0 цепочку отпускают. Найти зависимость силы давления цепочки на стол от времени.

8.8. Тонкая цепочка перекинута через неподвижный блок. Причем часть ее лежит на столе высотой h, а часть - на полу (рис. 8.1). Цепочку отпускают. Найти установившуюся скорость движения цепочки. Блок идеальный.

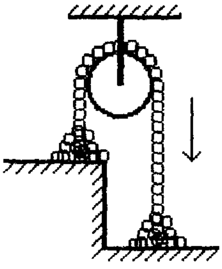

рис. 8.1

8.9. Ракета с площадью поперечного сечения S, двигаясь в космическом пространстве со скоростью u, попадает в неподвижное облако космической пыли со средней плотностью ρ. Какую силу тяги должны развивать двигатели ракеты, чтобы ее скорость осталась прежней? Столкновения пылинок с ракетой считать неупругими, изменением массы ракеты пренебречь.

8.10. Ракета массой M неподвижно зависла над поверхностью земли. Сколько топлива в единицу времени сжигает ракета, если скорость истечения продуктов сгорания из ракеты равна u? Как изменится результат, если ракета начнет подниматься с ускорением a?

8.11. Тело массой m вращается с постоянной скоростью v по окружности радиусом R. Определить модуль среднего значения центростремительной силы за: а) четверть периода; б) полпериода; в) период.

8.12. Тележка массой M едет без трения со скоростью u_0. На нее с высоты h без начальной скорости падает тело массой m. В результате столкновения вертикальная составляющая скорости тела по величине не изменяется. Определить полную скорость, с которой тело отскочит от тележки и скорость тележки после столкновения. Коэффициент трения между телом и тележкой равен μ, длительность удара очень мала.

8.13. На весах стоит бункер с песком общей массой M. Заслонку бункера открывают и песок начинает высыпаться из бункера на весы. Что будут показывать весы, если песок высыпается с высоты h и в секунду высыпается μ кг песка?

8.14. Два бруска массами m_1 и m_2 висят на невесомой нити, перекинутой через неподвижный невесомый блок. Найти ускорение центра масс системы при свободном движении брусков. Трения нет.

• **8.15.** Однородный массивный диск лежит на гладкой горизонтальной поверхности. На диск в точках A и B начинают действовать горизонтальные, одинаковые по модулю и противоположно направленные силы (рис. 8.2). Как будет двигаться диск?

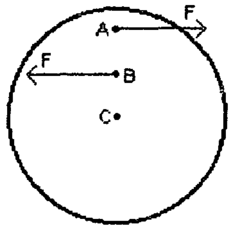

рис. 8.2

• **8.16.** На лодке находится массивный вал, на который намотан канат (рис. 8.3). За канат тянут с постоянной и одинаковой силой в двух случаях: когда вал зажат и когда он может свободно вращаться. В каком случае лодка будет двигаться быстрее? Сопротивление не учитывать.

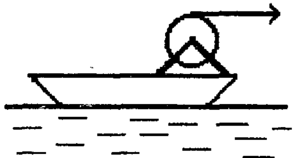
рис. 8.3

8.17. На гладкой горизонтальной поверхности лежит обруч, на котором сидит жук. Как будут двигаться жук и обруч, если жук поползет по обручу?

8.18. Ракета летит с работающим двигателем. Причем скорость ракеты больше скорости вылета реактивной струи из ракеты. Увеличивается ли при этом скорость ракеты?

• **8.19.** По изогнутой под прямым углом трубе течет вода. Действует ли вода на трубу и, если да, то в каком направлении? Какова эта сила, если скорость течения воды равна v, площадь сечения трубы равна S, а плотность воды - ρ? Вязкости нет.

8.20. На веревке, перекинутой через неподвижный блок, висят две обезьяны одинаковой массы и на одинаковом расстоянии от блока. Обезьяны начинают одновременно подниматься вверх. Скорость одной обезьяны равна v, а второй - $2v$. Какая обезьяна достигнет блока раньше?

8.21. По гладкой наклонной плоскости с углом наклона α скатывается мешок с мукой и попадает на горизонтальный пол. На каком расстоянии от наклонной плоскости остановится мешок, если он скатывается с высоты H, а коэффициент трения мешка о пол равен μ?

• **8.22.** На тело, движущееся со скоростью v_0, начинает действовать постоянная сила. Спустя время t скорость тела становится перпендикулярна начальной, не изменившись по модулю. Какой станет скорость тела спустя еще t?

8.23. Лодку оттолкнули от берега со скоростью v_0. Какое расстояние проплывет лодка до остановки, если масса лодки равна m, а сила сопротивления пропорциональна скорости и равна kv?

8.24. На вертикальном стержне AB нарезана резьба. На него навернут горизонтальный стержень CD (рис. 8.4). Стержень CD отпускают и он под действием силы тяжести скручивается со стержня AB. Как будет двигаться стержень CD после того как слетит с винта?

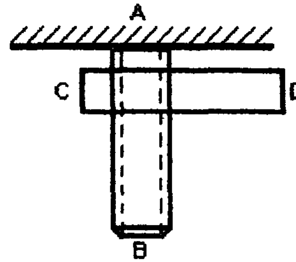

рис.8.4

8.25. На нити висит тело массой m необтекаемой формы. На какой угол от вертикали отклонится нить, если дует горизонтальный ветер со скоростью v? Площадь вертикального сечения стержня равна S, плотность воздуха - ρ.

8.26. Брусок массой $m = 1$ кг лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между бруском и поверхностью равен $\mu = 0{,}1$. На боковую грань бруска направляется горизонтальная струя воды со скоростью $v = 10$ м/с (рис. 8.5). Площадь сечения струи $S = 2$ см^2. С какой скоростью движется брусок?

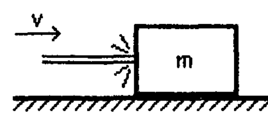

рис. 8.5

8.27. На горизонтальной поверхности лежит ящик с песком массой M. Коэффициент трения между ящиком и поверхностью равен μ. В ящик со скоростью v сверху вниз под углом α к вертикали влетает пуля массой m и мгновенно застревает в песке. Через какое время после этого ящик остановится? При каких значениях α ящик вообще не сдвинется?

9. Работа. Энергия. Мощность

9.1. Определить работу необходимую для сжатия пружины на $\Delta l_1 = 10$ см, если для сжатия ее на $\Delta l_2 = 1$ см необходима сила $F = 100$ Н?

9.2. Тело массой m поднимается вверх с ускорением a на высоту h. Определить работу поднимающей силы.

9.3. Тело массой $m = 1$ кг свободно падает без начальной скорости. Определить работу силы тяжести за первую и вторую секунды падения.

9.4. Тело массой m падает с высоты h без начальной скорости. Написать зависимость мощности, развиваемой силой тяжести, от времени и определить среднюю мощность силы тяжести за время падения.

9.5. Пуля массой $m = 10$ г вылетает из дула винтовки со скоростью $v = 800$ м/с. Какова средняя сила давления пороховых газов, если длина ствола равна $l = 60$ см?

9.6. Пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v = 400$ м/с, пробивает доску толщиной $d = 10$ см, потеряв половину своей скорости. Определить среднюю силу сопротивления доски движению пули.

9.7. Чему равна работа по подъему лежащей цепи массой $m = 50$ г и длиной $l = 2$ м, если ее верхний конец поднимается на высоту $H = 5$ м?

9.8. Автомобиль трогается с места. Для того, чтобы набрать скорость 1 м/с, двигатель совершает работу 1 кДж. Какую работу совершает двигатель при увеличении скорости автомобиля от 10 м/с до 11 м/с?

9.9. Тело массой m, брошенное под углом к горизонту, упало на расстоянии S от места броска, поднявшись на максимальную высоту H. Найти работу, совершенную при броске.

9.10. Какую работу необходимо совершить, чтобы сдвинуть с места брусок массой m = 1 кг, лежащий на горизонтальной поверхности, растягивая в горизонтальном направлении пружину, прикрепленную к бруску? Жесткость пружины k = 40 Н/м; коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}3$.

9.11. Тело массой m лежит на горизонтальной поверхности. Какую работу необходимо совершить, чтобы медленно передвинуть тело на расстояние S, прикладывая силу, направленную вверх под углом α к горизонту? Коэффициент трения равен μ.

9.12. Тело массой m лежит на горизонтальной поверхности. Какую работу необходимо совершить, чтобы медленно передвинуть тело на расстояние S, растягивая пружину жесткости k силой, направленной вверх под углом α к горизонту? Коэффициент трения между телом и поверхностью равен μ.

9.13. На брусок массой m = 1 кг, покоившийся на горизонтальной поверхности, действовали в течение t = 10 с силой F = 5 Н, направленной вверх под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Найти работу этой силы, если коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}25$.

9.14. Уклон участка шоссе $\alpha = 0{,}05$. Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, автомобиль массой m = 1,5 т движется равномерно со скоростью v = 60 км/ч. Какова должна быть мощность двигателя автомобиля, чтобы он мог подняться по тому же склону с той же скоростью?

9.15. Автомобиль массой $m = 1{,}5$ т с двигателем мощностью $N = 80$ кВт движется в гору по дороге, образующей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом. Какую максимальную скорость может развить автомобиль без учета сопротивления движению?

9.16. Река шириной $l = 100$ м имеет среднюю по ширине глубину $h = 2$ м. Какова мощность водяного потока, если принять скорость течения постоянной по сечению и равной $v = 1$ м/с?

9.17. Два бруска массами m_1 и m_2, скрепленные пружиной жесткости k, лежат на горизонтальной поверхности. Приложив к бруску m_2 горизонтальную силу, его медленно передвинули на расстояние S. Какая при этом была совершена работа, если коэффициент трения брусков о поверхность равен μ, а пружина первоначально была не нагружена?

9.18. Для того, чтобы растянуть пружину из свободного состояния на величину x, необходимо совершить работу 10 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы растянуть пружину еще на x?

9.19. Если к пружине по очереди подвешивать грузы массами m_1 и m_2, то ее длина оказывается равной l_1 и l_2. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину от длины l_1 до длины l_2?

9.20. Электрическая лебедка, развивающая мощность $N = 15$ кВт, тянет равномерно вверх по наклонной плоскости груз. Определить угол наклона плоскости, если груз обладает импульсом $P = 5\cdot10^3$ Н·с, а коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

9.21. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Его приводят в движение так, что он обращается по горизонтальной окружности, расположенной на расстоянии $0{,}5l$ под точкой подвеса. Какую при этом совершили работу?

9.22. Два тела с массами m_1 и m_2 соединены недеформированной пружиной и лежат на горизонтальной поверхности. На тело m_1 начинает действовать постоянная горизонтальная сила, направленная к телу m_2. При каком минимальном значении силы тело m_2 сдвинется с места? Коэффициент трения тел о поверхность равен μ.

9.23. Автомобиль массой $m = 1200$ кг способен на скорости $v = 50$ км/ч подниматься по дороге с наибольшим уклоном $\alpha = 16^0$. При движении по ровной дороге с тем же покрытием и с той же скоростью мощность двигателя равна $N = 14{,}7$ кВт. Какова максимальная мощность двигателя?

9.24. Автомобиль массой m трогается с места. Коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен μ, обе оси автомобиля ведущие. Найти зависимость скорости автомобиля от времени в режиме максимального разгона. Мощность двигателя равна N, сопротивления нет.

9.25. Ракета массой M неподвижно висит на небольшой высоте, выбрасывая вниз реактивную струю со скоростью v. Какую мощность развивают при этом двигатели ракеты?

9.26. Вентилятор прокачивает воздух через вентиляционную трубу. Во сколько раз надо увеличить мощность вентилятора, чтобы скорость воздушного потока возросла в 2 раза?

9.27. Первый автомобиль имеет мощность двигателя N_1 и развивает максимальную скорость v_1. Второй автомобиль с мощностью двигателя N_2 на той же дороге развивает максимальную скорость v_2. Какую максимальную скорость разовьют автомобили, если их сцепить вместе? Силу сопротивления движению считать пропорциональной скорости.

9.28. Небольшая муфта массой m движется с постоянной скоростью v_0 по гладкой горизонтальной спице, согнутой в виде окружности радиусом R. Когда муфта находилась в точке A, на не начала действовать постоянная горизонтальная сила F, направленная перпендикулярно радиусу OA (рис. 9.1). При каком значении скорости v_0 муфта сможет сделать полный оборот?

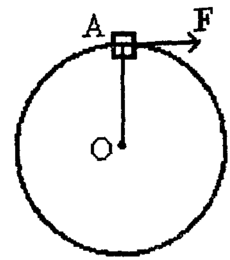

рис. 9.1

9.29. Автомобилю необходимо въехать в ледяную горку длиной l с углом наклона α. Коэффициент трения между колесами и льдом μ такой, что $\mu < tg\alpha$. На каком расстоянии от горки автомобиль должен начать разгон, если коэффициент трения на горизонтальном участке тоже равен μ? Какова должна быть минимальная мощность двигателя автомобиля? Масса автомобиля M, обе оси ведущие.

9.30. Если сила тяги двигателя ракеты равна F, то мощность развиваемая двигателем при скорости ракеты v равна $N = Fv$. Причем эта мощность должна обеспечиваться теплотой сгорания ракетного топлива. Однако известно, что при первой космической скорости требуемая мощность в 2 - 2,5 раза больше той, что может обеспечить современное ракетное топливо. Чем же обеспечивается требуемая мощность?

9.31. Пассажир идет с постоянной скоростью вдоль вагона неподвижного поезда. Поезд трогается с места и начинает медленно ускоряться. Скорость пассажира, а значит и его кинетическая энергия при этом увеличиваются. За счет какой работы увеличивается энергия пассажира?

9.32. На горизонтальной гладкой поверхности имеется шероховатая полоса шириной L. На поверхности вне полосы лежит прямоугольный ящик массой m и длиной l (рис. 9.2). Коэффициент трения между ящиком и поверхностью на полосе равен μ. Какую работу надо совершить, чтобы медленно перетащить ящик через полосу? Рассмотреть случаи: а) $L > l$; б) $L < l$.

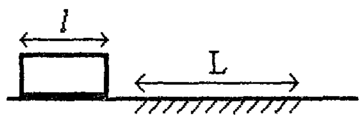

рис. 9.2

9.33. Ящик втаскивают вверх по наклонной плоскости с углом наклона α. Каков к.п.д. наклонной плоскости, если коэффициент трения между ящиком и плоскостью равен μ?

9.34. Горизонтальная лента транспортера движется с постоянной скоростью v. На нее сверху кладут кирпич массой m. Найти работу сил трения, действующих на кирпич и на ленту.

9.35. Лестница эскалатора поднимается со скоростью 1 м/с под углом 30^0 к горизонту. По лестнице со скоростью 1,5 м/с поднимается человек массой 70 кг. Какую работу совершают двигатель эскалатора и человек за время подъема человека, если длина эскалатора 300 м? Найти работу двигателя и человека в случае, если человек сбегает с эскалатора.

9.36. Цепочка массой m и длиной l висит, касаясь нижним концом стола. Цепочку отпускают. Найти максимальную и среднюю мощность, развиваемую силой тяжести в процессе падения цепочки.

9.37. Насос подает воду в большую емкость на высоту $H = 10$ м по трубе диаметром $d = 10$ см. Определить к.п.д. насоса, если в секунду подается $m = 100$ кг воды.

9.38. С потолка свисает резиновый шнур длиной $l = 1$ м. По шнуру от потолка начинает скользить втулка массой $m = 2$ кг. Между втулкой и шнуром действует постоянная сила трения $F = 10$ Н. Какое количество теплоты выделится за время соскальзывания, если жесткость шнура $k = 25$ Н/м?

9.39. С какой скоростью вытекает вода из шприца, если на его поршень действует сила F? Плотность воды равна ρ, площадь поршня - S, площадь отверстия шприца - s ($s \ll S$).

9.40. Из шланга, лежащего на земле, вверх под углом к горизонту вытекает струя воды. Во сколько раз необходимо увеличить мощность насоса, подающего воду, чтобы дальность полета струи увеличилась вдвое?

9.41. Поршень шприца приводится в движение пружиной жесткости k. Собственная длина пружины равна длине шприца. В шприц закачивают воду, сжимая пружину, и кладут его на гладкий стол вплотную к стене (рис. 9.3). Как зависит сила давления шприца на стену от величины деформации пружины x? Площадь поршня равна S, площадь отверстия шприца - s ($s \ll S$).

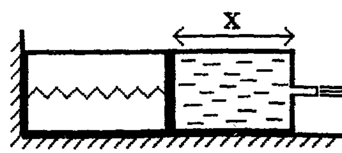

рис. 9.3

10. Законы сохранения

10.1. Тело брошено под углом к горизонту со скоростью v_0. Определить скорость тела на высоте h.

10.2. Тело брошено горизонтально со скоростью 20 м/с. Определить скорость тела в конце четвертой секунды падения.

10.3. Наклонная плоскость высотой h и массой M лежит на гладкой горизонтальной поверхности. С верхней точки плоскости без начальной скорости и без трения начинает соскальзывать небольшой брусок массой m. Найти скорости плоскости и бруска в конце соскальзывания.

10.4. Груз массой m, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, соединен горизонтальной пружиной жесткости k со стенкой. Систему вывели из равновесия, сжав пружину на Δx, и отпустили. Какова максимальная скорость груза?

10.5. На стержне длиной *l* шарнирно подвешен шар. Какую горизонтальную скорость нужно сообщить шару, чтобы он поднялся до высоты точки подвеса?

10.6. Камень брошен под углом к горизонту со скоростью 16 м/с. На какой высоте кинетическая энергия камня будет равна его потенциальной энергии?

10.7. Покоящийся атом распадается на две части, отношение кинетических энергий которых равно β. Определить отношение масс этих частей.

10.8. Две лодки движутся в стоячей воде навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $v_1 = 0{,}6$ м/с. Когда лодки поравнялись, из первой во вторую переложили груз массой $m = 60$ кг. После этого вторая лодка продолжала двигаться в том же направлении со скоростью $v_2 = 0{,}4$ м/с. Определить массу второй лодки. Сопротивление воды не учитывать.

10.9. Три лодки одинаковой массы M движутся одна за другой с одинаковыми скоростями v. Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью u относительно лодки одинаковые грузы массой m. Каковы будут скорости лодок после этого? Сопротивления нет.

10.10. Тело А налетает на неподвижное тело В и после удара движется с вдвое меньшей скоростью в перпендикулярном направлении. Определить направление движения тела В после удара.

10.11. Космонавт массой m и космический корабль массой M связаны веревкой, длина которой равна l. Первоначально космонавт и корабль неподвижны, а веревка натянута. Космонавт выбирает веревку, подтягиваясь к кораблю. Какое расстояние пройдут космонавт и корабль до встречи? Внешних сил нет.

10.12. Космический корабль имеет скорость v_0. После отделения ступени его скорость стала $1{,}01v_0$. При этом ступень удаляется от корабля со скоростью $0{,}04v_0$. Какова масса ступени, если масса корабля равна m_0?

10.13. Снаряд разрывается в наивысшей точке траектории на расстоянии l от пушки по горизонтали на два одинаковых осколка. Один из осколков возвращается назад по той же траектории к пушке. На каком расстоянии от пушки упал второй осколок?

10.14. Частица массой m_1, имеющая скорость v_1, налетает на покоящуюся частицу массой m_2 и отскакивает от нее со скоростью v_2 под прямым углом. Найти скорость частицы m_2 после удара.

10.15. Артиллерист стреляет из пушки ядром массой m так, чтобы оно упало в неприятельском лагере. На вылетевшее ядро садится барон Мюнхаузен, масса которого равна 5m. Какую часть пути до неприятельского лагеря барону пришлось идти пешком?

10.16. Водометный катер забирает воду из реки и выбрасывает ее со скоростью 10 м/с относительно катера назад. Какой максимальной скорости может достигнуть катер? Сопротивление воды не учитывать.

10.17. Тело свободно падает с высоты H. На высоте 0,5H оно сталкивается с таким же телом, летящим горизонтально. Тела слипаются. Через какое время после столкновения тела упадут на землю?

10.18. В горизонтально движущуюся со скоростью 20 м/с платформу массой 200 кг с высоты 3 м вертикально падает камень массой 50 кг. Через некоторое время в платформе открывается люк и камень вываливается из нее. Какова будет конечная скорость платформы? Платформа движется без трения.

10.19. Пуля массой m = 10 г, летящая горизонтально, попадает в ящик с песком, висящий на бечевке длиной

$l = 1$ м, и застревает в нем. Масса ящика $M = 5$ кг. Определить скорость пули, если ящик отклонился на угол $\alpha = 30^0$.

10.20. На гладком столе лежат два груза, между которыми сжатая пружина. Массы грузов относятся как 1:3. После распрямления пружины легкий груз приобрел кинетическую энергию $W_1 = 6$ Дж. Определить начальную энергию сжатия пружины.

10.21. Лодка длиной L неподвижна относительно воды. Рыбак, находящийся на носу лодки, бросает груз массой m в корзину, находящуюся на корме. С какой минимальной скоростью должен быть брошен груз, чтобы он попал в корзину? Масса лодки с рыбаком равна M.

10.22. Санки съезжают с горы высотой H и углом наклона α и далее едут по горизонтальному участку. Коэффициент трения везде одинаков и равен μ. Определить расстояние, которое санки проедут по горизонтальному участку.

10.23. Санки съезжают с горы высотой H и, пройдя некоторое расстояние по горизонтальному участку, останавливаются. При этом полное расстояние, пройденное санками по горизонтали, равно S. Считая коэффициент трения везде одинаковым, определить его.

10.24. Груз массой m, подвешенный на пружине жесткости k, удерживается так, что пружина не растянута. На какое максимальное расстояние опустится груз, если его отпустить?

10.25. Тело массой m падает с высоты h на стоящую вертикально пружину жесткостью k и длиной l. Определить максимальную силу давления пружины на пол.

10.26. От груза, висящего на пружине жесткости k, отрывается часть массой m. На какую максимальную высоту поднимется оставшаяся часть груза?

10.27. Человек массой M, стоящий на гладком льду, бросает камень массой m в горизонтальном направлении с высоты h. Камень подает на лед на расстоянии L от места бросания. Какую работу совершил человек при бросании?

10.28. На легком стержне длиной l закреплен небольшой шарик. Стержень может свободно вращаться вокруг второго конца. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он сделал полный оборот? Решить эту задачу для случая шарика, подвешенного на нити.

10.29. Шар, подвешенный на нити, отклонили на угол 90^0 от вертикали и отпустили без начальной скорости. При каком значении угла между нитью и вертикалью нить оборвется, если она может выдержать только удвоенную силу тяжести, действующую на шар?

10.30. Шарик, висящий на нити, отклонили от вертикали на угол 90^0 и отпустили без начальной скорости. При каком значении угла между нитью и вертикалью полное ускорение шарика будет направлено горизонтально?

10.31. Небольшое тело соскальзывает с верхней точки гладкой сферы радиусом R. На какой высоте тело оторвется от сферы?

10.32. Гантелька представляет собой невесомый стержень длиной l с двумя одинаковыми небольшими массивными шариками на концах. Гантельку поставили вертикально на горизонтальную гладкую поверхность и слегка вывели из положения равновесия. Какую скорость будет иметь верхний шарик в момент удара о поверхность?

10.33. Гантелька представляет собой невесомый стержень с двумя небольшими массивными шариками на концах. Гантельку ставят в угол вертикально и слегка выводят из равновесия. Она начинает падать (рис. 10.1). При каком значении угла между стержнем и вертикалью нижний шарик оторвется от стенки?

рис. 10.1

10.34. Шарик массой m = 10 г падает с высоты h = 2 м и упруго отражается от установленного на неподвижной тележке щита, наклоненного под углом 45^0 к горизонту. Найти скорость тележки после удара. Тележка может двигаться без трения, а ее масса вместе со щитом равна M = 90 г.

10.35. Небольшое тело едет по гладкой горизонтальной поверхности и въезжает на пологую гладкую горку высотой h (рис. 10.2). При какой скорости тело сможет переехать через горку?

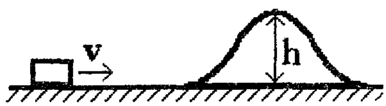

рис. 10.2

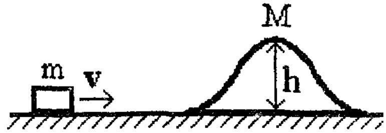

рис. 10.3

10.36. Небольшое тело массой m едет по гладкой горизонтальной поверхности и въезжает на пологую гладкую незакрепленную горку массой M и высотой h (рис. 10.3). При какой скорости тело сможет переехать через горку?

10.37. На гладкой горизонтальной поверхности покоится гладкая пологая незакрепленная горка массой M, высотой h и длиной L (рис. 10.4). На горку въезжает со скоростью v тело массой m. Спустя время τ тело покидает горку. На какое расстояние успевает за это время сместиться горка?

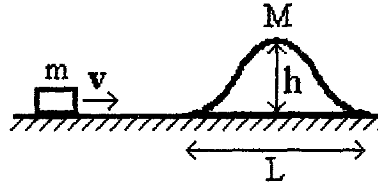

рис. 10.4

10.38. Маленькое тело лежит на краю длинной тележки. Тележке ударом сообщают скорость v. На какое расстояние переместится тело по тележке, если масса тела m, масса тележки M, коэффициент трения между телом и тележкой μ, а трения между тележкой и полом нет?

10.39. Два бруска с массами m_1 и m_2 лежат один на другом и движутся по гладкой горизонтальной поверхности. Верхний брусок натыкается на закрепленную горизонтальную пружину жесткости k (рис.10.5). При какой начальной скорости бруски не будут скользить друг по другу, если коэффициент трения между ними равен μ?

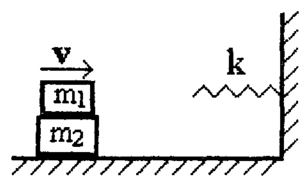

рис. 10.5

10.40. Железнодорожный состав длиной L, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона α и останавливается, когда на горке находится ровно половина состава. Какова была начальная скорость состава? Трения нет.

10.41. На двух горизонтальных столах, расположенных на расстоянии $2l$ друг от друга, лежат два одинаковых тела массой M, связанные длинной нитью. К нити посередине между столами привязано третье тело массой m (рис. 10.6). Первоначально система неподвижна, а нить горизонтальна. Системy отпускают. Какое расстояние проедут боковые тела до остановки, если коэффициент трения между ними и столом равен μ, а $m < 2\mu M$?

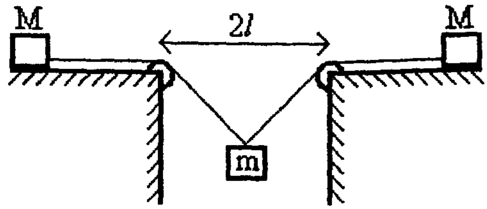

рис. 10.6

10.42. Широкая доска массой M движется со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности. На нее въезжает шайба массой m, скорость которой равна u и перпендикулярна v (рис. 10.7). Коэффициент трения между доской и шайбой равен μ. Какой должна быть ширина доски d, чтобы шайба с нее не свалилась? Считать, что доска все время движется поступательно.

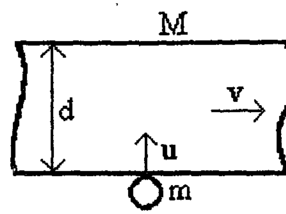

рис. 10.7

10.43. Тело массой $m_1 = 5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2 = 2{,}5$ кг. После абсолютно неупругого удара кинетическая энергия системы равна W = 5 Дж. Какова была начальная кинетическая энергия системы?

10.44. Какое количество теплоты выделится при столкновении пластилинового шара массой m = 200 г, движущегося со скоростью v = 10 м/с, с покоящимся шаром такой же массы?

10.45. Два пластилиновых шара, массы которых относятся как 1:3, подвешены на одинаковых вертикальных нитях и касаются друг друга. Шары симметрично развели в противоположные стороны и одновременно отпустили. Шары слиплись. Какая часть энергии шаров перейдет в тепло?

10.46. Два свинцовых шара одинаковой массы движутся навстречу друг другу со скоростями v и $2v$. Определите повышение температуры шаров в результате их абсолютно неупругого удара, если удельная теплоемкость свинца равна c.

10.47. Два тела массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу по взаимно перпендикулярным направлениям со скоростями v_1 и v_2. Какое количество теплоты выделится в результате их абсолютно неупругого столкновения?

10.48. Два идеально упругих шарика массами m_1 и m_2, движущиеся вдоль одной прямой со скоростями v_1 и v_2 в одном направлении, сталкиваются. Найти значение максимальной потенциальной энергии столкновения.

10.49. Шар, движущийся со скоростью v, сталкивается с таким же покоящимся шаром. Найти скорости шаров после центрального абсолютно упругого удара.

10.50. Два шара одинаковой массы движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. Найти скорости шаров после центрального абсолютно упругого удара.

10.51. На покоящийся шар налетает другой такой же шар. Найти угол разлета шаров после нецентрального абсолютно упругого удара.

10.52. Два одинаковых шара движутся с одинаковыми скоростями строго друг за другом перпендикулярно к стенке (рис. 10.8). Как будут двигаться шары после прекращения всех столкновений? Столкновения абсолютно упругие.

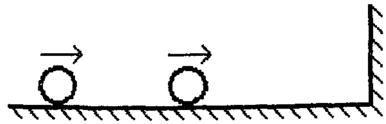

рис. 10.8

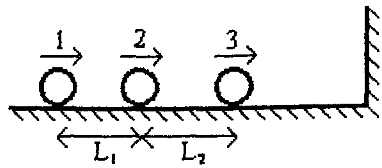

рис. 10.9

10.53. Три одинаковых шара движутся с одинаковыми скоростями строго друг за другом на расстоянии L_1 и L_2 друг от друга перпендикулярно к стенке (рис. 10.9). Как будут двигаться шары после прекращения всех столкновений? Столкновения абсолютно упругие.

10.54. Движущийся со скоростью v шар налетает на такой же неподвижный шар. Найти скорости шаров после абсолютно упругого удара, если радиусы шаров равны R, а прицельное расстояние - d.

10.55. Частица налетает на покоящуюся мишень и отскакивает от нее назад с уменьшенной в n раз кинетической энергией. Определить отношение массы частицы к массе мишени. Столкновение абсолютно упругое.

10.56. На покоящийся шар налетает другой шар. Между ними происходит центральный абсолютно упругий удар. Найти отношение переданной энергии к начальной, если отношение масс шаров $m_1/m_2 = \alpha$.

10.57. При бомбардировке гелия α - частицами с кинетической энергией W_0 налетающая частица отклоняется на угол 60^0. Считая столкновение абсолютно упругим, определить энергию α - частицы после столкновения.

10.58. Два одинаковых шара лежат на гладкой поверхности, касаясь друг друга. На них вдоль линии симметрии налетает третий такой же шар, движущийся со скоростью v (рис. 10.10). Найти скорости шаров после абсолютно упругого столкновения.

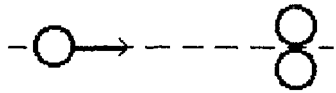

рис. 10.10

10.59. К бруску массой m прикреплена вертикальная пружина жесткости k. В начальный момент пружина не нагружена. Верхний конец пружины начинают тянуть вверх с постоянной скоростью v (рис. 10.11). Определить максимальное ускорение бруска в процессе последующего движения.

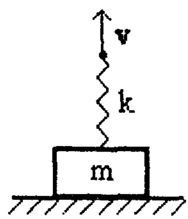

рис. 10.11

10.60. Брусок массой m свободно лежит на вертикальной пружине жесткости k. На него с высоты H без начальной скорости падает такой же брусок (рис. 10.12). На какую высоту (относительно начального положения равновесия) подпрыгнут бруски после абсолютно неупругого столкновения?

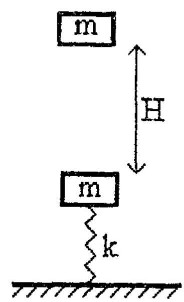

рис. 10.12

10.61. Брусок массой M съезжает без трения и начальной скорости с наклонной плоскости, угол наклона которой равен α. Когда брусок проехал расстояние L, в него попала пуля массой m, летящая горизонтально, и застряла в нем. В результате этого брусок остановился. Найти скорость пули.

10.62. Человек стоит на гладком льду и держит в руках два камня. Человеку необходимо добраться до края ледяного поля и он решает отбросить от себя камни, приобретя за счет этого некоторую скорость. В каком случае человек приобретет большую скорость: если отбросит камни одновременно или по очереди?

10.63. По горизонтальной дороге без трения с одинаковыми скоростями едут две одинаковые тележки, на которых стоят одинаковые дворники. Внезапно начинает падать густой снег. На первой тележке дворник сметает упавший снег вбок, а на второй - ничего не делает. Какая тележка в конечном итоге окажется впереди?

10.64. Человек массой M, стоящий на гладком льду, бросает камень массой m, который падает на лед через время t на расстоянии *l* от человека. С какой скоростью был брошен камень?

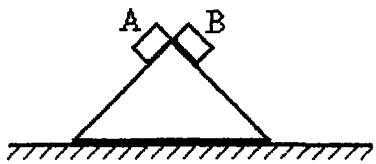

рис. 10.13

10.65. Гладкая горка лежит неподвижно на гладкой горизонтальной поверхности. На вершине горки закреплены два одинаковых бруска A и B (рис. 10.13). Сначала с горки скатывается брусок A, а затем брусок B. В какую сторону будет направлена конечная скорость горки?

10.66. Ракета, стартовая масса которой $M_0 = 10^6$ кг, стартует вертикально вверх с поверхности Земли. Определить ускорение ракеты через t = 1 мин после старта, если секундный расход топлива $\mu = 7{,}5 \cdot 10^3$ кг/с, а скорость выброса реактивной струи из ракеты $u = 2000$ м/с.

10.67. Ракета стартует вертикально вверх с поверхности Земли с ускорением $a_0 = 15$ м/с^2. Через время $t = 30$ с ускорение ракеты стало равно $a = 20$ м/с^2. На сколько времени ракете хватит топлива, если масса топлива составляет 2/3 от стартовой массы ракеты. Секундный расход топлива и скорость выброса реактивной струи постоянны.

10.68. Определить силу тяги воздушно - реактивного двигателя самолета, летящего со скоростью v. Секундный расход топлива и поступающего в двигатель воздуха - μ_1 и μ_2 соответственно. Скорость выброса продуктов сгорания - u.

10.69. На тележке установлены два одинаковых сообщающихся сосуда площадью S. Расстояние между осями сосудов l, плотность налитой в них жидкости ρ. Какова скорость тележки в момент когда скорость уровней жидкости равна v (рис. 10.14)? Полная масса системы M, трения нет.

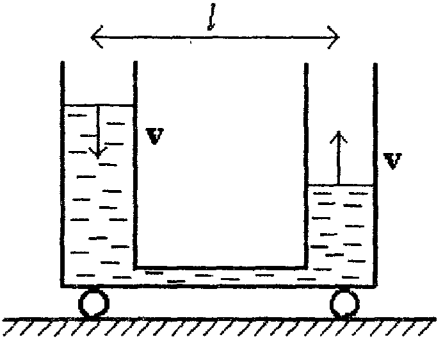

рис. 10.14

10.70. Из пушки стреляют в горизонтальном направлении. Если выстрелить из закрепленной пушки, то снаряд вылетает со скоростью $v_1 = 500$ м/с. Если же выстрелить из незакрепленной пушки, то снаряд вылетает со скоростью $v_2 = 499$ м/с. С какой скоростью во втором случае откатывается пушка?

10.71. Земля движется вокруг Солнца со скоростью 30 км/с. Ее догоняет метеорит со скоростью 5 км/с (относительно Земли) и врезается в Землю. Во сколько раз увеличение кинетической энергии Земли больше, чем количество теплоты, выделившееся при ударе?

10.72. Два одинаковых маленьких шарика массой m каждый соединены нитью длиной l и лежат на гладком столе. На один из шариков налетает третий такой же шарик со скоростью v, направленной перпендикулярно нити (рис. 10.15). Между шариками происходит центральный абсолютно упругий удар. Найти силу натяжения нити после удара.

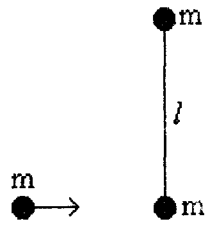

рис. 10.15

10.73. Поезд идет со скоростью v. Человек, стоящий на платформе поезда, бросает горизонтально по ходу поезда камень массой m со скоростью u относительно поезда. При бросании человек совершает работу $A = mu^2/2$, которая идет на увеличение кинетической энергии камня. Так как в системе отсчета Земли начальная энергия камня равна $W_0 = mv^2/2$, то энергия камня сразу после бросания равна: $W_1 = W_0 + A = mv^2/2 + mu^2/2$. С другой стороны, скорость камня относительно Земли сразу после бросания равна $v + u$, а значит и его кинетическая энергия равна: $W_2 = m(v + u)^2/2$. Но $W_1 \neq W_2$. В чем дело?

10.74. Человек, стоящий на земле, бросает горизонтально камень массой m со скоростью v. С точки зрения неподвижного наблюдателя, начальная кинетическая энергия камня равна нулю, а сразу после броска - $mv^2/2$. С точки же зрения наблюдателя, движущегося со скоростью v/2 в сторону бросания, начальная и конечная энергии камня равны $mv^2/8$. Работа, совершенная человеком при бросании, равна разности конечной и начальной энергий камня. Для неподвижного наблюдателя эта работа равна $mv^2/2$, а для движущегося - равна нулю. В чем причина противоречия?

10.75. Тяжелый грузовик едет с постоянной скоростью u. По нему сзади стреляют из винтовки. Пуля летит со скоростью v, попадает в задний борт грузовика и застревает в нем. С точки зрения стрелка, изменение кинетической энергии пули, а значит и количество выделившейся при ударе теплоты, равно: $Q_1 = mv^2/2 - mu^2/2$. С точки зрения водителя грузовика, изменение энергии пули, а значит и количество теплоты, равно: $Q_2 = m(v - u)^2/2$. При этом $Q_1 \neq Q_2$. Однако количество выделившейся теплоты не должно зависеть от системы отсчета. В чем дело?

10.76. Капроновую веревку длиной L одним концом привязали к потолку, а к другому концу привязали груз. Груз поднимают до точки подвеса и отпускают. При этом веревка рвется, если масса груза больше m. Предполагая, что веревка подчиняется закону Гука и что предел ее прочности на разрыв равен T, найти ее жесткость.

10.77. Модель ракеты имеет два пороховых заряда, которые подрываются по очереди. С каким интервалом времени надо подорвать заряды, чтобы ракета поднялась на максимальную высоту? Считать, что заряды сгорают мгновенно.

10.78. Брусок массой M висит на длинной нити. Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v, пробивает брусок, потеряв при этом половину своей скорости. При какой наименьшей скорости пуля еще сможет пробить этот брусок? Принять $M \gg m$.

10.79. Брусок массой m лежит на горизонтальном столе и связан с потолком пружиной, Вначале пружина вертикальна и недеформирована, ее длина равна l, а жесткость - k (рис. 10.16). Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить бруску, чтобы он оторвался от стола? Трения нет.

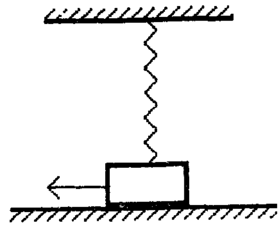

рис. 10.16

10.80. Наклонная плоскость с углом наклона α поделена горизонтальной линией на две части. Сверху по плоскости без начальной скорости отпускают доску длиной l. Коэффициент трения между доской и плоскостью на верхней части плоскости равен μ_1, а на нижней - μ_2. Причем $\mu_1 < \text{tg}\alpha < \mu_2$ (рис. 10.17). На каком минимальном расстоянии от линии раздела надо отпустить доску, чтобы она полностью переехала через эту линию?

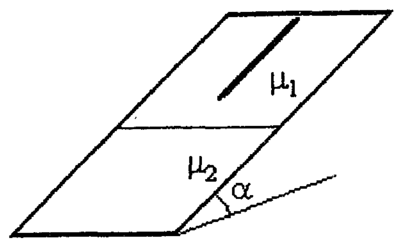

рис. 10.17

11. Статика

11.1. Найти силы натяжения нитей AB и BC (рис. 11.1), если $m = 1$ кг, а $\alpha = 30^0$.

11.2. Найти равнодействующую сил (рис. 11.2): $F_1 = 50$ Н; $F_2 = 100$ Н; $F_3 = 60$ Н; $F_4 = 200$ Н; $\alpha = 30^0$; $\beta = 60^0$.

11.3. Найти равнодействующую сил (рис. 11.3): $F_1 = 100$ Н; $F_2 = 50\sqrt{3}$ Н; $F_3 = 50$ Н; $\alpha = 60^0$; $\beta = 30^0$.

11.4. Определить силы в элементах AB и BC, если $m = 120$ кг, а $\alpha = 45^0$ (рис. 11.4).

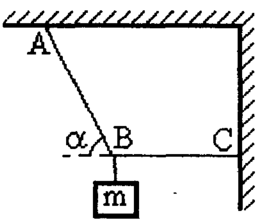

рис. 11.1

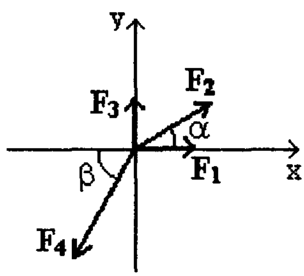

рис. 11.2

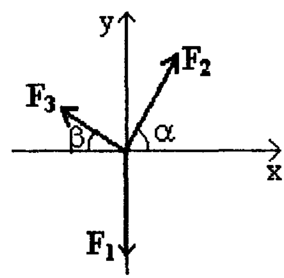

рис. 11.3

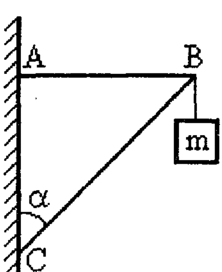

рис. 11.4

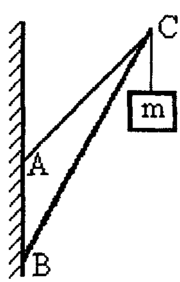

рис. 11.5

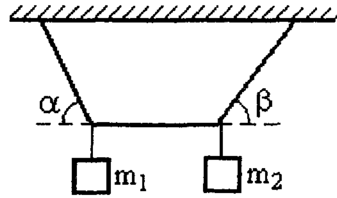

рис. 11.6

11.5. Определить силы в элементах AC и BC, если AB = 1,5 м; AC = 3 м; BC = 4 м; m = 200 кг (рис. 11.5).

11.6. Грузы m_1 и m_2 висят как показано на рис. 11.6. Зная углы α и β и массу m_1, найти массу m_2.

11.7. Грузы m_1 и m_2 висят на нити, перекинутой через неподвижный блок (рис. 11.7). В равновесии: $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$. Зная, что $m_2 = 2$ кг, найти m_1.

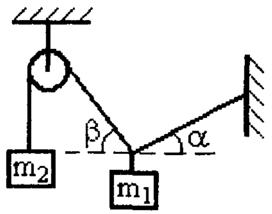

рис. 11.7

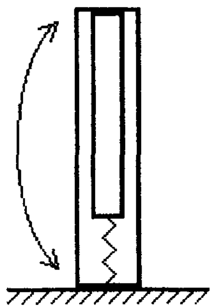

рис. 11.8

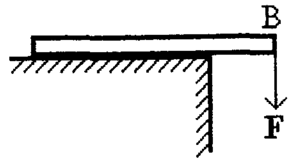

рис. 11.9

11.8. В закрытом пенале находятся карандаш и пружинка. Пенал ставят вертикально сначала так, что карандаш сверху, а затем переворачивают на 180^0 (рис. 11.8). При этом сила давления на нижний торец во втором случае в 1,2 раза больше, чем в первом. Найти силу давления в первом случае. Масса карандаша равна 10 г.

11.9. Однородная балка лежит на платформе, свешиваясь с нее на 0,25 своей длины (рис. 11.9). Когда конец B балки потянули вниз с силой F = 300 Н, противоположный конец начал отрываться от платформы. Чему равен вес балки?

11.10. При взвешивании на неравноплечных весах, на одной чашке весов масса тела оказалась равна $m_1 = 3$ кг, а на другой - $m_2 = 3{,}4$ кг. Какова истинная масса тела?

11.11. Однородная балка массой M и длиной L подвешена на двух одинаковых веревках длиной $l (2l > L)$. Веревки прикреплены к концам балки и подвешены к потолку в одной точке. С какой силой сжимается балка?

11.12. Однородная доска массой M одним концом упирается в стену и наклонена к полу под углом α. Какую минимальную силу необходимо приложить к ее противоположному концу, чтобы удержать ее в таком положении?

11.13. Однородный стержень AB массой m подвешен горизонтально на двух вертикальных нитях. В точке C на расстоянии 1/4 длины стержня от конца A к стержню подвешен груз массой M (рис. 11.10). Определить силы натяжения нитей.

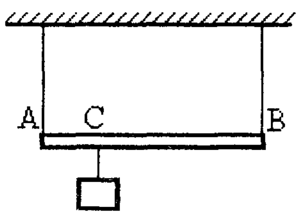

рис. 11.10

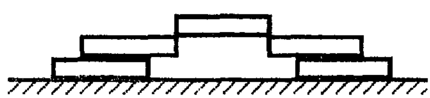

рис. 11.11

11.14. Какой максимальной длины мост можно построить из пяти плиточек домино способом, показанном на рис. 11.11. Длина одной плиточки равна l.

11.15. К верхней грани прямоугольного бруска прикладывают горизонтальную силу. Размеры бруска равны $a \times b$, его масса равна m (рис. 11.12). При какой силе брусок опрокинется? При каком значении коэффициента трения это возможно?

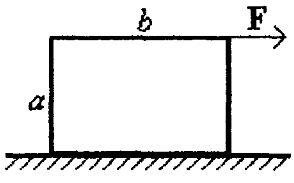

рис. 11.12

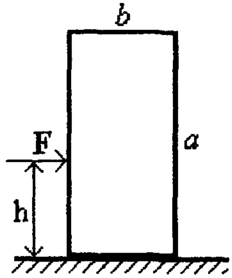

рис. 11.13

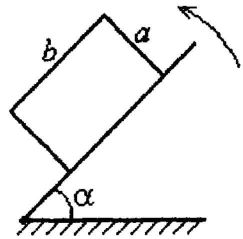

рис. 11.14

11.16. Прямоугольный брусок со сторонами a и b кладут меньшим основанием на шероховатый стол. Упираясь острием карандаша в боковую грань, пытаются сдвинуть брусок с места (рис. 11.13). При этом заметили, что, если $h < h_0$, то брусок сдвигается, а если $h > h_0$, то брусок опрокидывается. Определить коэффициент трения бруска о стол.

11.17. Прямоугольный брусок со сторонами a и b лежит на плоской доске. Доску поднимают за один конец (рис. 11.14). При каком значении угла наклона доски брусок опрокинется? При каком значении коэффициента трения это возможно?

11.18. На неподвижной ленте транспортера, наклоненной под углом α к горизонту, лежит ящик размерами $a \times b$ (рис. 11.15). Лента трогается с места с очень большим ускорением. При каком значении коэффициента трения ящик опрокинется? Рассмотреть случаи дви-

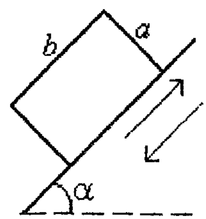

рис. 11.15

жения ленты вверх и вниз.

11.19. Лестница стоит, опираясь на гладкую стену. Коэффициент трения лестницы о пол равен μ. При каком минимальном значении угла наклона лестницы к полу она еще не скользит?

11.20. Однородный стержень АВ опирается о шероховатый пол и о гладкий выступ С. Угол наклона стержня к полу равен 45^0, расстояние $BC = 0{,}25AB$ (рис. 11.16). При каком коэффициенте трения возможно такое равновесия?

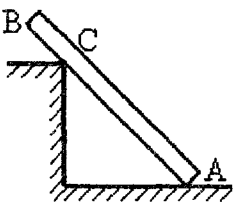

рис. 11.16

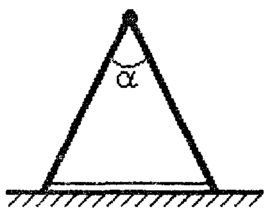

рис. 11.17

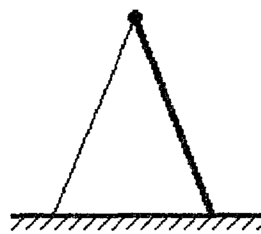

рис. 11.18

11.21. Легкая лестница стоит в углу, составляя с полом угол $\alpha = 60^0$. Коэффициент трения между лестницей и полом равен $\mu = 0{,}4$, а между лестницей и стеной трения нет. На какую высоту может по лестнице подняться человек, если длина лестницы равна $l = 3$ м? Массой лестницы пренебречь.

11.22. Лестница - стремянка состоит из двух одинаковых половинок, скрепленных вверху шарнирно. Масса каждой половинки равна М. Стремянку раскрывают на угол α и ставят на пол, а чтобы половинки не разъезжались внизу их связывают веревкой (рис. 11.17). Найти силу натяжения веревки. Трения нет.

11.23. На полу стоит лестница - стремянка. Одна часть у нее массивная, а другая невесомая (рис. 11.18). Нарисовать все силы, действующие на каждую часть стремянки.

11.24. Лестница - стремянка состоит из двух одинаковых по размерам половинок, соединенных вверху шарнирно. Массы половинок разные и равны m_1 и m_2. Половинки развели на угол 2α и поставили на гладкий пол, а чтобы половинки не разъезжались, их внизу связали веревкой. Найти силу натяжения веревки.

11.25. Лестница - стремянка состоит из двух половинок одинаковых по размерам, но разных по массе. Лестницу ставят на горизонтальный пол. На какой максимальный угол можно раздвинуть половинки, если коэффициент их трения о пол равен $\mu = 0{,}5$? Массы половинок равны $3m$ и m.

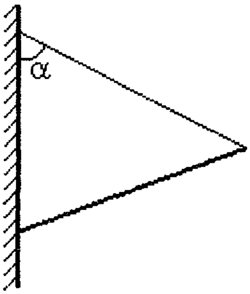

рис. 11.19

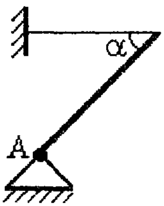

рис. 11.20

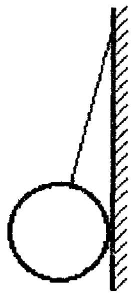

рис. 11.21

11.26. Однородный стержень одним концом упирается в вертикальную стену, а другой его конец удерживается с помощью нити, длина которой равна длине стержня (рис. 11.19). При каких значениях угла α стержень будет в равновесии, если коэффициент трения между ним и стеной равен $\mu = 0{,}3$?

11.27. Тонкий однородный стержень укреплен шарнирно в точке A и удерживается в равновесии горизонтальной нитью. Масса стержня равна $m = 1$ кг, угол $\alpha = 45^0$ (рис. 11.20). Найти величину силы реакции в шарнире.

11.28. Шар массы M и радиуса R висит на нити длиной L у вертикальной стены (рис. 11.21). Найти силу натяжения нити и силу давления шара на стену. Трения нет.

11.29. Цилиндр массой M и радиусом R удерживается

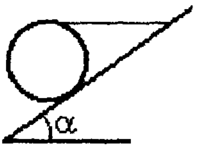

рис. 11.22

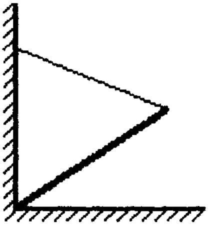

рис. 11.23

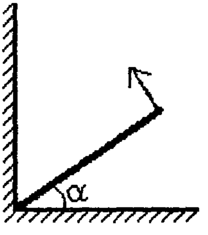

рис. 11.24

на наклонной плоскости намотанной на него нитью. Нить расположена горизонтально, угол наклона плоскости равен α (рис. 11.22). Найти силу натяжения нити. При каком значении коэффициента трения это возможно?

11.30. Балка удерживается в наклонном положении веревкой (рис. 11.23). Будет ли суммарная сила реакции, действующая на нижний конец балки, направлена вдоль нее?

11.31. Однородная доска массой M упирается в угол комнаты и удерживается под углом α к горизонту силой, приложенной к свободному концу доски и направленной перпендикулярно доске (рис. 11.24). С какой силой доска давит на стену?

11.32. От однородного стержня отрезали кусок длиной 40 см. На сколько сместился центр тяжести стержня?

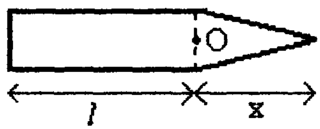

рис. 11.25

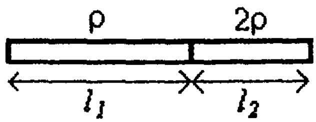

рис. 11.26

11.33. Какой должна быть высота x треугольной части тонкой однородной пластины, чтобы центр тяжести пластины находился в точке O (рис. 11.25)? Длина прямоугольной части равна l.

11.34. Стержень спаян из двух одинаковых по сечению стержней, изготовленных из материалов с плотностями ρ и 2ρ (рис. 11.26). При каком отношении длин стержней l_1/l_2 центр тяжести системы будет находиться в плоскости спая?

11.35. Из однородного диска радиусом R вырезано круглое отверстие радиусом r, центр которого находится на расстоянии 1/2R от центра диска. На каком расстоянии от центра диска находится центр тяжести системы?

11.36. В вершинах квадрата со стороной a находятся точечные массы: m, 2m, 3m и 4m. С квадратом связана сис-

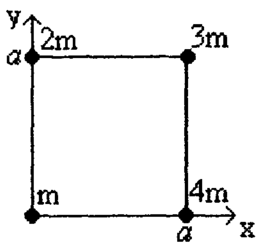

рис. 11.27

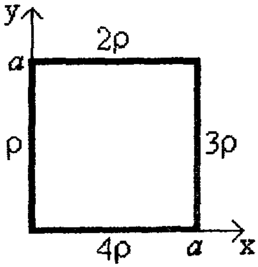

рис. 11.28

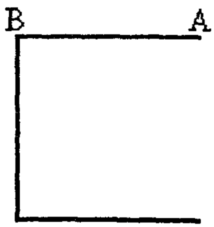

рис. 11.29

тема координат (рис. 11.27). Найти координаты центра тяжести системы.

11.37. Квадрат со стороной a составлен из четырех тонких стержней одинакового сечения, сделанных из разных материалов с плотностями: ρ, 2ρ, 3ρ и 4ρ. С квадратом связана система координат (рис. 11.28). Найти координаты центра тяжести системы.

11.38. Квадратная рамка изготовлена из однородной проволоки. У нее отрезали одну сторону. Найти угол между средней стороной и вертикалью, если рамку подвесить на нити за: а) вершину А; б) вершину В (рис. 11.29).

11.39. Стержень длиной l, составленный из двух половинок, висит на двух нитях длиной l (рис. 11.30). Какой угол составляет стержень с горизонтом в равновесии, если половинки изготовлены из материалов с плотностями ρ и 2ρ?

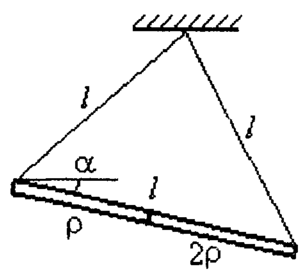

рис. 11.30

11.40. Проволочный прямоугольный треугольник с углом $\alpha = 30^0$ поставлен вертикально. По катетам треугольника без трения могут скользить две бусинки связанные нитью. Массы бусинок равны $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г. Определить силу натяжения нити и угол β в положении равновесия (рис. 11.31). Будет ли положение равновесия устойчивым?

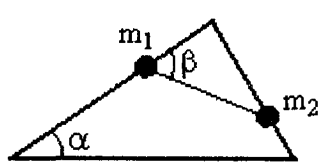

рис. 11.31

11.41. Две гладкие наклонные плоскости наклонены под углами

30^0 и 60^0 к горизонту и составляют двугранный угол. В этот угол кладут гладкий однородный стержень (рис11. 32). Какой угол будет составлять стержень с горизонтом в положении равновесия? Будет ли положение равновесия устойчивым?

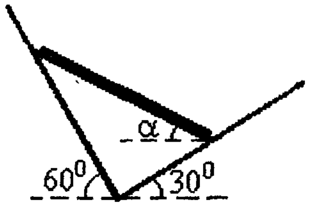

рис. 11.32

11.42. Однородная балка массой M и длиной L удерживается горизонтально двумя роликовыми упорами и может двигаться в горизонтальном направлении (рис. 11.33). Найти минимальную и максимальную силу давления балки на нижний упор, если расстояние между упорами по горизонтали равно l.

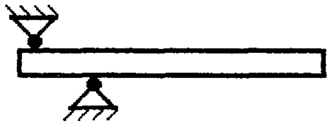

рис. 11.33

11.43. Диск насажен на горизонтальный вал. Радиус диска равен R = 20 см, а радиус вала - r = 2 см. Для того, чтобы стащить диск с вала, его нужно тянуть с силой F = 100 Н. Для облегчения этой операции к ободу диска прикладывают касательную силу F_1 = 8 Н и одновременно тянут его с силой F_2. При каком значении F_2 диск начнет сниматься с вала?

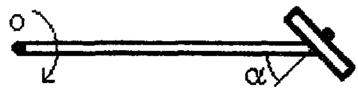

рис. 11.34

11.44. Невесомый стержень длиной l вращается с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси O, проходящей через один из его концов. На другом конце стержня укреплен диск, который катится по горизонтальной поверхности (рис. 11.34). Масса диска m, коэффициент трения между диском и поверхностью μ. Найти момент силы на оси O. Ось диска составляет угол α со стержнем.

11.45. Тележка приводится в движение пружиной как показано на рис. 11.35. В начальном состоянии тележка удерживается нитью, а пружина растянута силой F. Точка крепления пружины к колесу находится на расстоянии l над центром колеса. Радиус колеса тележки равен R, а масса тележки - m. С каким ускорением начнет двигаться тележка, если перерезать нить? Массой колес пренебречь. Считать, что колеса не проскальзывают.

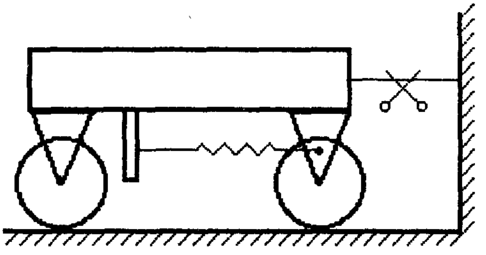

рис. 11.35

11.46. Однородный прямоугольный ящик лежит на гладкой горизонтальной поверхности на двух опорах. Ящик начинают тянуть горизонтальной силой, приложенной в точке A (рис. 11.36). Какая из опор при этом сильнее давит на поверхность? А если сила приложена в точке B?

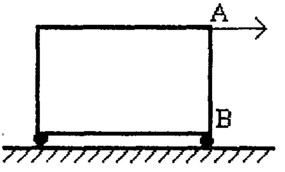

рис. 11.36

11.47. В задаче № 11.46 высота ящика равна a, длина - b, а масса - m. Горизонтальную силу прикладывают сначала в точке A, а затем в точке B. При каком значении силы одна из опор оторвется от поверхности?

11.48. Автомобиль имеет две оси, расстояние между которыми равно l. Центр масс автомобиля расположен посередине между осями и на высоте h над землей. Какое максимальное ускорение может развить автомобиль, если ведущая ось: а) задняя; б) передняя? Коэффициент трения между колесами и дорогой равен μ, размерами и массой колес пренебречь.

11.49. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска, прижатая однородным стержнем. Стержень наклонен к горизонту под углом α, а верхний конец его шарнирно закреплен (рис. 11.37). Для того, чтобы вытащить доску из под стержня, к ней надо приложить горизонтальную силу F_1, направленную влево, или - F_2, направленную вправо.

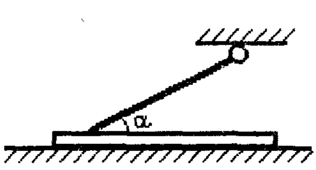

рис. 11.37

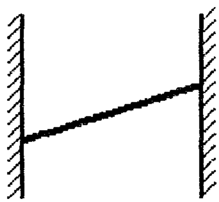
рис. 11.38

Найти коэффициент трения между доской и стержнем. При каком значении коэффициента трения доску невозможно будет вытащить вправо?

11.50. Какой максимальной длины доску можно забить между двумя вертикальными стенами (рис. 11.38). Расстояние между стенами равно l, коэффициент трения между ними и доской равен μ, массой доски пренебречь.

11.51. Ящик размерами $a \times b$ стоит с одной стороны на колесиках, а с другой - на жестком упоре. Ящик ставят на наклонную плоскость колесиками вниз (рис. 11.39). При этом он начинает скатываться, когда угол наклона плоскости равен $\alpha=15^0$. При каком угле наклона начнет скатываться ящик, если его поставят на наклонную плоскость колесиками вверх? Принять $b = 2a$. Размерами колес и упоров пренебречь

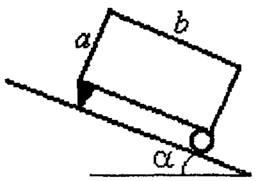

рис. 11.39

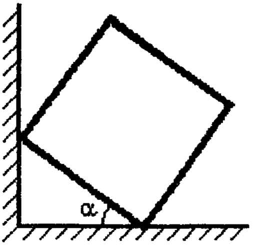

рис. 11.40


рис. 11.41

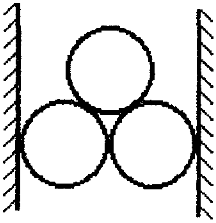
рис. 11.42

11.52. Кубик стоит наклонно в углу комнаты (рис. 11.40). При каком наименьшем значении угла α возможно такое равновесие, если коэффициент трения везде одинаков и равен μ?

11.53. Два одинаковых однородных стержня соединены шарнирно и лежат на гладком горизонтальном цилиндре, радиус которого равен R (рис. 11.41). В положении равновесия угол между стержнями равен 90^0. Какова длина стержней? Устойчиво ли такое положение равновесия?

11.54. Три одинаковых цилиндра сложены вместе и находятся между двумя вертикальными стенами, удерживаясь силами трения (рис. 11.42). Считая коэффициент трения везде одинаковым, найти при каком минимальном значении коэффициента трения возможно такое равновесие?

11.55. Три одинаковых цилиндра массой m каждый лежат как показано на рис. 11.43. Поверхность и цилиндры гладкие. Чтобы цилиндры не разъехались, их связали веревкой. Найти силу натяжения веревки. Считать, что нижние цилиндры не давят друг на друга.

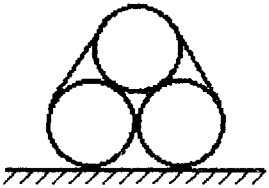

рис. 11.43

11.56. Невесомый обруч, к которому прикреплен небольшой грузик, стоит на доске, движущейся с горизонтальным ускорением a (рис. 11.44). Угол α известен и постоянен. Найти ускорение. Обруч по доске не скользит.

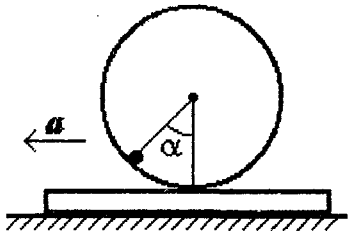

рис. 11.44

12. Механика твердого тела. Момент импульса

12.1. Легкая металлическая бочка, полностью заполненная водой, скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости. Как изменится ускорение бочки если вода замерзнет?

12.2. Тонкий обруч раскрутили до угловой скорости ω и вертикально поставили на горизонтальную поверхность. Какая угловая скорость будет у обруча в установившемся движении?

12.3. Чему равна кинетическая энергия тонкого обруча массой m, катящегося по горизонтальной поверхности со скоростью v?

12.4. Тонкий обруч скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости с углом наклона α. Найти ускорение центра обруча. Каким должен быть коэффициент трения, чтобы не было проскальзывания?

12.5. Тонкий обруч радиусом R раскрутили до угловой скорости ω и плашмя положили на стол. Через время t обруч остановился. Определить коэффициент трения между обручем и столом.

12.6. Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 находятся на расстоянии l друг от друга. Определить момент инерции системы относительно ее центра масс.

12.7. Определить момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через середину стержня и составляющей угол α со стержнем. Длина стержня равна l, его масса - m.

12.8. Прямоугольник со сторонами a и b сделан из однородной проволоки. Масса единицы длины проволоки равна μ. Определить момент инерции прямоугольника относительно оси, совпадающей со стороной, длина которой равна a.

12.9. Система состоит из двух, скрепленных между собой, однородных, взаимно перпендикулярных стержней массами m_1 и m_2 и длиной l_1 и l_2. Найти момент инерции системы относительно оси , проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости системы (рис. 12.1).

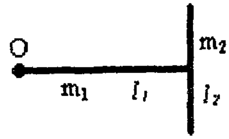

рис. 12.1

12.10. Система состоит из двух, скрепленных между собой, однородных, взаимно перпендикулярных стержней массами m_1 и m_2 и длиной l_1 и l_2. Найти момент инерции системы относительно оси , проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости системы (рис. 12.2).

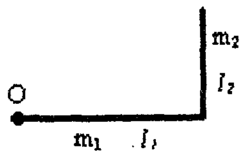

рис. 12.2

12.11. Из однородного диска радиусом R вырезано круглое отверстие радиусом r. Расстояние между центрами диска и отверстия равно a, а масса фигуры - m. Определить момент инерции фигуры относительно оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его плоскости.

12.12. Из однородной проволоки сделан правильный треугольник. Масса стороны треугольника равна m, его длина равна l. Определить момент инерции треугольника относительно оси: а) проходящей через центр треугольника и перпендикулярной его плоскости; б) совпадающей с одной из сторон треугольника; в) проходящей через вершину и параллельной противоположной стороне треугольника.

12.13. Однородный шар скатывается с наклонной плоскости с углом наклона α. Найти ускорение центра шара. Каким должен быть коэффициент трения, чтобы шар не скользил?

12.14. В вагоне, движущемся с постоянной скоростью v, к потолку шарнирно подвешен стержень длиной l. На какой максимальный угол от вертикали отклонится стержень, если вагон резко остановить?

12.15. Однородный тонкий стержень длиной l поставили вертикально на горизонтальную гладкую поверхность, слегка вывели из положения равновесия и отпустили. Какую скорость будет иметь верхний конец стержня в момент удара стержня о поверхность?

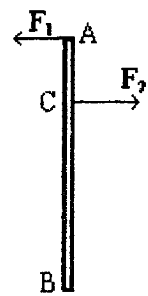

рис. 12.3

12.16. Тонкий стержень AB массой m = 1 кг движется поступательно с ускорением a = 1 м/с^2 под действием двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 12.3). Расстояние между точками приложения сил AC = 20 см. Сила F_2 = 5 Н. Найти длину стержня.

12.17. Неподвижный блок представляет собой однородный цилиндр массой m, подвешенный на нити к потолку. На цилиндр намотана нить, к которой подвешен груз такой же массы m (рис. 12.4). Найти силу натяжения верхней нити при свободном движении системы. Трения нет.

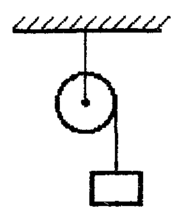

рис. 12.4

12.18. На однородный диск массой m намотана нить. Свободный конец нити привязали к потолку и диск отпустили. Определить силу натяжения нити в процессе опускания диска. Считать, что нить все время вертикальна (рис. 12.5).

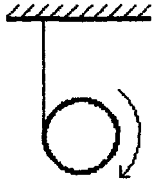
рис. 12.5

12.19. Однородный стержень массой m подвешен горизонтально за концы на двух вертикальных нитях. Одна из нитей обрывается. Какова сила натяжения второй нити в момент обрыва.

12.20. Неподвижный блок представляет собой однородный цилиндр массой m. Через блок перекинута невесомая нить, к концам которой привязаны грузы массами m_1 и m_2. Определить ускорение грузов и силу натяжения нити слева и справа от блока при свободном движении системы. Проскальзывания нити и трения в блоке нет.

12.21. На однородный цилиндр массой m и радиусом R, лежащий на горизонтальной поверхности, намотана тонкая нить. За нить тянут горизонтальной силой F (рис. 12.6). При каком значении коэффициента трения цилиндр не будет проскальзывать по поверхности?

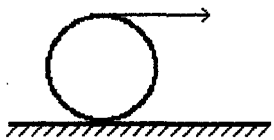
рис. 12.6

12.22. Однородный цилиндр лежит на горизонтальной поверхности. Второй такой же цилиндр катится на первый со скоростью v. Оси цилиндров параллельны. Между цилиндрами происходит абсолютно упругий удар. Определить конечные установившиеся скорости движения цилиндров.

12.23. Тонкостенную трубу радиусом R раскрутили вокруг оси до угловой скорости ω и положили в угол между полом и стеной параллельно ребру угла (рис. 12.7). Коэффициент трения между трубой и стеной равен μ, а между трубой и полом - 2μ. Сколько оборотов сделает труба до остановки?

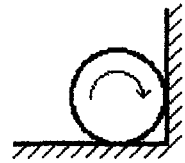

рис. 12.7

12.24. Горизонтально расположенный деревянный стержень массой M и длиной l может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает и застревает в нем пуля массой m, летящая со скоростью v перпендикулярно стержню и оси его вращения. С какой угловой скоростью начнет вращаться стержень?

12.25. По гладкой горизонтальной поверхности по окружности движется небольшое тело, привязанное к нити. Нить продета в маленькое отверстие в поверхности. Нить начинают медленно втягивать в отверстие, уменьшая радиус окружности движения тела. Как зависит сила натяжения нити от радиуса окружности? Масса тела равна m. Считать, что при радиусе равном R_0 угловая скорость движения тела была равна ω_0.

12.26. На массивный неподвижный блок в виде цилиндра радиусом R намотана нить, к свободному концу которой подвешен груз массой m (рис. 12.4). В момент $t = 0$ систему отпускают. Написать зависимость момента импульса системы относительно оси блока от времени. Трения нет.

12.27. Стержень, расположенный горизонтально, падает без начальной скорости с высоты h и ударяется одним концом о край стола (рис. 12.8). Определить скорость центра масс стержня сразу после удара. Удар абсолютно упругий.

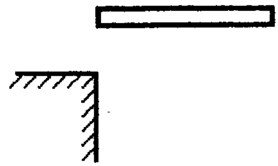

рис. 12.8

12.28. Шарик массой m влетает в спиральный лабиринт, который может свободно двигаться в пространстве, и останавливается в его центре (рис. 12.9). Начальная скорость шарика равна v, радиус лабиринта R, масса лабиринта M, его момент инерции J. Определить угловую скорость вращения лабиринта после того как шарик остановится. Размерами шарика и внешними силами пренебречь.

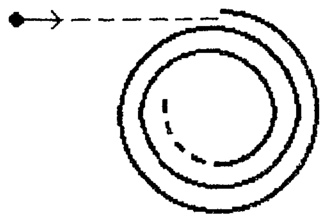

рис. 12.9

12.29. Два диска, имеющие моменты инерции J_1 и J_2, вращаются на одной оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Диски прижимают друг к другу. Определить установившуюся угловую скорость вращения и количество теплоты, выделившееся при трении дисков.

12.30. Тонкий стержень длиной l и массой M стоит вертикально на гладкой горизонтальной поверхности. В его верхний конец попадает горизонтально летящая пуля массой m ($m \ll M$) и застревает в нем. При какой минимальной скорости пули стержень сразу оторвется от поверхности?

13. Гидростатика

13.1. Жидкость в цилиндрическом сосуде сжимается поршнем. Сила приложенная к поршню равна F, а площадь сечения сосуда S (рис. 13.1). Найти давление в жидкости. Атмосферным давлением, а также весом поршня и жидкости пренебречь. Изменится ли давление в жидкости, если нижняя часть поршня будет иметь более сложную форму?

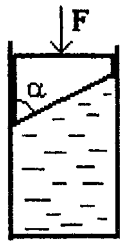

рис. 13.1

13.2. Жидкость находиться между двумя поршнями площадью S_1 и S_2. На большой поршень действует сила F (рис. 13.2). Пренебрегая атмосферным давлением, найти давление в жидкости.

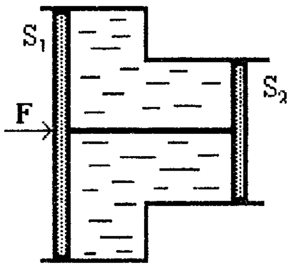

рис. 13.2

13.3. В U - образной трубке находится ртуть. На сколько повысится уровень ртути в одном колене, если в другое налить столб воды высотой H = 136 мм?

13.4. Три одинаковых вертикальных сосуда соединены в систему из трех сообщающихся сосудов. В систему залили ртуть. На сколько повысится уровень ртути в среднем сосуде, если в один из крайних налить слой воды высотой H_1 = 102 мм, а в другой - слой воды высотой H_2 = 153 мм.

13.5. Два сообщающихся сосуда, площади сечения которых равны S_1 и S_2, закрыты невесомыми поршнями. Под поршнями находится жидкость с плотностью ρ. На сколько поднимется один из поршней, если на другой поставить гирьку массой m?

13.6. Концы U - образной трубки на l = 26 см выше уровня ртути. Какой максимальной высоты столб воды можно налить в одно из колен трубки?

13.7. На первом этаже здания давление воды в водопроводе равно 1 атм. На каком этаже вода из крана уже не течет, если высота каждого этажа равна 3 м?

13.8. В цилиндрический сосуд налили две несмешивающиеся жидкости в равных по массе количествах. Плотности жидкостей равны ρ_1 = 1 г/см^3 и ρ_2 = 0,9 г/см^3, а общая высота слоя жидкостей равна H = 40 см. Найти давление жидкостей на дно сосуда. Атмосферное давление не учитывать.

13.9. Тело плавает в воде, погрузившись в нее на 3/4 своего объема. Найти плотность материала тела.

13.10. Тело плавает в воде, погрузившись в нее на α = 0,75 своего объема. Какая часть объема тела будет погружена в спирт, плотность которого равна $\rho_{сп}$ = 0,8 г/см^3?

13.11. Два тела: одно плотностью ρ_1 = 1,5 г/см^3 и объемом V_1 = 0,5 см^3; второе плотностью ρ_2 = 0,5 г/см^3 и объемом V_2 = 1,5 см^3 связали вместе и опустили в воду. Какая часть их общего объема будет погружена в воду?

13.12. Вес тела в жидкости с плотностью ρ_1 равен P_1, а в жидкости с плотностью ρ_2 равен P_2. Найти плотность тела.

13.13. Тело весом P, погруженное в жидкость с плотностью ρ_1, весит P_1, а погруженное в жидкость с неизвестной плотностью ρ_2, весит P_2. Найти ρ_2.

13.14. Тело плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). При этом отношение объемов, погруженных в верхнюю и в нижнюю жидкости, равно $V_1/V_2 = n$. Определить плотность тела.

13.15. В цилиндрической банке высота уровня воды составляет h_0 = 15 см. Когда в нее опустили плавать пустую латунную чашку, уровень воды поднялся на Δh = 2,1 см. Какова будет высота уровня воды в банке, если чашку утопить? Плотность латуни равна $\rho_л$ = 8,4 г/см^3.

13.16. Кусок сплава меди и серебра весит в воздухе P = 2,94 Н, а в воде - P_1 = 2,65 Н. Сколько серебра и меди в куске? Плотности: меди - $\rho_м$ = 8,9 г/см^3, серебра - $\rho_с$ = 10,5 г/см^3.

13.17. Посередине большого озера просверлили прорубь. Толщина льда оказалась 8 м. Какой наименьшей длины веревку необходимо взять, чтобы зачерпнуть воду из проруби?

13.18. На границе раздела двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 плавает тело с плотностью ρ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Какая часть объема тела находится в верхней жидкости?

13.19. Бревно длиной L = 3,5 м и поперечным сечением S = 0,04 м^2 плавает в воде. Какую наибольшую массу может иметь человек, чтобы бревно не утонуло, когда человек встанет на него? Плотность дерева $\rho_д$ = 500 кг/м^3.

13.20. Тело массой m, утонувшее в жидкости с плотностью ρ_1, давит на дно с силой F. Какая часть тела будет погружена в жидкость с плотностью ρ_2, на поверхности которой оно плавает?

13.21. Шар массой 1 кг наполовину погружен в воду и давит на дно с силой 8 Н. Найти плотность материала шара.

13.22. Шар плавает в воде, погрузившись в нее на 3/4 своего объема. Какая часть шара должна выступать из воды, чтобы сила его давления на дно равнялась половине силы тяжести шара?

13.23. Льдина площадью 2 м^2 плавает в воде. Когда на нее встал человек массой 70 кг высота верхнего края льдины над водой уменьшилась вдвое. Какова толщина льдины?

13.24. Каким должен быть объем полости железного буя, для того чтобы он мог плавать на поверхности воды? Объем буя V, плотности железа и воды - $\rho_ж$ и $\rho_в$.

13.25. Для взятия пробы грунта на дно океана на стальном тросе опускается прибор. Найти предельную глубину погружения, если предел прочности стали на разрыв $\sigma = 4{,}8 \cdot 10^8$ Н/м^2. Плотность стали $\rho_{ст} = 7800$ кг/м^3. Массой прибора пренебречь.

13.26. В цилиндрическом стакане с водой плавает льдинка, привязанная нитью ко дну (рис. 13.3). Когда льдинка растаяла уровень воды понизился на Δh. Каково было начальное натяжение нити? Площадь дна стакана равна S.

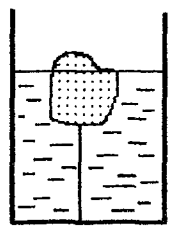

рис. 13.3

13.27. На чашках погруженных в воду равноплечных весов находятся алюминиевый и железный шары одинаковой массы m. Определить массу сплошного шара из меди, который необходимо добавить для восстановления равновесия. Плотности алюминия, желѐза и меди: $\rho_а$, $\rho_ж$ и $\rho_м$.

13.28. К концу однородной палочки массой $m = 4$ г подвешен на нити шар радиусом $r = 0,5$ см. Палочка лежит на краю стакана (рис 13.4). В равновесии шар погружен в воду ровно наполовину. В каком отношении делится палочка точкой опоры? Плотность шара $\rho = 2,7$ г/см^3.

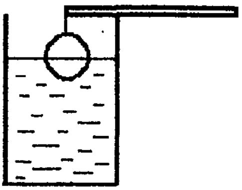

рис. 13.4

13.29. В бак с жидкостью опущена длинная трубка диаметром d, к которой снизу плотно прилегает цилиндрический диск толщиной h и диаметром D (рис. 13.5). Плотность диска $\rho_д$ больше плотности жидкости $\rho_ж$. На какой глубине диск оторвется, если трубку медленно вытаскивать из жидкости?

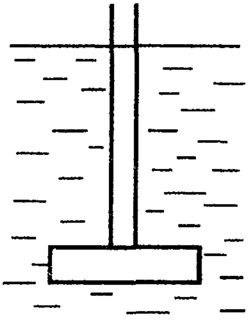

рис. 13.5

13.30. Деревянный шарик, падая с высоты $h_1 = 60$ см, погрузился в воду на глубину $h_2 = 60$ см. На какую высоту выпрыгнет из воды этот шарик? Сопротивление воды считать постоянным, плотность дерева равна $\rho_д = 0,8$ г/см^3.

13.31. Два цилиндрических сообщающихся сосуда частично заполнены водой. В один из сосудов опускают тело массой m, которое плавает на поверхности. На сколько повысится уровень воды в сосудах? Площади сечения сосудов равны S_1 и S_2.

13.32. В цилиндрический сосуд массой M и площадью дна S налита вода до уровня h. Вода сверху закрыта поршнем, в котором имеется крючок. Каким будет давление под поршнем, если сосуд приподнять за этот крючок (рис. 13.6)? Атмосферное давление равно P_A.

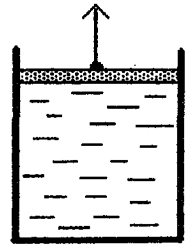

рис. 13.6

13.33. Первый шарик всплывает в воде с постоянной установившейся скоростью v_0. Второй такой же по размеру шарик тонет в воде с постоянной установившейся скоростью $2v_0$. С какой постоянной установившейся скоростью будут тонуть эти шарики, если связать их нитью? Считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости.

13.34. Цилиндрический сосуд массой M и высотой h поставлен дном вверх на ровную горизонтальную резиновую поверхность. В дне сосуда имеется маленькое отверстие, в которое вставлена длинная тонкая трубка (рис. 13.7). Через трубку сосуд заполняется водой. До какой максимальной высоты можно в трубку налить воду? Площадь дна сосуда равна S.

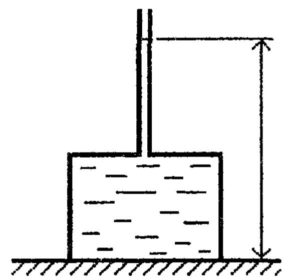

рис. 13.7

13.35. Полая тонкая полусфера массой M и радиусом R лежит на ровной горизонтальной резиновой поверхности. В верхней части полусферы имеется маленькое отверстие, в которое вставлена длинная тонкая трубка (рис. 13.8). Через трубку полусфера заполняется водой. До какой максимальной высоты можно налить в трубку воду?

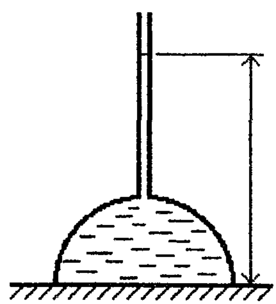

рис. 13.8

13.36. Легкий стержень свободно висит, касаясь нижним концом поверхности воды. Верхний конец стержня закреплен шарнирно (рис. 13.9). Вода начинает прибывать и ее уровень поднимается. Как зависит угол отклонения стержня от вертикали от высоты поднятия уровня воды? Длина стержня равна l, плотность стержня в n раз меньше плотности воды. Высота поднятия уровня воды отсчитывается от ее начального уровня.

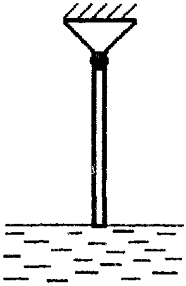

рис. 13.9

13.37. Два цилиндрических сообщающихся сосуда соединены двумя трубками с кранами (рис. 13.10). Сначала краны открыты и в сосуды наливают жидкость. Затем краны закрывают и жидкость в сосуде 2 нагревают, в результате чего уровень жидкости в этом сосуде слегка повысился. Куда потечет жидкость, если открыть: а) кран K_1; б) кран K_2; в) оба крана?

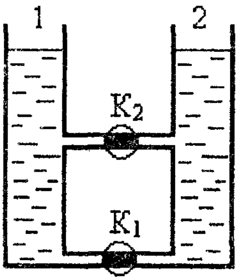

рис. 13.10

13.38. Два расширяющихся кверху сосуда соединены трубкой с краном и заполнены жидкостью (рис. 13.11). Сначала кран открыт. Затем его закрывают и жидкость в сосуде 2 нагревают, в результате чего уровень жидкости в нем слегка повысился. Куда потечет жидкость, если кран открыть?

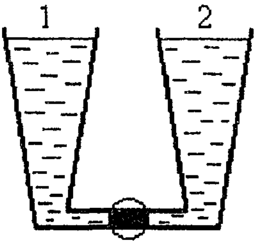

рис. 13.11

13.39. Два одинаковых по размеру шарика массами m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$) связаны нитью и тонут в воде с постоянной скоростью. Определить силу натяжения нити.

13.40. Однородная палочка, шарнирно прикрепленная к стенке бассейна, высовывается из воды на 0,1 своей длины (рис. 13.12). Найти плотность материала палочки.

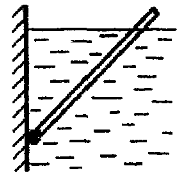

рис. 13.12

13.41. Какую работу необходимо совершить, чтобы утопить плоскую льдину массой M = 1000 кг и площадью S = 2 м^2?

13.42. В цилиндрический сосуд с площадью дна S налита жидкость плотностью ρ. Сверху непосредственно на жидкости лежит массивный поршень с пробкой (рис. 13.13). Поршень и пробка сделаны из одного материала, имеют одинаковую толщину h и могут двигаться без зазора и без трения. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить пробку? Площадь пробки равна S_1.

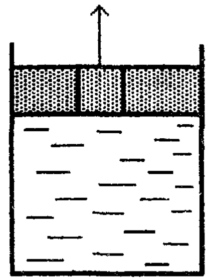

рис. 13.13

13.43. До какой высоты надо налить воду в цилиндрический сосуд радиусом R, чтобы силы давления воды на дно и на боковую поверхность были равны?

13.44. Однородная деревянная рейка массой m и длиной l плавает в воде между двумя вертикальными стенками (рис. 13.14). Расстояние между стенками $d < l$, а отношение плотностей рейки и воды равно $\alpha < 1$. С какой силой рейка давит на стенки? Трения нет.

13.45. Кубик, сделанный из материала, плотность которого вдвое меньше плотности воды, плавает в воде. Какое из двух показанных положений кубика будет устойчивым (рис. 13.15)?

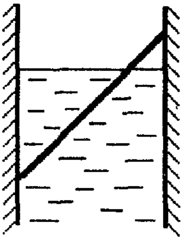

рис. 13.14

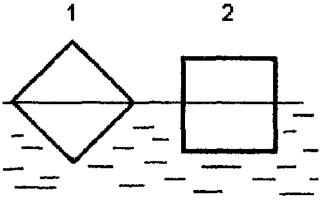

рис. 13.15

13.46. Внутри вертикального узкого стакана стоит вертикальная пружина, длина которой равна высоте стакана. Если в стакан поставить однородный стержень, длина которого тоже равна высоте стакана, то четвертая часть его будет высовываться из стакана (рис. 13.16). Если в стакан доверху налить воду, то из стакана будет высовываться половина стержня. Найти плотность материала стержня.

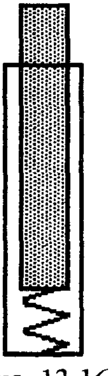

рис. 13.16

13.47. Однородный стержень плотностью ρ плавает на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). При каком соотношении между плотностями устойчивым положением стержня будет вертикальное?

13.48. В воде плавает доска массой М. Плотность доски вдвое меньше плотности воды. Когда на конец доски села лягушка, верхний край доски с этого конца опустился как раз до уровня воды. Найти массу лягушки.

13.49. Воздушный шар опускается с постоянной скоростью. Когда из него выбросили груз массой m, он начал подниматься с той же постоянной скоростью. Найти силу сопротивления воздуха при этой скорости.

13.50. Воздушный шар опускается с постоянной скоростью. Общая масса оболочки и груза равна M, объем оболочки - V, плотность воздуха - $\rho_в$, плотность газа в оболочке - $\rho_г$. Какой массы груз надо выбросить, чтобы шар начал подниматься с той же постоянной скоростью? Считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости.

13.51. В вертикальном цилиндрическом сосуде, доверху заполненном водой и закрытом крышкой, на нитях висят два шарика: сверху стальной; снизу пробковый (рис. 13.17). Как будут вести себя шарики, если сосуд начнут медленно раскручивать вокруг его оси?

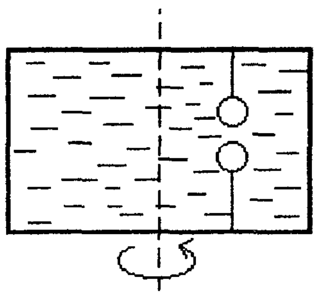

рис. 13.17

13.52. Три одинаковых бревна плавают в воде между вертикальными стенками канала. Расстояние между стенками слегка больше удвоенного диаметра бревен, а верхние бревна погружены в воду ровно наполовину (рис. 13.18). С какой силой бревна давят на стенки канала, если масса каждого бревна равна m? Трения нет.

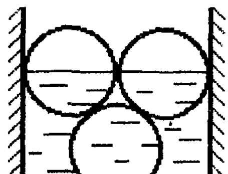

рис. 13.18

13.53. Большая плоская льдина плавает в воде. В льдине просверлили прорубь площадью S = 300 см^2. Вода в проруби оказалась на глубине h = 10 см. Какое максимальное количество масла можно налить в прорубь? Плотность масла равна $\rho_м = 800$ кг/м^3.

13.54. Два шарика, сделанные из одного материала, имеют объемы: V и 3V. Шарики связали невесомой нитью, перекинутой через неподвижный блок, и отпустили над поверхностью воды. Когда один из шариков погрузился в воду ускорение системы изменилось на противоположное. Найти плотность материала шариков. Сопротивление воды и трение не учитывать.

13.55. Тело массой m тонет в воде с ускорением *a*. С какой силой его надо тянуть вверх, чтобы оно поднималось с тем же ускорением? Сопротивление не учитывать.

13.56. Тонкий однородный стержень длиной l = 1 м, сделанный из материала с плотностью $\rho = 0{,}91$ г/см^3, шарнирно прикреплен к стенке бассейна и опирается на дно так, что составляет угол $\alpha = 60^0$ с вертикалью (рис. 13.19). В бассейн начинают наливать воду. При какой высоте уровня воды стержень перестанет давить на дно?

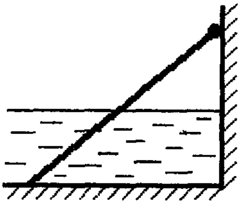

рис. 13.19

13.57. Цилиндрический сосуд радиусом R, заполненный жидкостью с плотностью ρ, вращается вокруг своей вертикальной оси с угловой скоростью ω. В сосуде находится маленький шарик радиусом r и плотностью 2ρ ($r \ll R$). С какой силой шарик давит на боковую поверхность сосуда?

13.58. Аквариум с водой на колесиках скатывается с наклонной плоскости без трения. Как располагается уровень поверхности воды при установившемся скатывании?

14. Механические колебания

14.1. Воронка с песком подвешена на нити. Будет ли изменяться период колебаний воронки по мере высыпания песка?

14.2. Груз на пружине колеблется в кабине лифта. Изменится ли период колебаний груза, если лифт начнет подниматься с ускорением?

14.3. Маятниковые часы немного спешат. Что нужно сделать чтобы они шли верно: опустить их в шахту или поднять на гору?

14.4. Вода, которую несут в ведре, начинает сильно расплескиваться. Как, не останавливаясь, прекратить расплескивание воды?

14.5. Груз массой m совершает колебания на вертикальной пружине жесткостью k. Являются ли эти колебания гармоническими и каков период их колебаний?

14.6. Груз массой m висит на пружине жесткостью k. В момент $t = 0$ грузу толчком сообщили скорость v вдоль оси пружины. Написать зависимости от времени: смещения $x(t)$, скорости $v_x(t)$ и ускорения $a_x(t)$ груза.

14.7. Зная амплитуду A и максимальное значение скорости v_{max}, найти круговую частоту гармонических колебаний.

14.8. Зная амплитуду скорости v_{max} и амплитуду ускорения a_{max}, найти амплитуду смещения и круговую частоту гармонических колебаний.

14.9. Какая была длина математического маятника, если при уменьшении его длины на 5 см частота колебаний увеличилась в 1,5 раза?

14.10. Один математический маятник имеет период колебаний 3 с, а другой - 4 с. Каков период колебаний маятника, длина которого равна сумме длин указанных маятников?

14.11. Какую часть периода груз маятника находится в пределах 1 см от положения равновесия, если амплитуда его колебаний равна 2 см?

14.12. Во сколько раз время прохождения гармонически колеблющейся точкой первой половины амплитуды меньше времени прохождения второй половины амплитуды?

14.13. Точка совершает гармонические колебания вдоль прямой. Зная, что максимальная скорость точки равна 10 м/с, найти среднюю скорость ее движения.

14.14. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса на расстоянии $(1/2)l$ от нее в стену вбит гвоздь (рис. 14.1). Каков период колебаний маятника?

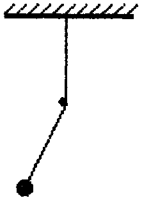

рис. 14.1

14.15. Брусок массой m совершает горизонтальные гармонические колебания с амплитудой A на пружине жесткости k. На расстоянии 1/2A от положения равновесия установили массивную плиту, от которой брусок абсолютно упруго отскакивает. Каким стал период колебаний?

14.16. Груз висит на резинке. Может ли такая система совершать вертикальные гармонические колебания с амплитудой 2 см и частотой 5 Гц?

14.17. Груз массой M совершает вертикальные колебания на пружине жесткостью k с амплитудой A. Когда груз находился в крайнем нижнем положении на него положили тело массой m, в результате чего колебания прекратились. Найти m.

14.18. Брусок массой M = 2 кг лежит на гладкой горизонтальной поверхности и соединен с вертикальной стенкой горизонтальной пружиной жесткости k = 2 Н/см. Пуля массой m = 10 г, летящая горизонтально вдоль пружины со скоростью v = 200 м/с, попадает в брусок и застревает в нем. Написать уравнение x(t) возникших колебаний. Положение равновесия принять за x = 0.

14.19. На гладкой горизонтальной поверхности находится брусок массой M, связанный с вертикальной стеной пружиной жесткости k. На бруске лежит второй брусок массой m. Систему отклоняют от положения равновесия и она начинает совершать гармонические колебания. При какой максимальной амплитуде колебаний они будут еще гармоническими, если коэффициент трения между брусками равен μ?

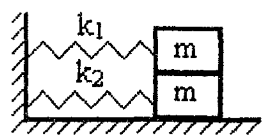

рис. 14.2

14.20. Два одинаковых бруска массой m каждый лежат один на другом и связаны пружинами жесткостью k_1 и k_2 с вертикальной стенкой (рис. 14.2). Система совершает горизонтальные колебания по гладкой горизонтальной поверхности. При какой максимальной амплитуде колебаний бруски еще не будут скользить друг по другу, если коэффициент трения между ними равен μ? Положения равновесия для пружин совпадают.

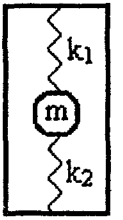

рис. 14.3

14.21. В представленной на рис. 14.3 системе период вертикальных колебаний тела равен T. Каким будет период колебаний, если систему перевернуть на 180^0 сверху вниз?

14.22. Груз массой m висит на двух пружинах, жесткости которых равны k_1 и k_2. Пружины соединены: а) последовательно; б) параллельно (рис. 14.4). Каков период колебаний системы?

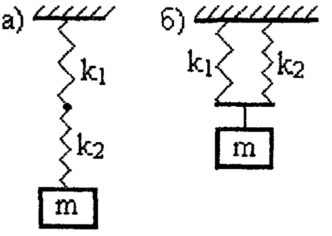

рис. 14.4

14.23. От груза, висящего на пружине жесткости k, отваливается часть массой m. На какую максимальную высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза?

14.24. Тело, висящее на пружине, имело период вертикальных колебаний T_1. Когда массу тела изменили, период колебаний стал равен T_2. На сколько сместилось при этом положение равновесия?

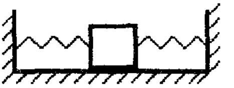
рис. 14.5

14.25. Груз имеет массу $m = 1$ кг, а пружины - жесткость $k = 2500$ Н/м (рис. 14.5). Какой будет амплитуда колебаний груза, если его отклонить от положения равновесия на $l = 3$ см и сообщить ему скорость $v = 2$ м/с?

14.26. Тело массой m_1 совершает горизонтальные гармонические колебания на пружине с амплитудой A_1. Когда оно проходит положение равновесия, на него вертикально падает тело массой m_2 и прилипает. Найти новую амплитуду колебаний.

14.27. Точка совершает гармонические колебания. При смещении точки от положения равновесия на $x_1 = 2{,}4$ см ее скорость равна $v_1 = 3$ см/с, а при смещении на $x_2 = 2{,}8$ см скорость равна $v_2 = 2$ см/с. Найти амплитуду и период колебаний точки.

14.28. Уравнения колебаний имеет вид: $x(t) = A \cdot \sin\omega t$. Известно, что при фазе колебания $\varphi_1 = \pi/6$ смещение равно $x_1 = 2$ см. Определить амплитуду колебаний и смещение при фазе $\varphi_2 = 3/4\pi$.

14.29. Точка совершает гармонические колебания. В момент $t_0 = 0$ координата точки равна $x_0 = 25$ см, а скорость - $v_0 = 100$ см/с. Определить координату и скорость точки в момент $t = 2{,}4$ с, если круговая частота колебаний равна $\omega = 4$ $с^{-1}$. В положении равновесия $x = 0$.

14.30. Точка совершает гармонические колебания по закону: $x(t) = A \cdot \sin\omega t$. В некоторый момент смещение точки от положения равновесия равно $x_1 = 5$ см. При увеличении фазы колебаний вдвое смещение стало равно $x_2 = 8$ см. Найти амплитуду колебаний.

14.31. Точка совершает гармонические колебания. При этом на расстояниях x_1 и x_2 от положения равновесия скорость точки равна v_1 и v_2. Определить амплитуду и круговую частоту колебаний точки.

14.32. Когда груз неподвижно висит на пружине он растягивает ее на 5 см. Каков период колебаний груза на этой пружине?

14.33. К динамометру подвесили груз. При этом возникли колебания с частотой 2 Гц. На каком расстоянии от нулевой отметки остановится указатель динамометра, когда колебания прекратятся?

14.34. Тело массой m совершает горизонтальные гармонические колебания на пружине жесткостью k с амплитудой A. Определить максимальную мощность, развиваемую силой упругости пружины.

14.35. Тело может совершать горизонтальные гармонические колебания на пружине. Тело отклонили от положения равновесия и отпустили. Найти отношение кинетической энергии системы к потенциальной через время t после начала колебаний, если их период равен T. Массой пружины пренебречь.

14.36. Тело совершает гармонические колебания с периодом T. Через какой промежуток времени кинетическая и потенциальная энергии тела оказываются равными?

14.37. Показать, что период обращения математического маятника по горизонтальной окружности (конический маятник), равен периоду его колебаний при малых углах отклонения.

14.38. Тело находится внутри сферы в некоторой точке A. В каком случае тело быстрее достигнет нижней точки сферы B: если оно будет скользить по сфере или по наклонной плоскости AB (рис. 14.6)? Трения нет, расстояние AB много меньше радиуса сферы.

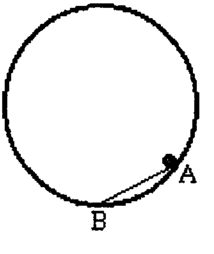

рис. 14.6

14.39. Вообразим, что между двумя городами сквозь Землю прорыт прямолинейный тоннель, в котором проложены рельсы. Сколько времени будет двигаться вагон по этому тоннелю от одного города до другого, если его отпустить без начальной скорости? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

14.40. Два одинаковых горизонтальных цилиндрических валика быстро вращаются в противоположных направлениях. Расстояние между осями валиков равно l. На валики положили однородную доску, как показано на рис. 14.7. Показать, что доска будет совершать гармонические колебания и найти их период, если коэффициент трения между доской и валиками равен μ.

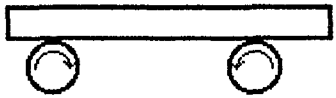

рис. 14.7

14.41. Поплавок переносят из жидкости с меньшей плотности в жидкость с большей плотностью. Как при этом изменяется период вертикальных колебаний поплавка?

14.42. В пробирку насыпали немного песка и опустили ее плавать в воду (рис. 14.8). Какими будут вертикальные колебания пробирки? Найти их период. Масса пробирки равна m, площадь ее поперечного сечения - S.

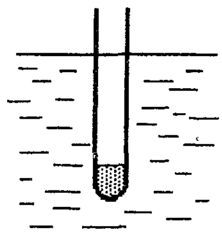

рис. 14.8

14.43. Однородный цилиндр длиной l плавает в вертикальном положении на границе двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) и делится этой границей пополам. Пренебрегая сопротивлением, найти период малых вертикальных колебаний цилиндра.

14.44. Невесомая горизонтальная платформа стоит, как на ножках, на четырех одинаковых вертикальных пружинах. С высоты h в середину платформы падает кусочек пластилина массой m и прилипает к ней. Какова амплитуда возникших при этом колебаний? Жесткость каждой пружины равна k.

14.45. Чашка массой M стоит на вертикальной пружине жесткости k. С высоты h в чашку падает пластилиновый шарик массой m и прилипает к ней. На какую максимальную высоту от начального положения опустится при этом чашка?

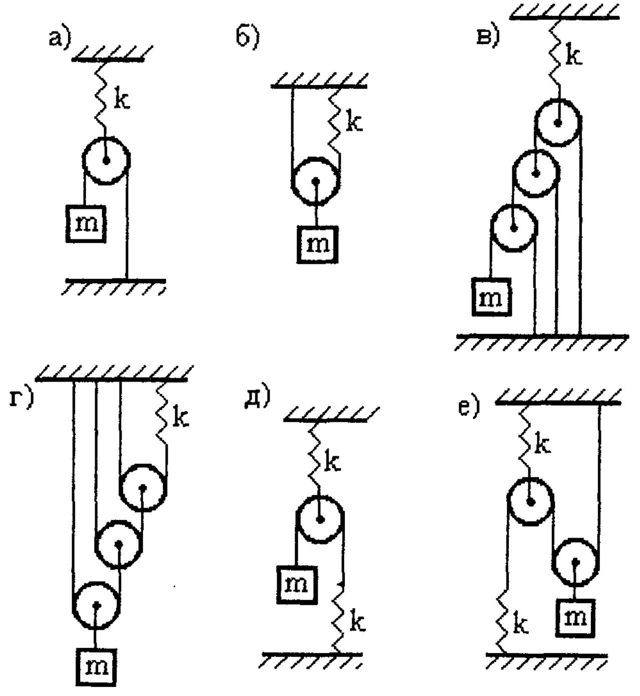

рис. 14.9

14.46. Определить период гармонических колебаний систем, изображенных на рис. 14.9 а) - е). Масса всех грузов равна m, жесткость всех пружин равна k. Пружины и блоки невесомые, нити невесомые и нерастяжимые, трения нет.

14.47. На груз массой M, висящий на пружине, кладут еще один груз массой m, удерживая систему в начальном положении. Затем грузы отпускают. Найти максимальную силу, действующую на верхний груз со стороны нижнего.

14.48. Тонкий обруч массой M и радиусом R может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр обруча. На обруче закреплен небольшой грузик массой m. Найти период малых колебаний обруча.

14.49. Колебания описываются уравнением: $x(t) = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$ (см). Являются ли эти колебания гармоническими и какова их амплитуда?

14.50. Период вертикальных колебаний груза на резиновом шнуре равен T. Каким будет период колебаний этого груза на том же шнуре, сложенном вдвое?

14.51. Небольшой шарик массой m совершает колебания с амплитудой A на нити длиной l ($A \ll l$). На сколько изменяется сила натяжения нити в процессе колебаний?

14.52. Математический маятник совершает малые колебания в вертикальной плоскости на нити длиной l. На расстоянии x под точкой подвеса торчит гвоздь, на который натыкается нить маятника (рис. 14.10). Определить отношение углов наибольших отклонений нити маятника от вертикали влево

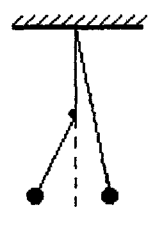

рис. 14.10

и вправо.

14.53. Найти период колебаний жидкости в U - образной трубке постоянного сечения, если общая длина трубки, заполненной жидкостью равна l.

14.54. Жидкость объемом $V = 16$ см^3 налита в V - образную трубку с площадью сечения $S = 0{,}5$ см^2. Одно колено трубки вертикально, а другое наклонено к вертикали под углом $\alpha = 30^0$ (рис. 14.11). Определить период колебаний жидкости в трубке. Вязкость не учитывать.

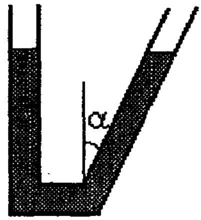

рис. 14.11

14.55. Груз массой $m = 0{,}25$ кг лежит на гладкой горизонтальной поверхности между двумя пружинами, жесткость которых равна $k_1 = 150$ Н/м и $k_2 = 250$ Н/м. Первоначально пружины ненагружены. В некоторый момент конец пружины k_2 резко сдвигают на расстояние $a = 4$ см в сторону груза и закрепляют. Определить амплитуду и максимальную скорость возникших колебаний.

14.56. На наклонной плоскости находится брусок, к которому на нити подвешена небольшая шайба. Шайба без трения совершает гармонические колебания с периодом T_0 (рис. 14.12). Каким будет период колебаний шайбы, если брусок отпустить? Угол наклона плоскости равен α, коэффициент трения между бруском и

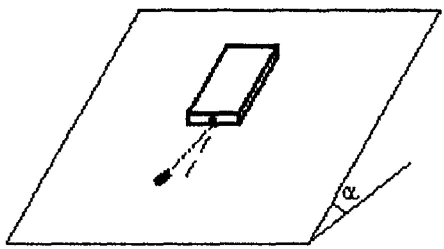

рис. 14.12

плоскостью равен μ, масса бруска намного больше массы шайбы.

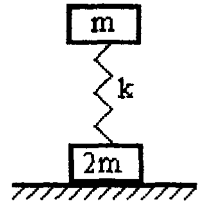

рис. 14.13

14.57. Система состоит из двух брусков массами m и $2m$, между которыми пружина жесткости k. Систему поставили вертикально (рис. 14.13). При какой максимальной амплитуде колебания верхнего бруска массой m будут гармоническими?

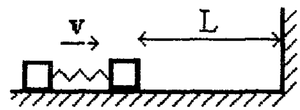

рис. 14.14

14.58. Два тела массой m каждое связаны пружиной жесткости k и движутся со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности к стенке. В некоторый момент одно из тел находилось на расстоянии L от стенки (рис. 14.14). Через какое время оно опять будет находиться на расстоянии L от стенки? Начальных колебаний нет, столкновения со стенкой абсолютно упругие.

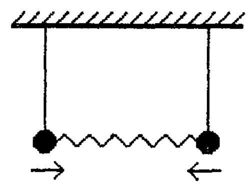
рис. 14.15

14.59. Два одинаковых маленьких шарика массой m каждый висят на двух одинаковых вертикальных нитях длиной l и связаны пружиной жесткости k (рис. 14.15). Шарикам сообщили одинаковые небольшие скорости навстречу друг другу. Определить период возникших малых колебаний.

14.60. Два грузика массами m_1 и m_2, связанные пружиной жесткости k, лежат на гладкой горизонтальной поверхности. Каков период колебаний такой системы?

14.61. На горизонтальной поверхности находится тележка массой M с установленным на ней математическим маятником массой m и длиной l. Каков период колебаний системы? Трения нет.

14.62. Во сколько раз частота колебаний молекулы H_2 отличается от частоты колебаний молекулы DH?

14.63. Математический маятник установлен на тележке. Период колебаний маятника на неподвижной тележке равен T_0. Каким будет период колебаний, если тележка начнет скатываться без трения с наклонной плоскости с углом наклона α?

14.64. В ракете установлены маятниковые часы. Ракета стартует вертикально вверх с ускорением 0,5g. На высоте h ракета начинает двигаться равнозамедленно с тем же ускорением. В момент старта часы в ракете показывали точное время. На какой высоте они опять будут показывать точное время? Изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

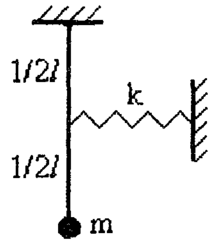

рис. 14.16

14.65. Определить период колебаний системы (рис. 14.16).

14.66. Маятник представляет собой легкий жесткий стержень длиной l с грузом на конце. Стержень может вращаться вокруг оси, наклоненной к вертикали под углом α (рис. 14.17). Определить период колебаний маятника.

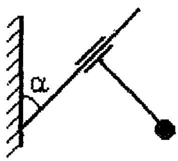

рис. 14.17

14.67. Легкий стержень АВ прикреплен шарнирно к стене и удерживается горизонтально вертикальной нитью СД длиной l. На конце стержня укреплен небольшой массивный шарик (рис. 14.18). Найти период малых колебаний системы.

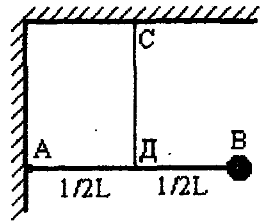

рис. 14.18

14.68. Колебательная система представляет собой легкий стержень, на концах которого закреплены маленькие шарики массами m_1 и m_2. Стержень может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси О, находящейся на расстояниях l_1 и l_2 от шариков (рис. 14.19). Найти период малых колебаний системы.

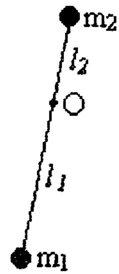

рис. 14.19

14.69. Невесомый стержень длиной l шарнирно подвешен к потолку. На конце и в середине стержня укреплены два одинаковых маленьких массивных шарика. Определить период малых колебаний стержня.

14.70. Груз, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплен пружиной длиной l к вертикальной стене. Пружину разрезали на две части длиной l_1 и l_2 и соединили их с тем же грузом между двумя стенками (рис. 14.20). Найти период горизонтальных колебаний груза во втором случае, если в первом случае период был равен T_0.

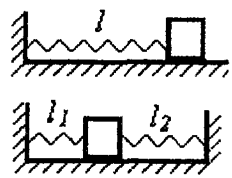

рис. 14.20

14.71. К маятнику АВ с шариком массой М подвешен маятник ВС с шариком массой m. Точка А совершает горизонтальные колебания с периодом T (рис. 14.21). Найти длину нити BC, если нить AB все время остается вертикальной.

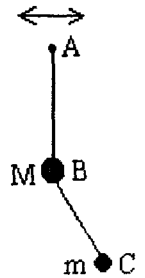

рис. 14.21

14.72. Математический маятник совершает малые колебания с угловой амплитудой α. Скорость груза в нижней точке равна v. В крайнем положении грузу толчком сообщают скорость v в направлении перпендикулярном плоскости колебаний. По какой траектории будет двигаться груз? Через какое время он опять попадет в ту же точку?

14.73. Точка совершает движение в плоскости x,y по закону: $x(t) = A\cdot\sin\omega t$; $y(t) = A\cdot\cos\omega t$. Что является траекторией движения точки? Определить ускорение точки.

14.74. Частица колеблется вдоль оси x по закону: $x(t) = A\cdot\mathrm{Cos}\,\omega t$. Построить графики зависимости скорости частицы и ее ускорения от координаты: v(x) и a(x).

14.75. Материальная точка движется в плоскости x,y по закону: $x(t) = A\cdot\sin\omega t$; $y(t) = A\cdot\cos2\omega t$. Что является траекторией движения точки?

14.76. Полый шар заполнен водой и совершает колебания на нити. Как изменится период колебаний, если вода замерзнет? Изменение объема при замерзании не учитывать.

14.77. Твердое тело совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси с периодом T_0. Каким будет период колебаний тела, если при неизменной плотности все его линейные размеры увеличатся вдвое?

14.78. Правильно идущие механические часы положили на гладкую горизонтальную поверхность. Как изменится темп хода часов?

14.79. Однородный стержень массой m и длиной l, шарнирно подвешенный за один конец, совершает малые колебания с угловой амплитудой α. Чему равны период и полная энергия колебаний стержня? Трения нет.

14.80. Тело может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси. Тело расположили так, что его центр масс оказался точно над осью и отпустили без начальной скорости. При этом тело прошло положение равновесия с угловой скоростью ω. Найти период малых колебаний тела.

14.81. Два тела совершают малые колебания вокруг одной и той же оси с круговыми частотами ω_1 и ω_2. Моменты инерции тел относительно этой оси равны J_1 и J_2 соответственно. С какой частотой будут колебаться тела, если их соединить вместе?

14.82. Однородный тонкий стержень колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей через стержень и отстоящей от одного из его концов на расстояние x. При каком значении x период колебаний стержня будет наименьшим, если длина стержня равна L. Трения нет, колебания малые.

14.83. Тонкий обруч радиусом R повесили на вбитый в стену гвоздь (рис. 14.22). Найти период малых колебаний обруча. Проскальзывания нет.

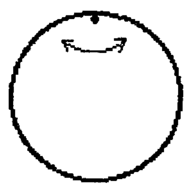

рис. 14.22

14.84. Однородный цилиндр массой m и радиусом R колеблется на пружине жесткости k в горизонтальной плоскости (рис. 14.23). Найти период колебаний, если цилиндр не проскальзывает. При какой амплитуде колебаний начинается проскальзывание цилиндра, если коэффициент трения между цилиндром и плоскостью равен μ?

рис. 14.23

14.85. Однородный цилиндр радиусом r катается по внутренней поверхности цилиндра радиусом R (рис. 14.24). Найти период малых колебаний. Проскальзывания нет.

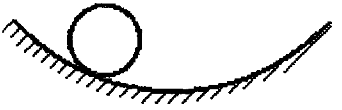

рис. 14.24

14.86. Однородный стержень, висящий на двух одинаковых вертикальных нитях длиной l, повернули на малый угол вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, и отпустили (рис 14.25). Каков период малых колебаний стержня?

рис. 14.25

14.87. Длинный поезд, движущийся по инерции по горизонтальному пути, начинает въезжать в гору с углом наклона α. Через какое время поезд остановится? Длина поезда L, трения нет. Известно, что поезд въехал в гору только частично.

14.88. Доска длиной L скользит без трения по льду вдоль своей длины и въезжает на асфальтированный участок. Через какое время доска остановится, если коэффициент трения между доской и асфальтом равен μ. Известно, что доска въезжает на асфальт лишь частично.

14.89. Частица массой m находится в силовом поле, где ее потенциальная энергия зависит от координаты по закону: $W(x) = W_0(1 - \cos\alpha x)$. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

14.90. Система, показанная на рис. 14.26, совершает колебания перпендикулярно пружинам. Возможны ли гармонические колебания такой системы? Пружины одинаковы и в положении равновесия нерастянуты. Внешних сил нет.

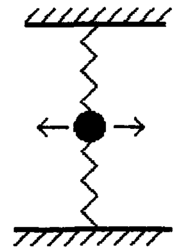
рис. 14.26

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ

1. Равномерное движение. Средняя скорость

1.1. 6 с
1.2. 50 с
1.3. 12 ч
1.4. 7,5 км/ч; 17,5 км/ч
1.5. 30 км/ч
1.6. 3 км/ч
1.7. 100 ступенек
1.8. $L_1 = L(v - u)/(v + u)$
1.9. $L = l(v_1 - v_2)/v_2$
1.10. $v = c(t_1 - t_2)/(t_1 + t_2)$
1.11. $v = \sqrt{c^2 - \left(2L/t\right)^2}$
1.12. $v_1 = 0{,}5(S_1/t_1 + S_2/t_2) = 1{,}1$ м/с;
$v_2 = 0{,}5(S_1/t_1 - S_2/t_2) = 0{,}5$ м/с
1.13. $v_{ср1} = 2v_1v_2/(v_1 + v_2) = 37{,}5$ км/ч;
$v_{ср2} = (v_1 + v_2)/2 = 40$ км/ч
1.14. $v_{ср} = 16$ м/с
1.15. $v_{ср} = 2v_1(v_2 + v_3)/(2v_1 + v_2 + v_3) \approx 7$ км/ч
1.16. 48 км/ч
1.17. $v_1 = 1{,}5$ м/с
1.18. 50 м/с
1.19. $v_{ср} = 0{,}5\pi v$
1.20. 30 км/ч
1.21. $v_0 = 4v/(4 - \pi)$
1.22. 18 км/ч
1.23. 2,5 км
1.24. $v_к = v_{ср}(t_1 + t_2)^2/(4t_1t_2) = 11{,}25$ км/ч;

$v_p = v_{cp}(t_2^2 - t_1^2)/(4t_1t_2) = 3{,}75$ км/ч

1.25. $\approx 21{,}4$ км/ч

1.26. 40 км/ч

1.27. $v = c(t_1 - t_2)/(t_1 + t_2)$

1.28. $\alpha = \arcsin(u/v)$

1.29. 7

1.30. $v_{cp} = v_1v_2(L_1 + L_2)/(L_1v_2 + L_2v_1)$

2. Равноускоренное движение

2.1. - 0,5 м/с^2

2.2. $H = v^2/g = 40$ м

2.3. $v_0 = 3$ м/с; $a = 2$ м/с^2

2.4. в $\sqrt{2}$ раз

2.5. 60 м; 180 м; 300 м

2.6. 2

2.7. $a = 2L(t_1 - t_2)/(t_1t_2(t_1 + t_2)) = -3$ м/с^2;
$v_0 = (2L - at_1^2)/(2t_1) = 11$ м/с

2.8. $v_{cp} = (v_1 + v_2)/2$

2.9. $h = \frac{c}{g}\left[gt + c - \sqrt{c(c+2gt)}\right]$

2.10. $v_2/v_1 = \sqrt{2} + 1$

2.11. $v_2/v_1 = 3$

2.12. $v_0 = 0{,}5$ м/с; $a = 1$ м/с^2

2.13. в точке 2

2.14. $v_{cp} = v_1v_2/(v_1+v_2) = 0{,}6$ м/с

2.15. $h = \frac{1}{2}H\left(1 - \frac{gH}{4v_0^2}\right)$

2.16. $v_4/v_1 = 2$

2.17. $t = t_0(2 + \sqrt{2})$

Указание: Для второго участка движения: $x(t) = x_0 + v_0t - at^2/2 = 0$, где $x_0 = at_0^2/2$; $v_0 = at$.

2.18. на расстоянии 9,5 м от точки А

2.19. на втором

2.20. $at^2/4$

Указание: За время t тело походит от среднего положения до крайнего и обратно.

2.21. $a_1 = -3a$

2.22. 40 с

2.23. $t = (t_1^2 + t_2^2)/(2t_2)$

Указание: $l = at_1^2/2$; $nl = at^2/2$; $(n-1)l = a(t - t_2)^2/2$

2.24. $S_8/S_3 = 3$

2.25. $l = 110$ м

2.26. $\Delta t = \sqrt{t^2 + \frac{2l}{g}} - t \approx 1$ с

2.27. $v_0 = \frac{7L}{6t}$; $a = -\frac{L}{3t^2}$

2.28. в момент t_3

2.29. $v_0 = \frac{2\Delta t\sqrt{2gH} - g\Delta t^2}{2\left(\sqrt{2H/g} - \Delta t\right)} \approx 11$ м/с

2.30. $x = -187{,}5$ м; $S = 187{,}5$ м

2.31. $x = 24$ м; $S = 34$ м

2.32. $a = \frac{2(S - v_0\Delta t)}{\Delta t(2t - \Delta t)} = -3$ м/с^2; $\Delta t = 1$ с

2.33. $H = 24v_0^2/g = 240$ м

2.34. $v = \sqrt{\frac{1}{2}\left(v_1^2 + v_2^2\right)}$

2.35. $H = 2v_{ср}^2/g = 20$ м

2.36. $v_{ср} = 0{,}5$ м/с

2.37. $v(t) = \frac{1}{2}\alpha^2 t$; $v_{ср} = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{S}$

2.38. 31,25 м

2.39. n метров

2.40. $a_{мин} = \dfrac{v^2}{\tau(c - v)}$

2.41. $t = \dfrac{2\sqrt{v^2 + 2gH}}{g} \approx 2{,}24$ с

Указание: Перейти в систему отсчета плиты.

2.42. $v_1 = \sqrt{v^2 - 2gh}$

2.43. 15 м/с

2.44. Данные задачи взаимоисключающие.

2.45. $H = \dfrac{(L + h)^2}{4L}$

2.46. $t = \dfrac{c}{2a}$

2.47. $v = c\left(\sqrt{1 + {}^{2a\tau}\!/_{c}} - 1\right)$

2.48. $v = \frac{1}{2}g\tau$

Указание: Движение осколка, вылетевшего со скоростью v вертикально вверх, через время 2v/g полностью идентично движению осколка, вылетевшего со скоростью v вертикально вниз.

2.49. $t = \dfrac{v_2 - v_1}{a}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{2v_1 a\tau}{(v_2 - v_1)^2}}\right) = 80$ с;

$L = v_1(t + \tau) = 1040$ м

2.50. 10 м/с

2.51. $L_{max} = \dfrac{(v_{01} + v_{02})^2}{2(a_1 + a_2)} = 150\,м$

Указание: Перейти в систему отсчета одного из тел.

2.52. $t = \dfrac{c}{a}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

2.53. $\approx 7{,}9$ м/с

2.54. $v_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{3gH}$

3. Свободное движение тела, брошенного под углом к горизонту

3.1. 35 м
3.2. 180 м; 20 м
3.3. 5 м/с
3.4. 15 см
3.5. ≈ 12 м
3.6. 3,2 м
3.7. 5 м/с

3.8. $\Delta S = S\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{2v_0^2\Delta h}{gS^2}}\right) \approx 31\,м$

3.9. $t = \dfrac{v_0 \operatorname{tg}\alpha}{g} = 1{,}5\,с$

3.10. $t = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{g}(\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\beta) \approx 0{,}3$ с; 1,1 с

3.11. $L = 2H\operatorname{ctg}\alpha = 8$ м
3.12. $t = 2{,}7$ с

3.13. $l_{min} = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + \frac{8Hv_0^2}{g}\cos^2\alpha} - \frac{L}{2} \approx 15\,м;$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gL}{v_0^2}\right) \approx 60^0$

3.14. $R_1 = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$; $R_2 = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$

3.15. $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{2} \approx 54{,}7^0$

3.16. $L_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 39$ м, где $\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2gH}}{v_0}\right) \approx 39^0$;

$L_2 = \frac{v_0^2}{g} = 40\,м$

3.17. $S = \frac{\pi v_0^4}{g^2} \approx 314\,м^2$

3.18. $v_0 = \sqrt{\frac{gL\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}}$

3.19. $L = \frac{2v_0\cos\alpha}{g}\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gh} \approx 7\,м$

3.20. $m = \frac{2\rho S}{g}\sqrt{\frac{gL}{\sin 2\alpha}\left(\frac{1}{2}gL\mathrm{tg}\alpha - 2gh\right)} \approx 6{,}3\,кг$

3.21. $t = \frac{v_0}{g\sin\alpha}$

Указание: Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю. Значит: $v_{0x}v_x + v_{0y}v_y = 0$.

3.22. $t = \frac{v_0}{2g}\left(3\sin\alpha \pm \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}\right)$

Указание: См. № 3.21: $xv_x + yv_y = 0$

3.23. 45^0

3.24. $h = \frac{v_0^2}{4g}$; при $\alpha \geq 45^0$

3.25. $h_2 = 2/3H$

3.26. $h = 1/2H$

3.27. $v_0 = \sqrt{g\left(h + \sqrt{L^2 + h^2}\right)}$

Указание: $L = v_0 t\cos\alpha$; $h = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$; Из этих уравнений, исключая время, получаем: $h = L\mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right)$ - квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\alpha$. Минимальной скорости бросания соответствует случай, когда дискриминант этого уравнения равен нулю.

3.28. $H_1/L_1 = 1/(16a)$

3.29. $v_0 = \sqrt{3gR}$; $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{2} \approx 54{,}7^0$

Указание: Воспользоваться обратимостью механических процессов. Бросить камень горизонтально из верхней точки полусферы.

3.30. 24,6 с; 42,6 с

3.31. $v = \sqrt{2gL} = 10$ м/с

3.32. $v = \sqrt{g(2H + L)} = 25$ м/с

Указание: Траектория движения мяча должна касаться крыши дома и в точке касания скорость мяча должна быть направлена под углом 45^0 к горизонту.

3.33. $\alpha > \arcsin\left(2\sqrt{2}/3\right) \approx 70{,}5^0$

Указание: Угол между радиус - вектором и вектором скорости должен быть всегда больше 90^0. (См. № 3.22).

3.34. $v_0 = x\sqrt{\dfrac{g}{2\cos^2\alpha(x\,tg\alpha - y)}} = 12$ м/с

3.35. $\alpha = \arccos(0{,}222) \approx 77{,}2^0$

3.36. $v = tg2\alpha\sqrt{2gH} = 10$ м/с; Не будут

Указание: Перейти в систему отсчета тележки.

3.37. $\approx 14{,}5$ м/с

3.38. 5,25 м/с

3.39. $tg\alpha = \dfrac{1}{v_0}\sqrt{\dfrac{1}{2}gh}$

3.40. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

3.41. 4 с

3.42. $\approx 34{,}6$ м

3.43. 1,25 м; 11,25 м

3.44. $L = (h + \dfrac{1}{2}gt^2)\,ctg\alpha$

3.45. $H = \dfrac{1}{8}gt^2 = 31{,}25$ м; $\alpha = arctg\left(4H/L\right) \approx 85{,}4^0$;

$R = \dfrac{L^2}{gt^2} = 0{,}4$ м

3.46. $h = \dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g}\left(tg^2\alpha - tg^2\beta\right) \approx 1{,}67$ м

3.47. 2 км

4. Кинематика движения по окружности

4.1. 1,5 м/с

4.2. 20 м/с

4.3. 0,314 $с^{-1}$

4.4. 120 $м/с^2$

4.5. 10 $м/с^2$

4.6. ≈ 14,15 м/с; 20 м/с; 0

4.7. в 18 раз

4.8. ≈ 10 м/с

4.9. $v = 400$ м/с; $a = 2{,}5$ $см/с^2$

4.10. $\omega = (v_1 + v_2)/l = 0{,}5$ м/с

4.11. $\omega = \dfrac{v}{2R} = 2с^{-1}$

4.12. ≈ 1,15 $м/с^2$; ≈ 0,12 $м/с^2$

4.13. $\omega = \dfrac{v_1 + v_2}{2R}$; $v_0 = \dfrac{1}{2}(v_1 + v_2)$

4.14. ≈ 316 м/с

4.15. 1 $с^{-1}$

4.16. $v(\alpha) = 2v_0 \cos\alpha$

4.17. Окружность радиусом R с центром в точке касания диска с дорогой.

4.18. $v_A = \omega \dfrac{R_1 R_2}{R_3}$

4.19. $v_B = 2\omega(R + r) = 100$ см/с

Указание: Точку касания колес принять за мгновенный центр вращения.

4.20. $\dfrac{\omega_3}{\omega} = \dfrac{2(R + r)}{r} = 6$

Указание: Принять точку касания колеса 1 с кругом 2 за мгновенный центр вращения.

4.21. $a_п = a\sqrt{1 + \dfrac{4}{25}\pi^2} = 0{,}8$ $м/с^2$

4.22. 4R

Указание: Если скорость центра колеса равна v_0, то скорость верхней точки колеса равна $2v_0$, а ее ускорение равно v_0^2/R.

4.23. $(R + r)^2/R$

Указание: Если скорость центра колеса равна v_0, то скорость верхней точки колеса равна $v_0(R + r)/r$, а ее ускорение равно v_0^2R/r^2.

4.24. $a = \dfrac{4\pi^2R^2v^2}{R(4\pi^2R^2 + h^2)}$

Указание: Движение бусинки складывается из равномерного движения вертикально вниз со скоростью $v\cdot\sin\alpha$ и равномерного вращения по окружности радиусом R со скоростью $v\cdot\cos\alpha$, где $\mathrm{tg}\alpha = h/(2\pi R)$.

4.25. $a(t) = k\sqrt{1 + \dfrac{k^2t^4}{R^2}}$

4.26. ≈ 1,09 ч ≈ 65,5 мин

4.27. Окружность радиусом R; $a = \omega^2R$

4.28. $v_C = v_D = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(v_A^2 + v_B^2\right)}$

Указание: Движение обруча можно представить как вращение с угловой скоростью ω вокруг точки, лежащей на прямой AB и на расстоянии R от точки A. Тогда $v_A = \omega R$, $v_B = \omega(R + d)$, $v_C = v_D = \omega\sqrt{\left(R + \dfrac{1}{2}d\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}d\right)^2}$, где d - диаметр обруча.

4.29. $\mathrm{tg}\varphi = at^2/R$

4.30. $v(t) = \dfrac{1}{2}\alpha Rt$

4.31. $\omega_{ср} = \dfrac{\alpha g}{v_0 \sin\alpha}$

4.32. 367 суток

4.33. $\omega = \dfrac{v}{2r}$

Указание: Достаточно рассмотреть движение шарика, находящегося в данный момент в самом нижнем положении. Скорость нижней точки этого шарика в этот момент равна нулю, а скорость верхней точки равна v.

4.34. $n = \dfrac{1}{4\pi} \approx 0{,}08$ оборота

5. Относительное движение. Движение со связями

5.1. 50 м

5.2. 176 м; 200 м

5.3. $\sin\beta = \dfrac{v_1}{v_2}\sin\alpha$

5.4. $v_{min} = v\dfrac{S}{L}$

Указание: В системе отсчета бегущего человека построить вектор скорости автобуса относительно человека.

5.5. Ветер дует с северо - запада со скоростью ≈ 10,6 м/с

5.6. $L_1 = L\dfrac{v}{v_1 + v_2}$

5.7. $t = 10\sqrt{3}с \approx 17{,}3с$

5.8. $t = \dfrac{L_1 v_1 + L_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$

Указание: Расстояние между автомобилями равно:

$r(t) = (L_1 - v_1 t)^2 + (L_2 - v_2 t)^2$. Это квадратичная зависимость, графиком которой является парабола с минимумом в ее вершине.

5.9. $t = \dfrac{L}{2v}$; $L_{min} = L\sin\dfrac{\alpha}{2}$

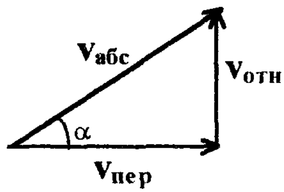

рис.1

5.10. $t = \dfrac{S}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \approx 0{,}032$ ч

5.11. 6 м/с

5.12. $v = \omega l/\text{tg}\alpha$

Указание: Закон сложения скоростей: $\mathbf{v}_{абс}=\mathbf{v}_{отн}+\mathbf{v}_{пер}$. В данной ситуации: $\mathbf{v}_{пер}$ - скорость точки О экрана; $\mathbf{v}_{отн}$ - скорость перемещения зайчика по экрану. Соответствующий треугольник скоростей показан на рис. 1.

5.13. 5 см

5.14. $2l$

5.15. $v_1 = \sqrt{u(u - 2v)}$

5.16. $x(t) = l\,\text{tg}\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) = 100\text{tg}(0{,}314t)$

5.17. $t = \dfrac{2a}{3v}$; $L = \dfrac{2}{3}a$

Указание: В силу симметрии черепахи встретятся в центре треугольника. При этом скорость, с которой первая черепаха приближается к второй, равна $v + v\text{Cos}60^0 = 1{,}5v$.

5.18. $v_x = v/2$

5.19. $u = \dfrac{v}{\sin\left(\dfrac{1}{2}\alpha\right)}$

5.20. $u = \dfrac{v}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$

5.21. $d_{min} = \dfrac{l v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

Указание: В системе отсчета второго тела первое тело движется с постоянной скоростью $v_2 - v_1$. Относительное ускорение тел равно нулю.

5.22. $t = 1$ с; $d_{min} = 10$ м

Указание: См. указание к № 5.22.

5.23. 20 м

5.24. $L_{min} = \dfrac{v^2}{g}$

Указание: Перейти в систему отсчета, связанную с машинами.

5.25. $R(t) = \sqrt{R_0^2 - \dfrac{vtd}{\pi}}$

Указание: Сматывание ленты приводит к уменьшению площади ленты на бобине: $\pi(R_0^2 - R^2)$.

5.26. $d(t) = v_0 t\sqrt{2(1 - \sin 2\alpha)}$

5.27. $v_A = \dfrac{v^2 t}{\sqrt{l^2 - v^2 t^2}}$; $v_C = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$; Траекторией точки C является окружность радиусом $\frac{1}{2}l$ с центром в точке O.

Указание: В любой момент времени проекции скоростей всех точек стержня на направление стержня одинаковы.

5.28. $v_C = v\sqrt{\cos^2\alpha + \frac{1}{4}(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta)}$

Указание: См. указание к № 5.27.

5.29. $a = g\cdot\text{ctg}\alpha$

5.30. $r = \sqrt{R^2 - l^2}$

Указание: Скорость второго тела направлена вдоль нити и по касательной к окружности.

5.31. $\cos\alpha = \dfrac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

5.32. 52 км/ч

5.33. $u = \dfrac{v}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$

5.34. $v_1 = \dfrac{v + u}{2\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$

Указание: Сумма проекций скорости среднего блока на левую и правую нити $2v_1\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ равна скорости убывания длины нити между крайними блоками.

5.35. 1 м/с

Указание: В системе отсчета наблюдателя A_2 весь окружающий мир вращается вокруг него с угловой скоростью ω по часовой стрелке.

5.36. $v_B = \dfrac{v}{\sin\alpha}$

5.37. 4,5 м/с^2

5.38. $\omega_1 = \omega l\cos\alpha/r$

Указание: Если бы колесо не вращалось, то скорость точки колеса, соприкасающейся с поверхностью стола, была бы равна $v = \omega l$. Разложим эту скорость на составляющие: v_1 -

параллельная плоскости колеса; v_2 - параллельная оси колеса (см. рис. 2). За счет вращения сила трения гасит составляющую скорости v_1.

5.39. $x_A(t) = vt - R \cdot \sin\left(\frac{v}{R}t\right)$; $y_A(t) = R\left(1 - \cos\left(\frac{v}{R}t\right)\right)$

Указание: Движение точки А можно представить как сумму поступательного движения с постоянной скоростью v и вращения вокруг центра колеса с угловой скоростью v/R. Тогда: $x(t) = x_{пос}(t) + x_{вр}(t)$; $y(t) = y_{пос}(t) + y_{вр}(t)$.

5.40. $\omega = \omega_0\sqrt{2}$

Указание: Прямая, проходящая через точку О и точку касания шара с поверхностью, является мгновенной осью вращения.

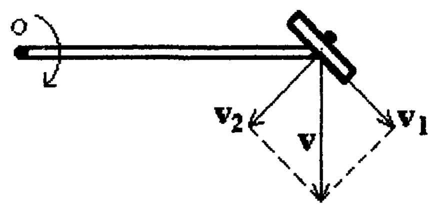

рис. 2

6. Динамика материальной точки

6.1. 50 Н

6.2. Одинакова; ≈ 14 Н; 20 Н

6.3. $T_1 = \frac{Fm_2}{m_1 + m_2}$; $T_2 = \frac{Fm_1}{m_1 + m_2}$

6.4. $a = \frac{F}{4m}$; $F_{12} = \frac{3}{4}F$; $F_{23} = \frac{1}{2}F$; $F_{34} = \frac{1}{4}F$

6.5. 0,16 Н

6.6. $a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$; $T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}$

6.7. $a_2/a_1 = 2$

6.8. $a = g\frac{T_2 - T_1}{T_4 - T_3}$

6.9. $F_x = F(1 - x/l)$

6.10. $t = \frac{T(m_1 + m_2)}{\alpha(2m_1 + m_2)}$

6.11. $a_1 = g(1 + m_2/m_1)$; $a_2 = 0$

6.12. $a = g(1 + m/M)$

6.13. $\alpha = \mathrm{arctg}(v^2/(gR))$

6.14. $N = m(g - a\,\mathrm{tg}\alpha)$; $T = ma/\cos\alpha$

6.15. $\approx 3{,}92$ м

6.16. $a = g\cdot\mathrm{tg}\alpha$

6.17. Уменьшается

Указание: Сила сопротивления пропорциональна площади сечения капли, а значит ее радиусу во второй степени, а сила тяжести пропорциональна объему капли, а значит ее радиусу в третьей степени.

6.18. $F = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) = 0{,}36$ Н

6.19. $F = mg(1 - l/L) = 20$ Н

6.20. $T = m(g\sin\alpha + a\cos\alpha)$; $N = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$; $a_1 = g\cdot\mathrm{ctg}\alpha$

6.21. $a = g\frac{m_2 - m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha}{m_1 + m_2} \approx 0{,}43$ м/с^2

6.22. $F_{тр} = mg\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; $\alpha_{пр} = \mathrm{arctg}\mu$

6.23. $F = g\frac{m_2}{m_1}(M + m_1 + m_2)$

6.24. $a = \frac{1}{2}g(\sin\beta - \sin\alpha - \mu_2\cos\beta - \mu_1\cos\alpha)$

6.25. $a = 2g\sin\alpha - F/m = 4$ м/с^2

6.26. $l_2/l_1 = 3$

6.27. $\approx 6{,}97$ м/с

6.28. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{3 - \mu\,\mathrm{ctg}\alpha}{3 + \mu\,\mathrm{ctg}\alpha} \approx 0{,}714$

6.29. $\mu_2 = 2\mathrm{tg}\alpha - \mu_1$

6.30. $v_2 = \dfrac{v_1\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{\mu^2 - \mathrm{tg}^2\alpha}}$

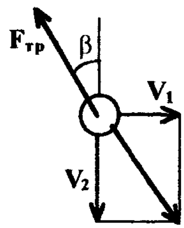

рис. 3

Указание: На шайбу в процессе движения действует сила трения, равная $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$ и направленная противоположно полной скорости. В режиме установившегося движения должно быть: $F_{тр}\cos\beta = mg\sin\alpha$ (рис. 3). Кроме того $\mathrm{tg}\beta = v_1/v_2$.

6.31. $1 - 2\mu\,\mathrm{ctg}\alpha \le \dfrac{m_1}{m_2} \le 1 + 2\mu\,\mathrm{ctg}\alpha$

6.32. $F = mg\cos\alpha\sqrt{\mu^2 - \mathrm{tg}^2\alpha}$

6.33. $\mu \ge \dfrac{m\,\mathrm{tg}\alpha}{M(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + m}$

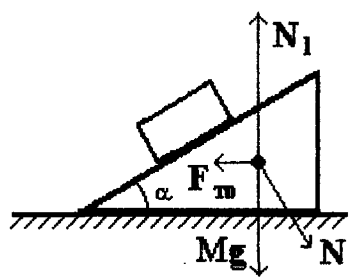

рис. 4

Указание: На клин действуют силы: Mg - сила тяжести клина; $N = mg\cos\alpha$ - сила нормального давления со стороны бруска; N_1 - сила реакции со стороны плоскости; $F_{тр}$ - сила трения (рис. 4). Если клин стоит на месте, то: $\mathbf{Mg} + \mathbf{N} + \mathbf{N_1} + \mathbf{F_{тр}} = \mathbf{0}$ и $F_{тр} \le \mu N_1$.

6.34. $F = \dfrac{16}{7} mg\sin\alpha \approx 11{,}4$ Н

6.35. $F = mg\,tg\alpha(1+m/M)$

6.36. $a = \dfrac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}$

Указание: Перейти в неинерциальную систему отсчета клина.

6.37. $a_1 = \dfrac{3}{5}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$; $a_2 = a_1$

6.38. $F = \dfrac{mg(M+m)\sin\alpha}{M + m(1-\cos\alpha)}$

6.39. $a = \dfrac{mg\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$

Указание: Перейти в неинерциальную систему отсчета клина.

6.40. $v_0 = \sqrt{2gl\sin\alpha}$

6.41. $T_1/T_2 = 4$

6.42. $F = \mu m_1 g(1+m_1/m_2)$

6.43. $F > g(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)$

6.44. $l = \dfrac{2u^2}{\mu g}$, если $\tau \geq \dfrac{2u}{\mu g}$; $l = u\tau$, если $\tau < \dfrac{2u}{\mu g}$

6.45. $\omega = \pi\sqrt{2k/m}$; $\omega_{пр} = 2\pi\sqrt{k/m}$

6.46. $k = \dfrac{g(m_1 - m_2)}{l_1 - l_2}$; $l_0 = \dfrac{m_1 l_2 - m_2 l_1}{m_1 - m_2}$

6.47. $a_2 = g^2/a_1$

6.48. $\Delta l = \dfrac{Fm_1}{k(m_1+m_2)}$; $a_1 = \dfrac{F}{m_1+m_2}$; $a_2 = \dfrac{Fm_1}{m_2(m_1+m_2)}$

6.49. $\Delta l = \dfrac{mg}{3k}$

6.50. $\Delta l = \dfrac{F(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$

6.51. $L_{max} = 4L_0$

Указание: Запишем второй закон Ньютона для частей каната, уже выскользнувшей из трубы и еще находящейся в трубе:

$$\mu x a = \mu x g - T$$
$$\mu(L - x)a = T,$$

где μ - масса единицы длины каната; a - ускорение каната; L - длина каната; x - длина выскользнувшей из трубы части каната; T - сила натяжения каната на выходе из трубы. Из этих уравнений получаем: $T(x) = -\dfrac{\mu g}{L}x^2 + \mu g x$. Графиком этой функции является парабола, максимум которой находится в ее вершине.

6.52. $r \le \dfrac{\mu g}{4\pi^2 n^2}$

6.53. $\omega = \omega_0\sqrt{3}$

6.54. $L_0 = R\left(1 - \dfrac{m\omega^2}{k}\right)$

6.55. $l(\omega) = \dfrac{2kl_0}{2k - m\omega^2}$

6.56. $T = m/2(g + v^2/l) \approx 500$ Н

6.57. $v = \sqrt{gl \sin\alpha \cdot tg\alpha}$

6.58. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}$; $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$

6.59. $N = m(g - (v_0^2 + al)/R) \approx 8500$ Н

6.60. $F = 2mv^2/l$

$$6.61.\ F = \frac{2mv^2}{l}\cos\alpha$$

$$6.62.\ a_{max} = \sqrt{\mu^2 g^2 - {v^4}/{R^2}}$$

Указание: Сила трения обеспечивает полное ускорение автомобиля, которое складывается из тангенциального и центростремительного.

$$6.63.\ t = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt[4]{\frac{\mu^2 g^2}{R^2} - \varepsilon^2} \approx 0{,}43\ \text{c}$$

Указание: См. указание к № 6.63.

$$6.64.\ \text{Sin}\alpha = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \approx 0{,}382;\ \alpha \approx 22{,}5^0$$

Указание: Перейти в неинерциальную систему отсчета втулки. В этой системе отсчета на тело действуют силы: mg - сила тяжести; ma - сила инерции; T - сила натяжения нити (рис. 5а). Ускорение груза в этой системе отсчета направлено вдоль нити и равно ускорению втулки. Тогда для груза можно написать:

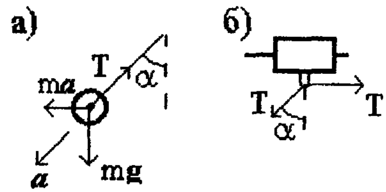

рис.5

$$ma = mg\cos\alpha + ma\sin\alpha - T$$

$$ma\cos\alpha = mg\sin\alpha$$

Для втулки в неподвижной системе отсчета можно написать (рис. 5б):

$$ma = T - T\sin\alpha$$

$$6.65.\ a_1 = g\frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2};\ a_1 = 2a_1;\ T = \frac{3m_1 m_2 g}{m_1 + 4m_2}$$

6.66. Уменьшается

Указание: После обрыва нити шарик начинает подниматься с ускорением вверх. Однако такое же по объему количество води начинает с тем же ускорением двигаться вниз, занимая освободившееся шариком место.

6.67. $F = \dfrac{4m_1m_2(g+a)}{m_1+m_2}$

Указание: В неинерциальной системе отсчета блока на грузы действуют силы тяжести: $m_1(g + a)$ и $m_2(g + a)$, а сила, действующая на блок равна удвоенной силе натяжения нити.

6.68. $L = H\dfrac{M}{M-m}$

6.69. $a_2 = g\dfrac{m_2-2m_1}{4m_1+m_2}$; $a_1 = 2a_2$

6.70. $\mu = 0{,}25$

6.71. Закон Гука такого режима не выдержит.

6.72. $\alpha_1 = 60^0$; $\alpha_2 = 0$

6.73. 100 см

6.74. $F = \dfrac{1}{2}mg$

6.75. 70 см

6.76. $a_1 = a_2 = 0{,}2g$; $a_3 = 0{,}6g$

6.77. Не будут

Указание: Рассмотреть силы инерции, действующие на стержень, в системе отсчета вращающегося стержня.

6.78. Нет.

Указание: Скорость точки А меньше скорости точки В.

6.79. $v = \dfrac{1}{2\pi R}\sqrt[4]{\dfrac{R^2g^2}{\mu^2}\left(h^2-4\pi^2\mu^2R^2\right)\left(h^2+4\pi^2R^2\right)}$

Указание: Для установившегося движения: $mg\sin\alpha = F_{тр}$,

где

$$F_{тр} = \mu N$$

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2},$$

$$N_1 = mg\cos\alpha$$

$$N_2 = m\frac{v^2\cos^2\alpha}{R}$$

$$tg\alpha = \frac{h}{2\pi R}$$

6.80. $a_2 = g\dfrac{2m_1 + m_2}{4m_1 + m_2}$; $a_1 = 2a_2$

6.81. $T = m_2\sqrt{g^2 + a^2}$, если $\mu \geq \mu_{кр} = \dfrac{a}{g} + \dfrac{m_2}{m_1}\sqrt{1 + \left(\dfrac{a}{g}\right)^2}$;

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\sqrt{g^2 + a^2} + \mu g - a\right), \text{ если } \mu < \mu_{кр}$$

Указание: Перейти в неинерциальную систему отсчета стола.

6.82. При повороте колес на них начинает действовать сила трения. Так как колеса свободно вращаются, то сила трения может быть направлена только перпендикулярно плоскости колес (рис. 6).

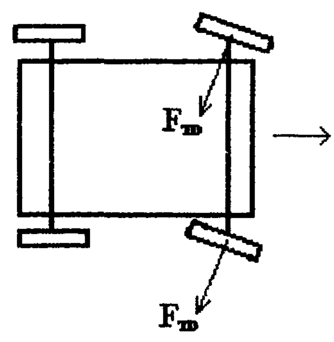

рис. 6

6.83. Сила, сдвигающая брусок с места, равна:

$F_1 = F\cos\alpha$.

Движению бруска мешает сила трения. Максимальное значение силы трения покоя, равное силе трения скольжения, равно:

$$F_2 = \mu(mg - F\sin\alpha).$$

Сила трения, действующая на брусок, определяется соотношением между силами F_1 и F_2. Если $F_1 > F_2$, то брусок движется и $F_{тр} = F_2$. Если $F_1 < F_2$, то брусок стоит на месте и $F_{тр} = F_1$. Возможны три варианта (рис. 7).

1) $F_2 > F_1$ при всех α. Брусок стоит на месте. График зависимости $F_{тр}(\alpha)$ на рис. 7.1.

2) $F > \mu mg$. При малых значениях α брусок движется, а при $\alpha > \alpha_{кр}$ стоит на месте. График зависимости $F_{тр}(\alpha)$ на рис. 7.2.

3) Промежуточный случай - когда F чуть - чуть меньше, чем μmg. При очень малых значениях угла α брусок стоит на месте, при $\alpha_{кр1} < \alpha < \alpha_{кр2}$ брусок движется и при $\alpha > \alpha_{кр2}$ брусок опять стоит на месте. График зависимости $F_{тр}(\alpha)$ на рис. 7.3. Значения углов $\alpha_{кр}$ определяются из условия: $F_1 = F_2$.

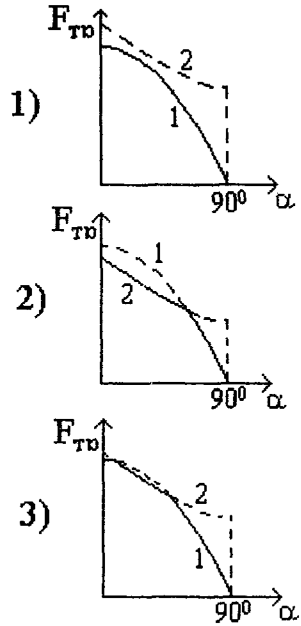

рис. 7

6.84. Сила трения скольжения на самом деле всегда несколько меньше максимального значения силы трения покоя. На рис. 8 приведена характерная зависимость силы сухого трения от относитель-

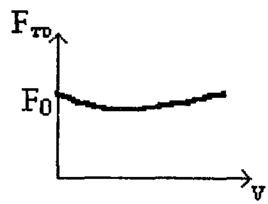

рис. 8

ной скорости движения соприкасающихся поверхностей. Когда сдвигающая сила достигает значения F_0, начинается движение, приводящее к уменьшению силы трения. Скорость увеличивается и деформация, а значит и сдвигающая сила, резко уменьшаются. Однако тела по инерции проскакивают положения равновесия и останавливаются когда величина сдвигающей силы существенно меньше F_0. После этого тела остаются в покое до тех пор пока сдвигающая сила опять не достигнет значения F_0.

6.85. $\dfrac{2l}{\sqrt{1+\mu^2}} < d < 2l$

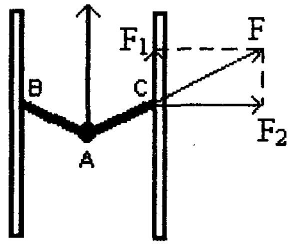

рис. 9

Указание: Стержень действует на стенку трубы силой F. Ее можно разложить на составляющие: F_1 и F_2 (рис. 9). Труба будет подниматься, если F_1 будет больше силы трения, равной μF_2. Силой тяжести трубы пренебрегаем.

6.86. $F = \dfrac{1}{2}\mu Mg \sin\left(\dfrac{1}{2}\alpha\right)$

Указание: См. указание к № 6.82.

6.87. Сила трения скольжения направлена против движения, то есть вдоль дороги. И если на данном участке дороги имеется небольшой уклон вбок, то сила трения скольжения не может воспрепятствовать скатывающей силе, действующей в сторону уклона.

6.88. В момент старта ракета имеет скорость равную скорости самолета и в течение некоторого времени движется хвостовым оперением вперед. За это время сопротивление воздуха успевает развернуть ракету в сторону самолета.

6.89. $u = \dfrac{v\,tg\alpha}{\sqrt{1 - a/g}} \approx 23{,}8$ м/с

6.90. $a = \dfrac{F - \mu mg}{M} = 1{,}6$ м/с

6.91. 1) ни в какую; 2) влево

6.92. $L = \dfrac{2H}{1 + \sqrt{1 + 2H/l}}$

6.93. Вправо; $a = g \cdot tg\alpha$

Указание: В системе отсчета движущейся трубки сила тяжести направлена под углом к вертикали.

6.94. $T = mg\left(1 - \dfrac{v^2}{2gl}\right) = 0{,}44$ Н

6.95. $\alpha = 2arctg\left(\dfrac{1}{40}\right) \approx 2{,}86^0$

7. Всемирное тяготение

7.1. $v = \dfrac{v_з}{\sqrt{2}} \approx 5{,}6$ км/с

7.2. $v = 2v_з = 16$ км/с

7.3. $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^3} = 2\sqrt{2}$

7.4. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$

7.5. $F = \dfrac{3}{4}\dfrac{Mv^2}{R}$

7.6. $\rho \approx \dfrac{24\pi}{GT^2\alpha^3} \approx 1{,}7$ кг/м^3

7.7. $H \approx 2656$ км

7.8. $R = \dfrac{H}{\sqrt{g_1/g_2} - 1}$

7.9. $\approx 3{,}7$ м

7.10. ≈ 342000 км

7.11. $\approx 11{,}2$ км/с

7.12. $g = \dfrac{10^4\pi^2}{T^2}\dfrac{R_з^{\ 3}}{R_c^{\ 2}} \approx 7{,}5\cdot 10^5$ м/с^2; ($T = 1$ год);

$$\rho = \frac{3}{8}\cdot\frac{10^6\pi}{GT^2}\left(\frac{R_з}{R_c}\right)^3 \approx 1{,}75\cdot 10^8 \text{ кг/м}^3$$

7.13. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_3}{g}} \approx 1{,}39$ ч

7.14. Не изменилась

7.15. $\Delta P = \dfrac{8\pi m v}{T} \approx 0{,}407$ Н; ($T = 24$ ч)

Указание: Угловая скорость пассажира равна: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \pm \dfrac{v}{R_з}$,

а вес пассажира равен: $P = G\dfrac{mM_3}{R_3^{\ 2}} - m\omega^2 R_3$.

7.16. $\rho = \dfrac{3\pi n}{GT^2(n-1)}$

7.17. $P = P_0\sqrt{1 - \dfrac{4\pi^2 R_3}{g_0 T^2}\left(2 - \dfrac{4\pi^2 R_3}{g_0 T^2}\right)\cos^2\varphi}$

Указание: Второй закон Ньютона для тела на широте φ: $m\boldsymbol{a} = \mathbf{P_0} + \mathbf{N}$. Или в скалярном виде: $N^2 = (ma)^2 + P_0^2 - 2P_0maCos\varphi$, где $a = \omega^2 R_3 Cos\varphi$. ($P = N$).

$$7.18.\ F = m\left(g + \frac{4\pi^2 R_3}{T^2}\right) \approx 9{,}83\,H$$

Указание: В системе отсчета Земли второй закон Ньютона: $mg = F - m\omega^2 R_3$.

$$7.19.\ T = 2\pi\sqrt{\frac{R_3}{g}} \approx 84\,\text{мин}$$

$$7.20.\ \rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$

$$7.21.\ H = R_3(\sqrt{2} - 1) \approx 2650\,\text{км}$$

$$7.22.\ F = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi G\rho m R^3}{l^2}$$

Указание: Сила, действующая на шарик внутри сплошной жидкости, равна нулю. И она складывается из силы, действующей на него со стороны жидкости с пузырьком воздуха, и силы со стороны жидкости , находящейся внутри пузырька.

$$7.23.\ E = \frac{4}{3}\pi\rho G\,l$$

Указание: Представим, что мы заполнили полость материалом с плотностью ρ. У нас получился однородный шар. Выберем произвольную точку A внутри полости. Напряженность поля в точке A - E_A равна векторной сумме напряженности, создаваемой в точке A шаром с полостью - $\mathbf{E}$, и напряженности, создаваемой в точке A материалом самой полости - $\mathbf{E^*}$:

$$\mathbf{E_A} = \mathbf{E} + \mathbf{E^*}$$

Напряженность гравитационного поля в точке, находящейся внутри однородного шара на расстоянии r от центра шара, создается не всем шаром, а только массой, находящейся внутри сферы радиусом r, и равна:

$E = \frac{4}{3}\pi\rho G r$. Поэтому:

$\mathbf{E_A} = \frac{4}{3}\pi\rho G\,\mathbf{r}$; $\mathbf{E^*} = \frac{4}{3}\pi\rho G\,\mathbf{r^*}$ (рис. 10). Окончательно:

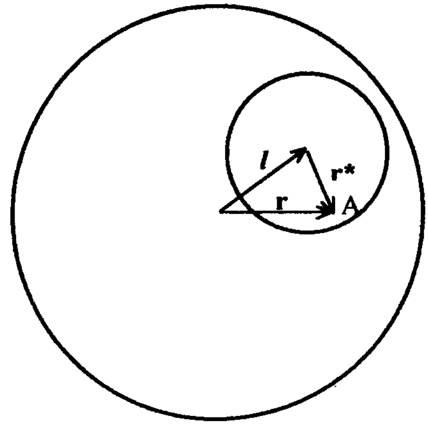

рис. 10

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_A} - \mathbf{E^*} = \frac{4}{3}\pi\rho G\,(\mathbf{r} - \mathbf{r^*}),$$

но $\mathbf{r} - \mathbf{r^*} = \boldsymbol{l}$.

7.24. $R_{op} = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}$; скорость спутника будет увеличиваться.

8. Импульс. Движение центра масс

8.1. а) $2mv\cos\alpha$; б) $2m(v\cos\alpha + u)$

8.2. а) $F = \frac{2m\sqrt{2gh}}{\tau} + mg$

б) $F = \frac{m\sqrt{2gh}}{\tau} + mg$

в) $F = \frac{2m\cos\alpha\sqrt{2gh}}{\tau} + mg\cos\alpha$

8.3. $\Delta P = 2mv_0 \sin\alpha$

8.4. $\alpha = 30^0$

8.5. $F_{ср} = mg$

Указание: За одно столкновение шарик передает плите импульс $\Delta p = 2mv$. За очень большое время T переданный плите импульс равен $\Delta P = \Delta pN$, где $N = T/t$, где $t = 2v/g$. С другой стороны: $\Delta P = F_{ср}T$.

8.6. $F(t) = m(gt + \sqrt{2gh})$

8.7. $F(t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{mg^2t^2}{l}$

Указание: $F = F_1 + F_2$, где $F_1 = \mu\frac{gt^2}{2}$ - сила тяжести лежащей на столе части цепочки ($\mu = m/l$ - линейная плотность цепочки); F_2 - сила, связанная с остановкой падающих частей цепочки: $F_2 \cdot dt = dm \cdot v = \mu v dt \cdot v$. ($v = gt$).

8.8. $v = \sqrt{gh}$

Указание: Импульс, приобретаемый цепочкой за время t равен импульсу силы тяжести части цепочки высотой h за то же время.

8.9. $F = \rho S u^2$

Указание: $F \cdot dt = dm \cdot v$, где $dm = \rho \cdot dV = \rho S v \cdot dt$ - масса пыли, с которой сталкивается ракета за время dt.

8.10. $\mu_1 = \frac{Mg}{u}$; $\mu_2 = \frac{M(a+g)}{u}$

8.11. а) $\frac{2mv^2\sqrt{2}}{\pi R}$; б) $\frac{2mv^2}{\pi R}$; в) 0

8.12. $v=\sqrt{2gh(1+4\mu^2)}$; $u=u_0-\frac{2\mu m}{M}\sqrt{2gh}$, если

$u_0>2\mu\sqrt{2gh}\left(1+\frac{m}{M}\right)$

$$v=\sqrt{2gh+\left(\frac{Mu_0}{M+m}\right)^2}\ ;\ u=\frac{Mu_0}{M+m}, \text{ если}$$

$u_0\le 2\mu\sqrt{2gh}\left(1+\frac{m}{M}\right)$

Указание: Запишем второй закон Ньютона для тела и тележки для бесконечно малого промежутка времени:

$$mdv_y=Ndt\ ;\ mdv_x=\mu Ndt\ ;\ Mdu=\mu Ndt$$

Силой тяжести тела ввиду малости длительности удара пренебрегаем. Для полной длительности удара имеем:

$$m\Delta v_y=\int_0^t Ndt\ ;\ m\Delta v_x=\mu\int_0^t Ndt\ ;\ M\Delta u=\mu\int_0^t Ndt,$$

где $\Delta v_y=2\sqrt{2gh}$ - изменение вертикальной составляющей скорости тела за время удара; $\Delta v_x=v_x$ и $\Delta u=u_0-u$ - изменение горизонтальной составляющей скорости тела и скорости тележки за время удара.

8.13. Mg

8.14. $a_0=g\frac{(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}$

Указание: По теореме о движении центра масс: $(m_1+m_2)a_0=(m_1+m_2)g-2T$, где T - сила натяжения нити.

8.15. Вращаться вокруг центра диска по часовой стрелке.

8.16. Одинаково

8.18. Увеличивается

8.19. Сила действует на трубу в месте изгиба в направлении биссектрисы угла и равна: $F = \sqrt{2}\rho S v^2$

8.20. Одновременно

8.21. $L = \frac{H}{\mu}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)^2$, если $\mu < \mathrm{ctg}\alpha$

Указание: Решение задачи аналогично № 8.12.

8.22. $v = v_0\sqrt{5}$

8.23. $L = \frac{mv_0}{k}$

Указание: Второй закон Ньютона:
$mdv = -F_C dt = -kvdt = -kdL$

8.24. Двигаться как горизонтально брошенное тело, одновременно вращаясь вокруг своего центра.

8.25. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\rho S v^2}{mg}$

8.26. $u = v - \frac{\mu mg}{\rho S}$

9. Работа. Энергия. Мощность

9.1. $A = \frac{F_1 \Delta l^2}{2\Delta l} = 50$ Дж

9.2. $A = mh(g + a)$

9.3. 50 Дж; 150 Дж

9.4. $N(t) = mg^2 t$; $N_{ср} = mg\sqrt{\frac{1}{2}gh}$

9.5. $F_{ср} = \frac{mv^2}{2l} = 5{,}3 \cdot 10^3$ Н

$$9.6.\ F_{ср} = \frac{3mv^2}{8d} = 12\ кН$$

9.7. $A = mg(H - l/2) = 2$ Дж

9.8. 21 кДж

$$9.9.\ A = mgH\left(1 + \left(\frac{S}{4H}\right)^2\right)$$

$$9.10.\ A = \frac{(\mu mg)^2}{2k} \approx 0{,}11\ Дж$$

$$9.11.\ A = \frac{\mu mgS\cos\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}$$

$$9.12.\ A = \frac{\mu mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}\left[S\cos\alpha + \frac{\mu mg}{2k(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)}\right]$$

$$9.13.\ A = \frac{F^2t^2}{2m}\cos\alpha\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha - \frac{\mu mg}{F}\right) \approx 531\ Дж$$

$$9.14.\ N \approx 2mgv\alpha = 25\ кВт$$

$$9.15.\ v = \frac{N}{mgSin\alpha} \approx 10{,}6\ м/с$$

$$9.16.\ N = \frac{1}{2}\rho lhv^3 = 100\ кВт$$

$$9.17.\ A = \mu gS(m_1 + m_2) - \frac{(\mu m_1 g)^2}{2k}$$

9.18. 30 Дж

$$9.19.\ A = \frac{1}{2}g(m_1 + m_2)(l_2 - l_1)$$

9.20. $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{N}{Pg\sqrt{1+\mu^2}}\right) - \operatorname{arctg}\mu \approx 12^0$

9.21. $A = \dfrac{5}{4} mg\,l = 1{,}2$ Дж

9.22. $F_{min} = \mu g\left(m_1 + \dfrac{1}{2} m_2\right)$

9.23. $N_{max} = N + mgv\sin\alpha \approx 59{,}6$ кВт

9.24. При $t < t_0 = \dfrac{N}{m\mu^2 g^2}$ $\quad v(t) = \mu gt$

При $t \geq t_0$ $\quad v(t) = \sqrt{\dfrac{2N}{m}\left(t - \dfrac{1}{2} t_0\right)}$

Указание: При $t < t_0$ ускорение автомобиля ограничивается силой трения между колесами и дорогой и равно μg. При $t \geq t_0$ ускорение ограничивается мощностью двигателя. В этом режиме работа двигателя полностью идет на увеличение кинетической энергии автомобиля.

9.25. $N = \dfrac{1}{2} Mgv$

Указание: Работа двигателей ракеты идет на кинетическую энергию реактивной струи: $Nt = \dfrac{\mu t v^2}{2}$ (μ - секундный расход топлива). По второму закону Ньютона: $Mgt = \mu tv$.

9.26. В 8 раз

Указание: Масса воздуха, проходящего через трубу за время t, равна ρSvt, где ρ - плотность воздуха; S - площадь трубы; v - скорость потока.

9.27. $v = \sqrt{\dfrac{v_1^2 v_2^2 (N_1 + N_2)}{N_1 v_2^2 + N_2 v_1^2}}$

9.28. $v_0 \geq \sqrt{\dfrac{2FR}{m}}$

9.29. $L = l\left(\dfrac{\sin\alpha}{\mu} - \cos\alpha\right)$;

$N_{min} = \mu Mg\sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$

9.30. Скорость выброса реактивной струи из сопла ракеты меньше первой космической скорости. Поэтому вылетевшие из ракеты газы летят в ту же сторону, что и ракета, но с меньшей скоростью. При этом в результате выброса топливо теряет кинетическую энергию. Эта энергия обеспечивает основную часть требуемой мощности при таких больших скоростях движения.

9.31. Сначала за счет работы пассажира, а затем за счет работы поезда.

Указание: Работа за бесконечно малый промежуток времени dt: $dA = FdS = F(dS_ч + dS_п) = Fdt(v_ч + v_п)$. Здесь $v_ч$ - скорость пассажира относительно поезда; $v_п$ - скорость поезда.

9.32. $A = \mu mgL$

9.33. $\eta = \dfrac{1}{1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha}$

9.34. $A_1 = \dfrac{mv^2}{2}$; $A_2 = -mv^2$

Указание: Работа силы трения, действующей на кирпич, равна изменению кинетической энергии кирпича и равна A_1. Суммарная работа всех сил трения равна $A = A_1 + A_2$. Эта работа должна быть одинаковой во всех инерциальных системах отсчета. В системе отсчета ленты транспортера работа силы трения, действующей на ленту, равна нулю. А значит полная работа равна работе силы трения, действующей на кирпич, которая в этой системе отсчета равна

$A = -\frac{mv^2}{2}$. Отсюда: $A_2 = A - A_1$.

9.35. 42 кДж; 63 кДж; 210 кДж; - 315 кДж

9.36. $N_{max} = \frac{2}{3}mg\sqrt{\frac{2}{3}gl}$; $N_{cp} = \frac{1}{2}mg\sqrt{\frac{1}{2}gl}$

Указание: Мощность силы тяжести: $N(t) = m(t)gv(t)$, где $m(t) = m\left(1 - \frac{gt^2}{2l}\right)$; $v(t) = gt$. Максимум функции N(t) можно найти, приравняв первую производную этой функции к нулю. Среднее значение: $N_{cp} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau N(t)dt$, где

$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}}$ - время падения цепочки.

9.37. $\eta = \dfrac{gH}{gH + \dfrac{8m^2}{(\pi\rho d^2)}} \approx 56\%$

Указание: Полезная работа насоса: $A_1 = mgH$, а полная работа насоса: $A_2 = mgH + \frac{mv^2}{2}$, где v - скорость течения воды по трубе.

9.38. $Q = F\left(l + \frac{F}{2k}\right) = 12$ Дж

Указание: Количество выделившейся теплоты определяется только силой трения и не зависит от силы тяжести втулки. Предположим, что втулка скользит с постоянной и очень маленькой скоростью. Это нужно для того, чтобы исключить из рассмотрения кинетическую энергию втулки, от которой ничего здесь не зависит. Работа силы, приложенной к втулке, расходуется на выделившуюся теплоту и на потенциальную энергию растяжения шнура:

$F(l+\Delta l) = Q + \frac{k\Delta l^2}{2}$, где $\Delta l = \frac{F}{k}$ - величина деформации шнура.

9.39. $v = \sqrt{\frac{2F}{\rho S}}$

Указание: Работа силы F идет на кинетическую энергию вытекающей струи воды.

9.40. В $2\sqrt{2}$ раз

Указание: См. № 9.26.

9.41. $F(x) = \frac{2ks}{S}x$

Указание: Второй закон Ньютона: $Fdt = dm \cdot v = \rho s v^2 dt$. Работа силы упругости: $F_{упр}dx = \frac{dm \cdot v^2}{2} = \frac{\rho S dx \cdot v^2}{2}$. Сила упругости: $F_{упр} = kx$.

10. Законы сохранения

10.1. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

10.2. $\approx 44{,}7$ м/с

10.3. $v_1 = m\sqrt{\dfrac{2gh}{M(M+m)}}$; $v_2 = M\sqrt{\dfrac{2gh}{M(M+m)}}$

10.4. $v_{max} = \Delta x\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

10.5. $v = \sqrt{2gl}$

10.6. 6,4 м ($\alpha \geq 45^0$)

10.7. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{\beta}$

10.8. $M = \dfrac{m(v_1 + v_2)}{v_1 - v_2} = 300$ кг

10.9. $v_1 = \dfrac{m(v+u)+Mv}{M+m}$; $v_2 = v$; $v_3 = \dfrac{m(v-u)+Mv}{M+m}$

10.10. $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} \approx 27^0$

10.11. $l_1 = \dfrac{Ml}{M+m}$; $l_2 = \dfrac{ml}{M+m}$

10.12. $m = \dfrac{1}{3}m_0$

10.13. $L = 4l$

10.14. $u = \dfrac{m_1}{m_2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

10.15. $\dfrac{35}{36}$

10.16. 10 м/с

Указание: Закон сохранения импульса для установившейся скорости движения катера v: Mv = Mv + m(v - u). Здесь Mv - установившийся импульс катера; m - масса воды, взятой катером из реки за некоторое время; u - скорость воды относительно катера.

10.17. $t=\frac{1}{2g}\left(\sqrt{5gH}-\sqrt{gH}\right)$

10.18. 16 м/с

10.19. $v=\frac{M+m}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}\approx 800$ м/с

10.20. $W=\frac{4}{3}W_1=8$ Дж

10.21. $v_{min}=\sqrt{gL\frac{M}{M+m}}$

Указание: Закон сохранения импульса: $mv\cos\alpha = Mu$, где v - скорость бросания груза; u - скорость отдачи лодки; α - угол бросания груза. Груз попадет в корзину, если:

$v\cos\alpha\cdot t_0 = L - ut_0$, где $t_0=\frac{2v\sin\alpha}{g}$ - время полета груза.

10.22. $S=\frac{H(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}{\mu}$

10.23. $\mu=\frac{H}{S}$

10.24. $\Delta x_{max}=\frac{2mg}{k}$

10.25. $F_{max}=mg\left(1+\sqrt{1+\frac{2k(h-l)}{mg}}\right)$

10.26. $\Delta x=\frac{2mg}{k}$

10.27. $A=\frac{m(M+m)gL^2}{4Mh}$

10.28. $v_{min} = 2\sqrt{gl}$; $v_{min} = \sqrt{5gl}$

10.29. $\alpha = \arccos\frac{2}{3} \approx 48^0$

10.30. $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{2} \approx 54{,}7^0$

10.31. $H = \frac{5}{3}R$

10.32. $v = \sqrt{2gl}$

Указание: В момент падения верхнего шарика на поверхность его скорость направлена строго вертикально.

10.33. $\alpha = \arccos\frac{2}{3} \approx 48^0$

Указание: В момент отрыва нижнего шарика от стенки сила натяжения или сжатия стержня равна нулю.

10.34. $v = m\sqrt{\frac{2gh}{M(M+m)}} \approx 0{,}7$ м/с

10.35. $v > \sqrt{2gh}$

10.36. $v > \sqrt{\frac{2gh(M+m)}{M}}$

10.37. $S = \frac{mv\tau}{M+m}$, если тело не переедет через горку;

$S = \frac{mv\tau}{M+m} - \frac{ML}{M+m}$, если тело переедет через горку.

Указание: Скорость центра масс системы равна $\frac{mv}{M+m}$ и все время постоянна.

10.38. $L = \frac{Mv^2}{2\mu g(M+m)}$

Указание: $mv = (M+m)u$; $\frac{mv^2}{2} = \frac{(M+m)u^2}{2} + F_{тр}L$

10.39. $v \le \frac{\mu m_1 g}{m_2}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$

10.40. $v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{gL\sin\alpha}$

10.41. $L = \frac{2m^2 l}{4\mu^2 M^2 - m^2}$

Указание: Уменьшение потенциальной энергии среднего тела mgh равно работе против сил трения $2\mu MgL$.

($h = \sqrt{(l+L)^2 - l^2}$)

10.42. $d > \frac{Mu\sqrt{v^2+u^2}}{2\mu g(M+m)}$

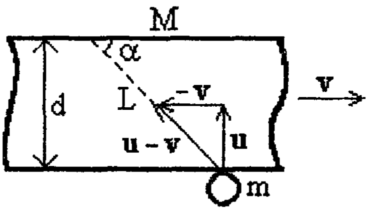

рис. 11

Указание: Центр масс системы движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0 = \frac{M\mathbf{v} + m\mathbf{u}}{M+m}$, или в скалярном виде: $v_0 = \frac{\sqrt{(Mv)^2 + (mu)^2}}{M+m}$. В системе отсчета центра масс доска и шайба движутся навстречу друг другу, то есть в этой системе траекториями движения доски и шайбы являются прямые линии. Так как после остановки шайбы скорость системы будет равна v_0, то работа против силы трения равна: $A_{тр} = \mu mgL = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} - \frac{(M+m)v_0^2}{2}$. Отсюда $L = \dfrac{M(v^2+u^2)}{2\mu g(M+m)}$ - расстояние, пройденное шайбой по доске до остановки. Начальная скорость шайбы в системе отсчета центра масс равна: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{v}_0 = \dfrac{M}{M+m}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$. А значит шайба не свалится с доски если $d > L\sin\alpha$, где $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{u}{v}$ (рис. 11).

10.43. $W = W_0 \dfrac{m_1+m_2}{m_1} = 7{,}5$ Дж

10.44. $Q = \dfrac{mv^2}{4} = 5$ Дж

10.45. 3/4

10.46. $\Delta T = \dfrac{9}{8} \cdot \dfrac{v^2}{c}$

10.47. $Q = \dfrac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{2(m_1+m_2)}$

10.48. $W_{max} = \dfrac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1+m_2)}$

10.49. Первый шар останавливается, а второй начинает двигаться в том же направлении и с той же скоростью.

10.50. Шары обмениваются скоростями.

10.51. 90^0

10.52. С той же скоростью и на таком же расстоянии друг от друга от стенки.

10.53. Скорости шариков останутся такими же, а расположение шариков и на-

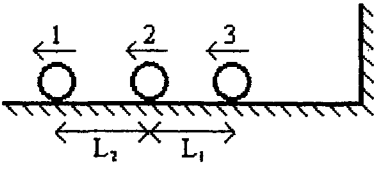

рис. 12

правление движения показано на рис. 12.

10.54. $v_1 = v\dfrac{d}{2R}$; $v_2 = v\sqrt{1-\left(\dfrac{d}{2R}\right)^2}$

Указание: Скорость первоначально неподвижного шара после удара будет направлена вдоль линии, соединяющей центры шаров в момент удара.

10.55. $\dfrac{m}{M} = \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$

10.56. $\dfrac{W}{W_0} = \dfrac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$

10.57. $W = \dfrac{1}{4}W_0$

10.58. $v_1 = -\dfrac{1}{5}v;\quad v_2 = v_3 = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}v$

10.59. $a_{max} = v\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Указание: Перейти в систему отсчета, связанную с верхним концом пружины. Ускорение груза будет максимальным когда его скорость будет равна нулю. Закон сохранения энергии начинает работать с момента отрыва груза от поверхности.

$$\frac{kx_1^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} - mgh$$

$$h = x_2 - x_1;\quad kx_1 = mg;\quad kx_2 = F_{max}$$

Из этих уравнений получается: $F_{max} = mg + v\sqrt{km}$. Максимальное ускорение: $a_{max} = \dfrac{F_{max} - mg}{m}$.

10.60. $h = \frac{1}{4}\left(H + \frac{mg}{k}\right)$

10.61. $v = \frac{m\sqrt{2gL\sin\alpha}}{m\cos\alpha}$

10.62. По очереди

10.63. Вторая

10.64. $v_0 = \sqrt{\left(\frac{Ml}{t(M+m)}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}gt\right)^2}$

10.65. Влево

10.66. $a = \frac{\mu u}{(M_0 - \mu t)} - g \approx 17{,}2$ м/с^2

Указание: Сила тяги ракеты:
$F = \mu u = M(a + g) = (M_0 - \mu t)(a + g)$.

10.67. $T = \frac{2}{3}t\frac{a+g}{a-a_0} = 120$ с

10.68. $F = \mu_2(v - u) + \mu_1 u$

Указание: За время t двигатель самолета взял из окружающей атмосферы $\mu_2 t$ кг воздуха, смешал его с $\mu_1 t$ кг топлива и эту смесь выбросил со скоростью u относительно себя. При этом скорость воздуха изменяется от нуля до v-u, а скорость топлива - от v до v-u.

10.69. $u = \frac{\rho l S v}{M}$

Указание: Центр масс системы должен находиться на одной и той же вертикали.

10.70. $u = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_2}$

Указание: В первом случае энергия порохового заряда идет только на кинетическую энергию снаряда, а во втором - на кинетическую энергию снаряда и кинетическую энергию отдачи пушки.

10.71. В 12 раз

Указание: Абсолютно неупругий удар, в котором следует учесть, что масса Земли во много раз больше массы метеорита.

10.72. $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{mv^2}{l}$

Указание: Движение системы после столкновения удобнее рассматривать в системе отсчета ее центра масс.

10.73. Неверным является утверждение, что вся работа человека при бросании камня идет на увеличение энергии камня. На самом деле часть работы человека идет на энергию отдачи поезда. Если более строго провести первое рассмотрение с учетом отдачи поезда и того, что масса поезда много больше массы камня, то получится, что конечная энергия камня равна W_2. Пусть работа, совершенная человеком равна $\frac{mu^2}{2}$. Тогда законы сохранения энергии и импульса записываются в виде:

$$\frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = \frac{Mv_1{}^2}{2} + \frac{mu_1{}^2}{2}$$

$$(M+m)v = Mv_1 + mu_1,$$

где v_1 и u_1 - скорости поезда и камня после броска. Исключая из этих уравнений v_1, после преобразований получаем:

$$m(M+m)u_1{}^2 - 2m(M+m)vu_1 + m(M+m)v^2 - Mmu^2 = 0$$

Так как $M \gg m$, то $M + m \approx M$. Тогда получается уравнение:

$$u_1^2 - 2vu_1 + v^2 - u^2 = 0$$

Решение уравнения: $u_1 = v \pm u$.

10.74. Работа, совершенная человеком при бросании не равна разности энергий камня. При бросании камня Земля испытывает отдачу и часть работы человека идет на энергию отдачи Земли. Если определить работу, совершенную человеком с учетом отдачи Земли и того факта, что масса Земли во много раз больше массы камня, то для обоих наблюдателей получится одинаковый результат.

10.75. В результате удара пули скорость грузовика слегка увеличивается. А значит при расчете количества теплоты необходимо еще учесть изменение кинетической энергии грузовика. С учетом этого факта более правильным является количество теплоты Q_2.

10.76. $k = \dfrac{T(T - 2mg)}{2mgL}$

10.77. Одновременно

10.78. $v_{min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} v$

10.79. $v = \dfrac{mgl}{kl - mg}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

10.80. $x = l\dfrac{\mu_1 + \mu_2 - 2\mathrm{tg}\alpha}{2(\mathrm{tg}\alpha - \mu_1)}$

11. Статика

11.1. $F_{AB} = 11.6$ Н; $F_{BC} = 5,8$ Н

11.2. $F \approx 73$ Н; Угол между силой **F** и силой $\mathbf{F_1}$ равен $\approx 60^0$.

11.3. Силы уравновешиваются.

11.4. $F_{AB} = 1200$ Н; $F_{BC} = 1730$ Н

11.5. $F_{AC} = mg\dfrac{AC}{AB} = 4000\text{ Н}; F_{BC} = mg\dfrac{BC}{AB} = 5400\text{ Н}$

11.6. $m_2 = m_1\dfrac{tg\beta}{tg\alpha}$

11.7. $m_1 = m_2(tg\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta) \approx 2{,}3$ кг

11.8. $N_1 = 0{,}5$ Н

11.9. 300 Н

11.10. $m = \sqrt{m_1 m_2} = 3{,}2$ кг

11.11. $F = \dfrac{MgL}{2\sqrt{4l^2 - L^2}}$

11.12. $F_{min} = \dfrac{1}{2}Mg\cos\alpha$

11.13. $T_1 = \dfrac{1}{4}g(M + 2m);\quad T_2 = \dfrac{1}{4}g(3M + 2m)$

11.14. $L = 3\dfrac{2}{3}l$

11.15. $F > \dfrac{mgb}{2a};\quad \mu > \dfrac{b}{2a}$

11.16. $\mu = \dfrac{b}{2h_0}$

11.17. $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right);\quad \mu > \dfrac{b}{a}$

11.18. $\mu > \frac{b}{a}$

11.19. $\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}(2\mu)$

11.20. $\mu > 1/2$

11.21. $h = \mu l / \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1{,}8$ м

11.22. $T = \frac{1}{2} Mg \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

11.23. См. рис. 13

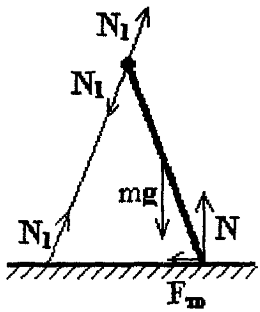

рис. 13

11.24. $T = \frac{1}{4}(m_1 + m_2) g \cdot \operatorname{tg}\alpha$

11.25. $\alpha_{\max} = 2\operatorname{arctg}\left[\frac{\mu(3m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}\right] \approx 82^0$

Указание: Сила реакции в шарнире направлена под неизвестным углом к горизонту. Поэтому уравнения моментов лучше записывать относительно шарнира. Силы трения, действующие на половинки, равны. Тогда:

$$F_{тр} l \cos\alpha + m_1 g \frac{l}{2} \sin\alpha - N_1 l \sin\alpha = 0$$

$$F_{тр} l \cos\alpha + m_2 g \frac{l}{2} \sin\alpha - N_2 l \sin\alpha = 0.$$

Кроме того: $N_1 + N_2 = g(m_1 + m_2)$.

Из этих уравнений получается:

$$N_1 = \frac{1}{4} g(3m_1 + m_2);\ N_2 = \frac{1}{4} g(m_1 + 3m_2);\ F_{тр} = \frac{g(m_1 + m_2)}{4\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Положим: $m_1 = 3m$; $m_2 = m$. Тогда $N_1 > N_2$ и условием сохранения равновесия будет: $F_{тр} \le \mu N_2$.

11.26. $\alpha > \operatorname{arctg}\frac{3}{\mu}$

11.27. $N = \frac{1}{2} mg\sqrt{5} \approx 11\,H$

11.28. $T = \frac{Mg(L+R)}{\sqrt{L(L+2R)}}$; $N = \frac{MgR}{\sqrt{L(L+2R)}}$

11.29. $T = \frac{Mg\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\mu > \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

11.30. Нет

11.31. $N = \frac{1}{4} Mg\sin 2\alpha$

11.32. На 20 см

11.33. $x = l\sqrt{3}$

11.34. $\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{2}$

11.35. $x = \frac{Rr^2}{2(R^2 - r^2)}$

11.36. $x_c = 0{,}7a$; $y_c = 0{,}5a$

11.37. $x_c = 0{,}6a$; $y_c = 0{,}4a$

11.38. а) $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{4}{3} \approx 53^0$; б) $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{2}{3} \approx 33{,}7^0$

Указание: Точка подвеса и центр масс системы находятся на одной вертикали.

11.39. $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right) \approx 5{,}5^0$

Указание: См. указание к № 11.38.

11.40. $\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{m_2'}{m_1}\mathrm{ctg}\alpha\right) \approx 79^0$; $T = \frac{m_1 g\sin\alpha}{\cos\beta} \approx 2{,}65\,H$;

будет.

11.41. 30^0 ; будет.

Указание: Линии действия силы тяжести и сил реакции плоскостей в состоянии равновесия должны пересекаться в одной точке.

11.42. $N_{min} = Mg$; $N_{max} = \dfrac{MgL}{2l}$

11.43. $F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2\left(\dfrac{R}{r}\right)^2} = 60\,H$

Указание: Сила трения F равна векторной сумме сил F_2 и $F_1\dfrac{R}{r}$.

11.44. $M = \mu mgl \cdot \sin\alpha$

Указание: Сила трения, действующая на диск, равна μmg и направлена вдоль оси диска.

11.45. $a = \dfrac{Fl}{mR}$

Указание: Если тележка начала двигаться с ускорением a, то сила, приводящая ее в движение, равна ma и приложена в оси ведущего колеса. Это значит, что если к оси ведущего колеса приложить силу - ma, то тележка будет находиться в покое.

11.46. Правая; левая.

11.47. $F = mg\dfrac{b}{a}$

Указание: Перейти в систему отсчета, связанную с ящиком. В этой системе отсчета ящик находится в равновесии, но добавляется сила инерции - ma, приложенная к центру масс ящика.

11.48. а) $a = \dfrac{1}{2}\mu g\dfrac{l}{l - \mu h}$; б) $a = \dfrac{1}{2}\mu g\dfrac{l - 2\mu h}{l - \mu h}$

Указание: Максимальное ускорение равно: $a = \mu N$, где N - сила давления ведущих колес на дорогу. Далее см. указание к № 11.47.

11.49. $\mu = \text{ctg}\alpha \dfrac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1}$; $\mu > \text{ctg}\alpha$

11.50. $L = l\sqrt{1+\mu^2}$

11.51. $\beta = \text{arctg}\left[\dfrac{b\,\text{tg}\alpha}{b - a(1+\text{tg}\alpha)}\right] \approx 36{,}2^0$

Указание: В равновесии: $mg\text{Sin}\alpha = F_{\text{тр}}$. Уравнение моментов относительно колес: $mgd = Na$, где N - сила давления упора на поверхность; $d = \dfrac{1}{2}\cos\alpha(b \mp a \cdot \text{tg}\alpha)$ - плечо действия силы тяжести относительно колес. Ящик начинает скользить, когда $F_{\text{тр}} = \mu N$.

11.52. $\text{tg}\alpha = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$

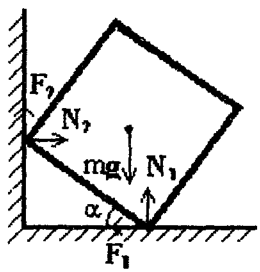

рис.14

Указание: На кубик действуют силы (рис. 14): mg - сила тяжести; N_1 и N_2 - силы реакции; F_1 и F_2 - силы трения. Условия равновесия:

$$F_2 + N_1 = mg$$
$$F_1 = N_2$$
$$mgd = F_2 a\cos\alpha + N_2 a\sin\alpha$$
$$d = \frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

На грани скольжения: $F_1 = \mu N_1$; $F_2 = \mu N_2$.

11.53. L = 4R; устойчиво.

11.54. $\mu = \dfrac{3\sqrt{3}}{5} \approx 1{,}04$

11.55. $T = \dfrac{mg}{2\sqrt{3}}$

11.56. $a = g\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$

Указание: В неинерциальной системе отсчета обруча равнодействующая сил тяжести и инерции должна проходить через точку опоры обруча.

12. Механика твердого тела. Момент импульса

12.1. Увеличится

12.2. $0{,}5\omega$

12.3. mv^2

12.4. $a = \dfrac{1}{2} g \sin\alpha$; $\mu \geq \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$

12.5. $\mu = \dfrac{\omega R}{gt}$

12.6. $J = \dfrac{m_1 m_2 l^2}{m_1 + m_2}$

12.7. $J = \dfrac{1}{12} m l^2 \sin^2\alpha$

12.8. $J = \mu b^2\left(\dfrac{2}{3}b + a\right)$

12.9. $J_0 = \dfrac{1}{3} m_1 l_1^2 + \left(\dfrac{1}{12} m_2 l_2^2 + m_2 l_1^2\right)$

$$12.10.\ J_0=\frac{1}{3}m_1 l_1^2+\left(\frac{1}{12}m_2 l_2^2+m_2\left(l_1^2+\left(\frac{l_2}{2}\right)^2\right)\right)$$

$$12.11.\ J_0=\frac{1}{2}m\left(R^2+r^2\right)-\frac{mr^2a^2}{R^2-r^2}$$

Указание: Если в отверстие вставить вырезанный из него диск, то получится сплошной диск, момент инерции которого складывается из момента инерции большого диска с отверстием и момента инерции маленького диска относительно центра большого диска.

$$12.12.\ а)\ J_1=\frac{1}{2}ml^2;\ б)\ J_2=\frac{1}{2}ml^2;\ в)\ J_3=\frac{5}{4}ml^2$$

$$12.13.\ a=\frac{5}{7}g\sin\alpha;\quad \mu\ge\frac{2}{7}\operatorname{tg}\alpha$$

$$12.14.\ \cos\alpha=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{v^2}{gl}$$

$$12.15.\ v=\sqrt{3gl}$$

12.16. 100 см

$$12.17.\ T=\frac{4}{3}mg$$

$$12.18.\ T=\frac{1}{3}mg$$

$$12.19.\ T=\frac{1}{4}mg$$

$$12.20.\ a=\frac{2g(m_2-m_1)}{2m_1+2m_2+m};\ T_1=\frac{m_1g(4m_2+m)}{2m_1+2m_2+m};$$

$$T_2=\frac{m_2g(4m_1+m)}{2m_1+2m_2+m}$$

12.21. $\mu \ge \frac{F}{3mg}$

12.22. $v_1 = \frac{1}{3}v; \quad v_2 = \frac{2}{3}v$

Указание: После столкновения первый цилиндр остановится, продолжая вращаться с угловой скоростью v/R, а второй - приобретет поступательную скорость v при отсутствии вращения. За счет проскальзывания первый цилиндр будет разгоняться, а второй замедляться. Скорости цилиндров установятся когда прекратится проскальзывание.

12.23. $n = \frac{\omega^2 R(1+2\mu^2)}{8\pi\mu g(1+\mu)}$

12.24. $\omega = \frac{6mv}{l(M+3m)}$

12.25. $T = \frac{m\omega_0{}^2 R_0{}^4}{R^3}$

12.26. $N(t) = mgRt$

12.27. $v = \sqrt{\frac{1}{2}gh}$

Указание: Так как удар упругий, то кинетическая энергия стержня перед ударом $\frac{mv_0{}^2}{2}$ равна его кинетической энергии после удара, которая равна сумме энергии движения центра масс стержня $\frac{mv^2}{2}$ и энергии его вращения вокруг центра масс $\frac{J\omega^2}{2}$. В результате удара о стол стержень приобретает момент импульса $J\omega = F\tau\frac{l}{2}$, где $F\tau$ - импульс силы удара; l - длина стержня. Кроме того, изменение импульса стержня $m(v_0 - v)$ равно импульсу силы удара.

12.28. $\omega = \dfrac{MmvR}{J(M+m)}$

Указание: Центр масс системы будет все время двигаться равномерно со скоростью $\dfrac{mv}{M+m}$ вдоль линии центра масс, которая проходит на расстоянии $\dfrac{mR}{M+m}$ от центра лабиринта. После остановки шарика центр лабиринта переместится на линию центра масс. Закон сохранения момента импульса следует записать относительно этой линии.

12.29. $\omega = \dfrac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$; $Q = \dfrac{J_1 J_2(\omega_2 - \omega_1)^2}{2(J_1 + J_2)}$

12.30. $v_{min} = \dfrac{M}{3m}\sqrt{\dfrac{1}{2}gl}$

Указание: Движение стержня сразу после удара можно представить как движение центра масс стержня ($m << M$) со скоростью $\dfrac{mv}{M+m}$ и вращение вокруг центра масс. Стержень сразу оторвется от поверхности, если в системе центра масс центростремительное ускорение его нижнего конца будет больше, чем g. Закон сохранения момента импульса: $\dfrac{1}{2}ml^2 = \dfrac{1}{12}Ml^2\omega$.

13. Гидростатика

13.1. $P = \dfrac{E}{S}$; не изменится

13.2. $P = \dfrac{F}{S_1 - S_2}$

13.3. $h = \dfrac{\rho_B H}{2\rho_{рт}} = 5$ мм

13.4. 6,25 мм

13.5. $h = \dfrac{m}{\rho(S_1 + S_2)}$

13.6. $h = \dfrac{2\rho_{рт}}{2\rho_{рт} - \rho_B} \approx 27$ см

13.7. На пятом

13.8. $P = \dfrac{2\rho_1\rho_2 gH}{\rho_1 + \rho_2} \approx 3{,}8 \cdot 10^3$ Па

13.9. 750 кг/м^3

13.10. $\beta = \alpha \dfrac{\rho_B}{\rho_{сп}} \approx 0{,}94$

13.11. $\alpha = \dfrac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_B (V_1 + V_2)} = 0{,}75$

13.12. $\rho = \dfrac{P_1\rho_2 - P_2\rho_1}{P_1 - P_2}$

13.13. $\rho_2 = \rho_1 \dfrac{P - P_2}{P - P_1}$

13.14. $\rho = \dfrac{\rho_1 n + \rho_2}{n+1}$

13.15. $h = h_0 + \Delta h \dfrac{\rho_В}{\rho_Л} = 15{,}25$ см

13.16. $m_C = \dfrac{\rho_C\left[P_1\rho_м - P(\rho_м - \rho_В)\right]}{g\rho_В(\rho_C - \rho_М)} \approx 0{,}211$ кг;

$m_М = \dfrac{P}{g} - m_C \approx 0{,}082$ кг

13.17. 0,8 м

13.18. $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}$

13.19. $m_{max} = LS(\rho_В - \rho_Д) = 70$ кг

13.20. $\dfrac{V_2}{V} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \dfrac{mg}{mh - F}$

13.21. 2500 кг/м^3

13.22. 0,625

13.23. 0,7 м

13.24. $V_П \geq V\left(1 - \dfrac{\rho_в}{\rho_ж}\right)$

13.25. $h = \dfrac{\sigma}{g(\rho_{ст} - \rho_в)} \approx 7{,}2$ км

13.26. $T = \rho_В g S \Delta h$

13.27. $m_м = m\dfrac{\left(\dfrac{\rho_в}{\rho_а}\right) - \left(\dfrac{\rho_в}{\rho_ж}\right)}{1 - \left(\dfrac{\rho_в}{\rho_м}\right)}$

13.28. $\frac{l_1}{l_2} = 1 + \frac{4\pi r^3(2\rho - \rho_В)}{3m} \approx 1{,}6$

13.29. $H = h\frac{\rho_Д - \rho_ж}{\rho_ж} \cdot \frac{D^2}{d^2}$

13.30. $h_3 = 2h_2\left(\frac{\rho_в}{\rho_Д} - 1\right) - h_1 = 10\,см$

13.31. $\Delta h = \frac{m}{\rho_В(S_1 + S_2)}$

13.32. $P = P_A - \rho_В gh - \frac{Mg}{S}$

13.33. $v = 0{,}5v_0$

Указание: При установившемся движении сила тяжести, сила Архимеда и сила сопротивления уравновешивают друг друга.

13.34. $H = h + \frac{M}{\rho_В S}$

Указание: Вода начнет приподнимать сосуд и вытекать из - под него когда сила давления воды снизу вверх на дно сосуда $\rho_В g(H - h)$ станет равна силе тяжести сосуда Mg.

13.35. $H = \frac{2}{3}R + \frac{M}{\pi\rho_В R^2}$

Указание: Сила, с которой полусфера и вода давят на поверхность, равна: $N + \rho_В gHS$, где N - сила давления полусферы; $S = \pi R^2$. С другой стороны, эта сила равна суммарной силе тяжести системы: $g(M + \rho_в V)$ - где V - объем полусферы (массу воды в трубке не учитываем). Когда вода начнет приподнимать полусферу и вытекать из - под нее, сила давления полусферы на поверхность станет равна нулю.

13.36. $\cos\alpha = \left(1 - \frac{h}{l}\right)\sqrt{\frac{n}{n-1}}$

13.37. а) Никуда; б) из 2 в 1; в) возникнет циркуляция: внизу из 1 в 2, вверху из 2 в 1.

13.38. Из 1 в 2

13.39. $T = \frac{1}{2}(m_2 - m_1)g$

13.40. 810 кг/м^3

13.41. $A = \frac{m^2 g}{2\rho_B S}\left(\frac{\rho_B}{\rho_Л} - 1\right)^2 \approx 30{,}9$ Дж

13.42. $A = \frac{1}{2}\rho g h^2 S_1\left(1 - \frac{S_1}{S}\right)$

Указание: Работа равна разности потенциальных энергий системы в конечном и начальном состояниях. На рис. 15 показана система в начальном и конечном состояниях. Начальное состояние показано пунктиром. Если за ноль потенциальной энергии взять нижнюю грань поршня в конечном состоянии, то начальная и конечная энергии системы равны:

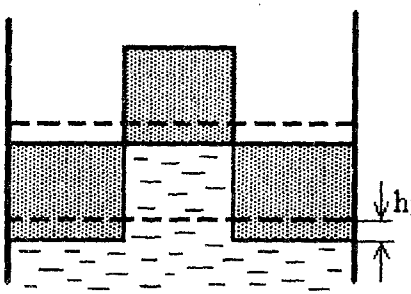

рис. 15

$$W_1 = (m_1 + m_2)g\left(h_1 + \frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{2}\rho S g h_1^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2}m_1gh + \frac{3}{2}m_2gh + \frac{1}{2}\rho S_1gh^2,$$

где m_1 и m_2 - массы поршня и пробки; h_1 - высота, на которую опустился поршень при вытаскивании пробки. Дополнительные соотношения:

$$Sh_1 = S_1h; \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{S - S_1}{S_1}.$$

13.43. $h = R$

13.44. $N = \frac{mgd(1-\alpha)}{2\sqrt{l^2 - d^2}}$

13.45. Первое

Указание: Устойчивым будет положение, в котором потенциальная энергия системы меньше. Так как энергия кубика в обоих положениях одинакова, то меньшей энергией будет обладать то положение, в котором потенциальная энергия воды меньше. Но потенциальная энергия воды равна ее энергии без погруженного кубика минус энергия воды в объеме погруженной части кубика. Значит устойчивым будет положение, в котором центр масс погруженной части кубика выше. Центр масс однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан.

13.46. $\rho = \frac{3}{2}\rho_В = 1500$ кг/м^3

13.47. Вертикальное положение не может быть устойчивым.

13.48. $m = \frac{1}{4}M$

Указание: Условия равновесия доски с лягушкой:

$$(M + m)g = F$$

$$Mgx = mg\left(\frac{1}{2}l - x\right),$$

где $x = OO_1$, а O и O_1 - точки приложения силы тяжести и силы Архимеда (рис. 16). Сила Архимеда: $F = \rho_В V_{пог} g$. Погруженный объем разобьем на два объема: V_1 - прямоугольная часть погруженного объема (считаем, что длина доски - l много больше ее толщины - b, а значит угол наклона доски очень мал); V_2 - треугольная часть погруженного объема. Если обозначить ширину доски a, то $V_1 = la\Delta b$; $V_2 = \frac{1}{2}la(b - \Delta b)$. Точкой приложения силы Архимеда является центр масс воды в объеме погруженной части доски. С учетом разбиения погруженного объема доски на V_1 и V_2 получаем: $x = \dfrac{V_2\left(\frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l\right)}{V_1 + V_2}$ (с учетом того, что центр масс треугольной части погруженного объема находится на расстоянии $\frac{1}{3}l$ от ее основания). И наконец:

$$M = \rho lab = \frac{1}{2}\rho_В lab.$$

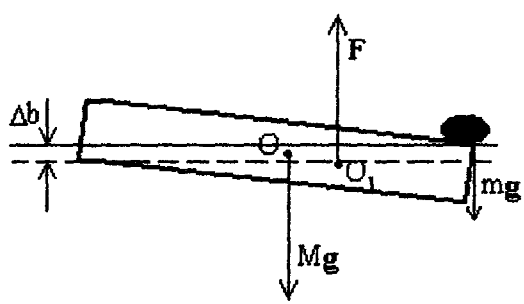

рис. 16

13.49. $F = \frac{1}{2}mg$

13.50. $m = 2\left(M - V\left(\rho_В - \rho_Г\right)\right)$

13.51. Верхний шарик будет отклоняться от оси, а нижний - к оси.

13.52. $F = \frac{mg}{4\sqrt{3}} \approx 0{,}144mg$

13.53. $m = \frac{\rho_м \rho_в Sh}{\rho_в - \rho_м} = 12$ кг

13.54. $\rho = \frac{3}{4}\rho_В = 750$ кг/м^3

13.55. $F = 2ma$

13.56. $h = l\cos\alpha\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_В}}\right) = 0{,}35$ м

13.57. $F \approx \frac{4}{3}\pi\rho\omega^2 r^3 R$

13.58. Параллельно наклонной плоскости.

14. Механические колебания

14.1. Не будет
14.2. Не изменится
14.3. Поднять в гору
14.4. Сменить темп хода

14.5. Являются; $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

14.6. $x(t) = v\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$

$$v(t) = v\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$$

$$a(t) = -v\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$$

14.7. $\omega = \frac{v_{max}}{A}$

14.8. $\omega = \frac{a_{max}}{v_{max}}$; $\quad A = \frac{v_{max}^{2}}{a_{max}}$

14.9. 9 см

14.10. 5 с

14.11. $\frac{1}{3}$

14.12. 2

14.13. $\approx$ 6,4 м/с

14.14. $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

14.15. $T = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

14.16. Не может

14.17. $m = \frac{kA}{g}$

14.18. $x(t) = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}\cdot t\right) \approx 0{,}1\sin(10t)$ м

14.19. $A_{max} = \mu g\frac{M+m}{k}$

14.20. $A_{max} = \dfrac{2\mu mg}{|k_1 - k_2|}$

14.21. T

14.22. а) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$; б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$

14.23. $h_{max} = \dfrac{2mg}{k}$

14.24. $\Delta h = \dfrac{g\left(T_2^{\,2} - T_1^{\,2}\right)}{4\pi^2}$

14.25. $A = \sqrt{l^2 + \dfrac{mv^2}{2k}} \approx 4$ см

14.26. $A_2 = A_1\sqrt{\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}}$

14.27. $\omega = \sqrt{\dfrac{v_1^{\,2} - v_2^{\,2}}{x_2^{\,2} - x_1^{\,2}}}$; $A = \sqrt{x_1^{\,2} + \dfrac{v_1^{\,2}}{\omega^2}} \approx 3{,}1$ см;

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} \approx 4{,}1$ с

14.28. $x_2 = x_1 \dfrac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} = 2{,}8$ см

14.29. $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega x_0}{v_0}\right) = \dfrac{\pi}{4}$; $A = \dfrac{x_0}{\sin\varphi}$;

$x = A\sin(\omega t + \varphi) \approx -29$ см; $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \approx -81{,}1$ см/с

14.30. $A = \dfrac{2x_1^{\,2}}{\sqrt{4x_1^{\,2} - x_2^{\,2}}} \approx 8{,}3$ см

14.31. $A=\sqrt{\frac{x_1^2v_2^2-x_2^2v_1^2}{v_2^2-v_1^2}}$; $\omega=\sqrt{\frac{v_2^2-v_1^2}{x_1^2-x_2^2}}$

14.32. 0,45 с

14.33. 6,3 см

14.34. $N_{max}=\frac{1}{2}mA^2\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$

14.35. $\frac{W_K}{W_П}=tg^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

14.36. $\frac{1}{4}T$

14.38. По сфере быстрее

14.39. $T=\pi\sqrt{\frac{R_З}{g}}\approx 42$ мин

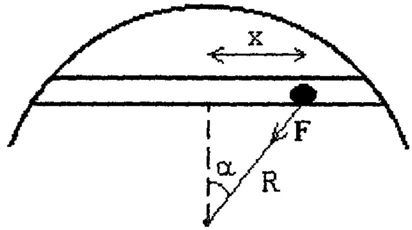

рис. 17

Указание: Второй закон Ньютона: $ma=F\sin\alpha$, где $F=G\frac{Mm}{R^2}$ - сила тяжести, действующая на тележку в тоннеле ($M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$, где ρ - средняя плотность Земли). Отклонение тележки от положения равновесия $x=R\sin\alpha$ (рис. 17). Отсюда получаем: $a=x''(t)=\frac{4}{3}\pi G\rho x$ - уравнение гармонических колебаний.

14.40. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{2\mu g}}$

Указание: Если центр доски не совпадает с серединой расстояния между центрами цилиндров, то силы давления доски на цилиндры будут разные, а значит разными будут и силы трения, действующие на доску со стороны цилиндров. Если связать ускорение доски с величиной смещения центра доски от средней точки, то получится уравнение гармонических колебаний.

14.41. Уменьшится

14.42. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho_B g S}}$

14.43. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l(\rho_1 + \rho_2)}{2g(\rho_2 - \rho_1)}}$

14.44. $A = \sqrt{\dfrac{mgh}{2k} + \left(\dfrac{mg}{4k}\right)^2}$

14.45. $\Delta h_{max} = \dfrac{mg}{k} + \sqrt{\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2 + \dfrac{2m^2gh}{k(M+m)}}$

Указание: После падения шарика возникнут колебания, амплитуду которых найдем из закона сохранения энергии: $\dfrac{(M+m){v_1}^2}{2} + \dfrac{k\Delta h^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2}$, где $v_1 = \dfrac{mv}{M+m} = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$ - скорость чашки сразу после прилипания шарика; $\Delta h = \dfrac{mg}{k}$ - величина смещения положения равновесия чашки, связанная с увеличением ее массы. Искомая высота равна $\Delta h + A$.

14.46. а) $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; б) $T = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; в) $T = 16\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; г) $T = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; д) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{5m}{k}}$; е) $T = \pi\sqrt{\dfrac{5m}{k}}$

Указание:

в) Если мы опустим груз вниз на величину x относительно положения равновесия, то пружина растянется на величину $\Delta x = \frac{1}{8}x$. При этом возвращающая сила, действующая на груз, будет равна: $F = \frac{1}{8}F_{упр} = \frac{1}{8}k\Delta x$.

д) Если мы опустим груз вниз на величину x относительно положения равновесия, то верхняя пружина растянется на Δx_1, а нижняя - на Δx_2. Причем $x - \Delta x_2 = 2\Delta x_1$. Кроме того: $2k\Delta x_2 = k\Delta x_1$. Возвращающая сила, действующая на груз, равна: $k\Delta x_2$.

14.47. $F_{max} = mg\frac{M+2m}{M+m}$

14.48. $T = 2\pi\sqrt{\frac{R(M+m)}{mg}}$

14.49. Колебания гармонические; A = 5 см

14.50. $\frac{1}{2}T$

14.51. $T_{max} - T_{min} = \frac{3}{2}\left(\frac{A}{l}\right)^2$

Указание: Если $\alpha \ll 1$, то $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

14.52. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \sqrt{1 - \frac{x}{l}}$

Указание: См указание к № 14.51.

14.53. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$

14.54. $T = 2\pi\sqrt{\frac{V}{gS(1+\cos\alpha)}} \approx 0{,}83$ с

14.55. $A = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} = 2{,}5$ см ; $v_{max} = \frac{k_2 a}{\sqrt{m(k_1 + k_2)}} = 1$ м/с

14.56. $T = T_0\sqrt{\frac{\text{tg}\alpha}{\mu}}$

Указание: Период колебаний математического маятника равен: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{эф}}}$, где $g_{эф}$ - эффективное ускорение свободного падения, то есть ускорение, с которым начнет двигаться тело, если предоставить ему возможность свободно двигаться. В системе отсчета неподвижного бруска $g_{эф1} = g\sin\alpha$, а в системе отсчета движущегося бруска $g_{эф2} = g\sin\alpha - a$, где $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

14.57. $A_{max} = \frac{3mg}{k}$

14.58. $t = \frac{2L}{v} + \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

14.59. $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + 2kl}}$

Указание: При отклонении шарика на малый угол α на него действует возвращающая сила: $F \approx mg\alpha + 2kx$, где $x \approx \alpha l$.

14.60. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$

Указание: Центр масс системы неподвижен. Колебания системы можно представить как колебания груза m_1 на пружине длиной $l_1 = l\frac{m_2}{m_1 + m_2}$, или колебания груза m_2 на пружине длиной $l_2 = l\frac{m_1}{m_1 + m_2}$, где l - полная длина пружины. Из закона Гука: $\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$ получается: $k_{1,2} = k\frac{l}{l_{1,2}}$ - жесткость части пружины длиной $l_{1,2}$.

14.61. $T = 2\pi\sqrt{\frac{lM}{g(M+m)}}$

Указание: Так как трения нет, то центр масс системы находится на одной вертикали. А значит колебания маятника происходят на нити длиной l_1, равной расстоянию от центра масс системы до груза m.

14.62. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

14.63. $T = \frac{T_0}{\sqrt{\cos\alpha}}$

Указание: В системе отсчета скатывающейся тележки "эффективное" ускорение свободного падения равно $g\cos\alpha$.

14.64. $H \approx 1{,}94h$

Указание: Периоды колебаний маятника часов: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ - неподвижных часов; $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$ - на участке равноускоренного подъема; $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$ - на участке равнозамедленного подъема. За время подъема до высоты h часы ушли вперед на $\Delta t = \dfrac{t_1}{T_1}(T_0 - T_1)$, а за время подъема от высоты h до высоты H они отстали на ту же $\Delta t = \dfrac{t_2}{T_2}(T_2 - T_0)$, где t_1 и t_2 - времена равноускоренного и равнозамедленного движения.

14.65. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4ml}{4mg + kl}}$

Указание: При отклонении системы на малый угол α от вертикали второй закон Ньютона можно записать в виде:

$ma = mg\alpha + \dfrac{1}{2}k\Delta l$, где $\Delta l = \dfrac{1}{2}l\alpha$ - удлинение пружины.

14.66. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\sin\alpha}}$

Указание: Колебания такого маятника аналогичны колебаниям маятника на наклонной плоскости (см. № 14.56).

14.67. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{g}}$

Указание: Через две неподвижные точки А и С проходит ось вращения системы (см. № 14.66).

14.68. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}}$

Указание: Уравнение движения системы: $J\varepsilon = M$, где $J = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$ - момент инерции; $M = (m_1 l_1 - m_2 l_2)\alpha$ - возвращающий момент сил при малых углах отклонения α.

14.69. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{5l}{6g}}$

14.70. $T = T_0 \dfrac{\sqrt{l_1 l_2}}{l}$

Указание: Период колебаний груза во втором случае равен: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$, где $k_{1,2} = k\dfrac{l}{l_{1,2}}$ - жесткость получившихся пружин; k - жесткость исходной пружины.

14.71. $BC = \dfrac{gT^2(M+m)}{4\pi^2 M}$

Указание: Так как нить АВ все время вертикальна, то центр масс системы должен находиться на одной вертикали.

14.72. Траекторией будет окружность; $T = \dfrac{2\pi v}{g\alpha}$

14.73. Траекторией является окружность радиусом A; $a = \omega^2 A$

14.74. $\dfrac{v^2}{A^2\omega^2} + \dfrac{x^2}{A^2} = 1$ - уравнение эллипса;

$a(x) = -\omega^2 x$ - уравнение прямой.

Графики v(x) и a(x) приведены на рис. 18

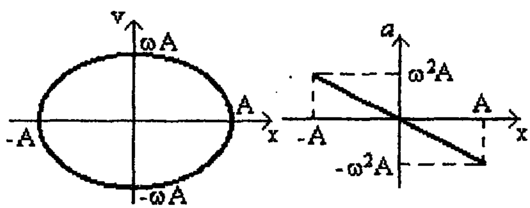

рис. 18

14.75. $y = A - \dfrac{2x^2}{A}$ - парабола

14.76. Увеличится

14.77. $T = \sqrt{2} \cdot T_0$

14.78. Часы начнут спешить

14.79. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{3g}}$; $W = \dfrac{1}{4}mgl\alpha^2$

14.80. $T = \dfrac{4\pi}{\omega}$

Указание: По закону сохранения энергии: $2mgl = \dfrac{J\omega^2}{2}$, где l - расстояние от оси вращения до центра масс. При малых колебаниях уравнение движения: $J\varepsilon = M$, где $M = mgl\alpha$ - возвращающий момент сил.

14.81. $\omega = \sqrt{\dfrac{J_1\omega_1^{\,2} + J_2\omega_2^{\,2}}{J_1 + J_2}}$

Указание: При малых колебаниях твердого тела уравнение движения записывается в виде: $J\varepsilon = M \approx mgl\alpha$, где m - масса тела; l - расстояние от центра масс тела до оси вращения. Значит частота колебаний определяется: $\omega^2 = \dfrac{ml}{J}$. После соединения тел их масса будет равна $m_1 + m_2$, момент инерции - $J_1 + J_2$, а расстояние от общего центра масс до оси вращения - $\dfrac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2}$.

14.82. $x = L\dfrac{6 - \sqrt{12}}{12} \approx 0{,}21L$

Указание: Определить зависимость частоты колебаний от x ($\omega(x)$) и приравнять первую производную этой функции к нулю.

14.83. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

14.84. $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$; $A = \frac{3\mu mg}{k}$

Указание: Уравнения движения цилиндра:

$$ma = F - F_{тр}$$

$$J\varepsilon = F_{тр}R,$$

где $J = \frac{1}{2}mR^2$; $a = \varepsilon R$; $F = kx$ - сила упругости.

14.85. $T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$

Указание: Если отклонить цилиндр на малый угол α от положения равновесия, то его потенциальная энергия будет равна:

$$W_П = mgh = vg(R-r)(1-\cos\alpha) \approx \frac{1}{2}mg\alpha^2(R-r)$$

(при малых углах $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$). Кинетическая энергия цилиндра при прохождении положения равновесия равна:

$$W_K = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Но для гармонических колебаний: $v_{max} = A\omega_0$, где v_{max} - амплитуда скорости; A - амплитуда отклонения; ω_0 - циклическая частота колебаний. В данном случае:

$v_{max} = v$; $A = \alpha(R-r)$. Кроме того по закону сохранения энергии: $W_K = W_П$, а $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

14.86. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$

Указание: Воспользоваться методом, предложенным в № 14.85.

14.87. $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}}$

Указание: Уравнение движения поезда при въезде в гору:

$$Ma = mg\sin\alpha = \frac{M}{L}lg\sin\alpha,$$

где l - длина части поезда, находящаяся на склоне. Уравнение: $a = \frac{g\sin\alpha}{L}l$ совпадает с уравнением гармонических колсбаний с частотой $\omega = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{L}}$.

14.88. $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$

Указание: См. указание к № 14.87.

14.89. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{W_0 a^2}}$

Указание: Для малых отклонений: $W \approx \frac{W_0 a^2 x^2}{2}$ (см. указание к № 14.51), а для груза на пружине: $W = \frac{kx^2}{2}$.

14.90. Невозможны

Указание: При отклонении груза на малую величину x от положения равновесия, ускорение груза оказывается пропорциональным x^3.

СОДЕРЖАНИЕ

Отпечатано в Загорской типографии. Заказ 599