УДК 501
ББК 22.14
К 44

Киселёв А. П. **Алгебра.** Ч. II. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 248 с. — ISBN 5-9221-0533-7.

В 2002 г. исполнилось 150 лет со дня рождения А.П. Киселёва. Его «Элементарная алгебра» вышла в 1888 г., сорок первое издание — в 1964 г.

В наше время книги Киселёва стали библиографической редкостью и неизвестны молодым учителям. А между тем дальнейшее совершенствование преподавания математики невозможно без личного знакомства каждого учителя с учебниками, некогда считавшимися эталонными. Именно по этой причине и предпринимается переиздание «Алгебры» Киселёва.

ISBN 5-9221-0533-7

УРОКИ АЛГЕБРЫ

Издательство ФИЗМАТЛИТ свою новую серию «Библиотека физико-математической литературы для школьников и учителей» начало с переиздания коллекции классических учебников А. П. Киселёва по математике для средней школы. Уже вышли в свет «Арифметика» и «Геометрия». Теперь читателю предлагается «Алгебра».

Истории российских школьных учебников по математике в 2003 г. исполняется три века, если считать с появившейся в 1703 г. «Арифметики» Л.Ф.Магницкого. Авторами этих учебников были и известные учёные (среди них — Л. Эйлер, Н. И. Лобачевский, В. Я. Буняковский, М. В. Остроградский), и люди, имена которых помнят разве что специалисты-историки; одни учебники быстро исчезали, другие просуществовали годы. Но А. П. Киселёв занимает среди российских просветителей совершенно особое, можно сказать — уникальное место, ибо его учебники, по которым почти век учились многие миллионы россиян, обозначили собой целый период отечественного математического образования. Переиздание этих книг приурочено к двум знаменательным событиям: 300-летию первой российской «Арифметики» и 150-летию со дня рождения А. П. Киселёва.

Не станем подробно рассказывать здесь о почти 90-летнем жизненном пути Андрея Петровича Киселёва (1852–1940)) — его биография освещена в литературе достаточно полно (упомянем лишь одно мемориальное издание: Авдеев Ф. С., Авдеева Т. К. «Андрей Петрович Киселёв. Жизнь. Научное творчество. Педагогическая деятельность». Орёл: Изд. Орловской гостелерадиокомпании, 2002). Но нельзя не отметить, что в его судьбе много неординарного. Уроженец Орловской губернии (г. Мценск) — старинного русского края, блестящий студент Петербургского университета (эпохи П. Л. Чебышёва, Д. И. Менделеева, А. Н. Коркина, Е. И. Золотарёва и др.), окончивший обучение досрочно со степенью кандидата, А. П. Киселёв выбрал не научную, а педагогическую стезю, полностью посвятив себя просвещению юношества, созданию школьных учебников.

Во всех ситуациях ему сопутствовали успех и уважение — но не по капризу случая, а в награду за удивительное трудолюбие, упорство и пытливость. Триумф его учебников — следствие редкостного симбиоза в одном лице незаурядного педагогического таланта, богатого опыта учительствования, высокой научной и методической компетентности. История его жизни «пример того, как во времена исторических переустройств человек мог и получить признание (в 1933 г. А. П. Киселёв был награжден орденом Трудового Красного Знамени), и навсегда расстаться с близкими (его дочь, ученица И. Е. Репина, после революции эмигрировала в Югославию). И есть что-то символическое в том, что великого Учителя А. П. Киселёва похоронили рядом с могилой великого Учёного Д. И. Менделеева.

Учебники А. П. Киселёва по арифметике, алгебре и геометрии долгие годы пользовались — и вполне заслуженно — самой высокой репутацией. Дальнейшее совершенствование преподавания математики в школе и взвешенная оценка нынешних пособий невозможны без личного знакомства с учебниками, считавшимися в свое время эталонными. «Чаще и внимательнее перечитывайте классиков» — эта глубокая мудрость касается не только бессмертных шедевров художественной литературы. С полным правом распространяется она и на книги «мэтров» педагогики и методики преподавания, ибо профессиональное искусство обучающего и оригинальность преподнесения материала подчас важнее академических познаний учителя и следования инструктивным письмам.

Поэтому новое издание «Алгебры» А. П. Киселёва, несомненно, будет полезно и ищущему педагогу, и продвинутому ученику.

Появившаяся впервые в 1888 г. под названием «Элементарная алгебра», книга многократно автором совершенствовалась и регулярно переиздавалась. В 1938 г. «Алгебра» А. П. Киселёва — после переработки, выполненной известным педагогом и методистом А. Н. Барсуковым — была официально утверждена как стабильный и единственный учебник по алгебре (в двух частях — соответственно для 6–8 и 8–10 классов) советской средней школы (использовавшийся вместе со «Сборником задач по алгебре» Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова).

Учебник просуществовал (без всяких изменений) в качестве общепринятого до середины 50-х годов прошлого века, когда школьная программа по математике претерпела изменения. Начали появляться другие учебники по алгебре, включавшие также разделы, посвященные элементарным функциям, началам анализа, тригонометрии (впрочем, они в школе не прижились и уже забыты). «Алгебра» А. П. Киселёва больше не печаталась (в 1964 г. вышло 41-е издание) и стала библиографической редкостью, многие педагоги новых поколений и студенты — будущие учителя математики — никогда не держали ее в руках.

Сегодня актуальным является изучение и осмысление методического наследия А. П. Киселёва. Парадоксально, что ни сами его учебники (и когда они были стабильными, и когда вынуждены были уйти), ни многолетний педагогический эксперимент по их использованию не подвергались всестороннему и капитальному научно-методическому исследованию. (Конечно, хватало различных разработок и рекомендаций, комментариев и пояснений, но речь идет не о поверхностных официозных писаниях-однодневках.) А ведь это богатейший материал (особенно при сравнении с книгами других авторов) для обстоятельного анализа глубинных причин и направлений эволюции содержания и методов школьного математического образования, выработки конструктивных рекомендаций по развитию теории учебника математики. К сожалению, можно вспомнить, пожалуй, только одну давнюю диссертацию Ф. М. Шустеф, посвященную исследованию российских учебников по алгебре (работа была выполнена под руководством члена-корреспондента Академии педагогических наук РСФСР И. В. Арнольда, отца нашего выдающегося математика академика РАН В. И. Арнольда).

Для современного, прежде всего — начинающего, учителя будет интересно познакомиться с содержанием программы курса алгебры советской средней школы, с принятой тогда манерой преподнесения материала, его изложения и оформления в учебнике. (Заметим, что не все главы учебника А. П. Киселёва действительно изучались — например, диофантовы уравнения и непрерывные дроби.) Очень важно, чтобы нынешние учителя составили собственное мнение по тем вопросам, которые были предметом ожесточённых дискуссий при пересмотрах во второй половине XX века содержания школьного курса математики (впрочем, и в наше время можно услышать отзвук этих споров): должны ли учащиеся массовой общеобразовательной школы овладевать формальными основами теории комплексных чисел? обязательно ли им знать формулу бинома Ньютона? следует ли познакомить их с фундаментальными понятиями производной и интеграла? (Чтобы не возникло недоразумений, подчеркнём: речь идет о массовой общеобразовательной школе, а не о профильных физико-математических классах.)

Практикующие учителя принимают обычно весьма вялое участие в обсуждении путей «модернизации преподавания математики в школе». И очень жаль! Каждый учитель, если он хочет стать гроссмейстером своего дела, должен творчески обдумывать такие важные проблемы, как наполнение школьного курса математики, методика изложения конкретного материала, сочетание эвристики, доступности и строгости, а сегодня — ещё и использование компьютерных и мультимедийных обучающих продуктов.

Есть и иные проблемы, для обдумывания «на перспективу». Что должна представлять собой арифметика и как её увязывать с алгеброй? Как «вписать» в школьную программу элементы анализа, теории вероятностей, теории множеств, теории игр и других «нетрадиционных» для школы разделов математической науки, без знания которых, однако, немыслим человек XXI века? А все ли «традиционные» факты, изучаемые (чаще, впрочем, зазубриваемые) школьниками, действительно так уж бесценны для их образованности? Разве в окружающем нас мире кривых и поверхностей нет ничего, кроме скучных прямых и плоскостей, однообразных окружностей и шаров? Чем наполнить и как преподавать «гуманитарную математику», чтобы реально обеспечить дифференцированное обучение, ориентируясь на индивидуальность учащихся, а не на желания профессионалов-математиков? Действительно ли школьная математика даёт единственную и лучшую возможность воспитания логического мышления?

Творческий подход к содержанию и формам обучения математике важен особенно, ибо формализм в её преподавании просто губителен. В истории нашей школы было достаточно примеров, когда далёкие от подлинной науки чиновники и «методисты» диктовали, что и как надо делать. Люди старшего поколения хорошо помнят бывшее одно время незыблемым требование всегда и обязательно «приводить к виду, удобному для логарифмирования», ответ в задачах «по геометрии с применением тригонометрии» или долгий «научный» спор о том, какое место в школьной программе должны занимать и как должны вводиться $\mathrm{Arcsin}\,x$, $\mathrm{Arccos}\,x$ и прочие «аркфункции с большой буквы».

Общепризнано, что уровень математической подготовки значительной части наших школьников находится на достаточно высоком уровне. Но хорошо известен и тот факт, что большое число учащихся испытывает серьезные трудности и даже неприязнь при освоении школьного курса математики. Н. И. Лобачевский писал: «Если учение математики, свойственное уму человеческому, остаётся для многих безуспешно, то это по справедливости должно приписать недостаткам в искусстве и способе преподавания». Хотелось бы надеяться, что ознакомление современного учительского корпуса с классическими школьными учебниками А. П. Киселёва поможет избавиться от этих недостатков.

Н. Розов,
профессор, декан факультета
педагогического образования МГУ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДВЕНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание печатается без изменения с одиннадцатого, в котором были сделаны некоторые изменения сравнительно с предыдущим изданием. Главнейшие из этих изменений следующие:

1) добавлены возведение в квадрат многочлена, исследование уравнений и геометрическое представление комплексных чисел;

2) несколько изменён порядок изложения: например, теорема Безу, неравенства и неопределённые уравнения из «дополнений» перенесены в основной курс книги;

3) значительно увеличено число упражнений;

4) исправлены некоторые чертежи и дано несколько новых.

В составлении настоящего учебника принимал частичное участие А. Н. Барсуков.

Ленинград. *А. Киселёв.*

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В шестнадцатом и последующих изданиях второй части «Алгебры» А. П. Киселёва изменён текст в § 6–12 и в § 138; исправлен ряд мелких неточностей в других параграфах.

В двадцать четвёртом издании в соответствии с требованиями программы по теме «Комплексные числа» дополнены: § 140а и § 140б — тригонометрическая форма комплексного числа. Добавлена тема «Исследование квадратного трёхчлена. Неравенства второй степени», § 182–187.

Дополнительный материал написан А. Н. Барсуковым.

Настоящее издание книги печатается без изменения с предыдущего издания.

В соответствии с новой программой по математике материал данного учебника в 1964/65 учебном году будет использоваться в IX и X классах.

Глава 1

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СО СТЕПЕНЯМИ И КОРНЯМИ

I. Возведение в степень

1. Действие возведения в степень. В начале курса мы уже видели, что возведение в степень есть действие, посредством которого данное число (основание степени) берётся сомножителем столько раз, сколько единиц содержится в другом данном числе (показателе степени): $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$; $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4 = 81$.

$$a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Вообще:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n.$$

2. Степень отрицательного числа. При умножении отрицательных чисел мы видели, что произведение бывает положительно, если число отрицательных множителей чётное. В противном случае произведение будет отрицательным. Применяя это свойство к произведению равных отрицательных сомножителей, т. е. возведению в степень отрицательного числа, мы получили правило (ч. I, § 30).

Чётная степень отрицательного числа положительна, нечётная — отрицательна.

Так: $(-2)^2 = 4$; $(-2)^6 = 64$; $(-5)^4 = 625$;
$(-2)^5 = -32$; $(-2)^7 = -128$; $(-5)^5 = -3125$ и т. п.

3. Возведение в степень одночленов. В первой части мы вывели правила возведения одночлена в квадрат и куб. Покажем теперь, что по тем же правилам производится возведение одночлена в любую степень.

а) Возведём в степень n произведение abc. Пользуясь известными свойствами умножения, получим:

$$(abc)^n = \underbrace{abc \cdot abc \cdot \ldots \cdot abc}_{n \text{ раз}} = \underbrace{(aa \ldots a)}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{(bb \ldots b)}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{(cc \ldots c)}_{n \text{ раз}} = a^n b^n c^n.$$

Чтобы возвести в степень произведение, надо возвести в эту степень каждый сомножитель отдельно и результаты перемножить.

б) Таким же способом найдём степень дроби $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Чтобы возвести в степень дробь, надо возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй.

в) Пусть требуется возвести в степень n число a^m. Будем иметь:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} = a^{m+m+m+\ldots+m} = a^{mn}.$$

Чтобы возвести степень какого-либо числа в другую степень, надо перемножить показатели степеней.

г) Возьмём теперь какой-либо одночлен, например, $2a^2b^3$. Возведём его в какую-либо степень n. Применяя выведенные правила, получим:

$$(2a^2b^3)^n = 2^n a^{2n} b^{3n}.$$

Чтобы возвести в степень одночлен, надо возвести в эту степень коэффициент, а показатели букв умножить на показатель степени, в которую возводится одночлен.

Упражнения.

Произвести возведение в степень:

1. $(-3)^5$; $(-7)^3$; $(-4)^4$; $(-10)^6$; $(-0{,}1)^5$.

2. $(3a^2b)^3$; $(-2a^2b^2)^3$; $(-5a^4b^2c)^4$.

3. $\left(\frac{x^2y}{z^3}\right)^4$; $\left(-\frac{3ab^3}{2c^2}\right)^3$; $\left(\frac{0{,}2a^3bc}{d^2}\right)^6$.

II. Возведение в квадрат многочлена

4. Вывод формулы. Пользуясь формулой $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, мы можем возвести в квадрат трёхчлен $a + b + c$, рассматривая его как двучлен $(a + b) + c$:

$$[(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b) \cdot c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b) \cdot c + c^2.$$

Таким образом, с прибавлением к двучлену $a + b$ третьего члена c после возведения суммы в квадрат прибавились два члена: 1) удвоенное произведение суммы первых двух членов на третий член и 2) квадрат третьего члена.

Теперь нетрудно четырёхчлен $a+b+c+d$ возвести в квадрат, принимая сумму $a+b+c$ за один член:

$$[(a+b+c)+d]^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)\cdot d + d^2.$$

Подставляя вместо $(a+b+c)^2$ то выражение, которое мы нашли раньше, получим:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)\cdot c + c^2 + 2(a+b+c)\cdot d + d^2.$$

Мы опять замечаем, что с прибавлением нового члена к возводимому в квадрат многочлену к степени прибавляются два члена: 1) удвоенное произведение суммы прежних членов на новый член и 2) квадрат нового члена. Очевидно, что такое прибавление к степени двух членов будет идти и дальше по мере прибавления новых членов к возводимому в квадрат многочлену. Значит:

Квадрат многочлена равен квадрату 1-го члена, плюс удвоенное произведение 1-го члена на 2-й, плюс квадрат 2-го члена, плюс удвоенное произведение суммы первых двух членов на 3-й, плюс квадрат 3-го члена, плюс удвоенное произведение суммы первых трёх членов на 4-й, плюс квадрат 4-го члена и т. д.

Конечно, члены многочлена могут быть и отрицательными.

Если в правой части последнего равенства раскроем скобки, то получим после перестановки членов:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Можно поэтому предыдущее правило формулировать так:

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с удвоенными произведениями каждого члена на каждый из последующих.

5. Замечание о знаках. В окончательном результате возведения в квадрат многочлена со знаком плюс окажутся, во-первых, квадраты всех членов многочлена и, во-вторых, те удвоенные произведения, которые появились при умножении членов с одинаковыми знаками.

Например:

$$(3x^2 - x + 1)^2 = (3x^2)^2 + 2\cdot(3x^2)\cdot(-2x) + (-2x)^2 + 2(3x^2 - 2x)\cdot 1 + 1^2 =$$
$$= 9x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 6x^2 - 4x + 1 = 9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1.$$

Упражнения.

4. $\left(2a^2 - \frac{1}{2}a + 1\right)^2$. **5.** $\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x - 3\right)^2$.

6. $(-5a^3x + 3a^2x^2 - ax^3 + 3x^4)^2$. **7.** $\left(0{,}3x^3 - 0{,}1x^2 - \frac{3}{4}x + 0{,}5\right)^2$.

Убедиться на следующих двух примерах, что квадрат многочлена не изменится, если мы переменим знаки перед всеми его членами на обратные:

8. $(a - b + c)^2 = (-a + b - c)^2$.

9. $(2x^3 - x^2 - 3x + 1)^2 = (-2x^3 + x^2 + 3x - 1)^2$.

10. Если верно равенство $(a - b)^2 = (m - n)^2$, можно ли из него заключить, что $a - b = m - n$?

III. Понятие об иррациональных числах

6. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Как известно из геометрии, *общей мерой* двух отрезков прямой называется такой отрезок, который в каждом из них содержится целое число раз без остатка. В геометрии разъясняется, что могут быть такие два отрезка, которые не имеют общей меры (например, сторона квадрата и его диагональ).

Два отрезка называются *соизмеримыми* или *несоизмеримыми* между собой, смотря по тому, имеют ли они общую меру или не имеют.

7. Понятие об измерении. Пусть требуется измерить длину отрезка AB (см. рис. 1) при помощи единицы длины CD. Для этого узнаем, сколько раз единица CD содержится в AB. Пусть окажется, что она содержится в AB 3 раза с некоторым остатком EB (меньшим CD). Тогда число 3 будет *приближённым результатом измерения с точностью до* 1, и притом с недостатком, так как AB больше $3CD$, но меньше $4CD$ (число 4 тоже можно назвать приближённым результатом измерения с точностью до 1, но с избытком). Желая получить более точный результат, узнаем, сколько раз в остатке EB содержится $\frac{1}{10}$ единицы CD. Положим, что эта доля содержится в EB более 8, но менее 9 раз. Тогда числа 3,8 и 3,9 будут *приближёнными результатами измерения отрезка AB с точностью до* $\frac{1}{10}$: первое число с недостатком, второе — с избытком. Желая получить ещё более точный результат измерения, узнаем, сколько раз в последнем остатке содержится $\frac{1}{100}$ единицы CD. Пусть эта доля содержится в остатке более 5, но менее 6 раз. Тогда числа 3,85 и 3,86 будут *приближёнными результатами измерения отрезка AB с точностью до* $\frac{1}{100}$. Можно продолжать такое измерение всё далее и далее. При этом возможны два случая:

Рис. 1

1) может случиться, что при последовательных измерениях с точностью до 0,1, 0,01, 0,001, … рано или поздно не получится никакого остатка;

2) может случиться, что с какой бы точностью до 0,1, 0,01, 0,001, … мы ни измеряли, остаток всегда будет получаться.

В первом случае в результате измерения получится конечная десятичная дробь. Во втором случае в результате измерения получится бесконечная десятичная дробь.

Конечная десятичная дробь получается лишь в том случае, если какая-нибудь десятичная доля единицы (одна десятая, или одна сотая, или одна тысячная и т. д.) является общей мерой измеряемого отрезка и единицы длины.

Если же измеряемый отрезок соизмерим с единицей длины, но ни $\frac{1}{10}$, ни $\frac{1}{100}$, ни $\frac{1}{1000}$, вообще никакая десятичная доля единицы не является общей мерой измеряемого отрезка и единицы длины, то в результате измерения получается бесконечная периодическая [1] десятичная дробь.

Наконец, если измеряемый отрезок несоизмерим с единицей длины, то в результате измерения получается бесконечная непериодическая десятичная дробь.

8. Иррациональные числа и их приближённые значения. Числа целые и дробные носят общее название *рациональных* чисел. Всякое рациональное число может быть записано в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби; десятичные бесконечные непериодические дроби называются *иррациональными* числами. Рациональные числа служат мерой величин, соизмеримых с единицей, иррациональные числа — мерой величин, несоизмеримых с единицей [2].

Иррациональное число считается *известным* (или *данным*), если указан способ, посредством которого можно находить любое число его десятичных знаков.

Обрывая на каком-нибудь десятичном знаке бесконечную десятичную дробь, выражающую данное (рациональное или иррациональное) число, получаем *приближённое значение* этого числа *с точностью до* 0,1, 0,01, 0,001 и т. д. с *недостатком*. Увеличивая на 1 последний со-

[1] Действительно, в случае соизмеримости мы всегда могли бы получить точный результат измерения в виде обыкновенной дроби. Обратив эту обыкновенную дробь в десятичную, мы выразили бы результат измерения в виде десятичной дроби. Но обыкновенная дробь, обращаясь в бесконечную десятичную, даёт всегда периодическую дробь. В случае же несоизмеримости измеряемого отрезка бесконечная десятичная дробь не может оказаться периодической, так как если бы она была такой, то её можно было бы обратить в обыкновенную, тогда эта обыкновенная дробь была бы точным результатом измерения, а такого результата не может быть в случае несоизмеримости. Значит, в этом случае бесконечная десятичная дробь должна быть непериодической.

[2] Латинское слово ratio означает отношение. Рациональные числа — те, которые могут быть представлены в виде отношения двух целых чисел, иррациональные — те, которые в таком виде представлены быть не могут.

хранённый десятичный знак, получим приближённое значение данного числа с той же точностью, но *с избытком*.

Примеры.

1) Записывая число $\frac{1}{3}$ в виде бесконечной периодической дроби 0,33333... и сохраняя первые четыре десятичных знака этой дроби, получим приближённое значение числа $\frac{1}{3}$ с точностью до 0,0001 с недостатком: 0,3333.

Приближённое значение этого числа с точностью до 0,0001 с избытком есть 0,3334.

2) Иррациональное число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру, записывается в виде бесконечной десятичной дроби, первые 25 знаков которой суть: 3,141592653589793238462643.

Приближённые значения числа π с точностью до 0,00001 суть 3,14159 (с недостатком) и 3,14160 (с избытком).

3) Возьмём иррациональное число, выражающееся следующей бесконечной непериодической десятичной дробью: 123,101001000100001000001000000 1... (между двумя последовательными единицами стоит один нуль, потом два нуля, потом три нуля и т. д.).

Приближённые значения этого иррационального числа с точностью до 0,000000000001 $\left(\text{т. е. до } \frac{1}{10^{12}}\right)$ суть 123,101001000100 (с недостатком) и 123,101001000101 (с избытком).

9. Равенство и неравенство между иррациональными числами. Вещественные числа. Два иррациональных числа считаются равными, если они выражены десятичными дробями с соответственно одинаковыми цифрами [1]. Из двух положительных иррациональных чисел больше то, которое при разложении в десятичную дробь содержит в себе большее число целых, или — при равенстве целых — большее число десятых, или — при равенстве целых и десятых — большее число сотых, и т. д. Например, число 2,745037... больше числа 2,745029..., так как в первом 6-я цифра выражает число большее, чем 6-я цифра во втором, при равенстве всех предыдущих цифр.

Это определение годится также и для сравнения иррационального числа с рациональным, если рациональное число разложено в десятичную дробь. Оно пригодно и для сравнения двух рациональных чисел, разложенных в десятичные дроби, если десятичные дроби с периодом 9 заменять на десятичные дроби, кончающиеся нулями: например, надо вместо 2,39999... брать 2,400000....

[1] Два равных *рациональных* числа могут иногда выражаться неодинаковыми цифрами, а именно тогда, когда одно из них есть периодическая дробь с периодом 9. Так, $0{,}999\ldots = 1$; $2{,}3999\ldots = 2{,}4$.

Заметим, что из приведённого определения неравенств следует:

Если α — какое-нибудь иррациональное число, a — какое-нибудь приближённое значение числа α с недостатком, b — какое-нибудь приближённое значение числа α с избытком, то

$$a<\alpha<b.$$

Иррациональные числа могут быть положительными и отрицательными, сообразно со смыслом измеряемой величины. Как и в случае рациональных чисел, из двух отрицательных вещественных чисел бóльшим считают то, у которого абсолютная величина [1] меньше; всякое отрицательное число меньше нуля, а нуль меньше всякого положительного числа.

Рациональные и иррациональные числа вместе называются вещественными, или действительными, числами.

10. Определение действий над иррациональными числами. Пусть α и β будут какие-нибудь данные положительные иррациональные числа (в нижеследующем примере $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{2}$). Пусть приближённые значения чисел α и β, взятые с недостатком, будут:

С точностью	до 0,1	до 0,01	до 0,001	до 0,0001
для числа α	1,7	1,73	1,732	1,7320
для числа β	1,4	1,41	1,414	1,4142

Соответствующие приближённые значения с избытком получаются из этих чисел посредством увеличения последнего десятичного знака на 1.

Тогда: а) Сложить α и β — значит найти число, которое было бы

больше каждой из сумм:	и меньше каждой из сумм:
$1{,}7 + 1{,}4 = 3{,}1$	$1{,}8 + 1{,}5 = 3{,}3$
$1{,}73 + 1{,}41 = 3{,}14$	$1{,}74 + 1{,}42 = 3{,}16$
$1{,}732 + 1{,}414 = 3{,}146$	$1{,}733 + 1{,}415 = 3{,}148$
$1{,}7320 + 1{,}4142 = 3{,}1462$	$1{,}7321 + 1{,}4143 = 3{,}1464$

и т. д., т. е.:

Сложить числа α и β — значит найти такое третье число γ, которое было бы больше суммы их любых приближённых значений, взятых с недостатком, но меньше суммы их любых приближённых значений, взятых с избытком.

Мы принимаем без доказательства, что такое число γ для любых двух вещественных чисел α и β существует, и притом только одно.

[1]) Для иррациональных чисел абсолютная величина определяется так же, как для рациональных.

б) Беря приближённые значения чисел α и β, указанные выше, мы можем сказать, что произведение $\alpha \cdot \beta$ есть число, которое

больше каждого из произведений:	и меньше каждого из произведений:
$1{,}7 \cdot 1{,}4 = 2{,}38$	$1{,}8 \cdot 1{,}5 = 2{,}70$
$1{,}73 \cdot 1{,}41 = 2{,}4393$	$1{,}74 \cdot 1{,}42 = 2{,}4708$
$1{,}732 \cdot 1{,}414 = 2{,}449048$	$1{,}733 \cdot 1{,}415 = 2{,}452195$
$1{,}7320 \cdot 1{,}4142 = 2{,}44939440$	$1{,}7321 \cdot 1{,}4143 = 2{,}44970903$

и т.д., т. е.:

Перемножить положительные числа α и β — значит найти такое третье число, которое было бы больше произведения их любых приближённых значений, взятых с недостатком, но меньше произведения их любых приближённых значений, взятых с избытком.

Мы примем без доказательства, что такое число существует, и притом только одно.

в) **Возвести иррациональное число α во вторую, третью, четвёртую и т. д. степень — значит найти произведение, составленное из двух, трёх, четырёх и т. д. сомножителей, равных α.**

г) Обратные действия определяются для иррациональных чисел так же, как и для рациональных: так, вычесть из числа α число β — значит найти такое число x, чтобы сумма $\beta + x$ равнялась α, и т. п.

Если одно из чисел α или β — рациональное и выражается конечной десятичной дробью, то в указанных определениях вместо приближённых значений такого числа надо брать его точное значение.

Произведение иррационального числа на нуль принимается, как и для рационального числа, равным нулю.

Действия над отрицательными иррациональными числами производятся согласно правилам, данным для рациональных отрицательных чисел.

При более обстоятельном рассмотрении можно установить, что *действия над иррациональными числами обладают теми же свойствами, что и действия над числами рациональными*: например, сложение и умножение обладают свойствами переместительным и сочетательным; умножение и деление, кроме того, обладают ещё распределительным свойством. Свойства, выражаемые неравенствами, также сохраняются для чисел иррациональных: так, если $\alpha > \beta$, то $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$, $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (при $\gamma > 0$) и $\alpha\gamma < \beta\gamma$ (при $\gamma < 0$) и т. п.

11. Извлечение корня. Определение. *Корнем n-й степени из числа a называется такое число, которое, будучи возведено в степень n, даёт a.*

Корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Из самого определения следует, что $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Это равенство может служить для проверки правильности произведённого действия извлечения корня. Пусть, например, мы нашли, что $\sqrt[11]{2048} = 2$. Для проверки возведём 2 в одиннадцатую степень, получим $2^{11} = 2048$. Значит, корень найден правильно. Точно так же $\sqrt[4]{39{,}0625} = 2{,}5$, так как $2{,}5^4 = 39{,}0625$.

12. Приближённые корни любой степени. В учебнике алгебры для VI–VIII классов Барсукова (§ 96) дано понятие о приближённом квадратном корне с точностью до 1; 0,1 и т. д. Сказанное о квадратном корне может быть применено к корню всякой другой степени. Например, приближённым значением $\sqrt[3]{2}$ с точностью до $\frac{1}{100}$ называется такая десятичная дробь, состоящая из целых, десятых и сотых, куб которой не больше 2, но если увеличим её на $\frac{1}{100}$ и возведём в куб, то получим больше 2. Мы не будем выводить правила для нахождения точных и приближённых корней кубических и других степеней, ограничимся только указанием следующего простого приёма для нахождения таких корней.

Пусть требуется найти $\sqrt[3]{2}$. Приближёнными корнями с точностью до 1 будут, очевидно, числа 1 (с недостатком), 2 (с избытком). Чтобы найти цифру десятых долей искомого корня, найдём в ряду: 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9 — два таких рядом стоящих числа, чтобы куб левого числа был меньше 2, а куб правого — больше 2. Для этого возьмём из чисел нашего ряда среднее 1,5 и возведём его в куб. Мы найдём: $1{,}5^3 = 3{,}375$, что больше 2. Так как числа, стоящие справа от 1,5, при возведении в куб дают результат ещё больший, то мы можем отбросить всю правую половину ряда и испытать только числа: 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4.

Возьмём среднее из них 1,2 и возведём в куб. Получим 1,728, что меньше 2. Значит, испытанию подлежат теперь только числа 1,3 и 1,4. Возведя в куб число 1,3, получим 2,197, что больше 2. Мы получили, таким образом, два числа: 1,2 и 1,3, которые разнятся между собой на 0,1 и между кубами которых заключается число 2.

Это и будут приближённые кубические корни из 2 с точностью до $\frac{1}{10}$ с недостатком и с избытком.

Если желаем найти цифру сотых, мы должны испытать следующие числа: 1,21; 1,22; 1,23; ...; 1,29. Взяв в этом ряду среднее число 1,25 и возведя его в куб, найдём $1{,}25^3 = 1{,}953125$, что меньше 2. Значит, теперь надо испытать только числа: 1,26; 1,27; 1,28; 1,29. Так как $1{,}25^3$ очень мало разнится от 2, то естественно попробовать, не будет ли $1{,}26^3$ больше 2. И действительно, возведя 1.26 в куб, получим 2,000376. Значит, искомый кубический корень из 2 с точностью до $\frac{1}{100}$ будет 1,25 (с недостатком) или 1,26 (с избытком). Если бы мы желали далее найти цифру тысячных, то должны были бы подобным же путём испытать числа ряда: 1,251; 1,252; 1,253;...; 1,259.

Конечно, приём этот утомителен (существуют более удобные способы [1]), но из него ясно видно, что десятичные цифры приближённых корней любой степени могут быть найдены в каком угодно большом числе.

Для $\sqrt[3]{2}$ мы получили приближённые значения с недостатком: 1; 1,2; 1,25; 1,259;....

Составим бесконечную десятичную дробь 1,259.... Эта бесконечная десятичная дробь выражает собой некоторое иррациональное число α, а числа: 1; 1,2; 1,25; 1,259; ... представляют собой приближённые значения иррационального числа α, взятые с недостатком.

Куб иррационального числа α есть 2. Чтобы убедиться в этом, вспомним, чтó называется кубом иррационального числа α; α^3 — это число, удовлетворяющее двум условиям: оно больше куба любого приближённого значения α, взятого с недостатком, и меньше куба любого приближённого значения α, взятого с избытком. Но число $\sqrt[3]{2}$ этим условиям удовлетворяет, так как

$$1^3 < 2,\quad (1{,}2)^3 < 2,\quad (1{,}25)^3 < 2,\quad (1{,}259)^3 < 2, \ldots;$$
$$2^3 > 2,\quad (1{,}3)^3 > 2,\quad (1{,}26)^3 > 2,\quad (1{,}260)^3 > 2, \ldots .$$

Значит, иррациональное число 1,259... есть кубический корень из 2.

Итак, после введения иррациональных чисел *задача извлечения арифметического корня любой степени из любого положительного числа во всех случаях разрешима*: такой корень всегда существует, и притом только один.

Замечание. Действие извлечения корня является источником многочисленных примеров иррациональных чисел, которые приходится рассматривать в курсе элементарной алгебры. Однако было бы грубой ошибкой думать, что все иррациональные числа являются корнями из рациональных чисел или сводятся к этим корням при помощи алгебраических действий: существует бесконечно много иррациональных чисел, которые не являются корнями никакой степени ни из какого рационального числа и вообще не могут быть получены посредством алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня) над рациональными числами, в каком бы числе, в каком бы порядке и над какими бы рациональными числами мы эти действия ни совершали. Примером такого иррационального числа может служить число π.

IV. Преобразование иррациональных выражений

13. Рациональные и иррациональные алгебраические выражения. Алгебраическое выражение называется *рациональным* относи-

---

[1] Корни любых степеней весьма просто вычисляются, как мы увидим позже, посредством логарифмических таблиц.

тельно какой-нибудь буквы, входящей в это выражение, если эта буква не находится под знаком радикала; в противном случае выражение называется *иррациональным* относительно этой буквы. Например, выражение $3a + 2\sqrt{x}$ есть рациональное относительно a и иррациональное относительно x.

Если говорят — «рациональное алгебраическое выражение», не добавляя, относительно каких букв, то предполагается, что оно рационально относительно всех букв, входящих в выражение.

14. Основное свойство радикала. Заметим, что корни (радикалы), о которых мы будем говорить в этой главе, подразумеваются только *арифметические*. Возьмём какой-нибудь радикал, например, $\sqrt[3]{a}$, и возведём подкоренное число в какую-нибудь степень, например, в квадрат; вместе с тем умножим показатель радикала на показатель той степени, в которую мы возвели подкоренное число, т. е. в нашем случае умножим на 2. Тогда получим новый радикал: $\sqrt[6]{a^2}$. Докажем, что от этих двух операций величина радикала не изменилась.

Предположим, что мы вычислили $\sqrt[3]{a}$ и получили некоторое число x. Тогда мы можем написать равенства: $x = \sqrt[3]{a}$ и $x^3 = a^2$. Возведём обе части последнего равенства в квадрат: $\left(x^3\right)^2 = a^2$, т. е. $x^6 = a^2$.

Из последнего равенства видно, что $x = \sqrt[6]{a^2}$. Таким образом, одно и то же число x равно и $\sqrt[3]{a}$ и $\sqrt[6]{a^2}$; следовательно, $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$.

Подобно этому можно убедиться, что:

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[8]{a^4} = \ldots;$$
$$\sqrt[3]{m^2} = \sqrt[6]{m^4} = \sqrt[9]{m^6} = \sqrt[12]{m^8} = \ldots;$$
$$\sqrt{1+x} = \sqrt[4]{(1+x)^2} = \sqrt[6]{(1+x)^3} = \ldots .$$

Величина радикала не изменится, если подкоренное выражение возведём в какую-нибудь степень и вместе с тем показатель радикала умножим на показатель той степени, в которую возвели подкоренное выражение.

Правило это короче выражают ещё так:

Величина радикала не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножим (или разделим) на одно и то же число.

Следствия. а) *Радикалы разных степеней можно привести к одинаковым показателям* (подобно тому как дроби с разными знаменателями можно привести к одному знаменателю). Для этого достаточно найти общее кратное (лучше всего наименьшее) показателей всех радикалов и умножить показатель каждого из них на соответствующий дополнительный множитель, возведя вместе с тем каждое подкоренное выражение в надлежащую степень.

Пример. $\sqrt{ax}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[6]{x}$.

Наименьшее общее кратное показателей радикалов есть 6; дополнительные множители будут: для первого радикала 3, для второго 2 и для третьего 1. Тогда:

$$\sqrt{ax} = \sqrt[6]{(ax)^3} = \sqrt[6]{a^3x^3}; \quad \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{(a^2)^2} = \sqrt[6]{a^4}; \quad \sqrt[6]{x}.$$

б) *Если подкоренное выражение есть степень, показатель которой имеет общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно разделить оба показателя.*

Примеры. 1) $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$; 2) $\sqrt[6]{(1+x)^3} = \sqrt{1+x}$.

в) *Если подкоренное выражение есть произведение нескольких степеней, показатели которых имеют один и тот же общий множитель с показателем радикала, то на этот множитель можно разделить все показатели.*

Пример. $\sqrt[6]{8a^6x^3} = \sqrt[6]{(2a^2x)^3} = \sqrt{2a^2x}$.

15. Извлечение арифметического корня из произведения, из степени и из дроби. а) Пусть надо извлечь арифметический корень степени n из произведения abc. Если бы требовалось произведение возвести в степень, то, как мы видели, надо было бы возвести в степень каждый сомножитель отдельно. Так как извлечение корня есть действие, обратное возведению в степень, то надо ожидать, что и для извлечения корня из произведения надо извлечь его из каждого сомножителя отдельно, т. е. что

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}.$$

Чтобы убедиться в верности этого равенства, возведём правую часть его в степень n:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \cdot (\sqrt[n]{c})^n.$$

Но, по определению корня, $(\sqrt[n]{a})^n = a$; $(\sqrt[n]{b})^n = b$; $(\sqrt[n]{c})^n = c$. Следовательно, $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c})^n = abc$.

Если же n-я степень произведения $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}$ равна abc, то это значит, что произведение это равно корню n-й степени из abc. Значит:

Чтобы извлечь корень из произведения, надо извлечь его из каждого сомножителя отдельно и результаты перемножить.

б) Легко убедиться проверкой, что $\sqrt{a^4} = a^2$, потому что $(a^2)^2 = a^4$; $\sqrt[3]{x^{12}} = x^4$, потому что $(x^4)^3 = x^{12}$, и т. п.

Вообще: $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$, потому что $(a^m)^n = a^{mn}$. Значит:

Чтобы извлечь корень из степени, показатель которой делится на показатель корня, иадо разделить показатель степени на показатель корня.

в) Верны будут также следующие равенства:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4},\quad \text{потому что}\quad \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16};$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3},\quad \text{потому что}\quad \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}.$$

Вообще: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, потому что $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\dfrac{a}{b}$.

Чтобы извлечь корень из дроби, надо извлечь его из числителя и знаменателя отдельно и первый результат разделить на второй.

Примеры. 1) $\sqrt{9a^4b^6}=\sqrt{9}\,\sqrt{a^4}\,\sqrt{b^6}=3a^2b^3$; 2) $\sqrt[3]{125a^6x^9}=$ $=\sqrt[3]{125}\,\sqrt[3]{a^6}\,\sqrt[3]{x^9}=5a^2x^3$; 3) $\sqrt{\dfrac{4a^2b^6}{9c^2d^4}}=\dfrac{2ab^3}{3cd^2}$.

16. Простейшие преобразования радикалов. ***а) Вынесение множителей за знак корня.*** Если подкоренное выражение разлагается на такие множители, что из некоторых можно извлечь точный корень, то такие множители, по извлечении из них корня, могут быть написаны перед знаком корня (т. е. могут быть вынесены за знак корня); например:

$$1)\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2a}=\sqrt{a^2}\,\sqrt{a}=a\sqrt{a};\quad 2)\sqrt[3]{16x^4}=\sqrt[3]{8x^3\cdot 2x}=2x\sqrt[3]{2x}.$$

б) Подведение множителей под знак корня. Иногда бывает полезно, наоборот, *подвести* под знак корня множители, стоящие перед ним; для этого достаточно возвести такие множители в степень, показатель которой равен показателю корня, а затем написать эти множители под знаком корня; например:

$$1)\ a^2\sqrt{a}=\sqrt{(a^2)^2a}=\sqrt{a^4a}=\sqrt{a^5};$$
$$2)\ 2x\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(2x)^3x}=\sqrt[3]{8x^3x}=\sqrt[3]{8x^4}.$$

в) Освобождение подкоренного выражения от знаменателей. Покажем это на следующих примерах:

1) $\sqrt{\dfrac{3x}{5}}$. Чтобы из знаменателя можно было извлечь точный квадратный корень, умножим оба члена дроби на 5:

$$\sqrt{\frac{3x}{5}}=\sqrt{\frac{3x\cdot 5}{5^2}}=\frac{\sqrt{15x}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{15x}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt{15x}.$$

2) $\sqrt{\dfrac{3}{2ax^3}}$. Умножим оба члена дроби на 2, на a и на x, т. е. на $2ax$:

$$\sqrt{\frac{3}{2ax^3}} = \sqrt{\frac{3\cdot 2ax^3}{4a^2x^4}} = \frac{\sqrt{6ax}}{2ax^2} = \frac{1}{2ax^2}\sqrt{6ax}\,.$$

Замечание. Если требуется извлечь корень из алгебраической суммы, то нельзя извлекать его из каждого слагаемого отдельно. Так: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, тогда как $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4 = 7$; значит, действие извлечения корня по отношению к сложению (и вычитанию) *не обладает распределительным свойством* (как и возведение в степень).

Упражнения.

Вынести множители за знак радикала:

11. $\sqrt{4a^3}$; $\sqrt{8a^6b^7}$; $\sqrt{50a^5b^3x^3}$; $\sqrt[3]{16a^4}$.

12. $\sqrt{27}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{60}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{1728}$.

13. $\sqrt[3]{-81x^5y^2}$; $\sqrt{98(a+b)^3}$; $\sqrt[3]{250x^7y}$.

Подвести множители, стоящие перед радикалом, под знак этого радикала.

14. $2\sqrt{2}$; $7\sqrt{10}$; $5\sqrt{5}$; $3\sqrt{\dfrac{1}{3}}$; $a\sqrt{a}$.

15. $2ab\sqrt{\dfrac{1}{2}a}$; $\dfrac{1}{2}\sqrt{4x}$; $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{54a}$.

16. $2a^2\sqrt[3]{3ab^2}$; $(a+b)\sqrt{(a+b)}$; $2(x-y)\sqrt{\dfrac{1}{2}a^3(x-y)}$.

Освободить подкоренные выражения от знаменателей:

17. $\sqrt{\dfrac{1}{600}}$; $\sqrt{\dfrac{11}{540}}$. **18.** $\sqrt{\dfrac{3x}{49ay^2}}$; $\sqrt{x - \dfrac{3}{2x} + \dfrac{5}{3ax}}$.

17. Подобные радикалы. Подобными радикалами называются такие, у которых одинаковы подкоренные выражения и одинаковы показатели радикалов. Таковы, например, радикалы:

$$+3a\sqrt[3]{xy} \quad \text{и} - 5b\sqrt[3]{xy}\,.$$

Чтобы определить, подобны ли между собой данные радикалы, следует предварительно упростить их, т. е. если возможно:

1) вынести из-под радикала те множители, из которых можно извлечь точный корень;

2) освободиться под радикалами от знаменателей дробей;

3) понизить степень радикала, сократив показатели радикала и подкоренного выражения на их общий множитель, если такой есть.

По выполнении этих действий радикал приведётся к простейшему виду.

Примеры.

1) Радикалы $\sqrt[3]{8ax^3}$ и $\sqrt[6]{64a^2y^{12}}$ окажутся подобными, если упростим их: $\sqrt[3]{8ax^3} = 2x\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{64a^2y^{12}} = 2y^2\sqrt[6]{a^2} = 2y^2\sqrt[3]{a}$.

2) Три радикала $\sqrt{\frac{2x}{3}}$, $\sqrt{\frac{6}{x}}$, $\sqrt{6x}$ окажутся подобными, если освободимся под радикалами от знаменателей:

$$\sqrt{\frac{2x}{3}} = \sqrt{\frac{2x\cdot 3}{3\cdot 3}} = \sqrt{\frac{6x}{3^2}} = \frac{\sqrt{6x}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6x},$$

$$\sqrt{\frac{6}{x}} = \sqrt{\frac{6x}{x^2}} = \frac{\sqrt{6x}}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{6x}.$$

Упражнения.

Привести к одинаковым показателям следующие радикалы:

19. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[6]{y^5}$.

20. $\sqrt[3]{xy^2}$, $\sqrt{yz}$, $\sqrt[4]{xz^3}$; $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}$.

Упростить следующие радикалы (сократить показатели корня и подкоренного выражения):

21. $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[8]{10\,000}$, $\sqrt[6]{9a^4b^8}$, $\sqrt[8]{16a^8b^{12}}$.

22. $\sqrt[9]{8x^6}$, $\sqrt[6]{121a^4b^4}$, $\sqrt[15]{8a^3b^{12}c^{30}}$.

Упростить следующие радикалы с целью обнаружить их подобие:

23. $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$; $\sqrt{1\frac{1}{3}}$, $\sqrt{5\frac{1}{3}}$, $\sqrt{16\frac{1}{3}}$.

24. $\sqrt{a^3x}$, $\sqrt{ax^3}$, $\sqrt{ax}$. **25.** $\sqrt{\frac{bx^2}{a}}$, $\sqrt{\frac{bx^4}{a}}$, $\sqrt{\frac{x^2}{ab}}$.

18. Действия над иррациональными одночленами. ***а) Сложение и вычитание.*** Чтобы сложить или вычесть иррациональные одночлены, соединяют их знаками плюс или минус и делают приведение подобных членов, если они окажутся.

Примеры.

1) $\frac{2}{3}x\sqrt{9x} + 6x\sqrt{\frac{x}{4}} - x^2\sqrt{\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{x} + 3x\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 4x\sqrt{x}$;

2) $15\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{32} - 16\sqrt[3]{\frac{1}{16}} - \sqrt[3]{108} = 15\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$.

б) Умножение. Мы видели (§ 15), что для извлечения корня из произведения надо извлечь его из каждого сомножителя отдельно; значит, и наоборот:

Чтобы перемножить несколько корней одинаковой степени, надо перемножить подкоренные выражения и из произведения извлечь корень той же степени.

Так: $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = \sqrt{abc}$; $\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{xy}$.

Если для перемножения даны радикалы с различными показателями, то их надо предварительно привести к одному показателю.

Если перед радикалами имеются коэффициенты, то их перемножают.

Примеры.

1) $a\sqrt{2x}\cdot\frac{a}{b}\sqrt{3x}=\frac{a^2}{b}\sqrt{6x^2}=\frac{a^2x}{b}\sqrt{6}$;

2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\sqrt[6]{3^3\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^3}}=$
$=\sqrt[6]{\frac{3^3}{3^2\cdot 2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$.

в) Деление. Мы знаем, что для извлечения корня из дроби надо извлечь его из числителя и знаменателя отдельно; значит, и наоборот:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};\quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\quad \text{и т. д., т. е. :}$$

Чтобы разделить корни с одинаковыми показателями, надо разделить их подкоренные выражения и из частного извлечь корень той же степени.

Радикалы с различными показателями надо привести предварительно к одинаковым показателям. Если есть коэффициенты, то их делят.

Примеры.

1) $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=-\frac{6\cdot 5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)\cdot 2bx^2}{x^2(a-b)}}=-15\sqrt{b}$;

2) $\frac{3a}{5b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-x}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a}{a-x}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{\frac{a^4}{(a-x)^2}}:\sqrt[6]{\frac{8a^3}{(a-x)^3}}\right)=$
$=\frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{a(a-x)}{8}}$.

г) Возведение в степень. *Чтобы возвести радикал в степень, надо возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель радикала.*

Так: $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^2}$; $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\underbrace{\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{x}}_{m\ \text{раз}}=$
$=\sqrt[n]{x^m}$.

Примеры.

1) $\left(\sqrt[4]{2ab^3x^2}\right)^3=\sqrt[4]{(2ab^3x^2)^3}=\sqrt[4]{8a^3b^9x^6}=b^2x\sqrt[4]{8a^3bx^2}$;

2) $\left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3=\sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3}=\sqrt{\frac{2x}{1+x}}$.

д) Извлечение корня. *Чтобы извлечь корень из корня, надо перемножить показатели корней.*

Так: $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$.

Чтобы убедиться в этом, положим, что $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = x$. Возведём обе части этого равенства сначала в квадрат, а потом в куб:

$$\sqrt[3]{a} = x^2; \quad a = (x^2)^3 = x^6.$$

Отсюда видно, что $x = \sqrt[6]{a}$ и, следовательно, $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$.

П р и м е р. $\sqrt{2x\sqrt[3]{x^2}}$.

Подведём сомножитель $2x$ под знак радикала третьей степени:

$$\sqrt{\sqrt[3]{(2x)^3x^2}} = \sqrt[6]{8x^5}.$$

Заметим, что в этом примере (и в других, ему подобных) можно поступить иначе: заметив, что выражение, стоящее под знаком квадратного радикала, есть произведение, мы можем применить теорему об извлечении корня из произведения. Тогда получим:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{x^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}.$$

Приведя теперь радикалы к одинаковому показателю 6, найдём:

$$\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{8x^5}.$$

Упражнения.

26. $2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} + 5\sqrt{72} - \sqrt{50}$; $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - 3\sqrt{75} + 9\sqrt{48}$.

27. $\frac{2}{3}\sqrt{18a^5b^3} + \frac{1}{5}\sqrt{50a^3b^3} - b\sqrt{\frac{2a}{b}}$.

28. $\sqrt{18} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$; $6\sqrt{8} \cdot 5\sqrt{2}$.

29. $2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt{\frac{3}{5}}$.

30. $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{448}$.

31. $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{2} - \sqrt{27}$.

32. $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{15}$; $\sqrt[3]{a} \cdot 2\sqrt[3]{a^4} \cdot 3\sqrt[3]{a^4}$.

33. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{15} \cdot \sqrt[3]{2}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4}$.

34. $2\sqrt{\frac{3a}{x^2}} \cdot 4\sqrt{\frac{4x^4}{3a^3}}$.

35. $\sqrt{120a^3b} : \sqrt{3ab}$; $18\sqrt{27a^3} : 3\sqrt{30a}$.

36. $\sqrt{x} : \sqrt[3]{x}$; $\sqrt{8} : \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a}$.

37. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2ab}\right)^3$; $\left(2\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2x}\right)^2$; $\left(3a^2x\sqrt[3]{a+b}\right)^2$.

38. $\left(\sqrt[4]{(1+x^3)^3}\right)^2$; $\left(\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt{x}\right)^{10}$; $\left(3ab^2\sqrt[3]{a^2b}\right)^4$.

39. $\sqrt[6]{2\sqrt{3}}$; $\sqrt{a\sqrt{a}}$; $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}}$; $\sqrt{2a\sqrt{\frac{1}{4}a}}$.

19. Действия над иррациональными многочленами производятся по таким же правилам, какие были выведены для многочленов рациональных. Например:

$$\left(\frac{2}{5}\sqrt{5} - 5\sqrt{0{,}3}\right)^2 = \frac{4}{5} - 4\sqrt{1{,}5} + 7{,}5 = 8{,}3 - 4\sqrt{1{,}5}.$$

Упражнения.

40. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$; $(\sqrt[3]{a} + 2)(\sqrt[3]{a} - 2)$.

41. $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$.

42. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$.

43. Упростить следующее выражение: $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Проверить, что следующие уравнения удовлетворяются при указанных значениях x:

44. $x^2 - 4x + 1 = 0$, при $x = 2 + \sqrt{3}$.

45. $x^2 - 10x + 13 = 0$, при $x = 5 - 2\sqrt{3}$.

20. Освобождение знаменателя дроби от радикалов. При вычислении дробных выражений, знаменатели которых содержат радикалы, в некоторых случаях полезно предварительно преобразовать дробь так, чтобы знаменатель её не содержал радикалов. Пусть, например, надо вычислить:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}. \tag{1}$$

Мы можем или производить вычисление прямо по этой формуле, или же предварительно сделать её знаменатель рациональным, для чего достаточно умножить оба члена данной дроби на сумму $\sqrt{3} + \sqrt{2}$:

$$x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}. \tag{2}$$

Формула (2) удобнее для вычисления, чем формула (1), во-первых, потому, что она содержит в себе всего три действия, а не четыре, как формула (1), а во-вторых, и потому, что при вычислении, которое по необходимости может быть только приближённое, погрешность результата сравнительно просто определяется по формуле (2). Так, найдя $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ с точностью до половины тысячной доли, получим:

$$x = 1{,}732 + 1{,}414 = 3{,}146.$$

Результат этот точен до $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$ тысячной, т. е. до $\frac{1}{1000}$.

Примеры.

1) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$. Умножим оба члена дроби на $\sqrt{5}$:

$$\frac{3\sqrt{5}}{2\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2\cdot 5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}=0{,}3\sqrt{5}\,.$$

2) Если под знаком радикала стоит целое составное число, то иногда бывает полезно разложить его на простые сомножители с целью определить, каких сомножителей недостаёт в нём для того, чтобы оно было полным квадратом. Тогда достаточно умножить оба члена дроби на квадратный корень из произведения только недостающих сомножителей. Например:

$$\frac{3}{\sqrt{40}}=\frac{3}{\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}}=\frac{3\cdot\sqrt{2\cdot 5}}{\sqrt{2^3\cdot 5}\cdot\sqrt{2\cdot 5}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{2^4\cdot 5^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2^2\cdot 5}=\frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

3) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$. Умножим оба члена дроби на $\sqrt[5]{3^3}$:

$$\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}.$$

Вообще: $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\dfrac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$.

4) $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$. Умножим оба члена дроби на разность $3-\sqrt{5}$:

$$\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{6-2\sqrt{5}}{9-5}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Вообще: $\dfrac{a}{b+\sqrt{c}}=\dfrac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$.

5) $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$. Умножим оба члена дроби на сумму $3+\sqrt{5}$:

$$\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{3^2-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Вообще: $\dfrac{a}{b-\sqrt{c}}=\dfrac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$.

6) $\dfrac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Умножим оба члена дроби на $\sqrt{3}-\sqrt{2}$:

$$\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{3-2}=5\sqrt{3}-5\sqrt{2}\,.$$

Вообще: $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$.

7) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{3-2} = 5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$.

Вообще: $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$.

8) Если знаменатель есть двучлен с корнями третьей степени, то его можно сделать рациональным, основываясь на тождествах:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3;$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3.$$

Пусть, например, знаменатель будет $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. Тогда, умножив числитель и знаменатель дроби на трёхчлен $(\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2$, мы получим в знаменателе $(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3$, т. е. $3-2$, или 1. Подобно этому найдём:

$$\frac{5}{3+\sqrt[3]{4}} = \frac{5\left[3^2-3\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2\right]}{(3+\sqrt[3]{4})\left[3^2-3\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2\right]} =$$

$$= \frac{45-15\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{16}}{3^3+(\sqrt[3]{4})^3} = \frac{45-15\sqrt[3]{4}+10\sqrt[3]{2}}{31}.$$

Упражнения.

46. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$; $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$.

47. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$; $\dfrac{2}{3+\sqrt{2}}$; $\dfrac{13}{7-\sqrt{6}}$.

48. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\dfrac{x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

49. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-2}$.

50. $\dfrac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}+\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$; $\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

51. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+5}$; $\dfrac{10}{7-\sqrt[3]{3}}$; $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}}$.

V. Иррациональные уравнения

21. Задача. Периметр прямоугольного треугольника равен 10 м, а один из его катетов равен 2 м; найти две другие стороны этого треугольника.

Обозначив второй катет буквой x, найдём, что гипотенуза должна равняться $\sqrt{2^2+x^2}$ (м), и, следовательно, будем иметь уравнение:

$$2+x+\sqrt{2^2+x^2}=10.$$

Мы получили уравнение, в котором под знак радикала входит неизвестное. Уравнения такого рода называются *иррациональными*.

Чтобы решить иррациональное уравнение, его надо предварительно *освободить от радикалов*, подкоренные выражения которых содержат неизвестное. Если в уравнение, как в нашей задаче, входит только один радикал, то освободиться от него можно таким образом: прежде всего уединим радикал, т. е. перенесём все члены, не содержащие радикала, в одну часть уравнения, оставив радикал в другой части:

$$\sqrt{4+x^2}=8-x.$$

Теперь возведём обе части уравнения в квадрат. Очевидно, что если равные числа мы возведём в одну и ту же степень, то и получим равные числа; поэтому после возведения в квадрат знак равенства сохраняется:

$$4+x^2=(8-x)^2;\quad 4+x^2=64-16x+x^2.$$

Решив это уравнение, найдём:

$$16x=64-4=60;\quad x=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}.$$

Тогда гипотенуза будет:

$$\sqrt{4+\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{225}{16}}=\sqrt{\frac{64+225}{16}}=\sqrt{\frac{289}{16}}=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}.$$

Пусть требуется решить ещё уравнение: $10-\sqrt[3]{3x+21}=7$. Уединим радикал и возведём обе части уравнения в куб:

$$3=\sqrt[3]{3x+21};\quad 27=3x+21;\quad x=2.$$

Проверка: $10-\sqrt[3]{3\cdot 2+21}=10-\sqrt[3]{27}=10-3=7$.

22. Посторонние решения. Возведение частей уравнения в квадрат может ввести так называемые «посторонние» решения, т. е. такие, которые данному уравнению не удовлетворяют. Приведём этому пример. Пусть нам даны два уравнения:

$$x+1=\sqrt{x+7}, \qquad (1); \qquad x+1=-\sqrt{x+7}, \qquad (2)$$

которые отличаются одно от другого только знаком перед радикалом. Возведя в квадрат обе части каждого из этих уравнений, мы получим одно и то же уравнение:

$$x^2+2x+1=x+7, \tag{3}$$

так как $(-\sqrt{x+7})^2$ и $(\sqrt{x+7})^2$ равны одному и тому же числу $x+7$.

Уравнение (3) имеет два корня: -3 и 2. Число -3 удовлетворяет уравнению (2), но не удовлетворяет уравнению (1); наоборот, число 2 годно для уравнения (1), но не годится для уравнения (2).

Может оказаться, что уравнение (1) не имеет совсем решений; тогда уравнение (3) содержит только решения уравнения (2) и, значит, все они будут посторонние для уравнения (1).

Возведение частей уравнения в квадрат может привести к новому уравнению, не равносильному с первоначальным.

23. Освобождение уравнения от двух квадратных радикалов. Пусть надо решить уравнение с двумя квадратными радикалами, подкоренные выражения которых содержат неизвестное:

$$\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1.$$

Желая освободиться от радикала $\sqrt{2x-4}$, уединим его:

$$\sqrt{2x-4} = 1 + \sqrt{x+5}.$$

Теперь возведём обе части этого уравнения в квадрат:

$$2x - 4 = 1 + 2\sqrt{x+5} + x + 5,$$

что даёт:

$$x - 10 = 2\sqrt{x+5}.$$

Наконец, освободим и последнее уравнение от радикала посредством вторичного возведения в квадрат:

$$x^2 - 20x + 100 = 4x + 20, \quad \text{или} \quad x^2 - 24x + 80 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$x = 12 \pm \sqrt{144-80} = 12 \pm \sqrt{64} = 12 \pm 8;$$

$$x_1 = 12 + 8 = 20, \quad x_2 = 12 - 8 = 4.$$

Подстановкой убеждаемся, что данное уравнение удовлетворяется только числом 20, а число 4 ему не удовлетворяет.

Упражнения.

52. $x - 5 = \sqrt{x} + 1$; $\quad 3 + 2\sqrt{x} = 5$; $\quad \sqrt{3x-5} - 4 = 5$.

53. $5\sqrt{x} - 7 = 3\sqrt{x} - 1$; $\quad 7\sqrt{3x} - 1 = 5\sqrt{3x} + 5$ (в двух последних примерах предварительно сделать приведение подобных радикалов).

54. $\sqrt{x^2 - 3x - 1} + 7 = 2x$; $\quad x - \sqrt{25 - x^2} = 7$.

Глава 2

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

I. Функциональная зависимость

24. Постоянные и переменные величины. Пусть 1 кг какого-либо товара стоит a рублей. Узнаем стоимость x кг этого товара. Обозначив искомую величину через y, получим:

$$y = ax.$$

Эта формула позволяет нам вычислить сумму, которую нужно заплатить за любое количество данного товара. Так:

стоимость	2	килограммов	выражается	в	сумме	$2a$	рублей,	
"	5	"	"	"	"	$5a$	"	
"	3,5	"	"	"	"	$3{,}5a$	"	и т. п.

В данную формулу входят три величины: x — количество товара, y — его стоимость и a —цена одного килограмма товара. Мы видим, что в то время как первые две из этих величин x и y принимают различные числовые значения, третью величину a мы предполагаем остающейся неизменной.

Возьмём формулу, выражающую длину окружности в зависимости от радиуса:

$$C = 2\pi R.$$

Здесь π есть число, выражающее отношение длины окружности к диаметру. Приняв за величину π число 3,14 с точностью до 0,01, будем иметь приближённое значение длины окружности:

$$C = 6{,}28R.$$

Давая различные числовые значения радиусу, мы сможем вычислить по этой формуле соответственно длину окружности. Так:

при	$R = 1$	длина	окружности	будет	$C = 6{,}28$,	
"	$R = 3$	"	"	"	$C = 18{,}84$,	
"	$R = 4{,}2$	"	"	"	$C = 26{,}376$	и т. п.

Здесь, как и в первом случае, величины C и R изменяются (принимают различные числовые значения), коэффициент же 6,28 остаётся неизменным.

Те величины, которые сохраняют неизменным своё значение, называются *постоянными*. Величины, могущие принимать различные значения, называются *переменными*.

Заметим, что считать некоторые величины постоянными можно лишь в относительном смысле, в пределах рассматриваемого вопроса. В действительной жизни мы не можем указать на такую величину, которая не подвергалась бы изменениям. В приведённом выше примере цена товара по истечении известного промежутка времени может измениться в ту или другую сторону.

Обычно входящие в формулу постоянные величины обозначаются первыми буквами алфавита: $a, b, c, \ \ldots, m$, а переменные — последними: x, y, z; конечно, это условие соблюдается не всегда.

25. Аргумент и функция. Рассматривая переменные величины в приведённых примерах, мы замечаем, что в то время как две из них (количество товара, длина радиуса) мы изменяли произвольно, давая им произвольные числовые значения, другие две (стоимость всего товара, длина окружности) принимали те или иные числовые значения уже в зависимости от того, какие значения мы давали первым.

Та из двух связанных между собой переменных величин, которой можно придавать произвольные числовые значения, называется независимой переменной, или аргументом.

Та переменная величина, числовые значения которой изменяются в зависимости от числовых значений другой, называется зависимой переменной, или функцией этой другой переменной величины.

Так, в приведённых выше примерах стоимость товара есть функция его количества; длина окружности есть функция радиуса окружности.

Иногда переменная величина зависит не от одной, а от двух, трёх и т. д. других переменных величин. Тогда она называется функцией двух, трёх и т. д. переменных.

Примеры.

1) Формула пути равномерного движения выражается так:

$$y = vx.$$

Здесь v (скорость) — постоянная величина; x (время) — независимая переменная (аргумент); y (пройденный путь) — функция этого аргумента.

2) Площадь круга выражается формулой:

$$S = \pi R^2.$$

Здесь R (радиус) — аргумент; S (площадь) — функция; π — постоянная величина.

3) Удельный вес тела выражается формулой:

$$d = \frac{P}{V}.$$

Здесь d (удельный вес) есть функция двух переменных: P (веса тела) и V (объёма тела).

4) Закон Джоуля–Ленца выражается формулой:

$$Q = qI^2Rt.$$

Здесь Q (количество теплоты) есть функция трёх переменных: I (силы тока), R (сопротивления проводника) и t (времени). Постоянная величина q, равная 0,24, есть так называемый тепловой эквивалент электрической энергии, т. е. значение Q при $I = 1$, $R = 1$, $t = 1$.

26. Три способа выражения функциональной зависимости.

а) При изучении функциональной зависимости между двумя переменными величинами мы прежде всего стараемся определить, какие числовые значения принимает одна из них в зависимости от изменения числовых значений другой.

Пусть, например, мы желаем изучить зависимость, которая существует между длиной железного стержня и его температурой. Подвергаем нагреванию железный стержень длиной, скажем, в 1 м при 0° и измеряем его длину при различных температурах. Результаты наблюдений мы можем представить в виде таблицы. В данном случае она будет иметь примерно такой вид [1]):

Температура	0 °C	50 °C	80 °C	100 °C	350 °C	600 °C	1000 °C	...
Длина стержня	1 м	1,0006 м	1,00096 м	1,0012 м	1,0042 м	1,0072 м	1,012 м	и т. д.

Из этой таблицы мы видим, что длина стержня с повышением его температуры увеличивается. Такой способ выражения функциональной зависимости между величинами называется *табличным.*

б) Табличный способ выражения функциональной зависимости неудобен тем, что даёт нам понятие о характере этой зависимости неполно. Так, в предыдущем примере мы из таблицы узнаём длину стержня лишь при некоторых определённых значениях температуры. Для того чтобы знать длину стержня при любой температуре, мы должны будем выразить зависимость между длиной стержня и температурой в общей форме, в виде формулы.

Вычислим, на сколько увеличивается длина стержня при повышении температуры на 1 °C. При температуре в 50 °C длина стержня была 1,0006 м. При температуре в 80 °C длина стала равна 1,00096 м. Значит, при повышении температуры на 80 °C – 50 °C = 30 °C удлинение стержня было равно

$$1{,}00096 - 1{,}0006 = 0{,}00036 \text{ (м)}.$$

[1]) Заметим, что фактически в зависимости от различных условий длина стержня будет лишь приблизительно совпадать с приведёнными здесь значениями.

Отсюда, удлинение при повышении температуры на 1 °C равно

$$0{,}00036 : 30 = 0{,}000012\ (\text{м}).$$

Беря длину стержня при других температурах, например, при 80 °C и 350 °C, и производя соответствующие вычисления, мы опять получим величину 0,000012. Итак, при повышении температуры на 1 °C железный стержень длиной в 1 м при 1 °C удлиняется на 0,000012 м. Зная это, составим общую формулу зависимости между длиной стержни и его температурой.

При повышении температуры на 1 °C стержень удлиняется на 0,000012 м. Значит, при повышении температуры на t °C удлинение будет равно $0{,}000012\,t$. Прибавляя это удлинение к первоначальной длине стержня при 0 °C (1 м) и обозначая длину стержня при t °C через l, получим формулу:

$$l = 1 + 0{,}000012\,t.$$

Эта формула позволяет вычислить длину стержня при любой температуре. В частности, давая t значения 50 °C, 80 °C, 100 °C и т. д., мы получим для l те значения, которые уже имели в таблице.

Такой способ выражения функциональной зависимости при помощи формулы называется *аналитическим.*

в) Наконец, в целях наглядности мы часто изображаем зависимость между двумя величинами *графическим* способом — при помощи чертежа, диаграммы (графика). В нашем примере мы могли бы поступить, например, так:

Проведём две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY и будем откладывать по прямой OX от точки O отрезки, пропорциональные температуре, а по прямой OY отрезки, пропорциональные удлинению стержня, в определённом масштабе (на чертеже одно деление по горизонтальной прямой соответствует 50 °C, а по вертикальной прямой 0,001 м).

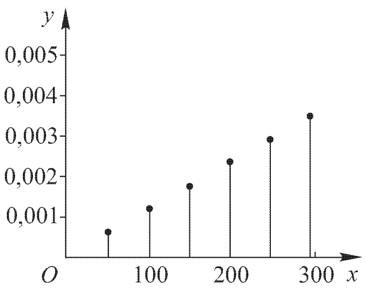


Рис. 2

Для каждого значения t откладываем от соответствующей точки отрезок, параллельный OY и равный удлинению стержня (в принятом масштабе). Получим график, изображённый на рис. 2.

Графическое изображение функциональной зависимости широко используется в математике. При этом применяется особый метод, так называемый метод координат, с которым мы сейчас и познакомимся.

27. Метод координат. Возьмём взаимно перпендикулярные прямые XX_1 и YY_1 (см. рис. 3), пересекающиеся в точке O. Примем, далее, какой-нибудь отрезок прямой (равный, например, сантиметру) за единицу длины и условимся изображать значения независимой переменной x на прямой XX_1, начиная от точки O как начала, причём положительные значения x будем откладывать вправо от O, а отрицательные — влево от O. Таким образом, отрезок OA изобразит значение x, равное $+1$, а отрезок OB — значение x, равное $+2$, отрезок OC — значение x, равное -3, и т. п. Сама точка O изображает значение x, равное нулю. Значения функции y, соответствующие этим значениям x, мы условимся изображать на прямых, проведённых через точки A, B, C, ... параллельно YY_1 (иначе сказать, на перпендикулярах к прямой XX_1), причём положительные значения функции мы будем откладывать вверх от прямой XX_1, а отрицательные — вниз от неё. Если, например, при $x = +\frac{1}{2}$ значение y будет $+1\frac{2}{5}$, то на прямой XX_1 мы возьмём отрезок OD, равный $+\frac{1}{2}$, и восставим перпендикуляр DE, равный $+1\frac{2}{5}$; тогда точке E соответствует значение y, равное $+1\frac{2}{5}$. Равным образом точке K соответствует значение y, равное $-1\frac{3}{4}$ при $x = -2\frac{1}{2}$, и т. п.

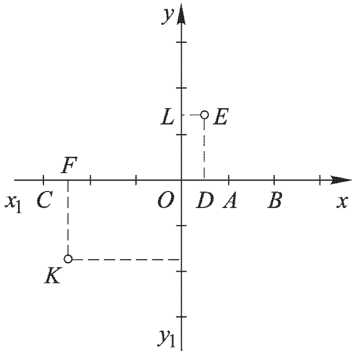


Рис. 3

Заметим, что точки E, K, ..., соответствующие значениям функции y, мы можем получить несколько иначе, а именно: вместо того чтобы на перпендикулярах DE, FK, ... откладывать отрезки, изображающие значения y, мы можем их откладывать на прямой YY_1, начиная от точки O, и затем из концов этих отрезков проводить прямые, параллельные XX_1, до пересечения с соответствующими перпендикулярами. Так, отложив $OL = +1\frac{2}{5}$ и проведя $LE \parallel OX$, мы получим точку E, т. е. ту самую точку, которую раньше мы получили, отложив $DE = +1\frac{2}{5}$.

Числа, соответствующие отрезкам OD, OF, ..., откладываемым на прямой XX_1 от точки O, называются *абсциссами* точек E, K, ... $\left(\frac{1}{2}\right.$ — абсцисса точки E, $-\frac{5}{2}$ — абсцисса точки K, и т. п.$\Big)$; числа, соответствующие отрезкам DE, FK, ..., откладываемым на перпендикулярах к XX_1 (или на прямой YY_1), называются *ординатами* точек E, K, ... $\Big(1\frac{2}{5}$ —ордината точки E, $-1\frac{3}{4}$ — ордината точки K и т. п.$\Big)$; те и другие совместно называются *координатами* точек E, K, ...

Неограниченная прямая XX_1 называется *осью абсцисс*, или осью x-ов (осью иксов); неограниченная прямая YY_1 называется *осью ординат*, или осью y-ов (осью игреков); та и другая прямые совместно называются *осями координат*. Точка O называется *началом координат* [1]).

28. Определение положения точки на плоскости. Пользуясь системой координат, мы можем решить такие задачи:

а) *Дана точка на плоскости; определить её координаты относительно данной системы координат.* Пусть дана на плоскости точка P (см. рис. 4). Опустим из неё перпендикуляр PQ на ось x-ов. Измерив принятой единицей отрезок OQ, найдём абсциссу точки P. Измерив отрезок PQ, найдём ординату точки P. На нашем чертеже абсцисса точки P равна $+2$, а ордината $+1\frac{1}{2}$. Обыкновенно координаты точки пишутся в скобках рядом с буквой: $P\left(+2, +1\frac{1}{2}\right)$ или просто $P\left(2, 1\frac{1}{2}\right)$. На первом месте пишется абсцисса, на втором — ордината.

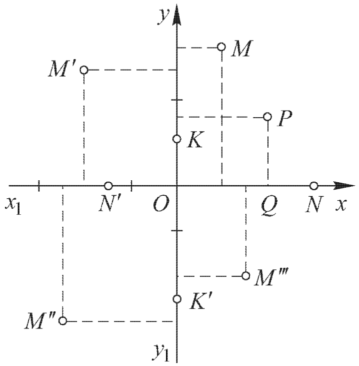


Рис. 4

При нахождении координат точки не следует упускать из виду знак, который будет иметь координата. Так, координаты точки M''' будут $1\frac{1}{2}$ (абсцисса) и -2 (ордината), координаты точки M'' будут $-2\frac{1}{2}$ и -3, и т. п.

Если возьмём точку на оси x-ов, то ордината её, очевидно, будет равна нулю, а абсцисса есть число, равное по абсолютной величине расстоянию данной точки от точки O. Таковы, например, точки $N(3, 0)$ и $N'\left(-1\frac{1}{2}, 0\right)$.

Если точка взята на оси y-ов, то её абсцисса равна нулю, а ордината есть число, равное по абсолютной величине расстоянию данной точки от точки O. Таковы, например, точки $K(0,1)$ и $K'\left(0, -2\frac{1}{2}\right)$.

Абсцисса и ордината начала координат, очевидно, равны нулю.

б) *Найти точку по данным её координатам.* Рассмотрим несколько случаев. 1) Пусть координаты точки будут (1,3). Откладываем на оси x-ов от точки O вправо отрезок, равный принятой единице.

[1]) Определение положения точки на плоскости посредством двух указанных координат введено было французским математиком Рене Декартом (1596–1650), почему координаты эти и называются *декартовыми*.

Из полученной точки восставим перпендикуляр и на нём отложим вверх отрезок, равный трём единицам. Полученная точка M и будет искомой.

Из сказанного выше ясно, что мы могли бы найти точку M и другим способом. Именно: отложим по оси x-ов отрезок, равный 1, затем по оси y-ов отрезок, равный 3, и из полученных точек проведём прямые, параллельные осям. Точка пересечения этих прямых даст опять точку M.

2) Пусть координаты точки будут $\left(-2, 2\frac{1}{2}\right)$. Очевидно, что здесь абсциссу (-2) придётся откладывать влево от точки O, а ординату $\left(2\frac{1}{2}\right)$ — вверх. Полученная точка $M'\left(-2, 2\frac{1}{2}\right)$ и будет искомой.

3) Если координаты точки будут $\left(-2\frac{1}{2}, -3\right)$, то абсциссу придётся откладывать влево, а ординату — вниз. Получим точку $M''\left(-2\frac{1}{2}, -3\right)$.

4) Наконец, по координатам $\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$ получим точку $M'''\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$.

Мы видим, что координаты точки имеют тот или иной знак, т. е. будут положительны или отрицательны, смотря по тому, в каком *квадранте* находится точка. Мы можем представить это в следующей таблице, считая первым по порядку правый верхний квадрант и ведя от него счёт против движения часовой стрелки:

Квадрант	Абсцисса x	Ордината y
1-й	+	+
2-й	−	+
3-й	−	−
4-й	+	−

Упражнения.

Указать на чертеже точки по следующим координатам:

55. (2,3), (3, 2), (2, −3), (−3, 2), (−3, −2).

56. $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$, $\left(0, -2\frac{1}{2}\right)$, $\left(3\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-3\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 0)$.

II. Прямая и обратная пропорциональность

29. Прямая пропорциональная зависимость. Каждый из опыта знает, что если объём воды увеличится (или уменьшится) в каком-нибудь отношении, то и масса её увеличится (или уменьшится) в том же отношении. Например, 1 л воды имеет массу 1 кг, 2 л воды имеют массу 2 кг, $2\frac{1}{2}$ л воды имеют массу $2\frac{1}{2}$ кг и т. п. (предполагается, конечно, что все прочие условия, влияющие на массу воды, остаются неизменными: например, вода берётся одинаково чистая, при одной и той же температуре и пр.). Такая зависимость между объёмом воды и её массой называется *пропорциональной* зависимостью. В арифметике говорят, что две величины находятся между собой в пропорциональной зависимости, или пропорциональны друг другу, *если с увеличением (или с уменьшением) одной из них в каком-нибудь отношении другая тоже увеличивается (или уменьшается) в таком же отношении*. Так, стоимость товара, продаваемого по массе, пропорциональна его массе; плата рабочим пропорциональна их числу (при одинаковых прочих условиях); величина дроби пропорциональна её числителю при неизменном знаменателе; площадь прямоугольника пропорциональна его основанию при неизменной высоте и пропорциональна его высоте при неизменном основании и т. п.

Пусть мы имеем две какие-нибудь пропорциональные величины (например, массу товара и его стоимость) и положим, что когда одна из них равна единице одной величины, другая будет равна k единицам этой другой величины (например, когда масса товара равна 1 кг, стоимость его, положим, будет 100 руб.). Если теперь допустим, что первая величина сделается равной x единицам, то тогда другая величина изменится и сделается равной y единицам (например, если товара будет взято не 1 кг, а 3 кг, то стоимость его окажется не 100 руб., а 300 руб.). Так как взятые нами величины пропорциональны, то число y должно быть больше или меньше числа k в таком отношении, в каком число x больше или меньше 1. Значит, мы будем иметь пропорцию:

$$y : k = x : 1,$$

из которой найдём:

$$y = kx.$$

30. Общее определение пропорциональной зависимости. Дадим следующее общее определение пропорциональной зависимости,

Две величины называются пропорциональными, если зависимость между ними может быть выражена формулой: $y = kx$, в которой x и y — числа, выражающие соответствующие друг другу значения взятых величин, а k — постоянное число (равное тому частному значению y, которое соответствует значению $x = 1$). Это постоянное число называется *коэффициентом пропорциональности данных величин.*

Данное определение отличается от арифметического тем, что коэффициент пропорциональности k может быть отрицательным числом. В этом последнем случае знаки значений аргумента и функции будут различны.

Как известно из геометрии, длина C окружности радиуса R выражается формулой: $C = 2\pi R$, в которой R и C — переменные величины, а 2π — постоянное число, поэтому мы можем сказать, что длина окружности пропорциональна её радиусу.

31. Обратная пропорциональная зависимость. Может случиться, что две переменные величины зависят одна от другой так, что с увеличением одной из них другая по абсолютной величине уменьшается, и притом уменьшается в таком же отношении, в каком первая увеличивается. Такие величины называются в арифметике *обратно пропорциональными* (а величины, просто пропорциональные, называются иногда *прямо пропорциональными*). например, число часов, в течение которого поезд железной дороги проходит весь путь от Москвы до Санкт-Петербурга, обратно пропорционально средней скорости движения этого поезда, так как с увеличением скорости в $1\frac{1}{2}$ раза, в 2 раза, ..., вообще в некотором отношении, число часов, в течение которого поезд пройдёт расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга, уменьшится в $1\frac{1}{2}$ раза, в 2 раза, ..., вообще в том же отношении, в каком скорость увеличилась. Подобно этому, масса товара, который можно купить на данную сумму денег, например, на 1000 руб., обратно пропорциональна цене килограмма этого товара; время, в течение которого выполняется рабочими заданная им работа, обратно пропорционально числу этих рабочих (конечно, при условии, что все рабочие работают одинаково успешно); величина дроби обратно пропорциональна её знаменателю (при постоянном числителе) и т. п.

Замечание. Для того чтобы две зависящие друг от друга величины были пропорциональны (прямо или обратно), недостаточно только того, чтобы с увеличением одной величины другая тоже увеличивалась (для прямой пропорциональности) или уменьшалась (для обратной пропорциональности). Например, если какое-нибудь слагаемое увеличится, то и сумма увеличится; но было бы ошибочно сказать, что сумма пропорциональна этому слагаемому, так как если увеличим слагаемое, например, в 3 раза, то сумма хотя и увеличится, но не в 3 раза. Подобно этому, нельзя, например, сказать, что разность обратно пропорциональна вычитаемому, так как если увеличится вычитаемое, например, в 2 раза, то разность хотя и уменьшится, но не в 2 раза. Нужно, чтобы увеличение или уменьшение обеих величин происходило в одинаковом отношении.

Возьмём какие-нибудь две обратно пропорциональные величины и предположим, что когда одна из них равна единице, другая будет равна k. Если теперь допустим, что эти величины изменились, причём первая сделалась равной x, а вторая y, то число y должно оказаться больше или меньше числа k в таком отношении, в каком число x меньше или больше 1, т. е., другими словами, в таком отношении, в каком 1 больше или меньше x. Значит, мы будем иметь пропорцию:

$$y : k = 1 : x, \quad \text{откуда} \quad yx = k.$$

32. Общее определение обратной пропорциональной зависимости. *Две величины называются обратно пропорциональными, если произведение численного значения одной из них на соответствующее численное значение другой равняется постоянному числу.*

Заметим, что данное в настоящем параграфе определение от арифметического отличается тем, что постоянное число k может быть как положительным, так и отрицательным. В последнем случае знаки значений аргумента и функции будут различны.

Формула $yx = k$ равносильна формуле $y = \frac{k}{x}$, которую словесно можно выразить так:

Если две величины обратно пропорциональны, то численное значение одной из них равно некоторому постоянному числу, делённому на соответствующее численное значение другой величины.

Упражнения.

57. В какой зависимости находятся при равномерном движении:

а) путь, проходимый в данное время, и скорость движения;

б) время, в течение которого проходится данный путь, и скорость движения;

в) путь и время, в течение которого он проходится (при данной скорости)?

Замечание. Эти зависимости легко усматриваются из формулы равномерного движения: $s = vt$, где s — путь, v — скорость движения и t — время, в течение которого пройден путь.

58. В какой зависимости находятся:

а) площадь прямоугольника и его основание (при неизменной высоте);

б) площадь и высота (при неизменном основании);

в) основание и высота (при неизменной площади)?

Замечание. Эти зависимости можно вывести из формулы, определяющей площадь прямоугольника: $p = bh$, где p — площадь, b — основание и h — высота.

59. Будут ли пропорциональны друг другу следующие пары переменных величин:

а) дуга окружности и центральный угол, опирающийся на неё;

б) хорда и центральный угол, опирающийся на неё;

в) длина окружности и её радиус;

г) площадь квадрата и его сторона;

д) площадь круга и его радиус?

33. График прямой пропорциональной зависимости. Докажем, что график функции $y = kx$ есть прямая линия. Для простоты ограничимся случаем положительного k.

Для $x = 0$ имеем $y = k \cdot 0 = 0$; значит, точка, обе координаты которой равны нулю, т. е. начало координат, лежит на искомом графике (см. рис. 5).

Для $x = 1$ имеем $y = kx = k$. Точку с абсциссой 1 и ординатой k обозначим через N. Эта точка лежит на нашем графике.

Докажем, что каждая точка прямой ON лежит на нашем графике. Другими словами, докажем, что абсцисса x и ордината y любой точки M прямой ON связаны между собой соотношением:

$$y = kx.$$

Возьмём произвольную точку M прямой ON. Проведём через M прямую MP, параллельную оси ординат. Из подобия треугольников OPM и OQN следует:

$$PM : OP = QN : OQ.$$

Но

$$OQ = 1, \quad \text{а} \quad QN = k,$$

поэтому

$$PM : QP = k, \quad PM = k \cdot OP.$$

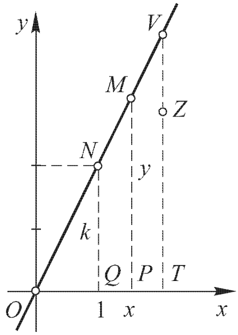


Рис. 5

Так как PM есть ордината, OP — абсцисса точки M, то наше утверждение доказано: каждая точка прямой ON лежит на графике функции $y = kx$. Остаётся доказать, что нет ни одной точки графика, не лежащей на прямой ON. Но если бы такая точка Z была, то, проведя через неё прямую TZ параллельно оси y-ов и беря точку пересечения V прямой TZ с прямой ON, мы получили бы противоречие. В самом деле, так как точка V, по доказанному, также лежит на нашем графике, то одной и той же абсциссе OT соответствовали бы две ординаты графика, а именно: TZ и TV, тогда как абсциссе OT соответствует в действительности единственная ордината TV, равная $k \cdot OT$.

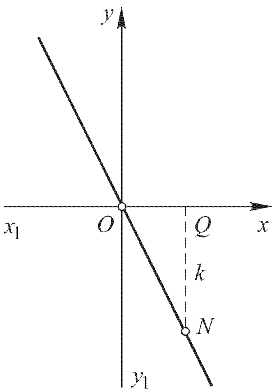


Рис. 5а

Итак, *график прямой пропорциональной зависимости* ($y = kx$) *есть прямая, проходящая через начало координат и через точку* N, *у которой абсцисса есть 1, а ордината равна коэффициенту пропорциональности* (на рис. 5: $k = 2$).

Замечание. Мы рассматривали график функции $y = kx$ лишь для случая положительного k. Все наши рассуждения, однако, сохраняют силу и для отрицательного k, только прямая, являющаяся графиком функции $y = kx$, в случае отрицательного k будет лежать в углах $X'OY$ и XOY' (т. е. во втором и четвёртом квадрантах); в самом деле, при отрицательном k точка N с координатами $(1, k)$ лежит в четвёртом квадранте, а искомый график есть прямая ON (см. рис. 5а).

34. Изменение положения прямой при изменении коэффициента пропорциональности. Построим на одном и том же рисунке 6 прямые, изображающие функции:

$$y = \frac{1}{2}x; \quad y = x; \quad y = 2x,$$

у которых коэффициенты положительны к притом возрастают. Из рисунка мы видим, что по мере возрастания коэффициента пропорциональности прямая отклоняется все более и более от оси x-ов, приближаясь к оси y-ов. Таким образом, коэффициент k в функции $y = kx$ характеризует собой угол, составленный прямой с полуосью OX; поэтому число k называется также *угловым коэффициентом* прямой, изображающей графически функцию $y = kx$. Так как из этого соотношения видно, что $k = \frac{y}{x}$, то можно сказать, что угловой коэффициент равен отношению какого-нибудь значения функции (какой-нибудь ординаты) к соответствующему значению аргумента (к соответствующей абсциссе) (см. рис. 7):

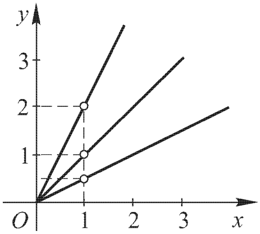


Рис. 6

$$k = \frac{MA}{OA} = \frac{M'A'}{OA'} = \ldots = \operatorname{tg}\alpha.$$

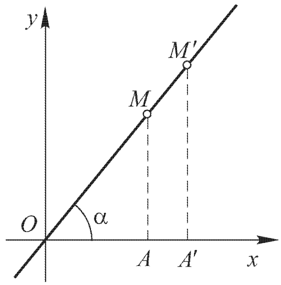


Рис. 7

Отсюда видно, что k есть тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси абсцисс (как известно из тригонометрии, отношение одного катета к другому катету равняется *тангенсу* угла α, противолежащего первому катету).

Полезно заметить, что если $k = 1$, т. е. если функция имеет вид $y = x$, то прямая, изображающая её, есть биссектриса прямого угла XOY (тогда треугольник OAM — равнобедренный и $\angle\alpha = 45°$). Если $k = 0$, т. е. если функция имеет вид $y = 0$, то прямая сливается с осью OX.

35. График обратной пропорциональности. Такая пропорциональность выражается, как мы видели, формулой:

$$xy = k, \quad \text{или} \quad y = \frac{k}{x}.$$

Построим график для частного случая, когда $k = 6$, т. е. когда функция будет $y = \frac{6}{x}$.

Составим таблицу значений этой функции для положительных значений аргумента; например, такую:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y	6	3	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$	…

Нанеся значения, указанные в таблице, на график и обведя все полученные точки кривой (от руки или с помощью особой чертёжной линейки, называемой *лекалом*), мы получим график обратной пропорциональной зависимости $y = \dfrac{6}{x}$ (см. рис. 8).

Обратим внимание на следующие особенности этого графика: при неограниченном увеличении абсциссы x ($x = 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots$) ордината кривой всё уменьшается, приближаясь к нулю, так что кривая, по мере её продолжения направо, всё ближе и ближе подходит к оси x-ов, но никогда её достигнуть не может $\left(\text{дробь } \dfrac{6}{x} \text{ никогда не может сделаться равной нулю}\right)$. Равным образом, если для x будем брать дроби $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$ и т. д., всё более и более приближающиеся к нулю, то y будет всё более и более возрастать ($y = 12,\ 24,\ 48,\ \ldots$), так что ветвь кривой при продолжении её налево неограниченно поднимается вверх, приближаясь всё более и более к оси y-ов, но достигнуть её никогда не может $\left(\text{при } x = 0 \text{ дробь } \dfrac{6}{x} \text{ перестаёт существовать}\right)$.

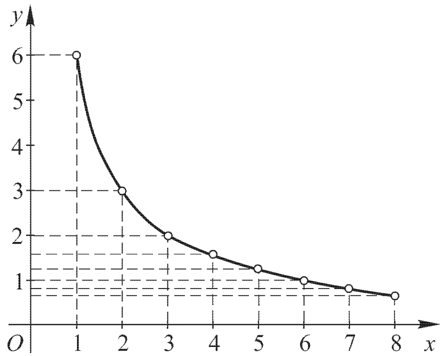


Рис. 8

Рисунок 9, сделанный в более крупном масштабе, чем предыдущий, представляет три графика функции $y = \dfrac{k}{x}$ при $k = 2;\ 1;\ \dfrac{1}{2}$. Они имеют

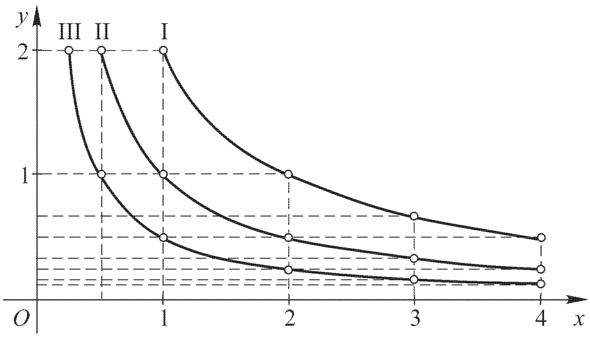


Рис. 9

те же особенности, что и график предыдущего рисунка, отличаясь друг от друга только большей или меньшей вдавленностью к вершине прямого угла.

График функции $y = \frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. Пусть $k > 0$. Тогда положительным значениям x соответствуют положительные значения y, и мы получим точки гиперболы, лежащие в первом квадранте. При отрицательных значениях x получим точки гиперболы, лежащие в третьем квадранте. Так как значению $x = 0$ никакого значения y не соответствует, то на оси ординат точек гиперболы нет; поэтому вся кривая распадается на две ветви, из которых одна лежит в первом, а другая — в третьем квадранте.

Пусть $k < 0$. Тогда одна ветвь гиперболы будет лежать во втором квадранте (та, которая состоит из точек с отрицательными абсциссами), а вторая — в четвёртом квадранте.

Итак, *гипербола* $y = \frac{k}{x}$ *есть кривая, состоящая из двух ветвей; при положительном* k *эти ветви лежат в первом и третьем квадрантах, а при отрицательном* k *— во втором и в четвёртом.*

Упражнения.

60. Предполагая скорость v равномерного движения неизменной, выразить графически путь s как функцию времени t (именно: $s = vt$), принимая t за переменную абсциссу, а s — за переменную ординату.

61. При свободном падении тела скорость v, выраженная в метрах в секунду, может быть выражена формулой: $v = gt$, где t означает число секунд, протекшее от начала падения, а g есть ускорение при падении, равное 9,8 м/с^2.

Выразить графически v как функцию времени t (принимая сантиметр за единицу абсциссы t и миллиметр за единицу ординаты v).

62. Построить на одном чертеже графики функций: $y = \frac{1}{3}x$; $y = x$; $y = 3x$.

63. Построить графики функций: $y = \frac{4}{x}$; $y = \frac{1}{3x}$.

64. Построить график функции $y = \frac{2{,}1}{x}$, давая x значения: 5; 4; 3; 2; 1; 0,7; 0,5; 0,4 и аналогичные отрицательные значения (за единицу принять сантиметр). По начерченному графику определить величину y, если: 1) $x = -2{,}2$ и 2) $x = 3{,}4$.

III. Линейная функция

36. Двучлен первой степени. Задача. Длина железного стержня при температуре 0 °C составляет 1 м; определить, какая длина l окажется у этого стержня, когда он будет нагрет до t °C, если известно, что с каждым градусом нагревания длина стержня увеличивается на 0,000012 той длины, которую стержень имеет при 0 °C.

При нагревании на 1 °C длина стержня, равная при 0 °C одному метру (100 см), должна увеличиваться на $100 \times 0{,}000012$ см, т. е. на 0,0012 см. Удлинение при нагревании на t °C должно быть в t раз больше, чем при нагревании на 1 °C, поэтому всё удлинение будет $0{,}0012t$ см. Прибавив к этому удлинению начальную длину стержня (при 0 °C), т. е. 100 см, получим:

$$l = 0{,}0012t + 100.$$

Нетрудно видеть, что это та же самая формула, которую мы получили уже раньше (см. § 26), только длина l выражена теперь не в метрах, а в сантиметрах.

Если температуру t, до которой нагрет стержень, будем рассматривать как независимую переменную, то длину l мы можем рассматривать как функцию температуры. Обозначая по общепринятому правилу независимую переменную буквой x, а функцию — буквой y, мы можем зависимость между длиной стержня и его температурой выразить такой формулой:

$$y = 0{,}0012x + 100,$$

или в более общем виде:

$$y = kx + b,$$

если буквами k и b обозначим постоянные числа, входящие в нашу формулу.

Алгебраическое выражение вида $kx + b$, в котором k и b — какие-нибудь постоянные числа, а x — независимая переменная, называется *двучленом первой степени* (относительно x). Такие функции встречаются при решении многих задач и вопросов.

Корнем двучлена называется то значение аргумента x, при котором двучлен обращается в нуль. Чтобы найти такое значение, надо приравнять двучлен нулю и решить полученное уравнение. Так, корень двучлена $1\frac{1}{2}x + 2$ получится, если решим уравнение:

$$1\frac{1}{2}x + 2 = 0,$$

$$1\frac{1}{2}x = -2, \quad x = -2 : \frac{3}{2} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$$

37. График двучлена первой степени. Возьмём какой-нибудь частный случай двучлена, например, такой:

$$y = 1\frac{1}{2}x + 2.$$

Отбросим пока число 2 и возьмём более простую функцию: $y = 1\frac{1}{2}x$. Функция эта выражает пропорциональную зависимость между y и x и потому графически изобразится, как мы знаем, прямой (см. рис. 10), проходящей через начало координат и через точку M, у которой абсцисса есть 1, а ордината $1\frac{1}{2}$.

Если аргументу x будем давать не только положительные значения, но и отрицательные, то прямая эта продолжится вниз, проходя через точку M', у которой абсцисса есть -1 и ордината $-1\frac{1}{2}$. Если теперь восстановим отброшенное прежде число $+2$, т. е. возьмём функцию $y = 1\frac{1}{2}x + 2$, то увидим, что все ординаты этой функции будут больше соответственных ординат функции $y = 1\frac{1}{2}x$ на 2 единицы. Значит, график функции $y = 1\frac{1}{2}x + 2$ мы получим из графика функции $y = 1\frac{1}{2}x$, если прямую линию MM' перенесём параллельно самой себе вверх на 2 единицы. Для этого отложим на оси OY отрезок $OA = 2$ и через точку A проведём прямую, параллельную MM'. Эта прямая и будет служить графиком функции $y = 1\frac{1}{2}x + 2$. Абсцисса OD точки, в которой эта прямая пересекается с осью x-ов, равна корню двучлена, так как при этой абсциссе ордината y (т. е. величина самого двучлена) равна нулю $\left(\text{на нашем рисунке } OD = -1\frac{1}{3}\right)$.

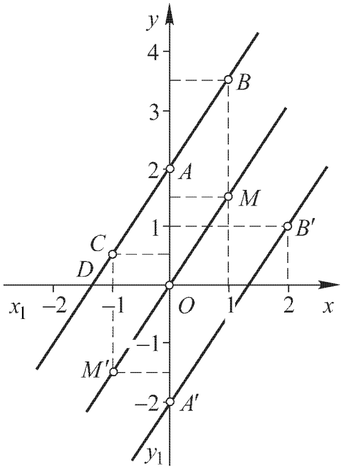


Рис. 10

Если возьмём функцию

$$y = 1\frac{1}{2}x - 2,$$

то отрезок OA надо отложить вниз от точки O, так как тогда все ординаты функции $y = 1\frac{1}{2}x$ пришлось бы уменьшить на 2 единицы. Мы получим тогда прямую $A'B'$, параллельную MM' и отсекающую от оси y-ов отрезок $OA' = -2$. Корень этого двучлена равен абсциссе точки, в которой прямая $A'B'$ пересекается с осью x-ов $\left(\text{на чертеже эта абсцисса равна } +1\frac{1}{3}\right.$

Если в функции $y = kx + b$ коэффициент k будет число отрицательное $\left(\text{например, } y = -1\frac{1}{2}x + 2\right)$, то вспомогательная прямая, выражающая график функции $y = kx$, пройдёт через углы X_1OY и XOY_1, сообразно чему изменится и направление прямой BC.

Таким образом:

График двучлена $y = kx + b$ есть прямая линия, параллельная прямой, изображающей функцию $y = kx$, и отсекающая от оси y-ов отрезок, равный b.

Вследствие того что график функции $y = kx + b$ есть прямая линия, сама эта функция называется *линейной*.

Для краткости речи в дальнейшем изложении, вместо того чтобы говорить: «прямая, изображающая функцию $y = kx + b$», мы будем говорить короче: «прямая $y = kx + b$».

Угол, образуемый прямой $y = kx + b$ с осью x-ов, равен углу, составленному с осью x-ов прямой $y = kx$; следовательно, этот угол зависит только от величины коэффициента k, и поэтому коэффициент этот в общем виде двучлена $kx + b$ называется *угловым коэффициентом*.

Число b в двучлене $kx + b$ есть так называемая *начальная ордината*, соответствующая начальному значению $x = 0$; она представляет собой отрезок оси y-ов, отсекаемый прямой, изображающей двучлен.

Коэффициент k, как мы видели (см. § 34), равен тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси x-ов прямой $y = kx$ (и, следовательно, параллельной ей прямой $y = kx + b$).

38. Изменение двучлена $y = kx + b$ с изменением x. Прямая $y = kx$, параллельная прямой $y = kx + b$, проходит через углы XOY и X_1OY_1, если $k > 0$, и через углы X_1OY и XOY_1, если $k < 0$.

Следовательно, в первом случае прямая $y = kx + b$, если её рассматривать в направлении слева направо, поднимается вверх (см. рис. 11), а во втором случае она опускается вниз (см. рис. 12).

Если примем во внимание, что отрицательные числа тем больше, чем меньше их абсолютные величины, то мы можем сказать (см. рис. 12), что это возрастание или убывание *неограниченно* и притом *равномерно,* т. е. с увеличением x на одно и то же число функция возрастает или убывает также на одно и то же число.

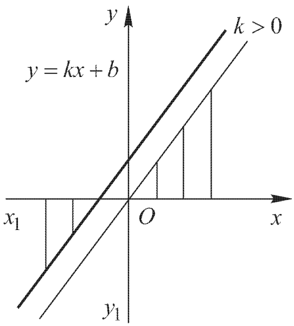


Рис. 11

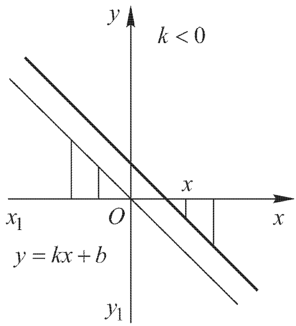


Рис. 12

39. Замечания. 1. Если угловой коэффициент k равен нулю, то двучлен обращается в одночлен $y = b$. Это значит, что в графическом изображении должна получиться такая прямая, у которой все точки имеют одну и ту же ординату, равную b, а абсцисса может быть какая угодно. Такая линия, очевидно, есть прямая, параллельная оси x-ов и отсекающая от оси y-ов отрезок, равный b. Значит, при b положительном эта прямая расположится над осью x-ов, а при b отрицательном — под нею (см. рис. 13); и в том и другом случае при изменении x функция остаётся постоянной (равной b).

В частности, если при $k = 0$ ещё $b = 0$, т. е. если линейная функция будет $y = 0$, то график функции будет ось x-ов (для всякой точки этой оси ордината $y = 0$, а абсцисса произвольная).

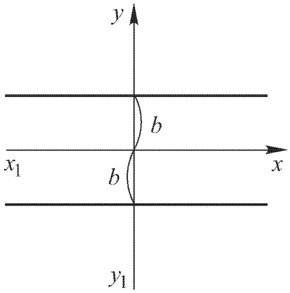


Рис. 13

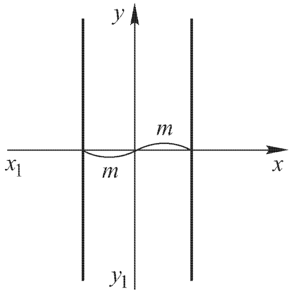


Рис. 14

2. Если какая-нибудь прямая параллельна оси y-ов (см. рис. 14), то ординаты точек этой прямой могут иметь произвольные значения, абсциссы же для всех точек одинаковы, а именно: равны положительному или отрицательному отрезку m, который отсекается прямой от оси x-ов. Следовательно, такую прямую можно выразить уравнением так: $x = m$ (ордината y, не входящая в уравнение, остаётся произвольной). В частности, если $m = 0$, то получается уравнение $x = 0$, выражающее, что абсцисса всякой точки есть 0, а ордината — какая угодно. Такая прямая есть ось y-ов.

40. Построение прямой $y = kx + b$ по двум точкам. Чтобы построить прямую $y = kx + b$, можно было бы сначала построить вспомогательную прямую, изображающую функцию $y = kx$, и потом провести параллельную прямую, отсекающую от оси y-ов отрезок b. Но проще построить прямую $y = kx + b$, найдя предварительно какие-нибудь две точки этой прямой. Положим, например, надо построить прямую:

$$y = \frac{1}{2}x - 3.$$

Для этого найдём координаты каких-нибудь двух точек, принадлежащих искомой прямой, например, координаты тех точек, в которых прямая пересекается с осями координат. Для нахождения их положим в данном уравнении $x = 0$ и определим соответствующее значение y, а затем положим $y = 0$ и определим x; тогда найдём:

1) если $x = 0$, то $y = -3$;

2) если $y = 0$, то $\frac{1}{2}x - 3 = 0$ и $x = 6$.

Точка с абсциссой 0 и ординатой -3 есть точка P (см. рис. 15), точка с абсциссой 6 и ординатой 0 есть точка Q; значит, искомый график будет прямая PQ, проходящая через эти две точки.

Если точки пересечения с координатными осями (или одна из них) не помещаются в пределах чертежа, то можно подыскать другие точки, которые помещались бы на чертеже [1]).

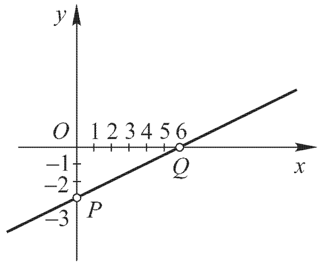


Рис. 15

Упражнения.

65. Если x есть число градусов, указываемое термометром Цельсия, а y — число градусов, указываемое при тех же температурных условиях термометром Фаренгейта, то зависимость между этими числами может быть выражена такой формулой:

$$y = \frac{9}{5}x + 32.$$

Построить график этой функции, принимая x за абсциссу, а y — за ординату (за единицу абсцисс можно принимать сантиметр или полсантиметра, а за единицу ординат 1 мм).

66. Каждый рубль вклада, отданного под $p\%$, приносит в год дохода $\frac{p}{100}$ руб., а в x лет доход составляет $\frac{p}{100} \cdot x$ (руб.); следовательно, через x лет каждый рубль обратится в $1 + \frac{p}{100} \cdot x$ (руб.). Таким образом, обозначая буквой y величину «наращённого рубля», мы можем написать формулу:

$$y = 1 + \frac{p}{100} \cdot x.$$

Построить график этой функции, принимая $p = 3$ (за единицу абсцисс и ординат можно взять 2 см).

Построить прямые, изображающие функции:

67. $y = 1 + x$; $y = 2x - 3$; $y = \frac{1}{2}x + 3$.

68. $y = -\frac{1}{2}x + 3$; $y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{8}$; $y = 0{,}7x + 2$.

69. Построить прямые, выражаемые уравнениями:

$$3y + x = 0; \quad x + y + 5 = 0; \quad 4x + 3y = 18.$$

70. Проверить графически, что три прямые, выражаемые уравнениями:

$$2x + 3y = 13; \quad 5x - y = 7; \quad x - 4y + 10 = 0,$$

пересекаются в одной точке.

---

[1]) Для уменьшения погрешности при черчении прямой желательно, чтобы две точки, через которые проводится прямая, отстояли друг от друга по возможности дальше; тогда некоторая неточность в положении линейки (избежать её очень трудно) меньше отразится на направлении проводимой прямой.

Глава 3

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

I. Дополнительные сведения о квадратных уравнениях

41. Формула корней квадратного уравнения. В первой части курса были выведены следующие формулы для определения корней неполного и полного квадратных уравнений:

1) $ax^2 = 0$; очевидно, оба корня уравнения равны нулю.

2) $ax^2 + c = 0$; формула для корней будет $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

3) $ax^2 + bx = 0$; тогда $x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

4) $x^2 + px + q = 0$; формула корней даёт:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \text{или:} \quad x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

5) Наконец, общая формула для корней полного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ будет: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Последняя формула является наиболее общей; из неё как частные случаи получаются все остальные. Так, полагая в этой формуле $a = 1$, получаем случай (4) (в этом случае $b = p$ и $c = q$; полагая $c = 0$, получаем случай (3); при $b = 0$ будем иметь случай (2) и, наконец, первый случай получим, давая в общей формуле значения $b = c = 0$.

42. Дискриминант. Рассмотрим различные случаи, которые могут встретиться при решении квадратного уравнения в зависимости от числового значения коэффициентов.

1. $b^2 - 4ac > 0$. В этом случае выражение под корнем положительно. Квадратный корень из него имеет два значения, и, следовательно, уравнение имеет два различных вещественных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. $b^2 - 4ac = 0$. В этом случае второй член числителя равен нулю и уравнение имеет два равных корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3. $b^2 - 4ac < 0$. Оба корня — мнимые.

Мы видим, таким образом, что квадратное уравнение имеет вещественные (различные или равные) или мнимые корни, в зависимости от того, будет ли составленное из коэффициентов уравнения подкоренное выражение $b^2 - 4ac$ больше, равно или меньше нуля. Ввиду особого значения этого выражения оно носит специальное название *дискриминанта уравнения*. (Дискриминант — значит в переводе различитель.)

43. Свойства корней квадратного уравнения (теорема Виета). Возьмём формулу корней квадратного уравнения, у которого коэффициент при x^2 равен единице, т. е. уравнения вида $x^2 + px + q = 0$:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Если сложим почленно эти равенства, то радикалы взаимно уничтожатся и мы получим:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p.$$

Если те же равенства почленно перемножим, то получим (произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел):

$$x_1x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,\right)^2.$$

Каково бы ни было подкоренное число, всегда

$$\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Следовательно:

$$x_1x_2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Таким образом:

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение атих корней равно свободному члену.

Теперь возьмём квадратное уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$. Разделив все его члены на a, мы приведём это уравнение к только что рассмотренному виду:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

следовательно, для неприведённого полного уравнения мы должны иметь:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Следствия. 1) Пользуясь этими свойствами, мы легко можем *составить квадратное уравнение, у которого корнями были бы данные числа.*

Пусть, например, надо составить уравнение, у которого корни были бы числа 2 и 3. Тогда из равенств $2 + 3 = -p$ и $2 \cdot 3 = q$ находим: $p = -5$ и $q = 6$; следовательно, уравнение будет: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Подобно этому найдём, что 3 и -7 будут корни уравнения $x^2 - [3 + (-7)]x + 3(-7) = 0$, т. е. $x^2 + 4x - 21 = 0$; числа 3 и 0 будут корни уравнения $x^2 - 3x = 0$.

2) При помощи тех же свойств мы можем, не решая квадратного уравнения, *определить знаки его корней,* если эти корни вещественные. Пусть, например, имеем уравнение $x^2 + 8x + 12 = 0$. Так как в этом примере выражение $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, т. е. $4^2 - 12$, есть число положительное, то оба корня вещественные. Обращая внимание на свободный член, видим, что он имеет знак $+$; значит, произведение корней должно быть положительным числом, т. е. оба корня имеют одинаковые знаки. Эти знаки должны быть минусы, так как сумма корней отрицательна (она равна -8). Уравнение $x^2 + 8x - 12 = 0$ имеет корни с разными знаками (потому что их произведение отрицательно), причём отрицательный корень имеет бóльшую абсолютную величину (потому что их сумма отрицательна), и т. п.

Упражнения.

Чему равны сумма и произведение корней каждого из следующих уравнений:

71. $x^2 - 8x - 9 = 0$; $\quad x^2 - 1 = -x$; $\quad x^2 + 2x = x$; $\quad 6 - 5x + 3x^3 = 0$.

72. $\frac{1}{2}x^2 = 2x + 1$; $\quad x^2 - 7x = 0$.

Проверить теорему Виета для следующих уравнений:

73. $x^2 - 6x + 9 = 0$; $\quad 9x^2 - 30x + 25 = 0$.

74. $x^2 + 16 = 0$; $\quad x^2 + 4x + 7 = 0$.

75. Один корень квадратного уравнения с рациональными коэффициентами равен $3 + \sqrt{2}$; какой будет другой корень?

Составить квадратные уравнения, у которых корнями были бы следующие числа:

76. 8 и 2; 8 и -2; -8 и 2; -8 и -2.

77. 5 и 0; -5 и 0; 4 и 4; -4 и -4.

44. Трёхчлен второй степени. Выражение $ax^2 + bx + c$, в котором x означает независимую переменную, а a, b и c — какие-нибудь данные постоянные числа ($a \neq 0$), называется *квадратичной функцией* или *трёхчленом второй степени*. Различие между таким трёхчленом и левой частью уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ состоит в том, что в уравнении буква x означает только те числа, которые удовлетворяют уравнению, тогда как в трёхчлене она означает какое угодно число. Значения x, обращающие трёхчлен в нуль, называются его *корнями*; значит, корни трёхчлена — это корни квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

В частном случае при $a = 1$ трёхчлен принимает вид: $x^2 + px + q$; при $b = 0$ или при $c = 0$ трёхчлен обращается в двучлен $ax^2 + c$ или $ax^2 + bx$.

45. Разложение трёхчлена второй степени. Сначала возьмём трёхчлен $x^2 + px + q$, в котором коэффициент при x^2 есть 1. Решив приведённое уравнение $x^2 + px + q = 0$, мы найдём корни его x_1 и x_2. Как мы сейчас видели: $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

Из этих равенств находим: $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1 x_2$.

Подставим в трёхчлен на место p и q эти выражения и затем преобразуем полученный многочлен:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 =$$
$$= (x^2 - x_1 x) - (x_2 x - x_1 x_2) = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Таким образом:

Трёхчлен $x_2 + px + q$ разлагается на два множителя, из которых первый равен разности между x и одним корнем трёхчлена, а второй равен разности между x и другим корнем трёхчлена.

Примеры.

1) $x^2 + 5x - 14 = 0; \quad x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 14} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}.$

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 2; \quad x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -7;$$

$$x_2 + 5x - 14 = (x - 2)[x - (-7)] = (x - 2)(x + 7),$$

2) $x^2 - 8x + 5 = 0; \quad x = 4 \pm \sqrt{16 - 5} = 4 \pm \sqrt{11};$

$$x_1 = 4 + \sqrt{11}; \quad x_2 = 4 - \sqrt{11};$$

$$x^2 - 8x + 5 = \left[x - \left(4 + \sqrt{11}\right)\right]\left[x - \left(4 - \sqrt{11}\right)\right] =$$
$$= \left(x - 4 - \sqrt{11}\right)\left(x - 4 + \sqrt{11}\right).$$

3) $x^2+px+q=0; \quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\,;$

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\,; \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\,;$$

$$x^2+px+q=\left[x-\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\ \right)\right]\left[x-\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\ \right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\ \right).$$

Теперь возьмём трёхчлен ax^2+bx+c, в котором коэффициент при x^2 есть какое угодно число, кроме нуля. Этот трёхчлен можно представить так:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Выражение, стоящее внутри скобок, есть трёхчлен вида x^2+px+q. Его корни x_1 и x_2 будут те же самые, что у трёхчлена ax^2+bx+c. Найдя их, мы можем, по доказанному в предыдущем параграфе, разложить этот трёхчлен так:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2).$$

Следовательно: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Таким образом, разложение трёхчлена ax^2+bx+c отличается от разложения трёхчлена x^2+px+q только дополнительным множителем a.

Примеры.

1) Трёхчлен $2x^2-2x-12$, корни которого 3 и -2, можно разложить так: $2(x-3)(x+2)$.

2) Трёхчлен $3x^2+x+1$, корни которого следующие:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{-11}}{6}; \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{-11}}{6},$$

разлагается так:

$$3\left(x-\frac{-1+\sqrt{-11}}{6}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{-11}}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}(6x+1-\sqrt{-11}\,)(6x+1+\sqrt{-11}\,).$$

3) $6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2$. Корни этого трёхчлена следующие:

$$x_1=\frac{b^2}{2a}; \quad x_2=\frac{a^2}{3b}.$$

Поэтому:

$$6abx^2 - (3b^3 + 2a^3)x + a^2b^2 = 6ab\left(x - \frac{b^2}{2a}\right)\left(x - \frac{a^2}{3b}\right) =$$
$$= 6ab\left(\frac{2ax - b^2}{2a}\right)\left(\frac{3bx - a^2}{3b}\right) = (2ax - b^2)(3bx - a^2).$$

4) Сократить дробь:
$$\frac{2a^2 - 2a - 12}{3a^2 + a - 10}.$$

Разложим числитель и знаменатель на множители и затем, если можно, сократим дробь. Так как корни числителя 3 и -2, а корни знаменателя $\frac{5}{3}$ и -2, то дробь представится так:

$$\frac{2(a-3)(a+2)}{3\left(a - \frac{5}{3}\right)(a+2)} = \frac{2a-6}{3a-5}.$$

Следствие. *По данным корням можно составить квадратное уравнение*. Так, уравнение, имеющее корни 3 и -2, будет:

$$(x-3)[x-(-2)] = 0, \quad \text{т. е.} \quad (x-3)(x+2) = 0,$$

что при раскрытии скобок даёт: $x^2 - x - 6 = 0$. Конечно, все члены этого уравнения можно умножить на произвольное число, не зависящее от x (например, на 2), отчего корни не изменятся.

Упражнения.

Разложить на множители:

78. $x^2 - 17x + 70$; $\quad x^2 + 3x - 88$; $\quad 3x^2 - 14x + 8$; $\quad 6x^2 + x - 1$.

79. $20x^2 + 17x - 24$; $\quad x(x+8) - 20$.

Сократить следующие дроби (предварительно разложив числитель и знаменатель каждой дроби на множители):

80. $\dfrac{x^2 + 6x - 91}{x^2 + 8x - 105}$; $\quad \dfrac{2x^2 + 8x - 90}{3x^2 - 36x + 105}$.

81. $\dfrac{x^2 + 3ax + 2a^2 + ab - b^2}{x^2 + 2ax + a^2 - b^2}$.

Разложив на множители следующие трёхчлены, определить, для каких значений x эти трёхчлены будут давать положительные числа и для каких — отрицательные:

82. $x^2 - 6x + 9$; $\quad x^2 - 14x + 45$. **83.** $x^2 - 4x - 5$; $\quad 12 - x - 6x^2$.

84. $-x^2 + x - 12$; $\quad -x^2 - 5x - 6$.

II. График квадратичной функции

46. График функции $y = x^2$. Обратим внимание на следующие особенности функции $y = x^2$:

а) При всяком значении аргумента x функция определена и получает только одно значение. Например, при $x = -10$ значение функции будет $(-10)^2 = 100$, при $x = 1000$ значение функции будет $1000^2 = 1000000$ и т. п.

б) Так как $(-x)^2 = x^2$, то при двух значениях x, отличающихся только знаками, получаются два одинаковых положительных значения y; например, при $x = -2$ и при $x = +2$ значение y будет одно и то же, а именно 4. Отрицательных значений для y никогда не получается.

в) Если абсолютная величина x неограниченно увеличивается, то и y неограниченно увеличивается. Так, если для x будем давать ряд неограниченно возрастающих положительных значений: 1, 2, 3, 4, ... или ряд неограниченно убывающих отрицательных значений: -1, -2, -3, -4, ..., то для y получим ряд неограниченно возрастающих значений: 1, 4, 9, 16, 25, ...

Заметив эти свойства, составим таблицу значений функции $y = x^2$; например, такую:

x	...	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	...
y	...	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	...

Изобразим теперь эти значения на рис. 16 в виде точек, абсциссы которых будут выписанные значения x, а ординаты — соответствующие значения y (на рисунке за единицу длины мы приняли отрезок $O1$); полученные точки соединим кривой. Кривая эта называется *параболой*. Рассмотрим некоторые её свойства.

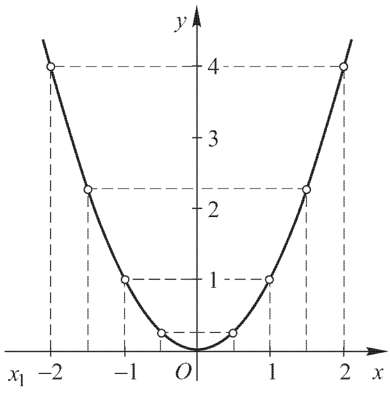


Рис. 16

а) Вся кривая расположена по одну сторону от оси x-ов, а именно — по ту сторону, по какую лежат положительные значения ординат.

б) Парабола разделяется осью y-ов на две части (ветви). Точка O, в которой эти ветви сходятся, называется *вершиной* параболы. Эта точка есть единственная общая точка параболы и оси x-ов.

в) Обе ветви бесконечны, так как x и y могут увеличиваться беспредельно. Ветви поднимаются от оси x-ов неограниченно вверх, удаляясь в то же время неограниченно от оси y-ов вправо и влево.

г) Ось y-ов служит для параболы *осью симметрии*, так что если перегнуть чертёж по этой оси так, чтобы левая половина чертежа упала на правую, то обе ветви совместятся; например, точка с абсциссой -2 и с ординатой 4 совместится с точкой, имеющей абсциссу $+2$ и ту же ординату 4.

47. График функции $y = ax^2$. Предположим сначала, что a есть число положительное. Возьмём, например, такие две функции:

1) $y = 1\frac{1}{2}x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$.

Составим таблицы значений этих функций, например, такие:

1)

x	-2	-1	0	1	2	...
y	6	$1\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	6	...

2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	3	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	...

Нанесём все эти значения на рис. 17 и проведём кривые. Для сравнения мы поместили на том же рисунке (прерывистой линией) ещё график функции: 3) $y = x^2$.

3)

x	-2	-1	0	1	2	...
y	4	1	0	1	4	...

Из рисунка видно, что при одной и той же абсциссе ордината первой кривой в $1\frac{1}{2}$ раза больше, а ордината второй кривой в 3 раза меньше, чем ордината третьей кривой. Эти кривые имеют общий характер: бесконечные ветви, ось симметрии и пр., только при $a > 1$ ветви кривой более приподняты вверх, а при < 1 они более отогнуты книзу, чем у кривой $y = x^2$. Все такие кривые называются также *параболами*.

Предположим теперь, что коэффициент a будет число отрицательное. Пусть, например, $y = -\frac{1}{3}x^2$. Сравнивая эту функцию с функцией $y = +\frac{1}{3}x^2$, замечаем, что при одном и том же значении x обе функции имеют одну и ту же абсолютную величину, но противоположны по знаку. Поэтому на рис. 18 для функции $y = -\frac{1}{3}x^2$ получится такая

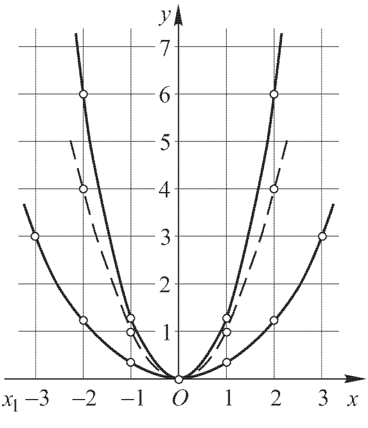


Рис. 17

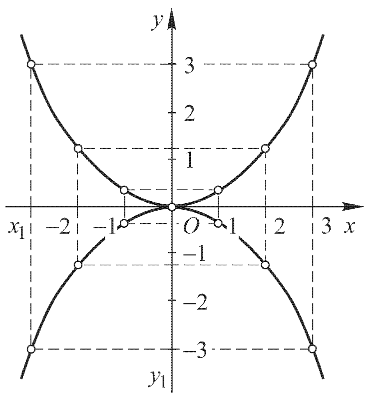


Рис. 18

же парабола, как и для функции $y = +\frac{1}{3}x^2$, только расположенная под осью x-ов симметрично с параболой $y = \frac{1}{3}x^2$. В этом случае все значения функции отрицательны, кроме одного, равного нулю при $x = 0$.

Замечание. Если зависимость между двумя переменными величинами y и x выражается равенством $y = ax^2$, где a — какое-нибудь постоянное число, то можно сказать, что величина y пропорциональна квадрату величины x, так как с увеличением или уменьшением x в 2 раза, в 3 раза и т. д. величина y увеличивается или уменьшается в 4 раза, в 9 раз, в 16 раз и т. д.

например, площадь круга равна πR^2, где R есть радиус круга и π — постоянное число; поэтому можно сказать, что площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса.

48. График функции $y = ax^2 + b$. Пусть мы имеем следующие три функции:

$$1)\ y = \frac{1}{3}x^2; \quad 2)\ y = \frac{1}{3}x^2 + 2; \quad 3)\ y = \frac{1}{3}x^2 - 2.$$

Очевидно, что при одном и том же значении аргумента x ордината второй функции больше, а ордината третьей функции меньше на 2 единицы, чем соответствующая ордината первой функции. Поэтому вторая и третья функции изобразятся графически той же параболой, что и первая функция, только парабола эта должна быть поднята вверх (для второй функции) и опущена вниз (для третьей функции) на 2 единицы длины.

Вообще график функции $y = ax^2 + b$ есть та же парабола, которая изображает функцию $y = ax^2$, только парабола эта должна быть поднята вверх, если $b > 0$, и опущена вниз, если $b < 0$, на b единиц длины.

Упражнения.

85. Начертить при одних и тех же осях и при одной и той же единице длины графики следующих функций:

$$y = 0{,}25x^2; \quad y = 0{,}5x^2; \quad y = 2x^2; \quad y = 0{,}5x^2 + 1; \quad y = 0{,}5x^2 - 1.$$

86. То же для функций $y = x^2$ и $y = 0{,}5x + 1$; определить координаты точки пересечения этих графиков и подставить их в данные уравнения с целью проверки графиков.

49. График трёхчлена второй степени. Сначала мы рассмотрим график такого трёхчлена, который может быть представлен в виде произведения $a(x + m)^2$. Например, возьмём такие две функции:

$$1)\ y = \frac{1}{4}(x + 2)^2 \quad \text{и} \quad 2)\ y = \frac{1}{4}(x - 2)^2.$$

Для сравнения изобразим на том же чертеже ещё параболу:

$$3)\ y = \frac{1}{4}x^2.$$

Предварительно составим таблицу частных значений этих трёх функций; например, такую:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1) $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9	$12\frac{1}{4}$	16
2) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$	$12\frac{1}{4}$	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4
3) $y=\frac{1}{4}x^2$	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9

Нанеся все эти значения на чертёж, получим три графика, изображённые на рис. 19.

Рассматривая этот рисунок, мы замечаем, что кривая 1 есть та же парабола 3, но перенесённая на 2 единицы влево, а кривая 2 есть та же парабола 3, но перенесённая на 2 единицы вправо.

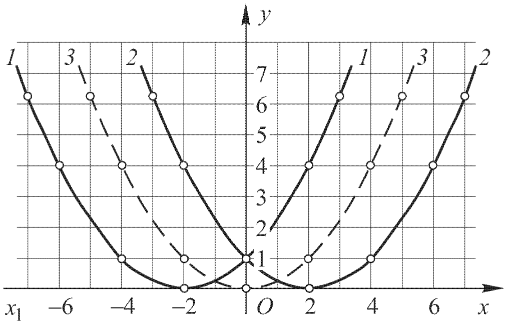


Рис. 19

Обобщая этот вывод, мы можем сказать, что график функции $y = a(x+m)^2$ есть парабола, изображающая функцию $y = ax^2$, только парабола эта перенесена влево, если $m > 0$, и вправо, если $m < 0$, на столько единиц, сколько их заключается в абсолютной величине числа m. Ветви этой параболы направлены вверх, если $a > 0$, как в наших примерах, и вниз, если $a < 0$, например, как у параболы:

$$y = \frac{1}{4}(x+2)^2.$$

Теперь возьмём трёхчлен вида: $y = ax^2 + bx + c$. Рассмотрим, например, такой трёхчлен:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}.$$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\ldots$
y	$2\frac{1}{2}$	0	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$	6	$\ldots$

Построив точки, изображающие помещённые в таблице значения, и проведя через них кривую (кривая 3-я, см. рис. 20), мы получим искомый график. Покажем теперь, что этот график есть та же парабола, которая изображает функцию $y = \frac{1}{2}x^2$ (полученную отбрасыванием в данном трёхчлене второго и третьего членов), только парабола эта пе-

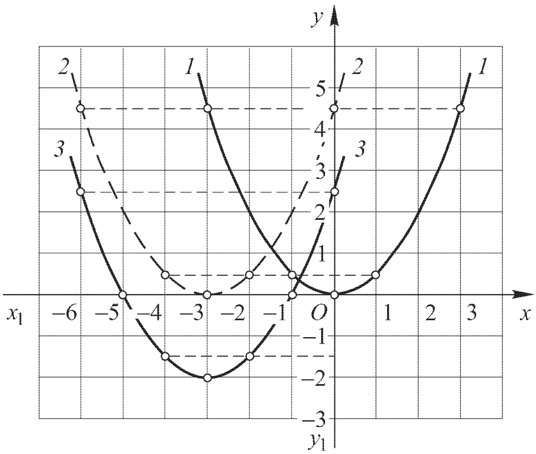


Рис. 20

ренесена в другое место. Для этого преобразуем данный трёхчлен следующим образом. Во-первых, вынесем за скобки коэффициент при x^2 :

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 5);$$

во-вторых, к трёхчлену, стоящему в скобках, добавим два взаимно уничтожающихся члена 9 и -9:

$$\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 5) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9 - 9 + 5);$$

и, в-третьих, сгруппируем члены многочлена в две группы, получим;

$$\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9 - 9 + 5) = \frac{1}{2}[(x^2 + 6x + 9) - (9 - 5)] =$$
$$= \frac{1}{2}[(x + 3)^2 - 4] = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 2.$$

Принимая теперь во внимание примеры, разобранные выше, мы можем поступить так.

Построим параболу, изображающую функцию $y = \frac{1}{2}x^2$ (кривая 1-я, см. рис. 20), затем перенесём её на 3 единицы влево, тогда получим 2-ю параболу, изображающую функцию $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$. Эту параболу перенесём теперь на 2 единицы вниз, тогда получим 3-ю параболу, изображающую данную функцию.

50. Графический способ решения квадратного уравнения. Квадратное уравнение можно графически решить таким способом: построив на миллиметровой бумаге параболу, изображающую трёхчлен, стоящий в левой части уравнения, находим точки пересечения этой параболы с осью x-ов. Абсциссы этих точек и будут корни уравнения, так как при этих абсциссах ординаты, изображающие соответствующие значения трёхчлена, равны нулю.

Примеры.

1) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2} = 0.$

График левой части этого уравнения изображён кривой 3 (см. рис. 20). На нём мы видим, что парабола пересекается с осью x-ов в двух точках, абсциссы которых -1 и -5. Это и будут корни уравнения.

Это можно проверить, решив уравнение посредством общей формулы или путём подстановки.

2) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0.$

Составив таблицу частных значений трёхчлена $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$,

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	...

мы построим параболу (см. рис. 21). Эта парабола не пересекается

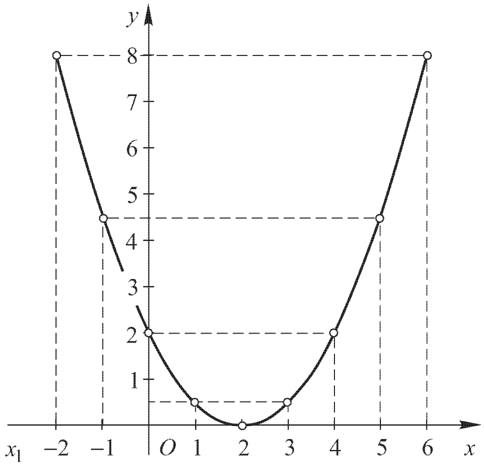


Рис. 21

с осью x-ов, а только её касается в точке с абсциссой 2. Уравнение в этом случае имеет только один корень 2 (точнее, два равных корня).

3) $x^2 - x + 2 = 0$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	14	8	4	2	2	4	8	14	...

Парабола (см. рис. 22) не пересекается и не касается оси x-ов; уравнение не имеет вещественных корней.

Укажем ещё следующий приём графического решения квадратного уравнения. Пусть требуется решить уравнение;

$$x^2 - 1{,}5x - 2 = 0.$$

Представим его так:

$$x^2 = 1{,}5x + 2.$$

Каждая часть этого уравнения, рассматриваемая отдельно, есть некоторая функция от x. Обозначим функцию, выражаемую левой частью уравнения, буквой y_1, а функцию, выражаемую правой частью уравнения, буквой y_2. Первая функция на рис. 23 изобразится параболой, а вторая — прямой. Построив на одном и том же чертеже графики

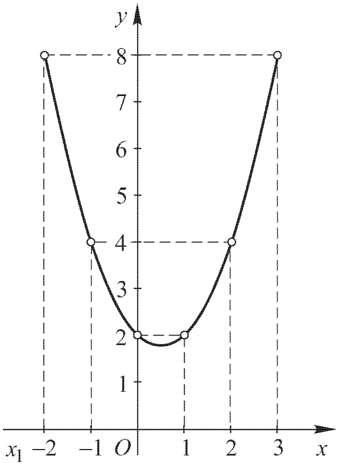


Рис. 22

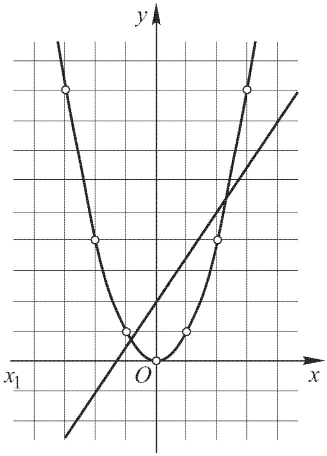


Рис. 23

этих двух функций, мы найдём, что прямая и парабола пересекаются в двух точках, абсциссы которых приблизительно выражаются числами 2,35 и $-0{,}85$. Это и будут приближённые значения корней данного уравнения, так как при каждой из этих абсцисс ординаты y_1, y_2 равны между собой, и, следовательно, $x^2 = 1{,}5x + 2$.

Если случится, что прямая с параболой не пересекается, то уравнение не имеет вещественных корней; если же прямая коснётся параболы, то уравнение имеет один корень, равный абсциссе точки касания.

Упражнения.

Составив таблицы частных значений, построить графики следующих трёхчленов:

87. $y = x^2 - 2x - 2; \quad y = 2x^2 + 3x - 2.$

88. $y = x^2 + 4x - 1; \quad y = -x^2 + 2x - 2.$

89. $x = -2y^2 - 4y - 2; \quad y = x^2 - 3x - 5.$

Решить графически следующие уравнения:

90. $x^2 = x + 6; \quad x^2 = 2x + 2; \quad x^2 = 2 - 3x.$

91. $x^2 = 3x + 5; \quad x^2 = 12x - 36; \quad x^2 = \dfrac{3x+4}{2}.$

51. Биквадратное уравнение. Уравнение четвёртой степени, например, такое:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$$

в которое входят только *чётные* степени неизвестного, называется *биквадратным*. Оно приводится к квадратному, если заменим x^2 на y и, следовательно, x^4 на y^2; тогда уравнение обратится в квадратное:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Решим его:

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$y_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9; \quad y_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4.$$

Но из равенства $x^2 = y$ видно, что $x = \pm\sqrt{y}$. Подставляя сюда на место y найденные числа 9 и 4, получим следующие четыре решения данного уравнения:

$$x_1 = +\sqrt{9} = 3; \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3;$$
$$x_3 = +\sqrt{4} = 2; \quad x_4 = -\sqrt{4} = -2.$$

Составим формулы для решения биквадратного уравнения общего вида:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Положив $x^2 = y$, получим уравнение $ay^2 + by + c = 0$, из которого находим:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Но так как $x = \pm\sqrt{y}$, то для биквадратного уравнения мы получим следующие четыре решения:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\,; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\,;$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\,; \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\,.$$

Отсюда видно, что если $b^2 - 4ac < 0$, то все четыре корня мнимы; если же $b^2 - 4ac > 0$, то могут быть три случая (мы полагаем $a > 0$, $c \neq 0$): 1) все корни вещественные (как в приведённом выше численном примере), если $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ и $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$; 2) все корни мнимые, если оба эти выражения дадут отрицательные числа; и 3) два корня вещественные и два мнимые, если $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$, а $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$. Наконец, если $b^2 - 4ac = 0$, то четыре корня попарно равны.

Упражнения.

Решить следующие уравнения:
92. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.
93. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$; $2x^4 - 7x^2 = 4$.
94. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$; $x^4 - 2x^2 = 63$.

52. Уравнения, левая часть которых разлагается на множители, а правая есть нуль. Решение таких уравнений сводится к решению уравнений более низких степеней. Так, мы видели, что для решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ достаточно его левую часть разложить на два множителя: $x(ax + b) = 0$ и затем, приняв во внимание, что произведение равно нулю только тогда, когда какой-нибудь сомножитель равен нулю, свести решение этого уравнения к решению двух уравнений первой степени: $x = 0$ и $ax + b = 0$.

Подобно этому можно решить неполное кубическое уравнение, не содержащее свободного члена; например, такое:

$$x^3 + 3x^2 - 10x = 0.$$

Вынеся x за скобки, мы представим уравнение так:

$$x(x^2 + 3x - 10) = 0,$$

и, следовательно, оно распадается на два уравнения:

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 3x - 10 = 0,$$

из которых находим три решения:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = 2;$$

$$x_3 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -5.$$

Пусть некоторое уравнение приведено к такому виду:

$$x(x+4)(x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Тогда оно распадается на три уравнения:

$$x_1 = 0; \quad x + 4 = 0; \quad x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Уравнения эти дают:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -4; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 3.$$

53. Двучленное уравнение. Двучленным уравнением называется уравнение вида $ax^m + b = 0$, или, что то же самое, вида $x^m + \frac{b}{a} = 0$ [1]. Обозначив абсолютную величину числа $\frac{b}{a}$ через q, мы можем двучленное уравнение записать так: или $x^m + q = 0$, или $x^m - q = 0$. При помощи вспомогательного неизвестного эти уравнения всегда можно упростить так, что свободный член у первого обратится в $+1$, а у второго в -1. Действительно, положим, что $x = y\sqrt[m]{q}$, где $\sqrt[m]{q}$ есть *арифметический* корень m-й степени из q; тогда $x^m = qy^m$, и уравнения примут вид:

$$qy^m + q = 0, \quad \text{т. е.} \quad q(y^m + 1) = 0, \quad \text{откуда} \quad y^m + 1 = 0;$$

или

$$qy^m - q = 0, \quad \text{т. е.} \quad q(y^m - 1) = 0, \quad \text{откуда} \quad y^m - 1 = 0.$$

Итак, решение двучленных уравнений приводится к решению уравнений вида $y^m \pm 1 = 0$. Решение таких уравнений элементарными способами может быть выполнено только при некоторых частных значениях показателя m. Общий приём, употребляемый при этом, состоит в разложении левой части уравнения на множители, после чего уравнение приводится к виду, рассмотренному нами раньше.

54. Решение двучленных уравнений третьей степени. Эти уравнения следующие: $x^3 - 1 = 0$ и $x^3 + 1 = 0$.

Заметив, что

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

[1] Когда двучленное уравнение имеет вид $ax^m + bx^n = 0$, где $m > n$, то его можно представить так: $x^n(ax^{m-n} + b) = 0$, и, следовательно, оно распадается на два уравнения: $x^n = 0$ и $ax^{m-n} + b = 0$.

и
$$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1),$$
мы можем предложенные уравнения записать так:
$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \text{и} \quad (x+1)(x^2-x+1)=0.$$

Значит, первое из них имеет своими корнями корни уравнений: $x-1=0$ и $x^2+x+1=0$, а второе — корни уравнений: $x+1=0$ и $x^2-x+1=0$.

Решив их, находим, что уравнение $x^3-1=0$ имеет следующие три корня:
$$x_1=1; \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \quad x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$
из которых один вещественный, а два мнимых; уравнение $x^3+1=0$ имеет три корня:
$$x_1=-1; \quad x_2=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}; \quad x_3=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$
из которых также один вещественный и два мнимых.

55. Различные значения корня. Решение двучленных уравнений имеет тесную связь с нахождением всех значений корня (радикала) из данного числа. В самом деле, найти $\sqrt[m]{A}$, очевидно, всё равно, что решить уравнение $x^m=A$, т.е. $x^m-A=0$, и потому, сколько это уравнение имеет различных решений, столько $\sqrt[m]{A}$ имеет различных значений.

Основываясь на этом замечании, покажем, например, что *корень кубический из всякого вещественного числа (не равного нулю) имеет три различных значения.*

Рассмотрим сначала случай положительного числа A. Пусть требуется найти $\sqrt[3]{A}$, т.е., другими словами, требуется решить уравнение $x^3-A=0$. Обозначив арифметическое значение $\sqrt[3]{A}$ буквой q, положим, что $x=qy$. Тогда уравнение $x^3-A=0$ можно представить так: $q^3y^3-A=0$. Но $q^3=A$, поэтому $q^3y^3-A=A(y^3-1)$, и уравнение примет вид: $y^3-1=0$.

Мы видели в предыдущем параграфе, что это уравнение имеет три корня:
$$y_1=1; \quad y_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \quad y_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Каждое из этих значений, удовлетворяя уравнению $y^3=1$, представляет собой кубический корень из 1. Так как $x=qy$, то
$$x_1=q\cdot 1=q; \quad x_2=q\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \quad x_3=q\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Это и будут три значения $\sqrt[3]{A}$; одно из них вещественное (арифметическое), а два мнимые. Все они получатся, если арифметическое значение $\sqrt[3]{A}$ умножим на каждое из трёх значений $\sqrt[3]{1}$.

Например, кубический корень из 8 имеет три следующих значения:

$$2; \quad 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -1+\sqrt{-3}; \quad 2 \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -1-\sqrt{-3}.$$

Если $A < 0$, то предыдущее рассуждение остаётся в силе, только следует обозначить через q действительное значение $\sqrt[3]{-A}$ и положить $x = -qy$.

56. Трёхчленное уравнение. Так называется уравнение вида:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

(частный случай такого вида при $n = 2$ есть биквадратное уравнение). Оно приводится к квадратному, если введём вспомогательное неизвестное $y = x^n$. Тогда уравнение примет вид:

$$ay^2 + by + c = 0,$$

откуда:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Следовательно:

$$x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Решив, если возможно, эти двучленные уравнения, найдём все значения x.

Пример. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

$$x^3 = y; \quad y^2 - 9y + 8 = 0; \quad y = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 8} = \frac{9 \pm 7}{2};$$

$$y_1 = 8; \quad y_2 = 1;$$

следовательно:

$$x^3 = 8; \quad x^3 = 1.$$

Решив эти двучленные уравнения третьей степени, получим шесть значений для x:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1+\sqrt{-3}; \quad x_3 = -1-\sqrt{-3};$$

$$x_4 = 1; \quad x_5 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \quad x_6 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Упражнения.

Решить уравнения:

95. $x^3 = m^3$; $\quad x^3 + 729 = 0$; $\quad x^6 = 64$.

96. $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$; $\quad x^{2m} + 2ax^m - 8a$.

III. Системы уравнений второй степени

57. Степень уравнения с несколькими неизвестными. Чтобы определить степень уравнения, в которое входят несколько неизвестных, надо предварительно это уравнение упростить (раскрыть скобки, освободить от радикалов и знаменателей, которые содержат неизвестные, и сделать приведение подобных членов). Тогда *степенью уравнения называется сумма показателей при неизвестных в том члене уравнения, в котором эта сумма наибольшая.*

Например, три уравнения: $x^2 + 2xy - x + 2 = 0$, $3xy = 4$, $2x + y^2 - y = 0$ — будут уравнениями второй степени с двумя неизвестными; уравнение $3x^2y - y^2 + x + 10 = 0$ есть уравнение третьей степени с двумя неизвестными, и т. п.

Заметим, что сумма показателей при неизвестных в каком-нибудь члене уравнения называется его *измерением.* Так, члены $2xy$, $5x^2$, $3y^2$ — *второго* измерения; члены $0{,}2xy^2$, $10xy^2$, $\frac{1}{2}xyz$ — *третьего* измерения и т. п. Член, не содержащий неизвестных, называется членом *нулевого* измерения.

Заметим ещё, что уравнение называется *однородным*, если все его члены — одного и того же измерения. Так, $3x^2 + xy - 2y^2 = 0$ есть однородное уравнение второй степени с двумя неизвестными.

Мы рассмотрим сейчас, как решаются некоторые простейшие системы уравнений второй степени с двумя неизвестными.

58. Общий вид полного уравнения второй степени с двумя неизвестными. Он следующий:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

В нём первые три члена — второго измерения, следующие два члена — первого и последний (свободный) член — нулевого. Коэффициенты a, b, c, ... могут быть числами положительными, отрицательными, а также равными нулю (конечно, три коэффициента a, b и c не предполагаются одновременно равными нулю, так как в противном случае уравнение было бы не второй, а первой степени).

Мы рассмотрим сейчас, как решаются простейшие системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными.

59. Системы двух уравнений, из которых одно первой степени, а другое — второй. Пусть дана система:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + x + 3y = 1 \ \ldots & \text{уравнение второй степени;} \\ 2x - y = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{уравнение первой степени.} \end{cases}$$

Всего удобнее такую систему решить *способом подстановки* следующим путём. Из уравнения первой степени определяем одно какое-нибудь неизвестное как функцию от другого неизвестного; например, определяем y как функцию от x :

$$y = 2x - 1.$$

Тогда уравнение второй степени после подстановки даёт уравнение с одним неизвестным x :

$$x^2 - 4(2x-1)^2 + x + 3(2x-1) = 1;$$
$$x^2 - 4(4x^2 - 4x + 1) + x + 6x - 3 = 1;$$
$$x^2 - 16x^2 + 16x - 4 + x + 6x - 3 - 1 = 0;$$
$$-15x^2 + 23x - 8 = 0;\ 15x^2 - 23x + 8 = 0;$$
$$x = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4\cdot 15\cdot 8}}{2\cdot 15} = \frac{23 \pm \sqrt{529-480}}{30} = \frac{23 \pm \sqrt{49}}{30};$$
$$x_1 = \frac{23+7}{30} = 1; \quad x_2 = \frac{23-7}{30} = \frac{8}{15}.$$

После этого из уравнения $y = 2x - 1$ находим:

$$y_1 = 2\cdot 1 - 1 = 1; \quad y_2 = 2\cdot\frac{8}{15} - 1 = \frac{1}{15}.$$

Таким образом, данная система имеет два решения:

$$1)\ x_1 = 1, \quad y_1 = 1; \quad 2)\ x_2 = \frac{8}{15}, \quad y_2 = \frac{1}{15}.$$

60. Искусственные приёмы. Указанный приём применим в тех случаях, когда одно уравнение — первой степени; в некоторых случаях можно пользоваться искусственными приёмами, для которых нельзя указать общего правила. Приведём примеры.

Пример 1. $x + y = a, \quad xy = b.$

Первый способ. Так как даны сумма и произведение неизвестных, то x и y должны быть корнями квадратного уравнения (§ 43):

$$z^2 - az + b = 0.$$

Следовательно:

$$x = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}; \quad y = z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Второй способ. Возведём первое уравнение в квадрат и вычтем из него учетверённое второе [1]):

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 2xy + y^2 &=& a^2 \\ -\,4xy &=& -\,4b \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 &=& a^2 - 4b, \end{array}$$

[1]) Подобные фразы употребляются часто ради краткости: вместо «возведём обе части уравнения в квадрат», «умножим обе части уравнения на 4» и т. п.

т. е.

$$(x-y)^2 = a^2 - 4b, \quad \text{откуда} \quad x - y = \pm\sqrt{a^2-4b}\,.$$

Теперь мы имеем систему:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = \pm\sqrt{a^2-4b}\,. \end{cases}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим:

$$2x = a \pm \sqrt{a^2-4b}\ ; \quad 2y = a \mp \sqrt{a^2-4b}\ ;$$
$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}; \quad y = \frac{a \mp \sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Так как одно из данных уравнений мы возводили в квадрат, то проверяем подстановкой, нет ли посторонних корней в числе найденных.

Таким образом находим, что данная система имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a + \sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2-4b}}{2}. \end{cases}$$

Второе решение отличается от первого только тем, что значение x в первом решении служит значением y во втором решении, и наоборот. Это можно было предвидеть, так как данные уравнения не изменяются от замены x на y, а y на x. Заметим, что такие уравнения называются *симметричными.*

Пример 2. $x - y = a, \quad xy = b.$

Первый способ. Представив уравнения в виде:

$$x + (-y) = a, \quad x(-y) = -b,$$

замечаем, что x и $-y$ — это корни квадратного уравнения:

$$z^2 - az - b = 0,$$

следовательно:

$$x = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}; \quad y = -z_2 = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\ \right).$$

Второй способ. Возведя первое уравнение в квадрат и сложив его с учетверённым вторым, получим:

$$(x+y)^2 = a^2 + 4b, \quad \text{откуда} \quad x + y = \pm\sqrt{a^2+4b}\,.$$

Теперь имеем систему:

$$\begin{cases} x + y = \pm\sqrt{a^2+4b}\,, \\ x - y = a. \end{cases}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, найдём:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}; \quad y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Пример 3. $x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b.$

Возведя первое уравнение в квадрат и вычтя из него второе, получим:

$$2xy = a^2 - b, \quad \text{откуда} \quad xy = \frac{a^2 - b}{2}.$$

Теперь вопрос приводится к решению системы:

$$x + y = a, \quad xy = \frac{a^2 - b}{2},$$

которую мы уже рассмотрели в первом примере.

61. Система двух уравнений, из которых каждое второй степени. Такая система в общем виде не разрешается элементарно, так как она приводится к полному уравнению четвёртой степени.

Рассмотрим некоторые частные виды уравнений, которые можно решить элементарным путём.

Пример 1. $x^2 + y^2 = a,\ xy = b.$

Первый способ (*способ подстановки*). Из второго уравнения определяем одно неизвестное в зависимости от другого: например, $x = \frac{b}{y}$. Подставим это значение в первое уравнение и освободимся от знаменателя; тогда получим биквадратное уравнение:

$$y^4 - ay^2 + b^2 = 0.$$

Решив его, найдём для y четыре значения. Подставив каждое из них в формулу, выведенную ранее для x, найдём четыре соответствующих значения для x.

Второй способ. Сложив первое уравнение с удвоенным вторым, получим:

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b, \quad \text{т. е.} \quad (x + y)^2 = a + 2b,$$

откуда $x + y = \pm\sqrt{a + 2b}$.

Вычтя из первого уравнения удвоенное второе, найдём:

$$x_2 + y_2 - 2xy = a - 2b, \quad \text{т. е.} \quad (x - y)^2 = a - 2b,$$

откуда: $x - y = \pm\sqrt{a - 2b}$.

Таким образом, вопрос приводится к решению следующих четырёх систем первой степени:

$$1) \ \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = \sqrt{a - 2b}; \end{cases} \qquad 2) \ \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}; \end{cases}$$

$$3) \ \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}, \\ x - y = \sqrt{a - 2b}; \end{cases} \qquad 4) \ \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}. \end{cases}$$

Каждая из них решается весьма просто посредством алгебраического сложения уравнений.

Третий способ. Возведя второе уравнение в квадрат, получим следующую систему:

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^2y^2 = b^2.$$

Отсюда видно, что x^2 и y^2 — корни квадратного уравнения:

$$z^2 - az + b^2 = 0.$$

Следовательно:

$$x^2 = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}\,, \quad y^2 = z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}\,.$$

Пример 2. $x^2 - y^2 = a, \quad xy = b.$

Способом подстановки легко приведём эту систему к биквадратному уравнению. Вот ещё искусственный приём решения этой системы. Возведя второе уравнение в квадрат, будем иметь систему:

$$x^2 - y^2 = a, \quad x^2y^2 = b^2,$$

или

$$x^2 + (-y^2) = a, \quad x^2(-y^2) = -b^2.$$

Отсюда видно, что x^2 и $-y^2$ будут корнями уравнения:

$$z^2 - az - b^2 = 0.$$

Следовательно:

$$x^2 = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}\,, \quad y^2 = -z_2 = -\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}\,\right).$$

Отсюда найдём x и y.

Замечание. Во всех случаях, когда приходится возводить уравнения в степень, необходима проверка корней.

62. Графический способ решения систем уравнений второй степени. Начертив графики каждого из данных уравнений, находим координаты точек пересечения этих графиков; это и будут корни уравнений.

Пример. Решить графически систему:

$$1)\ y = x^2 - 3x + 2, \quad 2)\ x = 2y^2 - 3.$$

Составим таблицу частных значений x и y для первого уравнения:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	20	12	6	2	0	0	2	6	12	...

и таблицу частных значений x и y для второго уравнения:

y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
x	...	15	5	-1	-3	-1	5	15	29	...

По этим значениям построим графики (эти графики будут параболы, см. рис. 24).

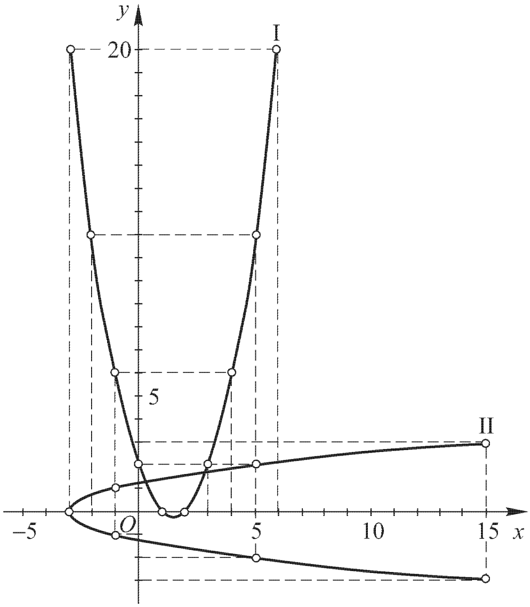


Рис. 24

Графики пересекаются в двух точках, координаты которых приблизительно будут: $x = 0{,}3$; $y = 1{,}3$ и $x = 2{,}8$; $y = 1{,}6$.

Можно найти координаты точек пересечения точнее, если начертим в более крупном масштабе те части графиков, которые лежат около точек пересечения.

Упражнения.

Решить следующие системы уравнений:

97. $\begin{cases} x + y = 11, \\ xy = 24; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 40; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = a, \\ \dfrac{x}{y} = b. \end{cases}$

98. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = \dfrac{4}{3}x; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 96, \\ x - y = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 156, \\ x - y = 6. \end{cases}$

99. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$ **100.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

101. $\begin{cases} 9x^2 - xy + 2y^2 + 4x = 20, \\ 5x^2 - 11xy + 2y^2 = 0. \end{cases}$

102. Два пешехода должны пройти путь в 270 км. Один из них проходит ежедневно на 6 км больше, чем другой, вследствие чего он употребляет на весь путь на 1,5 дня меньше, чем другой. Во сколько дней каждый из них проходит весь путь?

103. Поле имеет форму прямоугольника. Определить его площадь, зная, что: 1) если длину его уменьшить, а ширину увеличить на 12 м, то оно получает форму квадрата; 2) если же длину увеличить, а ширину уменьшить на 12 м, то площадь его окажется 15049 м^2.

104. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, высота которого равна 3 м, имеет длину 13 м, периметр его основания равен 32 м. Найти измерения основания параллелепипеда.

105. В прямоугольном треугольнике гипотенуза, равная c, высотой, опущенной на неё, разделена на 2 отрезка, из которых один равен катету, не прилегающему к нему. Найти катеты.

106. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c и сумма катетов равна s. Найти катеты.

Глава 4

НЕРАВЕНСТВА

I. Неравенства первой степени

63. Предварительное замечание. Когда мы говорим, что 10 больше 7, это значит, что разность $10 - 7$ есть число положительное, тогда как разность $7 - 10$ есть число отрицательное. Условимся распространить это понятие и на любые действительные числа, а именно: выражение «a больше b» ($a > b$) означает, что разность $a - b$ есть число положительное, а выражение «a меньше b» ($a < b$) означает, что эта разность — число отрицательное.

64. Основные свойства неравенств. Два числа или два алгебраических выражения, связанные между собой знаком $>$ или $<$, образуют *неравенство*. Неравенство состоит из двух частей: *левой* части и *правой* части.

Обозначим левую часть неравенства буквой a и правую часть буквой b. Тогда основные свойства неравенств мы можем выразить так:

1) Если $a > b$, то $b < a$; например: $-2 > -3$; $-3 < -2$.

2) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; например: $-2 > -3$ и $-3 > -4$; тогда $-2 > -4$.

3) Если $a > b$ и $c = d$, то $a + c > b + d$ и $a - c > b - d$, т. е. если к неравным числам прибавим или вычтем из них равные числа, то знак неравенства не изменится (большее число останется бóльшим). Например: $2 > -3$; прибавим или вычтем по -10:

$2 + (-10) > -3 + (-10)$, т. е. $-8 > -13$;

$2 - (-10) > -3 - (-10)$, т. е. $12 > 7$.

4) Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$; равным образом, если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

например, если части двух неравенств: $-7 > -10$ и $-3 > -4$ почленно сложим, то получим: $-10 > -14$.

Равным образом, если сложим почленно части двух неравенств $2 < 8$ и $-4 < -2$, то будем иметь: $-2 < 6$.

5) Если $a > b$, а $c < d$, то $a - c > b - d$; или если $a < b$, а $c > d$, то $a - c < b - d$.

Например:

$$-\begin{cases} -8 > -10 \\ 2 < 3 \end{cases} \over -10 > -13 \qquad \text{или} \qquad -\begin{cases} 7 < 12 \\ 8 > -2 \end{cases} \over -1 < 14$$

Условимся о двух неравенствах говорить, что они *одинакового смысла,* если в каждом из них имеется один и тот же знак $>$ или $<$, и что они *противоположного смысла*, если в одном из неравенств стоит знак $>$, а в другом знак $<$. Тогда свойства четвёртое и пятое можно высказать так:

Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать; два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое неравенство.

6) Если $a > b$ и m — положительное число, то $am > bm$ и $a : m > > b : m$.

Если обе части неравенства умножим или разделим на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится.

например, умножив на $+4$ обе части неравенства $-5 > -7$, получим: $-20 > -28$.

7) Если $a > b$ и m — отрицательное число, то $am < bm$ и $a : m < < b : m$.

Если обе части неравенства умножим или разделим на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства переменится на противоположный.

например, умножив на -1 обе части неравенства $-5 > -7$, получим: $5 < 7$.

65. Вопросы относительно неравенств. Относительно неравенств (как и равенств), содержащих буквы, возможны вопросы двух родов:

1) решить неравенство, содержащее неизвестные, т. е. определить, при каких значениях неизвестных данное неравенство справедливо;

2) доказать тождественное неравенство, т. е. обнаружить верность его при всевозможных значениях букв или по крайней мере при значениях, ограниченных заданными наперёд условиями.

Решение обоих вопросов основывается на некоторых свойствах неравенств, подобных тем, которые служат основанием для решения уравнений.

66. Равносильные неравенства. Неравенства, содержащие одни и те же неизвестные, называются *равносильными,* если они удовлетворяются одними и теми же значениями этих неизвестных; так, два неравенства $3x + 2 < x + 10$ и $3x < x + 8$ равносильны, так как оба они удовлетворяются значениями x, меньшими 4, и только этими значениями.

Относительно равносильности неравенства докажем теоремы, весьма сходные с подобными же теоремами относительно равносильности уравнений.

67. Теорема 1. *Если к обеим частям неравенства (содержащего неизвестные) прибавим (или отнимем) одно и то же число, то получим новое неравенство, равносильное первому.*

Обозначим левую часть неравенства, содержащего неизвестные, одной буквой A и правую часть — другой буквой B, и пусть m есть какое угодно число; докажем, что два неравенства:

$$A > B \tag{1}$$

и

$$A + m > B + m \tag{2}$$

равносильны. Положим, что первое неравенство удовлетворяется при некоторых значениях букв. Это значит, что при этих значениях численная величина A больше численной величины B; но тогда, на основании свойства 3 § 64, при тех же значениях букв и численная величина суммы $A + m$ больше численной величины суммы $B + m$, так как если к обеим частям неравенства прибавим поровну, то знак неравенства не изменится. Значит, всякое решение неравенства (1) удовлетворяет и неравенству (2).

Обратно, если при некоторых значениях букв численная величина суммы $A + m$ больше численной величины суммы $B + m$, то для тех же значений букв и численная величина A больше численной величины B (неравенство не нарушится, если к обеим частям неравенства прибавим $-m$); следовательно, все решения неравенства (2) удовлетворяют и неравенству (1); значит, эти неравенства равносильны.

Так как вычитание равносильно сложению с противоположным числом, то, следовательно, от обеих частей неравенства можно отнять одно и то же число.

Следствие. *Любой член неравенства можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком.*

Если, например, имеем неравенство $A > B + C$, то, прибавив к обеим частям по $-C$, получим: $A - C > B$.

68. Теорема 2. *Если обе части неравенства (содержащего неизвестные) умножим (или разделим) на одно и те же положительное число, то получим новое неравенство, равносильное первому.*

Докажем, что два неравенства:

$$A > B \tag{1}$$

и

$$Am > Bm \tag{2}$$

равносильны, если только m — положительное число.

Пусть при некоторых значениях неизвестных численная величина A больше численной величины B; тогда при тех же значениях неизвестных и численная величина произведения Am больше численной величины произведения Bm, так как от умножения обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства не изменяется. Значит, все решения неравенства (1) удовлетворяют и неравенству (2).

Обратно, если при некоторых значениях букв численная величина Am больше численной величины Bm, то при тех же значениях букв и численная величина A больше численной величины B, так как от деления обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства не изменяется.

Замечание. Положительное число, на которое, по доказанному, мы имеем право умножить или разделить обе части неравенства (не изменяя его знака), может быть дано в виде *буквенного выражения,* причём это выражение может содержать в себе и неизвестные, входящие в неравенство. Но при этом надо особо рассмотреть, при всех ли значениях букв, входящих в выражение, на которое мы умножаем или делим обе части неравенства, это выражение имеет *положительные* значения.

например, умножим обе части неравенства $A > B$ на выражение $(x-5)^2$:

$$A > B; \tag{1}$$

$$A(x-5)^2 > B(x-5)^2. \tag{2}$$

Множитель $(x-5)^2$ остаётся положительным числом при всех значениях x, кроме одного: $x = 5$. Значит, неравенства (1) и (2) равносильны в том случае, если первое из них не удовлетворяется значением $x = 5$; в противном же случае неравенство (1), удовлетворяясь всеми решениями неравенства (2), имеет ещё решение: $x = 5$ (это решение неравенству (2) не удовлетворяет, ибо при $x = 5$ неравенство (2) обращается в равенство).

Следствие. *Если обе части неравенства содержат положительный общий множитель, то на него можно разделить обе части неравенства.*

Например, в обеих частях неравенства: $(x-5)^2(x-1) > (x-5)^2(3-x)$ есть общий множитель $(x-5)^2$. Этот множитель при $x = 5$ обращается в 0, а при всех остальных значениях x он — число положительное. Решение $x = 5$ не удовлетворяет данному неравенству. Желая решить, удовлетворяется ли неравенство при других значениях x, мы можем разделить обе его части на $(x-5)^2$, как на число положительное; после деления получим: $x - 1 > 3 - x$.

Все значения x, удовлетворяющие этому неравенству, за исключением $x = 5$, удовлетворяют и данному неравенству.

69. Теорема 3. *Если обе части неравенства (содержащего неизвестные) умножим (или разделим) на одно и то же отрицательное число и при этом переменим знак неравенства на противоположный, то получим новое неравенство, равносильное первому.*

Эта теорема доказывается совершенно так же, как и теорема 2; надо только принять во внимание, что от умножения или деления обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства изменяется на противоположный.

По поводу этой теоремы можно высказать такое же замечание, какое было сделано по отношению к теореме 2.

Следствия. а) Переменив у всех членов неравенства знаки на противоположные (т. е. умножив обе его части на -1), мы должны изменить знак неравенства на противоположный.

б) Нельзя умножить обе части неравенства на буквенный множитель, знак которого неизвестен.

в) Неравенство с дробными членами можно привести к целому виду. Возьмём, например, такое неравенство:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}. \tag{1}$$

Перенесём все члены в левую часть и приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{AD - BC}{BD} > 0. \tag{2}$$

Если BD — положительное число, то мы можем его отбросить, не изменяя знака неравенства, потому что отбросить BD — всё равно что умножить на это число обе части неравенства. Отбросив BD, получим неравенство, не содержащее дробей:

$$AD - BC > 0.$$

Если BD — отрицательное число, то мы можем его отбросить, переменив при этом знак неравенства на противоположный; тогда снова будем иметь неравенство с целыми членами:

$$AD - BC < 0.$$

Но если знак BD неизвестен (что бывает вообще тогда, когда B и D содержат неизвестные), то мы не можем умножать обе части неравенства на BD. Тогда рассуждаем так: чтобы дробь была положительна, необходимо и достаточно, чтобы у неё числитель и знаменатель были одновременно или положительны, или отрицательны. Следовательно, неравенство (2) удовлетворится при таких значениях букв, при которых:

$$\begin{cases} AD - BC > 0 \\ BD > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} AD - BC < 0 \\ BD < 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение неравенства (1) сводится к решению системы двух неравенств без дробных членов.

70. Доказательство неравенства. Нельзя установить каких-либо общих правил для обнаружения верности предложенного неравенства. Заметим только, что один из приёмов состоит в том, что предложенное неравенство преобразовывают в другое — очевидное, и затем, исходя из этого очевидного неравенства, путём логических рассуждений доходят до предложенного. Приведём пример:

Доказать, что **если сумма чисел x и y постоянна, то их произведение будет наибольшее, если $x = y$.**

Пусть $x + y = a$, где a — постоянное число. Если $x = y$, то каждое из этих чисел будет $\frac{a}{2}$, и тогда xy сделается равным $\frac{a^2}{4}$.

Требуется доказать, что если $x \neq y$, то $xy < \frac{a^2}{4}$. Преобразуем это доказываемое неравенство так:

$$xy < \frac{a^2}{4}; \quad 4xy < a^2; \quad 4xy < (x+y)^2; \quad 4xy < x^2 + 2xy + y^2;$$
$$0 < x^2 - 2xy + y^2; \quad 0 < (x-y)^2.$$

При неравных x и y последнее неравенство верно. Переходя от него последовательно к предыдущим неравенствам, замечаем, что все они равносильны. Значит, и первое неравенство верно.

Если, например, $x + y = 10$, то наибольшая величина произведения есть $5 \cdot 5 = 25$.

71. Решение неравенства первой степени с одним неизвестным. Общий вид неравенства первой степени с одним неизвестным, после раскрытия в нём скобок и освобождения от дробных членов, следующий:

$$ax + b > a_1 x + b_1.$$

Перенеся неизвестные члены в левую часть, а известные в правую, получим:

$$(a - a_1)x > b_1 - b.$$

Если $a - a_1 > 0$, то, разделив на $a - a_1$ обе части неравенства, найдём:

$$x > \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

Если же $a - a_1 < 0$, то получим:

$$x < \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

Таким образом, одно неравенство первой степени даёт для неизвестного один *предел*, ограничивающий значение неизвестного или сверху $(x < m)$, или снизу $(x > m)$.

Пример. Решить неравенство: $2x(2x-5)-27<(2x+1)^2$. Раскрываем скобки:

$$4x^2-10x-27<4x^2+4x+1.$$

Переносим члены и делаем приведение:

$$-14x<28.$$

Делим обе части на -14:

$$x>-2.$$

72. Два неравенства первой степени с одним неизвестным. Рассмотрим систему двух неравенств:

$$ax+b>a'x+b' \quad \text{и} \quad cx+d>c'x+d'.$$

Каждое из этих неравенств даёт по одному пределу для неизвестного.

При этом могут представиться три случая:

1) *Пределы одинакового смысла*; тогда для решения системы достаточно взять один из них. Если, например, $x>7$ и $x>12$, то достаточно взять только $x>12$, потому что если $x>12$, то и подавно $x>7$, или если, например, $x<5$ и $x<8$, то достаточно положить, что $x<5$, потому что тогда и подавно $x<8$.

2) *Пределы противоположного смысла*, например, $x>10$ и $x<15$. В этом случае для неизвестного можно брать только такие значения, которые заключены между найденными пределами.

3) *Пределы противоречат друг другу*, например, $x<5$ и $x>7$. В этом случае система не имеет решений.

Пример. Решить два неравенства: $0{,}3x+5<0{,}5x$ и $5x<60+2x$. Первое неравенство даёт $x>25$, второе: $x<20$. Значит, если эти неравенства выведены из условий одной и той же задачи, то эта задача не имеет решений.

Упражнения.

Решить следующие неравенства:

107. $x-7<2x+5$; $\quad 9x-8+3(x-2)<2(x+3)$.

108. $\dfrac{2x}{5}+4>x-\dfrac{1}{2}$; $\quad x+2b<16-3(x-2d)$.

109. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}>\dfrac{a+b}{ab}$; $\quad 10-\dfrac{5x}{2}>0$.

110. Если $a>b$ и $c=d$, то всегда ли $ac>bd$?

111. Если $a>b$, то всегда ли $a^m>b^m$?

112. Что можно сказать о числах a и b, если известно, что $ab>0$? если $ab<0$?

113. При каком условии дробь $\dfrac{a}{b}$ увеличится, если к числителю и знаменателю прибавим одно и то же положительное число (a и b — положительные числа)?

Глава 5

ПРОГРЕССИИ

I. Арифметическая прогрессия

73. Задача. Рабочему поручили выкопать колодец и условились платить ему за первый метр глубины 3 руб., за второй 5 руб. и т. д., увеличивая плату за каждый следующий метр на 2 руб. Сколько уплатили рабочему, если колодец был вырыт им в 10 м глубины?

Для решения задачи надо найти сумму таких чисел:

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21.$$

Сумму эту мы можем найти проще, чем обыкновенным сложением. Обозначив её буквой s, напишем две такие строки:

$$\begin{aligned} s &= 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21, \\ s &= 21 + 19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3. \end{aligned}$$

Вторую строку мы написали, переставив слагаемые первой строки в обратном порядке, от чего, конечно, сумма не изменилась. Сложим теперь все числа, стоящие друг под другом.

$$2s = 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24,$$

т. е.

$$2s = 24 \cdot 10 = 240$$

и, следовательно,

$$s = \frac{240}{2} = 120.$$

Таким образом, за всю работу уплатили 120 рублей.

В этой задаче нам пришлось иметь дело с рядом чисел, последовательно возрастающих на одно и то же число. Подобные ряды носят название *арифметических прогрессий.*

74. Определение. *Арифметической, или разностной, прогрессией называется такой ряд чисел, в котором каждое число, начиная со второго, равняется предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для этого ряда числом (положительным или отрицательным).*

Так, два ряда чисел: 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46 и 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6 — составляют арифметические прогрессии, так как в них каждое число, начиная со второго, равно предыдущему числу, сложенному в первом ряду с положительным числом 4, а во втором — с отрицательным числом -2.

Числа, составляющие прогрессию, называются её *членами*. Положительное или отрицательное число, которое надо прибавить к предыдущему члену, чтобы получить последующий, называется *разностью* прогрессии.

Прогрессия называется *возрастающей* или *убывающей*, смотря по тому, увеличиваются ли её члены по мере удаления от начала ряда или уменьшаются; разность возрастающей прогрессии есть число положительное, а убывающей — отрицательное.

Для обозначения того, что ряд чисел представляет собой арифметическую прогрессию, иногда ставят в начале ряда знак $\div$.

Обыкновенно принято обозначать: первый член a, а последний l, разность d, число всех членов n и сумму их s [1]).

75. Формула любого члена арифметической прогрессии. Пусть имеем прогрессию: $\div\, 10, 14, 18, \ldots$ (разность 4).

Тогда 2-й член $= 10 + 4 = 14$;

3-й " $= 10 + 4 + 4 = 10 + 4 \cdot 2 = 18$;

4-й " $= 10 + 4 + 4 + 4 = 10 + 4 \cdot 3 = 22$ и т. д.

Значит:

10-й член $= 10 + 4 \cdot 9 = 46$;

20-й " $= 10 + 4 \cdot 19 = 86$ и т. д.

Подобно этому, если имеем прогрессию: $\div\, 6, 4, 2, \ldots$ (разность -2), то

2-й член $= 6 + (-2) = 4$;

3-й " $= 6 + (-2) + (-2) = 6 + (-2) \cdot 2 = 2$ и т. д.

Например:

10-й член $= 6 + (-2) \cdot 9 = -12$.

Вообще, если прогрессия будет такая: $\div\, a$, b, c, ... (разность d), то

2-й член $= a + d$;

3-й " $= a + d + d = a + 2d$;

4-й " $= a + 2d + d = a + 3d$ и т. д.

Значит, 10-й член окажется $a + 9d$, 15-й член будет $a + 14d$, вообще m-й член будет $a + d(m-1)$. Таким образом:

Всякий член арифметической прогрессии равен первому её члену, сложенному с произведением разности прогрессии на число членов, предшествующих определяемому.

[1]) В некоторых книгах члены прогрессии обозначаются и так: a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Разность прогрессии иногда обозначается через r.

В частности, последний член равен первому члену, сложенному с произведением разности на число всех членов, уменьшенное на 1, т. е.:

$$l = a + d(n-1). \tag{1}$$

Примеры.

1) Найти 10-й член прогрессии: $\div$ 60, 75, 90, ...

Так как разность этой прогрессии равна 15, то 10-й член будет

$$60 + 15 \cdot 9 = 195.$$

2) Найти 12-й член прогрессии: $\div$ 40, 37, 34, ...

Так как разность равна -3, то 12-й член должен быть

$$40 + (-3) \cdot 11 = 40 - 33 = 7.$$

3) Каким будет n-е число в последовательном ряду нечётных чисел: 1, 3, 5, ...?

Такое число будет

$$1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$$

Следствие. Арифметическую прогрессию, у которой первый член есть a, разность d и число членов n, можно изобразить так:

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ \ \ldots,\ a + d(n-1).$$

76. Формула суммы членов арифметической прогрессии. Предварительно убедимся в следующем свойстве:

Сумма двух членов арифметической прогрессии, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов.

например, в прогрессии: $\div$ 3, 7, 11, 15, 19, 23 — находим:

$$3 + 23 = 26; \quad 7 + 19 = 26; \quad 11 + 15 = 26.$$

Понятно, почему это так: первые слагаемые этих сумм (т. е. 3, 7, 11) идут, возрастая на 4, а вторые слагаемые (23, 19, 15) идут, убывая на 4; поэтому сумма каждой пары остаётся та же.

Возьмём ещё пример убывающей прогрессии: $\div$ 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4. В ней

$$8 + (-4) = 4, \quad 6 + (-2) = 4, \quad 4 + 0 = 4.$$

Член 2, отстоящий одинаково от начала и от конца, должен быть сложен сам с собой: $2 + 2 = 4$. И здесь объяснение то же самое: слагаемые 8, 6, 4, 2 идут, уменьшаясь на 2, а слагаемые -4, -2, 0 и 2 идут, увеличиваясь на 2; от этого сумма каждой пары остаётся без изменения.

Теперь выведем формулу для суммы членов любой арифметической прогрессии. Для этого применим тот способ, посредством которого мы нашли сумму членов арифметической прогрессии в задаче § 73, а именно: сложим почленно два таких равенства:

$$s = a + b + c + \ldots + i + k + l,$$
$$s = l + k + i + \ldots + c + b + a.$$
$$2s = (a + l) + (b + k) + (c + i) + \ldots + (i + c) + (k + b) + (l + a).$$

Но

$$a + l = b + k = c + i = \ldots = l + a;$$

следовательно:

$$2s = (a + l)n, \quad \text{откуда} \quad s = \frac{(a + l)n}{2}.$$

Сумма всех членов арифметической прогрессии равна половине произведения суммы крайних членов на число членов.

Таким образом, в задаче § 73 для суммы s по этой формуле найдём то число, которое мы нашли ранее другим путём:

$$s = [(3 + 21) \cdot 10] : 2 = 120.$$

Пример 1. Найти сумму натуральных чисел от 1 до n включительно.

Ряд: 1, 2, 3, …, n — есть арифметическая прогрессия, у которой первый член 1, разность 1, число членов n и последний член тоже n; поэтому

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Так:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6(6 + 1)}{2} = 21.$$

Пример 2. Найти сумму первых n нечётных чисел.

Как мы видели в предыдущем параграфе, n-е нечётное число равно $2n - 1$; поэтому

$$s = \frac{[1 + (2n - 1)] \cdot n}{2} = n^2.$$

Так: $1 + 3 = 4 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ и т. д.

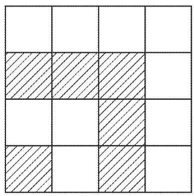


Рис. 25

Это свойство сумм нечётных чисел наглядно изображается рисунком 25, который составлен так: к квадрату (внизу слева) приставлены 3 таких же квадрата (1 сверху, 1 справа и 1 в верхнем правом углу); к этим квадратам приставлены ещё 5 квадратов (2 сверху, 2 справа и 1 в верхнем правом углу). К ним, далее, приложены 7 квадратов, потом 9 квадратов и т. д. Тогда очевидно, что

$$1 + 3 = 2^2, \quad 1 + 3 + 5 = 3^2, \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \quad \text{и т. д.}$$

Пример 3. Найти сумму 10 членов прогрессии: $\div\, 3,\ 2\frac{1}{2},\ 2,\ \ldots$.

Здесь $a = 3$, $d = 2\frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$, поэтому 10-й член прогрессии будет $3 - \frac{1}{2} \cdot 9 = -1\frac{1}{2}$, и потому искомая сумма равна:

$$\frac{\left[3 + \left(-1\frac{1}{2}\right)\right] \cdot 10}{2} = 1\frac{1}{2} \cdot 5 = 7\frac{1}{2}.$$

Проверка:
$3 + 2\frac{1}{2} + 2 + 1\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} - 1 - 1\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.

77. Замечание. Так как для пяти чисел a, l, d, n и s мы имеем два уравнения:

$$1)\ l = a + d(n-1) \quad \text{и} \quad 2)\ s = \frac{(a+l)n}{2},$$

то по данным трём из этих чисел можем находить остальные два. Для примера решим следующую задачу:

Найти число членов прогрессии, у которой первый член 7, разность -2 и сумма всех членов 12.

В этой задаче даны: $a = 7$, $d = -2$ и $s = 12$; остаются неизвестными l и n. Подставив в формулы (1) и (2) заданные числа, находим:

$$l = 7 - 2(n-1) = 9 - 2n; \quad 12 = \frac{(7+l)n}{2},$$

откуда:

$$12 = \frac{(7 + 9 - 2n)n}{2} = (8-n)n;$$
$$n^2 - 8n + 12 = 0; \quad n = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2;$$
$$n_1 = 6; \quad n_2 = 2.$$

Получаются два ответа: число членов или 6, или 2. И действительно, две прогрессии: 7, 5, 3, 1, -1, -3 и 7, 5 — имеют одну и ту же сумму 12.

78. Формула суммы квадратов чисел натурального ряда. Выведем формулу, определяющую сумму квадратов первых n чисел натурального ряда. Для вывода этой формулы рассмотрим n следующих тождеств:

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3;$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 1^3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 \cdot 1 + 3n \cdot 1^2 + 1^3.$$

Сложив эти тождества и сократив одинаковые члены в правой и левой частях полученного тождества, будем иметь:

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n.$$

Но

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

следовательно:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}.$$

Упростим правую часть этого равенства:

$$(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} = (n+1)\left[(n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\right] = \\ = \frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Итак,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Упражнения.

114. Найти 30-й член арифметической прогрессии: 3, 7, ...

115. Найти 15-й член арифметической прогрессии, у которой 1-й член 130 и разность -3.

116. Сколько членов надо взять в прогрессии: $\div$ 4, 8, ..., чтобы их сумма равнялась 112?

117. Найти сумму 103 членов арифметической прогрессии: 103, 101, ...

118. 3-й член арифметической прогрессии есть 7, а 9-й член 18. Найти 1-й и 6-й члены.

119. Показать, что если a, b и c суть три последовательных члена арифметической прогрессии, то b есть среднее арифметическое между a и c.

120. 2-й член арифметической прогрессии равен $+1$, а 5-й член $+7$. Найти сумму 1000 членов арифметической прогрессии.

121. Найти число членов арифметической прогрессии, разность которой -12, последний член 15 и сумма всех членов 456.

122. На сколько единиц сумма всех целых чисел от 51 до 100 включительно превосходит сумму всех целых чисел от 1 до 50 включительно?

123. Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают целые часы и каждые полчаса?

124. Могут ли стороны прямоугольного треугольника составлять арифметическую прогрессию?

125. Тело, свободно падая с некоторой высоты, проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую секунду на 9,8 м больше. С какой высоты упало тело, если падение продолжалось 10 секунд?

126. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна 17. Найти эту прогрессию, зная, что её 4-й член есть 3.

127. Из уравнений $l = a + d(n-1)$ и $s = \dfrac{(a+l)n}{2}$ исключить l; другими словами, выразить s только в зависимости от a, d и n.

128. Найти три таких числа, чтобы они образовали арифметическую прогрессию с разностью d и чтобы сумма их равнялась их произведению.

II. Геометрическая прогрессия

79. Задача. По преданию, индийский принц Сирам предложил изобретателю шахматной игры просить у него награду, какую он захочет. Тот попросил, чтобы ему дали за первый квадрат шахматной доски одно пшеничное зерно, за второй квадрат 2 зерна, за третий 4 и т. д., увеличивая вдвое за каждый из следующих квадратов. Принц согласился. Но когда подсчитали количество зёрен пшеницы, которое следует выдать за все 64 квадрата шахматной доски, то оказалось, что награда в этом размере не может быть выдана по недостатку пшеницы. Сколько же зёрен пришлось бы выдать изобретателю?

Количество зёрен, которое надлежало бы выдать за все 64 квадрата, равно сумме s следующего ряда чисел:

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Мы можем найти эту сумму, не вычисляя отдельно слагаемых, так: умножим обе части написанного равенства на 2:

$$2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Теперь вычтем из этого равенства предыдущее; тогда в левой части получим s, а в правой $2^{64} - 1$ (числа 2, 2^2, 2^{64}, …, 2^{63} все сократятся):

$$s = 2^{64} - 1.$$

Значит, придётся вычислить степень 2^{64}, что можно сделать или последовательным умножением на 2 по формуле:

$$2^{64} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ \ldots \quad (64 \text{ множителя}),$$

или по формуле:

$$2^{64} = \left[\left(2^{16}\right)^2\right]^2 = \left(65536^2\right)^2.$$

Окончательное число зёрен будет:

$$s = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Можно вычислить, что если бы такое число зёрен рассыпать равномерно по всей земной суше, то образовался бы слой пшеницы толщиной около 9 мм.

В этой задаче мы имели дело с рядом чисел, из которых каждое, начиная со второго, равно предыдущему числу, умноженному на одно и то же число. Такие ряды чисел называются *геометрическими прогрессиями*.

80. Определение. *Геометрической, или кратной, прогрессией называется такой ряд чисел, в котором каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, умноженному на одно и то же число, постоянное для этого ряда.* Так, три ряда:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128, \ldots;$$
$$8,\ -16,\ 32,\ -64,\ 128,\ -256,\ 512, \ldots;$$
$$20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{16},\ \frac{5}{32},\ \ldots$$

— составляют геометрические прогрессии, потому что в этих рядах каждое число, начиная со второго, получается из предшествующего умножением в первом ряду на 2, во втором на —2 и в третьем на $\frac{1}{2}$.

Для обозначения того, что данный ряд есть геометрическая прогрессия, иногда ставят в начале его знак $\div\div$.

Как и в арифметической прогрессии, числа, составляющие геометрическую прогрессию, называются её *членами*; число, на которое надо умножить предыдущий член, чтобы получить последующий, называется *знаменателем* прогрессии.

Прогрессия называется *возрастающей* или *убывающей,* смотря по тому, увеличивается или уменьшается *абсолютная величина* членов прогрессии по мере удаления от начала ряда; так, из трёх указанных выше прогрессий первая и вторая — возрастающие, а третья — убывающая. В возрастающей прогрессии абсолютная величина знаменателя больше 1, в убывающей она меньше 1.

Обыкновенно знаменатель прогрессии обозначают буквой q, а члены, число их и сумму обозначают так же, как это принято для арифметической прогрессии, т. е. a, b, c, $\ldots, l$ (последний член), n (число членов) и s (сумма).

81. Сравнение геометрической прогрессии с арифметической прогрессией. Разность двух рядом стоящих членов арифметической прогрессии остаётся одна и та же, вследствие чего члены её возрастают (или убывают) равномерно (см. рис. 26 a). Посмотрим, какова разность двух соседних членов в геометрической прогрессии:

$$\div\div\ a,\ b,\ c,\ \ldots \quad (\text{знаменатель } q).$$

Из определения прогрессии следует: $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$ и т. д.; следовательно,

$$b - a = aq - a = a(q-1); \quad c - b = bq - b = b(q-1) \quad \text{и т. д.}$$

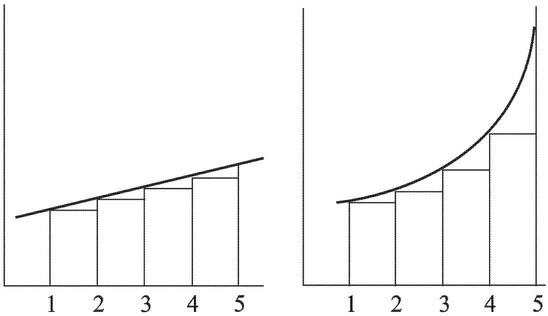
Если прогрессия возрастающая и члены её положительные, то $a < < b < c < \ldots$ и т. д.; поэтому и

$$a(q-1) < b(q-1) < c(q-1) < \ldots,$$

т. е.

$$b - a < c - b < d - c < \ldots \quad \text{и т. д.}$$

Значит, в возрастающей геометрической прогрессии с положительными членами *разность двух соседних членов увеличивается по мере удаления их от начала ряда*; вследствие этого члены такой



а *б*

Рис. 26

прогрессии по мере их удаления от начала ряда возрастают все быстрее и быстрее, что наглядно изображено на рис. 26 *б*. Например:

$$\div\ 2,\ 4,\ 6,\ \ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$$
$$\div\div\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$$

82. Формула любого члена геометрической прогрессии. Пусть мы имеем такую геометрическую прогрессию:

$$\div\div\ 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \ \ldots \quad (\text{знаменатель } 2).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} &\text{2-й член} = 3\cdot 2 = 6;\\ &\text{3-й} \quad " \quad = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1 = 3\cdot 2^2 = 12,\\ &\text{4-й} \quad " \quad = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 3\cdot 2^3 = 24 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Например: 10-й член$= 3\cdot 2^9 = 3\cdot 512 = 1536$.

Подобно этому, если мы имеем прогрессию:

$$\div\div\ 10,\ 5,\ 2\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{4},\ \ \ldots \quad \left(\text{знаменатель } \frac{1}{2}\right),$$

то

$$\begin{aligned} &\text{2-й член} = 10\cdot\frac{1}{2} = 5;\\ &\text{3-й} \quad " \quad = 10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2};\\ &\text{4-й} \quad " \quad = 10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Вообще, если имеем прогрессию в буквенном виде:

$$\div\div\ a,\ b,\ c,\ \ldots \quad (\text{знаменатель } q),$$

то в ней

$$\begin{aligned} &\text{2-й член} = aq = aq^1;\\ &\text{3-й} \quad \text{”} \quad = aq \cdot q = aq^2;\\ &\text{4-й} \quad \text{”} \quad = aq^2 \cdot q = aq^3 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Таким образом, 10-й член $= aq^9$, вообще m-й член $= aq^{m-1}$. Значит:

Всякий член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен первому члену, умноженному на знаменатель прогрессии в степени, показатель которой равен числу членов, предшествующих определяемому.

В частности, последний член l, которому предшествует $n-1$ членов, выразится формулой:

$$l = aq^{n-1}.$$

Пример 1. Найти 6-й член прогрессии: $\div\div\, 3,\ 12,\ \ldots$

Знаменатель такой прогрессии есть $12 : 3 = 4$; поэтому 6-й член $= 3 \cdot 4^5 = 3072$.

Пример 2. Найти 10-й член прогрессии: $\div\div\, 20,\ 10,\ \ldots$

Так как знаменатель этой прогрессии равен $10 : 20 = \dfrac{1}{2}$, то 10-й член равен:

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 5 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{5}{2^7} = \frac{5}{128}.$$

Следствие. Геометрическую прогрессию, у которой первый член есть a, знаменатель q и число всех членов n, можно изобразить так:

$$\div\div\, a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots,\ aq^{n-1}.$$

83. Формула суммы членов геометрической прогрессии. Применим тот приём, которым мы раньше (§ 79) нашли сумму $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$. Умножим обе части равенства

$$s = a + b + c + \ldots + k + l \tag{1}$$

на знаменатель q, тогда получим:

$$sq = aq + bq + cq + \ldots + kq + lq.$$

Но

$$aq = b,\ bq = c,\ cq = d,\ \ldots,\ kq = l,$$

следовательно,

$$sq = b + c + d + \ldots + l + lq. \tag{2}$$

Вычтя почленно из равенства (2) равенство (1), найдём:

$$sq - s = lq - a, \quad \text{т. е.} \quad (q-1)s = lq - a,$$

откуда:

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Сумма членов геометрической прогрессии равна дроби, у которой числитель есть разность между произведением последнего члена на знаменатель прогрессии и первым членом её, а знаменатель есть разность между знаменателем прогрессии и единицей.

Замечание. 1. Так как для убывающей геометрической прогрессии $-1 < q < 1$, то для такой прогрессии лучше придать формуле суммы иной вид, умножив числитель и знаменатель дроби на -1:

$$s = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

2. Если вместо члена l подставим равное ему выражение aq^{n-1}, то формула для суммы примет такой вид:

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \quad \text{или} \quad s = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Пример. Найти сумму восьми членов прогрессии, у которой $a = 1$ и $q = \frac{1}{3}$. Тогда:

$$l = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^7;$$

$$s = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{\frac{2}{3}} = \frac{3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}{2} = \frac{3280}{2187}.$$

84. Пример на геометрическую прогрессию. Найти первый член a и последний l, если $q = 3$, $n = 5$ и $s = 242$.

Сначала находим l по формуле $l = aq^{n-1} = a \cdot 3^4$, и затем эту величину и данные числа подставим в формулу для суммы:

$$242 = \frac{a \cdot 3^4 \cdot 3 - a}{3 - 1} = \frac{a(3^5 - 1)}{2} = 121a,$$

откуда:

$$a = 242 : 121 = 2.$$

Теперь находим:

$$l = 2 \cdot 3^4 = 162.$$

Проверка: $2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242$.

Упражнения.

129. Найти 1-й член геометрической прогрессии, у которой знаменатель равен 5, а 7-й член равен 62 500.

130. Найти сумму первых восьми членов геометрической прогрессии: 5, $\frac{5}{6}$, ...

131. Найти четыре числа, зная, что они составляют геометрическую прогрессию, что их сумма равна 360 и что последнее число в 9 раз более второго.

132. Найти сумму двенадцати членов геометрической прогрессии: 1, $\sqrt{2}$, ...

133. Образовать такую геометрическую прогрессию из четырёх членов, чтобы сумма 1-го и 3-го членов равнялась 5, а сумма 2-го и 4-го была 10.

134. Заметили, что население одного города увеличивается с каждым годом в одном и том же отношении. Как велико это отношение, если за 3 года население увеличилось с 10 000 до 14 641 человека?

135. Показать, что ряд, образованный числами, обратными членам геометрической прогрессии, есть тоже геометрическая прогрессия. Верно ли такое свойство относительно арифметической прогрессии?

136. 5-й член геометрической прогрессии есть 61, а 11-й член равен 1647. Найти 7-й член.

137. Доказать, что во всякой геометрической прогрессии сумма 4-го, 5-го и 6-го членов есть среднее геометрическое между суммой 1-го, 2-го и 3-го членов и суммой 7-го, 8-го и 9-го членов.

138. Разность между 1-м и 2-м членами геометрической прогрессии равна 8, а сумма 2-го и 3-го членов есть 12. Найти прогрессию.

139. Могут ли стороны прямоугольного треугольника составлять геометрическую прогрессию?

III. Бесконечные прогрессии

85. Некоторые свойства бесконечных прогрессий. Если ряд чисел, составляющих прогрессию, продолжается неограниченно, то прогрессия называется *бесконечной*. Рассмотрим некоторые свойства таких прогрессий.

а) Возьмём бесконечно возрастающую арифметическую прогрессию, у которой разность очень мала; например, такую:

$$\div\ 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ 1{,}04;\ \ldots$$

Несмотря на то, что члены этой прогрессии при удалении от начала ряда растут очень медленно, они, однако, при достаточном удалении превзойдут любое данное число, как бы велико оно ни было; например, они сделаются больше 1 000 000. Действительно, для того чтобы $(n+1)$-й член такой прогрессии, равной сумме $1 + 0{,}01n$, сделался больше 1 000 000, достаточно для n взять такое большое число, которое удовлетворяло бы неравенству: $1 + 0{,}01n > 1\,000\,000$.

Из него находим: $n > \dfrac{999\,999}{0{,}01} = 99\,999\,900$.

Так как в бесконечной прогрессии число n может быть как угодно большим, то его можно взять бо́льшим 99 999 900; тогда $1 + 0{,}01n$ сделается больше 1 000 000.

Рассуждение это можно повторить о всякой арифметической возрастающей бесконечной прогрессии; поэтому мы можем высказать такое общее заключение:

Члены бесконечно возрастающей арифметической прогрессии при достаточном удалении их от начала ряда превосходят любое данное число, как бы оно велико ни было.

Возьмём бесконечно убывающую арифметическую прогрессию, например: $\div$ 1000, 998, 996, ... (разность 2). Как бы ни был велик начальный член, начиная с некоторого места члены прогрессии становятся отрицательными и при достаточном удалении от начала ряда абсолютная величина их превосходит любое данное число, как бы велико оно ни было.

б) Возьмём теперь бесконечно возрастающую геометрическую прогрессию с положительными членами, например, такую:

$$\div\div\ 1; 1,01; 1{,}01^2 = 1{,}0201; 1{,}01^3 = 1{,}030301;\ \ldots \quad (\text{знаменатель } 1{,}01),$$

и сравним её с бесконечной арифметической прогрессией:

$$\div\ 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03,\ \ldots \quad (\text{разность } 0{,}01),$$

у которой первые два члена одинаковы со взятой нами геометрической прогрессией.

Как мы видели раньше, члены геометрической прогрессии возрастают быстрее, чем члены арифметической прогрессии.

Но члены возрастающей арифметической прогрессии при достаточном удалении их от начала ряда превосходят любое число; значит, члены нашей геометрической прогрессии и подавно могут сделаться больше всякого данного числа. Таким образом:

Члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии (с положительными членами) при достаточном удалении от начала ряда превосходят любое данное число, как бы оно велико ни было.

Свойство это применимо и к такой возрастающей геометрической прогрессии, у которой члены, все или некоторые, — отрицательные числа (например, -5, -10, -20, ... или 5, -10, 20, -40, ...); только тогда надо говорить не о самих членах, а об их *абсолютных величинах.*

в) Возьмём теперь какой-нибудь пример бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, например, такой:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots \quad \left(\text{знаменатель } \frac{1}{2}\right).$$

Члены такой прогрессии при удалении их от начала ряда, конечно, уменьшаются, но могут ли они при этом сделаться меньше всякого данного положительного числа, например, меньше 0,000001, это сразу не видно. Чтобы обнаружить это, возьмём вспомогательную прогрессию, члены которой обратны членам взятой нами прогрессии:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots \quad (\text{знаменатель } 2).$$

Прогрессия эта возрастающая, и потому, как мы сейчас видели, члены её при достаточном удалении от начала ряда превосходят любое данное число; значит, они превосходят и 1 000 000. Если же окажется, что

$$2^n > 1\,000\,000,$$

то тогда, очевидно:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1\,000\,000}.$$

Применим это рассуждение к какой угодно бесконечно убывающей геометрической прогрессии (с положительными членами):

$$\div\!\div\; a,\ b,\ c,\ \ldots \quad (\text{знаменатель } q < 1).$$

Чтобы показать, что члены этой прогрессии при достаточном удалении от начала ряда делаются меньше любого данного положительного числа α (как бы мало это число ни было), возьмём вспомогательную геометрическую прогрессию:

$$\div\!\div\; \frac{1}{a},\ \frac{1}{aq},\ \frac{1}{aq^2},\ \frac{1}{aq^3},\ \ldots,\ \frac{1}{aq^3},\ \ldots \quad \left(\text{знаменатель } \frac{1}{q} > 1\right).$$

Прогрессия эта возрастающая, так как её знаменатель больше 1. Но члены возрастающей геометрической прогрессии могут превзойти всякое данное число; следовательно, они превзойдут и число $\frac{1}{\alpha}$. Поэтому при достаточно большом n будет удовлетворено неравенство:

$$\frac{1}{aq^n} > \frac{1}{\alpha},$$

и тогда $aq^n < \alpha$. Таким образом:

Члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами при достаточном удалении от начала ряда делаются меньше любого данного положительного числа.

Если в бесконечно убывающей геометрической прогрессии все или некоторые члены отрицательны, то указанное свойство применимо и к этой прогрессии, только надо будет говорить не о самих членах, а об их *абсолютных величинах.*

86. Понятие о пределе. Положим, что в бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots$$

мы взяли 10 членов от начала; тогда последний (10-й) член будет $\left(\frac{1}{2}\right)^9$, а сумма этих 10 членов (которую обозначим s_{10}) будет:

$$s_{10} = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 2 - \frac{1}{2^9}.$$

Подобно этому найдём:

$$s_{11} = 2 - \frac{1}{2^{10}};\ s_{12} = 2 - \frac{1}{2^{11}};\ \ldots;\ s_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Мы видим, что по мере увеличения числа членов сумма их приближается всё более и более к 2. Так, сумма s_{n+1} меньше 2 на дробь $\frac{1}{2^n}$, а эта дробь, как мы видели, при достаточно большом n делается меньше любого данного положительного числа.

Если какая-нибудь переменная величина (в нашем примере — сумма членов прогрессии), изменяясь, приближается всё более и более к некоторому постоянному числу (в нашем примере — к числу 2) так, что абсолютная величина разности между этим числом и переменной делается и остаётся меньше любого данного положительного числа, как бы мало оно ни было, то это постоянное число называется *пределом* переменной величины.

Заметив это, мы можем сказать, что переменная сумма

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

при неограниченном возрастании n стремится к пределу 2, что записывают так:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \to 2, \quad \text{если} \quad n \to \infty$$

($n \to \infty$ читается: «n стремится к бесконечности»), или пишут так:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Здесь lim есть сокращённое латинское слово limes (т. е. предел), а добавление внизу выражения $n \to \infty$ заменяет собой фразу: «когда n неограниченно увеличивается» (когда n стремится к ∞).

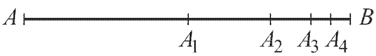


Рис. 27

Можно наглядно показать (см. рис. 27), что рассматриваемая сумма приближается неограниченно близко к 2. Пусть отрезок $AA_1 = 1$ и $AB = 2$. Тогда $1 + \frac{1}{2} = AA_2$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = AA_3$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = AA_4$ и т. д.; ясно, что при увеличении числа членов прогрессии мы неограниченно приближаемся к точке B, и, значит, сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ стремится к отрезку $AB = 2$.

87. Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Если в бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots \quad (-1 < q < 1)$$

возьмём n членов от начала, то n-й член будет aq^{n-1} и сумма n членов будет:

$$s_n = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Формулу эту можно представить так (подписав знаменатель под каждым членом числителя):

$$s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Предположим, что n неограниченно увеличивается. Тогда число $\frac{a}{1-q}$ остаётся неизменным, а дробь $\frac{aq^n}{1-q}$ по абсолютной величине уменьшается и притом неограниченно, так как числитель её по абсолютной величине делается меньше любого данного положительного числа, а знаменатель остаётся неизменным. Значит:

$$s_n \to \frac{a}{1 - q}, \quad \text{если} \quad n \to \infty.$$

Этот предел $\frac{a}{1-q}$ и называется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, т. е.:

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна частному от деления первого члена прогрессии на разность единицы и знаменателя прогрессии.

например, сумма членов геометрической прогрессии:

$$\because 2,\ -1,\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ +\frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \ldots,$$

у которой $q = -\frac{1}{2}$ и $a = 2$, равна $\frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$

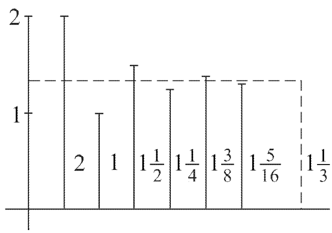


Рис. 28

На прилагаемом рисунке изображён ряд ординат, наглядно изображающих сравнительную величину одного, суммы двух, трёх, четырёх и т. д. членов данной прогрессии. Ординаты эти поочерёдно становятся то больше $1\frac{1}{3}$, то меньше $1\frac{1}{3}$, приближаясь всё более к этому числу (см. рис. 28).

88. Применение геометрической прогрессии к десятичным периодическим дробям. Возьмём следующие два примера десятичных *чистых* периодических дробей (т. е. таких, у которых период начинается тотчас после запятой): 1) 0,999... и 2) 0,232323....

Дроби эти представляют собой суммы:

$$1)\ \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\ldots;\quad 2)\ \frac{23}{100}+\frac{23}{10\,000}+\frac{23}{1\,000\,000}+\ldots$$

Слагаемые этих сумм — члены бесконечно убывающих геометрических прогрессий, у которых знаменатели прогрессии: у первой $\frac{1}{10}$, у второй $\frac{1}{100}$. Суммы эти равны:

$$1)\ \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{9}{10-1}=\frac{9}{9}=1;\quad 2)\ \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{100-1}=\frac{23}{99}.$$

Из этих примеров видно, что:

Чистая периодическая дробь равна такой обыкновенной дроби, у которой числитель есть период, а знаменатель — число, изображаемое цифрой 9, повторённой столько раз, сколько цифр в периоде.

Возьмём теперь два примера смешанных периодических дробей (т. е. таких, у которых период начинается не тотчас после запятой):

$$3)\ 0{,}2888\ldots \quad \text{и} \quad 4)\ 0{,}3545454\ldots$$

Дроби эти можно представить в виде сумм:

$$3)\ \frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10\,000}+\ldots;$$

$$4)\ \frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100\,000}+\frac{54}{10\,000\,000}+\ldots$$

Слагаемые этих сумм, начиная со второго, суть члены бесконечно убывающих геометрических прогрессий; в третьей сумме знаменателем служит дробь $\frac{1}{10}$, в четвёртой сумме — дробь $\frac{1}{100}$. Поэтому эти суммы будут:

$$3)\ \frac{2}{10}+\frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{10}+\frac{8}{100-10}=\frac{2}{10}+\frac{8}{90}=\frac{2\cdot 9+8}{90}=$$

$$=\frac{2\cdot 10-2+8}{90}=\frac{28-2}{90}=\frac{26}{90}=\frac{13}{45}.$$

$$4)\ \frac{3}{10}+\frac{\frac{54}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{1000-10}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=\frac{3\cdot 99+54}{990}=$$

$$=\frac{3\cdot 100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}=\frac{351}{990}=\frac{39}{110}.$$

Из этих примеров видно, что:

Смешанная периодическая дробь равна такой обыкновенной дроби, у которой числитель есть число, стоящее до второго периода, без числа, стоящего до первого периода, а знаменатель есть число, изображаемое цифрой 9, повторённой столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями на конце, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Упражнения.

Найти суммы бесконечно убывающих прогрессий:

140. $3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$; $\quad 8 - 4 + 2 - \ldots$

141. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$; $\quad 1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \ldots$

142. $1 + \frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2} + \ldots$; $\quad 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \ldots\ (b < a)$.

143. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ (0 < x < 1)$.

144. $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ (0 < x < 1)$.

145. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна $7\frac{1}{2}$, а сумма первых двух членов равна $6\frac{2}{3}$. Найти 6-й член прогрессии.

146. Найти точные величины периодических дробей: 0,777...; 2,7171...; 0,(142857); 0,3(8); 1,41(26); 0,16(21).

147. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат, вершины которого лежат в серединах сторон данного квадрата. В этот квадрат вписан подобным же образом третий квадрат, в третий вписан четвёртый и т. д. без конца. Найти сумму площадей и сумму периметров всех квадратов.

Глава 6

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОКАЗАТЕЛЯХ

I. Целые показатели

89. Свойства целых положительных показателей. Показатели степени до сего времени нами предполагались целыми и положительными, причём мы им придавали смысл, выражаемый в следующем определении:

Возвести число a в степень с целым и положительным показателем n — значит найти произведение n одинаковых сомножителей $aaa \dots a$.

Перечислим свойства этих показателей, известные нам из предыдущих глав алгебры:

1) при умножении степеней одного и того же числа показатели их складываются;

2) при делении степеней одного и того же числа показатель делителя вычитается из показателя делимого, если показатель делителя не больше показателя делимого;

3) при возведении отрицательного числа в степень с чётным показателем получается положительное число, а с нечётным показателем — отрицательное;

4) чтобы возвести в степень произведение, достаточно возвести в эту степень каждый сомножитель отдельно;

5) чтобы возвести степень в степень, достаточно перемножить показатели этих степеней;

6) чтобы возвести в степень дробь, достаточно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель;

7) чтобы возвести радикал в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение;

8) чтобы извлечь корень из степени, достаточно разделить показатель степени на показатель корня, если такое деление выполняется нацело.

Теперь мы расширим понятие о показателях, введя показатели отрицательные и дробные, которых до сего времени мы не употребляли. Мы увидим при этом, что *все свойства целых положительных* *показателей сохраняются и для показателей отрицательных и дробных.*

90. Нулевой показатель. При делении степеней одного и того же числа показатель делимого может оказаться равным показателю делителя.

Пусть нужно разделить a^n на a^n. Применяя правило (2) § 89, получаем:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Но нуль как показатель степени не имеет того значения, которое придаётся показателям целым и положительным, так как нельзя повторить число сомножителем нуль раз. Чтобы придать смысл выражению a^0, подойдём к вопросу о делении a^n на a^n с другой стороны. Мы знаем, что при делении любого (отличного от нуля) числа на равное ему число частное равно единице.

Поэтому условились считать $a^0 = 1$.

Таким образом, по определению:

Всякое число (за исключением нуля) в нулевой степени равно единице.

Легко убедиться в том, что перечисленные выше свойства целых положительных показателей применимы и к нулевому показателю. Так:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m; \quad (a^m)^0 = a^{m\cdot 0} = a^0 = 1 \quad \text{и т. п.}$$

91. Отрицательные целые показатели. Условимся при делении степеней одного и того же числа вычитать показатель делителя из показателя делимого и в том случае, если показатель делителя больше показателя делимого. Тогда мы получим в частном букву с отрицательным показателем, например: $a^2 : a^5 = a^{-3}$. Таким образом, число с отрицательным показателем мы условимся употреблять для обозначения *частного* от деления степеней этого числа в том случае, когда показатель делителя превосходит показатель делимого на столько единиц, сколько их находится в абсолютной величине отрицательного показателя. Так, a^{-2} означает частное $a : a^3$, или $a : a^4$, или $a^3 : a^5$, вообще частное $a^m : a^{m+2}$.

Применяемое в этом смысле число с отрицательным показателем равно дроби, у которой числитель 1, а знаменатель — то же число, но с положительным показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя.

Действительно, согласно нашему условию, мы должны иметь:

$$a^{-1} = \frac{a^m}{a^{m+1}}; \quad a^{-2} = \frac{a^m}{a^{m+2}}; \quad x^{-3} = \frac{x^m}{x^{m+3}} \quad \text{и т. п.}$$

Сократив две первые дроби на a^m и третью дробь на x^m (т. е. в обоих случаях сократив дроби на числитель), получим:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}; \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}; \quad x^{-3} = \frac{1}{x^3} \quad \text{и т. п.}$$

Вообще:

$$a^{-n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n}.$$

Заметим, что отрицательные показатели дают возможность представить всякое дробное алгебраическое выражение под видом целого; для этого стоит только все множители знаменателя перенести множителями в числитель, взяв их с отрицательными показателями. Например:

$$\frac{3a}{b^2c^3} = 3a \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^3} = 3ab^{-2}c^{-3}.$$

92. Действия над степенями с отрицательными показателями. Убедимся теперь, что все действия над степенями с отрицательными показателями можно производить по тем же правилам, какие были прежде выведены для показателей положительных. Достаточно обнаружить это только для умножения и возведения в степень, так как правила обратных действий — деления и извлечения корня — являются следствиями правил прямых действий.

Умножение. Предстоит показать, что при умножении степеней показатели одинаковых букв складываются и в том случае, когда эти показатели отрицательные. Убедимся, что $a^{-n} \cdot a^{-m} = a^{-n+(-m)} = a^{-(n+m)}$, где m и n — целые положительные числа.

Действительно, заменив степени с отрицательными показателями дробями и произведя действие умножения по правилам, относящимся к дробям, получим:

$$a^{-n} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^n \cdot a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)}.$$

Подобно этому:

$$x^{-n} \cdot x^m = x^{-n+m}, \text{ так как } x^{-n} \cdot x^m = \frac{1}{x^n} \cdot x^m = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = x^{-n+m}.$$

Возведение в степень. Надо показать, что при возведении в степень показатели этих степеней перемножаются и в том случае, когда они отрицательные. Убедимся, что $(a^{-n})^{-m} = a^{(-n)(-m)} = a^{nm}$.

Действительно:

$$(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(a^{-n})^m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} = a^{nm}.$$

Подобно этому:

$$(x^n)^{-m} = x^{-nm}, \quad \text{потому что} \quad (x^n)^{-m} = \frac{1}{(x^n)^m} = \frac{1}{x^{nm}} = x^{-nm}.$$

Примеры.

1) $(3a^{-2}b^2c^{-3})(0{,}8ab^{-3}c^4) = 2{,}4a^{-1}b^{-1}c$.

2) $(x^{-1}y^3z^2) : (5x^2y^{-2}z^3) = \frac{1}{5}x^{-3}y^5z^{-1}$.

3) $(2ax^{-3})^{-2} = 2^{-2}a^{-2}x^6$.

4) $(x^{-2} - y^{-1})^2 = (x^{-2})^2 - 2x^{-2}y^{-1} + (y^{-1})^2 = x^{-4} - 2x^{-2}y^{-1} + y^{-2}$.

5) $(a^{-2} + b^{-3})(a^{-2} - b^{-3}) = a^{-4} - b^{-6}$.

6) $\sqrt[3]{27p^{-9}q^{-3}} = 3p^{-3}q^{-1}$.

Упражнения.

148. Вычислить следующие выражения:

5^{-2}; 10^{-1}; 2^{-4}; $(-1)^{-1}$; $(-2)^{-2}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $(0{,}1)^{-3}$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $(0{,}3)^{-4}$.

Следующие выражения изобразить без знаменателя:

149. $\frac{1}{a^2b}$; $\frac{2}{a^3b^4}$; $\frac{3a}{x}$; $\frac{x}{3ay^2z^3}$.

150. $\frac{a}{a+x}$; $\frac{2}{a-x}$; $\frac{3ab}{(1+x)^2(1-x)}$.

Произвести указанные действия:

151. $7a^3b^{-1} \cdot 2ab^3$; $4\frac{1}{2}a^4x^{-3}y^{-2} \cdot 2a^{-4}x^3y^5$.

152. $a^3 : a^{-1}$; $x^{-2} : x$; $x^2 : x^2$; $x^{-2} : x^2$.

153. $10a^3b^{-2} : 5ab^{-5}$; $25a^{-3}b^{-2}x^2 : 5a^{-4}b^2x^3$.

154. $(a^{-2})^4$; $(a^2)^{-4}$; $(a^{-2})^{-4}$.

155. $(2a^2b^{-3})^2$; $\left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2}\right)^{-2}$.

156. $\left[\left(\frac{3a^3b^{-2}c^{-3}}{2x^2y}\right)^2\right]^{-3}$; $\sqrt{3a^{-2}\sqrt{27a^{-12}y^6}}$.

157. $(2a^{-1} - 1)(2a^{-1} + 1)$; $(a^{-2} - a^{-1})^2$.

II. Дробные показатели

93. В каком смысле употребляются дробные показатели. Мы знаем (§15), что при извлечении корня из степени делят показатель степени на показатель корня, если такое деление выполняется нацело; например,; $\sqrt{a^4} = a^2$; $\sqrt[3]{x^9} = x^3$ и т. п. Условимся теперь распространять это правило и на те случаи, когда показатель степени не делится нацело на показатель корня. Например, мы условимся принимать, что:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}; \quad \sqrt[3]{z^5} = z^{\frac{5}{3}}.$$

Вообще мы условимся, что:

Выражение $a^{\frac{m}{n}}$ означает корень, показатель которого равен знаменателю, а показатель степени подкоренного числа равен числителю показателя $\frac{m}{n}$, т. е. $\sqrt[n]{a^m}$.

Условимся употреблять отрицательные дробные показатели в том же смысле, в каком мы употребляли отрицательные целые показатели; например, условимся, что

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{a^m}{a^{m+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}.$$ [1]

94. Основное свойство дробного показателя. Величина степени с дробным показателем не изменится, если мы умножим или разделим на одно и то же число (отличное от нуля) числитель и знаменатель дробного показателя.

Так:

$$a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{9}{6}} = \ldots; \quad x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}.$$

Вообще:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}.$$

Действительно, знаменатель дробного показателя означает показатель корня, а числитель его означает показатель степени подкоренного выражения, а такие показатели, как мы видели (см. § 14), можно умножать и делить на одно и то же число.

Основываясь на этом свойстве, мы можем *преобразовывать дробный показатель совершенно так же, как и обыкновенную дробь*; например, мы можем сокращать дробный показатель или приводить несколько дробных показателей к одному знаменателю.

95. Действия над степенями с дробными показателями. Предстоит доказать, что к дробным показателям применимы правила, выведенные раньше для целых показателей. Это достаточно обнаружить только для умножения и возведения в степень, так как правила деления и извлечения корня являются следствиями правил умножения и возведения в степень.

Умножение. Докажем, что приумножении показатели степеней одинаковых букв складываются и тогда, когда эти показатели дробные. Например, убедимся, что

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{10+12}{15}} = a^{\frac{22}{15}}.$$

[1] Дробные показатели были введены в алгебру главным образом голландским инженером Симоном Стевином в начале XVII столетия. Позднее, в конце XVII столетия, оксфордский профессор Джон Валлис ввёл в употребление отрицательные показатели.

Для этого изобразим степени с дробными показателями в виде радикалов и произведём умножение по правилу умножения радикалов (см. § 18):

$$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^4}=\sqrt[15]{a^{10}}\cdot\sqrt[15]{a^{12}}=\sqrt[15]{a^{22}}=a^{\frac{22}{15}}.$$

Результат получился тот же самый, какой мы получили после сложения показателей; значит, правило о сложении показателей (при умножении) можно применять и для дробных показателей.

Таким образом:

$$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}};\qquad a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}.$$

Возведение в степень. Докажем, что при возведении степени в степень показатели степеней можно перемножать и тогда, когда эти показатели дробные. Например, убедимся, что

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}}=a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}}=a^{\frac{8}{15}}.$$

Действительно, заменив радикалами степени с дробными показателями и произведя действия над радикалами, получим:

$$\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^8}}=\sqrt[15]{a^8}=a^{\frac{8}{15}}.$$

Если показатели не только дробные числа, но и отрицательные, то и тогда к ним можно применять правила, доказанные раньше для положительных показателей. Например:

$$a^{-\frac{m}{n}}\cdot a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}=a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}=a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

96. Примеры на действия с дробными и отрицательными показателями.

1) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)=$

$$=\left[a^{\frac{1}{2}}+\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[a^{\frac{1}{2}}-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\right]=$$

$$=a-\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)^2=a-b-c+2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}=a-b-c+2\sqrt{bc}.$$

2) $\sqrt{12a^{-4}b^3}:\left[\left(\dfrac{a^5}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}}=$

$$=\left(2\cdot 3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{3}{2}}\right):\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}b^2}=2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}}=2b^3\sqrt{ab}.$$

Упражнения.

Произвести указанные действия:

158. $2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \cdot 5a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}$.

159. $20a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}} : 4a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}$; $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{a}}$.

160. $\sqrt[3]{3a^2b} : 4ab^3$; $\sqrt[12]{x^3} : x^{\frac{1}{4}}$.

161. $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^3 : \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-2}$; $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

162. $\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(x^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}} : 4\left(a^2b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

163. $\left(27a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

164. $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}$; $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{3}}}$; $\sqrt{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$.

165. $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(2a + \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$.

166. $\left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

167. Принимая, что (приблизительно) $10^{0,30103} = 2$ и $10^{0,47712} = 3$, изобразить в виде степеней 10 следующие числа: 4, 8, 16, 9, 24, 6, 12, 18.

III. Понятие об иррациональном показателе

97. Смысл степени с иррациональным показателем. Рассмотрим степени a^α, в которых α — какое-нибудь иррациональное число, когда основание степени a есть какое-нибудь положительное число, не равное 1. При этом могут представиться следующие три случая:

а) $a > 1$ и α — *положительное иррациональное число*; например, $10^{\sqrt{2}}$.

Обозначим через α_1 любое рациональное приближённое значение числа α, взятое с недостатком, и через α_2 — любое приближённое рациональное значение числа α, взятое с избытком. Тогда степень a^α означает такое число, которое *больше всякой степени* a^{α_1}, *но меньше всякой степени* a^{α_2}. Можно доказать, что такое число существует и единственно. Например, $10^{\sqrt{2}}$ означает такое число, которое больше каждого из чисел ряда:

$$10^{1,4},\ 10^{1,41},\ 10^{1,414},\ 10^{1,4142},\ \ldots,$$

в котором показатели — десятичные приближённые значения $\sqrt{2}$, взятые с недостатком, но меньше каждого из чисел ряда:

$$10^{1,5},\ 10^{1,42},\ 10^{1,415},\ 10^{1,4143},\ \ldots,$$

в котором показатели — десятичные приближения $\sqrt{2}$, взятые с избытком.

б) $a < 1$ и α — по-прежнему *положительное иррациональное число*, например, $0{,}5^{\sqrt{2}}$.

Тогда под степенью a^α разумеют такое число, *которое меньше всякой степени* a^{α_1}, *но больше всякой степени* a^{α_2}. Так, $0{,}5^{\sqrt{2}}$ есть число, меньшее каждого из чисел ряда:

$$0{,}5^{1,4},\ 0{,}5^{1,41},\ 0{,}5^{1,414},\ 0{,}5^{1,4142},\ \ldots,$$

но большее каждого из чисел ряда:

$$0{,}5^{1,5},\ 0{,}5^{1,42},\ 0{,}5^{1,415},\ 0{,}5^{1,4143},\ \ldots .$$

Таким образом, если иррациональное число α заключено между двумя рациональными числами α_1 и α_2, то степень a^α заключена между степенями a^{α_1} и a^{α_2} и тогда, когда $a > 1$, и тогда, когда $a < 1$.

в) $a \gtrless 1$ и α — *отрицательное иррациональное число*; например:

$$10^{-\sqrt{2}}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}.$$

Тогда выражению a^α придают тот же смысл, какой имеют степени с отрицательными рациональными показателями. Так:

$$10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}}.$$

При подробном рассмотрении теории иррациональных показателей обнаруживается, что все свойства показателей рациональных применимы и к показателям иррациональным; так:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

IV. Показательная функция

98. Определение. *Показательной функцией* называется функция $y = a^x$, представляющая собой степень, у которой основание a есть какое-нибудь постоянное положительное число, не равное 1, а показатель x — независимая переменная, могущая принимать всевозможные значения, положительные и отрицательные, целые и дробные, рациональные и иррациональные. При этом предполагается, что в том случае, когда показатель x равен дроби и, следовательно, когда a^x означает радикал некоторой степени, то из всех значений радикала берётся только одно арифметическое, т. е. положительное [1].

[1] Основание a предполагается не равным 1, так как при $a = 1$ степень a^x при всяком значении x равнялась бы 1 и тогда она не зависела бы от x. Основание a предполагается ещё и положительным, так как при $a < 0$ степень

Из того, что́ мы знаем о показателях степени, следует, что функция $y = a^x$ при всяком значении x имеет единственное значение (благодаря условию брать для радикалов только арифметическое значение).

99. Свойства показательной функции. Рассмотрим некоторые свойства показательной функции, помня, что a мы считаем положительным числом.

1. При всяком положительном основании функция a^x положительна, т. е. $a^x > 0$.

При x целом положительном $a^x > 0$, каково бы ни было положительное число a; следовательно, высказанное нами положение в этом случае справедливо.

Пусть теперь x равно некоторой положительной дроби, например, $x = \dfrac{m}{n}$. Тогда:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

Но $a^m > 0$, следовательно, и $\sqrt[n]{a^m} > 0$, так как мы условились брать лишь арифметическое значение корня.

Пусть x — положительное иррациональное число. Обозначим через α_1 и α_2 приближенные рациональные значения x по недостатку и избытку. Эти приближённые значения можно выбрать положительными. Тогда значение a^x, будучи заключённым между двумя положительными числами a^{α_1} и a^{α_2}, является положительным числом.

Пусть, наконец, x равно некоторому отрицательному числу, например, $x = -p$. Тогда:

$$a_x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Каково бы ни было положительное число p, согласно предыдущему $a^p > 0$, но тогда и $\dfrac{1}{a^p} > 0$.

Таким образом, высказанное нами положение справедливо для всякого x.

2. При $a > 1$ функция $a^x > 1$, если $x > 0$, и $a^x < 1$, если $x < 0$ (при $a < 1$ знаки неравенства для a^x противоположны).

Пусть x — целое положительное число. Тогда:

$$a > 1; \quad a^x > 1^x; \quad a^x > 1.$$

Пусть x — положительная дробь, например, $\dfrac{m}{n}$. Тогда:

$$a > 1; \quad a^m > 1; \quad \sqrt[n]{a^m} > \sqrt[n]{1}\,; \quad \sqrt[n]{a^m} > 1; \quad a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

---

a^x для многих значений x не давала бы никакого вещественного числа. Например, при $a = -4$ и при $x = \dfrac{1}{2}$ степень a^x обратилась бы в $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$, что является мнимым выражением.

Если x — положительное иррациональное число, то $a^{\alpha_1} > 1$, где α_1 — приближённое рациональное значение x по недостатку, а поэтому и $a^x > 1$. Таким образом, при всяком положительном x

$$a^x > 1.$$

Пусть теперь x есть какое-либо отрицательное число, например, $x = -p$. Тогда:

$$a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Но согласно предыдущему $a^p > 1$. Следовательно:

$$\frac{1}{a^p} < 1, \quad \text{т. е.} \quad a^x < 1.$$

3. При $a > 1$ функция a^x возрастает при возрастании x.

Если x_1 и x_2 — два целых положительных числа и $x_2 > x_1$, то очевидно, что при $a > 1$ будем иметь:

$$a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Пусть теперь x_1 и x_2 —положительные дроби, например, $x_1 = \dfrac{m}{n}$ и $x_2 = \dfrac{p}{q}$. Пусть также $x_2 > x_1$. Тогда:

$$\frac{p}{q} > \frac{m}{n}.$$

Или по приведении дробей к одному знаменателю:

$$\frac{pn}{qn} > \frac{mq}{qn}.$$

Из двух неравных дробей с одинаковыми знаменателями та больше, у которой числитель больше. Следовательно:

$$pn > mq.$$

Так как pn и mq — целые числа, то к ним можно применить предыдущие рассуждения и мы получим:

$$a^{pn} > a^{mq}.$$

Извлечём из a^{pn} и a^{mq} корень степени qn. Мы знаем, что из двух корней одинаковой степени тот больше, у которого больше подкоренное число. Следовательно:

$$\sqrt[qn]{a^{pn}} > \sqrt[qn]{a^{mq}}, \quad \text{или} \quad a^{\frac{pn}{qn}} > a^{\frac{mq}{qn}}.$$

Сокращая показатели, получим:

$$a^{\frac{p}{q}} > a^{\frac{m}{n}}, \quad \text{т. е.} \quad a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Пусть x_1 и x_2 — два вещественных числа, из которых одно или оба иррациональны.

Обозначим через β приближённое рациональное значение x_1 по избытку, а через α приближённое значение x_2 по недостатку. Если $x_1 < x_2$, то можно выбрать α и β при условии $\beta < \alpha$. Тогда будем иметь $a^{x_1} < a^{\beta}$ и $a^{\alpha} < a^{x_2}$. Но так как $a^{\beta} < a^{\alpha}$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$.

100. График показательной функции. Построим график следующих трёх показательных функций:

$$1)\ y = 2^x, \quad 2)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 3)\ y = 10^x.$$

Для построения графиков первых двух функций мы дадим переменной величине x ряд целых значений:

$$-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

При $x = -3$ мы получим:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 1 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 : \frac{1}{8} = 8.$$

Подобно этому вычислим значения y и для всех остальных значений x.

Для функции $y = 10^x$ неудобно брать указанные значения переменной x, так как мы получили бы тогда для y такие большие числа, которые на рис. 29 не умещаются (например, при $x = 3$ мы получили бы $y = 10^3 = 1000$). Для этой функции мы возьмём такие дробные значения (заключающиеся между -1 и $+1$):

$$x = -1;\ -\frac{3}{4}; -\frac{2}{4};\ -\frac{1}{4}; 0;\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{4};\ 1.$$

Соответствующие значения y вычислим в такой последовательности:

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3{,}162} = 1{,}778,$$
$$10^{\frac{2}{4}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162.$$

Далее простым умножением и делением находим:

$$10^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{2}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{4}} = 3{,}162 \cdot 1{,}778 = 5{,}62\ldots,$$
$$10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{1{,}778} = \frac{1000}{1778} = 0{,}56\ldots,$$
$$10^{-\frac{2}{4}} = \frac{1}{3{,}162} = \frac{1000}{3162} = 0{,}32\ldots,$$
$$10^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5{,}62} = \frac{100}{562} = 0{,}17\ldots .$$

Выпишем все найденные значения в следующие три таблицы:
1) $y = 2^x$.

x	возрастает	-3	-2	-1	0	1	2	3	возрастает
y	возрастает	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	возрастает

2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	возрастает	-3	-2	-1	0	1	2	3	возрастает
y	убывает	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	убывает

3) $y = 10^x$.

x	возрастает	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	возрастает
y	возрастает	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10	возрастает

(в последней таблице числа округлены).

Нанеся эти значения на чертёж и соединяя полученные точки кривыми, мы получим (см. рис. 29) три графика взятых функций (удобно чертёж выполнить на миллиметровой бумаге, беря за единицу длины сантиметр).

Рассматривая графики показательных функций, мы видим на них в наглядном изображении следующие свойства:

1. При всяком положительном основании функция a^x положительна (все кривые расположены выше оси x-ов).

2. При $a > 1$ функция $a^x > 1$, если $x > 0$, и $a^x < 1$, если $x < 0$ (при $a < 1$ знаки неравенств для a^x противоположны).

3. При возрастании x функция a^x возрастает, если $a > 1$ (и убывает, если $a < 1$).

4. Если $x = 0$, то $a^x = 1$ при всяком a (все кривые проходят через одну и ту же точку, лежащую на оси y-ов и отстоящую от точки O на $+1$).

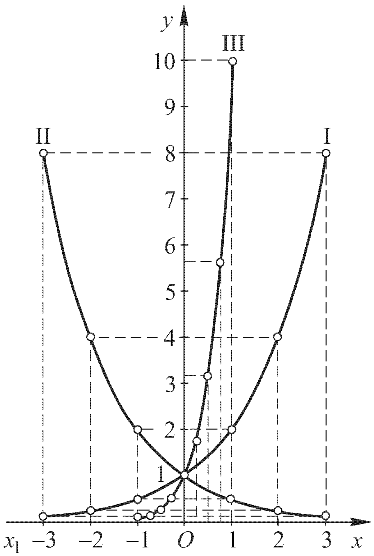


Рис. 29

5. При $a > 1$ функция при возрастании x возрастает тем быстрее, чем больше a (кривая при $a = 10$ поднимается вверх значительно больше, чем при $a = 2$).

Упражнения.

168. Построить график функции $y = 3^x$ в промежутке от $x = 0$ до $x = 3$, давая показателю значения: 0; $\frac{1}{2}$; 1; $1\frac{1}{2}$; 2; $2\frac{1}{2}$; 3.

169. Построить график функции $y = 2^x$ в промежутке от $x = -3$ до $x = +2$ (за единицу принять сантиметр). Пользуясь графиком, найти приближённое значение величины x, удовлетворяющее уравнению $2^x = 5$.

170. Построить график функции $y = \dfrac{2^x - 1}{x + 3}$ в промежутке от -1 до $+4$ (беря 2 см за единицу длины). Пользуясь графиком, найти y, если $x = 1{,}5$ и если $x = -0{,}5$.

Глава 7
ЛОГАРИФМЫ

I. Общие свойства логарифмов

101. Два действия, обратных возведению в степень. Возьмём равенство:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

Это равенство выражает действие, называемое *возведением в степень*. В этом действии даются основание степени (число 2) и показатель степени (число 3), а отыскивается самая степень (8). Посмотрим, какие действия *обратны* возведению в степень. Таких действий можно указать два:

1. Пусть требуется узнать, какое число надо возвести в степень с показателем 3, чтобы получить число 12. Обозначив искомое число буквой x, мы можем написать уравнение $x^3 = 12$. Действие, посредством которого находится основание x по данной степени и данному показателю её, называется *извлечением корня*; оно обозначается, как мы знаем, так:

$$x = \sqrt[3]{12}\,.$$

2. Положим, надо узнать, какой показатель должен быть у степени, в которую надо возвести основание 4, чтобы получить 16. Обозначив искомый показатель буквой x, мы можем написать уравнение: $4^x = 16$. Действие, посредством которого находится показатель степени по данной степени и данному основанию, называется *нахождением логарифма* данного числа (16) по данному основанию (4). В нашем примере $x = 2$, так как $4^2 = 16$.

Итак, возведение в степень имеет два обратных действия. Поставим вопрос: различны ли эти действия? Ведь и для умножения можно рассмотреть два обратных действия: первое — нахождение множимого по данным произведению и множителю, второе — нахождение множителя по данным произведению и множимому. Однако действия эти рассматриваются не как различные, а как одно и то же действие, называемое делением. Причина слияния этих двух обратных действий в одно заключается в переместительном свойстве умножения, по которому произведение не меняется от перемены мест множимого и множителя. В таком же положении находится и сложение (двух слагаемых);

этому действию также можно указать два обратных действия: одно — нахождение неизвестного числа (первого слагаемого), к которому надо прибавить данное число (второе слагаемое), чтобы получить данную сумму; другое — нахождение неизвестного числа (второго слагаемого), которое надо прибавить к данному числу (к первому слагаемому), чтобы получить данную сумму. Однако эти два действия рассматриваются как одно, называемое вычитанием, вследствие того, что сложение обладает переместительным свойством, по которому сумма не зависит от порядка слагаемых. Если бы это свойство принадлежало также возведению в степень, то тогда и два указанных выше обратных действия составляли бы в сущности одно. Но возведение в степень не обладает свойством переместительности: например, 2^3 не равно 3^2, 10^2 не равно 2^{10} и т. п. Вследствие этого нахождение основания по данным показателю и степени (извлечение корня) существенно отличается от нахождения показателя по данным основанию и степени (нахождение логарифма).

102. Определение. *Логарифмом данного числа по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести это основание, чтобы получить данное число.*

Если, например, основание будет 4, то:

логарифм	16	есть	2,	так как	$4^2 = 16$;
"	64	"	3,	"	$4^3 = 64$;
"	4	"	1,	"	$4^1 = 4$;
"	2	"	$\frac{1}{2}$,	"	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;
"	$\frac{1}{2}$	"	$-\frac{1}{2}$,	"	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$;
"	$\frac{1}{4}$	"	-1,	"	$4^{-1} = \frac{1}{4}$.

Если возьмём за основание 10, то

логарифм	10	есть	1,	так как	$10^1 = 10$;
"	100	"	2,	"	$10^2 = 100$;
"	1000	"	3,	"	$10^3 = 1000$;
"	0,1	"	-1,	"	$10^{-1} = \frac{1}{10}$;
"	0,01	"	-2,	"	$10^{-2} = \frac{1}{100}$.

Вместо того чтобы писать: «логарифм числа 16 по основанию 4», пишут сокращённо так: $\log_4 16$, помещая внизу справа от знака log то число, которое служит основанием. Впрочем, если заранее известно, какое число взято за основание, то его принято не писать. Вместо знака log (сокращения слова «логарифм») пишут lg, если основанием служит число 10.

Прежде чем говорить о применениях логарифмов, мы предварительно рассмотрим некоторые свойства так называемой логарифмической функции.

103. Логарифмическая функция и её график. Если в равенстве $y = a^x$ мы рассматриваем показатель x как независимую переменную, то тогда y будет функцией от x, которую мы назвали раньше *показательной*. Но если в этом равенстве за независимую переменную мы будем считать y, то тогда x будет некоторая функция от y, а именно: x есть логарифм числа y по основанию a, что можно записать так:

$$x = \log_a y.$$

Обозначая по принятому независимую переменную буквой x, а функцию от этой переменной буквой y (т. е. заменяя x на y, и наоборот), мы ту же самую функцию можем выразить так:

$$y = \log_a x.$$

Такая функция называется *логарифмической* (она обратна показательной функции).

Построим графики следующих трёх логарифмических функций:

$$1)\ y = \log_2 x; \quad 2)\ y = \log_{\frac{1}{2}} x; \quad 3)\ y = \log_{10} x.$$

Для этого составим таблицы значений этих функций. Всего проще их можно составить из таблиц соответственных показательных функций (§ 100):

$$1)\ y = 2^x; \quad 2)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 3)\ y = 10^x,$$

поменяв в этих таблицах значения абсциссы x на значения ординаты y и наоборот. Сделав это, мы получим такие три таблицы:

$$1)\ y = \log_2 x.$$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

$$2)\ y = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

$$3)\ y = \log_{10} x.$$

x	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10
y	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Нанеся все эти значения на чертёж и соединив точки кривыми линиями, получим (см. рис. 30) три графика взятых функций.

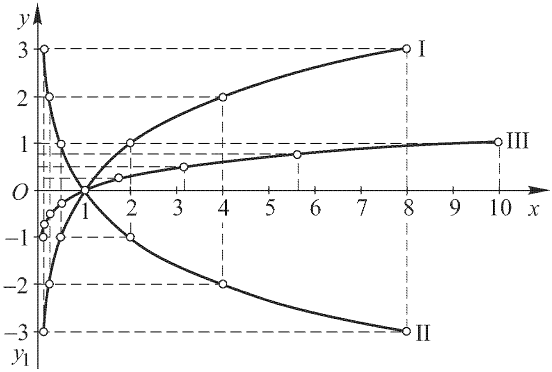


Рис. 30

Имея график логарифмической функции, мы можем при помощи его найти приближённое значение логарифма данного числа. Возьмём, например, график функции $y = \log_2 x$ и найдём при его помощи $\log_2 6$. Для этого возьмём на чертеже абсциссу, равную 6, и построим соответствующую ей ординату. Измерив эту ординату, найдём приблизительно 2,6; это и будет $\log_2 6$.

104. Основные свойства логарифмов. Возьмём логарифмическую функцию

$$y = \log_a x.$$

Согласно определению, имеем:

$$x = a^y.$$

Выведем некоторые свойства логарифмов.

1. При положительном основании отрицательные числа не имеют логарифмов.

При рассмотрении показательной функции мы видели, что при $a > 0$ функция $a^y > 0$ при всяком y. Это значит, что каковы бы ни были (положительное) основание a и показатель (логарифм) y, функция a^y, т. е. x, всегда является положительным числом.

2. При всяком основании (не равном единице) логарифм единицы есть нуль.

Действительно, мы знаем, что при всяком a (не равном нулю)

$$a^0 = 1.$$

Но, согласно определению, это значит, что $\log_a 1 = 0$.

3. При основании, большем единицы, логарифмы чисел, больших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.

Относительно показательной функции a^y мы знаем, что при $a > 1$: если $y > 0$, то $a^y = x > 1$, и если $y < 0$, то $a^y = x < 1$.

Но, согласно определению, y есть логарифм числа x. Значит, когда число $x > 1$, то логарифм его $y > 0$, т. е. положителен. Когда же число $x < 1$, то логарифм его $y < 0$, т. е. отрицателен.

Если $a < 1$, то $y < 0$ для значений $x > 1$, и $y > 0$, если $x < 1$.

4. Логарифм самого основания равен единице.

В самом деле:

$$a^1 = a, \quad \text{отсюда:} \quad \log_a a = 1.$$

5. При основании, большем единицы, большему числу соответствует больший логарифм.

Мы видели, что при $a > 1$ функция a^y возрастает вместе с возрастанием y. Если обозначим два различных значения y через y_1, y_2, соответствующие значения a^y через x_1, x_2, то будем иметь:

$$a^{y_2} > a^{y_1}, \quad \text{если} \quad y_2 > y_1,$$

или

$$x_2 > x_1, \quad \text{если} \quad y_2 > y_1,$$

Но y_1 и y_2 являются соответственно логарифмами чисел x_1 и x_2. Значит:

$$x_2 > x_1, \quad \text{если} \quad \log_a x_2 > \log_a x_1,$$

Все указанные свойства логарифмов можно иллюстрировать, рассматривая график логарифмической функции. Так, первое свойство означает, что график функции $y = \log_a x$ лежит весь вправо от оси y-ов. Второе свойство говорит о том, что график функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1,0). Третье свойство означает, что если $a > 1$, то при $x > 1$ ординаты кривой положительны, а при $x < 1$ — отрицательны и т. д.

Упражнения.

171. Если основание равно 2, то какие логарифмы имеют числа:

$$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \sqrt{2};\ \sqrt[3]{2};\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16}?$$

172. Написать при помощи знака log следующие равенства:

$$10^0 = 1; \quad 10^1 = 10; \quad 10^2 = 100; \quad 10^{-2} = 0{,}01; \quad a^x = N.$$

173. Переписать без знака log равенства:

$$\log_{10} 1000 = 3; \quad \log_{10} 0{,}001 = -3; \quad \log_{16} 4 = \frac{1}{2}; \quad \log_a P = y.$$

174. При основании 16 какие логарифмы имеют числа:

$$16;\ 256;\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{256};\ 4;\ \frac{1}{4};\ 2;\ \frac{1}{2}?$$

175. При основании 10 какие логарифмы имеют числа:

$$10;\ 100;\ 1000;\ 10\,000;\ 0{,}1;\ 0{,}001;\ 0{,}0001?$$

176. Написать при помощи знака log следующие равенства:

$$5^2 = 25;\ 7^3 = 343;\ 3^7 = 2187;\ 8^3 = 512.$$

177. Найти

$$\log_2 2; \quad \log_3 9; \quad \log_3 729; \quad \log_3 1; \quad \log_3 \frac{1}{3}; \quad \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

178. Если a есть положительное число, отличное от 1, то чему равны выражения:

$$\log_a a^2; \quad \log_a a^n; \quad \log_a \frac{1}{a}; \quad \log_a \sqrt{a}; \quad \log_a \frac{1}{\sqrt{a}}?$$

179. Чему равно число x, если:

$$\log_2 x = 3; \quad \log_5 x = 2; \quad \log_4 x = -5; \quad \log_x 4 = 2; \quad \log_x 2 = -\frac{1}{2}?$$

180. Построить график функции $y = \log_3 x$, пользуясь таблицей значений функции $y = 3^x$ (см. задачу 168).

105. Практическое значение логарифмических таблиц. Различные числа можно выражать как степени одного и того же числа, например, как степени числа 10. Такие числа, как 10; 100; 1000; ... или 0,1; 0,01; 0,001 и т. п., выражаются как степени 10 очень просто: $10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; ...; $0{,}1 = 10^{-1}$; $0{,}01 = 10^{-2}$; $0{,}001 = 10^{-3}$ и т. п. Другие числа выразить степенью числа 10 труднее. Так, если требуется найти показатель степени, в которую нужно возвести 10, чтобы получить число 5, то мы можем только сказать, что искомый показатель больше 0, но меньше 1, так как $10^0 = 1$, что меньше 5, а $10^1 = 10$, что больше 5; значит, показателем степени, в которую надо возвести 10 для получения 5, должно быть некоторое положительное число, меньшее 1. Мы можем даже сказать, что это число больше $\frac{1}{2}$, но меньше $\frac{3}{4}$, так как $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162$, что меньше 5, а $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000} = \sqrt{\sqrt{1000}} = \sqrt{31{,}62} = 5{,}62$, что больше 5. Есть разделы математики, в которых указываются способы, как можно для всякого данного числа N найти такой показатель x, при котором степень 10^x или в точности равняется N, или отличается от этого числа как угодно мало. С использованием этих способов составлены так называемые *логарифмические таблицы*, в которых помещены различные числа и около каждого из этих чисел указан показатель степени (логарифм), в которую надо возвести 10, чтобы получить это число. Разъясним, для какой цели могут служить такие таблицы.

Пусть требуется вычислить число x по формуле; $x = \sqrt[5]{40}$.

Извлекать корень пятой степени мы не умеем. В подобных случаях могут помочь логарифмические таблицы. Находим в этих таблицах число 40 и около него соответствующий логарифм. Пусть это будет 1,6... Это значит, что

$$40 = 10^{1,6...}$$

и, следовательно,

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6...}}.$$

Так как при извлечении корня из степени показатель подкоренного числа (какой бы он ни был) делится на показатель корня, то

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6...}} = 10^{\frac{1,6...}{5}} = 10^{0,32...}.$$

Теперь в тех же таблицах, в столбце логарифмов, находим 0,32 и около него соответствующее число; пусть это будет, положим, 2,09... Это и будет приближённое значение $\sqrt[5]{40}$.

Мы вскоре увидим, что логарифмические таблицы во многих случаях позволяют производить такие действия над числами, которые без таблиц были бы крайне затруднительны (как в примере, только что приведённом) или на выполнение которых потребовалось бы очень много времени.

Теперь нам предстоит ознакомиться, во-первых, с тем, как при совершении какого-либо действия над данными числами можно найти логарифм искомого числа при помощи логарифмов данных чисел (взятых из таблиц), и, во-вторых, как, найдя такой логарифм, отыскать по нему в таблицах искомое число.

106. Логарифмы произведения, частного, степени и корня.

а) Пусть требуется произвести умножение:

$$378 \cdot 45{,}2.$$

Попробуем выполнить это действие посредством логарифмов. Найдём в таблицах логарифмы чисел 378 и 45,2. Пусть они будут: 2,5775 и 1,6551 (по основанию 10). Это значит, что

$$378 = 10^{2,5775} \quad \text{и} \quad 45{,}2 = 10^{1,6551}$$

и, следовательно,

$$378 \cdot 45{,}2 = 10^{2,5775} \cdot 10^{1,6551}.$$

Так как при умножении степеней одного и того же числа показатели этих степеней складываются (какие бы ни были эти показатели), то:

$$378 \cdot 45{,}2 = 10^{2,5775+1,6551} = 10^{4,2326}.$$

Значит, логарифм произведения $378 \cdot 45{,}2$ есть число 4,2326, получившееся от сложения логарифмов данных сомножителей (по этому логарифму в таблицах найдём и само произведение).

Положим вообще, что N_1 и N_2 будут два числа, произведение которых требуется вычислить. Пусть мы нашли в таблицах логарифмы этих чисел: x_1 и x_2. Основанием логарифмов может быть число 10, но может быть и какое-нибудь другое положительное число, которое мы обозначим через a. Тогда мы будем иметь равенства:

$$N_1 = a^{x_1}, \quad N_2 = a^{x_1}, \quad \text{следовательно,} \quad N_1N_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}.$$

Отсюда видно, что $\log(N_1N_2) = x_1 + x_2$. Но x_1 — это $\log N_1$, а x_2 — это $\log N_2$; значит:

$$\log(N_1N_2) = \log N_1 + \log N_2.$$

Логарифм произведения (по какому угодно основанию) равен сумме логарифмов сомножителей (взятых по тому же основанию).

Заключение это остаётся верным и тогда, когда сомножителей будет более двух, так как при умножении степеней одного и того же числа показатели степеней складываются и при любом числе сомножителей.

б) Положим, надо произвести деление:

$$5637 : 26{,}3.$$

Найдём в таблицах логарифмы этих чисел (например, по основанию 10). Пусть $\log 5637 = 3{,}751$ и $\log 26,3 = 1{,}42$. Тогда:

$$5637 = 10^{3,751} \quad \text{и} \quad 26,3 = 10^{1,42}.$$

Следовательно,

$$5637 : 26,3 = 10^{3,751} : 10^{1,42} = 10^{3,751-1,42} = 10^{2,331}.$$

Отсюда видно, что логарифм частного $5637 : 26,3$ есть число 2,331, получившееся от вычитания логарифма делителя из логарифма делимого. Вообще, если

$$N_1 = a^{x_1} \text{ и } N_2 = a^{x_2}, \quad \text{то } N_1 : N_2 = a^{x_1 : x_2} = a^{x_1 - x_2}.$$

Следовательно,

$$\log(N_1 : N_2) = x_1 - x_2 = \log N_1 - \log N_2.$$

Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.

Так как всякая дробь есть частное от деления числителя на знаменатель, то:

Логарифм дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя.

Например:

$$\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3; \quad \log 2\frac{3}{4} = \log \frac{11}{4} = \log 11 - \log 4;$$
$$\log 0{,}6 = \log 6 - \log 10.$$

в) Если $N = a^x$, то $N^n = (a^x)^n = a^{nx}$, следовательно,

$$\log(N^n) = nx = n \log N.$$

Логарифм степени равен показателю этой степени, умноженному на логарифм числа, возводимого в степень.

Например, $\log(15{,}3)^2 = 2 \log 15{,}3$; $\log 3^{-2} = -2 \log 3$.

Так как $\sqrt[n]{N} = N^{\frac{1}{n}}$, то, применяя правило о логарифме степени, получим:

$$\log \sqrt[n]{N} = \log N^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log N = \frac{\log N}{n}.$$

Логарифм корня равен логарифму подкоренного числа, делённому на показатель корня.

107. Логарифмирование алгебраического выражения. Логарифмировать алгебраическое выражение — значит выразить логарифм его посредством логарифмов отдельных чисел, составляющих это выражение. Выводы предыдущего параграфа позволяют это сделать в применении к произведению, частному, дроби, степени и корню.

Например:

$$1)\ \log\frac{2{,}5\cdot 7^3}{0{,}28}=\log(2{,}5\cdot 7^3)-\log 0{,}28=\log 2{,}5+\log 7^3-\log 0{,}28=$$
$$=\log 2{,}5+3\log 7-\log 0{,}28.$$

$$2)\ \log\frac{5ax}{\sqrt{3}}=\log(5ax)-\log\sqrt{3}=\log 5+\log a+\log x-\frac{1}{2}\log 3.$$

$$3)\ \log(a^3\sqrt{5x}\,)=3\log a+\frac{1}{2}(\log 5+\log x)=3\log a+\frac{1}{2}\log 5+\frac{1}{2}\log x.$$

108. Замечания. а) Если в выражении, которое требуется вычислить, встречается *сумма* или *разность* чисел, то их надо находить без помощи таблиц, обыкновенным сложением или вычитанием [1]). Например:

$$\log(35+7{,}24)^5=5\log(35+7{,}24)=5\log 42{,}24.$$

б) Умея логарифмировать выражения, мы можем, обратно, по данному результату логарифмирования найти то выражение, от которого получился этот результат; так, если

$$\log x=\log a+\log b-3\log c,$$

то легко сообразить, что

$$x=\frac{ab}{c^3}.$$

Эту операцию называют *потенцированием.*

в) Прежде чем перейти к рассмотрению устройства логарифмических таблиц, мы укажем некоторые свойства *десятичных логарифмов*, т. е. таких, в которых за основание принято число 10.

Упражнения.

Логарифмировать следующие выражения:

181. $\log(a^2b^3)$; $\log(5a^2x^2)$; $\log(mn)^3$.

182. $\log\dfrac{2a^2}{3b^8}$; $\log\dfrac{4a^3b^{-8}}{5mn^4x^{\frac{1}{2}}}$; $\log\sqrt{ab}$.

183. $\log\sqrt[3]{7a^3b}$; $\log\left(4\sqrt[5]{2ab^3}\right)$; $\log\left(7a^8b\sqrt[8]{c}\right)$.

184. $\log\dfrac{a^3\sqrt{2b}}{8x^3y^2}$.

185. $\log\sqrt{10a\sqrt[3]{b^2}}$; $\log\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}$.

Найти выражение x, если его логарифм равен:

186. $\log x=\log a+\log b$; $\log x=\log a-\log b$.

187. $\log x=2\log a$; $\log x=2\log a+3\log b$.

188. $\log x=\dfrac{1}{2}\log a$; $\log x=\dfrac{1}{3}(\log a+\log b)$.

---

[1]) Так как мы не имеем формул, выражающих логарифм суммы или разности в зависимости от логарифмов данных чисел.

II. Свойства десятичных логарифмов

109. Свойства десятичных логарифмов. а) Так как $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10\,000$ и т. д., то $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$; $\lg 1000 = 3$; $\lg 10\,000 = 4$ и т. д.

Логарифм целого числа, изображаемого единицей с последующими нулями, есть целое положительное число, содержащее столько единиц, сколько нулей в изображении числа.

Таким образом, $\lg 100\,000 = 5$, $\lg 1\,000\,000 = 6$ и т. д.

б) Так как

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1; \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01;$$

$$10^{-3} = 0{,}001; \quad 10^{-4} = 0{,}0001 \quad \text{и т. д., то}$$

$$\lg 0{,}1 = -1; \quad \lg 0{,}01 = -2; \quad \lg 0{,}001 = -3 \quad \text{и т. д.}$$

Логарифм десятичной дроби, изображаемой единицей с предшествующими нулями, есть целое отрицательное число, содержащее столько отрицательных единиц, сколько нулей в изображении дроби, считая в том числе и 0 целых.

Таким образом, $\lg 0{,}00001 = -5$, $\lg 0{,}000001 = -6$ и т. д.

в) Возьмём целое число, не изображаемое единицей с нулями, например, 35, или целое число с дробью, например, 10,7. Логарифм такого числа не может быть целым числом, так как, возведя 10 в степень с целым показателем (положительным или отрицательным), мы получим единицу с нулями (следующими за единицей или ей предшествующими). Предположим теперь, что логарифм такого числа есть какая-нибудь дробь $\frac{a}{b}$. Тогда мы имели бы равенства:

для числа 35: $10^{\frac{a}{b}} = 35$; $\sqrt[b]{a} = 35$; $10^a = 35^b$;

для числа 10,7: $10^{\frac{a}{b}} = 10{,}7$; $\sqrt[b]{10^a} = 10{,}7$; $10^a = 10{,}7^b$.

Но эти равенства невозможны, так как 10^a есть единица с нулями, тогда как степени 35^b и $10{,}7^b$ ни при каком показателе b не могут дать единицы с нулями. Логарифм числа, не являющегося степенью десяти, есть число иррациональное, он (т. е. логарифм) не может быть выражен точно каким бы то ни было рациональным числом. Обыкновенно иррациональные логарифмы выражают *приближённо* в виде десятичной дроби с несколькими десятичными знаками. Целая часть этой дроби называется *характеристикой,* а дробная часть — *мантиссой* логарифма. Если, например, логарифм есть 1,5441, то характеристика его равна 1, а мантисса есть 0,5441.

г) Возьмём какое-нибудь целое или смешанное число, например, 623 или 623,57. Логарифм такого числа состоит из характеристики и мантиссы. Оказывается, что десятичные логарифмы обладают тем удобством, что *характеристику их мы всегда можем найти по одно-*

му виду данного числа. Для этого сосчитаем, сколько цифр в данном целом числе или в целой части смешанного числа. В наших примерах этих цифр три. Поэтому каждое из чисел 623 и 623,57 больше 100, но меньше 1000; значит, и логарифм каждого из них больше $\lg 100$, т. е. двух, но меньше $\lg 1000$, т. е. трёх (вспомним, что большее число имеет и больший логарифм). Следовательно, $\lg 623 = 2,\ldots$ и $\lg 623{,}57 = 2,\ldots$ (точки заменяют собой неизвестные мантиссы).

Подобно этому найдём:

$$10 < 56{,}7 < 100; \quad 1000 < 8634 < 10000;$$
$$1 < \lg 56{,}7 < 2; \quad 3 < \lg 8634 < 4.$$

Следовательно:

$$\lg 56{,}7 = 1,\ldots; \quad \lg 8634 = 3,\ldots .$$

Пусть вообще в данном целом числе N или в его целой части содержится m цифр. Так как самое малое целое число, содержащее m цифр, есть 1 с $(m-1)$ нулями, то можем написать неравенство:

$$\overbrace{1000\ldots0}^{(m-1)\text{ нулей}} \leqslant N < \overbrace{1000\ldots0}^{m\text{ нулей}}$$

и, следовательно,

$$m - 1 \leqslant \lg N < m,$$

а поэтому

$$\lg N = (m-1) + 0,\ldots$$

Значит, характеристика $\lg N$ равна $m - 1$.

Мы видим, таким образом, что:

Характеристика логарифма целого или смешанного числа содержит столько положительных единиц, сколько цифр в целой части числа без одной.

Заметив это, мы можем прямо писать: $\lg 7{,}205 = 0,\ldots$; $\lg 83 = 1,\ldots$; $\lg 720{,}4 = 2,\ldots$ и т. п.

д) Возьмём несколько десятичных дробей, меньших 1 (т. е. имеющих 0 целых): 0,35; 0,07; 0,0056; 0,0008 и т. п.

Очевидно, что	Следовательно:
$0{,}1 < 0{,}35 < 1;$	$-1 < \lg 0{,}35 < 0;$
$0{,}01 < 0{,}07 < 0{,}1;$	$-2 < \lg 0{,}07 < -1;$
$0{,}001 < 0{,}0056 < 0{,}01;$	$-3 < \lg 0{,}0056 < -2;$
$0{,}0001 < 0{,}0008 < 0{,}001.$	$-4 < \lg 0{,}00084 < -3.$

Таким образом, каждый из этих логарифмов заключён между двумя целыми отрицательными числами, различающимися на одну единицу, поэтому каждый из них равен меньшему из этих отрицательных чисел, увеличенному на некоторое положительное число, меньшее единицы. например, $\lg 0{,}0056 = -3 + 0,\ldots$. Предположим, что второе слагаемое будет 0,7482. Тогда

$$\lg 0{,}0056 = -3 + 0{,}7482 = -2{,}2518.$$

Такие суммы, как $-3 + 0{,}7482$, состоящие из целого отрицательного числа и положительной десятичной дроби, условились при логарифмических вычислениях писать сокращённо так: $\overline{3}{,}7482$ [1]), т. е. ставить знак минус над характеристикой с целью показать, что он относится только к характеристике, а не к мантиссе, которая остаётся положительной. Таким образом, из приведённой выше таблички видно, что

$$\lg 0{,}35 = \overline{1},\ldots;\quad \lg 0{,}07 = \overline{2},\ldots;\quad \lg 0{,}0008 = \overline{4},\ldots.$$

Пусть вообще $A = \overbrace{0{,}000\ldots0}^{m \text{ нулей}}\alpha\beta\ldots$ есть десятичная дробь, у которой перед первой значащей цифрой α стоит m нулей, считая в том числе и 0 целых. Тогда очевидно, что

$$\overbrace{0{,}000\ldots0}^{m \text{ нулей}}1 \leqslant A < \overbrace{0{,}000\ldots0}^{(m-1) \text{ нулей}}\ 1.$$

Следовательно:

$$\lg\overbrace{0{,}000\ldots0}^{m \text{ нулей}}1 \leqslant \lg A < \lg\overbrace{0{,}000\ldots0}^{m-1 \text{ нулей}}\ 1.$$

т. е.

$$-m \leqslant \lg A < -(m-1).$$

Так как из двух чисел: $-m$ и $-(m-1)$ меньшее есть $-m$, то

$$\lg A = -m + 0,\ldots$$

и поэтому характеристика $\lg A$ равна $-m$ (при положительной мантиссе).

Характеристика логарифма десятичной дроби, меньшей 1, содержит в себе столько отрицательных единиц, сколько нулей в данной десятичной дроби перед первой значащей цифрой, считая и 0 целых; мантисса же такого логарифма положительна.

е) Умножим какое-нибудь число N (целое или дробное — всё равно) на 10, на 100, на 1000,…, вообще на единицу с нулями. Посмотрим, как от этого изменится $\lg N$. Так как логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей, то:

$$\lg(N\cdot 10) = \lg N + \lg 10 = \lg N + 1;$$

$$\lg(N\cdot 100) = \lg N + \lg 100 = \lg N + 2;$$

$$\lg(N\cdot 1000) = \lg N + \lg 1000 = \lg N + 3 \quad \text{и т. д.}$$

Когда к $\lg N$ мы прибавляем какое-нибудь целое число, то это число увеличивает лишь характеристику, а не мантиссу. Так, если $\lg N = 2{,}7804$, то $2{,}7804 + 1 = 3{,}7804$; $2{,}7804 + 2 = 4{,}7804$ и т. п.; или

[1]) Такое число читается так: 3 с минусом, 7482 десятитысячных.

если $\lg N = \overline{3},5649$, то $\overline{3},5649 + 1 = \overline{2},5649$; $\overline{3},5649 + 2 = \overline{1},5649$ и т. п. Поэтому:

От умножения числа на 10, 100, 1000, ..., вообще на единицу с нулями, мантисса логарифма не изменяется, а характеристика увеличивается на столько единиц, сколько нулей во множителе.

Подобно этому, приняв во внимание, что логарифм частного равен логарифму делимого без логарифма делителя, мы получим:

$$\lg\frac{N}{10} = \lg N - \lg 10 = \lg N - 1;$$
$$\lg\frac{N}{100} = \lg N - \lg 100 = \lg N - 2;$$
$$\lg\frac{N}{1000} = \lg N - \lg 1000 = \lg N - 3 \quad \text{и т. п.}$$

Если условимся при вычитании целого числа из логарифма вычитать это целое число всегда из характеристики, а мантиссу оставлять без изменения, то можно сказать, что:

От деления числа на единицу с нулями мантисса логарифма не изменяется, а характеристика уменьшается на столько единиц, сколько нулей в делителе.

110. Следствия. а) *Мантисса логарифма десятичного числа не изменяется от перенесения в числе запятой*, потому что перенесение запятой равносильно умножению или делению числа на 10, 100, 1000 и т. д. Таким образом, логарифмы чисел: 0,00423; 0,0423; 4,23; 423 отличаются только характеристиками, но не мантиссами (при условии, что все мантиссы положительны).

б) *Мантиссы логарифмов чисел, имеющих одну и ту же значащую часть, одинаковы*; так, логарифмы чисел: 23; 230; 2300; 23000 отличаются только характеристиками.

Замечание. Из указанных свойств десятичных логарифмов видно, что характеристику логарифма любого данного числа мы можем находить без помощи таблиц (в этом заключается большое удобство десятичных логарифмов); вследствие этого в логарифмических таблицах помещаются только одни мантиссы; кроме того, так как нахождение логарифмов дробей сводится к нахождению логарифмов целых чисел (логарифм дроби равняется логарифму числителя без логарифма знаменателя), то в таблицах помещаются мантиссы логарифмов только целых чисел.

Упражнения.

189. Найти характеристики десятичных логарифмов следующих чисел: 3; 38; 382; 3824; 3,12; 37,2; 56315,726; $57\frac{1}{2}$; $3485\frac{2}{7}$.

190. Чему равны десятичные логарифмы следующих дробей: 0,1; 0,01; 0,001; 0,00001; 0,0000001?

191. Найти характеристики десятичных логарифмов следующих дробей: 0,36; 0,183; 0,02; 0,0036; 0,00056; 0,00000378.

192. Дано: $\lg 2 = 0{,}301$; $\lg 3 = 0{,}477$; $\lg 7 = 0{,}845$. Зная это, вычислить десятичные логарифмы для первых 10 натуральных чисел.

193. По данным $\lg 2 = 0{,}30103$ и $\lg 3 = 0{,}47712$ вычислить $\lg 0{,}0015$ и $\lg 750$.

194. Сколько цифр в числе 2^{100}, если $\lg 2 = 0{,}30103$?

III. Устройство и употребление таблиц

111. Система логарифмов. Системой логарифмов называется совокупность логарифмов, вычисленных для ряда последовательных целых чисел по одному и тому же основанию. Употребительны две системы: система *обыкновенных*, или *десятичных*, логарифмов, в которых за основание взято число 10, и система так называемых *натуральных* логарифмов, в которых за основание (по причинам, которые уясняются в высшей математике) взято иррациональное число 2,7182818... Для вычислений употребляются десятичные логарифмы вследствие тех удобств, которые были нами указаны в § 109, 110.

Натуральные логарифмы называются также *неперовыми*, по имени изобретателя логарифмов шотландского математика Н е п е р а (1550–1617), а десятичные логарифмы— *бригговыми*, по имени профессора Б р и г г а (современника и друга Непера), впервые составившего таблицы этих логарифмов [1]).

112. Преобразование отрицательного логарифма. Мы видели, что логарифмы чисел, меньших 1, отрицательны. Значит, они могут быть представлены при помощи отрицательных десятичных дробей. Такие логарифмы всегда можно преобразовать так, что у них мантисса будет *положительная*, а характеристика останется отрицательной. Для этого достаточно прибавить к мантиссе положительную единицу, а к характеристике — отрицательную (отчего, конечно, величина логарифма не изменится). Если, например, мы имеем логарифм $-2{,}0873$, то можно его преобразовать так:

$$-2{,}0873 = -2 - 1 + 1 - 0{,}0873 = -(2 + 1) + (1 - 0{,}0873) = \\ = -3 + 0{,}9127,$$

---

[1]) Должно, однако, заметить, что неперовы логарифмы не тождественны натуральным, а только связаны с ними некоторым соотношением. Впервые натуральные логарифмы были введены после смерти Н е п е р а, в 1619 г., учителем математики в Лондоне Д ж о н о м С п е й д е л е м. В следующем, 1620 г. швейцарец Б ю р г и опубликовал свои таблицы, составленные им независимо от Н е п е р а.

Заметим, что в 1914 г. исполнилось трёхсотлетие изобретения логарифмов, так как таблицы Непера были им опубликованы в 1614 г. (под названием «*Mirifici logarithmorum Canonis descriptio*»).

или сокращённо:

$$-2{,}0873 = \overset{-1+1}{-2{,}0873} = \overline{3}{,}9127.$$

Обратно, всякий логарифм с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой можно представить при помощи отрицательной десятичной дроби. Для этого достаточно к положительной мантиссе прибавить отрицательную единицу, а к отрицательной характеристике — положительную [1]); так, можно написать:

$$\overline{7}{,}8302 = \overset{+1-1}{\overline{7}{,}8302} = -6{,}1698.$$

113. Описание четырёхзначных таблиц и пользование ими. Для решения большинства практических задач вполне достаточны четырёхзначные таблицы, обращение с которыми весьма просто [2]). Небольшая часть их (для объяснения расположения) напечатана ниже. В них содержатся мантиссы логарифмов всех целых чисел от 1 до 9999 включительно, вычисленные с четырьмя десятичными знаками, причём последний из этих знаков увеличен на 1 во всех тех случаях, когда 5-й десятичный знак должен был бы оказаться 5 или более 5; следовательно, четырёхзначные таблицы дают приближённые мантиссы с точностью до $\frac{1}{2}$ десятитысячной доли (с недостатком или с избытком).

Мантиссы логарифмов

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7
55	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

[1]) Для выполнения этих преобразований приходится прибавить $+1$ и -1: одно из этих чисел — к характеристике, а другое — к мантиссе. Чтобы не ошибиться, к чему прибавить $+1$ и к чему -1, полезно всегда обращать внимание на мантиссу заданного логарифма и рассуждать так: пусть в заданном логарифме мантисса отрицательна, а надо её сделать положительной; тогда к ней следует прибавить $+1$, а потому к характеристике надо прибавить -1; пусть в заданном логарифме мантисса будет положительна, а надо её сделать отрицательной (весь логарифм должен быть отрицательный); тогда к ней следует добавить -1, а, следовательно, к характеристике $+1$.

[2]) В случаях, требующих большей точности, пользуются пятизначными таблицами и иногда семизначными (например, «Логарифмически-тригонометрическое руководство» Георга Вега). Способ пользования такими таблицами объяснён во введении к ним.

Так как характеристику логарифма целого числа или десятичной дроби мы можем на основании свойств десятичных логарифмов проставить непосредственно, то в таблицах помещены только мантиссы; при этом надо помнить, что положение запятой в десятичном числе, а также число нулей, стоящих в конце числа, не имеет влияния на величину мантиссы. Поэтому при нахождении мантиссы по данному числу мы отбрасываем в этом числе запятую, а также нули на конце его, если таковые есть, и находим мантиссу логарифма целого числа, образовавшегося после этого. При этом могут представиться следующие случаи:

1) *Целое число состоит из трёх цифр.* например, пусть надо найти мантиссу логарифма числа 536. Первые две цифры этого числа, т. е. 53, находим в таблицах в первом слева столбце (см. таблицу, напечатанную на предыдущей странице). Найдя число 53, продвигаемся от него по строке вправо до пересечения этой строки со столбцом, проходящим через ту из цифр 0, 1, 2, 3, …, 9, поставленных наверху (и внизу) таблицы, которая представляет собой третью цифру данного числа, т. е. в нашем примере цифру 6. В пересечении получим мантиссу 7292 (т. е. 0,7292), принадлежащую логарифму числа 536. Подобно этому, для логарифма числа 508 найдём мантиссу 0,7059, для логарифма числа 500 найдём 0,6990 и т. п.

2) *Целое число состоит из двух или из одной цифры.* Тогда мысленно приписываем к этому числу один или два нуля и находим мантиссу для логарифма образовавшегося таким образом трёхзначного числа. Например, к числу 51 приписываем один нуль, отчего получаем 510, и находим мантиссу 7076; к числу 5 приписываем два нуля и находим мантиссу 6990 и т. п.

3) *Целое число выражается четырьмя цифрами.* например, надо найти мантиссу $\lg 5436$. Тогда сначала находим в таблицах, как было сейчас указано, мантиссу для логарифма числа, изображённого первыми тремя цифрами данного числа, т. е. для 543 (эта мантисса будет 0,7348); затем продвигаемся от найденной мантиссы по строке направо (в правую часть таблицы, расположенную за жирной вертикальной чертой) до пересечения со столбцом, проходящим через ту из цифр: 1, 2, 3, …, 9, стоящих наверху (и внизу) этой части таблицы, которая представляет собой четвёртую цифру данного числа, т. е. в нашем примере цифру 6. В пересечении находим *поправку* (число 5), которую надо прибавить в уме к мантиссе 7348, чтобы получить мантиссу логарифма числа 5436; мы получим, таким образом, мантиссу 0,7353.

4) *Целое число выражается пятью или более цифрами.* Тогда отбрасываем все цифры, кроме первых четырёх, и берём приближённое значение в виде четырёхзначного числа, причём последнюю цифру этого числа увеличиваем на 1 в том случае, когда отбрасываемая пятая цифра числа есть 5 или больше 5. Так, вместо 57842 мы берём 5784,

вместо 30257 берём 3026, вместо 583263 берём 5833 и т. п. Для логарифма этого округлённого четырёхзначного числа находим мантиссу так, как было сейчас объяснено.

Руководствуясь этими указаниями, найдём для примера логарифмы следующих чисел:

$$36{,}5;\ 804,7;\ 0{,}26;\ 0{,}00345;\ 7{,}2634;\ 3456{,}86.$$

Прежде всего, не обращаясь, пока к таблицам, проставим одни характеристики, оставляя место для мантисс, которые выпишем после:

$$\begin{aligned} &\lg\ 36{,}5 = 1,\ldots; &&\lg 0{,}00345 = \overline{3},\ldots;\\ &\lg 804,7 = 2,\ldots; &&\lg 7{,}2634\ \ = 0,\ldots;\\ &\lg\ 0{,}26 = \overline{1},\ldots; &&\lg 3456{,}86 = 3,\ldots . \end{aligned}$$

Далее по таблицам выставляем прямо мантиссы:

$$\begin{aligned} &\lg\ 36{,}5 = 1{,}5623; &&\lg 0{,}00345 = \overline{3}{,}5378;\\ &\lg 804{,}7 = 2{,}9056; &&\lg 7{,}2634\ \ = 0{,}8611;\\ &\lg\ 0{,}26 = \overline{1}{,}4150; &&\lg 3456{,}86 = 3{,}5387. \end{aligned}$$

114. Интерполирование. В некоторых четырёхзначных таблицах поправки на четвёртую цифру данного числа не помещены. Имея дело с такими таблицами, приходится поправки эти находить при помощи простого вычисления, которое можно выполнять на основании следующего положения: если числа превосходят 100, а разности между ними меньше 1, то без чувствительной погрешности можно принять, что

Разности между логарифмами пропорциональны разностям между соответствующими числами [1]**.**

Пусть, например, надо найти мантиссу логарифма числа 5367. Мантисса эта, конечно, та же самая, что и для логарифма числа 536,7. Находим в таблицах для логарифма числа 536 мантиссу 7292. Сравнивая эту мантиссу с соседней вправо мантиссой 7300, соответствующей

---

[1] Рассматривая график логарифмической функции $y = \log_{10} x$ (§ 103), мы замечаем, что даже для чисел небольших (например, для чисел от 3 до 10) график очень мало отличается от прямой линии. Если бы этот график продолжить направо для чисел от 10 до 100 (т. е. на 90 единиц длины вдоль оси x-ов), то ординаты возросли бы только от 1 до 2, так как $\lg 10 = 1$, а $\lg 100 = 2$; при дальнейшем его продолжении для чисел от 100 до 1000 (т. е. на 900 единиц длины) ординаты увеличились бы снова только на 1 единицу. Значит, для чисел, бо́льших 100, без чувствительной ошибки можно принять, что график функции $y = \log_{10} x$ совпадает с прямой. Но допустить это — значит принять, что для таких чисел приращения ординат пропорциональны приращениям абсцисс, т. е., другими словами, что разности между логарифмами пропорциональны разностям между числами.

числу 537, мы замечаем, что если число 536 увеличится на 1, то мантисса увеличится на 8 десятитысячных (8 есть так называемая *табличная разность* между двумя соседними мантиссами), если же число 536 увеличится на 0,7, то мантисса увеличится не на 8 десятитысячных, а на некоторое меньшее число: x десятитысячных, которое согласно допущенной пропорциональности должно удовлетворять пропорции $x : 8 = 0{,}7 : 1$, откуда $x = 8 \cdot 0{,}7 = 5{,}6$, что по округлении составляет 6 десятитысячных. Значит, мантисса для логарифма числа 536,7 (и, следовательно, для числа 5367) будет: $7292 + 6 = 7298$, т. е. 0,7298.

Заметим, что нахождение промежуточного числа по двум рядом стоящим в таблицах числам называется *интерполированием.* Интерполирование, описанное здесь, называется *пропорциональным,* так как оно основано на допущении, что изменение логарифма пропорционально изменению числа. Оно называется также *линейным,* так как предполагает, что графически изменение логарифмической функции изображается прямой линией.

115. Таблицы антилогарифмов. Для нахождения числа по данному логарифму могут служить те же таблицы, по которым отыскиваются мантиссы логарифмов данных чисел, но удобнее пользоваться другими таблицами, в которых помещены так называемые *антилогарифмы,* т. е. числа, соответствующие данным мантиссам. Небольшая часть их помещена ниже (для объяснения).

Антилогарифмы

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0 1 1	2 2 2	3 3 4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0 1 1	2 2 3	3 3 4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0 1 1	2 2 3	3 3 4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.30	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Пусть дана четырёхзначная мантисса 2863 (на характеристику не обращаем внимания) и требуется найти соответствующее целое число. Тогда, имея таблицы антилогарифмов, надо пользоваться ими совершенно так же, как было раньше объяснено для нахождения мантисс по данному числу, а именно: первые две цифры мантиссы мы находим в первом слева столбце (точка, стоящая перед цифрами, заменяет собой запятую, отделяющую целое число логарифма от мантиссы). Затем продвигаемся от этих цифр по строке вправо до пересечения со столбцом, идущим от третьей цифры мантиссы, которую надо искать в верхней строке (или в нижней). В пересечении находим четырёхзначное число 1932, соответствующее мантиссе 286. Затем от этого числа продвигаемся дальше по строке направо до пересечения со столбцом, идущим от четвёртой цифры мантиссы. Эту цифру надо найти наверху (или внизу) среди поставленных там цифр 1, 2, 3, ..., 9. В пересечении мы находим поправку 1, которую надо прибавить (в уме) к найденному раньше числу 1932, чтобы получить число, соответствующее мантиссе 2863.

Таким образом, число это будет 1933. После этого, обращая внимание на характеристику, надо в числе 1933 поставить запятую на надлежащем месте.

Приведём несколько примеров:

$$\begin{array}{llll}
\text{Если} & \lg x = 3{,}2863, & \text{то} & x = 1933; \\
'' & \lg x = 1{,}2863, & '' & x = 19{,}33; \\
'' & \lg x = 0{,}2863, & '' & x = 1{,}933; \\
'' & \lg x = \overline{2}{,}2863, & '' & x = 0{,}0193; \\
'' & \lg x = 0{,}2287, & '' & x = 1{,}693; \\
'' & \lg x = \overline{1}{,}7635, & '' & x = 0{,}5801; \\
'' & \lg x = 3{,}5029, & '' & x = 3184; \\
'' & \lg x = \overline{2}{,}0436, & '' & x = 0{,}01106 \text{ и т. п.}
\end{array}$$

Если в мантиссе указано 5 или более цифр, то берём только первые 4 цифры, отбрасывая остальные (и увеличивая четвёртую цифру на 1, если пятая цифра есть 5 или более). Например, вместо мантиссы 35478 берём 3548, вместо 47562 берём 4756.

116. Замечание об интерполировании. Поправку на четвёртую и следующие цифры мантиссы можно находить и посредством интерполирования. Так, если мантисса будет 84357, то, найдя число 6966, соответствующее мантиссе 843, мы можем рассуждать далее так: если мантисса увеличится (на 1 тысячную), т. е. сделается 844, то число, как видно из таблиц, увеличится на 16 единиц; если же мантисса увеличится не на 1 (тысячную), а на 0,57 (тысячных), то число увеличится на x единиц, причём число x должно удовлетворять пропорции:

$$x : 16 = 0{,}57 : 1, \quad \text{откуда} \quad x = 16 \cdot 0{,}57 = 9{,}12.$$

Значит, искомое число будет $6966 + 9{,}12 = 6975{,}12$, или (ограничиваясь только четырьмя цифрами) 6975.

117. Действия над логарифмами с отрицательными характеристиками. Сложение и вычитание логарифмов не представляют никаких затруднений, как это видно из следующих примеров:

$$+\begin{array}{r}\overline{2}{,}9734\\ 1{,}8302\\ \hline 0{,}8036\end{array}\qquad +\begin{array}{r}\overline{3}{,}8384\\ \overline{5}{,}8804\\ \hline \overline{7}{,}7188\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\overline{1}{,}0384\\ 5{,}9630\\ \hline \overline{7}{,}0754\end{array}\qquad -\begin{array}{r}0{,}0052\\ \overline{4}{,}5736\\ \hline 3{,}4316\end{array}$$

Не представляет никаких затруднений и умножение логарифма на положительное число, например:

$$\begin{array}{r} \overline{3}{,}5837 \\ \times 9 \\ \hline \overline{22}{,}2533 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{2}{,}4735 \\ \times 34 \\ \hline 1\,8940 \\ 14\,205 \\ \hline 16{,}0990 \\ -68\phantom{{,}0990} \\ \hline 52{,}0990. \end{array}$$

В последнем примере отдельно умножена положительная мантисса на 34, затем отрицательная характеристика на 34.

Если логарифм с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой умножается на отрицательное число, то поступают двояко: или предварительно данный логарифм обращают в отрицательный, или же умножают отдельно мантиссу и характеристику и результаты соединяют вместе, например:

$$\overline{3}{,}5632 \cdot (-4) = -2{,}4368 \cdot (-4) = 9{,}7472;$$
$$\overline{3}{,}5632 \cdot (-4) = +12 - 2{,}2528 = 9{,}7472.$$

При делении могут представиться два случая: во-первых, отрицательная характеристика делится на делитель; во-вторых, отрицательная характеристика не делится на делитель. В первом случае отдельно делят характеристику и мантиссу:

$$\overline{10}{,}3784 : 5 = \overline{2}{,}0757.$$

Во втором случае прибавляют к характеристике столько отрицательных единиц, чтобы образовавшееся число делилось на делитель, к мантиссе прибавляют столько же положительных единиц:

$$\overline{3}{,}7608 : 8 = (-8 + 5{,}7608) : 8 = \overline{1}{,}7201.$$

Это преобразование надо совершать в уме, так что действие располагается так:

$$\overline{3}{,}7608 : 8 = \overline{1}{,}7201, \quad \text{или} \quad \begin{array}{l|l} \overline{3}{,}7608 & 8 \\ \cline{2-2} & \overline{1}{,}7201. \end{array}$$

118. Замена вычитаемых логарифмов слагаемыми. При вычислении какого-нибудь сложного выражения с помощью логарифмов приходится некоторые логарифмы складывать, другие вычитать; в таком случае при обыкновенном способе совершения действий находят отдельно сумму слагаемых логарифмов, потом сумму вычитаемых и из первой суммы вычитают вторую. Например, если имеем:

$$\lg x = 2{,}7305 - \overline{2}{,}0740 + \overline{3}{,}5464 - 8{,}3589,$$

то обыкновенно выполнение действий расположится так:

$$+\begin{array}{r}2{,}7305\\ \overline{3}{,}5464\\ \hline 0{,}2769\end{array}\qquad +\begin{array}{r}\overline{2}{,}0740\\ 8{,}3589\\ \hline 6{,}4329\end{array}\qquad -\begin{array}{l}0{,}2769\\ 6{,}4329\\ \hline \overline{7}{,}8440=\lg x\end{array}$$

Есть, однако, возможность заменить вычитание сложением. Так:

$$-\overline{2}{,}0740 = 2 - 0{,}0740 = 1{,}9260,$$
$$-8{,}3589 = \overset{-1+1}{-8{,}3589} = \overline{9}{,}6411.$$

Теперь можно расположить вычисление так:

$$+\begin{array}{r}2{,}7305\\ 1{,}9260\\ \overline{3}{,}5464\\ \overline{9}{,}6411\\ \hline \overline{1}{,}8440\end{array} = \lg x.$$

119. Примеры вычислений с помощью логарифмов.

Пример 1. Вычислить выражение:

$$x = \frac{\sqrt[3]{A}\cdot B^4}{C^3\cdot\sqrt[3]{D}},$$

если $A = 0{,}8216$, $B = 0{,}04826$, $C = 0{,}005127$ и $D = 7{,}246$. Логарифмируем данное выражение:

$$\lg x = \frac{1}{3}\lg A + 4\lg B - 3\lg C - \frac{1}{3}\lg D.$$

Теперь для избежания излишней потери времени и для уменьшения возможности ошибок прежде всего расположим все вычисления, не исполняя пока их и не обращаясь, следовательно, к таблицам:

$$\begin{array}{rl|r}
\lg A = \lg 0{,}8216 & = \overline{1},\ldots & \frac{1}{3}\lg A = \\
\lg B = \lg 0{,}04826 & = \overline{2},\ldots & 4\lg B = \\
\lg C = \lg 0{,}005127 & = \overline{3},\ldots & -3\lg C = \\
3\lg C \ \ldots\ldots\ldots\ldots & = & -\frac{1}{3}\lg D = \\
\cline{3-3}
\lg D = \lg 7{,}246 & = 0,\ldots & \lg x = \\
\frac{1}{3}\lg D \ \ldots\ldots\ldots\ldots & = & x =
\end{array}$$

После этого берём из таблицы и проставляем логарифмы на оставленных свободных местах:

$$\begin{array}{rl|rl}
\lg A = \lg 0{,}8216 & = \overline{1}{,}9146 & \frac{1}{3}\lg A = & \overline{1}{,}9715 \\
\lg B = \lg 0{,}04826 & = \overline{2}{,}6835 & 4\lg B = & \overline{6}{,}7340 \\
\lg C = \lg 0{,}005127 & = \overline{3}{,}7099 & -3\lg C = & 6{,}8703 \\
3\lg C \ \ldots\ldots\ldots\ldots & = \overline{7}{,}1297 & -\frac{1}{3}\lg D = & \overline{1}{,}7133 \\
\lg D = \lg 7{,}246\ldots & = 0{,}8601 & \lg x = & 1{,}2891 \\
\frac{1}{3}\lg D \ \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0{,}2867 & x = & 19{,}45
\end{array}$$

Пример 2. Вычислить: $x = (-2{,}31)^3\sqrt[5]{72}$. Так как отрицательные числа не имеют логарифмов, то предварительно находим $x' = (2{,}31)^3\sqrt[5]{72}$.

$$\lg x' = 3\lg 2{,}31 + \frac{1}{5}\lg 72.$$

После вычисления окажется: $x' = 28{,}99$, следовательно, $x = -28{,}99$.

Пример 3. Вычислить: $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}$.

Сплошного логарифмирования здесь применить нельзя, так как под знаком корня стоит сумма. В подобных случаях вычисляют формулу по частям. Сначала находим $N = \sqrt[5]{8}$, потом $N_1 = \sqrt[4]{3}$; далее простым сложением определяем $N + N_1$ и, наконец, вычисляем $\sqrt[3]{N + N_1}$; окажется:

$$N = 1{,}516; \quad N_1 = 1{,}316; \quad N + N_1 = 2{,}832;$$

$$\lg x = \lg\sqrt[3]{2{,}832} = \frac{1}{3}\lg 2{,}832 = 0{,}1507; \quad x = 1{,}415.$$

Упражнения.

196. У следующих отрицательных логарифмов сделать мантиссы положительными: $-2{,}3789$; $-1{,}0760$; $-0{,}0058$; $-5{,}6700$.

196. Следующие логарифмы превратить в отрицательные: $\overline{2}{,}7359$; $\overline{1}{,}0803$; $\overline{3}{,}0760$; $\overline{1}{,}0023$.

Найти по таблицам логарифмы следующих чисел:

197. 9; 26; 573; 55; 78; 7,414; 0,7557.

198. 5; 634; 10,083; 0,20738; 0,00534.

Найти числа по следующим логарифмам:

199. 2,8676; 1,3496; 0,0111; 3,1412.

200. 1,6628; 2,3114; 0,5100; 1.5806.

201. 3,7467; $-1{,}0834$; $-0{,}6347$; $-3{,}9134$.

(В трёх последних примерах надо предварительно преобразовать логарифмы.)

Произвести следующие действия над логарифмами:

202. $+\begin{cases}\overline{2}{,}7303\\ \overline{3}{,}9683\end{cases}$; $+\begin{cases}1{,}5734\\ \overline{2}{,}8430\end{cases}$; $+\begin{cases}\overline{2}{,}0387\\ \overline{1}{,}7857\end{cases}$.

203. $-\begin{cases}0{,}3756\\ \overline{2}{,}7489\end{cases}$; $\overline{2}{,}7403\times 7$.

204. $\overline{1}{,}4018\times 9$; $\overline{3}{,}5612\times 36$.

205. $\overline{3},5603 \times (-23)$; $\overline{12},6310 : 4$.

206. $\overline{3},0274 : 5$; $\overline{2},5074 : 7$.

В следующих примерах вычитание заменить сложением:

207. $-3,2603$; $-7,5920$; $-0,4168$.

208. $-\overline{1},5609$; $-\overline{2},2754$; $-\overline{3},0406$.

Вычислить с помощью логарифмов следующие выражения:

209. $0,03714^3$; $\sqrt[3]{0,3571}$; $\sqrt[6]{235,8}$.

210. $\sqrt[3]{\dfrac{13}{17}}$; $\sqrt[3]{17705}$; $\sqrt[3]{\dfrac{1}{85\cdot 77}}$.

211. $\left(2\dfrac{5}{6}\right)^9$; $\dfrac{0,7361\cdot 0,03715}{2,165\cdot 0,8717}$.

212. $\sqrt[3]{\dfrac{0,07624}{3,142\cdot 27,05}}$; $\sqrt{\dfrac{7}{2}\sqrt[4]{6}}$.

213. $\sqrt[3]{\dfrac{716,5}{\sqrt[4]{2}}}$; $2,718^{-8,142}$.

214. Сколько цифр должно быть в числе 3^{20}?

215. Луч света, проходя через стеклянную пластинку, теряет $\dfrac{1}{10}$ часть своей интенсивности. Какая часть начальной интенсивности останется у луча, когда он пройдёт через 10 таких пластинок?

216. Вычислить объём шара по формуле $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, если $R = 5,875$ и $\pi = 3,142$.

217. Вычислить площадь S треугольника со сторонами a, b и c по формуле:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-\mathrm{c})},$$

в которой p есть полупериметр треугольника, т. е. $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$, если стороны будут: 1) 6 см, 8 см, 9 см; 2) 0,927 м, 1,135 м, 0,575 м.

218. Объём V полого цилиндра, у которого высота h, внешний радиус основания R и внутренний радиус r, выражается формулой:

$$V = \pi(R^2 - r^2)h.$$

Вычислить V, если $R = 74,35$ м, $r = 42,63$ м, $h = 132,8$ м и $\pi = 3,142$.

219. Продолжительность одного простого качания маятника (т. е. время, в течение которого маятник переходит из крайнего правого положения в крайнее левое) выражается формулой (если угол отклонения маятника от отвесной линии не превосходит $3°$):

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где t есть время (в секундах), l — длина маятника (в сантиметрах), g — ускорение силы тяжести (в сантиметрах на секунду в квадрате) и π — отношение длины окружности к диаметру. Найти время t, если $l = 100$ см, $g = 981,5$ см/сек^2 и $\pi = 3,142$.

120. Употребление пятизначных таблиц. Для более точных вычислений употребляются пятизначные таблицы логарифмов. В этих таблицах логарифмы чисел вычислены с точностью до 0,00001 (вернее, с точностью до 0,000005). Наиболее употребительными являются таблицы, составленные Е. Пржевальским. Дадим краткие указания к пользованию ими.

1. Первая страница таблиц содержит мантиссы логарифмов чисел до 100. Но этой страницей можно не пользоваться, а искать мантиссу среди мантисс логарифмов трёхзначных чисел. Так, чтобы найти мантиссу логарифмов чисел 67; 6,7; 0,0067 и т. д., пишут соответствующую характеристику и ищут мантиссу логарифма числа 670.

2. Пусть число имеет три значащие цифры. (Напомним, что нуль, стоящий между значащими цифрами, принимается тоже за значащую цифру.) Ищут это число на соответствующей странице в левом крайнем столбце (он обозначен буквой N). В столбце, стоящем рядом, под значком 0 находят соответствующую мантиссу.

3. Пусть число имеет четыре значащие цифры. Ищут в столбце N число, составленное первыми тремя цифрами данного.

В горизонтальном ряду, в столбце, соответствующем четвёртой цифре данного числа, находим искомую мантиссу.

Пример. Найти $\lg 84{,}37$. Характеристика равна 1.

Ищем в столбце N число 843. Идём от этого числа вправо. В столбце под цифрой 7 находим соответствующую мантиссу 92619. Итак, $\lg 84{,}37 = 1{,}92619$.

4. Число содержит более четырёх значащих цифр. Берём число, составленное первыми четырьмя цифрами, и ищем его мантиссу. Дальше поступаем так же, как и в четырёхзначных таблицах, т. е. или составляем пропорцию, или пользуемся табличками, помещёнными в крайнем правом столбце под знаком P. P. (сокращение французских слов partes proportionales, т. е. пропорциональные части).

Пример. $\lg 187{,}367$.

Ищем число 187 и в столбце 3 находим мантиссу 27254. Находим разность между следующей мантиссой и найденной (табличную разность). Она равна 23. В крайнем правом столбце под числом 23 для цифры 6 находим 13,8 стотысячных долей, для 7 находим 16,1. Вычисления располагаем так:

$$\begin{array}{rr}
1873 & 27254 \\
6 & 138 \\
7 & 161 \\
\hline
187367 & 2726941.
\end{array}$$

Итак, $\lg 187{,}367 = 2{,}27269$.

IV. Показательные и логарифмические уравнения

121. Примеры уравнений. *Показательными* уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестное входит в показатель степени, а *логарифмическими* — такие, в которых неизвестное находится под знаком логарифма. Такие уравнения могут быть разрешаемы элементарными приёмами только в частных случаях, причём приходится основываться на свойствах логарифмов и на том положении, что если числа равны, то равны и их логарифмы, и обратно, если логарифмы равны, то равны и соответствующие им числа.

Пример 1. Решить уравнение: $2^x = 1024$. Логарифмируем обе части уравнения:

$$x \lg 2 = \lg 1024; \quad x = \frac{\lg 1024}{\lg 2} = \frac{3{,}01030}{0{,}30103} = 10.$$

Пример 2. Решить уравнение: $a^{2x} - a^x = 1$.

Положив $a^x = y$, получим квадратное уравнение: $y^2 - y - 1 = 0$, откуда:

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно,

$$a^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad a^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Так как $1 - \sqrt{5} < 0$, то последнее уравнение не имеет решений (если a — положительное число), а первое даёт:

$$x = \frac{\lg(1+\sqrt{5}) - \lg 2}{2}.$$

Пример 3. Решить уравнение: $\lg(a+x) + \lg(b+x) = \lg(c+x)$.

Уравнение можно написать так:

$$\lg[(a+x)(b+x)] = \lg(c+x).$$

Из равенства логарифмов заключаем о равенстве чисел при равных основаниях:

$$(a+x)(b+x) = c+x,$$

это есть квадратное уравнение, которое легко решается.

122. Формула сложных процентов. Задача. В какую сумму обратится в течение t лет вклад a рублей, если он ежегодно приносит p сложных процентов?

Говорят, что на вклад начисляются сложные проценты, если принимаются во внимание так называемые «проценты на проценты», т. е. если причитающиеся на вклад процентные деньги присоединяются в конце каждого года к вкладу для наращения их процентами в следующие годы.

Каждый рубль вклада, отданного под p процентов, в течение одного года принесет дохода $\frac{p}{100}$ рубля, и следовательно, каждый рубль вклада через 1 год обратится в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей (например, если вклад сделан под 5%, то каждый рубль его через год обратится в

$1+\frac{5}{100}$, т. е. в 1,05 рубля). Обозначив для краткости дробь $\frac{p}{100}$ одной буквой, например, r, можем сказать, что каждый рубль вклада через год обратится в $(1+r)$ рублей, следовательно, a рублей обратятся через 1 год в $a(1+r)$ рублей. Ещё через год, т. е. через 2 года от начала роста, каждый рубль из этих $a(1+r)$ рублей обратится снова в $(1+r)$ рублей; значит, весь вклад обратится в $a(1+r)^2$ рублей. Таким же образом найдём, что через 3 года вклад будет $a(1+r)^3$, через 4 года будет $a(1+r)^4$, ..., вообще через t лет, если t — целое число, он обратится в $a(1+r)^t$ рублей. Таким образом, обозначив через A сумму денег, в которую обратится вклад через t лет, будем иметь следующую формулу сложных процентов:

$$A = a(1+r)^t, \quad \text{где} \quad r = \frac{p}{100}.$$

Из этой формулы легко найти любое из четырёх чисел: A, a, r (или p) и t, если остальные три заданы.

Пример. Пусть $a = 2300$ руб., $p = 4$, $t = 20$ лет; тогда:

$$r = \frac{4}{100} = 0{,}04; \quad A = 2300 \cdot (1{,}04)^{20};$$

$$\lg A = \lg 2300 + 20 \lg 1{,}04 = 3{,}3617 + 20 \cdot 0{,}0170 = \\ = 3{,}3617 + 0{,}3400 = 3{,}7017;$$

$$A = 5031 \text{ рубль}.$$

Замечания. 1) В этом примере нам пришлось $\lg 1{,}04$ умножить на 20. Так как число 0,0170 есть приближённое значение $\lg 1{,}04$ с точностью до $\frac{1}{2}$ десятитысячной доли, то произведение этого числа на 20 будет точно только до $\frac{1}{2} \cdot 20$, т. е. до 10 десятитысячных, или до одной тысячной. Поэтому в сумме 3,7017 мы не можем ручаться не только за цифру десятитысячных, но и за цифру тысячных. Чтобы в подобных случаях можно было получить бóльшую точность, лучше для числа $1+r$ брать логарифмы не четырёхзначные, а с бóльшим числом цифр, например, семизначные. Для этой цели мы приводим здесь небольшую табличку, в которой выписаны семизначные логарифмы для некоторых значений p.

p	$1+r$	$\lg(1+r)$
3	1,03	0,0128372
$3^1/_4$	1,0325	0,0138901
$3^1/_2$	1,035	0,0149403
$3^3/_4$	1,0375	0,0159881
4	1,04	0,0170333
$4^1/_4$	1,0425	0,0180761
$4^1/_2$	1,045	0,0191163
$4^3/_4$	1,0475	0,0201540
5	1,05	0,0211893

2) Формулой сложных процентов приходится пользоваться не только в финансовых вопросах, но иногда и при решении задач, взятых из естественных процессов, например, при вычислении численности населения какой-нибудь страны, прироста числа деревьев в лесу и т. п.

Упражнения.

Решить уравнения:

220. $3^x = 243$; $2^{2x} = 512$; $5^{x+2} = 3125$.

221. $10^x = 3$; $5^x = 10$; $10^{4x} = 5{,}754$.

222. $4{,}097^x = 3652$; $\left(\frac{5}{6}\right)^x = 2{,}48$.

223. $3^{\sqrt{x}} = 243$; $0{,}55^x = 2{,}718$; $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$.

224. $2^x + 4^x = 72$; $9^{x+1} - 3^{x+3} = 486$.

225. $\lg(x-1) + \lg(x+1) = \lg 2$.

226. $\frac{1}{3}\lg x^3 = 5\lg x$.

227. $\lg x^2 + \lg 8x = 2\lg x + \lg x^2$.

228. Из резервуара, внутренний объём которого равен 6 дм^3, выкачивают воздух посредством воздушного насоса, всасывающий цилиндр которого имеет объём в 2 дм^3. Сколько подъёмов поршня насоса надо выполнить, чтобы довести разрежение воздуха в резервуаре до $\frac{1}{200}$ начального давления (влияние вредного пространства игнорировать)?

229. Через сколько лет вклад, отданный под 5 сложных процентов, удвоится?

Указание. Начальный вклад x, окончательный $2x$; в уравнении x сокращается.

230. То же, если вклад отдан под 4 %.

231. Радий при излучении уменьшается в массе, а именно: в продолжение 1600 лет каждый грамм радия теряет половину своей массы. Выразить годовую процентную потерю массы радия.

232. Население некоторой страны увеличивается ежегодно на 1,2 %. На сколько население увеличится (в процентах) за 25 лет?

Глава 8

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

I. Исследование уравнений первой степени с одним неизвестным

123. Что значит исследовать уравнение. Исследовать уравнение — значит рассмотреть все особые случаи, которые могут представиться при решении его, и уяснить значение этих случаев для той задачи, из условий которой уравнение составлено.

124. Общий вид уравнения первой степени с одним неизвестным. Вы видели раньше (ч. I, § 88), что уравнение первой степени с одним неизвестным после надлежащих преобразований (раскрытие скобок, освобождение от знаменателей, перенесение неизвестных членов в одну часть уравнения, а известных в другую и приведение подобных членов) приводится к такому простейшему виду:

$$ax = b,$$

где числа a и b могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Рассмотрим, какого рода решения получает это уравнение при различных численных значениях a и b.

125. Положительное решение. Такое решение получается тогда, когда числа a и b оба положительны или оба отрицательны. Пусть, например, $3x = 6$ или $-3x = -6$. Тогда мы получим:

$$x = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{или} \quad x = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Положительное решение, удовлетворяя уравнению, вместе с тем удовлетворяет и задаче, из условий которой уравнение выведено, если только в уравнении выражены все условия задачи. Но иногда случается, что не все условия задачи выражены уравнением; тогда положительное решение может и не удовлетворять задаче. Приведём этому пример.

Задача. Рабочий кружок, состоящий из 20 человек (взрослых и подростков), устроил сбор на покупку книг для библиотеки, причём каждый взрослый внёс по 3 руб., а каждый подросток — по 1 руб.

Сколько было в этом кружке взрослых и сколько подростков, если весь сбор составил 35 руб.?

Обозначим число взрослых буквой x, тогда число подростков будет $20 - x$, и сбор со взрослых окажется $3x$ руб., а с подростков $(20 - x)$ руб. Следовательно, уравнение будет

$$3x + (20 - x) = 35, \quad \text{откуда} \quad x = 7\frac{1}{2}.$$

Это положительное решение удовлетворяет уравнению, но не удовлетворяет задаче, так как по смыслу задачи искомое число должно быть целым. Различие между уравнением и задачей произошло здесь оттого, что уравнение не содержит в себе подразумеваемого в задаче требования, чтобы искомое число было целым. Предложенная задача не имеет решений.

126. Отрицательное решение. Такое решение получается из уравнения $ax = b$ тогда, когда числа a и b имеют противоположные знаки. Пусть, например,

$$5x = -15 \quad \text{или} \quad -5x = 15;$$

тогда

$$x = \frac{-15}{5} = -3 \quad \text{или} \quad x = \frac{15}{-5} = -3.$$

Чтобы показать, в каком смысле надо понимать отрицательное решение $x = -m$, обратим внимание на то, что если число $-m$ удовлетворяет данному уравнению $ax = b$, то равенство $-am = b$ должно быть тождеством; значит, тогда положительное число m удовлетворяет другому уравнению: $-ax = b$, которое получается из данного, если в нём заменим x на $-x$. Основываясь на этом замечании и получив отрицательное решение $x = -m$, мы можем поступить так: изменим в уравнении x на $-x$; от этого получим новое уравнение, которое должно иметь положительное решение $x = m$. Новое уравнение, конечно, не соответствует предложенной задаче; всматриваясь в него, мы легко определим, как надо изменить задачу, чтобы она имела положительное решение $x = m$.

Для примера приведём такую простую задачу.

Отцу 40 лет, а сыну 10 лет. Через сколько лет отец будет в 7 раз старше сына?

Обозначим искомое число буквой x.

Очевидно, что через x лет отцу будет $(40 + x)$, а сыну $(10 + x)$ лет. По условию:

$$40 + x = 7(10 + x), \quad \text{откуда} \quad x = -5.$$

Заменив в уравнении x на $-x$, получим новое уравнение $40 - x = 7(10 - x)$, которое отвечает той же задаче, но с изменённым вопросом, а именно, вопрос должен быть такой: сколько лет назад отец был в 7 раз старше сына?

Из примеров, подобных указанному, можно усмотреть, что отрицательное решение надо понимать в смысле, противоположном тому, в каком понималось бы положительное решение; так, если положительное решение означает время после некоторого события, то отрицательное означает время раньше этого события; если первое означает доход, то второе — расход и т. п. Если же случается, что по смыслу задачи неизвестное число x нельзя понимать в двух противоположных смыслах, то тогда отрицательное решение означает, что задача не имеет решения.

127. Нулевое решение. Положим, что в уравнении $ax = b$ число b окажется нулём, а коэффициент a будет какое-нибудь число, отличное от нуля. Пусть, например, уравнение будет $4x = 0$. Значит, произведение $4x$ должно равняться нулю. Но произведение равняется нулю только тогда, когда какой-нибудь сомножитель равен нулю; следовательно, сомножитель x должен равняться нулю. И из формулы $x = \frac{0}{4}$ видно, что $x = 0$.

Задача. Какое число надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{13}{26}$, чтобы получить $\frac{1}{2}$?

Обозначив искомое число буквой x, мы получим уравнение:

$$\frac{13+x}{26+x} = \frac{1}{2},$$

откуда:

$$26 + 2x = 26 + x; \quad x = 0.$$

Это значит, что дробь сама равна $\frac{1}{2}$.

128. Случай, когда уравнение не имеет корня. Пусть в уравнении $ax = b$ число a окажется нулём, а число b не равно нулю; например, $0 \cdot x = 10$. Такое равенство невозможно, так как, какое бы число мы ни взяли для x, произведение $0 \cdot x$ равно нулю, а не 10.

Пусть, например, уравнение будет такое:

$$\frac{x}{2} - 4 + \frac{x}{3} = 7 + \frac{5x}{6},$$

Решаем его, как обыкновенно (общий знаменатель 6):

$$3x - 24 + 2x = 42 + 5x,$$

т. е.

$$5x = 66 + 5x, \quad \text{или} \quad 5x - 5x = 66.$$

Какое бы число x мы ни взяли, разность $5x - 5x$ всегда равна нулю, а не числу 66. Значит, предложенное уравнение не имеет корня.

Если бы мы, не заметив, что коэффициент a равен нулю, разделили на него обе части уравнения $ax = b$, то получили бы для x такую формулу: $x = \dfrac{b}{a}$. Обнаружив затем, что $a = 0$, мы из этой формулы нашли бы $x = \dfrac{b}{0}$.

Так как деление на 0 невозможно, то из последней формулы мы пришли бы к заключению, что *при $a = 0$ и $b \neq 0$ уравнение $ax = b$ не имеет корня* (значит, и задача не имеет решений).

Но недостаточно ограничиться только этим одним заключением. Полезно указать ещё на одно важное обстоятельство, для уяснения которого мы предварительно должны рассмотреть, как изменяется дробь, когда знаменатель её неограниченно уменьшается, а числитель остаётся неизменным.

129. Как надо понимать равенство $\boldsymbol{\dfrac{m}{0} = \pm\infty}$. Пусть в дроби $\dfrac{m}{n}$ знаменатель всё более и более уменьшается по абсолютной величине, приближаясь неограниченно к нулю, а числитель остаётся неизменным. Положим, например, что знаменатель n получает такие уменьшающиеся значения:

$$n = 0{,}1; \quad n = 0{,}01; \quad n = 0{,}001; \quad n = 0{,}0001 \quad \text{и т. д.}$$

Тогда дробь будет получать такие возрастающие значения:

$$\frac{m}{0{,}1} = 10m; \ \frac{m}{0{,}01} = 100m; \ \frac{m}{0{,}001} = 1000m; \ \frac{m}{0{,}0001} = 10\,000m \ \text{ и т. д.}$$

Отсюда видно, что если числитель остаётся неизменным, а знаменатель неограниченно приближается к нулю, то абсолютная величина дроби $\dfrac{m}{n}$ (члены которой могут быть и отрицательными числами) будет н е о г р а н и ч е н н о у в е л и ч и в а т ь с я. Это обстоятельство кратко выражается в письменной форме так:

$$\frac{m}{0} = \pm\infty,$$

где знак ∞ выражает «бесконечность». Запись эту нельзя понимать буквально, так как деление на 0 невозможно; она только кратко означает, что абсолютная величина дроби неограниченно увеличивается (или, как иногда говорят, *стремится к бесконечности*), если знаменатель неограниченно приближается к нулю, а числитель остаётся неизменным, причём сама дробь остаётся или положительной, или отрицательной (смотря по тому, имеет ли знаменатель, стремящийся к нулю, одинаковый знак с числителем или противоположный).

130. Неограниченный рост корня. Теперь мы можем дополнить исследования предыдущего параграфа так:

При $\boldsymbol{a = 0}$ и $\boldsymbol{b \neq 0}$ уравнение $\boldsymbol{ax = b}$ не имеет корня, но если $\boldsymbol{a}$ не равно 0, а только приближается к 0 всё ближе и ближе, то абсолютная величина корня возрастает неограниченно.

131. Неопределённое решение. Если в уравнении $ax = b$ оба числа a и b окажутся нулями, то уравнение обращается в тождество: $0 \cdot x = 0$, верное при всяком значении x. Значит, в этом случае уравнение становится неопределённым, т. е. оно допускает бесчисленное множество произвольных решений.

Если бы мы, не заметив, что $a = 0$, разделили обе части уравнения на a, то для x получили бы дробь $\frac{b}{a}$, которая при $b = 0$ и $a = 0$ обращается в выражение $\frac{0}{0}$. Такое выражение не имеет никакого численного значения.

Рассмотрим пример.

Задача. Какое число надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{a}{b}$, чтобы эта дробь сделалась равной числу m?

Обозначив искомое число буквой x, получим такое уравнение:

$$\frac{a+x}{b+x} = m,$$

откуда:

$$a + x = bm + mx; \quad x - mx = bm - a; \quad (1 - m)x = bm - a.$$

Если $m \neq 1$, то $x = \frac{bm - a}{1 - m}$.

Допустим, что $m = 1$, а разность $b - a$ есть какое-нибудь число, отличное от нуля (положительное или отрицательное). Тогда для x получим:

$$0 \cdot x = b - a.$$

Отсюда мы можем заключить, что при $m = 1$ и $b \neq a$ не существует никакого числа x, удовлетворяющего вопросу задачи, но если m не равно 1, а только приближается к 1, то абсолютная величина числа x увеличивается неограниченно.

Если же при $m = 1$ ещё $b = a$, то для x получается формула:

$$0 \cdot x = 0,$$

из которой можно заключить, что всякое число x удовлетворяет вопросу задачи (и действительно: дробь $\frac{a+x}{a+x}$ при всяком числе x равна 1).

132. Графическое истолкование решения уравнения $ax = b$. Обозначим левую часть уравнения буквой y_1, правую часть — буквой y_2 и построим на одном и том же чертеже графики двух функций: $y_1 = ax$ и $y_2 = b$.

График первой функции есть прямая, проходящая через начало координат и через точку $(1, a)$; график второй функции есть прямая, параллельная оси x-ов и отсекающая от оси y-ов отрезок b (на рис. 31 мы изобразили случай, когда $a > 0$ и $b > 0$; предоставляем самим читателям сделать чертежи для случаев, когда 1) $a > 0$, но $b < 0$; 2) $a < 0$, $b > 0$ и 3) $a < 0$ и $b < 0$). Пересечение этих двух прямых определит некоторую точку M, абсцисса которой OA и будет корнем уравнения $ax = b$, так как при этой абсциссе ордината прямой $y_1 = ax$ равна ординате прямой $y_2 = b$ и, следовательно, $ax = b$.

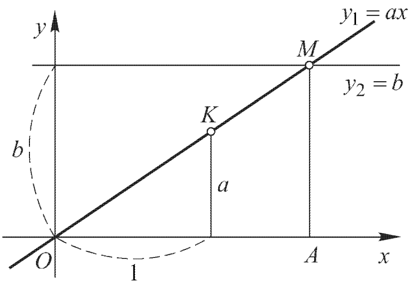


Рис. 31

Пользуясь таким графическим изображением, мы можем наглядно истолковать все случаи решения уравнения $ax = b$. Ограничимся рассмотрением двух случаев: 1) уравнение не имеет решения и 2) уравнение имеет неопределённое решение.

1) *Уравнение не имеет решений* (см. рис. 32). Уменьшая численную величину коэффициента a, мы заставляем прямую $y = ax$ всё более и более приближаться к оси x-ов. Тогда точка M, в которой прямая $y = b$ пересекается с прямой $y = ax$, всё более и более удаляется направо, проходя через положения M_1, M_2, M_3 и т. д., причём абсцисса OA точки пересечения беспредельно увеличивается, принимая значения OA_1, OA_2, OA_3 и т. д. Значит, когда a неограниченно уменьшается, приближаясь к нулю, корень уравнения $ax = b$ неограниченно возрастает (что можно выразить так: $x = \frac{b}{0} = \infty$).

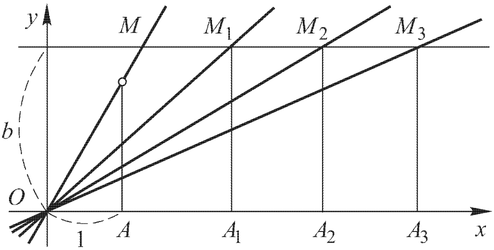


Рис. 32

2) *Неопределённое решение* получается, как мы видели (§ 131), при $a = b = 0$. Чтобы истолковать этот случай графически, вообразим, что на рис. 32 величина b уменьшается, приближаясь к нулю; тогда прямая $y_2 = b$, оставаясь параллельной оси x-ов, будет всё более и более приближаться к этой оси и при $b = 0$ сольётся с нею. С другой стороны, при $a = 0$ прямая $y_1 = ax$ тоже обратится в ось x-ов и тогда две прямые $y_2 = b$ и $y_1 = ax$ совпадут с осью x-ов, и, следовательно, каждую из точек этой оси можно считать за точку пересечения; значит, величина корня остаётся неопределённой.

Упражнения.

Убедиться, что следующие уравнения не имеют корней (приводятся к *невозможному* равенству).

233. $\frac{5x+1}{6} + \frac{x+3}{4} = x + 1 + \frac{x-3}{12}$.

234. $(x+2)^2+(x-2)^2=(x+3)^2+(x-3)^2$.

Убедиться, что следующие уравнения допускают бесчисленное множество решений (обращаются в тождества):

235. $8x+3=(x+2)^2-x^2+4x-1$.

236. $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$.

237. На прямой, проходящей через центры O и O_1 двух окружностей, радиусы которых r и r_1, а расстояние между центрами равно d, найти точку, в которой пересекается с этой прямой общая внешняя касательная к двум указанным окружностям. Исследовать различные случаи, могущие представиться при решении.

238. То же — для общей внутренней касательной.

II. Исследование системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

133. Общие формулы. В первой части этого учебника мы видели (§ 97), что система двух уравнений:

$$ax+by=c \quad \text{и} \quad a'x+b'y=c'$$

даёт следующие формулы для неизвестных:

$$(ab'-a'b)x=(b'c-bc'); \quad (ab'-a'b)y=(ac'-a'c). \tag{1}$$

Если $ab'-a'b\neq 0$, то

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}; \quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}. \tag{2}$$

134. Исследование. Исследование этих формул подразделим на два случая:

1) Общий знаменатель $ab'-a'b$ не равен нулю. В этом случае система имеет единственное решение. О значении этого решения для задачи, из условий которой составлена рассматриваемая система, здесь может быть сказано то же самое, что говорилось раньше при исследовании одного уравнения с одним неизвестным.

2) Общий знаменатель $ab'-a'b=0$. В этом случае числители в формулах (2) могут быть как отличными от нуля, так и равными нулю. Докажем, что если ни одно из чисел a, a', b, b' не равно нулю, то будет иметь место одно из следующих двух предположений:

а) Если один из числителей для x или для y в формулах (2) равен нулю, то и другой равен нулю.

Пусть, например, числитель для x равен нулю, для чего необходимо, чтобы:

$$cb'=c'b; \text{ и, кроме того, дано, что } ab'=a'b.$$

Умножив левую часть первого из этих равенств на правую часть второго, а правую — на левую второго, получим:

$$cb'a'b=c'bab', \quad \text{откуда} \quad cb'a'b-c'bab'=0,$$

и, следовательно,
$$bb'(a'c - ac') = 0.$$

Так как числа b и b' не равны нулю, то последнее равенство возможно только тогда, когда $a'c - ac' = 0$, т. е. числитель для y равен нулю.

Так же, если допустим, что числитель для y в формулах (2) равен нулю (т. е. если $ac' = a'c$ и $ab' = a'b$), то получим:
$$ac'a'b = a'cab'; \quad aa'(c'b - cb') = 0; \quad c'b - cb' = 0.$$

б) Если один из числителей для x или для y в формулах (2) не равен нулю, то и числитель для другого неизвестного также не равен нулю.

Действительно, если для одного из неизвестных числитель был бы равен нулю, то, по доказанному, числитель для другого неизвестного также был бы равен нулю.

Если числители для обоих неизвестных в формулах (2) равны нулю, то это означает неопределённость задачи. Действительно, умножив все члены первого уравнения на b', а члены второго на b (что можно сделать, так как, по предположению, числа b и b' не равны 0), получим:
$$ab'x + bb'y = cb' \quad \text{и} \quad a'bx + b'by = c'b. \tag{A}$$

Но $ab' = a'b$ и $cb' = c'b$; следовательно, оба уравнения [A] представляют собой в сущности одно уравнение с двумя неизвестными, а в этом случае, как мы знаем, неизвестные могут иметь бесчисленное множество значений.

Если числители в формулах (2) не равны нулю, а $ab' - a'b = 0$, то это означает несовместимость уравнений. В самом деле, если $ab' = a'b$, а $cb' \neq c'b$, то левые части системы [A] имеют одинаковые численные величины, а правые — разные; значит, уравнения несовместимы и задача не имеет решения.

Полезно заметить, что в случае, когда уравнения (1) принимают вид $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot y = 0$, то это ещё не значит, что обоим неизвестным можно давать произвольные значения. Выбрав значение одного из них произвольно, мы тем самым определим другое неизвестное, найдя его из какого-нибудь одного из двух данных уравнений.

Итак, если $ab' - a'b \neq 0$, то решение системы:
$$ax + by = c \quad \text{и} \quad a'x + b'y = c'$$
получается по общим формулам; если же $ab' - a'b = 0$, но ни одно из чисел a, a', b, b' не обращается в нуль, то система или имеет бесчисленное множество решений, или ни одного решения. Случай, когда $ab' - a'b = 0$ и, кроме того, какое-либо из чисел a, a', b, b' равно нулю, мы не рассматриваем.

III. Исследование квадратного уравнения

135. Исследование формул. Корни полного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ выражаются, как мы знаем, формулами:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Число a мы будем считать положительным (если бы оно было отрицательное, мы могли бы переменить знаки перед всеми членами уравнения на противоположные; нулём число о быть не может, так как в противном случае уравнение перестало бы быть квадратным, оно обратилось бы в уравнение первой степени).

Мы говорили ранее (§ 42), что корни квадратного уравнения будут оба вещественные или оба мнимые в зависимости от того, окажется ли дискриминант $b^2 - 4ac$ величиной положительной или отрицательной.

Рассмотрим этот вопрос подробнее: 1) Если $b^2 - 4ac > 0$, то $\sqrt{b^2 - 4ac}$ есть некоторое положительное число (вспомним, что здесь знак $\sqrt{\ }$ обозначает арифметическое значение радикала); следовательно, корни x_1 и x_2 будут вещественные и неравные. При этом могут представиться три случая:

а) Оба корня — положительные числа, если $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ и $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$, для чего необходимо, чтобы число b было отрицательное (при положительном b корень x_2 имел бы отрицательное значение) и чтобы абсолютная величина b превосходила $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

б) Оба корня — отрицательные числа, если $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ и $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$, для чего необходимо, чтобы b было числом положительным (при отрицательном b корень x_1 был бы, очевидно, положительным) и, кроме того, чтобы удовлетворялось неравенство: $b > \sqrt{b^2 - 4ac}$.

в) Один корень — положительный, а другой — отрицательный, когда b, будучи положительным или отрицательным, по абсолютной величине меньше $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

2) Если $b^2 - 4ac = 0$, то корни будут вещественные и равные: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, положительные или отрицательные (или равны нулю при $b = 0$).

3) Если $b^2 - 4ac < 0$, то оба корня мнимые (случай этот невозможен при $c < 0$).

4) Нулевые решения могут оказаться только в том случае, когда один из числителей формул для x_1 и x_2 или оба эти числителя будут нули. Первое будет тогда, когда $c = 0$ и, значит, уравнение примет вид: $ax^2 + bx = 0$; второе — тогда, когда и $c = 0$ и $b = 0$, т. е. когда уравнение будет: $ax^2 = 0$.

Если $a = 0$, то уравнение перестаёт быть квадратным, обратившись в уравнение первой степени: $bx + c = 0$. Но, поставив вопрос, как изменяются x_1 и x_2, когда a неограниченно приближается к нулю, мы придём к выводу, аналогичному сделанному нами об уравнении первой степени. А именно: если a неограниченно приближается к нулю, то один из корней квадратного уравнения неограниченно возрастает, другой же неограниченно приближается к значению $-\frac{c}{b}$.

136. Задача о двух источниках света. Чтобы на примере указать значение различных случаев, какие могут представиться при решении квадратного уравнения, приведём задачу о двух источниках света.

На прямой MN в точках A и B находятся два источника света. Сила света первого источника равна a свечам, а второго равна b свечам. Расстояние между A и B равно d метрам. Найти на прямой MN такую точку, в которой освещение от обоих источников было бы одинаковое (см. рис. 33).

Искомая точка может находиться или между A и B, или направо от B, или налево от A.

Сделаем предположение, что она лежит между A и B, например, в точке C, отстоящей от A на x метров. Из физики известно, что освещённость при одинаковых прочих условиях обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света. Приняв во внимание этот

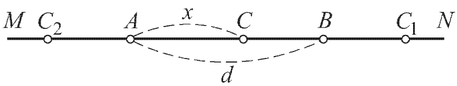


Рис. 33

закон, будем рассуждать так: если бы точка C отстояла от A на 1 м, то её освещённость этим источником была бы a люксов, но так как она отстоит от A не на 1 м, а на x метров, то её освёщенность этим источником будет $\frac{a}{x^2}$ люксов.

Подобно этому найдём, что точка C, отстоя от источника света B на $(d-x)$ м, будет иметь освещённость от B в $\frac{b}{(d-x)^2}$ люксов. Вопрос задачи требует, чтобы

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}, \tag{1}$$

откуда:

$$a(d-x)^2 = bx^2, \quad \text{т. е.} \quad ad^2 - 2adx + ax^2 - bx^2 = 0,$$
$$(a-b)x^2 - 2adx + ad^2 = 0.$$

Так как коэффициент при x делится на 2, то (ч. I, § 125)

$$x = \frac{ad \pm \sqrt{a^2d^2 - (a-b)ad^2}}{a-b} = \frac{ad \pm d\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{d\sqrt{a}\,(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, \quad x_2 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Исследуем эти формулы. Так как a и b — числа положительные, то мнимых решений в этой задаче не будет.

1) Если $a > b$, то оба корня положительны, причём так как $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, то $x_1 > d$, а $x_2 < d$.

Второе решение ($x_2 < d$) соответствует нашему предположению, что искомая точка находится между A и B; первое же решение ($x_1 > d$) ему противоречит. Чтобы принять или отвергнуть это решение, мы должны рассмотреть, какое уравнение получится, если сделаем предположение, что искомая точка находится направо от B (например, в C_1) на расстоянии x от A. Тогда по-прежнему освещённость её источником A будет $\frac{a}{x^2}$; от источника B точка C_1 находится на расстоянии $x - d$; поэтому освещённость её этим источником будет $\frac{b}{(x-d)^2}$ и уравнение будет:

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x-d)^2}, \tag{2}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), находим, что они одинаковы, так как

$$(d - x)^2 = (x - d)^2.$$

Заметив это, мы можем утверждать, что оба положительные решения уравнения (1) удовлетворяют задаче.

2) Если $a < b$, то x_1 — отрицательное число, а x_2 — положительное, причём $x_2 < d$. Положительное решение соответствует предположению, что искомая точка находится между A и B. Чтобы уяснить смысл отрицательного решения, заменим в уравнении (1) x на $-x$:

$$\frac{a}{(-x)^2} = \frac{b}{(d+x)^2},$$

или

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d+x)^2}, \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет те же корни, что и уравнение (1), только с противоположными знаками. Значит, отрицательное решение уравнения (1) равно по абсолютной величине положительному решению уравнения (3). Но это последнее соответствует той же задаче, только иному предположению, а именно, что искомая точка находится налево от A. Действительно, если допустим, что искомая точка есть C_2, отстоящая от A на x, то найдём, что освещённость её источником A есть $\frac{a}{x^2}$, а источником B — равна $\frac{b}{(d+x)^2}$; следовательно, уравнение (3) удовлетворяет этому предположению.

Итак, отрицательное решение уравнения (1) означает, что число метров, выраженное формулой для x_1, надо откладывать в направлении, противоположном тому, в каком считается положительное решение.

3) Если $a = b$, то выражение для x_1 теряет смысл, а формулы для корней дают

$$x_2 = \frac{d}{2}.$$

Рассуждая так, как в § 129, заключаем: по мере приближения к равенству величин a и b значение x_1 неограниченно возрастает, т. е. равномерно освещённая точка безгранично удаляется от источников света.

Второй корень $x_2 = \frac{d}{2}$ показывает, что при $a = b$ вторая одинаково освещённая точка находится посередине между одинаковыми источниками света.

4) Если $a = b$ и $d = 0$, то уравнение (2) обращается в тождество

$$0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 0 = 0,$$

верное при всяком значении x. Значит, задача становится неопределённой.

Действительно, если источники света одинаковой силы помещаются в одном месте ($d = 0$), то всякая произвольная точка будет ими одинаково освещаться.

5) Если a не равно b, но $d = 0$, то $x_1 = x_2 = 0$. Это надо понимать в том смысле, что если расстояние между двумя неравной силы источниками света уменьшается, приближаясь все более и более к нулю, то обе равно освещённые точки неограниченно приближаются к источнику A.

Глава 9

МНИМЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

137. Мнимые числа. Мы уже говорили раньше (ч. I, § 108), что к мнимым числам приводит извлечение корня чётной степени из отрицательного числа.

Мы будем говорить только о квадратном корне из отрицательного числа.

Принято обозначать мнимое число $\sqrt{-1}$ буквой i (начальная буква французского слова imaginaire, что значит «мнимый») и называть *мнимой единицей.* Естественно допустить, что $i^2 = -1$ и $(\sqrt{-a}\,)^2 = -a$. Всякое мнимое число может быть выражено в виде произведения i на некоторое действительное число. Например, $\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = 4\sqrt{-1} = 4i$. Вообще $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2(-1)} = b\sqrt{-1} = bi$.

138. Комплексные числа. Число вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, называется *комплексным числом* [1]); в нём a называется *вещественной частью*, bi — *мнимой частью*. При $a = 0$ оно обращается в чисто мнимое число bi; при $b = 0$ получим число $a + 0 \cdot i$, которое рассматривается как вещественное число a.

Комплексные числа вида $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряжёнными.* Комплексные числа вида $a + bi$ и $-a - bi$ называются *противоположными.*

Определение. *Два комплексных числа $a + bi$ и $a' + b'i$ считаются равными в том и только в том случае, если*

$$a = a', \quad b = b'.$$

Из этого определения вытекает, что комплексное число $a + bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$.

В самом деле, вещественное число 0 может быть представлено в виде комплексного числа так: $0 + 0 \cdot i$. На основании предыдущего определения, равенство $a + bi = 0 + 0 \cdot i$ будет иметь место только лишь при условии $a = 0$ и $b = 0$.

[1]) Слово «комплексный» означает «сложный», «составной»; такое название числу вида $a + bi$ было дано впервые немецким математиком Гауссом (1777–1855). Название «мнимый» (imaginaire) было введено французским математиком Декартом в 1637 г.

Замечание. Относительно комплексных чисел не принято никакого соглашения, какое из них считать больше другого.

139. Действия над комплексными числами. Над комплексными числами условимся производить алгебраические действия и преобразования по тем же правилам, по каким они производятся над числами вещественными, принимая всегда $(\sqrt{-a}\,)^2 = -a$.

Это положение служит основой при операциях над комплексными числами. Чтобы произвести какое-нибудь действие над комплексными числами вида $a + bi$, надо произвести действия над двучленами такого вида по тем правилам, которые выведены были для двучленов с вещественными членами, и, наконец, в результате заменить везде i^2 на -1.

Сложение.

$$(a + bi) + (a_1 + b_1 i) = (a + a_1) + (b + b_1)i;$$
$$(a + bi) + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a + a_1 + a_2) + (b + b_1 + b_2)i.$$

Отсюда легко усмотреть, что сумма комплексных чисел обладает теми же свойствами, какие принадлежат сумме вещественных чисел, т. е. свойствами переместительным и сочетательным.

Вычитание.

$$(a + bi) - (a_1 + b_1 i) = (a - a_1) + (b - b_1)i;$$

Заметим, что сумма или разность двух комплексных чисел может оказаться числом вещественным; например, сумма сопряжённых комплексных чисел $(a + bi) - (a - bi) = 2a$.

Умножение.

$$(a + bi)(a_1 + b_1 i) = aa_1 + a_1 bi + ab_1 i + bb_1 i^2 = (aa_1 - bb_1) + (a_1 b + ab_1)i.$$

Подобным образом можно составить произведение трёх и более комплексных чисел.

Заметим, что произведение двух сопряжённых комплексных, не равных нулю чисел $(a + bi)(a - bi)$ равно положительному вещественному числу $a^2 + b^2$. Действительно:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2,$$

но $i^2 = -1$; следовательно,

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Деление.

$$\frac{a + bi}{a_1 + b_1 i} = \frac{(a + bi)(a_1 - b_1 i)}{(a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i)} = \frac{(aa_1 + bb_1) + (a_1 b - ab_1)i}{a_1^2 - (b_1 i)^2} =$$
$$= \frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2 + b_1^2} i.$$

Возведение в степень. Предварительно найдём результаты от возведения в степень мнимой единицы i, зная, что согласно условию i^2 должно принимать равным -1.

$$\begin{array}{ll} i^1 = i; & i^5 = i^4 \cdot i = (+1) \cdot i = i; \\ i^2 = -1; & i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1; \\ i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i; & i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i; \\ i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = +1; & i^8 = i^4 \cdot i^4 = +1 \end{array}$$

и т. д.

Мы получаем, таким образом, четыре чередующихся значения:

$$i; \quad -1; \quad -i; \quad +1.$$

Заметим ещё, что i^0 принимается равным 1.

Теперь легко найдём результаты возведения $a + bi$ в степень с целым положительным показателем; так:

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi;$$
$$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2(bi) + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2 b - b^3)i.$$

Извлечение квадратного корня. Положим, что

$$\sqrt{a+bi} = x + yi.$$

Тогда:

$$a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases} \tag{1}$$

Вопрос приводится к нахождению вещественных корней этой системы. Возведя оба уравнения в квадрат и затем сложив их, получим:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

(Знак минус перед радикалом отброшен, так как при вещественных значениях x и y выражение $x^2 + y^2$ не может быть отрицательным.) Возьмём последнее уравнение совместно с первым уравнением системы (1); складывая их и вычитая, получим:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2} \quad \text{и} \quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2}}\,,$$
$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2} \quad \text{и} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2}}\,.$$

Из второго уравнения системы (1) усматриваем, что знаки у x и y должны быть одинаковые, если $b > 0$, и разные, если $b < 0$. Поэтому:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \quad \text{при } b > 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \quad \text{при } b < 0.$$

Примеры.

$$1)\ \sqrt{5+12\sqrt{-1}} = \sqrt{5+12i} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right] = \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{9}+i\sqrt{4}\right) = \pm(3+2i).$$

$$2)\ \sqrt{\sqrt{-1}} = \sqrt{i} = \sqrt{0+1\cdot i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$3)\ \sqrt{-\sqrt{-1}} = \sqrt{-i} = \sqrt{0-1\cdot i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right).$$

Замечание. Извлечение корней более высокой степени мы не будем рассматривать.

Упражнения.

239. Проверить равенство: $i^7+i^{18}+i^{25}+i^{35}+i^{97}+i^{100}=0$.

Вычислить выражения:

240. $(x+i\sqrt{6})(x-i\sqrt{6})$.

241. $\sqrt{4+2\sqrt{-6}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{-6}}$.

242. $(1+i)^4$; $(-2\sqrt{-2})^6$.

Проверить возведением в квадрат или куб следующие равенства:

243. $\sqrt{2i}+\sqrt{-2i}=2$.

244. $\sqrt[3]{i}=-i$.

Выполнить указанные действия:

245. $(\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i})^2$.

246. $\dfrac{(a+ib)^2}{a-ib}-\dfrac{(a-ib)^2}{a+ib}$.

Упростить выражения:

247. 1) $\dfrac{1}{-1+i\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$.

248. Обозначив для краткости:

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\alpha_1; \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\alpha_2 \quad \text{и} \quad 1=\alpha_3,$$

проверить равенства:

1) $\alpha_1^3=\alpha_2^3=\alpha_3^3=1$; 2) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$; 3) $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3=1$;
4) $\alpha_1^2=\alpha_2$; 5) $\alpha_2^2=\alpha_1$; 6) $1+\alpha_1+\alpha_1^2=0$.

140. Геометрическое изображение комплексного числа. Всякое комплексное число $a+bi$ может быть изображено геометрически.

Возьмём в плоскости прямоугольную систему координат и, выбрав единицу длины (например, сантиметр), будем изображать вещественные числа по оси x-ов, а мнимые — по оси y-ов. Соответственно с этим ось x-ов называется *вещественной осью*, а ось y-ов — *мнимой осью*. Так, например, (см. рис. 34),

точка	N_1	изображает	число	$+1{,}75$;
"	N_2	"	"	$-2{,}25$;
"	N_3	"	"	$+1{,}1i$;
"	N_4	"	"	$-2{,}25i$.

Число $a+bi$ будем изображать точкой плоскости, абсцисса которой равна a, а ордината равна b. Так, например,

точка	M_1	изображает	число	$0{,}9+1{,}3i$;
"	M_2	"	"	$0{,}9-1{,}75i$;
"	M_3	"	"	$-1{,}4-1{,}1i$;
"	M_4	"	"	$-1{,}8+2{,}25i$;
"	O	"	"	$0+0\cdot i$.

Очевидно, что при данных координатных осях и при данной единице длины всякой точке плоскости соответствует одно и только одно комплексное число (в частном случае — вещественное или мнимое); и, наоборот, всякому комплексному числу соответствует одна и только одна точка плоскости. Таким образом, подобно тому как всякое вещественное число (как положительное, так и отрицательное, и нуль) может быть геометрически изображено точкой прямой линии (числовой оси), так и всякое комплексное число может быть геометрически представлено точкой плоскости.

Заметим, что отрезок от начала координат до точки, изображающей данное комплексное число $a+bi$, представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого один катет равен a, а другой — b. Значит, это расстояние численно равно $\sqrt{a^2+b^2}$; эта величина называется *модулем* комплексного числа $a+bi$. Модуль числа, не равного нулю, всегда положителен.

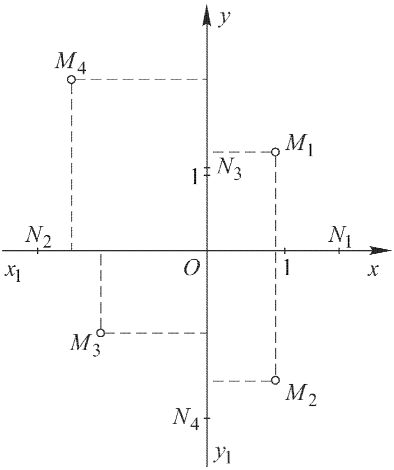


Рис. 34

Геометрическое представление комплексных чисел играет большую роль в некоторых разделах математики.

140а. Тригонометрическая форма комплексного числа. Изображение комплексных чисел при помощи точек на плоскости позволяет нам представить число $a+bi$ в другом виде, а именно в так называемой тригонометрической форме. Пусть (см. рис. 35) точка M изображает комплексное число $a+bi$. Тогда:

$$OA = a; \quad AM = b. \tag{1}$$

Обозначим расстояние OM точки M от начала координат через r, а угол AOM, образуемый OM с осью x-ов, через φ. Тогда из треугольника OAM имеем:

$$a = r\cos\varphi; \quad b = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Подставив в комплексное число $a+bi$ вместо a и b найденные выражения, получим:

$$a+bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi,$$

или

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

Это и есть тригонометрическая форма комплексного числа. Величина $OM = r$ называется *модулем* комплексного числа, а величина угла $AOM = \varphi$ — его *аргументом*.

Заметим, что модуль r, выражающий расстояние точки M от начала координат, является всегда числом положительным (только модуль нуля равен нулю).

Покажем, как комплексное число, данное в обычной алгебраической [1] форме $a+bi$, представить в тригонометрической форме. Для этого мы должны найти r и φ, когда нам известны a и b. Но из

[1] Так как a и b являются абсциссой и ординатой точки, изображающей число $a+bi$, то такую форму комплексного числа называют также координатной.

треугольника OAM (см. рис. 35) имеем:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \qquad (4)$$

Таким образом, зная a и b, мы всегда сможем найти r и φ по формулам (4).

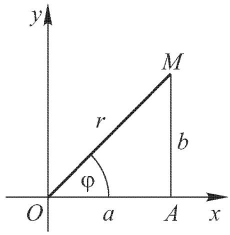


Рис. 35

Пример 1. Выразить число $5 + 12i$ в тригонометрической форме.

По формулам (4) находим:

$$r = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{12}{5}.$$

Остаётся по данному тангенсу найти угол φ. Наименьшим углом, тангенс которого равен $\frac{12}{5} = 2{,}4$, будет $\varphi = 67^\circ 23'$. Но мы знаем, что такую же величину тангенса имеет и угол $180^\circ + \varphi = 247^\circ 23'$.

Какой же из этих углов надо взять в данном случае? Чтобы установить это, посмотрим, какие знаки имеют $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$. Из (2) имеем:

$$\sin \varphi = \frac{b}{r}; \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}. \qquad (5)$$

Подставляя сюда значения $a = 5$; $b = 12$; $r = 13$, получим:

$$\sin \varphi = \frac{12}{13}; \quad \cos \varphi = \frac{5}{13},$$

т. е. синус и косинус положительны. Это значит, что угол находится в 1-м квадранте и, следовательно, $\varphi = 67^\circ 23'$. Теперь мы можем написать:

$$5 + 12i = 13 \cdot (\cos 67^\circ 23' + \sin 67^\circ 23').$$

Из тригонометрии известно, что и синус и косинус не изменяются, если к аргументу прибавить или от него отнять целое число раз по 360°. Поэтому полученное выражение мы можем записать в более общем виде:

$$5 + 12i = 13[\cos(67^\circ 23' + 360^\circ k) + \sin(67^\circ 23' + 360^\circ k)],$$

где k — любое целое число (в том числе и нуль).

Примечание. Так как знаменатель r в выражениях (5) всегда число положительное, то знаки синуса и косинуса зависят только от знаков a и b. Поэтому в данном случае, видя, что a и b оба положительны, мы могли сразу заключить, что будут положительны и синус и косинус.

Пример 2. Записать в тригонометрической форме число $-3 + 2i$.

По формулам (4) находим:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2}{3} = -0{,}666\ldots$$

Тангенс отрицателен, следовательно, значение φ надо искать во 2-м или в 4-м квадранте. Обращаясь к формулам (5), замечаем, что при

$a = -3$ и $b = 2$ синус будет положителен, а косинус отрицателен, что имеет место во 2-м квадранте. По таблицам находим $\varphi = 146^\circ 18'$, значит:

$$-3 + 2i = \sqrt{13}\,(\cos 146^\circ 18' + i \sin 146^\circ 18').$$

Пример 3. Представить в тригонометрической форме число $1 - i$.

Имеем: $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg} \varphi = -1$.

Так как здесь $a = 1 > 0$, а $b = -1 < 0$, то косинус положителен, а синус отрицателен, что имеет место в 4-м квадранте. Отсюда находим $y = 315^\circ$ и можем написать:

$$1 - i = \sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ).$$

Примечание 1. Так как $315^\circ = 360^\circ - 45^\circ$ и отсюда:

$$\cos 315^\circ = \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ,$$
$$\sin 315^\circ = \sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ,$$

то мы могли бы данное число записать и в такой форме:

$$1 - i = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ).$$

Примечание 2. Конечно, во всех примерах мы могли вместо градусного выражения аргумента пользоваться радианным. Так, полученное в примере 3 выражение мы могли бы записать и в таком виде:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right).$$

Предлагается учащимся построить точки, заданные в примерах 1–3, по их данным координатам a и b и убедиться, что во всех случаях значения r и φ совпадают с вычисленными нами по формулам (4).

Пример 4. Представить в тригонометрической форме вещественное число $m > 0$.

Так как

$$m = m + 0 \cdot i,$$

то здесь $a = m$, $b = 0$, и мы имеем:

$$r = \sqrt{m^2 + 0^2} = m; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{0}{m} = 0; \quad \cos \varphi = \frac{m}{m} = 1.$$

Следовательно, $\varphi = 0^\circ$, и мы можем написать:

$$m = m(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ),$$

или в общем виде:

$$m = m(\cos 360^\circ k + i \sin 360^\circ k).$$

Отсюда заключаем, что модулем положительного числа является само это число, а аргументом 0° (или $360^\circ k$).

Пример 5. Представить в тригонометрической форме отрицательное число $-m$ $(m > 0)$.

Так как
$$-m = -m + 0 \cdot i,$$
то здесь $a = -m$, $b = 0$, и мы имеем:
$$r = \sqrt{(-m)^2 + 0^2} = m; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{-m} = 0; \quad \cos\varphi = \frac{-m}{m} = -1.$$
Следовательно, $\varphi = 180^\circ$, и мы получаем:
$$-m = m(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ),$$
или в более общем виде:
$$-m = m[\cos(180^\circ + 360^\circ k) + i\sin(180^\circ + 360^\circ k)].$$

Отсюда заключаем, что модулем отрицательного числа является его абсолютная величина, а аргументом 180° (или в более общей форме: $180^\circ + 360^\circ k$).

Поставим теперь обратную задачу: комплексное число, заданное в тригонометрической форме, представить в алгебраической форме.

Если число дано в тригонометрической форме, значит, даны значения r и φ. Но тогда по формулам (2) мы можем сразу вычислить a и b.

Пример 6. Число $6(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$ представить в алгебраической форме.

Имеем:
$$a = r\cos\varphi = 6\cos 40^\circ = 6 \cdot 0{,}766 = 4{,}596,$$
$$b = r\sin\varphi = 6\sin 40^\circ = 6 \cdot 0{,}643 = 3{,}858,$$
и данное число запишется в виде:
$$4,596 + 3{,}858i.$$

Заметим, что значения φ в первых трёх примерах и значения a и b в последнем примере являются приближёнными, так как при их вычислении мы пользовались таблицами тригонометрических функций.

Пример 7. Выразить в алгебраической форме число $4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$.

Так как $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, то сразу имеем:
$$4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Пример 8. Выразить в алгебраической форме число $5(\cos 0^\circ - i\sin 0^\circ)$.

Так как $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 0^\circ = 0$, то
$$5(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ) = 5,$$
т. е. получили вещественное число.

Упражнения.

249. 1) Представить в тригонометрической форме числа:

а) $4+3i$; б) $4-3i$; в) $-4+3i$; г) $-4-3i$.

2) Представить в тригонометрической форме числа:

а) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{3}+i$; в) $1-i\sqrt{3}$.

3) Представить в тригонометрической форме числа:

а) $5-4i$; б) $1+2i$; в) 3; г) $5i$.

4) Доказать, что для всех вещественных положительных чисел аргумент будет равен 0° (или, что то же, $360^\circ k$).

5) Доказать, что для всех чисто мнимых чисел аргумент будет равен 90° или -90° (или, в более общей форме, $360^\circ k+90^\circ$ и $360^\circ k-90^\circ$).

6) Найти, как расположены точки, изображающие числа, имеющие модуль: 2; 5.

7) Найти, как расположены точки, изображающие числа, аргумент которых равен: 30°; -45°; 180°.

8) Представить в алгебраической форме числа:

а) $\cos 24^\circ + i\sin 24^\circ$; б) $2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$; в) $6(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.

140б. Действия с комплексными числами, выраженными в тригонометрической форме. Все алгебраические действия с комплексными числами, выраженными в тригонометрической форме, совершаются по тем же правилам, что и с комплексными числами, выраженными в алгебраической форме (см. § 139). Это значит, что действия совершаются по правилам действий с многочленами, причём всегда принимается, что $(\sqrt{-a})^2=-a$, в частности $(\sqrt{-1})^2=i^2=-1$.

Сложение и вычитание комплексных чисел проще и удобнее производить, когда они даны в алгебраической форме. Совсем иначе обстоит дело с остальными четырьмя алгебраическими действиями.

Умножение. Пусть требуется перемножить числа:

$$m=R(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$
$$n=r(\cos\beta+i\sin\beta).$$

Будем иметь:

$$mn=Rr(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta). \tag{1}$$

Но

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta+i\sin\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+$$
$$+i^2\sin\alpha\sin\beta=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta),$$

и равенство (1) примет вид:

$$mn=Rr[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]. \tag{I}$$

Таким образом, оказывается:

Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент равен сумме аргументов сомножителей.

Пример 1. Пусть

$$m = 3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ),$$
$$n = 2(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ).$$

Тогда:

$$mn = 6(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ).$$

Пример 2. Пусть

$$m = 5(\cos 200^\circ + i\sin 200^\circ),$$
$$n = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ.$$

Тогда:

$$mn = 5(\cos 440^\circ + i\sin 440^\circ) = 5(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ).$$

Пример 3. Пусть

$$m = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$
$$n = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда:

$$mn = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Пусть требуется перемножить три числа:

$$m = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$n = r_2(\cos\beta + i\sin\beta),$$
$$p = r_3(\cos\gamma + i\sin\gamma).$$

Перемножив первые два числа, мы согласно выведенной формуле (I) получим:

$$mn = r_1r_2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)].$$

Перемножая теперь числа mb и p, по той же формуле будем иметь:

$$mnp = r_1r_2r_3[\cos(\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma)].$$

Пример 4. Дано:

$$m_1 = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ),$$
$$m_2 = 3(\cos 200^\circ + i\sin 200^\circ),$$
$$m_3 = 5(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ).$$

Тогда:

$$m_1m_2m_3 = 30(\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ) = 30.$$

Совершенно очевидно, что умножение этих чисел в алгебраической форме потребовало бы гораздо больше вычислений и времени.

В общем случае, когда даны n чисел: m_1, m_2, ..., m_n, имеющих модули r_1, r_2, ..., r_n и аргументы φ_1, φ_2, ..., φ_n, мы получим:

$$m_1m_2\dots m_n = r_1r_2\dots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)]. \quad \text{(II)}$$

Деление. Пусть требуется число

$$m = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

разделить на число

$$n = r(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Будем иметь:

$$\frac{m}{n} = \frac{R(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{R}{r}\cdot\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{(\cos\beta + i\sin\beta)}. \quad (2)$$

Преобразуем вторую дробь, умножив числитель и знаменатель на $\cos\beta - i\sin\beta$ (число, сопряжённое знаменателю). Получим:

$$\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{\cos^2\beta - i^2\sin^2\beta}.$$

Но так как $i^2 = -1$, то знаменатель будет равен $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$. Числитель мы можем записать так:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)[\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)]$$

и, применив правило умножения комплексных чисел, получим:

$$\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta).$$

Подставив полученное выражение в (2), будем иметь:

$$\frac{m}{n} = \frac{R}{r}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]. \quad \text{(III)}$$

Следовательно, мы можем сказать:

Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент — разности аргументов делимого и делителя.

Пример 5. Пусть

$$m = 12(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ),$$
$$n = 3(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ).$$

Тогда:

$$\frac{m}{n} = 4(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ).$$

Пример 6. Пусть

$$m = \sqrt{3}\,(\cos 200^\circ + i\sin 200^\circ),$$
$$n = 2[\cos(-160^\circ) + i\sin(-160^\circ)].$$

Тогда:
$$\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Возведение в степень. Пусть требуется число
$$m = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
возвести в квадрат. Применяя выведенную выше формулу (I) для произведения, получим:
$$m^2 = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2,$$
или
$$m^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

Точно так же будем иметь:
$$m^3 = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Вообще, если имеем n сомножителей, равных
$$m = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
то, применяя формулу (II), получим:
$$m^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{IV}$$

Модуль степени комплексного числа равен той же степени модуля основания, а аргумент равен аргументу основания, умноженному на показатель степени.

В частном случае, если $r = 1$, то формула (IV) примет вид:
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Эта формула носит название «формула Муавра» по имени французского математика Муавра (1667–1754).

Пример 7. Возвести в куб число
$$a = 2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ).$$

Будем иметь:
$$a^3 = 8(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 4 + 4i\sqrt{3}$$
$\left(\text{так как } \cos 60^\circ = \frac{1}{2},\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 8. Возвести в 20-ю степень число
$$m = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Представим сначала число m в тригонометрической формуле. Имеем:
$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1,$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}, \quad \varphi = 60^\circ$$

(так как синус и косинус положительны, то угол берём в первом квадранте).

Таким образом:

$$m = 1 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ).$$

Отсюда:

$$m^{20} = 1^{20}(\cos 1200^\circ + i \sin 1200^\circ) = \cos(360^\circ \cdot 3 + 120^\circ) + i \sin(360^\circ \cdot 3 + 120^\circ) = \\ = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Извлечение корня. а) Пусть требуется извлечь квадратный корень из числа

$$m = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Обозначим через x и y модуль и аргумент искомого корня. Тогда:

$$\sqrt{r(\cos\varphi + i \sin\varphi)} = x(\cos y + i \sin y). \tag{3}$$

Отсюда по правилу возведения в квадрат получим:

$$r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = x^2(\cos 2y + i \sin 2y).$$

В таком случае по условию равенства двух комплексных чисел должно быть

$$x^2 = r, \quad \text{откуда} \quad x = \sqrt{r}.$$
$$2y = \varphi + 360^\circ k, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{\varphi}{2} + 180^\circ k.$$

Итак, корень квадратный из данного числа равен

$$n = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180^\circ k\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180^\circ k\right)\right].$$

Посмотрим, сколько различных значений корня мы получим, давая k значения 0, ±1, ±2 и т. д.

При $k = 0$ будем иметь:

$$n_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

При $k = 1$ получим:

$$n_2 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180^\circ\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180^\circ\right)\right].$$

Но

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180^\circ\right) = -\cos\frac{\varphi}{2} \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180^\circ\right) = -\sin\frac{\varphi}{2},$$

и мы можем корень n_2 записать в таком виде:

$$n_2 = -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Отсюда заключаем, что $n_2 = -n_1$.

При $k = 2$ получим:

$$n_3 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 360^\circ\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + 360^\circ\right)\right] = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right) = n_1.$$

При $k = 3$ получим:

$$n_4 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 540^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 540^\circ\right)\right] =$$
$$= \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180^\circ\right)\right] = n_2.$$

Очевидно, давая k значения 4, 5, 6, ..., мы всё время будем получать значения, поочерёдно равные n_1 и n_2. То же будем иметь, давая k отрицательные значения.

Таким образом, *квадратный корень из комплексного числа имеет два различных значения, которые по отношению друг к другу являются противоположными числами.*

Пример 9. Пусть

$$m = 16(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ).$$

Тогда:

$$\sqrt{m} = 4[\cos(30^\circ + 180^\circ k) + i\sin(30^\circ + l80^\circ k)].$$

При $k = 0$ получим:

$$\sqrt{m} = n_1 = 4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 4\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

При $k = 1$ будем иметь:

$$\sqrt{m} = n_2 = 4(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ) = 4(-\cos 30^\circ - i\cos 30^\circ) = -2\sqrt{3} - 2i.$$

Пример 10. Найти $\sqrt{25}$.

Согласно результату, полученному в примере 4 § 140а, можем написать:

$$25 = 25(\cos 360^\circ k + i\sin 360^\circ k).$$

Тогда:

$$\sqrt{25} = 5(\cos 180^\circ k + i\sin 180^\circ k).$$

При $k = 0$:

$$\sqrt{25} = 5(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ) = 5(1 + i\cdot 0) = 5.$$

При $k = 1$:

$$\sqrt{25} = 5(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 5(-1 + i\cdot 0) = -5.$$

б) Пусть требуется извлечь кубический корень из числа

$$m = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

По предыдущему можно написать:

$$\sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = x(\cos y + i\sin y).$$

Отсюда:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x^3(\cos 3y + i\sin 3y).$$

Следовательно, должно быть:

$$x^3 = r; \quad 3y = \varphi + 360^\circ k.$$

Отсюда:

$$x = \sqrt[3]{r}; \quad y = \frac{\varphi}{3} + 120^\circ k,$$

и мы получаем:

$$\sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = n = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ k\right)\right].$$

При $k = 0$ имеем:

$$n_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$

При $k = 1$:

$$n_2 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right)\right].$$

При $k = 2$:

$$n_3 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right)\right].$$

Нетрудно убедиться, что при $k = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$ будем получать $n_4 = n_1$, $n_5 = n_2$ и т. д., т. е. новых значений корня мы уже не получим. Те же значения получим и при отрицательных значениях k.

Таким образом, *кубический корень из комплексного числа имеет три различных значения.*

Пример 11. Найти кубический корень из единицы.

Имеем:

$$1 = 1\cdot(\cos 360^\circ k + i\sin 360^\circ k).$$

Тогда:

$$\sqrt[3]{1} = 1\cdot(\cos 120^\circ k + i\sin 120^\circ k).$$

При $k = 0, 1, 2$ получим соответственно:

$$n_1 = 1\cdot(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ) = 1;$$
$$n_2 = 1\cdot(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = 1\cdot\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$
$$n_3 = 1\cdot(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) = 1\cdot\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Возведя полученные числа в куб, убедимся, что все они дадут в результате единицу.

Пример 12. Решить уравнение $x^3 + 8 = 0$.

Имеем:

$$x^3 = -8; \quad x = \sqrt[3]{-8}.$$

Согласно примеру 5 § 140а можем написать:

$$-8 = 8[\cos(180^\circ + 360^\circ k) + i\sin(180^\circ + 360^\circ k)].$$

Отсюда:

$$\sqrt[3]{-8} = n = 2[\cos(60^\circ + 120^\circ k) + i\sin(60^\circ + 120^\circ k)].$$

При $k = 0, 1, 2$ будем иметь:

$$n_1 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}\,;$$
$$n_2 = 2(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = 2(-1 + i\cdot 0) = -2;$$
$$n_3 = 2(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}\,.$$

Проверкой можно убедиться, что куб всех полученных чисел равен -8.

в) Перейдём теперь к общему случаю. Пусть требуется извлечь корень n-й степени из числа

$$m = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Обозначив через x и y модуль и аргумент корня, будем иметь:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = x(\cos y + i\sin y).$$

Отсюда:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x^n(\cos ny + i\sin ny).$$

Следовательно, должно быть:

$$x^n = r, \quad ny = \varphi + 360^\circ k,$$

откуда:

$$x = \sqrt[n]{r}\,, \quad y = \frac{\varphi}{n} + \frac{360^\circ k}{n},$$

и значит:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^\circ k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^\circ k}{n}\right)\right].$$

Это равенство можно записать и в таком виде:

$$\sqrt[n]{r[\cos(\varphi + 360^\circ k) + i\sin(\varphi + 360^\circ k)]} = \\ = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^\circ k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^\circ k}{n}\right)\right]. \quad \text{(V)}$$

Следовательно, мы можем сказать:

Модуль корня n-й степени из комплексного числа равен корню той же степени из модуля подкоренного числа, а аргумент равен аргументу подкоренного числа, делённому на показатель корня.

Сколько различных корней мы будем иметь? Нетрудно убедиться, что пока мы будем в формулу (V) подставлять значения $k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots,\ (n-1)$, все получаемые корни будут различны (так как будут различны аргументы). При $k = n$ получим:

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{360^\circ n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 360^\circ,$$

и корень будет равен:

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 360^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 360^\circ\right)\right] = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

т. е. получим тот же корень, что и при $k = 0$. Точно так же при $k = n + 1$, $n + 2, \ldots$ будем получать те же корни, что и при $k = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, заключаем, что корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример 13. Решить уравнение: $x^5 - 243 = 0$.

Имеем:

$$x^5 = 243, \quad \text{откуда} \quad x = \sqrt[5]{243}\,.$$

Но

$$243 = 243(\cos 360^\circ k + i \sin 360^\circ k).$$

Следовательно:

$$\sqrt[5]{243} = 3(\cos 72^\circ k + i \sin 72^\circ k).$$

При $k = 0, 1, 2, 3, 4$ получим:

$$\begin{aligned}
n_1 &= 3(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 3(1 + i \cdot 0) = 3;\\
n_2 &= 3(\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ);\\
n_3 &= 3(\cos 144^\circ + i \sin 144^\circ);\\
n_4 &= 3(\cos 216^\circ + i \sin 216^\circ);\\
n_5 &= 3(\cos 288^\circ + i \sin 288^\circ).
\end{aligned}$$

Найдя синусы и косинусы полученных аргументов, выразим все корни в алгебраической форме.

Глава 10

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

I. Делимость многочлена

141. Делимость многочлена, целого относительно x [1]), на разность $x - a$.

Теорема Безу[2]). *Многочлен, целый относительно x:*

$$M = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K,$$

при делении на разность $x - a$ (где a есть произвольное число, положительное или отрицательное) даёт остаток

$$R = Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + K,$$

равный тому значению делимого, которое оно получает при $x = a$.

Доказательство. Из процесса деления многочлена, расположенного по убывающим степеням буквы x, видно, что деление такого многочлена на $x - a$ можно продолжать до тех пор, пока высший член остатка R не будет содержать в себе буквы x. Пусть при этом частное будет некоторый многочлен Q. Тогда мы можем написать равенство:

$$M = (x - a)Q + R.$$

Равенство это есть тождество, т. е. оно верно при всевозможных значениях буквы x, а потому оно должно быть верно и при $x = a$. Но при $x = a$ оно даёт

$$M' = (a - a)Q' + R.$$

если буквами M' и Q' обозначим те значения M и Q, которые эти многочлены принимают при $x = a$ (остаток R, как не содержащий вовсе x, не изменится от подстановки a на место x). Так как $a - a = 0$, то

[1]) Целым относительно x называется многочлен, в котором x не является делителем.

[2]) Безу — французский математик XVIII столетия.

и произведение $(a - a)Q$ равно 0; значит, последнее равенство даёт $M' = R$, т. е.

$$R = Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + K,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Так как $x + a = x - (-a)$, то, применяя доказанную теорему к сумме $x + a$, найдём: *многочлен*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K,$$

при делении на сумму $x + a$ даёт в остатке число, равное

$$A(-a)^m + B(-a)^{m-1} + C(-a)^{m-2} + \ldots + K$$

т. е. число, равное тому значению делимого, которое оно получает при $x = -a$.

Примеры.

1) Многочлен $x^5 - 3x^2 + 5x - 1$ при делении на $x - 2$ даёт остаток, равный

$$2^5 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 29.$$

2) Многочлен $x^5 - 3x^2 + 5x - 1$ при делении на $x + 2$ даёт остаток

$$(-2)^5 - 3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 1 = -55.$$

Следствие 2. *Для того чтобы многочлен*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K$$

делился на разность $x - a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x = a$ он обращался в нуль.

Это необходимо, так как если указанный многочлен делится на $x - a$, то остаток от деления должен быть нуль, а этот остаток, по доказанному выше, есть то значение делимого, которое оно принимает при $x = a$. Это и достаточно, так как если многочлен обращается в нуль при $x = a$, то это значит, что остаток от деления этого многочлена на $x - a$ равен нулю.

Следствие 3. *Для того чтобы многочлен*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K$$

делился на сумму $x + a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x = -a$ он обращался в нуль, так как сумма $x + a$ есть разность $x - (-a)$.

Примеры.

1) Многочлен $x^3 - 4x^2 + 9$ делится на $x - 3$, потому что

$$3^3 - 4 \cdot 3^2 + 9 = 0.$$

2) Многочлен $2x^2 + x - 45$ делится на $x + 5$, так как

$$2 \cdot (-5)^2 + (-5) - 45 = 0.$$

142. Делимость двучлена $x^m \mp a^m$ на $x \mp a$. 1) *Разность одинаковых степеней двух чисел делится на разность тех же чисел*, так как $x^m - a^m$ при делении на $x - a$ даёт остаток $a^m - a^m$, т. е. 0.

2) *Сумма одинаковых степеней двух чисел не делится на разность этих чисел*, так как $x^m + a^m$ при делении на $x - a$ даёт остаток $a^m + a^m = 2a^m$, а не 0.

3) *Разность одинаковых чётных степеней двух чисел делится, а нечётных не делится на сумму этих чисел*, так как при делении разности $x^m - a^m$ на $x + a$ остаток равен $(-a)^m - a^m$, что при m чётном равно нулю, а при m нечётном составляет $-2a^m$.

4) *Сумма одинаковых нечётных степеней двух чисел делится, а чётных не делится на сумму этих чисел*, так как при делении суммы $x^m + a^m$ на $x + a$ остаток равен $(-a)^m + a^m$, что при m нечётном равно 0, а при m чётном составляет $2a^m$.

Примеры.

1) $x^1 + a^1$ делится на $x + a$, но не делится на $x - a$.
2) $x^2 - a^2$ делится и на $x - a$, и на $x + a$.
3) $x^2 + a^2$ не делится ни на $x - a$, ни на $x + a$.
4) $x^3 - a^3$ делится на $x - a$, но не делится на $x + a$.
5) $x^3 + a^3$ делится на $x + a$, но не делится на $x - a$.

143. Частные, получаемые при делении $x^m \mp a^m$ на $x \mp a$. Если произведём деление двучлена $x^m - a^m$ на двучлен $x - a$, то в частном получим многочлен:

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}$$

(остатки при этом делении идут в такой последовательности: 1-й остаток $ax^{m-1} - a^m$, 2-й остаток $a^2x^{m-2} - a^m$, 3-й остаток $a^3x^{m-3} - a^m$, …, m-й остаток $a^mx^{m-m} - a^m = a^m - a^m = 0$).

Очевидно, что многочлен, получившийся в частном, содержит m членов; сумма показателей в каждом члене при a и x одна и та же, а именно $m - 1$; показатели x идут, уменьшаясь на 1, от $m - 1$ до 0, показатели же a идут, увеличиваясь на 1, от 0 до $m - 1$; коэффициенты у всех членов равны 1; знаки все $+$; число членов в частном m.

Заметив это, можем прямо писать:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2);$$
$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3);$$
$$x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) \quad \text{и т. д.}$$

Чтобы получить частное от деления $x^m - a^m$ на $x + a$ при m чётном или при делении $x^m + a^m$ на $x + a$ при m нечётном, достаточно в полученном выше частном заменить a на $-a$. Таким образом:

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2);$$
$$x^4 - a^4 = (x + a)(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3);$$
$$x^5 + a^5 = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4) \quad \text{и т. д.}$$

Упражнения.

250. Найти остатки от деления многочлена $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 20x - 8$: на $x - 1$; на $x + 1$; на $x - 2$; на $x + 2$; на $x - 3$; на $x + 3$.

251. Определить численную величину a в многочлене: $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + 11$, чтобы он делился без остатка на $x + 1$.

144. Общий вид алгебраического уравнения. Мы ранее видели, что уравнение, содержащее неизвестное в знаменателях, может быть приведено к целому виду. Далее мы знаем, что уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, может быть приведено к рациональному виду. Вследствие этого можем сказать, что всякое уравнение, в котором неизвестное связано с данными числами посредством конечного числа шести алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня [1], может быть приведено к такому целому и рациональному виду:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0,$$

где коэффициенты A, B, C, ..., K и L суть постоянные вещественные или комплексные числа, а m есть показатель степени уравнения. Некоторые коэффициенты, кроме первого, в частных случаях могут равняться нулю.

Уравнение такого вида называется *алгебраическим.* Алгебраические уравнения степени выше второй называются уравнениями высших степеней.

145. Некоторые свойства алгебраического уравнения. Уравнения высших степеней составляют предмет высшей алгебры. Элементарная же рассматривает только некоторые частные виды этих уравнений.

Высшая алгебра устанавливает следующую важную теорему:

Всякое алгебраическое уравнение имеет вещественный или комплексный корень (теорема Гаусса [2], 1799 г.).

Допустив эту истину (доказательство которой в элементарной алгебре было бы затруднительно), нетрудно показать, что:

Алгебраическое уравнение имеет столько корней, вещественных или комплексных, сколько единиц в показателе его степени.

---

[1] В предположении, что при возведении в степень и при извлечении корня неизвестное не входит ни в показатель степени, ни в показатель корня.

[2] Карл Фридрих Гаусс — известный немецкий математик (1777–1855).

Действительно, согласно теореме Гаусса, уравнение

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Ix^2 + Kx + L = 0, \qquad (1)$$

имеет вещественный или комплексный корень; пусть этот корень будет α. Тогда многочлен, стоящий в левой части уравнения (1), должен делиться на $x - \alpha$ (§ 141). Если произвести это деление, то в частном получим многочлен степени $m - 1$, у которого первый коэффициент будет A. Обозначив другие его коэффициенты соответственно буквами B_1, C_1, ..., K_1 и приняв во внимание, что делимое равно делителю, умноженному на частное, можем представить уравнение (1) так:

$$(x - \alpha)(Ax^{m-1} + B_1x^{m-2} + C_1x^{m-3} + \ldots + I_1x + K_1) = 0, \qquad (2)$$

Приравняв нулю многочлен, стоящий во вторых скобках, получим новое уравнение, которое по той же теореме должно иметь некоторый корень β; вследствие этого левая его часть может быть разложена на два множителя: $x - \beta$ и многочлен степени $m - 2$, у которого первый коэффициент по-прежнему будет A. Поэтому уравнение (1) можно переписать так:

$$(x - \alpha)(x - \beta)(Ax^{m-2} + B_2x^{m-3} + \ldots + I_2) = 0, \qquad (3)$$

Продолжая эти рассуждения далее, дойдём, наконец, до того, что многочлен, заключенный в последних скобках, будет второй степени, причём первый его коэффициент останется A. Разложив этот трёхчлен на множители (§ 45), приведём уравнение (1) к виду:

$$A(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\ldots(x - \lambda) = 0, \qquad (4)$$

где всех разностей: $(x - \alpha)$, $(x - \beta)$ ..., $(x - \lambda)$ — будет m. Очевидно, что уравнение (4) обращается в тождество при каждом из значений: $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$, ..., $x = \lambda$ и не удовлетворяется никакими иными значениями x (если $A \neq 0$), значит, уравнение (1) имеет m корней: α, β, γ, ..., λ. В частных случаях некоторые корни могут оказаться одинаковыми.

Полезно заметить ещё следующие истины, доказываемые в высшей алгебре.

Сумма корней всякого алгебраического уравнения

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0,$$

равна $-\dfrac{B}{A}$, а произведение корней равно $(-1)^m \cdot \dfrac{L}{A}$ (примером может служить квадратное уравнение).

Если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексные корни, то число этих корней — чётное (примером может служить биквадратное уравнение).

Если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет n корней вида $+qi$, оно имеет ещё n корней вида $p - qi$ (примером может служить биквадратное уравнение, комплексные корни которого всегда сопряжённые), и так как

$$[x-(p+qi)][x-(p-qi)] = [(x-p)-qi][(x-p)+qi] = \\ = (x-p)^2 - q^2i^2 = (x-p)^2 + q^2 = x^2 - 2px + (p^2+q^2),$$

то левая часть уравнения содержит в этом случае n вещественных множителей вида ax^2+bx+c.

Алгебраическое уравнение нечётной степени с вещественными коэффициентами имеет по крайней мере один вещественный корень.

Уравнения с произвольными буквенными коэффициентами степени не выше четвёртой разрешим *алгебраически*, т. е. для корней этих уравнений найдены общие формулы, составленные из коэффициентов уравнения посредством алгебраических действий.

В этом смысле уравнения с произвольными коэффициентами степени выше четвёртой не могут быть разрешены алгебраически (теорема Абеля [1]), 1824 г.); однако, если коэффициенты уравнения какой угодно степени выражены числами, всегда есть возможность вычислить с желаемой степенью приближения все его корни как вещественные, так и мнимые. Способы такого вычисления излагаются в высшей алгебре.

[1]) Норвежский математик начала XIX столетия (1802–1829).

Глава 11

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ

146. Вводные замечания. При изучении уравнений первой степени мы уже видели, что если число уравнений меньше числа неизвестных, то такая система имеет бесчисленное множество решений. Такие уравнения называются *неопределёнными.*

Наиболее часто в практике встречается случай одного уравнения с двумя неизвестными. Общий вид такого уравнения будет:

$$ax + by = c,$$

где x и y — неизвестные, a, b и c — данные коэффициенты.

Часто условия задачи бывают таковы, что правильный ответ на вопрос, поставленный в задаче, дают только *целые* значения, а иногда только целые и притом *положительные* значения.

Задача 1. Разложить число 118 на такие два числа, из которых одно делилось бы на 11, а другое на 17.

Обозначая одно число через $11x$, а другое через $17y$, мы получим уравнение:

$$11x + 17y = 118.$$

Так как в задаче ничего не сказано о знаке чисел, на которые нужно разложить число 118, то в данном случае мы можем считать ответом на задачу и отрицательные решения. Так, условию задачи удовлетворяют числа 33 и 85 (при $x = 3$ и $y = 5$), но также удовлетворяют и числа 220 и -102 (при $x = 20$ и $y = -6$).

Задача 2. Для упаковки самоваров имеются ящики, из которых в одни укладываются 4 самовара, в другие 7. Сколько нужно взять тех и других ящиков, чтобы упаковать 41 самовар?

Обозначив число малых ящиков через x, а число больших через y, будем иметь уравнение:

$$4x + 7y = 41.$$

Очевидно, что по условию задачи здесь пригодны только целые и притом положительные решения. Такое решение данное уравнение допускает лишь одно, именно: $x = 5$, $y = 3$.

Таким образом, необходимо уметь решать неопределённые уравнения в целых числах, а также в целых и положительных числах.

147. Признак невозможности решения уравнения в целых числах. Пусть дано уравнение:

$$ax + by = c,$$

Если среди коэффициентов a, b и c имеются дробные, то мы можем привести все коэффициенты к одному знаменателю и затем его отбросить. Тогда все коэффициенты будут целыми числами.

Далее, если a, b и c имеют какой-либо общий множитель, то на него можно сократить обе части уравнения.

Итак, мы будем предполагать, что коэффициенты a, b и с — числа целые, не имеющие общего множителя.

Предположим теперь, что a и b имеют общим множителем некоторое целое число, отличное от 1. Пусть, например,

$$a = ma_1; \quad b = mb_1.$$

Уравнение примет вид:

$$ma_1x + mb_1y = c.$$

Разделив все его члены на m, получим:

$$a_1x + b_1y = \frac{c}{m}.$$

При целых значениях x и y левая часть уравнения представляет собой целое число, правая же часть — дробь, так как c, по предположению, не делится на m. Такое равенство невозможно. Следовательно:

Если коэффициенты при неизвестных неопределённого уравнения имеют общий множитель, которого не имеет свободный член, то уравнение не может иметь целых решений.

Поэтому во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать числа a и b взаимно простыми.

148. Признак невозможности решения уравнения в положительных числах. Пусть в уравнении $ax + by = c$ коэффициенты a и b положительны, а свободный член c — отрицателен. Тогда при всяких положительных значениях x и y левая часть уравнения будет положительной, а правая останется отрицательной. Такое равенство невозможно.

Если коэффициенты a и b отрицательны, а c — положительно, то, умножив все члены уравнения на -1, мы сведем этот случай к предыдущему. Итак:

Если коэффициенты при неизвестных неопределённого уравнения имеют знаки, противоположные знаку свободного члена, то уравнение не имеет положительных решений.

149. Общая формула корней неопределённого уравнения. Предположим, что каким-либо способом (например, путём непосредственных проб) мы нашли одно целочисленное решение неопределённого уравнения:

$$ax + by = c,$$

Пусть это решение будет $x = \alpha$ и $y = \beta$. Подставляя значение x и y в данное уравнение, получим тождество:

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Вычитая почленно это тождество из данного уравнения, получим:

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0,$$

откуда:

$$ax = a\alpha - b(y - \beta), \quad \text{или} \quad x = \alpha - \frac{b(y - \beta)}{a}.$$

Для того чтобы x было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы выражение $\dfrac{b(y - \beta)}{a}$ было целым числом (так как α — число целое). Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы выражение $b(y - \beta)$ нацело делилось на a. Но, по предположению, b — число взаимно простое с a, следовательно, необходимо (и достаточно), чтобы разность $y - \beta$ нацело делилась на a. Обозначив целое частное от деления $y - \beta$ на a через t (оно может быть и положительным и отрицательным), получим:

$$\frac{y - \beta}{a} = t, \quad \text{откуда} \quad y = \beta + at.$$

Подставляя в формулу для x число t вместо дроби $\dfrac{y - \beta}{a}$, получим:

$$x = \alpha - bt.$$

Таким образом, мы имеем для корней неопределённого уравнения формулы:

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at.$$

Давая в этих формулах t произвольные целые значения, положительные и отрицательные, мы получим бесчисленное множество целых решений данного неопределённого уравнения. В частности, при $t = 0$ получим решение $x = \alpha$; $y = \beta$, найденное нами уже ранее.

Присматриваясь к найденным формулам, легко заметить, что они составлены по следующему правилу:

1. Первым членом формул является найденное частное значение данного неизвестного.

2. Вторым членом формул является произвольное целое число t, умноженное на коэффициент данного уравнения, причём в формуле для x берется коэффициент при y в данном уравнении, а в формуле для y берётся коэффициент при x.

3. Один из коэффициентов берется с обратным знаком. Нетрудно видеть, что совершенно безразлично, который из коэффициентов мы

берем с тем же знаком, с каким он стоит в уравнении, и который берем с обратным знаком. В самом деле, формулы:

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at \quad \text{и} \quad x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at$$

будут давать одни и те же решения; только те решения, которые одни формулы дают при положительных значениях t, другие будут давать при равных по абсолютной величине отрицательных значениях t.

Пример. Дано уравнение: $3x + 5y = 26$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что уравнение удовлетворяется значениями $x = 2$ и $y = 4$. Тогда все остальные решения найдутся из формул:

$$x = 2 + 5t,\ y = 4 - 3t \quad \text{или} \quad x = 2 - 5t,\ y = 4 + 3t.$$

Давая в этих формулах t произвольные целые значения, будем получать различные целочисленные решения данного уравнения. например, взяв первые формулы, будем иметь:

t	0	1	2	3	-1	-2	...
x	2	7	12	17	-3	-8	...
y	4	1	-2	-5	7	10	...

Если бы мы взяли вторые формулы, то те же решения получили бы, давая t последовательно значения: 0, -1, -2, -3, 1, 2 и т. д.

Таким образом, задача решения в целых числах неопределённого уравнения сводится к нахождению какого-либо одного решения.

150. Способ подстановки. Для нахождения одного решения неопределённого уравнения можно пользоваться следующим способом. Пусть дано уравнение:

$$ax + by = c.$$

Определим из него одно из неизвестных в зависимости от другого (лучше взять то, у которого коэффициент меньше по абсолютной величине). Пусть, например, $a < b$. Тогда

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Будем давать y последовательно значения: 0, 1, 2, 3, ..., пока выражение $c - by$ не разделится нацело на a. Допустим, что при $y = n$ выражение $c - bn$ делится нацело на a и даёт в частном m. Тогда:

$$x = m \quad \text{и} \quad y = n$$

и дают одно решение данного уравнения. В самом деле, мы имеем:

$$\frac{c - bn}{a} = m, \quad \text{или} \quad c - bn = am, \quad am + bn = c.$$

Последнее равенство показывает, что числа m и n удовлетворяют данному уравнению.

Пример. Дано уравнение: $7x - 4y = 2$.

Определим из уравнения y:

$$4y = 7x - 2, \quad y = \frac{7x - 2}{4}.$$

Давая x последовательно значения: 0, 1, 2, ..., убеждаемся, что при $x = 2$ выражение $7x - 2$ делится на 4 и даёт в частном 3. Следовательно, мы имеем одно решение:

$$x = 2; \quad y = 3.$$

Остальные решения найдутся по общей формуле:

$$x = 2 + 4t,\ y = 3 + 7t \quad \text{или} \quad x = 2 - 4t,\ y = 3 - 7t.$$

Примечание. В теории чисел доказывается, что если a и b — числа взаимно простые, то среди чисел: 0, 1, 2, ..., $(c - 1)$ всегда найдётся одно число y, при котором выражение $c - by$ делится нацело на a. Поэтому, чтобы избежать большого числа испытаний, и рекомендуется брать в качестве делителя меньший (по абсолютной величине) из коэффициентов a и b.

151. Частный вид неопределённого уравнения. Неопределённое уравнение легко решается в общем виде, когда один из коэффициентов при неизвестных равен единице. Пусть, например, равен единице коэффициент при x. Будем иметь:

$$x + by = c.$$

Определим x:

$$x = c - by.$$

Очевидно, что любому целому значению y будет соответствовать целое же значение x.

Пример. Дано уравнение: $5x + y = 18$.

Находим:

$$y = 18 - 5x.$$

Давая x произвольные целые значения, будем соответственно получать целые значения для y:

x	0	1	2	3	4	-1	-2	...
y	18	13	8	3	-2	23	28	...

152. Общее решение неопределённого уравнения. Покажем на примере способ решения неопределённого уравнения с любыми коэффициентами. Пусть дано уравнение:

$$23x + 53y = 109.$$

Определим из этого уравнения то неизвестное, у которого коэффициент меньше, в данном случае x:

$$x = \frac{109 - 53y}{23},$$

или, исключив целую часть:

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}.$$

Для того чтобы x было целым при y целом, необходимо и достаточно, чтобы выражение $\frac{17 - 7y}{23}$ было каким-нибудь целым числом. Обозначив последнее через t, будем иметь:

$$\frac{17 - 7y}{23} = t, \quad \text{или} \quad 17 - 7y = 23t, \;\; 23t + 7y = 17.$$

Если мы найдём для y и t такие целые значения, которые удовлетворяют уравнению $\frac{17 - 7y}{23} = t$, или, что то же, уравнению:

$$23t + 7y = 17,$$

то тем самым мы найдём соответствующие целые значения для x, и наша задача будет решена. Таким образом, решение данного уравнения мы свели к решению другого, более простого уравнения, у которого *коэффициенты меньше*, чем у данного.

По отношению к новому уравнению поступаем таким же образом. Определяем из него y:

$$y = \frac{17 - 23t}{7} = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7}.$$

Для того чтобы y было целым, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{3 - 2t}{7}$ было целым числом. Обозначив это число через t_1, будем иметь:

$$\frac{3 - 2t}{7} = t_1, \quad \text{или} \quad 7t_1 + 2t = 3.$$

При целых t и t_1, удовлетворяющих последнему уравнению, мы получим соответственно целые значения для x и y, удовлетворяющие данному уравнению. Следовательно, наша задача свелась к решению последнего уравнения, у которого коэффициенты ещё меньше. Поступаем с ним так же, как и прежде:

$$t = \frac{3 - 7t_1}{2} = 1 - 3t_1 + \frac{1 - t_1}{2}.$$

Приравняв выражение $\frac{1 - t_1}{2}$ целому числу t_2, получим:

$$\frac{1 - t_1}{2} = t_2, \quad \text{или} \quad 2t_2 + t_1 = 1.$$

Мы получили уравнение, в котором коэффициент при одном из неизвестных равен единице, а такие уравнения решать мы уже умеем. Решив его, получим:

$$t_1 = 1 - 2t_2.$$

Давая в этом уравнении произвольные целые значения t_2, будем получать целые значения для t_1. Подставляя найденные целые значения t_1 и t_2 в выражение для t:

$$t = 1 - 3t_1 + \frac{1 - t_1}{2} = 1 - 3t_1 + t_2,$$

получим соответствующие целые значения для t. Подставляя соответствующие пары значений t и t_1 в выражение для y:

$$y = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7} = 2 - 3t + t_1,$$

получим соответствующие целые значения для y. Наконец, делая подстановку найденных значений для y и t в выражение для x:

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} = 4 - 2y + t,$$

получим соответствующие целые значения для x.

Можно, однако, прямо выразить x и y в зависимости от t_2. Для этого подставим в выражение для t вместо t_1 его выражение через t_2:

$$t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2,$$

или

$$t = -2 + 7t_2.$$

Подставим теперь в выражение для y вместо t и t_1 их выражения через t_2:

$$y = 2 - 3t + t_1 = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2),$$

или

$$y = 9 - 23t_2.$$

Наконец, подставляя найденные значения y и t в выражение для x, получим:

$$x = 4 - 2y + t = 4 - 2(9 - 23t_2) + (-2 + 7t_2),$$

или

$$x = -16 + 53t_2.$$

Таким образом, мы получили для x и y формулы:

$$x = -16 + 53t_2, \quad y = 9 - 23t_2.$$

Давая в них произвольные целые значения для t_2, как положительные, так и отрицательные, будем получать бесчисленное множество решений данного уравнения; некоторые из них помещены в следующей таблице:

t_2	0	1	2	−1	−2
x	−16	37	90	−69	−122
y	9	−14	−37	32	55

Рассматривая операции, которые производились над коэффициентами данного и следующих уравнений, можно заметить такую последовательность:

1. Больший коэффициент данного уравнения 53 делили на меньший 23, получили частное 2 и остаток 7.

2. Меньший коэффициент данного уравнения 23 делили на остаток 7, получили частное 3 и второй остаток 2.

3. Первый остаток 7 делили на второй остаток 2, получили частное 3 и третий остаток 1.

Другими словами, мы поступали точно так, как если бы находили общий наибольший делитель коэффициентов данного уравнения.

Мы знаем, что два взаимно простых числа имеют общим наибольшим делителем единицу. А так как в неопределённом уравнении мы всегда предполагаем коэффициенты при неизвестных взаимно простыми, то, произведя над уравнением указанные выше операции, мы всегда придём к такому уравнению, *у которого коэффициент при одном из неизвестных равен единице*. Тем самым мы находим решения и данного уравнения. Отсюда следует:

Если коэффициенты при неизвестных неопределённого уравнения — числа взаимно простые, то уравнение всегда имеет целые решения.

153. Упрощение решения уравнения. Иногда при решении неопределённого уравнения можно внести некоторые упрощения, позволяющие быстрее прийти к решению.

1. Если один из коэффициентов при неизвестных и свободный член имеют общий множитель, то на него можно сократить обе части уравнения, если надлежащим образом ввести новое неизвестное.

Пример 1. Дано уравнение: $6x - 5y = 21$.

Коэффициент 6 и свободный член имеют общим множителем 3. Следовательно, и член $5y$ должен делиться на 3, а так как 5 не делится на 3, то неизвестное y должно быть кратным трём. Полагая $y = 3t$, где t — целое число, будем иметь:

$$6x - 15t = 21,$$

или, по сокращении на 3:

$$2x - 5t = 7.$$

Решаем последнее уравнение:

$$x = \frac{7+5t}{2} = 3 + 2t + \frac{1+t}{2} = 3 + 2t + t_1;$$
$$\frac{1+t}{2} = t_1; \quad 2t_1 - t = 1; \quad t = -1 + 2t_1.$$

Подставляя найденное значение в выражения, полученные для x и y, будем иметь:

$$x = 3 + 2(-1 + 2t_1) + t_1 = 1 + 5t_1;$$
$$y = 3(-1 + 2t_1) = -3 + 6t_1.$$

Пример 2. Дано уравнение: $9x + 14y = 105$.

Полагая $y = 3t$ и сокращая обе части уравнения на 3, получим:

$$3x + 14t = 35.$$

Полагая в этом уравнении $x = 7t_1$ и сокращая обе части уравнения на 7, получим:

$$3t_1 + 2t = 5.$$

Решаем последнее уравнение:

$$t = \frac{5 - 3t_1}{2} = 2 - t_1 + \frac{1 - t_1}{2} = 2 - t_1 + t_2;$$
$$\frac{1 - t_1}{2} = t_2; \quad 1 - t_1 = 2t_2; \quad t_1 = 1 - 2t_2.$$

Произведя последовательные подстановки, получим:

$$t = 2 - (1 - 2t_2) + t_2 = 1 + 3t_2;$$
$$x = 7t_1 = 7(1 - 2t_2) = 7 - 14t_2;$$
$$y = 3t = 3(1 + 3t_2) = 3 + 9t_2.$$

2. Если в приравниваемом целому числу выражении члены, находящиеся в числителе, имеют общий множитель, то решение уравнения можно упростить.

Пример 3. Дано уравнение: $12x + 17y = 41$.

Решаем его относительно x:

$$x = \frac{41 - 17y}{12} = 3 - y + \frac{5 - 5y}{12} = 3 - y + 5 \cdot \frac{1 - y}{12}.$$

Для того чтобы выражение $5 \cdot \dfrac{1 - y}{12}$ было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{1 - y}{12}$ было целым числом.

Приравнивая это выражение целому числу t, получим:

$$\frac{1 - y}{12} = t; \quad 1 - y = 12t; \quad y = 1 - 12t.$$

Соответственно получаем для x:

$$x = 3 - (1 - 12t) + 5t = 2 + 17t.$$

3. Если при выделении целой части остаток будет более половины делителя, то удобно ввести отрицательный остаток.

Пример 4. Дано уравнение: $11x - 20y = 49$.

Решим его относительно x:

$$x = \frac{49 + 20y}{11} = 4 + 2y + \frac{5 - 2y}{11} = 4 + 2y + t;$$
$$\frac{5 - 2y}{11} = t; \quad 5 - 2y = 11t; \quad 11t + 2y = 5;$$
$$y = \frac{5 - 11t}{2} = 2 - 5t + \frac{1 - t}{2} = 2 - 5t + t_1;$$
$$\frac{1 - t}{2} = t_1; \quad 1 - t = 2t_1; \quad t = 1 - 2t_1.$$

Произведя подстановки, получим:

$$y = 2 - 5(1 - 2t_1) + t_1 = -3 + 11t_1;$$
$$x = 4 + 2(-3 + 11t_1) + (1 - 2t_1) = -1 + 20t_1.$$

Если бы решали данное уравнение обычным способом, то получили бы для x:

$$x = 4 + y + \frac{5 + 9y}{11},$$

и следующее уравнение было бы:

$$\frac{5 + 9y}{11} = t; \quad 11t - 9y = 5.$$

Это уравнение сложнее уравнения, полученного нами при помощи введения отрицательного остатка:

$$11t + 2y = 5.$$

Пример 5. Дано уравнение: $15x + 28y = 59$.

Решаем уравнение относительно x, вводя отрицательные остатки:

$$x = \frac{59 - 28y}{15} = 4 - 2y + \frac{-1 + 2y}{15} = 4 - 2y + t;$$
$$\frac{-1 + 2y}{15} = t; \quad -1 + 2y = 15t; \quad 2y - 15t = 1;$$
$$y = \frac{1 + 15t}{2} = 7t + \frac{1 + t}{2} = 7t + t_1;$$
$$\frac{1 + t}{2} = t_1; \quad 1 + t = 2t_1; \quad t = -1 + 2t_1.$$

Делая подстановки, получим:

$$y = 7(-1 + 2t_1) + t_1 = -7 + 15t_1;$$
$$x = 4 - 2(-7 + 15t_1) + (-1 + 2t_1) = 17 - 28t_1.$$

Попробовав решить приведённые в примерах настоящего параграфа уравнения обычным путём, легко убедимся, что без применения указанных упрощений все они потребовали бы для решения большего числа операций.

154. Положительные решения. Как уже говорилось ранее, часто из всех найденных решений неопределённого уравнения нужно взять лишь те, которые дают одновременно положительные значения для x и y. Найдя общие формулы для x и y, можно сразу определить, при каких значениях произвольного множителя будут получаться целые и положительные значения x и y.

В самом деле, возьмём формулы:

$$x = \alpha + bt; \quad y = \beta - at.$$

Для того чтобы x и y были положительными, необходимо брать для t только такие значения, при которых:

$$\alpha + bt > 0; \quad \beta - at > 0.$$

Будем считать a числом положительным. (Это мы всегда имеем право предположить, так как в противном случае мы могли бы обе части уравнения умножить на -1.) Тогда могут встретиться три различных случая.

1. *Оба неравенства одинакового смысла.* Это случится, когда b — число отрицательное. В самом деле, пользуясь свойствами неравенства, будем иметь:

$$bt > -\alpha; \quad at < \beta;$$
$$t < -\frac{\alpha}{b}; \quad t < \frac{\beta}{a}.$$

В этом случае уравнение допускает бесчисленное множество целых положительных решений.

В самом деле, пусть мы получили, что

$$t < \frac{7}{2}; \quad t < -1\frac{3}{5}.$$

Очевидно, что всякое число, меньшее $-1\frac{3}{5}$, удовлетворяет обоим неравенствам. Следовательно, для t можно взять любое целое число, меньшее -1.

Возьмём другой случай:

$$t > \frac{7}{15}; \quad t > 3\frac{1}{3}.$$

Очевидно, что, взяв для t любое целое число, большее $3\frac{1}{3}$, мы будем получать целые и положительные значения для x и y.

Пример 1. $3x - 5y = 11$.

Решим это уравнение:

$$x = \frac{11 + 5y}{3} = 4 + 2y - \frac{1 + y}{3} = 4 + 2y - t; \quad \frac{1 + y}{3} = t; \quad 1 + y = 3t;$$
$$y = -1 + 3t; \quad x = 4 + 2(-1 + 3t) - t = 2 + 5t.$$

Ищем положительные решения:

$$-1+3t>0; \quad 2+5t>0,$$

или

$$t>\frac{1}{3}; \quad t>-\frac{2}{5}.$$

Взяв для t любое целое число, большее $\frac{1}{3}$ (или, что то же, большее нуля), мы будем получать бесчисленное множество пар положительных значений x и y, удовлетворяющих данному уравнению.

Пример 2. $8x-3y=-13$.

Решаем уравнение:

$$y=\frac{13+8x}{3}=4+3x+\frac{1-x}{3}=4+3x+t;$$

$$\frac{1-x}{3}=t; \quad 1-x=3t; \quad x=1-3t; \quad y=7-8t.$$

Ищем положительные решения:

$$1-3t>0; \quad 7-8t>0,$$

или

$$t<\frac{1}{3}; \quad t<\frac{7}{8}.$$

Любое целое значение t, меньшее $\frac{1}{3}$ (т. е. $0, -1, -2, \ldots$), даёт целые и положительные значения для x и y.

2. *Неравенства противоположного смысла, причём они противоречат одно другому*. Пусть, например, мы получили следующие неравенства:

$$t<\frac{7}{8}; \quad t>1\frac{1}{3}.$$

Очевидно, что не существует таких значений t, которые одновременно удовлетворяли бы обоим неравенствам. В этом случае уравнение не может иметь положительных решений.

Пример 3. $4x+5y=-7$.

Решая это уравнение, получим:

$$\mathrm{x}=-3+5t; \quad y=1-4t.$$

Отсюда:

$$-3+5t>0; \quad 1-4t>0,$$

или

$$t>\frac{3}{5}; \quad t<\frac{1}{4}.$$

Неравенства противоречат друг другу; уравнение не имеет положительных решений.

3. *Неравенства противоположного смысла, причём они не противоречат друг другу.* Пусть, например, мы получили неравенства:

$$t > 4\frac{1}{7}; \quad t < 7\frac{3}{4}.$$

Все целые значения t, заключающиеся между $4\frac{1}{7}$ и $7\frac{3}{4}$, т.е. 5, 6 и 7, дадут для x и y положительные решения. Таким образом, в этом случае:

Уравнение имеет столько целых положительных решений, сколько целых чисел заключено между найденными пределами для t.

Заметим, что, в частности, уравнение и здесь может не иметь положительных решений. Это будет тогда, когда между найденными пределами для t не содержится ни одного целого числа. Например, пусть мы получили неравенства:

$$t > 1\frac{1}{4}; \quad t < 1\frac{7}{8}.$$

Неравенства не противоречат друг другу, но между $1\frac{1}{4}$ и $1\frac{7}{8}$ не находится ни одного целого числа. Уравнение не имеет целых положительных решений.

П р и м е р 4. $3x + 7y = 55$.

Решаем уравнение:

$$x = \frac{55 - 7y}{3} = 18 - 2y + \frac{1 - y}{3} = 18 - 2y + t;$$
$$y = 1 - 3t; \quad x = 16 + 7t.$$

Отсюда:

$$1 - 3t > 0; \quad 16 + 7t > 0,$$

или

$$t < \frac{1}{3}; \quad t > -2\frac{2}{7}.$$

Очевидно, для t можно взять лишь значения: 0, -1, -2.

Получаем три решения уравнения:

t	0	−1	−2
x	16	9	2
y	1	4	7

П р и м е р 5. $5x + 4y = 3$.

Решая уравнение, получим:

$$x = -1 + 4t; \quad y = 2 - 5t.$$

Отсюда:

$$t > \frac{1}{4}; \quad t < \frac{2}{5}.$$

Неравенства не противоречат друг другу; но между $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{5}$ нет целых чисел. Уравнение не имеет целых положительных решений.

Упражнения.

Решить в целых положительных числах уравнения:

252. $3x + 2y = 10$; $7x + 5y = 157$; $5x - 11y = 17$; $8x + 11y = 13$.

253. $7x + 9y = 35$; $15x + 28y = 185$.

254. Разложить число 100 на такие два положительных числа, чтобы одно из них делилось на 7, а другое на 11.

255. Для настилки пола шириной в 3 м имеются доски шириной в 11 см и 13 см. Сколько нужно взять досок того и другого размера?

256. Для ссыпки ржи имеются мешки двух размеров: мешок одного размера вмещает 60 кг, другого 80 кг. Сколько нужно взять тех и других, чтобы ссыпать 440 кг ржи и чтобы не было неполных мешков?

257. Найти общий вид чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 3, а при делении на 11 дают в остатке 4.

Глава 12

СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

I. Соединения

155. Определение. Различные группы, составленные из каких-либо предметов и отличающиеся одна от другой или порядком этих предметов, или самими предметами, называются вообще *соединениями*.

Если, например, из 10 различных цифр: 0, 1, 2, 3, ..., 9 будем составлять группы по нескольку цифр в каждой, например, такие: 123, 312, 8056, 5630, 42 и т. п., то будем получать различные соединения из этих цифр. Из них некоторые, например, 123 и 312, различаются только порядком предметов; другие же, например, 8056 и 312, разнятся входящими в них предметами (и даже числом предметов).

Предметы, из которых составляются соединения, называются *элементами*. Элементы будем обозначать буквами a, b, c, ...

Соединения могут быть трёх родов: размещения, перестановки и сочетания. Рассмотрим их отдельно.

156. Размещения. Пусть число предметов, из которых мы составляем различные соединения, равно трём (например, 3 карты); обозначим эти предметы a, b и c. Из них можно составить соединения по одному:

$$a,\ b,\ c;$$

по два:

$$ab,\ ac,\ bc,\ ba,\ ca,\ cb;$$

по три:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Возьмём из этих соединений соединения по 2. Они отличаются одно от другого либо предметами, например, ab и ac, либо порядком предметов, например, ab и ba, но число предметов в них одно и то же. Такие соединения называются *размещениями из трёх элементов по два*.

Размещениями из m элементов по n называются такие соединения, из которых каждое содержит n элементов, взятых из данных m элементов, и которые отличаются одно от другого или *элементами, или порядком элементов* (значит, предполагается, что $n \leqslant m$). Так, написанные выше соединения по 3 будут размещения из трёх элементов по 3 (различаются только порядком), соединения по 2 будут размещения из трёх элементов по 2 (различаются или предметами, или порядком).

Размещения из данных m элементов могут быть по 1, по 2, по 3, … и, наконец, по m.

Определим число всевозможных размещений, которые можно составить из m элементов по n, не составляя самих размещений. Число это принято обозначать так: A_m^n (здесь A есть начальная буква французского слова arrangement, что значит «размещение»). Чтобы найти это число, рассмотрим приём, посредством которого можно составлять всевозможные размещения.

Пусть нам дано m элементов: a, b, c, …, k, l. Сначала составим из них все размещения по 1. Их, очевидно, будет m. Значит, $A_m^1 = m$. Теперь составим все размещения по 2. Для этого к каждому из ранее составленных размещений по 1 приставим последовательно все оставшиеся $(m-1)$ элементов по 1. Так, к элементу a приставим последовательно оставшиеся элементы: b, c, …, k, l, к элементу b приставим последовательно оставшиеся элементы a, c, …, k, l и т. д. Тогда получим следующие размещения по 2:

$$\text{m строк}\left\{\begin{array}{ll} ab,\ ac,\ ad,\ \ldots,\ ak,\ al; & (m-1\ \text{размещений}) \\ ba,\ bc,\ bd,\ \ldots,\ bk,\ bl; & (m-1\ \text{размещений}) \\ ca,\ cb,\ cd,\ \ldots,\ ck,\ cl; & (m-1\ \text{размещений}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ la,\ lb,\ lc,\ \ldots,\ lk; & (m-1\ \text{размещений}). \end{array}\right.$$

Так как всех элементов m, то из каждого размещения по одному элементу мы получим $(m-1)$ размещений по 2, а всего их будет $(m-1)m$. Очевидно, что других размещений по 2 быть не может. Значит:

$$A_m^2 = (m-1)m.$$

Чтобы составить теперь размещения по 3, берём каждое из составленных сейчас размещений по 2 и приставляем к нему последовательно по одному все $(m-2)$ оставшихся элементов. Тогда получим следующие размещения по 3:

$$\text{$m(m-1)$ строк}\left\{\begin{array}{ll} abc,\ abd,\ \ldots,\ abk,\ abl; & (m-2\ \text{размещений}) \\ acb,\ acd,\ \ldots,\ ack,\ acl; & (m-2\ \text{размещений}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ lka,\ lkb,\ \ldots,\ \ldots\ldots. & (m-2\ \text{размещений}). \end{array}\right.$$

Так как число всех размещений по 2 равно $m(m-1)$ и из каждого получается $(m-2)$ размещений по 3, то всех таких размещений окажется:

$$(m-2)[m(m-1)] = m(m-1)(m-2).$$

Таким образом:

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

Подобно этому получим:

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3);$$
$$A_m^5 = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4);$$

и вообще:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)].$$

Такова формула числа размещений; её можно высказать так:

Число всевозможных размещений из m элементов по n равно произведению n последовательных целых чисел, из которых большее есть m.

Таким образом:

$$A_4^2 = 4\cdot 3 = 12; \quad A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24; \quad A_8^4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680 \quad \text{и т. п.}$$

157. Задачи. 1) В классе 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами могут быть распределены уроки в день?

Всевозможные распределения уроков в день представляют собой, очевидно, всевозможные размещения из десяти элементов по 5; поэтому всех способов распределения должно быть:

$$A_{10}^5 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 30240.$$

2) Сколько можно образовать целых чисел, из которых каждое выражалось бы тремя *различными значащими* цифрами?

Искомое число есть число размещений из 9 значащих цифр по 3; следовательно, оно равно $9\cdot 8\cdot 7 = 504$.

3) Сколько можно образовать целых чисел, из которых каждое изображалось бы тремя *различными* цифрами?

Из 10 цифр: 0, 1, 2, 3, …, 9 можно составить размещений по три $10\cdot 9\cdot 8 = 720$; но из этого числа надо исключить число тех размещений по 3, которые начинаются с цифры 0. Таких размещений будет столько, сколько можно составить размещений по 2 из 9 значащих цифр, т. е. $9\cdot 8 = 72$; следовательно, искомое число $720 - 72 = 648$.

158. Перестановки. Если размещения из m элементов взяты по m (т. е. различаются только порядком элементов), то такие размещения называются *перестановками*. Например, перестановки из двух элементов a, b будут размещения из 2 по 2, т. е. ab и ba, перестановки из трёх элементов a, b, c будут размещения из 3 по 3, т. е. abc, acb, bac, bca, cab, cba и т. п.

Число всевозможных перестановок из m элементов обозначается P_m (здесь P есть начальная буква французского слова permutation, что значит «перестановка»).

Так как перестановки из m элементов — это размещения из m по m, то формула числа перестановок будет такая:

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1)m.$$

Число всевозможных перестановок из m элементов равно произведению натуральных чисел от 1 до m.

159. Задачи. 1) Сколько девятизначных чисел можно написать девятью разными значащими цифрами?

Искомое число есть

$$P_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362\,880.$$

2) Сколькими способами можно разместить 12 лиц за столом, на котором поставлено 12 приборов?

Число способов равно:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 12 = 479\,001\,600.$$

Замечание. Произведение натуральных чисел от 1 до m включительно (обозначается сокращённо так: $m!$) растёт чрезвычайно быстро с возрастанием m; так, при $m = 12$ оно даёт 479 001 600, а при $m = 100$ оно выражается числом, требующим 158 цифр для своего изображения.

160. Сочетания. Если из всех размещений, которые можно составить из m элементов по n, мы отберём только те, которые одно от другого разнятся по крайней мере одним элементом, то получим соединения, которые называются *сочетаниями*.

Например, из четырёх элементов a, b, c и d сочетания по 3 будут:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Если в каждом из этих сочетаний сделаем всевозможные перестановки, то получим всевозможные размещения из четырёх элементов по 3:

$$\begin{array}{c|c|c|c} abc & abd & acd & bcd \\ acb & adb & adc & bdc \\ bac & bad & cad & cbd \\ bca & bda & cda & cdb \\ cab & dab & dac & dbc \\ cba & dba & dca & dcb \end{array}$$

Число таких размещений равно, очевидно, $6 \cdot 4 = 24$. Таким образом, число всех размещений из m элементов по n равно числу всех сочетаний из m элементов по n, умноженному на число всех перестановок, какие можно сделать из n элементов, т. е.

$$A_m^n = C_m^n P_n,$$

где C_m^n означает число всех сочетаний из m по n (C есть начальная буква французского слова c o m b i n a i s o n, что значит «сочетание»).

Отсюда выводим следующую формулу числа сочетаний:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Например:

$$C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6, \quad C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4 \quad \text{и т. п.}$$

П р и м е р ы.

1) Из 10 кандидатов на одну и ту же должность должны быть выбраны трое. Сколько может быть разных случаев выбора?

Искомое число, очевидно, составляет число всевозможных сочетаний из десяти элементов по 3, т. е.

$$C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

2) Сколькими способами можно выбрать 13 карт из колоды в 52 карты?

Искомое число представляет собой число сочетаний из 52 по 13, т. е.

$$C_{52}^{13} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot\ldots\cdot 40}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 13} = 635\,013\,559\,600.$$

161. Другой вид формулы числа сочетаний. Формулу числа сочетаний можно привести к другому виду, если умножим числитель и знаменатель её на произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-n)$; тогда в числителе получим произведение $m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot[m-(n-1)]\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-n)$, которое, переставив сомножители, можно написать так:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-n)[m-(n-1)]\cdot\ldots\cdot m.$$

Следовательно:

$$C_m^n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-n)} = \frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}}.$$

162. Свойство сочетаний. Заменив в этой формуле n на $m-n$, получим:

$$C_m^{m-n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-n)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} = \frac{P_m}{P_{m-n}\cdot P_n}.$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей, находим:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

К этому выводу приводит и такое простое рассуждение: если из m элементов отберём какие-нибудь n элементов, чтобы составить из них одно сочетание, то совокупность оставшихся элементов составит одно сочетание из $m-n$ элементов. Таким образом, каждому сочетанию из n элементов соответствует одно сочетание из $m-n$ элементов, и наоборот; значит:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

Это соотношение позволяет упростить нахождение числа сочетаний из m элементов по n, когда n превосходит $\frac{1}{2}m$. Например:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700.$$

Упражнения.

258. 5 учеников должны сидеть на одной скамейке. Сколько может быть различных распределений их на этой скамейке?

259. Сколько четырёхзначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3? Указание. Из числа всевозможных перестановок из 4 цифр надо вычесть число перестановок, начинающихся цифрой 0.

260. Положение плоскости в пространстве определяется 3 точками, не лежащими на одной прямой. Сколько различных плоскостей можно провести через: 1) 4 точки; 2) 7 точек; 3) 10 точек; 4) n точек, если никакие 3 точки не лежат на одной прямой и никакие 4 точки не лежат на одной плоскости?

261. Некто вынимает наудачу 4 карты из колоды в 32 карты. Сколько различных случаев при этом может быть?

262. Сколько перестановок можно сделать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, начинающихся с цифры 4? с цифр 45? с цифр 456?

263. В группе 32 ученика; из них 6 человек надо посадить на первую скамейку. Сколько всех случаев может быть, если не обращать внимания на порядок, в котором ученики сидят на скамейке, а только на фамилии их?

II. Бином Ньютона

163. Произведение биномов, отличающихся только вторыми членами. Обыкновенным умножением находим:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab;$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) &= [x^2 + (a+b)x + ab](x+c) = \\ &= x^3 + (a+b)x^2 + abx + cx^2 + (ac+bc)x + abc = \\ &= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc.\end{aligned}$$

Подобно этому найдём:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + \\ + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd.$$

Рассматривая эти произведения, замечаем, что все они составлены по одному и тому же закону, а именно:

Произведение составляет многочлен, расположенный по убывающим степеням буквы x.

Показатель первого члена равен числу перемножаемых биномов; показатели при x в следующих членах убывают на 1; последний член не содержит x (содержит его в нулевой степени).

Коэффициент первого члена есть 1; коэффициент второго члена есть сумма всех вторых членов перемножаемых биномов; коэффициент третьего члена есть сумма всех произведений вторых членов, взятых по два; коэффициент четвёртого члена есть сумма всех произведений вторых членов, взятых по три. Последний член есть произведение всех вторых членов.

Докажем, что этот закон применим к произведению какого угодно числа биномов. Для этого предварительно убедимся, что если он верен для произведения m биномов:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k),$$

то при этом предположении будет верен и для произведения $(m+1)$ биномов:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)(x+l).$$

Итак, допустим, что верно следующее равенство:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k) = x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} + \ldots + S_m,$$

где для краткости мы положим:

$$\begin{aligned} &S_1 = a+b+c+\ldots+i+k; \\ &S_2 = ab+ac+\ldots+ik; \\ &S_3 = abc+abd+\ldots; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_m = abc\ldots ik. \end{aligned}$$

Умножим обе части допущенного равенства на бином $x+l$:

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+k)(x+l) = \\ = (x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} + \ldots + S_m)(x+l) = \\ = x^{m+1} + S_1x^m + S_2x^{m-1} + \ldots + S_mx + lx^m + lS_1x^{m-1} + \ldots + lS_m = \\ = x^{m+1} + (S_1+l)x^m + (S_2+lS_1)x^{m-1} + \ldots + (S_m+lS_{m-1})x + lS_m.$$

Рассматривая это новое произведение, убеждаемся, что оно подчиняется такому же закону, какой мы предположили верным для m

биномов. Действительно, во-первых, этому закону следуют показатели буквы x; во-вторых, ему же следуют и коэффициенты, так как коэффициент второго члена $S + l$ есть сумма всех вторых членов перемножаемых биномов, включая сюда и l; коэффициент третьего члена $S_2 + lS_1$ есть сумма парных произведений всех вторых членов, включая сюда и l, и т. д.; наконец, lS_m есть произведение всех вторых членов: $abc \ldots kl$.

Мы видели, что закон этот верен для произведения двух, трёх и четырёх биномов; следовательно, по доказанному теперь, он должен быть верен и для произведения $4 + 1$, т. е. пяти биномов; если же он верен для произведения пяти биномов, то он верен и для произведения $5 + 1$, т. е. шести биномов, и т. д.

Изложенное рассуждение представляет так называемое «доказательство от m к $(m + 1)$». Оно называется также *математической индукцией* (или «совершенной индукцией»). Заметим, что в предыдущих главах этой книги неоднократно представлялся случай применить доказательство от m к $(m + 1)$ (например, при выводе формулы любого члена прогрессии: § 75, 82 и др.). Мы этого не делали только ради простоты изложения.

164. Формула бинома Ньютона. Предположим, что в доказанном нами равенстве

$$(x + a)(x + b)(x + c) \ldots (x + k) = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \ldots + S_m,$$

все вторые члены биномов одинаковы, т. е. что $a = b = c = \ldots = k$. Тогда левая часть будет степень бинома $(x + a)^m$. Посмотрим, во что обратятся коэффициенты S_1, S_2,…, S_m.

Коэффициент S_1, равный $a + b + c + \ldots + k$, обратится в ma. Коэффициент S_2, равный $ab + ac + ad + \ldots$, обратится в число a^2, повторённое столько раз, сколько можно составить сочетаний из m элементов по 2, т. е. обратится в $\dfrac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2$. Коэффициент S_3, равный $abc + abd + \ldots$, обратится в число a^3, повторённое столько раз, сколько можно составить сочетаний из m элементов по 3, т. е. $\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3$. Наконец, коэффициент S_m, равный $abc \ldots k$, обратится в a^m. Таким образом, мы получим:

$$(x + a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \\ + \ldots + \frac{m(m-1) \ldots [m - (n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} a^n x^{m-n} + \ldots + a^m.$$

Это равенство известно как *формула бинома Ньютона* [1]), причём многочлен, стоящий в правой части формулы, называется *разложением бинома.* Рассмотрим особенности этого многочлена.

165. Свойства формулы бинома Ньютона. Из этих свойств мы укажем следующие 10:

1) Показатели буквы x уменьшаются на 1 от первого члена к последнему, причём в первом члене показатель x равен показателю степени бинома, а в последнем он есть 0; наоборот, показатели буквы a увеличиваются на 1 от первого члена к последнему, причём в первом члене показатель при a есть 0, а в последнем он равен показателю степени бинома. Вследствие этого сумма показателей при x и a в каждом члене одна и та же, а именно: она равна показателю степени бинома.

2) Число всех членов разложения есть $(m+1)$, так как разложение содержит все степени a от 0 до m включительно.

3) Коэффициенты равны: у первого члена — единице, у второго члена — показателю степени бинома, у третьего члена — числу сочетаний из m элементов по 2, у четвёртого члена — числу сочетаний из m элементов по 3; вообще коэффициент $(n+1)$-го члена есть число сочетаний из m элементов по n. Наконец, коэффициент последнего члена равен числу сочетаний из m элементов по m, т. е. 1.

Заметим, что эти коэффициенты называются *биномиальными.*

4) Обозначая каждый член разложения буквой T с цифрой внизу, указывающей номер места этого члена в разложении, т. е. первый член T_1, второй член T_2, и т. д., мы можем написать:

$$T_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} a^n x^{m-n}.$$

Эта формула выражает общий член разложения, так как из неё мы можем получить все члены (кроме первого), подставляя на место n числа: 1, 2, 3, …, m.

5) Коэффициент первого члена от начала разложения равен единице, коэффициент первого члена от конца тоже равен единице. Коэффициент второго члена от начала есть m, т. е. C_m^1; коэффициент второго члена от конца есть C_m^{m-1}; но так как $C_m^1 = C_m^{m-1}$ (§162), то эти коэффициенты одинаковы. Коэффициент третьего члена от начала есть C_m^2, а третьего члена от конца есть C_m^{m-2}; но $C_m^2 = C_m^{m-2}$, поэтому и эти коэффициенты одинаковы и т. д. Значит:

[1]) Исаак Ньютон — знаменитый английский математик (1642–1727). Формула бинома не только для m целого положительного, но и для m отрицательного и дробного была им указана около 1665 г. Строгого доказательства её он не дал. Для целых положительных показателей формула была впервые доказана Якобом Бернулли (1654–1705) с помощью теории соединений.

Коэффициенты членов, одинаково удалённых от концов разложения, равны между собой.

6) Рассматривая биномиальные коэффициенты:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots,$$

мы замечаем, что при переходе от одного коэффициента к следующему числители умножаются на числа, всё меньшие и меньшие (на $(m-1)$, на $(m-2)$, на $(m-3)$ и т. д.), а знаменатели умножаются на числа, всё бо́льшие и бо́льшие (на 2, на 3, на 4 и т. д.). Вследствие этого коэффициенты сначала возрастают (пока множители в числителе остаются бо́льшими соответственных множителей в знаменателе), а затем убывают. Так как коэффициенты членов, равно отстоящих от концов разложения, одинаковы, то наибольший коэффициент должен находиться посередине разложения. При этом если число всех членов разложения нечётное (что бывает при чётном показателе бинома), то посередине будет один член с наибольшим коэффициентом; если же число всех членов чётное (что бывает при нечётном показателе бинома), то посередине должны быть два члена с одинаковыми наибольшими коэффициентами. Например:

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4;$$
$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

7) Из сравнения двух рядом стоящих членов:

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}a^n x^{m-n};$$
$$T_{n+2} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)](m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1}$$

заключаем, что:

Для получения коэффициента следующего члена достаточно умножить коэффициент предыдущего члена на показатель буквы x в этом члене и разделить на число членов, предшествующих определяемому.

Пользуясь этим свойством, можно сразу писать, например,

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + \ldots.$$

Теперь берём 7, умножаем на 6 и делим на 2, получаем 21:

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + \ldots.$$

Теперь берём 21, умножаем на 5 и делим на 3, получаем 35:

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + \ldots.$$

Теперь уже выписаны члены до середины ряда, остальные получим, основываясь на свойстве пятом:

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7.$$

8) Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^m. Действительно, положив в формуле бинома $x = a = 1$, получим:

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + 1.$$

Например, сумма коэффициентов в разложении $(a+x)^7$ равна

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7.$$

9) Заменив в формуле бинома a на $-a$, получим:

$$(x-a)^m = x^m + m(-a)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(-a)^2x^{m-2} + \ldots + (-a)^m.$$

т. е.

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} - \ldots + (-1)^m a^m.$$

следовательно, знаки $+$ и $-$ чередуются.

10) Если в последнем равенстве положим $x = a = 1$, то найдём:

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + (-1)^m.$$

Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечётных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на чётных местах.

166. Применение формулы бинома к многочлену. Формула бинома Ньютона позволяет возводить в степень многочлен. Так:

$$(a+b+c)^4 =$$
$$= [(a+b)+c]^4 = (a+b)^4 + 4c(a+b)^3 + 6c^2(a+b)^2 + 4c^3(a+b) + c^4.$$

Разложив $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$, окончательно получим:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc +$$
$$+ 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4.$$

Упражнения.

Найти по формуле бинома Ньютона:

264. $(1+x)^6$; $(x+3)^5$; $(x-1)^7$.

265. $(2-a)^8$; $(3x+4y)^6$; $(1+x)^m$.

266. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$; $\left(x^2+2y^2\right)^4$; $\left(3a^2-2b^2\right)^6$.

267. Найти 6-й член разложения $\left(5x^2-6a^2\right)^{10}$.

268. Найти 8-й член разложения $(3a-2)^{12}$.

Вычислить:

269. $2{,}1^6 = \left(2 + \frac{1}{10}\right)^6 = \ldots$

270. $1{,}03^5 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 = \ldots$

271. $0{,}97^4 = \left(1 - \frac{3}{100}\right)^4 = \ldots$

272. $29^5 = (30 - 1)^5 = \ldots$

273. $99^3 = (100 - 1)^3 = \ldots$

274. $\left(4 + \sqrt{3}\,\right)^6$; $\left(6 - 5\sqrt{2}\,\right)^5$.

275. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,\right)^4$; $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\,\right)^3$.

276. $\left(1 + \sqrt{3}\,\right)^8$; $\left(2\sqrt{2} + \sqrt{6}\,\right)^6$.

277. В разложении $\left(x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^{15}$ вычислить член, не содержащий x.

278. То же в разложении $\left(2x^2 - \frac{a}{2x^3}\right)^{10}$.

ДОПОЛНЕНИЯ

I. Непрерывные дроби

167. Определение непрерывной дроби. *Непрерывной*, или *цепной*, дробью называется дробь вида:

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}},$$

где целое число a складывается с дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель целое число a_1, сложенное с дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель целое число a_2, сложенное с дробью, ..., и т. д. (все целые числа предполагаются положительными).

Дроби $\frac{a}{1}$, $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ и т. д. называются *составляющими дробями*, или *звеньями*.

Написанную выше непрерывную дробь сокращенно изображают так:

$$(a, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

например, дроби:

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}} \quad \text{и} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}$$

сокращённо изображаются так: (3, 2, 1, 3) и (0, 2, 1, 17).

168. Обращение непрерывной дроби в обыкновенную. Всякую непрерывную дробь можно обратить в обыкновенную; для этого достаточно произвести по правилам арифметики все действия, указанные в изображении непрерывной дроби. Пусть, например, мы имеем такую дробь:

$$(2, 3, 1, 4) = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}.$$

Производим указанные действия:

$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4};\quad 1:\frac{5}{4}=\frac{4}{5};\quad 3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5};\quad 1:\frac{19}{5}=\frac{5}{19};\quad 2+\frac{5}{19}=\frac{43}{19}.$$

Это и есть обыкновенная дробь, представляющая точное значение данной непрерывной.

169. Обращение обыкновенной дроби в непрерывную. Всякую обыкновенную дробь можно обратить в непрерывную. Пусть, например, дана дробь $\frac{A}{B}$. Исключив из неё целое число, получим:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B},$$

где a есть целое частное, а r — остаток от деления a на B (если дробь $\frac{A}{B}$ правильная, то $a=0$ и $r=A$).

Разделив оба члена дроби $\frac{r}{B}$ на r, получим:

$$\frac{r}{B}=\frac{1}{B:r}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{r_1}{r}},$$

где a_1 есть целое частное, а r_1 — остаток от деления B на r.

Разделив оба члена дроби $\frac{r_1}{r}$ на r_1, получим:

$$\frac{r_1}{r}=\frac{1}{r:r_1}=\cfrac{1}{a_2+\cfrac{r_2}{r_1}},$$

где a_2 есть целое частное, а r_1 — остаток от деления r на r_1.

Продолжая этот приём далее, будем последовательно получать:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{r_1:r_2}=\cfrac{1}{a_3+\cfrac{r_3}{r_2}},\quad \frac{r_3}{r_2}=\frac{1}{r_2:r_3}=\cfrac{1}{a_4+\cfrac{r_4}{r_3}}\quad \text{и т. д.}$$

Так как $B>r>r_1>r_2>r_3,\ldots$, то, продолжив этот приём, дойдём до остатка, равного 0. Пусть $r_n=0$, т. е. $\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=\frac{1}{a_n}$.

Тогда путём подстановки получим:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{r_1}{r}}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{r_2}{r_1}}}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}.$$

Замечание. Из рассмотрения этого приёма следует, что a, a_1, a_2, …, a_n — целые частные, получаемые при последовательном делении a на B, потом B на первый остаток, первого остатка на второй и т. д., иначе говоря, это — целые частные, получаемые при нахождении общего наибольшего делителя между A и B способом последовательного деления. Вследствие этого числа a, a_1, a_2, …, a_n называются частными непрерывной дроби.

Примеры.

1) Обратить в непрерывную дробь число $\dfrac{40}{17}$.
Так как

$$\begin{array}{ccccc} & & & 40 & \vline\; 17 \\ & & 17 & \vline\; 6 & 2 \\ & 6 & \vline\; 5 & 2 & \\ 5 & \vline\; 1 & 1 & & \\ 0 & 5 & & & \end{array}, \quad \text{то} \quad \frac{40}{17} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}.$$

2) Обратить в непрерывную дробь число $\dfrac{7}{120}$.
Так как

$$\begin{array}{cccc} & & 7 & \vline\; 120 \\ & 120 & \vline\; 7 & 0 \\ 7 & \vline\; 1 & 17 & \\ 0 & 7 & & \end{array}, \quad \text{то} \quad \frac{7}{120} = \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{7}}.$$

170. Подходящие дроби. Если в непрерывной дроби возьмём несколько звеньев с начала, отбросив все остальные, и составленную ими непрерывную дробь обратим в обыкновенную, то получим так называемую подходящую дробь. Первая подходящая дробь получится, когда возьмём одно первое звено, вторая — когда возьмём два первых звена, и т. д. Таким образом, для непрерывной дроби:

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

первая подходящая дробь есть $\dfrac{3}{1}$;

вторая " " " $3 + \dfrac{1}{2}$;

третья " " " $3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = \dfrac{10}{3}$.

Четвёртая подходящая дробь представит в этом примере точную величину непрерывной дроби $\dfrac{27}{8}$.

Когда в непрерывной дроби нет целого числа, то первая подходящая дробь есть 0.

171. Закон составления подходящих дробей. Составим для непрерывной дроби $(a, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ первые три подходящие дроби: 1) $\dfrac{a}{1}$; 2) $a + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{aa_1 + 1}{a_1}$; 3) $a + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} = a + \dfrac{1}{\dfrac{a_1a_2 + 1}{a_2}} = a +$ $+ \dfrac{a_2}{a_1a_2 + 1} = \dfrac{aa_1a_2 + a + a_2}{a_1a_2 + 1} = \dfrac{(aa_1 + 1)a_2 + a}{a_1a_2 + 1}$.

Сравнивая третью подходящую дробь с двумя первыми, заметим, что числитель третьей подходящей дроби получится, если числитель второй подходящей дроби умножим на соответствующее частное (т.е. на a_2) и к полученному произведению прибавим числитель первой подходящей дроби; знаменатель третьей подходящей дроби получится подобным же образом из знаменателей предыдущих двух подходящих дробей.

Докажем, что этот закон применим ко всякой подходящей дроби, следующей за третьей, т.е. мы докажем, что вообще числитель $(n+1)$-й подходящей дроби получится, если числитель n-й подходящей дроби умножим на соответствующее частное (т.е. на a_n) и произведение сложим с числителем $(n-1)$-й подходящей дроби, и что знаменатель $(n+1)$-й подходящей дроби подобным же способом получится из знаменателей n-й и $(n-1)$-й подходящих дробей. Употребим доказательство от n к $(n+1)$, т.е. докажем, что если этот закон применим к n-й подходящей дроби, то он применим и к $(n+1)$-й подходящей дроби.

Обозначим первую, вторую, третью и т.д. подходящие дроби последовательно через

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},\ \ldots,\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \frac{P_n}{Q_n},\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

и заметим, что соответствующие им частные будут:

$$(a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n).$$

Допустим, что верны равенства:

$$P_n = P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}; \quad Q_n = Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}, \tag{1}$$

и, следовательно:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}}, \tag{2}$$

Требуется доказать, что в таком случае и

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_na_n + P_{n-1}}{Q_na_n + Q_{n-1}}, \tag{3}$$

Из сравнения двух подходящих дробей:

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}} \quad \text{и} \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

усматриваем, что $(n+1)$-я подходящая дробь получится из n-й, если в последней заменим число a_{n-1} на сумму $a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}$.

Поэтому равенство (2) даёт:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) + Q_{n-2}}.$$

Раскрыв скобки и умножив оба члена дроби на a_n, получим:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}a_{n-1}a_n + P_{n-1} + P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}a_{n-1}a_n + Q_{n-1} + Q_{n-2}a_n}.$$

Приняв во внимание равенство (1), можем окончательно написать:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Это и есть равенство (3), которое требовалось доказать.

Таким образом, если доказываемый закон верен для n-й подходящей дроби, то он будет верен и для $(n+1)$-й подходящей дроби. Но мы непосредственно видели, что он верен для третьей подходящей дроби; следовательно, по доказанному, он применим для четвёртой подходящей дроби, а если для четвёртой, то и для пятой и т. д.

Пользуясь этим законом, составим все подходящие дроби для следующего примера:

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}}} = (2, 1, 3, 2, 3, 1, 5).$$

Вычисления всего удобнее расположить так:

		3	2	3	1	5
2	3	11	25	86	111	641
1	1	4	9	31	40	231

Первые две подходящие дроби найдём непосредственно, это будут $\frac{2}{1}$ и $\frac{3}{1}$. Остальные подходящие дроби получим, основываясь на доказанном законе. Для памяти размещаем в верхней строке целые частные с третьего до последнего.

172. Теорема 1. *Точное значение непрерывной дроби заключается между двумя последовательными подходящими дробями, причём оно ближе к последующей, чем к предыдущей.*

Доказательство. Пусть имеем непрерывную дробь:

$$(a, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_s),$$

точную величину которой обозначим через A. Возьмём какие-нибудь три последовательные подходящие дроби:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{P_n}{Q_n}, \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

По доказанному в предыдущем параграфе, имеем:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Если в правую часть этого равенства мы вместо a_n подставим $y = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_s)$, то в левой части получим точную величину A непрерывной дроби, значит:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}},$$

откуда:

$$AQ_n y + AQ_{n-1} = P_n y + P_{n-1}, \quad \text{или} \quad AQ_n y - P_n y = P_{n-1} - AQ_{n-1},$$

и значит:

$$yQ_n\left(A - \frac{P_n}{Q_n}\right) = Q_{n-1}\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A\right).$$

Из последнего равенства можем вывести два следующих заключения:

1) Так как числа y, Q_n и Q_{n-1} положительные, то разности, стоящие внутри скобок, должны быть одновременно положительны или одновременно отрицательны; значит:

$$\begin{cases} \text{если} \quad A - \dfrac{P_n}{Q_n} > 0, \\ \text{то и} \quad \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \text{если} \quad A - \dfrac{P_n}{Q_n} < 0, \\ \text{то и} \quad \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A < 0, \end{cases}$$

$$\text{т. е.} \quad \begin{cases} \text{если} \quad A > \dfrac{P_n}{Q_n}, \\ \text{то и} \quad \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > A \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \text{если} \quad A < \dfrac{P_n}{Q_n}, \\ \text{то и} \quad \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < A, \end{cases}$$

Следовательно, A заключено между всякими двумя последовательными подходящими дробями.

2) Так как $y > 1$ и $Q_n > Q_{n-1}$, причём числа Q_n и Q_{n-1} положительные, то из того же равенства выводим: абсолютная величина $\left(A - \frac{P_n}{Q_n}\right)$ меньше абсолютной величины $\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A\right)$.

Отсюда следует, что $\frac{P_n}{Q_n}$ ближе к A, чем $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Так как, очевидно, $A > a$, т. е. $A > \frac{P_1}{Q_1}$, то

$$A < \frac{P_2}{Q_2}; \quad A > \frac{P_3}{Q_3}; \quad A < \frac{P_4}{Q_4} \quad \text{и т. д.}$$

Точное значение непрерывной дроби более всякой подходящей дроби нечётного порядка и менее всякой подходящей дроби чётного порядка.

173. Теорема 2. *Разность между двумя рядом стоящими подходящими дробями равна ± 1, делённой на произведение знаменателей этих подходящих дробей.*

Доказательство. Так как

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}},$$

то очевидно, что знаменатель этой разности удовлетворяет требованию теоремы. Остаётся доказать, что числитель равен ± 1. Так как

$$P_{n+1} = P_na_n + P_{n-1} \ \text{ и } \ Q_{n+1} = Q_na_n + Q_{n-1},$$

то

$$\begin{aligned}P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} &= (P_na_n + P_{n-1})Q_n - P_n(Q_na_n + Q_{n-1}) = \\ &= P_nQ_na_n + P_{n-1}Q_n - P_nQ_na_n - P_nQ_{n-1} = -(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n).\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой числитель дроби, которая получится от вычитания из $\frac{P_n}{Q_n}$ дроби $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$.

Следовательно, мы доказали, что абсолютная величина числителя дроби, получаемой от вычитания $\frac{P_n}{Q_n}$ из $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, равна абсолютной величине числителя дроби, получаемой от вычитания $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ из $\frac{P_n}{Q_n}$; другими словами, абсолютная величина числителя дроби, получаемой от вычитания одной из другой двух рядом стоящих подходящих дробей, есть величина постоянная для всех подходящих дробей. Но разность между второй и первой подходящими дробями есть:

$$\left(a + \frac{1}{a_1}\right) - a = \frac{1}{a_1}.$$

Следовательно, числитель разности между всякими двумя рядом стоящими подходящими дробями по абсолютной своей величине равен 1.

Так, если взять пример, приведённый в § 171, то найдём:

$$\frac{3}{1}-\frac{2}{1}=\frac{1}{1},\quad \frac{11}{4}-\frac{3}{1}=-\frac{1}{4},\quad \frac{25}{9}-\frac{11}{4}=\frac{1}{36},\quad \frac{86}{31}-\frac{25}{9}=-\frac{1}{279}\quad \text{и т. п.}$$

Следствия. 1. Всякая подходящая дробь есть дробь несократимая, потому что если бы $\frac{P_n}{Q_n}$ можно было сократить на некоторый делитель $m>1$, то $P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n$ делилось бы на m, что невозможно, так как эта разность равна ± 1.

2. Если вместо точной величины непрерывной дроби возьмём подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ то сделаем ошибку, меньшую каждого из трёх следующих чисел:

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}};\quad \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})};\quad \frac{1}{Q_n^2}.$$

Действительно, если A есть точное значение непрерывной дроби, то $A-\frac{P_n}{Q_n}$ по абсолютной величине меньше разности $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}$, абсолютная величина которой, по доказанному, равна $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$. С другой стороны, так как $Q_{n+1}=Q_na_n+Q_{n-1}$, где $a_n\geqslant 1$, то $Q_{n+1}\geqslant Q_n+$ $+Q_{n-1}$ и, следовательно:

$$Q_nQ_{n+1}\geqslant Q_n(Q_n+Q_{n-1})\quad \text{и}\quad \frac{1}{Q_nQ_{1+1}}\leqslant\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},$$

и потому абсолютная величина разности $A-\frac{P_n}{Q_n}$ меньше $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$.

Наконец, так как $Q_{n+1}>Q_n$, то $Q_{n+1}Q_n>Q_n^2$ и потому

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}<\frac{1}{Q_n^2}.$$

Следовательно, абсолютная величина разности $A-\frac{P_n}{Q_n}$ меньше $\frac{1}{Q_n^2}$.

Из трёх указанных пределов погрешности самый меньший есть $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$, но его вычисление предполагает известным знаменатель подходящей дроби, следующей за той, которую мы приняли за приближение. Вычисление предела $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$ может быть выполнено только тогда, когда известен знаменатель предшествующей подходящей дроби. Когда же известна одна подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, возможно только указание предела погрешности $\frac{1}{Q_n^2}$.

Например, если мы знаем, что некоторая подходящая дробь данной непрерывной дроби есть $\frac{45}{17}$, то можно сказать, что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17^2} = \frac{1}{289}$. Если, кроме того, знаем, что знаменатель предшествующей подходящей дроби есть, например, 8, то можем сказать, что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17(17+8)} = \frac{1}{425}$. Наконец, когда знаем, что знаменатель следующей подходящей дроби есть, например, 37, то можем ручаться, что $\frac{45}{17}$ разнится от точного значения непрерывной дроби менее чем на $\frac{1}{17 \cdot 37} = \frac{1}{629}$.

174. Теорема 3. *Подходящая дробь ближе к точному значению непрерывной дроби, чем всякая другая дробь с меньшим знаменателем.*

Доказательство. Допустим, что существует дробь $\frac{a}{b}$, менее отличающаяся от точного значения непрерывной дроби A, чем подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, и пусть $b < Q_n$. Докажем, что это предположение ведёт к противоречию. Так как $\frac{P_n}{Q_n}$ ближе к A, чем $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, и $\frac{a}{b}$ ближе к A, чем $\frac{P_n}{Q_n}$, то и подавно $\frac{a}{b}$ ближе к A, чем $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; так как, кроме того, A заключается между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, то абсолютная величина разности $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ больше абсолютной величины разности $\frac{a}{b} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; значит, обращая внимание только на абсолютные величины, можно написать:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \left|\frac{aQ_{n-1} - bP_{n-1}}{bQ_{n-1}}\right|; \quad Q_n Q_{n-1} > bQ_{n-1}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим:

$$1 > \left|aQ_{n-1} - bP_{n-1}\right|.$$

Так как aQ_{n-1} и bP_{n-1} — числа целые, то это неравенство возможно только при условии:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{a}{b} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Но это равенство невозможно, так как, по предположению, $\frac{a}{b}$ ближе подходит к A, чем $\frac{P_n}{Q_n}$, тогда как $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, по доказанному, больше разнится от A, чем $\dfrac{P_n}{Q_n}$. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы 3.

175. Приближённые значения данной арифметической дроби. Когда числитель и знаменатель данной несократимой арифметической дроби выражены большими числами, часто является потребность получить приближённое значение этой дроби в возможно более простом виде. Для этого достаточно обратить данную дробь в непрерывную и найти ту или другую подходящую дробь, смотря по желаемой степени приближения.

Пример.

Зная, что число π, представляющее отношение окружности к её диаметру, заключено между двумя дробями: 3,141592653 и 3,141592654, найти простейшее приближение π.

Обратив обе дроби в непрерывные и взяв только общие неполные частные, найдём:

$$\pi = (3, 7, 15, 1, \ldots).$$

Подходящие дроби будут:

		15	1
3	22	333	355
1	7	106	113

Приближение $\dfrac{22}{7}$ было найдено Архимедом; оно верно до $\dfrac{1}{7\cdot 106} = \dfrac{1}{742}$; значит, и подавно верно до $\dfrac{1}{100}$. Число $\dfrac{355}{113}$ было указано Адрианом Мецием; взяв это число вместо π, сделаем ошибку, меньшую $\dfrac{1}{113\cdot 33\,102} = \dfrac{1}{3\,740\,526}$, т. е. во всяком случае меньшую одной миллионной. Приближения Архимеда и Меция, как подходящие дроби чётного порядка, более π.

176. Извлечение квадратного корня. Пусть требуется найти $\sqrt{41}$ при помощи непрерывных дробей. Рассуждаем так: наибольшее целое число, заключающееся в $\sqrt{41}$, есть 6; поэтому можем положить:

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{x}, \tag{1}$$

откуда:

$$\frac{1}{x} = \sqrt{41} - 6; \quad x = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5}.$$

Так как $\sqrt{41} + 6$ равняется 12 с дробью, то наибольшее число, заключающееся в $\dfrac{\sqrt{41}+6}{5}$, есть 2; поэтому можем положить:

$$x = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} = 2 + \frac{1}{y}, \tag{2}$$

откуда:

$$\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{41}+6}{5} - 2 = \frac{\sqrt{41}-4}{5};$$

$$y = \frac{5}{\sqrt{41}-4} = \frac{5(\sqrt{41}+4)}{25} = \frac{\sqrt{41}+4}{5}.$$

Так как $\sqrt{41}+4$ равняется 10 с дробью, то и наибольшее целое число, заключающееся в $\dfrac{\sqrt{41}+4}{5}$, есть 2; поэтому можем положить:

$$y = \frac{\sqrt{41}+4}{5} = 2 + \frac{1}{z}, \tag{3}$$

откуда:

$$\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{41}-6}{5}; \quad z = \frac{5}{\sqrt{41}-6} = \frac{5(\sqrt{41}+6)}{5} = \sqrt{41}+6.$$

Наибольшее целое число, заключающееся в $\sqrt{41}+6$, есть 12; поэтому можем положить:

$$z = \sqrt{41}+6 = 12 + \frac{1}{v}, \tag{4}$$

откуда:

$$\frac{1}{v} = \sqrt{41}-6; \quad v = \frac{1}{\sqrt{41}-6}.$$

Сравнивая формулу для v с формулой для x, находим, что $v = x$. Пользуясь равенствами (1), (2), (3) и (4), получим:

$$\sqrt{41} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{x}}}} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}}}.$$

Таким образом, $\sqrt{41}$ выразился периодической непрерывной дробью. Найдя подходящие дроби, получим приближённые значения $\sqrt{41}$:

		2	12	2	2	…
6	13	32	397	826	2049	…
1	2	5	62	129	320	…

Подобным же образом найдём:

$$\sqrt{13} = (3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, \ldots); \quad \sqrt{29} = (5, 2, 1, 1, 2, 10, \ldots).$$

177. Нахождение решения неопределённого уравнения. Непрерывные дроби дают средство найти одно решение неопределённого уравнения $ax + by = c$. Покажем это на примерах. Пусть имеем уравнение:

$$43x + 15y = 8.$$

Возьмём дробь $\frac{43}{15}$ и обратим её в непрерывную:

$$\frac{43}{15} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Найдём теперь предпоследнюю подходящую дробь; это будет $\frac{20}{7}$. Так как последняя подходящая дробь есть точное значение непрерывной дроби, т. е. $\frac{43}{15}$, а $\frac{20}{7}$ есть подходящая дробь нечётного порядка, то на основании теоремы § 172 (замечание) можем написать:

$$\frac{43}{15} - \frac{20}{7} = \frac{1}{15 \cdot 7},$$

откуда:

$$43 \cdot 7 - 15 \cdot 20 = 1.$$

Чтобы уподобить последнее тождество данному уравнению, умножим все его члены на 8 и представим его так:

$$43 \cdot 56 + 15(-160) = 8.$$

Сравнив теперь это тождество с нашим уравнением, находим, что в последнем за x можно принять число 56, а за y число -160. Тогда всевозможные решения выразятся формулами (§ 149):

$$x = 56 - 15t; \quad y = -160 + 43t.$$

Эти формулы можно упростить, заменив t на $t + 3$ (что можно сделать вследствие произвольности числа t):

$$x = 56 - 15(t + 3) = 11 - 15t; \quad y = -160 + 43(t + 3) = -31 + 43t.$$

Возьмём ещё пример: $7x - 19y = 5$.

Обратив дробь $\frac{7}{19}$ в непрерывную, найдём:

$$\frac{7}{19} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Предпоследняя подходящая дробь будет $\frac{3}{8}$. Так как она чётного порядка, то

$$\frac{7}{19} - \frac{3}{8} = \frac{-1}{19 \cdot 8},$$

откуда:

$$7 \cdot 8 - 19 \cdot 3 = -1.$$

Умножив все члены этого равенства на 5, получим:

$$7 \cdot 40 - 19 \cdot 15 = -5, \quad \text{или} \quad 7 \cdot (-40) - 19 \cdot (-15) = 5.$$

Сравнивая последнее тождество с данным уравнением, находим, что в последнем за x можно принять число -40, а за y число -15. Тогда:

$$x = -40 + 19t; \quad y = -15 + 7t.$$

Эти формулы можно упростить, заменив t на $t + 2$:

$$x = -40 + 19(t + 2) = -2 + 19t;$$
$$y = -15 + 7(t + 2) = -1 + 7t.$$

178. Вычисление логарифма. Пусть требуется вычислить $\log 2$ по основанию 10; другими словами, требуется решить уравнение $10^x = 2$. Сначала находим для x ближайшее целое число. Так как $10^0 = 1$, а $10^1 = 10$, то x заключается между 0 и 1; следовательно, можно положить, что $x = \frac{1}{z}$; тогда $10^{\frac{1}{z}} = 2$, или $10 = 2^z$. Нетрудно видеть, что z заключается между 3 и 4; следовательно, можно положить $z = 3 + \frac{1}{z_1}$. Тогда:

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z_1}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z_1}} = 8 \cdot 2^{\frac{1}{z_1}},$$

откуда:

$$2^{\frac{1}{z_1}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, \quad \text{т. е.} \quad 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}.$$

Испытанием находим, что z_1 заключается между 3 и 4, поэтому можно положить:

$$z_1 = 3 + \frac{1}{z_2}; \quad 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z_2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}},$$

откуда:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}} = 2 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{128}{125}, \quad \left(\frac{128}{125}\right)^{z_2} = \frac{5}{4}.$$

Снова испытанием находим, что z_2 заключается между 9 и 10. Этот приём можно продолжать далее. Довольствуясь приближённой величиной z_2, можем положить $z_2 = 9$; следовательно:

$$z_1 = 3 + \frac{1}{9}; \quad z = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9}} \quad \text{и} \quad x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9}}}.$$

Обратив эту непрерывную дробь в обыкновенную, получим:

$$x = \frac{28}{93} = 0{,}30107;$$

этот результат верен до четвёртого десятичного знака; более точные изыскания дают: $x = 0{,}3010300$.

II. О пределах

179. Определения. Возьмём сумму первых n членов такой бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \quad \left(\text{знаменатель } \frac{1}{2}\right).$$

Сумма эта при неограниченном увеличении числа членов увеличивается, приближаясь (§ 86) к постоянному числу 2 так, что разность

$$2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

при достаточном увеличении числа слагаемых делается меньше любого данного положительного числа (например, меньше 0,000001) и при дальнейшем увеличении числа слагаемых остаётся всегда меньше этого числа.

При этих условиях мы говорим, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$, если число слагаемых в ней увеличивается неограниченно, имеет предел 2.

В этом примере переменная величина (сумма членов прогрессии), приближаясь к своему пределу, остаётся меньше его. Но могут быть случаи, когда переменная величина, приближаясь к своему пределу, остаётся больше его. например, если предположим, что в сумме $1 + \frac{1}{x}$ значение x положительно и неограниченно увеличивается, то сумма эта будет приближаться к пределу 1, оставаясь всегда больше 1.

Может также случиться, что переменная величина так изменяется, что она делается то больше, то меньше своего предела. Такой случай мы уже видели, когда говорили о пределе суммы n членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (§ 87):

$$2,\ -1,\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ +\frac{1}{8},\ \ldots \quad \left(\text{знаменатель } -\frac{1}{2}\right).$$

Предел этот равен $1\frac{1}{3}$, и суммы двух, трёх, четырёх и т. д. членов прогрессии принимают значения, которые попеременно то больше, то меньше своего предела:

$$2 - 1 = 1 < 1\frac{1}{3}; \quad 2 - 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} > 1\frac{1}{3}; \quad 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4} < 1\frac{1}{3} \ \ldots$$

После этих примеров будет понятно следующее определение предела:

Если переменная величина x при своём изменении приближается к постоянной величине a так, что абсолютная величина разности $a - x$ (или $x - a$) может сделаться и в дальнейшем остаётся меньше любого положительного числа, то эта постоянная величина a называется пределом переменной x.

Вместо того чтобы говорить «величина x имеет предел a», часто говорят короче «x стремится к a» и письменно выражают это так: $x \to a$ (или предел x равен a).

Если переменная величина увеличивается неограниченно, то условно говорят, что она стремится к $+\infty$; если же переменная величина остаётся отрицательной, но её абсолютная величина увеличивается неограниченно, то говорят, что она стремится к $-\infty$.

Переменная величина, стремящаяся к ∞, часто называется бесконечно большой, а переменная величина, стремящаяся к нулю, называется бесконечно малой. Следует, однако, помнить, что эти названия не означают очень большой величины или очень малой величины, они характеризуют процесс изменения величины: величина, называемая «бесконечно большой», изменяется так, что она делается и остаётся (по абсолютной величине) больше любого данного числа, а величина, называемая «бесконечно малой», изменяется так, что она делается и остаётся (по абсолютной величине) меньше любого данного положительного числа.

Если воспользоваться в этом смысле названием «бесконечно малая величина», то определение предела можно высказать короче так:

Постоянная величина a называется пределом переменной x, если разность $x - a$ есть бесконечно малая величина.

180. Некоторые свойства бесконечно малых величин. 1) *Алгебраическая сумма бесконечно малых величин бесконечно мала* (если число слагаемых не увеличивается беспредельно).

Возьмём, например, три бесконечно малых α, β и γ (они могут быть положительные и отрицательные). Чтобы показать, что сумма их $\alpha + \beta + \gamma$ бесконечно мала, надо убедиться, что абсолютная величина этой суммы делается и остаётся меньше всякого данного положительного числа, например, меньше одной миллионной. Действительно, так как величины α, β и γ бесконечно малы, то при своём изменении абсолютная величина каждого из них делается и остаётся меньше любого данного числа, в том числе и меньше $\frac{1}{3}$ миллионной; значит, тогда абсолютная величина суммы $\alpha + \beta + \gamma$ делается и остаётся меньше $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$ миллионной, т. е. меньше одной миллионной.

Заметим, что если одновременно с уменьшением абсолютной величины слагаемых число их будет неограниченно возрастать, то сумма их может оказаться и не бесконечно малой. Возьмём, например, такую сумму:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n} \quad (n \text{ слагаемых})$$

и предположим, что число n неограниченно возрастает; тогда, несмотря на то, что с увеличением знаменателя n слагаемые уменьшаются неограниченно, сумма их остаётся неизменной (она равна 1).

2) *Произведение бесконечно малой величины на постоянное* число бесконечно мало.

Например, произведение 100α, в котором α — какая-нибудь бесконечно малая величина, делается и остаётся (по абсолютной величине) меньшим любого данного положительного числа, например, меньшим одной миллионной, так как a делается и остаётся меньшим всякого данного положительного числа, в том числе меньшим и одной стомиллионной.

3) *Произведение бесконечно малой величины на другую бесконечно малую величину бесконечно мало.*

Если произведение бесконечно малой величины на постоянное число делается и остаётся как угодно малым, то произведение бесконечно малой величины на другую бесконечно малую величину и подавно обладает этим свойством.

4) *Частное от деления бесконечно малой величины на постоянное число бесконечно мало.*

Например, частное $\alpha : \frac{1}{10}$ бесконечно мало, так как оно равно произведению $\alpha \cdot 10$, т. е. произведению бесконечно малой величины на постоянное число.

Замечание. Частное от деления бесконечно малой величины на другую бесконечно малую величину может иногда равняться постоянному числу, иногда бесконечно малой и иногда бесконечно большой величине; всё зависит от того, по какому закону уменьшается делимое и по какому закону уменьшается делитель. Возьмём, например, таких три частных:

$$\frac{2\alpha}{\alpha}=2; \quad \frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha; \quad \frac{\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}.$$

Положим, что α есть бесконечно малая величина. Тогда первое частное, всегда равное 2, есть число постоянное; второе частное, равное α, есть величина бесконечно малая, а третье частное, равное дроби $\frac{1}{\alpha}$, есть величина бесконечно большая, так как дробь, у которой числитель — постоянное число, а знаменатель неограниченно уменьшается, увеличивается беспредельно.

181. Свойства пределов. 1) *Переменная величина не может иметь более одного предела.*

Предположим противное, а именно, что переменная величина x стремится к двум различным пределам, например, к 5 и 5,1. Тогда согласно определению предела разности $x-5$ и $x-5{,}1$ должны быть бесконечно малые величины (положительные и отрицательные). Пусть $x - 5 = \alpha$ и $x - 5{,}1 = \beta$; тогда:

$$x = 5 + \alpha \quad \text{и} \quad x = 5{,}1 + \beta$$

и, следовательно,

$$5 + \alpha = 5{,}1 + \beta, \quad \text{откуда} \quad \alpha - \beta = 0{,}1.$$

Но это равенство невозможно, так как разность $\alpha - \beta$, представляющая собой алгебраическую сумму бесконечно малых величин, бесконечно мала и, следовательно, она не может равняться постоянному числу, отличному от нуля. Значит, нельзя допустить, чтобы число x имело два различных предела.

2) *Если разность двух переменных величин* (x *и* y) *бесконечно мала* (*или равна нулю*) *и одна из них имеет предел, то и другая имеет тот же предел.*

Допустим, например, что величина x имеет предел 2. Тогда можно принять, что $x = 2 + \alpha$, где α — бесконечно малая величина. Допустим, кроме того, что разность $x - y$ равна бесконечно малой величине β (или нулю).

Тогда:

$$(2 + \alpha) - y = \beta, \quad \text{откуда} \quad 2 - y = \beta - \alpha.$$

Так как разность $\beta - \alpha$ есть величина бесконечно малая, то из последнего равенства видно, что 2 есть предел числа y.

3) Обратная теорема. *Если две переменные величины* (x *и* y) *имеют общий предел, то их разность бесконечно мала* (*или равна 0*).

Положим, например, что величины x и y имеют один предел 10. Тогда $x = 10 + \alpha$ и $y = 10 + \beta$, где α и β — бесконечно малые величины. Следовательно:

$$x - y = (10 + \alpha) - (10 + \beta) = \alpha - \beta.$$

Так как разность $\alpha - \beta$ бесконечно мала или равна 0, то и левая часть равенства, т. е. разность $x - y$, бесконечно мала или равна 0.

4) *Предел алгебраической суммы переменных величии равен алгебраической сумме пределов этих величин* (если число слагаемых не бесконечно велико).

Положим, мы имеем сумму трёх переменных величин $x + y + z$, и пусть $x \to 3$, $y \to 2$ и $z \to -5$. Тогда можно написать равенства:

$$x = 3 + \alpha; \quad y = 2 + \beta; \quad z = -5 + \gamma,$$

где α, β и γ — бесконечно малые величины.

Следовательно:

$$x + y + z = (3 + \alpha) + (2 + \beta) + (-5 + \gamma) - = (3 + 2 - 5) + (\alpha + \beta + \gamma),$$

откуда:

$$(x + y + z) - (3 + 2 - 5) = \alpha + \beta + \gamma.$$

Правая часть этого равенства есть сумма конечного числа бесконечно малых слагаемых, а потому она сама бесконечно мала; а из этого следует, что переменная сумма $x + y + z$ стремится к пределу $3 + 2 - 5$, т. е. к алгебраической сумме пределов.

Это рассуждение можно повторить о четырёх, пяти и более слагаемых, лишь бы число их не возрастало беспредельно (в противном случае сумма $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ могла бы оказаться и не бесконечно малой величиной).

5) *Предел произведения переменных величин равен произведению пределов этих величин.*

Пусть имеем произведение xy двух переменных величин, из которых первая стремится, например, к пределу 2, а вторая — к пределу 3. Тогда:

$$x = 2 + \alpha \quad \text{и} \quad y = 3 + \beta.$$

Следовательно:

$$xy = (2 + \alpha)(3 + \beta) = 2 \cdot 3 + 3\alpha + 2\beta + \alpha\beta,$$

откуда:

$$xy - 2 \cdot 3 = 3\alpha + 2\beta + \alpha\beta,$$

Произведения 3α, 2β и $\alpha\beta$ — бесконечно малые величины, поэтому и сумма их бесконечно мала, а это означает, что $xy \to 2 \cdot 3$, т. е. $\lim xy = \lim x \cdot \lim y$.

Этот вывод можно обобщить на произведение трёх, четырёх и более сомножителей. Так, рассматривая произведение xyz как произведение только двух сомножителей xy и z, мы можем написать:

$$\lim(xyz) = \lim xy \cdot \lim z = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z.$$

6) *Предел частного от деления переменных величин равен частному от деления предела делимого на предел делителя, если предел делителя не равен нулю.*

Пусть $x \to 2$, $y \to 3$; тогда $x = 2 + \alpha$ и $y = 3 + \beta$, где α и β — бесконечно малые величины. Следовательно:

$$\frac{x}{y} - \frac{2}{3} = \frac{2 + \alpha}{3 + \beta} - \frac{2}{3} = \frac{(2 + \alpha) \cdot 3 - (3 + \beta) \cdot 2}{(3 + \beta) \cdot 3} = \frac{3\alpha - 2\beta}{(3 + \beta) \cdot 3}.$$

В дроби, стоящей в правой части этого равенства, числитель — бесконечно малая величина, так как он есть алгебраическая сумма двух бесконечно малых величин; знаменатель же, имея пределом число 3^2, не равное нулю, не может стремиться к нулю. Если же числитель дроби бесконечно мал, а знаменатель не бесконечно мал, то такая дробь бесконечно мала.

Значит, из написанного выше равенства мы должны заключить, что

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{2}{3} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

7) *Предел степени, у которой основание есть переменная величина, а показатель — постоянное число, равен той же степени предела основания.*

Ограничимся случаем, когда показатель степени есть число целое, положительное. В этом случае теорема представляет собой простое следствие теоремы о пределе произведения. Так:

$$\lim(x^3) = \lim(xxx) = (\lim x)(\lim x)(\lim x) = (\lim x)^3.$$

Добавим ещё без доказательства следующие два положения о пределах.

8) *Если переменная величина возрастает, оставаясь, однако, меньше какого-нибудь постоянного числа, то она имеет предел.*

Возьмём, например, приближённые значения $\sqrt{2}$, взятые с недостатком и вычисленные с точностью сначала до 1, потом до $\frac{1}{10}$, затем до $\frac{1}{100}$ и т. д. Мы получим тогда бесконечный ряд чисел:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421 \quad \text{и т. д.}$$

Числа эти по мере удаления от начала ряда увеличиваются, но остаются всегда меньше некоторого постоянного числа, например, меньше 1,5; при этих условиях мы должны допустить, что числа взятого нами ряда по мере его продолжения стремятся к какому-то определённому пределу (этот предел есть иррациональное число $\sqrt{2}$).

9) *Если переменная величина убывает, оставаясь, однако, больше какого-нибудь постоянного числа, то она имеет предел.*

Возьмём для примера ряд приближённых значений $\sqrt{2}$, взятых с избытком, с точностью до 1, до $\frac{1}{10}$, до $\frac{1}{100}$ и т. д.:

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422 \quad \text{и т. д.}$$

По мере удаления от начала ряда числа эти уменьшаются, но остаются постоянно больше 1,4; при этих условиях мы должны допустить, что числа данного ряда стремятся к пределу (он равен иррациональному числу $\sqrt{2}$).

Упражнения.

279. Найти предел, к которому стремится дробь $\dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 5x + 2}$, если $x \to 1$.

Решение. Если $x \to 1$, то числитель и знаменатель данной дроби стремятся к 0. Но так как $\frac{0}{0}$ есть неопределённое выражение, то мы остаёмся в неизвестности, к какому пределу стремится данная дробь (и даже стремится ли она к какому бы то ни было пределу), если $x \to 1$.

Поступим так: предположим, что x равен не 1, а какой-нибудь переменной величине, приближающейся к 1. например, пусть $x = 1 + h$, где h — какая-нибудь положительная величина, стремящаяся к нулю. Тогда величина данной дроби будет:

$$\frac{2(1+h)^2-(1+h)-1}{3(1+h)^2-5(1+h)+2} = \frac{2+4h+2h^2-1-h-1}{3+6h+3h^2-5-5h+2} = \frac{2h^2+3h}{3h^2+h} = \frac{2h+3}{3h+1}$$

(сократить дробь на h мы имеем право, так как $h \neq 0$).

Предположим теперь, что $h \to 0$ и, следовательно, $x \to 1$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h+3}{3h+1} = \frac{\lim\limits_{h\to 0}(2h+3)}{\lim\limits_{h\to 0}(3h+1)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Тот же самый предел мы найдём, если допустим, что $x = 1 - h$, где h — какая-нибудь положительная величина, стремящаяся к нулю. Таким образом, будет ли x приближаться к единице, оставаясь больше 1 или оставаясь меньше 1, предел данной дроби будет один и тот же, а именно 3.

280. Найти предел, к которому стремится дробь $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+7x-8}$, если $x \to 1$.

281. То же, если $x \to 0$.

282. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^3-12x+16}$.

283. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$.

284. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$.

Решение. Так как

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

285. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}$.

286. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{5x+\sqrt{x^2+1}}$.

287. Найти предел, к которому стремится дробь, если к числителю и знаменателю её будем прибавлять одну и ту же величину, неограниченно возрастающую; другими словами, найти $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a+m}{b+m}$.

Решение.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a+m}{b+m} = \lim_{m\to\infty}\frac{\dfrac{a}{m}+1}{\dfrac{b}{m}+1} = \frac{\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{a}{m}+1\right)}{\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{b}{m}+1\right)} = \frac{\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a}{m}+1}{\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{b}{m}+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1.$$

Таким образом, будет ли дробь $\frac{a}{b}$ правильная ($a < b$) или неправильная ($a > b$), предел дроби, когда $m \to \infty$, оказывается один и тот же, а именно 1. Отсюда следует, что правильная дробь, приближаясь к 1, увеличивается, а неправильная уменьшается.

III. Исследование квадратного трёхчлена. Неравенства второй степени

182. Задача. С аэростата, находящегося на высоте 1000 м, сбросили груз со скоростью 20 м/с. На каком расстоянии от земли этот груз будет через 15 с? (Сопротивление воздуха в расчёт не принимается.)

Путь, проходимый падающим телом, вычисляется по формуле:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \tag{1}$$

где v_0 — начальная скорость, а $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение силы тяжести. В данном случае $v_0 = 20$ м/с, и формула примет вид:

$$s = 20t + 4{,}9t^2. \tag{2}$$

Такой путь пройдёт падающий груз за t секунд. Значит, через t секунд он будет находиться на высоте

$$x = 1000 - 20t - 4{,}9t^2 \tag{3}$$

метров от земли. Чтобы определить x — высоту груза над землёй через 15 с, очевидно, достаточно в (3) подставить $t = 15$ и произвести вычисления. Получим:

$$x = 1000 - 20 \cdot 15 - 4{,}9 \cdot 15^2 = -402{,}5.$$

Отрицательное значение x здесь не имеет смысла, и, следовательно, наша задача не имеет решения. Почему так получилось? Чтобы ответить на этот вопрос, определим сначала, через сколько секунд сброшенный груз упадёт на землю. Очевидно, это произойдёт в тот момент, когда груз пройдёт путь, равный высоте, с которой он был сброшен, т. е. 1000 м. Значит, мы должны иметь:

$$20t + 4{,}9t^2 = 1000,$$

или

$$4{,}9t^2 + 20t - 1000 = 0. \tag{4}$$

Решив это уравнение, найдём $t = 12{,}4$ с (с точностью до $\frac{1}{10}$; берём только положительный корень). Значит, через 12,4 с груз уже упал на землю, а потому вопрос задачи не имеет смысла.

Для каких же значений t задача допускает вполне определённое решение? Очевидно, только для тех значений, при которых путь, пройденный грузом, меньше 1000 м, т. е. при условии, что

$$4{,}9t^2 + 20t < 1000,$$

или, что то же,

$$4{,}9t^2 + 20t - 1000 < 0. \qquad (5)$$

Значит, задача имеет решение только при таких (положительных) значениях t, при которых трёчлен $4{,}9t^2 + 20t - 1000$ является отрицательным числом. Это будет при $t < 12{,}4$.

Во многих задачах, как и в приведённой выше, требуется определить для данного трёхчлена, при каких значениях входящей в него буквы он является положительным и при каких отрицательным. В этом и заключается исследование квадратного трёхчлена, которое излагается в следующих параграфах.

183. Квадратный трёхчлен, имеющий вещественные различные корни.

Пример 1. Пусть дан трёхчлен:

$$y = 2x^2 - 7x + 3\ . \qquad (1)$$

Требуется определить, при каких значениях x этот трёхчлен будет иметь положительные и при каких отрицательные значения.

Мы знаем (§ 44, 45), что всякий квадратный трёхчлен можно представить в виде произведения коэффициента при x^2 и разностей между переменной x и корнями трёхчлена.

Найдём корни данного трёхчлена, для чего решим уравнение

$$2x^2 - 7x + 3 = 0. \qquad (2)$$

Получим $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ (через x_1 будем в дальнейшем обозначать меньший из действительных корней). Тогда данный трёхчен можно представить в таком виде:

$$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3). \qquad (3)$$

Исследуем теперь, при каких значениях x это произведение будет числом положительным и при каких отрицательным. Разберём три случая.

1. Пусть $x < \frac{1}{2}$, тогда и подавно $x < 3$. Отсюда, перенеся все члены в левую часть, получим:

$$x - \frac{1}{2} < 0 \quad \text{и} \quad x - 3 < 0.$$

Следовательно, произведение $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3)$, как произведение двух отрицательных чисел, является числом положительным. По умножении его на положительное число 2 получим опять положительное число. Отсюда следует, что при $x < \frac{1}{2}$ выражение (3), а значит, и данный трёхчлен является положительным числом.

2. Пусть
$$x > \frac{1}{2}, \quad \text{но} \quad x < 3,$$
т. е. значения x заключены между корнями данного трёхчлена. Из этих неравенств, после переноса членов в левую часть, получим:
$$x - \frac{1}{2} > 0, \quad \text{но} \quad x - 3 < 0,$$
Стало быть, в произведении $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)$ один сомножитель положителен, другой отрицателен. Значит, произведение будет отрицательно, и по умножении его на положительное число 2 получим отрицательное число. Итак, при
$$\frac{1}{2} < x < 3$$
выражение (3), а следовательно, и данный трёхчлен, является отрицательным числом.

3. Пусть $x > 3$, тогда и подавно $x > \frac{1}{2}$. Отсюда получаем:
$$x - 3 > 0 \quad \text{и} \quad x - \frac{1}{2} > 0.$$
Произведение $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)$, а следовательно, и произведение $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)$ будут положительными числами. Значит, при $x > 3$ данный трёхчлен — число положительное.

Итак, мы пришли к следующему выводу. Трёхчлен $2x^2 - 7x + 3$ имеет положительные значения при всех значениях x, меньших $\frac{1}{2}$, и при всех значениях x, бо́льших 3. Трёхчлен имеет отрицательные значения при всех значениях x, заключённых между $\frac{1}{2}$ и 3.

Проверка сделанных выводов на некоторых числовых значениях x дана в следующей таблице, где в верхней строке даны значения x, а в нижней — соответствующие значения трёхчлена:

x	-5	-3	-1	0	1	2	4	7	10
$2x^2 - 7x + 3$	88	42	12	3	-2	-3	7	52	133

К тем же результатам мы придём, если рассмотрим график трёхчлена $2x^2 - 7x + 3$. Мы знаем (см. § 50), что этим графиком является парабола, пересекающая ось x-ов в точках, абсциссы которых равны $\frac{1}{2}$ и 3. Из рассмотрения графика (см. рис. 36) непосредственно видно, что точки параболы, абсциссы которых меньше $\frac{1}{2}$ или больше 3, расположены выше оси x-ов и, значит, их ординаты, т. е. значения $y = 2x^2 - 7x + 3$, будут положительны.

Точки же параболы, абсциссы которых заключены между $\frac{1}{2}$ и 3, находятся ниже оси x-ов, и, значит, их ординаты отрицательны.

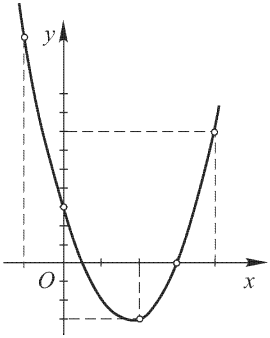


Рис. 36

Пример 2. Исследуем таким же способом трёхчлен:

$$y = 3x^2 - x - 10.$$

Решив квадратное уравнение $3x^2 - x - 10 = 0$, найдём корни данного трёхчлена. Они будут равны: $x_1 = -\frac{5}{3}$ и $x_2 = 2$. Тогда трёхчлен можно представить в таком виде:

$$y = 3\left[x - \left(-\frac{5}{3}\right)\right](x - 2),$$

или

$$y = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2).$$

Рассуждая так же, как и в первом примере, найдём:

1) При $x < -\frac{5}{3}$ будет также $x < 2$. Отсюда:

$$x + \frac{5}{3} < 0 \quad \text{и} \quad x - 2 < 0.$$

Следовательно, при этих значениях x произведение

$$3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2) > 0,$$

т. е. данный трёхчлен имеет положительные значения.

2) При $x > -\frac{5}{3}$ и $x < 2$ будем иметь:

$$x + \frac{5}{3} > 0 \quad \text{и} \quad x - 2 < 0.$$

Следовательно,

$$3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2) < 0,$$

т. е. трёхчлен имеет отрицательные значения.

3) При $x > 2$ будет также $x > -\frac{5}{3}$. Тогда будем иметь:

$$x + \frac{5}{3} > 0 \quad \text{и} \quad x - 2 > 0.$$

Отсюда:

$$3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2) > 0,$$

и трёхчлен имеет положительные значения.

Общий вывод будет такой же, как и в первом примере: трёхчлен имеет положительные значения при всех значениях x, меньших $-\frac{5}{3}$, и при всех значениях x, бо́льших 2. Он имеет отрицательные значения для всех значений x, заключённых между $-\frac{5}{3}$ и 2. Этот вывод подтверждается таблицей, а также графиком трёхчлена $3x^2 - x - 10$ (см. рис. 37).

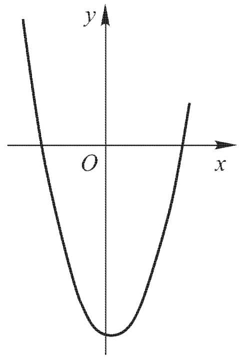


Рис. 37

x	-5	-2	-1	0	1	2	3	5
$3x^2 - x - 10$	70	4	-6	-10	-8	0	14	60

Пример 3. Рассмотрим теперь такой трёхчлен, у которого первый коэффициент (т. е. коэффициент при x^2) является отрицательным числом. Пусть, например, дан трёхчлен:

$$y = -2x^2 + 4x + 16.$$

Найдя корни этого трёхчлена: $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$, мы можем его переписать так:

$$y = -2(x + 2)(x - 4).$$

Исследуя знак этого произведения в том же порядке, как и в предыдущих примерах, мы найдём:

1. При $x < -2$ будет также $x < 4$. Отсюда:

$$x + 2 < 0 \quad \text{и} \quad x - 4 < 0.$$

Произведение этих множителей $(x + 2)(x - 4)$ положительно. Но при умножении этого положительного числа на -2 получим, очевидно, отрицательное число и, значит, данный трёхчлен при $x < -2$ имеет отрицательные значения.

2. При $x > -2$ и $x < 4$ имеем:

$$x + 2 > 0 \quad \text{и} \quad x - 4 < 0.$$

Произведение $(x + 2)(x - 4)$ — число отрицательное, а, значит, по умножении его на отрицательное число -2 получится положительное число. Следовательно, при значениях x, заключённых между корнями трёхчлена -2 и 4, данный трёхчлен имеет положительные значения.

3. Наконец, при $x > 4$ получим:

$$x + 2 > 0 \quad \text{и} \quad x - 4 > 0.$$

Произведение $(x + 2)(x - 4)$ — число положительное. По умножении его на -2 получим отрицательное число и, значит, трёхчлен при $x > 4$ имеет отрицательные значения.

Мы видим, что в этом случае мы имеем положение, обратное тому, которое наблюдали в первых двух примерах: при значениях x, меньших -2, и при значениях, бо́льших 4, он имеет отрицательные значения; при значениях x, заключённых между корнями трёхчлена, он имеет положительные значения. Этот вывод подтверждает и таблица для отдельных числовых значений x.

x	-5	-3	-2	-1	0	1	3	4	5	8
$-2x^2+4x+16$	-54	-14	0	10	16	18	10	0	-14	-80

К тому же выводу мы придём, если рассмотрим график трёхчлена $-2x^2+4x+16$. Мы уже знаем (§ 47, 49), что при $a<0$ график трёхчлена ax^2+bx+c будет обращён вершиной вверх и пересечёт ось x-ов в точках, абсциссы которых равны корням трёхчлена. В данном случае график имеет такой вид (см. рис. 38). Мы видим, что при $x<-2$ и при $x>4$ ординаты точек кривой, т. е. значения $y=-2x^2+4x+16$, отрицательны, а при $-2<x<4$ положительны.

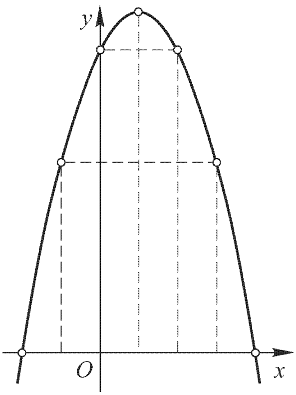


Рис. 38

Сопоставляя третий пример с первым и вторым, мы замечаем, что во всех трёх случаях при значениях x, меньших меньшего корня, а также бо́льших большего корня, трёхчлен имеет тот же знак, что и коэффициент при x^2; при значениях x, заключенных между корнями, трёхчлен имеет знак, противоположный знаку коэффициента при x^2.

Убедимся в том, что такой вывод верен для любых значений коэффициентов a, b и c в случае вещественных и различных корней. Для этого исследуем квадратный трёхчлен в общем виде.

Общий случай. Пусть дан трёхчлен:

$$y=ax^2+bx+c,$$

где a, b и c — любые вещественные числа, удовлетворяющие лишь тому условию, что трёхчлен имеет вещественные и различные корни (и, конечно, $a\neq 0$). Обозначим эти корни через

$$x_1 \text{ и } x_2 \quad (x_1<x_2).$$

Тогда трёхчлен может быть представлен в таком виде:

$$y=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Исследуем, какие значения имеет этот трёхчлен при различных значениях x.

1. Пусть $x<x_1$, а значит, $x<x_2$, (так как $x_1<x_2$).

Отсюда имеем:

$$x-x_1<0 \quad \text{и} \quad x-x_2<0.$$

Следовательно, произведение $(x - x_1)(x - x_2)$ будет числом положительным. Отсюда следует, что $a(x - x_1)(x - x_2)$ положительно, если a положительно, и отрицательно, если a отрицательно. Другими словами, при $x < x_1$ значение трёхчлена $ax^2 + bx + c$ имеет тот же знак, что и коэффициент a.

2. Пусть $x > x_1$ и $x < x_2$.

Тогда:

$$x - x_1 > 0 \quad \text{и} \quad x - x_2 < 0.$$

Произведение $(x - x_1)(x - x_2)$, как произведение чисел с разными знаками, будет числом отрицательным. Отсюда следует, что произведение $a(x - x_1)(x - x_2)$ отрицательно при положительном a и положительно при отрицательном a. Значит, в этом случае значения трёхчлена имеют знак, противоположный знаку коэффициента a.

3. Пусть $x > x_2$, а значит, и $x > x_1$ (так как $x_2 > x_1$).

Тогда:

$$x - x_2 > 0 \quad \text{и} \quad x - x_1 > 0.$$

Произведение $(x - x_1)(x - x_2)$ будет положительным, а следовательно, произведение $a(x - x_1)(x - x_2)$ положительно при a положительном и отрицательно при a отрицательном. Значит, в этом случае числовое значение трёхчлена имеет тот же знак, что и коэффициент a.

Объединяя все три случая, мы можем теперь сделать такой общий вывод:

Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет вещественные различные корни, то при значениях x, меньших меньшего из корней, и при значениях x, бóльших большего из корней, он имеет тот же знак, что и коэффициент при x^2. При значениях x, заключённых между корнями трёхчлена, он имеет знак, противоположный знаку коэффициента при x^2.

Примечание. Если условиться называть значения $x < x_1$ и $x > x_2$ значениями x вне промежутка между корнями, а значения $x_1 < x < x_2$ значениями x внутри промежутка между корнями, то этот вывод можно ещё сформулировать так:

Если трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет вещественные различные корни x_1 и x_2, то при значениях x вне промежутка между корнями трёхчлен имеет тот же знак, что и коэффициент при x^2; при значениях x внутри промежутка между корнями трёхчлен имеет знак, противоположный знаку коэффициента при x^2.

Упражнения.

Исследовать трёхчлены:

288. $y = x^2 - 8x + 12.$

289. $y = x^2 - 2x - 15.$

290. $y = -3x^3 + 8x + 3.$

291. $y = -x^2 + 9x - 14.$

292. $y = 6x^2 - x - 12.$

184. Квадратный трёхчлен, имеющий равные корни.

Пример 1. Пусть требуется исследовать трёхчлен:

$$y = 2x^2 - 8x + 8.$$

Найдём корни этого трёхчлена, для чего приравняем его нулю и решим уравнение:

$$2x^2 - 8x + 8 = 0.$$

Получим $x_1 = x_2 = 2$. Значит, данный трёхчлен можно представить в таком виде (§ 45):

$$y = 2(x-2)(x-2),$$

или

$$y = 2(x-2)^2.$$

Очевидно, что при любых вещественных значениях [1] x, кроме $x = 2$, выражение $(x-2)^2$ — число положительное. А значит, и по умножении его на положительное число 2 будем иметь положительное число.

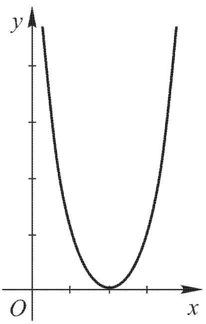


Рис. 39

Следовательно, трёхчлен $2x^2 - 8x + 8$ имеет положительные значения при всех значениях x, кроме значения, равного корню трёхчлена, т. е. при $x = 2$.

(При $x = 2$ трёхчлен равен нулю.)

Построив график трёхчлена $2x^2 - 8x + 8$, мы замечаем (см. рис. 39), что при всех значениях x точки кривой расположены выше оси x-ов, т. е. $y > 0$, и только при $x = 2$ будет $x = 0$. В этой точке кривая касается оси абсцисс.

Пример 2. Исследуем трёхчлен:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2}.$$

Найдём корни этого трёхчлена, для чего решим уравнение:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2} = 0.$$

Получим: $x_1 = x_2 = 3$. Следовательно, данный трёхчлен можем представить в таком виде:

$$y = -\frac{1}{2}(x-3)(x-3),$$

или

$$y = -\frac{1}{2}(x-3)^2.$$

[1] Чтобы не делать каждый раз оговорки, условимся, что в дальнейшем везде, где говорится о числовых значениях букв, подразумеваются только вещественные значения.

Как и в предыдущем примере, заключаем, что выражение $(x-3)^2$ при всех значениях x, кроме $x=3$, является числом положительным. По умножении его на $-\frac{1}{2}$ получим отрицательное число.

Таким образом, в этом случае при всех значениях x, кроме $x=3$, трёхчлен имеет отрицательные значения.

Построив график трёхчлена $-\frac{1}{2}x^2+3x-4\frac{1}{2}$, мы видим (см. рис. 40), что все точки параболы, кроме точки (3; 0), находятся ниже оси x-ов. Значит, ординаты всех этих точек, т. е. значения $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4\frac{1}{2}$, будут отрицательны.

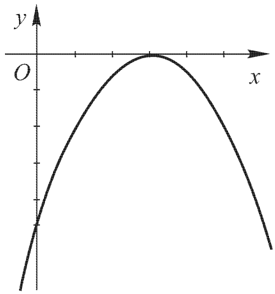


Рис. 40

Сопоставляя оба примера, мы замечаем, что в обоих случаях знак численной величины трёхчлена совпадает со знаком коэффициента при x^2. Чтобы убедиться, что это имеет место при любых коэффициентах (в случае равных корней), рассмотрим трёхчлен в общем виде.

Общий случай. Пусть дан трёхчлен:

$$y=ax^2+bx+c,$$

причём известно, что он имеет равные корни. Обозначив корень через x_1, представим трёхчлен в таком виде:

$$y=a(x-x_1)(x-x_1),$$

или

$$y=a(x-x_1)^2.$$

Отсюда заключаем: какова бы ни была разность $x-x_1$, если только она не равна нулю, квадрат этой разности является числом положительным. Значит, при положительном a произведение $a(x-x_1)^2$, а следовательно, и y будут числами положительными, а при отрицательном a — отрицательными. Таким образом, мы можем сделать вывод:

Если трёхчлен имеет равные корни, то при всех значениях x, кроме значения, равного корню трёхчлена, значения трёхчлена имеют тот же знак, что и коэффициент при x^2.

Упражнения.

Исследовать трёхчлены:

293. $y=x^2-2x+1$.

294. $y=16x^2-8x+1$.

295. $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$.

296. $y=(2x-3)^2-3x^2+4x+7$.

185. Квадратный трёхчлен, имеющий мнимые корни.

Пример 1. Исследуем трёхчлен:

$$y = 2x^2 - 3x + 3.$$

Решая уравнение $2x^2 - 3x + 3 = 0$, мы получим:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{4}.$$

Корни трёхчлена оказались мнимыми. В этом случае разности $x - x_1$ и $x - x_2$ будут мнимыми числами. Так как вопрос о знаке мнимых чисел не имеет смысла, то мы проведём исследование данного случая другим способом. Вынесем сначала за скобки первый коэффициент, получим:

$$y = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right).$$

Рассматривая теперь второй член $\frac{3}{2}x$, равный $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x$, как удвоенное произведение x и $\frac{3}{4}$, дополним выражение

$$x^2 - \frac{3}{2}x = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x$$

до полного квадрата, прибавив, а затем вычтя $\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

Будем иметь:

$$y = 2\left[\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{3^2}{4^2}\right) + \frac{3}{2} - \frac{3^2}{4^2}\right] =$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{16}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}\right].$$

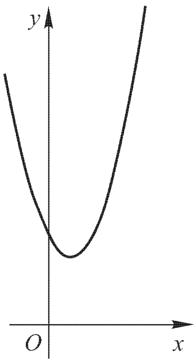


Рис. 41

Исследуем теперь полученное выражение. Очевидно, что выражение $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ при $x = \frac{3}{4}$ равно нулю, а при остальных значениях x — число положительное. Второе слагаемое в прямых скобках $\frac{15}{16}$ — тоже положительное число. Значит, и вся сумма в прямых скобках положительна. От умножения её на положительное число 2 получим опять положительное число. Итак, в данном случае трёхчлен имеет положительные значения при всех значениях x.

График трёхчлена $y = 2x^2 - 3x + 3$ (см. рис. 41) показывает, что действительно все точки параболы расположены выше оси x-ов, т. е. их ординаты положительны.

Пример 2. Исследуем трёхчлен:

$$y = -3x^2 + 2x - 1.$$

Решив уравнение $-3x^2 + 2x - 1 = 0$, найдём его корни. Имеем:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-2}}{3}.$$

Корни трёхчлена оказались мнимыми. Применим поэтому тот же способ исследования, что и в примере 1. Вынесем за скобки первый коэффициент и в скобках выделим квадрат двучлена:

$$y = -3x^2 + 2x - 1 = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) =$$
$$= -3\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{3}x + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}\right) = -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right].$$

Выражение $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ равно нулю при $x = \frac{1}{3}$ и положительно при всех других значениях x. Значит, сумма $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}$ всегда положительна. По умножении её на -3 получим отрицательное число. Отсюда делаем вывод, что трёхчлен $-3x^2 + 2x - 1$ имеет отрицательные значения при всех значениях x.

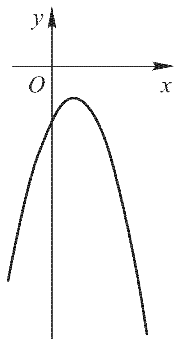


Рис. 42

График трёхчлена (см. рис. 42) показывает, что все точки параболы расположены ниже оси x-ов, т. е их ординаты отрицательны.

Сопоставляя примеры 1 и 2, замечаем, что в обоих случаях знак численной величины трёхчлена совпадал со знаком коэффициента при x^2 при всех без исключения значениях переменного x. Покажем, что это будет иметь место для всякого трёхчлена, имеющего мнимые корни.

Общий случай. Пусть дан трёхчлен:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

причём известно, что он имеет мнимые корни. Мы знаем (§ 42 и 135), что в этом случае должно быть

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Преобразуем трёхчлен так же, как мы это делали в примерах 1 и 2:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

или

$$y = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \frac{c}{a}\right).$$

Прибавим и вычтем по $\frac{b^2}{4a^2}$, получим:

$$y = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

При всех значениях x выражение $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ положительно или равно нулю $\left(\text{при } x=-\frac{b}{2a}\right)$. Посмотрим, какой знак имеет второе слагаемое $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$. Мы уже знаем, что в случае мнимых корней выражение b^2-4ac отрицательно. Это значит, что противоположное ему число $-(b^2-4ac)$, т. е. $4ac-b^2$, будет числом положительным. Знаменатель $4a^2$ — тоже число положительное. Следовательно, всё выражение $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ является положительным числом. Итак, вся сумма, заключённая в прямые скобки, является положительным числом при всех (вещественных) значениях x.

Отсюда следует, что знак численной величины трёхчлена зависит только от знака a; при a положительном и трёхчлен имеет положительные значения, при отрицательном — отрицательные.

Итак, мы можем сделать вывод:

Если трёхчлен имеет мнимые корни, то при всех значениях x его численная величина имеет тот же знак, что и коэффициент при x^2.

Упражнения.

Исследовать трёхчлены:

297. $y=x^2-5x+8$.

298. $y=3x^2+2x+1$.

299. $y=-2x^2+4x-7$.

186. Общий вывод. Мы можем теперь подвести общий итог проведённого исследования квадратного трёхчлена. Но прежде сделаем следующие замечания.

1. Мы разбили исследование трёхчлена на три случая в зависимости от того, какие корни имеет трёхчлен. Но мы знаем (§ 42), что корни квадратного уравнения связаны с его дискриминантом b^2-4ac следующей зависимостью:

1) Если $b^2-4ac>0$, то корни вещественны и различны.

2) Если $b^2-4ac=0$, то корни вещественны и равны.

3) Если $b^2-4ac<0$, то корни мнимы.

Следовательно, вместо того чтобы говорить, например: «если корни трёхчлена вещественны и различны», мы можем сказать короче: «если дискриминант больше нуля»; аналогично изменяем формулировку и в остальных двух случаях.

2. Мы исследовали, какой знак имеет численная величина трёхчлена при различных численных значениях переменной. В дальнейшем для краткости вместо «знак численной величины трёхчлена» условимся говорить короче: «знак трёхчлена», помня, что речь идёт о знаке числа, которое получится, если вместо переменной подставить её численное значение. Точно так же вместо слов «трёхчлен имеет положительные (отрицательные) значения» будем говорить короче: «трёхчлен положи-

телен (отрицателен)». Теперь мы можем сформулировать общий вывод так:

1) Если дискриминант трёхчлена ax^2+bx+c положителен, то при всех значениях x, заключённых внутри промежутка между корнями, он имеет знак, противоположный знаку коэффициента a; при всех значениях x, содержащихся вне этого промежутка, трёхчлен имеет тот же знак, что и коэффициент a.

2) Если дискриминант трёхчлена равен нулю, то трёхчлен при всех значениях x, кроме значения, равного корню трёхчлена, имеет тот же знак, что и коэффициент a.

3) Если дискриминант отрицателен, то при всех значениях x трёхчлен имеет тот же знак, что и коэффициент a.

Этот вывод можно представить в виде следующей таблицы:

Дискриминант	Значение x	Знак $y=ax^2+bx+c$	
		$a>0$	$a<0$
$b^2-4ac>0$	1) $x_1<x<x_2$ 2) $x<x_1$; $x>x_2$	отрицательный положительный	положительный отрицательный
$b^2-4ac=0$	любое, кроме $x=x_1=x_2$	положительный	отрицательный
$b^2-4ac<0$	любое	положительный	отрицательный

Примеры.

1. $y=x^2-7x+10$. Дискриминант: $b^2-4ac=49-40=9>0$; $a=1>0$. Корни трёхчлена: $x_1=2$; $x_2=5$. Следовательно, при $x<2$ и при $x>5$ трёхчлен положителен, а при $2<x<5$ отрицателен.

2. $y=-2x^2+6x+80$. Дискриминант: $36+640=676>0$; $a=-2<0$. Корни трёхчлена: $x_1=-5$; $x_2=8$. Следовательно, при $-5<x<8$ трёхчлен положителен; при $x<-5$ и при $x>8$ отрицателен.

3. $y=-x^2+4x-15$. Дискриминант: $16-4\cdot 15=-44$. Следовательно, при всех значениях x трёхчлен отрицателен.

4. $y=5x^2-10x+5$. Дискриминант: $10^2-4\cdot 5\cdot 5=0$. Корень трёхчлена: $x_1=x_2=1$; $a=5>0$. Следовательно, при всех значениях x, кроме $x=1$, трёхчлен положителен.

5. Определить, при каких значениях m трёхчлен $2x^2-6x+m$ будет иметь положительные значения при любом значении x. Так как здесь $a=2>0$, то трёхчлен будет иметь положительные значения при любом x в том случае, если $b^2-4ac<0$. Подставляя сюда значения: $a=2$, $b=-6$, $c=m$, получим: $36-4\cdot 2m=36-8m$.

Значит, должно быть $36-8m<0$. Отсюда находим: $m>4\frac{1}{2}$. Итак, при m, бóльших $4\frac{1}{2}$, данный трёхчлен будет иметь положительные значения при любом значении x.

6. Определить, при каких значениях p трёхчлен $x^2+(p-2)x+2p+1$ будет иметь положительные значения при любом значении x.

Дискриминант трёхчлена $(p-2)^2 - 4(2p+1) = p^2 - 12p = p(p-12)$. Следовательно, для того чтобы данный трёхчлен имел положительные значения при любом x, должно быть:

$$p(p-12) < 0.$$

Решив уравнение:

$$p(p-12) = 0,$$

найдём:

$$p_1 = 0;\ p_2 = 12.$$

Решим неравенство: $p(p-12) < 0$. Оно будет верно при условии

$$\text{(I)}\quad p < 0 \quad \text{и} \quad p - 12 > 0$$

или

$$\text{(II)}\quad p > 0 \quad \text{и} \quad p - 12 < 0.$$

Первая система неравенств несовместна (при $p < 0$, очевидно, и $p - 12 < 0$). Вторая же система даёт решение:

$$0 < p < 12.$$

Итак, при всех значениях p от 0 до 12, т. е. при условии $0 < p < 12$, данный трёхчлен имеет положительные значения при любом значении x.

Упражнения.

Исследовать трёхчлены:

300. $y = 3x^2 + 4x - 7$.

301. $y = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 5$.

302. $y = -5x^2 + 20x - 20$.

303. $y = 3x^2 + 2x + 2$.

304. $y = -x^2 + 3x - 4$.

В задачах 305–309 определить, при каких значениях m трёхчлены будут иметь положительные значения при любых значениях x.

305. $x^2 - 8x + m + 10$.

306. $x^2 - 2x + m - 6$.

307. $x^2 - 10x - m$.

308. $x^2 + (m+2)x + 3m + 1$.

309. $3x^2 + (2m+6)x + m + 3$.

187. Неравенства второй степени. Неравенствами второй степени с одним неизвестным называются неравенства вида:

$$ax^2 + bx + c > 0 \tag{1}$$

и

$$ax^2 + bx + c < 0, \tag{2}$$

где a, b и c —любые действительные числа, причём $a \neq 0$.

Так как неравенство вида (2) всегда может быть приведено к виду (1) путём умножения его на -1, то мы можем в дальнейшем ограничиться рассмотрением неравенств вида (1).

Решить неравенство — значит определить, при каких значениях x это неравенство справедливо. Для неравенства (1) это значит, что мы должны найти те значения x, при которых трёхчлен в левой части является числом положительным.

После того как было изложено в предыдущих параграфах относительно знака квадратного трёхчлена, ответ на этот вопрос не представляет затруднений.

Решим несколько примеров.

Пример 1. Пусть требуется решить неравенство:

$$2x^2 - 13x + 15 > 0. \tag{1}$$

Это значит, что нам нужно определить, при каких значениях x трёхчлен $2x^2 - 13x + 15$ является числом положительным. Решение проведём в таком порядке:

а) Устанавливаем, что первый коэффициент положителен ($a = 2 > 0$).

б) Устанавливаем, что дискриминант трёхчлена $13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 > 0$. Отсюда заключаем (см. таблицу § 186), что неравенство (1) справедливо при всех значениях x, бóльших большего, и при всех значениях x, меньших меньшего из корней трёхчлена.

в) Чтобы определить эти значения, решаем уравнение:

$$2x^2 - 13x + 15 = 0.$$

Находим: $x_1 = 1\frac{1}{2}$; $x_2 = 5$.

Следовательно, данное неравенство справедливо при значениях x, меньших $1\frac{1}{2}$, и при значениях x, бóльших 5.

Пример 2. Решить неравенство:

$$-4x^2 + 4x - 1 < 0. \tag{1}$$

Умножив обе части на -1, получим равносильное неравенство:

$$4x^2 - 4x + 1 > 0. \tag{2}$$

а) Коэффициент $a = 4 > 0$.

б) Дискриминант $4^2 - 4 \cdot 4 = 0$.

Следовательно, трёхчлен имеет равные корни. В этом случае, как мы знаем (§ 186), трёхчлен (2) имеет положительные значения при всех значениях x, кроме значения, равного корню трёхчлена. Найдём этот корень, решив уравнение:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Получим $x = \frac{1}{2}$. Итак, данное неравенство (1) справедливо при всех значениях x, кроме $x = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Решить неравенство:

$$3x^2 - 5x + 4 > 0.$$

а) Коэффициент $a = 3 > 0$.

б) Дискриминант $5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -23 < 0$. Отсюда сразу заключаем, что неравенство справедливо при любых значениях x.

Пример 4. Решить неравенство:

$$(2x-1)(x+3) - (x+7)(x-1) - 4x < 0.$$

Раскрыв скобки и произведя упрощения, получим;

$$x^2 - 5x + 4 < 0, \tag{1}$$

или по умножении на -1:

$$-x^2 + 5x - 4 > 0, \tag{2}$$

а) Коэффициент

$$a = -1 < 0.$$

б) Дискриминант

$$5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 9 > 0.$$

Следовательно, неравенство (2), а значит и (1), справедливо при всех значениях x, заключенных между корнями трёхчлена. Найдём эти корни:

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Итак, неравенство справедливо при

$$1 < x < 4.$$

Пример 5. Решить неравенство:

$$\frac{x^2}{6} - x + 1\frac{1}{2} < 0. \tag{1}$$

Умножив обе части на -6, получим:

$$-x^2 + 6x - 9 > 0. \tag{2}$$

а) Коэффициент $a = -1 < 0$.

б) Дискриминант $6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$.

Отсюда сразу заключаем, что неравенство (1) не имеет решений (при $x = 3$ трёхчлен (2) равен 0, при всех остальных значениях отрицателен).

Пример 6. Решить неравенство:

$$-3x^2 + 4x - 10 > 0.$$

Так как $a = -3 < 0$ и дискриминант $4^2 - 120 < 0$, то непосредственно заключаем, что неравенство решений не имеет.

Решённые примеры, а также рассмотрение таблицы § 186 приводят к следующему общему выводу для неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

I. Если $b^2 - 4ac < 0$, то:

а) при $a > 0$ неравенство справедливо при любых значениях x;

б) при $a < 0$ неравенство не имеет решений.

II. Если $b^2 - 4ac = 0$, то:

а) при $a > 0$ неравенство справедливо при всех значениях x, кроме значения, равного корню трёхчлена в левой части;

б) при $a < 0$ неравенство не имеет решений.

III. Если $b - 4ac > 0$, то:

а) при $a > 0$ неравенство справедливо при значениях x, бóльших большего, и при значениях x, меньших меньшего из корней трёхчлена в левой части (или, как мы условились говорить короче: при значениях x вне промежутка между корнями трёхчлена);

б) при $a < 0$ неравенство справедливо при значениях x, заключённых между корнями трёхчлена в левой части (или при значениях x внутри промежутка между корнями).

Примечание. Во всех приведённых примерах мы проводили решение, полностью основываясь на результатах исследования квадратного трёхчлена, данных в § 186. Но, конечно, в каждом случае возможно и вполне самостоятельное исследование. Так, в примере 1, решив уравнение $2x^2 - 13x + 15$ и найдя $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_2 = 5$, мы могли данное неравенство представить в виде:

$$2\left(x - 1\frac{1}{2}\right)(x - 5) > 0.$$

Теперь решение данного неравенства привелось к решению двух систем неравенств первой степени:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \left.\begin{array}{l} x - 1\frac{1}{2} > 0 \\ x - 5 > 0 \end{array}\right\}, \\ \text{(II)} & \left.\begin{array}{l} x - 1\frac{1}{2} < 0 \\ x - 5 < 0 \end{array}\right\}. \end{array}$$

Первая система даёт $x > 5$, вторая: $x < 1\frac{1}{2}$. Значит, данное неравенство справедливо при значениях $x > 5$, и при значениях $x < 1\frac{1}{2}$.

Мы пришли к тому же результату, что и с использованием таблицы § 186, но гораздо более длинным путём.

Решим теперь несколько неравенств более сложного вида.

Пример 7. Решить неравенство:

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} > 0.$$

Решение этого неравенства приводится к решению двух систем:

$$\text{(I)} \quad \left.\begin{aligned} x^2 - 8x + 7 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \begin{aligned} (1) \\ (2) \end{aligned}$$

$$\text{(II)} \quad \left.\begin{aligned} x^2 - 8x + 7 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \begin{aligned} (3) \\ (4) \end{aligned}$$

Решим первую систему неравенств. Так как $8^2 - 4 \cdot 7 = 36 > 0$, то трёхчлен $x^2 - 8x + 7$ имеет вещественные и различные корни. Решив уравнение $x^2 - 8x + 7 = 0$, найдём: $x_1 = 1$; $x_2 = 7$. В таком случае, как мы знаем (§183), неравенство (1) будет иметь место при $x < 1$ и при $x > 7$.

Но решив неравенство (2), найдём $x > 3$. Значит, обоим неравенствам удовлетворяют лишь значения $x > 7$.

Решим вторую систему. Неравенство (3) будет справедливо при всех значениях x, заключающихся между 1 и 7, т. е. при $1 < x < 7$. Но неравенство (4) даёт $x < 3$. Следовательно, обоим неравенствам вместе удовлетворяют лишь значения x, заключённые между 1 и 3, т. е. при $1 < x < 3$.

Теперь мы можем сделать общий вывод: данное неравенство справедливо при $1 < x < 3$ и при $x > 7$.

Проверьте правильность решения подстановкой в данное неравенство значений: $x = -1$; 0; 1; 2; 4; 6; 8; 10.

Пример 8. Решить неравенство:

$$\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0.$$

Решение приводится к решению систем:

$$\text{(I)} \quad \left.\begin{aligned} x^2 - 9x + 14 > 0 \\ x^2 - 5x + \ \ 4 > 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} (1) \\ (2) \end{aligned}$$

и

$$\text{(II)} \quad \left.\begin{aligned} x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x^2 - 5x + \ \ 4 < 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \begin{aligned} (3) \\ (4) \end{aligned}$$

Так как $9^2 - 56 = 25 > 0$ и $5^2 - 16 = 9 > 0$, то оба трёхчлена имеют вещественные и различные корни. Решив соответствующие уравнения, найдём для первого трёхчлена: $x_1 = 2$; $x_2 = 7$; для второго трёхчлена: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$. Отсюда заключаем:

1) Неравенство (1) справедливо при $x < 2$ и $x > 7$, а неравенство (2) — при $x < 1$ и $x > 4$. Следовательно, оба неравенства вместе будут верны лишь при $x < 1$ и $x > 7$.

2) Неравенство (3) верно при $2 < x < 7$, а неравенство (4) — при $1 < x < 4$. Следовательно, оба неравенства одновременно будут иметь место лишь при $2 < x < 4$.

Итак, решениями данного неравенства будут следующие значения x: 1) $x < 1$; 2) $2 < x < 4$; 3) $x > 7$.

Замечание. Найдя корни обоих трёхчленов, мы могли данное неравенство представить в таком виде:

$$\frac{(x-2)(x-7)}{(x-1)(x-4)} > 0.$$

Тогда решение этого неравенства свелось бы к решению двух систем:

$$\text{(I)}\quad \left.\begin{aligned} (x-2)(x-7) > 0 \\ (x-1)(x-4) > 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

и

$$\text{(II)}\quad \left.\begin{aligned} (x-2)(x-7) < 0 \\ (x-1)(x-4) < 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \begin{aligned}(3)\\(4)\end{aligned}$$

Решение каждого из этих неравенств мы можем провести подобно тому, как это было сделано в первом примере данного параграфа. Очевидно, что мы пришли бы к тому же результату, что и выше, но ход решения был бы значительно более длинным.

Пример 9. Решить неравенство:

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 3x + 10} < 0.$$

Решение сводится к решению систем:

$$\text{(I)}\quad \left.\begin{aligned} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ x^2 - 3x + 10 < 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

и

$$\text{(II)}\quad \left.\begin{aligned} x^2 - 3x - 10 < 0 \\ x^2 - 3x + 10 > 0 \end{aligned}\right\}. \qquad \begin{aligned}(3)\\(4)\end{aligned}$$

Дискриминанты трёхчленов: $3^2 + 4 \cdot 10 = 49 > 0$ и $3^2 - 4 \cdot 10 = -31 < < 0$. Отсюда сразу заключаем, что система (I) не имеет решений. Действительно, раз дискриминант трёхчлена (2) меньше нуля, то трёхчлен положителен при любых значениях x и, следовательно, неравенство (2) не может иметь места.

Обращаемся к системе (II). Мы уже знаем, что неравенство (4) верно при всех значениях x. Значит, остаётся решить неравенство (3). Найдя корни трёхчлена $x^2 - 3x - 10$, получим: $x_1 = -2$; $x_2 = 5$. Следовательно, решениями неравенства (3), а значит, и системы (II) будут лишь значения x, заключённые между -2 и 5.

Итак, данное неравенство будет верно при $-2 < x < 5$.

Упражнения.

Решить неравенства:

310. $x^2 - 10x + 25 < 0.$

311. $(x-3)(x-1) - 15 > 0.$

312. $x(2x+3) + 1 < 0.$

313. $-3x^2 + 8x - 6 > 0.$

314. $x^2 - 5x + 7 > 0.$

315. $9x^2 - 12x + 4 > 0.$

316. $\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x - 4} > 0.$

317. $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x + 1} < 0.$

318. $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 5} > 0.$

319. $\dfrac{x^2 + 4x + 7}{x^2 - 6x + 9} < 0.$

320. $\dfrac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - 8x + 15} > 0.$

321. $\dfrac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 8x + 12} < 0.$

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. -243; -343; 256; $1\,000\,000$; $-0{,}00001$.

3. $\dfrac{x^8y^4}{z^{12}}$; $-\dfrac{27a^3b^9}{8c^6}$; $\dfrac{0{,}000064a^{18}b^6c^6}{d^{12}}$.

11. $2a\sqrt{a}$; $2a^3b^3\sqrt{2b}$; $5a^2bx\sqrt{2abx}$; $2a\sqrt[3]{2a}$.

14. $\sqrt{8}$; $\sqrt{490}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{a^3}$. **17.** $\dfrac{1}{60}\sqrt{6}$; $\dfrac{1}{90}\sqrt{165}$.

19. $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{25}$; $\sqrt[6]{x^3}$, $\sqrt[6]{x^4}$; $\sqrt[12]{16}$, $\sqrt[12]{27}$; $\sqrt[12]{x^9}$, $\sqrt[12]{y^{10}}$.

20. $\sqrt[12]{x^4y^8}$, $\sqrt[12]{y^6z^6}$, $\sqrt[12]{x^3z^9}$; $\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}\right)^3}$, $\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x}\right)^2}$.

21. $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{3a^2b^3}$, $\sqrt{2a^2b^3}$. **23.** $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$; $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$, $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$, $\dfrac{7}{3}\sqrt{3}$.

24. $a\sqrt{ax}$, $x\sqrt{ax}$, $\sqrt{ax}$. **26.** $8\sqrt{2}$; $29\sqrt{3}$. **27.** $(2a^2b+ab-1)\sqrt{2ab}$.

28. $12\sqrt{6}$; 120. **32.** 15; $6a^3$. **33.** $\sqrt[6]{a^5}$; $\sqrt[6]{60}$; $2\sqrt[3]{3}$. **34.** $\dfrac{16x}{a}$.

35. $2a\sqrt{10}$; $1{,}8a\sqrt{10}$. **36.** $\sqrt[6]{x}$; $2\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[12]{a^5}$. **39.** $\sqrt[12]{12}$; $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[12]{a^7}$.

47. $-1-\sqrt{2}$; $\dfrac{6-2\sqrt{2}}{7}$; $\dfrac{91+13\sqrt{6}}{43}$. **52.** $x=9$; $x=1$; $x=28\dfrac{2}{3}$.

78. $(x-7)(x-10)$; $(x+11)(x-8)$; $(3x-2)(x-4)$; $(2x+1)(3x-1)$.

79. $(5x+8)(4x-3)$; $(x+10)(x-2)$. **80.** $\dfrac{x+13}{x+15}$; $\dfrac{2(x+9)}{3(x-7)}$. **81.** $\dfrac{x+2a-b}{x+a-b}$.

92. ±1, ±2; ±1, ±3. **93.** $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{-1}$; ±2, $\pm\sqrt{-\dfrac{1}{2}}$. **94.** ±4, ±3; ±3, $\pm\sqrt{-7}$.

97. $x=3$, $y=8$ или $x=8$, $y=3$; $x=-5$, $y=-8$ или $x=8$, $y=5$; $x=\pm\sqrt{ab}$, $y=\pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

98. $x=\pm3$, $y=\pm4$; $x=4\pm4\sqrt{2}$, $y=-4\pm4\sqrt{2}$; $x=16$, $y=10$.

99. $x=\dfrac{24}{13}$; $y=\dfrac{24}{5}$. **102.** 7,5; 9. **103.** $137\cdot113=15481$ (м^2). **104.** 12 м; 4 м.

109. $x>1$, если $\dfrac{a+b}{ab}>0$, и $x<1$, если $\dfrac{a+b}{ab}<0$; $x<4$.

113. $a<b$. **114.** 119. **116.** 7. **121.** 8.

124. Могут, если стороны треугольника равны: $3a$; $4a$; $5a$, где a — произвольное число.

131. 9; 27; 81; 243 или -18; 54; -162; 486. **136.** 183. **145.** $\dfrac{5}{243}$ или $-\dfrac{10}{243}$.

147. $2a^2$; $4a(2+\sqrt{2})$. **150.** $a(a+x)^{-1}$; $2(a-x)^{-1}$; $3ab(1+x)^{-2}(1-x)^{-1}$.

153. $2a^2b^3$; $5ab^{-4}x^{-1}$. **155.** $4a^4b^{-6}$; $4x^6y^4$. **158.** $10a^{\frac{5}{6}}x$. **159.** $5ac^{-\frac{1}{12}}$; $a^{\frac{1}{2}}$.

163. $3a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{1}{6}}$. **164.** $a^{\frac{1}{4}}$; $a^{-\frac{1}{9}}$; $(1-x)^{\frac{1}{3}}$. **178.** 2; n; -1; $\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{2}$.

179. 8; 25; $\dfrac{1}{1024}$; 2; $\dfrac{1}{4}$. **188.** $x=\sqrt{a}$; $x=\sqrt[3]{ab}$. **251.** 13.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уроки алгебры 3
Предисловие 6

Глава 1. **ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СО СТЕПЕНЯМИ И КОРНЯМИ**

I. Возведение в степень 7
1. Действие возведения в степень (7). 2. Степень отрицательного числа (7). 3. Возведение в степень одночленов (7).

II. Возведение в квадрат многочлена 8
4. Вывод формулы (8). 5. Замечание о знаках (9).

III. Понятие об иррациональных числах 10
6. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки (10). 7. Понятие об измерении (10). 8. Иррациональные числа и их приближённые значения (11). 9. Равенство и неравенство между иррациональными числами. Вещественные числа (12). 10. Определение действий над иррациональными числами (13). 11. Извлечение корня. Определение (14). 12. Приближённые корни любой степени (15).

IV. Преобразование иррациональных выражений 16
13. Рациональные и иррациональные алгебраические выражения (16). 14. Основное свойство радикала (17). 15. Извлечение арифметического корня из произведения, из степени и из дроби (18). 16. Простейшие преобразования радикалов (19). 17. Подобные радикалы (20). 18. Действия над иррациональными одночленами (21). 19. Действия над иррациональными многочленами (24). 20. Освобождение знаменателя дроби от радикалов (24).

V. Иррациональные уравнения 26
21. Задача (26). 22. Посторонние решения (27). 23. Освобождение уравнения от двух квадратных радикалов (28).

Глава 2. **ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ**

I. Функциональная зависимость 29
24. Постоянные и переменные величины (29). 25. Аргумент и функция (30). 26. Три способа выражения функциональной зависимости (31). 27. Метод координат (32). 28. Определение положения точки на плоскости (34).

II. Прямая и обратная пропорциональность 35
29. Прямая пропорциональная зависимость (35). 30. Общее определение пропорциональной зависимости (36). 31. Обратная пропорциональная зависимость (36). 32. Общее определение обратной пропорциональной зависимости (37). 33. График прямой пропорциональной зависимости (38). 34. Изменение положения прямой при изменении коэффициента пропорциональности (39). 35. График обратной пропорциональности (40).

III. Линейная функция 42
36. Двучлен первой степени. Задача (42). 37. График двучлена первой степени (43). 38. Изменение двучлена $y = kx + b$ с изменением x (45). 39. Замечания (45). 40. Построение прямой $y = kx + b$ по двум точкам (46).

Глава 3. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

I. Дополнительные сведения о квадратных уравнениях 48
41. Формула корней квадратного уравнения (48). 42. Дискриминант (48). 43. Свойства корней квадратного уравнения (теорема Виета) (49). 44. Трёхчлен второй степени (51). 45. Разложение трёхчлена второй степени (51).

II. График квадратичной функции. 53
46. График функции $y = x^2$ (53). 47. График функции $y = ax^2$ (55). 48. График функции $y = ax^2 + b$ (56). 49. График трёхчлена второй степени (56). 50. Графический способ решения квадратного уравнения (59). 51. Биквадратное уравнение (61). 52. Уравнения, левая часть которых разлагается на множители, а правая есть нуль (62). 53. Двучленное уравнение (63). 54. Решение двучленных уравнений третьей степени (63). 55. Различные значения корня (64). 56. Трёхчленное уравнение (65).

III. Системы уравнений второй степени. 66
57. Степень уравнения с несколькими неизвестными (66). 58. Общий вид полного уравнения второй степени с двумя неизвестными (66). 59. Системы двух уравнений, из которых одно первой степени, а другое — второй (66). 60. Искусственные приёмы (67). 61. Система двух уравнений, из которых каждое второй степени (69). 62. Графический способ решения систем уравнений второй степени (70).

Глава 4. НЕРАВЕНСТВА

I. Неравенства первой степени 73
63. Предварительное замечание (73). 64. Основные свойства неравенств (73). 65. Вопросы относительно неравенств (74). 66. Равносильные неравенства (74). 67. Теорема 1 (75). 68. Теорема 2 (75). 69. Теорема 3 (77). 70. Доказательство неравенства (78). 71. Решение неравенства первой степени с одним неизвестным (78). 72. Два неравенства первой степени с одним неизвестным (79).

Глава 5. **ПРОГРЕССИИ**

I. Арифметическая прогрессия 80
73. Задача (80). 74. Определение (80). 75. Формула любого члена арифметической прогрессии (81). 76. Формула суммы членов арифметической прогрессии (82). 77. Замечание (84). 78. Формула суммы квадратов чисел натурального ряда (84).

II. Геометрическая прогрессия 86
79. Задача (86). 80. Определение (87). 81. Сравнение геометрической прогрессии с арифметической прогрессией (87). 82. Формула любого члена геометрической прогрессии (88). 83. Формула суммы членов геометрической прогрессии (89). 84. Пример на геометрическую прогрессию (90).

III. Бесконечные прогрессии 91
85. Некоторые свойства бесконечных прогрессий (91). 86. Понятие о пределе (93). 87. Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (94). 88. Применение геометрической прогрессии к десятичным периодическим дробям (95).

Глава 6. **ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОКАЗАТЕЛЯХ**

I. Целые показатели 98
89. Свойства целых положительных показателей (98). 90. Нулевой показатель (99). 91. Отрицательные целые показатели (99). 92. Действия над степенями с отрицательными показателями (100).

II. Дробные показатели 101
93. В каком смысле употребляются дробные показатели (101). 94. Основное свойство дробного показателя (102). 95. Действия над степенями с дробными показателями (102). 96. Примеры на действия с дробными и отрицательными показателями (103).

III. Понятие об иррациональном показателе 104
97. Смысл степени с иррациональным показателем (104).

IV. Показательная функция 105
98. Определение (105). 99. Свойства показательной функции (106). 100. График показательной функции (108).

Глава 7. **ЛОГАРИФМЫ**

I. Общие свойства логарифмов 111
101. Два действия, обратных возведению в степень (111). 102. Определение (112). 103. Логарифмическая функция и её график (113). 104. Основные свойства логарифмов (114). 105. Практическое значение логарифмических таблиц (116). 106. Логарифмы произведения, частного, степени и корня (117). 107. Логарифмирование алгебраического выражения (119). 108. Замечания (120).

II. Свойства десятичных логарифмов 121
109. Свойства десятичных логарифмов (121). 110. Следствия (124).

III. Устройство и употребление таблиц 125
111. Система логарифмов (125). 112. Преобразование отрицательного логарифма (125). 113. Описание четырёхзначных таблиц и пользование ими (126). 114. Интерполирование (128). 115. Таблицы антилогарифмов (129). 116. Замечание об интерполировании (130). 117. Действия над логарифмами с отрицательными характеристиками (130). 118. Замена вычитаемых логарифмов слагаемыми (131). 119. Примеры вычислений с помощью логарифмов (132). 120. Употребление пятизначных таблиц (135).

IV. Показательные и логарифмические уравнения 135
121. Примеры уравнений (135). 122. Формула сложных процентов (136).

Глава 8. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

I. Исследование уравнений первой степени с одним неизвестным 139
123. Что значит исследовать уравнение (139). 124. Общий вид уравнения первой степени с одним неизвестным (139). 125. Положительное решение (139). 126. Отрицательное решение (140). 127. Нулевое решение (141). 128. Случай, когда уравнение не имеет корня (141). 129. Как надо понимать равенство $\frac{m}{0} = \pm\infty$ (142). 130. Неограниченный рост корня (142). 131. Неопределённое решение (143). 132. Графическое истолкование решения уравнения $ax = b$ (143).

II. Исследование системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 145
133. Общие формулы (145). 134. Исследование (145).

III. Исследование квадратного уравнения 147
135. Исследование формул (147). 136. Задача о двух источниках света (148).

Глава 9. МНИМЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

137. Мнимые числа (151). 138. Комплексные числа (151). 139. Действия над комплексными числами (152). 140. Геометрическое изображение комплексного числа (155). 140а. Тригонометрическая форма комплексного числа (156). 140б. Действия с комплексными числами, выраженными в тригонометрической форме (160).

Глава 10. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

I. Делимость многочлена 169
141. Делимость многочлена, целого относительно x, на разность $x - a$. (169). 142. Делимость двучлена $x^m \mp a^m$ на $x \mp a$ (171). 143. Частные, получаемые при делении $x^m \mp a^m$ на $x \mp a$ (171). 144. Общий вид алгебраического уравнения (172). 145. Некоторые свойства алгебраического уравнения (172).

Глава 11. **НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ**

146. Вводные замечания (175). 147. Признак невозможности решения уравнения в целых числах (175). 148. Признак невозможности решения уравнения в положительных числах (176). 149. Общая формула корней неопределённого уравнения (176). 150. Способ подстановки (178). 151. Частный вид неопределённого уравнения (179). 152. Общее решение неопределённого уравнения (179). 153. Упрощение решения уравнения (182). 154. Положительные решения (185).

Глава 12. **СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА**

I. Соединения 189
155. Определение (189). 156. Размещения (189). 157. Задачи (191). 158. Перестановки (191). 159. Задачи (192). 160. Сочетания (192). 161. Другой вид формулы числа сочетаний (193). 162. Свойство сочетаний (193).

II. Бином Ньютона 194
163. Произведение биномов, отличающихся только вторыми членами (194). 164. Формула бинома Ньютона (196). 165. Свойства формулы бинома Ньютона (197). 166. Применение формулы бинома к многочлену (199).

ДОПОЛНЕНИЯ

I. Непрерывные дроби 201
167. Определение непрерывной дроби (201). 168. Обращение непрерывной дроби в обыкновенную (201). 169. Обращение обыкновенной дроби в непрерывную (202). 170. Подходящие дроби (203). 171. Закон составления подходящих дробей (204). 172. Теорема 1 (206). 173. Теорема 2 (207). 174. Теорема 3 (209). 175. Приближённые значения данной арифметической дроби (210). 176. Извлечение квадратного корня (210). 177. Нахождение решения неопределённого уравнения (211). 178. Вычисление логарифма (213).

II. О пределах 214
179. Определения (214). 180. Некоторые свойства бесконечно малых величия (215). 181. Свойства пределов (216).

III. Исследование квадратного трёхчлена. Неравенства второй степени 221
182. Задача (221). 183. Квадратный трёхчлен, имеющий вещественные различные корни (222). 184. Квадратный трёхчлен, имеющий равные корни (228). 185. Квадратный трёхчлен, имеющий мнимые корни (230). 186. Общий вывод (232). 187. Неравенства второй степени (234).

Ответы к упражнениям 241

Учебное издание

КИСЕЛЁВ Андрей Петрович

АЛГЕБРА

Часть II

Редактор *В.С. Аролович*
Оригинал-макет: *О.Б. Широкова*
Оформление переплёта: *А.Ю. Алёхина*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 13.01.05.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15,5. Уч.-изд. л. 15,1. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 5-9221-0533-7

9 785922 105330