В. Г. КАЦ, П. ЧЕН

КВАНТОВЫЙ АНАЛИЗ

Перевод с английского Ф. Ю. Попеленского и Ж. Г. Тотровой

Москва
Издательство МЦНМО
2005

Universitext

Victor Kac Pokman Cheung

Quantum Calculus

Springer

УДК 512.81+517.2
ББК 22.16, 22.176
К 30

Издание осуществлено при поддержке РФФИ (издательский проект номер 04-01-14096).

РФФИ

Кац В. Г., Чен П.

К 30 Квантовый анализ / перевод с англ. Ф. Ю. Попеленского и Ж. Г. Тотровой — М.: МЦНМО, 2005. — 128 с.

ISBN 5-94057-167-0

В книге рассмотрены основы квантового анализа. Последовательно проведена аналогия с классическим анализом, рассмотрены многочисленные приложения в теории чисел и комбинаторике.

Книга адресована широкому кругу специалистов в области математики, физики, а также computer since, она доступна студентам младших курсов.

ББК 22.16, 22.176

Translation from the English language edition: *Quantum Calculus* by Vicktor Kac and Pokman Cheung.

ISBN 0-387-95341-8 (англ.)

ISBN 5-94057-167-0

Оглавление

Введение

Всем, кто хоть немного знаком с математическим анализом, хорошо известно выражение

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Его предел при $x \to x_0$, если он существует, называется производной $\frac{df}{dx}$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Подставим в наше выражение $x = qx_0$ или $x = x_0 + h$. Тогда мы получим производную функции $f(x)$, если перейдем к пределу при $q \to 1$ или, соответственно, $h \to 0$.

Что произойдет, если мы не станем переходить к пределу и, более того, зафиксируем $q \neq 1$ и, соответственно, $h \neq 0$? Тогда, разумеется, никакой производной в обычном ее понимании не получится. Тем не менее, оказывается, существует теория — она называется квантовым анализом, — в которой выражения $D_q f(x_0) = \frac{f(qx_0)-f(x_0)}{qx_0-x_0}$ и $D_h f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ играют роль производных. В этой книге мы рассмотрим два варианта такой теории: q-анализ, основанный на производной D_q, и h-анализ, в котором в качестве производной используется D_h.

Мы будем развивать квантовый анализ, подчеркивая его аналогию с обычным или классическим анализом. В некоторых случаях эта аналогия будет подсказывать нам удачные определения и формулировки теорем. Мы покажем, что квантовый анализ, несмотря на формальный характер его построения, имеет многочисленные важные приложения в комбинаторике, теории чисел и т. д.

Производная D_q (в дальнейшем мы будем называть ее q-производной) функции x^n равна $[n]\,x^{n-1}$, где

$$[n] = \frac{q^n-1}{q-1}.$$

Величину $[n]$ естественно рассматривать как q-аналог числа n; это означает, в частности, что n — это предел $[n]$ при $q \to 1$.

В комбинаторике важную роль играет функция

$$(x-a)_q^n = (x-a)\,(x-qa)\ldots(x-q^{n-1}a),$$

которая естественно появляется при попытках найти q-аналог бинома; иными словами, поведение $(x-a)_q^n$ относительно q-дифференцирования аналогично тому, как $(x-a)^n$ ведет себя при взятии обычной производной. Заметим в этой связи, что общепринятое обозначение $(a;q)_n$ для q-бинома не совсем удачно.

Затем мы выведем q-аналог формулы Тейлора — в ней участвует q-бином. Интересно отметить, что из q-формулы Тейлора можно очень легко извлечь многие результаты XVIII и XIX вв., например: тождества Эйлера для q-экспоненциальных функций, формулу бинома Гаусса и формулу Гейне для q-гипергеометрической функции. Коэффициенты в формуле бинома Гаусса

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} q^{j(j-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} a^j x^{n-j}$$

являются q-аналогами биномиальных коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!}, \quad \text{где } [k]! = [1]\cdot[2]\cdot\ldots\cdot[k].$$

Изучая их, мы заодно получим интерпретацию этих величин в терминах геометрии конечномерных линейных пространств над конечными полями.

Тождества Эйлера приводят к знаменитому тождеству Якоби для тройного произведения, а формула Гейне приводит к замечательной формуле произведения Рамануджана.

Установив все эти факты, мы получим множество приложений, открыв заново некоторые знаменитые результаты, полученные в XVIII и XIX вв.: рекуррентную формулу Эйлера для классической функции разбиения, формулу Гаусса для количества представлений целого числа в виде суммы двух квадратов, формулу Якоби для количества представлений целого числа в виде суммы четырех квадратов и т. д. Особыми случаями двух последних результатов являются, конечно, теорема Ферма, утверждающая, что нечетное простое число p можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда $p-1$ делится на 4, и теорема Лагранжа о том, что любое положительное целое число является суммой квадратов четырех целых чисел.

Возвращаясь от приложений к q-анализу, мы обратимся к q-первообразной и q-интегрированию. Последнее было введено Ф. Г. Джексоном в начале XX в.: он первым систематически разрабатывал q-анализ. Изучение q-анализа мы закончим исследованием q-аналогов гамма- и бета-функций Эйлера.

Квантовый h-анализ достаточно сильно отличается от q-анализа, несмотря на их формальную аналогию. Прежде всего, отметим, что h-анализ — это исчисление конечных разностей. Систематическая аналогия с классическим анализом придает исчислению конечных разностей большую прозрачность. Например, h-формула Тейлора — это не что иное, как интерполяционная формула Ньютона, а h-интегрирование по частям — преобразование Абеля. Мы покажем, что определенный h-интеграл является интегральной суммой Римана, поэтому аналог формулы Ньютона—Лейбница для h-исчисления позволит нам вычислять конечные суммы.

Мы проведем такое вычисление для сумм n-х степеней последовательных целых чисел, используя h-интеграл функции x^n при $h = 1$. Это приведет нас естественным образом к числам Бернулли и многочленам Бернулли. Непосредственное отношение к ним имеет формула Эйлера—Маклорена, речь о которой идет в конце книги.

В настоящей книге используются лишь некоторые начальные сведения из анализа и линейной алгебры, и адресована она в первую очередь студентам (второй из авторов был студентом при подготовке настоящей книги). Эта книга основана на лекциях и семинарах, проведенных первым автором в Массачусетском технологическом институте: на части курса лекций по квантовым группам осенью 1993 г., на семинаре по анализу осенью 1996 г. и на семинаре для первокурсников по квантовому анализу весной 2000 г., где второй автор был самым активным участником. Мы признательны за помощь Программе поддержки студенческих исследований. Мы также благодарны Дэну Струку за весьма полезные советы.

При написании главы, посвященной формуле Эйлера—Маклорена, мы пользовались неопубликованными лекционными заметками Хайнса Миллера, за что хотим выразить ему благодарность. Остальные использованные источники перечислены в конце книги.

§ 1. Квантовые производные

Как было сказано во введении, мы будем изучать два варианта квантового анализа: q-анализ и h-анализ. Начнем с понятия квантового дифференциала.

Определение. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$. Ее *q-дифференциалом* будем называть выражение

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x), \tag{1.1}$$

а ее *h-дифференциалом* — выражение

$$d_h f(x) = f(x+h) - f(x). \tag{1.2}$$

Так, например, $d_q x = (q-1)x$ и $d_h x = h$. Интересное отличие квантовых дифференциалов от обычного заключается в отсутствии симметрии в формуле для дифференциала произведения двух функций. В самом деле,

$$\begin{aligned} d_q(f(x)\,g(x)) &= f(qx)\,g(qx) - f(x)\,g(x) = \\ &= f(qx)\,g(qx) - f(qx)\,g(x) + f(qx)\,g(x) - f(x)\,g(x), \end{aligned}$$

следовательно,

$$d_q(f(x)\,g(x)) = f(qx)\,d_q g(x) + g(x)\,d_q f(x); \tag{1.3}$$

аналогично

$$d_h(f(x)\,g(x)) = f(x+h)\,d_h g(x) + g(x)\,d_h f(x). \tag{1.4}$$

Тем не менее, в формулах (1.3) и (1.4) функции $f(x)$ и $g(x)$ равноправны, поэтому также верны равенства

$$\begin{aligned} d_q(f(x)\,g(x)) &= g(qx)\,d_q f(x) + f(x)\,d_q g(x), \\ d_h(f(x)\,g(x)) &= g(x+h)\,d_h f(x) + f(x)\,d_h g(x). \end{aligned}$$

Определим теперь соответствующие квантовые производные.

Определение. Следующие два выражения:

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \tag{1.5}$$

$$D_h f(x) = \frac{d_h f(x)}{d_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.6}$$

называются *q-производной* и *h-производной* функции $f(x)$ соответственно.

Заметим, что

$$\lim_{q\to 1} D_q f(x) = \lim_{h\to 0} D_h f(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

если функция $f(x)$ дифференцируема. Обозначение Лейбница для производной функции $f(x)$ в виде отношения двух дифференциалов $\frac{df(x)}{dx}$ оказывается особенно удачным в квантовом анализе, так как в этом случае дифференциалы d_q и d_h имеют совершенно очевидный смысл.

Ясно, что в квантовом анализе, как и в классическом, дифференцирование является линейным оператором. Иными словами, для любых констант a и b и любых функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняются равенства

$$D_q(af(x) + bg(x)) = aD_q f(x) + bD_q g(x),$$
$$D_h(af(x) + bg(x)) = aD_h f(x) + bD_h g(x).$$

Пример. Вычислим $D_q x^n$, где n — натуральное число. По определению

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1}\, x^{n-1} \tag{1.7}$$

и

$$D_h x^n = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\, x^{n-2}h + \ldots + h^n. \tag{1.8}$$

Так как отношение $(q^n - 1)/(q-1)$ в дальнейшем будет появляться достаточно часто, введем для него следующее обозначение:

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q-1} = q^{n-1} + \ldots + 1. \tag{1.9}$$

Эту величину будем называть *q-аналогом* положительного целого числа n. Тогда формулу (1.7) можно записать в виде

$$D_q x^n = [n]\, x^{n-1}, \tag{1.10}$$

что похоже на формулу для обычной производной функции x^n. Заметим, что

$$[n] = q^{n-1} + \ldots + 1 \to 1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

при $q \to 1$. В многочисленных примерах мы увидим, что величина $[n]$ играет в q-анализе такую же роль, какую число n играет в классическом анализе.

Формула для $D_h x^n$ более сложна. В определенном смысле функция x^n для q-анализа хорошая, а для h-анализа — плохая. Мы оставим h-анализ до последних пяти разделов книги и сосредоточим внимание на q-анализе.

Вычислим q-производные произведения и частного функций $f(x)$ и $g(x)$. Из формулы (1.3) получаем

$$D_q(f(x)\,g(x)) = \frac{d_q(f(x)\,g(x))}{(q-1)x} = \frac{f(qx)\,d_q g(x) + g(x)\,d_q f(x)}{(q-1)x},$$

и отсюда

$$D_q(f(x)\,g(x)) = f(qx)\,D_q g(x) + g(x)\,D_q f(x). \tag{1.11}$$

Аналогичным образом, поменяв местами f и g, получим

$$D_q(f(x)\,g(x)) = f(x)\,D_q g(x) + g(qx)\,D_q f(x), \tag{1.12}$$

что эквивалентно равенству (1.11).

Продифференцировав с помощью (1.11) равенство

$$g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = f(x),$$

получим

$$g(qx)\,D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) + \frac{f(x)}{g(x)}\,D_q g(x) = D_q f(x),$$

таким образом,

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(x)\,D_q f(x) - f(x)\,D_q g(x)}{g(x)\,g(qx)}. \tag{1.13}$$

С другой стороны, если мы используем формулу (1.12), то получим

$$g(x)\,D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) + \frac{f(qx)}{g(qx)}\,D_q g(x) = D_q f(x),$$

следовательно,

$$D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(qx)\,D_q f(x) - f(qx)\,D_q g(x)}{g(x)\,g(qx)}. \tag{1.14}$$

Формулы (1.13) и (1.14) эквивалентны, но в определенных условиях одна может оказаться полезнее другой.

После вывода правил q-дифференцирования произведения и частного естественно попробовать вывести квантовый аналог формулы для производной сложной функции. Однако *не существует общей формулы для вычисления q-производной сложной функции*. Исключением является дифференцирование функций вида $f(u(x))$, где $u(x) = \alpha x^\beta$, α, β — константы. В этом случае

$$D_q[f(u(x))] = D_q[f(\alpha x^\beta)] = \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{qx - x} =$$
$$= \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta} \cdot \frac{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta}{qx - x} = \frac{f(q^\beta u) - f(u)}{q^\beta u - u} \cdot \frac{u(qx) - u(x)}{qx - x},$$

и отсюда

$$D_q f(u(x)) = (D_{q^\beta} f)(u(x)) \cdot D_q u(x). \tag{1.15}$$

В качестве иллюстрации того факта, что общей формулы для q-производной сложной функции не существует, рассмотрим, например, $u(x) = x + x^2$ или $u(x) = \sin x$. Ни в одном из этих двух случаев величина $u(qx)$ не может быть выражена через $u(x)$ простым способом, и поэтому невозможно получить общую формулу для производной сложной функции, аналогичную классической.

Закончим главу обсуждением того, почему в квантовом анализе используются символы h и q. Буква q имеет несколько значений:

- первая буква слова «quantum»,
- символ, обычно используемый для обозначения числа элементов конечного поля,
- независимая переменная, используемая при разложении в степенные ряды.

Буква h используется как напоминание о постоянной Планка, которая является наиболее важной физической константой в квантовой механике (физике микроскопического мира). Под «классическим» пределом понимают предельный переход при $q \to 1$ или $h \to 0$; здесь два квантовых параметра обычно связаны соотношением $q = e^h$.

§ 2. Обобщенная формула Тейлора для многочленов

В классическом анализе функция $f(x)$, обладающая производными всех порядков, называется *аналитической* при $x = a$, если ее можно разложить в степенной ряд в точке $x = a$. Теорема Тейлора утверждает, что этот степенной ряд имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \tag{2.1}$$

Разложение аналитической функции в ряд часто позволяет распространить определение функции на более широкие области значений переменной x. Так, например, разложение в ряд Тейлора функции e^x можно использовать, чтобы определить экспоненты комплексных чисел и квадратных матриц.

Нашей ближайшей целью является вывод q-аналога формулы Тейлора. Но прежде чем сделать это, докажем следующее более общее и очень важное утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть a — некоторое число, D — линейный оператор на пространстве многочленов, а $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$ — последовательность многочленов, удовлетворяющих условиям*

(a) $P_0(a) = 1$ *и* $P_n(a) = 0$ *для любого* $n \geqslant 1$,

(b) $\deg P_n(x) = n$,

(c) $DP_n(x) = P_{n-1}(x)$ *для любого* $n \geqslant 1$, *и* $D(1) = 0$.

Тогда для любого многочлена $f(x)$ степени N справедлива обобщенная формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a)\, P_n(x). \tag{2.2}$$

Доказательство. Заметим, что из условий (a) и (b) следует равенство $P_0(x) = 1$. Пусть V — пространство многочленов степени, не превышающей N. Ясно, что $\dim V = N + 1$. Многочлены $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_N(x)$ принадлежат пространству V и, кроме того, линейно независимы, поскольку по условию (b) их степени строго возрастают. Следовательно, они образуют базис пространства V, и поэтому любой многочлен

$f(x) \in V$ может быть представлен в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k P_k(x) \tag{2.3}$$

для некоторых однозначно определенных коэффициентов c_k.

Полагая $x = a$ и используя условие (a), получаем $c_0 = f(a)$.

Применим теперь n раз оператор D к обеим частям уравнения (2.3), где $1 \leqslant n \leqslant N$. Тогда из условий (b) и (c) легко получить равенство

$$(D^n f)(x) = \sum_{k=n}^{N} c_k D^n P_k(x) = \sum_{k=n}^{N} c_k P_{k-n}(x).$$

Положив в нем $x = a$ и воспользовавшись условием (a), получим

$$c_n = (D^n f)(a), \quad 0 \leqslant n \leqslant N,$$

и, тем самым, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} (D^n f)(a)\, P_n(x)$. □

Пример. Если

$$D = \frac{d}{dx}, \quad P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!},$$

то все три условия теоремы 2.1 выполнены. В этом случае разложение Тейлора можно рассматривать как переразложение многочлена по степеням разности $x - a$.

Легко видеть, что если для данного оператора D последовательность многочленов, удовлетворяющих условиям (a), (b) и (c) теоремы 2.1, существует, то она определена единственным образом. Кроме того, если оператор D отображает пространство многочленов степени n на все пространство многочленов степени $n - 1$, то такая последовательность всегда существует.

§ 3. q-аналог бинома $(x-a)^n$ для целого n и q-производные биномов

Как было отмечено в § 1, D_q является линейным оператором на пространстве многочленов. Попытаемся применить теорему 2.1 к $D \equiv D_q$. Нам потребуется следующий q-аналог числа $n!$:

$$[n]! = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ [n] \cdot [n-1] \cdot \ldots \cdot [1], & \text{если } n \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Пусть $a = 0$. Тогда для оператора $D \equiv D_q$ несложно подобрать последовательность многочленов $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$, удовлетворяющую условиям теоремы 2.1:

$$P_n(x) = \frac{x^n}{[n]!}. \tag{3.2}$$

В самом деле,

(a) $P_0(0) = 1$, $P_n(0) = 0$ для $n \geqslant 1$,

(b) $\deg P_n = n$,

(c) используя формулу (1.10), получим для $n \geqslant 1$ равенство

$$D_q P_n(x) = \frac{D_q x^n}{[n]!} = \frac{[n]x^{n-1}}{[n]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = P_{n-1}(x).$$

Будем теперь искать последовательность многочленов $P_n(x)$ для произвольного $a \neq 0$. Легко проверить, что многочлены $P_n(x) = (x-a)^n/[n]!$ не удовлетворяют условиям теоремы 2.1: например, $D_q(x-a)^2/[2]! \neq x-a$. Найдем несколько первых многочленов $P_n(x)$ и попробуем угадать общую формулу.

Ясно, что

$$P_0(x) = 1.$$

Из равенств $D_q P_1(x) = 1$ и $P_1(a) = 0$ очевидным образом следует, что

$$P_1(x) = x - a.$$

Далее, чтобы выполнялись соотношения $D_qP_2(x) = x - a$ и $P_2(a) = 0$, должно иметь место равенство

$$P_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2 = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}.$$

Аналогично

$$P_3(x) = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)}{[2][3]},$$

и т. д. Естественное предположение состоит в том, что

$$P_n(x) = \frac{(x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a)}{[n]!}. \tag{3.3}$$

Заметим, что эта формула согласуется с (3.2) при $a = 0$. Прежде чем проверить, что для последовательности многочленов (3.3) в самом деле выполняется условие (c) теоремы 2.1, введем новое обозначение.

Определение. Положим

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ (x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a) & \text{при } n \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Этот многочлен является q-аналогом многочлена $(x-a)^n$.

Предложение 3.1. *При $n \geqslant 1$ имеет место равенство*

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}. \tag{3.5}$$

Доказательство. При $n = 1$ формула очевидным образом справедлива. Предположим по индукции, что $D_q(x-a)_q^k = [k](x-a)_q^{k-1}$ при некотором целом k. Согласно определению $(x-a)_q^{k+1} = (x-a)_q^k(x-q^ka)$. Используя формулу дифференцирования произведения (1.12), получаем

$$\begin{aligned} D_q(x-a)_q^{k+1} &= (x-a)_q^k + (qx-q^ka)\,D_q(x-a)_q^k = \\ &= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1}a)\cdot[k](x-a)_q^{k-1} = \\ &= (1+q[k])(x-a)_q^k = [k+1](x-a)_q^k. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (3.5) выполняется и для $n = k+1$. □

Итак, равенство $D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$ доказано. Теперь рассмотрим некоторые другие свойства многочленов $(x-a)_q^n$.

В общем случае, как легко проверить, $(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m\,(x-a)_q^n$. Вместо этого выполняется равенство

$$\begin{aligned}(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)\,(x-qa)\dots(x-q^{m-1}a)\times\\ &\quad\times(x-q^ma)\,(x-q^{m+1}a)\dots(x-q^{m+n-1}a) =\\ &= (x-a)\,(x-qa)\dots(x-q^{m-1}a)\times\\ &\quad\times(x-q^ma)\,(x-q(q^ma))\dots(x-q^{n-1}(q^ma)),\end{aligned}$$

откуда

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m(x-q^ma)_q^n. \tag{3.6}$$

Определим теперь $(x-a)_q^n$ для отрицательных целых чисел n так, чтобы формула (3.6) была справедлива для любых целых m и n. Для этого заметим, что если в (3.6) подставить $m=-n$, где $n>0$, то должно выполняться равенство

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n}, \tag{3.7}$$

которое мы примем за определение $(x-a)_q^{-n}$. Два следующих предложения показывают разумность этого обобщения.

Предложение 3.2. *Для любых двух целых чисел m и n справедливо равенство* (3.6).

Доказательство. Случай, когда $m>0$ и $n>0$, уже рассмотрен, а случай, когда одно из чисел m и n равно нулю, тривиален.

Пусть сперва $m=-m'<0$ и $n>0$. Тогда

$$\begin{aligned}(x-a)_q^m(x-q^ma)_q^n &= (x-a)_q^{-m'}(x-q^{-m'}a)_q^n =\\ &= \frac{(x-q^{-m'}a)_q^n}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}} = \begin{cases}(x-q^{m'}(q^{-m'}a))_q^{n-m'}, & n\geqslant m',\\ \dfrac{1}{(x-q^n(q^{-m'}a))_q^{m'-n}}, & n<m',\end{cases} =\\ &= (x-a)_q^{n-m'} = (x-a)_q^{n+m}.\end{aligned}$$

Пусть теперь $m>0$ и $n=-n'<0$, тогда

$$(x-a)_q^m(x-q^m a)_q^n=$$

$$=(x-a)_q^m(x-q^m a)_q^{-n'}=\frac{(x-a)_q^m}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(x-a)_q^{m-n'}(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}}, & m\geqslant n',\\[2ex] \dfrac{(x-a)_q^m}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'-m}(x-q^{n'-m}(q^{m-n'}a))_q^m}, & m<n',\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}(x-a)_q^{m-n'}, & m\geqslant n',\\[2ex] \dfrac{1}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'-m}}, & m<n',\end{cases}=$$

$$=(x-a)_q^{m-n'}=(x-a)_q^{m+n}.$$

Наконец, если $m=-m'<0$ и $n=-n'<0$, то

$$(x-a)_q^m(x-q^m a)_q^n=$$

$$=(x-a)_q^{-m'}(x-q^{-m'}a)_q^{-n'}=\frac{1}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'}}=$$

$$=\frac{1}{(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'}(x-q^{n'}(q^{-n'-m'}a))_q^{m'}}=\frac{1}{(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'+m'}}=$$

$$=(x-a)_q^{-m'-n'}=(x-a)_q^{m+n}.$$

Следовательно, равенство (3.6) справедливо для любых целых чисел m и n. □

Теперь хотелось бы убедиться в том, что предложение 3.1 верно для любого целого числа n. Но прежде чем доказать это, необходимо определить величину $[n]$ (см. (1.9)) для большей области значений переменной n.

Определение. Для любого действительного числа α положим

$$[\alpha]=\frac{1-q^\alpha}{1-q}. \tag{3.8}$$

Предложение 3.3. *Для любого целого числа n выполняется равенство*

$$D_q(x-a)_q^n=[n](x-a)_q^{n-1}.$$

Доказательство. При положительных целых n утверждение доказано в предложении 3.1. Заметим, что $[0]=0$, поэтому равенство (3.8) справедливо для $n=0$.

Для $n=-n'<0$ применим (1.13) и (3.7). Получим

$$D_q(x-a)_q^n = D_q\Big(\frac{1}{(x-q^{-n'}a)_q^{n'}}\Big) =$$

$$= -\frac{D_q(x-q^{-n'}a)_q^{n'}}{(x-q^{-n'}a)_q^{n'}(qx-q^{-n'}a)_q^{n'}} = -\frac{[n']\,(x-q^{-n'}a)_q^{n'-1}}{q^{n'}(x-q^{-n'}a)_q^{n'}(x-q^{-n'-1}a)_q^{n'}} =$$

$$= \frac{1-q^{n'}}{q-1}\,\frac{q^{-n'}}{(x-q^{-1}a)(x-q^{-n'-1}a)_q^{n'}} = \frac{q^{-n'}-1}{q-1}\,\frac{1}{(x-q^{-n'-1}a)_q^{n'+1}} =$$

$$= \frac{q^n-1}{q-1}(x-a)_q^{n-1} = [n]\,(x-a)_q^{n-1},$$

что и требовалось. □

Предложение 3.3 нельзя применить непосредственно, для того чтобы найти q-производные функций

$$\frac{1}{(x-a)_q^n},\quad (a-x)_q^n,\quad \frac{1}{(a-x)_q^n},$$

поскольку, например, $(a-x)_q^n \neq (-1)^n(x-a)_q^n$.

Однако, нетрудно видеть, что при $n\geqslant 1$ имеет место соотношение

$$(a-x)_q^n = (a-x)\,(a-qx)\,(a-q^2a)\ldots(a-q^{n-1}x) =$$
$$= (a-x)\cdot q\,(q^{-1}a-x)\cdot q^2\,(q^{-2}-x)\ldots q^{n-1}\,(q^{-n+1}a-x) =$$
$$= (-1)^n\,q^{n(n-1)/2}\,(x-q^{-n+1}a)\ldots(x-q^{-2}a)\,(x-q^{-1}a)\,(x-a),$$

иными словами,

$$(a-x)_q^n = (-1)^n q^{n(n-1)/2}(x-q^{-n+1}a)_q^n. \tag{3.9}$$

Нетрудно проверить, что равенство (3.9) справедливо и для всех остальных целых чисел $n\leqslant 0$.

Закончим эту главу вычислением q-производных функций

$$\frac{1}{(x-a)_q^n},\quad (a-x)_q^n,\quad \frac{1}{(a-x)_q^n}.$$

Из равенства (3.7) следует, что

$$D_q\frac{1}{(x-a)_q^n} = D_q\frac{1}{(x-q^{-n}(q^na))_q^n} = D_q(x-q^na)_q^{-n}.$$

Дважды применив формулу (3.9), получим

$$D_q(a-x)_q^n = (-1)^n q^{n(n-1)/2}\cdot[n]\,(x-q^{-n+1}a)_q^{n-1} =$$
$$= -[n]\,q^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}q^{(n-1)(n-2)/2}\,(x-q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} =$$
$$= -[n]\,q^{n-1}\,(q^{-1}a-x)_q^{n-1} = -[n]\,(a-qx)_q^{n-1}.$$

Наконец, используем формулу для дифференцирования частного (1.13):

$$D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = -\frac{-[n]\,(a-qx)_q^{n-1}}{(a-x)_q^n\,(a-qx)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^n\,(a-q^n x)} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}.$$

Итак, для любого целого числа n выполняются равенства

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = [-n]\,(x-q^n a)_q^{-n-1}, \tag{3.10}$$

$$D_q (a-x)_q^n = -[n]\,(a-qx)_q^{n-1}, \tag{3.11}$$

$$D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}. \tag{3.12}$$

§ 4. q-формула Тейлора для многочленов

Как было показано в предыдущем параграфе, последовательность многочленов $P_n(x) = (x-a)_q^n/[n]!$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1 относительно линейного оператора D_q. Следовательно, любой многочлен допускает q-разложение Тейлора.

Теорема 4.1. *Зафиксируем произвольное число c. Тогда для любого многочлена $f(x)$ степени N имеет место q-разложение Тейлора:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(c)\, \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}. \tag{4.1}$$

Пример. Пусть $f(x) = x^n$, где n — положительное целое число, а $c = 1$. При $j \leqslant n$ имеем

$$(D_q^j f)(x) = [n]\, D_q^{j-1} x^{n-1} = [n]\,[n-1]\, D_q^{j-2} x^{n-2} = \ldots = \\ = [n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]\, x^{n-j} \tag{4.2}$$

и, следовательно,

$$(D_q^j f)(1) = [n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]. \tag{4.3}$$

Поэтому q-формула Тейлора для $f(x) = x^n$ и $c = 1$ принимает вид

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]\ldots[n-j+1]}{[j]!}\,(x-1)_q^j = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-1)_q^j. \tag{4.4}$$

Будем называть *q-биномиальными коэффициентами* величины

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]}{[j]!} = \frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!}. \tag{4.5}$$

В § 7 мы приведем красивую комбинаторную интерпретацию уравнения (4.4).

Легко видеть, что q-биномиальные коэффициенты при $q \to 1$ стремятся к обычным биномиальным коэффициентам, а равенство (4.4) превращается в обычную формулу бинома. В следующих двух параграфах мы изучим свойства q-биномиальных коэффициентов более подробно.

§ 5. Бином Гаусса и некоммутативная формула бинома

В этом параграфе мы получим две формулы бинома, содержащие q-биномиальные коэффициенты. Рассмотрим сперва пример, подобный приведенному в предыдущей главе.

Пример. Пусть число a произвольное, а число n неотрицательное целое. Разложим $f(x) = (x+a)_q^n$ в точке $x = 0$, используя q-формулу Тейлора. По аналогии с (4.2) для $j \leqslant n$ имеем

$$(D_q^j f)(x) = [n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]\,(x+a)_q^{n-j}. \tag{5.1}$$

Напомним, что

$$(x+a)_q^m = (x+a)\,(x+qa)\ldots(x+q^{m-1}a).$$

При $x = 0$ правая часть этого равенства принимает вид

$$(a)\,(qa)\ldots(q^{m-1}a) = q^{m(m-1)/2}a^m.$$

Применим это наблюдение к (5.1) и получим, что для $j \leqslant n$ выполняется соотношение

$$(D_q^j f)(0) = [n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]\,q^{(n-j)(n-j-1)/2}\,a^{n-j}. \tag{5.2}$$

Таким образом, q-формула Тейлора дает равенство

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{(n-j)(n-j-1)/2} a^{n-j} x^j. \tag{5.3}$$

Заметим, что для q-биномиальных коэффициентов выполняется равенство

$$\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

аналогичное равенству для обычных биномиальных коэффициентов. Тогда равенство (5.3) можно переписать в виде

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} a^j x^{n-j}. \tag{5.5}$$

Формула (5.5) называется *формулой бинома Гаусса*. В следующих главах мы будем неоднократно ею пользоваться.

Теперь обратимся к другой (хотя и имеющей отношение к предыдущей) теме. Как известно, умножение вещественных чисел коммутативно, т. е. $xy = yx$. Так же хорошо известно, что в более общих случаях, например, для умножения матриц или композиции операторов, условие коммутативности нарушается.

Пример. Пусть $\hat{x}$ и $\hat{M}_q$ — операторы, действующие на пространстве функций по формулам

$$\begin{aligned} \hat{x}[f(x)] &= xf(x), \\ \hat{M}_q[f(x)] &= f(qx). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Тогда для любого многочлена $f(x)$ имеем

$$\hat{M}_q\hat{x}[f(x)] = \hat{M}_q[xf(x)] = qxf(qx) = q\hat{x}\hat{M}_q[f(x)],$$

поэтому

$$\hat{M}_q\hat{x} = q\hat{x}\hat{M}_q. \tag{5.7}$$

Следующая теорема содержит некоммутативную формулу бинома для $(x+y)^n$, где элементы x и y удовлетворяют специальному перестановочному соотношению, аналогичному (5.7).

Теорема 5.1. *Если $yx = qxy$, где q — величина, коммутирующая как с x, так и с y, то*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n. Равенство (5.8) очевидным образом справедливо при $n = 1$. Заметим, что $y^k x = qy^{k-1}xy = q^2y^{k-2}xy^2 = \ldots = q^k xy^k$. Кроме того, нам понадобится q-формула Паскаля

которая будет доказана в следующем параграфе (см. (6.3)). С учетом вышесказанного имеем

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) = \left(\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}\right)(x+y) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j} x + \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j (q^{n-j} x y^{n-j}) + \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} q^{n-j+1}\begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} =$$

$$= y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(q^{n-j+1}\begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right) x^j y^{n-j+1} + x^{n+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1}\begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n+1-j}.$$

Таким образом, теорема доказана. □

§ 6. Свойства q-биномиальных коэффициентов

В этом параграфе мы изучим некоторые свойства q-биномиальных коэффициентов. Напомним, что они определяются формулой (4.5), в которой n и j — неотрицательные целые числа, причем $n \geqslant j$. Поскольку при переходе к пределу при $q \to 1$ мы получаем обычные биномиальные коэффициенты, хотелось бы проверить, похожи ли их собственные свойства на свойства q-аналогов. Прежде всего, напомним равенство (см. (5.4))

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

которое буквально повторяет аналогичное равенство для обычных биномиальных коэффициентов. Однако формула Паскаля

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1,$$

не допускает такого буквального обобщения. Например,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + q \neq 2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Предложение 6.1. *Имеют место следующие два q-аналога формулы Паскаля*:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

и

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

где $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

Доказательство. Поскольку при любом j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, выполняются равенства

$$\begin{aligned} [n] = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \\ = (1 + q + \ldots + q^{j-1}) + q^j\,(1 + q + \ldots + q^{n-j-1}) = \\ = [j] + q^j\,[n-j], \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]!\,[n-j]!} = \frac{[n-1]!\,[n]}{[j]!\,[n-j]!} = \frac{[n-1]!\,([j]+q^j\,[n-j])}{[j]!\,[n-j]!} =$$
$$= \frac{[n-1]!}{[j-1]!\,[n-j]!} + q^j\,\frac{[n-1]!}{[j]!\,[n-j-1]!} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix},$$

что дает равенство (6.2). С помощью (6.1) легко получить оставшееся равенство (6.3). В самом деле,

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j-1 \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Следствие 6.1. *Каждый q-биномиальный коэффициент является многочленом от q степени $j(n-j)$, причем его старший коэффициент равен* 1.

Доказательство. Для любого неотрицательного целого n выполняется равенство

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$$

тем самым, для $j = 0$ и $j = n$ следствие доказано. Применив предложение 6.1 и индукцию по n, получим, что для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, коэффициент $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ является суммой двух многочленов.

С другой стороны, согласно определениям (4.5) и (1.9) q-биномиальный коэффициент можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{(q^n-1)\,(q^{n-1}-1)\ldots(q^{n-j+1}-1)}{(q^j-1)\,(q^{j-1}-1)\ldots(q-1)}. \tag{6.4}$$

Поскольку $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ — многочлен от q, числитель дроби в (6.4) делится на знаменатель без остатка. Старшие коэффициенты числителя и знаменателя равны 1, поэтому то же самое справедливо и для частного.

Наконец, степень $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ относительно q равна разности степеней числителя и знаменателя, т. е. $(n+(n-1)+\ldots+(n-j+1))-(j+(j-1)+\ldots+1) = (n-j)+(n-j)+\ldots+(n-j) = j\,(n-j)$. $\square$

Из явного выражения (6.4) для q-биномиального коэффициента можно сделать еще один вывод. Зная, что коэффициент — это многочлен от q степени $j\,(n-j)$, положим

$$a_0 + a_1 q + \ldots + a_{j(n-j)-1} q^{j(n-j)-1} + a_{j(n-j)} q^{j(n-j)} =$$
$$= \frac{(q^n-1)\,(q^{n-1}-1)\ldots(q^{n-j+1}-1)}{(q^j-1)\,(q^{j-1}-1)\ldots(q-1)}.$$

Если мы заменим в этом равенстве q на $1/q$ и умножим обе стороны на $q^{j(n-j)}$, то, как легко проверить, его правая часть не изменится, в то время как левая часть окажется равной

$$a_0 q^{j(n-j)} + a_1 q^{j(n-j)-1} + \ldots + a_{j(n-j)-1} q + a_{j(n-j)}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях q, получим, что коэффициенты представления $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ в виде многочлена по степеням q симметричны, т. е. $a_i = a_{j(n-j)-i}$.

Подобно обычным биномиальным коэффициентам, q-биномиальные коэффициенты имеют комбинаторную интерпретацию. Одну из них приведем сейчас, а другую — в следующей главе.

Теорема 6.1. *Пусть* $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, *и пусть* $\mathscr{A}_{n,j}$ — *совокупность всех подмножеств множества* A_n, *состоящих из* j *элементов, где* $0 \leqslant j \leqslant n$. *Тогда*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \sum_{S \in \mathscr{A}_{n,j}} q^{w(S)-j(j+1)/2}, \quad \text{где } w(S) = \sum_{s \in S} s. \tag{6.5}$$

Доказательство. Докажем теорему индукцией по n. Сперва рассмотрим случай $n = 1$. Если $j = 0$, то $\mathscr{A}_{1,0} = \{\varnothing\}$ и $w(\varnothing) = 0$. Поэтому правая часть (6.5) равна единице и совпадает с левой частью равенства. Если $j = 1$, то единственным элементом множества $\mathscr{A}_{1,1}$ является $A_1 = \{1\}$, причем $w(\{1\}) = 1$. В этом случае и левая, и правая части равенства (6.5) также равны единице.

Предположим, что равенство (6.5) выполняется для всех n, не превосходящих $m-1$, где $m \geqslant 2$, и всех j. Пусть $n = m$. Случай $j = 0$ рассматривается аналогично случаю $n = 1$, $j = 0$, описанному выше. Для $j \geqslant 1$ разобьем $\mathscr{A}_{m,j}$ на две части: $\mathscr{A}_{m,j} = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$, где $\mathscr{B} = \{S \in \mathscr{A}_{m,j} \colon m \notin S\}$ и $\mathscr{B}' = \{S \in \mathscr{A}_{m,j} \colon m \in S\}$. Элементами множества $\mathscr{B}$ служат подмножества множества A_{m-1}, состоящие из j элементов, т. е. $\mathscr{B} = \mathscr{A}_{m-1,j}$. Элементами множества $\mathscr{B}'$ являются j-элементные подмножества множества A_m, каждое из которых содержит «m». Выбросив из каждого такого подмножества элемент «m», получим, что в качестве элементов множества $\mathscr{B}'$ можно рассматривать подмножества множества A_{m-1}, содержащие в точности $j-1$ элементов. Отсюда следует, что правая

часть равенства (6.5) может быть записана в виде

$$\sum_{S\in\mathscr{B}} q^{w(S)-j(j+1)/2} + \sum_{S\in\mathscr{B}'} q^{w(S)-j(j+1)/2} =$$
$$= \sum_{S\in\mathscr{A}_{m-1,j}} q^{w(S)-j(j+1)/2} + \sum_{S\in\mathscr{A}_{m-1,j-1}} q^{(w(S)+m)-j(j+1)/2} =$$
$$= \sum_{S\in\mathscr{A}_{m-1,j}} q^{w(S)-j(j+1)/2} + \sum_{S\in\mathscr{A}_{m-1,j-1}} q^{w(S)-j(j-1)/2}\cdot q^{m-j} =$$
$$= \begin{bmatrix} m-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{m-j}\begin{bmatrix} m-1 \\ j-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}.$$

Здесь в последнем равенстве мы использовали одну из q-формул Паскаля (6.3). □

Для дальнейшего заметим, что, используя равенство (3.8), определение q-биномиального коэффициента можно обобщить по аналогии с обычным биномиальным коэффициентом:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ j \end{bmatrix} = \frac{[\alpha]\,[\alpha-1]\ldots[\alpha-j+1]}{[j]!}, \tag{6.6}$$

где α — любое число, а j — неотрицательное целое число.

§ 7. q-биномиальные коэффициенты и линейная алгебра над конечными полями

В этой главе мы приведем еще одну комбинаторную интерпретацию q-биномиальных коэффициентов.

Теорема 7.1. *Пусть конечное поле $\mathbb{F}_q$ состоит из q элементов, в частности, q — степень простого числа. Тогда*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \text{число } j\text{-мерных подпространств в } n\text{-мерном векторном пространстве } \mathbb{F}_q^n. \quad (7.1)$$

Прежде чем доказывать эту теорему, напомним некоторые основные определения и конструкции линейной алгебры. Совокупность векторов в векторном пространстве V над полем F называется подпространством, если она содержит нулевой вектор и замкнута относительно операций сложения векторов и умножения вектора на произвольные скаляры. Совокупность линейно независимых векторов подпространства называется его базисом, если линейная оболочка этих векторов совпадает со всем подпространством. Подпространство конечномерно, если количество элементов его базиса конечно; при этом два базиса содержат одинаковое количество элементов, и это число называется размерностью подпространства. Нульмерное подпространство единственно — оно состоит только из нулевого вектора: $\{0\}$. Одномерное подпространство натянуто на один ненулевой вектор: $\{av\colon v \neq 0, a \in \mathbb{F}\}$, двумерное подпространство натянуто на два линейно независимых вектора: $\{av_1 + bv_2\colon v_1, v_2$ линейно независимы$, a, b \in \mathbb{F}\}$, и т. д. Векторное пространство $\mathbb{F}_q^n$ состоит из всевозможных упорядоченных наборов вида

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $a_i \in \mathbb{F}_q$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $|\mathbb{F}_q| = q$, существует в точности q^n таких наборов, тем самым, $|\mathbb{F}_q^n| = q^n$.

Доказательство теоремы 7.1. Пусть $V = \mathbb{F}_q^n$. Случай $j = 0$ тривиален, так как $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ и существует лишь одно нульмерное подпространство в V.

Пусть $j \geqslant 1$. Подпространство однозначно определяется своим базисом. Разумеется, в одном и том же подпространстве базис может быть выбран многими способами. Вычислим вначале количество всевозможных наборов, состоящих из j линейно независимых векторов пространства V, а затем выясним, какие наборы образуют базисы одного подпространства в V. Пусть такой набор состоит из векторов $v_1, \ldots, v_j$. Первый вектор v_1 может быть любым из $q^n - 1$ ненулевых векторов. Вектор v_2 может быть любым вектором, не принадлежащим подпространству, натянутому на v_1. Так как любое одномерное подпространство V состоит в точности из q элементов, существует $q^n - q$ возможностей для выбора второго базисного вектора. Далее, число способов выбора вектора v_3 равно $q^n - q^2$, поскольку он может быть любым вектором, не принадлежащим подпространству, натянутому на v_1 и v_2, содержащему q^2 элементов. В общем случае после выбора i-го базисного вектора число векторов в подпространстве, натянутом на первые i базисных векторов, равно q^i, поэтому имеется в точности $q^n - q^i$ возможностей для выбора $(i+1)$-го базисного вектора. Таким образом, число различных способов выбора j линейно независимых векторов в пространстве $V = \mathbb{F}_q^n$ равно

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\ldots(q^n - q^{j-1}). \tag{7.2}$$

Ясно, что линейные оболочки таких наборов из j линейно независимых векторов могут совпадать. Количество всевозможных различных базисов в отдельном j-мерном пространстве, как легко видеть, задается выражением (7.2) при $n = j$:

$$(q^j - 1)(q^j - q)(q^j - q^2)\ldots(q^j - q^{j-1}).$$

Разделив (7.2) на эту величину, мы получим число *различных* j-мерных подпространств в V:

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\ldots(q^n - q^{j-1})}{(q^j - 1)(q^j - q)(q^j - q^2)\ldots(q^j - q^{j-1})} = \\ = \frac{q \cdot q^2 \ldots q^{j-1} \cdot (q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\ldots(q^{n-j+1} - 1)}{q \cdot q^2 \ldots q^{j-1} \cdot (q^j - 1)(q^{j-1} - 1)\ldots(q - 1)} = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$$

согласно формуле (6.4). □

Подобно формуле Паскаля, многие тождества, включающие биномиальные коэффициенты, имеют q-аналоги. Представим, что у нас есть $m + n$ шаров и они разделены на две группы: в одной m шаров, а в другой n. Каждый способ выбора k шаров из всех $m + n$ соответствует

в точности одному способу выбора j шаров из группы с m шарами и выбора $k-j$ шаров из группы в n шаров, где j — некоторое число от 0 до k. Обратное тоже верно, поэтому мы имеем следующее тождество для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}. \tag{7.3}$$

Пример. Получим q-аналог тождества (7.3), используя комбинаторную интерпретацию q-биномиальных коэффициентов, приведенную в теореме 7.1.

Пусть $V = \mathbb{F}_q^{m+n}$ и $V_m \subset V$ — фиксированное подпространство размерности m. Подсчитаем количество k-мерных подпространств в V следующими способами. Во-первых, по теореме 7.1 это число равно $\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}$.

Во-вторых, пусть W — некоторое k-мерное подпространство в V. Как пересечение двух подпространств, $W \cap V_m$ также является подпространством, причем его размерность j удовлетворяет неравенству $0 \leqslant j \leqslant k$. Подпространство W можно рассматривать как расширение подходящего j-мерного подпространства в V_m. Допустим, что такое подпространство $W' \subset V_m$, $\dim W' = j$, выбрано. Выберем векторы $v_1, \ldots, v_{k-j}$ так, чтобы для всех i вектор v_i не содержался в подпространстве, натянутом на $V_m, v_1, \ldots, v_{i-1}$. Тогда пространство W, натянутое на $W', v_1, \ldots, v_{k-j}$, очевидно, k-мерно, причем его пересечение с V_m совпадает с W'. Ясно, что любое k-мерное подпространство W в V, для которого $W \cap V_m = W'$, получается таким образом.

Заметим, что v_1 можно выбрать из $q^{m+n} - q^m$ векторов, не принадлежащих V_m, v_2 можно выбрать из $q^{m+n} - q^{m+1}$ векторов, не принадлежащих подпространству, натянутому на V_m и v_1, и т. п. Следовательно, существует

$$(q^{m+n} - q^m)\,(q^{m+n} - q^{m+1}) \ldots (q^{m+n} - q^{m+k-j-1}) \tag{7.4}$$

различных способов выбрать векторы $v_1, \ldots, v_{k-j}$.

Теперь нужно подсчитать количество различных способов выбора векторов $v_1, \ldots, v_{k-j}$, приводящих к одному и тому же подпространству W. Так как $\dim W = k$ и $\dim W' = j$, это число равно

$$(q^k - q^j)\,(q^k - q^{j+1}) \ldots (q^k - q^{k-1}). \tag{7.5}$$

Тем самым, число *различных* подпространств W размерности k, полученных расширением данного подпространства W' размерности j, равно

$$\frac{(q^{m+n}-q^m)(q^{m+n}-q^{m+1})\dots(q^{m+n}-q^{m+k-j-1})}{(q^k-q^j)(q^k-q^{j+1})\dots(q^k-q^{k-1})} =$$
$$= \frac{q^m q^{m+1}\dots q^{m+k-j-1}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-k+j+1}-1)}{q^j q^{j+1}\dots q^{k-1}(q^{k-j}-1)(q^{k-j-1}-1)\dots(q-1)} =$$
$$= q^{(k-j)(m-j)}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}.$$

Поскольку существует $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$ различных способов выбора W', а любые два различных из них порождают различные пространства W, получаем равенство

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{k} q^{(k-j)(m-j)}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}, \tag{7.6}$$

которое является q-аналогом тождества (7.3).

Пример. Напомним, что q-разложение Тейлора функции $f(x) = x^n$ в точке $x = 1$ имеет вид (см. (4.4))

$$x^n = \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}(x-1)_q^j.$$

Получим еще одно, на этот раз комбинаторное, доказательство этой формулы. Для этого покажем, что это равенство справедливо при $x = q^m$, где m — произвольное натуральное число. Отсюда легко вывести, что тогда равенство справедливо для всех x. В самом деле, обе части доказываемого равенства являются многочленами от x. Если же для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равенство $f(x) = g(x)$ выполняется для бесконечно многих значений x, то разность $h(x) = f(x) - g(x)$ имеет бесконечно много нулей, что возможно только если многочлен h тождественно равен нулю.

Пусть n и m — положительные целые числа. Обозначим через $\mathscr{S}$ множество линейных отображений $A = \mathbb{F}_q^n$ в $B = \mathbb{F}_q^m$. Предположим, что векторы $\{e_1, \dots, e_n\}$ образуют базис пространства A. Если задано какое-либо линейное отображение $T \in \mathscr{S}$, то образ $T(e_k)$ может быть любым из q^m векторов пространства B, где $1 \leqslant k \leqslant n$. В то же время, если векторы $T(e_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, выбрать произвольно, то вместе они единственным образом определяют T. Поэтому число элементов множества $\mathscr{S}$ равно $\#\mathscr{S} = (q^m)^n$, что совпадает с левой частью равенства

(4.4) при $x = q^m$. С другой стороны, ясно, что

$$\#\mathscr{S} = \sum_{j=0}^{n} (\text{число отображений из } \mathscr{S} \text{ ранга } j).$$

Покажем, что j-е слагаемое в этой сумме равно $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (q^m - 1)_q^j$. Заметим, что ранг отображения T не может превышать m, что согласуется с тем, что $(q^m - 1)_q^j = 0$ при $j > m$. Следовательно, мы можем рассматривать только такие j, для которых $j \leqslant m$.

Напомним некоторые свойства линейных отображений, которые нам сейчас понадобятся. Если линейное отображение T имеет ранг j, то его образ $W = T(A) \subset B$ является j-мерным подпространством. Кроме того, при этом пространство A разлагается в прямую сумму двух подпространств $A = V \oplus K$, где $\dim V = j$ и $\dim K = n - j$, причем T отображает V на W взаимно однозначно, а $K = \{v \in A \colon T(v) = 0\}$. Иначе говоря, любой вектор из A можно единственным способом представить в виде суммы двух векторов так, что один из них принадлежит V, а другой — K. Это разложение пространства A можно построить следующим образом. Выберем векторы $u_1, \ldots, u_j \in A$ так, чтобы их образы под действием T образовывали базис пространства W. Поскольку образы векторов $u_1, \ldots, u_j$ линейно независимы, сами эти векторы также линейно независимы. Обозначим через V пространство, натянутое на $u_1, \ldots, u_j$. Для любого $v \in A$ вектор $T(v)$ содержится в W и, следовательно, разлагается по базису $T(u_i)$:

$$T(v) = \sum a_i T(u_i)$$

для некоторых a_i. Пусть $v' = \sum a_i u_i$. Тогда $v' \in V$ и $T(v - v') = 0$, следовательно, $v - v' \in K$. Таким образом, $v = v' + (v - v')$. Легко показать, что K является подпространством. Далее, заметим, что $T(V) = W$, при этом пространства V и W содержат q^j векторов. Следовательно, T — взаимно однозначное отображение на V, и поэтому v' является единственным таким вектором в V, что $T(v) = T(v')$, из чего следует единственность разложения.

Вернемся к доказательству нашей формулы. Отображение T можно задать, выбрав подпространства $V \subset A$ и $W \subset B$, а также взаимно однозначное отображение V в W. По теореме 7.1 число возможностей для выбора подпространств V и W равно $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$. Теперь предположим, что попространства V и W заданы. Пусть $\{u_1, \ldots, u_j\}$ — базис в V. Учитывая, что T — взаимно однозначное отображение, легко видеть, что

$T(u_1)$ может быть любым из q^j-1 ненулевых векторов пространства W, $T(u_2)$ может быть любым из q^j-q векторов W, не принадлежащих подпространству, натянутому на $T(u_1)$, $T(u_3)$ может быть любым из q^j-q^2 векторов W, не принадлежащих подпространству, натянутому на $T(u_1)$ и $T(u_2)$, и т. д. Следовательно, существует $(q^j-1)(q^j-q)\dots(q^j-q^{j-1})$ способов отобразить V в W биективно. Поэтому число элементов в $\mathscr{S}$ ранга j равно

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}\prod_{i=0}^{j-1}(q^j-q^i)=\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\prod_{i=0}^{j-1}\left(\frac{q^{m-i}-1}{q^{j-i}-1}\right)\prod_{i=0}^{j-1}(q^j-q^i)=$$

$$=\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\prod_{i=0}^{j-1}(q^m-q^i)=\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}(q^m-1)_q^j,$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 7.1 следует, что количество всех подпространств векторного пространства $\mathbb{F}_q^n$ равно

$$G_n=\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}. \tag{7.7}$$

Будем называть эту величину *n-м числом Галуа*. Если q-биномиальные коэффициенты заменить на обычные, то сумма в (7.7) в точности будет равна 2^n. Однако сами числа Галуа вычисляются не очень просто. Следующее утверждение, принадлежащее Голдману и Рота, показывает, что числа Галуа можно вычислять рекуррентно.

Предложение 7.1. *Числа Галуа удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$G_{n+1}=2G_n+(q^n-1)\,G_{n-1}, \tag{7.8}$$

кроме того, $G_0=1$ и $G_1=2$.

Доказательство. Пусть $P_n(x)=(x-1)_q^n$. Определим на пространстве многочленов линейную функцию L так, чтобы для любого неотрицательного целого числа n выполнялось равенство

$$L\{P_n(x)\}=1. \tag{7.9}$$

Такая линейная функция существует, поскольку многочлены $(x-a)_q^n$ линейно независимы. Применив L к обеим частям равенства (4.4), получим

$$L\{x^n\}=\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}L\{P_j(x)\}=\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}=G_n. \tag{7.10}$$

Заметим теперь, что $P_{n+1}(x) = (x - q^n)\,P_n(x) = xP_n(x) - q^nP_n(x)$, поэтому из линейности функции L следует соотношение

$$L\{xP_n(x)\} = L\{P_{n+1}(x)\} + q^nL\{P_n(x)\} = 1 + q^n. \tag{7.11}$$

С другой стороны, из $D_qP_n(x) = [n]\,P_{n-1}(x)$ вытекает, что

$$1 + q^n = 2L\{P_n(x)\} + (q-1)\,L\{D_qP_n(x)\}. \tag{7.12}$$

Из соотношений (7.11) и (7.12) получаем равенство

$$L\{xP_n(x)\} = 2L\{P_n(x)\} + (q-1)\,L\{D_qP_n(x)\}, \tag{7.13}$$

справедливое при любом $n \geqslant 0$. Поскольку любой многочлен можно представить в виде конечной линейной комбинации многочленов $P_n(x)$, равенство (7.13) останется справедливым, если заменить $P_n(x)$ любым многочленом. В частности, если заменить $P_n(x)$ на x^n, получим

$$L\{x^{n+1}\} = 2L\{x^n\} + (q-1)\,L\{[n]x^{n-1}\} = 2L\{x^n\} + (q^n-1)\,L\{x^{n-1}\}.$$

Согласно (7.10), отсюда следует (7.8). □

Если выбрать линейную функцию L' так, чтобы выполнялось равенство $L'\{P_n\} = t^n$, с помощью аналогичных рассуждений можно вывести рекуррентную формулу

$$L'\{x^{n+1}\} = (t+1)L'\{x^n\} + t\,(q^n-1)\,L'\{x^{n-1}\}.$$

Определим последовательность многочленов $f_n(t)$ формулой

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} t^j.$$

Тогда $f_n(t) = L'\{x^n\}$, и, следовательно,

$$f_{n+1}(t) = (t+1)\,f_n(t) + (q^n-1)\,tf_{n-1}(t), \quad n \geqslant 1.$$

Заметим, что $G_n = f_n(1)$. Поэтому, положив $t = 1$, получим новое доказательство предложения 7.1. При $t = -1$ рекуррентное соотношение несколько упрощается:

$$f_{n+1}(-1) = (1-q^n)\,f_{n-1}(-1), \quad n \geqslant 1.$$

Поскольку $f_0(-1) = 1$ и $f_1(-1) = 0$, при любом $m \geqslant 0$ имеют место равенства

$$\sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \begin{bmatrix} 2m \\ j \end{bmatrix} = (1-q^{2m-1})\,(1-q^{2m-3})\ldots(1-q) \tag{7.14}$$

и

$$\sum_{j=0}^{2m+1} (-1)^j \begin{bmatrix} 2m+1 \\ j \end{bmatrix} = 0. \tag{7.15}$$

Эти два тождества впервые были получены Гауссом. Их доказательство, приведенное нами, принадлежит Голдману и Рота.

§ 8. q-формула Тейлора для формальных степенных рядов и формула бинома Гейне

Обратимся теперь к тождествам, содержащим бесконечные суммы и произведения. Прежде всего, покажем, что при небольших ограничениях обобщенная формула Тейлора (2.2) при $a = 0$ и, следовательно, q-формула Тейлора (4.1) при $c = 0$ могут быть применены не только к многочленам, но и к формальным степенным рядам. Как обычно, мы называем ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

формальным, потому что нас не интересует его сходимость. Это дает возможность некоторые операции с такими рядами определить формально. Например, производная формального степенного ряда определяется почленным его дифференцированием. Кроме того, естественно считать, что $f(0) = c_0$, хотя во всех остальных точках ряд может расходиться.

Для формального степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ производную $D_q f(x)$ определим формулой

$$D_q f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [k]\, c_k x^{k-1}.$$

Ясно, что

$$[k]!\, c_k = (D_q^k f(x))(0)\,.$$

В частности, отсюда следует, что два формальных степенных ряда, которые сходятся в некоторой окрестности точки $x = 0$ к одной и той же функции, равны почленно.

Теорема 8.1. *Пусть на пространстве формальных степенных рядов задан линейный оператор D, а последовательность многочленов*

$$\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\}$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.1 *при $a = 0$. Предположим, кроме*

того, что степень младшего одночлена в $P_j(x)$ стремится к бесконечности при $j \to \infty$. Тогда для любого формального степенного ряда $f(x)$ справедлива обобщенная формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n f)(0)\, P_n(x).$$

Следствие 8.1. *Для любого формального степенного ряда $f(x)$ справедлива* q-формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (D_q^j f)(0)\, \frac{x^j}{[j]!}.$$

Доказательство теоремы 8.1. В качестве несложного упражнения в линейной алгебре читателю предлагается доказать, что любой формальный степенной ряд $f(x)$ можно единственным образом представить в виде

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(x)$$

для некоторых постоянных величин c_j. При этом нужно использовать условие, что степень младшего одночлена в $P_j(x)$ стремится к бесконечности при $j \to \infty$. Затем применим к этому равенству k-ю степень оператора D и положим $x = 0$. Получим $c_k = (D^k f)(0)$, что и требовалось. □

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = 1/(1-x)_q^n$. Используя деление «уголком», легко показать, что $f(x)$ представляется в виде формального степенного ряда. Найдем разложение функции $f(x)$ в q-ряд Тейлора. По формуле (3.12) получаем

$$D_q f(x) = D_q \frac{1}{(1-x)_q^n} = \frac{[n]}{(1-x)_q^{n+1}}.$$

Тогда по индукции

$$D_q^j f(x) = \frac{[n]\,[n+1]\ldots[n+j-1]}{(1-x)_q^{n+j}}.$$

Следовательно, $(D_q^j f)(0) = [n]\,[n+1]\ldots[n+j-1]$ при любом $j \geqslant 1$.

Поэтому имеет место равенство

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n]\,[n+1]\ldots[n+j-1]}{[j]!}\, x^j, \tag{8.1}$$

которое является q-аналогом разложения в ряд Тейлора функции $f(x) = 1/(1-x)^n$. Формула (8.1) называется *формулой бинома Гейне.*

§ 9. Тождества Эйлера и q-экспоненты

Теперь в нашем распоряжении имеются две формулы бинома, а именно, формула бинома Гаусса (5.5) (где x и a заменены на 1 и x соответственно)

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{n} q^{j(j-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j,$$

и формула бинома Гейне (8.1):

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n]\,[n+1]\dots[n+j-1]}{[j]!}\, x^j.$$

Изучим, как ведут себя эти равенства в пределе при $n \to \infty$. В классическом анализе, т. е. при $q = 1$, ответ не представляет большого интереса, поскольку в зависимости от x мы получим либо бесконечно большую, либо бесконечно малую величину. Однако в квантовом анализе ответ будет принципиально другим. Например, при $|q| < 1$ бесконечное произведение

$$(1+x)_q^\infty = (1+x)\,(1+qx)\,(1+q^2x)\dots$$

сходится к некоторому конечному пределу. Кроме того, если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} [n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \tag{9.1}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-q^n)\,(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n-j+1})}{(1-q)\,(1-q^2)\dots(1-q^j)},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)\,(1-q^2)\dots(1-q^j)}. \tag{9.2}$$

Отсюда видно, что поведение целых чисел и биномиальных коэффициентов при больших n совершенно отлично от поведения их q-аналогов.

Применив соотношения (9.1) и (9.2) к формулам бинома Гаусса и Гейне, мы получим два следующих тождества для формальных степенных рядов от x (в предположении, что $|q| < 1$):

$$(1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}, \tag{9.3}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}. \tag{9.4}$$

Эти два тождества связывают бесконечные произведения и бесконечные суммы. Они не имеют классических аналогов, поскольку ни одно слагаемое в суммах не имеет смысла при $q = 1$. Интересно, что оба тождества были открыты Эйлером, жившим до Гаусса и Гейне. Будем называть (9.3) и (9.4) первым и вторым тождествами Эйлера соответственно, а для краткости будем ссылаться на них как на тождества E1 и E2.

Внимательно рассмотрев тождество E2, легко увидеть, что в его правой части стоит выражение

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)} = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{1\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\dots\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!}, \tag{9.5}$$

которое похоже на разложение Тейлора классической экспоненты

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}. \tag{9.6}$$

Определение. Зададим формальный степенной ряд e_q^x формулой

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}; \tag{9.7}$$

будем называть его q-аналогом классической экспоненты e^x.

Из равенств (9.4) и (9.5) легко получить соотношение

$$e_q^{x/(1-q)} = \frac{1}{(1-x)_q^\infty}, \tag{9.8}$$

или

$$e_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^\infty}. \tag{9.9}$$

Используя тождество E1, аналогичным образом можно определить другую q-экспоненту.

Определение. Зададим формальный степенной ряд E_q^x формулой

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2}\frac{x^j}{[j]!} = (1+(1-q)x)_q^\infty \tag{9.10}$$

и будем рассматривать его в качестве еще одного q-аналога экспоненты e^x.

Изучим простейшие свойства рядов e_q^x и E_q^x. Производная классической экспоненты совпадает с самой экспонентой. Выясним, что происходит при дифференцировании с q-экспонентами. Имеют место равенства

$$D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{[j]\,x^{j-1}}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]!},$$

и

$$D_q E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2}\frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} q^{j(j-1)/2}\frac{[j]\,x^{j-1}}{[j]!} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} q^{(j-1)(j-2)/2}q^{j-1}\frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2}\frac{q^j x^j}{[j]!},$$

поэтому

$$D_q e_q^x = e_q^x \quad \text{и} \quad D_q E_q^x = E_q^{qx}. \tag{9.11}$$

Заметим, что производная E_q^x не равна в точности ей самой.

Формулы (9.11) можно также получить, если перейти к пределу при $n \to \infty$ в формулах

$$D_q \frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^n} = \frac{(1-q)\,[n]}{(1-(1-q)\,x)_q^{n+1}}$$

и

$$D_q(1+(1-q)\,x)_q^n = (1-q)\,[n]\,(1+q\,(1-q)\,x)_q^{n-1}.$$

Что можно сказать о произведении $e_q^x e_q^y$? В общем случае $e_q^x e_q^y \neq e_q^{x+y}$. Но если x и y удовлетворяют перестановочному условию $yx = qxy$

(см. теорему 5.1), то $e_q^x e_q^y = e_q^{x+y}$. Чтобы доказать это, преобразуем произведение q-экспонент следующим образом:

$$e_q^x e_q^y = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{[k]!}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k}{[j]!\,[k]!} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[j+k]!}{[j]!\,[k]!} \cdot \frac{x^j y^k}{[j+k]!}.$$

Заменим теперь переменные j и k соответственно на j и $n = j + k$. Тогда если значение n фиксировано, то j пробегает все числа от 0 до n. Применив теорему 5.1, получим

$$e_q^x e_q^y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}\right) \frac{1}{[n]!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{[n]!}.$$

Следовательно,

$$e_q^x e_q^y = e_q^{x+y} \quad \text{при условии} \quad yx = qxy. \tag{9.12}$$

В условие $yx = qxy$ переменные x и y входят несимметрично, поэтому, вообще говоря, $e_q^y e_q^x \neq e_q^x e_q^y$.

Между двумя q-экспонентами существует тесная связь. Например, из равенств (9.9) и (9.10) следует, что

$$e_q^x E_q^{-x} = \frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^{\infty}} \cdot (1-(1-q)\,x)_q^{\infty} = 1. \tag{9.13}$$

Используя (9.3) и (9.4), получаем

$$e_{1/q}^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-1/q)^j\, x^j}{(1-1/q)\,(1-1/q^2)\ldots(1-1/q^j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{(1-q)^j\, x^j}{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^j)},$$

откуда

$$e_{1/q}^x = E_q^x. \tag{9.14}$$

§ 10. q-тригонометрические функции

В классическом анализе хорошо известны формулы, связывающие тригонометрические функции с экспонентой. Примем q-аналоги этих формул в качестве определения q-тригонометрических функций.

Определение. Формальные степенные ряды

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, \quad \operatorname{Sin}_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}, \tag{10.1}$$

$$\cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{Cos}_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \tag{10.2}$$

будем назвать q-тригонометрическими функциями. Функции (10.1) являются q-аналогами синуса, а (10.2) — косинуса.

Из равенства (9.14) следует, что $\operatorname{Sin}_q x = \sin_{1/q} x$ и $\operatorname{Cos}_q x = \cos_{1/q} x$. Применяя (9.13), получаем

$$\cos_q x \operatorname{Cos}_q x = \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} + 2}{4}$$

и

$$\sin_q x \operatorname{Sin}_q x = -\frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} - 2}{4}.$$

Следовательно,

$$\cos_q x \operatorname{Cos}_q x + \sin_q x \operatorname{Sin}_q x = 1, \tag{10.3}$$

что является q-аналогом тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Читателю предлагается самостоятельно найти q-аналоги других тригонометрических тождеств.

Для вычисления производных q-тригонометрических функций применим формулу производной сложной функции (1.15) для $u(x) = ix$, а затем используем (9.11). В результате получим равенства

$$D_q \sin_q x = \cos_q x, \qquad D_q \operatorname{Sin}_q x = \operatorname{Cos}_q qx, \tag{10.4}$$

$$D_q \cos_q x = -\sin_q x, \qquad D_q \operatorname{Cos}_q x = -\operatorname{Sin}_q qx. \tag{10.5}$$

§ 11. Тождество Якоби для тройного произведения

Напомним, что соотношения (9.3) и (9.4) связывают бесконечные произведения и бесконечные суммы. В этой главе мы используем их для доказательства важного тождества, впервые полученного Якоби. Несколько интересных его применений в теории чисел мы приведем в следующих главах.

Теорема 11.1. *Для* $|q| < 1$ *имеет место равенство*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})\,(1 + q^{2n-1} z)\,(1 + q^{2n-1} z^{-1}), \tag{11.1}$$

которое называется тождеством Якоби для тройного произведения.

Доказательство (Дж. Е. Эндрюс). Напомним тождество E1:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2} x^j}{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^j)}. \tag{11.2}$$

Заменив в нем q на q^2, а затем x на zq, получим

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^{2n+1} z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2} z^j}{(1-q^2)\,(1-q^4)\ldots(1-q^{2j})}.$$

Умножив обе части равенства на

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}),$$

приведем его к виду

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})\,(1 + q^{2n-1} z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(q^{j^2} z^j \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2j+2}) \right). \tag{11.3}$$

Заметим, что в правой части равенства мы заменили нижний предел суммирования на $-\infty$ вместо нуля. Сумма при этом не изменилась, поскольку при отрицательном j для некоторого $n \geqslant 0$ выполняется равенство $(1 - q^{2n+2j+2}) = 0$.

Вернемся к тождеству (11.2) и заменим в нем индекс суммирования j на k, q на q^2, а x — на $-q^{2j+2}$. Получим

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2j+2}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{k^2+2kj+k}}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})}.$$

Подстановка этого выражения в равенство (11.3) дает

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{(j+k)^2+k} z^j}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{j^2} z^j (-qz^{-1})^k}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})}, \qquad (11.4)$$

где последняя строка получена заменой индекса j на $j-k$. Теперь запишем тождество E2, в котором q заменено на q^2, а x — на $-qz^{-1}$:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{2n-1}z^{-1})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-qz^{-1})^k}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})}. \qquad (11.5)$$

Из соотношений (11.4) и (11.5) следует равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(q^{j^2}z^j\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{2n-1}z^{-1})}\right),$$

которое эквивалентно (11.1). □

§ 12. Классическая функция разбиения и формула произведения Эйлера

Подстановки различных значений q и z в тождество Якоби для тройного произведения приводят ко многим интересным результатам. Например, если положить $q = q^{3/2}$ и $z = -q^{-1/2}$ в формуле (11.1), то получится равенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})\,(1-q^{3n-2})\,(1-q^{3n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \quad (12.1)$$

которое называется *формулой произведения Эйлера*. Как показывают результаты предыдущей главы, она справедлива при $|q| < 1$. Отсюда следует, что ее можно рассматривать как равенство формальных степенных рядов по q (см. § 8).

Используя обозначение

$$\varphi(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n),$$

эту формулу можно также записать в виде

$$\varphi(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{e_n}, \quad (12.2)$$

где коэффициенты

$$e_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad (12.3)$$

называются *пятиугольными числами*. Читателю предлагается перемножить несколько первых членов произведения Эйлера, чтобы убедиться в том, что коэффициент при q^{e_n} получается равным $(-1)^n$, в то время как коэффициенты при остальных степенях переменной q равны 0.

Определение. Для $n > 0$ положим $p(n)$ равным числу способов представления числа n в виде суммы натуральных чисел без учета порядка слагаемых. Пусть также по определению $p(0) = 1$ и $p(n) = 0$ при $n < 0$. Функцию $p(n)$, определенную для целых n, будем называть *классической функцией разбиения*.

Вычислим $p(n)$ для небольших n. Ясно, что $p(1) = 1$, поскольку существует единственный способ представить 1 в виде суммы натуральных чисел: $1 = 1$; $p(2) = 2$, потому что таких способов в точности два: $2 = 2$ и $2 = 1 + 1$; аналогично $p(3) = 3$, $p(4) = 5$ и т. д. Такой медленный рост $p(n)$ при малых значениях n обманчив; в действительности при $n \to \infty$ имеет место асимптотическая оценка

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

Таким образом, время, необходимое для перечисления всех разбиений числа n, растет экспоненциально вместе с ростом n. Следующее утверждение показывает связь $\varphi(q)$ с классической функцией разбиения.

Предложение 12.1. *Имеет место следующее равенство формальных степенных рядов по q:*

$$\frac{1}{\varphi(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n. \tag{12.4}$$

Доказательство. Следующее рассуждение будет часто использоваться нами в дальнейшем. Пусть $|q| < 1$. Формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии дает равенство

$$\frac{1}{\varphi(q)} = \frac{1}{(1-q)\,(1-q^2)\,(1-q^3)\ldots} = (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) \times$$
$$\times\, (1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots)\,(1 + q^3 + q^6 + q^9 + \ldots)\ldots,$$

в котором все показатели степеней переменной q в n-м сомножителе представляют собой неотрицательные целые кратные числа n. При разложении произведения в правой части в степенной ряд каждое слагаемое представляется в виде $q^{n_1} q^{2n_2} q^{3n_3} \ldots = q^{1n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots}$, где n_i — неотрицательные целые числа. Такое слагаемое равно q^n, если $n = 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + \ldots$ при некоторых n_i. Тем самым, каждое слагаемое q^n соответствует какому-то одному способу представления n в виде суммы натуральных чисел, а именно, суммы, в которой число i встречается n_i раз. Другой способ разбиения числа n дает еще одно новое слагаемое q^n. Поэтому коэффициент при q^n в точности равен числу способов разбиения n на натуральные. □

Такая интерпретация функции $\varphi(q)$ позволяет применить тождество Эйлера, чтобы получить соотношение между числами $p(n)$.

Теорема 12.1. *Для любого положительного целого числа n имеет место равенство*

$$p(n) = p(n-e_1) + p(n-e_{-1}) - p(n-e_2) - p(n-e_{-2}) + \\ + p(n-e_3) + p(n-e_{-3}) - \dots, \qquad (12.5)$$

где e_n — пятиугольные числа, определенные формулой (12.3).

Доказательство. Из равенств (12.2) и (12.4) следует, что

$$1 = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j q^{e_j}\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)\, q^k\right). \qquad (12.6)$$

Разложим правую часть в ряд по степеням q. Из равенства (12.6) следует, что коэффициент при q^n, где $n > 0$, должен быть нулевым.

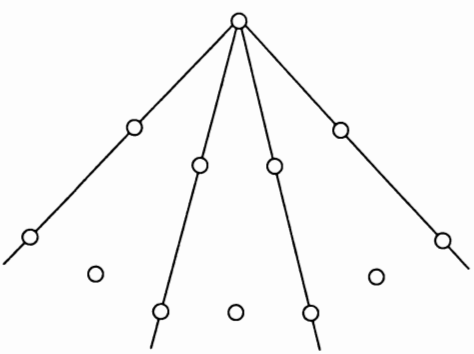
С другой стороны, при перемножении рядов в правой части (12.6) слагаемые, содержащие q^n, имеют вид $(-1)^j p(k) q^n$, где $n = e_j + k$ для некоторых целых j и k. Следовательно,

$$0 = p(n-e_0) - p(n-e_1) - p(n-e_{-1}) + \\ + p(n-e_2) + p(n-e_{-2}) - p(n-e_3) - p(n-e_{-3}) + \dots, \qquad (12.7)$$

что равносильно (12.5), поскольку $e_0 = 0$. □

Рекуррентная формула (12.5) очень удобна для быстрого вычисления $p(n)$. Например, $p(5) = p(4) + p(3) - p(0) = 5 + 3 - 1 = 7$, $p(6) = p(5) + p(4) - p(1) = 11$, и т. д. Время, необходимое для вычисления $p(n)$ с использованием формулы (12.5), растет медленнее, чем n, что, разумеется, гораздо эффективнее, чем перечисление всех разбиений числа n.

Как подсказывает их название, пятиугольные числа e_n имеют геометрический смысл. Иллюстрацией служит следующий рисунок:



Соединив n-е вершины на каждом луче, мы получим пятиугольники, подобные друг другу. Число точек, попавших внутрь и на стороны n-го пятиугольника, является n-м пятиугольным числом. Например, $e_2 = 5$ и $e_3 = 12$. По индукции легко показать, что в общем случае для e_n имеет место формула (12.3).

Аналогичным образом можно определить m-угольные числа для любого $m \geqslant 3$. Из них наиболее часто используются *треугольные* числа

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

и, конечно, *квадратные* числа

$$\square_n = n^2.$$

В общем случае из геометрических соображений легко получить следующую формулу для m-угольного числа с номером n:

$$m_n = (m-2)\,\Delta_{n-1} + n = \frac{n\,(mn - 2n - m + 4)}{2}.$$

Тождества для треугольных и квадратных чисел, подобные формуле произведения Эйлера (см. (12.1) и (12.2)), также можно получить из тождества Якоби для тройного произведения. Оба приведенные ниже тождества были получены Гауссом до того, как Якоби открыл тождество для тройного произведения.

Предложение 12.2. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\Delta_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\,. \tag{12.8}$$

Доказательство. Заменив в (11.1) и q, и z на $q^{1/2}$, получим

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\Delta_n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)\,(1+q^n)\,(1+q^{n-1}) = 2\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})\,(1+q^n).$$

Заметим, что $\Delta_n = \Delta_{-n-1}$. Поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{\Delta_n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} q^{\Delta_n}$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\Delta_n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})\,(1+q^n). \tag{12.9}$$

Наконец, из равенства

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2n-1}} \tag{12.10}$$

требуемый результат вытекает очевидным образом. □

Предложение 12.3. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-q)^{n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1+q^n}. \tag{12.11}$$

Доказательство. В равенстве (11.1) положим $z=-1$. Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-q)^{n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\,(1-q^{2n-1})\,(1-q^{2n-1})=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1-q^{2n-1})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1+q^n},$$

где в последнем равенстве мы использовали соотношение (12.10). □

Тождества (12.8) и (12.11) пригодятся нам позднее при изучении разбиений целых чисел в суммы треугольных или квадратных чисел.

В качестве следствия выведем из равенства (12.10) один комбинаторный факт, который заслуживает отдельного внимания. Произведение в левой части (12.10) равно

$$(1+q)\,(1+q^2)\,(1+q^3)\ldots,$$

поэтому в его разложении q^n появляется в том и только в том случае, когда $n=a_1+a_2+a_3+\ldots$, где целые числа $a_i>0$ различны. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 12.1, легко показать, что коэффициент при q^n — это число способов представить n в виде суммы *различных* положительных целых чисел.

В то же время, произведение в правой части (12.10) равно

$$(1+q+q^2+q^3+\ldots)\,(1+q^3+q^6+q^9+\ldots)\,(1+q^5+q^{10}+q^{15}+\ldots)\ldots,$$

поэтому при разложении его в ряд по степеням переменной q каждое слагаемое вида q^n соответствует способу представления числа n в виде суммы положительных нечетных чисел.

Таким образом, равенство (12.10) означает, что число способов разбиения числа числа n на различные натуральные числа равно числу способов разбиения числа n на положительные нечетные числа.

В заключение этой главы мы ненадолго прервем обсуждение q-анализа, для того чтобы ввести важную в теории чисел функцию $d(n)$, которая вместе с $p(n)$ подчиняется рекуррентному соотношению (12.5).

Для натурального числа n обозначим через $d(n)$ сумму всех его положительных делителей. Для отрицательных n будем считать, что $d(n) = 0$.

Теорема 12.2. *Для натурального числа n имеет место равенство*

$$d(n) = d(n - e_1) + d(n - e_{-1}) - d(n - e_2) - d(n - e_{-2}) + \dots, \quad (12.12)$$

где мы считаем, что $d(0) = n$, если оно входит в правую часть.

Доказательство. Рассмотрим производящую функцию

$$D(q) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, q^n.$$

Изменив порядок суммирования, получим

$$D(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m|n} m q^n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m|n} m q^n =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m\,(q^m + q^{2m} + q^{3m} + \dots) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m q^m}{1 - q^m} = -q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dq} \ln(1 - q^m) =$$

$$= -q \frac{d}{dq} \ln \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) = \frac{-q \dfrac{d}{dq} \prod\limits_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)}{\prod\limits_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)},$$

следовательно,

$$D(q)\, \varphi(q) = -q \frac{d}{dq} \varphi(q).$$

Используя равенство (12.2), получаем

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} d(j) q^j \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{e_k} \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^{m+1} e_m q^{e_m}.$$

Сравнивая коэффициенты при q^n в обеих частях, получаем равенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k d(n - e_k) = \begin{cases} (-1)^{m+1} e_m, & \text{если } n = e_m \text{ для некоторого } m \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

которое, как нетрудно проверить, совпадает с (12.12). $\square$

§ 13. q-гипергеометрические функции и формула Гейне

Для дальнейшего изучения бесконечных сумм и бесконечных произведений нам понадобится гипергеометрический ряд.

Определение. В классическом анализе *гипергеометрическим рядом* называется ряд

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{13.1}$$

для которого

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = R(n), \quad c_0 = 1, \tag{13.2}$$

где R — рациональная функция, знаменатель которой не обращается в нуль для неотрицательных целых чисел.

Если функция $R(t)$ задана, то коэффициенты c_n определяются по формуле

$$c_n = R(0)\,R(1)\ldots R(n-1).$$

Например, если $R(t) \equiv 1$, то $c_n = 1$ для всех n и $F(x)$ — сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем x. Умножив t, если это необходимо, на подходящую константу, можно с точностью до постоянного множителя представить $R(t)$ в виде

$$R(t) = \frac{(t+a_1)\,(t+a_2)\ldots(t+a_r)}{(t+b_1)\,(t+b_2)\ldots(t+b_s)\,(t+1)}, \tag{13.3}$$

где числа a_i, b_j таковы, что $a_i \neq b_j$ для всех $1 \leqslant i \leqslant r$ и $1 \leqslant j \leqslant s$, и при этом ни одно из чисел b_j не является неположительным целым.

Обозначение для гипергеометрического ряда, введенное Гауссом, содержит всю информацию, необходимую для определения гипергеометрического ряда. Если ряд $F(x)$ определен в соответствии с формулами (13.1) и (13.2), а функция $R(t)$ имеет вид (13.3), то будем писать

$$F(x) = {}_rF_s\left[\begin{matrix}a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s\end{matrix}; x\right], \tag{13.4}$$

что в явном виде равно

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1(a_1+1)\dots(a_1+n-1)\dots a_r(a_r+1)\dots(a_r+n-1)}{b_1(b_1+1)\dots(b_1+n-1)\dots b_s(b_s+1)\dots(b_s+n-1)}\frac{x^n}{n!}. \tag{13.5}$$

Например,

$$_0F_0[x]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

и

$$_1F_0\left[\begin{matrix}a\\-\end{matrix};x\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!}x^n=\frac{1}{(1-x)^a},$$

Таким образом, многие важные функции являются частными случаями гипергеометрического ряда.

Для гипергеометрического ряда существует q-аналог, который был введен Гейне. Будем предполагать, что $|q|\neq 1$.

Определение. Ряд

$$\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{13.6}$$

будем называть *q-гипергеометрическим рядом*, если

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=R(q^n),\quad c_0=1 \tag{13.7}$$

и $R(t)$ является рациональной функцией, знаменатель которой при $t=$ $=1,q,q^2,\dots$ не обращается в нуль.

При $n\geqslant 1$ имеет место равенство

$$c_n=R(1)\,R(q)\dots R(q^{n-1}). \tag{13.8}$$

В этом случае без ограничения общности рациональную функцию R удобно рассматривать в следующей форме:

$$R(t)=\frac{(a_1-t^{-1})\dots(a_r-t^{-1})}{(b_1-t^{-1})\dots(b_s-t^{-1})\,(q-t^{-1})}, \tag{13.9}$$

где $a_i\neq b_j$ и $b_j\neq q^{-n}$ для всех целых чисел i, j, $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant s$, и $n\geqslant 0$. Тогда из равенства

$$\prod_{j=0}^{n-1}(a-q^{-j})=\prod_{j=0}^{n-1}(-q^{-j})\,(1-q^ja)=(-1)^n\,q^{-n(n-1)/2}\,(1-a)_q^n \tag{13.10}$$

следует, что

$$c_n = \left((-1)^n q^{n(n-1)/2}\right)^{s-r+1} \frac{(1-a_1)_q^n \dots (1-a_r)_q^n}{(1-b_1)_q^n \dots (1-b_s)_q^n} \frac{1}{(1-q)_q^n}. \tag{13.11}$$

Будем использовать для q-гипергеометрического ряда обозначение, подобное (13.4):

$$\Phi(x) = {}_r\Phi_s\left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q; x\right]. \tag{13.12}$$

Например, из равенств (9.3), (9.4), (9.8) и (9.10) следует, что

$${}_0\Phi_0\left[\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}; q; x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)_q^n} x^n = (1-x)_q^{\infty} = E_q^{x/(q-1)} \tag{13.13}$$

и

$${}_1\Phi_0\left[\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}; q; x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q)_q^n} x^n = \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = e_q^{x/(1-q)}. \tag{13.14}$$

Теперь рассмотрим следующий простейший q-гипергеометрический ряд:

$${}_1\Phi_0[a; q; x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)_q^n}{(1-q)_q^n} x^n. \tag{13.15}$$

Здесь для простоты мы пишем ${}_1\Phi_0[a; q; x]$ вместо ${}_1\Phi_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; q; x\right]$. Если $a = q^N$, где N — натуральное число, то

$${}_1\Phi_0[q^N; q; x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^N)\dots(1-q^{N+n-1})}{(1-q)\dots(1-q^{n-1})} x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[N]\dots[N+n-1]}{[n]!} x^n.$$

Воспользовавшись формулой бинома Гейне (8.1), окончательно получаем

$${}_1\Phi_0[q^N; q; x] = \frac{1}{(1-x)_q^N}. \tag{13.16}$$

Этот результат позволяет предположить, что верно следующее утверждение.

Теорема 13.1. *Для любого a справедлива формула Гейне*

$${}_1\Phi_0[a; q; x] = \frac{(1-ax)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}. \tag{13.17}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что формула (13.17) справедлива при $a = q^N$. В самом деле,

$$\frac{(1-q^N x)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty} = \frac{(1-q^N x)\,(1-q^{N+1}x)\dots}{(1-x)\,(1-qx)\dots} = \frac{1}{(1-x)_q^N},$$

а это выражение равно ${}_1\Phi_0[a;q;x]$ согласно формуле (13.16).

Для завершения доказательства применим метод, который будет нам полезен и в следующих главах. Заметим, что обе части равенства (13.17) можно представить в виде степенных рядов по x:

$${}_1\Phi_0[a;q;x] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)x^n, \quad \frac{(1-ax)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(a)x^n,$$

причем их коэффициенты $c(a)$ и $c'(a)$ — рациональные функции от a.

Из формулы (13.16) следует, что равенство $c_n(a) = c'_n(a)$ выполняется для всех n и для всех $a = q^N$, где N — произвольное натуральное число. Таким образом, для любого n разность $c_n - c'_n$ является рациональной функцией переменной a с бесконечным множеством нулей. Но тогда она тождественно равна 0, поскольку число нулей рациональной функции не может превосходить степени многочлена в ее числителе. Следовательно, $c_n = c'_n$ при любом n, что завершает доказательство. □

§ 14. Обобщенный бином

Равенства (13.16) и (13.17) подсказывают следующее естественное обобщение q-бинома на произвольные степени.

Определение. Для любого числа α положим

$$(1+x)_q^\alpha = \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}. \tag{14.1}$$

Очевидно, что для положительных целых чисел α это определение совпадает с первоначальным, заданным формулой (3.4), а для отрицательных целых — с определением, заданным формулой (3.7). Следующие два утверждения являются обобщениями предложения 3.2 и формулы (3.11).

Предложение 14.1. *Для любых двух чисел α и β имеет место равенство*

$$(1+x)_q^\alpha\,(1+q^\alpha x)_q^\beta = (1+x)_q^{\alpha+\beta}. \tag{14.2}$$

Доказательство. Равенство (14.2) следует непосредственно из определения, поскольку

$$\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}\,\frac{(1+q^\alpha x)_q^\infty}{(1+q^{\alpha+\beta}x)_q^\infty} = \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^{\alpha+\beta}x)_q^\infty}. \qquad \square$$

Предложение 14.2. *Для любого числа α справедливо равенство*

$$D_q(1+x)_q^\alpha = [\alpha]\,(1+qx)_q^{\alpha-1}. \tag{14.3}$$

Доказательство. Непосредственное вычисление q-производной дает

$$D_q\left(\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}\right) = \left(\frac{(1+qx)_q^\infty}{(1+q^{\alpha+1}x)_q^\infty} - \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}\right)\frac{1}{(q-1)x} =$$
$$= \frac{(1+qx)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}\,\frac{(1+q^\alpha x)-(1+x)}{(q-1)x} = (1+qx)_q^{\alpha-1}\,\frac{q^\alpha-1}{q-1}.$$

Остается вспомнить, что по определению $[\alpha] = \dfrac{q^\alpha-1}{q-1}$ (см. (3.8)). $\square$

Предложение 14.2 позволяет нам вычислить q-ряд Тейлора для $(1+x)_q^\alpha$. В самом деле, используя правило дифференцирования сложной функции (1.15), получаем

$$\begin{aligned} D_q^j(1+x)_q^\alpha &= D_q^{j-1}\,[\alpha]\,(1+qx)_q^{\alpha-1} = \\ &= D_q^{j-2}\,[\alpha]\cdot q\,[\alpha-1]\,(1+q^2x)_q^{\alpha-2} = \\ &= D_q^{j-3}\,[\alpha]\cdot q\,[\alpha-1]\cdot q^2\,[\alpha-2]\,(1+q^3x)_q^{\alpha-3} = \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= [\alpha]\cdot q\,[\alpha-1]\cdot q^2\,[\alpha-2]\dots q^{j-1}\,[\alpha-j+1]\,(1+q^jx)_q^{\alpha-j} \end{aligned}$$

и, таким образом, $D_q^j\,(1+x)_q^\alpha\big|_{x=0} = q^{j(j-1)/2}\,[\alpha]\,[\alpha-1]\dots[\alpha-j+1]$. Следовательно,

$$(1+x)_q^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2}\,[\alpha]\,[\alpha-1]\dots[\alpha-j+1]\,x^j}{[j]!} = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \alpha \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2}\,x^j, \qquad (14.4)$$

а это равенство можно рассматривать как обобщение формулы бинома Гаусса (5.5).

Предложение 14.3. *Для любого α имеет место равенство*

$$D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^\alpha}\right) = \frac{[\alpha]}{(1-x)_q^{\alpha+1}}. \qquad (14.5)$$

Доказательство. Непосредственное вычисление q-производной дает

$$\begin{aligned} D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^\alpha}\right) &= D_q\left(\frac{(1-q^\alpha x)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}\right) = \\ &= \left(\frac{(1-q^{\alpha+1}x)_q^\infty}{(1-qx)_q^\infty} - \frac{(1-q^\alpha x)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}\right)\frac{1}{(q-1)\,x} = \\ &= \frac{(1-q^{\alpha+1}x)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}\cdot\frac{(1-x)-(1-q^\alpha x)}{(q-1)\,x} = \frac{1}{(1-x)_q^{\alpha+1}}\,\frac{q^\alpha-1}{q-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Применяя это предложение, а также индукцию по j, легко показать, что

$$D_q^j\left(\frac{1}{(1-x)_q^\alpha}\right)\Bigg|_{x=0} = [\alpha]\,[\alpha+1]\dots[\alpha+j-1]. \qquad (14.6)$$

Отсюда получаем следующее разложение в q-ряд Тейлора:

$$\frac{1}{(1-x)_q^\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\alpha]\,[\alpha+1]\ldots[\alpha+j-1]\,x^j}{[j]!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q^\alpha)\,(1-q^{\alpha+1})\ldots(1-q^{\alpha+j-1})\,x^j}{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^j)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q^\alpha)_q^j\,x^j}{(1-q)_q^j}.$$

Учитывая равенство (13.15) и подставив в числителе a вместо q^α, мы получаем новое доказательство формулы Гейне (13.17).

§ 15. Формула произведения Рамануджана

В этой главе мы применим формулу Гейне для доказательства замечательного тождества, открытого индийским математиком Рамануджаном. Это тождество связывает *двусторонний q-гипергеометрический ряд* с некоторым бесконечным произведением и имеет много интересных применений в теории чисел, которые будут рассмотрены в следующих главах.

Для доказательства формулы Рамануджана нам понадобятся несколько элементарных фактов из теории комплексных аналитических функций. Формальный степенной ряд по z, сходящийся в открытой окрестности

$$D_\varepsilon = \{z\colon |z| < \varepsilon\}$$

комплексной плоскости при некотором $\varepsilon > 0$, называется аналитической функцией в D_ε. Простейшими примерами аналитических функций в D_∞, т. е. во всей комплексной плоскости, являются многочлены от z с произвольными комплексными коэффициентами. Менее очевидный пример аналитической функции в D_∞ дает ряд $(1+z)_q^\infty$. Сходимость этого ряда для всех z можно вывести из соотношения (9.3), применив признак сходимости Даламбера. Легко показать, что если $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические функции и $a, b \in \mathbb{C}$, то аналитическими являются функции $af(z) + bg(z)$ и $f(z)\,g(z)$. Кроме того, если функция $f(z)$ аналитическая, то функция $1/f(z)$ также аналитическая при условии, что $f(z)$ не имеет нулей в D_ε.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из функций, аналитических в D_ε, сходится к аналитической функции в D_ε, если при всех n на D_ε выполняется оценка $|f_n(z)| \leqslant M_n$ и при этом ряд $\sum\limits_n M_n$ сходится. В самом деле, коэффициенты ряда $f_n(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{nm} z^m$ можно представить как

$$a_{nm} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f_n(z)}{z^{m+1}}\, dz, \quad n \geqslant 1,\ m \geqslant 0,$$

где интеграл берется по произвольной окружности радиуса r, $0 < r < \varepsilon$, с центром в начале координат. Читатель, незнакомый с этой формулой,

может легко доказать ее, представив $f_n(z)$ в виде ряда и применив подстановку $z = re^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$. Из этой формулы легко вывести, что $|a_{nm}| \leqslant M_n r^{-m}$. Но r можно выбрать произвольно близко к ε, поэтому $|a_{nm}| \leqslant M_n \varepsilon^{-m}$. Для каждого m ряд $\sum\limits_n a_{nm}$ сходится, поскольку $\sum\limits_n |a_{nm}| \leqslant M\varepsilon^{-m}$, где $M = \sum\limits_n M_n$. Сумму ряда $\sum\limits_n a_{nm}$ обозначим a_m.

Тогда формальный степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ определяет аналитическую функцию в D_ε. В самом деле,

$$|f(z)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|\,|z|^m \leqslant M \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)^m,$$

а последний ряд сходится при любом z, $|z| < \varepsilon$. Такая же оценка $|a_m| < M\varepsilon^{-m}$ показывает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится к $f(z)$ в D_ε.

Аналитические функции обладают важным свойством, которое аналогично конечности множества нулей для многочленов: если аналитическая функция $f(z)$ имеет имеет бесконечное число различных нулей $z_1, z_2, \ldots$ в D_ε, для которых $\lim\limits_{i\to\infty} z_i = 0$, то $f(z)$ является тождественным нулем. В самом деле, в противном случае можно было бы представить $f(z)$ в виде

$$f(z) = \sum_{j\geqslant n} c_j z^j,$$

где $c_n \neq 0$. Так как $f(z_i) = \sum\limits_{j\geqslant n} c_j z_i^j = 0$, разделив на z_i^n, для любого $i \geqslant 1$ получим равенство

$$c_n + c_{n+1} z_i + c_{n+2} z_i^2 + \ldots = 0.$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, получим $c_n = 0$, что противоречит выбору c_n. От условия $\lim\limits_{i\to\infty} z_i = 0$ здесь отказаться нельзя, так как существуют ненулевые аналитические функции, имеющие бесконечно много нулей. Например, нулями функции $e^z - 1$ являются числа $2\pi i n$, где n — любое целое число.

Рассмотрим двусторонний гипергеометрический ряд

$${}_1\Psi_1(a, b; q; x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1-a)_q^n}{(1-b)_q^n}\, x^n,$$

для которого формулируется основной результат этой главы.

Теорема 15.1 (формула произведения Рамануджана). *Пусть выполняются ограничения*

$$|q|<1, \quad |a|>|q|, \quad |b|<1 \quad и \quad \left|\frac{b}{a}\right|<|x|<1. \tag{15.1}$$

Тогда справедливо равенство

$${}_1\Psi_1(a,b;q;x)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-\dfrac{bq^n}{a}\right)(1-q^{n+1})\left(1-\dfrac{q^{n+1}}{ax}\right)(1-axq^n)}{(1-bq^n)\left(1-\dfrac{q^{n+1}}{a}\right)\left(1-\dfrac{bq^n}{ax}\right)(1-xq^n)}. \tag{15.2}$$

Доказательство (М. Измаил). Основная идея состоит в том, чтобы сперва показать, что обе части равенства (15.2) являются аналитическими функциями переменной b (при фиксированных a, q и x) в непустой области, определенной выражением (15.1) (т. е. области $|b|<\min\{1,|ax|\}$). Затем мы докажем равенство (15.2) при $b=q^M, q^{M+1}, q^{M+2}, \ldots$, где M — некоторое целое число. Отсюда будет следовать, что разность правой и левой частей равенства (15.2) является аналитической функцией переменной b, имеющей бесконечную последовательность нулей, сходящуюся к нулю, и поэтому должна тождественно обращаться в нуль.

Положим $f_n(b)=\dfrac{(1-a)_q^n}{(1-b)_q^n}\,x^n$. Чтобы увидеть, что ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n(b)$ сходится к аналитической функции от b, достаточно показать, что $f_n(b)$ — аналитическая функция при любом $n\in\mathbb{Z}$ и что, кроме того, при $n\to\pm\infty$ имеет место оценка $|f_n(b)|<M_{\pm}c_{\pm}^{|n|}$ для некоторых $c_{\pm}$, $0<c_{\pm}<1$, и некоторых положительных констант $M_{\pm}$.

Если $n>0$, то $(1-b)_q^n$ является многочленом от b, который не обращается в нуль в рассматриваемой области, поскольку $|b|<1$ и $|q|<1$. Отсюда следует аналитичность функций $f_n(b)$ при $n>0$.

Далее, при $n\to\infty$ имеем

$$\left|\frac{f_{n+1}(b)}{f_n(b)}\right|=\left|\frac{(1-q^n a)\,x}{1-q^n b}\right|\longrightarrow|x|<1.$$

Поэтому выполняется оценка $|f_{n+1}(b)|<c_+|f_n(b)|$ для произвольного фиксированного $c_+\in(|x|,1)$ и любого достаточно большого n. Следовательно, $|f_n(b)|<M_+c_+^n$ при некотором подходящем M_+ и всех достаточно больших n.

Подобным образом при $n<0$ функция $1/(1-b)_q^n=(1-q^nb)_q^{|n|}$ является многочленом (см. (3.7)), поэтому она аналитична. Кроме того,

$$\left|\frac{f_{-n-1}(b)}{f_{-n}(b)}\right|=\left|\frac{1-q^{-n-1}b}{(1-q^{-n-1}a)x}\right|\to\left|\frac{b}{ax}\right|<1$$

при $n \to +\infty$. Поэтому существуют константы c_- и M_-, для которых $|f_n(b)| < M_- c_-^{|n|}$ при всех достаточно больших по модулю отрицательных целых n.

Для того чтобы показать, что произведение в правой части равенства (15.2) аналитично по b, заметим, что сомножители в знаменателе не обращаются в нуль в рассматриваемой области и что каждый сомножитель либо не зависит от b, либо имеет вид $(1+cb)_q^\infty$, где c не зависит от b. Как было сказано выше, функция $f(z) = (1+z)_q^\infty$ аналитична в D_∞. Поскольку умножение аналитических функций и деление на аналитические функции, не обращающиеся в нуль, приводят к аналитическим функциям, произведение в правой части равенства (15.2) аналитично по b в рассматриваемой области.

Теперь выполним подстановку $b = q^M$, где M настолько велико, что b принадлежит области, указанной в условии теоремы. Заметим, что

$$\frac{1}{(1-q^M)_q^n} = \frac{1}{(1-q^M)_q^{-n'}} = (1-q^{M-n'})_q^{n'} = 0,$$

если $n = -n' \leqslant -M$. Отсюда видно, что левую часть равенства (15.2) можно переписать в виде

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(1-a)_q^n}{(1-q^M)_q^n} x^n = \sum_{n=-M+1}^{\infty} \frac{(1-a)_q^n}{(1-q^M)_q^n} x^n =$$

$$= x^{1-M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_q^{n+1-M}}{(1-q^M)_q^{n+1-M}} x^n =$$

$$= x^{1-M} \frac{(1-a)_q^{1-M}}{(1-q^M)_q^{1-M}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{1-M}a)_q^n}{(1-q)_q^n} x^n =$$

$$= x^{1-M} \frac{(1-a)_q^{1-M}}{(1-q^M)_q^{1-M}} \, {}_1\Phi_0[q^{1-M}a; q; x],$$

где мы применили соотношение (14.2) при $\alpha = 1-M$ и $\beta = n$. С помощью формулы Гейне (13.17) и равенства (3.7) полученное выражение можно преобразовать к виду

$$x^{1-M} \frac{(1-a)_q^{1-M}}{(1-q^M)_q^{1-M}} \frac{(1-q^{1-M}ax)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty} =$$

Для завершения доказательства сравним обе части равенства (15.2). При подстановке в правую часть $b = q^M$ получим

$$\frac{(1-q^M a^{-1})_q^\infty\,(1-q)_q^\infty\,(1-qa^{-1}x^{-1})_q^\infty\,(1-ax)_q^\infty}{(1-q^M)_q^\infty\,(1-qa^{-1})_q^\infty\,(1-q^M a^{-1}x^{-1})_q^\infty\,(1-x)_q^\infty} =$$
$$= \frac{(1-q)_q^{M-1}}{(1-qa^{-1})_q^{M-1}}\,\frac{(1-qa^{-1}x^{-1})_q^{M-1}\,(1-ax)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty}. \qquad (15.4)$$

Чтобы доказать, что (15.3) и (15.4) совпадают, остается проверить равенство

$$x^{1-M}\,\frac{(1-q^{1-M}ax)_q^\infty}{(1-q^{1-M}a)_q^{M-1}} = \frac{(1-qa^{-1}x^{-1})_q^{M-1}\,(1-ax)_q^\infty}{(1-qa^{-1})_q^{M-1}} \qquad (15.5)$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{(1-qa^{-1})_q^{M-1}}{(1-q^{1-M}a)_q^{M-1}} = \frac{(1-qa^{-1}x^{-1})_q^{M-1}\,(1-ax)_q^\infty}{(1-q^{1-M}ax)_q^\infty} \times$$
$$\times\, x^{M-1}\,\frac{(1-qa^{-1}x^{-1})_q^{M-1}}{(1-q^{1-M}ax)_q^{M-1}}\,x^{M-1}.$$

Если подставить в правую часть этого равенства $x = 1$, то результат будет совпадать с выражением, стоящим в левой части, которая, заметим, от x не зависит. Поэтому нам остается доказать, что правая часть равенства также не зависит от x. Преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{(1-qa^{-1}x^{-1})\,(1-q^2a^{-1}x^{-1})\dots(1-q^{M-1}a^{-1}x^{-1})\,x^{M-1}}{(1-q^{1-M}ax)\,(1-q^{2-M}ax)\dots(1-q^{-1}ax)} =$$
$$= \frac{1-qa^{-1}x^{-1}}{1-q^{-1}ax}\,\frac{1-q^2a^{-1}x^{-1}}{1-q^{-2}ax}\,\dots\,\frac{1-q^{M-1}a^{-1}x^{-1}}{1-q^{1-M}ax}\,x^{M-1} =$$
$$= \left(-\frac{q}{ax}\right)\left(-\frac{q^2}{ax}\right)\dots\left(-\frac{q^{M-1}}{ax}\right)x^{M-1};$$

полученное выражение не зависит от x, что и требовалось. □

В формулу произведения Рамануджана входят три переменные: a, b и x. Один из важных частных случаев имеет место при $a = y$ и $b = qy$. В этом случае область (15.1) принимает вид

$$|q| < |x| < 1, \quad |q| < |y| < |q|^{-1}. \qquad (15.6)$$

Легко проверить, что она непуста. В этом случае левая часть равенства (15.2) оказывается равной

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(1-y)_q^n}{(1-qy)_q^n}\,x^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1-y}{1-q^n y}\,x^n,$$

поскольку для любых целых n выполняется соотношение

$$(1-y)_q^n\,(1-q^n y) = (1-y)_q^{n+1} = (1-y)\,(1-qy)_q^n.$$

Наложим на y дополнительное ограничение $|q|<|y|<1$, тогда выполняются неравенства $|q^n y|<1$ при $n\geqslant 0$ и $|q^n y^{-1}|<1$ при $n\geqslant 1$. В этом случае можно использовать формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии, чтобы продолжить преобразование левой части равенства (15.2):

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-y)\,x^n}{1-q^n y}+\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(1-y)\,x^n}{1-q^n y} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-y)\,x^n}{1-q^n y}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-y)\,x^{-n}q^n y^{-1}}{1-q^n y^{-1}} = \\ &= (1-y)\biggl(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x^n\,(q^n y)^m-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x^{-n}\,(q^n y^{-1})^m\biggr).\end{aligned}$$

С другой стороны, произведение в правой части равенства (15.2) может быть приведено к виду

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{n+1})^2\,(1-x^{-1}y^{-1}q^{n+1})\,(1-xyq^n)}{(1-yq^{n+1})\,(1-x^{-1}q^{n+1})\,(1-y^{-1}q^{n+1})\,(1-xq^n)}.$$

Разделив обе части на $1-y$, получим

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=0}^{\infty}q^{mn}x^n y^m-\sum_{m,n=1}^{\infty}q^{mn}x^{-n}y^{-m} &= \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)^2\,(1-x^{-1}y^{-1}q^n)\,(1-xyq^{n-1})}{(1-xq^{n-1})\,(1-x^{-1}q^n)\,(1-yq^{n-1})\,(1-y^{-1}q^n)}.\end{aligned}\qquad(15.7)$$

Следовательно, в области $|q|<|z|<1$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=0}^{\infty}q^{mn}z^{m+n}-\sum_{m,n=1}^{\infty}q^{mn}z^{-m-n} &= \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)^2\,(1-z^{-2}q^n)\,(1-z^2q^{n-1})}{(1-zq^{n-1})^2\,(1-z^{-1}q^n)^2},\end{aligned}\qquad(15.8)$$

которое получается из (15.6) подстановкой $x = y = z$. Это равенство можно упростить, выделив слагаемые с $m = 0$ или $n = 0$ в первой сумме. Для этого заметим, что сумма этих членов равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{m=0}^{\infty} z^m - 1 = \frac{1+z}{1-z}.$$

Поэтому, домножив обе части (15.7) на $\dfrac{1-z}{1+z} = \dfrac{(1-z)^2}{1-z^2}$, получим, что при условии $|q| < |z| < 1$ выполняется равенство

$$1 + \frac{1-z}{1+z} \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} (z^{m+n} - z^{-m-n}) =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2 (1-z^{-2}q^n)(1-z^2q^n)}{(1-zq^n)^2 (1-z^{-1}q^n)^2}. \qquad (15.9)$$

Эти результаты играют важную роль в теоретико-числовых приложениях, о которых пойдет речь в следующих двух параграфах.

§ 16. Разложения целого числа в суммы двух и четырех квадратов

Одна из давних проблем теории чисел касается разбиения целого числа в сумму квадратов некоторых целых чисел. Знаменитый результат, впервые доказанный Лагранжем, состоит в том, что любое положительное целое число всегда можно представить в виде суммы четырех квадратов. В этой главе мы получим доказательство этого результата и выведем явные формулы Гаусса и Якоби для количества разбиений целого числа в сумму двух и четырех квадратов.

Обозначим число способов представления целого числа N в виде суммы m целых квадратов с учетом порядка слагаемых через $\square_m(N)$. Например, $\square_2(2) = 4$, поскольку 2 представляется в виде суммы квадратов двух целых чисел с учетом порядка слагаемых четырьмя различными способами:

$$2 = 1^2 + 1^2 = (-1)^2 + 1^2 = 1^2 + (-1)^2 = (-1)^2 + (-1)^2.$$

Также нетрудно видеть, что $\square_2(5) = 8$. В самом деле,

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2,$$

здесь знаки в каждом слагаемом выбираются независимо.

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$\square(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}. \tag{16.1}$$

Тогда

$$\square_m(N) = \text{коэффициент при } q^N \text{ в } \square(q)^m. \tag{16.2}$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что при разложении

$$\square(q)^m = (\ldots + q^9 + q^4 + q + 1 + q + q^4 + q^9 + \ldots)^m$$

в формальный степенной ряд слагаемые вида q^N находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными наборами целых чисел

$(a_1, \ldots, a_m)$, для которых $N = a_1^2 + \ldots + a_m^2$. Таким образом, коэффициент при q^N в $\square(q)^m$ равен числу способов представления N в виде суммы квадратов m целых чисел с учетом порядка слагаемых. При $m = 4$ имеет место следующая теорема.

Теорема 16.1. *Для любого натурального числа N справедлива формула*

$$\square_4(N) = 8 \sum_{d>0,\, 4\nmid d,\, d|N} d. \tag{16.3}$$

Из этой теоремы немедленно следует, что любое положительное число является суммой четырех квадратов, поскольку 1 является делителем любого целого числа, и 1 не делится на 4. Например, $6 = 2^2+1^2+1^2+0^2$, $97 = 8^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2$.

Доказательство теоремы 16.1. В равенстве (15.8) перейдем к пределу при $z \to -1$. Используя соотношение (12.11), получим, что правая часть равенства (15.8) стремится к

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n}\right)^4 = \square(-q)^4.$$

Левую часть равенства (15.8) удобно записать в виде

$$1 + (1-z) \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} \left(\frac{z^{m+n} - z^{-m-n}}{1+z}\right).$$

Применив правило Лопиталя, получим, что это выражение при $z \to -1$ стремится к

$$1 + 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n-1}(m+n)\, q^{mn}.$$

Заметим, что имеет место очевидное равенство

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n-1} m q^{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n-1} n q^{mn}.$$

Следовательно,

$$1 + 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n-1}(m+n)\, q^{mn} = 1 + 8 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m-1} m\, (-q^m)^n =$$

$$= 1 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m q^m}{1+q^m} = 1 + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\,(-q)^m}{1+q^m}.$$

Таким образом, после перехода к пределу при $z \to -1$ в равенстве (15.8) и замены q на $-q$ получим

$$\square(q)^4 = 1 + 8\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1+(-q)^m}. \tag{16.4}$$

Поскольку

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1+(-q)^m} = \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m \text{ нечетное}}} \frac{mq^m}{1-q^m} + \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m \text{ чётное}}} \frac{mq^m}{1+q^m}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k(q^{2k} - q^{4k} + q^{6k} - q^{8k} + \ldots) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2k(q^{2k} + q^{4k} + q^{6k} + q^{8k} + \ldots) - \sum_{k=1}^{\infty} 4k(q^{4k} + q^{8k} + \ldots) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1-q^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4kq^{4k}}{1-q^{4k}},$$

выполняется равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1+(-q)^m} = \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ 4\nmid m}} \frac{mq^m}{1-q^m} = \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ 4\nmid m}} \sum_{n=1}^{\infty} mq^{mn}.$$

Следовательно,

$$\square(q)^4 = 1 + 8\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ 4\nmid m}} \sum_{n=1}^{\infty} mq^{mn}. \tag{16.5}$$

Таким образом, для любого $N \geqslant 1$ коэффициент при q^N в разложении $\square(q)^4$ представляется в виде $8\sum m$, где $mn = N$ для некоторого натурального числа n и такого числа m, что $4 \nmid m$. Иными словами, $\square_4(N)$ в 8 раз больше суммы положительных делителей числа N, не кратных 4. □

Наименьшее число квадратов, в сумму которых можно разложить любое положительное целое число, равно 4. Например, 7 не представляется в виде суммы 3 квадратов.

Однако можно получить формулу для $\square_2(N)$ — количества способов представления целого числа N в виде суммы двух квадратов. Напомним, что через $\#A$ мы обозначаем количество элементов конечного множества A.

Теорема 16.2. *Для любого натурального числа N имеет место равенство*

$$\square_2(N) = 4\#\{d\colon d \text{ делит } N,\ d>0,\ d\equiv 1 \pmod 4\} - \\ - 4\#\{d\colon d \text{ делит } N,\ d>0,\ d\equiv 3 \pmod 4\}. \quad (16.6)$$

Доказательство. В равенстве (15.8) сделаем предельный переход при $z\to i=\sqrt{-1}$. Выражение в правой части (15.8) будет стремиться к

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)^2(1+q^n)^2}{(1+iq^n)^2(1-iq^n)^2}=\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}\right)^2=\square(-q^2)^2.$$

В то же время, левая часть (15.8) стремится к

$$1-i\sum_{m,n=1}^{\infty}q^{mn}\bigl(i^{m+n}-(-i)^{m+n}\bigr).$$

Заметим, что $(-i)^{m+n}=i^{m+n}$, если число $m+n$ четное, т. е. если числа m и n одной четности, и $(-i)^{m+n}=-i^{m+n}$, если число $m+n$ нечетно, т. е. числа m и n разной четности. С учетом этого предел левой части можно переписать в виде

$$1-2i\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m\text{ нечетное}}}\ \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{ четное}}}q^{mn}i^{m+n}-2i\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m\text{ четное}}}\ \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{ нечетное}}}q^{mn}i^{m+n}.$$

Две суммы в этом выражении совпадают, так как получаются друг из друга перестановкой переменных m и n.

Таким образом, переходом к пределу при $z\to i=\sqrt{-1}$ из (15.8) мы получили равенство

$$\square(-q^2)^2=1-4\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m\text{ нечетное}}}\ \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{ четное}}}q^{mn}\,i^{m+n+1}.$$

Заменив q^2 на $-q$, получим

$$\square(q)^2=1-4\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m\text{ нечетное}}}\ \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{ четное}}}(-q)^{mn/2}\,i^{m+n+1}=$$

$$=1-4\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ m\text{ нечетное}}}\ \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n\text{ четное}}}(-1)^{(m+1)/2}\,q^{mn/2}.$$

Наконец, заменив n на $2k$, получаем

$$\square(q)^2 = 1 + 4 \sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ m \text{ нечетное}}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} q^{mk}. \tag{16.7}$$

Рассмотрим правую часть равенства (16.7). Для любого $N \geqslant 1$ слагаемые вида $4q^N$ взаимно однозначно соответствуют нечетным числам m, являющимся делителями числа N и сравнимым с 1 по модулю 4, поскольку $\dfrac{m-1}{2}$ четно в точности для таких m. Аналогично слагаемые вида $-4q^N$ взаимно однозначно соответствуют таким нечетным m, которые являются делителями N и сравнимы с 3 по модулю 4. Следовательно, коэффициент при q^N в разложении $\square(q)^2$ в степенной ряд задается равенством (16.6). □

Следствие 16.1 (теорема Ферма). *Простое нечетное число p может быть представлено в виде суммы двух квадратов натуральных чисел в том и только в том случае, когда $p \equiv 1 \pmod 4$. Кроме того, если такое представление возможно, то оно единственно, если не принимать во внимание порядок слагаемых.*

Доказательство. Число p имеет два положительных делителя: 1 и p. Если $p \equiv 1 \pmod 4$, то оба делителя сравнимы с 1 по модулю 4. В этом случае $\square_2(p) = 8$ по теореме 16.2. Таким образом, число p можно представить в виде $p = a^2 + b^2$, где a и b — натуральные числа. Для каждой из восьми упорядоченных пар $(\pm a, \pm b)$, $(\pm b, \pm a)$ сумма квадратов равна p. Кроме того, эти восемь пар различны, поскольку из того, что число p нечетное и простое, следует, что $|a| \neq |b|$. Таким образом, мы перечислили все возможности представить p в виде суммы квадратов двух целых чисел. Очевидно, что если не обращать внимания на порядок слагаемых, то представление числа p в виде суммы квадратов двух натуральных чисел единственно.

Если $p \equiv 3 \pmod 4$, то $\square_2(p) = 0$ по теореме 16.2. □

§ 17. Разложения целого числа в суммы двух и четырех треугольных чисел

Формулу произведения Рамануджана можно также применить для изучения количества разбиений целого числа в сумму двух или четырех треугольных чисел. Напомним, что n-м треугольным числом в § 12 мы назвали число

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Так как $\Delta_{-n-1} = \Delta_n$, бесконечная в обе стороны последовательность $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ симметрична. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать Δ_n при $n \geqslant 0$. Рассмотрим формальный степенной ряд

$$\Delta(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\Delta_n}.$$

Он отличается от ряда (16.1), использованного в предыдущем параграфе, тем, что здесь суммирование производится только по неотрицательным целым n. Так же как и в предыдущем параграфе, легко проверить, что число способов представления натурального числа N в виде суммы m треугольных чисел с учетом порядка слагаемых равно коэффициенту при q^N в степенном ряде $\Delta(q)^m$. Будем обозначать это число через $\Delta_m(N)$.

Теорема 17.1. *Для любого положительного целого числа N имеет место равенство*

$$\Delta_2(N) = \#\{d\colon d>0,\ d|4N+1,\ d\equiv 1 \pmod 4\} - \\ - \#\{d\colon d>0,\ d|4N+1,\ d\equiv 3 \pmod 4\}. \quad (17.1)$$

Доказательство. В равенстве (15.7) заменим q на $-q$, а z на $-\sqrt{q}$. Будем считать, что $0 < q < 1$. Тогда с помощью соотношения (12.8) правую часть равенства (15.7) можно преобразовать следующим образом:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^nq^n)^2\,(1-(-1)^nq^{n-1})\,(1+(-1)^nq^n)}{(1-(-1)^nq^{n-1/2})^2\,(1+(-1)^nq^{n-1/2})^2}=$$

$$=2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^nq^n)^2\,(1+(-1)^nq^n)^2}{(1-(-1)^nq^{n-1/2})^2\,(1+(-1)^nq^{n-1/2})^2}=$$

$$=2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n})^2}{(1-q^{2n-1})^2}=2\Delta(q)^2.$$

Левая часть равенства (15.7) приводится к виду

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^{mn+m+n}q^{mn+\frac{m+n}{2}}-\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{mn-m-n}q^{mn-\frac{m+n}{2}}=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{mn-1}q^{mn-\frac{m+n}{2}}-\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{mn-m-n}q^{mn-\frac{m+n}{2}};$$

здесь в первой сумме мы заменили m на $m-1$ и n на $n-1$. Заметим, что если число $m+n$ нечетно, то соответствующие члены в последних двух суммах отличаются знаком, поэтому они взаимно уничтожаются. Тем самым, выражение в левой части принимает вид

$$2\sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ m+n\text{ четное}}}(-1)^{mn-1}q^{mn-\frac{m+n}{2}}=$$

$$=2\sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ m,n\text{ нечетные}}}q^{mn-\frac{m+n}{2}}-2\sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ m,n\text{ четные}}}q^{mn-\frac{m+n}{2}}.$$

Отсюда получаем соотношение

$$\Delta(q)^2=\sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ m,n\text{ нечетные}}}q^{mn-\frac{m+n}{2}}-\sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ m,n\text{ четные}}}q^{mn-\frac{m+n}{2}}. \tag{17.2}$$

Слагаемое вида $\pm q^N$ появляется в правой части этого равенства в том и только в том случае, когда $N=mn-\dfrac{m+n}{2}$, т. е. $4N+1=(2m-1)\,(2n-1)$, для некоторых натуральных чисел m и n, четных или нечетных одновременно. Если они оба нечетны, то $2m-1\equiv 1 \pmod 4$, а если оба четны, то $2m-1\equiv 3 \pmod 4$. Следовательно, каждый делитель числа $4N+1$, сравнимый с 1 по модулю 4, дает вклад $+1$, и каждый делитель числа $4N+1$, сравнимый с 3 по модулю 4, дает вклад -1 в коэффициент при q^N. ⌐

В частности, если $4N+1$ — простое число, справедливо следующее утверждение.

Следствие 17.1. *Если N — натуральное число, причем число $4N+1$ простое, то N единственным образом представляется в виде суммы двух различных треугольных чисел с точностью до перестановки слагаемых.*

Доказательство. Если число $4N+1$ простое, то его положительными делителями являются только 1 и $4N+1$. Оба эти делителя сравнимы с 1 по модулю 4, и из теоремы 17.1 следует, что $\Delta_2(N) = 2-0 = 2$. Вспомним теперь, что $\Delta_m(N)$ равно количеству всевозможных представлений числа N в виде суммы m треугольных чисел с учетом порядка слагаемых. Поэтому из равенства $\Delta_2(N) = 2$ следует, что мы имеем в точности две возможности: либо

$$N = \Delta_k + \Delta_l = \Delta_l + \Delta_k, \quad k \neq l,$$

либо

$$N = \Delta_k + \Delta_k = \Delta_l + \Delta_l, \quad k \neq l.$$

Второй вариант невозможен, поскольку последовательность $\{\Delta_n\}_{n\geqslant 0}$ строго возрастает. Этот вариант можно исключить и другим способом. Для этого нужно заметить, что из равенства $N = 2\Delta_k$ следует, что $4N+1 = (2k+1)^2$, и тогда число $4N+1$ не может быть простым. □

Приведем простые примеры применения следствия: $7 = 1+6$, $13 = 3+10$ и $43 = 15+28$. Следующая теорема касается разбиения на четыре треугольных числа.

Теорема 17.2. *Для любого натурального N имеет место равенство*

$$\Delta_4(N) = \sum_{k>0,\, k \mid 2N+1} k. \tag{17.3}$$

Доказательство. Разделим обе части равенства (15.7) на $1-qz^{-2}$, заменим q на q^2 и устремим z к q. Тогда правая часть равенства (15.7) с помощью соотношения (12.8) преобразуется к виду

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2\,(1-q^{2n})\,(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})^2\,(1-q^{2n-1})^2} = \Delta(q)^4.$$

Поскольку в правой части равенства получается конечное значение, левая часть также конечна. Применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{z\to q}\frac{1}{1-q^2z^{-2}}\Biggl(\sum_{m,n=0}^{\infty}q^{2mn}z^{m+n}-\sum_{m,n=1}^{\infty}q^{2mn}z^{-m-n}\Biggr)=$$

$$=\frac{1}{2q^{-1}}\Biggl(\sum_{m,n=0}^{\infty}(m+n)\,q^{2mn+m+n-1}+\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n)\,q^{2mn-m-n-1}\Biggr)=$$

$$=\frac{1}{2}\Biggl(\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n-2)\,q^{2mn-m-n}+\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n)\,q^{2mn-m-n}\Biggr)=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n-1)\,q^{2mn-m-n}.$$

Полученное выражение симметрично относительно m и n, поэтому его можно переписать в виде

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n-1)\,q^{2mn-m-n}=\sum_{m,n=1}^{\infty}(2m-1)\,q^{2mn-m-n}.$$

Тем самым,

$$\Delta(q)^4=\sum_{m,n=1}^{\infty}(2m-1)\,q^{2mn-m-n}.$$

Сделав замену $k=2m-1$, $\ell=2n-1$, получим

$$\Delta(q)^4=\sum_{\substack{k,\ell\geqslant 1\\ k,\ell\text{ нечетные}}}kq^{\frac{k\ell-1}{2}}. \tag{17.4}$$

Легко видеть, что слагаемое q^N появляется в этой сумме в том и только в том случае, когда $N=\dfrac{k\ell-1}{2}$, т. е. $2N+1=k\ell$, для некоторых нечетных положительных чисел k и ℓ. Поскольку каждый делитель числа $2N+1$ нечетный, коэффициент при q^N равен

$$\Delta_4(N)=\sum_{k>0,\,k\mid 2N+1}k. \qquad \square$$

§ 18. q-первообразная

Рассмотрев некоторые приложения, вернемся к q-исчислению. До сих пор мы обсуждали квантовое дифференцирование. Теперь рассмотрим обратную операцию: квантовое интегрирование. Сперва рассмотрим q-первообразную.

Определение. Функция $F(x)$ называется *q-первообразной* для $f(x)$, если $D_q F(x) = f(x)$. Обозначим ее

$$\int f(x)\, d_q x. \tag{18.1}$$

Обратим внимание на то, что, как и в классическом анализе, q-первообразная не единственна.

В классическом анализе производная разности первообразных $F_1(x)$ и $F_2(x)$ одной и той же функции $f(x)$ равна 0. Если исходная функция $f(x)$ была определена на интервале, то легко показать, что разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна.

В квантовом анализе ситуация несколько сложнее. Разумеется, две q-первообразные одной и той же функции $f(x)$ отличаются на функцию $\varphi(x)$, q-производная которой равна 0. Но дело в том, что равенство $D_q\varphi(x) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi(qx) = \varphi(x)$, откуда, вообще говоря, не следует, что функция $\varphi(x)$ постоянна.

Ограничения, при которых q-первообразная единственна с точностью до аддитивной постоянной, могут быть различными. Например, если мы потребуем, чтобы q-первообразная задавалась формальным степенным рядом, то разность двух q-первообразных одной функции также разлагается в степенной ряд: $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Тогда из условия $\varphi(qx) = \varphi(x)$ следует, что $q^n c_n = c_n$ для всех n. Это возможно, только если $c_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$, иными словами, функция φ должна быть постоянной.

Следовательно, функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

среди формальных степенных рядов имеет единственную q-первообразную с точностью до произвольной аддитивной константы:

$$\int f(x)d_qx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{[n+1]} + C. \tag{18.2}$$

Для функции $f(x)$ более общего вида единственность q-первообразной с точностью до аддитивной константы можно доказать, если наложить некоторое ограничение на рассматриваемые q-первообразные. При этом также придется уточнять область определения функции $f(x)$. Часто нам будет удобно считать, что функция $f(x)$ определена на промежутке вида $(0, A]$ или на всей вещественной прямой. Вопрос существования q-первообразной для произвольной функции $f(x)$ мы рассмотрим в следующей главе.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, имеющую нулевую q-производную. Условие $\varphi(qx) = \varphi(x)$ означает, что график функции φ выдерживает сжатие по оси Ox с коэффициентом q. Пусть, например, $q = 0,1$. Предположим, что нам известно поведение функции φ на промежутке $(0{,}1; 1]$, тогда равенство $\varphi(qx) = \varphi(x)$ позволяет выяснить, как функция φ устроена на промежутках $(0{,}01; 0{,}1]$, $(0{,}001; 0{,}01]$ и т. д. В частности, если график функции φ на промежутке $(0{,}1; 1]$ представляет собой прямую, не являющуюся горизонтальной, то на любом промежутке вида $(q^{n+1}, q^n]$ график функции φ также является прямой, но угловой коэффициент наклона будет тем больше, чем ближе промежуток к 0. Нетрудно видеть, что такая функция φ обязана быть разрывной в точке 0. Общее утверждение формулируется следующим образом.

Предложение 18.1. *С точностью до прибавления произвольной постоянной любая функция $f(x)$, определенная на всей вещественной прямой, имеет не более одной q-первообразной, непрерывной при $x = 0$.*

Доказательство, которое мы приведем, очевидным образом можно применить и в том случае, когда функция $f(x)$ определена на промежутке вида $(0, A]$. В этом случае условие непрерывности в точке 0 нужно заменить на условие существования предела при $x \to 0$.

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — две q-первообразные функции f, непрерывные в точке 0. Положим $\varphi = F_1 - F_2$. Тогда функция φ определена на всей вещественной прямой и непрерывна в точке 0, причем для любого x выполняется равенство $\varphi(qx) = \varphi(x)$. Рассмотрим вначале случай $0 < q < 1$. Зафиксируем произвольное число $A > 0$. Пусть

$$m = \inf\{\varphi(x)\colon qA \leqslant x \leqslant A\},$$
$$M = \sup\{\varphi(x)\colon qA \leqslant x \leqslant A\},$$

где величины m и M могут обращаться в бесконечность, если функция φ не ограничена снизу или соответственно сверху.

Предположим, что $m < M$. Тогда должно быть справедливо по крайней мере одно из неравенств $\varphi(0) \neq m$ и $\varphi(0) \neq M$. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(0) \neq m$. Пусть $\varepsilon < |\varphi(0) - m|/2$. Из непрерывности функции φ в точке $x = 0$ следует, что существует $\delta > 0$, для которого

$$\varphi(-\delta, \delta) \subset (\varphi(0) - \varepsilon, \varphi(0) + \varepsilon).$$

Легко видеть, что тогда

$$m + \varepsilon \notin \varphi(0, \delta).$$

С другой стороны, $q^N A < \delta$ для некоторого достаточно большого N. Поскольку $\varphi(qx) = \varphi(x)$, мы имеем

$$m + \varepsilon \in (m, M) \subset \varphi[qA, A] = \varphi[q^{N+1}A, q^N A] \subset \varphi(0, \delta),$$

что приводит к противоречию. Поэтому $m = M$, т. е. функция φ постоянна на отрезке $[qA, A]$, откуда следует, что она постоянна при $x \geqslant 0$. Аналогично можно показать, что функция φ постоянна при $x \leqslant 0$; тем самым, она принимает одно и то же значение при всех $x \in \mathbb{R}$.

Если $q > 1$, то следует рассмотреть величины

$$m = \inf \{\varphi(x) \colon q^{-1}A \leqslant x \leqslant A\},$$
$$M = \sup \{\varphi(x) \colon q^{-1}A \leqslant x \leqslant A\},$$

которые могут обращаться в бесконечность, если функция φ не ограничена снизу или соответственно сверху. Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично. □

Существование q-первообразной будет обсуждаться в следующей главе.

В заключение этой главы выясним, как ведет себя q-первообразная при замене переменной вида $u(x) = \alpha x^\beta$, где α и β — постоянные числа. Пусть $F(x)$ является q-первообразной функции $f(x)$. Заменив x на u, запишем этот факт в виде равенства

$$\int f(u)\, d_q u = F(u).$$

Рассмотрим сложную функцию $F(u(x))$. Используя формулу q-дифференцирования сложной функции (1.15), получаем, что для любого q' справедливо равенство

$$F(u(x)) = \int D_{q'} F(u(x))\, d_{q'} x = \int (D_{q'^\beta} F)(u(x))\, D_{q'} u(x)\, d_{q'} x.$$

Полагая $q' = q^{1/\beta}$, получаем $D_{q'^{\beta}} F = D_q F = f$ и, следовательно,

$$F(u(x)) = \int f(u(x))\, D_{q^{1/\beta}} u(x)\, d_{q^{1/\beta}} x. \tag{18.3}$$

Эта формула означает, что $F(u(x))$ является одной из $q^{1/\beta}$-первообразных функции $f(u(x))\, D_{q^{1/\beta}} u(x)$.

§ 19. Интеграл Джексона

Пусть $f(x)$ — произвольная функция, областью определения которой является либо вся вещественная прямая, либо промежуток вида $(0, A]$. Предположим, что $F(x)$ является q-первообразной функции $f(x)$. Напомним, что в гл. 5 мы определили оператор $\hat{M}_q$, который действует на функциях по формуле $\hat{M}_q(F(x)) = F(qx)$. Равенство $D_q F(x) = f(x)$ можно переписать в виде

$$\frac{1}{(q-1)\,x}\,(\hat{M}_q - 1)\,F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)\,x} = f(x). \tag{19.1}$$

Отметим, что порядок операторов $\hat{M}_q$ и деления на x важен, поскольку они не коммутируют. Теперь, используя формулу суммирования бесконечной геометрической прогрессии, можно ***формально*** записать q-первообразную в виде

$$F(x) = \frac{1}{1-\hat{M}_q}(1-q)\,xf(x) = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\hat{M}_q^j\,xf(x).$$

Тем самым, получаем формальное равенство

$$\int f(x)\,d_q x = (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x). \tag{19.2}$$

Ряд, стоящий в правой части этого равенства, называется *интегралом Джексона* функции $f(x)$. Из этого определения легко получить более общую формулу, а именно,

$$\int f(x)D_q g(x)\,d_q x = (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)D_q g(q^j x) =$$

$$= (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\,\frac{g(q^j x) - g(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x}$$

или

$$\int f(x)\,d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j x)(g(q^j x) - g(q^{j+1}x)). \tag{19.3}$$

Равенства (19.2) и (19.3) выполняются только формально, поэтому необходимо выяснить, при каких условиях ряд, задающий интеграл Джексона, сходится к некоторой q-первообразной. В следующей теореме приводятся достаточные условия сходимости.

Теорема 19.1. *Пусть* $0 < q < 1$. *Предположим, что функция* $f(x)$ *определена на промежутке* $(0, A]$, *причем функция* $|f(x)x^{\alpha}|$ *ограничена на* $(0, A]$ *при некотором* $\alpha < 1$. *Тогда ряд* (19.2), *задающий интеграл Джексона, для всех* $x \in (0, A]$ *сходится к некоторой функции* $F(x)$, *которая является* q*-первообразной* $f(x)$. *Кроме того, предел* $F(x)$ *при* $x \to 0$ *равен* 0.

Если функция $f(x)$ не определена в точке 0, то формула (19.2) не имеет смысла, но теорема 19.1 показывает, что естественно положить $F(0) = 0$. Если же функция $f(x)$ определена в точке 0, то при $x = 0$ формула (19.2) дает нулевое значение. В любом случае оказывается, что функция $F(x)$ непрерывна в 0.

Доказательство. Пусть $|f(x)x^{\alpha}| < M$ для всех $x \in (0, A]$. Тогда для любого x, $0 < x \leqslant A$, и $j \geqslant 0$ выполняется равенство

$$|f(q^j x)| < M(q^j x)^{-\alpha}.$$

Отсюда получаем оценку

$$|q^j f(q^j x)| < M q^j (q^j x)^{-\alpha} = M x^{-\alpha} (q^{1-\alpha})^j, \tag{19.4}$$

которая справедлива для любого x, $0 < x \leqslant A$, и $j \geqslant 0$. Поскольку $1 - \alpha > 0$ и $q < 1$, мы получаем, что $q^{1-\alpha} < 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией. Таким образом, ряд

$$(1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x),$$

задающий интеграл Джексона, сходится поточечно при $x \in (0, A]$ к некоторой функции $F(x)$.

Покажем, что $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = 0$. Для этого достаточно заметить, что имеет место оценка

$$|(1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)| < \frac{M(1-q)x^{1-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}}, \quad 0 < x \leqslant A.$$

Проверим, что $F(x)$ является q-первообразной функции $f(x)$:

$$D_qF(x) = \frac{1}{(1-q)x}((1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - (1-q)\,qx\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^{j+1}x)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=0}^{\infty} q^{j+1} f(q^{j+1}x) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=1}^{\infty} q^j f(q^j x) = f(x).$$

Заметим, что если $x \in (0, A]$ и $0 < q < 1$, то $qx \in (0, A]$, и q-дифференцирование корректно. □

Согласно предложению 18.1, если условия теоремы 19.1 выполняются, то интеграл Джексона задает единственную с точностью до аддитивной постоянной q-первообразную, непрерывную при $x = 0$. Обратно, если $F(x)$ является q-первообразной функции $f(x)$, причем $F(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то $F(x)$ задается с точностью до аддитивной постоянной формулой Джексона (19.2). В самом деле, частичная сумма ряда (19.2) равна

$$(1-q)\,x\sum_{j=0}^{N} q^j f(q^j x) = (1-q)\,x\sum_{j=0}^{N} q^j\; D_qF(t)|_{t=q^j x} =$$

$$= (1-q)\,x\sum_{j=0}^{N} q^j \left(\frac{F(q^j x) - F(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N}(F(q^j x) - F(q^{j+1}x)) = F(x) - F(q^{N+1}x),$$

а это выражение стремится к $F(x) - F(0)$ при $N \to \infty$, поскольку $F(x)$ непрерывна в точке $x = 0$.

Рассуждая аналогично, легко показать, что если функция $f(x)$ определена на промежутке $(0, A]$, а $F(x)$ — это ее первообразная, причем $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$, то $F(x)$ задается интегралом Джексона.

Приведем пример, когда формула Джексона (19.2) неверна. Рассмотрим функцию $f(x) = 1/x$. Легко проверить, что

$$D_q \ln x = \frac{\ln(qx) - \ln(x)}{(q-1)\,x} = \frac{\ln q}{q-1}\,\frac{1}{x}, \tag{19.5}$$

поэтому

$$\int \frac{1}{x}\,d_q x = \frac{q-1}{\ln q}\ln x. \tag{19.6}$$

С другой стороны, формула Джексона не имеет смысла, поскольку

$$\int \frac{1}{x}\, d_q x = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Причиной служит тот факт, что функция $f(x)x^{\alpha}$ не является ограниченной ни при каком $\alpha < 1$. Заметим при этом, что функция $\dfrac{q-1}{\ln q}\ln x$ не имеет конечного предела при $x \to 0$.

Формула Джексона (19.2) позволяет задать определенный q-интеграл.

Определение. Пусть $0 < a < b$. Положим по определению

$$\int_0^b f(x)\, d_q x = (1-q)\, b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b) \tag{19.7}$$

и

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = \int_0^b f(x)\, d_q x - \int_0^a f(x)\, d_q x. \tag{19.8}$$

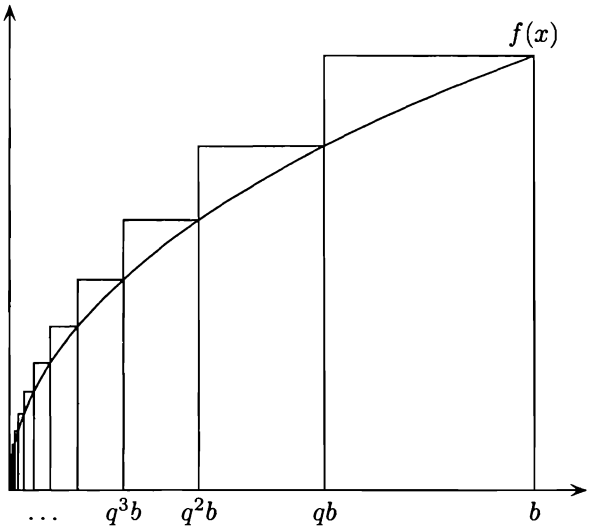
По аналогии с (19.3) из (19.7) следует более общая формула

$$\int_0^b f(x) d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j b)(g(q^j b) - g(q^{j+1} b)). \tag{19.9}$$

Заметим, что это определение согласуется с тем фактом, что интеграл Джексона обращается в нуль при $x = 0$. Геометрически интеграл в формуле (19.7) соответствует площади бесконечного числа столбцов, показанных на следующем рисунке.

Рассмотрим отрезок вида $[\varepsilon, b]$, где $0 < \varepsilon < b$. Тогда для $q = \sqrt[n]{\varepsilon/b}$ он разбивается на конечное число отрезков вида $[bq^{m+1}, bq^m]$. Тем самым, для указанных значений q определенный q-интеграл является интегральной суммой Римана функции $f(x)$ на отрезке $[\varepsilon, b]$. Заметим, что если $n \to \infty$, то $q = \sqrt[n]{\varepsilon/b} \to 1$. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[\varepsilon, b]$, то при этом $\int\limits_{\varepsilon}^{b} f(x)\, d_q x \to \int\limits_{\varepsilon}^{b} f(x)\, dq$. Поскольку ε можно взять произвольно малым, при условии, что функция $f(x)$ непрерывна на $[0, b]$, получаем равенство

$$\lim_{q \to 1} \int_0^b f(x)\, d_q x = \int_0^b f(x)\, dx. \tag{19.10}$$



Формула (19.7) не позволяет определить несобственный интеграл предельным переходом при $b \to +\infty$, поскольку при этом она теряет смысл. Заметим, однако, что имеет место равенство

$$\int\limits_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\,d_qx = \int\limits_0^{q^j} f(x)\,d_qx - \int\limits_0^{q^{j+1}} f(x)\,d_qx =$$

$$= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k} f(q^{j+k}) - (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f(q^{j+k+1}),$$

поэтому

$$\int\limits_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\,d_qx = (1-q)\,q^j f(q^j). \tag{19.11}$$

Определение. Пусть $0 < q < 1$. Несобственным q-интегралом функции $f(x)$ на $[0,+\infty)$ будем называть

$$\int\limits_0^{\infty} f(x)\,d_qx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int\limits_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\,d_qx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1-q)\,q^j f(q^j). \tag{19.12}$$

Предложение 19.1. *Несобственный q-интеграл, определенный формулой* (19.12), *сходится, если функция $x^\alpha f(x)$ ограничена в окрестности точки $x = 0$ для некоторого $\alpha < 1$ и при всех достаточно больших x для некоторого $\alpha > 1$.*

Доказательство. Мы имеем

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f(q^j) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j) + \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f(q^{-j}). \tag{19.13}$$

Сходимость первого ряда в правой части (19.13) доказана в теореме 19.1.

По условию для некоторых $\alpha > 1$ и $M > 0$ при всех достаточно больших x имеет место оценка $|x^\alpha f(x)| < M$. Тогда для всех достаточно больших целых j получаем

$$|q^{-j} f(q^{-j})| = q^{j(\alpha-1)} |q^{-j\alpha} f(q^{-j})| < M q^{j(\alpha-1)}.$$

Следовательно, второй ряд в правой части (19.13) мажорируется сходящейся геометрической прогрессией и поэтому сходится. □

Теперь рассмотрим замену переменной вида $u = u(x) = \alpha x^\beta$ в определенном интеграле. Если для функции $f(x)$ интеграл Джексона сходится, то формулу Джексона можно применить для нового доказательства равенства (18.3). В самом деле, используя формулу (19.3), получаем

$$\int f(u)\, d_q u = \sum_{j=0}^{\infty} f(u(q^{j/\beta}x))(u(q^{j/\beta}x) - u(q^{(j+1)/\beta})) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} f(\alpha q^j x^\beta)(\alpha q^j x^\beta - \alpha q^{j+1} x^\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j u)\,(q^j u - q^{j+1} u) =$$

$$= (1-q)\, u \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j u) = \int f(u(x))\, d_{q^{1/\beta}} u(x).$$

Заменив в этом равенстве x вначале на a, а потом на b и, воспользовавшись определением (19.8), получим

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, d_q u = \int_a^b f(u(x))\, d_{q^{1/\beta}} u(x). \tag{19.14}$$

Равенство (19.14) также можно получить с помощью формулы Ньютона—Лейбница (20.1), которая будет выведена в следующем параграфе. Из формулы (20.1) следует, что обе части равенства (19.4) равны

$F(u(b))-F(u(a))$, где F — некоторая q-первообразная функции f, непрерывная при $x=0$.

Формула (20.1) справедлива и для несобственных интегралов. В частности, если $\alpha, \beta > 0$, то $u(+\infty) = +\infty$. В этом случае формула (19.14) справедлива и при $b = +\infty$. Например, при $\alpha > 0$, $\beta = 1$ имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} f(\alpha x)\, d_q x = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(x)\, d_q x. \tag{19.15}$$

§ 20. q-формула Ньютона—Лейбница и q-интегрирование по частям

В классическом анализе производная определяется как предел отношения приращений функции и ее аргумента, а определенный интеграл — как предел интегральных сумм. Между этими операциями есть замечательное соотношение — формула Ньютона—Лейбница.

С другой стороны, определенный q-интеграл мы ввели с помощью q-первообразной, поэтому отношение между q-производной и определенным q-интегралом более очевидно.

Как и раньше, будем предполагать, что $0 < q < 1$.

Теорема 20.1 (q-формула Ньютона—Лейбница). *Пусть функция $f(x)$ определена на $(0, A)$, где $0 < A \leqslant \infty$, а функция $F(x)$ является ее q-первообразной, причем $F(x)$ определена и непрерывна при $x = 0$. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = F(b) - F(a), \tag{20.1}$$

где $0 \leqslant a < b$ и, кроме того, $b < A$, если $A < \infty$, и $b \leqslant A$, если $A = \infty$.

Доказательство. Функция $F(x)$ непрерывна при $x = 0$, поэтому, как было показано в предыдущей главе, $F(x)$ определяется формулой Джексона с точностью до некоторой аддитивной постоянной, т. е.

$$F(x) = (1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) + F(0).$$

По определению

$$\int_0^a f(x)\, d_q x = (1-q)\, a \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j a),$$

следовательно,

$$\int_0^a f(x)\, d_q x = F(a) - F(0).$$

Аналогичным образом, для $b < \infty$ выполняется равенство

$$\int_0^b f(x)\,d_qx = F(b) - F(0),$$

следовательно, при $0 \leqslant a < b < \infty$ мы получаем

$$\int_a^b f(x)\,d_qx = \int_0^b f(x)\,d_qx - \int_0^a f(x)\,d_qx = F(b) - F(a).$$

Подставим в это равенство $a = q^{j+1}$, $b = q^j$. Тогда из определения несобственного q-интеграла (19.12) мы видим, что формула (20.1) справедлива также при $b = \infty$, если существует $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. Если же предел $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ не существует, то, как легко видеть, не существует и несобственный интеграл. □

Следствие 20.1. *Предположим, что функция $f(x)$ определена на промежутке $[0, A)$, где $A > 0$, и непрерывна при $x = 0$, а функция $x^\alpha D_q f(x)$ ограничена на интервале $(0, A)$ для некоторого $\alpha < 1$. Тогда для $0 < a < b < A$ справедлива формула*

$$\int_a^b D_q f(x)\,d_qx = f(b) - f(a). \tag{20.2}$$

Заметим, что это следствие справедливо также при $b = +\infty$, если наложить дополнительное условие, что существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, который мы будем обозначать $f(+\infty)$.

Важное отличие определенного q-интеграла от его классического аналога состоит в том, что, интегрируя функцию на отрезке, не содержащем 0 (например, $[1, 2]$), мы должны учитывать ее поведение в точке $x = 0$. Этого требуют определение q-интеграла и условие сходимости интеграла Джексона.

Для произведения двух функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет место формула (1.12):

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)(D_q g(x)) + g(qx)(D_q f(x)).$$

Предположим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = 0$ и для некоторых $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ функции $|x^\alpha f(x) D_q g(x)|$ и $|x^\beta g(qx) D_q f(x)|$ ограничены на интервале $(0, A)$. Пусть $0 < a < b < A$. Тогда по следствию 20.1.1 и теореме 19.1 имеет место равенство

$$f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) = \int_a^b f(x)\,(D_q g(x))\,d_qx + \int_a^b g(qx)\,(D_q f(x))\,d_qx,$$

или

$$\int_a^b f(x)\,d_q g(x) = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g(qx)\,d_q f(x), \tag{20.3}$$

которое естественно называть формулой q-интегрирования по частям. Заметим, что в этой формуле $b = +\infty$ также допустимо.

С помощью q-интегрирования по частям можно получить q-формулу Тейлора с остаточным членом в форме Коши.

Теорема 20.2. *Предположим, что производные $D_q^j f(x)$ определены и ограничены на интервале $|x| < A$ и непрерывны в точке $x = 0$ для всех $j \leqslant n+1$. Тогда при $a, b \in (-A, A)$ имеет место q-формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} \bigl(D_q^j f\bigr)(a)\,\frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n]!}\int_a^b D_q^{n+1} f(x)\,(b-qx)_q^n\,d_q x. \tag{20.4}$$

Доказательство. Проведем индукцию по n. Функция $D_q f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, поэтому по теореме 20.1 имеем равенство

$$f(b) - f(a) = \int_a^b D_q f(x)\,d_q x,$$

которое совпадает с (20.4) при $n = 0$.

Предположим теперь, что формула (20.4) справедлива для $n = k-1$:

$$f(b) = \sum_{j=0}^{k-1} (D_q^j f)(a)\,\frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[k-1]!}\int_a^b D_q^k f(x)\,(b-qx)_q^{k-1}\,d_q x.$$

Воспользуемся соотношением (3.11) и применим формулу q-интегрирования по частям:

$$\int_a^b D_q^k f(x)\,(b-qx)_q^{k-1}\,d_q x = -\frac{1}{[k]}\int_a^b D_q^k f(x)\,d_q (b-x)_q^k =$$

$$= D_q^k f(a)\,\frac{(b-a)_q^k}{[k]} + \frac{1}{[k]}\int_a^b (b-qx)_q^k\,D_q^{k+1} f(x)\,d_q x.$$

Отсюда следует, что равенство (20.4) справедливо для $n = k$, что завершает доказательство по индукции. □

§ 21. q-гамма- и q-бета-функции

Многие функции, играющие важную роль в анализе, допускают представление в виде интегралов. К наиболее важным из них относятся введенные Эйлером *гамма-функция*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx, \quad t > 0, \tag{21.1}$$

и *бета-функция*

$$\mathrm{B}(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1}\, dx, \quad s,t > 0. \tag{21.2}$$

Приведем их простейшие свойства:

$$\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t), \tag{21.3}$$

откуда, в частности, нетрудно вывести, что для натуральных n имеет место равенство

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,, \tag{21.4}$$

и, наконец,

$$\mathrm{B}(t,s) = \frac{\Gamma(t)\,\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}. \tag{21.5}$$

Равенство (21.4) позволяет рассматривать гамма-функцию как обобщение факториала. В этой главе мы рассмотрим q-аналоги этих двух функций и докажем некоторые их свойства, включая q-аналоги равенств (21.3)–(21.5). В этой главе мы будем предполагать, что $0 < q < 1$. Тогда естественно считать, что $[\infty] = \dfrac{1}{1-q}$.

Определение. Для $t > 0$ интеграл

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{[\infty]} x^{t-1} E_q^{-qx}\, d_q x \tag{21.6}$$

будем называть *q-гамма-функцией*.

Сперва заметим, что из (9.10) следует, что $E_q^0 = 1$ и $E_q^{-[\infty]} = 0$. Применяя соотношение (9.11) и q-интегрирование по частям, получаем

$$\int_0^{[\infty]} x^t E_q^{-qx}\, d_q x = -\int_0^{[\infty]} x^t\, d_q E_q^{-x} = [t] \int_0^{[\infty]} x^{t-1} E_q^{-qx}\, d_q x,$$

следовательно, при любом $t > 0$ выполняется равенство

$$\Gamma_q(t+1) = [t]\, \Gamma_q(t). \tag{21.7}$$

Заметим теперь, что

$$\Gamma_q(1) = \int_0^{[\infty]} E_q^{-qx}\, d_q x = E_q^0 - E_q^{-[\infty]} = 1,$$

поэтому при любом неотрицательном целом n имеет место равенство

$$\Gamma_q(n+1) = [n]!\,. \tag{21.8}$$

Для изучения поведения функции $\Gamma_q(t)$ при $t \notin \mathbb{N}$ полезно рассмотреть функцию, более сложную на вид.

Определение. Для любых $t, s > 0$ интеграл

$$\mathrm{B}_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1}\, d_q x \tag{21.9}$$

будем называть *q-бета-функцией*.

Из определения q-интеграла (см. (19.7)) получаем

$$\mathrm{B}_q(t,\infty) = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j\, (q^j)^{t-1}(1-q^{j+1})_q^{\infty} = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{\infty}\, d_q x.$$

Одно полезное соотношение между функциями $\Gamma_q(t)$ и $\mathrm{B}_q(t,s)$ можно вывести с помощью формулы $E_q^x = (1+(1-q)\,x)_q^{\infty}$. Из нее, в частности, следует, что

$$\mathrm{B}_q(t,\infty) = \int_0^1 x^{t-1} E_q^{-\frac{qx}{1-q}}\, d_q x,$$

откуда, сделав замену переменных $x = (1-q)\,y$ (см. (19.14)), получаем

$$\mathrm{B}_q(t,\infty) = (1-q)^t \int\limits_0^{[\infty]} y^{t-1} E_q^{-qy}\, d_q y.$$

Таким образом,

$$\Gamma_q(t) = \frac{\mathrm{B}_q(t,\infty)}{(1-q)^t}. \tag{21.10}$$

На первый взгляд, введение функции $\mathrm{B}_q(t,s)$, зависящей от двух переменных t и s, только усложняет исследования. На самом деле задача упрощается, поскольку увеличивается свобода действий с функциями.

Предложение 21.1. (a) *Пусть $t > 0$, а n — натуральное число. Тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{B}_q(t,n) = \frac{(1-q)\,(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}. \tag{21.11}$$

(b) *Для любых $t, s > 0$ справедливо равенство*

$$\mathrm{B}_q(t,s) = \frac{(1-q)\,(1-q)_q^\infty (1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-q^s)_q^\infty}. \tag{21.12}$$

Доказательство. Вначале выведем некоторые рекуррентные соотношения для $\mathrm{B}_q(t,s)$. Применив формулу (3.11) и q-интегрирование по частям, получим, что для всех $t > 1$, $s > 0$ выполняется равенство

$$\mathrm{B}_q(t,s) = -\frac{1}{[s]} \int\limits_0^1 x^{t-1}\, d_q (1-x)_q^s = \frac{[t-1]}{[s]} \int\limits_0^1 x^{t-2} (1-qx)_q^s\, d_q x,$$

следовательно,

$$\mathrm{B}_q(t,s) = \frac{[t-1]}{[s]}\, \mathrm{B}_q(t-1, s+1). \tag{21.13}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{B}_q(t,n+1) = \int\limits_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{n-1} (1-q^n x)\, d_q x =$$

$$= \int\limits_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{n-1}\, d_q x - q^n \int\limits_0^1 x^t (1-qx)_q^{n-1}\, d_q x.$$

Таким образом,

$$\mathrm{B}_q(t, n+1) = \mathrm{B}_q(t, n) - q^n \mathrm{B}_q(t+1, n). \tag{21.14}$$

Из соотношений (21.13) и (21.14) следует, что

$$\mathrm{B}_q(t, n+1) = \mathrm{B}_q(t, n) - \frac{q^n\,[t]}{[n]}\,\mathrm{B}_q(t, n+1),$$

иными словами, для любого $t > 0$ и любого натурального числа n справедливо равенство

$$\mathrm{B}_q(t, n+1) = \frac{1-q^n}{1-q^{t+n}}\,\mathrm{B}_q(t, n). \tag{21.15}$$

Заметим, что

$$\mathrm{B}_q(t, 1) = \int_0^1 x^{t-1}\,d_q x = \frac{1}{[t]},$$

поэтому

$$\mathrm{B}_q(t, n) = \frac{(1-q^{n-1})\dots(1-q)}{(1-q^{t+n-1})\dots(1-q^{t+1})\,[t]} = \frac{(1-q)\,(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n},$$

что и требовалось установить в пункте (a).

Для доказательства пункта (b) применим прием, использованный при выводе теоремы 13.1. Заметим, что имеют место равенства

$$(1-q)_q^{n-1} = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(1-q^t)_q^n} = \frac{(1-q^{t+n})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty},$$

поэтому из формулы (21.11) следует, что равенство (21.12) справедливо при всех натуральных значениях s.

Представим левую часть равенства (21.12) в виде интеграла

$$\int_0^1 \frac{x^{t-1}(1-qx)_q^\infty}{(1-ax)_q^\infty}\,d_q x,$$

а правую часть — в виде

$$\frac{(1-q)\,(1-q)_q^\infty (1-aq^t)_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-a)_q^\infty},$$

где $a = q^s$. Тогда обе части представляют собой формальные степенные ряды по q и q^t, при этом коэффициенты этих рядов являются многочленами от a. Соответствующие коэффициенты этих рядов совпадают, поскольку они равны для бесконечного множества значений a, а именно для $a = q^k$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует равенство (21.12). □

Из пункта (a) только что доказанного предложения можно получить явное выражение для q-гамма-функции. Для этого рассмотрим равенство (21.10) и перейдем к пределу при $n \to \infty$ в (21.11). Получим

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty}. \tag{21.16}$$

В пункте (b) показано, в частности, что q-бета-функция симметрична относительно аргументов, т. е. $\mathrm{B}_q(t,s) = \mathrm{B}_q(s,t)$, что неочевидно при первом взгляде на определение (21.9). Сравнив (21.12) и (21.16), получим выражение для q-бета-функции через q-гамма-функцию, аналогичное равенству (21.5):

$$\mathrm{B}_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\,\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}. \tag{21.17}$$

Замечание (добавлено в русском переводе). Имеется другое q-интегральное представление функции $\Gamma_q(t)$, использующее q-экспоненту e_q^x вместо E_q^x. В нем также используется следующая замечательная функция от двух переменных:

$$K(x,t) = \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t}.$$

Легко проверить, что $K(x,t)$ является q-константой по x, т. е. $K(qx,t) = K(x,t)$. Для любой константы $A \neq 0$ имеет место равенство

$$\Gamma_q(t) = K(A,t) \int_0^{\infty/A\,(1-q)} x^{t-1}\, e_q^{-t}\, d_q x. \tag{21.18}$$

Здесь несобственный интеграл $\int_0^{\infty/a} f(x)\, d_q x$ при $a \neq 0$ является обобщением несобственного интеграла $\int_0^{\infty} f(x)\, d_q x$ (см. (19.12)) и задается формулой

$$\int_0^{\infty/a} f(x)\, d_q x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1-q)\,\frac{q^j}{a} f\!\left(\frac{q^j}{a}\right).$$

Полагая $z = q^t/A$ в (21.18), получаем

$$(1-q)_q^\infty (1+z)_q^\infty (1+qz^{-1})_q^\infty = \\ = (1+qA)_q^\infty (1-Az)_q^\infty \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n A^n (1+A^{-1})_q^n. \qquad (21.19)$$

Так как $\lim\limits_{A\to 0} A^n(1+A^{-1})_q^n = q^{n(n-1)/2}$, получаем, что при $A \to \infty$ равенство (21.19) превращается в один из вариантов тождества Якоби (11.1).

Для функции $\mathrm{B}_q(t,s)$ также имеется интересное q-интегральное представление

$$\mathrm{B}_q(t,s) = K(A,t) \int_0^{\infty/A} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}\, d_q x. \qquad (21.20)$$

Можно показать, что это соотношение превращается в тождество Рамануджана (15.2), если положить $a = -1/A$, $b = -q^{t+s}/A$, $x = q^t$. Доказательства этих результатов можно найти в работе [11]. Они используют только относительно элементарные манипуляции с q-интегралами и, следовательно, дают более концептуальные доказательства тождеств Якоби и Рамануджана, чем те, что были приведены нами ранее.

§ 22. h-производная и h-интеграл

До сих пор мы изучали только q-анализ. Теперь вернемся к h-анализу. Напомним, см. § 1, что h-производная определяется формулой

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

где $h \neq 0$. Мы исследуем свойства h-производной, а затем обсудим ее приложения в следующих параграфах. Будем в дальнейшем предполагать, что $h > 0$.

Легко проверить, что h-производные произведения и частного двух функций вычисляются по формулам

$$D_h(f(x)g(x)) = f(x)D_h g(x) + g(x+h)D_h f(x), \tag{22.1}$$

$$D_h\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_h f(x) - f(x)D_h g(x)}{g(x)g(x+h)}. \tag{22.2}$$

Сходство формул для вычисления h-производной и q-производной произведения подсказывает формулу для h-аналога бинома $(x-a)^n$.

Определение. Произведение

$$(x-a)_h^n = (x-a)\,(x-a-h)\ldots(x-a-(n-1)\,h) \tag{22.3}$$

будем называть h-аналогом бинома $(x-a)^n$ при $n \geqslant 1$, и, кроме того, будем считать, что $(x-a)_h^0 = 1$.

Проверим, что выполняется равенство

$$D_h(x-a)_h^n = n\,(x-a)_h^{n-1}. \tag{22.4}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} D_h(x-a)_h^n = \frac{1}{h}\big((x-a+h)\,(x-a)\ldots(x-a-(n-2)h) - \\ - (x-a)\,(x-a-h)\ldots(x-a-(n-1)\,h)\big) = \\ = (x-a)\ldots\big(x-a-(n-2)\,h\big)\,\frac{(x-a+h)-\big(x-a-(n-1)\,h\big)}{h}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что в качестве h-аналога целого числа n следует рассматривать само это число. Отметим, что $(x-0)_h^n \neq x^n$.

Соотношение (22.4) показывает, что для линейного оператора $D \equiv D_h$ и последовательности многочленов $\{(x-a)_h^n\}$ выполняются условия теоремы 2.1. Поэтому имеет место следующая h-формула Тейлора для многочлена $f(x)$ степени N:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_h^j f)(a) \frac{(x-a)_h^j}{j!}. \tag{22.5}$$

Пример. Применим h-формулу Тейлора к функции $f(x) = (x-b)_h^N$ и точке $a = 0$. Получим соотношение

$$(x+b)_h^N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} b_h^{N-j} x_h^j.$$

Следующие формулы мы приведем без доказательств, поскольку они аналогичны доказательствам соответствующих равенств для q-производной:

$$(x-a)_h^{m+n} = (x-a)_h^n (x-a-nh)_h^m, \tag{22.6}$$

$$D_h(a-x)_h^n = -n(a-h-x)_h^{n-1}, \tag{22.7}$$

$$D_h \frac{1}{(x-a)_h^n} = -\frac{n}{(x+h-a)_h^{n+1}}, \tag{22.8}$$

$$D_h \frac{1}{(a-x)_h^n} = \frac{n}{(a-x)_h^{n+1}}. \tag{22.9}$$

Эти равенства можно распространить на все целые значения n, если для $n > 0$ положить по определению

$$(x-a)_h^{-n} = \frac{1}{(x-a+nh)_h^n}, \tag{22.10}$$

что согласуется с соотношением (22.6).

Перейдем теперь к рассмотрению h-экспоненты $f(x) = e_h^x$. Естественно потребовать, чтобы такая функция $f(x)$ обладала тремя свойствами:

(i) $f(0) = 1$,

(ii) $D_h f(x) = f(x)$ при всех x,

(iii) $f(x)$ допускает h-разложение в ряд Тейлора (22.5) в точке $x = 0$ (при $N = \infty$) для малых h.

Оказывается, эти три свойства определяют $f(x)$ единственным образом, поскольку из соотношений (i) и (ii) следует, что $(D_h^j f)(0) = 1$

для всех j. Тогда

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x-0)_h^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x\,(x-h)\dots(x-(j-1)\,h)}{j!}=$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x/h\,(x/h-1)\dots(x/h-j+1)\,h^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{x/h}{j}h^j,$$

следовательно, в соответствии с разложением обычного бинома в ряд Тейлора получаем

$$e_h^x=(1+h)^{x/h}. \tag{22.11}$$

В частности, $e_1^x=2^x$. Заметим, что при $h\to 0$ основание степени $(1+h)^{1/h}$ в соотношении (22.11) стремится к e.

Приведем пример, когда не выполняется формула для дифференцирования сложной функции. Производная $D_he_h^x$ нам известна, кроме того, если α — произвольная постоянная, то $D_h(\alpha x)=\alpha$. Однако несложное вычисление

$$D_he_h^{\alpha x}=\frac{(1+h)^{\alpha(x+h)/h}-(1+h)^{\alpha x/h}}{h}=\frac{(1+h)^{\alpha}-1}{h}\,(1+h)^{\alpha x/h}$$

показывает, что

$$D_he_h^{\alpha x}=[\alpha]_{1+h}e_h^{\alpha x}\neq\alpha e_h^{\alpha x}. \tag{22.12}$$

Функция $F(x)$, для которой $D_hF(x)=f(x)$, называется h-первообразной функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,d_hx.$$

Определенному h-интегралу функции от $x=a$ до $x=b$ мы можем придать смысл только в том случае, когда a и b отличаются на величину, кратную h.

Определение. Пусть $b-a\in h\mathbb{Z}$. Тогда *определенным h-интегралом* функции $f(x)$ от $x=a$ до $x=b$ будем называть величину

$$\int_a^b f(x)\,d_hx=\begin{cases}h(f(a)+f(a+h)+\dots+f(b-h)), & \text{если } a<b,\\ 0, & \text{если } a=b,\\ -h(f(b)+f(b+h)+\dots+f(a-h)), & \text{если } a>b.\end{cases} \tag{22.13}$$

Ясно, что определенный h-интеграл является интегральной суммой Римана функции $f(x)$ для разбиения, состоящего из отрезков равной

длины. Следующая теорема в некотором смысле обосновывает правильность определения (22.13).

Теорема 22.1 (h-формула Ньютона—Лейбница). *Пусть $F(x)$ является h-первообразной функции $f(x)$ и $b-a \in h\mathbb{Z}$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,d_h x = F(b) - F(a). \tag{22.14}$$

Доказательство. Пусть $b > a$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,d_h x = h \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{h}-1} f(a+jh) = h \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{h}-1} D_h F(x)\big|_{x=a+jh} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{h}-1} (F(a+(j+1)h) - F(a+jh)) = F(b) - F(a),$$

что и требовалось. Случай $b < a$ рассматривается аналогично, а случай $b = a$ тривиален. □

Предположим, что $a < b$. Применив теорему 22.1 к производной произведения $D_h(f(x)\,g(x))$, с учетом (22.1) получим h-вариант формулы интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)\,d_h g(x) = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g(x+h)\,d_h f(x), \tag{22.15}$$

где

$$\int_a^b f(x)\,d_h g(x) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,D_h g(x)\,d_h x = h \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{h}-1} f(a+jh)(D_h g)(a+jh) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{h}-1} f(a+jh)\,(g(a+jh+h) - g(a+jh)).$$

Пусть a, b — неотрицательные целые числа, где $a < b$, и пусть $h = 1$. Для функции $\varphi(x)$ положим по определению

$$f(x) = \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(x-1),$$

где x — произвольное натуральное число. Кроме того, будем считать, что $f(0) = 0$. Заметим, что функция $f(x)$ определена только для неотрицательных целых значений x, тогда как $\varphi(x)$ может иметь более широкую область определения. Ясно, что для всех неотрицательных целых чисел x выполняется равенство $D_1 f(x) = \varphi(x)$. Из (22.15) получаем

$$\sum_{j=a}^{b-1} \varphi(j)\, g(j+1) = g(b)\, f(b) - g(a)\, f(a) - \sum_{j=a}^{b-1} f(j)(g(j+1) - g(j). \quad (22.16)$$

Эта формула известна как *преобразование Абеля*.

Еще одну полезную формулу можно получить с помощью повторного применения h-интегрирования по частям. Пусть $x-a \in h\mathbb{Z}$. Применив формулы (22.7) и (22.15), получим

$$f(x) - f(a) = \int_a^x D_h f(t)\, d_h t = -\int_a^x D_h f(t)\, d_h(x-t) =$$

$$= (D_h f)(a)\,(x-a) + \int_a^x (x-h-t)\, D_h^2 f(t)\, d_h t =$$

$$= (D_h f)(a)\,(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x D_h^2 f(t)\, d_h (x-t)_h^2 =$$

$$= (D_h f)(a)\,(x-a) + \frac{1}{2}(D_h^2 f)(a)\,(x-a)_h^2 - \frac{1}{6}\int_a^x D_h^3 f(t)\, d_h (x-t)_h^3 = \ldots$$

Эту цепочку равенств можно продолжать неограниченно. Следовательно, для любого неотрицательного целого числа n справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(D_h^j f)(a)}{j!}\,(x-a)_h^j - \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x D_h^{n+1} f(t)\, d_h (x-t)_h^{n+1}, \quad (22.17)$$

или, что то же самое,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(D_h^j f)(a)}{j!}\,(x-a)_h^j + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t-h)_h^n\, D_h^{n+1} f(t)\, d_h t. \quad (22.18)$$

Это равенство известно как *интерполяционная формула Ньютона*. Ее можно рассматривать как h-формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пусть $h > 0$ и $x > a$. Согласно (22.13), для каждого x абсолютная величина остаточного члена ограничена сверху числом

$$\frac{1}{n!}(x-a)_h^{n+1} \max_{[a,x]} |D_h^{n+1} f|. \tag{22.19}$$

Поясним, почему соотношение (22.18) называется интерполяционной формулой. Пусть $x = a+mh$, где m — положительное целое число. Тогда согласно формуле (22.13) интеграл в правой части равенства (22.18) равен

$$\sum_{j=0}^{m-1} ((a+mh) - (a+jh) - h)_h^n \, D_h^{n+1} f(a+jh).$$

Функция $g(t) = (a+mh-t-h)_h^n$ обращается в нуль при

$$t = a+(m-1)h,\ a+(m-2)h,\ \ldots,\ a+(m-n)h,$$

поэтому остаточный член в соотношении (22.18) равен нулю, когда m является целым числом, заключенным между 1 и n. Легко проверить также, что остаточный член равен 0 при $m = 0$. Тем самым, первое слагаемое в (22.18) совпадает с $f(x)$ в $n+1$ равноотстоящих точках $x = a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh$. Поэтому сумма $\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{(D_h^j f)(a)}{j!} (x-a)_h^j$, рассматриваемая как функция переменной x, является интерполяционным многочленом степени n, аппроксимирующим функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b = a+nh]$. Ошибку аппроксимации можно оценить с помощью (22.19).

Из-за сходства формул (22.18) и (20.4) подобные рассуждения справедливы и в q-анализе, иными словами, сумму в правой части (20.4) можно рассматривать как интерполяционный многочлен, принимающий точные значения в точках $a, qa, \ldots, q^n a$.

§ 23. Многочлены Бернулли и числа Бернулли

В этой главе мы введем последовательность многочленов, тесно связанную с h-первообразными многочленов и имеющую много важных приложений.

Определение. Коэффициенты $B_n(x)$ разложения в ряд Тейлора

$$\frac{ze^{zx}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}\,z^n \tag{23.1}$$

называются *многочленами Бернулли.*

Продифференцировав обе части равенства (23.1) по x, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n'(x)}{n!}\,z^n=z\,\frac{ze^{zx}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}\,z^{n+1}.$$

Приравняв коэффициенты при z^n, где $n\geqslant 1$, получим рекуррентное соотношение

$$B_n'(x)=nB_{n-1}(x). \tag{23.2}$$

Если в равенстве (23.1) перейти к пределу при $z\to 0$, то получим соотношение $B_0(x)=1$. Отсюда легко вывести, что степень многочлена $B_n(x)$ равна n, а его старший коэффициент равен единице. С помощью формулы (23.2) можно однозначно определить все многочлены $B_n(x)$ при условии, что их постоянные члены известны.

Определение. Величины $b_n=B_n(0)$, где $n\geqslant 0$, будем называть *числами Бернулли.*

При $x=0$ равенство (23.1) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}\,z^n=\frac{z}{e^z-1}. \tag{23.3}$$

Разлагая в ряд Тейлора, получим

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{1}{1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{6}+\dfrac{z^3}{24}+\ldots}.$$

Тем самым, применив деление «уголком», можно последовательно найти все числа Бернулли. Покажем, что существует более удобный способ нахождения чисел b_n и многочленов $B_n(x)$. Для этого нам нужно доказать следующие утверждения.

Предложение 23.1. *Для любого целого $n \geqslant 1$ имеет место соотношение*

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}. \tag{23.4}$$

Доказательство. Имеет место равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!}\, z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!}\, z^n = \frac{ze^{z(x+1)} - ze^{zx}}{e^z - 1} = ze^{zx} =$$

$$= \frac{d}{dx}\, e^{zx} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1} z^n}{n!}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной z, получим $B_n(x+1) - B_n(x) = \dfrac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$, что и требовалось. □

Предложение 23.2. *Для любого целого $n \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j x^{n-j}. \tag{23.5}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлены

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j x^{n-j}.$$

Нетрудно убедиться, что для доказательства равенства $B_n(x) = F_n(x)$ при всех n достаточно проверить, что

(i) $F_n(0) = b_n$ для $n \geqslant 0$;

(ii) $F_n'(x) = nF_{n-1}(x)$ для любых $n \geqslant 1$.

Первое из них очевидно. Заметим, что при $n > j \geqslant 0$ выполняется равенство

$$(n-j)\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j-1)!} = n\binom{n-1}{j}.$$

Следовательно, для $n \geqslant 1$ мы получаем

$$\frac{d}{dx}F_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j}(n-j)\,b_j x^{n-1-j} = \\ = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}b_j x^{n-1-j} = nF_{n-1}(x),$$

что и требовалось. □

Подставив $x = 1$ в формулу (23.5), получим соотношение

$$B_n(1) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b_j = b_n + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}b_j, \quad n \geqslant 1.$$

Кроме того, подставив $x = 0$ в формулу (23.4), получим, что $B_n(1) = b_n$ для любого $n \geqslant 2$. Таким образом, мы получаем равенство

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}b_j = 0, \quad n \geqslant 2, \tag{23.6}$$

которое позволяет вычислять числа Бернулли по индукции. Приведем несколько первых из них:

$$b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{6},\ b_3 = 0,\ b_4 = -\frac{1}{30},\ b_5 = 0,\ b_6 = \frac{1}{42}. \tag{23.7}$$

Есть соблазн предположить, что $|b_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Однако, если мы рассмотрим некоторые другие числа Бернулли, например,

$$b_8 = -\frac{1}{30},\ b_{10} = \frac{5}{66},\ b_{12} = -\frac{691}{2730},\ b_{14} = \frac{7}{6},\\ b_{16} = -\frac{3617}{510},\ b_{18} = \frac{43867}{798},\ b_{20} = -\frac{174611}{330},$$

то мы заметим, что их абсолютные величины в целом возрастают, а знаки меняются (см. соответствующие рассуждения в § 25). Другое важное свойство чисел Бернулли состоит в том, что $b_n = 0$ для всех нечетных $n \geqslant 3$. Это следует из того, что функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n - b_1 z = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1}$$

четна, т. е. $f(-z) = f(z)$. В самом деле, коэффициенты при t^n в разложении Тейлора в окрестности точки 0 любой четной функции $g(t)$ обращаются в нуль при всех нечетных n, поскольку в этом случае $g^{(n)}(t) = (-1)^n g^{(n)}(-t)$ для всех n и, в частности, $g^{(n)}(0) = -g^{(n)}(0)$ для всех нечетных n.

Другую интересную формулу, содержащую числа Бернулли, мы получим, если подставим $x = -1$ в (23.4) и (23.5):

$$b_n + (-1)^n n = B_n(-1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} b_j,$$

или, что то же самое,

$$n = 1 + \frac{n}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} b_j.$$

Заменив j на $j+1$, n на $n+1$ и проделав несложное вычисление с биномиальными коэффициентами, получим

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{b_{n+1}}{j+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}. \tag{23.8}$$

Предложение 23.3. *Для любого натурального числа n справедливо равенство*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j(x) = n x^{n-1}. \tag{23.9}$$

Доказательство. Проведем индукцию по n. Случай $n = 1$ очевиден. Предположим, что равенство (23.9) справедливо для $n = k \geqslant 1$. Тогда, используя соотношение (23.2), имеем

$$\frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j(x) = \sum_{j=1}^{k} j \binom{k+1}{j} B_{j-1}(x) =$$

$$= (k+1) \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j-1} B_{j-1}(x) = (k+1) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} B_j(x) =$$

$$= (k+1)\, k\, x^{k-1} = (k+1) \frac{d}{dx} x^k,$$

откуда

для некоторой константы C. Чтобы найти C, положим $x = 0$ и применим формулу (23.6). Получим, что $C = 0$. Таким образом, равенство (23.9) справедливо для всех $n \geqslant 1$. □

Как было сказано выше, если числа Бернулли известны, то формула (23.3) позволяет нам находить многочлены Бернулли рекуррентно. Приведем первые шесть из них:

$$
\begin{aligned}
B_0(x) &= 1,\\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2},\\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6},\\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x,\\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},\\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}\,x^4 + \frac{5}{3}\,x^3 - \frac{1}{6}\,x.
\end{aligned}
$$

§ 24. Суммы степеней

Теперь мы установим связь между многочленами Бернулли и h-анализом. Согласно предложению 23.1 имеет место формула

$$D_1 B_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1},$$

следовательно,

$$n \int x^{n-1} d_1 x = B_n(x), \tag{24.1}$$

где через D_1 обозначена h-производная при $h = 1$, а через $\int f(x)\, d_1 x$ — соответствующая h-первообразная. Применив h-формулу Ньютона—Лейбница (22.14), получим для неотрицательного целого n равенство

$$a^n + (a+1)^n + \ldots + (b-1)^n = \int_a^b x^n \, d_1 x = \frac{B_{n+1}(b) - B_{n+1}(a)}{n+1}, \tag{24.2}$$

где $a < b$ и $b - a \in \mathbb{Z}$. Пусть $a = 0$, $b = M + 1$. Подставив в правую часть равенства (24.2) явное выражение (23.5) многочлена $B_{n+1}(M+1)$ через числа Бернулли, получим

$$\sum_{k=0}^{M} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} (M+1)^{n+1-j} b_j. \tag{24.3}$$

С помощью этой формулы можно легко получать формулы для сумм n-х степеней первых M неотрицательных целых чисел.

Например, при $n = 2$ формула (24.3) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{M} k^2 = \frac{1}{3}\Big((M+1)^3 - \frac{3}{2}(M+1)^2 + \frac{1}{2}(M+1)\Big) = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}.$$

При $n = 3$ получаем формулу

Интересное совпадение состоит в том, что для любого натурального M имеет место равенство

$$1^3 + 2^3 + \ldots + M^3 = (1 + 2 + \ldots + M)^2.$$

Кроме того, из формулы (24.3) следует общий факт, состоящий в том, что выражение для $1^n + 2^n + \ldots + M^n$ является многочленом от M степени $n + 1$. Этот многочлен для любого натурального n делится на $M(M + 1)$, поскольку правая часть равенства (24.3), очевидно, обращается в нуль при $M = -1$ и, согласно соотношению (23.6), при $M = 0$.

§ 25. Формула Эйлера—Маклорена

В q-анализе для вычисления q-первообразной мы использовали формулу Джексона (19.2). Напомним, что при ее выводе был формально обращен некоторый оператор. В этой главе мы применим аналогичный подход для вывода формулы для h-первообразной.

Пусть $D_h F(x) = f(x)$. Используя обычную формулу Тейлора, получаем

$$F(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x)\, h^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} \right) F(x),$$

иными словами,

$$F(x+h) = e^{hD} F(x), \tag{25.1}$$

где $D \equiv \dfrac{d}{dx}$. Следовательно,

$$f(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{e^{hD} - 1}{h} F(x),$$

откуда формально получаем равенство

$$F(x) = \frac{hD}{e^{hD} - 1} \int f(x)\, dx. \tag{25.2}$$

Из определения чисел Бернулли (23.3) следует, что имеет место формальное равенство

$$\frac{hD}{e^{hD} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (hD)^n$$

и, таким образом,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (hD)^n \int f(x)\, dx.$$

Вспомнив, что $b_n = 0$ при нечетном $n \geqslant 3$, получаем *формулу Эйлера—Маклорена*

$$F(x) = \int f(x)\, dx - \frac{h}{2} f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n} h^{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(x). \tag{25.3}$$

Заметим, что в ней интеграл и производная классические. Пусть $h = 1$ и $b - a \in \mathbb{N}$. Тогда по h-формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$\sum_{n=a}^{b-1} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(f(b) - f(a)) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!}(f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)). \qquad (25.4)$$

Если $f(x)$ вместе со всеми своими производными стремится к 0 при $x \to \infty$, то имеет место равенство

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) = \int_a^{\infty} f(x)\,dx + \frac{1}{2} f(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(a). \qquad (25.5)$$

Чтобы показать, что полученные равенства имеют не только формальный смысл, рассмотрим несколько примеров. Пусть $f(x) = x^s$, где s — натуральное число. Тогда равенство (25.4) принимает вид

$$\sum_{n=a}^{b-1} n^s = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1} - \frac{b^s - a^s}{2} + \\ + \sum_{m=2}^{s+1} \frac{b_m}{m!}\, s\,(s-1)\dots(s-m+2)\,(b^{s-m+1} - a^{s-m+1}) = \\ = \frac{1}{s+1}\left(x^{s+1} - \frac{s+1}{2}\,x^s + \sum_{m=2}^{s+1} \binom{s+1}{m} b_m x^{s+1-m}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b},$$

а последнее выражение согласно (23.5) равно

$$\frac{1}{s+1}\,(B_{s+1}(b) - B_{s+1}(a)).$$

Таким образом, мы заново получили формулу (24.2) из предыдущей главы. В качестве второго примера рассмотрим $f(x) = e^{-x}$ и $a = 0$. Тогда в левой части равенства (25.5) получим геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{-1}},$$

а это выражение совпадает с правой частью, которая равна

$$1+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}}{(2n)!}=\frac{-1}{e^{-1}-1}.$$

Здесь мы воспользовались равенством (23.3) при $z=-1$. Таким образом, можно ожидать, что формула Эйлера—Маклорена имеет не только формальный смысл, по крайней мере для функций, быстро убывающих на бесконечности, как, например, $f(x)=e^{-x}$.

Хотя в обеих формулах (25.4) и (25.5) левые и правые части содержат суммирование, сумма в правой части *может* сходиться гораздо быстрее, чем сумма в левой части. В этом случае формулы (25.4) и (25.5) дают эффективные способы оценки конечных и бесконечных сумм. Однако эти формулы для оценки сумм следует применять с осторожностью, поскольку, как было сказано в § 23, величина $|b_{2n}|$ неконтролируемо возрастает до бесконечности с ростом n. Рассмотрим, например, $f(x)=x^{-2}$. Так как $f^{(n)}(x)=(-1)^n\,2\cdot 3\ldots(n+1)\,x^{-n-2}$, мы получаем

$$\sum_{n=a}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}}{a^{2n+1}}. \tag{25.6}$$

В дальнейшем мы покажем, что частичные суммы ряда из правой части этого равенства сперва быстро сходятся, но при некотором достаточно большом n величины $|b_{2n}|$ начинают превышать a^{2n}, и тогда частичные суммы будут расходиться. Чтобы увидеть, насколько хорошее приближение мы получим, заменив ряд конечным числом его первых членов, мы выведем формулу, подобную (25.4). В этой новой формуле вместо ряда будет использоваться его N-я частичная сумма s_N, и при этом, разумеется, появится дополнительное слагаемое R_N.

Для начала перепишем правую часть равенства (25.4) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}(h^{(k)}(b)-h^{(k)}(a)),$$

где $h(x)=\int f(x)\,dx$. Пусть $a\in\mathbb{Z}$ и $b=a+1$. Рассмотрим N-ю частичную сумму этого ряда

$$s_N=\sum_{k=0}^{N}\frac{B_k(0)}{k!}(h^{(k)}(a+1)-h^{(k)}(a)).$$

Положим $g(x) = B_N(x)/N!$. Тогда из формулы (23.3) мы получаем $g^{(N-k)}(x) = B_k(x)/k!$. Предложение 23.1 показывает, что $B_k(1) = B_k(0)$ для $k \geqslant 2$ и что $B_1(1) = B_1(0) + 1$. Величина B_0 постоянна, поэтому

$$s_N := \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{B_k(0)}{k!}\, h^{(k)}(a+1) - \frac{B_k(1)}{k!}\, h^{(k)}(a) \right) + h'(a) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} (g^{(N-k)}(0)\, h^{(k)}(a+1) - g^{(N-k)}(1)\, h^{(k)}(a)) + h'(a) =$$

$$= h'(a) - \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k)}(x)\, h^{(k)}(a+1-x)\Big|_{x=0}^{x=1}.$$

Функция

$$G(x) = \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k)}(x)\, h^{(k)}(a+1-x)$$

имеет очень простую производную. В самом деле,

$$G'(x) = \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k+1)}(x)\, h^{(k)}(a+1-x) - \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k)}(x)\, h^{(k+1)}(a+1-x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k+1)}(x)\, h^{(k)}(a+1-x) - \sum_{k=1}^{N+1} g^{(N-k+1)}(x)\, h^{(k)}(a+1-x) =$$

$$= g^{(N+1)}(x)\, h(a+1-x) - g(x)\, h^{(N+1)}(a+1-x) =$$

$$= -g(x)\, h^{(N+1)}(a+1-x),$$

где $g^{(N+1)}(x) = 0$, поскольку $\deg g = \deg B_N = N$. Отсюда

$$s_N = h'(a) - G(1) + G(0) = h'(a) + \int_0^1 g(x)\, h^{(N+1)}(a+1-x)\, dx,$$

или

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} (f^{(k-1)}(a+1) - f^{(k-1)}(a)) = f(a) + \int_0^1 \frac{B_N(x)}{N!}\, f^{(N)}(a+1-x)\, dx,$$

если обозначить $\int f(x)\, dx$ как $f^{(-1)}(x)$.

Сделаем теперь замену переменных $x = a + 1 - t$ и получим

$$f(a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} \left(f^{(k-1)}(a+1) - f^{(k-1)}(a)\right) - \\ - \int_a^{a+1} \frac{B_N(\{1-t\})}{N!} f^{(N)}(t)\, dt, \qquad (25.7)$$

где $\{y\} \in [0,1)$ обозначает дробную часть вещественного числа y. В самом деле, поскольку число a целое, при $a < t < a+1$ выполняется неравенство $-a < 1 - t < -a + 1$ и, таким образом, $\{1-t\} = a + 1 - t$. Наконец, заменив a последовательно на $a+1, a+2, \ldots, b-1$ и просуммировав полученные равенства, получим

$$\sum_{n=a}^{b-1} f(n) = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} \left(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right) - \int_a^b \frac{B_N(\{1-t\})}{N!} f^{(N)}(t)\, dt,$$

или, если подставить $N = 2m + 1$,

$$\sum_{n=a}^{b-1} f(n) = \int_a^b f(u)\, du - \frac{1}{2}(f(b) - f(a)) + \\ + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) - \\ - \int_a^b \frac{B_{2m+1}(\{1-t\})}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)\, dt. \qquad (25.8)$$

Последнее равенство называется *формулой Эйлера—Маклорена с остаточным членом*. Если функция $f(x)$ и все ее производные стремятся к 0 на бесконечности, то

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) = \int_a^{\infty} f(u)\, du + \frac{1}{2} f(a) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(a) - \\ - \int_a^{\infty} \frac{B_{2m+1}(\{1-t\})}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)\, dt. \qquad (25.9)$$

Из формул (25.8) и (25.9) следует, что ошибка аппроксимации сумм в левой части частичными суммами s_{2m+1} описывается остаточным членом

$$R_{2m+1} = \int_a^b \frac{B_{2m+1}(\{1-t\})}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)\,dt \qquad (b \leqslant \infty). \tag{25.10}$$

Для оценки величины $|R_{2m+1}|$ нужно оценить сверху многочлен Бернулли $B_{2m+1}(x)$ на отрезке $[0,1]$. По определению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(a)}{n!} z^n = \frac{ze^{az}}{e^z - 1} \tag{25.11}$$

для любого a, $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Из комплексного анализа известно, что радиус сходимости степенного ряда функции $f(z)$ в точке $z = 0$ равен расстоянию на комплексной плоскости от начала координат до ближайшей особой точки этой функции. Например, радиус сходимости геометрической прогрессии $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ равен 1. С другой стороны, этот ряд служит разложением в ряд Тейлора в точке 0 функции $(1-z)^{-1}$, у которой ближайшей к 0 особой точкой является 1.

Применим этот факт к функции $(e^z-1)^{-1}$. Ее особыми точками служат точки $2\pi ni$, где $n \in \mathbb{Z}$. Ближайшими к 0 среди них являются $\pm 2\pi i$. Таким образом, радиус сходимости степенного ряда в (25.11) равен 2π.

Воспользуемся еще одним фактом из комплексного анализа, который состоит в том, что если R — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$, то верхний предел значений $(|a_n|\,R^n)^{1/n} = R\,|a_n|^{1/n}$ равен 1. Это следует, например, из формулы для радиуса сходимости степенного ряда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Для иллюстрации рассмотрим геометрическую прогрессию $\sum \alpha^n x^n$, для которой, как нетрудно убедиться, $R = 1/|\alpha|$.

Из этих рассуждений следует, что при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\left(\frac{|B_n(a)|}{n!}\right)^{1/n} \sim \frac{1}{2\pi},$$

или, что то же самое,

$$\frac{|B_n(a)|}{n!} \sim \frac{1}{(2\pi)^n}.$$

Таким образом, в соответствии с (25.10) мы получаем

$$|R_{2m+1}| \sim \frac{1}{(2\pi)^{2m+1}} \int_a^b |f^{(2m+1)}(t)|\,dt.$$

Важно заметить, что наши рассуждения об оценке величины $|R_{2m+1}|$, приведенные здесь, не являются строгими. Тем не менее, предыдущий результат остается в силе, поскольку известно, что при $0 \leqslant a \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\frac{|B_{2m+1}(a)|}{(2m+1)!} < \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}}. \tag{25.12}$$

Это неравенство можно доказать, используя разложение функции $B_{2m+1}(x)$ в ряд Фурье. Поэтому имеет место оценка

$$|R_{2m+1}| < \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}} \int_a^b |f^{(2m+1)}(t)|\,dt. \tag{25.13}$$

Например, для $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$ и $b = \infty$ из неравенства (25.13) следует, что $|R_{2m+1}| < 4e^{2\pi}/(2\pi)^{2m+1}$, и поэтому $|R_{2m+1}|$ достаточно быстро стремится к нулю. Ранее в этой главе мы видели, что в этом случае ряд Эйлера—Маклорена сходится.

Пусть $f(x) = x^{-2}$, $b = \infty$. Предположим, что мы хотим оценить сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{25.14}$$

сложив, например, первые 1000 членов. Погрешность можно оценить с помощью интегралов, а именно,

$$0{,}001 = \int_{1000}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_{999}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 0{,}001001\ldots$$

Таким образом, этот способ дает ответ с точностью до шестого десятичного знака. Посмотрим теперь, какую погрешность дает формула (25.9), если использовать ее для аппроксимации оставшейся части ряда $\sum\limits_{n=1000}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и оценки ее погрешности. Из неравенства (25.13) следует, что

в этом случае

$$|R_{2m+1}| < \frac{4e^{2\pi}\,(2m+1)!}{1000\,(2000\pi)^{2m+1}}.$$

В частности,

$$|R_3| < 10^{-10}, \quad |R_5| < 10^{-16}, \quad |R_7| < 10^{-23}.$$

Это означает, что с использованием формулы (25.9) совсем небольшие по объему дополнительные вычисления позволяют получить гораздо бóльшую точность.

Есть соблазн сделать вывод, что чем больше членов мы вычислим, тем выше точность полученной оценки. Однако отношение

$$\left|\frac{R_{2m+1}}{R_{2m-1}}\right| \sim \frac{2m\,(2m+1)}{(2000\pi)^2}$$

для больших m существенно превосходит единицу. Таким образом, остаточный член $|R_{2m+1}|$ с ростом m сначала быстро уменьшается, при $m \approx 1000\pi$ достигает минимума, а затем начинает быстро расти, при этом частичные суммы начинают все более и более значительно отклоняться от истинного значения. В общем случае, если формулу (25.9) использовать для аппроксимации $\sum\limits_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, то величина $|R_{2m+1}|$ минимальна при $m \approx \pi a$.

В качестве замечания отметим, что точное значение суммы (25.14), а именно $\pi^2/6$, впервые было получено Эйлером. Этот результат можно получить различными способами, один из которых использует методы комплексного анализа, а другой опирается на ряды Фурье. Оба эти метода дают точное значение для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1/n^s)$, где s — четное положительное число; оно оказывается равным $2^{s-1}\pi^s\,|b_s|/s!$. Однако для нечетных целых s подобных компактных выражений не найдено.

В заключение этой главы рассмотрим еще два применения формулы Эйлера—Маклорена (25.8) при $a = 1, m = 1$.

Пример 1. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{b} \frac{1}{n} = \ln b + R(b), \tag{25.15}$$

где $\lim\limits_{b\to\infty} R(b) = c$. Число c называется *постоянной Эйлера*.

Пример 2. Пусть $f(x) = \ln x$. Тогда

$$\ln(b-1)! = \int_1^b \ln t\, dt - \frac{1}{2}\ln b + R_1(b), \tag{25.16}$$

где $\lim\limits_{b\to\infty} R_1(b) = C$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_1^b \ln t\, dt = b(\ln b - 1).$$

Прибавив $\ln b$ к обеим частям равенства (25.16), получим

$$\ln b! = \ln\sqrt{b}\left(\frac{b}{e}\right)^b + R_1(b).$$

Следовательно, при $b \to \infty$

$$b! \sim e^C\sqrt{b}\left(\frac{b}{e}\right)^b. \tag{25.17}$$

Можно показать, что $e^C = \sqrt{2\pi}$. Таким образом, мы получили знаменитую *формулу Стирлинга.*

§ 26. Симметрический квантовый анализ

Вместо дифференциалов d_q и d_h можно рассматривать дифференциалы более симметричного вида

$$\tilde{d}_q f(x) = f(qx) - f(q^{-1}x), \tag{26.1}$$

$$\tilde{d}_h g(x) = g(x+h) - g(x-h), \tag{26.2}$$

где, как обычно, мы считаем, что $q \neq 1$ и $h \neq 0$. Соответствующие производные определяются очевидным образом:

$$\tilde{D}_q f(x) = \frac{\tilde{d}_q f(x)}{\tilde{d}_q x} = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{(q - q^{-1})x}, \tag{26.3}$$

$$\tilde{D}_h g(x) = \frac{\tilde{d}_h g(x)}{\tilde{d}_h x} = \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}. \tag{26.4}$$

В этой главе мы кратко рассмотрим симметрический q-анализ, поскольку он играет важную роль в теории алгебраических объектов, которые называются квантовыми группами.

Симметрические q-производные произведения и частного двух функций вычисляются по формулам

$$\tilde{D}_q\big(f(x)\,g(x)\big) = f(qx)\,\tilde{D}_q g(x) + g(q^{-1}x)\,\tilde{D}_q f(x) = \\ = f(q^{-1}x)\,\tilde{D}_q g(x) + g(qx)\,\tilde{D}_q f(x), \tag{26.5}$$

$$\tilde{D}_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)\,\tilde{D}_q f(x) - f(qx)\,\tilde{D}_q g(x)}{g(qx)\,g(q^{-1}x)} = \\ = \frac{g(q^{-1}x)\,\tilde{D}_q f(x) - f(q^{-1}x)\,\tilde{D}_q g(x)}{g(qx)\,g(q^{-1}x)}. \tag{26.6}$$

Для любого α имеет место равенство

$$\tilde{D}_q x^\alpha = [\alpha]^{\sim}\, x^{\alpha-1}, \tag{26.7}$$

где

$$[\alpha]^{\sim} = \frac{q^\alpha - q^{-\alpha}}{q - q^{-1}}. \tag{26.8}$$

Положим

$$(x-a)_{\tilde{q}}^{n} = (x-q^{n-1}a)\,(x-q^{n-3}a)\,(x-q^{n-5}a)\,\ldots\,(x-q^{-n+1}a) \quad (26.9)$$

для натурального числа n, и, кроме того, пусть $(x-a)_{\tilde{q}}^{0} = 1$.

Заметим, что $\deg(x-a)_{\tilde{q}}^{n} = n$ при любом n. Приведем три из этих многочленов:

$$(x-a)_{\tilde{q}}^{1} = (x-a),$$
$$(x-a)_{\tilde{q}}^{2} = (x-qa)\,(x-q^{-1}a),$$
$$(x-a)_{\tilde{q}}^{3} = (x-q^{2}a)\,(x-a)\,(x-q^{-2}a).$$

Предложение 26.1. *Для любого натурального числа n выполняется равенство*

$$\tilde{D}_q(x-a)_{\tilde{q}}^{n} = [n]^{\sim}\,(x-a)_{\tilde{q}}^{n-1}. \quad (26.10)$$

Доказательство. Применим индукцию по n. Случай $n=1$ тривиален. Заметим, что $(x-a)_{\tilde{q}}^{n+1} = (x-qa)_{\tilde{q}}^{n}\,(x-q^{-n}a)$ для любого целого $n>1$. Следовательно, применяя формулу (26.5), получаем

$$\begin{aligned}\tilde{D}_q(x-a)_{\tilde{q}}^{n+1} &= (qx-qa)_{\tilde{q}}^{n} + [n]^{\sim}\,(x-qa)_{\tilde{q}}^{n-1}\,(q^{-1}x-q^{-n}a) = \\ &= q^{n}\,(x-a)_{\tilde{q}}^{n} + q^{-1}\,[n]^{\sim}\,(x-qa)_{\tilde{q}}^{n-1}\,(x-q^{-n+1}a) = \\ &= (q^{n}+q^{-1}\,[n]^{\sim})\,(x-a)_{\tilde{q}}^{n} = [n+1]^{\sim}\,(x-a)_{\tilde{q}}^{n},\end{aligned}$$

что и требовалось. □

К сожалению, если $a \neq 0$, то при четном n многочлен $(x-a)_{\tilde{q}}^{n}$ не обращается в нуль в точке $x=a$. Поэтому многочлены $P_n(x) = (x-a)_{\tilde{q}}^{n}/[n]^{\sim}!$ не удовлетворяют условиям теоремы 2.1, которая дает обобщенную формулу Тейлора. Заметим, что многочлены, удовлетворяющие условиям теоремы 2.1, задаются формулой (26.23), которая будет получена в конце главы.

Тем не менее, при $a=0$ имеет место разложение в ряд Тейлора вида

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{D}_q^{j} f)(0)\,\frac{x^{j}}{[j]^{\sim}!}. \quad (26.11)$$

Пусть $f(x) = (x+a)_{\tilde{q}}^{n}$. Для $j \leqslant n$ выполняется равенство

$$(\tilde{D}_q^{j} f)(0) = [n]^{\sim}\,[n-1]^{\sim}\,\ldots\,[n-j+1]^{\sim}\,(0+a)_{\tilde{q}}^{n-j} = \frac{[n]^{\sim}!}{[n-j]^{\sim}!}\,a^{n-j},$$

кроме того, $\tilde{D}_q^j f(x) = 0$ при $j > n$, поэтому

$$(x+a)_{\tilde{q}}^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^{\sim} a^{n-j} x^j, \tag{26.12}$$

где

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^{\sim} = \frac{[n]^{\sim}!}{[j]^{\sim}! \, [n-j]^{\sim}!}. \tag{26.13}$$

Соотношение (26.12) является $\tilde{q}$-аналогом бинома Гаусса (5.5). Попробуем получить $\tilde{q}$-аналог бинома Гейне (8.1).

Рассмотрим $g(x) = 1/(1-x)_{\tilde{q}}^n$. Поскольку

$$\begin{aligned}(1-x)_{\tilde{q}}^n &= (1-q^{n-1}x)\,(1-q^{n-3}x)\,\ldots\,(1-q^{1-n}x) = \\ &= q^{n-1}\,(q^{1-n}-x)\,q^{n-3}\,(q^{3-n}-x)\,\ldots\,q^{1-n}\,(q^{n-1}-x),\end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$(1-x)_{\tilde{q}}^n = (-1)^n (x-1)_{\tilde{q}}^n, \tag{26.14}$$

получаем

$$\tilde{D}_q (1-x)_{\tilde{q}}^n = (-1)^n \, [n]^{\sim} \, (x-1)_{\tilde{q}}^{n-1} = -[n]^{\sim} \, (1-x)_{\tilde{q}}^{n-1}.$$

Согласно (26.6) отсюда следует, что

$$\tilde{D}_q g(x) = \frac{[n]^{\sim} \, (1-x)_{\tilde{q}}^{n-1}}{(1-qx)_{\tilde{q}}^n \, (1-q^{-1}x)_{\tilde{q}}^n} = \frac{[n]^{\sim}}{(1-x)_{\tilde{q}}^{n+1}}. \tag{26.15}$$

Поэтому при всех целых $j \geqslant 0$ имеет место равенство

$$(\tilde{D}_q^j g)(0) = [n]^{\sim} \ldots [n+j-1]^{\sim}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(1-x)_{\tilde{q}}^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n]^{\sim} \ldots [n+j-1]^{\sim}}{[j]^{\sim}!} \, x^j, \tag{26.16}$$

а это равенство можно рассматривать в качестве аналога формулы бинома Гейне (8.1).

Теперь обратимся к интегрированию. Чтобы вывести точную формулу для $\tilde{q}$-первообразной произвольной функции $f(x)$, снова применим подход, основанный на формальном обращении некоторого оператора. Пусть $F(x)$ — $\tilde{q}$-первообразная функции $f(x)$, т. е. $\tilde{D}_q F(x) = f(x)$. Применив оператор $\hat{M}_q$, определенный в (5.6), получим

$$(\hat{M}_q - \hat{M}_{q^{-1}}) F(x) = F(qx) - F(q^{-1}x) = (q - q^{-1})\, x\, f(x).$$

Так как для любой функции $g(x)$ выполняется равенство

$$\hat{M}_q \hat{M}_{q^{-1}} g(x) = \hat{M}_{q^{-1}} \hat{M}_q g(x) = g(x),$$

мы получаем $\hat{M}_{q^{-1}} = (\hat{M}_q)^{-1}$. Следовательно,

$$\left(\hat{M}_q - \frac{1}{\hat{M}_q}\right) F(x) = (q - q^{-1})\, x\, f(x).$$

Отсюда

$$F(x) = \frac{\hat{M}_q}{1 - \hat{M}_q^2}\,(q^{-1} - q)\, x\, f(x) = \\ = (q^{-1} - q)\,(\hat{M}_q + \hat{M}_q^3 + \hat{M}_q^5 + \ldots)\, x\, f(x).$$

Таким образом, получаем соотношение

$$F(x) = x\,(q^{-1} - q) \sum_{n=1,3,\ldots} q^n f(q^n x). \tag{26.17}$$

Нетрудно проверить, что если ряд в правой части равенства (26.17) сходится, то сумма ряда является $\tilde{q}$-первообразной функции $f(x)$, которая обращается в нуль в точке $x = 0$. Следовательно, при условии, что ряд сходится, определенный $\tilde{q}$-интеграл задается формулой

$$\int_0^a f(x)\, \tilde{d}_q x = a\,(q^{-1} - q) \sum_{n=1,3,\ldots} q^n f(q^n a). \tag{26.18}$$

Для того чтобы формула (26.17) определяла $\tilde{q}$-первообразную единственным образом с точностью до прибавления произвольной константы, остается исследовать решения функционального уравнения $\tilde{D}_q G(x) = 0$. Из этого уравнения, в частности, следует, что $G(qx) = G(q^{-1}x)$ и, тем самым, $G(x) = G(q^{2n}x)$ для любых x и целых n. Отсюда легко вывести, что если функция $G(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то она постоянна. Таким образом, как и в q-анализе, непрерывность $\tilde{q}$-первообразной в точке $x = 0$ приводит к тому, что $\tilde{q}$-первообразная определена единственным образом с точностью до постоянного слагаемого.

Положим по определению

$$\int_a^b f(x)\, \tilde{d}_q x = \int_0^b f(x)\, \tilde{d}_q x - \int_0^a f(x)\, \tilde{d}_q x.$$

В частности,

$$\int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f(x)\,\tilde{d}_q x = (q^{-1}-q)\left(\sum_{n=1,3,\dots} q^{n+m-1} f(q^{n+m-1}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1,3,\dots} q^{n+m+1} f(q^{n+m+1})\right) = (q^{-1}-q)\,q^m\,f(q^m).$$

Несобственный интеграл естественно определить формулой

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\tilde{d}_q x = \sum_{m=\pm1,\pm3,\dots} \int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f(x)\,\tilde{d}_q x =$$

$$= (q^{-1}-q) \sum_{m=\pm1,\pm3,\dots} q^m f(q^m). \qquad (26.19)$$

На этом мы остановимся, оставив читателю самостоятельно развить симметрический q-анализ по аналогии с q-анализом.

Мы закончим книгу кратким обсуждением более общих вариантов квантовой производной. Мы познакомились с тремя различными видами квантовой производной, а именно, q-производной (1.5), h-производной (1.6) и симметрической q-производной (26.3). Квантовым дифференциалом наиболее общего вида является

$$df(x) = f(qx+h) - f(q'x+h').$$

Для такого дифференциала можно разработать теорию, содержащую производную, формулу Тейлора, первообразную и т. п. Чтобы производная $Df(x) = df(x)/dx$ была всюду определена, мы должны предположить, что либо $q \neq q'$, либо $h \neq h'$. Семейство многочленов $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, удовлетворяющих всем трем условиям теоремы 2.1, всегда существует, поскольку они могут быть вычислены по индукции, начиная с $n = 0$. В общем случае эти многочлены задаются выражением

$$P_n(x) = c_n(x-a)\,(x-a_2)\dots(x-a_n), \qquad (26.20)$$

где $a_2, a_3, \dots$ являются функциями от a, q, q', h, h'. Сравнив старшие коэффициенты многочленов $DP_n(x)$ и $P_{n-1}(x)$, легко видеть, что $c_n/c_{n-1} = 1/[n]$, где

$$[n] = \frac{q^n - q'^n}{q-q'}, \text{ если } q \neq q', \quad \text{и} \quad [n] = nq^{n-1}, \text{ если } q = q'.$$

Положив $[n]! = [1]\dots[n]$ для натурального числа n и $[0]! = 1$, получим

$$c_n = \frac{1}{[n]!}, \quad n \geqslant 0.$$

Общее выражение для a_n слишком громоздко. Сравнив коэффициенты при x^{n-1} в $dP_n(x)$ и $P_{n-1}(x)dx$, получим следующие рекуррентные формулы для $s_n = a + a_2 + \dots + a_n$, $n \geqslant 2$:

$$s_n = \frac{[n]}{[n-1]}\, s_{n-1} + \\ + \left(\frac{n\,(q^{n-1}h - q'^{n-1}h')}{q^{n-1} - q'^{n-1}} - \frac{[n]\,(h-h')}{q^{n-1} - q'^{n-1}} \right), \quad \text{если } q \neq q', \tag{26.21}$$

$$s_n = \frac{n}{n-1}\, q\, s_{n-1} + \frac{1}{2}\, n\,(h+h'), \quad \text{если } q = q'. \tag{26.22}$$

Легко видеть, что в общем случае уже для a_2 и a_3 получаются достаточно громоздкие формулы. Написанное рекуррентное соотношение упрощается, если $h = h'$. В этом случае соотношение (26.21) принимает вид

$$s_n = \frac{[n]}{[n-1]}\, s_{n-1} + nh, \quad n \geqslant 2,$$

и вместе с начальным условием $s_1 = a$ оно дает явную формулу

$$s_n = (a-h)\,[n] + h\,[n] \left(\frac{1}{[1]} + \frac{2}{[2]} + \dots + \frac{n}{[n]} \right), \quad n \geqslant 1.$$

Это решение очень легко получается при использовании подстановки $t_n = s_n/[n]$. Таким образом,

$$a_n = s_n - s_{n-1} = (a-h)\,\big([n] - [n-1]\big) + nh + \\ + h\,\big([n] - [n-1]\big) \left(\frac{1}{[1]} + \dots + \frac{n-1}{[n-1]} \right), \quad n \geqslant 2.$$

В частности, в симметрическом q-анализе, т. е. при $h = 0$, $q' = q^{-1}$, мы имеем

$$a_n = \big([n]^{\cdot} - [n-1]^{\cdot}\big)\, a = (q^{n-1} - q^{n-2} + q^{n-3} - \dots + q^{1-n})\, a, \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно, в симметрическом q-анализе многочлены, удовлетворяющие условиям теоремы 2.1 об обобщенной формуле Тейлора, задаются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{[n]^{\cdot}!}\,(x-a)\,(x - (q - 1 + q^{-1})\,a) \times \dots \\ \dots \times (x - (q^{n-1} - q^{n-2} + q^{n-3} - \dots + q^{1-n})\,a). \tag{26.23}$$

Приложение: список q-первообразных

$$\int x^{\alpha} d_q x = \frac{x^{\alpha+1}}{[\alpha+1]} \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{d_q x}{x} = \frac{q-1}{\ln q} \ln x$$

$$\int (x-a)_q^{\alpha} \, d_q x = \frac{(x-a)_q^{\alpha+1}}{[\alpha+1]} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int (a-x)_q^{\alpha} \, d_q x = -\frac{q\,(a-q^{-1}x)_q^{\alpha+1}}{[\alpha+1]} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{d_q x}{(x-a)_q^{\alpha}} = \frac{1}{q\,[1-\alpha]\,(x-qa)_q^{\alpha-1}} \quad (\alpha \neq 1)$$

$$\int \frac{d_q x}{(a-x)_q^{\alpha}} = \frac{1}{[\alpha-1]\,(a-x)_q^{\alpha-1}} \quad (\alpha \neq 1)$$

$$\int e_q^{\alpha x} \, d_q x = \frac{1}{\alpha} e_q^{\alpha x} \qquad \int E_q^{\alpha x} \, d_q x = \frac{q}{\alpha} e_q^{q^{-1}\alpha x}$$

$$\int \cos_q(\alpha x) \, d_q x = \frac{1}{\alpha} \sin_q(\alpha x) \qquad \int \mathrm{Cos}_q(\alpha x) \, d_q x = \frac{q}{\alpha} \mathrm{Sin}_q(q^{-1}\alpha x)$$

$$\int \sin_q(\alpha x) \, d_q x = -\frac{1}{\alpha} \cos_q(\alpha x) \qquad \int \mathrm{Sin}_q(\alpha x) \, d_q x = -\frac{q}{\alpha} \mathrm{Cos}_q(q^{-1}\alpha x)$$

Интегрирование по частям:

$$\int_a^b f(x) \, d_q g(x) = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b g(qx) \, d_q f(x)$$

Замена переменных:

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \, d_q u = \int_a^b f(u(x)) \, d_{q^{1/\beta}} u(x), \quad \text{где } u(x) = \alpha x^{\beta}$$

Литература

[1] *Andrews G. E.* q-series: Their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra. Providence, R.I.: AMS, 1986. (CBMS Regional conference lecture series in mathematics, vol. 66).

[2] *Exton H.* q-hypergeometric functions and applications. Chichester: Halsted Press, 1983.

[3] *Fine N. J.* Basic hypergeometric series and applications. Providence, R.I.: AMS, 1988. (Math. surveys and monographs, vol. 27).

[4] *Gasper G., Rahman M.* Basic hypergeometric series. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. (Имеется перевод: *Гаспер Дж., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.)

[5] *Hardy G. H., Wright E. M.* An introduction to the theory of numbers. Oxford: Oxford University Press, 1960.

[6] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

[7] *Goldman J., Rota G.-C.* The number of subspaces of a vector space // Recent Progress in Combinatorics. (Proc. Third Waterloo Conf. on Combinatorics, 1968). New York: Academic Press, 1969. P. 75–83.

[8] *Кириллов А. А.* Дополнительные главы математического анализа. М.: Издательство НМУ, 1994.

[9] *Miller H.* Euler–Maclaurin formula. MIT lecture notes, 1998.

[10] *Vilenkin N. Ja., Klimuk A. U.* Representation of Lie groups and special functions. V. 1–3. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991–1992. (См. также: *Виленкин Н. Я., Климык А. У.* Представления групп Ли и специальные функции // Некоммутативный гармонический анализ — 2. М.: ВИНИТИ. 1990. (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 59).)

[11] *De Sole A., Kac V. G.* On integral representations of q-gamma and q-beta function. math.QA/0302032.

Предметный указатель

Научное издание

Кац В. Г., Чен П.

КВАНТОВЫЙ АНАЛИЗ

Редактор О. Васильева

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 20.05.2005 г.
Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 8.
Тираж 1000 экз. Заказ № **80т**

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов во ФГУП «Полиграфические ресурсы».

НОВЫЕ ПОСТУПЛЕНИЯ

✓ А. Я. Хелемский. Лекции по функциональному анализу. — 2004. — 552 с.

✓ Д. П. Желобенко. Основные структуры и методы теории представлений. — 2004. — 488 с.

✓ В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. Практический курс по уравнениям математической физики. 2-е изд. — 2004 — 208 с.

✓ А. Н. Ширяев. Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд., перераб. и доп.— 2004. — 928 с.

✓ Глобус. Общематематический семинар. Вып. 1 / Под ред. М. А. Цфасмана и В. В. Прасолова. — 2004. — 264 с.

✓ Э. Артин. Теория Галуа. — 2004. — 66 с.

✓ С. Б. Каток. p-адический анализ в сравнении с вещественным. — 2004. — 112 с.

✓ Н. Н. Савельев. Лекции по топологии трехмерных многообразий. Введение в инвариант Кассона. — 2004. — 216 с.

✓ В. В. Прасолов. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. — 2004. — 352 с.

✓ О. А. Логачев, А. А. Сальников, В. В. Ященко. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. — 2004. — 470 с.

✓ С. К. Ландо. Лекции о производящих функциях. — 2-е издание, испр. — 2004. — 144 с.

✓ Дж. Хамфрис. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений / Пер. с англ. Б. Р. Френкина. — 2003.— 216 с.

Получить более подробную информацию об этих и других книгах издательства, а также заказать их можно через Интернет на сайте

`http://www.mccme.ru/publications/`

Книги можно купить в магазине «Математическая книга» в здании Московского центра непрерывного математического образования.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до станции метро «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком. Телефон для справок: (095) 241-72-85. E-mail: `biblio@mccme.ru`

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья с 11^{30} до 20^{00}.