

УДК 519.711

ББК 32.965

К 40

К и м Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 464 с. — ISBN 5-9221-0534-5.

Книга посвящена теории автоматического управления многомерных, нелинейных, оптимальных и адаптивных систем. В ней наряду с традиционными материалами (методы фазовой плоскости, гармонической линеаризации, функции Ляпунова и исследования абсолютной устойчивости, методы теории оптимального и адаптивного управления) рассматриваются метод анализа и синтеза систем большой размерности, основанный на векторной функции Ляпунова, метод синтеза путем линеаризации обратной связью и ряд других нетрадиционных для учебников и учебных пособий по теории автоматического управления вопросов.

Для студентов технических вузов, обучающихся по направлению подготовки «Автоматизация и управление». Может быть рекомендована инженерно-техническим и научным работникам соответствующих специальностей.

Табл. 5. Ил. 65. Библиогр. 69 назв.

Рецензенты:

кафедра «Автоматика и процессы управления» Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (ЛЭТИ; зав. кафедрой — доктор технических наук, профессор *Н.Н. Кузьмин*);

доктор технических наук, профессор *О.С. Колосов* (Московский энергетический институт).

Оглавление

Предисловие	9
Глава 1. Представление в пространстве состояний. Некоторые математические сведения	11
1.1. Уравнение системы в нормальной форме	11
1.2. Преобразование уравнений линейных систем в нормальную форму	13
1.3. Общая формула решения системы линейных дифференциальных уравнений	17
1.4. Управляемость объекта управления	19
1.4.1. Управляемость линейных объектов (19). 1.4.2. Управляемость линейных стационарных объектов (21). 1.4.3. Подпространство управляемости (25). 1.4.4. Каноническая форма управляемости (26).	
1.5. Канонические формы уравнения и модальное управление ...	28
1.6. Стабилизируемость линейных стационарных систем	34
1.7. Равномерная непрерывность и лемма Барбалата	36
1.8. Лемма Калмана–Якубовича	38
1.9. Векторное дифференцирование	39
Задачи	42
Глава 2. Нелинейные системы. Метод фазовой плоскости	45
2.1. Нелинейные статические характеристики. Особенности нелинейных систем	45
2.2. Определение устойчивости	47
2.3. Орбитальная устойчивость. Автоколебания	51
2.4. Изображение процессов на фазовой плоскости	53
2.5. Фазовые портреты и типы особых точек	55
2.5.1. Фазовые портреты и типы особых точек линейных систем (55). 2.5.2. Фазовые портреты нелинейных систем (57).	
2.6. Метод фазовой плоскости анализа и синтеза систем	60
2.6.1. Анализ нелинейных систем (60). 2.6.2. Синтез систем с переменной структурой (62).	
Задачи	66

Глава 3. Метод гармонической линеаризации	68
3.1. Гармоническая линеаризация	68
3.2. Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации при симметричных колебаниях	71
3.2.1. Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейных звеньев с однозначной характеристикой (71). 3.2.2. Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейных звеньев с неоднозначной характеристикой (74).	
3.3. Исследование симметричных автоколебаний	81
3.3.1. Аналитический способ исследования автоколебаний (81). 3.3.2. Графический (частотный) метод исследования автоколебаний (85).	
3.4. Несимметричные колебания	87
3.4.1. Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации (87). 3.4.2. Исследование несимметричных колебаний (95).	
3.5. Вынужденные колебания и вибрационная линеаризация	97
3.5.1. Вынужденные колебания (98). 3.5.2. Вибрационная линеаризация (100).	
Задачи	105
Глава 4. Метод функций Ляпунова	107
4.1. Знакопостоянные и знакоопределенные функции	107
4.1.1. Определение знакопостоянных и знакоопределенных функций (107). 4.1.2. Положительно определенные квадратичные формы (109).	
4.2. Устойчивость неавтономных систем	111
4.2.1. Теоремы об устойчивости (112). 4.2.2. Теоремы о неустойчивости (117).	
4.3. Устойчивость автономных систем	119
4.3.1. Теоремы об устойчивости (119). 4.3.2. Теоремы о неустойчивости (123).	
4.4. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях ...	124
4.5. Исследование нелинейных систем по линейному приближению	127
4.5.1. Уравнение Ляпунова и критерий Ляпунова устойчивости линейных систем (127). 4.5.2. Критерий устойчивости Ляпунова по линейному приближению (130).	
4.6. Оценка времени регулирования	135
4.7. Методы построения функций Ляпунова	137
Задачи	140
Глава 5. Абсолютная устойчивость	142
5.1. Система сравнения. Необходимое условие абсолютной устойчивости	143

5.2. Прямой метод Ляпунова исследования абсолютной устойчивости	144
5.3. Частотные методы исследования абсолютной устойчивости	146
5.3.1. Линейная часть устойчива (146). 5.3.2. Линейная часть неустойчива (148).	
5.4. Доказательство критерия Попова	150
5.5. Квадратичный критерий абсолютной устойчивости	158
5.5.1. Эрмитова матрица и эрмитова форма (159). 5.5.2. Локальная связь. Минимальная устойчивость (161). 5.5.3. Квадратичный критерий (162). 5.5.4. Методы построения квадратичной формы локальной связи (165).	
5.6. Круговой критерий абсолютной устойчивости	169
Задачи	172
Глава 6. Линеаризация обратной связью	174
6.1. Обычная линеаризация и ее недостатки	174
6.2. Линеаризация обратной связью	175
6.3. Некоторые сведения из дифференциальной геометрии	177
6.3.1. Производные и скобки Ли (177). 6.3.2. Диффеоморфизмы и преобразование нелинейных систем (181). 6.3.3. Теорема Фробениуса (182).	
6.4. Линеаризация обратной связью по состоянию	184
6.5. Линеаризация обратной связью по выходу	189
6.5.1. Относительный порядок (192). 6.5.2. Внешняя и внутренняя динамика (193).	
6.6. Нуль-динамика и синтез алгоритмов управления	197
6.6.1. Нуль-динамика (197). 6.6.2. Синтез алгоритма стабилизации (198). 6.6.3. Синтез алгоритма управления в задаче слежения (199).	
Задачи	201
Глава 7. Системы большой размерности. Векторная функция Ляпунова	203
7.1. Дифференциальные неравенства	204
7.2. Экспоненциальная устойчивость. Теорема Красовского	206
7.3. Декомпозиция и децентрализация	212
7.3.1. Декомпозиция (212). 7.3.2. Преобразование Луенберге-ра (215). 7.3.3. Децентрализация по входу (216).	
7.4. Векторные функции Ляпунова	220
7.4.1. Норма матрицы (220). 7.4.2. Устойчивость агрегированной системы (221). 7.4.3. Критерий устойчивости М-матриц (224). 7.4.4. Устойчивость агрегированной системы с нелинейными взаимосвязями (229).	
Задачи	235

Глава 8. Методы синтеза систем управления	238
8.1. Метод обратной задачи динамики	238
8.2. Синтез систем с переменной структурой	241
8.2.1. Условия скольжения и попадания (241). 8.2.2. Уравнение движения в скользящем режиме (244). 8.2.3. Стабилизация линейного стационарного объекта (246).	
8.3. Синтез систем, основанный на методе функций Ляпунова ..	260
8.3.1. Синтез параметров регулятора (261). 8.3.2. Достаточные условия стабилизируемости и синтез законов управления (262). 8.3.3. Синтез стабилизирующего закона управления при линейном относительно состояния уравнении объекта (266).	
8.4. Синтез систем методом линеаризации обратной связью	269
8.5. Синтез стабилизирующих законов управления методом декомпозиции	270
Задачи	275
Глава 9. Методы теории оптимального управления	277
9.1. Общие положения и постановка задачи	277
9.1.1. Общая постановка задачи оптимального управления (278). 9.1.2. Примеры постановки задач оптимального управления (279). 9.1.3. Классификация задач оптимального управления и их преобразования (283).	
9.2. Метод множителей Лагранжа (методы классического вариационного исчисления)	285
9.2.1. Уравнения Эйлера (285). 9.2.2. Уравнения Эйлера–Лагранжа (287). 9.2.3. Правило множителей Лагранжа для задач оптимального управления с фиксированными концами (288). 9.2.4. Правило множителей Лагранжа для задач оптимального управления с подвижными концами (291). 9.2.5. Правило множителей Лагранжа для задач оптимального управления с нефиксированным временем (294).	
9.3. Принцип максимума Понтрягина	297
9.3.1. Задача с закрепленными концами и фиксированным временем (297). 9.3.2. Задача с подвижными концами и нефиксированным временем (299). 9.3.3. Задача максимального быстродействия. Теорема об n интервалах (302). 9.3.4. Вырожденные задачи (305). 9.3.5. Особые задачи (306).	
9.4. Метод динамического программирования	307
9.4.1. Инвариантное погружение и функциональное уравнение (307). 9.4.2. Принцип оптимальности (309). 9.4.3. Функции и уравнения Беллмана (311). 9.4.4. Достаточные условия оптимальности (314).	
9.5. Наблюдаемость и восстанавливаемость	316

9.5.1. Наблюдаемость линейных стационарных систем (316).	
9.5.2. Каноническая форма наблюдаемости. Обнаруживаемость (320).	
9.5.3. Принцип двойственности управляемости и наблюдаемости (321).	
9.5.4. Наблюдатели полного порядка (322).	
9.5.5. Наблюдатели пониженного порядка (323).	
9.6. Синтез оптимальных систем управления	326
9.6.1. Метод фазовой плоскости синтеза оптимальной по быстрейшему воздействию системы (326).	
9.6.2. Синтез оптимальной по интегральному квадратичному критерию нестационарной линейной системы управления (328).	
9.6.3. Синтез оптимальной по интегральному квадратичному критерию стационарной линейной системы управления (332).	
9.6.4. Синтез оптимального линейного регулятора выхода (336).	
9.6.5. Синтез оптимальной системы по критерию обобщенной работы (338).	
9.6.6. Метод прогонки решения задачи синтеза оптимальной линейной системы (341).	
Задачи	346
Глава 10. Анализ систем и синтез оптимальных систем управления при случайных воздействиях	350
10.1. Случайные величины и процессы	350
10.1.1. Случайные величины и их характеристики (350).	
10.1.2. Случайные процессы и их характеристики (353).	
10.1.3. Некоторые типы случайных процессов (355).	
10.2. Анализ линейных систем и синтез оптимальных параметров при случайных воздействиях	358
10.2.1. Преобразование случайных процессов линейными системами (358).	
10.2.2. Анализ линейных систем в переходном режиме (362).	
10.2.3. Анализ линейных систем в установившемся режиме (363).	
10.2.4. Синтез параметров системы по минимуму среднеквадратической ошибки (367).	
10.3. Винеровская задача оптимальной фильтрации	368
10.3.1. Постановка винеровской задачи оптимальной фильтрации (368).	
10.3.2. Уравнение Винера–Хопфа (369).	
10.3.3. Формирующий фильтр (371).	
10.3.4. Фильтр Винера (374).	
10.4. Фильтры Калмана–Бьюси	377
10.4.1. Задача оптимальной фильтрации при белых шумах (377).	
10.4.2. Фильтр Калмана–Бьюси при цветном шуме объекта (385).	
10.4.3. Фильтр Калмана–Бьюси при цветном шуме наблюдения (388).	
10.4.4. Вырожденная задача оптимального оценивания (391).	
10.4.5. Линеаризованный фильтр Калмана–Бьюси (394).	
10.5. Стохастические оптимальные системы	396
10.5.1. Стохастическое оптимальное управление и уравнение Беллмана (397).	
10.5.2. Стохастическая оптимальная линейная система при полной информации о состоянии (398).	

10.5.3. Стохастическая оптимальная линейная система при неполной информации о состоянии. Принцип разделения (400).	
Задачи	408
Глава 11. Адаптивные системы управления	411
11.1. Общие положения. Постановка задачи	411
11.1.1. Назначение адаптивных систем управления (412).	
11.1.2. Структура и типы адаптивных систем управления (413).	
11.1.3. Общая постановка задачи адаптивного управления (415).	
11.1.4. Общая характеристика методов синтеза адаптивных систем управления (416).	
11.2. Алгоритмы адаптивного управления с ЭМ	417
11.2.1. Алгоритм адаптивного управления линейным объектом 1-го порядка (417).	
11.2.2. Адаптивное управление по состоянию линейным объектом (421).	
11.2.3. Адаптивное управление по выходу линейным объектом с единичным относительным порядком (425).	
11.2.4. Адаптивное управление по выходу линейным объектом с относительным порядком, превышающим единицу (431).	
11.2.5. Адаптивное управление по состоянию нелинейным объектом (435).	
11.2.6. Адаптивное управление и робастность (438).	
11.3. Адаптивное управление с идентификатором	440
11.3.1. Идентификация и модель для получения оценки (440).	
11.3.2. Градиентный идентификатор (442).	
11.3.3. МНК-идентификатор (446).	
11.3.4. МНК-идентификатор с экспоненциальной потерей памяти (449).	
11.3.5. Выбор коэффициента потери памяти (452).	
11.3.6. Сравнительная характеристика различных методов получения оценки (453).	
Задачи	455
Список литературы	456
Предметный указатель	460

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе лекций, читавшихся автором в Московском государственном институте радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА) в течение более чем тридцати лет (с 1967 г.) студентам специальности «Автоматика и телемеханика» и других специальностей. Данное пособие является вторым томом книги «Теория автоматического управления» и посвящено теории многомерных, нелинейных, оптимальных и адаптивных систем управления. Оно включает вторую и третью части программного материала курса «Теория автоматического управления», предназначенного студентам, обучающимся по направлению «Автоматизация и управление» в течение более одного семестра. Пособие состоит из одиннадцати глав.

В главе 1 рассматриваются такие общие вопросы теории автоматического управления, как преобразования дифференциальных уравнений в нормальную форму, управляемость, стабилизируемость, канонические формы уравнения. В связи с каноническими уравнениями рассматривается так называемое модальное управление. Кроме того, для удобства приводятся некоторые сведения из математики, которые необходимы для изучения последующих глав.

Глава 2 посвящена общей характеристике нелинейных систем, определению устойчивости, изображению процессов на фазовой плоскости и типам особых точек. Здесь также рассматривается метод фазовой плоскости исследования систем управления и синтеза систем с переменной структурой.

Глава 3 посвящена методу гармонической линеаризации. Рассматриваются задачи исследования автоколебаний и вынужденных колебаний, а также вибрационной линеаризации.

В главе 4 представлен материал, связанный с методом функций Ляпунова. Приводятся теоремы об устойчивости и неустойчивости автономных и неавтономных систем, теоремы об устойчивости нелинейных систем по их линейному приближению, уравнения Ляпунова и критерий Ляпунова об устойчивости линейных систем. Рассматриваются метод оценки времени регулирования с помощью функции Ляпунова и методы построения функций Ляпунова.

Глава 5 посвящена методам исследования абсолютной устойчивости. Здесь наряду с традиционными для учебных пособий материалами (прямой метод Ляпунова, частотный метод Попова, круговой критерий) излагаются вопросы, связанные с квадратичным критерием.

В главе 6 рассматриваются методы линеаризации обратной связью — метод линеаризации обратной связью по состоянию и метод линеаризации обратной связью по выходу. Приводятся математические сведения (производные и скобки Ли), необходимые при рассмотрении этих методов.

В главе 7 изучаются вопросы, связанные с системами большой размерности. Основной материал посвящен методам анализа и синтеза систем управления путем их декомпозиции и агрегирования.

Глава 8 посвящена методам синтеза систем управления. Здесь рассматривается метод обратной задачи динамики, синтез систем с переменной структурой высокого порядка, синтез систем управления, основанный на методе функций Ляпунова, линеаризации обратной связью и методе декомпозиций.

В главе 9 излагается теория детерминированных оптимальных систем управления. В ней приводятся постановка и классификация задач оптимального управления, методы классического вариационного исчисления, принцип максимума и метод динамического программирования. Здесь рассматриваются вопросы наблюдаемости, восстановления и обнаруживаемости, задачи максимального быстродействия, синтез оптимальных систем по интегральному квадратичному критерию и по критерию обобщенной работы.

Глава 10 посвящена анализу и синтезу оптимальных систем управления при случайных возмущениях. В начале главы приводятся основные сведения из теории случайных процессов. Затем рассматривается задача анализа линейных систем управления при случайных возмущениях и синтез параметров регулятора, обеспечивающих минимум среднеквадратической ошибки. Основное внимание в этой главе уделяется оптимальной фильтрации и синтезу стохастических оптимальных систем управления. Здесь рассматриваются фильтр Винера, фильтры Калмана-Бьюси при белых и цветных шумах объекта и наблюдения, принцип разделения и синтез стохастических оптимальных систем управления по среднеквадратическому интегральному критерию оптимальности.

В главе 11 рассматриваются адаптивные системы управления. Здесь изучаются вопросы, связанные с методами синтеза адаптивных систем управления с эталонной моделью и идентификатором.

Автор выражает искреннюю благодарность академику И.М. Макарову за поддержку и помощь, доцентам Н.Д. Дмитриевой и О.А. Тягунову, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд полезных замечаний.

Автор также благодарен заведующему кафедрой «Управление и информатика» МЭИ профессору О.С. Колосову и заведующему кафедрой «Автоматика и процессы управления» ЛЭТИ профессору Н.Н. Кузьмину за рецензирование рукописи.

Глава 1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ. НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В этой книге при рассмотрении большинства задач уравнения системы управления представляются в нормальной форме. Поэтому первые два параграфа посвящены вопросам преобразования дифференциальных уравнений в нормальную форму. Далее рассматриваются такие общие вопросы теории автоматического управления, как управляемость, стабилизируемость, канонические формы уравнения. В связи с каноническими уравнениями рассматривается так называемое модальное управление. Кроме того, для удобства приводятся некоторые сведения из математики, которые необходимы для изучения последующих глав.

1.1. Уравнение системы в нормальной форме

Если уравнения системы разрешены относительно старшей производной, то их всегда можно преобразовать к системе уравнений 1-го порядка. Например, пусть система описывается уравнением

$$\overset{(n)}{x} = F(x, \dot{x}, \dots, \overset{(n-1)}{x}, t).$$

Его можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= F(x_1, x_2, \dots, x_n, t),\end{aligned}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $\dots$, $x_n = \overset{(n-1)}{x}$.

Аналогичное преобразование можно произвести, когда система описывается несколькими уравнениями. Пусть, например, система описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= F_1(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, t), \\ \ddot{y}_2 &= F_2(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= F_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t), \\ \dot{x}_4 &= x_5, \\ \dot{x}_5 &= F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t), \\ y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_4. \end{aligned}$$

В общем случае уравнения управляемой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t), \\ y_1 &= h_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t), \\ y_2 &= h_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t), \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= h_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t). \end{aligned}$$

Уравнения, записанные в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производной, называются *нормальной формой Коши* или просто *нормальной формой*.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}), \quad (1.1a)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (1.16)$$

Уравнение (1.1а) называют *уравнением состояния*, а уравнение (1.1б) — *уравнением выхода* или *уравнением наблюдений*.

$$\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T, \quad \mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r)^T, \quad \mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m)^T,$$

где T обозначает операцию транспонирования. Вектор также будем рассматривать как матрицу-столбец.

многочисленными.

в нормальную форму

(объекта) имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_m u \quad (m \leq n). \quad (1.2)$$

Рассмотрим отдельно три случая: $m = 0$, $m = n$ и $0 < m < n$.

старшей производной, получим

$$y^n = b_0 u - a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_n y.$$

Положив $y = x_1, \dot{y} = x_2, \dots, y^{(n-1)} = x_n$, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n_1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= b_0 u - a_n x_1 - a_{n-2} x_2 - \dots - a_1 x_n, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

В векторной форме эта система принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}^T \mathbf{x},\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

водные. Из (1.36) получаем

$$x_1 = y - k_0 u.$$

Далее из полученной выше системы уравнений находим

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{y} - k_1 u - k_0 \dot{u}, \\ x_3 &= \ddot{y} - k_2 u - k_1 \dot{u} - k_0 \ddot{u}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= y^{(n-1)} - k_{n-1} u - k_{n-2} \dot{u} - \dots - k_0 u^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения для $x_1, x_2, \dots, x_n$ в уравнение (1.4). Тогда получим

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= -a_1 \left(y^{(n-1)} - k_{n-1} u - k_{n-2} \dot{u} - \dots - k_0 u^{(n-1)} \right) - \\ &\quad - a_2 \left(y^{(n-2)} - k_{n-2} u - k_{n-3} \dot{u} - \dots - k_0 u^{(n-2)} \right) - \dots \\ &\quad \dots - a_n (y - k_0 u) + k_n u + k_{n-1} \dot{u} + \dots + k_0 u^{(n)}. \end{aligned}$$

Перенесем слагаемые, содержащие переменную y и ее производные, в левую часть, и в правой части произведем приведение подобных членов. Тогда получим

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y &= \\ &= k_0 u^{(n)} + (k_1 + a_1 k_0) u^{(n-1)} + (k_2 + a_1 k_1 + a_2 k_0) u^{(n-2)} + \dots \\ &\quad \dots + (k_n + a_1 k_{n-1} + a_2 k_{n-2} + \dots + a_n k_0) u. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых производных в правых частях этого уравнения и исходного уравнения (1.2), находим

$$\begin{aligned} b_0 &= k_0, \quad b_1 = k_1 + a_1 k_0, \quad b_2 = k_2 + a_1 k_1 + a_2 k_0, \quad \dots \\ &\dots, \quad b_n = k_n + a_1 k_{n-1} + a_2 k_{n-2} + \dots + a_n k_0. \end{aligned}$$

Очевидно, эти равенства можно записать в виде

$$\begin{aligned} k_0 &= b_0, \quad k_1 = b_1 - a_1 k_0, \quad k_2 = b_2 - (a_1 k_1 + a_2 k_0), \quad \dots \\ &\dots, \quad k_n = b_n - (a_1 k_{n-1} + a_2 k_{n-2} + \dots + a_n k_0), \end{aligned}$$

или

$$k_0 = b_0, \quad k_i = b_i - \sum_{j=1}^i a_j k_{i-j}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Последнее рекуррентное соотношение совпадает с (1.3в).

Способ преобразования, который рассмотрен в этом пункте, можно использовать и тогда, когда m удовлетворяет неравенству $0 < m < n$, так как уравнение (1.2) при $m < n$ является частным случаем, когда первые $m - n$ коэффициентов в правой части равны нулю.

Пример 1.1. Пусть управляемая система описывается уравнением

$$y = \frac{0,1 p + 1}{0,01 p^3 + 0,1 p^2 + p + 1} u.$$

Требуется преобразовать это уравнение в нормальную форму.

Решение. Запишем исходное уравнение в обычной форме:

$$0,01 \ddot{y} + 0,1 \ddot{y} + \dot{y} + y = 0,1 \dot{u} + u.$$

Разделим обе части на 0,01. Тогда получим

$$\ddot{y} + 10 \ddot{y} + 100 \dot{y} + 100 y = 10 \dot{u} + 100 u.$$

В данном случае коэффициенты уравнения равны

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 100, \quad a_3 = 100, \quad b_0 = b_1 = 0, \quad b_2 = 10, \quad b_3 = 100.$$

По формуле (1.3в) найдем коэффициенты k_i ($i = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} k_0 = b_0 = 0, \quad k_1 = b_1 - a_1 k_0 = 0, \quad k_2 = b_2 - (a_1 k_1 + a_2 k_0) = 10, \\ k_3 = b_3 - (a_1 k_2 + a_2 k_1 + a_3 k_0) = 0. \end{aligned}$$

В соответствии с формулами (1.3а) и (1.3б) уравнения в нормальной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + 10 u, \\ \dot{x}_3 &= -10 x_3 - 100 x_2 - 100 x_1, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

В) $0 < m < n$. В этом случае можно предложить еще один способ преобразования, который отличается от способа, рассмотренного в предыдущем пункте [16].

Пусть управляемая система описывается уравнением

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u, \quad 0 < m < n.$$

Запишем это уравнение формально следующим образом:

$$\frac{1}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m} y = \frac{1}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u = x_1.$$

Отсюда имеем

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x_1 = u, \quad y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x_1.$$

Первое уравнение соответствует случаю $m = 0$, и его можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= \frac{1}{a_0} (u - a_n x_1 - a_{n-2} x_2 - \dots - a_1 x_n). \end{aligned}$$

Второе уравнение принимает вид

$$y = b_0 x_{m+1} + b_1 x_m + \dots + b_m x_1.$$

Последнее уравнение и предыдущая система уравнений представляют собой нормальную форму исходного дифференциального уравнения.

1.3. Общая формула решения системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами. При этом будем пользоваться векторной записью. Для того чтобы указать, что, например, $\mathbf{z}$ является s -мерным вектором, в дальнейшем часто будем использовать запись $\mathbf{z} \in R^s$.

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + C\mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^m, \quad \mathbf{f} \in R^l, \quad (1.5)$$

где A — $(n \times n)$ -матрица, B — $(n \times m)$ -матрица, C — $(n \times l)$ -матрица. Элементы всех матриц, вообще говоря, являются переменными, т. е. зависящими от времени. Здесь неизвестной переменной является вектор $\mathbf{x}$, а $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ — известные функции времени.

Наряду с уравнением (1.5) рассмотрим однородное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \quad (1.6)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= (x_1^{(1)} \ x_2^{(1)} \ \dots \ x_n^{(1)})^T, \quad \mathbf{x}^{(2)} = (x_1^{(2)} \ x_2^{(2)} \ \dots \ x_n^{(2)})^T, \quad \dots \\ &\dots, \quad \mathbf{x}^{(n)} = (x_1^{(n)} \ x_2^{(n)} \ \dots \ x_n^{(n)})^T \end{aligned}$$

являются n линейно независимыми решениями однородного уравнения (1.6). Любую такую систему решений называют *фундаментальной системой решений*. Матрица

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n)} \end{bmatrix},$$

столбцами которой являются решения фундаментальной системы, называется *фундаментальной матрицей* уравнений (1.5) и (1.6). Так как столбцы фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ являются решениями однородного уравнения (1.6), то она удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t).$$

Если $\Phi(t)$ является фундаментальной матрицей уравнения (1.5) и обращается в единичную матрицу при $t = t_0$ ($\Phi(t_0) = I_n$, I_n —

единичная матрица порядка n), то его решение, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, можно записать в виде [50]

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) [B(\tau) \mathbf{u}(\tau) + C(\tau) \mathbf{f}(\tau)] d\tau \right).$$

Матрица

$$X(t, t_0) = \Phi(t) \Phi(t_0)^{-1}, \quad (1.7)$$

составленная из фундаментальной матрицы, является фундаментальной, т.е. ее столбцы образуют фундаментальную систему решений. Она обращается в единичную матрицу, когда ее аргументы равны между собой:

$$X(t, t) = X(t_0, t_0) = I.$$

Будем называть эту матрицу *нормированной фундаментальной матрицей*. Она обладает следующими очевидными свойствами:

$$X(t, t') X(t', t_0) = X(t, t_0), \quad X^{-1}(t, t_0) = X(t_0, t), \quad (1.8a)$$

$$\dot{X}(t, t_0) = A X(t, t_0). \quad (1.8b)$$

С помощью нормированной фундаментальной матрицы (1.7) решение неоднородного уравнения (1.5), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, можно представить в виде

$$\mathbf{x}(t) = X(t, t_0) \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau) [B(\tau) \mathbf{u}(\tau) + C(\tau) \mathbf{f}(\tau)] d\tau. \quad (1.9)$$

Эту формулу называют *формулой Коши*.

Если матрица A является постоянной, то фундаментальная матрица $X(t, \tau)$ зависит только от разницы $t - \tau$. Кроме того, если в этом случае воспользоваться матричным экспоненциалом, то решение можно записать, как в скалярном случае.

Матричным экспоненциалом или *матричной экспонентой* от постоянной квадратной матрицы A называется матрица той же размерности, что и матрица A , которая обозначается через e^A и определяется соотношением

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

Матричный экспоненциал от At определяется аналогично и имеет следующий вид:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} (At)^2 + \frac{1}{3!} (At)^3 + \dots$$

Исходя из этого определения не трудно убедиться, что справедливы следующие соотношения:

$$\frac{de^{At}}{dt} = A e^{At}, \quad \frac{d^2 e^{At}}{dt^2} = A^2 e^{At}, \quad \dots,$$

т.е. правило дифференцирования матричного экспоненциала такое же, как и правило дифференцирования обычной экспоненты $e^{\alpha t}$.

Для матричного экспоненциала справедливы следующие операции:

$$e^A e^{-A} = I, \quad e^{-A} = (e^A)^{-1}, \quad e^{At} e^{As} = e^{A(t+s)}.$$

Если A и B являются матрицами одинаковых размерностей, то в общем случае [9]

$$e^A e^B \neq e^B e^A, \quad e^A e^B \neq e^{A+B}.$$

Только в том случае, когда $AB = BA$, справедливы равенства

$$e^A e^B = e^B e^A, \quad e^A e^B = e^{A+B}.$$

Когда в уравнениях (1.5) и (1.6) матрица A является постоянной, их фундаментальной матрицей является матричная экспонента e^{At} , и решение неоднородного уравнения (1.5) при начальном условии $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ принимает вид

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \left(\mathbf{x}^0 + \int_0^t e^{-A\tau} [B(\tau) \mathbf{u}(\tau) + C(\tau) \mathbf{f}(\tau)] d\tau \right). \quad (1.10)$$

1.4. Управляемость объекта управления

Одним из фундаментальных понятий в теории автоматического управления является управляемость. Для определения этого понятия рассмотрим управляемую систему (объект), которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r, \quad (1.11)$$

где $\mathbf{x}$ — вектор состояния, $\mathbf{u}$ — управление (вектор управления).

Управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_r(t))^T$ называется *кусочно непрерывным*, если все его компоненты $u_i(t)$ являются кусочно непрерывными. Кусочно непрерывные управления называют *допустимыми*.

Определение 1.1. Управляемая система (объект) (1.11) называется *управляемой* или *вполне управляемой*, если, каковы бы ни были точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^f$ в фазовом пространстве R^n , существует допустимое управление, определенное на конечном интервале $[t_0, t_f]$ и переводящее систему (1.11) из начальной точки $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ в конечную точку $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$.

Другими словами, если объект вполне управляем, то он может быть переведен допустимым управлением из произвольного начального состояния в любое другое состояние за конечное время.

1.4.1. Управляемость линейных объектов. Рассмотрим линейный объект, который описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r. \quad (1.12)$$

В случае линейного объекта справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.1. а) *Линейный объект (1.12) вполне управляем, если, каково бы ни было начальное состояние $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, существует допустимое управление, определенное на конечном интервале $[t_0, t_f]$ и переводящее объект (1.12) в конечное состояние $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$, т. е. в начало координат.*

б) *Линейный объект (1.12) вполне управляем, если, каково бы ни было конечное состояние $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$, существует допустимое управление, определенное на конечном интервале $[t_0, t_f]$ и переводящее объект (1.12) из начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$, т. е. из начала координат, в конечное состояние $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$.*

Утверждение остается справедливым, если в первой части в качестве конечной точки вместо $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ выбрать любую другую фиксированную точку, а во второй части вместо начальной точки $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ выбрать любую другую фиксированную точку.

Доказательство. а) Формула Коши (1.9) в случае уравнения (1.12) принимает вид

$$\mathbf{x}(t) = X(t, t_0) \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Управление, переводящее объект (1.12) из начального состояния $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ в конечное состояние $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$, должно удовлетворять уравнению

$$\mathbf{x}^f = X(t_f, t_0) \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t_f} X(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (1.13a)$$

Поэтому достаточно показать, что последнее уравнение имеет решение. Очевидно, решение этого уравнения совпадает с решением уравнения

$$\mathbf{0} = X(t_f, t_0) \tilde{\mathbf{x}}^0 + \int_{t_0}^{t_f} X(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (1.13b)$$

если

$$X(t_f, t_0) \tilde{\mathbf{x}}^0 = X(t_f, t_0) \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^f,$$

или

$$\tilde{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{x}^0 - X^{-1}(t_f, t_0) \mathbf{x}^f = \mathbf{x}^0 - X(t_0, t_f) \mathbf{x}^f.$$

Но по условию решение уравнения (1.13b) существует при любом начальном условии, что доказывает первую часть утверждения 1.1.

б) При нулевом начальном условии из формулы Коши получаем

$$\tilde{\mathbf{x}}^f = \int_{t_0}^{t_f} X(t_f, \tau) B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Это уравнение по условию имеет решение при любом конечном состоянии. Решение уравнения (1.13а) совпадает с решением последнего уравнения, если

$$\tilde{\mathbf{x}}^f = \mathbf{x}^f - X(t_f, t_0) \mathbf{x}^0,$$

что доказывает вторую часть утверждения 1.1.

1.4.2. Управляемость линейных стационарных объектов.

Пусть уравнение (1.12)

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r,$$

описывает стационарную систему, т.е. матрицы A и B являются постоянными. Введем в рассмотрение матрицу

$$Y = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B], \quad (1.14)$$

столбцы которой представляют собой столбцы матрицы B и произведений матриц $AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$. Эту матрицу называют *матрицей управляемости*.

Критерий управляемости линейных стационарных систем. *Линейный стационарный объект вполне управляем тогда и только тогда, когда матрица управляемости имеет максимальный ранг, т.е. когда ее ранг равен n .*

Напомним, что ранг матрицы равен числу независимых строк, числу независимых столбцов и порядку отличного от нуля минора максимальной размерности.

Определение 1.2. Пару (A, B) называют *управляемой* или *вполне управляемой*, если ранг матрицы управляемости (1.14) равен n .

Ниже при доказательстве критерия управляемости используется теорема Кэли–Гамильтона, которая формулируется следующим образом:

любая $(n \times n)$ -матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\det[\lambda I - A] = \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} - c_2 \lambda^{n-2} - \dots - c_n = 0,$$

т.е. справедливо равенство

$$A^n - c_1 A^{n-1} - c_2 A^{n-2} - \dots - c_n I = 0. \quad (1.15)$$

Доказательство критерия управляемости. В силу утверждения 1.1 достаточно ограничиться случаем, когда $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$. Решение уравнения (1.12) при постоянных матрицах A и B и начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ имеет вид (см. (1.10))

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Отсюда, положив $t = t_f$ и $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$, получим

$$\mathbf{x}^f = \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (1.16)$$

Необходимость. Из определения матричной экспоненты имеем

$$e^{A(t_f - \tau)} = I + A(t_f - \tau) + \frac{1}{2!} A^2(t_f - \tau)^2 + \frac{1}{3!} A^3(t_f - \tau)^3 + \dots$$

Подставив это выражение в равенство (1.16), получим

$$\mathbf{x}^f = B\alpha_0 + AB\alpha_1 + A^2B\alpha_2 + \dots, \quad (1.17)$$

где

$$\alpha_i = \int_0^{t_f} \frac{(t_f - \tau)^i}{i!} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Из равенства (1.15) получаем

$$A^n = c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \dots + c_n I.$$

Умножив обе части этого равенства справа на матрицу B , получим

$$A^n B = c_1 A^{n-1} B + c_2 A^{n-2} B + \dots + c_n B.$$

Умножив обе части последнего равенства слева на A и подставив справа вместо $A^n B$ его выражение из последнего равенства, найдем

$$A^{n+1} B = c_1^{(1)} A^{n-1} B + c_2^{(1)} A^{n-2} B + \dots + c_n^{(1)} B.$$

Далее, продолжая аналогичные операции над получаемыми соотношениями, будем иметь

$$A^{n+k} B = c_1^{(k)} A^{n-1} B + c_2^{(k)} A^{n-2} B + \dots + c_n^{(k)} B, \quad k = 1, 2, \dots$$

Используя эти соотношения, можно исключить из (1.17) все $A^l B$ с $l \geq n$. Следовательно, конечное значение $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$ может быть представлено в виде линейной комбинации столбцов матрицы управляемости, и точка, определяемая этим значением, при любом конечно непрерывном управлении будет принадлежать пространству, порождаемому столбцами матрицы управляемости. Поэтому если ранг матрицы управляемости меньше n , то будет существовать подпространство, в которое нельзя будет перевести объект.

Достаточность. Объект будет вполне управляем, если уравнение (1.16) относительно неизвестного управления имеет решение при любом $\mathbf{x}^f$. Решение будем искать в виде [15]

$$\mathbf{u} = (e^{A(t_f - \tau)} B)^T \mathbf{z},$$

где $\mathbf{z}$ — вектор из R^n . Подставив это выражение для управления в уравнение (1.16), получим

$$\mathbf{x}^f = D \mathbf{z},$$

где

$$D = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} B (e^{A(t_f-\tau)} B)^T d\tau.$$

Таким образом, вопрос о существовании решения интегрального уравнения свелся к вопросу о существовании решения алгебраического уравнения. Полученное алгебраическое уравнение имеет решение при любом $\mathbf{x}^f$, если $\det D \neq 0$. Следовательно, достаточно показать, что выполняется последнее соотношение. Допустим противное: $\det D = 0$. Тогда соответствующее однородное уравнение имеет ненулевое решение, т.е. существует вектор $\tilde{\mathbf{z}} \neq 0$ такой, что $D \tilde{\mathbf{z}} = 0$. Умножив это равенство слева на $\tilde{\mathbf{z}}^T$ и подставив выражение для D , получим

$$\tilde{\mathbf{z}}^T D \tilde{\mathbf{z}} = \int_0^{t_f} \tilde{\mathbf{z}}^T e^{A(t_f-\tau)} B (e^{A(t_f-\tau)} B)^T \tilde{\mathbf{z}} d\tau = \int_0^{t_f} |\tilde{\mathbf{z}}^T e^{A(t_f-\tau)} B|^2 d\tau = 0.$$

В силу непрерывности подынтегрального выражения последнее равенство возможно, если на всем интервале $0 \leq \tau \leq t_f$ выполняется равенство

$$\tilde{\mathbf{z}}^T e^{A(t_f-\tau)} B = 0.$$

Дифференцируя это тождество по τ , получим соотношения

$$\tilde{\mathbf{z}}^T A^k e^{A(t_f-\tau)} B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

откуда при $\tau = t_f$ находим

$$\tilde{\mathbf{z}}^T A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Заметим, что $A^0 = I$. Из последних равенств следует, что ненулевой вектор $\tilde{\mathbf{z}}$ из R^n ортогонален всем векторам-столбцам матрицы управляемости, что невозможно, так как ранг матрицы управляемости равен n . Следовательно, допущение, что $\det D = 0$, неверно. Критерий управляемости полностью доказан.

Пример 1.2. Определить, при каких значениях параметра α объект, заданный уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + \alpha u_2, \end{aligned}$$

вполне управляем.

Решение. Матрицы A и B в данном случае имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Найдем произведения матриц AB и A^2B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix},$$

$$A^2B = A(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Для матрицы управляемости имеем

$$Y = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & -\alpha & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Минор, составленный из первого, второго и четвертого столбцов, имеет вид

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} = 2\alpha.$$

Он отличен от нуля при $\alpha \neq 0$. При $\alpha = 0$ все элементы последней строки матрицы управляемости обращаются в нуль, и ранг матрицы управляемости не может быть больше 2. Поэтому рассматриваемый объект вполне управляем при $\alpha \neq 0$.

Утверждение 1.2. *Одномерная управляемая система, описываемая уравнением*

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u, \quad 0 < m < n,$$

где не все коэффициенты b_i ($i = 0, 1, \dots, m$) равны нулю, вполне управляема.

Доказательство. Как было показано в параграфе 1.2, если преобразовать последнее уравнение в нормальную форму, то уравнение состояния примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

Вычислим произведения матриц, необходимые для получения матрицы управляемости:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ -a_1 \end{bmatrix}, \quad A^2B = A(AB) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ -a_1 \\ -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix}.$$

Продолжая вычисления, нетрудно заметить, что в произведении $A^k B$ ($k < n - 1$) в $(k + 1)$ -й строке снизу стоит единица, выше — одни нули и в произведении $A^{n-1}B$ в первой строке (сверху) стоит единица. Поэтому в матрице управляемости на неглавной диагонали будут стоять одни единицы, левее этой диагонали — одни нули. Следовательно, детерминант матрицы управляемости будет отличен от нуля, и управляемая система вполне управляема.

Инвариантность свойства управляемости к линейным преобразованиям. Свойство управляемости при неособом линейном преобразований не меняется. Действительно, рассмотрим неособое линейное преобразование

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z}, \quad \det T \neq 0.$$

При таком преобразовании уравнение (1.12) принимает вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{A}\mathbf{z} + \tilde{B}\mathbf{u},$$

где

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B.$$

Убедимся, что пара $(\tilde{A}, \tilde{B})$ вполне управляема. Для матрицы управляемости этой пары имеем

$$\tilde{Y} = [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}].$$

Как нетрудно убедиться,

$$\tilde{A}^k = T^{-1}A^kT, \quad \tilde{A}^k\tilde{B} = T^{-1}A^kB, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Подставив эти выражения в последнее соотношение, получим

$$\tilde{Y} = T^{-1}[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = T^{-1}Y.$$

Так как матрица T^{-1} неособая и ее ранг равен n , то ранг матрицы управляемости $\tilde{Y}$ «преобразованного объекта» равен рангу матрицы управляемости Y исходного объекта.

1.4.3. Подпространство управляемости.

Определение 1.3. Область, состоящую из всех точек пространства состояний, в которые может быть переведена управляемая система допустимым управлением из начала координат за конечное время, называется ее *областью управляемости*.

Если управляемая система вполне управляема, то ее область управляемости совпадает со всем пространством. Если ранг матрицы управляемости управляемой системы не равен максимальному значению (т.е. размерности пространства состояний), но больше нуля, то говорят, что управляемая система *не вполне управляема* или *частично управляема*. Если управляемая система частично управляема, то, как следует из доказательства критерия управляемости, область управляемости совпадает с подпространством, порожаемым совокупностью независимых столбцов матрицы управляемости. Это подпространство называют *подпространством управляемости*.

Пусть, например, управляемая система описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 &= -x_3.\end{aligned}$$

Эти уравнения соответствуют уравнениям, рассмотренным в примере 1.2, при $\alpha = 0$. Поэтому матрица управляемости имеет вид

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Эта матрица имеет два линейно независимых столбца: $\mathbf{x}^{(1)} = (0 \ 1 \ 0)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (1 \ 0 \ 0)^T$. Поэтому векторы подпространства управляемости имеют вид $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ 0)^T$.

1.4.4. Каноническая форма управляемости. Пусть ранг матрицы управляемости линейной стационарной управляемой системы (1.12) равен l ($l \leq n$). Рассмотрим неособое преобразование $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$, где матрица преобразования имеет вид $T = [T_1 \ T_2]$ и строится следующим образом: T_1 является $(n \times l)$ -матрицей, и ее столбцами являются l независимых столбцов матрицы управляемости; T_2 является $(n \times (n - l))$ -матрицей, и ее столбцы выбираются так, чтобы матрица T была неособой. При таком преобразовании уравнение (1.12) принимает вид так называемой *канонической формы управляемости*

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}^{(1)} \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^{(1)} \\ \mathbf{z}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

или

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}^{(1)} &= \tilde{A}_{11}\mathbf{z}^{(1)} + \tilde{A}_{12}\mathbf{z}^{(2)} + \tilde{B}_1\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} &= \tilde{A}_{22}\mathbf{z}^{(2)},\end{aligned}\tag{1.18}$$

где $\mathbf{z}^{(1)}$ — l -вектор, $\mathbf{z}^{(2)}$ — $(n - l)$ -вектор, $\tilde{A}_{11}$ — $(l \times l)$ -матрица, $\tilde{A}_{12}$ — $(l \times (n - l))$ -матрица, $\tilde{A}_{22}$ — $((n - l) \times (n - l))$ -матрица, $\tilde{B}_1$ — $(l \times r)$ -матрица.

Из структуры уравнений (1.18) видно, что вектор $\mathbf{z}^{(2)}$ неуправляем, так как на его изменение управление ни непосредственно, ни через другие фазовые координаты, зависящие от управления, не оказывает никакого влияния. Вектор $\mathbf{z}^{(1)}$ вполне управляем, т. е. его можно изменять нужным образом путем выбора соответствующего управления.

Пример 1.3. Преобразовать уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1, \\ \dot{x}_4 &= -x_2 - x_4\end{aligned}$$

в каноническую форму управляемости.

Решение. Матрицы A , B и их произведения AB , A^2B , A^3B имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^3B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Составив из этих матриц матрицу управляемости, получим

$$U = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости имеет два независимых столбца, и ее ранг равен 2. Матрицы T_1 , T_2 и T выберем следующим образом:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = [T_1 \ T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразование $z = Tx$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Уравнения в новых переменных принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u = z_3 + z_2 + u, \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_3 = x_1 = z_1, \\ \dot{z}_3 &= \dot{x}_2 = x_2 = z_3, \\ \dot{z}_4 &= \dot{x}_4 = -x_2 - x_4 = -z_3 - z_4,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 + z_3 + u, \\ \dot{z}_2 &= z_1, \\ \dot{z}_3 &= z_3, \\ \dot{z}_4 &= -z_3 - z_4.\end{aligned}$$

Используя векторные обозначения $\mathbf{z}^{(1)} = (z_1 \ z_2)^T$ и $\mathbf{z}^{(2)} = (z_3 \ z_4)^T$, эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(1)} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(2)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(2)}.\end{aligned}$$

Из канонической формы управляемости следует, что на фазовую координату z_1 управление воздействует непосредственно (оно входит в уравнение для z_1), на фазовую координату z_2 управление воздействует через z_1 (z_1 входит в уравнение для z_2), а на фазовые координаты z_3 и z_4 управление никак не воздействует, т. е. эти координаты являются неуправляемыми.

1.5. Канонические формы уравнения и модальное управление

Ввиду того что существует множество эквивалентных форм представлений уравнений состояний, можно выбрать из них наиболее удобное для использования в данном конкретном случае. Такие формы уравнений называют *каноническими* [4]. Поскольку возможно много различных приложений, используется несколько канонических форм. Здесь рассмотрим преобразование уравнений состояний в каноническую форму, называемую управляемой формой Луенбергера.

Уравнение состояния вида

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{A}\mathbf{z} + \tilde{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.19)$$

называется *управляемой формой Луенбергера* [4]. Характеристическое уравнение матрицы $\tilde{A}$ этого уравнения имеет вид

$$\det(\lambda I - \tilde{A}) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (1.20)$$

Коэффициентами характеристического уравнения являются элементы последней строки матрицы $\tilde{A}$ уравнения (1.19) с противоположным знаком.

Теорема 1.1. *Для того чтобы уравнение состояния*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R, \quad (1.21)$$

неособым преобразованием можно было преобразовать в управляемую форму Луенбергера (1.19), необходимо и достаточно, чтобы пара (A, B) была вполне управляема.

Доказательство. Необходимость следует из того, что управляемая система, описываемая уравнением (1.19), является вполне управляемой (см. доказательство утверждения 1.2) и свойство управляемости не меняется при неособом преобразовании.

Докажем достаточность, т.е. покажем, что существует неособое преобразование $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$, при котором исходное уравнение преобразуется к виду (1.19), где

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B.$$

Так как пара (A, B) вполне управляема, то матрица управляемости

$$Y = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

является неособой. Поэтому линейное алгебраическое уравнение

$$\mathbf{h}^T Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{h}$ является неизвестным n -вектором, имеет решение. Подставив в последнее уравнение выражение для матрицы управляемости, получим

$$\mathbf{h}^T \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

или

$$\mathbf{h}^T B = 0, \quad \mathbf{h}^T AB = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{h}^T A^{n-1}B = 1. \quad (1.22)$$

Рассмотрим матрицу

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \\ \mathbf{h}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{h}^T A^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица является неособой в силу того, что матрица

Пример 1.4. Преобразовать уравнение состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

в управляемую форму Луенбергера.

Решение. Произведения AB , A^2B и матрица управляемости имеют вид

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = (B \quad AB \quad A^2B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как $\det Y = 1$, то пара (A, B) вполне управляема. Следовательно, данное уравнение может быть преобразовано в управляемую форму Луенбергера.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3 = \\ = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Поэтому элементами последней строки матрицы $\tilde{A}$ будут

$$-a_1 = 3, \quad -a_2 = -3, \quad -a_3 = 1,$$

и преобразованное уравнение имеет вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Модальное управление. Теперь покажем, что если линейный стационарный объект вполне управляем, то существует такой линейный закон управления, при котором корни характеристического уравнения замкнутой системы равны наперед заданным числам. Способ управления, основанный на размещении корней характеристического уравнения определенным образом, называют *модальным управлением* [55].

Теорема 1.2. Пусть заданы линейный стационарный объект

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R,$$

l ($l \leq n/2$) пар произвольных комплексно сопряженных чисел $\lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$) и $n - 2l$ произвольных действительных чисел $\lambda_s = \alpha_s$ ($s = 2l + 1, \dots, n$).

Если данный объект вполне управляем, то существует закон управления

$$u = \mathbf{k}^T \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n,$$

при котором корни характеристического уравнения замкнутой системы равны заданным числам.

Доказательство. Рассмотрим преобразование $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$, которое преобразует уравнение объекта в управляемую форму Луненберга (1.19). Характеристическое уравнение объекта имеет вид (см. (1.20))

$$\det(\lambda I - \tilde{A}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Чтобы корни характеристического уравнения замкнутой системы были равны заданным числам, оно должно иметь вид

$$\prod_{i=1}^l (\lambda - \alpha_i - j\beta_i)(\lambda - \alpha_i + j\beta_i) \prod_{s=2l+1}^n (\lambda - \alpha_s) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет иметь такой вид, если принять закон управления

$$u = (a_n - c_n)z_1 + (a_{n-1} - c_{n-1})z_2 + \dots + (a_1 - c_1)z_n = (\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{c}})^T \mathbf{z}, \quad (1.24)$$

где

$$\tilde{\mathbf{a}} = (a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1)^T, \quad \tilde{\mathbf{c}} = (c_n \ c_{n-1} \ \dots \ c_1)^T.$$

Действительно, подставив этот закон управления в уравнение (1.19), получим

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{A}\mathbf{z} + \tilde{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -c_n & -c_{n-1} & -c_{n-2} & \dots & -c_1 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

Искомый закон управления найдем, если подставить выражение $\mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{x}$ в формулу (1.24):

$$u = (\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{c}})^T \mathbf{z} = (\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{c}})^T T^{-1} \mathbf{x},$$

или

$$u = \mathbf{k}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{k}^T = (\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{c}})^T T^{-1}.$$

Теорема, аналогичная теореме 1.2, справедлива и в случае векторного управления [4, 55]. Сформулируем ее без доказательства.

Теорема 1.2а. Пусть заданы линейный стационарный объект

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r,$$

l ($l \leq n/2$) пар произвольных комплексно сопряженных чисел $\lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$) и $n - 2l$ произвольных действительных чисел $\lambda_s = \alpha_s$ ($s = 2l + 1, \dots, n$).

Если данный объект вполне управляем, то существует закон управления $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$ (K — $(r \times n)$ -матрица), при котором корни характеристического уравнения замкнутой системы равны заданным числам.

Утверждение 1.3. Пусть характеристическое уравнение одномерной управляемой системы (1.21) имеет вид

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Для того чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы имело вид

$$\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0,$$

нужно выбрать закон управления вида

$$u = (\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{c}})^T \mathbf{z} = (\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{c}})^T T^{-1} \mathbf{x},$$

где

$$\tilde{\mathbf{a}} = (a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1)^T, \quad \tilde{\mathbf{c}} = (c_n \ c_{n-1} \ \dots \ c_1)^T,$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \\ \mathbf{h}^T A \\ \dots \\ \mathbf{h}^T A^{n-1} \end{bmatrix},$$

а векторная переменная $\mathbf{h}^T$ в последней матрице определяется из уравнений

$$\mathbf{h}^T B = 0, \quad \mathbf{h}^T AB = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{h}^T A^{n-1} B = 1.$$

Это утверждение непосредственно вытекает из теорем 1.1 и 1.2.

Пример 1.5. Управляемая система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Определить закон управления, при котором корни характеристического уравнения замкнутой системы равны $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3j$, $\lambda_3 = -1$.

Решение. Согласно утверждению 1.3, чтобы найти требуемый закон управления, нужно знать коэффициенты характеристических уравнений управляемой и замкнутой систем, а также обратную матрицу преобразования уравнений управляемой системы в управляемую форму Луенбергера. Характеристическое уравнение управляемой системы имеет вид (см. пример 1.4)

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0,$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы — вид

$$(\lambda + 1 - 3j)(\lambda + 1 + 3j)(\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda + 10 = 0.$$

В принятых выше обозначениях

$$a_1 = -3, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -1, \quad c_1 = 3, \quad c_2 = 12, \quad c_3 = 10$$

и соответственно

$$\tilde{\mathbf{a}} = (a_3 \ a_2 \ a_1)^T = (-1 \ 3 \ -3)^T, \quad \tilde{\mathbf{c}} = (c_3 \ c_2 \ c_1)^T = (10 \ 12 \ 3)^T.$$

Чтобы определить матрицу T^{-1} , нужно сначала составить и решить систему уравнений

$$\mathbf{h}^T B = 0, \quad \mathbf{h}^T A B = 0, \quad \mathbf{h}^T A^2 B = 1.$$

Входящие в эти уравнения матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому указанные выше уравнения принимают вид

$$h_2 = 0, \quad h_1 + h_2 = 0, \quad 2h_1 + h_2 + h_3 = 1.$$

Отсюда получаем $\mathbf{h}^T = (0 \ 0 \ 1)$. Произведения $\mathbf{h}^T A$ и $\mathbf{h}^T A^2$ имеют вид

$$\mathbf{h}^T A = (1 \ 0 \ 1), \quad \mathbf{h}^T A^2 = [2 \ 1 \ 1].$$

Поэтому для матрицы T^{-1} получаем соотношение

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \\ \mathbf{h}^T A \\ \mathbf{h}^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

а искомый закон управления принимает вид

$$\begin{aligned} u = (\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{c}})^T T^{-1} \mathbf{x} &= (-11 \quad -9 \quad -6) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \\ &= -21x_1 - 6x_2 - 26x_3. \end{aligned}$$

1.6. Стабилизируемость линейных стационарных систем

Одним из важных понятий при рассмотрении задач управления является стабилизируемость. Управляемая система (объект) называется *стабилизируемой*, если существует закон управления, при котором замкнутая система асимптотически устойчива. Здесь мы рассмотрим стабилизируемость только линейных стационарных систем.

Определение 1.4. Линейный стационарный объект

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r,$$

называется *стабилизуемым*, если существует закон управления $\mathbf{u} = K\mathbf{x}$, при котором замкнутая система $\dot{\mathbf{x}} = (A + BK)\mathbf{x}$ асимптотически устойчива.

Если объект вполне управляем, то он стабилизируем, что следует из теоремы 1.2а. Однако обратное неверно: объект может быть стабилизируем, но не вполне управляем. Поэтому возникает проблема стабилизируемости, т.е. проблема определения критерия стабили-

зируемости. Но прежде чем переходить к этой проблеме, рассмотрим инвариантность корней характеристического уравнения системы к линейным преобразованиям.

Инвариантность корней характеристического уравнения систем к линейным преобразованиям. *Корни характеристического уравнения линейных стационарных систем не изменяются при линейном неособом преобразовании.*

Рассмотрим линейную стационарную систему, которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r.$$

При неособом преобразовании $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ данное уравнение преобразуется к виду

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{A}\mathbf{z} + \tilde{B}\mathbf{u},$$

где $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$.

Характеристическое уравнение исходного уравнения имеет вид

$$\det(I\lambda - A) = |I\lambda - A| = 0,$$

а характеристическое уравнение преобразованного уравнения — вид

$$\det(I\lambda - \tilde{A}) = |I\lambda - \tilde{A}| = 0.$$

Покажем, что эти уравнения имеют одни и те же корни.

Умножив матрицу $I\lambda - A$ слева на T , а справа на T^{-1} , получим

$$T(I\lambda - A)T^{-1} = I\lambda - \tilde{A}.$$

Отсюда, учитывая, что определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей их сомножителей [21] для характеристического уравнения преобразованной системы находим

$$|T| |I\lambda - A| |T^{-1}| = |I\lambda - \tilde{A}| = 0.$$

Так как матрица T является неособой, то $|T^{-1}| \neq 0$ и $|T| \neq 0$. Поэтому из последнего соотношения имеем

$$|I\lambda - A| = |I\lambda - \tilde{A}| = 0,$$

что доказывает наше утверждение.

Вернемся к проблеме стабилизируемости. Рассмотрим неособое преобразование $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$, преобразующее уравнение управляемой системы в каноническую форму управляемости (1.18):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^{(1)} &= \tilde{A}_{11}\mathbf{z}^{(1)} + \tilde{A}_{12}\mathbf{z}^{(2)} + \tilde{B}_1\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} &= \tilde{A}_{22}\mathbf{z}^{(2)}. \end{aligned}$$

Стабилизируемость системы, описываемой этими уравнениями, означает, что существует закон управления $\mathbf{u} = K\mathbf{z}$, при котором векторные переменные $\mathbf{z}^{(1)}$ и $\mathbf{z}^{(2)}$ замкнутой системы стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Так как в первом из приведенных уравнений пара $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ вполне управляема, то существует закон управления $\mathbf{u} = \tilde{K}\mathbf{z}^{(1)}$, при котором замкнутая подсистема, описываемая этим

уравнением, устойчива, и векторная переменная $\mathbf{z}^{(1)}$ будет сходиться к нулю, если векторная переменная $\mathbf{z}^{(2)}$, которая в этом уравнении выступает как внешнее воздействие, будет стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Но, как следует из второго уравнения, последнее будет иметь место в том и только том случае, когда во втором уравнении матрица $\tilde{A}_{22}$ будет устойчива.

Критерий стабилизируемости. *Для того чтобы линейная стационарная управляемая система, которая не вполне управляема, была стабилизируема, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\tilde{A}_{22}$ в канонической форме управляемости была устойчива.*

Пример 1.6. Исследовать стабилизируемость управляемой системы, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1, \\ \dot{x}_4 &= -x_2 - x_4.\end{aligned}$$

Решение. Эта система была рассмотрена в примере 1.3, и, как там было показано, эти уравнения в канонической форме управляемости принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(1)} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(2)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z}^{(2)}.\end{aligned}$$

Для того чтобы рассматриваемая система была стабилизируема, согласно критерию стабилизируемости матрица в правой части второго уравнения должна быть устойчивой. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_{1,2} = \pm 1$, т. е. указанная матрица неустойчива, и, следовательно, система не стабилизируема.

1.7. Равномерная непрерывность и лемма Барбалата

При рассмотрении нелинейных и особенно адаптивных систем широко используется лемма Барбалата. Но прежде чем переходить к рассмотрению этой леммы, вспомним, что такое непрерывная и равномерно непрерывная функции.

Функция $f(t)$ называется *непрерывной* на интервале $[t_0, \infty)$, если при любом положительном ε и любом $t' \in [t_0, \infty]$ существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, t')$, что $|f(t) - f(t')| < \varepsilon$, как только $|t - t'| < \delta$.

Функция $f(t)$ называется *равномерно непрерывной* на интервале $[t_0, \infty)$, если при любом положительном ε и любом $t' \in [t_0, \infty]$ существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $|f(t) - f(t')| < \varepsilon$, как только $|t - t'| < \delta$.

Различие непрерывной функции от равномерно непрерывной функции состоит в том, что положительное число δ , которое можно подобрать для заданного ε , в случае непрерывной функции зависит не только от ε , но и от t' . Равномерная непрерывность предполагает, что по заданному ε можно подобрать такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что неравенство $|f(t) - f(t')| < \varepsilon$ будет выполняться, как только $|t - t'| < \delta$ при любом $t' \in [t_0, \infty]$.

Лемма Барбалата (Barbalat; см. [69]). *Если дифференцируемая функция $f(t)$ имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$ и ее производная $\dot{f}(t)$ равномерно непрерывна, то $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Докажем от противного. Допустим, что производная $\dot{f}(t)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Но тогда существует положительное число ε_0 такое, что для любого положительного числа T , как бы велико оно ни было, существует значение $t_i > T$, при котором справедливо неравенство $|\dot{f}(t_i)| \geq \varepsilon_0$. Следовательно, можно построить последовательность t_i ($i = 1, 2, \dots$), стремящуюся к бесконечности при $i \rightarrow \infty$ и такую, что выполняется неравенство

$$|\dot{f}(t_i)| \geq \varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

Так как производная $\dot{f}(t)$ равномерно непрерывна, то существует такое положительное число η , что для любого $t' \in [t_0, \infty)$ выполняется неравенство

$$|\dot{f}(t') - \dot{f}(t)| < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

как только $|t' - t| < \eta$. В частности, если принять $t' = t_i$, то из последнего неравенства получаем

$$|\dot{f}(t_i) - \dot{f}(t)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{при} \quad |t_i - t| < \eta.$$

Из этого неравенства и неравенства (1.25) следует, что справедливо неравенство

$$|\dot{f}(t)| > \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{при} \quad |t_i - t| < \eta, \quad i = 1, 2, \dots$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства на интервале $[t_i - \eta, t_i + \eta]$, получим

$$\int_{t_i - \eta}^{t_i + \eta} |\dot{f}(t)| dt = \left| \int_{t_i - \eta}^{t_i + \eta} \dot{f}(t) dt \right| > \varepsilon_0 \eta.$$

Равенство слева вытекает из того, что производная $\dot{f}(t)$ на интервале интегрирования не меняет знака, так как на этом интервале она непрерывна и удовлетворяет ограничению $|\dot{f}(t)| > \varepsilon_0/2$.

Из последнего неравенства получаем неравенство

$$|f(t_1 + \eta) - f(t_1 - \eta)| > \varepsilon_0 \eta,$$

которое выполняется при любом t_i , как бы велико оно ни было. А это противоречит тому, что функция $f(t)$ стремится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Установить равномерную непрерывность исходя из определения не всегда просто. Более удобным, если функция дифференцируема, может оказаться рассмотрение производной: дифференцируемая функция равномерно непрерывна, если ее производная ограничена. Поэтому из леммы Барбалата получаем следующее следствие.

Следствие. Если дважды дифференцируемая на интервале $[t_0, \infty)$ функция $f(t)$ имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$ и вторая производная на этом интервале ограничена, то производная $\dot{f}(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Пример 1.7. Адаптивная система описывается уравнениями

$$\dot{e} = -e + \theta w(t),$$

$$\dot{\theta} = -e w(t),$$

где e — ошибка слежения, θ — ошибка оценки параметра (разность между оценкой и истинным значением параметра), $w(t)$ — ограниченная непрерывная функция.

Требуется установить ограниченность переменных и сходимости ошибки слежения к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму $V = e^2 + \theta^2$, составленную из переменных, входящих в уравнения адаптивной системы. Ее производная по времени имеет вид

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + 2\theta\dot{\theta} = 2e(-e + \theta w(t)) + 2\theta(-e w(t)) = -2e^2 \leq 0.$$

Так как функция V ограничена снизу нулем и ее производная отрицательна или равна нулю, то функция V сходится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$. Из ограниченности функции V следует, что переменные e и θ ограничены, и так как по условию и функция $w(t)$ ограничена, то из уравнений следует, что производные $\dot{e}$ и $\dot{\theta}$ также ограничены. Поэтому вторая производная $\ddot{V} = -4e\dot{e}$ ограничена, а согласно следствию $\dot{V} = -2e^2 \rightarrow 0$ и соответственно $e \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

1.8. Лемма Калмана–Якубовича

В гл. 11 при рассмотрении адаптивных систем управления используются строго вещественно-положительные передаточные функции и лемма Калмана–Якубовича. Поэтому в данном параграфе остановимся на этих вопросах вкратце.

Передаточная функция $W(s)$ линейной стационарной системы управления называется *строго вещественно-положительной*, если все ее полюса располагаются в левой полуплоскости (система устойчива) и вещественная часть частотной передаточной функции $W(j\omega)$ при всех $\omega \geq 0$ положительна:

$$\operatorname{Re} W(j\omega) > 0 \quad \forall \omega \geq 0.$$

Отметим ряд очевидных необходимых условий того, что передаточная функция $W(s)$ является строго вещественно-положительной:

- годограф частотной передаточной функции $W(j\omega)$ (амплитудно-фазовая частотная характеристика) должен располагаться полностью в правой полуплоскости;
- относительный порядок r передаточной функции $W(s)$ не должен превышать 1 ($r = 0$ или $r = 1$);
- не только полюса, но и нули передаточной функции $W(s)$ должны располагаться в левой полуплоскости.

Лемма Калмана–Якубовича. Для того чтобы у вполне управляемой стационарной линейной системы управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u, y \in R, \quad (1.26)$$

передаточная функция $W(s) = \mathbf{c}^T (Is - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ была строго вещественно-положительной, необходимо и достаточно, чтобы существовали положительно определенные матрицы P и Q такие, что выполняются соотношения

$$\mathbf{A}^T P + P \mathbf{A} = -Q, \quad P \mathbf{B} = \mathbf{c}. \quad (1.27)$$

Лемму Калмана–Якубовича иначе можно еще сформулировать следующим образом.

Пусть стационарная линейная система (1.26) вполне управляема и устойчива (собственные значения матрицы имеют отрицательные вещественные части).

Тогда для того чтобы существовали положительно определенные матрицы P и Q такие, что выполняются соотношения (1.27), необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \operatorname{Re} [\mathbf{c}^T (Ij\omega - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] > 0 \quad \forall \omega \geq 0. \quad (1.28)$$

1.9. Векторное дифференцирование

В дальнейшем в различных главах будет использовано векторное дифференцирование, которое позволяет использовать более компактную и наглядную запись. Поэтому в этом параграфе кратко рассмотрим определения и свойства векторного дифференцирования (символ $\stackrel{\text{def}}{=}$ обозначает равенство по определению).

1) Производная вектора $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ по скаляру t :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d\mathbf{x}^T}{dt} \right)^T.$$

2) Производная скалярной функции $s = s(\mathbf{x})$ по вектору $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$:

$$\frac{ds}{d\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial s}{\partial x_1} \ \dots \ \frac{\partial s}{\partial x_n} \right).$$

3) Производная векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{f} = f_1 \ \dots \ f_n)^T$) по вектору $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{df_1}{d\mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{df_n}{d\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix}.$$

Используя приведенные определения и обычные правила дифференцирования, можно получить следующие правила векторного дифференцирования.

1⁰. Производная скалярного произведения по скаляру t :

$$\frac{d(\mathbf{x}^T \mathbf{y})}{dt} = \frac{d\mathbf{x}^T}{dt} \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{x}^T \frac{d\mathbf{y}}{dt}.$$

Если $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, то имеем

$$\frac{d(\mathbf{x}^T \mathbf{x})}{dt} = 2 \frac{d\mathbf{x}^T}{dt} \mathbf{x} = 2\mathbf{x}^T \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Вывод:

$$\frac{d(\mathbf{x}^T \mathbf{y})}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} y_i + \sum_{i=1}^n x_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{d\mathbf{x}^T}{dt} \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \frac{d\mathbf{y}}{dt}.$$

2⁰. Производная произведения матрицы и вектора по скаляру t :

$$\frac{d(A\mathbf{x})}{dt} = \frac{dA}{dt} \mathbf{x} + A \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

A — $(m \times n)$ -матрица, зависящая от t .

Вывод:

$$\begin{aligned} \frac{d(A\mathbf{x})}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{da_{1j}}{dt} x_j \\ \sum_{j=1}^n \frac{da_{2j}}{dt} x_j \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{da_{nj}}{dt} x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \frac{dx_j}{dt} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} \frac{dx_j}{dt} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \frac{dx_j}{dt} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{dA}{dt} \mathbf{x} + A \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \end{aligned}$$

3⁰. Производная скалярного произведения по вектору $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$:

$$\frac{d(\mathbf{y}^T \mathbf{z})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{z}^T \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} + \mathbf{y}^T \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{x}}.$$

Если $\mathbf{y} = \mathbf{z}$, то имеем

$$\frac{d(\mathbf{y}^T \mathbf{y})}{d\mathbf{x}} = 2\mathbf{y}^T \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}.$$

Вывод:

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{y}^T \mathbf{z})}{d\mathbf{x}} &= \frac{d}{d\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n y_i z_i = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{i=1}^n y_i z_i \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{i=1}^n y_i z_i \right] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_1} z_i + \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial z_i}{\partial x_1} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_n} z_i + \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial z_i}{\partial x_n} \right] = \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial x_1} \mathbf{z} + \mathbf{y}^T \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial x_n} \mathbf{z} + \mathbf{y}^T \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_n} \right] = \frac{d\mathbf{y}^T}{d\mathbf{x}} \mathbf{z} + \mathbf{y}^T \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

4⁰. Производная квадратичной формы по вектору $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$:

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T Q,$$

Q — симметрическая $(n \times n)$ -матрица, не зависящая от x .

Вывод:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}) &= \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_1} \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial x_1} \quad \dots \right. \\
&\quad \left. \dots \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_n} \sum_{j=1}^n q_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n q_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial x_n} \right] = \\
&= \left[\sum_{j=1}^n q_{1j} x_j + \sum_{i=1}^n x_i q_{i1} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n q_{nj} x_j + \sum_{i=1}^n x_i q_{in} \right] = \\
&= \left[2 \sum_{i=1}^n x_i q_{i1} \quad \dots \quad 2 \sum_{i=1}^n x_i q_{in} \right] = 2\mathbf{x}^T \mathbf{Q}.
\end{aligned}$$

5⁰. Производная сложной векторной функции по скаляру t :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}(t)).$$

Вывод:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{dy_1}{dx_n} \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{dy_2}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{dy_2}{dx_n} \frac{dx_n}{dt} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{dy_n}{dx_n} \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt}.
\end{aligned}$$

Задачи

1. Преобразовать в нормальную форму уравнения систем, заданных следующими передаточными функциями:

а) $W_{yu}(p) = \frac{10}{p(p^2 + p + 1)}$; б) $W_{yu}(p) = \frac{10(p+1)}{p(p^2 + p + 1)}$;

в) $W_{yu}(p) = \frac{p^3 + 3p^2 + 5p + 1}{p^3 + 4p^2 + 2p + 1}$.

2. Преобразовать в нормальную форму следующие уравнения:

а) $\ddot{y} + 4\ddot{y} + 2\dot{y} = \ddot{u} + 4\dot{u} + 1$; б) $\ddot{y} + 4\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 4\dot{u} + 1$;

$$\text{в)} \quad \ddot{y} + 4\ddot{y} + 2\dot{y} = 2\ddot{u} + \ddot{u} + 4\dot{u} + 1;$$

$$\text{г)} \quad \overset{(IV)}{y} + \ddot{y} + 4\ddot{y} + 2y = 2\ddot{u} + \ddot{u} + 4u + 1.$$

3. Исследовать управляемость систем, которые описываются уравнениями:

$$\text{а)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1;$$

$$\text{б)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \quad \dot{x}_3 = x_2 + x_3;$$

$$\text{в)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \quad \dot{x}_3 = x_2 + x_3, \quad \dot{x}_4 = x_1 + x_4;$$

$$\text{г)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_4, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u_1, \quad \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u_2, \\ \dot{x}_4 = x_1 + x_4;$$

$$\text{д)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_3 + u_2, \\ \dot{x}_4 = x_2 + x_4;$$

$$\text{е)} \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3 + x_4 + u_1, \quad \dot{x}_4 = x_3 + x_4 + u_2.$$

4. Выяснить, при каких значениях параметров a и b вполне управляема система, которая описывается приведенными уравнениями:

$$\text{а)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + au, \quad \dot{x}_2 = x_2 + bu;$$

$$\text{б)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + au, \quad \dot{x}_2 = x_2 + bu;$$

$$\text{в)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + au_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 + u_1, \quad \dot{x}_3 = x_3 + bu_2;$$

$$\text{г)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + bu_1, \quad \dot{x}_3 = x_3 + bu_2.$$

5. Преобразовать в каноническую форму управляемости следующие уравнения:

$$\text{а)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_3 + u_2, \\ \dot{x}_4 = x_2 + x_4;$$

$$\text{б)} \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3 + x_4 + u_1, \quad \dot{x}_4 = x_3 + x_4 + u_2;$$

$$\text{в)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_4, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_3 + u, \quad \dot{x}_4 = x_2 + x_4;$$

$$\text{г)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3 + x_4 + u_2, \\ \dot{x}_4 = x_3 + x_4 + u_1.$$

6. Исследовать стабилизируемость систем, которые описываются уравнениями, приведенными в задаче 5.

7. Преобразовать в управляемую форму Луенбергера следующие уравнения:

$$\text{а)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_3 + x_4 + u, \\ \dot{x}_4 = x_3 + x_4 + u;$$

$$\text{б)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_3 + x_4, \quad \dot{x}_4 = x_3 + x_4 + u;$$

$$\text{в)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_3 + x_4 + u, \quad \dot{x}_4 = x_3 + x_4;$$

$$\text{г)} \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + x_4, \\ \dot{x}_4 = x_3 + x_4 + u.$$

8. Пусть управляемые системы описываются уравнениями:

а) $\dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u;$

б) $\dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u;$

в) $\dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 + u;$

г) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + u.$

Определить законы управления, при которых характеристические уравнения замкнутых систем будут иметь следующие корни:

1) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3;$

2) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2 + 3j, \quad \lambda_3 = -2 - 3j.$

9. Пусть управляемые системы описываются уравнениями:

а) $y = \frac{5}{p^3 + 2p^2 + p + 1} u;$ б) $y = \frac{5p + 1}{p^3 + 2p^2 + p + 2} u;$

в) $y = \frac{2p + 4}{p^3 + 2p^2 + 2p + 3} u;$ г) $y = \frac{2p + 1}{p^3 + 2p^2 + p - 1} u.$

Определить законы управления, при которых характеристические уравнения замкнутых систем будут иметь следующие корни:

1) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3;$

2) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2 + 3j, \quad \lambda_3 = -2 - 3j.$

Глава 2

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Практически все системы управления, строго говоря, являются нелинейными, т.е. описываются нелинейными уравнениями. Линейные системы управления являются их линейными моделями, которые получаются путем *обычной линеаризации* — линеаризации, состоящей в разложении нелинейных функций в ряд Тейлора и отбрасывании нелинейных слагаемых. Однако такая линеаризация не всегда возможна. Если нелинейность допускает обычную линеаризацию, то такая нелинейность называется *несущественной*. В противном случае нелинейность называется *существенной*. Существенными нелинейностями обладают всякого рода релейные элементы. Даже в тех случаях, когда обычная линеаризация возможна, часто на конечном этапе исследования может потребоваться рассмотрение исходной нелинейной модели.

2.1. Нелинейные статические характеристики. Особенности нелинейных систем

Нелинейные статические характеристики. Здесь будут рассмотрены статические характеристики некоторых нелинейностей.

На рис. 2.1 представлены релейные характеристики разных видов: характеристика идеального реле (*а*); характеристика реле с зоной нечувствительности (*б*); характеристика реле с гистерезисом (*в*); характеристика реле с зоной нечувствительности и гистерезисом (*г*); характеристика квантования по уровню (*д*).

На рис. 2.2 представлены кусочно линейные характеристики: кусочно линейная характеристика с насыщением (*а*); кусочно линейная характеристика с зоной нечувствительности и насыщением (*б*); кусочно линейная характеристика с зоной нечувствительности (*в*); люфт (характеристика звена с люфтом) (*г*); диодная характеристика (*д*); кусочно линейная характеристика с гистерезисом и насыщением (*е*).

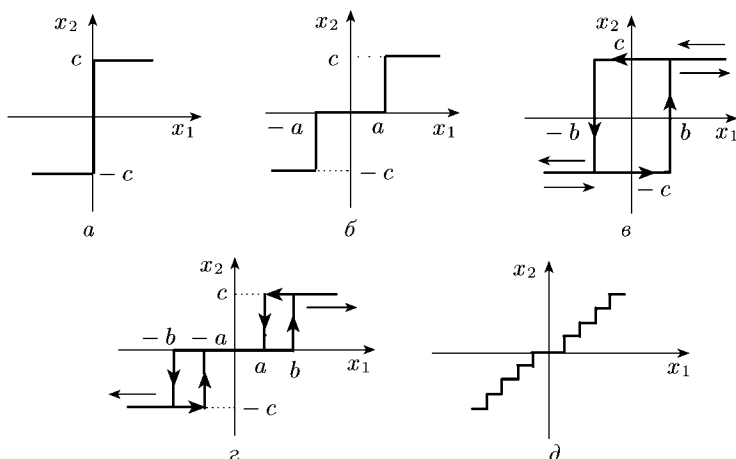


Рис. 2.1. Релейные характеристики

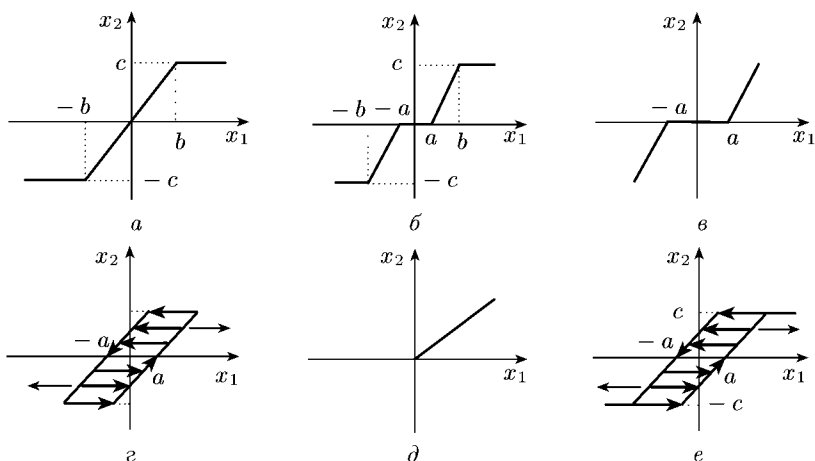


Рис. 2.2. Кусочно релейные характеристики

Нелинейные системы по сравнению с линейными обладают рядом принципиальных особенностей. В частности, такими особенностями является следующее:

- не выполняется принцип суперпозиции, и исследование нелинейной системы при нескольких воздействиях нельзя сводить к исследованию при одном воздействии;
- устойчивость и характер переходного процесса зависят от величины начального отклонения от положения равновесия;
- при фиксированных внешних воздействиях возможны несколько (а иногда и бесконечное множество) положений равновесия;

— возникают свободные установившиеся процессы, которые в линейных системах невозможны (например, автоколебания).

Универсальных аналитических (математических) методов исследования нелинейных систем нет. В процессе развития теории автоматического управления были разработаны различные математические методы анализа и синтеза нелинейных систем, каждый из которых применим для определенного класса систем и задач. Наиболее широко используемыми методами исследования нелинейных систем являются:

- метод фазовой плоскости;
- метод функций Ляпунова;
- метод гармонической линеаризации (метод гармонического баланса);
- методы исследования абсолютной устойчивости.

Любое исследование более или менее сложных нелинейных систем, как правило, заканчивается математическим моделированием. И в этом отношении математическое моделирование является одним из универсальных (неаналитических) методов исследования. В этой книге будут рассмотрены все указанные выше методы исследования нелинейных систем и ряд других методов.

2.2. Определение устойчивости

При рассмотрении линейных систем было принято следующее математическое определение устойчивости: линейная система называется *устойчивой*, если общее решение однородного описывающего ее дифференциального уравнения стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности. Очевидно, это определение нельзя распространять на нелинейные системы. Поэтому в общем случае используются другие определения устойчивости. Существует множество различных понятий и определений устойчивости. В этой книге будут рассмотрены наиболее широко используемые понятия устойчивости, основанные на определениях, данных А. М. Ляпуновым.

Пусть система управления описывается уравнениями

$$\dot{y}_i = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, t). \quad (2.1)$$

Допустим, что $\mathbf{y}^*(t) = (y_1^*(t) \ y_2^*(t) \ \dots \ y_n^*(t))^T$ — частное решение уравнения (2.1), которое описывает интересующее нас движение. Это движение и само решение называют *невозмущенным движением* (*траекторией*). Любое другое решение и движение, которое описывается этим решением, называют *возмущенным движением* (*траекторией*).

Принимается, что в фазовом пространстве (пространстве состояний) R^n рассматриваемой системы введена евклидова метрика

(норма), т.е. длина (норма) вектора $\mathbf{y}$, и расстояние между точками $\mathbf{y}^{(1)}$ и $\mathbf{y}^{(2)}$ определяются следующим образом:

$$\|\mathbf{y}\| = |\mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad |\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(2)}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i^{(1)} - y_i^{(2)})^2}.$$

Если $\mathbf{y}(t) = (y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_n(t))^T$ — какая-либо траектория системы (2.1), то точка в фазовом пространстве, соответствующая этой траектории в текущий момент времени t , называется *изображающей точкой*.

Определение 2.1. Невозмущенное движение $\mathbf{y}^*(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что расстояние между изображающими точками невозмущенной траектории $\mathbf{y}^*(t)$ и какой-либо возмущенной траектории $\mathbf{y}(t)$ в любой момент времени $t \geq t_0$ меньше ε , если только расстояние между этими траекториями в начальный момент $t = t_0$ меньше δ , т.е. если выполняется условие

$$|\mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{если} \quad |\mathbf{y}^*(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \delta. \quad (2.2)$$

Число δ , которое определяется по заданному числу ε , в общем случае зависит как от ε , так и от начального момента t_0 . Если можно выбрать число δ , не зависящее от начального момента t_0 , то говорят, что невозмущенное движение *равномерно устойчиво*.

Определение 2.2. Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое положительное число η , что расстояние между изображающими точками невозмущенной и возмущенной траекторий стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности, как только расстояние между этими траекториями в начальный момент меньше η , т.е. когда выполняется условие

$$|\mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{если} \quad |\mathbf{y}^*(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \eta. \quad (2.3)$$

Прежде чем переходить к другим понятиям устойчивости, преобразуем исходное уравнение. Дело в том, что при исследовании устойчивости методом функций Ляпунова уравнения системы управления должны быть записаны в отклонениях, т.е. так, чтобы невозмущенному движению соответствовало нулевое решение.

Введем новые переменные, которые определяются следующим образом: $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$. В новых переменных уравнение (2.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

где $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Y}(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*, t) - \dot{\mathbf{y}}^*(t)$. При этом невозмущенному движению системы (2.4) соответствует нулевое решение $\mathbf{x}^*(t) = 0$. Кроме того, нулевое решение (начало координат) является положением равновесия системы (2.4). Действительно, имеем $\mathbf{X}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{Y}(\mathbf{y}^*, t) - \dot{\mathbf{y}}^*(t) = \mathbf{0}$. Таким образом, при таком преобразовании проблема

устойчивости невозмущенного движения сводится к проблеме устойчивости положения равновесия. Любое ненулевое решение является возмущенным движением.

Определение 2.3. Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.4) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что в любой момент времени $t \geq t_0$ расстояние от изображающей точки возмущенного движения до начала координат $|\mathbf{x}(t)|$ меньше ε , когда начальное отклонение $|\mathbf{x}(t_0)|$ меньше δ , т. е. когда выполняется условие

$$|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{если} \quad |\mathbf{x}(t_0)| < \delta.$$

Определение 2.4. Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.4) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и найдется такое положительное число η , что возмущенное движение $\mathbf{x}(t)$ стремится к началу координат, если начальное отклонение $|\mathbf{x}(t_0)|$ меньше η , т. е. когда выполняется условие

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{если} \quad |\mathbf{x}(t_0)| < \eta.$$

Приведенным определениям устойчивости можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Устойчивость по Ляпунову означает, что, если задана сфера S_ε радиуса ε , то существует сфера S_δ радиуса δ такая, что, если возмущенное движение начнется внутри сферы S_δ , то изображающая точка никогда не достигнет сферы S_ε , т. е. движение будет происходить внутри сферы S_ε (рис. 2.3, а).

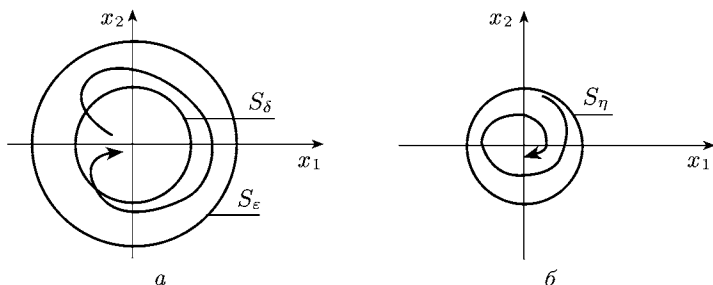


Рис. 2.3. К определению устойчивости

Асимптотическая устойчивость означает, что выполняется условие устойчивости по Ляпунову и существует сфера S_η радиуса η такая, что если возмущенное движение начинается внутри сферы S_η , то оно стремится к началу координат при стремлении времени к бесконечности (рис. 2.3, б).

Если положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво, то множество всех начальных точек $\mathbf{x}^0$, из которых возмущенное движение приходит в начало координат при стремлении времени к бесконечности, называется *областью притяжения* начала координат.

Иначе говоря, если точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит области притяжения начала координат, то выполняется условие

$$\lim \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ — решение уравнения (2.4) при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_0) = \mathbf{x}^0$).

Определение 2.5. Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.4) называется *глобально устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и при любых начальных условиях все ее фазовые координаты ограничены при всех $t \geq t_0$.

Это определение устойчивости тесно связано с определением устойчивости по Лагранжу. Система (2.4) называется *устойчивой по Лагранжу*, если все ее решения ограничены на всем интервале $0 \leq t < \infty$ [36]. Очевидно, положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.4) будет глобально устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову и устойчиво по Лагранжу.

Определение 2.6. Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.4) называется *асимптотически устойчивым в целом* или *глобально асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и возмущенное движение стремится в начало координат из любого начального положения.

Другими словами, положение равновесия называется *глобально асимптотически устойчивым*, если его область притяжения совпадает со всем фазовым пространством.

Теперь рассмотрим, как соотносится определение устойчивости линейных систем с рассмотренными здесь определениями устойчивости. Если положение равновесия линейной системы устойчиво, то возмущенное движение стремится к положению равновесия из любого начального положения. Так что принятое в теории линейных систем определение устойчивости совпадает с определением глобальной асимптотической устойчивости.

В случае линейных систем положение равновесия (система) считается неустойчивым, если не выполняется критерий устойчивости, т.е. если не все корни характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости. Однако в общем случае с понятием неустойчивости не все так просто. Поэтому специально остановимся на его определении. При этом, как и выше, сферу радиуса ρ с центром в начале координат обозначим S_ρ .

Определение 2.7. Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.4) называется *неустойчивым*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого числа $\delta > 0$ найдется такая точка внутри сферы S_δ , что возмущенное движение, начинающееся в этой точке, достигает сферы S_ε .

Другими словами, положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.4) называется *неустойчивым*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что не

найдется сферы S_δ , которая не содержала бы внутри себя точки, начиная с которой возмущенное движение достигает сферы S_ε .

Это определение является логическим отрицанием определения устойчивости по Ляпунову. Поэтому если положение равновесия не является устойчивым по Ляпунову, то оно неустойчиво.

Положение равновесия линейной системы, неустойчивое в том смысле, как это принято в теории линейных систем, не обязательно будет неустойчивым в определенном выше смысле. Как увидим дальше, если линейная система неустойчива (т.е. не все корни ее характеристического уравнения являются левыми), но имеет место маргинальная устойчивость (характеристическое уравнение не имеет правых корней), то система может быть устойчива по Ляпунову.

2.3. Орбитальная устойчивость. Автоколебания

Пусть $\mathbf{y}^*(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ — невозмущенное и возмущенное движение соответственно. Выше при определении различных понятий устойчивости мы руководствовались тем, как изменяется со временем расстояние $\rho[\mathbf{y}^*(t), \mathbf{y}(t)] = |\mathbf{y}^*(t) - \mathbf{y}(t)|$ между изображающими точками этих движений. Однако если невозмущенное движение является периодическим и совершается по замкнутой траектории (например, движение небесных тел), то важно, как ведет себя изображающая точка возмущенного движения относительно траектории невозмущенного движения, а не относительно его изображающей точки. Поэтому при рассмотрении периодических процессов используются понятия устойчивости, отличные от рассмотренных выше, — орбитальная устойчивость и асимптотическая орбитальная устойчивость.

Введем следующие обозначения: L^* — траектория невозмущенного движения, т.е. $L^* = \{\mathbf{y}: \mathbf{y} = \mathbf{y}^*(t), t \geq t_0\}$; $\rho(\mathbf{y}, L)$ — расстояние от точки $\mathbf{y}$ до траектории L , т.е. до ближайшей точки этой траектории.

Определение 2.8. Невозмущенное движение $\mathbf{y}^*(t)$ называется *орбитально устойчивым*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $t \geq t_0$ расстояние от изображающей точки возмущенного движения до траектории невозмущенного движения меньше ε ($\rho(\mathbf{y}(t), L^*) < \varepsilon$) при условии, что в начальный момент это расстояние меньше δ ($\rho(\mathbf{y}(t_0), L^*) < \delta$) [25].

Определение 2.9. Невозмущенное движение $\mathbf{y}^*(t)$ называется *асимптотически орбитально устойчивым*, если оно орбитально устойчиво и найдется такое положительное число η , что расстояние от изображающей точки возмущенного движения до траектории невозмущенного движения стремится к нулю ($\rho(\mathbf{y}(t), L^*) \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$, если это расстояние в начальный момент не превышает η ($\rho(\mathbf{y}(t_0), L^*) < \eta$).

Иначе говоря, невозмущенное движение $\mathbf{y}^*(t)$ *асимптотически орбитально устойчиво*, если вокруг его траектории L^* существует

такая окрестность, что если возмущенное движение начинается в этой окрестности, то его траектория со временем сольется с траекторией невозмущенного движения L^* .

Из устойчивости по Ляпунову следует орбитальная устойчивость. Из асимптотической устойчивости следует асимптотическая орбитальная устойчивость. То есть если невозмущенное движение устойчиво по Ляпунову, то оно орбитально устойчиво, и если невозмущенное движение асимптотически устойчиво, то оно асимптотически орбитально устойчиво. Обратное не верно: вообще говоря, из орбитальной устойчивости не следует устойчивость по Ляпунову, и из асимптотической орбитальной устойчивости не следует асимптотическая устойчивость.

Более того, если невозмущенное движение является периодическим, то оно не может быть асимптотически устойчивым. Действительно, пусть невозмущенное движение $\mathbf{y}^*(t)$ является периодической функцией с периодом T : $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{y}^*(t + T)$. Рассмотрим возмущенное движение $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t + \alpha)$. Это возмущенное движение не стремится к невозмущенному движению, как бы мало ни было расстояние между изображающими точками возмущенного и невозмущенного движений в начальный момент. Каким бы малым ни было число η в условии $|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}^*(t_0)| < \eta$, если указанное расстояние отлично от нуля и больше некоторого положительного числа ε_0 , то в силу периодичности $\mathbf{y}^*(t)$ $\sup_{t > t'} |\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t)| > \varepsilon_0$, как бы велико ни было t' . Следовательно, расстояние между изображающими точками не может стремиться к нулю.

В теории нелинейных систем важную роль играет понятие автоколебаний, введенное в теорию колебаний А. А. Андроновым.

Определение 2.10. Автоколебаниями называются асимптотически орбитально устойчивые свободные колебания (периодические движения).

Автоколебания являются незатухающими колебаниями, которые устанавливаются и поддерживаются в системе за счет собственных источников энергии, причем амплитуды этих колебаний определяются свойствами системы, а не начальными условиями. Системы, в которых возникают автоколебания, называются *автоколебательными системами*.

Автоколебания возможны только в нелинейных системах. Незатухающие свободные колебания возможны в маргинально устойчивых линейных системах. Однако эти колебания не являются автоколебаниями, так как они не удовлетворяют условиям асимптотической орбитальной устойчивости.

Если на выходе какой-либо системы возникают незатухающие колебания, то чтобы проверить, являются ли эти колебания автоколебаниями, можно поступить следующим образом: подать на вход системы возмущающее воздействие, которое приводит к незначитель-

ному изменению амплитуды; если после устранения возмущающего воздействия амплитуда колебаний со временем восстанавливается, то эти колебания являются автоколебаниями, в противном случае они не являются автоколебаниями.

2.4. Изображение процессов на фазовой плоскости

Если уравнения системы управления представлены в нормальной форме, то вектор состояния системы однозначно определяет ее состояние. Каждому состоянию системы в пространстве состояний соответствует точка. Точка, соответствующая текущему состоянию системы, называется *изображающей точкой*. При изменении состояния изображающая точка описывает траекторию. Эта траектория называется *фазовой траекторией*. Совокупность фазовых траекторий, соответствующая всевозможным начальным условиям, называется *фазовым портретом*.

Наглядно фазовую траекторию и фазовый портрет можно представить в случае двухмерного фазового пространства. Двухмерное фазовое пространство называется *фазовой плоскостью*.

Фазовая плоскость — это координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка. Метод анализа и синтеза системы управления, основанный на построении фазового портрета, называют *методом фазовой плоскости*.

Рассмотрим систему управления второго порядка, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= X_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений

$$x_i = x_i(x^0, t), \quad i = 1, 2,$$

при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = (x_1^0 \ x_2^0)^T$ представляет собой параметрические уравнения фазовых траекторий. Параметром здесь является время. Построив фазовые траектории по этим уравнениям при различных начальных условиях, получим фазовый портрет.

Уравнения (2.5) являются дифференциальными уравнениями фазовых траекторий в параметрической форме. Разделив второе уравнение на первое, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)},\tag{2.6}$$

решение которого непосредственно связывает фазовые координаты. Это уравнение будем называть (непараметрическим) *дифференциальным уравнением фазовых траекторий*.

Точки, в которых правая часть уравнения (2.6) равна отношению нулей, называются *особыми*. Особые точки являются корнями системы уравнений

$$X_i(x_1, x_2) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Как следует из уравнений (2.5), в особых точках фазовая скорость $\dot{x}$ равна нулю. Следовательно, особые точки являются положениями равновесия. Через особые точки может проходить более одной траектории, в то время как через неособые точки проходит только одна траектория.

Часто при изображении процессов на фазовой плоскости за фазовую координату x_2 , которую откладывают по оси ординат, принимают производную $\dot{x}_1$ координаты x_1 , откладываемой по оси абсцисс. В этом случае уравнение (2.6) принимает вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_1(x_1, x_2)}{x_2},$$

и фазовые траектории обладают следующими свойствами. В верхней полуплоскости изображающая точка движется слева направо, так как $\dot{x}_1 = x_2 > 0$ и x_1 возрастает. В нижней полуплоскости, наоборот, изображающая точка движется справа налево, так как $\dot{x}_1 = x_2 < 0$ и x_1 убывает. На оси абсцисс ($x_2 = 0$) производная $dx_2/dx_1 = \infty$ (за исключением точек равновесия), и поэтому фазовые траектории пересекают ось абсцисс под прямым углом.

По фазовому портрету можно судить о характере переходных процессов. В частности, по фазовой траектории можно построить без расчетов качественно временную характеристику — кривую зависимости x_1 от времени, и, наоборот, по временной характеристике можно качественно построить фазовую траекторию.

В качестве примера сначала по фазовой траектории построим временную характеристику, а затем по временной характеристике — фазовую траекторию. Пусть задана фазовая траектория (рис. 2.4, а).

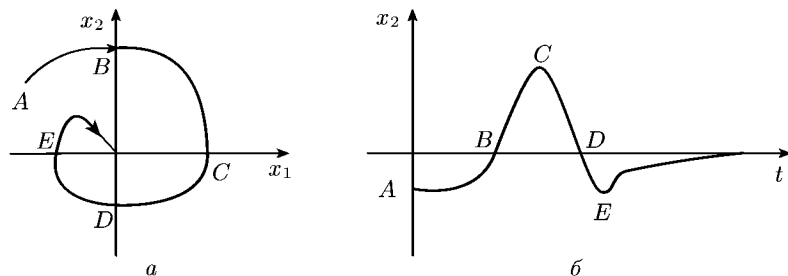


Рис. 2.4. Построение временной характеристики по фазовой траектории

Отметив на ней характерные точки (начальную точку, точки пересечения с осями координат), нанесем соответствующие им точки на временной плоскости и соединим их плавной кривой (рис. 2.4, б).

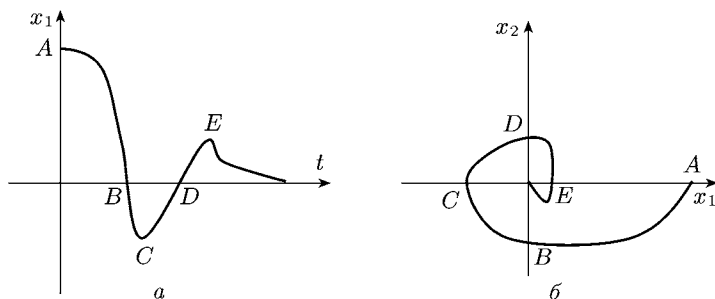


Рис. 2.5. К построению фазовой траектории по временной характеристике

Пусть теперь задана временная характеристика (рис. 2.5, а). Отметив на ней характерные точки (начальную точку, точки экстремума и точки пересечения с временной осью), нанесем соответствующие им точки на фазовую плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 2.5, б).

2.5. Фазовые портреты и типы особых точек

Фазовые портреты нелинейных систем характеризуются большим разнообразием, чем фазовые портреты линейных систем. Однако типы особых точек линейных и нелинейных систем совпадают. Здесь имеются в виду те особые точки, в окрестностях которых уравнения нелинейных систем допускают линеаризацию.

2.5.1. Фазовые портреты и типы особых точек линейных систем. Пусть линейная система второго порядка описывается уравнением

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0,$$

или, в нормальной форме,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_2 x_1. \quad (2.7)$$

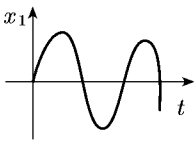
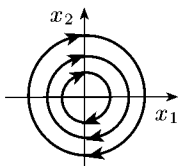
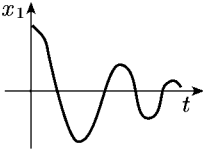
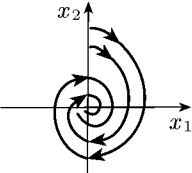
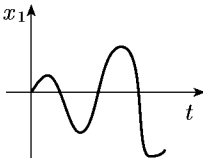
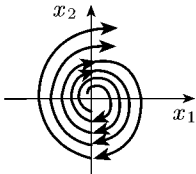
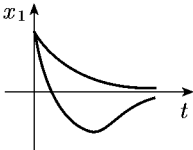
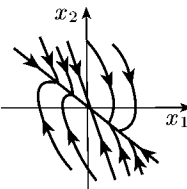
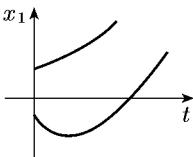
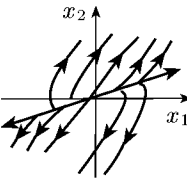
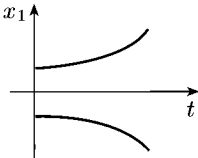
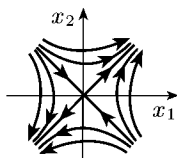
Решение, фазовый портрет и типы особых точек зависят от корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Из уравнения (2.7) следует, что рассматриваемая система имеет одну особую точку в начале координат. В зависимости от вида фазового портрета в окрестности особых точек последние подразделяются на различные типы.

В табл. 2.1 приведены временные характеристики, фазовые портреты и типы особых точек при различных корнях характеристического уравнения.

Таблица 2.1

Тип корней	Кривая переходного процесса	Фазовый портрет	Тип особой точки
Чисто мнимые			Центр
Комплексные с отрицательной действительной частью			Устойчивый фокус
Комплексные с положительной действительной частью			Неустойчивый фокус
Действительные отрицательные			Устойчивый узел
Действительные положительные			Неустойчивый узел
Действительные разных знаков			Седло

Когда корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми, фазовые траектории являются эллипсами или окружностями, т. е. они являются замкнутыми.

Замкнутым фазовым траекториям соответствуют незатухающие колебания (периодические режимы). Однако эти колебания не являются автоколебаниями, так как их амплитуда зависит от начальных условий и они не являются асимптотически орбитально устойчивыми.

Положение равновесия, соответствующее особой точке типа центр, является устойчивым по Ляпунову. Действительно, по заданному ε можно выбрать нужное δ (см. определение 2.3) следующим образом. В качестве δ выбирается любое положительное число, меньшее или равное половине длины меньшей оси эллипса, касающегося изнутри окружности радиуса ε (рис. 2.6).

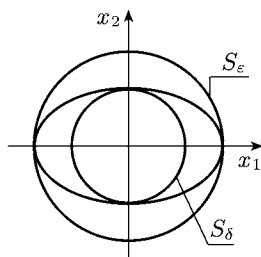


Рис. 2.6. К определению устойчивости особой точки типа центр

2.5.2. Фазовые портреты нелинейных систем. Нелинейные системы могут иметь несколько положений равновесия (особых точек) и характеризуются большим разнообразием фазовых портретов. Если правые части нелинейных уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2,$$

допускают линеаризацию в окрестностях особых точек, то эти особые точки могут быть лишь тех же типов, что и особые точки в случае линейных систем. Чтобы определить тип какой-либо особой точки, нужно произвести линеаризацию правых частей приведенных уравнений в окрестности этой точки, а затем по линеаризованным уравнениям определить ее тип.

В качестве примера рассмотрим фазовый портрет нелинейной системы, которая описывается уравнениями [53]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1(1 + x_1^2) - 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Приравняв правые части нулю, получим следующие уравнения для особых точек:

$$\begin{aligned} -x_1(1 + x_1^2) - 2x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет три решения:

- 1) $x_1 = 0, x_2 = 0$; 2) $x_1 = 1, x_2 = -1$; 3) $x_1 = -1, x_2 = 1$.

В окрестности первой точки линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой системы уравнений

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm j$. Следовательно, точка $(0, 0)$ является особой точкой типа центр.

В окрестности точки $(1, -1)$ линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -4\eta_1 - 2\eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= \eta_1 + \eta_2, \end{aligned}$$

где $\eta_1 = x_1 - 1$, $\eta_2 = x_2 + 1$. Характеристическое уравнение этой системы уравнений

$$\begin{vmatrix} \lambda + 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

имеет вещественные корни с разными знаками: $\lambda_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{17})/2$. Следовательно, точка $(1, -1)$ является особой точкой типа седло.

В окрестности третьей точки $(-1, 1)$ линеаризованные уравнения принимают точно такой вид, что и в предыдущем случае, если принять $\eta_1 = x_1 + 1$, $\eta_2 = x_2 - 1$. Следовательно, точка $(-1, 1)$ также является особой точкой типа седло.

На рис. 2.7 представлен фазовый портрет рассматриваемой системы. Из этого рисунка видно, что точка равновесия $(0, 0)$ устойчива по

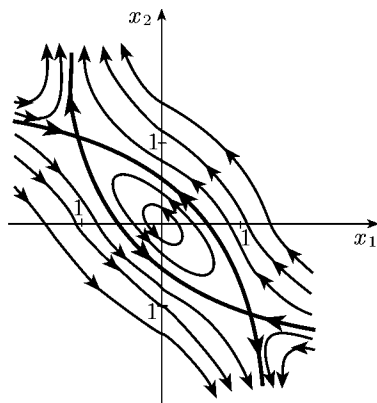
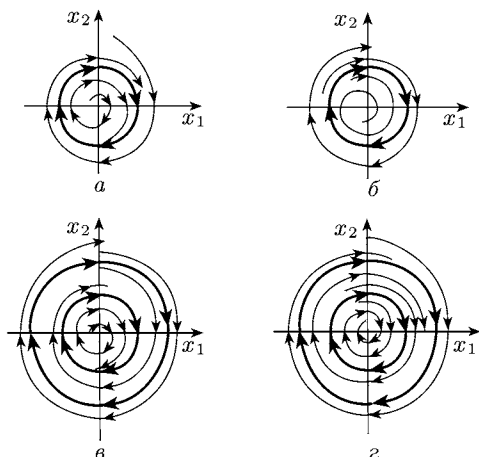


Рис. 2.7. Фазовый портрет нелинейной системы

Ляпунову, а две другие точки равновесия неустойчивы. Если движение начинается внутри замкнутой жирной линии, то возникает колебательный (периодический) процесс. Если движение начинается вне указанной замкнутой кривой, то возникает расходящийся процесс.

Как следует из рассмотренного примера, при наличии нескольких точек равновесия возможны различные типы фазовых траекторий. Особые кривые (жирные кривые на рис. 2.7), разделяющие фазовую плоскость на области с разными типами фазовых траекторий, называются *сепаратрисами*.

Фазовые портреты нелинейных систем могут содержать другой тип особой кривой — изолированные замкнутые траектории. Эти кривые называются *предельными циклами*. Если изнутри и снаружи фазовые траектории сходятся к предельному циклу (рис. 2.8, а), то такой предельный цикл называется *устойчивым предельным циклом*. Устойчивому предельному циклу соответствует асимптоти-



2.8. Предельные циклы

чески орбитально устойчивое периодическое движение (автоколебания). В системе, у которой фазовый портрет имеет вид, представленный на рис. 2.8, а, автоколебания возникают самопроизвольно при любых начальных условиях. В этом случае говорят, что имеет место *мягкое самовозбуждение* [1].

Если фазовые траектории изнутри и снаружи предельного цикла удаляются от него (рис. 2.8, б), такой предельный цикл называется *неустойчивым предельным циклом*. Периодический процесс, соответствующий неустойчивому предельному циклу, нельзя наблюдать. Если движение начинается внутри такого предельного цикла, то процесс сходится к положению равновесия. Если движение начинается вне такого предельного цикла, то процесс расходится. Неустойчивый предельный цикл служит границей области притяжения, или границей устойчивости положения равновесия (начала координат).

Возможны два предельных цикла (рис. 2.8, в, г). Внутренний предельный цикл на рис. 2.8, в устойчив, и ему соответствуют автоколебания, а наружный предельный цикл неустойчив и является границей области автоколебаний: автоколебания возникают при любых начальных отклонениях, не выходящих за наружный предельный цикл.

Наружный предельный цикл на рис. 2.8, г является устойчивым и соответствует автоколебаниям, а внутренний предельный цикл является неустойчивым и является границей области притяжения положения равновесия. В системе с таким фазовым портретом автоколебания возникают при достаточно большом отклонении системы от положения равновесия — отклонении, выходящем за пределы внутреннего предельного цикла. Если движение системы начинается внутри неустойчивого предельного цикла, то она приближается к положению равновесия. В этом случае говорят, что имеет место *жесткое самовозбуждение* [1].

2.6. Метод фазовой плоскости анализа и синтеза систем

Как мы видели, по фазовому портрету системы можно судить о ее устойчивости и характере переходных процессов. Метод исследования систем, основанный на построении их фазового портрета, называется *методом фазовой плоскости*. Достоинством метода фазовой плоскости является то, что он позволяет наглядно представить всевозможные процессы, происходящие в системе, и является точным, а не приближенным (как, например, метод гармонической линеаризации, который мы рассмотрим далее). Его недостатком является то, что он применим только к системам второго порядка.

2.6.1. Анализ нелинейных систем. Процесс анализа нелинейных систем методом фазовой плоскости рассмотрим на конкретных примерах.

Нелинейная система с реле с зоной нечувствительности. Система (рис. 2.9, а) описывается следующими уравнениями:

$$\ddot{y} = u, \quad e = g_0 - y, \quad u = \begin{cases} 1, & e > \alpha, \\ 0, & |e| \leq \alpha, \\ -1, & e < -\alpha. \end{cases}$$

Введем новые переменные: $x_1 = e$, $x_2 = \dot{x}_1$. В новых переменных уравнения системы примет вид

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -u, \quad u = \begin{cases} 1, & x_1 > \alpha, \\ 0, & |x_1| \leq \alpha, \\ -1, & x_1 < -\alpha. \end{cases}$$

Разобьем фазовую плоскость на три области *I*, *II*, *III* прямыми $x_1 = \alpha$ и $x_1 = -\alpha$ (рис. 2.9, б). В пределах каждой области $u = \text{const}$. Поэтому, разделив в последней системе второе уравнение на первое и проинтегрировав его, получим $x_2^2 = -2ux_1 + C$.

В области *I* ($x_1 < -\alpha$) $u = -1$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $x_2^2 = 2x_1 + C_1$; оно определяет семейство парабол, направленных вправо. В области *II* ($|x_1| \leq \alpha$) $u = 0$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $x_2^2 = C_2$; оно определяет семейство прямых, параллельных оси абсцисс. В области *III* ($x_1 > \alpha$) $u = 1$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $x_2^2 = -2x_1 + C_3$; оно определяет семейство парабол, направленных влево.

Как видим, уравнения фазовых траекторий во всех трех областях различаются между собой, и при переходе из одной области в другую через границу происходит переключение с одного вида траекторий на другой. Линии, на которых происходят такие переключения, называются *линиями переключения*.

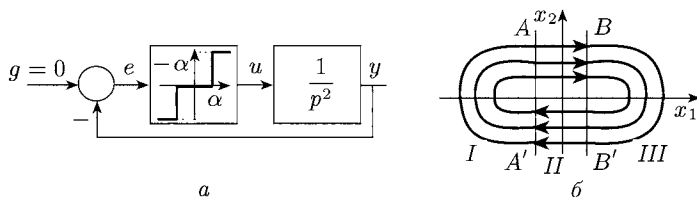


Рис. 2.9. Нелинейная система с реле с зоной нечувствительности (а) и его фазовый портрет (б)

На основе полученных уравнений построен фазовый портрет системы (рис. 2.9, б). Как следует из этого рисунка, при ненулевых начальных условиях в системе возникают незатухающие колебания. Амплитуда колебаний зависит от начальных условий, и, следовательно, эти колебания не являются автоколебаниями. Положение равновесия (начало координат) неустойчиво, так как, если принять $\varepsilon < \alpha$, то какое бы малое положительное число δ мы ни выбрали, возмущенное движение, начинающееся внутри сферы радиуса δ , всегда достигает сферы с радиусом ε .

Нелинейная система со скользящим процессом. Система (рис. 2.10) описывается уравнениями

$$\ddot{y} = k_1 \sigma, \quad \sigma = c \operatorname{sign} e, \quad e = -(k_2 \dot{y} + y).$$

Вводя новые переменные $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$, эти уравнения можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 c \operatorname{sign}(k_2 x_2 + x_1). \end{aligned}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим такое уравнение:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-k_1 c \operatorname{sign}(k_2 x_2 + x_1)}{x_2}.$$

Прямая AB на рис. 2.11, которая описывается уравнением $k_2 x_2 + x_1 = 0$, или $x_2 = -(1/k_2)x_1$, делит фазовую плоскость на две области: область I ($k_2 x_2 + x_1 > 0$) и область II ($k_2 x_2 + x_1 < 0$). Последнее уравнение в области I принимает вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-k_1 c}{x_2}, \quad \text{или} \quad x_2 dx_2 = -k_1 c dx_1,$$

в области II — вид

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{k_1 c}{x_2}, \quad \text{или} \quad x_2 dx_2 = k_1 c dx_1.$$

Решив эти уравнения, получаем следующие уравнения для фазовых траекторий:

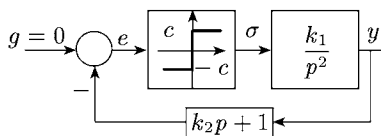


Рис. 2.10. Нелинейная система со скользящим процессом

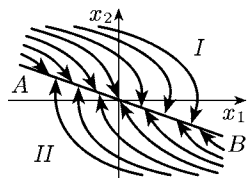


Рис. 2.11. Фазовый портрет нелинейной системы со скользящим процессом

в области I

$$\dot{x}_2^2 = -2k_1 c x_1 + C_1;$$

в области II

$$\dot{x}_2^2 = 2k_1 c x_1 + C_2.$$

Эти уравнения являются уравнениями парабол, направленных навстречу друг другу. На основе этих уравнений построен фазовый портрет (см. рис. 2.11). Из этого рисунка следует: если изображающая точка не находится на линии переключения (прямая AB), то она до достижения этой прямой будет двигаться по одной из фазовых траекторий. Как только изображающая точка пересечет линию переключения, она попадет на одну из фазовых траекторий, направленных в сторону линии переключения. Поэтому изображающая точка опять будет двигаться в сторону линии переключения, пока не пересечет ее. Как только изображающая точка снова пересечет линию переключения, она опять окажется на фазовой траектории, направленной в сторону линии переключения. Поэтому изображающая точка по достижении линии переключения будет двигаться по ней, теоретически совершая колебания с бесконечно малой амплитудой и бесконечно большой частотой. В действительности, так как реле обладает конечной скоростью переключения, частота не будет бесконечно большой, а амплитуда бесконечно малой.

Таким образом, когда изображающая точка достигнет линии переключения, она теоретически будет скользить по этой линии и двигаться к положению равновесия. Такой процесс называют *скользящим режимом*.

2.6.2. Синтез систем с переменной структурой. Структура системы определяется составом элементов (звеньев) и связью между ними. Изменить структуру системы — это значит изменить состав ее элементов или связи между элементами.

Системой с переменной структурой (СПС) называют систему, в которой структура в процессе ее функционирования изменяется на основе текущей информации для достижения определенной цели — обеспечения устойчивости, улучшения качества и т. п.

Использование принципов построения СПС при синтезе систем управления позволяет достичь устойчивости и приемлемого качества в тех случаях, когда параметры объекта изменяются в широких пределах или отсутствует информация, необходимая для реализации обычных алгоритмов управления с фиксированной структурой, обеспечивающих заданные требования к системе.

Принципы построения СПС. Построение СПС [26] основано на формировании различных структур, обеспечивающих желаемое протекание заданных режимов.

Пусть в системе управления (рис. 2.12) передаточная функция объекта равна $W_o(p) = 1/(T^2 p^2)$, и при фор-

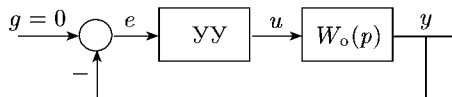


Рис. 2.12. Структурная схема системы управления

мировании закона управления можно воспользоваться информацией о выходной переменной y и знаке ее производной $\dot{y}$. Следовательно, при синтезе линейной системы мы можем воспользоваться только пропорциональным законом управления

$$u = -ky, \quad k = \text{const.} \quad (2.8)$$

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$T^2 \lambda^2 + k = 0,$$

и его корни при $k > 0$ будут чисто мнимыми, а при $k < 0$ — действительными и разных знаков. Следовательно, в первом случае система marginally устойчива или устойчива по Ляпунову, а во втором случае неустойчива. Таким образом, в рамках фиксированной структуры не удастся синтезировать асимптотически устойчивую систему.

СПС с двумя marginally устойчивыми структурами.

Уравнения рассматриваемой системы в нормальной форме имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{T^2} x_1,$$

где $x_1 = y$. Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{k}{T^2} \frac{x_1}{x_2}, \quad \text{или} \quad x_2 dx_2 = -\frac{k}{T^2} x_1 dx_1.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим уравнение эллипса

$$\frac{x_1^2}{T^2} + \frac{x_2^2}{k} = C.$$

Большая ось эллипса при $k = k_1 < T^2$ располагается на оси абсцисс (рис. 2.13, а), а при $k = k_2 > T^2$ — на оси ординат (рис. 2.13, б).

Если принять закон управления

$$u = \psi y, \quad \psi = \begin{cases} k_1, & x_1 x_2 < 0, \\ k_2, & x_1 x_2 > 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

то во второй и четвертой четвертях изображающая точка будет двигаться по фазовым траекториям, представленным на рис. 2.13, а,

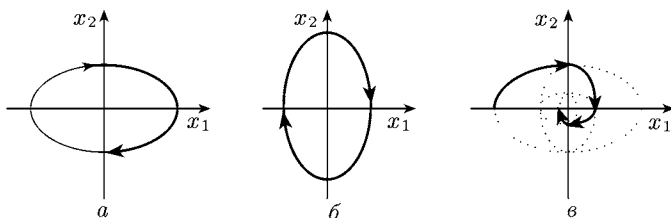


Рис. 2.13. Фазовые траектории marginally устойчивых структур и СПС с такими структурами

в первой и третьей четвертях — по фазовым траекториям, представленным на рис 2.13, б. Следовательно, фазовые траектории СПС с алгоритмом управления (2.9) будут иметь вид, представленный на рис. 2.13, в (сплошная линия). Изображающая точка по такой траектории будет двигаться к положению равновесия (началу координат), и поэтому рассматриваемая система с переменной структурой асимптотически устойчива.

СПС с двумя неустойчивыми структурами. Пусть передаточная функция системы управления (см. рис. 2.12) равна

$$W_o(p) = \frac{b}{p^2 - a_1 p - a_2} \quad (b > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0)$$

и при формировании закона управления можно использовать информацию о выходной переменной и знаке линейной формы $s = \dot{y} + \alpha y$. В данном случае опять при синтезе линейной системы можно воспользоваться только пропорциональным законом управления (2.8). При этом законе управления характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - a_1 \lambda - a_2 + kb = 0.$$

Рассмотрим две структуры, соответствующие значениям $k = k_1$ и $k = k_2$, при которых корни характеристического уравнения в первом случае ($k = k_1$) являются комплексными с положительной вещественной частью, а во втором случае ($k = k_2$) — вещественными и разных знаков. Так как корнями приведенного уравнения являются

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_2 - kb},$$

то такие значения k существуют. Фазовый портрет первой структуры представлен на рис. 2.14, а, а фазовый портрет второй структуры — на рис. 2.14, б. На этих рисунках, как обычно, приняты обозначения $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$.

Пусть в случае $k = k_2$ корнями являются $\lambda_1 = -\alpha_1$ и $\lambda_2 = \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 > 0$). Этим корням на фазовом портрете рис. 2.14, б соответствуют две прямые фазовые траектории, которые описываются уравнениями $x_2 + \alpha_1 x_1 = 0$ и $x_2 - \alpha_2 x_1 = 0$. Отрицательному корню соответствует фазовая траектория, по которой изображающая точка движется к началу координат, а положительному корню — фазовая траектория, по которой изображающая точка удаляется от начала координат.

СПС построим так, чтобы переключение с одной структуры на другую происходило на оси ординат и прямой фазовой траектории $x_2 + \alpha_1 x_1 = 0$, по которой изображающая точка движется к началу координат. Такое переключение будет происходить при алгоритме управления

$$u = \psi y, \quad \psi = \begin{cases} k_1, & x_1 s > 0, \\ k_2, & x_1 s < 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где $s = x_2 + \alpha_1 x_1$.

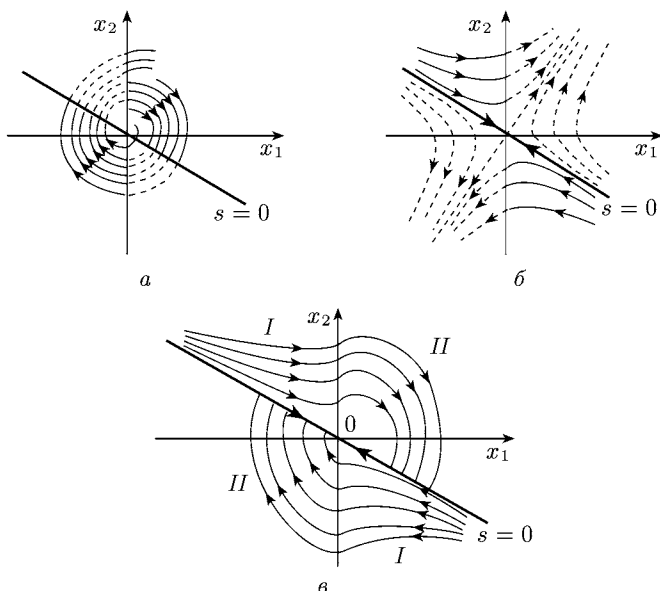


Рис. 2.14. Фазовые портреты неустойчивых структур и СПС с такими структурами

При таком алгоритме управления фазовая плоскость делится на две области: область *I*, которая расположена в углах, образованных прямой $s = x_2 + \alpha_1 x_1 = 0$ и осью ординат, и область *II*, которая расположена вне указанных углов (рис. 2.14, в). В области *I* изображающая точка СПС движется по фазовым траекториям второй структуры (см. рис. 2.14, б), в области *II* — по фазовым траекториям первой структуры (см. рис. 2.14, а). На фазовых портретах отдельные участки траекторий, которые не присутствуют на фазовом портрете СПС, изображены штриховыми линиями.

У систем второго порядка, как правило, все фазовые траектории не являются прямыми. Прямые траектории называются *вырожденными*. В рассмотренном примере одна из структур имеет две вырожденные траектории, а СПС — одну.

СПС со скользящим режимом. Теоретически в СПС с алгоритмом управления (2.10) переходный процесс является апериодическим. Действительно, если изображающая точка в начальный момент не находится на вырожденной траектории, то она будет двигаться по одной из кривых фазовых траекторий, пока не дойдет до вырожденной траектории, а затем будет двигаться по этой прямой траектории (см. рис. 2.14, в). Однако в действительности из-за наличия ошибок и запаздывания изображающая точка будет перескакивать вырожденную траекторию и все время будет двигаться по кривым фазовым траекториям (рис. 2.15), и переходный процесс будет колебательным. Апериодический переходный процесс может быть достигнут, если в системе

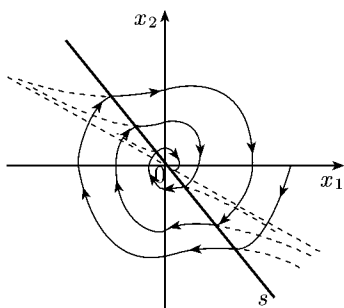


Рис. 2.15. Реальная фазовая траектория СПС с неустойчивыми структурами

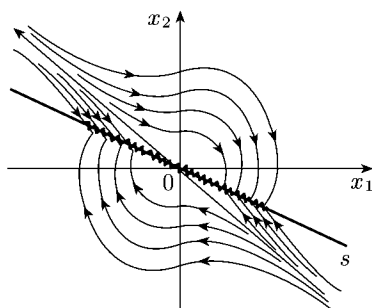
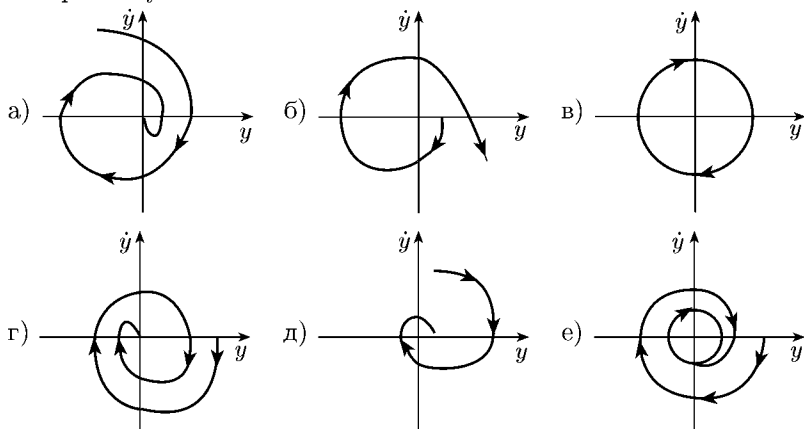


Рис. 2.16. Фазовый портрет СПС со скользящим режимом

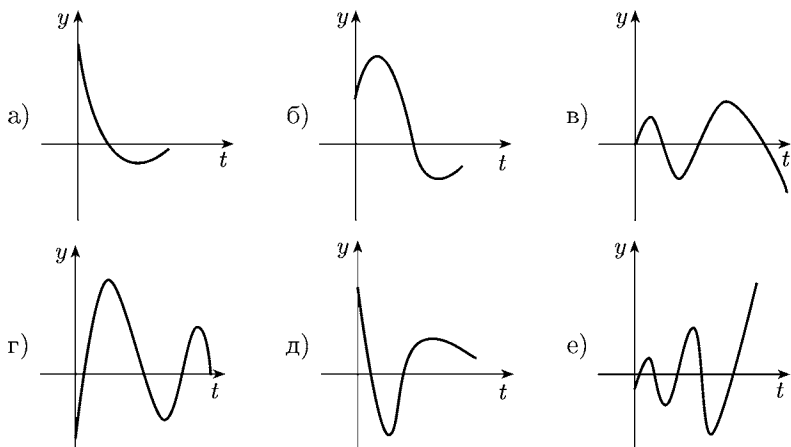
создать скользящий процесс. В только что рассмотренной системе можно получить скользящий процесс, если переключение производить не на прямой $s = x_2 + \alpha_1 x_1 = 0$, которая является вырожденной траекторией одной из структур, а на прямой $x_2 + \beta x_1 = 0$, где $\beta < \alpha_1$. Если в законе управления (2.10) вместо $s = x_2 + \alpha_1 x_1$ подставить $s_\beta = x_2 + \beta x_1$, то получим СПС, у которой фазовый портрет будет иметь вид, представленный на рис. 2.16. Как следует из этого рисунка, фазовые траектории в окрестности прямой $s_\beta = x_2 + \beta x_1 = 0$ направлены навстречу, и поэтому как только изображающая точка, оказавшись на этой прямой, сойдет с нее, она попадет на одну из фазовых траекторий, которая снова ведет к ней. Поэтому когда изображающая точка попадает на эту прямую, начинается скользящий процесс.

Задачи

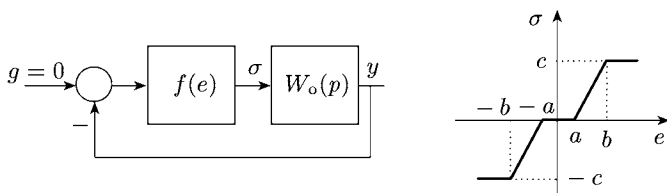
1. По фазовым траекториям качественно построить временную характеристику:



2. По временной характеристике качественно построить фазовую траекторию:



3. Построить фазовый портрет системы



при $W_o(p) = 2/p^2$ и следующих значениях параметров нелинейной характеристики:

а) $a = 0$, $b = 0,5$, $c = 1$; б) $a = b = 0,5$, $c = 1$; в) $a = b = 0$, $c = 1$.

4. Синтезировать асимптотически устойчивую систему с переменной структурой из следующих двух линейных структур 2-го порядка:

а) корни характеристического уравнения первой структуры чисто мнимые, а второй структуры — вещественные разных знаков;

б) корни характеристического уравнения первой структуры комплексные с отрицательно вещественной частью, а второй структуры — вещественные разных знаков.

Глава 3

МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Метод гармонической линеаризации, или метод гармонического баланса, первоначально был разработан для исследования периодического режима. Однако в дальнейшем он стал использоваться также для анализа устойчивости и синтеза нелинейных систем [53].

Основная идея метода состоит в следующем. Управляемые системы (объекты), как правило, обладают свойством фильтра низких частот: при возникновении периодических режимов они не пропускают или пропускают с большим ослаблением вторые и более высокие гармоники. И суть метода гармонической линеаризации состоит в описании нелинейного звена линейным уравнением, которое получается при пренебрежении (отбрасывании) указанными гармониками в разложении нелинейной функции в ряд Фурье.

Метод гармонической линеаризации является приближенным методом. Однако его достоинством является то, что он применим для систем любого порядка, в отличие от метода фазовой плоскости, который может быть эффективно применен только к системам 2-го порядка.

3.1. Гармоническая линеаризация

Структурную схему замкнутой нелинейной системы, состоящей из нелинейного звена (НЗ) и линейной части (ЛЧ) — линейного звена,

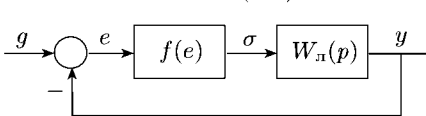


Рис. 3.1. Типовая структурная схема нелинейной САУ

будем называть *типовой структурной схемой нелинейной системы* (рис. 3.1). В этой главе будут рассматриваться нелинейные системы, структурные схемы которых могут быть преобразованы к типовой.

Пока примем, что задающее воздействие $g = 0$ (потом это ограничение снимем). Уравнения системы имеют вид

$$y = W_n(p)\sigma, \quad \sigma = f(e), \quad e = -y. \quad (3.1)$$

Допустим, что в системе возникает периодический режим. Тогда нелинейная функция $\sigma(t) = f[e(t)]$ будет периодической функцией времени, и ее можно будет разложить в ряд Фурье:

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} a_0 + b_1 \sin \omega t + a_1 \cos \omega t + \dots, \quad (3.2)$$

где a_0, b_1, a_1 — коэффициенты Фурье; $\omega = 2\pi/T$; T — период; многоточием обозначены высшие (вторые и более высокие) гармоники.

Коэффициенты Фурье определяются следующим образом [14]:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(e(\tau)) \cos k\omega\tau d\tau = \frac{2}{T} \int_{t^*}^{t^*+T} f(e(\tau)) \cos k\omega\tau d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(e(\tau)) \sin k\omega\tau d\tau = \frac{2}{T} \int_{t^*}^{t^*+T} f(e(\tau)) \sin k\omega\tau d\tau, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(e(\tau)) \sin \omega\tau d\tau = \frac{4}{T} \int_{t^*}^{t^*+T/2} f(e(\tau)) \sin k\omega\tau d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь t^* — произвольная константа, или (если $f(e)$ — однозначная нечетная функция, т.е. $f(-e) = -f(e)$).

Предположим, что линейная часть обладает свойством фильтра низких частот, т.е. выполняется условие

$$|W_\pi(j\omega)| \gg |W_\pi(jk\omega)|, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

Проверить это условие, пока не определена частота периодического процесса, нельзя, и его перед началом исследования принимают как гипотезу. Поэтому это условие называют *гипотезой фильтра*.

При условии (3.3) высшие гармоники не оказывают существенно-го влияния на выходную величину y линейной части. Поэтому при определении y высшими гармониками можно пренебречь, и уравнение системы (3.1) представить в виде

$$y = W_\pi(p)\tilde{\sigma}, \quad \tilde{\sigma} = a_0 + b_1 \sin \omega t + a_1 \cos \omega t, \quad e = -y. \quad (3.4)$$

Если постоянное слагаемое в ряде Фурье $a_0 = 0$, то, учитывая тождество

$$b_1 \sin \omega t + a_1 \cos \omega t = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

где $A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, $\varphi_1 = \arcsin(a_1/A_1)$, из уравнений (3.4) при установившемся режиме можно получить

$$y = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Здесь $A = A_1 |W_\pi(j\omega)|$, $\varphi = \varphi_1 + \arg W_\pi(j\omega)$.

Таким образом, если в системе (см. рис. 3.1) возникает периодический режим и линейная часть является фильтром низких частот, т.е. справедлива гипотеза фильтра, то колебания на выходе линейной части и соответственно на входе нелинейного звена являются гармоническими.

Выберем начало отсчета так, чтобы на входе нелинейного звена $e = A \sin \omega t$. Тогда имеем

$$\sin \omega t = \frac{e}{A}, \quad \cos \omega t = \frac{p \sin \omega t}{\omega} = p \frac{e}{\omega A}.$$

Подставив эти выражения в (3.4), при $a_0 = 0$ получим

$$y = W_{\pi}(p)\tilde{\sigma}, \quad \tilde{\sigma} = \left[q(A) + \frac{q'(A)}{\omega} p \right] e, \quad e = -y, \quad (3.5)$$

где

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (3.6a)$$

$$q'(A) = \frac{a_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (3.6b)$$

или, если $f(e)$ — однозначная нечетная функция,

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad q'(A) = 0. \quad (3.6b)$$

Формулы (3.6) получены из формул для коэффициентов Фурье путем замены переменной $\psi = \omega t$.

Система (3.5) при фиксированных амплитуде A и частоте ω является линейной. Переход от исходной системы (3.1) к линеаризованной системе (3.5) называется *гармонической линеаризацией*. Коэффициенты $q(A)$ и $q'(A)$ называют *коэффициентами гармонической линеаризации*. Передаточную функцию (см. второе уравнение (3.5))

$$W_{\pi}(A, p) = q(A) + \frac{q'(A)}{\omega} p \quad (3.7a)$$

называют *передаточной функцией НЗ* (нелинейного звена) и соответственно выражение

$$W_{\pi}(A) = q(A) + j q'(A), \quad (3.7b)$$

которое получается при подстановке в передаточную функцию НЗ $p = j\omega$, называют *частотной передаточной функцией НЗ*. В соотношении (3.7b) коэффициенты $q(A)$ и $q'(A)$ представляют вещественную и мнимую части. Поэтому $q(A)$ будем называть *вещественным*, а $q'(A)$ — *мнимым коэффициентами гармонической линеаризации*.

Нелинейное звено после гармонической линеаризации представляется в виде линейного звена с передаточной функцией (3.7a),

и структурная схема гармонически линейаризованной системы принимает вид, представленный на рис. 3.2.

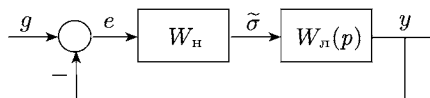


Рис. 3.2. Структурная схема гармонически линейаризованной системы

Гармонически линейаризованные уравнения (3.5) были получены при условии, что посто-

янное слагаемое в разложении Фурье $a_0 = 0$ и задающее воздействие $g = 0$. При этом, как отмечалось, колебания на входе нелинейного звена имеют вид $e = A \sin \omega t$, и они являются *симметричными*. Указанные колебания будут симметричными и приведенные выкладки справедливыми, если характеристика нелинейного звена будет симметричной относительно начала координат и установившаяся ошибка будет равна нулю. Как известно из теории линейных систем, при постоянном задающем воздействии установившаяся ошибка будет равна нулю, если система является астатической, т. е. линейная часть содержит интегрирующее звено. Иначе говоря, при симметричной относительно начала координат нелинейной характеристике условие симметричности колебаний совпадает с условием равенства нулю установившейся ошибки в системе без нелинейного звена.

3.2. Вычисление коэффициентов гармонической линейаризации при симметричных колебаниях

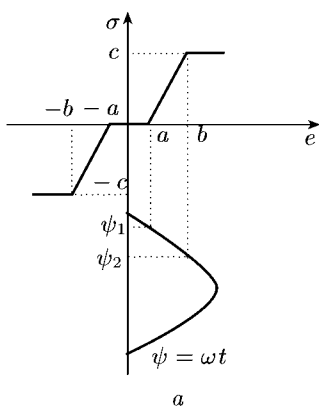
Колебания называются *симметричными*, если на входе нелинейного звена сигнал имеет вид $e = A \sin \omega t$.

Вычисление коэффициентов гармонической линейаризации основывается на построении графика выходного сигнала нелинейного звена, когда на его вход подается гармонический сигнал $e = A \sin \omega t$.

3.2.1. Коэффициенты гармонической линейаризации нелинейных звеньев с однозначной характеристикой. Если характеристика нелинейного звена является однозначной и симметричной относительно начала координат, то функция $f(e)$ будет нечетной. И в этом случае согласно формулам (3.6в) мнимый коэффициент гармонической линейаризации $q'(A) = 0$.

Кусочно линейная характеристика с зоной нечувствительности и насыщением. График выходного сигнала нелинейного звена с такой характеристикой, когда на его вход подается гармонический сигнал $e = A \sin \omega t$, представлен на рис. 3.3.

Как следует из рис. 3.3, б, пока входной сигнал НЗ не достигает величины a или переменная ψ — величины ψ_1 ($e = A \sin \psi_1 = a$), выходной сигнал НЗ будет равен нулю. Когда входной сигнал изменяется на интервале $[a, b]$ или переменная ψ — на интервале $[\psi_1, \psi_2]$, где ψ_2 определяется из соотношения $A \sin \psi_2 = b$, на вы-



ходе НЗ имеем $\sigma = k(A \sin \psi - a)$. Здесь $k = c/(b - a)$ — тангенс угла наклона характеристики НЗ на интервале $[a, b]$. И наконец, на интервале $[\psi_2, \pi/2]$ вы-

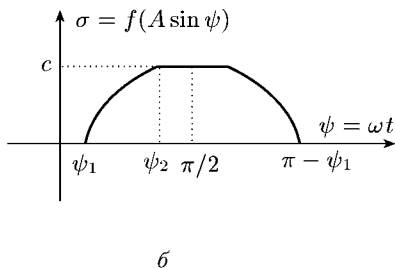


Рис. 3.3. Графики сигналов на входе и на выходе НЗ с кусочно линейной характеристикой с зоной нечувствительности и насыщением

ходной сигнал НЗ принимает постоянное значение c .

График выходного сигнала на интервале $[0, \pi]$ симметричен относительно прямой $\psi = \pi/2$. Поэтому выходной сигнал на интервале $[\pi/2, \pi - \psi_2]$ равен постоянной величине c , на интервале $[\pi - \psi_2, \pi - \psi_1]$ описывается функцией $\sigma = k(A \sin \psi - a)$ и на интервале $[\pi - \psi_1, \pi]$ равен нулю.

Таким образом, вещественный коэффициент гармонической линейаризации определяется следующим образом (см. (3.6 в)):

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2}{\pi A} \int_0^\pi f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \left[\int_{\psi_1}^{\psi_2} k(A \sin \psi - a) \sin \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi - \psi_2} c \sin \psi d\psi + \int_{\pi - \psi_2}^{\pi - \psi_1} k(A \sin \psi - a) \sin \psi d\psi \right].$$

Используя тригонометрическое тождество $\sin^2 \psi = (1 - \cos 2\psi)/2$, находим

$$\int \sin^2 \psi d\psi = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2\psi) d\psi = \frac{1}{2} \psi - \frac{1}{4} \sin 2\psi.$$

Поэтому, проинтегрировав выражение для вещественного коэффициента гармонической линейаризации, получим

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \left\{ k \left[A \left(\frac{1}{2} \psi - \frac{1}{4} \sin 2\psi \right) + a \cos \psi \right]_{\psi_1}^{\psi_2} - c \cos \psi \Big|_{\psi_2}^{\pi - \psi_2} + k \left[A \left(\frac{1}{2} \psi - \frac{1}{4} \sin 2\psi \right) + a \cos \psi \right]_{\pi - \psi_2}^{\pi - \psi_1} \right\}.$$

Подставив пределы интегрирования, найдем

$$q(A) = \frac{4k}{\pi} \left[\frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1) - \frac{1}{4} (\sin 2\psi_2 - \sin 2\psi_1) + a(\cos \psi_2 - \cos \psi_1) \right] + \frac{4c}{\pi A} \cos \psi_2.$$

Учитывая, что справедливы соотношения

$$A \sin \psi_1 = a, \quad A \sin \psi_2 = b, \\ \psi_1 = \arcsin \frac{a}{A}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{b}{A}, \quad k = \frac{c}{b-a},$$

для вещественного коэффициента гармонической линейаризации нелинейного звена с зоной нечувствительности и насыщением, получаем

$$q(A) = \frac{2c}{\pi(b-a)} \left[\arcsin \frac{b}{A} - \arcsin \frac{a}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]. \quad (3.8)$$

Эта формула справедлива при $A \geq b$.

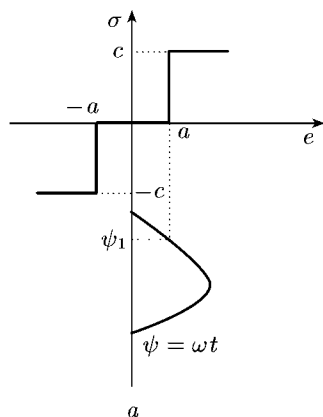
Кусочно линейная характеристика с насыщением. Эта характеристика (см. рис. 2.2, а) является частным случаем только что рассмотренной характеристики, когда параметр $a = 0$. Поэтому формулу для коэффициента гармонической линейаризации НЗ с такой характеристикой получим, если в соотношение (3.8) подставим $a = 0$:

$$q(A) = \frac{2c}{\pi b} \left[\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right], \quad A \geq b.$$

Кусочно линейная характеристика с зоной нечувствительности. Эта характеристика (см. рис. 2.2, в) является частным случаем кусочно линейной характеристики с зоной нечувствительности и насыщением, когда параметр $b = A$ (см. рис. 3.3). Поэтому формулу для коэффициента гармонической линейаризации НЗ с такой характеристикой получим, если в соотношение (3.8) подставим $b = A$:

$$q(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right], \quad A \geq a.$$

Релейная характеристика с зоной нечувствительности. В этом случае пока входной сигнал не достигнет значения a (рис. 3.4, а) или переменная ψ — значения ψ_1 ($e = A \sin \psi_1 = a$), на выходе НЗ сигнал равен нулю. Выходной сигнал на интерва-



ле $[\psi_1, \pi - \psi_1]$ равен постоянному значению, на интервале $[\pi - \psi_1, \pi]$ — нулю. На основании графика выходного сигнала (рис. 3.4, б) веществен-

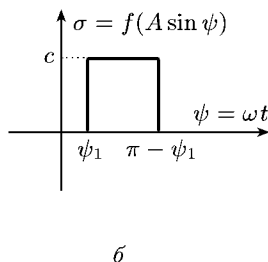


Рис. 3.4. Графики входного и выходного сигналов НЗ с релейной характеристикой с зоной нечувствительности

ный коэффициент гармонической линейаризации определяется следующим образом:

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\pi - \psi_1} f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ = \frac{2c}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\pi - \psi_1} \sin \psi d\psi = \frac{2c}{\pi A} (-\cos \psi) \Big|_{\psi_1}^{\pi - \psi_1}.$$

Учитывая, что $A \sin \psi_1 = a$, или $\sin \psi_1 = a/A$ и $\cos \psi_1 = \sqrt{1 - (a/A)^2}$, из последнего соотношения получаем

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}, \quad A \geq a.$$

Характеристика идеального реле. Эта характеристика является частным случаем предыдущей характеристики при $a = 0$. Поэтому для получения вещественного коэффициента гармонической линейаризации в этом случае достаточно в предыдущее соотношение подставить $a = 0$. Тогда получим

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A}.$$

Все полученные выше формулы для коэффициентов гармонической линейаризации представлены в табл. 3.1.

3.2.2. Коэффициенты гармонической линейаризации нелинейных звеньев с неоднозначной характеристикой. В случае, когда характеристики НЗ являются симметричными, но не однозначными, мнимый коэффициент гармонической линейаризации не равен нулю. Поэтому нужно вычислить оба коэффициента.

Таблица 3.1. Коэффициенты гармонической линеаризации НЗ с однозначной характеристикой

№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$q(A) = \frac{2c}{\pi(b-a)} \left[\arcsin \frac{b}{A} - \arcsin \frac{a}{A} + \right. \\ \left. + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right], \quad A \geq b$
2		$q(A) = \frac{2c}{\pi b} \left[\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right], \quad A \geq b$
3		$q(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right], \quad A \geq a$
4		$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}, \quad A \geq a$
5		$q(A) = \frac{4c}{\pi A}$

Кусочно линейная характеристика с гистерезисом и насыщением (см. рис. 2.2, е). Сама характеристика и графики входного и выходного сигналов представлены на рис. 3.5. Кривую выходного сигнала НЗ на интервале $[\pi, 2\pi]$ можно получить из той же кривой на интервале $[0, \pi]$ зеркальным отобра-

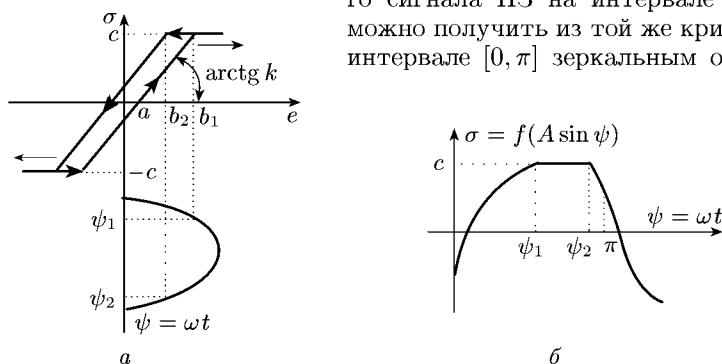


Рис. 3.5. Графики входного и выходного сигналов НЗ с кусочно линейной характеристикой с гистерезисом и насыщением

жением относительно оси абсцисс и сдвигом вправо на π . Точно таким же свойством обладают кривые функций синуса и косинуса, на которые умножается выходной сигнал НЗ при вычислении коэффициентов гармонической линейаризации. Поэтому в данном случае в формулах (3.6а) и (3.6б) значения интегралов на указанных интервалах будут совпадать и в них интегралы можно удвоить, заменив верхний предел интегрирования 2π на π , т.е. записать эти формулы следующим образом:

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (3.9a)$$

$$q'(A) = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (3.9б)$$

Выходной сигнал НЗ (рис. 3.5, б) на интервале $[0, \psi_1]$ описывается функцией $\sigma = k(A \sin \psi - a)$, на интервале $[\psi_1, \psi_2]$ принимает постоянное значение c и на интервале $[\psi_2, \pi]$ описывается функцией $\sigma = k(A \sin \psi + a)$. Поэтому формулы (3.9а) и (3.9б) принимают вид

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \left[\int_0^{\psi_1} k(A \sin \psi - a) \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \sin \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\pi} k(A \sin \psi + a) \sin \psi d\psi \right], \quad (3.10a)$$

$$q'(A) = \frac{2}{\pi A} \left[\int_0^{\psi_1} k(A \sin \psi - a) \cos \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \cos \psi d\psi + \right. \\ \left. + \int_{\psi_2}^{\pi} k(A \sin \psi + a) \cos \psi d\psi \right]. \quad (3.106)$$

Проинтегрировав (3.10а), получим

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \left[\frac{kA}{2} \left(\psi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \right) + ka(\cos \psi_1 - 1) - c(\cos \psi_2 - \cos \psi_1) + \right. \\ \left. + \frac{kA}{2} \left(\pi - \psi_2 + \frac{1}{2} \sin 2\psi_2 \right) + ka(1 + \cos \psi_2) \right].$$

Учитывая соотношения (см. рис. 3.5, а)

$$c = k(b_1 - a), \quad b_2 = b_1 - 2a, \quad A \sin \psi_1 = b_1, \quad A \sin \psi_2 = b_2,$$

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b_1}{A}, \quad \psi_2 = \pi - \arcsin \frac{b_2}{A};$$

последнее выражение можно преобразовать к виду

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left[\arcsin \frac{b_1}{A} + \arcsin \frac{b_2}{A} + \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{A} \right)^2} + \frac{b_2}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{A} \right)^2} \right], \\ A \geq b_1. \quad (3.11a)$$

Проинтегрировав (3.10б), получим

$$q'(A) = \frac{2}{\pi A} \left[k \left(\frac{1}{2} A \sin^2 \psi_1 - a \sin \psi_1 \right) + c(\sin \psi_2 - \sin \psi_1) - \right. \\ \left. - k \left(\frac{1}{2} A \sin^2 \psi_2 + a \sin \psi_2 \right) \right].$$

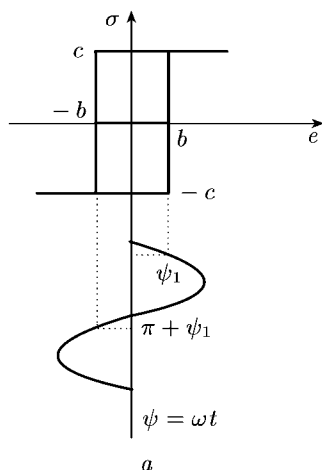
Подставив сюда $c = k(b_1 - a)$, $\sin \psi_1 = b_1/A$ и $\sin \psi_2 = b_2/A$, получим

$$q'(A) = \frac{k(b_2^2 - b_1^2)}{\pi A^2}, \quad A \geq b_1. \quad (3.11б)$$

Люфт. Эта характеристика (см. рис. 2.2, г) является частным случаем предыдущей характеристики при выполнении неравенства $A \leq b_1$. Поэтому, положив $b_1 = A$ и $b_2 = A - 2a$, из (3.11а) и (3.11б) получим

$$q(A) = \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2a}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2a}{A} \right) \sqrt{\frac{a}{A} \left(1 - \frac{a}{A} \right)} \right], \\ q'(A) = -\frac{4ka}{\pi A} \left(1 - \frac{a}{A} \right), \quad A \geq a.$$

Релейная характеристика с гистерезисом. Характеристика, а также входные и выходные сигналы НЗ представлены на рис. 3.6. Как и при вычислении гармонических коэффициентов линейизации НЗ с неоднозначными кусочно линейными характеристиками,



ками, в данном случае можно пользоваться формулами (3.9а) и (3.9б). Как следует из рис. 3.6, б, выходной сигнал НЗ на интервале $[0, \psi_1]$ равен

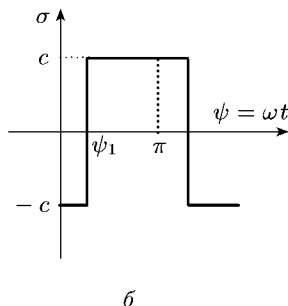


Рис. 3.6. Графики входного и выходного сигналов НЗ с релейной характеристикой с гистерезисом

постоянной величине $-c$, а на интервале $[\psi_1, \pi]$ — постоянной величине c . Поэтому из (3.9а) и (3.9б) получаем

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \left(-\int_0^{\psi_1} c \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi} c \sin \psi d\psi \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi A} (c \cos \psi|_0^{\psi_1} - c \cos \psi|_{\psi_1}^{\pi}) = \frac{4c}{\pi A} \cos \psi_1,$$

$$q'(A) = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \left(-\int_0^{\psi_1} c \cos \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi} c \cos \psi d\psi \right) =$$

$$= \frac{2c}{\pi A} (-\sin \psi|_0^{\psi_1} + \sin \psi|_{\psi_1}^{\pi}) = -\frac{4c}{\pi A} \sin \psi_1.$$

Из рис. 3.6, а имеем $A \sin \psi_1 = b$, или $\sin \psi_1 = b/A$ и $\cos \psi_1 = \sqrt{1 - (b/A)^2}$. Подставив эти выражения для тригонометрических функций в полученные выше соотношения для коэффициентов гармонической линеаризации, найдем

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}, \quad q'(A) = -\frac{4cb}{\pi A^2}, \quad A \geq b.$$

Релейная характеристика с зоной нечувствительности и гистерезисом. И в этом случае для вычисления коэффициентов гармонической линеаризации можно пользоваться формулами (3.9а) и (3.9б).

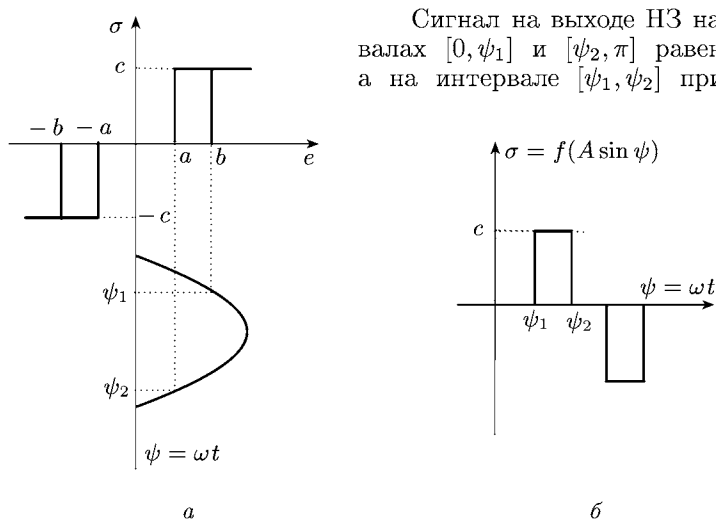


Рис. 3.7. Графики входного и выходного сигналов НЗ с зоной нечувствительности и гистерезисом

постоянное значение c (рис. 3.7, б). Поэтому из формул (3.9а) и (3.9б) имеем

$$\begin{aligned}
 q(A) &= \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \sin \psi d\psi = \\
 &= -\frac{2c}{\pi A} (\cos \psi_2 - \cos \psi_1), \\
 q'(A) &= \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \cos \psi d\psi = \\
 &= \frac{2c}{\pi A} (\sin \psi_2 - \sin \psi_1).
 \end{aligned}$$

Из рис. 3.7, а следует $A \sin \psi_1 = b$ и $A \sin \psi_2 = a$, или $\sin \psi_1 = b/A$, $\sin \psi_2 = a/A$ и $\cos \psi_1 = \sqrt{1 - (b/A)^2}$, $\cos \psi_2 = -\sqrt{1 - (a/A)^2}$. Подставив эти выражения для тригонометрических функций в полученные выше соотношения для коэффициентов гармонической линеаризации, найдем

$$\begin{aligned}
 q(A) &= \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right], \\
 q'(A) &= -\frac{2c(b-a)}{\pi A^2}.
 \end{aligned}$$

Полученные формулы для коэффициентов гармонической линеаризации НЗ с неоднозначной характеристикой сведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2. Коэффициенты гармонической линеаризации НЗ с неоднозначной характеристикой

№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$q(A) = \frac{k}{\pi} \left[\arcsin \frac{b_1}{A} + \arcsin \frac{b_2}{A} + \right. \\ \left. + \frac{b_1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{A} \right)^2} + \frac{b_2}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{A} \right)^2} \right],$ $q'(A) = \frac{k(b_2^2 - b_1^2)}{\pi A^2}, \quad A \geq b_1$
2		$q(A) = \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2a}{A} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(1 - \frac{2a}{A} \right) \sqrt{\frac{a}{A} \left(1 - \frac{a}{A} \right)} \right],$ $q'(A) = -\frac{4ka}{\pi A} \left(1 - \frac{a}{A} \right), \quad A \geq a$
3		$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A} \right)^2},$ $q'(A) = -\frac{4cb}{\pi A^2}, \quad A \geq b$
4		$q(A) = \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2} \right],$ $q'(A) = -\frac{2c(b-a)}{\pi A^2}$

3.3. Исследование симметричных автоколебаний

При использовании метода гармонической линеаризации, естественно, принимается, что гипотеза фильтра выполняется. Тогда, как было показано, если в системе возникает периодический процесс, то на выходе линейной части и на входе нелинейного звена он является гармоническим: $e = A \sin \omega t$. Поэтому периодический режим однозначно определяется частотой ω и амплитудой A , и исследование периодического процесса сводится к определению этих параметров.

Основное условие возникновения периодического процесса. В линейной системе (см. рис. 3.2) могут возникнуть гармонические колебания, если ее характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни, или, что то же, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы проходит через точку $(-1, j0)$, т.е. если выполняется равенство

$$W_n(A)W_n(j\omega) = -1. \quad (3.12)$$

Это соотношение является уравнением относительно неизвестных параметров, частоты ω и амплитуды A и определяет *основное условие возникновения периодических процессов* в рассматриваемой системе. Автоколебания в системе возможны, если это уравнение имеет действительные положительные корни.

3.3.1. Аналитический способ исследования автоколебаний.

Подставив выражения для передаточных функций и освободившись от дроби, основное условие (3.12) можно представить в виде

$$X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0,$$

или

$$X(A, \omega) = 0, \quad Y(A, \omega) = 0. \quad (3.13)$$

Если последняя система уравнений имеет решение A^*, ω^* ($A^* > 0, \omega^* > 0$), то это значит, что гармонически линеаризованное уравнение имеет решение $e = A^* \sin \omega^* t$, которое описывает периодический процесс. Этот процесс реально можно наблюдать, если указанное решение орбитально устойчиво или асимптотически орбитально устойчиво. Решение $e = A^* \sin \omega^* t$ описывает автоколебания, если оно асимптотически орбитально устойчиво. Таким образом, исследование автоколебаний сводится к решению уравнений (3.13) и определению асимптотической орбитальной устойчивости.

В случае НЗ с однозначной характеристикой его передаточная функция имеет вид $W_n(A) = q(A)$, а передаточная функция разомкнутой системы — вид $W(A, p) = W_n(p)q(A)$.

Пусть передаточная функция линейной части имеет вид $W_n(p) = Q(p)/R(p)$. Тогда основное условие возникновения периодического

процесса примет вид

$$q(A)Q(j\omega) + R(j\omega) = 0,$$

или

$$q(A)X_Q(\omega) + X_R(\omega) = 0,$$

$$q(A)Y_Q(\omega) + Y_R(\omega) = 0,$$

где $X_Q(\omega)$, $X_R(\omega)$ — вещественные части, $Y_Q(\omega)$, $Y_R(\omega)$ — мнимые части $Q(j\omega)$ и $R(j\omega)$ соответственно. Разрешив первое уравнение последней системы уравнений относительно $q(A)$ и подставив его во второе уравнение, получим

$$q(A) = -\frac{X_R(\omega)}{X_Q(\omega)},$$

$$-X_R(\omega)Y_Q(\omega) + X_Q(\omega)Y_R(\omega) = 0.$$

Частота определяется из второго уравнения и не зависит от характеристики НЗ. Таким образом, в случае нелинейного звена с однозначной характеристикой частота периодических процессов зависит только от свойства линейной части.

Рассмотрим вопрос асимптотически орбитальной устойчивости периодического процесса. Пусть в результате возмущения амплитуда колебаний $e = A^* \sin \omega^* t$ изменится и примет значение $A = A^* + \Delta A$. Колебания будут асимптотически орбитально устойчивы, если со временем амплитуда примет первоначальное значение, т.е. $\Delta A \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Начнем исследование этого вопроса со случая, когда характеристика НЗ является однозначной, и воспользуемся эвристическим приемом. Для того чтобы после возмущения амплитуда стремилась к первоначальному значению, колебания должны затухать при увеличении амплитуды ($\Delta A > 0$) и расходиться при ее уменьшении ($\Delta A < 0$). А это возможно, если при изменении амплитуды коэффициент гармонической линеаризации $q(A)$ изменяется таким образом, что линеаризованная система устойчива при увеличении амплитуды и неустойчива при ее уменьшении.

Пусть разомкнутая система (линейная часть) устойчива или маргинально устойчива, т.е. ее характеристическое уравнение кроме левых корней имеет корни на мнимой оси. Тогда замкнутая система будет устойчива при увеличении амплитуды, если в соответствии с критерием Найквиста годограф частотной передаточной функции разомкнутой системы $W(j\omega) = q(A)W_n(j\omega)$ не охватывает точку $(-1, j0)$; замкнутая система будет неустойчивой при уменьшении амплитуды, если указанный годограф охватывает точку $(-1, j0)$.

А эти условия будут выполнены, если коэффициент гармонической линеаризации $q(A)$ будет убывающей функцией в окрестности точки $A = A^*$, т. е. если выполняется неравенство

$$\left. \frac{dq(A)}{dA} \right|_{A=A^*} < 0. \quad (3.14)$$

В случае, когда НЗ имеет неоднозначную характеристику, для получения условия асимптотической орбитальной устойчивости воспользуемся критерием устойчивости Михайлова. Основное условие возникновения периодического процесса соответствует прохождению кривой Михайлова через начало координат. В условии (3.13) левые части $X(A, \omega)$ и $Y(A, \omega)$ представляют собой вещественные и мнимые части характеристического вектора. Поэтому уравнение кривой Михайлова гармонически линеаризованной системы можно записать в виде

$$X = X(A, \omega), \quad Y = Y(A, \omega).$$

Пусть ω^* , A^* — соответственно частота и амплитуда периодического процесса. Если по приведенным уравнениям при $A = A^*$ построить кривую Михайлова, то она при $\omega = \omega^*$ пройдет через начало координат (рис. 3.8). И чтобы периодический процесс был асимптотически орбитально устойчив, нужно, чтобы при увеличении амплитуды кривая Михайлова деформировалась так, чтобы выполнялся критерий Михайлова, т. е. чтобы она охватывала n квадрантов. А это произойдет, если при увеличении амплитуды кривая Михайлова в окрестности начала координат сместится вправо относительно направления касательной. Вектор касательной в начале координат имеет вид

$$\mathbf{K} = \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* \mathbf{i} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* \mathbf{j},$$

где

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* = \left. \frac{\partial X(A^*, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega^*}, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* = \left. \frac{\partial Y(A^*, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega^*}$$

и $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — орты координатных осей, т. е. единичные векторы, направления которых совпадают с положительными направлениями осей абсцисс и ординат соответственно.

Направление деформации кривой Михайлова при возрастании амплитуды определяется вектором

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial X}{\partial A} \right)^* \mathbf{i} + \left(\frac{\partial Y}{\partial A} \right)^* \mathbf{j}.$$

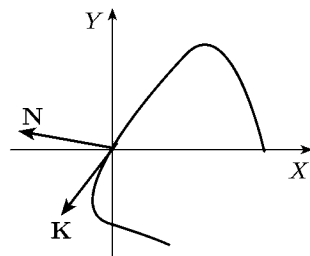


Рис. 3.8. Кривая Михайлова гармонически линеаризованной нелинейной системы

Звездочка при частных производных, как и выше, означает, что производные вычисляются в начале координат. Чтобы при возрастании амплитуды линейаризованная система стала устойчивой, вектор $\mathbf{N}$ должен быть направлен по отношению к вектору $\mathbf{K}$ вправо (см. рис. 3.8). А это будет иметь место, если векторы $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$ и их векторное произведение $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \times \mathbf{K}$ образуют правую тройку (т.е. если смотреть с конца вектора $\mathbf{Z}$, то кратчайший поворот вектора $\mathbf{N}$ до совмещения с вектором $\mathbf{K}$ происходит против часовой стрелки).

Вектор $\mathbf{Z}$ как векторное произведение векторов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{K}$ можно определить следующим образом:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)^* & \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)^* & 0 \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)^* & \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)^* \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* & \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* \end{vmatrix} \mathbf{k} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)^* \right] \mathbf{k}.$$

Здесь $\mathbf{k}$ — орт вертикальной оси координат, причем орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ образуют правую тройку.

Тройка векторов $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{Z}$ будет образовывать правую тройку, если вектор $\mathbf{Z}$ будет направлен параллельно вектору $\mathbf{k}$. Поэтому чтобы линейаризованная система при увеличении амплитуды была устойчива, множитель при орте $\mathbf{k}$ должен быть больше нуля. Таким образом, условие асимптотической орбитальной устойчивости при неоднозначной характеристике нелинейного звена принимает вид

$$\left[\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)^* \right] > 0.$$

Пример 3.1. В типовой структурной схеме нелинейной системы нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности с параметрами $a = 0,45$ и $c = \pi$, передаточная функция линейной части имеет вид $W_n = 4,1/(0,5p + 1)^2$ и задающее воздействие $g = \text{const}$. Требуется исследовать автоколебания.

Решение. Передаточная функция нелинейного звена имеет вид (см. табл. 3.1, № 4)

$$W_n = q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} = \frac{4}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{0,45}{A}\right)^2}.$$

Условие возникновения периодического процесса (3.13) можно записать в виде

$$-0,25\omega^3 j - \omega^2 + j\omega + \frac{16,4}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{0,45}{A}\right)^2} = 0,$$

или

$$-\omega^2 + \frac{16,4}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{0,45}{A}\right)^2} = 0, \quad -0,25\omega^3 + \omega = 0.$$

Второе уравнение имеет положительное решение $\omega = 2$. Подставив это значение частоты, первое уравнение можно преобразовать в биквадратное уравнение

$$A^4 - 4,1^2 A^2 + 4,1^2 \cdot 0,45^2 = 0.$$

Это уравнение имеет следующие два положительных решения: $A_1 \cong 4,08$ и $A \cong 0,454$. Проверим условие устойчивости (3.14). Производная

$$\frac{dq(A)}{dA} = \frac{4(0,405 - A^2)}{A^3 \sqrt{A^2 - 0,45^2}}$$

при $A_1 \cong 4,08$ принимает отрицательное значение, а при $A \cong 0,454$ — положительное значение. Следовательно, колебания с первой амплитудой являются асимптотически орбитально устойчивыми, а со второй амплитудой таковыми не являются. Таким образом, в рассматриваемой системе будет совершаться автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A_1 \cong 4,08$.

3.3.2. Графический (частотный) метод исследования автоколебаний. Уравнение (3.12), определяющее условие возникновения периодического процесса, можно решить графически. Для этого представим его следующим образом:

$$W_{\pi}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{н}}(A)}.$$

Строим амплитудно-фазовую характеристику линейной части, т.е. годограф функции $W_{\pi}(j\omega)$, и обратную амплитудно-фазовую характеристику нелинейного звена с обратным знаком, т.е. годограф функции $-1/W_{\text{н}}(A)$. При построении годографа $W_{\pi}(j\omega)$ изменяется частота, при построении годографа $-1/W_{\text{н}}(A)$ изменяется амплитуда.

Если рассматриваемое уравнение имеет решение, то указанные характеристики пересекаются (рис. 3.9). В точке пересечения по годографу $W_{\pi}(j\omega)$ находим частоту, а по годографу $-1/W_{\text{н}}(A)$ — амплитуду периодического процесса.

Устойчивость периодического процесса устанавливается следующим образом. Как уже отмечалось, если линейная часть устойчива или маргинально устойчива, периодический процесс будет асимптотически орбитально устойчив, если при увеличении амплитуды амплитудно-фазовая характеристика гармонически линеаризованной системы не охватывает точку $(-1, j0)$. В случае нелинейного звена с однозначной характеристикой это условие будет выполнено, если передаточная функция нелинейного звена $W_{\text{н}}(A)$ или обратная с отрицательным знаком функция $-1/W_{\text{н}}(A)$ является убывающей функцией.

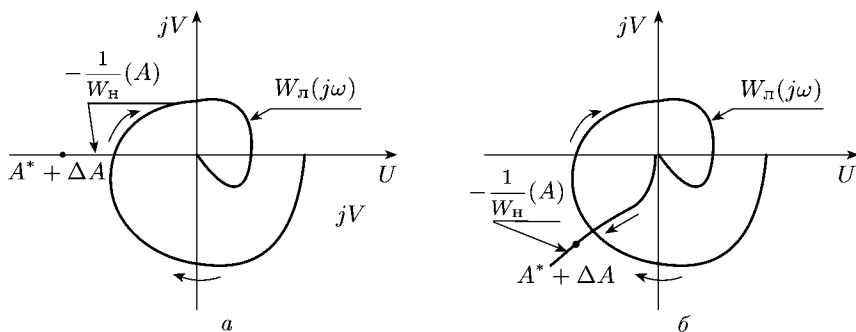


Рис. 3.9. К графическому методу исследования автоколебаний

Это значит, что в окрестности точки пересечения двух характеристик амплитуда должна возрастать в направлении, указанном стрелкой, или точка на годографе $-1/W_n(A)$, соответствующая амплитуде $A^* + \Delta A$ ($\Delta A > 0$), должна находиться слева от годографа $W_\pi(j\omega)$ при движении по нему в сторону возрастания частоты (рис. 3.9, а). Данное утверждение остается справедливым и в том случае, когда нелинейное звено имеет неоднозначную характеристику (рис. 3.9, б).

Итак, если линейная часть устойчива или marginally устойчива, то периодический процесс будет асимптотически орбитально устойчив, когда точка на годографе $-1/W_n(A)$, соответствующая амплитуде $A^* + \Delta A$ ($\Delta A > 0$), находится слева от амплитудно-фазовой частотной характеристики при движении по ней в сторону возрастания частоты.

Рассмотренный графический (частотный) метод был предложен Л. С. Гольдфарбом и называется *методом Гольдфарба* [47].

Уравнение, определяющее условие возникновения периодического процесса, можно также представить в виде

$$W_\pi^{-1}(j\omega) = -W_n(A),$$

и при графическом его решении можно строить обратную амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части и с обратным знаком амплитудно-фазовую характеристику нелинейного звена. По точке пересечения этих характеристик можно определить частоту и амплитуду периодического процесса.

Асимптотическая орбитальная устойчивость определяется точно так же, как и при методе Гольдфарба: если линейная часть устойчива или marginally устойчива, то периодический процесс будет асимптотически орбитально устойчив, когда точка на годографе $-W(A)$, соответствующая амплитуде $A^* + \Delta A$ ($\Delta A > 0$), находится слева от обратной амплитудно-фазовой частотной характеристики при движении по ней в сторону возрастания частоты.

3.4. Несимметричные колебания

Колебания на входе нелинейного звена (НЗ) будут несимметричными, если установившаяся ошибка отлична от нуля или характеристика НЗ является несимметричной относительно начала координат. Здесь мы ограничимся случаем, когда характеристики НЗ являются симметричными относительно начала координат и несимметричность колебаний обуславливается только наличием ненулевой установившейся ошибки. При этом принимается, что установившаяся ошибка является постоянной.

В этом случае на входе НЗ (см. рис. 3.1) имеем $e = e^0 + A \sin \omega t$. Отсюда находим

$$\sin \omega t = \frac{1}{A}(e - e^0),$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{\omega} p \sin \omega t = \frac{1}{\omega A} p(e - e^0).$$

На выходе НЗ после гармонической линеаризации имеем

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t.$$

Положив $\sigma^0 = a_0/2$ и подставив сюда выражения для синуса и косинуса, получим

$$\tilde{\sigma} = \sigma^0 + \left[q(A, e^0) + q'(A, e^0) \frac{p}{\omega} \right] (e - e^0),$$

где

$$q = q(A, e^0) = \frac{b_1}{A}, \quad q' = q'(A, e^0) = \frac{a_1}{A}.$$

Сделав замену переменных $\psi = \omega t$ в формулах для коэффициентов Фурье и подставив их в последние выражения, найдем

$$\sigma^0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^0 + A \sin \psi) d\psi, \quad (3.15a)$$

$$q(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(e^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (3.15б)$$

$$q'(A) = \frac{a_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(e^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (3.15в)$$

3.4.1. Вычисление коэффициентов гармонической линеаризации. В этом случае коэффициенты гармонической линеаризации вычисляются так же, как и при симметричных колебаниях.

Кусочно линейная характеристика с насыщением. Выходной сигнал НЗ на интервалах $[0, \psi_1]$, $[\psi_2, \psi_3]$ и $[\psi_4, 2\pi]$ описывается функцией $k(e^0 + A \sin \psi)$, а на интервалах $[\psi_1, \psi_2]$ и $[\psi_3, \psi_4]$ принимает постоянные значения c и $-c$ соответственно (рис. 3.10). Поэтому

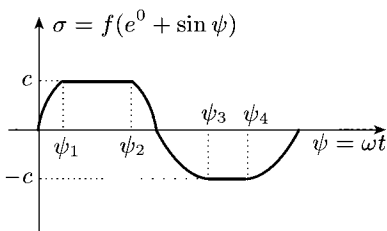
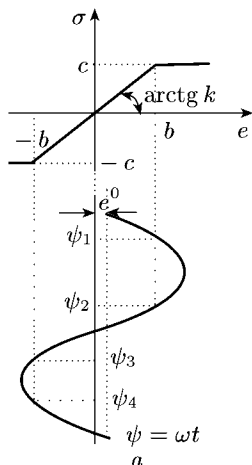


Рис. 3.10. Несимметричные колебания на входе и выходе НЗ с кусочно линейной характеристикой с насыщением

формулы (3.15) для коэффициентов гармонической линеаризации принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\psi_1} k(e^0 + A \sin \psi) d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c d\psi + \int_{\psi_2}^{\psi_3} k(e^0 + A \sin \psi) d\psi - \\ &\quad - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c d\psi + \int_{\psi_4}^{2\pi} k(e^0 + A \sin \psi) d\psi, \\ q &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{\psi_1} k(e^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \sin \psi d\psi + \\ &\quad + \int_{\psi_2}^{\psi_3} k(e^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c \sin \psi d\psi + \int_{\psi_4}^{2\pi} k(e^0 + A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{\psi_1} k(e^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \cos \psi d\psi + \int_{\psi_2}^{\psi_3} k(e^0 + \\ &\quad + A \sin \psi) \cos \psi d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c \cos \psi d\psi + \int_{\psi_4}^{2\pi} k(e^0 + A \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned}$$

Из рис. 3.10, а имеем

$$\begin{aligned} e^0 + A \sin \psi_1 &= b, & e^0 + A \sin \psi_2 &= b, \\ e^0 + A \sin \psi_3 &= -b, & e^0 + A \sin \psi_4 &= -b. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \arcsin \frac{b - e^0}{A}, \quad \psi_2 = \pi - \arcsin \frac{b - e^0}{A}, \\ \psi_3 &= \pi + \arcsin \frac{b + e^0}{A}, \quad \psi_4 = 2\pi - \arcsin \frac{b + e^0}{A}.\end{aligned}$$

Проинтегрировав полученные выше выражения для коэффициентов гармонической линейаризации, с учетом последних выражений получим

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \frac{k}{\pi} \left\{ A \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b + e^0}{A} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{b - e^0}{A} \right)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (b + e^0) \arcsin \frac{b + e^0}{A} - (b - e^0) \arcsin \frac{b - e^0}{A} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q &= \frac{k}{\pi} \left[\arcsin \frac{b + e^0}{A} + \arcsin \frac{b - e^0}{A} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b + e^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b + e^0}{A} \right)^2} + \frac{b - e^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b - e^0}{A} \right)^2} \right],\end{aligned}$$

$$q' = 0, \quad A \geq b + |e^0|.$$

Релейная характеристика с зоной нечувствительности и гистерезисом. На рис. 3.11 представлены кривые входного и выходного сигналов НЗ. Из

рис. 3.11, б следует, что выходной сигнал НЗ на интервалах $[0, \psi_1]$, $[\psi_2, \psi_3]$ и $[\psi_4, 2\pi]$ равен нулю, а на интервалах $[\psi_1, \psi_2]$ и $[\psi_3, \psi_4]$ при-

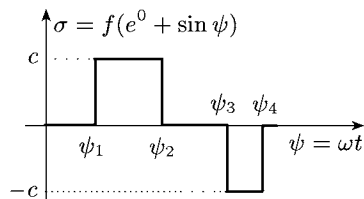
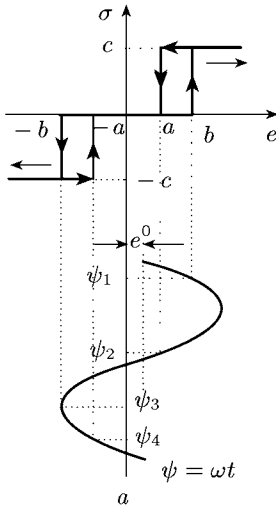


Рис. 3.11. Несимметричные колебания на входе и выходе НЗ с релейной характеристикой с зоной нечувствительности и гистерезисом

нимает постоянные значения c и $-c$ соответственно. Поэтому формулы для коэффициентов гармонической линейаризации принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2} c \, d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c \, d\psi \right), \\ q &= \frac{1}{\pi A} \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2} c \sin \psi \, d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c \sin \psi \, d\psi \right), \\ q' &= \frac{1}{\pi A} \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2} c \cos \psi \, d\psi - \int_{\psi_3}^{\psi_4} c \cos \psi \, d\psi \right).\end{aligned}$$

Для пределов интегрирования (см. рис. 3.11, а) имеем

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \arcsin \frac{b - e^0}{A}, \quad \psi_2 = \pi - \arcsin \frac{a - e^0}{A}, \\ \psi_3 &= \pi + \arcsin \frac{b + e^0}{A}, \quad \psi_4 = 2\pi - \arcsin \frac{a + e^0}{A}.\end{aligned}$$

Проинтегрировав полученные выше выражения для коэффициентов гармонической линейаризации, с учетом последних выражений получим

$$\sigma^0 = \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{a + e^0}{A} + \arcsin \frac{b + e^0}{A} - \arcsin \frac{a - e^0}{A} - \arcsin \frac{b - e^0}{A} \right), \quad (3.16a)$$

$$\begin{aligned}q &= \frac{c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b + e^0}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b - e^0}{A} \right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 - \left(\frac{a + e^0}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a - e^0}{A} \right)^2} \right], \quad (3.16б)\end{aligned}$$

$$q' = -\frac{2(b - a)c}{\pi A^2}, \quad A \geq b + |e^0|. \quad (3.16в)$$

Релейная характеристика с гистерезисом. Эту характеристику (см. рис. 2.1, в) можно рассматривать как релейную характеристику с зоной нечувствительности и гистерезисом при $a = -b$. Поэтому, сделав подстановку $a = -b$ в формулы (3.16), получим

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b + e^0}{A} - \arcsin \frac{b - e^0}{A} \right), \\ q &= \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b + e^0}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b - e^0}{A} \right)^2} \right], \\ q' &= -\frac{4bc}{\pi A^2}, \quad A \geq b + |e^0|.\end{aligned}$$

Релейная характеристика с зоной нечувствительности. Эта характеристика (см. рис. 2.1, б) является частным случаем релейной характеристики с зоной нечувствительности и гис-

терезисом при $b = a$. Поэтому, сделав подстановку $b = a$ в формулы (3.16а)–(3.16в), получим

$$\sigma^0 = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{a + e^0}{A} - \arcsin \frac{a - e^0}{A} \right),$$

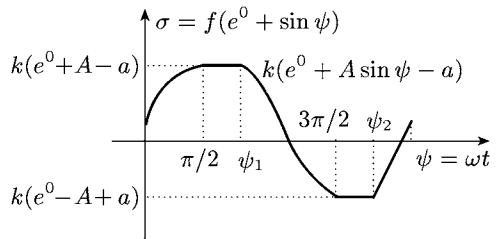
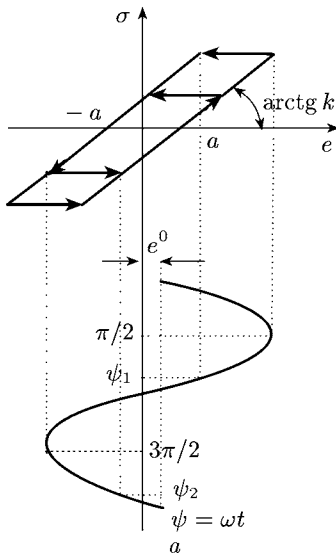
$$q = \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a + e^0}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a - e^0}{A} \right)^2} \right],$$

$$q' = 0, \quad A \geq |e^0|.$$

Идеальная релейная характеристика. Эта характеристика (см. рис. 2.1, а) является частным случаем релейной характеристики с зоной нечувствительности при $a = 0$. Поэтому, сделав подстановку $a = 0$ в предыдущие формулы, получим

$$\sigma^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{e^0}{A}, \quad q = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{e^0}{A} \right)^2}, \quad q' = 0, \quad A \geq |e^0|.$$

Люфт. Характеристика и кривые входных и выходных сигналов НЗ представлены на рис. 3.12. Из рис. 3.12, б следует, что выходной сигнал НЗ на интервалах $[0, \pi/2]$ и $[\psi_2, 2\pi]$ описывается функцией $k(e^0 + A \sin \psi - a)$, на интервале $[\psi_1, 3\pi/2]$ — функцией $k(e^0 + A \sin \psi + a)$, на интервалах $[\pi/2, \psi_1]$ и $[3\pi/2, \psi_2]$ принимает постоянные значения



б

Рис. 3.12. Несимметричные колебания на входе и выходе НЗ с люфтом

$k(e^0 + A - a)$ и $k(e^0 - A + a)$ соответственно. Поэтому формулы (3.15) для коэффициентов гармонической линейризации принимают вид

$$\sigma^0 = \frac{k}{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} (e^0 + A \sin \psi - a) d\psi + \int_{\pi/2}^{\psi_1} (e^0 + A - a) d\psi + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\psi_1}^{3\pi/2} (e^0 + A \sin \psi + a) d\psi + \int_{3\pi/2}^{\psi_2} (e^0 - A + a) d\psi + \\
& \quad + \int_{\psi_2}^{2\pi} (e^0 + A \sin \psi - a) d\psi \Big], \\
q = & \frac{k}{\pi A} \left[\int_0^{\pi/2} (e^0 + A \sin \psi - a) \sin \psi d\psi + \int_{\pi/2}^{\psi_1} (e^0 + A - a) \sin \psi d\psi + \right. \\
& + \int_{\psi_1}^{3\pi/2} (e^0 + A \sin \psi + a) \sin \psi d\psi + \int_{3\pi/2}^{\psi_2} (e^0 - A + a) \sin \psi d\psi + \\
& \quad \left. + \int_{\psi_2}^{2\pi} (e^0 + A \sin \psi - a) \sin \psi d\psi \right], \\
q' = & \frac{k}{\pi A} \left[\int_0^{\pi/2} (e^0 + A \sin \psi - a) \cos \psi d\psi + \int_{\pi/2}^{\psi_1} (e^0 + A - a) \cos \psi d\psi + \right. \\
& + \int_{\psi_1}^{3\pi/2} (e^0 + A \sin \psi + a) \cos \psi d\psi + \int_{3\pi/2}^{\psi_2} (e^0 - A + a) \cos \psi d\psi + \\
& \quad \left. + \int_{\psi_2}^{2\pi} (e^0 + A \sin \psi - a) \cos \psi d\psi \right].
\end{aligned}$$

Справедливы следующие равенства (см. рис. 3.12, а):

$$e^0 + A - 2a = e^0 + A \sin \psi_1, \quad e^0 - A + 2a = e^0 + A \sin \psi_2.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\sin \psi_1 &= 1 - \frac{2a}{A}, \quad \psi_1 = \pi - \arcsin\left(1 - \frac{2a}{A}\right), \\
\cos \psi_1 &= \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2a}{A}\right)^2}, \\
\sin \psi_2 &= -\left(1 - \frac{2a}{A}\right), \quad \psi_2 = 2\pi - \arcsin\left(1 - \frac{2a}{A}\right), \\
\cos \psi_2 &= \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2a}{A}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Проинтегрировав полученные выше выражения для коэффициентов гармонической линеаризации, с учетом этих выражений получим

$$\sigma^0 = ke^0,$$

$$\begin{aligned}
q(A) &= \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2a}{A}\right) + \left(1 - \frac{2a}{A}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{A}\right)^2} \right], \\
q'(A) &= -\frac{4ka}{\pi A} \left(1 - \frac{a}{A}\right), \quad A > a + |e^0|.
\end{aligned}$$

Таблица 3.3. Коэффициенты гармонической линейизации для НЗ с однозначной характеристикой при несимметричных колебаниях

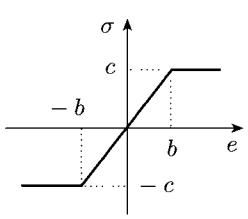
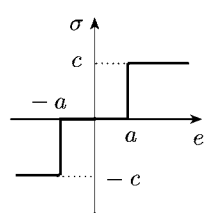
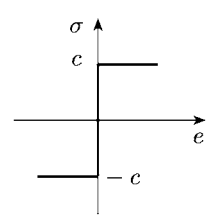
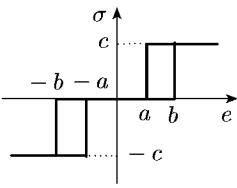
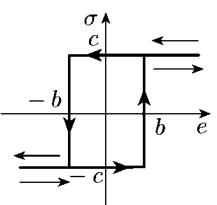
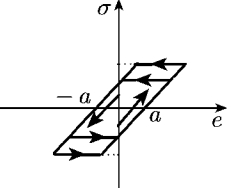
№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линейизации
1		$\sigma^0 = \frac{k}{\pi} \left\{ A \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b+e^0}{A} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{b-e^0}{A} \right)^2} \right] + \right.$ $\left. + (b+e^0) \arcsin \frac{b+e^0}{A} - (b-e^0) \arcsin \frac{b-e^0}{A} \right\},$ $q = \frac{k}{\pi} \left[\arcsin \frac{b+e^0}{A} + \arcsin \frac{b-e^0}{A} + \right.$ $\left. + \frac{b+e^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b+e^0}{A} \right)^2} + \frac{b-e^0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b-e^0}{A} \right)^2} \right],$ $q' = 0, \quad A \geq b + e^0 $
2		$\sigma^0 = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{a+e^0}{A} - \arcsin \frac{a-e^0}{A} \right),$ $q = \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a+e^0}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a-e^0}{A} \right)^2} \right],$ $q' = 0, \quad A \geq e^0 $
3		$\sigma^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{e^0}{A},$ $q = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{e^0}{A} \right)^2},$ $q' = 0, \quad A \geq e^0 $

Таблица 3.4. Коэффициенты гармонической линеаризации для НЗ с неоднозначной характеристикой при несимметричных колебаниях

№	Нелинейные характеристики	Коэффициенты гармонической линеаризации
1		$\sigma^0 = \frac{c}{2\pi} \left(\arcsin \frac{a+e^0}{A} + \arcsin \frac{b+e^0}{A} - \arcsin \frac{a-e^0}{A} - \arcsin \frac{b-e^0}{A} \right),$ $q = \frac{c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b+e^0}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b-e^0}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a+e^0}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a-e^0}{A} \right)^2} \right],$ $q' = -\frac{2(b-a)c}{\pi A^2}, \quad A \geq b + e^0 $
2		$\sigma^0 = \frac{c}{\pi} \left(\arcsin \frac{b+e^0}{A} - \arcsin \frac{b-e^0}{A} \right),$ $q = \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b+e^0}{A} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b-e^0}{A} \right)^2} \right],$ $q' = -\frac{4bc}{\pi A^2}, \quad A \geq b + e^0 $
3		$\sigma^0 = ke^0,$ $q(A) = \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2a}{A} \right) + \left(1 - \frac{2a}{A} \right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a}{A} \right)^2} \right],$ $q'(A) = -\frac{4ka}{\pi A} \left(1 - \frac{a}{A} \right), \quad A > a + e^0 $

Полученные выше коэффициенты гармонической линеаризации при несимметричных колебаниях для нелинейных звеньев с однозначной характеристикой сведены в табл. 3.3, а с неоднозначной характеристикой — в табл. 3.4.

3.4.2. Исследование несимметричных колебаний. Рассмотрим систему с двумя внешними воздействиями (рис. 3.13). Уравнения этой системы имеют вид

$$y = W_1(p)W_2(p)\sigma + W_2(p)h, \quad \sigma = f(e), \quad e = g - y.$$

Введем обозначения

$$W_1(p) = R_1(p)/Q_1(p), \quad W_2(p) = R_2(p)/Q_2(p),$$

$$R(p) = R_1(p)R_2(p), \quad Q(p) = Q_1(p)Q_2(p), \quad S(p) = R_2(p)Q_1(p).$$

Тогда, исключив переменные y и σ , уравнения системы можно записать следующим образом:

$$Q(p)e + R(p)f(e) = Q(p)g - S(p)h.$$

Пусть внешние воздействия являются константами. Тогда $pg = 0$, $ph = 0$, и правая часть принимает вид $Q(0)g - S(0)h$. Поэтому в этом случае уравнение можно записать в виде

$$Q(p)e + R(p)f(e) = Q(0)g - S(0)h.$$

Правая часть этого уравнения является константой. И если она отлична от нуля, то в системе с нелинейным звеном с симметричной

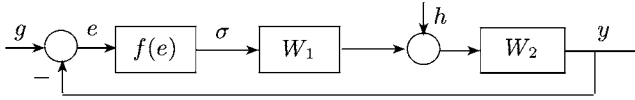


Рис. 3.13. Структурная схема нелинейной системы с двумя входами

относительно начала координат характеристикой могут возникнуть несимметричные колебания

$$e = e^0 + e^*, \quad e^* = A \sin \omega t.$$

Произведя гармоническую линеаризацию, на выходе нелинейного звена получим

$$f(e^0 + A \sin \omega t) = \sigma^0 + \left[q(A, e^0) + q'(A, e^0) \frac{p}{\omega} \right] e^*.$$

С учетом этого и предыдущего соотношений уравнение системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left[Q(p) + R(p) \left(q(A, e^0) + q'(A, e^0) \frac{p}{\omega} \right) \right] e^* + Q(p)e^0 + R(p)\sigma^0 = \\ = Q(0)g - S(0)h. \end{aligned}$$

Выделив отсюда уравнения для постоянных и переменных составляющих, получим

$$Q(0)e^0 + R(0)\sigma^0 = Q(0)g - S(0)h, \quad (3.17a)$$

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q(A, e^0) + q'(A, e^0) \frac{p}{\omega} \right) \right] e^* = 0.$$

Подставим в последнее уравнение

$$e^* = A \sin \omega t = \frac{A}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}).$$

Тогда, так как $pe^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$ и $pe^{-j\omega t} = -j\omega e^{-j\omega t}$, получим

$$\frac{A}{2j} \{ [Q(j\omega) + R(j\omega)(q(A, e^0) + jq'(A, e^0))] e^{j\omega t} - \\ - [Q(-j\omega) + R(-j\omega)(q - jq')] e^{-j\omega t} \} = 0.$$

Это тождество будет выполнено, если множители при экспонентах будут равны нулю:

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(q(A, e^0) + jq'(A, e^0)) = 0, \quad (3.176)$$

$$Q(-j\omega) + R(-j\omega)(q(A, e^0) - jq'(A, e^0)) = 0.$$

У этих уравнений различаются только мнимые части, причем только знаком. Поэтому они эквивалентны, и можно ограничиться рассмотрением одного уравнения (3.176).

В случае несимметричных колебаний неизвестными являются три параметра: постоянная составляющая (смещение) e^0 , частота ω и амплитуда A . Смещение e^0 находится из уравнения (3.17а). Поставив найденное значение смещения, из уравнения (3.176) определим частоту и амплитуду. После подстановки выражения для смещения уравнение (3.176) решается так же, как и в случае определения симметричных колебаний.

Пример 3.2. В нелинейной системе (см. рис. 3.13) нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику с параметром $c = \pi$, передаточные функции линейных звеньев равны $W_1 = 1/(0,5p + 1)$ и $W_2 = 1/(0,5p + 1)p$, внешние воздействия равны $g = 1(t)$ и $h = 0,5 \cdot 1(t)$. Требуется исследовать автоколебания.

Решение. В данном случае

$$R_1(p) = R_2(p) = 1, \quad Q_1(p) = 0,5p + 1, \quad Q_2(p) = (0,5p + 1)p,$$

$$Q(p) = Q_1(p)Q_2(p) = (0,5p + 1)^2 p, \quad S(p) = R_2(p)Q_1(p) = 0,5p + 1.$$

Коэффициенты гармонической линеаризации для идеальной релейной характеристики при несимметричных колебаниях имеют вид (см. табл. 3.3, № 3)

$$\sigma^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{e^0}{A}, \quad q = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{e^0}{A}\right)^2}, \quad q' = 0, \quad A \geq |e^0|.$$

Так как $Q(0) = 0$, $R(0) = 1$ и $S(0) = 1$, уравнение (3.17а) принимает вид

$$\arcsin \frac{e^0}{A} = -0,25, \quad \text{или} \quad \frac{e^0}{A} = -\sin 0,25 \cong -0,25.$$

Уравнение (3.176), после подстановки в него выражений для коэффициентов гармонической линеаризации и выражений $Q(j\omega) =$

$= -0,25j\omega^3 - \omega^2 + j\omega$, $R(j\omega) = 1$ и $e^0 = -0,25A$, принимает вид

$$-0,25j\omega^3 - \omega^2 + j\omega + \frac{4}{A} \sqrt{1 - (0,25)^2} = 0,$$

или

$$-0,25\omega^3 + \omega = 0, \quad -\omega^2 + \frac{4}{A} \sqrt{1 - (0,25)^2} = 0.$$

Отсюда находим $\omega = 2$ и $A \cong 0,97$. Смещение равно $e^0 = -0,25A = -0,24$. Проверим асимптотическую орбитальную устойчивость. После исключения e^0 для $q(A)$ имеем $q = 4 \sqrt{1 - (0,25)^2}/A$. Так как $q' = 0$, то можно воспользоваться условием устойчивости (3.14). Это условие в данном случае выполняется:

$$\left. \frac{dq(A)}{dA} \right|_{A=0,97} = -\frac{4 \sqrt{1 - 0,25^2}}{A^2} \Big|_{A=0,97} < 0.$$

Следовательно, в рассматриваемой системе возникнут несимметричные автоколебания с частотой $\omega = 2$ и амплитудой $A \cong 0,97$. Автоколебания смещены на $e^0 = -0,24$.

3.5. Вынужденные колебания и вибрационная линеаризация

Рассмотрим опять нелинейную систему, структурная схема которой может быть представлена в виде соединения нелинейного звена и двух линейных звеньев с двумя внешними воздействиями (см. рис. 3.13). Как было показано, уравнение такой системы можно привести к виду

$$Q(p)e + R(p)f(e) = Q(p)g - S(p)h. \quad (3.18)$$

Здесь $g = g(t)$ — задающее воздействие, $h = h(t)$ — возмущение. Пусть возмущение имеет вид $h = B \sin \omega^* t$ и задающее воздействие по сравнению с возмущением изменяется медленно: $g = g(t)$ за период $T = 2\pi/\omega^*$ почти не меняется. И пусть в системе возникает вынужденные колебания с частотой, равной частоте внешнего колебания. Тогда сигнал на входе нелинейного звена будет иметь вид

$$e = e^0 + e^*, \quad e^* = A \sin(\omega^* t + \varphi),$$

где A и φ — амплитуда и сдвиг фазы, которые необходимо найти. Нелинейная функция после гармонической линеаризации примет вид

$$f(e^0 + A \sin \omega^* t) = \sigma^0 + \left[q(A, e^0) + q'(A, e^0) \frac{p}{\omega^*} \right] e^*.$$

Здесь σ^0 , $q(A, e^0)$ и $q'(A, e^0)$ — коэффициенты гармонической линеаризации, которые определяются так же, как и при рассмотрении несимметричных автоколебаний, т.е. по формулам (3.15). Для типовых нелинейных характеристик они были получены в предыдущем параграфе.

Подставив выражения для e и $f(e)$ из последних двух соотношений в (3.18), получим

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q(A, e^0) + q'(A, e^0) \frac{p}{\omega^*} \right) \right] e^* + Q(p)e^0 + R(p)\sigma^0 = Q(p)g - S(p)h.$$

Выделив отсюда уравнения для медленно меняющихся и быстро меняющихся составляющих, получим

$$Q(p)e^0 + R(p)\sigma^0 = Q(p)g, \quad (3.19a)$$

$$\left[Q(p) + R(p) \left(q(A, e^0) + q'(A, e^0) \frac{p}{\omega^*} \right) \right] e^* = -S(p)h. \quad (3.19б)$$

Учитывая, что

$$e^* = A \sin(\omega^* t + \varphi) = \frac{A}{2j} (e^{j(\omega^* t + \varphi)} - e^{-j(\omega^* t + \varphi)}),$$

$$pe^{j(\omega^* t + \varphi)} = j\omega^* e^{j(\omega^* t + \varphi)}, \quad pe^{-j(\omega^* t + \varphi)} = -j\omega^* e^{j(\omega^* t + \varphi)},$$

последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{A}{2j} \{ [Q(j\omega^*) + R(j\omega^*)(q(A, e^0) + jq'(A, e^0))] e^{j(\omega^* t + \varphi)} - \\ - [Q(-j\omega^*) + R(-j\omega^*)(q(A, e^0) - jq'(A, e^0))] e^{-j(\omega^* t + \varphi)} \} = \\ = -\frac{B}{2j} [S(j\omega^*)e^{j\omega^* t} - S(-j\omega^*)e^{-j\omega^* t}]. \end{aligned}$$

Это тождество будет выполнено, если множители при экспонентах $e^{j\omega^* t}$ и $e^{-j\omega^* t}$ в левой и правой частях будут равны между собой:

$$A[Q(j\omega^*) + R(j\omega^*)(q(A, e^0) + jq'(A, e^0))] e^{j\varphi} = -BS(j\omega^*), \quad (3.19в)$$

$$A[Q(-j\omega^*) + R(-j\omega^*)(q(A, e^0) - jq'(A, e^0))] e^{-j\varphi} = -BS(-j\omega^*).$$

Эти два уравнения эквивалентны. Поэтому при исследовании процесса управления, сопровождающего колебаниями, достаточно рассмотреть уравнения (3.19в) совместно с уравнением (3.19а), описывающим медленные процессы (процессы управления).

3.5.1. Вынужденные колебания. Пусть задающее воздействие равно нулю. Тогда медленно изменяющаяся составляющая будет равна нулю, а колебания будут симметричными. И в этом случае для определения амплитуды и сдвига фазы вынужденных колебаний достаточно рассмотреть только уравнение (3.19в), которое при графическом методе решения удобно представить в виде [53]

$$Z(A) = Be^{-j\varphi}, \quad (3.20a)$$

где

$$Z(A) = -\frac{A[Q(j\omega^*) + R(j\omega^*)(q + jq')]}{S(j\omega^*)}. \quad (3.20б)$$

Здесь коэффициенты гармонической линеаризации определяются по формулам, которые были получены при рассмотрении симметричных

автоколебаний. Заметим, что $Z(A)$ является функцией только неизвестной амплитуды, так как частота известна.

При графическом методе определения амплитуды и сдвига фазы на комплексной плоскости строится окружность радиуса B и годограф

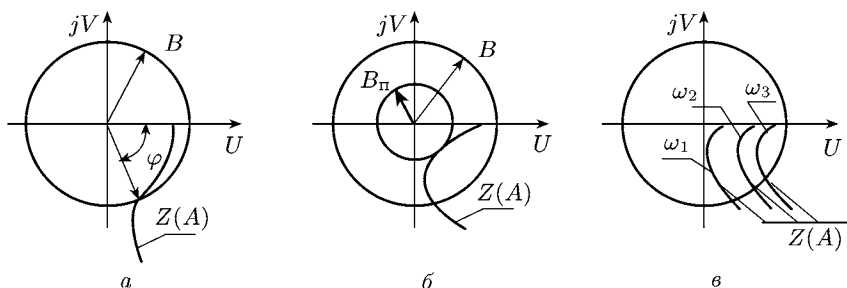


Рис. 3.14. К определению одночастотных вынужденных колебаний

вектора (комплексной функции) $Z(A)$ (рис. 3.14, а). В точке пресечения с окружностью по годографу находится амплитуда. Сдвиг фазы φ равен углу, который образует с осью абсцисс вектор, проведенный из начала координат в точку пересечения.

Годограф $Z(A)$ пересекает окружность, если радиус окружности B превышает некоторое пороговое значение $B_{\text{п}}$ (рис. 3.14, б). Если радиус окружности меньше порогового значения, то в системе будут происходить не одночастотные колебания, а сложные движения, включающие в себя и собственные колебания системы [53].

Построив годографы $Z(A)$ при различных значениях частоты внешнего воздействия (рис. 3.14, в) и определив пороговые значения, можно на координатной плоскости (ω, B) построить область, в которой существуют одночастотные вынужденные колебания. Эта область называется *областью захвата* [53].

Пример 3.3. В нелинейной системе (см. рис. 3.13) нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику с параметром $c = \pi/2$, передаточные функции линейных звеньев равны $W_1 = (0,01p + 1)/(0,8p + 1)p$ и $W_2 = 1/(0,2p + 1)$, внешние воздействия равны $g = 0$ и $h = -B \sin 10t$. Требуется найти пороговое значение амплитуды внешнего воздействия.

Решение. В данном случае

$$Q(j\omega) = -0,16 j\omega^3 - \omega^{*2} + j\omega^*, \quad R(j\omega) = 0,01 j\omega^* + 1,$$

$$S(j\omega) = -(-0,8\omega^{*2} + j\omega^*),$$

коэффициенты гармонической линеаризации (см. табл. 3.1) $q(A) = 4c/(\pi A) = 2/A$, $q'(A) = 0$ и формула (3.19в) принимает вид

$$A \left[-0,16 j\omega^3 - \omega^{*2} + j\omega^* + (0,01 j\omega^* + 1) \frac{2}{A} \right] = B(-0,8\omega^{*2} + j\omega^*)e^{-j\varphi}.$$

Подставив сюда $\omega^* = 10$ и $e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$, затем выделив вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} -100 A + 2 + 80 B \cos \varphi - 10 B \sin \varphi &= 0, \\ -150 A + 0,2 - 10 B \cos \varphi - 80 B \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Разрешив эту систему уравнений относительно синуса и косинуса, найдем

$$\cos \varphi = \frac{A - 0,024}{B}, \quad \sin \varphi = \frac{-2 A + 0,0055}{B}.$$

Отсюда, возвысив в квадрат и сложив, получим квадратное уравнение

$$A^2 - 0,014 A + 0,00012 - 0,2 B^2 = 0.$$

Это уравнение имеет положительный корень, если $B \geq 0,0188$. Следовательно, пороговое значение амплитуды $B_n = 0,0188$.

3.5.2. Вибрационная линейаризация. Пусть теперь задающее воздействие отлично от нуля и изменяется медленно по сравнению с колебательным процессом. В этом случае управляемый процесс и вынужденные колебания будут описываться уравнениями (3.19а)–(3.19в):

$$\begin{aligned} Q(p)e^0 + R(p)\sigma^0 &= Q(p)g, \\ A[Q(j\omega^*) + R(j\omega^*)(q(A, e^0) + jq'(A, e^0))] e^{j\varphi} &= -BS(j\omega^*). \end{aligned}$$

Здесь, как известно, σ^0 является функцией амплитуды A и ошибки управляемого процесса e^0 : $\sigma^0 = \sigma^0(A, e^0)$.

Для исследования управляемого процесса можно поступить следующим образом: из второго уравнения найти амплитуду A как функцию от e^0 и подставить в первое уравнение. При этом получим

$$Q(p)e^0 + R(p)\Phi(e^0) = Q(p)g, \quad (3.21)$$

где

$$\Phi(e^0) = \sigma^0(A(e^0), e^0). \quad (3.22)$$

Затем исследовать полученное уравнение, зависящее только от неизвестной ошибки e^0 .

Независимо от характеристики нелинейного звена функция $\Phi(e^0)$ оказывается гладкой, и ее можно линейаризовать в окрестности начала координат:

$$\Phi(e^0) = k e^0, \quad (3.23)$$

где $k_n = \left. \frac{d\Phi}{de^0} \right|_{e^0=0}$ называют коэффициентом вибрационной линейаризации.

После подстановки выражения (3.23) в (3.21) получим линейное уравнение

$$[Q(p) + kR(p)] e^0 = Q(p)g. \quad (3.24)$$

Как видим, при создании колебательного процесса в системе разрывные нелинейные характеристики для медленных процессов становятся гладкими. Процесс, при котором за счет колебания разрывные

характеристики нелинейных звеньев становятся гладкими, называют *вибрационным сглаживанием*, а процесс линеаризации, который производится в результате вибрационного сглаживания, — *вибрационной линеаризацией*.

Вычисление коэффициентов вибрационной линеаризации.

В соответствии с формулами (3.22) и (3.23) для коэффициента вибрационной линеаризации имеем

$$k_n = \left. \frac{d\Phi(e^0)}{de^0} \right|_{e^0=0} = \left(\frac{\partial \sigma^0}{\partial e^0} + \frac{\partial \sigma^0}{\partial A} \frac{dA}{de^0} \right) \Big|_{e^0=0}.$$

Используя формулу (3.15а), находим

$$\left. \frac{\partial \sigma^0}{\partial A} \right|_{e^0=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df(e^0 + A \sin \psi)}{de} \frac{\partial e}{\partial A} d\psi \Big|_{e^0=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df(A \sin \psi)}{de} \sin \psi d\psi.$$

Если нелинейная функция $f(e)$ является нечетной, то производная $df(e)/de$ будет четной, а произведение $df(e)/de \sin \psi$ — нечетным. Поэтому для однозначных и симметричных относительно начала координат характеристик последний интеграл равен нулю:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df(A \sin \psi)}{de} \sin \psi d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{df(A \sin \psi)}{de} \sin \psi d\psi = 0,$$

и формула для коэффициента вибрационной линеаризации принимает вид

$$k_n = \left. \frac{d\Phi(e^0)}{de^0} \right|_{e^0=0} = \left. \frac{\partial \sigma^0}{\partial e^0} \right|_{e^0=0}. \quad (3.25)$$

Эта формула справедлива для всех нелинейных, однозначных и неоднозначных характеристик, симметричных относительно начала координат [10]. Из нее следует, что для вычисления коэффициента вибрационной линеаризации нет необходимости вычислять функцию $\Phi(e^0)$.

Для большинства рассматриваемых нелинейных характеристик функция $f(e)$ не имеет производных в обычном смысле. Поэтому приведенные выше выкладки нельзя рассматривать как математически строгое обоснование формулы (3.25).

Вибрационную линеаризацию можно осуществить как вынужденными колебаниями, так и автоколебаниями. В обоих случаях коэффициент вибрационной линеаризации, который определяется по формуле (3.25), зависит от амплитуды колебаний на входе нелинейного звена. Поэтому чтобы вычислить коэффициент k_n , нужно знать эту амплитуду. Как увидим ниже, она равна при вибрационной линеаризации вынужденными колебаниями амплитуде внешнего колебания, а при вибрационной линеаризации автоколебаниями — амплитуде автоколебаний.

Вибрационная линейаризация вынужденными колебаниями. Пусть на вход нелинейного звена системы (рис. 3.15) подается

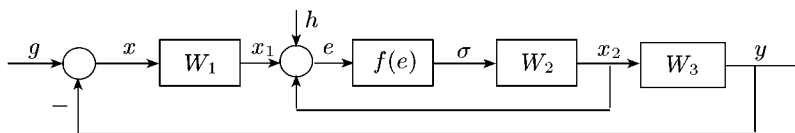


Рис. 3.15. Структурная схема нелинейной системы (к вибрационной линейаризации вынужденными колебаниями)

гармонический сигнал $h = B \sin \omega^* t$. При этом частота колебания намного выше полосы пропускания линейного звена с передаточной функцией W_2 :

$$\sqrt{q^2(A) + q'^2(A)} |W_2(j\omega^*)| \ll 1.$$

На входе нелинейного звена имеем

$$e = e^0 + e^*, \quad e^0 = x_1 - x_2, \quad e^* = B \sin \omega^* t.$$

Таким образом, в системе на входе нелинейного звена возникают вынужденные колебания с амплитудой, равной амплитуде внешнего колебания ($A = B$), и сдвигом фазы $\varphi = 0$. И в этом случае при вычислении коэффициента вибрационной линейаризации в качестве амплитуды вынужденного колебания берется амплитуда внешнего колебания B . Поэтому величину коэффициента вибрационной линейаризации можно изменять за счет выбора этой амплитуды. Однако амплитуду внешнего воздействия нельзя брать произвольной. С одной стороны, она не должна быть слишком большой, чтобы возмущение не оказывало заметного влияния на процесс управления. С другой стороны, амплитуда B должна быть во всяком случае не меньше максимального значения сигнала e^0 , до которого необходимо обеспечить линейность характеристики. Например, в случае нелинейного звена с релейной характеристикой с зоной нечувствительности (см. рис. 2.1, б) должно выполняться неравенство $B \geq a + \sup_{t \geq t_0} |e^0|$.

Вибрационная линейаризация автоколебаниями. Вибрационную линейаризацию можно реализовать, создав вокруг нелиней-

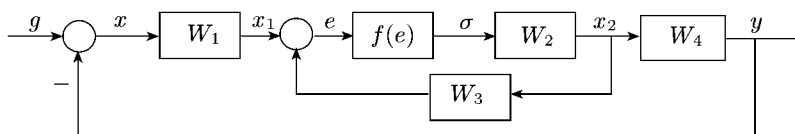


Рис. 3.16. Структурная схема нелинейной системы (к вибрационной линейаризации автоколебаниями)

ного звена внутренний автоколебательный контур (рис. 3.16). Передаточные функции W_2 и W_3 выбираются так, чтобы частота автоколебаний была достаточно высокой и автоколебания не пропуска-

лись остальными звеньями, находящимися за пределами внутреннего контура, и амплитуда автоколебаний была не меньше максимального значения медленно меняющегося составляющего сигнала ϵ на входе нелинейного звена.

Исследование такой системы производится следующим образом. Рассматривая внутренний контур, определяем амплитуду A симметричных автоколебаний. Затем, используя найденное значение амплитуды, определяем коэффициент вибрационной линеаризации k_n и нелинейное звено заменяем линейным звеном с передаточной функцией, равной k_n .

Пример 3.4. Пусть в нелинейной системе (см. рис. 3.16) нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику (см. рис. 2.1, a) с параметром $c = \pi$, а линейные звенья имеют передаточные функции вида

$$W_1 = k_1(1 + 0,1p), \quad W_2 = 1/(0,1p + 1)p, \\ W_3 = k_3/(T_3p + 1), \quad W_4 = 1/(p + 1).$$

Требуется определить параметры k_3 и T_3 такие, при которых на входе нелинейного звена амплитуда автоколебаний $A = 4$ и звено с передаточной функцией W_4 ослабляет амплитуду автоколебаний в 100 раз.

Решение. Так как автоколебания через звено с передаточной функцией W_4 практически не проходят (амплитуда на его выходе в 100 раз меньше, чем на его входе), при исследовании автоколебаний можно ограничиться рассмотрением только внутреннего контура.

Передаточная функция линейной части этого контура и коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного звена (см. табл. 3.1) соответственно имеют вид

$$W = W_2 W_3 = k_3/(0,1p^2 + p)(T_3p + 1), \quad q = 4c/(\pi A) = 4/A, \quad q' = 0.$$

Условие возникновения периодического процесса принимает вид

$$-0,1T_3j\omega^3 - (0,1 + T_3)\omega^2 + j\omega + 4k_3/A = 0,$$

или

$$-(0,1 + T_3)\omega^2 + 4k_3/A = 0, \quad -0,1T_3\omega^3 + \omega = 0.$$

Отсюда для амплитуды и частоты получаем

$$A = 4k_3T_3/(1 + 10T_3), \quad \omega^* = \sqrt{10/T_3}.$$

Так как звено с передаточной функцией W_4 ослабляет амплитуду автоколебаний в 100 раз и его амплитудная частотная функция имеет вид $A_4(\omega) = 1/\sqrt{1 + 10/T_3}$, то имеем

$$A_4(\omega^*) = \frac{1}{\sqrt{1 + (10/T_3)}} = 0,01, \quad \text{или} \quad T_3 = 0,0001T_3 + 0,001.$$

Отсюда находим $T_3 \cong 0,001$. Подставив это значение для T_3 в ранее полученное выражение для амплитуды и учитывая, что по

условию амплитуда на входе нелинейного звена равна 4, получаем

$$A = \frac{4k_3 T_3}{1 + 10 T_3} = \frac{4k_3 0,001}{1 + 0,01} = 4.$$

Отсюда находим $k_3 = 1010$. Таким образом, искомыми параметрами являются $k_3 = 1010$ и $T_3 \cong 0,001$.

Теперь убедимся, что в системе действительно возникнут автоколебания. Для этого проверим устойчивость найденного периодического процесса. Так как $q' = 0$, условие устойчивости имеет вид

$$\left. \frac{dq(A)}{dA} \right|_{A=4} = -\frac{4}{A^2} \Big|_{A=4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Условие устойчивости выполняется. Следовательно, колебания асимптотически орбитально устойчивы, и в системе возникнут автоколебания.

Пример 3.5. При каких положительных значениях параметра k_1 система, рассмотренная в примере 3.4, будет устойчива? Параметры k_3 и T_3 принимают значения, найденные в указанном примере.

Решение. Так как в системе происходит вибрационная линеаризация автоколебаниями, нелинейное звено заменим линейным

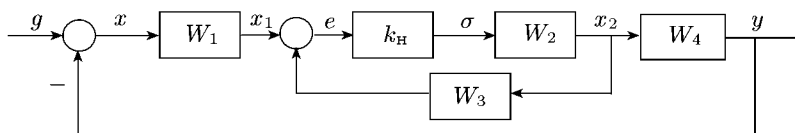


Рис. 3.17. Структурная схема вибрационно линеаризованной системы

(рис. 3.17) и найдем его передаточную функцию, равную k_n . Из табл. 3.3 имеем

$$\sigma^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{e^0}{A} = 2 \arcsin \frac{e^0}{A}.$$

В соответствии с формулой (3.25) k_n находится следующим образом:

$$k_n = \frac{\partial \sigma^0}{\partial e^0} \Big|_{e^0=0} = 2 \frac{1}{A \sqrt{1 - (e^0/A)^2}} \Big|_{e^0=0} = \frac{2}{A}.$$

Учитывая, что амплитуда симметричных колебаний $A = 4$, получаем $k_n = 0,5$.

Преобразуем структурную схему вибрационно линеаризованной системы (см. рис. 3.17) в одноконтурную, заменив внутренний контур звеном с передаточной функцией

$$W_{2,3} = \frac{k_n W_2}{1 + k_n W_2 W_3} = \frac{0,5(0,001 p + 1)}{0,0001 p^3 + 0,101 p^2 + p + 505}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W = W_1 W_{2,3} W_4 = \frac{k_1(0,00005 p^2 + 0,0505 p + 0,5)}{0,0001 p^4 + 0,101 p^3 + 1,10 p^2 + 506 p + 505}.$$

Складывая числитель и знаменатель и полагая $p = \lambda$, получим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$0,0001 \lambda^4 + 0,101 \lambda^3 + (1,10 + 0,00005 k_1) \lambda^2 + (506 + 0,0505 k_1) \lambda + 505 + 0,5 k_1 = 0.$$

При положительном k_1 необходимое условие устойчивости выполняется. Поэтому по критерию Ляпуна–Шипара система будет устойчива, если определитель Гурвица 3-го порядка будет положительным:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2 > 0.$$

Здесь

$$a_0 = 0,0001, \quad a_1 = 0,101, \quad a_2 = 1,10 + 0,00005 k_1, \\ a_3 = 506 + 0,0505 k_1, \quad a_4 = 505 + 0,5 k_1.$$

Подставив эти выражения в предыдущее неравенство, получим

$$0,0025 k_1 - 3,08 > 0.$$

Отсюда следует, что система будет устойчива при $k_1 > 5200$.

Задачи

1. Определить коэффициенты гармонической линейаризации при симметричных колебаниях для нелинейного звена, которое описывается функцией $f(e) = e^3$.

2. Определить коэффициенты гармонической линейаризации при несимметричных колебаниях для нелинейного звена, которое описывается функцией $f(e) = e^3$.

3. Определить коэффициенты гармонической линейаризации для нелинейного звена, описываемого функцией $f(e) = \begin{cases} ke, & e \geq 0, \\ 0, & e < 0. \end{cases}$

4. В типовой структурной схеме нелинейной системы (см. рис. 3.1) нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику $f(e) = (\pi/2) \operatorname{sign} e$ и линейная часть имеет передаточную функцию $W_{\pi}(p) = 5/(0,1 p + 1)(p + 1)p$. Исследовать автоколебания.

5. В типовой структурной схеме нелинейной системы (см. рис. 3.1) нелинейное звено имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности:

$$f(e) = \begin{cases} 0, & |e| \leq 0,5, \\ (\pi/2) \operatorname{sign} e, & |e| > 0,5, \end{cases}$$

и линейная часть имеет передаточную функцию $W_{\pi}(p) = 5/(p + 1)^2 p$. Исследовать автоколебания.

6. В типовой структурной схеме нелинейной системы (см. рис. 3.1) нелинейное звено описывается функцией

$$f(e) = \begin{cases} ke, & e \geq 0, \\ 0, & e < 0, \end{cases}$$

и линейная часть имеет передаточную функцию $W_n(p) = 5/(p+1)^2 p$. Исследовать автоколебания.

7. В нелинейной системе (см. рис. 3.15) нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику $f(e) = (\pi/2) \operatorname{sign} e$ и линейные звенья имеют следующие передаточные функции:

$$W_1 = 10(1 + 0,1 p), \quad W_2 = \frac{1}{(0,1 p + 1)p}, \quad W_3 = \frac{5}{Tp + 1}.$$

На вход сумматора перед нелинейным звеном подается гармонический сигнал $h = 6 \sin 10 t$. Произвести вибрационную линеаризацию и исследовать устойчивость системы.

8. В нелинейной системе (см. рис. 3.16) нелинейное звено имеет идеальную релейную характеристику $f(e) = (\pi/2) \operatorname{sign} e$, и линейные звенья имеют следующие передаточные функции:

$$W_1 = 10(1 + 0,1 p), \quad W_2 = \frac{1}{(0,1 p + 1)p},$$

$$W_3 = \frac{15}{0,1 p + 1}, \quad W_4 = \frac{1}{p + 1}.$$

Исследовать возможность вибрационной линеаризации и определить устойчивость системы.

Глава 4

МЕТОД ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Основы общей теории устойчивости были заложены А.М. Ляпуновым в его книге «Общая задача об устойчивости движения», которая вышла в 1892 г. В этой книге им был предложен общий метод исследования устойчивости движения, который называется *вторым* или *прямым методом Ляпунова*. Этот метод основан на построении специальной функции, которая получила название *функции Ляпунова*. Прямой метод Ляпунова получил дальнейшее развитие в трудах российских и зарубежных авторов. Метод исследований, основанный на построении функции Ляпунова, включая прямой метод Ляпунова, стали называть *методом функций Ляпунова*.

4.1. Знакопостоянные и знакоопределенные функции

В большинстве случаев функции Ляпунова являются знакоопределенными, а их производные — знакоопределенными или знакопостоянными функциями. Познакомимся с этими функциями.

4.1.1. Определение знакопостоянных и знакоопределенных функций. Рассмотрим функцию $V(\mathbf{x})$, определенную в некоторой области $D \subseteq R^n$ и функцию $V(\mathbf{x}, t)$, определенную на прямом произведении $D \times [0, \infty)$, т.е. при $\mathbf{x} \in D$ и $0 \leq t < \infty$. Область D содержит начало координат: $0 \in D$. Функции $V(x)$ и $V(\mathbf{x}, t)$ являются непрерывными и обладают непрерывными производными по всем своим аргументам.

Функция $V(\mathbf{x})$ называется *знакоположительной* или *положительно полуопределенной* в области D , если $V(0) = 0$ и $V(\mathbf{x}) \geq 0$ всюду на D , и называется *знакоотрицательной* или *отрицательно полуопределенной* в области D , если $V(0) = 0$ и $V(\mathbf{x}) \leq 0$ всюду на D .

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *знакоположительной* или *положительно полуопределенной* в области D , если при всех $t \geq t_0$ ($t_0 \geq 0$) $V(0, t) = 0$ и $V(\mathbf{x}, t) \geq 0$ всюду на D , и *знакоотрицательной* или *отрицательно полуопределенной* в области D , если при всех $t \geq t_0$ ($t_0 \geq 0$) $V(0, t) = 0$ и $V(\mathbf{x}, t) \leq 0$ всюду на D .

Знакоположительные и знакоотрицательные функции в области D называются *знакопостоянными функциями* области D .

Функция $V(\mathbf{x})$ называется *положительно определенной* в области D , если $V(\mathbf{0}) = 0$ и $V(\mathbf{x}) > 0$ всюду на D , кроме точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, и называется *отрицательно определенной* в области D , если $V(\mathbf{0}) = 0$ и $V(\mathbf{x}) < 0$ всюду на D , кроме точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *положительно определенной* в области D , если при всех $t \geq t_0$ ($t_0 \geq 0$) $V(\mathbf{0}, t) = 0$ и найдется такая положительно определенная в области D функция $V^+(\mathbf{x})$, что при всех $t \geq t_0$ $V(\mathbf{x}, t) > V^+(\mathbf{x})$ всюду на D , кроме точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, и называется *отрицательно определенной* в области D , если $-V(\mathbf{x}, t)$ является положительно определенной в области D .

Положительно определенные и отрицательно определенные функции в области D называются *знакоопределенными функциями* в области D . Очевидно, знакоопределенные функции являются частным случаем знакопостоянных функций.

Функции, которые не являются знакопостоянными функциями в области D , называются *знакопеременными функциями* в области D .

В качестве примера рассмотрим следующие функции:

$$V_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, \quad V_2(\mathbf{x}) = -[x_1^2 + (x_2 + x_1)^2],$$

$$V_3(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad V_4(\mathbf{x}) = -\left[x_1^2 + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + \frac{x_3^2}{1+x_3^2}\right].$$

Среди этих функций в пространстве R^3 функция $V_1(\mathbf{x})$ является положительно полуопределенной, функция $V_2(\mathbf{x})$ — отрицательно полуопределенной, функция $V_3(\mathbf{x})$ — положительно определенной и функция $V_4(\mathbf{x})$ — отрицательно определенной. Функции $V_1(\mathbf{x})$ и $V_2(\mathbf{x})$ являются знакопостоянными, а функции $V_3(\mathbf{x})$ и $V_4(\mathbf{x})$ — знакоопределенными. В пространстве R^2 функция $V_1(\mathbf{x})$ является положительно определенной, а функция $V_2(\mathbf{x})$ — отрицательно определенной.

Если $V(\mathbf{x})$ является знакоопределенной функцией, то существует такое положительное число η , что все поверхности $V(\mathbf{x}) = c$, где $|c| < \eta$, являются замкнутыми относительно точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ поверхностями; если является знакоопределенной функцией и $|V(\mathbf{x})| \rightarrow \infty$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, то все поверхности $V(\mathbf{x}) = c$ при любом c являются замкнутыми относительно точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ поверхностями [7].

Покажем на примере, что не при всех знакоопределенных функциях $V(\mathbf{x})$ все поверхности $V(\mathbf{x}) = c$ при любом c являются замкнутыми относительно точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ поверхностями. В качестве примера рассмотрим в пространстве R^2 положительно определенную функцию

$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_1^2}.$$

В этом случае при $c = r^2$ уравнение поверхности $V(\mathbf{x}) = c$ принимает вид

$$\frac{x_1^2}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_1^2} = r^2, \quad \text{или} \quad (1-r^2)x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Это уравнение при $r < 1$ представляет уравнение эллипса

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \left(a^2 = \frac{r^2}{1-r^2}, \quad b^2 = r^2 \right),$$

при $r = 1$ — уравнение прямой

$$x_2^2 = 1, \quad \text{или} \quad x_2 = \pm 1,$$

и при $r > 1$ — уравнение гиперболы

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{d^2} = 1 \quad \left(b^2 = r^2, \quad d^2 = \frac{r^2}{r^2-1} \right).$$

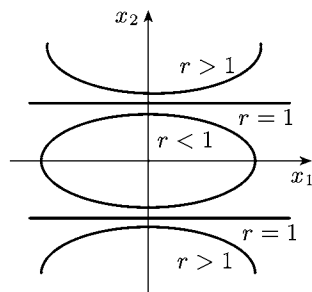


Рис. 4.1. Кривые уравнения $(1-r^2)x_1^2 + x_2^2 = r^2$

Таким образом, в данном случае поверхности (кривые) уровня $V(\mathbf{x}) = c$ являются замкнутыми только при $r < 1$ (рис. 4.1).

4.1.2. Положительно определенные квадратичные формы.

При построении функции Ляпунова широко используются квадратичные формы

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i,k=1}^n q_{ik} x_i x_k, \quad q_{ik} = q_{ki},$$

или, в матричной форме,

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}.$$

Любую квадратичную форму в матричной записи можно представить так, чтобы в ней матрица была симметрической. Поэтому всегда предполагается, что матрица, используемая при записи квадратичной формы, по определению является симметрической матрицей. Так как симметрические матрицы в методе функций Ляпунова играют важную роль, то кратко остановимся на их свойствах.

Симметрическая матрица Q называется *положительно (отрицательно) определенной матрицей*, если квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ является положительно (отрицательно) определенной функцией, и *положительно (отрицательно) полуопределенной матрицей*, если квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ является положительно (отрицательно) полуопределенной функцией.

Симметрическая матрица Q обладает следующими свойствами [21]:

1) все ее собственные значения (характеристические числа), т.е. корни λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ее характеристического уравнения $\det(Q - I\lambda) = 0$ являются вещественными числами;

2) если она положительно (отрицательно) определена, то все ее собственные значения являются положительными (отрицательными): $\lambda_i > 0$ ($\lambda_i < 0$); если она положительно (отрицательно) полуопределена, то все ее собственные значения являются неотрицательными (неположительными): $\lambda_i \geq 0$ ($\lambda_i \leq 0$);

3) определитель от симметрической матрицы равен произведению ее собственных значений: $\det Q = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Дальше часто будет использоваться одно свойство квадратичной формы. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 4.1 [7]. *Квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ удовлетворяет неравенству*

$$\lambda_m |\mathbf{x}|^2 \leq \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \leq \lambda_M |\mathbf{x}|^2, \quad (4.1)$$

где λ_m — минимальное, а λ_M — максимальное собственное значение матрицы Q .

Доказательство. Для доказательства рассмотрим задачу о минимальном и максимальном значениях квадратичной формы $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ на сфере $|\mathbf{x}|^2 = r^2$. Согласно известным правилам определения условного экстремума составим функцию Лагранжа:

$$L = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - \lambda (|\mathbf{x}|^2 - r^2).$$

Здесь λ — неопределенный множитель Лагранжа. Представим $|\mathbf{x}|^2$ в виде скалярного произведения векторов:

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x}.$$

Необходимое условие экстремума принимает вид

$$\frac{dL}{d\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T Q - 2\lambda \mathbf{x}^T = 0, \quad \text{или} \quad Q\mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} = 0.$$

Последнее уравнение представляет систему однородных скалярных уравнений, и оно имеет ненулевое решение, если определитель этой системы равен нулю:

$$|Q - \lambda I| = 0.$$

Таким образом, квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ принимает экстремальные значения на сфере $|\mathbf{x}|^2 = r^2$, если $\mathbf{x}$ удовлетворяет уравнению

$$Q\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

когда λ принимает собственные значения матрицы Q . Так как матрица является симметричной, то ее собственные значения являются вещественными.

Умножив последнее равенство слева на $\mathbf{x}^T$, получим

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = \lambda |\mathbf{x}|^2, \quad \text{или} \quad V(\mathbf{x}) = \lambda r^2.$$

Отсюда, если λ_m — минимальное собственное значение и λ_M — максимальное собственное значение матрицы Q , то

$$\lambda_m r^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_M r^2, \quad \text{или} \quad \lambda_m |\mathbf{x}|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_M |\mathbf{x}|^2,$$

что и требовалось доказать.

Если квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ положительно определена, то, как следует из неравенства (4.1) и свойства положительно определенной матрицы, она неограниченно возрастает при стремле-

нии точки $\mathbf{x}$ к бесконечности:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Выясним, когда квадратичная форма является положительно определенной функцией, или симметрическая матрица является положительно определенной.

Критерий Сильвестра [21]. Для того чтобы квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ была положительно определенной функцией, необходимо и достаточно, чтобы все определители

$$\Delta_1 = q_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \det Q$$

были положительны.

Пример 4.1. Дана квадратичная форма

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3, \quad \mathbf{x} \in R^3.$$

Исследовать, является ли эта форма положительно определенной функцией.

Решение. Если записать данную квадратичную форму в матричной форме, то элементами соответствующей матрицы Q будут

$$\begin{aligned} q_{11} &= 1, & q_{12} &= q_{21} = 2, & q_{13} &= q_{31} = 0, \\ q_{22} &= 5, & q_{23} &= q_{32} = -1, & q_{33} &= 3. \end{aligned}$$

Определители

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= q_{11} = 1, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

все положительны. Следовательно, по критерию Сильвестра данная квадратичная форма является положительно определенной функцией.

4.2. Устойчивость неавтономных систем

Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2a)$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}, t). \quad (4.2b)$$

Начало координат, т.е. точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, является положением равновесия: $X(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ при всех $t \geq t_0$. Правая часть приведенных уравнений зависит явно от времени. Система, которая описывается такими уравнениями, и сами эти уравнения называются *неавтономными системами*.

Решение уравнения (4.2) при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ будем обозначать $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$. Следовательно, справедливо равенство $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_0) = \mathbf{x}^0$.

Рассмотрим функцию $V(\mathbf{x}, t)$. Производная этой функции по времени, вычисленная на траекториях системы (4.2), имеет вид

$$\frac{dV(\mathbf{x}, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

Про эту производную говорят, что она является (полной) *производной по времени функции $V(\mathbf{x}, t)$ в силу уравнения (4.2)* или *производной по времени функции $V(\mathbf{x})$, вычисленной в силу уравнения (4.2)*.

4.2.1. Теоремы об устойчивости. Рассмотрим устойчивость положения равновесия, или невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (4.2).

Теорема 4.1 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ неавтономной системы (4.2) устойчиво по Ляпунову, если существует положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t)$ такая, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы (4.2) является отрицательно полуопределенной функцией.*

Доказательство. В соответствии с определением 2.3 устойчивости по Ляпунову положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ нужно показать, что, каково бы ни было положительное число ε , найдется такое положительное число δ , что возмущенное движение $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ удовлетворяет условию:

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| < \varepsilon \quad \text{при всех } t \geq t_0, \quad \text{если только } |\mathbf{x}^0| < \delta.$$

Обозначим S_ε и S_δ сферы радиусов ε и δ соответственно:

$$S_\varepsilon = \{\mathbf{x}: |\mathbf{x}| = \varepsilon\}, \quad S_\delta = \{\mathbf{x}: |\mathbf{x}| = \delta\}.$$

Пусть функция $V(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет условию теоремы и принимает на сфере S_ε в начальный момент t_0 минимальное значение m :

$$m = \min_{\mathbf{x} \in S_\varepsilon} V(\mathbf{x}, t_0).$$

Выберем число δ так, чтобы внутри сферы S_δ выполнялось неравенство $V(\mathbf{x}, t_0) < m$. Такая сфера существует, так как функция $V(\mathbf{x}, t_0)$ непрерывна и $V(\mathbf{0}, t_0) = 0$. Так как по условию $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq 0$, то

$$V(\mathbf{x}, t) \leq V(\mathbf{x}^0, t_0) < m, \quad \text{если } |\mathbf{x}(t_0)| < \delta.$$

Следовательно, траектория $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ никогда не достигнет сферы S_ε , на которой $V(\mathbf{x}, t) \geq m$, если только $|\mathbf{x}^0| < \delta$. Теорема доказана.

Функции, которые удовлетворяют теоремам устойчивости или неустойчивости, т.е. по которым можно судить об устойчивости или неустойчивости системы, называются *функциями Ляпунова*.

Рассмотрим два новых понятия, которые потребуются при формулировке следующих двух теорем.

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *функцией, допускающей бесконечно малый верхний предел*, если как бы мало ни было положительное число ε' , найдется такое положительное число δ' , что $|V(\mathbf{x}, t)| < \varepsilon'$ при всех $t \geq t_0$, если $|\mathbf{x}| < \delta'$.

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *функцией, допускающей бесконечно большой нижний предел*, если как бы велико ни было положительное число E , найдется такое положительное число Δ , что $|V(\mathbf{x}, t)| > E$ при всех $t \geq t_0$, если $|\mathbf{x}| > \Delta$. Иначе говоря, функция $V(\mathbf{x}, t)$ называется *функцией, допускающей бесконечно большой нижний предел*, если при любых $t \geq t_0$

$$|V(\mathbf{x}, \infty)| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Например, функции

$$V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \sin^2 t, \quad V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) e^{-t}$$

являются функциями, допускающими бесконечно малый верхний предел, а функции

$$V(\mathbf{x}, t) = 10 \sin^2[(x_1^2 + x_2^2)t], \quad V(\mathbf{x}, t) = 10(x_1^2 + x_2^2)e^t$$

такowymi не являются.

В пространстве R^3 функция

$$V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\sin^2 t + 1)$$

является функцией, допускающей бесконечно большой нижний предел, а функции

$$V(\mathbf{x}, t) = (x_1^2 + x_2^2)(\sin^2 t + 1),$$

$$V(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{x_1^2}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + \frac{x_3^2}{1+x_3^2} \right] (\sin^2 t + 1)$$

такowymi не являются.

Теорема 4.2 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Положение равновесия неавтономной системы (4.2) асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы (4.2) является отрицательно определенной функцией.*

Доказательство. Так как выполняется условие теоремы 4.1, положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ устойчиво по Ляпунову. Поэтому в соответствии с определением 2.4 достаточно показать, что при выполнении условия теоремы существует такое положительное число η , что $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$, если $|\mathbf{x}^0| < \eta$.

По условию теоремы существует функция $V(\mathbf{x}, t)$, которая обладает следующими свойствами:

$$V(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \text{при всех} \quad t \geq t_0.$$

Так как функция $V(\mathbf{x}, t)$ в силу указанного выше свойства монотонно убывает и ограничена снизу нулем, то существует предел

$$V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) \rightarrow V_k \geq 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Если $V_k = 0$, то и $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, так как функция $V(\mathbf{x}, t)$ обращается в нуль только при $\mathbf{x} = 0$, т. е. в этом случае теорема верна.

Допустим противное: $V_k \neq 0$, т. е. $V_k > 0$. Так как положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ устойчиво по Ляпунову, то для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что при всех $t \geq t_0$

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |\mathbf{x}^0| < \delta. \quad (4.3)$$

Так как функция $V(\mathbf{x}, t)$ допускает бесконечно малый верхний предел, то для любого положительного числа ε' , в частности, $\varepsilon' = V_k$, найдется такое положительное число δ' , что при всех $t \geq t_0$

$$|V(\mathbf{x}, t)| < \varepsilon' = V_k, \quad \text{если} \quad |\mathbf{x}| < \delta'.$$

Но так как $V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) \geq V_k$, то в силу последнего условия $|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \geq \delta'$. С учетом (4.3) получаем

$$\delta' \leq |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \leq \varepsilon. \quad (4.4)$$

Так как производная $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ является отрицательно определенной функцией, то существует положительно определенная функция $w(\mathbf{x})$, удовлетворяющая неравенству

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) < -w(\mathbf{x}). \quad (4.5)$$

Пусть β — минимальное значение функции $w(\mathbf{x})$ на интервале (4.4):

$$\beta = \min_{\delta' \leq |\mathbf{x}| \leq \varepsilon} w(\mathbf{x}).$$

Тогда на этом интервале справедливо неравенство $w(\mathbf{x}) \geq \beta$, или $-w(\mathbf{x}) \leq -\beta$. Из последнего неравенства и неравенства (4.5) следует

$$\dot{V}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) < -\beta.$$

Проинтегрировав это неравенство от t_0 до t , получим

$$V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) < V(\mathbf{x}^0, t_0) - \beta(t - t_0).$$

При больших t правая часть последнего неравенства будет отрицательной, что противоречит тому, что $V(\mathbf{x}, t)$ — положительно определенная функция. Это противоречие получилось из-за предположения, что $V_k \neq 0$. Следовательно, справедливо равенство $V_k = 0$. Теорема доказана.

Пример 4.2. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -e^{-t}x_1 + e^{-2t}x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2e^{-2t}x_1 - x_2^3. \end{aligned}$$

Решение. Функцию Ляпунова будем искать в виде

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \alpha x_2^2 \quad (\alpha > 0).$$

Производная по времени от этой функции в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2\alpha x_2\dot{x}_2 = -2x_1^2e^{-t} + 2x_1x_2e^{-2t} - 4\alpha x_2x_1e^{-2t} - 2\alpha x_2^4.$$

Если положить $\alpha = 1/2$, то производная принимает вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2x_1^2e^{-t} - x_2^4$$

и становится отрицательно определенной функцией. Следовательно, положение равновесия заданной системы асимптотически устойчиво.

Теорема 4.3 (теорема об асимптотической устойчивости в целом). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ неавтономной системы (4.2) асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво), если существует такая положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел и бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.*

Здесь, естественно, предполагается, что функция $V(\mathbf{x}, t)$ является положительно определенной функцией, а ее производная — отрицательно определенной функцией на всем фазовом пространстве R^n .

Доказательство. Так как выполняется условие теоремы 4.2, положение равновесия асимптотически устойчиво. Поэтому достаточно показать, что при любом начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ возмущенное движение $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$.

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ на траекториях возмущенного движения является монотонно убывающей функцией времени и ограничена снизу нулем. Поэтому существует предел

$$V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)) \rightarrow V_k \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Если $V_k = 0$, то $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$, так как $V(\mathbf{x}, t)$ обращается в нуль только при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Поэтому достаточно показать, что предел $V_k = 0$ на любых возмущенных траекториях.

Допустим противное: $V_k \neq 0$, т.е. $V_k > 0$. В связи с тем, что функция $V(\mathbf{x}, t)$ допускает бесконечно малый верхний предел, для $\varepsilon' = V_k$ найдется такое положительное число δ' , что

$$V(\mathbf{x}, t) < \varepsilon' = V_k \quad \text{при всех } t \geq t_0, \quad \text{если } |\mathbf{x}| < \delta'.$$

И так как $V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)) \geq V_k$, то справедливо неравенство

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \geq \delta' \quad \text{при любых } t \geq t_0. \quad (4.6)$$

В силу того, что функция $V(\mathbf{x}, t)$ допускает бесконечно большой нижний предел, для любого положительного числа E найдется такое положительное число Δ ,

$$V(\mathbf{x}, t) > E \quad \text{при любых } t \geq t_0, \quad \text{если } |\mathbf{x}| > \Delta. \quad (4.7)$$

Так как $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0$ при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $t \geq t_0$, то

$$V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) < V(\mathbf{x}^0, t_0) = V_0 \quad \text{при всех } t \geq t_0.$$

Поэтому если принять $E = V_0$, то в силу условия (4.7) последнее возможно, если

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \leq \delta.$$

Из этого неравенства и неравенства (4.6), получаем

$$\delta' \leq |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \leq \Delta.$$

В связи с тем, что $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ является отрицательно определенной функцией, существует положительно определенная функция $w(\mathbf{x})$ такая, что $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < -w(\mathbf{x})$. Пусть β — минимальное значение функции $w(\mathbf{x})$ на указанном выше интервале:

$$\beta = \min_{\delta' \leq |\mathbf{x}| \leq \Delta} w(\mathbf{x}).$$

Тогда так как на этом интервале справедливо неравенство $w(x) \geq \beta$ или $-w(x) \leq -\beta$, то

$$\dot{V}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)) < -\beta.$$

Проинтегрировав последнее неравенство от t_0 до t , получим

$$V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) < V(\mathbf{x}^0, t_0) - \beta(t - t_0).$$

Правая часть этого неравенства при больших t принимает отрицательное значение, что противоречит тому, что $V(\mathbf{x}, t)$ положительно определенная функция. Противоречие получилось из-за предположения, что предел $V_k \neq 0$. Следовательно, указанный предел должен быть равен нулю, что доказывает теорему.

Пример 4.3. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(1 + \sin^2 t)x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - e^{-t}x_2^5.\end{aligned}$$

Решение. Функцию Ляпунова будем искать в виде

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \alpha x_2^2 \quad (\alpha > 0).$$

Производная по времени от этой функции в силу заданных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2\alpha x_2\dot{x}_2 = 2x_1[-(1 + \sin^2 t)x_1 + x_2 - x_1^3] + \\ &\quad + 2\alpha x_2(-x_1 - x_2 - e^{-t}x_2^5).\end{aligned}$$

Если положить $\alpha = 1$, то кандидат на функцию Ляпунова становится положительно определенной функцией, а производная принимает вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2[(1 + \sin^2 t)x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + e^{-t}x_2^6]$$

и становится отрицательно определенной функцией. Кроме того, эта функция допускает бесконечно большой нижний предел. Следовательно, положение равновесия рассматриваемой системы асимптотически устойчиво в целом.

4.2.2. Теоремы о неустойчивости. Из того, что не удается найти функцию Ляпунова, позволяющую говорить об устойчивости положения равновесия системы, не следует, что оно неустойчиво. Поэтому важную роль при исследовании нелинейных систем могут сыграть теоремы о неустойчивости.

Теорема 4.4 (первая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ неавтономной системы (4.2) неустойчиво, если существует функция $V(\mathbf{x}, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, такая, что ее производная $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ в силу уравнения этой системы является положительно определенной функцией и при всех $t \geq t_0$ в любой малой окрестности начала координат найдется точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, в которой функция $V(\mathbf{x}, t)$ принимает положительное значение.*

И здесь, хотя функция $V(\mathbf{x}, t)$ не является знакоопределенной, предполагается, что она обладает всеми свойствами, которыми были наделены знакоопределенные функции при их определении: функция $V(\mathbf{x}, t)$ непрерывна, обладает непрерывными частными производными по всем своим аргументам и в начале координат обращается в нуль.

Доказательство. Согласно определению 2.7 неустойчивости положения равновесия нужно показать, что найдется такое положительное число ε , что в любой малой δ -окрестности начала координат найдется такая точка, что возмущенное движение, которое начинается в этой точке, в какой-то момент t' достигает границы ε -окрестности.

Так как функция $V(\mathbf{x}, t)$ допускает бесконечно малый верхний предел, то для любого положительного числа ε' найдется такое положительное число δ' , что

$$|V(\mathbf{x}, t)| < \varepsilon' \quad \text{при} \quad t \geq t_0, \quad \text{если} \quad |\mathbf{x}| < \delta'. \quad (4.8)$$

Покажем, что если положить $\varepsilon = \delta'$, то в любой малой окрестности начала координат существует точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ такая, что $|V(\mathbf{x}^0, t)| \geq \varepsilon$ в какой-либо момент $t = t'$. Допустим противное: положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ устойчиво и для заданного $\varepsilon = \delta'$ найдется такое положительное число δ , что

$$|V(\mathbf{x}^0, t)| < \varepsilon = \delta' \quad \text{при всех} \quad t \geq t_0, \quad \text{если} \quad |\mathbf{x}^0| < \delta. \quad (4.9)$$

Так как $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ — положительно определенная функция, то при любом $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ и, в частности, при $|\mathbf{x}^0| < \delta$

$$V(\mathbf{x}^0, t, t) \geq V(\mathbf{x}^0, t) = V_0 \quad \text{при всех} \quad t \geq t_0. \quad (4.10)$$

По условию теоремы в любой малой окрестности начала координат найдется точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, в которой $V(\mathbf{x}', t) > 0$. Если положить $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}'$, то $V_0 > 0$. Так как функция $V(\mathbf{x}, t)$ допускает бесконечно малый верхний предел, то для данного положительного V_0 найдется такое h , что

$$|V(\mathbf{x}, t)| < V_0 \quad \text{при всех} \quad t \geq t_0, \quad \text{если} \quad |\mathbf{x}| < h.$$

Отсюда и из (4.10) следует, что $|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \geq h$, и с учетом (4.9) получаем

$$h \leq |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| < \varepsilon = \delta'.$$

Так как $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ — положительно определенная функция, то существует такая положительно определенная функция $w(\mathbf{x})$, что $\dot{V}(\mathbf{x}, t) > w(\mathbf{x})$ при всех $t \geq t_0$. Пусть β — минимум функции $w(\mathbf{x})$ на полуинтервале выше:

$$\beta = \min_{h \leq |\mathbf{x}| \leq \delta'} w(\mathbf{x}).$$

Тогда на этом интервале $w(\mathbf{x}) \geq \beta$ и из последнего неравенства имеем $\dot{V}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) > w(\mathbf{x}) \geq \beta$. Проинтегрировав это неравенство, получим

$$V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) > V_0 + \beta(t - t_0).$$

Правая часть и соответственно функция $V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t)$ с увеличением времени неограниченно возрастают, что противоречит условию (4.8) и показывает неправомерность предположения об устойчивости. Теорема доказана.

Теорема 4.5 (вторая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ неавтономной системы (4.2) неустойчиво, если существует функция $V(\mathbf{x}, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, такая, что ее производная $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ в силу уравнения этой системы имеет вид*

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \alpha V(\mathbf{x}, t) + w(\mathbf{x}, t),$$

где $w(\mathbf{x}, t)$ — положительно полуопределенная функция, и при всех $t \geq t_0$ в любой малой окрестности начала координат найдется точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, в которой функция $V(\mathbf{x}, t)$ принимает положительное значение.

Доказательство. Так как функция $V(\mathbf{x}, t)$ допускает бесконечно малый верхний предел, то для любого положительного числа ε' найдется такое положительное число δ' , что

$$|V(\mathbf{x}, t)| < \varepsilon' \quad \text{при всех} \quad t \geq t_0, \quad \text{если} \quad |\mathbf{x}| < \delta'. \quad (4.11)$$

Покажем, что если положить $\varepsilon = \delta'$, то в любой малой окрестности начала координат существует точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ такая, что $|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \geq \varepsilon$ в какой-либо момент $t = t'$. Действительно, по условию теоремы

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) = \alpha V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) + w(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t),$$

или

$$\frac{d}{dt} [e^{-\alpha t} V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t)] = e^{-\alpha t} w(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t) \geq e^{\alpha t} V(\mathbf{x}^0, t_0).$$

Если выбрать начальную точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ там, где $V(\mathbf{x}^0, t_0) > 0$, то из последнего равенства следует, что $V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t)$ неограниченно возрастает. А это противоречит условию (4.11), если допустить, что $|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| < \varepsilon = \delta'$. Теорема доказана.

4.3. Устойчивость автономных систем

Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.12a)$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (4.12б)$$

Начало координат, т. е. точка $x = 0$, является положением равновесия: $\mathbf{X}(0) = 0$. Правая часть приведенных уравнений не зависит явно от времени. Система, которая описывается такими уравнениями, и сами эти уравнения называются *автономными системами*.

4.3.1. Теоремы об устойчивости. При исследовании устойчивости автономных систем в качестве функций Ляпунова используются функции $V(\mathbf{x})$, не зависящие явно от времени. Производная по времени функции $V(\mathbf{x})$ в силу уравнений (4.12) определяется следующим образом:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

Теорема 4.6 (теорема Ляпунова об устойчивости). *Положение равновесия $\mathbf{x} = 0$ автономной системы (4.12) устойчиво по Ляпунову, если существует положительно определенная функция $V(\mathbf{x})$ такая, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией.*

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 4.1.

Пример 4.4. Исследовать устойчивость систему, которая описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Решение. Функцию Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2,$$

где α и β — неизвестные параметры. Согласно критерию Сильвестра эта форма будет положительно определенной функцией, если выполняется неравенство

$$\Delta_2 = \beta - \alpha^2 > 0.$$

Производная по времени квадратичной формы в силу заданных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2\alpha\dot{x}_1x_2 + 2\alpha x_1\dot{x}_2 + 2\beta x_2\dot{x}_2 = \\ &= 2x_1x_2 + 2\alpha x_2^2 - 2\alpha x_1^2 - 2\beta x_2x_1. \end{aligned}$$

Если принять $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, то квадратичная форма будет положительно определенной, а ее производная будет равна нулю, т. е.

функция удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова. Следовательно, положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ устойчиво по Ляпунову.

Пример 4.5. На тело с массой m действует сила F , обладающая следующими свойствами:

$$F = -f(y), \quad f(0) = 0, \quad f(y)y > 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0.$$

Движение тела описывается уравнением $m\ddot{y} = F$, или, в нормальной форме, уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{m}f(x_1).$$

Исследовать устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Решение. В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим полную энергию. Кинетическая и потенциальная энергии соответственно имеют вид

$$W = \frac{m\dot{y}^2}{2} = \frac{mx_2^2}{2}, \quad \int_{y^0}^y F(y) dy = \int_{x_1^0}^{x_1} f(x_1) dx_1.$$

Кандидат на функцию Ляпунова принимает вид

$$V(\mathbf{x}) = W + U = \frac{mx_2^2}{2} + \int_{x_1^0}^{x_1} f(x_1) dx_1.$$

Эта функция является положительно определенной. Ее производную по времени в силу уравнения движения

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = mx_2\dot{x}_2 + f(x_1)\dot{x}_1 = -mx_2\frac{1}{m}f(x_1) + f(x_1)x_2 = 0$$

можно считать отрицательно полуопределенной. Следовательно, невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ устойчиво.

Теорема 4.7 (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ автономной системы (4.12) асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция $V(\mathbf{x})$, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.*

Так как функция $V(\mathbf{x})$ непрерывна и равна нулю в начале координат, то она допускает бесконечно малый верхний предел. Поэтому эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 4.2.

Пример 4.6. Исследовать устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + 2x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2^3.$$

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся *методом разделения переменных*, предложенный Е. А. Барбашиным [7]. Метод состоит в том, что функция Ляпунова ищется в виде функции, которая вместе со своей производной представляет сумму функций,

каждая из которых зависит только от одной фазовой переменной:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_i F_i(x_i), \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_i \Phi_i(x_i).$$

В соответствии с этим методом в качестве кандидата на функцию Ляпунова принимаем функцию

$$V(\mathbf{x}) = F_1(x_1) + F_2(x_2).$$

Производная по времени от функции в силу уравнений заданной системы имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dF_1}{dx_1} \dot{x}_1 + \frac{dF_2}{dx_2} \dot{x}_2 = -\frac{dF_1}{dx_1} x_1^3 + \frac{dF_1}{dx_1} 2x_2 - \frac{dF_2}{dx_2} x_1 - \frac{dF_2}{dx_2} 3x_2^3.$$

И чтобы она представляла сумму функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, разность средних членов справа в последнем соотношении должна быть равна нулю:

$$\frac{dF_1}{dx_1} 2x_2 - \frac{dF_2}{dx_2} x_1 = 0,$$

или

$$\frac{dF_1}{dx_1} / x_1 = \frac{dF_2}{dx_2} / 2x_2.$$

Так как левая часть зависит от x_1 , а правая часть от x_2 , то последнее равенство возможно, если обе части являются константами и равны, например, единице. Тогда имеем

$$\frac{dF_1}{dx_1} = x_1, \quad \frac{dF_2}{dx_2} = 2x_2.$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$F_1 = \frac{1}{2} x_1^2, \quad F_2 = x_2^2, \quad V(\mathbf{x}) = F_1(x_1) + F_2(x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2.$$

Производная по времени от функции кандидата на функцию Ляпунова имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{dF_1}{dx_1} x_1^3 - \frac{dF_2}{dx_2} 3x_2^3 = -(x_1^4 + 6x_2^4).$$

Итак, полученная методом разделения переменных функция является положительно определенной, а ее производная в силу уравнений рассматриваемой системы — отрицательно определенной. Следовательно, положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво.

Теорема 4.8. (обобщенная теорема об асимптотической устойчивости). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ автономной системы (4.12) асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция $V(\mathbf{x})$, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией, и она обращается в нуль вне начала координат на множестве $M \subset D$, не содержащим целых траекторий.*

Целой траекторией (или *полутраекторией*) системы называется фазовая траектория в пространстве R^n , соответствующая решению уравнения этой системы $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ ($\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0)$) на всем интервале времени $t_0 \leq t \leq \infty$. Так как при $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ решение $\mathbf{x}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ при всех $t \geq t_0$, то начало координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ соответствует целой траектории.

Если множество M задается уравнением $\varphi(\mathbf{x}) = 0$: $M = \{\mathbf{x}: \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$, $\varphi(\mathbf{x})$ — гладкая (т.е. с непрерывными частными производными по всем своим аргументам) функция, то условие отсутствия в M целых траекторий можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{d\varphi}{d\mathbf{x}} \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x}) \neq 0. \quad (4.13)$$

Это неравенство должно выполняться на множестве M , т.е. при условии $\varphi(\mathbf{x}) = 0$.

Множество $M = \{\mathbf{x}: \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$ представляет собой поверхность, и последнее условие означает, что вектор скорости изображающей точки не лежит на ее касательной плоскости. И, следовательно, если изображающая точка попадает на поверхность (множество M), где производная функции Ляпунова $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, то она сразу же ее покидает и оказывается в области, где $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$.

Доказательство теоремы 4.8 основывается на теореме об инвариантных множествах из теории множеств и здесь не рассматривается.

Пример 4.7. Исследовать устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3.$$

Решение. Воспользуемся методом разделения переменных. Согласно этому методу имеем

$$V(\mathbf{x}) = F_1(x_1) + F_2(x_2).$$

Производная по времени от этой функции в силу уравнений заданной системы имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dF_1}{dx_1} \dot{x}_1 + \frac{dF_2}{dx_2} \dot{x}_2 = \frac{dF_1}{dx_1} x_2 - \frac{dF_2}{dx_2} x_1 - \frac{dF_2}{dx_2} x_2^3.$$

И чтобы она представляла сумму функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dF_1}{dx_1} x_2 - \frac{dF_2}{dx_2} x_1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dF_1}{dx_1} / x_1 = \frac{dF_2}{dx_2} / x_2.$$

Так как левая часть зависит от x_1 , а правая часть от x_2 , то последнее равенство возможно, если обе части являются константами и равны, например, единице. Тогда имеем

$$\frac{dF_1}{dx_1} = x_1, \quad \frac{dF_2}{dx_2} = x_2.$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$F_1 = \frac{1}{2} x_1^2, \quad F_2 = \frac{1}{2} x_2^2, \quad V(\mathbf{x}) = F_1(x_1) + F_2(x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2.$$

Производная по времени от функции кандидата на функцию Ляпунова имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{dF_2}{dx_2} x_2^3 = -x_2^4.$$

Она отрицательно полуопределена и обращается в нуль вне начала координат на множестве, определяемом уравнением $\varphi(\mathbf{x}) = x_2 = 0$. Условие (4.13) принимает вид

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \mathbf{X}(\mathbf{x}) \right|_{x_2=0} = (0 \ 1) \mathbf{X}(\mathbf{x})|_{x_2=0} = (-x_1 - x_2^3)|_{x_2=0} = -x_1.$$

В этом соотношении правая часть обращается в нуль на прямой $x_2 = 0$ только в начале координат. Следовательно, по обобщенной теореме об асимптотической устойчивости положение равновесия рассматриваемой системы асимптотически устойчиво.

Теорема 4.9 (теорема об асимптотической устойчивости в целом). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ автономной системы (4.12) асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво), если существует такая положительно определенная функция $V(\mathbf{x})$, допускающая бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.*

Так как функция непрерывна и обращается в нуль в начале координат, то она допускает бесконечно малый верхний предел. Поэтому теорема 4.9 вытекает из теоремы 4.3.

Теорема 4.10 (теорема Барабашина–Красовского об асимптотической устойчивости в целом). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ автономной системы (4.12) асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво), если существует такая положительно определенная функция $V(\mathbf{x})$, допускающая бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией, и она обращается в нуль вне начала координат на множестве M , не содержащем целых траекторий.*

В качестве примера рассмотрим систему из примера 4.7. Было показано, что функцией Ляпунова для этой системы является $V(\mathbf{x}) = x_1/2 + x_2^2/2$, которая стремится к бесконечности при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. То есть эта функция и, как было показано, ее производная удовлетворяют условию теоремы Барабашина–Красовского. Следовательно, положение равновесия рассмотренной в примере 4.7 системы является асимптотически устойчивым в целом.

4.3.2. Теоремы о неустойчивости. Теоремы о неустойчивости положения равновесия автономных систем вытекают из аналогичных теорем о неустойчивости положения равновесия неавтономных систем.

Теорема 4.11 (первая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ автономной системы (4.12) неустойчиво, если существует функция $V(\mathbf{x})$ такая, что ее производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ в силу уравнения этой системы является положительно определенной функцией и в любой малой окрестности начала координат найдется точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, в которой функция $V(\mathbf{x})$ принимает положительное значение.*

Пример 4.8. Исследовать устойчивость положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы

$$\dot{x}_1 = 3x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2(-x_1 + x_2^3).$$

Решение. В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим квадратичную форму

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \alpha x_2^2 \quad (\alpha > 0).$$

Производная от этой функции по времени в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2\alpha x_2\dot{x}_2 = 6x_1^4 + 2x_1x_2 - 4\alpha x_1x_2 + 4\alpha x_2^4.$$

Если положить $\alpha = 1/2$, то получим

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 6x_1^4 + 2x_2^4.$$

Выбранная функция $V(\mathbf{x})$ в любой малой окрестности принимает положительное значение, ее производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ является положительно определенной функцией. Следовательно, по теореме 4.11 положение равновесия рассматриваемой системы неустойчиво.

Теорема 4.12 (вторая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ автономной системы (4.12) неустойчиво, если существует функция $V(\mathbf{x})$ такая, что ее производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ в силу уравнений этой системы имеет вид*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \alpha V(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}),$$

где $\alpha > 0$, $w(\mathbf{x})$ — положительно полуопределенная функция, и в любой малой окрестности начала координат найдется точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, в которой функция $V(\mathbf{x})$ принимает положительное значение.

4.4. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

Выше мы рассматривали устойчивость невозмущенного движения, когда возмущенные движения были обусловлены ненулевыми начальными условиями. В этом параграфе рассмотрим случай, когда на систему постоянно действуют возмущения.

Наряду с неавтономной системой

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{X}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq t_0 \quad (4.14)$$

рассмотрим неавтономную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) + R(\mathbf{x}, t), \quad (4.15)$$

где $R(\mathbf{x}, t)$ — неизвестная функция, характеризующая постоянно действующие возмущения. В общем случае $R(\mathbf{0}, t) \neq \mathbf{0}$ и невозмущенное движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ не является решением уравнения (4.15).

Определение 4.1. Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (4.14) называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*, если для любого малого положительного числа ε найдутся такие положительные числа δ_0 и δ_1 , что при выполнении неравенства $|R(\mathbf{x}, t)| < \delta_1$ при всех $|\mathbf{x}| \leq \varepsilon$ и $t \geq t_0$ возмущенное движение системы (4.15) подчиняется неравенству $|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| < \varepsilon$ при любых $|\mathbf{x}^0| < \delta_0$ и $t \geq t_0$.

Строго говоря, устойчивость при постоянно действующих возмущениях означает, что при малых возмущениях отклонения возмущенного движения от невозмущенного движения малы.

Теорема 4.13 (теорема Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ неавтономной системы (4.14) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если существует такая положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией, и ее градиент удовлетворяет неравенству*

$$|\text{grad } V(\mathbf{x}, t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2} \leq N, \quad (4.16)$$

где N — положительная константа.

Доказательство. Так как $V(\mathbf{x}, t)$ является положительно определенной функцией, то существует положительно определенная функция $w_1(\mathbf{x})$, удовлетворяющая неравенству $V(\mathbf{x}, t) \geq w_1(\mathbf{x})$. Обозначим через m минимальное значение этой функции на сфере S_ε радиуса ε :

$$m = \min_{\mathbf{x} \in S_\varepsilon} w_1(\mathbf{x}).$$

На сфере S_ε при всех $t \geq t_0$

$$V(\mathbf{x}, t) \geq w_1(\mathbf{x}) \geq m. \quad (4.17)$$

Так как $V(\mathbf{x}, t)$ допускает бесконечно малый верхний предел, то существует такое положительное число δ_0 , что при $|\mathbf{x}| \leq \delta_0$

$$V(\mathbf{x}, t) < m \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.18)$$

Пусть $\dot{V}_{(14)}$ — производная по времени функции $V(\mathbf{x}, t)$ в силу уравнения (4.14). В связи с тем, что производная $\dot{V}_{(14)}$ является отрицательно определенной функцией, существует положительно опре-

деленная функция $w_2(\mathbf{x})$ такая, что

$$\dot{V}_{(14)}(\mathbf{x}, t) \leq -w_2(\mathbf{x})$$

при всех $t \geq t_0$. В силу положительной определенности функции $w_2(\mathbf{x})$ существует положительное число h такое, что $w_2(\mathbf{x}) > h$ или $-w_2(\mathbf{x}) < -h$ при $|\mathbf{x}| > \delta_0$. Поэтому имеем

$$\dot{V}_{(14)}(\mathbf{x}, t) \leq -w_2(\mathbf{x}) < -h.$$

Если обозначить $\dot{V}_{(15)}$ производную по времени функции $V(\mathbf{x}, t)$ в силу уравнения (4.15), то получим

$$\dot{V}_{(15)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i = \dot{V}_{(14)} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i.$$

Согласно неравенству Коши–Шварца [32]

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

или

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (4.19)$$

имеем

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n R_i^2} = |\text{grad } V(\mathbf{x}, t)| |R(\mathbf{x}, t)|.$$

Используя это соотношение, а также соотношение (4.16) и полученное выше неравенство для $\dot{V}_{(14)}(\mathbf{x}, t)$, находим

$$\dot{V}_{(15)}(\mathbf{x}, t) \leq \dot{V}_{(14)}(\mathbf{x}, t) + \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i \right| < -h + N |R(\mathbf{x}, t)|.$$

Пусть $|R(\mathbf{x}, t)| < \delta_1 = h/(2N)$ при $|\mathbf{x}| \leq \varepsilon$ и всех $t \geq t_0$. Тогда из последнего неравенства имеем

$$\dot{V}_{(15)}(\mathbf{x}, t) < -h/2. \quad (4.20)$$

Решение $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ уравнения (4.15) при $|\mathbf{x}^0| < \delta_0$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Действительно, в силу (4.18) имеем

$$V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_0), t_0) = V(\mathbf{x}^0, t_0) < m.$$

Если допустить, что $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_1) = \varepsilon$ в какой-то момент $t = t_1$, то в силу (4.17)

$$V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_1), t_1) \geq m.$$

А это означает, что функция $V(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t)$ в некоторой окрестности t_1 возрастает, что противоречит условию (4.20). Теорема доказана.

4.5. Исследование нелинейных систем по линейному приближению

Проблему исследования нелинейных систем по их линейному приближению впервые поставил и разрешил А. М. Ляпунов [42, 34]. Судить об устойчивости исходной нелинейной системы по линейному приближению можно не всегда.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + \alpha x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \alpha x_2^3.$$

Функцию Ляпунова будем искать в виде положительно определенной квадратичной формы $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$. Производная по времени от этой функции в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2\alpha(x_1^4 + x_2^4),$$

она является положительно определенной функцией при $\alpha > 0$ и отрицательно определенной функцией при $\alpha < 0$. Следовательно, положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ рассматриваемой системы неустойчиво при $\alpha > 0$ и асимптотически устойчиво при $\alpha < 0$.

Линеаризованная система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Ее характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет два чисто мнимых корня. Поэтому, как было показано в гл. 2, начало координат является особой точкой типа центр, и оно соответствует устойчивому по Ляпунову положению равновесия. Таким образом, в рассматриваемом случае устойчивость линеаризованной системы не имеет ничего общего с устойчивостью исходной нелинейной системы: по линейному приближению нельзя делать какие-либо выводы об устойчивости исходной нелинейной системы как при $\alpha > 0$, так и при $\alpha < 0$.

4.5.1. Уравнение Ляпунова и критерий Ляпунова устойчивости линейных систем. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{4.21}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор ($\mathbf{x} \in R^n$), A — квадратная матрица n -го порядка. Пусть задана квадратичная форма $w(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T C \mathbf{x}$. Для того чтобы эта квадратичная форма была равна производной по времени от квадратичной формы $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ в силу системы (4.21), т.е. $\dot{V}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$, матрица B должна удовлетворять матричному уравнению

$$A^T B + B A = C. \tag{4.22}$$

Действительно, производная по времени от квадратичной формы $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ в силу уравнения (4.21) имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T B \mathbf{x} + \mathbf{x}^T B \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A^T B \mathbf{x} + \mathbf{x}^T B A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (A^T B + B A) \mathbf{x}.$$

Отсюда следует, что равенство $\dot{V}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$ возможно в том и только том случае, если матрицы B и C удовлетворяют уравнению (4.22), которое называется *уравнением Ляпунова*. Таким образом, чтобы по заданной квадратичной форме $w(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T C \mathbf{x}$ найти соответствующую ей квадратичную форму $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$, нужно решить уравнение Ляпунова.

Исследование уравнения Ляпунова представляет большой интерес, так как это уравнение позволяет найти функцию Ляпунова в виде квадратичной формы по заданной ее производной. Естественно возникает вопрос: когда уравнение Ляпунова имеет решение? Ответ на этот вопрос зависит от того, какие корни имеет характеристическое уравнение системы (4.21)

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.23)$$

Теорема 4.14 (теорема о существовании решения уравнения Ляпунова). *Если среди корней характеристического уравнения (4.23) нет пары корней, сумма которых равна нулю, т. е. сумма корней $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ при всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, то при любой симметрической матрице C уравнение Ляпунова имеет единственное решение для неизвестной матрицы B .*

Эта теорема может быть доказана с помощью теории операторов [7], и ее доказательство здесь не рассматривается.

Теорема 4.15 (критерий устойчивости Ляпунова линейных систем). *Для того чтобы линейная стационарная система (4.21) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для любой отрицательно определенной квадратичной формы $w(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T C \mathbf{x}$ существовала положительно определенная квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ такая, что производная по времени от этой функции в силу уравнения системы (4.21) была равна заданной квадратичной форме $w(\mathbf{x})$: $\dot{V}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$.*

Доказательство. Необходимость. Существование некоторой квадратичной формы $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$, производная от которой по времени равна заданной квадратичной форме, следует из теоремы 4.14. Поэтому достаточно показать, что эта квадратичная форма является положительно определенной функцией.

Пусть система (4.21) устойчива. Тогда ее решение, которое при начальном условии $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ имеет вид (см. (1.10)) $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}^0$, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, и квадратичная форма $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Покажем, что квадратичная функция, удовлетворяющая условиям теоремы, является положительно определенной функцией. Допустим противное: в некоторой точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \neq 0$

квадратичная форма $V(\mathbf{x}^0) \leq 0$. Тогда в силу того, что

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = w(\mathbf{x}(t)) < 0,$$

где $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}^0$, функция $V(\mathbf{x}(t))$ при $t > 0$ отрицательна и убывает с ростом t . А это противоречит тому, что $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Достаточность непосредственно следует из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Теорема 4.16 (теорема о существовании положительно определенного решения уравнения Ляпунова). *Если матрица A устойчива, т. е. все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части, то какова бы ни была отрицательно определенная матрица C , уравнение Ляпунова (4.22) имеет единственное решение B , которое является положительно определенной матрицей.*

Эта теорема непосредственно вытекает из теорем 4.14 и 4.15.

Теорема 4.17. *Если среди корней характеристического уравнения системы (4.21) имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью и сумма никаких пар этих корней не обращается в нуль, то какова бы ни была положительно определенная функция $w(\mathbf{x})$, найдется квадратичная форма $V(\mathbf{x})$, у которой производная по времени в силу указанного уравнения системы удовлетворяет уравнению $\dot{V}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$, и в любой окрестности начала координат имеется точка, в которой $V(\mathbf{x})$ принимает положительное значение.*

Доказательство. Существование квадратичной формы $V(\mathbf{x})$, удовлетворяющей указанному в теореме уравнению, следует из теоремы 4.14. Покажем, что в любой окрестности начала координат существует точка, в которой $V(\mathbf{x})$ принимает положительное значение.

Квадратичная форма $V(\mathbf{x})$ не может быть отрицательно определенной, так как в противном случае функция $-V(\mathbf{x})$ удовлетворяла бы условию теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. В силу указанной причины в любой окрестности начала координат существует точка, где $V(\mathbf{x})$ по крайней мере обращается в нуль. Но так как $\dot{V}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) > 0$, то в любой окрестности такой точки существует точка, где $V(\mathbf{x}) > 0$.

Теорема 4.18. *Если среди корней характеристического уравнения системы (4.21) имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то какова бы ни была положительно определенная квадратичная форма $w(\mathbf{x})$, всегда найдутся квадратичная форма $V(\mathbf{x})$ и положительное число α такие, что производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ в силу указанного уравнения системы удовлетворяет соотношению*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \alpha V(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}),$$

и в любой окрестности начала координат найдется точка, в которой квадратичная форма $V(\mathbf{x})$ принимает положительное значение.

Доказательство. Рассмотрим наряду с (4.21) систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(A - \frac{\alpha}{2} I \right) \mathbf{x}. \quad (4.24)$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\left| A - \left(\frac{\alpha}{2} + \tilde{\lambda} \right) I \right| = 0,$$

и его корни $\tilde{\lambda}_i$ связаны с корнем λ_i характеристического уравнения системы (4.21) соотношением $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i + \alpha/2$.

Пусть λ_{i_0} — корень с положительной вещественной частью. Выберем α таким, чтобы выполнялись условия:

1) из $\operatorname{Re} \lambda_{i_0} > 0$ следует $\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_{i_0} > 0$;

2) $\tilde{\lambda}_i + \tilde{\lambda}_k \neq 0$ при всех i и k .

Условие 1) всегда можно выполнить, выбрав α достаточно малым. Учитывая, что $\tilde{\lambda}_i + \tilde{\lambda}_k = \lambda_i + \lambda_k - \alpha$, можно выбрать α , не совпадающим ни с одной суммой $\lambda_i + \lambda_k$.

Согласно теореме 4.17 для положительно определенной функции найдется квадратичная форма $V(\mathbf{x})$, принимающая в какой-либо точке любой окрестности начала координат положительное значение, и производная по времени этой формы в силу уравнения (4.24) равна $w(\mathbf{x})$:

$$\dot{V}_{(24)}(\mathbf{x}) = \frac{dV(\mathbf{x})}{dx} \dot{\mathbf{x}} = \frac{dV(\mathbf{x})}{dx} \left(A - \frac{\alpha}{2} \right) \mathbf{x} = w(\mathbf{x}).$$

Так как $\frac{dV(\mathbf{x})}{dx} A \mathbf{x}$ — производная по времени квадратичной формы $V(\mathbf{x})$ в силу уравнения (4.21) и в случае квадратичной формы

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dx} \mathbf{x} = 2V(\mathbf{x}),$$

то из последнего соотношения получаем

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \alpha V(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}).$$

Теорема доказана.

4.5.2. Критерий устойчивости Ляпунова по линейному приближению. Пусть уравнения нелинейной системы представлены в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad R_i(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + R(\mathbf{x}), \quad R(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

где

$$|R(\mathbf{x})|^2 = \sum_{i=1}^n R_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq c \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1+\alpha}. \quad (4.26)$$

Здесь α — малое положительное число, c — положительная константа. Условие (4.26) означает, что разложение нелинейного члена $R(\mathbf{x})$ в (4.25) в ряд Тейлора в начале координат начинается с членов, содержащих квадраты или более высокие степени фазовых координат и их произведения.

Теорема 4.19 (критерий устойчивости Ляпунова нелинейной системы). *Положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ нелинейной системы (4.25) асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ имеют отрицательную вещественную часть, и неустойчиво, если среди указанных корней имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму [7].

Лемма 4.2. *Пусть $w(\mathbf{x})$ — знакоопределенная квадратичная форма, $V(\mathbf{x})$ — произвольная квадратичная форма.*

Тогда функция

$$w(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} R_i(\mathbf{x})$$

будет знакоопределенной, совпадающей по знаку с $w(\mathbf{x})$ в некоторой окрестности начала координат.

Доказательство. Согласно неравенству (4.1) имеем

$$\lambda_m |\mathbf{x}|^2 \leq w(\mathbf{x}) \leq \lambda_M |\mathbf{x}|^2, \quad (4.27)$$

где λ_m — минимальное, λ_M — максимальное собственные числа соответствующей матрицы квадратичной формы $w(\mathbf{x})$, $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Так как $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2$ — квадратичная форма, то, аналогично, имеем

$$\lambda'_m |\mathbf{x}|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \leq \lambda'_M |\mathbf{x}|^2, \quad (4.28)$$

где λ'_m — минимальное, λ'_M — максимальное собственные числа соответствующей матрицы указанной квадратичной формы. Из неравенства Коши–Шварца (4.19) и неравенств (4.26) и (4.28) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i \right| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n R_i^2} \leq \sqrt{\lambda'_M} |\mathbf{x}| \sqrt{c} |\mathbf{x}|^{1+\alpha} = \\ &= \sqrt{\lambda'_M c} |\mathbf{x}|^{2+\alpha}, \end{aligned}$$

или

$$-\sqrt{\lambda'_M c} |\mathbf{x}|^{2+\alpha} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i \leq \sqrt{\lambda'_M c} |\mathbf{x}|^{2+\alpha}.$$

Пусть для определенности $w(\mathbf{x})$ — положительно определенная функция. Тогда λ_m и λ_M в (4.27) являются положительными чис-

лами. Поэтому из (4.27) и последнего неравенства имеем

$$w + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i \geq \left(\lambda_m - \sqrt{\lambda'_{Mc}} |\mathbf{x}|^\alpha \right) |\mathbf{x}|^2.$$

Если

$$\lambda_m - \sqrt{\lambda'_{Mc}} |\mathbf{x}|^\alpha > 0, \quad \text{или} \quad |\mathbf{x}| < \left(\lambda_m / \sqrt{\lambda'_{Mc}} \right)^{1/\alpha},$$

то из последнего неравенства следует

$$w + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i > 0,$$

т. е. в окрестности $|\mathbf{x}| < \left(\lambda_m / \sqrt{\lambda'_{Mc}} \right)^{1/\alpha}$ начала координат знак левой части в последнем неравенстве совпадает со знаком $w(\mathbf{x})$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4.19. Пусть линеаризованная система $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ асимптотически устойчива, т. е. вещественные части всех корней ее характеристического уравнения отрицательны. Покажем, что исходная нелинейная система (4.25) также асимптотически устойчива.

На основании критерия устойчивости Ляпунова линейных систем (теорема 4.15) существует такая положительно определенная квадратичная форма $V(\mathbf{x})$, что производная по времени от этой функции в силу уравнения линеаризованной системы, т. е.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

равна отрицательно определенной квадратичной форме $w(\mathbf{x}) = -|\mathbf{x}|^2 = -\sum_{i=1}^n x_i^2$:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = -|\mathbf{x}|^2.$$

Производная от указанной квадратичной формы в силу исходной нелинейной системы (4.25) имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i \right) = -|\mathbf{x}|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i,$$

и она в силу леммы 4.2 в некоторой окрестности начала координат является отрицательно определенной функцией. Поэтому положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ нелинейной системы (4.25) асимптотически устойчиво.

Пусть среди корней характеристического уравнения линеаризованной системы $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ имеется хотя бы один корень с положитель-

ной вещественной частью. Покажем, что нелинейная система (4.25) неустойчива.

По теореме 4.18 для $w(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ существует квадратичная форма, принимающая в какой-либо точке в любой окрестности начала координат положительное значение и производная которой по времени в силу уравнения линеаризованной системы (4.21) удовлетворяет соотношению

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \alpha V(\mathbf{x}) + |\mathbf{x}|^2, \quad \alpha > 0.$$

Производная $V(\mathbf{x})$ по времени в силу уравнения (4.25) принимает вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \alpha V(\mathbf{x}) + |\mathbf{x}|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} R_i(\mathbf{x}).$$

По лемме 4.2 сумма

$$|\mathbf{x}|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} R_i(\mathbf{x})$$

является положительно определенной функцией в некоторой окрестности начала координат. Следовательно, согласно второй теореме Ляпунова о неустойчивости (теорема 4.12) система (4.25) неустойчива. Теорема доказана.

Критический случай. Итак, если линеаризованная система устойчива, т.е. все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то и исходная нелинейная система асимптотически устойчива. Если линеаризованная система неустойчива и хотя бы один корень ее характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, то и исходная нелинейная система неустойчива. И наконец, если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет корни на мнимой оси и не имеет корней в правой полуплоскости, т.е. она маргинально устойчива, то говорят, что имеет место *критический случай*. В критическом случае по линеаризованной модели нельзя судить об устойчивости исходной нелинейной системы. В примере, который был рассмотрен в начале параграфа, был критический случай.

Пример 4.9. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3 \sin y = 0.$$

Решение. Разложение в ряд Тейлора синуса имеет вид

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \dots$$

Поэтому для линеаризованного уравнения имеем

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 0.$$

Линеаризованная модель (асимптотически) устойчива, так как все коэффициенты уравнения положительны, т.е. выполняется необходи-

мое условие устойчивости, а для систем 2-го порядка необходимое условие устойчивости является и достаточным. Поэтому и исходная нелинейная система асимптотически устойчива.

Пример 4.10. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$y + 5\ddot{y} + 4\dot{y} + 3e^y = 3.$$

Решение. Разложение в ряд Тейлора функции e^y имеет вид

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots$$

Поэтому для линеаризованного уравнения имеем

$$y + 5\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + 5\lambda + 4\lambda + 3 = 0.$$

Определитель Гурвица 2-го порядка положителен:

$$\Delta_2 = 5 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 17.$$

Так как выполняется необходимое условие устойчивости и единственный определитель Гурвица с четным индексом положителен, то по критерию Ляпунова–Шипара линеаризованная система устойчива. Следовательно, и исходная нелинейная система асимптотически устойчива.

Пример 4.11. Исследовать устойчивость положения равновесия системы

$$\dot{x}_1 = x_2 - 2x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -4x_1 - 3x_2^3.$$

Решение. Уравнения первого приближения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -4x_1.$$

Характеристическое уравнение

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} - I\lambda \right| = \lambda^2 + 4 = 0$$

имеет два чисто мнимых корня. Поэтому имеет место критический случай, и по линеаризованной модели нельзя исследовать устойчивость исходной нелинейной системы.

Исследуем устойчивость нелинейной системы методом функций Ляпунова. В качестве кандидата на функцию Ляпунова примем квадратичную форму

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \alpha x_2^2.$$

Производная по времени в силу заданных уравнений имеет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2\alpha x_2\dot{x}_2 = 2x_1(x_2 - 2x_1^3) + 2\alpha x_2(-4x_1 - 3x_2^3).$$

Если принять $\alpha = 1/4$, то получим

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\left(4x_1^4 + \frac{3}{2}x_2^4\right).$$

Таким образом, выбранная квадратичная форма является положительно определенной, а ее производная по времени в силу заданных уравнений системы — отрицательно определенной. Следовательно, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости положение равновесия рассматриваемой системы является асимптотически устойчивым.

4.6. Оценка времени регулирования

Рассмотрим задачу оценки времени регулирования устойчивой линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \quad (4.29)$$

Пусть $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ — решение уравнения (4.29) при начальном условии $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ и $\bar{t}_p$ — минимальное время, по истечении которого $|\mathbf{x}(t)|$ не превышает некоторой заданной величины Δ :

$$\bar{t}_p = \min_{\bar{t}} \{ \bar{t} : |\mathbf{x}(t)| \leq \Delta \quad \forall t \geq \bar{t} \}.$$

Заметим, что $\bar{t}_p$ и при соответствующем выборе начального условия не совпадает со временем регулирования t_p , принятым в теории управления линейных систем. Тем не менее $\bar{t}_p$ также будем называть *временем регулирования* систем (4.29) при начальном условии $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

Теорема 4.20. Пусть матрица B является решением уравнения Ляпунова

$$A^T B + B A = -I \quad (I — единичная матрица), \quad (4.30)$$

λ_m и λ_M — минимальное и максимальное собственные значения этой матрицы. Решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ уравнения (4.29) при начальном условии $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ удовлетворяет условию

$$\frac{V_0}{\lambda_M} e^{-t/\lambda_m} \leq |\mathbf{x}|^2 \leq \frac{V_0}{\lambda_m} e^{-t/\lambda_M}, \quad (4.31)$$

где $V_0 = \mathbf{x}^{0T} B \mathbf{x}^0$, и время регулирования $\bar{t}_p$ определяется соотношением

$$\bar{t}_p = \lambda_M \ln \frac{V_0}{\lambda_m \Delta^2}. \quad (4.32)$$

Доказательство. В силу теоремы о существовании решения уравнения Ляпунова (теорема 4.14) и критерия Ляпунова устойчивости линейных систем (теорема 4.15) решение B уравнения Ляпунова (4.30) существует и квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ является функцией Ляпунова для системы (4.29). При этом имеет место равенство

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{x} = -|\mathbf{x}|^2. \quad (4.33)$$

Используя свойство квадратичной формы (см. (4.1))

$$\lambda_m |\mathbf{x}|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_M |\mathbf{x}|^2,$$

получаем

$$-\frac{V(\mathbf{x})}{\lambda_m} \leq -|\mathbf{x}|^2 \leq -\frac{V(\mathbf{x})}{\lambda_M}, \quad (4.34)$$

или, учитывая равенство (4.33),

$$-\frac{V(\mathbf{x})}{\lambda_m} \leq \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq -\frac{V(\mathbf{x})}{\lambda_M}.$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$-\frac{dt}{\lambda_m} \leq \frac{dV(\mathbf{x})}{V(\mathbf{x})} \leq -\frac{dt}{\lambda_M}.$$

Проинтегрировав это неравенство, получим

$$V_0 e^{-t/\lambda_m} \leq V(\mathbf{x}) \leq V_0 e^{-t/\lambda_M}. \quad (4.35)$$

Неравенство (4.34) можно представить в виде

$$\frac{V(\mathbf{x})}{\lambda_M} \leq |\mathbf{x}|^2 \leq \frac{V(\mathbf{x})}{\lambda_m}.$$

Используя (4.35), из последнего неравенства получим (4.31).

Теперь, подставив в правую часть полученного неравенства (4.31) $t = \bar{t}_p$, приравняв ее Δ^2 и прологарифмировав, получим формулу (4.32). Теорема доказана.

Очевидно, время $\bar{t}_p$ само по себе может служить показателем быстродействия. Однако его можно использовать также и для оценки «классического» времени регулирования. Как известно, в теории управления линейных систем временем регулирования называется минимальное время t_p , по истечении которого отклонение переходной характеристики от установившегося значения не превышает некоторой заданной величины Δ . Если время $\bar{t}_p$ определить при начальных условиях, соответствующих начальным условиям при снятии переходной характеристики, его можно использовать как оценку сверху времени регулирования t_p :

$$t_p \leq \bar{t}_p = \lambda_m \ln \frac{V_0}{\lambda_m \Delta^2}.$$

Следует заметить, что $\bar{t}_p$ может оказаться значительно больше t_p , так как $\bar{t}_p$ определяет как время, по истечении которого модуль вектора состояния (а не модуль выходной переменной) не превышает заданной величины Δ .

Пример 4.12. Получите верхнюю оценку времени регулирования методом функций Ляпунова для системы

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в нормальной форме:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2,$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (4.30) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

После перемножения матриц получим

$$\begin{bmatrix} -b_{21} & -b_{22} \\ b_{11} - b_{21} & b_{12} - b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{12} & b_{11} - b_{12} \\ -b_{22} & b_{21} - b_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Учитывая равенство $b_{12} = b_{21}$, из последнего уравнения получаем систему уравнений

$$-2b_{12} = -1, \quad -b_{22} + b_{11} - b_{12} = 0, \quad 2b_{12} - 2b_{22} = -1.$$

Эта система имеет следующее решение:

$$b_{12} = b_{21} = 0,5, \quad b_{22} = 1, \quad b_{11} = 1,5.$$

Характеристическое уравнение

$$|B - I\lambda| = \begin{vmatrix} 1,5 - \lambda & 0,5 \\ 0,5 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1,5 - \lambda)(1 - \lambda) - 0,25 = \\ = \lambda^2 - 2,5\lambda + 1,25 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = \lambda_m = 0,69$ и $\lambda_2 = \lambda_M = 1,81$.

Положим $x(0) = (1 \ 0)^T$ и $\Delta = 0,05$. Тогда получим

$$V_0 = (1 \ 0) \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,5,$$

$$\bar{t}_p = \lambda_M \ln \frac{V_0}{\lambda_m \Delta^2} = 1,81 \ln 869,565 \approx 12.$$

4.7. Методы построения функций Ляпунова

Общего метода построения функции Ляпунова нет. Разработаны различные методы, которые позволяют находить функции Ляпунова для определенного типа систем [7]. Здесь мы рассмотрим некоторые из них.

1. *Энергетический подход.* При таком подходе в качестве кандидата на функцию Ляпунова принимают полную энергию, представляющую сумму потенциальной и кинетической энергий.

2. *Метод разделения переменных.* Этот метод предложен Е. А. Барбашиным и состоит в следующем. Кандидата на функцию Ляпунова ищут среди функций, которые сами, как и их производные по времени, в силу заданных уравнений системы представляют сумму функций, каждая из которых зависит только от одной фазовой переменной:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n F_i(x_i), \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_i).$$

3. *Метод Лурье–Постникова.* А. И. Лурье и В. Н. Постников, рассматривая задачу об устойчивости нелинейной системы, содержащей одну нелинейность $\sigma = f(e)$, использовали в качестве кандидата на функцию Ляпунова сумму из квадратичной формы и интеграла от нелинейной функции, т. е. функцию вида [41]

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x} + \int_0^e f(e) de,$$

где в общем случае $e = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Более детально этот метод был разработан А. И. Лурье [40]. Он широко используется при рассмотрении задачи об абсолютной устойчивости, о которой речь пойдет в следующей главе.

4. *Метод Красовского.* Этот метод состоит в том, что при рассмотрении устойчивости автономной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^n,$$

в качестве кандидата на функцию Ляпунова рассматривают квадратичную форму

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T B \mathbf{X}.$$

Симметричную матрицу B нужно выбрать так, чтобы сама квадратичная форма была положительно определенной, а ее производная по времени в силу заданного уравнения системы — отрицательно определенной.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -bx_1 - \varphi(x_2), \quad b > 0, \quad \varphi(0) = 0.$$

Матрицу B выберем диагональной:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда кандидат на функцию Ляпунова примет вид

$$V(\mathbf{x}) = b_{11}x_2^2 + b_{22}[-bx_1 - \varphi(x_2)]^2.$$

Производная по времени в силу заданных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2b_{11}x_2\dot{x}_2 + 2b_{22}[-bx_1 - \varphi(x_2)]\left(-b\dot{x}_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\dot{x}_2\right) = \\ &= 2[bx_1 + \varphi(x_2)](b_{22}b - b_{11})x_2 - 2b_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}[bx_1 + \varphi(x_2)]^2. \end{aligned}$$

Положив $b_{11} = b$ и $b_{22} = 1$, получим

$$V(\mathbf{x}) = bx_2^2 + [bx_1 + \varphi(x_2)]^2, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = -2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}[bx_1 + \varphi(x_2)]^2.$$

Как нетрудно убедиться, $V(\mathbf{x})$ является положительно определенной функцией и $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Если $\partial\varphi/\partial x_2 > 0$ при $x_2 \neq 0$, то производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ является отрицательно полуопределенной и обращается в нуль на многообразии $\sigma(\mathbf{x}) = bx_1 + \varphi(x_2) = 0$, т.е. на множестве, определяемом указанным уравнением. Это множество не содержит целых траекторий, так как

$$\text{grad } \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{X}(\mathbf{x})|_{\sigma(\mathbf{x})=0} = bx_2 \neq 0$$

вне начала координат на указанном многообразии. Поэтому по теореме Барбашина–Красовского положение равновесия рассматриваемой системы будет асимптотически устойчиво в целом.

5. *Метод Вокера–Кларка* (Woker–Klark). Пусть система описывается уравнением

$$\frac{d^n y}{dt^n} + f\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right) = 0,$$

или, в нормальной форме,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= -f(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова при этом методе рассматривается функция

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{n-1} + \frac{x_n^2}{2} + F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где неизвестная функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выбирается так, чтобы производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ в силу заданных уравнений системы была отрицательно полуопределенной.

Исследуем этим методом систему

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) = 0, \quad f(0, 0) = 0,$$

или

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2).$$

В соответствии с методом Вокера–Кларка в качестве кандидата на функцию Ляпунова принимаем

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} f(x_1, x_2) dx_1 + \frac{x_2^2}{2} + F(x_1, x_2).$$

Производная от этой функции по времени в силу заданных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= f(x_1, x_2)\dot{x}_1 + \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 \right) \dot{x}_2 + x_2 \dot{x}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ &= -f(x_1, x_2) \int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial F}{\partial x_2} f(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Если положить $F(x_1, x_2) = 0$, то получим

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} f(x_1, x_2) dx_1 + \frac{x_2^2}{2}, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = -f(x_1, x_2) \int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1.$$

Отсюда следует, что положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво в целом, если выполняется условие

$$x_1 f(x_1, x_2) > 0, \quad f(x_1, x_2) \int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Задачи

1. Исследуйте, являются ли положительно определенными в пространстве R^3 следующие квадратичные формы:

- а) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
- б) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
- в) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
- г) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3$;
- д) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
- е) $V(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

2. Исследуйте методом функций Ляпунова устойчивость положения равновесия следующих систем:

- а) $\dot{x}_1 = 0,5x_1 - x_2 + 2x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2$;
- б) $\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2^3, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - x_2^3$;
- в) $\dot{x}_1 = 2x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2^3 + x_3, \quad \dot{x}_3 = -x_2 - x_3^5$;
- г) $\dot{x}_1 = 2x_3 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_3, \quad \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 - x_3^3$;
- д) $\dot{x}_1 = -x_2 + 0,5x_1x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2x_2$;
- е) $\dot{x}_1 = -x_2 + 0,5x_1x_2^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2x_2 - x_2^3$;
- ж) $\ddot{y} + \dot{y} - y^5 = 0$;
- з) $\ddot{y} - \dot{y}^3 + y - y^5 = 0$.

3. Исследуйте по линейной модели устойчивость положения равновесия следующих систем:

а) $\ddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + \sin y = 0;$

б) $\ddot{y} + 3\ddot{y} + 5\dot{y} + 3(e^y - 1) = 0;$

в) $\ddot{y} + 3\ddot{y} + \dot{y} + 3y + \cos y - 1 = 0;$

г) $\ddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y + e^y - \cos y = 0;$

д) $\ddot{y} + 2\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y + \sin y - 2 \cos y + 2 = 0;$

е) $\dot{x}_1 = -2 \sin x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2^5;$

ж) $\dot{x}_1 = -2 \sin x_1 - e^{x_2} + \cos x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2;$

з) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 + 1 - \cos x_2;$

и) $\dot{x}_1 = 2x_1 - 2 \sin x_1 + e^{x_2} - \cos x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + x_2^2.$

4. Исследуйте устойчивость положения равновесия следующих систем:

а) $\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2^5;$

б) $\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2;$

в) $\dot{x}_1 = (2 + \sin t)x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - x_2^3;$

г) $\dot{x}_1 = (0,5 + \sin^2 t)x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2^3;$

д) $\dot{x}_1 = 0,5x_1 + (0,5 + \sin^2 t)x_2,$
 $\dot{x}_2 = -(1 + 0,2 \sin^2 t)x_1 + (\cos t - 2)x_2;$

е) $\dot{x}_1 = x_1 + (0,5 + \sin^2 t)x_2 - x_1^3,$
 $\dot{x}_2 = -(2 + 4 \sin^2 t)x_1 - 2x_2 - x_2^3.$

5. Определите, при каких значениях параметров устойчиво положение равновесия следующих систем:

а) $\dot{x}_1 = -bx_1^3 + ax_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2^5;$

б) $\dot{x}_1 = -x_1^3 + ax_2, \quad \dot{x}_2 = -2cx_1 - 2x_2^5;$

в) $\dot{x}_1 = -x_1^3 + ax_2, \quad \dot{x}_2 = -cx_1 - 2x_2^5;$

г) $\dot{x}_1 = -bx_1^3 + ax_2, \quad \dot{x}_2 = -cx_1 - 2dx_2^5.$

Глава 5

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Впервые задача об абсолютной устойчивости была рассмотрена А. И. Лурье, и ее иногда называют задачей Лурье [37]. Им был разработан метод решения этой задачи, основанный на построении функции Ляпунова. В 1961 г. румынский ученый В. М. Попов опубликовал работу, в которой изложил частотный метод решения этой проблемы. Это повлекло за собой появление большого потока работ в этом направлении.

Рассмотрим систему с одной нелинейностью (рис. 5.1, а). Такую систему всегда можно преобразовать к «стандартному» виду

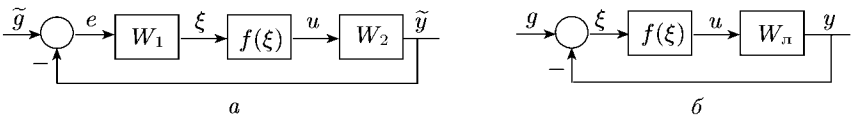


Рис. 5.1. Структурная схема нелинейной системы (к исследованию абсолютной устойчивости: *a* — исходная структурная схема; *б* — преобразованная структурная схема

(рис. 5.1, б). В нормальной форме такие системы описываются уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad u = f(\xi), \quad \xi = -\mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{x}$ — n -вектор; u, ξ — скалярные переменные; нелинейная функция $f(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(0) = 0, \quad k_m \leq \frac{f(\xi)}{\xi} \leq k_M \quad \text{при} \quad \xi \neq 0. \quad (5.2)$$

Уравнения (5.1) представляют собой уравнения в отклонениях, и на структурной схеме (рис. 5.1) задающее воздействие равно нулю: $\tilde{g} = 0$ ($g = 0$).

Определение 5.1. Система (5.1), или положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (5.1) называется абсолютно устойчивым в угле (секторе) $[k_m, k_M]$, если нулевое решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (5.1) асимптотически устойчиво в целом при любой нелинейной функции $f(\xi)$, удовлетворяющей условию (5.2).

Абсолютная устойчивость, как и робастная устойчивость, означает устойчивость не одной конкретной системы, а некоторого множества систем, определяемых заданным множеством Ξ нелинейных звеньев. В определении 5.1 в качестве множества Ξ принято множество (5.2), которое обычно рассматривается при рассмотрении абсолютной устойчивости. Естественно, множество Ξ может быть задано иначе. Поэтому в общем случае будем говорить об *абсолютной устойчивости на множестве (классе) Ξ* , которое в общем случае отличается от множества, задаваемого соотношением (5.2).

5.1. Система сравнения. Необходимое условие абсолютной устойчивости

Дальше будем рассматривать структурную схему нелинейной системы, представленную в стандартном виде (см. рис. 5.1, б). Передаточную функцию W_{π} в операторной форме, если система задана уравнениями (5.1), можно найти следующим образом. Запишем уравнения линейной части в операторной форме:

$$(Ip - A)x = bu, \quad \xi = -c^T x,$$

или

$$x = (Ip - A)^{-1}bu, \quad \xi = -c^T x.$$

Отсюда, исключая x и учитывая $y = -\xi$, получим

$$W_{\pi}(p) = c^T (Ip - A)^{-1}b.$$

Используя эту передаточную функцию, уравнения (5.1) можно записать (см. рис. 5.1, б) в виде

$$y = W_{\pi}(p)u, \quad u = f(\xi), \quad \xi = -y. \quad (5.3)$$

Наряду с нелинейной системой (5.1) или (5.3) рассмотрим линейную систему

$$y = W_{\pi}(p)u, \quad u = k\xi, \quad \xi = -y. \quad (5.4)$$

Эту систему при любом $k \in [k_m, k_M]$ называют *системой сравнения* системы (5.3), (5.2). «Нелинейность» $f(\xi) = k\xi$ принадлежит множеству (5.2) при любом $k \in [k_m, k_M]$. Поэтому если система (5.3) абсолютно устойчива в угле $[k_m, k_M]$, то ее система сравнения, т. е. линейная система (5.4), устойчива (асимптотически устойчива в целом) при любом $k \in [k_m, k_M]$. И если система сравнения при каком-либо $k \in [k_m, k_M]$ неустойчива, то система (5.3) не может быть абсолютно устойчивой в угле $[k_m, k_M]$. Будем говорить, что система сравнения *робастно устойчива в угле или на интервале $[k_m, k_M]$* , если она устойчива при любом $k \in [k_m, k_M]$. Из изложенного выше вытекает следующее необходимое условие абсолютной устойчивости: *для того чтобы положение равновесия системы (5.3) было абсолютно устойчиво в угле $[k_m, k_M]$, необходимо, чтобы ее система сравнения была робастно устойчива в угле $[k_m, k_M]$* .

Возникает вопрос, не является ли необходимое условие абсолютной устойчивости и достаточным. Эту проблему впервые в 1949 г. рассмотрел М. А. Айзерман. Поэтому ее называют *проблемой Айзермана*.

Проблема Айзермана вскоре была решена. Н. Н. Красовский в 1952 г. и В. А. Плисс в 1958 г. показали, что приведенное выше необходимое условие не является достаточным: они построили системы (модели), которые не были абсолютно устойчивы, в то время как их системы сравнения были робастно устойчивы в заданном угле.

Пример 5.1. Пусть передаточная функция линейной части имеет вид $W_{\pi} = 1/(p+1)^3$. Исследовать, является ли система (см. рис. 5.1, б) абсолютно устойчивой в угле $[0, 10]$.

Решение. Проверим, выполняется ли необходимое условие абсолютной устойчивости. Для этого достаточно проверить устойчивость системы сравнения (5.4) при $k = 10$. Характеристическое уравнение системы сравнения при таком коэффициенте имеет вид

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 11 = 0.$$

Определитель Гурвица 2-го порядка отрицателен: $\Delta_2 = 3 \cdot 3 - 11 = -2$. Необходимое условие абсолютной устойчивости не выполняется. Следовательно, нелинейная система не является абсолютно устойчивой.

5.2. Прямой метод Ляпунова исследования абсолютной устойчивости

А. И. Лурье предложил метод решения задачи абсолютной устойчивости, основанный на прямом методе Ляпунова. Идея его метода заключается в том, что для системы (5.1), (5.2) функция Ляпунова ищется в виде квадратичной формы плюс интеграл от нелинейной функции [23, 40]:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x} + q \int_0^{\xi} f(\xi) d\xi,$$

где B — положительно определенная матрица, q — произвольное положительное число. Нелинейности из класса, определяемого соотношением (5.2), удовлетворяют условию $f(\xi)\xi \geq 0$. Поэтому интеграл в рассматриваемой функции является неотрицательной функцией, а сама функция положительно определенной. И задача сводится к определению такой положительно определенной матрицы B и такой положительной константы q , при которых производная по времени $\dot{V}(\mathbf{x})$ в силу уравнений системы была бы отрицательно определенной и функция $V(\mathbf{x})$ неограниченно возрастала бы при неограниченном увеличении $|\mathbf{x}|$: $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. В соответствии с теоремой Барбашина–Красовского в случае стационарной системы достаточно,

чтобы производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ была отрицательно полуопределена и обращалась в нуль вне начала координат на множестве, не содержащем целых траекторий.

Здесь мы не будем рассматривать способ решения задачи абсолютной устойчивости прямым методом Ляпунова в общем случае. Для иллюстрации метода ограничимся решением частной задачи.

Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{y} = \frac{k}{p^2 + a_1 p + a_2} u, \quad u = f(\xi), \quad \xi = -y,$$

где k, a_1, a_2 — положительные постоянные, а нелинейная функция удовлетворяет условию

$$f(0) = 0, \quad \alpha \leq \frac{f(\xi)}{\xi} \leq \beta, \quad 0 < \alpha < \beta < \infty.$$

Запишем уравнение системы в нормальной форме, исключив переменные y и u :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 - k f(x_1).$$

Функцию Ляпунова будем искать в виде

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + q \int_0^{x_1} f(x_1) dx_1,$$

где b, c — произвольные постоянные, q — произвольная положительная постоянная. Для того чтобы квадратичная форма в функции Ляпунова была положительно определена, постоянные b, c по критерию Сильвестра должны удовлетворять условию $c - b^2 > 0$. Найдем производную по времени $\dot{V}(\mathbf{x})$ в силу уравнения системы:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2(x_1 + bx_2)\dot{x}_1 + 2(bx_1 + cx_2)\dot{x}_2 + qf(x_1)\dot{x}_1 = \\ &= 2(x_1 + bx_2)x_2 - 2(bx_1 + cx_2)[a_2x_1 + a_1x_2 + kf(x_1)] + qf(x_1)x_2 = \\ &= 2(1 - ba_1 - ca_2)x_1x_2 - 2(ca_1 - b)x_2^2 - 2ba_2x_1^2 - \\ &\quad - 2bx_1kf(x_1) - 2ckx_2f(x_1) + qf(x_1)x_2. \end{aligned}$$

Если положить $1 - ba_1 - ca_2 = 0$, или $c = (1 - ba_1)/a_2$ и $q = 2ck$, то производная примет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2(ca_1 - b)x_2^2 - 2ba_2x_1^2 - 2bkx_1f(x_1),$$

и она будет отрицательно определенной, если $b > 0$, $ca_1 - b > 0$, или $0 < b < ca_1$. Подставив сюда выражение для c , получим $0 < b < a_1/(a_1^2 + a_2)$. Функция $V(\mathbf{x})$ будет положительно определенной, если $c - b^2 > 0$. Это условие всегда можно выполнить, выбрав b достаточно малым. Так как функция Ляпунова включает положительно определенную квадратичную форму, то она будет неограниченно возрастать при стремлении $|\mathbf{x}|$ к бесконечности. Следовательно, положение равновесия системы абсолютно устойчиво.

5.3. Частотные методы исследования абсолютной устойчивости

Проблема абсолютной устойчивости сначала исследовалась прямым методом Ляпунова. Однако с начала 60-х годов прошлого века стал широко использоваться частотный метод.

5.3.1. Линейная часть устойчива. Рассмотрим сначала случай, когда линейная часть нелинейной системы (см. рис. 5.1, б) устойчива. Представим ее частотную передаточную функцию в виде

$$W_{\pi}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Критерий Попова. Для того чтобы положение равновесия системы (5.3) с устойчивой линейной частью было абсолютно устойчиво в угле $[0, k]$, достаточно, чтобы существовало такое вещественное число q , что при всех $\omega \geq 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} (1 + jq\omega)W_{\pi}(j\omega) + \frac{1}{k} > 0, \quad (5.5a)$$

или

$$U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\frac{1}{k}. \quad (5.5b)$$

Доказательство будет приведено дальше. Здесь пока рассмотрим пример.

Пример 5.2. Передаточная функция линейной части имеет вид

$$W_{\pi}(p) = \frac{b_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} \quad (b_0, a_0, a_1, a_2 > 0).$$

Определить, при каких значениях k система (см. рис. 5.1, б) будет абсолютно устойчива в угле $[0, k]$.

Решение. Частотная передаточная функция линейной части имеет вид

$$W_{\pi}(j\omega) = \frac{b_0}{-a_0\omega^2 + ja_1\omega + a_2}.$$

Отсюда для вещественной и мнимой частей получаем

$$U(\omega) = \frac{b_0(a_2 - a_0\omega^2)}{(a_2 - a_0\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}, \quad V(\omega) = \frac{-b_0a_1\omega}{(a_2 - a_0\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}.$$

Условие (5.5b) принимает вид

$$\frac{b_0(a_2 - a_0\omega^2) + qb_0a_1\omega^2}{(a_2 - a_0\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2} + \frac{1}{k} > 0.$$

Если положить $q = a_0/a_1$, то получим

$$U(\omega) = \frac{b_0a_2}{(a_2 - a_0\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2} + \frac{1}{k} > 0.$$

Последнее неравенство выполняется при любом $\omega \geq 0$ и любом $k > 0$. Поэтому рассматриваемая система абсолютно устойчива в угле $[0, k]$ при любом конечном $k > 0$.

В приведенной выше формулировке теоремы Попова не просматривается частотная сущность. Рассмотрим другую, частотную формулировку теоремы Попова. Для этого введем в рассмотрение следующие частотные функции:

$$U_M(\omega) = U(\omega), \quad V_M(\omega) = \omega V(\omega), \quad W_M(j\omega) = U_M(\omega) + jV_M(\omega). \quad (5.6)$$

Последняя функция называется *модифицированной частотой передаточной функцией* (линейной части). Используя первые две функции, неравенство (5.5б) можно представить в виде

$$U_M(\omega) - qV_M(\omega) > -\frac{1}{k}. \quad (5.7)$$

Если построить на плоскости (U_M, V_M) так называемую *прямую Попова*, которая описывается уравнением

$$U_M - qV_M = -\frac{1}{k},$$

где q — произвольное вещественное число, то правее прямой Попова выполняется неравенство (5.7). Поэтому если построить частотную характеристику — кривую, которая описывается уравнением в параметрической форме

$$U_M = U_M(\omega), \quad V_M = V_M(\omega)$$

при $0 \leq \omega < \infty$, то она полностью располагается правее прямой Попова в том и только том случае, когда выполняется условие (5.7). Точно так же, если построить на комплексной плоскости (U_M, jV_M) *прямую Попова* (прямую, пересекающую вещественную ось в точке $-1/k$) под наклоном $1/q$ и годограф модифицированной частотной передаточной функции $W_M(j\omega)$ при $0 \leq \omega < \infty$, который называется *модифицированной частотной характеристикой* (линейной части) (рис. 5.2), то условие (5.7) будет выполнено в том и только том случае, когда модифицированная частотная характеристика располагается правее прямой Попова. Следовательно, теорему Попова еще можно сформулировать следующим образом.

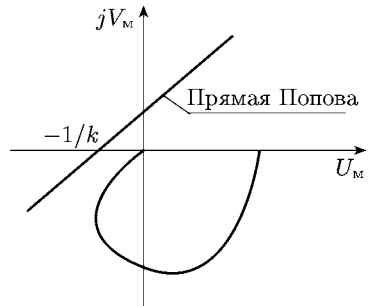


Рис. 5.2. Модифицированная частотная характеристика и прямая Попова

Частотная формулировка критерия Попова. Для того чтобы положение равновесия системы (5.3) с устойчивой линейной частью было абсолютно устойчиво в угле $[0, k]$, достаточно, чтобы можно было провести прямую, проходящую через точ-

ку $(-1/k, j0)$, т. е. прямую Попова такую, что модифицированная частотная характеристика полностью располагается правее этой прямой.

Модифицированная частотная характеристика отличается от обычной (не модифицированной) частотной характеристики только ординатами (см. (5.6)).

Пример 5.3. Пусть передаточная функция линейной части имеет вид $W_{\pi} = 1/(p+1)^3$. Исследовать, является ли система (см. рис. 5.1, б) абсолютно устойчивой в угле $[0, 3]$.

Решение. Легко проверить, что необходимое условие абсолютной устойчивости выполняется (см. пример 5.1). На рис. 5.3 представлена амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части.

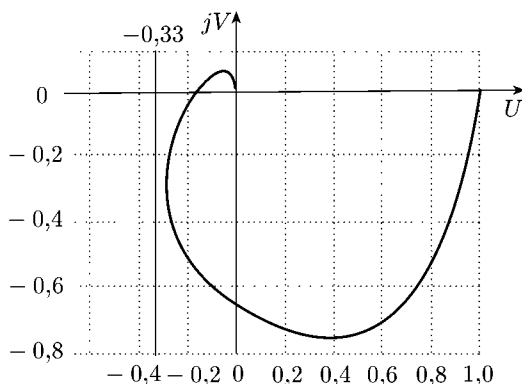


Рис. 5.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (к примеру 5.3)

Она расположена правее прямой Попова — прямой, пересекающей ось абсцисс в точке $-0,33$ и параллельной оси ординат. Так как модифицированная частотная характеристика отличается от приведенной только по оси ординат, то и она будет располагаться правее этой прямой. Следовательно, система абсолютно устойчива в угле $[0, 3]$.

5.3.2. Линейная часть неустойчива. Пусть линейная часть нелинейной системы (рис. 5.4, а) неустойчива. Преобразуем ее сле-

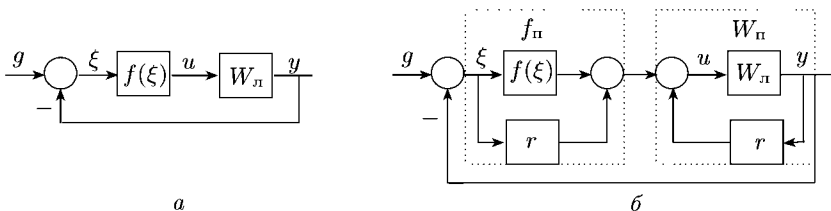


Рис. 5.4. Преобразование структурной схемы с неустойчивой линейной частью: а — исходная схема; б — преобразованная схема

дующим образом. Охватим линейную часть отрицательной обратной связью звеном с передаточной функцией r , а к нелинейному звену подключим параллельно звено также с передаточной функцией r , выход которого подключен к сумматору по отрицательному входу (рис. 5.4, б). Преобразованная схема эквивалентна исходной схеме. Действительно, учитывая $g = 0$, на входе линейного звена преобразованной схемы имеем

$$u = f(\xi) + ry - ry = f(\xi),$$

т. е. тот же сигнал, что и на входе линейного звена исходной схемы.

В преобразованной схеме передаточная функция линейной части имеет вид

$$W_{\pi} = W_{\pi}/(1 + rW_{\pi}),$$

а нелинейность выражается равенством

$$f_{\pi}(\xi) = f(\xi) - r\xi$$

(см. рис. 5.4, б). Так как при $\xi \neq 0$ имеем $f_{\pi}(\xi)/\xi = f(\xi)/\xi - r$, то неравенство $r \leq f(\xi)/\xi \leq k$ равносильно неравенству $0 \leq f_{\pi}(\xi)/\xi \leq k - r$. Поэтому положение равновесия исходной системы (см. рис. 5.4, а) абсолютно устойчиво в угле $[r, k]$, если положение равновесия преобразованной системы (см. рис. 5.4, б) абсолютно устойчиво в угле $[0, k - r]$.

Пусть преобразованная линейная часть устойчива, т. е. все полюса передаточной функции W_{π} имеют отрицательные вещественные части. Тогда по теореме Попова положение равновесия преобразованной системы абсолютно устойчиво в угле $[0, k - r]$, если выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}(1 + jq\omega)W_{\pi}(j\omega) + \frac{1}{k - r} > 0,$$

или

$$U_{\pi}(\omega) - q\omega V_{\pi}(\omega) > -\frac{1}{k - r}, \quad (5.8)$$

где $U_{\pi}(\omega) = \operatorname{Re} W_{\pi}(j\omega)$ и $V_{\pi}(\omega) = \operatorname{Im} W_{\pi}(j\omega)$.

Из изложенного выше получаем следующий критерий абсолютной устойчивости в случае неустойчивой линейной части.

Критерий Попова. *Положение равновесия нелинейной системы (5.3) с неустойчивой линейной частью абсолютно устойчиво в угле $[r, k]$, если все полюса преобразованной передаточной функции $W_{\pi} = W_{\pi}/(1 + rW_{\pi})$ имеют отрицательные вещественные части и существует такое вещественное число q , что при всех $\omega \geq 0$ выполняется неравенство (5.8).*

Пример 5.4. Пусть передаточная функция линейной части имеет вид $W_{\pi} = 10/(p - 1)$. Исследовать, является ли система (см. рис. 5.3, б) абсолютно устойчивой в угле $[0, 2; 200]$.

Решение. Преобразованная передаточная функция имеет вид $W_{\pi} = W_{\pi}/(1 + rW_{\pi}) = 10/(p + 1)$. Отсюда для частотной передаточ-

ной функции, а также для вещественной и мнимой частотных функций имеем

$$W_{\text{п}}(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1} = \frac{10(1 - j\omega)}{\omega^2 + 1}, \quad U_{\text{п}}(\omega) = \frac{10}{\omega^2 + 1}, \quad V_{\text{п}}(\omega) = -\frac{10\omega}{\omega^2 + 1}.$$

Условие (5.8) принимает вид

$$\frac{10}{\omega^2 + 1} + q\omega \frac{10\omega}{\omega^2 + 1} = \frac{10 + q10\omega^2}{\omega^2 + 1} > -\frac{1}{200 - 0,2},$$

и оно выполняется при любом $q \geq 0$. Следовательно, рассматриваемая система абсолютно устойчива в угле $[0, 2; 200]$.

Как и в случае с устойчивой линейной частью, можно сформулировать частотный вариант критерия устойчивости. Для этого введем следующие частотные функции:

$$U_{\text{пм}}(\omega) = U_{\text{п}}(\omega), \quad V_{\text{пм}}(\omega) = \omega V_{\text{п}}(\omega), \quad W_{\text{пм}}(j\omega) = U_{\text{пм}}(\omega) + jV_{\text{пм}}(\omega).$$

Функцию $W_{\text{пм}}(j\omega)$ будем называть *модифицированной преобразованной частотной передаточной функцией*, а ее годограф при изменении $0 \leq \omega < \infty$ — *модифицированной преобразованной частотной характеристикой*. Используя вещественную и мнимую части функции $W_{\text{пм}}(j\omega)$, условие (5.8) можно записать в виде

$$U_{\text{пм}}(\omega) - qV_{\text{пм}}(\omega) > -\frac{1}{k - r}.$$

В случае неустойчивой линейной части прямая Попова — эта прямая, которая пересекает вещественную ось в точке $-1/(k - r)$ и имеет наклон $1/q$.

Частотная формулировка критерия Попова. *Положение равновесия нелинейной системы (5.3) с неустойчивой линейной частью абсолютно устойчиво в угле $[r, k]$, если можно провести такую прямую Попова, что модифицированная преобразованная частотная характеристика полностью располагается правее этой прямой.*

5.4. Доказательство критерия Попова

Нужно показать, что положение равновесия $x = 0$ системы (5.1)

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad u = f(\xi), \quad \xi = -c^T x,$$

или

$$y = W_{\text{л}}(p)u, \quad u = f(\xi), \quad \xi = -y,$$

где $W_{\text{л}}(p) = c^T(Ip - A)^{-1}b$, абсолютно устойчиво в угле $[0, k]$, если выполняется неравенство (5.5а):

$$\operatorname{Re} (1 + jq\omega) W_{\text{л}}(j\omega) + \frac{1}{k} > 0.$$

Доказательство проведем в два этапа. Сначала покажем, что положение равновесия системы (5.1) абсолютно устойчиво в угле $[0, k]$,

если выполняется неравенство

$$\int_0^t \int_0^\theta \left[w_\pi(\theta - \tau) + q\dot{w}_\pi(\theta - \tau) + \left(\frac{1}{k + \varepsilon} + qw_\pi(0) \right) \delta(\theta - \tau) \right] f(\xi(\tau)) f(\xi(\theta)) d\tau d\theta \geq 0, \quad (5.9)$$

где $w_\pi(t)$ — весовая функция линейной части, q — вещественное число, ε — бесконечно малое положительное число, $\delta(t)$ — дельта-функция (функция Дирака).

1. По формуле Коши (см. (1.9)) решение уравнения линейной части при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}(t) = X(t - t_0)\mathbf{x}^0 + \int_0^t X(t - \tau)\mathbf{b}u(\tau) d\tau. \quad (5.10)$$

Здесь учтено, что в стационарном случае фундаментальная матрица решений однородного уравнения линейной части зависит от одного аргумента: $X(t, t_0) = X(t - t_0)$. Умножим обе части последнего равенства на $\mathbf{c}^T$. Тогда, учитывая $\dot{\xi} = -\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ и $y = -\xi$, получим

$$y(t) = \mathbf{c}^T X(t - t_0)\mathbf{x}^0 + \mathbf{c}^T \int_0^t X(t - \tau)\mathbf{b}u(\tau) d\tau.$$

Как известно, в линейных системах выход $y(t)$ связан с входной переменной $u(t)$ и весовой функцией $w(t)$ при нулевых начальных условиях соотношением

$$y(t) = \int_0^t w(t - \tau)u(\tau) d\tau.$$

Поэтому формулу (5.10) можно записать в виде

$$y(t) = \mathbf{c}^T X(t - t_0)\mathbf{x}^0 + \int_0^t w_\pi(t - \tau)u(\tau) d\tau,$$

где $w_\pi(t) = \mathbf{c}^T X(t)\mathbf{b}$ — весовая функция линейной части. Отсюда, учитывая $\xi(t) = -y(t)$ и $u(t) = f(\xi(t))$, получаем

$$\xi(t) = - \left[\mathbf{c}^T X(t - t_0)\mathbf{x}^0 + \int_0^t w_\pi(t - \tau)f(\xi(\tau)) d\tau \right]. \quad (5.11)$$

Производная по времени от этой функции имеет вид

$$\dot{\xi}(t) = - \left[\mathbf{c}^T \dot{X}(t - t_0)\mathbf{x}^0 + w_\pi(0)f(\xi(t)) + \int_0^t \dot{w}_\pi(t - \tau)f(\xi(\tau)) d\tau \right]. \quad (5.12)$$

Введем в рассмотрение интеграл

$$I(t) = - \left[\int_0^t \left(\xi(\theta) - \frac{1}{k} f(\xi(\theta)) \right) f(\xi(\theta)) d\theta + q \int_0^t \dot{\xi}(\theta) f(\xi(\theta)) d\theta \right]. \quad (5.13)$$

Подставим сюда выражения для $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ из (5.11) и (5.12):

$$I(t) = \int_0^t \left[\mathbf{c}^T X(\theta - t_0) \mathbf{x}^0 + \int_0^\theta w_\pi(\theta - \tau) f(\xi(\tau)) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tilde{k}} f(\xi(\theta)) \right] f(\xi(\theta)) d\theta + q \int_0^t \left[\mathbf{c}^T \dot{X}(\theta - t_0) \mathbf{x}^0 + w_\pi(0) f(\xi(\theta)) + \right. \\ \left. + \int_0^\theta \dot{w}_\pi(\theta - \tau) f(\xi(\tau)) d\tau \right] f(\xi(\theta)) d\theta.$$

Используя тождество

$$\left[\frac{1}{\tilde{k}} + qw(0) \right] f(\xi(t)) = \int_0^t \left[\frac{1}{\tilde{k}} + qw(0) \right] f(\xi(\theta)) \delta(t - \theta) d\theta$$

и обозначение

$$I_0(t) = \int_0^t [\mathbf{c}^T X(\theta - t_0) \mathbf{x}^0 + q \mathbf{c}^T \dot{X}(\theta - t_0) \mathbf{x}^0] f(\xi(\theta)) d\theta, \quad (5.14)$$

последнее соотношение можно представить следующим образом:

$$I(t) = I_0(t) + \int_0^t \int_0^\theta [w_\pi(\theta - \tau) + q \dot{w}_\pi(\theta - \tau) + \\ + \left(\frac{1}{\tilde{k}} + qw_\pi(0) \right) \delta(\theta - \tau)] f(\xi(\tau)) f(\xi(\theta)) d\tau d\theta.$$

Если выполняется неравенство (5.9), то при $\tilde{k} \in [0, k + \varepsilon]$ имеем $I(t) - I_0(t) \geq 0$, или $-I(t) \leq -I_0(t)$. Подставив в последнее неравенство выражение для $I(t)$ из (5.13), получим

$$\int_0^t \left(\xi(\theta) - \frac{1}{\tilde{k}} f(\xi(\theta)) \right) f(\xi(\theta)) d\theta + q \int_0^t \dot{\xi}(\theta) f(\xi(\theta)) d\theta \leq -I_0(t). \quad (5.15)$$

Так как рассматривается абсолютная устойчивость в угле $[0, k]$, то $0 \leq f(\xi)/\xi \leq k$ при $\xi \neq 0$. Поэтому справедливы следующие неравенства:

$$f(\xi)\xi \geq 0, \quad \frac{f^2(\xi)}{k} \leq f(\xi)\xi, \quad \left(\xi - \frac{f(\xi)}{k} \right) f(\xi) \geq 0. \quad (5.16)$$

Если условие (5.15) выполняется при $\tilde{k} = k + \varepsilon$:

$$\int_0^t \left(\xi(\theta) - \frac{1}{k + \varepsilon} f(\xi(\theta)) \right) f(\xi(\theta)) d\theta + q \int_0^t \dot{\xi}(\theta) f(\xi(\theta)) d\theta \leq -I_0(t),$$

то в силу последнего неравенства (5.16) оно будет выполняться при любом $\tilde{k} \in [0, k + \varepsilon]$. На основании второго неравенства из (5.16) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\xi(\theta) - \frac{1}{k+\varepsilon} f(\xi(\theta)) \right) f(\xi(\theta)) d\theta &\geq \\ &\geq \int_0^t \left(\frac{f(\xi(\theta))}{k} - \frac{1}{k+\varepsilon} f(\xi(\theta)) \right) f(\xi(\theta)) d\theta = \varepsilon_0 \int f^2(\xi(\theta)) d\theta, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon/(k(k+\varepsilon))$. Используя это соотношение и равенство

$$\int_0^t \dot{\xi}(\theta) f(\xi(\theta)) d\theta = \int_{\xi(0)}^{\xi(t)} f(\xi) d\xi = \int_0^{\xi(t)} f(\xi) d\xi - \int_0^{\xi(0)} f(\xi) d\xi,$$

из неравенства (5.15) получаем

$$\varepsilon_0 \int_0^t f^2(\xi(\theta)) d\theta + q \left(\int_0^{\xi(t)} f(\xi) d\xi - \int_0^{\xi(0)} f(\xi) d\xi \right) \leq -I_0. \quad (5.17)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского [55]

$$\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f_1^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b f_2^2(x) dx}, \quad (5.18)$$

из соотношения (5.14) получаем

$$\begin{aligned} -I_0(t) &= \int_0^t [\mathbf{c}^T X(\theta - t_0) \mathbf{x}^0 + q \mathbf{c}^T \dot{X}(\theta - t_0) \mathbf{x}^0] [-f(\xi(\theta))] d\theta \leq \\ &\leq \sqrt{\int_0^t [\mathbf{c}^T X(\theta - t_0) \mathbf{x}^0 + q \mathbf{c}^T \dot{X}(\theta - t_0) \mathbf{x}^0]^2 d\theta} \sqrt{\int_0^t f^2(\xi(\theta)) d\theta}. \end{aligned}$$

С учетом этого соотношения неравенство (5.17) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \int_0^t f^2(\xi(\theta)) d\theta + q \int_0^{\xi(t)} f(\xi) d\xi &\leq q \int_0^{\xi(0)} f(\xi) d\xi + \\ &+ \sqrt{\int_0^t [\mathbf{c}^T X(\theta - t_0) \mathbf{x}^0 + q \mathbf{c}^T \dot{X}(\theta - t_0) \mathbf{x}^0]^2 d\theta} \sqrt{\int_0^t f^2(\xi(\theta)) d\theta}. \end{aligned}$$

Используя обозначения

$$I_f^2 = \int_0^t f^2(\xi(\theta)) d\theta, \quad (5.19a)$$

$$I_X^2(t) = \int_0^t [\mathbf{c}^T X(\theta - t_0) \mathbf{x}^0 + q \mathbf{c}^T \dot{X}(\theta - t_0) \mathbf{x}^0]^2 d\theta, \quad (5.19б)$$

$$I(\xi(t)) = \int_0^{\xi(t)} f(\xi) d\xi \quad (5.19в)$$

и принимая во внимание неравенство $I_X(t) \leq I_X(\infty)$, последнее неравенство можно записать в виде

$$I_f^2 + \frac{q}{\varepsilon_0} I(\xi(t)) \leq \frac{1}{\varepsilon_0} I(\xi(0)) + \frac{1}{\varepsilon_0} I_X(\infty) I_f(t),$$

или

$$\left(I_f - \frac{1}{2\varepsilon_0} I_X(\infty)\right)^2 + \frac{q}{\varepsilon_0} I(\xi(t)) \leq \frac{q}{\varepsilon_0} I(\xi(0)) + \frac{1}{4\varepsilon_0^2} I_X^2(\infty). \quad (5.20)$$

Так как линейная часть устойчива, то фундаментальная матрица $X(t)$ и ее производная по времени $\dot{X}(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |X(t)| dt < \infty, \quad \int_0^\infty |X(t)|^2 dt < \infty, \\ \int_0^\infty |\dot{X}(t)| dt < \infty, \quad \int_0^\infty |\dot{X}(t)|^2 dt < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому (см. (5.19б)) $I_X(\infty) < \infty$, и из неравенства (5.20) получаем

$$\left(I_f - \frac{1}{2\varepsilon_0} I_X(\infty)\right)^2 + \frac{q}{\varepsilon_0} I(\xi(t)) \leq c_0 < \infty,$$

где

$$c_0 = \frac{q}{\varepsilon_0} I(\xi(0)) + \frac{1}{4\varepsilon_0^2} I_X^2(\infty).$$

Второе слагаемое слева в последнем неравенстве при $q > 0$ является положительным. Поэтому при $q \geq 0$ также можем записать

$$\left(I_f - \frac{1}{2\varepsilon_0} I_X(\infty)\right)^2 \leq c_0 < \infty. \quad (5.21)$$

Из (5.19б) и (5.19в) следует, что при $|\mathbf{x}^0| \rightarrow 0$ имеют место предельные соотношения

$$I_X(\infty) \rightarrow 0, \quad I(\xi(0)) \rightarrow 0$$

и соответственно

$$c_0 = \frac{q}{\varepsilon_0} I(\xi(0)) + \frac{1}{4\varepsilon_0^2} I_X^2(\infty) \rightarrow 0.$$

Поэтому из (5.21) следует, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что (см. также (5.19а))

$$I_f^2 = \int_0^t f^2(\xi(\theta)) d\theta < \varepsilon_1 \quad \forall t \geq 0$$

как только $|\mathbf{x}^0| < \delta_1$. В силу этого неравенства, непрерывности $f(\xi)$ и $f(0) = 0$ для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что $|\xi(t)| < \varepsilon_2$ при любом $t \geq 0$, как только $|\mathbf{x}^0| < \delta_2$. Таким образом, положение

равновесия устойчиво по Ляпунову. Остается показать, что при любом начальном условии $\xi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

При любом начальном условии (см. (5.21)) имеем

$$I_f^2 = \int_0^t f^2(\xi(\theta)) d\theta < c_1 \quad \forall t \geq 0.$$

Поэтому $f(\xi(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и так как $f(0) = 0$, то и $\xi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Итак, мы показали, что если выполняется условие (5.9), то положение равновесия абсолютно устойчиво в угле $[0, k]$. При этом мы предположили, что параметр q является неотрицательным: $q \geq 0$. Это ограничение дальше будет снято.

2. Теперь докажем условие (5.5a). Неравенство (5.9), используя функцию

$$s(t) = w_\pi(t) + q\dot{w}_\pi(t) + \left(\frac{1}{k+\varepsilon} + qw_\pi(0)\right)\delta(t), \quad (5.22)$$

можно представить в виде

$$\int_0^t \int_0^\theta s(\theta - \tau) f(\xi(\tau)) f(\xi(\theta)) d\tau d\theta \geq 0$$

или, учитывая, что $w_\pi(\theta - \tau) = 0$ и $\dot{w}_\pi(\theta - \tau) = 0$ при $\tau > \theta$, — в виде

$$\int_0^t \int_0^t s(\theta - \tau) f(\xi(\tau)) f(\xi(\theta)) d\tau d\theta \geq 0.$$

Интеграл слева не изменится, если $s(\theta - \tau)$ заменить на $s(\tau - \theta)$. Поэтому, положив

$$\tilde{s}(\theta - \tau) = \frac{1}{2} [s(\theta - \tau) + s(\tau - \theta)] \quad (5.23)$$

и используя обозначения $\tilde{f}(t) = f(\xi(t))$, последнее неравенство запишем в виде

$$\int_0^t \int_0^t \tilde{s}(\theta - \tau) \tilde{f}(\tau) \tilde{f}(\theta) d\tau d\theta \geq 0. \quad (5.24)$$

Заметим, что $\tilde{s}(t)$ в отличие от $s(t)$ является четной функцией.

Рассмотрим двухстороннее преобразование Фурье

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.25)$$

и обратное преобразование Фурье

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.26)$$

Подставим выражение (5.26) в (5.24) и поменяем порядок интегрирования:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) \left(\int_0^t \int_0^t \tilde{f}(\tau) \tilde{f}(\theta) e^{j\omega(\theta-\tau)} d\tau d\theta \right) d\omega \geq 0.$$

Интегралы

$$\tilde{F}(j\omega, t) = \int_0^t \tilde{f}(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta, \quad \tilde{F}(-j\omega, t) = \int_0^t \tilde{f}(\theta) e^{j\omega\theta} d\theta$$

являются комплексно-сопряженными функциями. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^t \tilde{f}(\tau) \tilde{f}(\theta) e^{-j\omega(\theta-\tau)} d\tau d\theta &= \int_0^t \tilde{f}(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \int_0^t \tilde{f}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= |\tilde{F}(j\omega, t)|^2, \end{aligned}$$

и последнее неравенство можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) |\tilde{F}(j\omega, t)|^2 d\omega \geq 0. \quad (5.27)$$

Положив в (5.23) $\tau = 0$, получим

$$\tilde{s}(\theta) = \frac{1}{2} [s(\theta) + s(-\theta)].$$

Подставив это выражение в (5.25) и учитывая $s(t) = 0$ при $t < 0$, находим

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} s(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta + \int_{-\infty}^0 s(-\theta) e^{-j\omega\theta} d\tau \right].$$

Произведя замену переменных $\tau = -\theta$ во втором интеграле, получим

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\omega) &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} s(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta + \int_0^{\infty} s(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{2} [S(j\omega) + S(-j\omega)] = \operatorname{Re} S(j\omega), \end{aligned}$$

где

$$S(j\omega) = \int_0^{\infty} s(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta.$$

Условие абсолютной устойчивости (5.27) будет выполнено, если $\tilde{S}(\omega) \geq 0$, или

$$\tilde{S}(\omega) = \operatorname{Re} S(j\omega) \geq 0. \quad (5.28)$$

В силу (5.22) имеем

$$S(j\omega) = \int_0^{\infty} \left[w_n(t) + q\dot{w}_n(t) + \left(\frac{1}{k+\varepsilon} + qw_n(0) \right) \delta(t) \right] e^{-j\omega t} dt. \quad (5.29)$$

Как известно, передаточная функция равна изображению Лапласа от весовой функции:

$$W_{\pi}(s) = L\{w_{\pi}(t)\}.$$

Кроме того, по правилу дифференцирования оригинала имеем

$$L\{\dot{w}_{\pi}(t)\} = sW_{\pi}(s) - w_{\pi}(0).$$

Записав эти соотношения в явном виде и сделав постановку $s = j\omega$, получим

$$W_{\pi}(j\omega) = \int_0^{\infty} w_{\pi}(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \int_0^{\infty} \dot{w}_{\pi}(t)e^{-j\omega t} dt = j\omega W_{\pi}(j\omega) - w_{\pi}(0).$$

Используя эти соотношения, из (5.29) находим

$$S(j\omega) = (1 + qj\omega)W_{\pi}(j\omega) + \frac{1}{k + \varepsilon}.$$

При подстановке этого выражения в условие (5.28) последнее принимает вид

$$\operatorname{Re}((1 + qj\omega)W_{\pi}(j\omega)) + \frac{1}{k + \varepsilon} \geq 0.$$

Устремив ε к нулю и заменив знак нестрого неравенства на строгий, получим условие абсолютной устойчивости в виде следующего неравенства:

$$\operatorname{Re}((1 + qj\omega)W_{\pi}(j\omega)) + \frac{1}{k} > 0.$$

Теперь осталось показать, что при выполнении последнего неравенства система будет абсолютно устойчива и при любых отрицательных значениях параметра q , т.е. снять ограничение, которое было введено при получении неравенства (5.21). Для этого преобразуем уравнения рассматриваемой системы (5.3), положив $u = k\xi - \tilde{u}$. Исключив из системы (5.3) переменную u , получим

$$y = \widetilde{W}(p)\tilde{u}, \quad \tilde{u} = \tilde{f}(\xi), \quad \xi = -y, \quad (5.30)$$

где

$$\widetilde{W}(p) = -\frac{W_{\pi}(p)}{1 + kW_{\pi}(p)}, \quad \tilde{f}(\xi) = k\xi - f(\xi).$$

Как нетрудно проверить, если $0 \leq f(\xi)/\xi \leq k$, то и $0 \leq \tilde{f}(\xi)/\xi \leq k$. Поэтому если исходная система абсолютно устойчива в угле $[0, k]$, то и преобразованная система (5.30) абсолютно устойчива в том же угле $[0, k]$. И соответственно, как было показано, должно выполняться неравенство

$$\operatorname{Re}((1 + qj\omega)\widetilde{W}(j\omega)) + \frac{1}{k} > 0 \quad (5.31)$$

при $q \geq 0$. Преобразуем левую часть последнего неравенства, подставив в него выражение для $\widetilde{W}(p)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(1 + qj\omega)\widetilde{W}(j\omega) + \frac{1}{k} &= -\operatorname{Re}(1 + qj\omega) \frac{W_{\pi}(j\omega)}{1 + kW_{\pi}(j\omega)} + \frac{1}{k} = \\
&= \operatorname{Re} \frac{[1 - kqj\omega W_{\pi}(j\omega)][1 + kW_{\pi}(-j\omega)]}{-k[1 + kW_{\pi}(j\omega)][1 + kW_{\pi}(-j\omega)]} = \\
&= \frac{1}{|1 + kW_{\pi}(j\omega)|^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{k} - qj\omega W_{\pi}(j\omega) + W_{\pi}(-j\omega) - kqj\omega |W_{\pi}(j\omega)|^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Учитывая $\operatorname{Re} W_{\pi}(j\omega) = \operatorname{Re} W_{\pi}(-j\omega)$ и отбрасывая последнее, мнимое слагаемое, получаем

$$\operatorname{Re}(1 + qj\omega)\widetilde{W}(j\omega) + \frac{1}{k} = \frac{1}{|1 + kW_{\pi}(j\omega)|^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{k} + (1 - qj)\omega W_{\pi}(j\omega) \right\}.$$

Следовательно, условие абсолютной устойчивости (5.31) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{k} + (1 - qj)\omega W_{\pi}(j\omega) \right] > 0.$$

Это условие должно выполняться при $q \geq 0$. Если это неравенство записать в виде (5.5a):

$$\operatorname{Re} [(1 + qj\omega)W_{\pi}(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0,$$

то оно должно выполняться при $q \leq 0$. Критерий Попова полностью доказан.

5.5. Квадратичный критерий абсолютной устойчивости

При рассмотрении абсолютной устойчивости класс нелинейных звеньев можно задавать с помощью квадратичной формы. Например, класс нелинейных звеньев, определяемых соотношением

$$f(0) = 0, \quad \alpha \leq \frac{f(\xi)}{\xi} \leq \beta \quad (\alpha < \beta), \quad (5.32)$$

с помощью квадратичной формы можно определить следующим образом:

$$F(u, \xi) = (\beta\xi - u)(u - \alpha\xi) \geq 0, \quad u = f(\xi). \quad (5.33)$$

Действительно, разделив обе части последнего неравенства на ξ^2 , получим

$$\left(\beta - \frac{u}{\xi} \right) \left(\frac{u}{\xi} - \alpha \right) \geq 0.$$

Это условие выполняется тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\left(\beta - \frac{u}{\xi} \right) \geq 0, \quad \left(\frac{u}{\xi} - \alpha \right) \geq 0$$

или

$$\left(\beta - \frac{u}{\xi} \right) \leq 0, \quad \left(\frac{u}{\xi} - \alpha \right) \leq 0.$$

Первая система неравенств равносильна условию (5.32). Вторая система неравенств невозможна, так как $\alpha < \beta$.

Задавая класс нелинейных и нестационарных звеньев с помощью квадратичных форм, В. А. Якубович разработал так называемый квадратичный критерий абсолютной устойчивости [63].

5.5.1. Эрмитова матрица и эрмитова форма. Далее при рассмотрении квадратичного критерия используются эрмитовы формы. Поэтому здесь вкратце излагаются основные понятия, связанные с этой формой.

Пусть z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — комплексные числа и $\bar{z}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — комплексно-сопряженные с ними числа. Вектор $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1 \ \bar{z}_2 \ \dots \ \bar{z}_n)^T$ является комплексно-сопряженным вектором с вектором $\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n)^T$. Если элементы $H = [h_{ik}]$ являются комплексными числами, то матрица $H^* = [\bar{h}_{ki}]$, которая получится из матрицы $H = [h_{ik}]$ путем транспонирования и замены элементов на комплексно-сопряженные с ними числа, называется *эрмитово сопряженной* с $H = [h_{ik}]$ матрицей. Операция эрмитова сопряжения обладает теми же свойствами, что и операция транспонирования [32]:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \alpha A^*, \quad (AB)^* = B^* A^*,$$

$$(A^*)^* = A, \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Если к вектору-столбцу $\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n)^T$ применить операцию эрмитова сопряжения, то получим вектор-строку $\mathbf{z}^* = (\bar{z}_1 \ \bar{z}_2 \ \dots \ \bar{z}_n)$. В частности, если $\mathbf{z}$ — скалярное комплексное число, то в результате применения операции эрмитова сопряжения получим комплексно-сопряженное число: $z^* = \bar{z}$.

Матрица $H = [h_{ik}]$ называется *эрмитовой матрицей*, если $H = H^*$, т. е. если $h_{ik} = \bar{h}_{ki}$. Так как $h_{ii} = \bar{h}_{ii}$, то диагональные элементы эрмитовой матрицы являются вещественными числами. В частном случае, когда все элементы матрицы являются вещественными, эрмитова матрица является симметрической матрицей.

Квадратичная форма

$$H(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^* H \mathbf{z} = \sum_{i,k=1}^n h_{ik} \bar{z}_i z_k, \quad (5.34)$$

где H — эрмитова матрица ($h_{ik} = \bar{h}_{ki}$), называется *эрмитовой формой*. Переменные z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и элементы матрицы H могут быть вещественными числами. В частном случае, когда и переменные, и элементы матрицы являются вещественными, эрмитова форма становится вещественной квадратичной формой. Эрмитова форма всегда принимает вещественное значение.

Если квадратичная форма (5.34) не является эрмитовой ($h_{ik} \neq \bar{h}_{ki}$), то она может принять комплексные значения. В этом случае на

ее основе можно определить эрмитову форму следующим образом [63]:

$$\operatorname{Re} \mathbf{z}^* H \mathbf{z} = \operatorname{Re} \sum_{i,k=1}^n h_{ik} \bar{z}_i z_k.$$

Эрмитову форму, заданную в таком виде, всегда можно преобразовать и представить с помощью эрмитовой матрицы:

$$H_1(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \mathbf{z}^* H \mathbf{z} = \mathbf{z}^* H_1 \mathbf{z} \quad \left(H_1 = \frac{1}{2} (H + H^*) \right).$$

Действительно, имеем

$$H_1(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \mathbf{z}^* H \mathbf{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{z}^* (H + H + H^* - H^*) \mathbf{z} \} = \mathbf{z}^* H_1 \mathbf{z},$$

так как

$$H_1^* = \frac{1}{2} (H + H^*)^* = \frac{1}{2} (H^* + H) = H_1,$$

$$\operatorname{Re} \{ [\mathbf{z}^* (H - H^*) \mathbf{z}]^* \} = -\operatorname{Re} \{ [\mathbf{z}^* (H - H^*) \mathbf{z}] \} = 0.$$

Для эрмитовой матрицы и эрмитовой формы знакоопределенность и знакопостоянство определяются точно так же, как и для симметрической матрицы и вещественной квадратичной формы. В частности, эрмитова матрица H и эрмитова форма $\mathbf{z}^* H \mathbf{z}$ называются *положительно определенными*, если $\mathbf{z}^* H \mathbf{z} > 0$ при всех $\mathbf{z} \neq 0$.

Критерий положительной определенности эрмитовой матрицы. Для того чтобы эрмитова матрица H была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Delta_1 = h_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \Delta_n = \det H = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Расширение вещественной квадратичной формы до эрмитовой. Всякая вещественная квадратичная форма

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} x_i x_k$$

может быть расширена до эрмитовой следующим образом:

$$G(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \sum_{i,k=1}^n g_{ik} \bar{z}_i z_k = \operatorname{Re} \sum_{i,k=1}^n g_{ik} z_i^* z_k.$$

По определению эрмитова форма $G(\mathbf{z})$ должна принимать те же значения, что и вещественная квадратичная форма $G(\mathbf{x})$, если z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) принимают вещественные значения: $z_i = x_i$. Например,

вещественным квадратичным формам

$$G_1(\mathbf{x}) = x_1 x_2, \quad G_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2, \quad G_3(\mathbf{x}) = x_1(x_2 - 2x_1)$$

соответствуют следующие расширенные до эрмитовых формы:

$$G_1(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \bar{z}_1 z_2, \quad G_2(\mathbf{z}) = |z_1|^2 - \operatorname{Re} \{\bar{z}_1 z_2\} + |z_2|^2,$$

$$G_3(\mathbf{z}) = \operatorname{Re} \{\bar{z}_1(z_2 - 2z_1)\}.$$

Если заданы два вещественных вектора $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$, то вещественные квадратичные формы от этих двух векторов $G(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ определяются как вещественные квадратичные формы от векторного переменного $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{bmatrix}$. Если заданы два комплексных вектора $\mathbf{z}^{(1)}$ и $\mathbf{z}^{(2)}$, то эрмитовы формы от этих векторных переменных $G(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)})$ определяется как эрмитовы формы от векторного переменного $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^{(1)} \\ \mathbf{z}^{(2)} \end{bmatrix}$. Аналогично определяются вещественные квадратичные формы и эрмитовы формы от трех и более векторных переменных.

5.5.2. Локальная связь. Минимальная устойчивость. Рассмотрим многомерную систему, которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\xi} = -\mathbf{y},$$

$$\mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{y} \in R^m, \quad \mathbf{u} \in R^r, \quad (5.35a)$$

или

$$\mathbf{y} = W_\pi(p)\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = -\mathbf{y}, \quad (5.35б)$$

где $W_\pi(p) = C(Ip - A)^{-1}B$ — $(m \times r)$ -матричная передаточная функция. Система содержит r нелинейностей $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})$. Переменные $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{u}$ являются векторными функциями времени: $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t)) = \mathbf{u}(t)$.

Пусть задана вещественная квадратичная форма $F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ и множество нелинейных звеньев задается условием

$$F(\boldsymbol{\xi}(t), \dot{\boldsymbol{\xi}}(t), \mathbf{u}(t)) \geq 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (5.36)$$

В квадратичной форме $F(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{u})$ переменные $\boldsymbol{\xi}$, $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, $\mathbf{u}$ рассматриваются как независимые. В частном случае какие-либо переменные в квадратичную форму могут не входить. Тогда соответствующие переменные будем опускать. Соотношение (5.36) называют *локальной связью* [63].

Определение 5.1. Если выполняется условие (5.36), то говорят, что функции $\boldsymbol{\xi}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяют *локальной связи с формой* $F(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{u})$.

Локальную связь (5.36) также будем записывать в виде

$$F(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \text{или} \quad F(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})) \geq 0.$$

Определение 5.2. Система (5.35а), или (5.35б) называется *минимально устойчивой в заданном классе нелинейностей (нелинейных звеньев)*, если она асимптотически устойчива в целом при какой-либо нелинейности $\mathbf{f}(\xi)$ из указанного класса.

Рассмотрим локальную связь (5.33):

$$F(\xi, \mathbf{u}) = (\beta \xi - \mathbf{u})(\mathbf{u} - \alpha \xi) \geq 0$$

в случае одномерной системы, т. е. при $r = m = 1$. Как было показано, эта локальная связь определяет тот же класс нелинейных звеньев, что и соотношение (5.32). Этому классу нелинейных звеньев принадлежат линейные звенья

$$u = \gamma \xi, \quad \alpha \leq \gamma \leq \beta.$$

Поэтому если система

$$y = W_{\pi}(p)u, \quad u = \gamma \xi, \quad \xi = -y$$

устойчива при каком-нибудь $\gamma \in [\alpha, \beta]$, то нелинейная система (5.35б) минимально устойчива в классе нелинейных звеньев, определяемых локальной связью (5.33).

Нелинейность, при которой будет устанавливаться минимальная устойчивость, будем называть *нелинейностью сравнения*, а саму систему при этой нелинейности — *системой сравнения*.

Часто нелинейность сравнения берется в виде $\xi = 0$. В этом случае система (5.35б) минимально устойчива в классе функций с локальной связью (5.36), если $F(\xi(t), \dot{\xi}(t), 0) \geq 0$ при любых x и линейная часть устойчива.

5.5.3. Квадратичный критерий. Для формулировки квадратичного критерия потребуется следующее преобразование квадратичной формы, определяющей локальную связь:

1) квадратичная форма $F(\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u})$ расширяется до эрмитовой формы заменой переменных $\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}$ их изображениями $\tilde{\xi}(s), \dot{\tilde{\xi}}(s), \mathbf{U}$;

2) производится постановка $\tilde{\xi}(s) = -W_{\pi}(s)\mathbf{U}$ и $\dot{\tilde{\xi}}(s) = -sW_{\pi}(s)\mathbf{U}$:

$$\tilde{F}(s, \mathbf{U}) = F(-W(s)\mathbf{U}, -sW(s)\mathbf{U}, \mathbf{U}).$$

Таким образом, преобразование квадратичной формы сводится к расширению ее до эрмитовой и последующей замене переменных их изображениями Лапласа, найденными при нулевых начальных условиях. При этом изображение выходной переменной нелинейного звена $\mathbf{U}(s)$ рассматривается как независимая комплексная переменная, и его записывают без аргумента, т. е. в виде $\mathbf{U}$.

Рассмотрим в качестве примера локальную связь (5.33) в случае одномерной системы. Расширенная до эрмитовой ее квадратичная форма принимает вид

$$\tilde{F}(s, \mathbf{U}) = F(\tilde{\xi}(s), \mathbf{U}(s)) = \operatorname{Re} \{ [\beta \tilde{\xi}(s) - \mathbf{U}]^* [\mathbf{U} - \alpha \tilde{\xi}(s)] \}.$$

Подставив сюда выражение для изображения $\tilde{\xi}(s)$, которое определяется исходя из заданных уравнений системы при нулевых начальных условиях, получим

$$\begin{aligned}\tilde{F}(s, \mathbf{U}) &= -\operatorname{Re} \{ [\beta W_{\text{л}}(s)\mathbf{U} + \mathbf{U}]^* [\mathbf{U} + \alpha W_{\text{л}}(s)\mathbf{U}] \} = \\ &= -\operatorname{Re} \{ [\beta W_{\text{л}}(s) + 1]^* [1 + \alpha W_{\text{л}}(s)] \} |\mathbf{U}|^2.\end{aligned}$$

Квадратичный критерий (В.А. Якубович [63]). Пусть нелинейная система (5.35а) или (5.35б) минимально устойчива в классе нелинейных звеньев, заданных локальной связью с формой $F(\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u})$, и матрица A не имеет собственных значений на мнимой оси, или, что то же, характеристическое уравнение ее линейной части не имеет корней на мнимой оси.

Тогда ее положение равновесия абсолютно устойчиво в указанном классе нелинейных звеньев, если эрмитова форма $\tilde{F}(j\omega, \mathbf{U})$ отрицательно определена при $-\infty \leq \omega \leq \infty$, т. е. выполнено условие

$$\tilde{F}(j\omega, \mathbf{U}) < 0 \quad \text{при} \quad -\infty \leq \omega \leq \infty \quad \text{и} \quad \text{любом} \quad \mathbf{U} \neq 0. \quad (5.37)$$

При этом имеет место экспоненциальная сходимость (устойчивость), т. е. существуют постоянные $C > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что при любом $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{x}(t)| \leq C|\mathbf{x}(t_0)|e^{-\varepsilon(t-t_0)}. \quad (5.38)$$

Условие (5.37) называется частотным условием.

Если эрмитову форму $\tilde{F}(j\omega, \mathbf{U})$ представить в виде

$$\tilde{F}(j\omega, \mathbf{U}) = -\mathbf{U}^* H(j\omega) \mathbf{U},$$

то частотное условие равносильно тому, что матрица $H(j\omega)$ является положительно определенной при $-\infty \leq \omega \leq \infty$.

Эрмитова матрица $H(j\omega)$ положительно определена при $-\infty \leq \omega \leq \infty$ в том и только том случае, если она положительно определена при $\omega = \infty$ и детерминант от нее не обращается в нуль при $-\infty \leq \omega \leq \infty$:

$$H(j\infty) > 0, \quad \det H(j\omega) \neq 0 \quad \text{при} \quad -\infty \leq \omega \leq \infty. \quad (5.39)$$

Докажем это утверждение. Заметим, что первое неравенство (5.39) означает, что матрица $H(j\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega)$ является положительно определенной.

Положительная определенность матрицы $H(j\omega)$ для всех $-\infty \leq \omega \leq \infty$ равносильна положительности ее собственных значений $\lambda_i(j\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Поэтому условие

$$\det H(j\omega) = \lambda_1(j\omega)\lambda_2(j\omega)\dots\lambda_n(j\omega) \neq 0$$

является необходимым, чтобы матрица $H(j\omega)$ была положительно определенной для всех $-\infty \leq \omega \leq \infty$. Достаточность условия (5.39) следует из того, что $\lambda_i(j\infty) > 0$ и $\lambda_i(j\omega) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). И

поскольку $\lambda_i(j\omega)$ — непрерывные функции ω , то все $\lambda_i(j\omega) > 0$ для всех $-\infty \leq \omega \leq \infty$. Следовательно, $H(j\omega)$ — положительно определенная матрица.

Квадратичный критерий можно использовать для исследования глобальной асимптотической устойчивости отдельных нестационарных и нелинейных систем. Для этого нужно задать локальную связь так, чтобы класс нелинейностей, который она определяет, включал данную нелинейность. При этом желательно локальную связь (или, что то же, квадратичную форму) выбирать так, чтобы класс нелинейностей, который она определяет, был как можно менее объемным.

Пример 5.5. Исследовать устойчивость системы

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + (2 + \cos t)y = 0.$$

Решение. Представим уравнение системы в виде

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y + u = 0, \quad u = y \cos t,$$

или

$$y = -W_{\pi}(p)u, \quad W_{\pi}(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 2}, \quad u = y \cos t.$$

Здесь входом «нелинейного» звена является y , выходом — u . В качестве локальной связи примем соотношение

$$F(y, u) = y^2 - u^2 = y^2 - y^2 \cos^2 t = y^2 \sin^2 t \geq 0.$$

Система минимально устойчива в рассматриваемом классе, так как линейная часть устойчива и $F(y, 0) \geq 0$ при любом y . Эрмитово расширение квадратичной формы этой локальной связи имеет вид

$$\tilde{F}(s, U) = F(Y(s), U) = Y^*(s)Y(s) - U^*U = |Y(s)|^2 - |U|^2.$$

Подставив сюда выражение для $Y(s)$ и положив $s = j\omega$, для частотного условия получим

$$\tilde{F}(j\omega, U) = (|W_{\pi}(j\omega)|^2 - 1)|U|^2 < 0.$$

Так как это неравенство должно выполняться при $U \neq 0$, то обе части неравенства можно разделить на $|U|^2$. Квадрат амплитудной частотной функции линейной части имеет вид

$$|W_{\pi}(j\omega)|^2 = \frac{1}{(2 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}.$$

Подставив это выражение в частотное условие, его можно представить в виде

$$1 - (2 - \omega^2)^2 - 16\omega^2 < 0, \quad \text{или} \quad -3 - 12\omega^2 - \omega^4 < 0.$$

Очевидно, последнее неравенство выполняется при $-\infty \leq \omega \leq \infty$. Следовательно, положение равновесия рассматриваемой системы асимптотически устойчиво в целом.

5.5.4. Методы построения квадратичной формы локальной связи. Чтобы воспользоваться квадратичным критерием при исследовании устойчивости каких-либо систем, нужно по заданным уравнениям системы строить локальную связь, т. е. определять класс систем, в который можно было бы включить данную систему. В зависимости от конкретного вида нелинейностей возможны различные способы задания локальной связи [63].

1) Как уже было показано, если нелинейность $u = f(\xi)$ принадлежит к классу, определяемому неравенством $\alpha \leq f(\xi)/\xi \leq \beta$, то локальная связь может быть задана в виде

$$F(\xi, u) = (\beta\xi - u)(u - \alpha\xi) \geq 0.$$

Если $\alpha = 0$ и $0 < \beta < \infty$, то эта связь принимает вид

$$F(\xi, u) = u(\beta\xi - u) \geq 0 \quad \text{или} \quad F(\xi, u) = u(\xi - \beta^{-1}u) \geq 0.$$

2) Если система содержит две нелинейности вида $u_1 = \xi^2$, $u_2 = \xi^3$ или $u_1 = \xi^3$, $u_2 = \xi^5$, то локальную связь можно задать в виде равенства

$$F(\xi, \mathbf{u}) = \xi u_2 - u_1^2 = 0.$$

3) Система содержит две одинаковые нелинейности $u_i = f(\xi_i, t)$ ($i = 1, 2$), и $f(\xi_i, t)$ является неубывающей функцией переменной ξ_i при всех $t \geq 0$: $f(\xi'_i, t) \leq f(\xi''_i, t)$ при $\xi'_i < \xi''_i$. В этом случае локальную связь можно задать в виде

$$F(\xi, \mathbf{u}) = (\xi_1 - \xi_2)(u_1 - u_2) \geq 0.$$

4) Система содержит две одинаковые нелинейности $u_i = f(\xi_i, t)$ ($i = 1, 2$), и функция $f(\xi_i, t)$ удовлетворяет следующему условию: $\alpha \leq \partial f(\xi_i, t)/\partial \xi_i \leq \beta$ при всех $t \geq 0$. В этом случае локальная связь может быть задана в виде

$$F(\xi, \mathbf{u}) = [\beta(\xi_1 - \xi_2) - (u_1 - u_2)][(u_1 - u_2) - \alpha(\xi_1 - \xi_2)] \geq 0.$$

Покажем, что эта локальная связь имеет место, если исходное условие, которое можно представить в виде

$$\beta - \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_i} - \alpha \geq 0,$$

выполняется. При $\xi_1 \geq \xi_2$ локальная связь справедлива, так как

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\beta - \frac{\partial f(\rho, t)}{\partial \rho} \right) d\rho = \beta(\xi_2 - \xi_1) - (u_2 - u_1) \leq 0,$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\frac{\partial f(\rho, t)}{\partial \rho} - \alpha \right) d\rho = (u_1 - u_2) - \alpha(\xi_1 - \xi_2) \leq 0.$$

При $\xi_1 \leq \xi_2$ она справедлива, так как

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\beta - \frac{\partial f(\rho, t)}{\partial \rho} \right) d\rho = \beta(\xi_1 - \xi_2) - (u_1 - u_2) \geq 0,$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\frac{\partial f(\rho, t)}{\partial \rho} - \alpha \right) d\rho = (u_1 - u_2) - \alpha(\xi_1 - \xi_2) \geq 0.$$

5) Иногда локальная связь может быть задана несколькими соотношениями в виде равенств и неравенств:

$$F_i(\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r;$$

$$F_k(\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}) \geq 0, \quad k = r + 1, r + 2, \dots, p.$$

Такую локальную связь можно преобразовать в локальную связь с одной формой, свернув все квадратичные формы в одну:

$$F(\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^p \tau_j F_j(\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}).$$

Здесь τ_j ($j = 1, 2, \dots, r$) — произвольные постоянные, τ_j ($j = r + 1, r + 2, \dots, p$) — произвольные положительные постоянные. Локальная связь

$$F(\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^p \tau_j F_j(\xi, \dot{\xi}, \mathbf{u}) \geq 0$$

с одной формой эквивалентна исходной локальной связи с p формами.

6) Если система содержит нелинейность, которая имеет вид

$$u = (a \cos t + b \sin t)\xi,$$

то ее можно представить как систему, содержащую две нелинейности вида

$$u_1 = \xi \cos t, \quad u_2 = \xi \sin t.$$

При этом локальную связь можно определить равенством

$$F = \xi^2 - u_1^2 - u_2^2 = 0.$$

Пример 5.6. Система описывается уравнениями

$$T \dot{e}_1 + e_1 = -k_1 u_1 + k_2 u_2,$$

$$T \dot{e}_2 + e_2 = k_2 u_1 - k_1 u_2,$$

$$u_i = f(e_i, t), \quad i = 1, 2,$$

где T, k_1, k_2 — положительные постоянные, $f(e_i, t)$ — неубывающая по переменной e_i функция, удовлетворяющая при всех $t \geq 0$ условию

$$f(0, t) = 0, \quad 0 \leq \frac{f(e_i, t)}{e_i} \leq \beta \quad \text{при} \quad e_i \neq 0.$$

Определить значения постоянных T, k_1, k_2 , при которых положение равновесия системы асимптотически устойчиво в целом.

Решение. Найдем матричную передаточную функцию линейной части $W = [W_{ik}]$, где $W_{ik} = E_i(s)/U_k(s)$ ($i, k = 1, 2$). Для этого произведем преобразование Лапласа исходных уравнений, описывающих линейную часть, при нулевых начальных условиях:

$$TsE_1(s) + E_1(s) = -k_1U_1(s) + k_2U_2(s).$$

$$TsE_2(s) + E_2(s) = k_2U_1(s) - k_1U_2(s).$$

Отсюда, положив $U_2(s) = 0$ при определении W_{i1} и $U_1(s) = 0$ при определении W_{i2} , находим

$$W_{11} = \frac{E_1(s)}{U_1(s)} = -\frac{k_1}{Ts+1}, \quad W_{21} = \frac{E_2(s)}{U_1(s)} = \frac{k_2}{Ts+1},$$

$$W_{12} = \frac{E_1(s)}{U_2(s)} = \frac{k_2}{Ts+1}, \quad W_{22} = \frac{E_2(s)}{U_2(s)} = -\frac{k_1}{Ts+1}.$$

Если использовать обозначение $W_i = k_i/(Ts+1)$, то матричную передаточную функцию можно записать в виде

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1 & W_2 \\ W_2 & -W_1 \end{bmatrix}.$$

С помощью передаточных функций уравнение системы в изображениях Лапласа можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1(s) & W_2(s) \\ W_2(s) & -W_1(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix},$$

или

$$E_1(s) = -W_1(s)U_1(s) + W_2(s)U_2(s), \quad (5.40a)$$

$$E_2(s) = W_2(s)U_1(s) - W_1(s)U_2(s). \quad (5.40б)$$

Нелинейности удовлетворяют локальной связи

$$F_1 = \left(e_1 - \frac{1}{\beta} u_1\right) u_1 \geq 0, \quad F_2 = \left(e_2 - \frac{1}{\beta} u_1\right) u_2 \geq 0,$$

$$F_3 = (e_1 - e_2)(u_1 - u_2) \geq 0,$$

или

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}, \mathbf{u}) &= \tau_1 F_1 + \tau_2 F_2 + \tau_3 F_3 = \tau_1 \left(e_1 - \frac{1}{\beta} u_1\right) u_1 + \\ &+ \tau_2 \left(e_2 - \frac{1}{\beta} u_2\right) u_2 + \tau_3 (e_1 - e_2)(u_1 - u_2) \geq 0, \quad \tau_i > 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{e} = (e_1 \ e_2)^T$ и $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$. «Нелинейность» $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ удовлетворяет локальной связи: $F(\mathbf{e}, \mathbf{0}) = 0$. Примем эту нелинейность в качестве нелинейности сравнения. В этом случае система сравнения принимает вид

$$T \dot{e}_1 + e_1 = 0, \quad T \dot{e}_2 + e_2 = 0$$

и представляет собой две не связанные между собой линейные системы. Эти системы устойчивы (асимптотически устойчивы в целом). Поэтому рассматриваемая система минимально устойчива.

Так как квадратичные формы F_1 и F_2 похожи, дальше примем $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Эрмитово расширение квадратичной формы $F(\mathbf{e}, \mathbf{u})$ имеет вид

$$F(\mathbf{E}(s), \mathbf{U}) = \operatorname{Re} \left\{ \tau \left(E_1(s) - \frac{1}{\beta} U_1 \right) U_1^* + \tau \left(E_2(s) - \frac{1}{\beta} U_2 \right) U_2^* + \right. \\ \left. + \tau_3 [E_1(s) - E_2(s)] (U_1 + U_2)^* \right\}.$$

Подставив сюда выражения для $E_1(s)$ и $E_2(s)$ из (5.40а), (5.40б) и положив $s = j\omega$, получим

$$\tilde{F}(j\omega, \mathbf{U}) = \operatorname{Re} \left\{ \tau \left[-W_1(j\omega)U_1 + W_2(j\omega)U_2 - \frac{1}{\beta} U_1 \right] U_1^* + \right. \\ \left. + \tau \left[W_2(j\omega)U_1 - W_1(j\omega)U_2 - \frac{1}{\beta} U_2 \right] U_2^* + \right. \\ \left. + \tau_3 \left[-W_1(j\omega)U_1 + W_2(j\omega)U_2 - W_2(j\omega)U_1 + W_1(j\omega)U_2 \right] (U_1 - U_2)^* \right\},$$

или, после перемножения и приведения подобных членов,

$$\tilde{F}(j\omega, \mathbf{U}) = -\operatorname{Re} \left\{ \left[(\tau + \tau_3)W_1(j\omega) + \tau_3 W_2(j\omega) + \frac{\tau}{\beta} \right] U_1 U_1^* + \right. \\ \left. + \left[(\tau + \tau_3)W_1(j\omega) + \tau_3 W_2(j\omega) + \frac{\tau}{\beta} \right] U_2 U_2^* - \right. \\ \left. - [\tau_3 W_1(j\omega) + (\tau_3 + \tau)W_2(j\omega)] U_1 U_2^* - \right. \\ \left. - [\tau_3 W_1(j\omega) + (\tau_3 + \tau)W_2(j\omega)] U_2 U_1^* \right\}.$$

Подставив выражения для передаточных функций, найдем

$$\operatorname{Re} \left[(\tau + \tau_3)W_1(j\omega) + \tau_3 W_2(j\omega) + \frac{\tau}{\beta} \right] = \frac{(\tau + \tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2 + 1} + \frac{\tau}{\beta} = A,$$

$$\tau_3 W_1(j\omega) + (\tau_3 + \tau)W_2(j\omega) = \frac{[\tau_3 k_1 + (\tau_3 + \tau)k_2](1 - Tj\omega)}{(T\omega)^2 + 1} = B.$$

Используя эти обозначения, частотное условие можно записать в виде

$$\tilde{F}(j\omega, \mathbf{U}) = -(AU_1 U_1^* + AU_2 U_2^* - \operatorname{Re} \{BU_1 U_2^* + BU_2 U_1^*\}) < 0,$$

или

$$\tilde{F}_1(j\omega, \mathbf{U}) = -\operatorname{Re} \{U^* H_1(j\omega)U\} = -\mathbf{U}^* H(j\omega)\mathbf{U},$$

где

$$H_1(j\omega) = \begin{bmatrix} A & -B \\ -B & A \end{bmatrix}, \quad H(j\omega) = \frac{1}{2} [H_1(j\omega) + H_1^*(j\omega)],$$

$$\mathbf{U} = (U_1 \quad U_2)^T.$$

Элементы h_{ik} ($i, k = 1, 2$) матрицы H определяются следующим образом:

$$h_{11} = h_{22} = A = \frac{(\tau + \tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2 + 1} + \frac{\tau}{\beta},$$

$$h_{12} = h_{21} = -\frac{1}{2}(B + B^*) = -\frac{[\tau_3 k_1 + (\tau_3 + \tau)k_2]}{(T\omega)^2 + 1}.$$

Частотное условие будет выполнено, если эрмитова матрица $H(j\omega)$ будет положительно определенной. Согласно критерию положительной определенности эрмитова матрица $H(j\omega)$ будет положительно определенной, если ее главные угловые миноры будут положительны:

$$\Delta_1 = h_{11} = \frac{(\tau + \tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2 + 1} + \frac{\tau}{\beta} > 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \\ = \left[\frac{(\tau + \tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2 + 1} + \frac{\tau}{\beta} \right]^2 - \left[\frac{[\tau_3 k_1 + (\tau_3 + \tau)k_2]}{(T\omega)^2 + 1} \right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Так как все параметры положительны, первое неравенство выполняется при $-\infty \leq \omega \leq \infty$. Чтобы определить, при каких значениях параметров будет выполняться второе неравенство, представим его в виде

$$\left[\frac{(\tau + \tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2 + 1} + \frac{\tau}{\beta} \right]^2 > \left[\frac{[\tau_3 k_1 + (\tau_3 + \tau)k_2]}{(T\omega)^2 + 1} \right]^2.$$

Так как в обеих частях выражения в скобках положительны, то последнее неравенство можем записать в виде

$$\frac{(\tau + \tau_3)k_1 + \tau_3 k_2}{(T\omega)^2 + 1} + \frac{\tau}{\beta} > \frac{[\tau_3 k_1 + (\tau_3 + \tau)k_2]}{(T\omega)^2 + 1}.$$

Если обе части приведенного неравенства умножить на $(T\omega)^2 + 1$ и положить $\tau = 1/k_2$ и $\tau_3 = 1/k_1$, то получим

$$\frac{k_1}{k_2} + \frac{\tau}{\beta} [(T\omega)^2 + 1] > 1.$$

Это неравенство будет выполнено при $-\infty \leq \omega \leq \infty$, если оно будет выполнено при $\omega = 0$. А при $\omega = 0$ последнее неравенство будет выполнено и соответственно рассматриваемая система будет асимптотически устойчива в целом, если

$$\frac{k_1}{k_2} + \frac{1}{\beta k_2} > 1.$$

5.6. Круговой критерий абсолютной устойчивости

Рассмотрим опять задачу об абсолютной устойчивости в угле $[\alpha, \beta]$ нелинейной системы с одной нелинейностью (рис. 5.5, а). Как было показано, в этом случае класс нелинейностей (нелинейность в общем случае является нестационарной) может быть определен локальной связью

$$F(e, u) = (\beta e - u)(u - \alpha e) > 0 \quad \forall t \geq 0.$$

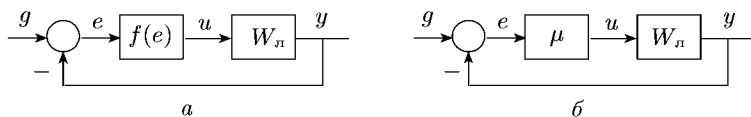


Рис. 5.5. Нелинейная система (а) и система сравнения б

Наряду с данной системой рассмотрим систему сравнения (рис. 5.5, б), в которой нелинейное звено заменено линейным звеном с передаточной функцией $W_c(p) = \mu$, $\mu \in [\alpha, \beta]$. Пусть передаточная функция линейной части имеет l полюсов в правой полуплоскости и не содержит полюсов на мнимой оси. Тогда по критерию Найквиста для того чтобы система сравнения была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы (т.е. годограф частотной передаточной функции $W(j\omega) = \mu W_\pi(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$) охватывала точку $(-1, j0)$ $l/2$ раз против часовой стрелки. Или, что то же, для того чтобы система сравнения была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф частотной передаточной функции линейной части $W_\pi(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ охватывал точку $(-1/\mu, j0)$ $l/2$ раз против часовой стрелки. Очевидно, для того чтобы система сравнения была робастно устойчива в интервале $[\alpha, \beta]$ (т.е. при всех $\mu \in [\alpha, \beta]$), необходимо и достаточно, чтобы годограф частотной передаточной функции линейной части $W_\pi(j\omega)$ охватывал отрезок $[-1/\beta, -1/\alpha]$ на действительной оси $l/2$ раз против часовой стрелки. В частности, если линейная часть устойчива, для того чтобы система сравнения была робастно устойчива в интервале $[\alpha, \beta]$, необходимо и достаточно, чтобы годограф частотной передаточной функции линейной части $W_\pi(j\omega)$ не охватывал указанный отрезок (рис. 5.6, а).

Круговой критерий абсолютной устойчивости в угле $[\alpha, \beta]$ является обобщением критерия Найквиста робастной устойчивости на интервале линейных систем на нелинейные системы. При этом роль отрезка $[-1/\beta, -1/\alpha]$ на вещественной оси играет окружность с центром на вещественной оси, пересекающая вещественную ось в

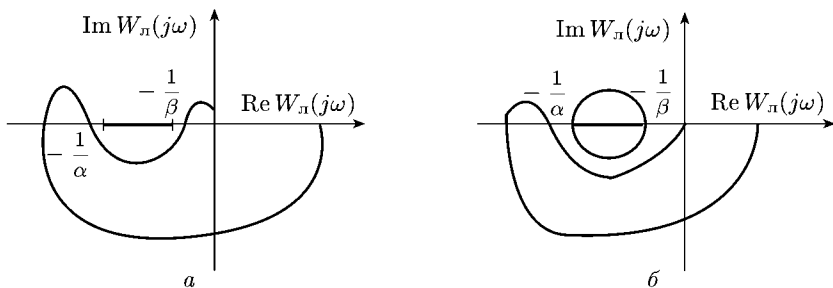


Рис. 5.6. Иллюстрации к робастной (а) и абсолютной (б) устойчивости

точках $-1/\beta$ и $-1/\alpha$ (см. рис. 5.6, б). Эту окружность называют $[\alpha, \beta]$ -окружностью.

Круговой критерий абсолютной устойчивости. Пусть система сравнения устойчива при каком-либо $\mu \in [\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, передаточная функция линейной части имеет l полюсов в правой полуплоскости и не имеет полюсов на мнимой оси.

Тогда для того чтобы нелинейная система была абсолютно устойчива в угле $[\alpha, \beta]$, достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика линейной части охватывала $[\alpha, \beta]$ -окружность $l/2$ раз против часовой стрелки.

Если $l = 0$ (линейная часть устойчива), то для того чтобы нелинейная система была абсолютно устойчива в угле $[\alpha, \beta]$, достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика линейной части не пересекала $[\alpha, \beta]$ -окружность (см. рис. 5.6, б).

Докажем круговой критерий, пользуясь квадратичным критерием.

Эрмитово расширение квадратичной формы

$$F(e, u) = (\beta e - u)(u - \alpha e)$$

имеет вид

$$F(E(s), U) = \operatorname{Re}[\beta E(s) - U][U - \alpha E(s)]^*.$$

При $g = 0$ имеем (см. рис. 5.5, а) $E(s) = -W_\pi(s)U$. Подставив это выражение для $E(s)$ в последнее равенство и положив $s = j\omega$, частотное условие можно записать в виде

$$\tilde{F}(j\omega, U) = -\operatorname{Re}[\beta W_\pi(j\omega) + 1][1 + \alpha W_\pi(j\omega)]^* |U|^2 < 0.$$

Так как $\alpha\beta > 0$ и строгое неравенство должно выполняться при $U \neq 0$, то частное условие можно представить в виде

$$\operatorname{Re}\left[W_\pi(j\omega) + \frac{1}{\beta}\right]\left[\frac{1}{\alpha} + W_\pi(j\omega)\right]^* > 0.$$

Представив частотную передаточную функцию в виде $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$, левую часть частотного условия можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[U(\omega) + jV(\omega) + \frac{1}{\beta}\right]\left[\frac{1}{\alpha} + U(\omega) - jV(\omega)\right] &= \\ &= \left[U(\omega) + \frac{1}{\beta}\right]\left[\frac{1}{\alpha} + U(\omega)\right] + V^2(\omega) = \\ &= U^2(\omega) + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)U(\omega) + \frac{1}{\alpha\beta} + V^2(\omega) = \\ &= \left[U(\omega) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^2 + V^2(\omega) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)^2. \end{aligned}$$

Обозначим полученное выражение для левой части частотного условия $G[U(\omega), V(\omega)]$ и приравняем его нулю:

$$G[U(\omega), V(\omega)] = \left[U(\omega) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^2 + V^2(\omega) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)^2 = 0.$$

Это уравнение $[\alpha, \beta]$ -окружности — уравнение окружности, пересекающей вещественную ось в точках $-1/\alpha$ и $-1/\beta$, имеющей радиус $(1/2)(1/\alpha - 1/\beta)$ и центр, расположенный на вещественной оси. На вещественной плоскости (U, V) вне $[\alpha, \beta]$ -окружности $G[U(\omega), V(\omega)] > 0$. И частотное условие будет выполнено, если на комплексной плоскости (U, jV) амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части располагается вне $[\alpha, \beta]$ -окружности. Так как система сравнения устойчива и μ принадлежит интервалу $[\alpha, \beta]$, то амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части охватывает точку $-1/\mu$, расположенную на вещественной оси внутри $[\alpha, \beta]$ -окружности, $l/2$ раз в положительном направлении (против часовой стрелки). Поэтому нелинейная система будет абсолютно устойчива в угле $[\alpha, \beta]$, если амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части охватывает $[\alpha, \beta]$ -окружность $l/2$ раз в положительном направлении.

Задачи

1. Передаточная функция линейной части имеет вид $W_{\text{л}}(p) = \frac{0,1}{(0,1p+1)^3}$. Определить, будет ли система абсолютно устойчива в угле $[0, 1, 10]$.

2. Передаточная функция линейной части имеет вид $W_{\text{л}}(p) = \frac{0,1}{(0,1p+1)^2p}$. Определить, будет ли система абсолютно устойчива в угле $[0, 1, 10]$.

3. Определить, при каких значениях параметров a и b положение равновесия системы

$$\ddot{y} + a\dot{y} + (1 + b \cos t)y = 0 \quad (a > 0, b > 0)$$

асимптотически устойчиво в целом.

4. Определить, при каких значениях параметров a и b положение равновесия системы

$$\ddot{y} + a\dot{y} + (1 + b \sin t)y = 0 \quad (a > 0, b > 0)$$

асимптотически устойчиво в целом.

5. Определить, при каких значениях параметров a и b положение равновесия системы

$$\ddot{y} + a\dot{y} + b(2 + \cos t + \sin t)y = 0 \quad (a > 0, b > 0)$$

асимптотически устойчиво в целом.

6. Передаточная функция линейной части системы (см. рис. 5.5, а) имеет вид $W_{\text{л}}(p) = \frac{k}{(p+2)(p-1)}$, нелинейное звено описывается уравнением $u = e \sin t$. Определить, при каких значениях k система асимптотически устойчива в целом.

7. Система описывается уравнениями

$$T^2 \ddot{y}_1 + 4T \dot{y}_1 + y_1 = -k_1 u_1 + k_2 u_2,$$

$$T^2 \ddot{y}_2 + 4T \dot{y}_2 + y_2 = k_2 u_1 - k_1 u_2,$$

$$u_i = f(y_i, t), \quad i = 1, 2,$$

где T , k_1 , k_2 — положительные постоянные, $u_i = f(y_i, t)$ является неубывающей функцией y_i при любом $t \geq 0$ и удовлетворяет условию $0 \leq f(y_i)/y_i \leq \beta$ при $y_i \neq 0$, $f(0, t) = 0$. Определить, при каких значениях параметров T , k_1 и k_2 система асимптотически устойчива в целом.

Глава 6

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \quad (6.1)$$

где $f(\mathbf{x}, u)$ — гладкая функция в некоторой окрестности $\Omega(0)$ начала координат. Начало координат является положением равновесия: $f(0, 0) = 0$. Здесь $\mathbf{x}$ — вектор состояния, u — управление.

Напомним, что функция называется гладкой в некоторой области, если она сама и ее производная по всем своим аргументам являются непрерывными в этой области.

6.1. Обычная линеаризация и ее недостатки

Самым распространенным методом анализа и синтеза систем в рассматриваемом случае является «обычная» линеаризация — линеаризация, основанная на разложении нелинейной функции в окрестности точки (функции), определяющей заданный режим, в ряд Тейлора и отбрасывании нелинейных членов. Обычная линеаризация заменяет исходную нелинейную модель приближенной линейной моделью и обладает рядом недостатков. Эти недостатки состоят в следующем:

1) устойчивость и требуемое качество системы управления, синтезированной на основе обычной линейной модели, гарантируется лишь в малой окрестности заданного режима. При этом размеры этой окрестности не известны. При больших отклонениях требования к качеству системы могут быть не выполнены. Более того, система может быть неустойчива;

2) если заданный режим является функцией времени, то линеаризованная модель становится нестационарной, а анализ и синтез систем упрощаются незначительно;

3) способы синтеза линейных систем управления, основанные на обычной линеаризации, позволяют получать только линейные законы управления. В то же время известно, что нелинейные законы управления во многих случаях обеспечивают лучшее качество управления.

Рассмотрим в качестве примера объект, который описывается уравнением

$$\dot{x} = ax^3 + u, \quad x, u \in R, \quad a > 0.$$

Заданному режиму соответствует $x = 0$. На основе обычной линейной модели $\dot{x} = u$ получаем закон управления $u = -kx$ ($k > 0$), который обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом линейной модели. Однако синтезированная на основе обычной линеаризованной модели исходная нелинейная система

$$\dot{x} = ax^3 - kx$$

имеет три положения равновесия: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{k/a}$. Исследуем устойчивость этих положений равновесия. Функцию Ляпунова будем искать в виде $V(x) = x^2$. Производная по времени этой функции в силу уравнения системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = 2x(ax^3 - kx) = -2x^2(k - ax^2),$$

она отрицательна (отрицательно определена) при $-\sqrt{k/a} < x < \sqrt{k/a}$ и положительна при $|x| > \sqrt{k/a}$. Следовательно, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво на интервале $-\sqrt{k/a} < x < \sqrt{k/a}$. Вне этого интервала процесс расходится. Два других положения равновесия неустойчивы.

Итак, в рассмотренном примере замкнутая система, синтезированная на основе обычной линеаризованной модели, асимптотически устойчива лишь на конечном интервале, тогда как синтезированная линейная система асимптотически устойчива в целом.

6.2. Линеаризация обратной связью

Функция $u = \Phi(x, v)$, где u, v — входы (управления), x — вектор состояния, называется *преобразованием обратной связью*, если она разрешима относительно v . Переход от нелинейной системы (6.1) к линейной системе путем преобразования, включающего преобразование обратной связью, называется *линеаризацией обратной связью*.

Линеаризация обратной связью (ЛОС) является не приближенным, а эквивалентным преобразованием: в результате ЛОС получается система, эквивалентная исходной системе. При ЛОС управление u заменяется новым управлением v . Функция преобразования, кроме нового управления, включает вектор состояния (в частном случае только выходную переменную). Поэтому при этом преобразовании объект охватывается обратной связью. Отсюда и название этого преобразования — преобразование обратной связью.

Пример 6.1. Задан объект, который описывается уравнением

$$\dot{x} = ax^3 + u, \quad x, u \in R, \quad a > 0.$$

Требуется определить закон управления, при котором замкнутая система асимптотически устойчива в целом.

Решение. Как было показано в предыдущем параграфе, синтез замкнутой системы, основанный на обычной линеаризации, не обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом. Воспользуемся линеаризацией обратной связью

$$u = -ax^3 + v.$$

При этом преобразовании уравнение объекта примет вид $\dot{x} = v$. При таком уравнении единственным разумным линейным законом управления является $v = -kx$ ($k > 0$). Подставив это выражение для управления в уравнение преобразования, получим

$$u = -ax^3 - kx.$$

Уравнение замкнутой системы имеет вид $\dot{x} = -kx$. Замкнутая система асимптотически устойчива в целом.

Рассмотрим еще один простой пример.

Пример 6.2. Задан объект, который описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 + cx_1^3, \quad \dot{x}_2 = u.$$

Требуется определить закон управления, при котором замкнутая система асимптотически устойчива в целом.

Решение. Воспользуемся преобразованием обратной связью

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2 + cx_1^3, \quad u = -3cx_1^2(x_2 + cx_1^3) + v.$$

В новых переменных уравнения объекта примут вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = v.$$

Приняв закон управления

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2, \quad k_1, k_2 > 0,$$

для замкнутой системы получим

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -k_1 z_1 - k_2 z_2.$$

Замкнутая система асимптотически устойчива в целом. В исходных переменных уравнения замкнутой системы принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + cx_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -3cx_1^2 x_2 - 3c^2 x_1^5 - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_2 cx_1^3. \end{aligned}$$

В примере 6.2 преобразование обратной связью включает, помимо преобразования управления, преобразование фазовых координат. При этом, если в примере 6.1 было более или менее понятно, как выбирать преобразование, то в примере 6.2 выбор преобразования не очень понятен. Кроме того, в общем случае возникает вопрос: существует ли преобразование обратной связью, обеспечивающее линеаризацию той или иной системы? Таким образом, в теоретическом плане при рассмотрении линеаризации обратной связью возникают два основных вопроса:

- 1) для каких систем линеаризация обратной связью возможна?
- 2) как найти соответствующее преобразование?

Но прежде чем непосредственно переходить к рассмотрению этих вопросов, познакомимся с необходимыми для этого математическими понятиями.

6.3. Некоторые сведения из дифференциальной геометрии

При дальнейшем рассмотрении вопросов линеаризации обратной связью потребуются следующие понятия: производные и скобки Ли, диффеоморфизмы, инвариантность, интегрируемость системы линейно независимых векторов. В этом параграфе будут рассмотрены необходимые сведения, связанные с этими и некоторыми другими понятиями.

6.3.1. Производные и скобки Ли. Пусть $\alpha(\mathbf{x})$ — гладкая скалярная функция векторного переменного ($\alpha: R^n \rightarrow R$) и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — гладкая векторная функция $\mathbf{f}: R^n \rightarrow R^n$.

Ниже используется оператор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$. Он равносильен оператору $\frac{d}{d\mathbf{x}}$ — оператору дифференцирования по векторному аргументу. При применении этого оператора к скалярной функции $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ получим вектор-строку

$$\nabla \alpha = \frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \dots \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} \right).$$

А при применении этого оператора к векторной функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ получим матрицу

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Определение 6.1. Производной Ли скалярной функции $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ по векторной функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ называется скалярная функция (обозначается $L_{\mathbf{f}}\alpha$), определяемая соотношением

$$L_{\mathbf{f}}\alpha = \frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} \mathbf{f} = \nabla \alpha \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} f_i.$$

Старшие производные Ли рекурсивно определяются следующим образом:

$$L_{\mathbf{f}}^k \alpha = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{k-1} \alpha) = \nabla(L_{\mathbf{f}}^{k-1} \alpha) \mathbf{f}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нулевая производная Ли функции $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ по $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ есть сама функция $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$: $L_{\mathbf{f}}^0 \alpha = \alpha$.

Высшие производные по другой векторной функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ определяется аналогично:

$$L_g L_f \alpha = L_g (L_f \alpha) = \nabla (L_f \alpha) \mathbf{g}.$$

Пусть система задана уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad y = \alpha(\mathbf{x}).$$

Первая и высшие производные по времени выходной переменной y равны соответственно первой и высшим производным Ли функции $\alpha(\mathbf{x})$ по функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f \alpha(\mathbf{x}), \\ \ddot{y} &= \frac{\partial \dot{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [L_f \alpha(\mathbf{x})] \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f^2 \alpha(\mathbf{x}), \quad \dots \end{aligned}$$

Точно так же, если задана скалярная функция $V(\mathbf{x})$, то ее производная в силу уравнения системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ будет равна производной Ли этой функции по $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f V.$$

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ — две гладкие векторные функции: $\mathbf{f}: R^n \rightarrow R^n$, $\mathbf{g}: R^n \rightarrow R^n$. Производная Ли от векторной функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ по векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ является векторной функцией и определяется аналогично производной Ли от скалярной функции:

$$L_f \mathbf{g} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}} \mathbf{f}.$$

Скобки Ли функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, к определению которых сейчас переходим, обозначают $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ или $ad_f \mathbf{g}$ (второе обозначение особенно удобно при записи скобок Ли второго и более высоких порядков).

Определение 6.2. Векторная функция, определяемая соотношением

$$ad_j \mathbf{g} \equiv [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = L_f \mathbf{g} - L_g \mathbf{f},$$

называется *скобками Ли* функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Скобки Ли высокого порядка рекурсивно определяются следующим образом:

$$ad_f^k \mathbf{g} = ad_f (ad_f^{k-1} \mathbf{g}) = [\mathbf{f}, ad_f^{k-1} \mathbf{g}], \quad k = 1, 2, \dots$$

Скобки Ли нулевого порядка функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ равны $\mathbf{g}(\mathbf{x})$: $ad_f^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}$.

Пример 6.3. Пусть функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определить скобки Ли первого и второго порядков этих функций.

Решение. Производные функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$ равны

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому скобка Ли первого порядка имеет вид

$$ad_f \mathbf{g} = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Производная скобки Ли по $\mathbf{x}$ равна

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}(ad_f \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и соответственно для скобки Ли второго порядка имеем

$$\begin{aligned} ad_f^2 \mathbf{g} &= ad_f(ad_f \mathbf{g}) = \nabla(ad_f \mathbf{g}) \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} ad_f \mathbf{g} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3x_1^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Лемма 6.1. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$ — гладкие векторные функции, $\alpha(\mathbf{x})$ — гладкая скалярная функция, α_1 , α_2 — скалярные постоянные.

Скобки Ли обладают следующими свойствами:

1) *билинейность* —

$$[\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2, \mathbf{g}] = \alpha_1 [\mathbf{f}_1, \mathbf{g}] + \alpha_2 [\mathbf{f}_2, \mathbf{g}],$$

$$[\mathbf{f}, \alpha_1 \mathbf{g}_1 + \alpha_2 \mathbf{g}_2] = \alpha_1 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] + \alpha_2 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2];$$

2) *асимметрическая коммутативность* —

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}];$$

3) *тождество Якоби* —

$$L_{ad_f \mathbf{g}} \alpha = L_f L_g \alpha - L_g L_f \alpha.$$

Доказательство. Свойства 1), 2) легко получаются непосредственно из определения скобок Ли. Остановимся на доказательстве тождества Якоби. Исходя из определения производной и скобок Ли левую часть тождества (обозначим ее L) можно представить в виде

$$L = L_{ad_f \mathbf{g}} \alpha = \frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} ad_f \mathbf{g} = \frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} \left(\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \mathbf{g} \right).$$

Правую часть (обозначим ее P), основываясь на определении производной Ли, можно записать в виде

$$\begin{aligned} P &= L_f L_g \alpha - L_g L_f \alpha = \frac{d}{d\mathbf{x}} (L_g \alpha) \mathbf{f} - \frac{d}{d\mathbf{x}} (L_f \alpha) \mathbf{g} = \\ &= \frac{d}{d\mathbf{x}} \left(\frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} \mathbf{g} \right) \mathbf{f} - \frac{d}{d\mathbf{x}} \left(\frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} \mathbf{f} \right) \mathbf{g}. \end{aligned}$$

По правилу дифференцирования скалярного произведения по векторному аргументу дальше получаем

$$P = \left[\frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}} + \mathbf{g}^T \frac{d}{d\mathbf{x}} \left(\frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} \right)^T \right] \mathbf{f} - \left[\frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} + \mathbf{f}^T \frac{d}{d\mathbf{x}} \left(\frac{d\alpha}{d\mathbf{x}} \right)^T \right] \mathbf{g}.$$

Так как слагаемые являются скалярными выражениями, а матрица $\frac{d}{dx} \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)^T$ является симметрической, имеем

$$\mathbf{g}^T \frac{d}{dx} \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)^T \mathbf{f} = \left(\mathbf{g}^T \frac{d}{dx} \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)^T \mathbf{f} \right)^T = \mathbf{f}^T \frac{d}{dx} \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)^T \mathbf{g}.$$

Таким образом, в выражении для P второе и четвертое слагаемые равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Поэтому их можно сократить. После сокращения, получим

$$P = \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\mathbf{g}}{dx} \mathbf{f} - \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\mathbf{f}}{dx} \mathbf{g}.$$

Сравнивая выражения для L и P , убеждаемся, что они равны.

Лемма 6.2. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in R^n$) — гладкие векторные функции ($\mathbf{f}, \mathbf{g} \in R^n$), $\alpha(\mathbf{x})$ — гладкая скалярная функция. Тогда если

$$L_g L_f^i \alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad L_g L_f^m \alpha(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (6.2)$$

то

$$L_{ad_f^j g} L_f^k \alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j+k \leq m-1, \\ (-1)^j L_g L_f^m \alpha(\mathbf{x}) \neq 0, & j+k = m. \end{cases} \quad (6.3)$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по j . При $j = 0$ формула (6.3) принимает вид

$$L_g L_f^k \alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq m-1, \\ L_g L_f^m \alpha(\mathbf{x}) \neq 0, & k = m, \end{cases}$$

и она справедлива в силу (6.2). Допустим теперь, что формула (6.3) справедлива при $j = l$:

$$L_{ad_f^l g} L_f^k \alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq l+k \leq m-1, \\ (-1)^l L_g L_f^m \alpha(\mathbf{x}) \neq 0, & l+k = m. \end{cases} \quad (6.4)$$

Покажем, что она справедлива при $j = l+1$.

Из тождества Якоби (см. лемму 6.1) имеем

$$L_{ad_f \beta} \lambda = L_f L_\beta \lambda - L_\beta L_f \lambda.$$

Заменив β на $ad_f^l \mathbf{g}$ и λ на $L_f^k \alpha(\mathbf{x})$, получим

$$L_{ad_f^{l+1} g} L_f^k \alpha(\mathbf{x}) = L_f L_{ad_f^l g} L_f^k \alpha(\mathbf{x}) - L_{ad_f^l g} L_f^{k+1} \alpha(\mathbf{x}).$$

В силу (6.4) первое слагаемое для любого k , удовлетворяющего условию $0 \leq l+k \leq m-1$, равно нулю, а второе слагаемое принимает вид

$$L_{ad_f^l g} L_f^{k+1} \alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq l+k+1 \leq m-1, \\ (-1)^l L_g L_f^m \alpha(\mathbf{x}) \neq 0, & l+k+1 = m. \end{cases}$$

Лемма доказана.

Следствие. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in R^n$) — гладкие векторные функции ($\mathbf{f}, \mathbf{g} \in R^n$), $T_1(\mathbf{x})$ — гладкая скалярная функция и

$$L_f T_1 = T_2, \quad L_f T_2 = T_3, \quad \dots, \quad L_f T_{n-1} = T_n.$$

Тогда если

$$L_g T_1 = L_g T_2 = \dots = L_g T_{n-1} = 0, \quad L_g T_n \neq 0,$$

то

$$L_{ad_f^j g} T_1 = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-2; \quad L_{ad_f^{n-1} g} T_1 \neq 0.$$

Это следствие получается из леммы 6.2, если принять $\alpha(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x})$, $k = 0$ и $m = n-1$.

Лемма 6.3. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in R^n$) — гладкие векторные функции ($\mathbf{f}, \mathbf{g} \in R^n$), $\alpha(\mathbf{x})$ — гладкая скалярная функция. Тогда если

$$L_{ad_f^k g} \alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (6.5)$$

то

$$L_g L_f^k \alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (6.6)$$

Доказательство. При $k = 0$ равенство (6.5) принимает вид $L_g \alpha = 0$ и совпадает с (6.6). При $k = 1$, используя тождество Якоби, из (6.5) находим

$$L_{ad_f g} \alpha = L_f L_g \alpha - L_g L_f \alpha = 0.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как в силу (6.5) $L_g \alpha = 0$. Поэтому получаем

$$L_g L_f \alpha = -L_{ad_f g} \alpha = 0.$$

При $k = 2$ равенство (6.5), используя тождество Якоби, можно записать в виде

$$L_{ad_f^2 g} \alpha = L_{ad_f(ad_f g)} \alpha = L_f L_{ad_f g} \alpha - L_{ad_f g} L_f \alpha = 0.$$

Первое слагаемое обращается в нуль, так как в силу (6.5) $L_{ad_f g} \alpha = 0$. Второе слагаемое с учетом тождества Якоби преобразуется следующим образом:

$$-L_{ad_f g} L_f \alpha = -(L_f L_g(L_f \alpha) - L_g L_f(L_f \alpha)) = L_g L_f(L_f \alpha) = L_g L_f^2 \alpha = 0.$$

Продолжая эту процедуру при $k = 3, 4, \dots, m$ получим (6.6).

6.3.2. Диффеоморфизмы и преобразование нелинейных систем.

Определение 6.3. Гладкая векторная функция $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{z} \in R^n$), определенная в области Ω , называется *диффеоморфизмом в области* Ω , если существует однозначная обратная функция $\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z})$ и эта функция является гладкой. Если функции $\Phi(\mathbf{x})$ и $\Phi^{-1}(\mathbf{z})$ определены и являются гладкими на всем пространстве R^n , то $\Phi(\mathbf{x})$ называют *глобальным диффеоморфизмом*.

Диффеоморфизм может использоваться для преобразования нелинейных систем.

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

и $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ — диффеоморфизм. Так как

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u],$$

то, учитывая, что существует обратное преобразование $T^{-1}(\mathbf{z})$, получим

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z})u,$$

где

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=T^{-1}(\mathbf{z})}, \quad \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z}) = \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=T^{-1}(\mathbf{z})}.$$

Теорема 6.1. Пусть $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}) \varphi_2(\mathbf{x}) \dots \varphi_n(\mathbf{x}))^T$ — гладкая функция, определенная в области $\Omega \subset R^n$. Если якобиан $\frac{d\Phi(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right]$ является неособым, т.е. не обращается в нуль в точке $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, то функция $\Phi(\mathbf{x})$ является диффеоморфизмом в некоторой окрестности $O(\mathbf{x}^0)$ этой точки ($O(\mathbf{x}^0) \subset \Omega$).

Пример 6.4. Определить, является ли векторная функция

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

диффеоморфизмом.

Решение. Якобиан имеет вид

$$\frac{d\Phi(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

он отличен от нуля при всех $\mathbf{x} \in R^2$. Следовательно, данная функция является глобальным диффеоморфизмом.

6.3.3. Теорема Фробениуса. Теорема Фробениуса устанавливает связь между инвариантностью и интегрируемостью системы линейно независимых векторов. Поэтому прежде всего познакомимся с этими понятиями.

Определение 6.4. Множество линейно независимых векторных функций $\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_r(\mathbf{x})\}$ называется *инвариантным*, если скобки Ли любых двух функций $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}_j(\mathbf{x})$ из этого множества (не обязательно разных) равны линейной комбинации функций из этого множества, т.е. существуют функции α_{ijk} ($k = 1, 2, \dots, r$) такие, что

$$[\mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}_j(\mathbf{x})] = \sum_{k=1}^r \alpha_{ijk} \mathbf{f}_k(\mathbf{x}).$$

Множество линейно независимых постоянных векторов всегда инвариантно. Действительно, скобки Ли двух постоянных векторов

являются нулевыми и тривиально представляются комбинациями исходных векторов.

Множество, состоящее из одного вектора, является инвалютивным, так как скобки Ли двух одинаковых функций равны нулю: $[\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})] = (\nabla \mathbf{f})\mathbf{f} - (\nabla \mathbf{f})\mathbf{f} = 0$.

Определение 6.5. Множество r ($r < n$) линейно независимых n -мерных векторных функций $\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_r(\mathbf{x})\}$ называется *интегрируемым*, если существуют $n - r$ независимых скалярных функций $\alpha_1(\mathbf{x}), \alpha_2(\mathbf{x}), \dots, \alpha_{n-r}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \alpha_i(\mathbf{x}) \mathbf{f}_j(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - r; \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Скалярные функции $\alpha_1(\mathbf{x}), \alpha_2(\mathbf{x}), \dots, \alpha_{n-r}(\mathbf{x})$ независимы в некоторой области D (т. е. при $\mathbf{x} \in D$), если векторы $\nabla \alpha_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots, n - r$) линейно независимы в этой области. Заметим, что при $r = n - 1$ независимость одного единственного вектора $\nabla \alpha_1(\mathbf{x})$ означает неравенство этого вектора нулю: $\nabla \alpha_1(\mathbf{x}) \neq 0$.

Теорема 6.2 (Frobenius [68]). Множество r ($r < n$) линейно независимых n -мерных векторных функций $\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_r(\mathbf{x})\}$ интегрируемо в том и только том случае, когда оно инвалютивно.

Пример 6.5. Задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 2x_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} &= 0, \\ x_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned}$$

где $\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3)$ — неизвестная функция. Требуется определить разрешимость этой системы уравнений.

Решение. Эту систему уравнений можно записать в виде

$$\frac{d\alpha}{dx} \mathbf{f}_1 = 0, \quad \frac{d\alpha}{dx} \mathbf{f}_2 = 0,$$

где

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = (2x_3 \quad -1 \quad 0)^T, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = (-x_1 \quad -2x_2 \quad x_3)^T.$$

Чтобы ответить на вопрос, имеет ли данная система уравнений решение, согласно теореме Фробениуса достаточно проверить инвалютивность множества $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. Скобки Ли двух функций этого множества имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] &= \frac{d\mathbf{f}_2}{dx} \mathbf{f}_1 - \frac{d\mathbf{f}_1}{dx} \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как легко проверить, скобки Ли каждой пары функций из множества $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ могут быть представлены как линейные комбинации функций этого множества следующим образом:

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] &= -2\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2, & [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1] &= -[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = 2\mathbf{f}_1 - 0\mathbf{f}_2, \\ [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1] &= [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2] = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2. \end{aligned}$$

Таким образом, множество $\{f_1, f_2\}$ инволютивно и, следовательно, по теореме Фробениуса рассматриваемая система интегрируема.

6.4. Линеаризация обратной связью по состоянию

Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \quad (6.7a)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ — гладкие векторные функции. Начало координат при нулевом управлении является положением равновесия: $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Уравнение вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})w(u + \varphi(\mathbf{x})),$$

если существует обратное преобразование w^{-1} , можно подстановкой $v = w(u + \varphi(\mathbf{x}))$ привести к виду (6.7a).

Определение 6.6. Система (6.7a) называется *линеаризуемой обратной связью по состоянию*, если существуют диффеоморфизм $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$ и преобразование обратной связью

$$u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v$$

такие, что уравнение (6.7a) принимает вид

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{b}v, \quad (6.7б)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.7в)$$

Линеаризованная система имеет специальный вид (см. (6.7в)) — форму управления Бруновского (Brunovsky controller form) [68]. Однако это не нарушает общности, так как любая вполне управляемая линейная стационарная система может быть преобразована к такому виду.

Составим для системы (6.7a) матрицу

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{g} \quad \text{ad}_f \mathbf{g} \quad \dots \quad \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}]. \quad (6.8)$$

В случае линейной стационарной системы, когда

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

где A и $\mathbf{b}$ — постоянные $(n \times n)$ - и $(n \times 1)$ -матрицы, для скобок Ли имеем

$$\mathbf{g} = \mathbf{b}, \quad \text{ad}_f \mathbf{g} = \frac{d\mathbf{g}}{dx} \mathbf{f} - \frac{d\mathbf{f}}{dx} \mathbf{g} = -\frac{dA\mathbf{x}}{dx} \mathbf{b} = -A\mathbf{b},$$

$$\text{ad}_f^2 \mathbf{g} = \text{ad}_f(\text{ad}_f \mathbf{g}) = -\frac{d\mathbf{f}}{dx} \mathbf{g} = -\frac{dA\mathbf{x}}{dx} \text{ad}_f \mathbf{g} = A^2 \mathbf{b},$$

$$\text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g} = \text{ad}_f(\text{ad}_f^{n-2} \mathbf{g}) = (-1)^{n-2} \frac{dA\mathbf{x}}{dx} \text{ad}_f^{n-2} \mathbf{g} = (-1)^{n-1} A^{n-1} \mathbf{b}.$$

Матрица (6.8) принимает вид

$$Y = [\mathbf{b} \quad -A\mathbf{b} \quad A^2\mathbf{b} \quad \dots \quad (-1)^{n-1} A^{n-1} \mathbf{b}].$$

Если отбросить перед четными столбцами матрицы Y знаки минус, которые не влияют на ее ранг, то получим матрицу управляемости для пары $(A, \mathbf{b})$. Поэтому матрицу (6.8) также называют *матрицей управляемости* для системы (6.7а).

Теорема 6.3 (о линеаризации обратной связью по состоянию). *Нелинейная система (6.7а) линеаризуема обратной связью по состоянию в некоторой окрестности Ω начала координат в том и только том случае, когда в этой окрестности ее матрица управляемости имеет ранг n , т. е. $\det Y \neq 0$ всюду на Ω (в начале координат $\det Y$ может обратиться в нуль) и множество $\{\mathbf{g} \quad \text{ad}_f \mathbf{g} \quad \dots \quad \text{ad}_f^{n-2} \mathbf{g}\}$, составленное из $n-1$ столбцов матрицы управляемости Y , инвариантно.*

Доказательство. **Необходимость.** Допустим, что существуют преобразования состояния $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$ и управления $u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v$ такие, что переменные $\mathbf{z}$ и v удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений в форме Бруновского

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, \quad \dot{z}_n = v, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Подставляя сюда $z_i = T_i(\mathbf{x})$, получим

$$\dot{z}_i = \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u] = T_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\dot{z}_n = \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u] = v.$$

Так как функции $T_1, T_2, \dots, T_n$ не зависят от управления u , из этой системы уравнений следует

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \dots = \frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = 0, \quad \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} \neq 0,$$

и соответственно из первых $n-1$ уравнения получаем

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = T_2, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = T_3, \quad \dots, \quad \frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = T_n.$$

Используя производные Ли, полученные соотношения можно записать в виде

$$L_g T_1 = L_g T_2 = \dots = L_g T_{n-1} = 0, \quad L_g T_n \neq 0,$$

$$L_f T_1 = T_2, \quad L_f T_2 = T_3, \quad \dots, \quad L_f T_{n-1} = T_n.$$

Отсюда в силу следствия леммы 6.2 имеем

$$\nabla T_1 ad_f^k \mathbf{g} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad (6.9)$$

$$\nabla T_1 ad_f^{n-1} \mathbf{g} \neq 0. \quad (6.10)$$

Из этих соотношений можно сделать вывод о том, что система векторов $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_f^{n-1} \mathbf{g}\}$ линейно независима и инвариативна. Инвариативность следует из того, что существует скалярная функция $T_1(\mathbf{x})$, удовлетворяющая $n-1$ уравнениям в частных производных (6.9). Независимость этих векторов можно показать, допустив противное. Действительно, предположим, что эти векторы линейно зависимы. В этом случае скобки Ли более высокого порядка выражаются через скобки Ли более низкого порядка, и для некоторого числа i ($i \leq n-1$) существуют скалярные функции $\alpha_0(\mathbf{x}), \alpha_1(\mathbf{x}), \dots, \alpha_{i-1}(\mathbf{x})$ такие, что справедливо равенство

$$ad_f^i \mathbf{g} = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k ad_f^k \mathbf{g}.$$

Используя это равенство, вычислим скобки Ли $ad_f^{i+1} \mathbf{g}$:

$$ad_f^{i+1} \mathbf{g} = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k ad_f^{k+1} \mathbf{g}.$$

Продолжая эту процедуру вычисления скобок Ли до $(n-1)$ -го порядка, получим

$$ad_f^{n-1} \mathbf{g} = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k ad_f^{k+l} \mathbf{g},$$

где $l = n - i - 1$ ($i - 1 + l = n - 2$). Умножив обе части этого равенства слева на ∇T_1 и учитывая (6.9), получим равенство

$$\nabla T_1 ad_f^{n-1} \mathbf{g} = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \nabla T_1 ad_f^{k+l} \mathbf{g} = 0,$$

которое противоречит (6.10).

Достаточность. Так как система векторов $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_f^{n-1} \mathbf{g}\}$ инвариативна, существует скалярная функция $T_1 = T_1(\mathbf{x})$, удовлетворяющая системе уравнений

$$L_g T_1 = L_{ad_f g} T_1 = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} T_1 = 0. \quad (6.11)$$

Отсюда в силу леммы 6.3 имеем

$$L_g T_1 = L_g L_f T_1 = \dots = L_g L_f^{n-2} T_1 = 0. \quad (6.12)$$

В качестве искомого преобразования состояния примем

$$T_1 = T_1(\mathbf{x}), \quad T_2 = L_f T_1, \quad \dots, \quad T_n = L_f^{n-1} T_1, \quad (6.13)$$

где T_1 — решение системы (6.11). Тогда, учитывая (6.12), получим

$$\begin{aligned}\dot{T}_1 &= \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f} + \mathbf{g}u) = L_f T_1 + L_g T_1 u = T_2, \\ \dot{T}_2 &= \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f} + \mathbf{g}u) = L_f T_2 + L_g T_2 u = T_3 + L_g L_f T_1 u = T_3, \\ \dot{T}_{n-1} &= L_f T_{n-1} + L_g T_{n-1} u = T_n + L_g L_f^{n-2} T_1 u = T_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{T}_n &= L_f T_n + L_g T_n u = L_f^n T_1 + L_g L_f^{n-1} T_1 u.\end{aligned}$$

Таким образом, при преобразовании (6.13) система (6.7а) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{z}_n &= L_f^n T_1 + L_g L_f^{n-1} T_1 u.\end{aligned}$$

Покажем, что $L_g L_f^{n-1} T_1 \neq 0$. Допустим противное: $L_g L_f^{n-1} T_1 = 0$. Тогда в силу (6.11) и леммы 6.3 имеем

$$L_{ad_f^{n-1}g} T_1 = L_g L_f^{n-1} T_1 = 0.$$

Объединяя это равенство с (6.11), получим

$$\nabla T_1 (\mathbf{g} \quad ad_f \mathbf{g} \quad \dots \quad ad_f^{n-1} \mathbf{g}) = 0,$$

или $\nabla T_1 Y = 0$.

Так как $\det Y \neq 0$, то данная система имеет только нулевое решение $\nabla T_1 = 0$. Но в силу теоремы Фробениуса инволютивное множество векторов $\{\mathbf{g} \quad ad_f \mathbf{g} \quad \dots \quad ad_f^{n-1} \mathbf{g}\}$ интегрируемо. Поэтому система уравнений (6.11) имеет решение T_1 , причем ∇T_1 линейно независимо, т. е. $\nabla T_1 \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что $L_g L_f^{n-1} T_1 \neq 0$.

Воспользовавшись преобразованием управления

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} T_1} (-L_f^n T_1 + v),$$

получим $\dot{z}_n = v$. Таким образом, искомое преобразование найдено: исходное нелинейное уравнение преобразовано в систему линейных уравнений в форме Бруновского. Достаточность доказана.

Доказательство достаточности является конструктивным, и на его основе можно сформулировать правило линеаризации обратной связи (ЛЮС) по состоянию:

1) для заданной системы определить матрицу управляемости $Y = \{\mathbf{g} \quad ad_f \mathbf{g} \quad \dots \quad ad_f^{n-2} \mathbf{g}\}$;

2) вычислить $\det Y$ и проверить инволютивность множества векторов, составленного из первых $n-1$ столбцов матрицы управляемости, т. е. множества $\{\mathbf{g} \quad ad_f \mathbf{g} \quad \dots \quad ad_f^{n-2} \mathbf{g}\}$;

3) если $\det Y \neq 0$ и множество $\{\mathbf{g} \quad ad_f \mathbf{g} \quad \dots \quad ad_f^{n-2} \mathbf{g}\}$ инвариантно то определить функцию $T_1(x)$ из соотношений

$$\nabla T_1 ad_f^i \mathbf{g} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2; \quad \nabla T_1 ad_f^{n-1} \mathbf{g} \neq 0; \quad (6.14)$$

4) определить преобразование состояния

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = [T_1(\mathbf{x}) \quad T_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad T_n(\mathbf{x})]^T,$$

где (см. (6.13)) $T_2 = L_f T_1$, $T_3 = L_f^2 T_1$, $\dots$, $T_n = L_f^{n-1} T_1$ и преобразование управления имеет вид

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} T_1} (-L_f^n T_1 + v). \quad (6.15)$$

Пример 6.6. Задана система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3^3 + u, \quad \dot{x}_3 = x_1 + cx_3^3.$$

Требуется произвести линеаризацию обратной связью по состоянию.

Решение. В данном случае $n = 3$ и функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2 \quad x_3^3 \quad x_1 + cx_3^3)^T, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0 \quad 1 \quad 0)^T.$$

1) Найдем матрицу управляемости $Y = (\mathbf{g} \quad ad_f \mathbf{g} \quad ad_f^2 \mathbf{g})$:

$$ad_f \mathbf{g} = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \mathbf{g} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3x_3^2 \\ 1 & 0 & 3cx_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} ad_f^2 \mathbf{g} &= ad_f(ad_f \mathbf{g}) = \frac{d(ad_f \mathbf{g})}{d\mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} ad_f \mathbf{g} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3x_3^2 \\ 1 & 0 & 3cx_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица управляемости имеет вид $Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

2) Детерминант матрицы управляемости отличен от нуля: $\det Y = 1$. Первые два столбца матрицы управляемости являются постоянными и поэтому образуют инвариантное множество.

3) Соотношения (6.14) принимают вид

$$\nabla T_1 \mathbf{g} = \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0,$$

$$\nabla T_1 ad_f \mathbf{g} = - \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1} \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$\nabla T_1 ad_f^2 \mathbf{g} = - \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1} \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \neq 0.$$

Отсюда следует, что T_1 зависит только от x_3 , и в качестве решения этих соотношений примем $T_1 = x_3$.

4) Найдем остальные два компонента преобразования состояния T_2 и T_3 :

$$T_2 = L_f T_1 = \nabla T_1 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^3 \\ x_1 + cx_3^3 \end{pmatrix} = x_1 + cx_3^3,$$

$$T_3 = L_f^2 T_1 = L_f T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3cx_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^3 \\ x_1 + cx_3^3 \end{pmatrix} = x_2 + 3cx_3^2(x_1 + cx_3^3).$$

Итак, преобразование состояния имеет вид

$$z_1 = T_1(x) = x_3, \quad z_2 = T_2 = x_1 + cx_3^3, \quad z_3 = T_3 = x_2 + 3cx_3^2(x_1 + cx_3^3).$$

Для определения преобразования управления нужно определить $L_g L_f^2 T_1$ и $L_f^3 T_1$:

$$L_g L_f^2 T_1 = L_g T_3 = \nabla T_3 \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 3cx_3^2 & 1 & 6cx_3x_1 + 15c^2x_3^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$L_f^3 T_1 = L_f(L_f^2 T_1) = L_f T_3 = \nabla T_3 f =$$

$$= \begin{pmatrix} 3cx_3^2 & 1 & 6cx_3x_1 + 15c^2x_3^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^3 \\ x_1 + cx_3^3 \end{pmatrix} =$$

$$= 3cx_3^2x_2 + x_3^3 + (6cx_3x_1 + 15c^2x_3^4)(x_1 + cx_3^3).$$

Подставив эти выражения в (6.15), получим

$$u = -[3cx_3^2x_2 + x_3^3 + (6cx_3x_1 + 15c^2x_3^4)(x_1 + cx_3^3)] + v.$$

В новых переменных уравнения системы примут вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = v.$$

6.5. Линеаризация обратной связью по выходу

Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad y = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \quad y \in R. \quad (6.16)$$

Рассмотрим задачу слежения за траекторией $y_{\text{ж}}(t)$, которая состоит в определении такого закона управления, при котором ошибка

слежения $e(t) = y(t) - y_{\text{ж}}(t)$ со временем стремится к нулю: $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а остальные переменные ограничены.

Трудность решения данной задачи заключается в том, переменная y не связана с управлением u . Однако может оказаться, что она будет легко разрешимой, если путем преобразования исходной системы удастся получить прямую и простую зависимость между выходом y и входом (управлением) u .

Определение 6.7. *Линеаризацией обратной связью по выходу* называется такое преобразование нелинейной системы (6.16), включающее преобразование обратной связью, при котором в преобразованной системе связь между выходом y и входом u получается линейной.

Пример 6.7. Система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3(x_1 + 1), \quad \dot{x}_3 = x_1 x_2 + u, \quad y = x_1.$$

Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий слежение за траекторией $y_{\text{ж}}(t)$ (остальные переменные ограничены).

Решение. Продифференцируем y столько раз, сколько потребуется для получения прямой зависимости между выходом и входом:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2, \quad \ddot{y} = \dot{x}_2 = x_3(x_1 + 1), \\ \ddot{\ddot{y}} &= \dot{x}_3(x_1 + 1) + x_3 \dot{x}_1 = x_1 x_2 (x_1 + 1) + (x_1 + 1)u + x_2 x_3. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения на основе преобразования

$$u = \frac{1}{(x_1 + 1)} [-x_1 x_2 (x_1 + 1) - x_2 x_3 + v]$$

получим $\ddot{\ddot{y}} = v$. Точка $x_1 = -1$ для этого преобразования является особой: оно в этой точке не определено.

Для определения требуемого закона управления воспользуемся методом обратной задачи динамики. Если потребовать, чтобы ошибка слежения $e = y - y_{\text{ж}}$ изменялась в соответствии с уравнением

$$\ddot{\ddot{e}} + k_1 \ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_3 e = 0,$$

то, найдя отсюда

$$\ddot{\ddot{y}} = \ddot{\ddot{y}}_{\text{ж}} - k_1 \ddot{e} - k_2 \dot{e} - k_3 e$$

и подставив в преобразованное уравнение для выхода, получаем

$$v = \ddot{\ddot{y}}_{\text{ж}} - k_1 \ddot{e} - k_2 \dot{e} - k_3 e.$$

Подставив это выражение в преобразование для управления, находим искомый закон управления

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{(x_1 + 1)} [-x_1 x_2 (x_1 + 1) - x_2 x_3 + \ddot{\ddot{y}}_{\text{ж}} - \\ - k_1 (\ddot{y} - \ddot{y}_{\text{ж}}) - k_2 (\dot{y} - \dot{y}_{\text{ж}}) - k_3 (y - y_{\text{ж}})], \end{aligned}$$

или, после подстановки выражений для выходной переменной и ее

производных,

$$u = -\frac{1}{(x_1 + 1)} [(x_1 + 1)(x_1 x_2 + k_1 x_3) + x_2 x_3 + k_2 x_2 + k_3 x_1 - \ddot{y}_ж - k_1 \dot{y}_ж - k_2 y_ж - k_3 y_ж].$$

В данном примере число дифференцирований для получения явной зависимости между выходом и входом равно порядку системы. Возникают дополнительные проблемы, когда это число меньше порядка системы.

Рассмотрим пример.

Пример 6.8. Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 + (x_2 + 2)x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1^3 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1^4 + u, \quad y = x_1.$$

Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий слежение за траекторией $y_ж(t)$ (остальные переменные ограничены).

Решение. Продифференцируем y столько раз, сколько потребуется для получения прямой зависимости между выходом и входом:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + (x_2 + 2)x_3,$$

$$\ddot{y} = (1 + x_3)\dot{x}_2 + (x_2 + 2)\dot{x}_3 =$$

$$= (1 + x_3)(x_1^3 + x_3) + (x_2 + 2)x_1^4 + (x_2 + 2)u,$$

или

$$\ddot{y} = (1 + x_3)(x_1^3 + x_3) + (x_2 + 2)x_1^4 + (x_2 + 2)u.$$

Из последнего соотношения на основе преобразования

$$u = \frac{1}{x_2 + 2} [-(1 + x_3)(x_1^3 + x_3) - (x_2 + 2)x_1^4 + v]$$

получим

$$\ddot{y} = v.$$

Как в предыдущем примере, воспользуемся методом обратной задачи динамики. Задав желаемый закон изменения ошибки $e = y - y_ж$ в виде

$$\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0, \tag{6.17}$$

получим

$$v = \ddot{y}_ж - k_1 \dot{e} - k_2 e = \ddot{y}_ж - k_1 [x_2 + (x_2 + 2)x_3] - k_2 x_1 + k_1 \dot{y}_ж + k_2 y_ж.$$

Подставив это выражение в преобразование для управления, получим

$$u = -\frac{1}{x_2 + 2} [(1 + x_3)(x_1^3 + x_3) + (x_2 + 2)x_1^4 + k_1 [x_2 + (x_2 + 2)x_3] + k_2 x_1 - \ddot{y}_ж - k_1 \dot{y}_ж - k_2 y_ж].$$

При таком управлении ошибка слежения описывается уравнением (6.17). В силу устойчивости этого уравнения ошибка $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Однако пока нельзя делать вывод о том, что полученный алгоритм управления решает поставленную задачу. Это связано со следующим обстоятельством.

Порядок синтезированной системы совпадает с порядком исходной системы и равен 3, так как найденный алгоритм управления не вносит

дополнительный порядок. В то же время уравнение ошибки (6.17) имеет порядок 2 и описывает часть динамики. Для получения полного описания синтезированной системы необходимо к уравнению (6.17) добавить еще одно уравнение первого порядка, которое описывает так называемую внутреннюю (скрытую) динамику.

Полученный алгоритм управления применим, если внутренняя динамика устойчива. В противном случае координата, характеризующая внутреннюю динамику, и управление могут принимать недопустимо большие значения, что может сопровождаться перегревом двигателей или возникновением сильных вибраций механической части [69].

6.5.1. Относительный порядок. Основным методом получения прямой зависимости между выходом и входом (управлением) является повторное дифференцирование выхода, пока не получится явная зависимость выхода от входа, и последующее преобразование обратной связью.

Число дифференцирований выхода, необходимых для получения явной зависимости между выходом и входом, называется *относительной степенью* или *относительным порядком*. Для вполне управляемой системы относительная степень r не превышает порядка системы n : $r \leq n$.

Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad y = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \quad y \in R, \quad (6.18)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{x})$ — гладкие функции в некоторой области $\Omega \subset R^n$. Продифференцируем выход y по t :

$$\dot{y} = \frac{dh}{dx} \dot{\mathbf{x}} = \frac{dh}{dx} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u] = L_f h + (L_g h)u.$$

Если $L_g h = 0$ для всех $\mathbf{x} \in \Omega$, то дифференцируем выход еще раз:

$$\ddot{y} = \frac{d}{dx} (L_f h) \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dx} (L_f h)(\mathbf{f} + \mathbf{g}u) = L_f^2 h + (L_g L_f h)u.$$

Если $L_g L_f h = 0$, дифференцирование продолжаем, пока не получим $L_g L_f^{r-1} h \neq 0$. Затем, применяя преобразование обратной связью

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f^r h + v),$$

получим линейное уравнение $y^{(r)} = v$.

Как отмечалось, число r дифференцирований выхода, необходимых для появления управления u , называется *относительной степенью* (или *относительным порядком*) системы. Для системы (6.18) это понятие определяется следующим образом.

Определение 6.8. Одномерная система (6.18) имеет *относительную степень* r в области Ω , если для любых $\mathbf{x} \in \Omega$

$$L_g L_f^i h(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-2, \quad (6.19a)$$

$$L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0. \quad (6.19б)$$

Приведенное определение согласуется с интуитивным определением, связанным с числом дифференцирования, и с определением относительной степени (или относительного порядка) линейной системы как разности между степенями знаменателя и числителя ее передаточной функции.

В силу леммы 6.2, если система (6.18) имеет относительную степень r , то в силу (6.19а) и (6.19б)

$$L_{ad_f^j} L_f^k h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j+k \leq r-2, \\ (-1)^j L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0, & j+k = r-1. \end{cases} \quad (6.20)$$

Пример 6.9. Линейная система описывается уравнением

$$y = \frac{b_0 p + b_1}{p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} u \quad (b_0 \neq 0, \quad b_1 \neq 0).$$

Определить относительную степень этой системы в соответствии с определением 6.8.

Решение. В нормальной форме уравнение данной системы имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -(a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3) + u, \quad y = b_1 x_1 + b_0 x_2.$$

Если эти уравнения записать в векторной форме в виде (6.18), то

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -(a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$h(x) = b_1 x_1 + b_0 x_2.$$

Отсюда имеем

$$L_g h = \nabla h g = (b_1 \quad b_2 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$L_f h = \nabla h f = (b_1 \quad b_2 \quad 0) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -(a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3) \end{pmatrix} = b_1 x_2 + b_2 x_3,$$

$$L_g L_f h = \nabla(L_f h) \mathbf{g} = (0 \quad b_1 \quad b_0) \mathbf{g} = b_0 \neq 0.$$

Следовательно, в соответствии с определением 6.8 относительная степень $r = 2$, и она совпадает с относительным порядком передаточной функции, равным разности ее степени знаменателя и степени числителя.

6.5.2. Внешняя и внутренняя динамика. Если относительная степень r меньше порядка системы n ($r < n$), линеаризация обратной связью разбивает уравнение системы на уравнения *внешней* и

или

$$c_1 \nabla h + c_2 \nabla L_f h + \dots + c_r \nabla L_f^{r-1} h = 0. \quad (6.22)$$

Умножим справа обе части последнего равенства на $\mathbf{g}$. Тогда получим

$$c_1 L_g h + c_2 L_g L_f h + \dots + c_r L_g L_f^{r-1} h = 0.$$

В соответствии с соотношениями (6.19а) и (6.19б) в этом равенстве все слагаемые, кроме последнего, равны нулю. Поэтому оно принимает вид $c_r L_g L_f^{r-1} h = 0$. Так как $L_g L_f^{r-1} h \neq 0$, то $c_r = 0$.

Умножим (6.22) справа на $ad_f \mathbf{g}$. Тогда, учитывая, что $c_r = 0$, получим

$$c_1 L_{ad_f g} h + c_2 L_{ad_f g} L_f h + \dots + c_{r-1} L_{ad_f g} L_f^{r-2} h = 0.$$

В соответствии с (6.20) в этом равенстве все слагаемые, кроме последнего, равны нулю. Поэтому имеем $c_{r-1} L_{ad_f g} L_f^{r-2} h = 0$. Так как $L_{ad_f g} L_f^{r-2} h \neq 0$, то отсюда получаем $c_{r-1} = 0$. Продолжая эту процедуру с $ad_f^2 \mathbf{g}$, ..., $ad_f^{r-1} \mathbf{g}$, получим, что все $c_i = 0$. Следовательно, градиенты ∇z_i ($i = 1, 2, \dots, r$) линейно независимы.

Так как система из одного вектора $\mathbf{g}$ инвалютивна, то по теореме Фробениуса существуют $n - 1$ независимых функций λ_k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$), удовлетворяющих системе уравнений

$$L_g \lambda_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.23)$$

Напомним, что скалярные функции λ_k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) независимы, если их градиенты линейно независимы.

Так как функции $z_i = L_f^{i-1} h(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) удовлетворяют этому уравнению (см. (6.19а)) и их градиенты линейно независимы, то они могут быть использованы как функции λ_i ($i = 1, 2, \dots, r - 1$). Другие $n - r$ функций, удовлетворяющих (6.23), примем за переменные $z_{r+1}, \dots, z_n$.

Итак, все переменные выбраны. Однако нужно показать, что градиент функции z_r , которая не удовлетворяет уравнению (6.23), линейно не зависит от градиентов остальных переменных. Допустим противное: градиент ∇z_r линейно выражается через градиенты остальных переменных, т.е. существуют функции $\alpha_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, r - 1, r + 1, \dots, n$) такие, что

$$\nabla z_r = \alpha_1 \nabla z_1 + \dots + \alpha_{r-1} \nabla z_{r-1} + \alpha_{r+1} \nabla z_{r+1} + \dots + \nabla z_n.$$

Умножая справа обе части этого равенства на $\mathbf{g}$, получим

$$L_g z_r = \alpha_1 L_g z_1 + \dots + \alpha_{r-1} L_g z_{r-1} + \alpha_{r+1} L_g z_{r+1} + \dots + L_g z_n.$$

Все слагаемые в правой части полученного равенства равны нулю, так как все они удовлетворяют уравнению (6.23). Поэтому $L_g z_r = 0$, что противоречит условию (см. (6.19б))

$$L_g z_r = L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0.$$

После нахождения $n - r$ решений уравнения (6.23), для того чтобы использовать их в качестве переменных внутренней динамики, нужно убедиться, что их градиенты линейно независимы между собой и с градиентами остальных переменных, т.е. выполняется неравенство

$$\det\left(\frac{dz}{dx}\right) = \det\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right) \neq 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Если полученное преобразование представить в виде $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, то оно, являясь диффеоморфизмом, преобразует систему (6.18) в нормальную форму вида (6.21) с

$$a(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) = L_f^r h(\mathbf{x}) = L_f^r h[\Phi^{-1}(\mathbf{z})], \quad (6.24a)$$

$$b(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) = L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) = L_g L_f^{r-1} h[\Phi^{-1}(\mathbf{z})]. \quad (6.24б)$$

Пример 6.10. Система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = h(\mathbf{x}) = x_3.$$

Произвести линеаризацию обратной связью по выходу.

Решение. Так как $\dot{y} = \dot{x}_3 = x_2$, $\ddot{y} = \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u$, то относительная степень $r = 2$. Поэтому в качестве первых двух новых переменных примем выходную переменную и ее производную: $z_1 = y = x_3$, $z_2 = \dot{y} = x_2$. Третью переменную найдем из уравнения

$$L_g \lambda = \nabla \lambda \mathbf{g} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = 0.$$

Этому уравнению, в частности, удовлетворяет функция $\lambda = x_1$. Примем эту функцию в качестве третьей переменной: $z_3 = x_1$. Убедимся, что выбранные переменные являются независимыми:

$$\det\left(\frac{dz}{dx}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Итак, найденное преобразование имеет вид $\mathbf{z} = (x_3 \ x_2 \ x_1)^T$, а обратное преобразование — вид $\mathbf{x} = (z_3 \ z_2 \ z_1)^T$.

В соответствии с формулой (6.24) имеем

$$a(\mathbf{z}) = L_f^2 h = L_f(L_f h) = L_f x_2 = (0 \ 1 \ 0) \mathbf{f} = x_1 x_2 = z_3 z_2,$$

$$b(\mathbf{z}) = L_g L_f h = \nabla x_2 \mathbf{g} = (0 \ 1 \ 0) \mathbf{g} = 1.$$

Так как $\dot{z}_3 = \dot{x}_1 = -x_1^2 = -z_3^2$, уравнение в новых переменных в нормальной форме (см. (6.21a) и (6.21б)) принимает вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3 z_2 + u, \quad \dot{z}_3 = -z_3^2, \quad y = z_1.$$

Используя преобразование обратной связью $u = -z_3 z_2 + v$, получим

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = v, \quad \dot{z}_3 = -z_3^2.$$

6.6. Нуль-динамика и синтез алгоритмов управления

Линеаризация обратной связью по выходу разбивает уравнения нелинейной системы на уравнения внешней и внутренней динамики. При этом внешняя динамика описывается дифференциальными уравнениями, содержащими управление u , линейно связанное с выходом y . Поэтому легко синтезировать управление u так, чтобы y изменялся нужным образом. Однако синтезированный таким образом закон управления представляет интерес, если внутренняя динамика будет устойчива и соответственно ее координаты ограничены.

6.6.1. Нуль-динамика. Внутренняя динамика описывается последними $n - r$ уравнениями в нормальной форме (6.216): $\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \mathbf{w}(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)})$. В общем случае эти уравнения зависят от внешнего состояния $\mathbf{z}^{(1)}$. Однако когда управление таково, что выход тождественно равно нулю ($y \equiv 0$), внутренняя динамика не зависит от переменных внешнего состояния.

Определение 6.9. *Нуль-динамикой нелинейной системы* называют ее динамику при условии, что выход тождественно равно нулю ($y \equiv 0$).

Так как при $y \equiv 0$ все производные по времени выхода равны нулю, уравнение нуль-динамики в нормальной форме (6.21) имеет вид

$$\dot{\mathbf{z}}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \mathbf{w}(\mathbf{0}, \mathbf{z}^{(2)}).$$

Управление, требующееся для поддержания условия $\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{0}$, получается из соотношения

$$\dot{z}_r = \alpha(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) + b(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}) u = 0$$

и имеет вид

$$u = -\frac{a(\mathbf{0}, \mathbf{z}^{(2)})}{b(\mathbf{0}, \mathbf{z}^{(2)})}.$$

Рассмотрение нуль-динамики связано с тем, что в общем случае нуль-динамика описывается более простыми уравнениями, чем внутренняя динамика, и в то же время исследование нуль-динамики позволяет судить об устойчивости внутренней динамики.

Как увидим дальше, для задачи слежения локальная (неглобальная) экспоненциальная устойчивость нуль-динамики гарантирует устойчивость внутренней динамики, если желаемая траектория и ее производная до $(r - 1)$ -го порядка принимают малые значения. В случае стабилизации локальная асимптотическая устойчивость нуль-динамики гарантирует асимптотическую устойчивость внутренней динамики.

Нуль-динамика является внутренним свойством нелинейной системы, а ее устойчивость не зависит от выбора закона управления $u = u(\mathbf{z}^{(1)}, y_{\text{ж}})$ и желаемой траектории.

Исследование устойчивости нуль-динамики намного проще исследования устойчивости внутренней динамики, так как нуль-динамика включает только внутренние координаты, в то время как внутренняя динамика связана с внешней динамикой и желаемой траекторией.

Если относительная степень нелинейной системы равна ее порядку, то линеаризация обратной связью по выходу полностью линеаризует систему, и нелинейная задача синтеза сводится к линейной. Если же относительная степень меньше порядка системы, то линеаризация обратной связью по выходу только частично линеаризует систему, и пригодность синтезированного на основе линейной модели закона управления зависит от устойчивости внутренней динамики. Изучение внутренней динамики может быть упрощено, если его заменить изучением нуль-динамики.

6.6.2. Синтез алгоритма стабилизации. Пусть точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является положением равновесия системы (6.18): $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Следующая теорема указывает на то, что если нуль-динамика асимптотически устойчива, то регулятор, синтезированный на основе линейной части, может стабилизировать систему в целом.

Теорема 6.4. Пусть система (6.18) имеет относительную степень $r < n$ и линеаризованная (путем разложения в ряд Тейлора) модель ее нуль-динамики асимптотически устойчива.

Тогда если полином

$$Q(\lambda) = \lambda^r + \alpha_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad (6.25)$$

устойчив, то закон управления

$$u = -\frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (L_f^r h + \alpha_{r-1} L_f^{r-1} h + \dots + \alpha_1 L_f h + \alpha_0 h) \quad (6.26)$$

обеспечивает локальную асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Доказательство. В новых координатах замкнутая система управления может быть представлена в виде

$$\dot{\mathbf{z}}^{(1)} = A_{11}\mathbf{z}^{(1)}, \quad (6.27a)$$

$$\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = w(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}),$$

где

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{r-1} \end{bmatrix}.$$

Уравнение внутренней динамики после линеаризации путем разложения его правой части в ряд Тейлора можно преобразовать к виду

$$\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = A_{21}\mathbf{z}^{(1)} + A_{22}\mathbf{z}^{(2)}. \quad (6.27b)$$

Отсюда для линеаризованной модели нуль-динамики имеем

$$\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = A_{22}\mathbf{z}^{(2)}.$$

Линеаризованная модель всей системы описывается уравнением

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}^{(1)} \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^{(1)} \\ \mathbf{z}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином уравнения (6.27а), описывающего внешнюю динамику, или, что то же, матрицы A_{11} , совпадает с устойчивым полиномом (6.25). Характеристический полином линеаризованной модели всей системы имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det A_{11} \det A_{22}$$

и будет устойчив, если устойчивым будет характеристический полином $\det A_{22}$ линеаризованной модели нуль-динамики. Но тогда исходная нелинейная система в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по линеаризованной модели будет асимптотически устойчива. Теорема доказана.

6.6.3. Синтез алгоритма управления в задаче слежения.

Управление (6.26) легко можно распространить на задачу слежения, включив в него величину, определяющую желаемое движение.

Пусть $y_{\text{ж}}(t)$ определяет желаемую траекторию. Для ошибки слежения и ее производных по времени введем обозначения

$$e_i = \overset{(i)}{y} - \overset{(i)}{y}_{\text{ж}}, \quad e = e_0 = y - y_{\text{ж}} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r).$$

При законе управления

$$u = -\frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (L_f^r h - \overset{(r)}{y}_{\text{ж}} + \alpha_{r-1} e_{r-1} + \dots + \alpha_1 e_1 + \alpha_0 e_0) \quad (6.28)$$

уравнение замкнутой системы примет вид

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = A_{11}\bar{\mathbf{e}}, \quad \dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \mathbf{w}(\bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{y}}_{\text{ж}}, \mathbf{z}^{(2)}), \quad (6.29)$$

где $\bar{\mathbf{e}} = (e_0 \ e_1 \ \dots \ e_{r-1})^T$, $\bar{\mathbf{y}}_{\text{ж}} = (y_{\text{ж}} \ \dot{y}_{\text{ж}} \ \dots \ \overset{(r-1)}{y}_{\text{ж}})^T$.

Теорема 6.5. Пусть система (6.18) имеет относительную степень $r < n$ и нуль-динамика экспоненциально устойчива.

Тогда если полином (6.25) устойчив и желаемая траектория $y_{\text{ж}}(t)$ и ее $r-1$ производных достаточно малы, то управление (6.28) обеспечивает сходимость к нулю ошибки слежения при неограниченном увеличении времени и ограниченность переменных внутренней динамики:

$$e(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty; \quad |\mathbf{z}^{(2)}| < \delta \quad (\delta > 0).$$

Доказательство. Так как внешняя динамика системы (6.29), представляющая устойчивую линейную систему, экспоненциально устойчива, то ошибка слежения $e(t)$ сходится к нулю экспоненциально. Поэтому достаточно показать, что внутреннее состояние $\mathbf{z}^{(2)}$ остается ограниченным, когда $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Для этого воспользуемся прямым методом Ляпунова. Но прежде всего отметим следующее.

а) Так как по условию $y_{\text{ж}}(t)$ и ее $r - 1$ производных достаточно малы (ограничены), то существует положительное число δ_1 такое, что $|\bar{y}_{\text{ж}}| < \delta_1$.

б) Так как $\mathbf{w}(\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)})$ — гладкая функция, то выполняется условие Липшица

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}(\bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{y}}_{\text{ж}}, \mathbf{z}^{(2)}) - \mathbf{w}(\mathbf{0}, \mathbf{z}^{(2)})| &\leq l_w |\bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{y}}_{\text{ж}}| \leq \\ &\leq l_w (|\bar{\mathbf{e}}| + |\bar{\mathbf{y}}_{\text{ж}}|) \leq l_w (|\bar{\mathbf{e}}| + \delta_1). \end{aligned}$$

в) Так как нуль-динамика экспоненциально устойчива, то согласно теореме Красовского (см. гл. 7) для нее существуют функция Ляпунова и положительные числа c_1, c_2, c_3, c_4 такие, что справедливы неравенства

$$c_1 |\mathbf{z}^{(2)}|^2 \leq V_2(\mathbf{z}^{(2)}) \leq c_2 |\mathbf{z}^{(2)}|^2,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{z}^{(2)}} \mathbf{w}(\mathbf{0}, \mathbf{z}^{(2)}) \leq -c_3 |\mathbf{z}^{(2)}|^2, \quad \left| \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{z}^{(2)}} \right| \leq c_4.$$

Функцию Ляпунова для системы (6.29) будем искать в виде

$$V(\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{z}^{(2)}) = \bar{\mathbf{e}}^T P \bar{\mathbf{e}} + \mu V_2(\mathbf{z}^{(2)}),$$

где P — положительно определенная матрица, удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$A_{11}^T P + P A_{11} = -I,$$

μ — положительная постоянная. Как было установлено выше, матрица A_{11} является устойчивой. Поэтому положительно определенная матрица P , удовлетворяющая уравнению Ляпунова, существует. Производная искомой функции Ляпунова по времени в силу уравнения (6.29) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\bar{\mathbf{e}}}^T P \bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{e}}^T P \dot{\bar{\mathbf{e}}} + \mu \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{z}^{(2)}} \dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \\ &= \bar{\mathbf{e}}^T (A^T P + P A) \bar{\mathbf{e}} + \mu \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{z}^{(2)}} \mathbf{w}(\bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{y}}_{\text{ж}}, \mathbf{z}^{(2)}) \end{aligned}$$

и с учетом уравнения Ляпунова может быть преобразована к виду

$$\dot{V} = -|\bar{\mathbf{e}}|^2 + \mu \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{z}^{(2)}} [\mathbf{w}(\bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{y}}_{\text{ж}}, \mathbf{z}^{(2)}) - \mathbf{w}(\mathbf{0}, \mathbf{z}^{(2)})] + \mu \frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{z}^{(2)}} \mathbf{w}(\mathbf{0}, \mathbf{z}^{(2)}).$$

Используя приведенные выше неравенства, для производной $\dot{V}$

получаем следующую оценку сверху:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -|\bar{\mathbf{e}}|^2 + c_4\mu|\mathbf{z}^{(2)}|l_w(|\bar{\mathbf{e}}| + \delta_1) - c_3\mu|\mathbf{z}^{(2)}|^2 = \\ &= -\frac{3}{4}|\bar{\mathbf{e}}|^2 - \frac{3}{4}\mu c_3|\mathbf{z}^{(2)}|^2 - \left(\frac{|\bar{\mathbf{e}}|}{2} - \mu c_4 l_w |\mathbf{z}^{(2)}|\right)^2 + \\ &\quad + (\mu c_4 l_w |\mathbf{z}^{(2)}|)^2 - \mu c_3 \left(\frac{|\mathbf{z}^{(2)}|}{2} - \frac{c_4 l_w \delta_1}{c_3}\right)^2 + \mu \frac{c_4^2 l_w^2}{c_3} \delta_1^2.\end{aligned}$$

Положив $\mu = c_3/(4c_4^2 l_w^2)$, получим

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\frac{3}{4}|\bar{\mathbf{e}}|^2 - \frac{c_3^2}{8c_4^2 l_w^2}|\mathbf{z}^{(2)}|^2 - \left(\frac{|\bar{\mathbf{e}}|}{2} - \frac{c_3}{4c_4 l_w}|\mathbf{z}^{(2)}|\right)^2 - \\ &\quad - \frac{c_3^2}{4c_4^2 l_w^2} \left(\frac{|\mathbf{z}^{(2)}|}{2} - \frac{c_4 l_w \delta_1}{c_3}\right)^2 + \frac{\delta_1^2}{4}.\end{aligned}$$

Исключив два отрицательных слагаемых (третий и четвертый), последнее неравенство можно представить в виде

$$\dot{V} \leq -\frac{3}{4}|\bar{\mathbf{e}}|^2 - \frac{c_3^2}{8c_4^2 l_w^2}|\mathbf{z}^{(2)}|^2 + \frac{\delta_1^2}{4}.$$

Отсюда следует, что производная $\dot{V} < 0$, когда $|\bar{\mathbf{e}}|$ и $|\mathbf{z}^{(2)}|$ принимают большие значения. Следовательно, переменные внутреннего состояния ограничены.

В общем случае устойчивость нуль-динамики гарантирует только локальную устойчивость (устойчивость в малом) системы управления, синтезированной на основе линеаризации обратной связью по выходу.

Задачи

1. Вычислить производные Ли 1-го и 2-го порядков функции $h(\mathbf{x})$ по векторной функции $f(\mathbf{x})$, если $h(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})$ имеют следующий вид:

- а) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2 \quad x_1 + x_2)^T$;
- б) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2 + x_1^3 \quad x_1 - x_2^3)^T$;
- в) $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2 \quad x_3 \quad x_1 - 2x_2 - x_3^3)^T$.

2. Вычислить скобки Ли 1-го и 2-го порядков функций $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, имеющих следующий вид:

- а) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0 \quad 1)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2^2 \quad x_1)^T$;
- б) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0 \quad 2)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2^2 \quad x_1^3)^T$;
- в) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (1 \quad 0)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2 \quad x_1^2)^T$;
- г) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (0 \quad 0 \quad 1)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2 + e^{-x_2} x_3 \quad x_3 \quad 0)^T$.

3. Показать линеаризуемость обратной связью по состоянию и определить соответствующие линеаризующие преобразования сле-

дующих систем:

а) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1^2 + u$; б) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1^3 + 2u$;

в) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + 2u$; г) $\dot{x}_1 = x_2^2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$;

д) $\dot{x}_1 = x_2 + u$, $\dot{x}_2 = x_1^2$; е) $\dot{x}_1 = x_2 + u$, $\dot{x}_2 = x_1^2 x_2$.

4. Показать, что система

$$\dot{x}_1 = x_2 + e^{-x_2} x_3, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u$$

линеаризуема обратной связью по состоянию.

5. Показать, что система

$$\dot{x}_1 = x_2 + e^{-x_3} x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u$$

не линеаризуема обратной связью по состоянию.

Глава 7

СИСТЕМЫ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА

При рассмотрении систем управления большой размерности широко используются методы, сводящие исследование исходной системы к исследованию более простых моделей. Такими методами являются принцип (метод) сравнения, метод декомпозиции и др.

Метод сравнения состоит в том, что вместо исходной системы рассматривается более простая система, или модель сравнения. Система сравнения определяется следующим образом. Пусть задан некоторый показатель J , который характеризует качество или устойчивость системы и который будем называть *показателем сравнения*. Этот показатель может быть числом или функцией. Если $J_{\text{и}}$ обозначает выбранный показатель исходной системы и $J_{\text{с}}$ — показатель системы сравнения, то систему сравнения выбирают так, чтобы выполнялось условие

$$J_{\text{и}} \leq J \quad \text{или} \quad J_{\text{и}} \geq J$$

при любом $t \geq t^*$ (t^* — фиксированное число). Естественно, система сравнения тем лучше отражает свойство исходной системы по заданному показателю, чем меньше по абсолютной величине разность между показателями исходной системы и системы сравнения при соблюдении заданного выше неравенства. Однако главным критерием при выборе системы сравнения является ее простота, возможность ее исследования доступными средствами.

В качестве показателя сравнения можно принять показатель качества систем управления, в частности им может быть время регулирования. А. А. Фельдбаум для оценки времени регулирования использовал миноранту и мажоранту. Напомним, что для функции $f(t)$, если она удовлетворяет условию

$$f_m(t) \leq f(t) \leq f_M(t) \quad \forall t \geq t_0,$$

$f_m(t)$ называется *минорантой*, $f_M(t)$ — *мажорантой*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (7.1)$$

у которого все корни характеристического уравнения являются действительными. Как показал А. А. Фельдбаум, для решения такого дифференциального уравнения при начальных условиях $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$, ..., $y^{(n-1)}(0) = 0$ функция $y_M(t) = y_0 e^{-\eta t}$, где η — степень устойчивости, является минорантой, а функция

$$y_M(t) = y_0 e^{-\eta t} \left[1 + \frac{\eta t}{1!} + \dots + \frac{(\eta t)^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

— мажорантой. Пользуясь указанными минорантой и мажорантой, можно получить нижнюю и верхнюю оценки для времени регулирования системы управления, которая описывается уравнением (7.1).

7.1. Дифференциальные неравенства

Принцип сравнения основывается на дифференциальных неравенствах. В этом параграфе рассмотрим две теоремы, связанные с дифференциальными неравенствами.

Теорема 7.1. Если непрерывная и дифференцируемая функция $v = v(t)$ подчиняется неравенству

$$\dot{v}(t) \leq f(v, t), \quad (7.2)$$

где $f(v, t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(v', t) - f(v'', t)| \leq L|v' - v''| \quad (7.3)$$

(L — константа), то решение $w(t)$ уравнения

$$\dot{w} = f(w, t), \quad (7.4)$$

для которого в начальный момент выполняется условие $v(t_0) \leq w(t_0)$, удовлетворяет неравенству

$$v(t) \leq w(t) \quad \forall t \geq t_0. \quad (7.5)$$

Доказательство. Докажем от противного. Допустим при некотором $t' > t_0$ выполняется неравенство

$$v(t') > w(t'),$$

или

$$\Delta(t') = v(t') - w(t') > 0.$$

Так как функции $v(t)$ и $w(t)$ непрерывны и в начальный момент времени $\Delta(t_0) \leq 0$, то наступит такой момент времени $t_1 \in [t_0, t']$, когда $\Delta(t_1) = 0$, и при $t_1 < t \leq t'$

$$\Delta(t) > 0. \quad (7.6)$$

Вычитая из неравенства (7.2) уравнение (7.4) и учитывая условие (7.3), на интервале $t_1 < t \leq t'$ получим

$$\dot{v}(t) - \dot{w}(t) \leq f(v, t) - f(w, t) \leq L \Delta(t),$$

или

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} \leq L \Delta(t).$$

Проинтегрировав последнее неравенство от t_1 до t , получим

$$\ln \Delta(t) \Big|_{t_1}^t \leq L(t - t_1),$$

или

$$\Delta(t) \leq \Delta(t_1)e^{L(t-t_1)} = 0,$$

что противоречит неравенству (7.6). Теорема доказана.

Теорема 7.2. Пусть элементы матрицы $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) на главной диагонали произвольны, а вне главной диагонали неотрицательны:

$$a_{ij} \geq 0, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (7.7)$$

Тогда если функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ ($\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, 0) = \mathbf{x}^0$) удовлетворяет неравенству

$$\dot{\mathbf{x}} \leq A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad (7.8)$$

то решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}^0, t)$ уравнения

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in R^n, \quad (7.9)$$

при начальном условии $\mathbf{y}(\mathbf{x}^0, 0) = \mathbf{x}^0$ подчиняется неравенству

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t) \leq \mathbf{y}(\mathbf{x}^0, t), \quad t \geq 0. \quad (7.10)$$

Матрицы, у которых элементы вне главной диагонали неотрицательны, т.е. удовлетворяют условию (7.7), детально изучались Л. А. Метцлером и называются *М-матрицами* [16].

Доказательство. Введем в рассмотрение уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}(t),$$

где $\boldsymbol{\varphi}(t) \leq 0$ при $t \geq 0$. Решения этого уравнения и уравнения (7.9) согласно формуле Коши имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t) &= e^{At}\mathbf{x}^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau, \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}^0, t) &= e^{At}\mathbf{x}^0. \end{aligned}$$

Для доказательства неравенства (7.10) достаточно показать, что $\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau \leq 0$ или что $e^{As} \geq 0$ при $s = t - \tau \geq 0$, так как $\boldsymbol{\varphi}(t) \leq 0$.

Сначала покажем это для случая, когда в (7.7) выполняется строгое неравенство

$$a_{ij} > 0, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (7.11)$$

В соответствии с определением матричной экспоненты имеем

$$e^{As/N} = I + A \frac{s}{N} + \frac{1}{2!} A^2 \left(\frac{s}{N}\right)^2 + \dots$$

Если N достаточно велико, знаки элементов главной диагонали будут определяться первым членом разложения, т.е. единичной матрицей I , а знаки остальных элементов — вторым членом разложения. Следовательно, все элементы матрицы $e^{As/N}$ и соответственно матрицы $e^{As} = (e^{As/N})^N$ будут положительны: $e^{As} > 0$. Так как матричная экспонента является непрерывной функцией элементов матрицы A , то при замене условия (7.11) на условие (7.7) получим $e^{As} \geq 0$, что и требовалось доказать.

7.2. Экспоненциальная устойчивость.

Теорема Красовского

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{X}(\mathbf{0}, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad (7.12)$$

где правая часть является гладкой функцией: она непрерывно дифференцируема в области

$$|\mathbf{x}| < \rho, \quad 0 < t < \infty \quad (\rho = \text{const или } \rho = \infty), \quad (7.13)$$

частные производные $\partial X_i / \partial x_j$ удовлетворяют условию

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right| < L, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (L = \text{const}). \quad (7.14)$$

Решение уравнения (7.12) при начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, как обычно, будем обозначать $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$: $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_0) = \mathbf{x}^0$.

Определение 7.1. Положение равновесия (или невозмущенное движение) $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ системы (7.12) называется *экспоненциально устойчивым*, если существуют положительные постоянные α и M такие, что при $|\mathbf{x}^0| < \rho/M$ возмущенное движение $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ удовлетворяет условию

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \leq M |\mathbf{x}^0| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0. \quad (7.15)$$

Если условие (7.15) выполняется при любых начальных условиях, то положение равновесия системы (7.12) называется *глобально экспоненциально устойчивым* или *экспоненциально устойчивым в целом*. Если линейная стационарная система устойчива, то она экспоненциально устойчива в целом.

Теорема 7.3 (теорема Красовского). Если положение равновесия системы (7.12) экспоненциально устойчиво, то существуют функция Ляпунова $V(\mathbf{x}, t)$ и положительные постоянные c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) такие, что выполняются неравенства

$$c_1 |\mathbf{x}|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq c_2 |\mathbf{x}|^2, \quad (7.16a)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x}, t) \leq -c_3 |\mathbf{x}|^2, \quad (7.16б)$$

$$\left| \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right| \leq c_4 |\mathbf{x}|. \quad (7.16в)$$

В случае экспоненциально устойчивой линейной стационарной или нестационарной системы существует квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ или $V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T B(t) \mathbf{x}$, удовлетворяющая условию теоремы Красовского. В случае экспоненциально устойчивой нелинейной системы соответствующая функция Ляпунова может быть неквадратичной формой.

При доказательстве теоремы Красовского используются две леммы, которые сейчас рассмотрим.

Лемма 7.1. *Решение $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ уравнения (7.12) удовлетворяет условию*

$$|\mathbf{x}^0|^2 e^{-2L(t-t_0)} \leq |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| \leq |\mathbf{x}^0|^2 e^{2L(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (7.17)$$

где L — постоянная, которая входит в (7.14).

Доказательство. По теореме о среднем значении $X_i(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)^* x_i$, где звездочка сбоку производной обозначает ее значение в средней точке $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ($x_i^* \in [0, x_i]$). Поэтому имеем

$$x_i \dot{x}_i = x_i X_i(\mathbf{x}, t) = x_i \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)^* x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Используя условие (7.14), получаем

$$|x_i \dot{x}_i| = \left| \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)^* \right| x_i^2 \leq L x_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Суммируя это соотношение от 1 до n , получим

$$\sum_{i=1}^n |x_i \dot{x}_i| \leq L |\mathbf{x}|^2.$$

Используя это неравенство, находим

$$\left| \frac{1}{2} \frac{d|\mathbf{x}|^2}{dt} \right| = \left| \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{x}^T \mathbf{x})}{dt} \right| = |\mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}}| = \left| \sum_{i=1}^n x_i \dot{x}_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i \dot{x}_i| \leq L |\mathbf{x}|^2.$$

Это неравенство можем записать в виде

$$-2L |\mathbf{x}|^2 \leq \frac{d|\mathbf{x}|^2}{dt} \leq 2L |\mathbf{x}|^2.$$

Интегрируя это неравенство от t_0 до t , получаем (7.17).

Лемма 7.2. *Решение $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ уравнения (7.12) удовлетворяет условию*

$$\left| \frac{\partial x_i(\mathbf{x}^0, t)}{\partial x_j^0} \right| \leq N e^{2nL(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (7.18)$$

где N — положительная постоянная.

Доказательство. Подставив в уравнение (7.12) его решение $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$, получим тождество

$$\dot{x}_i(\mathbf{x}^0, t) = X_i(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Продифференцировав это тождество по x_j^0 , получим

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j^0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^0},$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^0}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right| \leq \left| \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| \left| \frac{\partial x_k}{\partial x_j^0} \right|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Если в какой-либо точке t' функция $f(t) = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right|$ недифференцируема, то в этой точке под производной понимается

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{f(t' + \Delta t) - f(t')}{\Delta t}.$$

Просуммировав последнее неравенство от $i = 1$ до $i = n$, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| \left| \frac{\partial x_k}{\partial x_j^0} \right|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Введя обозначение $\varphi_j(t) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right|$ и используя условие (7.14), последнее неравенство можем представить в виде

$$\frac{d\varphi_j(t)}{dt} \leq nL \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial x_k}{\partial x_j^0} \right|,$$

или

$$\frac{d\varphi_j(t)}{\varphi_j(t)} \leq nL dt.$$

Проинтегрировав последнее неравенство от t_0 до t , получим

$$\varphi_j(t) \leq N e^{nL(t-t_0)} \quad (N = \varphi_j(t_0)).$$

Используя это неравенство, находим

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right| = \varphi_j(t) \leq N e^{nL(t-t_0)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7.3. Введем обозначение $T = \frac{1}{\alpha} \ln(M\sqrt{2})$, где α , M — постоянные, которые входят в (7.15).

Рассмотрим функцию $V(\mathbf{x}, t)$, которая определяется следующим образом:

$$V(\mathbf{x}^0, t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, \tau)|^2 d\tau. \quad (7.19)$$

Функция $V(\mathbf{x}, t)$ получается из функции $V(\mathbf{x}^0, t_0)$ подстановкой $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$ и $t_0 = t$. Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы. Используя (7.15) и (7.19), получаем

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}^0, t_0) &= \int_{t_0}^{t_0+T} |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, \tau)|^2 d\tau \leq \int_{t_0}^{t_0+T} M^2 |\mathbf{x}^0|^2 e^{-2\alpha(\tau-t_0)} d\tau = \\ &= -M^2 |\mathbf{x}^0|^2 \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha(\tau-t_0)} \Big|_{t_0}^{t_0+T} = M^2 |\mathbf{x}^0|^2 \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha T}) = c_2 |\mathbf{x}^0|^2. \end{aligned}$$

Используя неравенство (7.17), находим

$$V(\mathbf{x}^0, t_0) \geq \int_{t_0}^{t_0+T} |\mathbf{x}^0|^2 e^{-2L(\tau-t_0)} d\tau = |\mathbf{x}^0|^2 \frac{1}{2L} (1 - e^{-2LT}) = c_1 |\mathbf{x}^0|^2.$$

Из полученных неравенств следует, что функция $V(\mathbf{x}^0, t_0)$ удовлетворяет условию

$$c_1 |\mathbf{x}^0|^2 \leq V(\mathbf{x}^0, t_0) \leq c_2 |\mathbf{x}^0|^2.$$

Подставив сюда $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$, получим (7.16а).

Для получения соотношения (7.16б) вычислим производную по времени функции $V(\mathbf{x}^0, t_0)$ в силу (7.12), подставив вместо $\mathbf{x}^0$ решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$ и $t_0 = t$:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_t^{t+T} |\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), \tau)|^2 d\tau = \\ &= |\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t+T)|^2 - |\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t)|^2 + \int_t^{t+T} \frac{d}{dt} |\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), \tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Функция $\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), \tau)$ представляет траекторию изображающей точки, которая в момент $\tau = t$ стартует из точки $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$, а функция $\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t + \Delta t), \tau)$ — траекторию изображающей точки, которая в момент $\tau = t + \Delta t$ стартует из точки $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t + \Delta t)$. И так как эти траектории при $\tau \geq t + \Delta t$ должны совпадать, то $\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), \tau) = \mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t + \Delta t), \tau)$ и соответственно

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), \tau)|^2 = 0.$$

Поэтому производная функции Ляпунова принимает вид

$$\frac{dV(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t)}{dt} = |\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t+T)|^2 - |\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t)|^2. \quad (7.20)$$

В силу (7.15) имеем

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t+T)| \leq M |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)| e^{-\alpha T}.$$

Используя тождество $e^{\gamma \ln z} = z^\gamma$ и полагая $\alpha T = \ln(M\sqrt{2})$, находим

$$e^{-\alpha T} = e^{-\ln(M\sqrt{2})} = \frac{1}{M\sqrt{2}}.$$

С учетом этого равенства последнее неравенство можно преобразовать к виду

$$|\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t + T|^2 \leq \frac{1}{2} |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)|^2.$$

И так как $\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t = \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)$, то из соотношения (7.20), получаем

$$\frac{dV(\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t), t)}{dt} \leq \frac{1}{2} |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)|^2 - |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)|^2 = -\frac{1}{2} |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t)|^2.$$

Поскольку $\mathbf{x}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}(t)$, то, положив в последнем неравенстве $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$ и $c_3 = 1/2$, получим неравенств (7.16б).

Для доказательства справедливости последнего неравенства (7.16в) продифференцируем соотношение (7.19) по x_j^0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\mathbf{x}^0, t_0)}{\partial x_j^0} &= \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\partial}{\partial x_j^0} |\mathbf{x}(\mathbf{x}^0, \tau)|^2 d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} 2\mathbf{x}^T(\mathbf{x}^0, \tau) \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, \tau)}{\partial x_j^0} d\tau = \int_{t_0}^{t_0+T} 2 \sum_{i=1}^n x_i(x^0, \tau) \frac{\partial x_i(\mathbf{x}^0, \tau)}{\partial x_j^0} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенства (7.15) и (7.18), получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V(\mathbf{x}^0, t_0)}{\partial x_j^0} \right| &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} 2 \sum_{i=1}^n |x_i(x^0, \tau)| \left| \frac{\partial x_i(\mathbf{x}^0, \tau)}{\partial x_j^0} \right| d\tau \leq \\ &\leq 2nMN |\mathbf{x}^0| \int_{t_0}^{t_0+T} e^{(nL-\alpha)(\tau-t_0)} d\tau = \frac{2nMN |\mathbf{x}^0|}{nL-\alpha} (e^{(nL-\alpha)T} - 1) = C |\mathbf{x}^0|. \end{aligned}$$

Если возвести обе части неравенства в квадрат и просуммировать, изменяя j от 1 до n , то получим

$$\left| \frac{\partial V(\mathbf{x}^0, t_0)}{\partial \mathbf{x}^0} \right|^2 \leq nC^2 |\mathbf{x}^0|^2,$$

или

$$\left| \frac{\partial V(\mathbf{x}^0, t_0)}{\partial \mathbf{x}^0} \right|^2 \leq c_4 |\mathbf{x}^0| \quad (c_4 = \sqrt{n} C).$$

Подставив в это неравенство $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$ и $t_0 = t$, получим (7.16в).

Функция (7.19) является положительно определенной функцией, и ее производная по времени в силу уравнения (7.12) является отрицательно определенной (см. (7.16б)). Теорема доказана.

Лемма 7.3. Производная квадратичной формы $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ по $\mathbf{x}$ удовлетворяет условию

$$2\lambda_m^B |\mathbf{x}| \leq \left| \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right| \leq 2\lambda_M^B |\mathbf{x}|,$$

где λ_m^B, λ_M^B — минимальное и максимальное собственные значения матрицы B .

Доказательство. Найдем производную квадратичной формы по $\mathbf{x}$:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \frac{d(\mathbf{x}^T B \mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T B.$$

Отсюда получаем

$$\left| \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|^2 = 2\mathbf{x}^T B (2\mathbf{x}^T B)^T = 4\mathbf{x}^T D \mathbf{x},$$

где $D = BB^T$. Если минимальное и максимальное собственные значения матрицы D обозначить λ_m^D и λ_M^D соответственно, то согласно лемме 4.1 (см. (4.1)) имеем

$$\lambda_m^D |\mathbf{x}|^2 \leq \mathbf{x}^T D \mathbf{x} \leq \lambda_M^D |\mathbf{x}|^2.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$4\lambda_m^D |\mathbf{x}|^2 \leq \left| \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|^2 \leq 4\lambda_M^D |\mathbf{x}|^2,$$

или

$$2\sqrt{\lambda_m^D} |\mathbf{x}| \leq \left| \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right| \leq 2\sqrt{\lambda_M^D} |\mathbf{x}|.$$

Теперь достаточно показать, что собственные значения λ_i^D матрицы D равны квадрату собственных значений λ_i^B матрицы B : $\lambda_i^D = (\lambda_i^B)^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Так как B является симметрической матрицей, существует неособая матрица T такая, что произведение $T^{-1}BT$ представляет собой диагональную матрицу

$$\text{diag}(\lambda_1^B, \lambda_2^B, \dots, \lambda_n^B) = T^{-1}BT,$$

где λ_i^B ($i = 1, 2, \dots, n$) — собственные значения матрицы B . Возведя в квадрат это равенство, получим

$$\begin{aligned} \text{diag}(\lambda_1^B, \lambda_2^B, \dots, \lambda_n^B)^2 &= \text{diag}[(\lambda_1^B)^2, (\lambda_2^B)^2, \dots, (\lambda_n^B)^2] = \\ &= T^{-1}BBT = T^{-1}DB. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что собственные значения матрицы D равны квадратам собственных значений матрицы B , что и требовалось доказать.

Теорема 7.3а. Если линейная стационарная система $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ устойчива, а положительно определенная квадратичная форма $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ является ее функцией Ляпунова и производная от нее по времени в силу уравнения системы принимает вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T C \mathbf{x},$$

то в качестве констант c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в соотношениях (7.16) можно принять

$$c_1 = \lambda_m^B, \quad c_2 = \lambda_M^B, \quad c_3 = \lambda_m^C, \quad c_4 = \lambda_M^B,$$

т. е. функция Ляпунова удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\lambda_m^B |\mathbf{x}|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_M^B |\mathbf{x}|^2, \quad (7.21a)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) \leq -\lambda_m^C |\mathbf{x}|^2, \quad (7.21б)$$

$$\left| \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right| \leq 2\lambda_M^B |\mathbf{x}|, \quad (7.21в)$$

где λ_m^B , λ_M^B — минимальное и максимальное собственные значения матрицы B , λ_m^C — минимальное собственное значение матрицы C .

Доказательство. Неравенство (7.21a) непосредственно следует из леммы 4.1 (см. (4.1)). С помощью этой леммы также получаем неравенство (7.21б): $\lambda_m^C |\mathbf{x}|^2 \leq \mathbf{x}^T C \mathbf{x}$, или $w(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T C \mathbf{x} \leq -\lambda_m^C |\mathbf{x}|^2$. Неравенство (7.21в) следует из леммы 7.3.

7.3. Декомпозиция и децентрализация

Обычно системы большой размерности состоят из нескольких подсистем или их условно можно разбить на несколько искусственных подсистем. Поэтому основным методом исследования систем большой размерности является *метод декомпозиции* — метод, при котором исходная система разбивается на несколько более простых естественных или искусственных подсистем. Эти подсистемы получаются зависимыми. Далее, пренебрегая взаимосвязями, получают независимые подсистемы. После этого каждая из подсистем анализируется отдельно и для каждой из них строится регулятор. Затем производится агрегирование — объединение подсистем в одну систему с учетом отброшенных связей и последующее исследование.

7.3.1. Декомпозиция. Рассмотрим декомпозицию, состоящую в разбиении системы большой размерности на подсистемы меньшей размерности. Такую декомпозицию называют *объектной* или *структурной декомпозицией* [45].

Пусть исходная система S описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^l. \quad (7.22)$$

И пусть она разбивается на r подсистем S_k ($k = 1, 2, \dots, r$): уравнение (7.22) представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{X}^k(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}, t) + \mathbf{h}^k(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k+1)}, \dots, \mathbf{x}^{(r)}), \\ \mathbf{x}^{(k)} \in R^{n_k}, \quad \mathbf{u}^{(k)} \in R^{l_k}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Здесь $\mathbf{x}^{(k)}$ — вектор состояния и $\mathbf{u}^{(k)}$ — вектор управления подсистемы S_k . В правой части уравнения (7.23) первое слагаемое описывает

динамику k -й подсистемы, а второе слагаемое — взаимосвязь между системами. Если пренебречь взаимосвязью, то получим r независимых подсистем:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{X}^k(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}, t), \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (7.24)$$

Для того чтобы можно было пренебречь слагаемым $\mathbf{h}^k$, оно должно оказывать слабое влияние на решение уравнения (7.23), т.е. оно должно быть мало по сравнению первым слагаемым $\mathbf{X}^k$.

Возможны два способа декомпозиции: физический и математический. Физический способ используется, когда система S получена из подсистем S_k путем их объединения. В этом случае уравнения (7.23) представляют собой уравнения подсистем, составленные с учетом их взаимосвязи. Математический способ используется, когда система S не содержит в явном виде подсистемы S_k . В этом случае чтобы уменьшить слагаемое $\mathbf{h}^k$, которым на первом этапе пренебрегают, перед декомпозицией целесообразно произвести преобразование фазовых координат.

Пример 7.1. Выделить две подсистемы в системе, которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0,3 & 0,2 & 8 \\ 0,2 & 5 & 4 & 0,5 \\ 0,2 & 5 & 7 & 0,1 \\ 6 & 0,4 & 0,5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Решение. Чтобы уменьшить в уравнениях подсистем слагаемые, определяющие взаимосвязь, произведем преобразование вектора состояния: $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$. В новых переменных уравнение системы примет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = A'\mathbf{y}, \quad A' = T^{-1}AT.$$

Пусть преобразование T состоит в последовательной перемене мест первой и третьей строк, а затем первого и третьего столбцов:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0,3 & 0,2 & 8 \\ 0,2 & 5 & 4 & 0,5 \\ 0,2 & 5 & 7 & 0,1 \\ 6 & 0,4 & 0,5 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,2 & 5 & 7 & 0,1 \\ 0,2 & 5 & 4 & 0,5 \\ 5 & 0,3 & 0,2 & 8 \\ 6 & 0,4 & 0,5 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A' = \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 5 & 0,2 & 0,1 \\ 4 & 5 & 0,2 & 0,5 \\ \hline 0,2 & 0,3 & 5 & 8 \\ 0,5 & 0,4 & 6 & 9 \end{array} \right].$$

Представим матрицу A' в виде блочной матрицы, разбив ее на четыре блока так, как это показано пунктирными линиями:

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Используя элементы этой блочной матрицы, уравнение в новых переменных можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}^{(1)} &= A_{11}\mathbf{y}^{(1)} + A_{12}\mathbf{y}^{(2)}, \\ \dot{\mathbf{y}}^{(2)} &= A_{22}\mathbf{y}^{(2)} + A_{21}\mathbf{y}^{(1)},\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Чтобы закончить решение, нужно найти преобразование $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$.

Перестановка местами любых двух строк $(n \times n)$ -матрицы C (например, i -й и j -й строк) равносильна умножению этой матрицы слева на матрицу

$$E_{i,j}^n = \begin{matrix} & \begin{matrix} (i) & (j) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} (i) \\ (j) \end{matrix} \end{matrix},$$

а перестановка любых двух столбцов $(n \times n)$ -матрицы C (например, i -го и j -го столбцов) равносильна умножению этой матрицы справа на матрицу $E_{i,j}^n$ [21]. Если дважды умножить матрицу C слева на матрицу $E_{i,j}^n$, то получим матрицу C . Следовательно, имеем $E_{i,j}^n E_{i,j}^n = I$, или $E_{i,j}^n = (E_{i,j}^n)^{-1}$.

Из изложенного следует, что матрица A' получается из матрицы A умножением ее слева и справа на матрицу

$$E_{1,3}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому можем записать $A' = E_{1,3}^4 A E_{1,3}^4 = (E_{1,3}^4)^{-1} A E_{1,3}^4$. И так как $A' = T^{-1} A T$, то получаем

$$T = E_{1,3}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = T y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^l.$$

[illegible]
$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u, \quad \tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B,$$
$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} b^{(1)} & 0_1 & \dots & 0_1 \\ 0_2 & b^{(2)} & \dots & 0_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_l & 0_l & \dots & b^{(l)} \end{bmatrix}, \quad b^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Пример 7.2. Дана система уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + 2u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_2 + 3u_1 + u_2.\end{aligned}$$

Решение. Воспользуемся преобразованием Луенбергера. В данном случае матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Примем $n_1 = 2$ и $n_2 = 1$. Тогда имеем

$$AB^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad T = [B^{(1)} \quad AB^{(1)} \quad B^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 8 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для матриц преобразованного уравнения получаем

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Уравнения в новых переменных в скалярной форме принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - z_3 + u_1, \\ \dot{z}_2 &= z_1 + z_2 + z_3, \\ \dot{z}_3 &= u_2. \end{aligned}$$

7.3.3. Децентрализация по входу. Пусть система после декомпозиции описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{(k)} &= \mathbf{X}^k(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k+1)}, \dots, \mathbf{x}^{(r)}), \\ \mathbf{x}^{(k)} &\in R^{n_k}, \quad \mathbf{u} \in R^l. \end{aligned}$$

В данном случае подсистема S_k ($k = 1, 2, \dots, r$) зависит не от локального векторного управления $\mathbf{u}^{(k)}$, а от вектора управления всей системы. В таких случаях говорят, что система управления является *системой централизованного управления*. В системе, которая описывается уравнением (7.23), подсистема S_k ($k = 1, 2, \dots, r$) зависит только от локального векторного управления $\mathbf{u}^k$. Такие системы называют *системами децентрализованного управления*.

Для того чтобы можно было синтезировать локальные регуляторы для каждой подсистемы отдельно, нужно произвести децентрализацию по управлению (входу). Рассмотрим порядок децентрализации по входу линейной системы, которая в общем случае описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^l. \quad (7.26)$$

Децентрализация по управлению производится поэтапно следующим образом.

1. Производится декомпозиция, и уравнение (7.26) представляется в виде

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = A_k \mathbf{x}^{(k)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r A_{kj} \mathbf{x}^{(j)} + B_k \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}^{(k)} \in R^{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (7.27)$$

где A_k — $(n_k \times n_k)$ -матрица, A_{kj} — $(n_k \times n_j)$ -матрица, B_k — $(n_k \times l)$ -матрица. Эта декомпозиция может быть произведена произвольно. Однако должны быть соблюдены следующие два условия: во-первых, размерность вектора $\mathbf{x}^{(k)}$ не должна быть меньше размерности вектора управления l : $n_k \geq l$; во-вторых, пара (A_k, B_k)

должна быть вполне управляема, т.е. ранг матрицы управляемости

$$Y_k = [B_k \quad A_k B_k \quad \dots \quad (A_k)^{n_k-1} B_k], \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (7.28)$$

должен быть равен n_k . С другой стороны, чтобы иметь дело с более простыми подсистемами, числа n_k должны быть примерно одинаковыми.

2. Подсистему S_k разбивают на l подсистем S_k^i ($i = 1, 2, \dots, l$) так, чтобы каждая подсистема S_k^i включала не более одной управляющей координаты u_i . Для того чтобы такая декомпозиция подсистемы S_k была возможна, используют преобразование Луненбергера. Если разность подсистемы S_k^i обозначить n_{ki} ($i = 1, 2, \dots, l$), то матрица T_k преобразования Луненбергера $\mathbf{x}^k = T_k \bar{\mathbf{z}}^k$ имеет вид (см. (7.25))

$$T_k = \begin{bmatrix} B_k^{(1)} & A_k B_k^{(1)} & \dots & (A_k)^{n_{k1}-1} B_k^{(1)} & \dots \\ & & & & \\ & & & B_k^{(l)} & A_k B_k^{(l)} & \dots & (A_k)^{(n_{kl}-1)} B_k^{(l)} \end{bmatrix}, \quad (7.29)$$

где $B_k^{(i)}$ — i -й столбец матрицы B_k .

3. Подсистемы S_k^i , содержащие одну и ту же управляющую координату u_i , объединяют и получают подсистему $\bar{S}_i$.

Пример 7.3. Система описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^5, \quad \mathbf{u} \in R^2,$$

где

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{array} \right].$$

Требуется произвести декомпозицию и децентрализацию.

Решение. 1. Произведем декомпозицию. Разобьем матрицы A и B на блоки так, как это показано пунктирной линией. Используя блочные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

уравнения системы можно записать в виде уравнений двух подсистем:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1 \mathbf{x}^{(1)} + A_{12} \mathbf{x}^{(2)} + B_1 \mathbf{u},$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_{21} \mathbf{x}^{(1)} + A_2 \mathbf{x}^{(2)} + B_2 \mathbf{u},$$

где $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1 \ x_2)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (x_3 \ x_4 \ x_5)^T$. Блочные матрицы имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Проверим управляемость подсистем. Для этого вычислим их матрицы управляемости

$$Y_1 = [B_1 \quad A_1 B_1], \quad Y_2 = [B_2 \quad A_2 B_2 \quad (A_2)^2 B_2].$$

Размерности первой и второй подсистем соответственно равны $n_1 = 2$ и $n_2 = 3$. Поэтому они будут вполне управляемы, если ранг матрицы управляемости Y_1 равен 2, а ранг матрицы управляемости Y_2 равен 3. Ранг матрицы управляемости Y_1 равен 2, так как уже ранг матрицы B_1 равен 2. Для произведений матриц, входящих в матрицу управляемости Y_2 , имеем

$$A_2 B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(A_2)^2 B_2 = A_2 (A_2 B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 17 \\ 8 & 3 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости Y_2 имеет вид

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & 8 & 15 & 17 \\ 1 & 0 & 4 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 12 & 15 \end{bmatrix}.$$

Определитель, составленный из первых трех столбцов, отличен от нуля. Следовательно, ранг матрицы управляемости Y_2 равен 3, и вторая подсистема вполне управляема.

2. Произведем преобразование Луенбергера. Так как размерность первой подсистемы совпадает с размерностью вектора управления, то $n_{11} = n_{12} = 1$, и матрица T_1 преобразования Луенбергера $\mathbf{x}^{(1)} = T_1 \mathbf{z}^{(1)}$ для нее совпадает с матрицей B_1 (см. (7.29)):

$$T_1 = B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad T_1^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Размерность второй подсистемы равна $n_2 = 3$. Положим $n_{21} = 2$ и $n_{22} = 1$. Тогда матрица T_2 преобразования Луенбергера $\mathbf{x}^{(2)} = T_2 \mathbf{z}^{(2)}$ имеет вид (см. (7.29))

$$T_2 = [B_2^{(1)} \quad A_2 B_2^{(1)} \quad B_2^{(2)}],$$

где $B_2^{(1)}$ и $B_2^{(2)}$ — первый и второй столбцы матрицы B_2 . Так как

$$B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

то

$$T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad T_2^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 12 & -17 & -8 \\ -3 & 2 & 2 \\ -6 & 10 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы преобразованных уравнений

$$\dot{\mathbf{z}}^{(1)} = \tilde{A}_1 \mathbf{z}^{(1)} + \tilde{A}_{12} \mathbf{z}^{(2)} + \tilde{B}_2 \mathbf{u},$$

$$\dot{\mathbf{z}}^{(2)} = \tilde{A}_{21} \mathbf{z}^{(1)} + \tilde{A}_2 \mathbf{z}^{(2)} + \tilde{B}_2 \mathbf{u}$$

имеют вид

$$\tilde{A}_1 = T_1^{-1} A_1 T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{12} = T_1^{-1} A_{12} T_2 = \begin{bmatrix} 12,5 & 32,25 & 13 \\ 1,5 & 2,75 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_1 = T_1^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = T_2^{-1} A_2 T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5,78 & 3,44 \\ 1 & 0,56 & 0,89 \\ 0 & -0,22 & -2,5 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{21} = T_2^{-1} A_{21} T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,78 \\ 0 & 0,44 \\ 0 & 2,22 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = T_2^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме уравнения в новых переменных принимают вид

$$\dot{z}_1 = -z_1 + 11 z_2 + 12,5 z_3 + 32,35 z_4 + 13 z_5 + u_1,$$

$$\dot{z}_2 = -4 z_2 + 1,5 z_3 + 2,75 z_4 + 2 z_5 + u_2,$$

$$\dot{z}_3 = z_1 - 0,78 z_2 + 5,78 z_4 + 3,44 z_5 + u_1,$$

$$\dot{z}_4 = 0,44 z_2 + z_3 + 0,56 z_4 + 0,89 z_5,$$

$$\dot{z}_5 = 2,22 z_2 - 0,22 z_4 - 2,5 z_5 + u_2.$$

3. Объединим уравнения, содержащие одинаковые управления, в одну подсистему. При этом уравнение, не содержащее управление, включим в подсистему, содержащую управление u_1 :

$$S_1: \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + 11 z_2 + 12,5 z_3 + 32,35 z_4 + 13 z_5 + u_1, \\ \dot{z}_3 = z_1 - 0,78 z_2 + 5,78 z_4 + 3,44 z_5 + u_1, \\ \dot{z}_4 = 0,44 z_2 + z_3 + 0,56 z_4 + 0,89 z_5; \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{z}_2 = -4 z_2 + 1,5 z_3 + 2,75 z_4 + 2 z_5 + u_2, \\ \dot{z}_5 = 2,22 z_2 - 0,22 z_4 - 2,5 z_5 + u_2. \end{cases}$$

Для упорядочения переменных произведем еще одно преобразование:

$$z_1 = \bar{z}_1, \quad z_2 = \bar{z}_4, \quad z_3 = \bar{z}_2, \quad z_4 = \bar{z}_3, \quad z_5 = \bar{z}_5.$$

Тогда уравнения подсистем примут вид

$$S_1: \begin{cases} \dot{\bar{z}}_1 = -\bar{z}_1 + 12,5 \bar{z}_2 + 32,35 \bar{z}_3 + 11 \bar{z}_4 + 13 \bar{z}_5 + u_1, \\ \dot{\bar{z}}_2 = \bar{z}_1 + 5,78 \bar{z}_3 - 0,78 \bar{z}_4 + 3,44 \bar{z}_5 + u_1, \\ \dot{\bar{z}}_3 = \bar{z}_2 + 0,56 \bar{z}_3 - 0,44 \bar{z}_4 + 0,89 \bar{z}_5; \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{\bar{z}}_4 = 1,5 \bar{z}_2 + 2,75 \bar{z}_3 - 4 \bar{z}_4 + 2 \bar{z}_5 + u_2, \\ \dot{\bar{z}}_5 = -0,22 \bar{z}_3 + 2,22 \bar{z}_4 - 2,5 \bar{z}_5 + u_2. \end{cases}$$

7.4. Векторные функции Ляпунова

После анализа и синтеза подсистем их объединяют в одну систему с учетом отброшенных взаимосвязей. При этом возникает задача исследования устойчивости объединенной системы. При решении этой задачи используется метод векторной функции Ляпунова. Согласно этому методу на основе векторной функции Ляпунова, которая формируется из функций Ляпунова подсистем, строится система сравнения, с помощью которой исследуется устойчивость агрегированной (объединенной) системы.

Впервые векторные функции Ляпунова для исследования устойчивости рассмотрели Р. Беллман [66] и В. М. Матросов [44]. Р. Беллман исследовал систему, состоящую из двух подсистем. Ф. Н. Беилей [65] обобщил предложенный Р. Беллманом метод на более сложные системы.

7.4.1. Норма матрицы. Дальше в этой параграфе используется норма матрицы. Вкратце остановимся на этом понятии.

Пусть A — произвольная прямоугольная $(m \times n)$ -матрица и задано преобразование

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{y} \in R^m.$$

В пространствах R^n и R^m определены нормы $\|\mathbf{x}\|$ и $\|\mathbf{y}\|$ соответственно. *Норма матрицы* A определяется следующим образом [21]:

$$\|A\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in R^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (7.30)$$

Здесь $\|A\mathbf{x}\|$ — норма вектора $A\mathbf{x}$ в пространстве R^m .

Норма матрицы A определяется как самой матрицей A , так и теми векторными нормами, которые введены в пространствах R^n и R^m . При изменении норм в этих пространствах изменяется норма матрицы. Если в пространствах R^n и R^m введены евклидовы нормы

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|\mathbf{y}\| = |\mathbf{y}| = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2},$$

то норму матрицы A будем называть *евклидовой*.

Из определения нормы следует неравенство

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|. \quad (7.31)$$

Для $(m \times n)$ -матриц A и B при одном и том же определении векторных норм справедливо неравенство

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Пусть λ — число. Справедливо равенство

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|.$$

Если определены нормы $(m \times l)$ -матрицы A , $(l \times n)$ -матрицы B и их произведения AB , то справедливо соотношение

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Утверждение 7.1. *Евклидова норма матрицы A равна квадратному корню из максимального собственного значения λ_M произведения матриц $A^T A$:*

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_M}. \quad (7.32)$$

Доказательство. В соответствии с определением евклидовой нормы матрицы A имеем

$$\|A\| = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in R^n \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x} \in R^n} \frac{\sqrt{(A\mathbf{x})^T A\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} = \max_{\mathbf{x} \in R^n} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|}.$$

Согласно леммы 4.1 квадратичная форма $\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x}$ принимает максимальное значение $\lambda_M |\mathbf{x}|^2$. Подставив это значение в последнее равенство, получим (7.32).

7.4.2. Устойчивость агрегированной системы. Рассмотрим систему, которая после декомпозиции описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{(k)} &= \mathbf{X}^k(\mathbf{x}^{(k)}, t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r H_{kj} x^{(j)} \quad (\mathbf{X}^k(0, t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq t_0), \\ k &= 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (7.33)$$

где H_{kj} — числовая $(n_k \times n_j)$ -матрица. Если пренебречь взаимосвязями, то получим r независимых подсистем S_k ($k = 1, 2, \dots, r$), которые описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{X}^k(\mathbf{x}^{(k)}, t) \quad (\mathbf{X}^k(0, t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq t_0), \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (7.34)$$

Пусть каждая из этих подсистем обладает функцией Ляпунова $V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)$, которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$c_{k1} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 \leq V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t) \leq c_{k2} |\mathbf{x}^{(k)}|^2, \quad (7.35a)$$

$$\dot{V}_k(\mathbf{x}^{(k)}, t) \leq -c_{k3} |\mathbf{x}^{(k)}|^2, \quad (7.35b)$$

$$\left| \frac{\partial V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)}{\partial \mathbf{x}^{(k)}} \right| \leq c_{k4} |\mathbf{x}^{(k)}|. \quad (7.35в)$$

В (7.35б) $\dot{V}_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)$ являются производными по времени в силу уравнений (7.34). Так как эти производные отрицательно определены, подсистемы S_k ($k = 1, 2, \dots, r$) асимптотически устойчивы. Кроме того, в силу условия (7.35а) функция $V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)$ имеет бесконечно большой нижний предел. Поэтому подсистемы S_k ($k = 1, 2, \dots, r$) асимптотически устойчивы в целом. В случае когда подсистемы являются линейными стационарными, имеет место экспоненциальная устойчивость. Согласно теореме 7.3, если подсистемы экспоненциально устойчивы, то выполняется соотношение (7.35). Однако в общем случае выполнение соотношений (7.35) не гарантирует экспоненциальную устойчивость.

Теорема 7.4. Пусть подсистемы (7.34) обладают функциями Ляпунова $V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t)$, удовлетворяющими соотношениям (7.35), и элементы матрицы $D = (d_{ki})$ ($k, i = 1, 2, \dots, r$), составленные из констант c_{ki} , входящих в соотношения (7.35), и евклидовых норм матриц взаимосвязи H_{ki} из (7.33), имеют вид

$$d_{ki} = \begin{cases} -\frac{c_{k3}}{2c_{k2}}, & k = i, \\ (c_{k4})^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \|H_{kj}\|^2 / (2c_{k3}c_{i1}), & k \neq i. \end{cases} \quad (7.36)$$

Тогда если положение равновесия $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ системы

$$\dot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in R^r, \quad (7.37)$$

асимптотически устойчиво, то положение равновесия

$$\mathbf{x} = \{(\mathbf{x}^{(1)})^T (\mathbf{x}^{(2)})^T \dots (\mathbf{x}^{(r)})^T\}^T = \mathbf{0}$$

агрегированной системы (7.33) асимптотически устойчиво.

Система (7.37) является системой сравнения для агрегированной системы (7.33). С ее помощью исследование устойчивости системы (7.33) n -го порядка $\left(n = \sum_{k=1}^r n_k\right)$ сводится к исследованию устойчивости линейной стационарной системы r -го порядка.

Ниже при доказательстве теоремы 7.4 используется неравенство

$$-az^2 + bz \leq -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a} \quad (a > 0, b > 0, z \geq 0), \quad (7.38)$$

которое доказывается следующим образом. Умножим обе части неравенства на -1 и перенесем многочлен из правой части в левую. Тогда получим

$$\frac{a}{2}z^2 - bz + \frac{b^2}{2a} \geq 0,$$

или

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{a}z - \frac{b}{\sqrt{a}} \right)^2 \geq 0.$$

Доказательство теоремы 7.4. Производная по времени функции $V_k(\mathbf{x}, t)$ в силу уравнений (7.34) имеет вид

$$(\dot{V}_k)_{(34)} = \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}^k} \mathbf{X}^k(\mathbf{x}^{(k)}, t) + \frac{\partial V_k}{\partial t}.$$

Производная по времени функции $V_k(\mathbf{x}, t)$ в силу уравнений (7.33) имеет вид

$$\begin{aligned} (\dot{V}_k)_{(33)} &= \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}^k} \left[\mathbf{X}^k(\mathbf{x}^{(k)}, t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r H_{kj} \mathbf{x}^{(j)} \right] + \frac{\partial V_k}{\partial t} = \\ &= (\dot{V}_k)_{(34)} + \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}^k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r H_{kj} \mathbf{x}^{(j)}. \end{aligned}$$

Используя соотношения (7.35б), (7.35в) и (7.31), получим

$$\begin{aligned}
 (\dot{V}_k)_{(33)} &= (\dot{V}_k)_{(34)} + \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}^{(k)}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r H_{kj} \mathbf{x}^{(j)} \leq \\
 &\leq -c_{k3} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 + \left| \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}^{(k)}} \right| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r |H_{kj} \mathbf{x}^{(j)}| \leq \\
 &\leq -c_{k3} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 + c_{k4} |\mathbf{x}^{(k)}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \|H_{kj}\| |\mathbf{x}^{(j)}|.
 \end{aligned}$$

Далее, используя неравенство (7.38), полагая в нем

$$a = c_{k3}, \quad b = c_{k4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \|H_{kj}\| |\mathbf{x}^{(j)}|, \quad z = |\mathbf{x}^{(k)}|,$$

а также неравенство Коши–Шварца (4.19), найдем

$$\begin{aligned}
 (\dot{V}_k)_{(33)} &\leq -c_{k3} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 + c_{k4} |\mathbf{x}^{(k)}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \|H_{kj}\| |\mathbf{x}^{(j)}| \leq \\
 &\leq -\frac{c_{k3}}{2} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 + \frac{(c_{k4})^2}{2c_{k3}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \|H_{kj}\| |\mathbf{x}^{(j)}| \right)^2 \leq \\
 &\leq -\frac{c_{k3}}{2} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 + \frac{(c_{k4})^2}{2c_{k3}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \|H_{kj}\|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r |\mathbf{x}^{(j)}|^2.
 \end{aligned}$$

Из (7.35а) получаем

$$-|\mathbf{x}^{(k)}|^2 \leq -\frac{1}{c_{k2}} V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t), \quad |\mathbf{x}^{(k)}|^2 \leq \frac{1}{c_{k1}} V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t).$$

Поэтому последнее соотношение можем записать в виде

$$(\dot{V}_k)_{(33)} \leq -\frac{c_{k3}}{2c_{k2}} V_k(\mathbf{x}^{(k)}, t) + \frac{(c_{k4})^2}{2c_{k3}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \|H_{kj}\|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \|H_{kj}\|^2 \frac{V_j(\mathbf{x}^{(j)}, t)}{c_{j1}}.$$

Используя векторную функцию Ляпунова

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = [V_1(\mathbf{x}^{(1)}, t) \ V_2(\mathbf{x}^{(2)}, t) \ \dots \ V_r(\mathbf{x}^{(r)}, t)]^T,$$

эти неравенства при $k = 1, 2, \dots, r$ можно представить в векторном виде:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) \leq D\mathbf{V}(\mathbf{x}, t),$$

или

$$\dot{\mathbf{V}}(t) \leq D\bar{\mathbf{V}}(t),$$

где $\bar{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t), t)$, $\mathbf{x}(t)$ — решение системы уравнений (7.33). Пусть $\mathbf{z}(t)$ — решение уравнения (7.37) при начальном условии $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t_0), t_0)$. Тогда согласно теореме 7.2 выполняется неравенство

$$\bar{\mathbf{V}}(t) \leq \mathbf{z}(t), \quad t \geq t_0.$$

Так как положение равновесия $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ системы (7.37) асимптотически устойчиво, то $\mathbf{z}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$. И в силу того, что все компоненты векторной функции Ляпунова являются положительно определенными функциями, $\bar{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t), t) \rightarrow 0$ и соответственно $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

7.4.3. Критерий устойчивости М-матриц. Матрица D уравнения системы сравнения обладает специфическим свойством: все ее элементы, расположенные вне ее главной диагонали, являются неотрицательными. Такие матрицы, как отмечалось, называются *М-матрицами*.

Критерий Севастьянова–Котелянского [16]. Если $(n \times n)$ -матрица $C = (c_{ij})$ является М-матрицей, т. е. $c_{ij} \geq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$; $i \neq j$), то для того чтобы вещественные части всех ее собственных значений были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_k = (-1)^k \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.39)$$

Если вещественные части всех собственных значений квадратной матрицы отрицательны, то такая матрица называется *устойчивой*. Поэтому критерий Севастьянова–Котелянского является критерием устойчивости М-матриц. Соотношение (7.39) называют *условием Севастьянова–Котелянского* [16].

Необходимое условие устойчивости М-матриц. Для того чтобы М-матрица $C = (c_{ij})$ была устойчива, необходимо, чтобы все ее элементы главной диагонали были отрицательны: $c_{ii} < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Пример 7.4. Исследовать устойчивость системы, состоящей из следующих трех подсистем:

$$\begin{aligned} S_1: \quad & \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = -8x_1^{(1)} - 10x_2^{(1)} + 0,2x_2^{(2)} + 0,1x_1^{(3)}, \\ \dot{x}_2^{(1)} = -5x_1^{(1)} - 10x_2^{(1)} + 0,2x_2^{(3)}; \end{cases} \\ S_2: \quad & \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = -(4 + \sin^2 t)x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + 0,2x_2^{(3)}, \\ \dot{x}_2^{(2)} = -2x_1^{(2)} - (2 + e^{-t})x_2^{(2)} + 0,2x_1^{(1)}; \end{cases} \\ S_3: \quad & \dot{x}_1^{(3)} = -4x_1^{(3)} - \sin x_1^{(3)} + 0,2x_2^{(1)}. \end{aligned}$$

Решение. В векторной форме приведенная система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} S_1: \dot{\mathbf{x}}^{(1)} &= A_1 \mathbf{x}^{(1)} + H_{12} \mathbf{x}^{(2)} + H_{13} x^{(3)}, \\ S_2: \dot{\mathbf{x}}^{(2)} &= A_2 \mathbf{x}^{(2)} + H_{21} \mathbf{x}^{(1)} + H_{23} x^{(3)}, \\ S_3: \dot{x}^{(3)} &= -4x^{(3)} - \sin x^{(3)} + H_{31} x^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, \quad H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ & \quad H_{13} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -(4 + \sin^2 t) & 1 \\ -2 & -(2 + e^{-t}) \end{bmatrix}, \\ & \quad H_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(3)} &= x_1^{(3)}, \quad H_{31} = (0 \quad 0,2). \end{aligned}$$

Если пренебречь взаимосвязями, то получим

$$\begin{aligned} \bar{S}_1: \dot{\mathbf{x}}^{(1)} &= A_1 \mathbf{x}^{(1)}, \\ \bar{S}_2: \dot{\mathbf{x}}^{(2)} &= A_2 \mathbf{x}^{(2)}, \\ \bar{S}_3: \dot{x}^{(3)} &= -4x_1^{(3)} - \sin x_1^{(3)}. \end{aligned}$$

Для подсистемы $\bar{S}_1$ функцию Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы

$$V_1 = (\mathbf{x}^{(1)})^T B_1 \mathbf{x}^{(1)}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 > 0.$$

Производная по времени функции V_1 в силу уравнения подсистемы $\bar{S}_1$ имеет вид

$$\dot{V}_1 = 2(\mathbf{x}^{(1)})^T B_1 \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = 2(\mathbf{x}^{(1)})^T B_1 A_1 \mathbf{x}^{(1)} = -(\mathbf{x}^{(1)})^T \bar{C}_1 \mathbf{x}^{(1)},$$

где

$$\bar{C}_1 = -2B_1 A_1 = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 5\alpha_1 & 10\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем и выразим производную $\dot{V}_1$ с помощью симметрической матрицы:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -(\mathbf{x}^{(1)})^T \bar{C}_1 \mathbf{x}^{(1)} = -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(1)})^T (\bar{C}_1 + \bar{C}_1^T + \bar{C}_1 - \bar{C}_1^T) \mathbf{x}^{(1)} = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(1)})^T (\bar{C}_1 + \bar{C}_1^T) \mathbf{x}^{(1)} - \frac{1}{2} (\mathbf{x}^{(1)})^T (\bar{C}_1 - \bar{C}_1^T) \mathbf{x}^{(1)}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в полученном выражении равно нулю, так как

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{(1)})^T (\overline{C}_1 - \overline{C}_1^T) \mathbf{x}^{(1)} &= [(x^{(1)})^T (\overline{C}_1 - \overline{C}_1^T) \mathbf{x}^{(1)}]^T = \\ &= -(\mathbf{x}^{(1)})^T (\overline{C}_1 - \overline{C}_1^T) \mathbf{x}^{(1)}. \end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$\dot{V}_1 = -(\mathbf{x}^{(1)})^T C_1 \mathbf{x}^{(1)},$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} (\overline{C}_1 + \overline{C}_1^T) = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 5\alpha_1 & 10\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 5\alpha_1 \\ 10 & 10\alpha_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 10 + 5\alpha_1 \\ 10 + 5\alpha_1 & 20\alpha_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для того чтобы производная $\dot{V}_1$ была отрицательно определенной, согласно критерию Сильвестра необходимо и достаточно, чтобы

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 16 & 10 + 5\alpha_1 \\ 10 + 5\alpha_1 & 20\alpha_1 \end{vmatrix} = 220\alpha_1 - 100 - 25\alpha_1^2 > 0.$$

Это неравенство будет выполнено, в частности, при $\alpha_1 = 1$. При этом имеем

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица B_1 является диагональной, то ее собственные значения совпадают с диагональными элементами. И, следовательно, ее минимальное и максимальное собственные значения равны единице: $\lambda_m^{B_1} = \lambda_M^{B_1} = 1$.

Найдем собственные значения матрицы C_1 . Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det (C_1 - I\lambda) = \begin{vmatrix} 16 - \lambda & 15 \\ 15 & 20 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 36\lambda + 95 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = 2,9$ и $\lambda_2 = 33,1$. Следовательно, минимальное и максимальное собственные значения матрицы C_1 равны $\lambda_m^{C_1} = m_1 = 2,9$ и $\lambda_M^{C_1} = \lambda_2 = 33,1$.

Согласно теореме 7.3а имеем

$$c_{11} = \lambda_m^{B_1} = 1, \quad c_{12} = \lambda_M^{B_1} = 1, \quad c_{13} = \lambda_m^{C_1} = 2,9, \quad c_{14} = 2\lambda_M^{B_1} = 2.$$

Для подсистемы $\overline{S}_2$ функцию Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы

$$V_2 = (x^{(2)})^T B_2 x^{(2)}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 > 0.$$

Производная по времени функции V_2 в силу уравнения подсисте-

мы $\bar{S}_2$ имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= 2(\mathbf{x}^{(2)})^T B_2 \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = 2(\mathbf{x}^{(2)})^T B_2 A_2 \mathbf{x}^{(2)} = \\ &= 2(\mathbf{x}^{(2)})^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(4 + \sin^2 t) & 1 \\ -2 & -(2 + e^{-t}) \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(2)} = \\ &= -2[(4 + \sin^2 t)(x_1^{(2)})^2 + (2\alpha_2 - 1)x_1^{(2)}x_2^{(2)} + (2 + e^{-t})\alpha_2(x_2^{(2)})^2].\end{aligned}$$

Если положить $\alpha_2 = 1/2$, то производная $\dot{V}_2$ принимает вид

$$\dot{V}_2 = -2\left[(4 + \sin^2 t)(x_1^{(2)})^2 + \frac{1}{2}(2 + e^{-t})(x_2^{(2)})^2\right],$$

и является отрицательно определенной. При этом матрица B_2 принимает вид

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

и ее минимальное и максимальное собственные значения равны $\lambda_m^{B_2} = 1/2$ и $\lambda_M^{B_2} = 1$.

Так как

$$2\left[(4 + \sin^2 t)(x_1^{(2)})^2 + \frac{1}{2}(2 + e^{-t})(x_2^{(2)})^2\right] \geq 2[(x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(2)})^2],$$

то $\dot{V}_2 \leq -2|x^{(2)}|^2$. Поэтому имеем (см. (7.21a), (7.21b) и (7.166))

$$c_{21} = \lambda_m^{B_2} = 1/2, \quad c_{22} = \lambda_M^{B_2} = 1, \quad c_{23} = 2, \quad c_{24} = 2\lambda_M^{B_2} = 2.$$

Для подсистемы $\bar{S}_3$ функцией Ляпунова является $V_3 = (x^{(3)})^2 = (x_1^{(3)})^2$. Действительно, производная от этой функции по времени в силу уравнения подсистемы $\bar{S}_3$ имеет вид

$$\dot{V}_3 = 2x_1^{(3)}\dot{x}_1^{(3)} = 2x_1^{(3)}(-4x^{(3)} - \sin x^{(3)}) = -2[4(x_1^{(3)})^2 + x_1^{(3)}\sin x_1^{(3)}]$$

и отрицательно определена. Функцию Ляпунова можно представить виде $V_3 = x^{(3)}B_3x^{(3)}$, где $B_3 = 1$. Собственное значение матрицы B_3 равно единице, поэтому $\lambda_m^{B_3} = 1$, $\lambda_M^{B_3} = 1$. И так как производная $\dot{V}_3$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_3 \leq -6(x_1^{(3)})^2,$$

то имеем

$$c_{31} = \lambda_m^{B_3} = 1, \quad c_{32} = \lambda_M^{B_3} = 1, \quad c_{33} = 6, \quad c_{34} = 2\lambda_M^{B_3} = 2.$$

Согласно формуле (7.36), чтобы определить элементы матрицы D системы сравнения, необходимо найти нормы матриц взаимосвязи H_{ij} . В соответствии с утверждением 7.1 (см. (7.32)) евклидова норма матрицы H_{ij} равна корню квадратному из максимального собственного значения произведения $\tilde{H}_{ij} = (H_{ij})^T H_{ij}$. Определим мак-

симальные собственные значения матриц $\tilde{H}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$):

$$\tilde{H}_{12} = (H_{12})^T H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,04 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{12}} = 0,04;$$

$$\tilde{H}_{13} = (H_{13})^T H_{13} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,04 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{32}} = 0,04;$$

$$\tilde{H}_{21} = (H_{21})^T H_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{21}} = 0,04;$$

$$\tilde{H}_{23} = (H_{23})^T H_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,04 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{23}} = 0,04;$$

$$\tilde{H}_{31} = (H_{31})^T H_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,04 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{31}} = 0,04;$$

$$\tilde{H}_{32} = (H_{32})^T H_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{32}} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\|H_{12}\|^2 = \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{12}} = 0,04, \quad \|H_{13}\|^2 = \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{13}} = 0,04, \quad \|H_{21}\|^2 = \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{21}} = 0,04,$$

$$\|H_{23}\|^2 = \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{23}} = 0,04, \quad \|H_{31}\|^2 = \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{31}} = 0,04, \quad \|H_{32}\|^2 = \lambda_{\tilde{M}}^{\tilde{H}_{32}} = 0.$$

По формуле (7.36) для элементов матрицы D находим:

$$d_{11} = -\frac{c_{13}}{2c_{12}} = -\frac{2,9}{2} = -1,45, \quad d_{22} = -\frac{c_{23}}{2c_{22}} = -\frac{2}{2} = -1,$$

$$d_{33} = -\frac{c_{33}}{2c_{32}} = -\frac{6}{2} = -3,$$

$$d_{12} = \frac{(c_{14})^2}{2c_{13}c_{21}} (\|H_{12}\|^2 + \|H_{13}\|^2) = \frac{4}{2,9} 0,08 \cong 0,11,$$

$$d_{13} = \frac{(c_{14})^2}{2c_{13}c_{31}} (\|H_{12}\|^2 + \|H_{13}\|^2) = \frac{4}{5,8} 0,08 \cong 0,055,$$

$$d_{21} = \frac{(c_{24})^2}{2c_{23}c_{11}} (\|H_{21}\|^2 + \|H_{23}\|^2) = \frac{4}{4} 0,08 \cong 0,08,$$

$$d_{23} = \frac{(c_{24})^2}{2c_{23}c_{31}} (\|H_{21}\|^2 + \|H_{23}\|^2) = \frac{4}{4} 0,08 \cong 0,08,$$

$$d_{31} = \frac{(c_{34})^2}{2c_{33}c_{11}} (\|H_{31}\|^2 + \|H_{32}\|^2) = \frac{4}{12} 0,04 \cong 0,013,$$

$$d_{32} = \frac{(c_{34})^2}{2c_{33}c_{21}} (\|H_{31}\|^2 + \|H_{32}\|^2) = \frac{4}{6} 0,04 \cong 0,027.$$

Матрица D принимает следующий вид:

$$D = \begin{bmatrix} -1,45 & 0,11 & 0,055 \\ 0,08 & -1 & 0,08 \\ 0,013 & 0,027 & -3 \end{bmatrix}.$$

Матрица D является М-матрицей. Проверим выполнение критерия устойчивости, т. е. условия (7.39) для этой матрицы:

$$\Delta_1 = (-1)(-1,45) = 1,45 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1,45 & 0,11 \\ 0,08 & -1 \end{vmatrix} \cong 1,44 > 0,$$

$$\Delta_3 = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1,45 & 0,11 & 0,055 \\ 0,08 & -1 & 0,08 \\ 0,013 & 0,027 & -3 \end{vmatrix} \cong 4,32 > 0.$$

Критерий устойчивости выполняется. Следовательно, матрица D , или, что то же, система сравнения, устойчива. По теореме 7.4 агрегированная система устойчива.

7.4.4. Устойчивость агрегированной системы с нелинейными взаимосвязями. Рассмотрим агрегированную систему, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{(k)} &= A_k \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k+1)}, \dots, \mathbf{x}^{(r)}), \\ \mathbf{x}^{(k)} &\in R_{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Здесь $\mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, т. е. начало координат $\mathbf{x} = ((\mathbf{x}^{(1)})^T (\mathbf{x}^{(2)})^T \dots (\mathbf{x}^{(r)})^T)^T = \mathbf{0}$ является положением равновесия. В данном случае взаимосвязи между подсистемами описываются нелинейными функциями. Эти функции удовлетворяют соотношениям

$$|\mathbf{h}^{(k)}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r h_{ki} |\mathbf{x}^{(i)}|, \quad h_{ki} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (7.41)$$

Если пренебречь взаимосвязями, то получим r независимых подсистем $\bar{S}_k$, которые описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = A_k \mathbf{x}^{(k)}, \quad \mathbf{x}^{(k)} \in R_{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (7.42)$$

Пусть положение равновесия $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}$ подсистем $\bar{S}_k$ устойчиво. Тогда при любой положительно определенной $(n_k \times n_k)$ -матрице C_k существует матрица B_k , удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$A_k^T B_k + B_k A_k = -C_k. \quad (7.43)$$

Квадратичная форма $V_k(\mathbf{x}^{(k)}) = (\mathbf{x}^{(k)})^T B_k \mathbf{x}^{(k)}$ является функцией Ляпунова для подсистемы $\bar{S}_k$. Она в соответствии с теоремой 7.3а удовлетворяет соотношениям

$$\lambda_m^{B_k} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 \leq V_k(\mathbf{x}) \leq \lambda_M^{B_k} |\mathbf{x}^{(k)}|^2, \quad (7.44a)$$

$$\dot{V}_k(\mathbf{x}) \leq -\lambda_m^{C_k} |\mathbf{x}^{(k)}|^2, \quad (7.44б)$$

$$\left| \frac{dV_k(\mathbf{x}^{(k)})}{d\mathbf{x}^{(k)}} \right| \leq 2\lambda_M^{B_k} |\mathbf{x}^{(k)}|, \quad (7.44в)$$

где $\lambda_m^{B_1}$, $\lambda_M^{B_1}$ — минимальное и максимальное собственные значения матрицы B_1 , $\lambda_m^{C_k}$ — минимальное собственное значение матрицы C_k .

Теперь рассмотрим теорему, которая позволит определить, как построить систему сравнения для агрегированной системы (7.40) с нелинейными взаимосвязями, удовлетворяющими условию (7.41).

Теорема 7.5. Пусть квадратичная форма $V_k(\mathbf{x}^{(k)}) = (\mathbf{x}^{(k)})^T B_k \mathbf{x}^{(k)}$ является функцией Ляпунова для подсистемы (7.42) и элементы матрицы $D = (d_{ki})$ имеют вид

$$d_{ki} = \begin{cases} -\frac{\lambda_m^{C_k}}{2\lambda_M^{B_k}}, & k = i, \\ 2(\lambda_M^{B_k})^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r |h_{kj}|^2 / (\lambda_m^{C_k} \lambda_M^{B_i}), & k \neq i. \end{cases} \quad (7.45)$$

Тогда, если нулевое решение системы

$$\dot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in R^r, \quad (7.46)$$

устойчиво, то и положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ агрегированной системы (7.40) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Производная по времени функции Ляпунова $V_k(\mathbf{x}^{(k)})$ в силу уравнения (7.42) подсистемы $\bar{S}_k$ имеет вид

$$(\dot{V}_k)_{(42)} = \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}^{(k)}} A_k \mathbf{x}^{(k)}.$$

Производная по времени той же функции в силу уравнений (7.40) агрегированной системы имеет вид

$$(\dot{V}_k)_{(40)} = (\dot{V}_k)_{(42)} + \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}^{(k)}} \mathbf{h}^{(k)}.$$

Учитывая неравенство (7.44б), из последнего равенства получаем

$$(\dot{V}_k)_{(40)} \leq -\lambda_m^{C_k} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 + \left| \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}^{(k)}} \right| |\mathbf{h}^{(k)}|.$$

Используя (7.44в) и (7.41), полученное неравенство можно представить в виде

$$(\dot{V}_k)_{(40)} \leq -\lambda_m^{C_k} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 + 2\lambda_M^{B_k} |\mathbf{x}^{(k)}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r |h_{kj}| |\mathbf{x}^{(j)}|.$$

Далее, используя неравенство (7.38), полагая в нем

$$a = \lambda_m^{C_k}, \quad b = 2\lambda_M^{B_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r |h_{kj}| |\mathbf{x}^{(j)}|, \quad z = |\mathbf{x}^{(k)}|,$$

а также неравенство Коши–Шварца (4.19), получим

$$\begin{aligned} (\dot{V}_k)_{(40)} &\leq -\frac{\lambda_m^{C_k}}{2} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 + \frac{(2\lambda_M^{B_k})^2}{2\lambda_m^{C_k}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r h_{kj} |\mathbf{x}^{(j)}| \right)^2 \leq \\ &\leq -\frac{\lambda_m^{C_k}}{2} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 + \frac{(2\lambda_M^{B_k})^2}{2\lambda_m^{C_k}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r h_{kj}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r |\mathbf{x}^{(j)}|^2. \end{aligned}$$

Из неравенства (7.44а) имеем

$$-|\mathbf{x}^{(k)}|^2 \leq -\frac{V_k}{\lambda_M^{B_k}}, \quad |\mathbf{x}^{(k)}|^2 \leq \frac{V_k}{\lambda_m^{B_k}}.$$

Поэтому последнее соотношение можно преобразовать к виду

$$(\dot{V}_k)_{(40)} \leq -\frac{\lambda_m^{C_k}}{2\lambda_M^{B_k}} V_k + \frac{(2\lambda_M^{B_k})^2}{2\lambda_m^{C_k}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r h_{kj}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \frac{V_i}{\lambda_m^{B_i}}.$$

Используя векторную функцию Ляпунова $\mathbf{V} = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_r)^T$, последнее неравенство при $k = 1, 2, \dots, r$ можно записать в виде $\dot{\mathbf{V}} \leq D\mathbf{V}$. Если $\mathbf{z}(t)$ — решение уравнения (7.46) при начальном условии $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{V}(t_0)$, то в соответствии с теоремой 7.2

$$\mathbf{V}(t) \leq \mathbf{z}(t) \quad \forall t \geq t_0.$$

Так как нулевое решение уравнения (7.46) устойчиво, то $\mathbf{z}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$. И так как все компоненты вектора $\mathbf{V}(t)$ являются положительно определенными функциями, из последнего неравенства следует, что $\mathbf{V}(t) \rightarrow 0$ и соответственно $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Пример 7.5. Исследовать устойчивость системы, состоящей из следующих трех подсистем:

$$\begin{aligned} S_1: \quad &\begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = -x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 0,05 \sin x_1^{(2)}, \\ \dot{x}_2^{(1)} = -2x_2^{(1)} + 0,1(e^{-|x_1^{(2)}|} - 1); \end{cases} \\ S_2: \quad &\begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = -2x_1^{(2)} + 0,05(1 - \cos 2x_1^{(3)}), \\ \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - 4x_2^{(2)} + 0,1(e^{-|x_1^{(3)}|} - 1); \end{cases} \\ S_3: \quad &\begin{cases} \dot{x}_1^{(3)} = x_2^{(3)} + 0,1x_2^{(1)}e^{-|x_2^{(1)}|}, \\ \dot{x}_2^{(3)} = -5x_1^{(3)} - 6x_2^{(3)} + 0,05 \sin 2x_1^{(1)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение. Запишем приведенные уравнения в векторной форме:

$$\begin{aligned} S_1: \quad \dot{\mathbf{x}}^{(1)} &= A_1 \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}), \\ S_2: \quad \dot{\mathbf{x}}^{(2)} &= A_2 \mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(3)}), \\ S_3: \quad \dot{\mathbf{x}}^{(3)} &= A_3 \mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{h}^{(3)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,05 \sin x_1^{(2)} \\ 0,1 (e^{-|x_1^{(2)}|} - 1) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,05 (1 - \cos 2x_1^{(3)}) \\ 0,1 (e^{-|x_1^{(3)}|} - 1) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(3)} &= \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,1 x_2^{(1)} e^{-|x_2^{(1)}|} \\ 0,05 \sin 2x_1^{(1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если не учитывать взаимосвязи, то получим три независимых подсистемы:

$$\overline{S}_1: \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1 \mathbf{x}^{(1)},$$

$$\overline{S}_2: \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_2 \mathbf{x}^{(2)},$$

$$\overline{S}_3: \dot{\mathbf{x}}^{(3)} = A_3 \mathbf{x}^{(3)}.$$

Функции Ляпунова будем искать в виде квадратичной формы $V_k = (\mathbf{x}^{(k)})^T B_k \mathbf{x}^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$), где матрица B_k определяется из уравнения Ляпунова

$$A_k^T B_k + B_k A_k = -C_k$$

при условии, что

$$C_k = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Определим матрицы B_k ($k = 1, 2, 3$).

При $k = 1$ уравнение Ляпунова принимает вид

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix},$$

или, после перемножения матриц,

$$\begin{bmatrix} -b_{11}^{(1)} & -b_{12}^{(1)} \\ b_{11}^{(1)} - 2b_{21}^{(1)} & b_{12}^{(1)} - 2b_{22}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{11}^{(1)} & b_{11}^{(1)} - 2b_{12}^{(1)} \\ -b_{21}^{(1)} & b_{21}^{(1)} - 2b_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Учитывая равенство $b_{12}^{(1)} = b_{21}^{(1)}$, это уравнение в скалярной форме можно записать в виде

$$-2b_{11}^{(1)} = -10, \quad b_{11}^{(1)} - 3b_{12}^{(1)} = 0, \quad 2b_{12}^{(1)} - 4b_{22}^{(1)} = -10.$$

Отсюда находим

$$b_{11}^{(1)} = 5, \quad b_{12}^{(1)} = b_{21}^{(1)} = \frac{5}{3}, \quad b_{22}^{(1)} = \frac{10}{3}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 5/3 \\ 5/3 & 10/3 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы B_1 , или корни уравнения

$$\det(B_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 5/3 \\ 5/3 & 10/3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{25}{3} \lambda + \frac{125}{9} = 0,$$

равны $\lambda_1 \cong 2,3$ и $\lambda_2 \cong 6$. Поэтому для минимального и максимального собственных значений матрицы B_1 имеем $\lambda_m^{B_1} = 2,3$ и $\lambda_M^{B_1} = 6$.

При $k = 2$ уравнение Ляпунова принимает вид

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix},$$

или, после перемножения матриц,

$$\begin{bmatrix} -2b_{11}^{(2)} + b_{21}^{(2)} & -2b_{12}^{(2)} + b_{22}^{(2)} \\ -4b_{21}^{(2)} & -4b_{22}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2b_{11}^{(2)} + b_{12}^{(2)} & -4b_{12}^{(2)} \\ -2b_{21}^{(2)} + b_{22}^{(2)} & -4b_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме это уравнение принимает вид

$$-4b_{11}^{(2)} + 2b_{12}^{(2)} = -10, \quad -6b_{12}^{(2)} + b_{22}^{(2)} = 0, \quad -8b_{22}^{(2)} = -10.$$

Отсюда получаем

$$b_{11}^{(2)} = \frac{125}{48}, \quad b_{12}^{(2)} = b_{21}^{(2)} = \frac{5}{24}, \quad b_{22}^{(2)} = \frac{5}{4}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 125/48 & 5/24 \\ 5/24 & 5/4 \end{bmatrix}.$$

Составив характеристическое уравнение и решив его, для минимального и максимального собственных значений матрицы B_2 получаем $\lambda_m^{B_2} \cong 1,23$ и $\lambda_M^{B_2} \cong 2,61$.

При $k = 3$ уравнение Ляпунова принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} \\ b_{21}^{(3)} & b_{22}^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} \\ b_{21}^{(3)} & b_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix},$$

или, после перемножения матриц,

$$\begin{bmatrix} -5b_{21}^{(3)} & -5b_{22}^{(3)} \\ b_{11}^{(3)} - 6b_{21}^{(3)} & b_{12}^{(3)} - 6b_{22}^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5b_{12}^{(3)} & b_{11}^{(3)} - 6b_{12}^{(3)} \\ -5b_{22}^{(3)} & b_{21}^{(3)} - 6b_{22}^{(3)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме это уравнение принимает вид

$$-10b_{12}^{(3)} = -10, \quad -5b_{22}^{(3)} + b_{11}^{(3)} - 6b_{12}^{(3)} = 0, \quad 2b_{12}^{(3)} - 12b_{22}^{(3)} = -10.$$

Отсюда получаем

$$b_{11}^{(3)} = 11, \quad b_{12}^{(3)} = b_{21}^{(3)} = 1, \quad b_{22}^{(3)} = 1, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составив характеристическое уравнение и решив его, для минимального и максимального собственных значений матрицы B_3 получаем $\lambda_m^{B_3} \cong 0,9$ и $\lambda_M^{B_3} \cong 11$.

Так как матрица $C_i = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ ($i = 1, 2, 3$) является диагональной, то ее собственные значения совпадают с ее диагональными элементами, поэтому имеем

$$\lambda_m^{C_i} = 10, \quad i = 1, 2, 3.$$

Чтобы определить элементы матрицы D , согласно формуле (7.45) нужно определить постоянные $(h_{kj})^2$ ($k, j = 1, 2, 3, k \neq j$). Евклидовы нормы векторных функции $\mathbf{h}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} |h^{(1)}|^2 &= 0,0025 (\sin x_1^{(2)})^2 + 0,01 (e^{-|x_1^{(2)}|} - 1)^2 \leq \\ &\leq 0,0025 (x_1^{(2)})^2 + 0,01 (x_1^{(2)})^2 \leq 0,013 (x_1^{(2)})^2 \leq 0,013 |x^{(2)}|^2, \\ |h^{(2)}|^2 &= 0,0025 (1 - \cos 2x_1^{(3)})^2 + 0,01 (e^{-|x_1^{(3)}|} - 1)^2 = \\ &= 0,0025 \cdot 4 \sin^4 x_1^{(3)} + 0,01 (e^{-|x_1^{(3)}|} - 1)^2 \leq \\ &\leq 0,01 (x_1^{(3)})^2 + 0,01 (x_1^{(3)})^2 \leq 0,02 (x_1^{(3)})^2 \leq 0,02 |x^{(3)}|^2, \\ |h^{(3)}|^2 &= 0,01 (x_2^{(1)})^2 e^{-2|x_2^{(1)}|} + 0,0025 (\sin 2x_1^{(1)})^2 \leq \\ &\leq 0,01 (x_2^{(1)})^2 + 0,01 (x_1^{(1)})^2 \leq 0,01 |x^{(1)}|^2. \end{aligned}$$

В соответствии с неравенством Коши–Шварца имеем

$$|\mathbf{h}^{(k)}|^2 \leq \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^3 |\mathbf{x}^{(i)}| \right) \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^3 h_{ki}^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^3 |\mathbf{x}^{(i)}|^2.$$

Поэтому из приведенных выше соотношений находим

$$h_{12}^2 = 0,013, \quad h_{13}^2 = 0, \quad h_{21}^2 = 0, \quad h_{23}^2 = 0,02, \quad h_{31}^2 = 0,01, \quad h_{32}^2 = 0.$$

Для удобства выпишем здесь полученные выше собственные значения матриц B_k и C_k ($k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \lambda_m^{B_1} &= 2,3, \quad \lambda_M^{B_1} = 6, \quad \lambda_m^{B_2} \cong 1,23, \quad \lambda_M^{B_2} \cong 2,61, \\ \lambda_m^{B_3} &\cong 0,9, \quad \lambda_M^{B_3} \cong 11, \quad \lambda_m^{C_i} = 10, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Теперь определим элементы матрицы D :

$$\begin{aligned} d_{11} &= -\frac{\lambda_m^{C_1}}{2 \lambda_M^{B_1}} = -\frac{10}{2 \cdot 6} = -0,84, \\ d_{22} &= -\frac{\lambda_m^{C_2}}{2 \lambda_M^{B_2}} = -\frac{10}{2 \cdot 2,61} = -1,91, \\ d_{33} &= -\frac{\lambda_m^{C_3}}{2 \lambda_M^{B_3}} = -\frac{10}{2 \cdot 11} = -0,45, \\ d_{12} &= \frac{2(\lambda_M^{B_1})^2}{\lambda_m^{C_1} \lambda_m^{B_2}} (h_{12}^2 + h_{13}^2) = \frac{2 \cdot 6^2}{10 \cdot 1,23} 0,013 \cong 0,076, \\ d_{13} &= \frac{2(\lambda_M^{B_1})^2}{\lambda_m^{C_1} \lambda_m^{B_3}} (h_{12}^2 + h_{13}^2) = \frac{2 \cdot 6^2}{10 \cdot 0,9} 0,013 \cong 0,104, \end{aligned}$$

$$d_{21} = \frac{2(\lambda_M^{B_2})^2}{\lambda_m^{C_2} \lambda_m^{B_1}} (h_{21}^2 + h_{23}^2) = \frac{2(2,61)^2}{10 \cdot 2,3} 0,02 \cong 0,012,$$

$$d_{23} = \frac{2(\lambda_M^{B_2})^2}{\lambda_m^{C_2} \lambda_m^{B_3}} (h_{21}^2 + h_{23}^2) = \frac{2(2,61)^2}{10 \cdot 0,9} 0,02 \cong 0,03,$$

$$d_{31} = \frac{2(\lambda_M^{B_3})^2}{\lambda_m^{C_3} \lambda_m^{B_1}} (h_{31}^2 + h_{32}^2) = \frac{2 \cdot 11^2}{10 \cdot 2,3} 0,01 \cong 0,01,$$

$$d_{32} = \frac{2(\lambda_M^{B_3})^2}{\lambda_m^{C_3} \lambda_m^{B_2}} (h_{31}^2 + h_{32}^2) = \frac{2 \cdot 11^2}{10 \cdot 1,23} 0,01 \cong 0,20.$$

Матрица D имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} -0,84 & 0,076 & 0,104 \\ 0,012 & -1,91 & 0,03 \\ 0,01 & 0,20 & -0,45 \end{vmatrix}.$$

Она является М-матрицей, и необходимое условие ее устойчивости выполняется. Проверим условие устойчивости Севастьянова–Котелянского (7.39):

$$\Delta_1 = (-1)(-0,84) = 0,84 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} -0,84 & 0,076 \\ 0,012 & -1,91 \end{bmatrix} = 1,6 > 0,$$

$$\Delta_3 = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,84 & 0,076 & 0,104 \\ 0,012 & -1,91 & 0,03 \\ 0,01 & 0,20 & -0,45 \end{vmatrix} = 1,33 > 0.$$

Условие устойчивости выполняется. Следовательно, система сравнения и агрегированная система устойчивы.

Задачи

1. Произвести децентрализацию по входу (управлению) системы, которая описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_2 = -4x_2 + x_3 + x_4 + 2u_2,$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2u_1 + u_2.$$

$$\dot{x}_4 = x_1 + 2x_2 - 2x_4 + u_1.$$

2. Произвести децентрализацию по входу (управлению) системы, которая описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 0,3x_5 + u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 + 0,1x_5 + 2u_2,$$

$$\dot{x}_3 = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 0,2x_5 + 2u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_4 = x_1 + 2x_2 - 2x_4 + x_5 + u_1,$$

$$\dot{x}_5 = -0,2x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 3u_1 + 2u_2.$$

3. Исследовать устойчивость системы, состоящей из двух подсистем

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = -4x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + 0,1x_1^{(2)}, \\ \dot{x}_2^{(1)} = -3x_1^{(1)} - 5x_2^{(1)} + 0,1x_1^{(2)}; \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = -(3 + \sin^2 t)x_1^{(2)} + 0,5x_2^{(2)} + 0,1x_2^{(1)}, \\ \dot{x}_2^{(2)} = -2x_1^{(2)} - (1 + e^{-t})x_2^{(2)} + 0,05x_2^{(1)}. \end{cases}$$

4. Исследовать устойчивость системы, состоящей из двух подсистем

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = -(3 + \sin^2 t)x_1^{(1)} + 0,5x_2^{(1)} + 0,1x_1^{(2)}, \\ \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - (1 + e^{-t})x_2^{(1)} + 0,05x_2^{(2)}; \end{cases}$$

$$S_2: \quad \dot{x}_1^{(2)} = -2x_1^{(2)} - \sin x_1^{(2)} + 0,05x_2^{(1)}.$$

5. Исследовать устойчивость системы, состоящей из трех подсистем

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = -(3 + \sin^2 t)x_1^{(1)} + 0,5x_2^{(1)} + 0,1x_1^{(3)}, \\ \dot{x}_2^{(1)} = -x_1^{(1)} - (1 + e^{-t})x_2^{(1)} + 0,05x_2^{(2)}; \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = -4x_1^{(2)} - 5x_2^{(2)} + 0,1x_2^{(3)}, \\ \dot{x}_2^{(2)} = -3x_2^{(1)} - 5x_2^{(2)} + 0,05x_2^{(3)}; \end{cases}$$

$$S_3: \quad \dot{x}_1^{(2)} = -2x_1^{(2)} - \sin x_1^{(3)} + 0,05x_2^{(1)}.$$

6. Исследовать устойчивость системы, состоящей из двух подсистем

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = -2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 0,05\sin x_1^{(2)}, \\ \dot{x}_2^{(1)} = -4x_2^{(1)} + 0,1(e^{-|x_1^{(2)}|} - 1); \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = -4x_1^{(2)} + 0,1(1 - \cos 2x_1^{(1)}), \\ \dot{x}_2^{(2)} = 2x_1^{(2)} - 4x_2^{(2)} + 0,1(e^{-|x_1^{(1)}|} - 1). \end{cases}$$

7. Исследовать устойчивость системы, состоящей из двух подсистем

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = -4x_1^{(1)} + 0,1(1 - \cos 2x_1^{(2)}), \\ \dot{x}_2^{(1)} = -2x_1^{(1)} - 4x_2^{(1)} + 0,1(e^{-|x_1^{(2)}|} - 1); \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = x_2^{(2)} + 0,1x_2^{(1)} + 0,1e^{-|x_1^{(1)}|}, \\ \dot{x}_2^{(2)} = -5x_1^{(2)} - 6x_2^{(2)} + 0,05\sin 2x_1^{(1)}. \end{cases}$$

8. Исследовать устойчивость системы, состоящей из трех подсистем

$$\begin{aligned} S_1: \quad & \begin{cases} \dot{x}_1^{(1)} = x_2^{(1)} + 0,1 x_2^{(3)} e^{-|x_1^{(3)}|}, \\ \dot{x}_2^{(1)} = -5 x_1^{(1)} - 6 x_2^{(1)} + 0,05 \sin 2 x_1^{(3)}; \end{cases} \\ S_2: \quad & \begin{cases} \dot{x}_1^{(2)} = -4 x_1^{(2)} + 0,05(1 - \cos 2 x_1^{(1)}), \\ \dot{x}_2^{(2)} = x_1^{(2)} - 4 x_2^{(2)} + 0,1 (e^{-|x_1^{(1)}|} - 1); \end{cases} \\ S_3: \quad & \begin{cases} \dot{x}_1^{(3)} = -x_1^{(3)} + x_2^{(3)} + 0,05 \sin x_1^{(2)}, \\ \dot{x}_2^{(3)} = -2 x_2^{(3)} + 0,05 (e^{-|x_1^{(2)}|} - 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Глава 8

МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В данной главе рассматриваются различные методы синтеза систем управления: метод обратной задачи динамики, метод синтеза систем с переменной структурой, метод синтеза, основанный на построении функции Ляпунова, и метод синтеза, основанный на декомпозиции. Методы синтеза оптимальных и адаптивных систем будут рассмотрены в следующих главах.

8.1. Метод обратной задачи динамики

Как известно, *прямая задача механики* (динамики) состоит в том, чтобы по заданным силам, действующим на механическую систему, определить свойства движения этой системы. *Обратными задачами динамики* называют задачи определения сил, действующих на механическую систему, при которых движение с заданными свойствами является одним из возможных движений рассматриваемой системы [20]. Если распространить это определение и на немеханические системы, понимая под силой всякое воздействие, вызывающее изменения в ее движениях, то задачу синтеза можно рассматривать как обратную задачу динамики.

Применительно к задачам управления *методом обратной задачи динамики* будем называть метод синтеза систем, когда по заданным уравнениям объекта и требованиям к качеству системы управления определяется желаемое дифференциальное уравнение, решение которого удовлетворяет заданным требованиям, а затем из найденного уравнения выражается старшая производная и подстановкой ее вместо старшей производной в уравнение объекта находится требуемый закон управления. Такой метод был предложен Л. М. Бойчуком для определения структуры при синтезе нелинейных систем управления [11]. Широкому распространению этого метода способствовали работы Д. П. Крутько [35].

Дифференциальное уравнение, которое задается или определяется по заданным уравнениям объекта и требованиям к качеству синтеза-

руемой системы управления и решение которого удовлетворяет заданным требованиям, будем называть *эталонным (дифференциальным) уравнением*.

Пример 8.1. Объект описывается уравнением

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = b(t)u, \quad b(t) \neq 0.$$

Требуется определить закон управления, при котором синтезированная система описывается уравнением

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0.$$

Решение. Из эталонного уравнения имеем

$$\ddot{x} = -a_1 \dot{x} - a_2 x.$$

Подставив это выражение для второй производной в уравнение объекта, получим

$$u = \frac{1}{b(t)} [-a_1 \dot{x} - a_2 x + f(x, \dot{x}, t)].$$

Как легко проверить, при таком законе управления уравнение синтезированной системы совпадает с эталонным.

В рассмотренном примере управление входит в уравнение объекта линейно. В таких случаях, если эталонное уравнение задано или определено по заданным требованиям к качеству системы, закон управления определяется просто. Если управление входит в уравнение объекта нелинейно, то для нахождения требуемого закона управления по заданному эталонному уравнению требуются определенные ухищрения.

Пример 8.2. Объект описывается уравнением

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}, u).$$

Требуется определить закон управления, при котором синтезированная система описывается уравнением

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = g(t).$$

Решение. В данном случае имеем задачу слежения. Функция $g(t)$ является задающим воздействием. Если разрешим эталонное уравнение относительно старшей производной и подставим в уравнение объекта, то получим

$$g(t) - a_1 \dot{y} - a_2 y - f(y, \dot{y}, u) = 0. \quad (8.1)$$

Если это уравнение неразрешимо относительно управления, то требуемое управление находится путем построения следящей системы на основе уравнения [35]

$$\dot{u} = q[g(t) - a_1 \dot{y} - a_2 y - f(y, \dot{y}, u)],$$

где q — положительная константа. Очевидно, что при $\dot{u} \rightarrow 0$ управление удовлетворяет уравнению (8.1). На рис. 8.1 представлена струк-

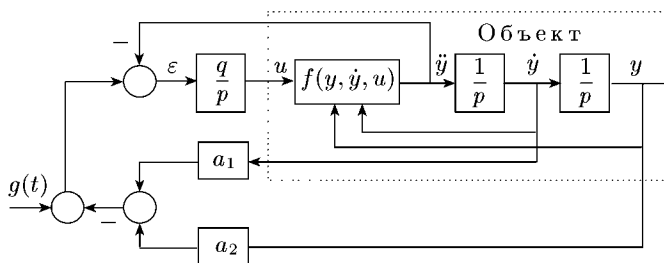


Рис. 8.1. Структурная схема системы

турная схема системы, синтезированной на основе последнего уравнения. На этой схеме

$$\varepsilon = g(t) - a_1 \dot{y} - a_2 y - f(y, \dot{y}, u).$$

Эталонное уравнение будет реализовано, если будет выполнено соотношение $\varepsilon = \varepsilon(t) \rightarrow 0$. Последнее, в частности, возможно, когда $g(t) = \text{const}$ и система асимптотически устойчива.

Рассмотрим еще один пример, в котором эталонное уравнение не задано, а заданы требования к качеству системы. В этом случае, чтобы воспользоваться методом обратной задачи динамики, нужно сначала на основе требований к качеству системы определить эталонное уравнение.

Пример 8.3. Объект описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= f_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + b_1 u_1, \\ \ddot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) + b_2 u_2.\end{aligned}$$

Требуется определить закон управления, при котором «скорость» $v = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$ и фазовая координата x_2 изменяются в соответствии с функциями

$$v = v^*(t), \quad x_2 = x_2^*(t).$$

Решение. Точное выполнение заданных требований невозможно, так как оно зависит не только от выбранного закона управления, но и от начальных условий. Поэтому потребуем, чтобы ошибки

$$e_1 = v^*(t) - v(t), \quad e_2 = x_2^*(t) - x_2(t) \quad (8.2)$$

стремились к нулю в соответствии с решениями уравнений

$$\dot{e}_1 + a_{11}e_1 = 0, \quad \ddot{e}_2 + a_{21}\dot{e}_2 + a_{22}e_2 = 0. \quad (8.3)$$

Чтобы воспользоваться методом обратной задачи динамики, нужно определить желаемый закон изменения вторых производных фазовых координат. Для этого найдем из (8.2) производные:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \dot{v}^*(t) - \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \dot{v}^*(t) - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} (\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 \ddot{x}_2), \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2^*(t) - \dot{x}_2(t), \quad \ddot{e}_2 = \ddot{x}_2^*(t) - \ddot{x}_2(t).\end{aligned}$$

Подставив эти выражения, а также выражения для ошибок в уравнения (8.3), получим

$$\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 \ddot{x}_2 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \left[\dot{v}^*(t) + a_{11} \left(v^* - \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \right) \right],$$

$$\ddot{x}_2^* - \ddot{x}_2 + a_{21}(\dot{x}_2^* - \dot{x}_2) + a_{22}(x_2^* - x_2) = 0.$$

Отсюда находим

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_2^* + a_{21}(\dot{x}_2^* - \dot{x}_2) + a_{22}(x_2^* - x_2),$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \right)^2} \left[\dot{v}^*(t) + a_{11} \left(v^* - \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \right) \right] - \\ & - \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} [\ddot{x}_2^* + a_{21}(\dot{x}_2^* - \dot{x}_2) + a_{22}(x_2^* - x_2)]. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнения объекта, получим искомым закон управления:

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{1}{b_1} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \right)^2} \left[\dot{v}^*(t) + a_{11} \left(v^* - \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} [\ddot{x}_2^* + a_{21}(\dot{x}_2^* - \dot{x}_2) + a_{22}(x_2^* - x_2)] - f(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \right\}, \\ u_2 = & \frac{1}{b_2} [\ddot{x}_2^* + a_{21}(\dot{x}_2^* - \dot{x}_2) + a_{22}(x_2^* - x_2) - f(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)]. \end{aligned}$$

8.2. Синтез систем с переменной структурой

Системы с переменной структурой (СПС) второго порядка были рассмотрены в гл. 2, где было продемонстрировано, как методом фазовой плоскости синтезировать СПС. Там, в частности, было показано, что в некоторых случаях можно получить скользящий режим — движение по вырожденной траектории. За счет организации скользящего режима можно обеспечить системе управления нужные свойства в условиях неполной информации — в условиях, когда не известна точная модель объекта управления или его свойства непредвиденным образом изменяются в широких пределах в процессе функционирования системы. В данной главе рассматриваются задачи синтеза СПС произвольного порядка, функционирующего в скользящем режиме.

В общем случае для того чтобы СПС, в которой создается скользящий режим, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия: 1) условия попадания; 2) условия скольжения; 3) условия устойчивости скользящего движения. Рассмотрим эти условия.

8.2.1. Условия скольжения и попадания. Пусть система с переменной структурой описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R, \quad (8.4a)$$

$$u = \begin{cases} u^+(\mathbf{x}, t), & s(\mathbf{x}) > 0, \\ u^-(\mathbf{x}, t), & s(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (8.46)$$

Здесь $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица; $u^+(\mathbf{x}, t)$, $u^-(\mathbf{x}, t)$ — непрерывные функции и $u^+(\mathbf{x}, t) \neq u^-(\mathbf{x}, t)$; $s(\mathbf{x})$ — непрерывная функция, определяющая поверхность переключения.

Поверхность S , определяемая уравнением $s(\mathbf{x}) = 0$, делит пространство состояний R^n на два подпространства: подпространство $R_-^n = \{\mathbf{x}: s(\mathbf{x}) < 0\}$ и подпространство $R_+^n = \{\mathbf{x}: s(\mathbf{x}) > 0\}$. Правая часть уравнения (8.4а) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t)$ в силу уравнения (8.4б) на поверхности S терпит разрыв. Однако существуют левые и правые пределы:

$$\mathbf{f}^- = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow -0} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \quad \mathbf{f}^+ = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow +0} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t).$$

Производная по времени функции $s(\mathbf{x})$ в силу уравнения (8.4а) имеет вид

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \frac{ds(\mathbf{x})}{dx} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) = \text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t).$$

Градиент $\text{grad } s(\mathbf{x})$, как известно, направлен по нормали к поверхности S в сторону возрастания функции переключения $s(\mathbf{x})$, т.е. в сторону, где $s(\mathbf{x}) > 0$ (рис. 8.2, а). Поэтому если предел

$$\dot{s}^- = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow -0} \dot{s}(\mathbf{x}) = \text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}^-, \quad \mathbf{f}^- = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^-, t),$$

больше нуля ($\dot{s}^- > 0$), т.е. угол между векторами $\text{grad } s(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}^-$ острый, то вектор $\mathbf{f}^-$ направлен в сторону подпространства R_+^n

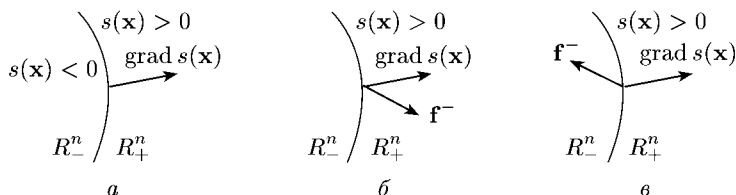


Рис. 8.2. Поверхность переключения

(рис. 8.2, б). Если указанный предел меньше нуля ($\dot{s}^- < 0$), то вектор $\mathbf{f}^-$ направлен в сторону подпространства R_-^n (рис. 8.2, в). Аналогично, если предел

$$\dot{s}^+ = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow +0} \dot{s}(\mathbf{x}) = \text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}^+, \quad \mathbf{f}^+ = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^+, t),$$

больше нуля ($\dot{s}^+ > 0$), то вектор $\mathbf{f}^+$ направлен в сторону подпространства R_+^n , если меньше нуля ($\dot{s}^+ < 0$), то вектор $\mathbf{f}^+$ направлен в сторону подпространства R_-^n .

Точки на поверхности переключения S можно разделить на три типа [7].

К первому типу относят точки, в которых произведение $\dot{s}^- \cdot \dot{s}^+$ положительно: $\dot{s}^- \cdot \dot{s}^+ > 0$. В этих точках векторы $\mathbf{f}^-$ и $\mathbf{f}^+$ направлены в одну сторону (рис. 8.3, отрезок BC).

Ко второму типу относят те точки, в которых $\dot{s}^- < 0$ и $\dot{s}^+ > 0$. В этих точках вектор $\mathbf{f}^-$ направлен в сторону подпространства R_-^n , а вектор $\mathbf{f}^+$ — в сторону подпространства R_+^n , т.е. они направлены в разные стороны от поверхности переключения (рис. 8.3, отрезок AB).

Третий тип составляют точки, в которых выполняются условия

$$\begin{aligned}\dot{s}^- &= \text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}^- > 0, \\ \dot{s}^+ &= \text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}^+ < 0.\end{aligned}\quad (8.5)$$

В этом случае векторы $\mathbf{f}^-$ и $\mathbf{f}^+$ направлены к поверхности переключения, т.е. фазовые траектории у поверхности S направлены встречно. В случае попадания изображающей точки в эту группу точек на поверхности S начинается процесс скольжения (рис. 8.3, отрезок CD). Условие (8.5) называется *условием существования скольжения* или просто *условием скольжения*; поверхность переключения, состоящая из точек третьего типа, называется *поверхностью скольжения*.

Указанные три типа точек в общем случае отделяются друг от друга многообразием, в точках которых или $\dot{s}^- = 0$, или $\dot{s}^+ = 0$, или выполняются оба эти равенства.

На поверхности переключения правая часть уравнения (8.4а) терпит разрыв. Однако в точках первого и второго типов этой поверхности описание движения изображающей точки вопросов не вызывает, так как в непосредственной близости от этой поверхности она движется с фазовой скоростью $\mathbf{f}^-$ или $\mathbf{f}^+$, а на самой поверхности значение ее скорости не играет роли, так как изображающая точка при попадании на одну из точек первого или второго типа мгновенно сходит с поверхности. Проблема возникает при описании скользящего режима, т.е. при попадании изображающей точки на одну из точек третьего типа на поверхности S . Это связано с тем, что при скользящем движении фазовая скорость изображающей точки не равна ни $\mathbf{f}^-$, ни $\mathbf{f}^+$.

Рассмотрим, с какой фазовой скоростью происходит движение изображающей точки в процессе скольжения, т.е. чему должна быть равна правая часть уравнения (8.4а) при описании движения в скользящем режиме. Пусть точка L лежит на поверхности S , через которую проходит траектория скольжения (рис. 8.4). Проведем векторы $\mathbf{f}^-$ и $\mathbf{f}^+$, выходящие из этой точки. Соединим концы

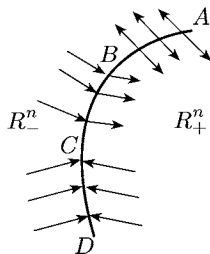


Рис. 8.3. Три типа точек на поверхности переключения

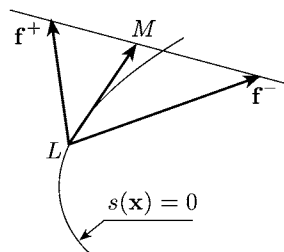


Рис. 8.4. Определение фазовой скорости на участке скольжения

этих векторов прямой и найдем точку M пересечения этой прямой с касательной плоскостью к поверхности S в точке L . Считается, что в точке L скорость скольжения совпадает с вектором LM [7, 2].

Для того чтобы изображающая точка, находящаяся в состоянии $\mathbf{x}$ ($s(\mathbf{x}) \neq 0$), двигалась в сторону поверхности скольжения, необходимо и достаточно, чтобы при $s(\mathbf{x}) > 0$ производная по времени $\dot{s}(\mathbf{x})$ в силу уравнений (8.4) была отрицательна, а при $s(\mathbf{x}) < 0$ — положительна. Таким образом, условие попадания изображающей точки на поверхность скольжения имеет вид

$$s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) < 0. \quad (8.6)$$

Это условие называют *условием попадания*.

8.2.2. Уравнение движения в скользящем режиме. Как отмечалось выше, возникает проблема описания системы с переменной структурой при ее движении в режиме скольжения. Был рассмотрен один из возможных способов описания такого движения. Здесь эту проблему рассмотрим более подробно.

Возможны два подхода к решению проблемы описания идеального скользящего движения: аксиоматический подход и подход, основанный на предельном переходе [56]. Рассмотренный выше способ определения фазовой скорости при скользящем режиме основан на аксиоматическом подходе.

Под *идеальным скользящим режимом* понимается такое движение, при котором изображающая точка совершает относительно поверхности скольжения колебания с бесконечно большой частотой и бесконечно малой амплитудой. Реальное скользящее движение из-за различного рода запаздываний, гистерезиса и других «неидеальностей» переключающего устройства совершается с конечной частотой и конечной амплитудой. И это движение может быть описано, так как при реальном скользящем движении изображающая точка в основном совершает движение вне поверхности скольжения. Подход, основанный на предельном переходе, состоит в том, что, имея описание реального скользящего движения и совершая предельный переход при устремлении запаздываний или других «неидеальностей» к нулю, получаем описание идеального скользящего движения.

В последнее время наибольшее распространение получило аксиоматическое описание скользящего движения, предложенное А. Ф. Филипповым [56]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{f}^0 = \mu \mathbf{f}^+ + (1 - \mu) \mathbf{f}^- \quad (0 \leq \mu \leq 1). \quad (8.7)$$

Параметр μ определяется из условия, что вектор $\mathbf{f}^0$ располагается на касательной к поверхности скольжения плоскости. В случае скалярного управления это условие можно записать в виде

$$\text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}^0 = 0.$$

Подставив сюда выражение для $\mathbf{f}^0$ из (8.7), получим

$$\text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}^0 = \text{grad } s(\mathbf{x}) [\mu \mathbf{f}^+ + (1 - \mu) \mathbf{f}^-] = 0.$$

Отсюда находим

$$\mu = \frac{\text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}^-}{\text{grad } s(\mathbf{x})(\mathbf{f}^- - \mathbf{f}^+)}.$$

При подстановке этого выражения в уравнение (8.7) последнее принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}^-}{\text{grad } s(\mathbf{x})(\mathbf{f}^- - \mathbf{f}^+)} \mathbf{f}^+ - \frac{\text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}^+}{\text{grad } s(\mathbf{x})(\mathbf{f}^- - \mathbf{f}^+)} \mathbf{f}^-, \quad s(\mathbf{x}(0)) = 0. \quad (8.8)$$

Метод эквивалентного управления [56]. Согласно этому методу уравнение скользящего движения определяется следующим образом.

1) Вычисляется производная по времени функции переключения $s(\mathbf{x})$ в силу уравнения (8.4а) и приравняется к нулю:

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \frac{ds(\mathbf{x})}{dx} \dot{\mathbf{x}} = \text{grad } s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) = 0. \quad (8.9)$$

2) Из уравнения (8.9) определяется управление. Полученное при этом управление называют *эквивалентным управлением*.

3) Подстановкой эквивалентного управления в уравнение (8.4а) находится уравнение скользящего движения.

Пусть в уравнение объекта управление входит линейно:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)u, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R. \quad (8.10)$$

В этом случае уравнение (8.9) принимает вид

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \frac{ds(\mathbf{x})}{dx} [\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)u] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} [g_i(\mathbf{x}, t) + b_i(\mathbf{x}, t)u] = 0.$$

Отсюда находим эквивалентное управление

$$u_{\text{э}} = - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} g_i(\mathbf{x}, t) \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} b_i(\mathbf{x}, t) \right)}.$$

Подставив это выражение для управления в уравнение объекта (8.10), получим

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} g_i(\mathbf{x}, t) \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} b_i(\mathbf{x}, t) \right)}. \quad (8.11)$$

Это уравнение при условии $s(\mathbf{x}) = 0$ является *уравнением скользящего движения*. Выразив из уравнения $s(\mathbf{x}) = 0$ переменную x_n и подставив в (8.11), получим уравнение скольжения $(n-1)$ -го порядка.

Для сравнения получим уравнение скользящего движения для объекта (8.10) методом Филиппова. В этом случае имеем

$$\mathbf{f}^- = \mathbf{g} + \mathbf{b}u^-, \quad \mathbf{f}^+ = \mathbf{g} + \mathbf{b}u^+.$$

Уравнение (8.8) при подстановке этих выражений принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} (g_i + b_i u^-) \right] (\mathbf{g} + \mathbf{b} u^+) - \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} (g_i + b_i u^+) \right] (\mathbf{g} + \mathbf{b} u^-)}{\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} b_i \right] (u^- - u^+)},$$

или, в скалярной форме,

$$\dot{x}_k = \frac{\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} (g_i + b_i u^-) \right] (g_k + b_k u^+) - \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} (g_i + b_i u^+) \right] (g_k + b_k u^-)}{\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} b_i \right] (u^- - u^+)},$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Раскрыв скобки, после преобразования получим

$$\dot{x}_k = g_k - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} g_i \right) b_k}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} b_i}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Эти уравнения описывают скользящее движение при условии $s(\mathbf{x}(0)) = 0$.

Если последние уравнения записать в векторной форме, то они принимают вид (8.11). Таким образом, в случае, когда объект описывается уравнением (8.10), уравнения скользящего движения, которые получаются методом эквивалентного управления и методом Филиппова, совпадают.

8.2.3. Стабилизация линейного стационарного объекта.

Рассмотрим задачу стабилизации в случае, когда объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad u \in R. \quad (8.12)$$

Пусть поверхность переключения является плоскостью и задается уравнением

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i x_i = 0. \quad (8.13)$$

Здесь элементы $(n \times n)$ -матрицы A и $(n \times 1)$ -матриц (векторов-столбцов) $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ являются постоянными. Производная по времени функции переключения в силу уравнения (8.12) имеет вид

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u).$$

Если выбрать закон управления вида (8.46), то

$$s^+ = \mathbf{c}^T (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u^+), \quad s^- = \mathbf{c}^T (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u^-).$$

При этом условие скольжения (8.5) принимает вид

$$s^+ = \mathbf{c}^T (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u^+) < 0, \quad s^- = \mathbf{c}^T (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u^-) > 0,$$

или

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) u^+ < - \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n a_{i k} x_k, \quad (8.14a)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) u^- > - \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n a_{i k} x_k. \quad (8.14б)$$

Как будет показано дальше, это условие остается в силе, если выбрать закон управления вида

$$u = - \sum_{i=1}^n \psi_i x_i, \quad \psi_i = \begin{cases} \alpha_i, & x_i s > 0, \\ \beta_i, & x_i s < 0. \end{cases} \quad (8.15)$$

Функция ψ_i терпит разрыв не только на плоскости переключения, но и на координатных плоскостях $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Однако управление на координатных плоскостях не терпит разрыва, так как на этих плоскостях управление обращается в нуль.

Условия скольжения. Для того чтобы в системе (8.12), (8.15) возникло скользящее движение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) \alpha_k > \sum_{i=1}^n c_i a_{i k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (8.16a)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) \beta_k < \sum_{i=1}^n c_i a_{i k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.16б)$$

Доказательство. Условия (8.16) получается из условий (8.14). Введем обозначения: $\psi_i = \psi_i^+$ при $s(\mathbf{x}) > 0$; $\psi_i = \psi_i^-$ при $s(\mathbf{x}) < 0$. В соответствии с алгоритмом (8.15) имеем

$$\psi_i^+ = \begin{cases} \alpha_i, & x_i > 0, \\ \beta_i, & x_i < 0 \end{cases} \quad (s(x) > 0), \quad (8.17a)$$

$$\psi_i^- = \begin{cases} \beta_i, & x_i > 0, \\ \alpha_i, & x_i < 0 \end{cases} \quad (s(x) < 0). \quad (8.17б)$$

Если, как в алгоритме управления (8.4б), положить $u = u^+$ при $s(x) > 0$ и $u = u^-$ при $s(x) < 0$, то

$$u^+ = - \sum_{i=1}^n \psi_i^+ x_i, \quad u^- = - \sum_{i=1}^n \psi_i^- x_i. \quad (8.18)$$

Достаточность. Подставим выражение для u^+ из (8.18) в условие скольжения (8.14a):

$$- \left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) \sum_{k=1}^n \psi_k^+ x_k < - \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^n a_{i k} x_k.$$

Поменяв порядок суммирования и умножив на -1 , находим

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) \psi_k^+ x_k > \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n c_i a_{ik} \right) x_k.$$

Последнее неравенство будет выполнено, если при $x_k > 0$

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) \psi_k^+ > \sum_{i=1}^n c_i a_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и при $x_k < 0$

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) \psi_k^+ < \sum_{i=1}^n c_i a_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Подставив в эти неравенства значение ψ_k^+ из (8.17а), получим

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) \alpha_k > \sum_{i=1}^n c_i a_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i b_i \right) \beta_k < \sum_{i=1}^n c_i a_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Эти неравенства совпадают с неравенствами (8.16). Итак, если выполняются неравенства (8.16), то выполняется неравенство (8.14а). Аналогично можно показать, что если выполняются неравенства (8.16), то выполняется и второе условие скольжения (8.14б). Таким образом, выполнение неравенств (8.16) является достаточным условием существования скользящего режима.

Необходимость. Допустим, что при каком-либо $k = r$ условие (8.16) не выполняется. Тогда в точке с координатами $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $i \neq r$) и $x_r > 0$ при $s(x) > 0$

$$\dot{s}^+(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(A\mathbf{x} + \mathbf{b}u^+) = \left(\sum_{i=1}^n c_i a_{ir} - \sum_{i=1}^n c_i b_i \alpha_r \right) x_r \geq 0$$

и при $s(\mathbf{x}) > 0$

$$\dot{s}^-(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(A\mathbf{x} + \mathbf{b}u^-) = \left(\sum_{i=1}^n c_i a_{ir} - \sum_{i=1}^n c_i b_i \beta_r \right) x_r \leq 0,$$

т.е. условие скольжения (8.5) не выполняется. Необходимость доказана.

Если выполняется условие скольжения (8.16), то $s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) < 0$. Следовательно, условие скольжения (8.16) является одновременно и условием достижимости.

Условие скольжения при частичном измерении фазовых координат. Рассмотрим случай, когда в законе управления используются не все, а k первых фазовых координат с разрывными

коэффициентами:

$$u = - \sum_{i=1}^k \psi_i x_i - \delta_u, \quad \psi_i = \begin{cases} \alpha_i, & x_i s > 0, \\ \beta_i, & x_i s < 0, \end{cases} \quad (8.19a)$$

$$\delta_u = \begin{cases} \delta_0, & s(\mathbf{x}) > 0, \\ -\delta_0, & s(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad \delta_0 = |\delta_0| \operatorname{sign}(\mathbf{c}^T \mathbf{b}). \quad (8.19b)$$

Здесь δ_0 — сколь угодно малое отличное от нуля число, знак которого совпадает со знаком $\mathbf{c}^T \mathbf{b}$. Цель введения слагаемого δ_u в закон управления будет пояснено дальше.

Условие скольжения. Для того чтобы плоскость $s = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$ ($c_n = 1$) была плоскостью скольжения для системы (8.12), (8.19), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$(\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \alpha_j \geq \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (8.20a)$$

$$(\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \beta_j \leq \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (8.20b)$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} = c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}), \quad j = k+1, \dots, n-1, \quad (8.20b)$$

где $\mathbf{a}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) — j -й столбец матрицы A [56].

При $k = n-1$ равенств (8.20b) не будет, и необходимое и достаточное условие скольжения принимает вид

$$(\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \alpha_j \geq \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$(\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \beta_j \leq \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Доказательство. Производную по времени функции переключения $s(\mathbf{x})$ в силу уравнений (8.12), (8.19) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{s}(\mathbf{x}) &= \frac{ds}{d\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)}) x_j - \mathbf{c}^T \mathbf{b} \left(\sum_{j=1}^k \psi_j x_j + \delta_u \right) = \\ &= \sum_{j=1}^k [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \psi_j] x_j + \sum_{j=k+1}^n (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)}) x_j - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \delta_u. \end{aligned}$$

Учитывая, что из уравнения плоскости переключения имеем $x_n = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i$, последнее соотношение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \dot{s}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^k [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \psi_j - c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})] x_j + \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{n-1} [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})] x_j - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \delta_u. \end{aligned}$$

Достаточность. При выполнении равенств (8.20b) вторая сумма в последнем соотношении обращается в нуль, и оно принимает вид

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \psi_j - c_j(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})] x_j - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \delta_u. \quad (8.21)$$

При $s(\mathbf{x}) > 0$ и $x_j > 0$ из соотношений (8.19) имеем $\psi_j = \alpha_j$ и $\delta_u = |\delta_0| \operatorname{sign}(\mathbf{c}^T \mathbf{b})$. Поэтому в этом случае последнее соотношение примет вид

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \alpha_j - c_j(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})] x_j - |(\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \delta_0|.$$

Отсюда находим

$$s^+ = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow +0} \dot{s}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \alpha_j - c_j(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})] x_j - |(\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \delta_0|.$$

Из этого равенства следует, что для того чтобы выполнялось неравенство $s^+ < 0$ в условии скольжения (8.5), достаточно, чтобы имело место неравенство

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \alpha_j - c_j(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

т.е. выполнялось условие (8.20а).

При $s(\mathbf{x}) > 0$ и $x_j < 0$ из соотношений (8.19) имеем $\psi_j = \beta_j$ и $\delta_u = |\delta_0| \operatorname{sign}(\mathbf{c}^T \mathbf{b})$. Поэтому в этом случае имеем

$$s^+ = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow +0} \dot{s}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \beta_j - c_j(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})] x_j - |(\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \delta_0|.$$

И для того чтобы выполнялось неравенство $s^+ < 0$ в условии скольжения (8.5), достаточно, чтобы имело место неравенство

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \beta_j - c_j(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

т.е. выполнялось условие (8.20б).

Таким образом, выполнение соотношений (8.20) является достаточным условием для выполнения неравенства $s^+ < 0$ в условии скольжения (8.5). Аналогично доказывается, что выполнение соотношений (8.20) является достаточным условием для выполнения неравенства $s^- > 0$ в условии скольжения (8.5).

Необходимость. Допустим, что соотношения (8.20) при $j = r$ не выполняются. Тогда условие скольжения (8.5) в точке с координатами $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $i \neq r$) и $x_r \neq 0$ ($|x_r| \gg |\delta_0|$) не будет выполнено. Действительно, в этой точке имеем: при $r \leq k$

$$\dot{s} = [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \psi_r - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})] x_r - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \delta_u \quad (8.22a)$$

и при $r > k$ ($r \leq n - 1$)

$$\dot{s} = [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})] x_r - (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \delta_u. \quad (8.22б)$$

И если при $r \leq k$ r -е неравенство в условии (8.20а) не выполняется, т. е. имеет место неравенство

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\alpha_r - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) > 0,$$

то при $x_r > 0$ и $|x_r| \gg |\delta_0|$ из (8.22а) и (8.19) получаем

$$\dot{s}^+ = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow +0} \dot{s} = [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\alpha_r - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})]x_r - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\delta > 0.$$

Если при $r \leq k$ r -е неравенство в условии (8.20б) не выполняется, т. е. имеет место неравенство

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\beta_r - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) < 0,$$

то при $x_r > 0$ и $|x_r| \gg \delta_0|$ из (8.22а) и (8.19) получаем

$$\dot{s}^- = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow -0} \dot{s} = [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\beta_r - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})]x_r - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\delta < 0.$$

Следовательно, при $r \leq k$ условие скольжения ($s^+ < 0$, $s^- > 0$) не выполняется, если не выполняются соотношения (8.20).

При $r > k$ не выполняется r -е неравенство в условии (8.20в), т. е. имеет место неравенство

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) > 0 \quad (8.23а)$$

или

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) < 0. \quad (8.23б)$$

При $x_r > |\delta_0|$ из (8.22б) и (8.19) находим

$$\dot{s}^+ = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow +0} \dot{s} = [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})]x_r - |(\mathbf{c}^T \mathbf{b})\delta_0| > 0,$$

если имеет место неравенство (8.23а), и

$$\dot{s}^- = \lim_{s(\mathbf{x}) \rightarrow -0} \dot{s} = [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(r)} - c_r(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})]x_r - |(\mathbf{c}^T \mathbf{b})\delta_0| < 0,$$

если имеет место неравенство (8.23б). Следовательно, и при $r > k$ условие скольжения ($s^+ < 0$, $s^- > 0$) не выполняется, если не выполняются соотношения (8.20). Таким образом, необходимость выполнения соотношений (8.20) для возникновения режима скольжения доказана.

Теперь поясним, чем вызвано включение в закон управления (8.19) малого слагаемого δ_u . При $k < n - 1$ на поверхности переключения $s(\mathbf{x}) = 0$ в точках, в которых $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$), имеют место равенства $\dot{s}^+ = 0$ и $\dot{s}^- = 0$. Поэтому если принять $\delta_u = 0$, то при попадании в одну из таких точек, не являющуюся началом координат, изображающая точка может не устремиться к положению равновесия или при попадании в начало координат по указанным точкам может удалиться из положения равновесия.

При $k = n - 1$ можно принять $\delta_u = 0$, так как в этом случае на поверхности переключения $s(\mathbf{x}) = 0$ равенства $\dot{s}^+ = 0$ и $\dot{s}^- = 0$

имеют место только в начале координат. Действительно, в этом случае $\dot{s}^+ = 0$ и $\dot{s}^- = 0$ в точках $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Но такая точка одна, так как в этом случае из $s(\mathbf{x}) = 0$ следует, что и $x_n = 0$.

При синтезе СПС (8.12), (8.19) в случае $k < n-1$ постоянные c_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) нельзя назначать произвольно, так как они должны удовлетворять условию (8.20в). При $k = n-1$ эти постоянные можно назначать произвольно, так как в этом случае условие (8.20в) отсутствует. Выполнение условий (8.20а) и (8.20б) обеспечиваются выбором констант α_j и β_j ($j = 1, 2, \dots, k$).

Пример 8.4. Система с переменной структурой (СПС) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \\ u &= -\psi x_1 - \delta_u, \quad \psi = \begin{cases} \alpha, & s > 0, \\ \beta, & s < 0, \end{cases} \quad s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3, \\ \delta_u &= \begin{cases} \delta_0, & s(x) > 0, \\ -\delta_0, & s(x) < 0, \end{cases} \quad \delta_0 = |\delta_0| \operatorname{sign}(\mathbf{c}^T \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Требуется определить параметры α , β , c_1 и c_2 , при которых СПС совершает скользящее движение, а степень устойчивости при этом движении принимает максимальное значение.

Решение. В данном случае $k = 1$, $n = 3$ и условия скольжения (8.20) принимают вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\alpha &\geq \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(1)} - c_1(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(3)}), \\ (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\beta &\leq \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(1)} - c_1(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(3)}), \\ \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(2)} &= c_2(\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(3)}). \end{aligned}$$

Матрица A и векторы-столбцы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ имеют соответственно вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{c}^T \mathbf{b} = 1, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(2)} = c_1, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(3)} = c_2.$$

Условия скольжения принимают вид

$$\alpha \geq -c_1 c_2, \quad \beta \leq -c_1 c_2, \quad c_1 = c_2^2,$$

или

$$-\alpha \leq c_2^3 \leq -\beta, \quad c_1 = c_2^2.$$

Методом эквивалентного управления получим уравнение скользящего движения. Однако в данном случае нет необходимости непосредственно вычислять эквивалентное управление. Это связано с тем, что в первые два уравнения не входит управление, а переменную x_3 при скользящем движении можно найти из уравнения плоскости скольжения. Исключив из первых двух уравнений переменную x_3 ,

получим уравнения скользящего движения. Из уравнения $s(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3 = 0$ находим $x_3 = -c_1 x_1 - c_2 x_2$. Подставив это выражение во второе уравнение объекта, получим следующие уравнения для скользящего движения:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -c_1 x_1 - c_2 x_2.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -c_1 & -c_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + c_2 \lambda + c_1 = 0.$$

Его корнями являются

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c_2}{2} \pm \sqrt{\frac{c_2^2 - 4c_1}{4}} = -\frac{c_2}{2} \pm j c_2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При вычислении этих корней учтена зависимость $c_1 = c_2^2$ в условиях скольжения. Как следует из условий скольжения, степень устойчивости $\eta = c_2/2$ принимает максимальное значение при $c_2 = \sqrt[3]{-\beta}$. Если значение параметра β ($\beta < 0$) из каких-либо соображений установлено, параметры c_1 и c_2 определяются однозначно:

$$c_2 = \sqrt[3]{-\beta}, \quad c_1 = c_2^2 = \sqrt[3]{\beta^2}.$$

В соответствии с условиями скольжения значение параметра α выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha \geq \beta$.

Условие устойчивости скользящего движения. Свойство (устойчивость и качество) скользящего движения в значительной степени зависит от плоскости скольжения $s(\mathbf{x}) = 0$. При ее выборе нужно прежде всего позаботиться об устойчивости скользящего движения. Как уже отмечалось, в случае системы с переменной структурой (8.12), (8.19) в силу необходимости выполнения соотношения (8.20в) плоскость скольжения произвольно выбрать нельзя. Рассмотрим, при каких условиях скользящее движение указанной системы будет асимптотически устойчиво.

Теорема 8.1 ([56]). *Для того чтобы скользящее движение системы (8.12), (8.19) на плоскости $s(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$ ($c_n = 1$) было асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы (8.12) при эквивалентном управлении, кроме корня $\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}$, имели отрицательную вещественную часть.*

Доказательство. Пусть уравнение, которое получается при подстановке в (8.12) эквивалентного управления, имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{x}. \quad (8.24)$$

Если в этом уравнении исключить переменную x_n , выразив ее через остальные фазовые переменные из уравнения $s(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$, то получим уравнение скользящего движения. Поэтому чтобы доказать теорему, достаточно показать, что характеристическое уравнение

системы (8.24) имеет один корень $\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}$, а остальные его корни совпадают с корнями характеристического уравнения скользящего движения.

Производная по времени функции $s(\mathbf{x})$ в силу уравнения (8.12) имеет вид

$$\dot{s} = \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)})x_j + (\mathbf{c}^T \mathbf{b})u.$$

Уравнение (8.12) в скалярной форме примет вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В этих уравнениях заменим переменную x_n на s . Для этого последнее уравнение этой системы заменим на приведенное уравнение для s

и исключим переменную x_n , сделав подстановку $x_n = s - \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j$.

Тогда получим

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j + a_{in} \left(s - \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j \right) + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\dot{s} = \sum_{j=1}^{n-1} (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)})x_j + \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)} \left(s - \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j \right) + (\mathbf{c}^T \mathbf{b})u,$$

или

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n-1} (a_{ij} - a_{in}c_j)x_j + a_{in}s + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (8.25a)$$

$$\dot{s} = \sum_{j=1}^{n-1} [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})c_j]x_j + (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})s + (\mathbf{c}^T \mathbf{b})u. \quad (8.25b)$$

Найдем эквивалентное управление. Для этого в уравнении (8.25b) положим $\dot{s} = 0$, $s = 0$ и разрешим его относительно управления:

$$u = -\frac{1}{(\mathbf{c}^T \mathbf{b})} \sum_{j=1}^{n-1} [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})c_j]x_j. \quad (8.26)$$

Подставив это выражение для управления в (8.25), получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ a_{ij} - a_{in}c_j - \frac{b_i}{\mathbf{c}^T \mathbf{b}} [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})c_j] \right\} x_j + a_{in}s, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{s} &= (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})s. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\mathbf{x}^{(1)} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1})^T, \quad \tilde{\mathbf{a}}^{(n)} = (a_{1n} \ a_{2n} \ \dots \ a_{n-1n})^T, \quad A^{(1)} = (a_{ij}^1),$$

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - a_{in}c_j - \frac{b_i}{\mathbf{c}^T \mathbf{b}} [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})c_j], \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1,$$

последнюю систему можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A^{(1)} \mathbf{x}^{(1)} + \tilde{\mathbf{a}}^{(n)} s, \quad (8.27a)$$

$$\dot{s} = (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) s, \quad (8.27b)$$

или

$$\dot{\mathbf{z}} = C \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ s \end{pmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A^{(1)} & \tilde{\mathbf{a}}^{(n)} \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (8.28)$$

Здесь $\mathbf{0}_{n-1}$ — вектор-строка, состоящая из $n-1$ нулей.

Характеристическое уравнение последней системы имеет вид

$$|C - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} A^{(1)} - \lambda I_{n-1} & \tilde{\mathbf{a}}^{(n)} \\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)} - \lambda \end{vmatrix} = \\ = |A^{(1)} - \lambda I_{n-1}| (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)} - \lambda) = 0,$$

где I_{n-1} — единичная матрица порядка $n-1$. Один корень этого уравнения равен $\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}$, а остальные корни находятся из уравнения

$$|A^{(1)} - \lambda I_{n-1}| = 0.$$

При $s = 0$ уравнение (8.27a) является уравнением скользящего движения, и его характеристическое уравнение совпадает с приведенным выше уравнением. Таким образом, характеристическое уравнение системы (8.27) имеет один корень $\lambda = \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}$ и остальные корни, равные корням характеристического уравнения скользящего движения. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, корни характеристического уравнения системы (8.24) совпадают с корнями характеристического уравнения системы (8.28).

Уравнение (8.28) получается из уравнения (8.24) путем преобразования

$$x_i = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad x_n = z_n - (c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_{n-1} z_{n-1}),$$

или

$$\mathbf{x} = T \mathbf{z}, \quad T = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0}^{n-1} \\ -\tilde{\mathbf{c}}^T & 1 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{0}^{n-1}$ — нулевой вектор-столбец $(n-1)$ -го порядка. Матрица T является неособой ($\det T = 1$) и собственные значения матриц D и $C = T^{-1}DT$ совпадают. Теорема доказана.

Синтез устойчивого скользящего движения. Рассмотрим, как на основе доказанной теоремы синтезировать закон управления СПС (8.12), (8.19), при котором обеспечивается асимптотически устойчивое скользящее движение. Так как условия скольжения рассматриваемой системы включает равенство (8.20в), то эквивалентное управление (8.26) принимает вид

$$u = -\frac{1}{(\mathbf{c}^T \mathbf{b})} \sum_{j=1}^k [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})c_j] x_j. \quad (8.29)$$

Этот закон управления зависит от первых k фазовых координат x_j ($j = 1, 2, \dots, k$). Рассмотрим закон управления

$$u = - \sum_{j=1}^k \gamma_j x_j \quad (\gamma_j = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq n-1).$$

Допустим, что в этом законе выбраны такие коэффициенты γ_j , что характеристическое уравнение системы (8.12) при таком законе управления имеет один произвольный корень λ^0 , а остальные корни имеют отрицательную вещественную часть. Тогда, положив $\lambda^0 = \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}$ и приравняв γ_j коэффициенту при x_j в эквивалентном управлении (8.29), с учетом условия (8.20в) получим

$$\frac{1}{(\mathbf{c}^T \mathbf{b})} [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) c_j] = \gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) = 0, \quad j = k+1, \dots, n-1,$$

$$\lambda^0 = \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}.$$

Эту систему можно преобразовать к виду

$$[\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - \lambda^0 c_j] = (\mathbf{c}^T \mathbf{b}) \gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (8.30a)$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - c_j \lambda^0 = 0, \quad j = k+1, \dots, n-1, \quad (8.30б)$$

$$\lambda^0 = \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}. \quad (8.30в)$$

Очевидно, если из этой системы определить постоянные c_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$), то получим поверхность скольжения.

Итак, из изложенного выше вытекает следующий порядок синтеза асимптотически устойчивого скользящего движения.

1) На основе заданного уравнения объекта выбрать закон управления $u = - \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j x_j$, при котором все корни характеристического уравнения замкнутой системы, кроме одного, имеют отрицательную вещественную часть.

2) Решив систему уравнений (8.30), найти коэффициенты c_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$).

3) Постоянные α_j и β_j ($j = 1, 2, \dots, k$) в законе управления (8.19) установить такими, чтобы выполнялись соотношения (8.20а) и (8.20б) в условии скольжения.

Решение задачи первого этапа тем проще, чем больше k . Однако чем больше k , тем сложнее реализация закона управления (8.19). Сложность решения задачи первого этапа при малых k обусловлена тем, что при выборе эквивалентного управления, кроме обеспечения требований к устойчивости и качеству скользящего движения, нужно позаботиться о том, чтобы система уравнений (8.30) была разрешима.

Как отмечалось, при $k = n-1$ на c_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) никаких ограничений не накладывается. Поэтому в этом случае при синтезе

эквивалентного управления нужно исходить только из требований к устойчивости и качеству скользящего режима.

Пример 8.5. СПС описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u,$$

$$u = \psi x_1 + \delta_u, \quad \psi = \begin{cases} \alpha, & x_1 s > 0, \\ \beta, & x_1 s < 0, \end{cases}$$

где δ_u определяется соотношением (8.196). Требуется установить, существует ли плоскость скольжения

$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + x_4 = 0,$$

на которой скользящее движение является асимптотически устойчивым.

Решение. В данном случае в качестве эквивалентного управления можно принять $u = -\gamma x_1$, и уравнение замкнутой системы принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -\gamma x_1,$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}\mathbf{x}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Корнями характеристического уравнения

$$|\tilde{A} - I\lambda| = \lambda^4 + \gamma = 0$$

являются

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\gamma} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt[4]{\gamma} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Выбором γ нельзя обеспечить требования, чтобы три корня имели отрицательную вещественную часть. Следовательно, не существует плоскости скольжения, по которой скользящее движение было асимптотически устойчиво.

Пример 8.6. СПС описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u,$$

$$u = \psi x_1 + \delta_u, \quad \psi = \begin{cases} \alpha, & x_1 s > 0, \\ \beta, & x_1 s < 0, \end{cases}$$

где δ_u определяется соотношением (8.196). Требуется установить, существует ли плоскость скольжения

$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3 = 0,$$

на которой скользящее движение является асимптотически устойчивым, и определить эту плоскость, если она существует.

Решение. В качестве эквивалентного управления принимаем $u = -\gamma x_1$. Уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -\gamma x_1,$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}\mathbf{x}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$|\tilde{A} - I\lambda| = -\lambda^3 - \gamma = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = -\sqrt[3]{\gamma}, \quad \lambda_{2,3} = \sqrt[3]{\gamma} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Если γ принимает отрицательное значение, то один вещественный корень будет положительным, два комплексно сопряженных корня будут иметь отрицательную вещественную часть. Так что в данном случае можно выбрать плоскость скольжения, на которой скользящее движение будет асимптотически устойчивым. Найдем эту плоскость.

Если уравнение объекта записать в векторной форме, то матрица A и вектор $\mathbf{b}$ имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система (8.30) принимает вид

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{a}^{(1)} - \mathbf{b}\gamma) - \lambda^0 c_1 = 0, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(2)} - c_2 \lambda^0 = 0, \quad \lambda^0 = \mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(3)}.$$

Так как столбцы матрицы A имеют вид

$$\mathbf{a}^{(1)} = (0 \ 0 \ 0)^T, \quad \mathbf{a}^{(2)} = (1 \ 0 \ 0)^T, \quad \mathbf{a}^{(3)} = (0 \ 1 \ 0)^T,$$

то из последних соотношений получаем

$$-\gamma - c_1 \lambda^0 = 0, \quad c_1 - c_2 \lambda^0 = 0, \quad \lambda^0 = c_2.$$

Отсюда находим

$$\lambda_0 = -\sqrt[3]{\gamma}, \quad c_1 = \sqrt[3]{\gamma^2}, \quad c_2 = -\sqrt[3]{\gamma}.$$

Напомним, что коэффициент γ должен быть отрицательным. Параметры α и β должны удовлетворять неравенствам (см. (8.20а) и (8.20б)) $\alpha \geq -c_1 c_2 = \gamma$ и $\beta \leq -c_1 c_2 = \gamma$.

Условия попадания. Если выполняются условия скольжения и скользящее движение асимптотически устойчиво, то для того чтобы система с переменной структурой была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы изображающая точка из произвольной точки фазового пространства попала на плоскость скольжения. Условия, при выполнении которых изображающая точка из произвольной точки попадает на плоскость скольжения, называются *условиями попадания* [56].

Пусть скользящее движение системы с переменной структурой (8.12), (8.19) асимптотически устойчиво. Так как на плоскости $s = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$ возникает скользящее движение, выполняются условия скольжения (8.20). Если изображающая точка не находится на плоскости переключения, то до попадания изображающей точки на эту плоскость знак функции переключения $s = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ не изменяется, и функция δ_u в законе управления (8.19) остается постоянной и принимает значение δ_0 или $-\delta$. Рассматриваемая СПС включает 2^k линейных структур, которые описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A_l \mathbf{x} \pm \mathbf{b} \delta_0, \quad (8.31)$$

где A_l ($l = 1, 2, \dots, 2^k$) — матрицы, которые описывают структуры замкнутой системы, получающейся при подстановке управления (8.19) в уравнение объекта (8.12). При этом ψ_i принимает определенные значения: α_i или β_i .

Каждая из структур определяется одной из матриц A_l ($l = 1, 2, \dots, 2^k$), и ее движения описываются уравнением (8.31). Фазовое пространство R^n разбивается на 2^k областей, в каждой из которых движение СПС описывается уравнением одной из структур. Область, в которой движение СПС описывается уравнением данной структуры, называют областью определения этой структуры.

Теорема 8.2 (достаточное условие попадания [56]). *Если выполняется условие скольжения (8.20), то для того чтобы изображающая точка СПС (8.12), (8.19) попала на плоскость скольжения $s = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$ ($c_n = 1$), достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)} \leq 0, \quad (8.32)$$

где $\mathbf{a}^{(n)}$ — n -й столбец матрицы A .

Доказательство. Производная по времени функции переключения $s = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ в силу уравнений (8.12), (8.19) при подстановке

$$x_n = s - \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j \text{ принимает вид}$$

$$\begin{aligned} \dot{s} = (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})s + \sum_{j=1}^k [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)}) - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\psi_j] x_j + \\ + \sum_{j=k+1}^{n-1} [\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(j)} - c_j (\mathbf{c}^T \mathbf{a}^{(n)})] x_j - (\mathbf{c}^T \mathbf{b})\delta_u. \end{aligned}$$

Допустим, что имеет место неравенство $s(\mathbf{x}(0)) > 0$. Тогда до попадания изображающей точки на поверхность переключения $s(\mathbf{x}) > 0$. И так как выполняются условия (8.20), (8.32) и в силу (8.196) имеет место равенство $(\mathbf{c}^T \mathbf{b})\delta_0 = |(\mathbf{c}^T \mathbf{b})\delta_0|$, то производная отрицательна и удовлетворяет неравенству $\dot{s} < -|(\mathbf{c}^T \mathbf{b})\delta_0|$. Следовательно, изображающая точка попадет на плоскость скольжения за конечное время. Теорема доказана.

Рассмотрим СПС, которая описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = -\sum_{i=1}^n a_i x_i - u - f(t), \end{cases} \quad (8.33a)$$

$$u = -\sum_{i=1}^{n-1} \psi_i x_i - \delta_u, \quad \psi_i = \begin{cases} \alpha_i, & x_i s > 0, \\ \beta_i, & x_i s < 0, \end{cases} \quad \delta_u = \begin{cases} \delta_0, & s > 0, \\ -\delta_0, & s < 0. \end{cases} \quad (8.33b)$$

Здесь $f(t)$ — возмущение.

Приведем без доказательства достаточное условие попадания изображающей точки системы (8.33) на плоскость скольжения.

Теорема 8.3 [56]. Если коэффициенты c_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) функции переключения $s = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ ($c_n = 1$) положительны, то для того чтобы изображающая точка попала на плоскость $s = 0$, достаточно, чтобы характеристическое уравнение системы при $\psi_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) не имело положительных вещественных корней и выполнялись условия

$$\alpha_i \geq -\alpha_i, \quad \beta_i \leq -a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

8.3. Синтез систем, основанный на методе функций Ляпунова

Как отмечалось, одним из основных требований к системе управления является устойчивость. Поэтому задача синтеза закона управления, обеспечивающего устойчивость системы управления, является очень важной. В данном параграфе рассмотрим способы синтеза устойчивых систем с помощью функций Ляпунова.

Напомним: управляемая система (объект)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r,$$

называется *вполне управляемой*, если существует кусочно непрерывное управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, переводящее систему из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние за конечное время, и *стабилизируемой*, если существует закон управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, при котором замкнутая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t)$$

устойчива. Управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, которое обеспечивает устойчивость замкнутой системы, называют *стабилизирующим управлением*. В гл. 1 были рассмотрены необходимые и достаточные условия управляемости и стабилизируемости линейных стационарных управляемых систем.

8.3.1. Синтез параметров регулятора. Рассмотрим сначала задачу синтеза системы управления, когда структура задана и требуется определить параметры, при которых она устойчива. Сделаем это на примере решения упрощенной задачи управления курсом самолета.

В упрощенном виде движение самолета по курсу (боковое движение) может быть описано следующими уравнениями [10]:

$$T\ddot{\psi} + \dot{\psi} = -b\delta, \quad \dot{\delta} = f(u), \quad u = k_{\psi}\psi + k_{\dot{\psi}}\dot{\psi} - k_{\delta}\delta.$$

Здесь ψ — курсовой угол самолета; δ — отклонение руля; u — управление; T, b — фиксированные положительные постоянные; $k_{\psi}, k_{\dot{\psi}}, k_{\delta}$ — параметры регулятора; нелинейная функция $f(u)$ обладает следующими свойствами:

$$f(0) = 0, \quad f(u)u > 0 \quad \text{при} \quad u \neq 0.$$

Пусть требуется определить множество значений параметров регулятора, при которых положение равновесия является асимптотически устойчивым.

Запишем уравнения движения самолета в нормальной форме. Для этого введем новые переменные:

$$x_1 = \dot{\psi} + b\delta, \quad x_2 = \delta, \quad x_3 = u.$$

В этих переменных уравнения бокового движения самолета примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{T}x_1 + bf(x_3), \\ \dot{x}_2 &= f(x_3), \\ \dot{x}_3 &= -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3f(x_3), \end{aligned}$$

где $a_1 = k_{\dot{\psi}}/T - k_{\psi}$, $a_2 = k_{\psi}b$, $a_3 = k_{\delta}$.

В качестве «кандидата» на функцию Ляпунова примем

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \alpha x_2^2) + q \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3.$$

При положительных α и q эта форма является положительно определенной функцией. Производная по времени в силу уравнений движения самолета имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= x_1 \left(-\frac{1}{T}x_1 + bf(x_3) \right) + \alpha x_2 f(x_3) - \\ &\quad - qf(x_3)(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3f(x_3)). \end{aligned}$$

Если положить $q = b/a_1$, $\alpha = ba_2/a_1$, то производная примет вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{T}x_1^2 - qa_3f^2(x_3).$$

Параметры q и α будут положительны, а производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ будет отрицательно полуопределенной, если $a_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$), или $k_{\dot{\psi}} > Tk_{\psi}$, $k_{\dot{\psi}} > 0$, $k_{\delta} > 0$.

Производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ обращается в нуль вне начала координат на многообразии

$$\frac{1}{T} x_1^2 + qa_3 f^2(x_3) = 0,$$

или

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0$$

На этом многообразии компоненты фазовой скорости имеют вид $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, $\dot{x}_3 = -ax_2$. Поэтому если изображающая точка попадает на это многообразие, то она сразу его покидает при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, в соответствии с обобщенной теоремой об асимптотической устойчивости (теорема 4.8) положение равновесия самолета асимптотически устойчиво при $k_\psi > Tk_\psi$, $k_\psi > 0$, $k_\delta > 0$.

8.3.2. Достаточное условие стабилизируемости и синтез законов управления. Рассмотрим управляемую систему, которая описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r, \quad t \geq t_0, \quad (8.34a)$$

и закон управления

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (8.34b)$$

Начало координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является положением равновесия замкнутой системы (8.34):

$$\mathbf{g}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \quad t \geq t_0.$$

Согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости система (8.34) асимптотически устойчива, если существует положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, такая, что ее производная по времени в силу уравнений (8.34) является отрицательно определенной, т.е. существует положительно определенная функция $w(\mathbf{x}, t)$ такая, что выполняется неравенство

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -w(\mathbf{x}, t) \quad \forall t \geq t_0. \quad (8.35)$$

Если положительно определенные функции $V(\mathbf{x}, t)$ и $w(\mathbf{x}, t)$ заданы, то соотношение (8.35) определяет достаточное условие стабилизируемости. На множестве

$$\Omega_0 = \left\{ \mathbf{x}, t: \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0 \right\} \quad (8.36)$$

условие (8.35) принимает вид

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -w(\mathbf{x}, t) \quad \forall t \geq t_0. \quad (8.37)$$

Представим закон управления в виде [59]

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{l}(\mathbf{x}, t), \quad (8.38)$$

где $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ — функция, которая обращается в нуль на множестве Ω_0 , $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ — произвольно назначаемая функция. При подстановке

этого выражения в неравенство (8.35) оно принимает вид (для краткости записи аргументы функций опускаем)

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{g} + B\mathbf{l}) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B\mathbf{k} + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -w \quad \forall t \geq t_0. \quad (8.39)$$

Функцию $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ можно представить в виде

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B \right)^T + \mathbf{p}(\mathbf{x}, t). \quad (8.40)$$

Здесь λ — скалярная функция: $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ — функция, удовлетворяющая тождеству

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (8.41)$$

Следует заметить, что это равенство может быть выполнено и вне области Ω_0 . Например, пусть P — кососимметрическая матрица ($P^T = -P$). Тогда если положить

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = P \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B \right)^T, \quad (8.42)$$

то равенство (8.41) имеет место не только при $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B = 0$. Действительно, при подстановке последнего выражения в (8.41), получим

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B P \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B \right)^T = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B P \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B \right)^T \right)^T = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B P \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B \right)^T = 0.$$

Условие (8.39) при подстановке $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ из (8.40) принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{g} + B\mathbf{l}) - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B B^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -w \quad \forall t \geq t_0. \quad (8.43)$$

В области Ω_0 условие (8.43) совпадает с условием (8.37). При подстановке выражения для $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ из (8.40) в закон управления (8.38) получим

$$\mathbf{u} = -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B \right)^T + \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{l}(\mathbf{x}, t). \quad (8.44)$$

Как было указано выше, здесь $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ — произвольно выбираемая функция, $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ — функция, обращающаяся в нуль на множестве Ω_0 и удовлетворяющая условию (8.41).

Из соотношения (8.43), заменив знак неравенства на знак равенства, получим

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{g} + B\mathbf{l}) - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B B^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{\partial V}{\partial t} = -w. \quad (8.45)$$

Если w — произвольная положительно определенная функция и решение V уравнения (8.45) является положительно определенной и допускающей бесконечно малый верхний предел функцией, то замкнутая система (8.34а), (8.44) асимптотически устойчива.

Возможны два подхода к синтезу алгоритма управления, основанного на соотношении (8.44). При первом подходе задаются поло-

жительно определенная функция $w(\mathbf{x}, t)$ и функции $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{1} = \mathbf{1}(\mathbf{x}, t)$, а затем находится положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющая уравнению (8.45). Второй подход состоит в том, что задается положительно определенная функция $V(\mathbf{x})$, а затем делается попытка подбора функций $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{1} = \mathbf{1}(\mathbf{x}, t)$ таких, чтобы левая часть равенства (8.45) была отрицательно определенной функцией. В качестве примера рассмотрим задачу о гашении вращений твердого тела, закрепленного в одной точке [59].

Пример 8.9. Твердое тело, закрепленное в центре инерции, описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_2x_3 + b_1u_1,$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1x_3 + b_2u_2,$$

$$\dot{x}_3 = a_{31}x_1x_2 + b_3u_3,$$

где

$$a_{11} = \frac{J_y - J_z}{J_x}, \quad a_{21} = \frac{J_z - J_x}{J_y}, \quad a_{11} = \frac{J_x - J_y}{J_z},$$

$$b_1 = \frac{1}{J_x}, \quad b_2 = \frac{1}{J_y}, \quad b_3 = \frac{1}{J_z};$$

x_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции угловой скорости на оси связанной системы координат; J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции тела; u_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции главного момента сил на оси связанной системы координат. Требуется определить стабилизирующие законы управления.

Решение. В данном случае имеем

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} a_{11}x_2x_3 \\ a_{21}x_1x_3 \\ a_{31}x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся вторым подходом и зададимся в качестве функции Ляпунова квадратичной формой $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Имеем

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3), \quad BB^T = \text{diag}(b_1^2, b_2^2, b_3^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} BB^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T &= (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{bmatrix} b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 + b_3^2 x_3^2, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{bmatrix} a_{11}x_2x_3 \\ a_{21}x_1x_3 \\ a_{31}x_1x_2 \end{bmatrix} = (a_{11} + a_{21} + a_{31})x_1x_2x_3,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B \mathbf{l} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} =$$

$$= b_1 l_1 x_1 + b_2 l_2 x_2 + b_3 l_3 x_3, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Подставив эти выражения в уравнение (8.45), получим

$$(a_{11} + a_{21} + a_{31})x_1 x_2 x_3 + b_1 l_1 x_1 + b_2 l_2 x_2 + b_3 l_3 x_3 -$$

$$- \frac{\lambda}{2} (b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 + b_3^2 x_3^2) = -w.$$

Левая часть будет отрицательно определенной, если положить $\lambda = \text{const} > 0$ и векторную функцию $\mathbf{l}$ подобрать так, чтобы в левой части осталась только квадратичная форма. Для этого достаточно принять

$$l_1 = -\frac{a_{11}}{b_1} x_2 x_3, \quad l_2 = -\frac{a_{21}}{b_2} x_1 x_3, \quad l_3 = -\frac{a_{31}}{b_3} x_1 x_2.$$

Определим выражения, которые входят в алгоритм управления (8.44):

$$B^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 x_1 \\ b_2 x_2 \\ b_3 x_3 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (8.42) имеем

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = P \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B \right)^T = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ -p_1 & 0 & p_3 \\ -p_2 & -p_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 x_1 \\ b_2 x_2 \\ b_3 x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 b_2 x_2 + p_2 b_3 x_3 \\ -p_1 b_1 x_1 + p_3 b_3 x_3 \\ -p_2 b_1 x_1 - p_3 b_2 x_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь, подставив найденные выражения в (8.44), получим

$$u_1 = -\frac{1}{2} \lambda b_1 x_1 + p_1 b_2 x_2 + p_2 b_3 x_3 - \frac{a_{11}}{b_1} x_2 x_3,$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} \lambda b_2 x_2 - p_1 b_1 x_1 + p_3 b_3 x_3 - \frac{a_{21}}{b_2} x_1 x_3,$$

$$u_3 = -\frac{1}{2} \lambda b_3 x_3 - p_2 b_1 x_1 - p_3 b_2 x_2 - \frac{a_{31}}{b_3} x_1 x_2.$$

Здесь p_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольные функции.

Таким образом, мы нашли целый класс стабилизирующих алгоритмов управления. Произвольные функции p_i ($i = 1, 2, 3$) и положительную константу λ можно выбирать исходя из требований к качеству системы.

8.3.3. Синтез стабилизирующего закона управления при линейном относительно состояния уравнении объекта. Чтобы воспользоваться алгоритмом управления (8.44), необходимо задать одну из двух положительно определенных функций, $w(\mathbf{x}, t)$ или $V(\mathbf{x}, t)$, а вторую определить исходя из уравнения (8.45). Однако в общем случае, когда объект описывается уравнением (8.34а), каких-либо рекомендаций по выбору этих функций нет. Задача синтеза намного упрощается, когда управляемая система описывается линейным относительно вектора состояния уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r. \quad (8.46)$$

Здесь A , B — постоянные $(n \times n)$ -матрица и $(n \times r)$ -матрица, пара (A, B) управляема, т. е. ранг матрицы управляемости равен n :

$$\text{rank } Y = \text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n; \quad (8.47)$$

нелинейная функция $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, t)$ удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{\varphi}(0, t) = 0, \quad \mathbf{u}^T \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, t) \quad \forall t \geq t_0. \quad (8.48)$$

Линейный объект. Функция $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{u}$ удовлетворяет последнему условию (8.48). Следовательно, стабилизирующий закон управления объекта (8.46) будет стабилизирующим законом управления и для объекта, который описывается линейным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r, \quad t \geq 0. \quad (8.49)$$

Поэтому сначала найдем стабилизирующие законы управления для более простого объекта (8.49), а затем вернемся к исходному объекту (8.46).

В случае объекта (8.49) $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = A\mathbf{x}$, и уравнение (8.45) принимает вид

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (A\mathbf{x} + B\mathbf{l}) - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} BB^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{\partial V}{\partial t} = -w.$$

Если принять

$$\lambda = \text{const}, \quad w = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}, \quad \mathbf{l} = L\mathbf{x},$$

то последнему уравнению будет удовлетворять квадратичная форма $V = \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{x}$. Действительно, так как

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T \Gamma,$$

то оно принимает вид

$$2\mathbf{x}^T \Gamma (A + BL)\mathbf{x} - 2\lambda \mathbf{x}^T \Gamma BB^T \Gamma \mathbf{x} + \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 0.$$

Преобразуя первое слагаемое в соответствии с тождеством $2\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (C + C^T) \mathbf{x}$, последнее равенство можно представить в виде

$$\mathbf{x}^T [(\Gamma A + \Gamma BL) + (\Gamma A + \Gamma BL)^T - 2\lambda \Gamma BB^T \Gamma + Q] \mathbf{x} = 0.$$

Это равенство будет выполнено тождественно, если имеет место равенство

$$\Gamma A + \Gamma B L + (\Gamma A + \Gamma B L)^T - 2\lambda \Gamma B B^T \Gamma + Q = 0. \quad (8.50)$$

Если пара (A, B) вполне управляема и $\lambda > 0$, то это матричное уравнение разрешимо, и его решением будет положительно определенная матрица Γ .

Закон управления (8.44) при выборе функции $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ в соответствии с (8.42) принимает вид

$$\mathbf{u} = (-\lambda B^T \Gamma + P B^T \Gamma + L) \mathbf{x}. \quad (8.51)$$

Здесь P — произвольная кососимметрическая матрица.

При $\mathbf{l} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ закон управления (8.51) и уравнение (8.50) принимают вид

$$\mathbf{u} = -\lambda B^T \Gamma \mathbf{x}, \quad (8.52a)$$

$$\Gamma A + A^T \Gamma - 2\lambda \Gamma B B^T \Gamma + Q = 0. \quad (8.52b)$$

Нелинейный объект. Закон управления (8.52), стабилизирующий линейный объект (8.49), является стабилизирующим законом управления, и для нелинейного объекта (8.46)

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B \varphi(\mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r,$$

т. е. замкнутая система (8.46), (8.52) асимптотически устойчива.

Чтобы доказать это, достаточно показать, что положительно определенная квадратичная форма $V = \mathbf{x}^T \Gamma \mathbf{x}$ является функцией Ляпунова для системы (8.46), (8.52), удовлетворяющей теореме об асимптотической устойчивости.

Производная по времени этой квадратичной формы в силу уравнения (8.46) имеет вид

$$\dot{V} = 2\mathbf{x}^T \Gamma [A \mathbf{x} + B \varphi(\mathbf{u}, t)] = \mathbf{x}^T (\Gamma A + A^T \Gamma) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \Gamma B \varphi.$$

Прибавив и вычтя $\mathbf{x}^T 2\lambda \Gamma B B^T \Gamma \mathbf{x}$, получим

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\Gamma A + A^T \Gamma - 2\lambda \Gamma B B^T \Gamma + 2\lambda \Gamma B B^T \Gamma) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \Gamma B \varphi.$$

Используя (8.52b), это соотношение можно преобразовать к виду

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (-Q + 2\lambda \Gamma B B^T \Gamma) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \Gamma B \varphi,$$

или

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \frac{2}{\lambda} (-\lambda B^T \Gamma \mathbf{x})^T (-\lambda B^T \Gamma \mathbf{x} - \varphi).$$

Отсюда, учитывая закон управления (8.52a), получаем

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \frac{2}{\lambda} (\mathbf{u}^T \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \varphi). \quad (8.53)$$

В силу условия (8.48) второе слагаемое в правой части является неположительным. Следовательно, производная $\dot{V}$ является отрицательно определенной функцией.

Пример 8.10. Определить стабилизирующий закон управления для объекта

$$\ddot{x} - b(1 + e^{-\alpha t})u = 0, \quad b > 0, \quad \alpha > 0.$$

Решение. В нормальной форме уравнение объекта принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = b(1 + e^{-\alpha t})u.$$

В данном случае имеем (см. (8.46))

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \varphi = (1 + e^{-\alpha t})u.$$

Функция φ удовлетворяет условию (8.48). Примем $\lambda = 1/2$ и матрицы Q и Γ представим следующим образом:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \quad q_1 > 0, \quad q_2 > 0, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma \\ \gamma & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Найдем произведения матриц, необходимые для записи соотношений (8.52):

$$\Gamma A = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma \\ \gamma & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

$$A^T \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma \\ \gamma & \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma \end{bmatrix},$$

$$\Gamma B = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma \\ \gamma & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma b \\ \gamma_2 b \end{pmatrix},$$

$$B^T \Gamma = (0 \quad b) \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma \\ \gamma & \gamma_2 \end{bmatrix} = (b\gamma \quad b\gamma_2),$$

$$\Gamma B B^T \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma b \\ \gamma_2 b \end{pmatrix} (b\gamma \quad b\gamma_2) = \begin{bmatrix} b^2 \gamma^2 & b^2 \gamma \gamma_2 \\ b^2 \gamma \gamma_2 & b^2 \gamma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (8.52б) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b^2 \gamma^2 & b^2 \gamma \gamma_2 \\ b^2 \gamma \gamma_2 & b^2 \gamma_2^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме оно записывается в виде

$$-b^2 \gamma^2 = -q_1, \quad \gamma_1 - b^2 \gamma \gamma_2 = 0, \quad 2\gamma - b^2 \gamma_2^2 = -q_2.$$

Чтобы матрица Γ была положительно определенной, по критерию Сильвестра решение этой системы должно удовлетворять условию $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1 \gamma_2 - \gamma^2 > 0$. Таким решением является

$$\gamma = \frac{\sqrt{q_1}}{b}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2\sqrt{q_1} + bq_2}{b}}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{2q_1 + bq_2 \sqrt{q_1}}{b}}.$$

Закон управления (8.52а) принимает вид

$$u = -\frac{b}{2}(\gamma x_1 + \gamma_2 x_2) = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{q_1} x_1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{q_1} + bq_2}{b}} x_2 \right).$$

8.4. Синтез систем методом линеаризации обратной связью

Основная идея метода синтеза нелинейных систем, основанного на линеаризации обратной связью, состоит в том, чтобы преобразовать нелинейную систему в линейную алгебраическим способом и синтезировать систему, используя методы синтеза линейных систем. Этот метод применялся при решении практических задач. В частности, он был успешно использован при разработке систем управления вертолета, промышленных роботов, современных самолетов и биомедицинской аппаратуры [69].

Здесь мы на конкретном примере рассмотрим процедуру синтеза систем управления, основанную на линеаризации обратной связью. В качестве объекта управления примем двухзвенный робот (рис. 8.5). Уравнения такого робота в общем виде можно записать в виде

$$A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (8.54)$$

где $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2)^T$ — вектор обобщенных координат (рис. 8.5); $A(\mathbf{q})$, $B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — (2×2) -матрицы, $C(\mathbf{q})$ — (2×1) -матрица (вектор-столбец); $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$ — вектор управлений. Матрица $A(\mathbf{q})$ является невырожденной (неособой). В качестве управлений u_1 , u_2 обычно принимаются моменты вращения, развиваемые исполнительными двигателями.

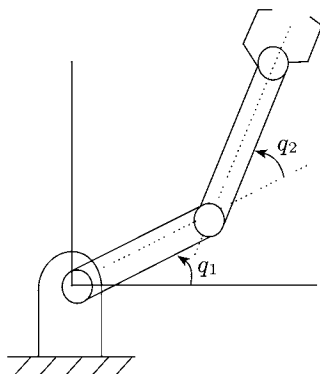


Рис. 8.5. Двухзвенный робот

Рассмотрим задачу слежения — задачу перемещения схвата по заданной траектории. Эта задача сводится к задаче изменения обобщенных координат по определенным законам:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^*(t) = (q_1^*(t) \ q_2^*(t))^T.$$

Произведем преобразование обратной связью

$$\mathbf{u} = B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}) + A(\mathbf{q})\mathbf{v}, \quad (8.55)$$

где $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2)^T$ — новый вектор управления. Так как матрица $A(\mathbf{q})$ является невырожденной, то, подставив последнее выражение для управления в уравнение (8.54), получим

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}.$$

Чтобы найти алгоритм управления для полученной линейной системы, обеспечивающий изменение обобщенных координат по заданному закону $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*(t)$, воспользуемся методом обратной задачи динамики. Для этого зададимся следующим эталонным (желаемым)

уравнением для ошибки слежения $\mathbf{e} = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*(t)$:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \alpha \dot{\mathbf{e}} + \beta \mathbf{e} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Отсюда имеем

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}^* - \alpha(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*) + \beta(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*).$$

Подставив это выражение в (8.56), получим

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}^* - \alpha(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*) + \beta(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*).$$

Отсюда и из соотношения (8.55) находим

$$\mathbf{u} = B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}) + A(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}^* - \alpha(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^*) - \beta(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)].$$

Обычно алгоритм управления, который получается методом линеаризации обратной связью, является довольно сложным, и его реализация требует большого объема информации. И это естественно, так как высококачественное управление требует максимального использования информации об объекте. Однако необходимая информация об объекте может отсутствовать. В этом случае потребуются использование принципа адаптивного управления.

8.5. Синтез стабилизирующих законов управления методом декомпозиции

Рассмотрим задачу синтеза стабилизирующих законов управления для управляемой системы, которую можно представить в виде r взаимосвязанных подсистем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{(k)} &= A_k \mathbf{x}^{(k)} + B_k \varphi^{(k)}(\mathbf{u}^{(k)}, t) + \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k+1)}, \dots, \mathbf{x}^{(r)}), \\ \mathbf{x}^{(k)} &\in R^{n_k}, \quad \mathbf{u}^{(k)} \in R^{I_k}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Начало координат $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ является положением равновесия:

$$\varphi^{(k)}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (8.58a)$$

Функции $\varphi^{(k)}$ и $\mathbf{h}^{(k)}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$(\mathbf{u}^{(k)})^T \mathbf{u}^{(k)} - (\mathbf{u}^{(k)})^T \varphi^{(k)} \leq \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (8.58б)$$

$$|\mathbf{h}^{(k)}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r h_{ki} |\mathbf{x}^{(i)}|, \quad h_{ki} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (8.58в)$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом декомпозиции. Этот метод состоит в том, что без учета взаимосвязей строятся законы управления для каждой независимой подсистемы, а затем исследуется устойчивость агрегированной синтезированной системы с учетом взаимосвязей, как это делалось в гл. 7.

Если отбросить слагаемые $\mathbf{h}^{(k)}$, то получим r независимых подсистем

$$\dot{\mathbf{x}}^{(k)} = A_k \mathbf{x}^{(k)} + B_k \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(\mathbf{u}^{(k)}, t), \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (8.59)$$

Эти подсистемы имеют такой же вид, что и система (8.46). Поэтому в качестве стабилизирующих законов управления можно использовать ранее полученные для этой управляемой системы стабилизирующие законы управления (8.52). В соответствии с этими законами управления имеем

$$u_k = -\lambda_k B_k^T \Gamma_k \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (8.60a)$$

$$\Gamma_k A_k + A_k^T \Gamma_k - 2\lambda_k \Gamma_k B_k B_k^T \Gamma_k + Q_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (8.60b)$$

где λ_k — произвольные положительные числа, Q_k — произвольные положительно определенные матрицы, Γ_k — положительно определенные матрицы, являющиеся решениями уравнений (8.60b). Теперь нужно исследовать устойчивость агрегированной замкнутой системы (8.57), (8.60) и при необходимости изменить некоторые параметры, которые можно варьировать.

Для замкнутых систем (8.59), (8.60) квадратичные формы

$$V_k = (\mathbf{x}^{(k)})^T \Gamma_k \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

являются функциями Ляпунова. В соответствии с теоремой 7.3а эти формы удовлетворяют условиям (см. (7.21a) и (7.21b))

$$\lambda_m^{\Gamma_k} |\mathbf{x}^{(k)}|^2 \leq V_k \leq \lambda_M^{\Gamma_k} |\mathbf{x}^{(k)}|^2, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (8.61a)$$

$$\left| \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}^{(k)}} \right| \leq 2 \lambda_M^{\Gamma_k} |\mathbf{x}^{(k)}|, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (8.61b)$$

где $\lambda_m^{\Gamma_k}$ и $\lambda_M^{\Gamma_k}$ — минимальные и максимальные собственные значения матриц Γ_k .

Согласно формуле (8.53) имеем

$$\dot{V}_k = -(\mathbf{x}^{(k)})^T Q_k \mathbf{x}^{(k)} + \frac{2}{\lambda_k} [(\mathbf{u}^{(k)})^T \mathbf{u}^{(k)} - (\mathbf{u}^{(k)})^T \boldsymbol{\varphi}^{(k)}].$$

Учитывая условие (8.58б) и неравенства вида (8.61a) для квадратичной формы $(\mathbf{x}^{(k)})^T Q_k \mathbf{x}^{(k)}$, находим

$$\dot{V}_k \leq -(\mathbf{x}^{(k)})^T Q_k \mathbf{x}^{(k)} \leq -\lambda_m^{Q_k} |\mathbf{x}^{(k)}|^2, \quad (8.61b)$$

где $\lambda_m^{Q_k}$ — минимальное собственное значение матрицы Q_k .

Используя параметры, входящие в соотношения (8.58в) и (8.61), запишем выражения для элементов матрицы $D = (d_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, r$) (см (7.36)):

$$d_{kk} = -\frac{\lambda_m^{Q_k}}{2\lambda_M^{\Gamma_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (8.62a)$$

$$d_{ki} = \frac{2(\lambda_M^{\Gamma_k})^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r (h_{kj})^2}{\lambda_m^{Q_k} \lambda_M^{\Gamma_i}}, \quad k, i = 1, 2, \dots, r, \quad i \neq k. \quad (8.62b)$$

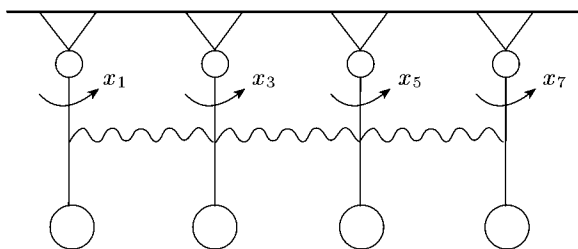


Рис. 8.6. Система из четырех маятников

Согласно критерию Севастьянова–Котелянского, для того чтобы система (8.57), (8.60) была асимптотически устойчива, достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства (см. (7.39)):

$$\Delta_k = (-1)^k \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (8.63)$$

В качестве примера рассмотрим задачу о демпфировании четырех маятников, связанных между собой пружиной (рис. 8.6).

Пример 8.11. Колебания системы из четырех маятников при определенных допущениях могут быть описаны уравнениями [59]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 + a_2 x_3 + \varphi_1(u_1, t), \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= a_2 x_1 - a_1 x_3 + a_2 x_5 + \varphi_2(u_2, t), \\ \dot{x}_5 &= x_6, & \dot{x}_6 &= a_2 x_3 - a_1 x_5 + a_2 x_7 + \varphi_3(u_3, t), \\ \dot{x}_7 &= x_8, & \dot{x}_8 &= a_2 x_5 - a_1 x_7 + \varphi_4(u_4, t), \end{aligned}$$

где x_1, x_3, x_5, x_7 — углы отклонения маятников, функции $\varphi_i(u_i, t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) удовлетворяют условиям

$$\varphi_i(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad u_i^2 - u_i \varphi_i \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Требуется определить стабилизирующие законы управления, т. е. законы управления, обеспечивающие гашение колебаний данной системы.

Решение. Данную систему естественно рассматривать как систему, состоящую из четырех подсистем, которые описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{(k)} &= A_k \mathbf{x}^{(k)} + B_k \varphi^{(k)}(\mathbf{u}^{(k)}, t) + \mathbf{h}^{(k)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k+1)}, \dots, \mathbf{x}^{(4)}), \\ k &= 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} x_7 \\ x_8 \end{pmatrix},$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(k)} = \varphi_k(u_k, t), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\mathbf{h}^{(k)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^4 H_i^k \mathbf{x}^{(i)}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$H_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_3^1 = 0, \quad H_4^1 = 0,$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_4^2 = 0,$$

$$H_1^3 = 0, \quad H_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_4^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_1^4 = 0, \quad H_2^4 = 0, \quad H_3^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

На основании свойства нормы матрицы (см. (7.31)) $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$ можем записать

$$|\mathbf{h}^{(k)}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^4 \|H_i^k\| |\mathbf{x}^{(k)}|.$$

В последнем соотношении нормы матриц и векторов являются евклидовыми. В соответствии с принятыми в условии (8.58в) обозначениями $h_{ki} = \|H_i^k\|$. Согласно утверждению 7.1 евклидова норма матрицы A равна $\sqrt{\lambda_M}$, где λ_M — максимальное собственное значение произведения $A^T A$. Поэтому чтобы определить $\|H_i^k\|$, вычислим произведения соответствующих матриц:

$$\begin{aligned} (H_2^1)^T H_2^1 &= (H_1^2)^T H_1^2 = (H_3^2)^T H_3^2 = (H_2^3)^T H_2^3 = (H_4^3)^T H_4^3 = \\ &= (H_3^4)^T H_3^4 = \begin{bmatrix} 0 & \pm a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pm a_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для выписанных произведений матриц максимальные собственные значения равны $\lambda_M = a_2^2$, а для остальных произведений $(H_i^k)^T H_i^k$ равны нулю. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} h_{12} &= \|H_2^1\| = a_2, & h_{13} &= \|H_3^1\| = 0, & h_{14} &= \|H_4^1\| = 0, \\ h_{21} &= \|H_1^2\| = a_2, & h_{23} &= \|H_3^2\| = a_2, & h_{24} &= \|H_4^2\| = 0, \\ h_{31} &= \|H_1^3\| = 0, & h_{32} &= \|H_2^3\| = a_2, & h_{34} &= \|H_4^3\| = a_2, \\ h_{41} &= \|H_1^4\| = 0, & h_{42} &= \|H_2^4\| = 0, & h_{43} &= \|H_3^4\| = a_2. \end{aligned}$$

Согласно соотношениям (8.60) имеем

$$u_k = -\lambda_k B_k^T \Gamma_k x^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\Gamma_k A_k + A_k^T \Gamma_k - 2\lambda_k \Gamma_k B_k B_k^T \Gamma_k + Q_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Положим

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad Q_k = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad (q_1 > q_2 > 0), \quad \Gamma_k = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma \\ \gamma & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Подставив эти выражения и выражения для A_k и B_k в последние уравнения, получим

$$\begin{bmatrix} -\gamma a_1 & \gamma_1 \\ -\gamma_2 a_1 & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma a_1 & -a_1 \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma^2 & \gamma \gamma_2 \\ \gamma \gamma_2 & \gamma_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} = 0.$$

В скалярной форме это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} -2\gamma a_1 - \gamma^2 + q_1 &= 0, \\ \gamma_1 - a_1 \gamma_2 - \gamma \gamma_2 &= 0, \\ 2\gamma - \gamma_2^2 + q_2 &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы матрица Γ_k была положительно определенной, решение должно удовлетворять критерию Сильвестра $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1 \gamma_2 - \gamma^2 > 0$. Этому условию удовлетворяет следующее решение:

$$\begin{aligned} \gamma &= -a_1 + \sqrt{a_1^2 + q_1}, \quad \gamma_2 = \sqrt{q_2 - 2a_1 + 2\sqrt{a_1^2 + q_1}}, \\ \gamma_1 &= \sqrt{a_1^2 + q_1} \sqrt{q_2 - 2a_1 + 2\sqrt{a_1^2 + q_1}}. \end{aligned}$$

Согласно приведенным выше формулам для управлений имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2}(\gamma x_1 + \gamma_2 x_2), \quad u_2 = -\frac{1}{2}(\gamma x_3 + \gamma_2 x_4), \\ u_3 &= -\frac{1}{2}(\gamma x_5 + \gamma_2 x_6), \quad u_4 = -\frac{1}{2}(\gamma x_7 + \gamma_2 x_8). \end{aligned}$$

Для определения устойчивости агрегированной системы нужно вычислить элементы матрицы $D = (d_{ik})$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$). А для этого необходимо знать минимальное собственное значение матриц Q_k и минимальное и максимальное собственные значения матрицы Γ_k . Так как $q_1 > q_2$, то минимальное собственное значение для всех матриц Q_k равно $\lambda_{\text{m}}^{Q_k} = q_2$. Положив $\lambda_{\text{m}}^{\Gamma_k} = \gamma_{\text{m}}$ и $\lambda_{\text{M}}^{\Gamma_k} = \gamma_{\text{M}}$, по формулам (8.62) находим (см. теорему 7.3а)

$$\begin{aligned} d_{kk} &= -\frac{q_2}{2\gamma_{\text{M}}}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \\ d_{1j} &= \frac{2\gamma_{\text{M}}^2 a_2^2}{q_2 \gamma_{\text{m}}}, \quad j = 2, 3, 4, \quad d_{2j} = \frac{4\gamma_{\text{M}}^2 a_2^2}{q_2 \gamma_{\text{m}}}, \quad j = 1, 3, 4, \\ d_{3j} &= \frac{4\gamma_{\text{M}}^2 a_2^2}{q_2 \gamma_{\text{m}}}, \quad j = 1, 2, 4, \quad d_{4j} = \frac{2\gamma_{\text{M}}^2 a_2^2}{q_2 \gamma_{\text{m}}}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

По критерию Севастьянова–Котелянского агрегированная система будет устойчива, если будут выполнены неравенства

$$\Delta_1 = -d_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = - \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} > 0.$$

Чтобы исследовать устойчивость агрегированной системы, нужно выбрать параметры q_1 и q_2 , вычислить элементы матриц Γ_k , найти минимальное и максимальное собственные значения этих матриц. После этого можно определить элементы матрицы D и проверить устойчивость.

Задачи

1. Управляемая система описывается уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + y^2 = u.$$

Определить закон управления, при котором ошибка слежения $x = y - y^*(t)$ за задающим воздействием $y^*(t)$ подчиняется уравнению

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4 = 0.$$

2. Управляемая система описывается уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + y^2 + (2 + \sin 2t)u = 0.$$

Определить закон управления, при котором изменение ошибки слежения $x = y - y^*(t)$ за задающим движением $y^*(t)$ описывается функцией

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}$$

(C_1, C_2 — постоянные интегрирования).

3. Система с переменной структурой описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u,$$

$$u = -\psi x_1 - \delta_u, \quad \psi = \begin{cases} \alpha, & x_1 s > 0, \\ -\alpha, & x_1 s < 0, \end{cases} \quad \delta_u = \begin{cases} \delta_0, & s > 0, \\ -\delta_0, & s < 0, \end{cases} \quad \delta_0 > 0,$$

$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3.$$

Требуется определить параметры α , c_1 и c_2 , при которых система асимптотически устойчива и степень устойчивости при скользящем режиме принимает максимальное значение.

4. Система с переменной структурой описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u,$$

$$u = -\psi_1 x_1 - \psi_2 x_2 - \psi_3 x_3, \quad \psi_i = \begin{cases} \alpha_i, & x_1 s > 0, \\ -\alpha_i, & x_1 s < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3,$$

$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + x_4.$$

Определить параметры α_i ($i = 1, 2$), c_j ($j = 1, 2, 3$), при которых система асимптотически устойчива и степень устойчивости при скользящем движении принимает максимальное значение.

5. Управляемая система описывается уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + b(1 + \sin^2 t)u = 0.$$

Требуется определить стабилизирующие алгоритмы управления.

6. Управляемая система описывается уравнением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + b(2 + \sin t + e^{-2t})u = 0.$$

Определить стабилизирующие алгоритмы управления.

7. Управляемая система описывается уравнением

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + (1 + \sin^2 t) \frac{d^2 y}{dt^2} + (1 + e^{-t}) \frac{dy}{dt} + y = u.$$

Найти алгоритм управления, при котором ошибка слежения $e = y(t) - y^*(t)$ подчиняется уравнению

$$\ddot{e} + 3\dot{e} + 3e = 0.$$

8. Управляемая система описывается уравнением

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + (1 + \sin^2 t) \frac{d^2 y}{dt^2} + (1 + e^{-t})\dot{y} + 3y + e^{-2t} = u.$$

Найти алгоритм управления, при котором ошибка слежения $e = y(t) - y^*(t)$ подчиняется уравнению

$$\ddot{e} + 3\dot{e} + 3e = 0.$$

9. Синтезировать алгоритм управления, при котором корни характеристического уравнения синтезированной линеаризованной обратной связью системы равны -1 и -2 , для следующих систем:

а) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1^2 + u$; б) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1^3 + 2u$;

в) $\dot{x}_1 = x_2 + u$, $\dot{x}_2 = x_1^2$.

10. Синтезировать алгоритм управления, при котором корни характеристического уравнения синтезированной линеаризованной обратной связью системы равны -1 , -2 и -3 , для следующей системы:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^3 + u, \quad \dot{x}_3 = x_1 + 2x_2^2.$$

11. Пусть колебания двух связанных маятников описываются уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_1 + a_2 x_3 + \varphi_1(u_1, t),$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = a_2 x_1 - a_1 x_3 + \varphi_2(u_2, t).$$

Методом декомпозиции определить стабилизирующий закон управления при условии $u_i^2 - u_i \varphi_i \leq 0$, $i = 1, 2$.

12. Пусть колебания трех связанных маятников описываются уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_1 + a_2 x_3 + \varphi_1(u_1, t),$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = a_2 x_1 - a_1 x_3 + a_2 x_5 + \varphi_2(u_2, t),$$

$$\dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 = a_2 x_3 - a_1 x_5 + \varphi_3(u_3, t),$$

Методом декомпозиции определить стабилизирующий закон управления при условии $u_i^2 - u_i \varphi_i \leq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Глава 9

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Общие положения и постановка задачи

В общем случае система автоматического управления состоит из объекта управления (управляемой системы) ОУ, регулятора Р и программатора (задающего устройства) П, вырабатывающего программу движения (задающее воздействие) (рис. 9.1). Здесь И обозначает совокупность внешней информации, которая поступает на программатор, f — возмущение. В простейших случаях (система стабилизации, система программного управления, следящие системы) программатор представляет собой датчик, вырабатывающий постоянное воздействие или априори известную или неизвестную функцию времени. В более сложных случаях (системы самонаведения, системы управления автономными подвижными объектами) программатор определяет программу (траекторию) движения. Задача синтеза оптимальной системы управления состоит в том, чтобы синтезировать регулятор и программатор, которые в определенном смысле наилучшим образом решают поставленную задачу управления. В соответствии с этим рассматриваются две родственные задачи: синтез оптимального программатора и синтез оптимального регулятора. Математически эти задачи могут быть сформулированы единообразно и решаться одними и теми же методами. Но в то же время эти задачи имеют специфические особенности, которые делают целесообразным на определенном этапе их раздельное рассмотрение. Особенности обуславливаются тем, что решение первой задачи связано, как правило, с определением программного управления, а решение второй задачи — с определением управления с обратной связью. *Программным управлением* называют управление в виде функции от времени, *управлением с обратной связью* — управление в виде функции от фазовых координат.

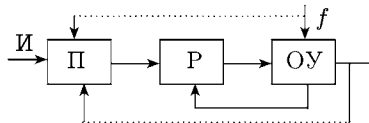


Рис. 9.1. Общая блок-схема системы управления

Системы с оптимальным программатором называют *оптимальными по режиму управления*, а системы с оптимальным регулято-

ром — *оптимальными по переходному режиму*. Системы управления, оптимальные по режиму управления и/или по переходному режиму, называют *оптимальными системами управления*.

9.1.1. Общая постановка задачи оптимального управления. Задача синтеза оптимальных систем управления относится к классу задач оптимального управления и формулируется как вариационная задача. При этом кроме уравнения объекта управления должны быть заданы ограничения на управление и фазовый вектор, краевые (граничные) условия и критерий оптимальности.

Пусть уравнение объекта задается в нормальной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (9.1)$$

или в скалярной форме:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ — фазовый вектор, $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r)^T$ — управление или вектор управления.

На вектор управления и фазовый вектор могут быть наложены ограничения в виде конечных соотношений — равенств и неравенств. Эти ограничения определяют допустимые множества значений, которые могут принимать эти вектора. Поэтому указанные ограничения в общем виде могут быть записаны в виде

$$\mathbf{u}(t) \in U_t, \quad \mathbf{x}(t) \in X_t. \quad (9.2)$$

Здесь U_t , X_t — некоторые заданные множества, зависящие, вообще говоря, от времени, причем $U_t \subseteq R^r$ и $X_t \subseteq R^n$, т. е. U_r — подмножество r -мерного пространства, X_t — подмножество n -мерного пространства.

В (9.2) первое соотношение называется *ограничением на управление*, второе соотношение — *ограничением на фазовый вектор* или *фазовым ограничением*. Ограничения на управление и фазовый вектор в (9.2) представлены отдельно, т. е. они разделены. Однако они могут быть и не разделены. Поэтому в общем случае эти ограничения записываются в виде

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)) \in V_t, \quad V_t \subseteq R^{n+r}.$$

Краевые (граничные) условия — ограничения на фазовый вектор в начальный и конечный t_f моменты времени — также могут быть представлены в виде включения

$$\mathbf{x}(t_0) \in X_0, \quad \mathbf{x}(t_f) \in X_f, \quad (9.3)$$

когда эти ограничения разделены, и в виде

$$(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)) \in V_0,$$

если они не разделены. Вектор $\mathbf{x}(t_0)$ называют *левым*, а вектор $\mathbf{x}(t_f)$ — *правым концом траектории*.

Критерий оптимальности, который является числовым показателем качества системы, задается в виде функционала

$$J = J[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f); \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t)]. \quad (9.4)$$

Задача оптимального управления формулируется следующим образом: при заданных уравнении объекта (9.1), ограничениях на управление и фазовый вектор (9.2) и краевых условиях (9.3) определить такие программное управление $\mathbf{u}^*(t)$ или управление с обратной связью $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t), t)$ и фазовую траекторию $\mathbf{x}^*(t)$, при которых критерий оптимальности (9.4) принимает минимальное (или максимальное) значение.

Дальше для определенности примем, что функционал (9.4) минимизируется. Задачу максимизации введением нового критерия $J_n = -J$ всегда можно свести к задаче минимизации. Управления $\mathbf{u}^*(t)$ и $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t), t)$ называются *оптимальными управлениями*, траектория $\mathbf{x}^*(t)$ — *оптимальной траекторией*.

9.1.2. Примеры постановки задач оптимального управления.

1. *Задачи оптимального управления летательным аппаратом (ЛА).* Рассмотрим упрощенное уравнение движения ЛА в вертикальной плоскости (рис. 9.2)

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{p} + \mathbf{q},$$

или, в проекциях на горизонтальную ξ и вертикальную η оси неподвижной системы координат,

$$m\ddot{\xi} = p_1 + q_1, \quad m\ddot{\eta} = p_2 + q_2,$$

где $m = m_f + m_p(t)$ — масса ЛА; $m_p(t)$ — реактивная масса; $\mathbf{v} = (\dot{\xi} \dot{\eta})^T$ — скорость ЛА; $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2)^T$ — реактивная сила; $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2)^T$ — равнодействующая сила всех остальных сил (сила тяжести, сила сопротивления воздуха и др.).

Реактивная сила имеет вид

$$\mathbf{p} = \dot{m}\mathbf{w}, \quad |\mathbf{w}| = \text{const},$$

где $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2)^T$ — относительная скорость отделяющихся частиц, $|\mathbf{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$ — евклидова норма, $|\dot{m}| = |\dot{m}_p|$ — секундный расход реактивной массы.

Введя обозначения

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \dot{\xi}, \quad x_4 = \dot{\eta}, \quad u_1 = p_1/m, \quad u_2 = p_2/m,$$

$$\bar{q}_1 = q_1/m, \quad \bar{q}_2 = q_2/m,$$

уравнения движения ЛА можно записать в нормальной форме:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = u_1 + \bar{q}_1, \quad \dot{x}_4 = u_2 + \bar{q}_2,$$

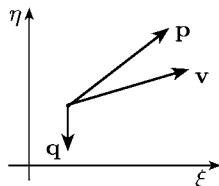


Рис. 9.2. К выводу уравнений ЛА

или в векторном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \bar{\mathbf{q}}. \quad (9.5)$$

Здесь

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{q}_1 \\ \bar{q}_1 \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Отношение реактивной силы к массе ЛА принимается за управление. Траектория ЛА не должна пересекать земную поверхность. Поэтому должно выполняться ограничение на фазовый вектор

$$x_2 \geq 0. \quad (9.7)$$

Теперь рассмотрим различные постановки задачи, связанные с ЛА.

Задача 1 (вывод ЛА в заданную точку фазового пространства за минимальное время). Пусть реактивная сила ограничена: $|\mathbf{p}| \leq p_m$. Требуется вывести ЛА из фиксированной начальной точки $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ в фиксированную конечную точку $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$ за минимальное время. Эта задача является задачей оптимального управления с уравнением объекта (9.5), (9.6), фазовым ограничением (9.7), ограничением на управление

$$|\mathbf{u}| \leq u_m, \quad u_m = p_m/m, \quad (9.8)$$

краевыми условиями $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f$ и критерием оптимальности $J = t_f - t_0$. Здесь t_0 — начальный момент (будем его считать фиксированным, т.е. заданным); t_f — конечный момент (момент достижения ЛА точки $\mathbf{x}^f$), который заранее не известен, т.е. является нефиксированным.

Задача 2 (вывод ЛА в заданную точку геометрического пространства за минимальное время). При ограничении на управление (9.8) требуется вывести ЛА из заданной точки $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ фазового пространства в заданную точку $(x_1(t_f), x_2(t_f)) = (x_1^f, x_2^f)$ на вертикальной плоскости «геометрического» пространства за минимальное время. В данной задаче левый конец $\mathbf{x}(t_0)$ фиксирован (т.е. положение и скорость ЛА в момент t_0 заданы), правый конец $\mathbf{x}(t_f)$ не фиксирован: в конечный момент t_f положение ЛА на вертикальной плоскости задано, на его скорость никаких ограничений не наложено.

Задача 2 оптимального управления отличается от задачи 1 только условием на правом конце траектории. В задаче 1 каждое из множеств X_0 и X_f состоит из одной точки, а в задаче 2 множество X_0 состоит из одной точки, а множество X_f — из точек двумерной плоскости фазового пространства, определяемой уравнениями $x_1 = x_1^f$, $x_2 = x_2^f$.

Задача 3 (перевод ЛА на максимальную дальность). В данном случае важно учесть конечность реактивной массы, так как дальность

полета зависит прежде всего от количества реактивной массы (топлива). В силу того, что

$$|\mathbf{u}| = |\mathbf{p}|/m = (|\dot{m}| |\mathbf{w}|)/m,$$

конечность топлива накладывает на управление следующее ограничение:

$$\int_{t_0}^{t_f} |\mathbf{u}| dt = B_1, \quad B_1 = |\mathbf{w}| \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right). \quad (9.9)$$

Здесь $m_0 = m(t_0)$ и $m_f = m(t_f)$.

Ограничение такого типа называется *изопериметрическим*. Конечный момент t_f определяется из условия $x_2(t_f) = 0$ (высота равна нулю). Задача перевода ЛА на максимальную дальность формулируется следующим образом: при заданном уравнении объекта (9.5), (9.6), фазовом ограничении (9.7) и краевых условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, $x_2(t_f) = 0$ определить управление, при котором функционал $J = -x_1(t_f)$ принимает минимальное значение. В этом случае множество X_0 состоит из одной точки, а множество X_f — из точек многообразия, определяемого уравнением $x_2 = 0$.

Задача 4 (вывод ЛА на максимальную высоту). В данном случае также важно учитывать ограниченность топлива. Кроме того, конечный момент t_f определяется условием $x_4(t_f) = 0$ (вертикальная составляющая скорости равна нулю). Задача оптимального управления формулируется точно так же, как и задача 3, но при краевых условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, $x_4(t_f) = 0$, и критерий оптимальности $J = -x_2(t_f)$.

Сделаем ряд общих замечаний. Естественно, реактивная масса всегда ограничена, но тем не менее это ограничение не учитывалось при формулировке задач 1 и 2. Принималось, что топлива достаточно для достижения целей, рассматриваемых в этих задачах. При формулировке задач 3 и 4 считалось несущественным и не учитывалось ограничение на величину управления, хотя оно всегда имеет место. В то же время в задачах 1 и 2 его нельзя не учитывать, так как это привело бы к нереализуемому оптимальному управлению $\mathbf{u}^*(t)$: при $u_m \rightarrow \infty$ максимальное значение $|\mathbf{u}^*(t)|$ стремилось бы к бесконечности, а критерий оптимальности $J \rightarrow 0$. Точно так же нельзя не учитывать ограничение на топливо при формулировке задач 3 и 4, так как в противном случае, как это ясно из физических соображений, существует бесчисленное множество управлений, при которых $J = -\infty$.

2. Задачи оптимального управления двигателем. Уравнение двигателя постоянного тока можно записать в виде

$$I\ddot{\varphi} = i_{\text{я}} k_{\Phi} \Phi - M_{\text{с}},$$

где I — момент инерции вращающейся части двигателя, φ — угол поворота вала двигателя, $i_{\text{я}}$ — ток в якорной цепи, k_{Φ} — конструктивная постоянная, Φ — магнитный поток, $M_{\text{с}}$ — момент сопротив-

ления. Используя обозначения

$$b = k_{\Phi} \Phi / I, \quad x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}, \quad u = i_{\text{я}}, \quad u_c = M_c / I,$$

приведенное выше уравнение двигателя можно записать в нормальной форме:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = bu - u_c,$$

или в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu + \tilde{\mathbf{q}}, \quad (9.10)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_c \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

Здесь для получения простой модели объекта, которая дальше часто используется, за управление принимается ток в якорной цепи.

Задача 5 (поворот двигателя на заданный угол без остановки за минимальное время). Сила тока в якорной цепи ограничена. Поэтому на управление накладывается ограничение $|\mathbf{u}| \leq u_m$. Задача оптимального управления формулируется следующим образом: при заданных уравнении объекта (9.10), (9.11), ограничении на управление $|\mathbf{u}| \leq u_m$, краевых условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad x_1(t_f) = x_1^f \quad (9.12)$$

найти управление, при котором функционал $J = t_f - t_0$ принимает минимальное значение. Здесь x_1^f — заданный угол, на который нужно повернуть вал двигателя. На угловую скорость в конечный момент никаких ограничений не накладывается.

Задача 6 (поворот вала двигателя на заданный угол с остановкой за минимальное время). Задача оптимального управления формулируется точно так же, как и задача 5, но при краевых условиях

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad x_1(t_f) = x_1^f, \quad x_2(t_f) = 0. \quad (9.13)$$

Задача 7 (поворот вала двигателя на заданный угол за время T при минимальном расходе энергии). Энергия пропорциональна интегралу от квадрата управления (силы тока). Так как постоянный множитель перед функционалом не влияет на решение вариационной задачи, за критерий оптимальности примем интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt,$$

где t_0, t_f — фиксированы и $t_f - t_0 = T$. Ограничения на управление не накладываются. Краевые условия совпадают: а) с условием (9.12), если после поворота вала двигателя на заданный угол его не нужно останавливать; б) с условием (9.13), если после поворота вала двигателя на заданный угол его нужно остановить.

9.1.3. Классификация задач оптимального управления и их преобразования.

1. По виду ограничений оптимального управления различают:

а) задачу классического типа, когда ограничения задаются в виде равенств

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

б) задачу неклассического типа, когда среди ограничений имеются ограничения в виде неравенств

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (9.14)$$

К классическому типу относятся также задачи с ограничениями вида

$$\int_{t_0}^{t_f} f_{n+j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (9.15)$$

Такие ограничения называют *изопериметрическими ограничениями*, а вариационные задачи с такими ограничениями называют *изопериметрическими задачами*.

Введением дополнительных переменных от изопериметрических ограничений всегда можно избавиться. Достаточно вместо изопериметрических ограничений (9.15) в условие задачи ввести следующие уравнения и краевые условия:

$$\dot{x}_{n+j} = f_{n+j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t); \quad x_{n+j}(t_0) = 0, \quad x_{n+j}(t_f) = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Формально задачи неклассического типа введением дополнительных переменных можно преобразовать к задачам классического типа. Действительно, ограничения (9.14) можно заменить ограничениями вида

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + u_{r+k}^2 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Задачи оптимального управления неклассического типа могут иметь ограничения вида

$$\int_{t_0}^{t_f} f_{n+s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \leq C_s, \quad s = 1, 2, \dots, p.$$

Введением дополнительных переменных эти ограничения могут быть заменены соотношениями

$$\dot{x}_{n+s} = f_{n+s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t); \quad x_{n+s}(t_0) = 0, \quad x_{n+s}(t_f) \leq C_s, \quad s = 1, 2, \dots, p.$$

Как нетрудно заметить, при преобразованиях изопериметрических ограничений вводимые дополнительные переменные представляют собой фазовые координаты, а при преобразованиях неизопериметрических ограничений вводимые переменные играют роль дополнительных координат векторного управления.

Среди рассмотренных выше задач задачами оптимального управления классического типа являются задачи 3, 4 и 7, неклассического типа — задачи 1, 2, 5 и 6.

2. По виду краевых условий различают:

а) задачи с фиксированными (закрепленными) концами, когда каждое из множеств X_0 и X_f состоит из одной точки (все фазовые координаты в начальный и конечный моменты заданы, т. е. фиксированы);

б) задачи с подвижным правым концом (когда X_f состоит более чем из одной точки), с подвижным левым концом (X_0 состоит более чем из одной точки), с подвижными концами (оба конца подвижны).

Среди рассмотренных выше задач задачами с фиксированными концами являются задачи 1, 6 и 7, б), с подвижным правым концом — задачи 2, 3, 4, 5 и 7, а).

3. По времени начала и окончания процесса различают:

а) задачи с фиксированным временем, когда начальный t_0 и конечный t_f моменты фиксированы;

б) задачи с нефиксированным временем, когда хотя бы один из моментов времени t_0 или t_f не фиксирован.

Среди рассмотренных выше задач только задача 7 является задачей с фиксированным временем. Все остальные задачи являются задачами с нефиксированным временем.

4. По критерию оптимальности различают:

а) задачу Больца — критерий оптимальности имеет вид

$$J = g_0[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt;$$

б) задачу Лагранжа — критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt;$$

в) задачу Майера — критерий оптимальности имеет вид

$$J = g_0[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f].$$

Задача Майера в частном случае, когда функционал имеет вид $J = g_0[\mathbf{x}(t_f), t_f]$ (т. е. зависит только от конечного состояния и, быть может, от конечного момента времени), называется *задачей терминального управления*, а когда функционал имеет вид $J = (t_f - t_0)$ — называется задачей *максимального быстродействия*. Среди рассмотренных выше задач задача 7 является задачей Лагранжа, остальные задачи являются задачами Майера, причем задачи 1, 2, 5 и 6 являются задачами максимального быстродействия.

Задачи Больца, Лагранжа и Майера эквивалентны в том смысле, что путем преобразования переменных каждую из задач можно преобразовать в любую другую задачу.

9.2. Метод множителей Лагранжа (методы классического вариационного исчисления)

Если концы закреплены и время фиксировано, то задачу оптимального управления классического типа можно сформулировать как следующую задачу Лагранжа классического вариационного исчисления:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ \varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, l; \\ x_i(t_0) &= x_i^0, \quad x_i(t_f) = x_i^f, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ J &= \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Предполагается, что функции $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) и $\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ ($k = 1, 2, \dots, l$) являются непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам, управление $\mathbf{u}(t)$ принадлежит классу кусочно непрерывных функций, а траектории $\mathbf{x}(t)$ — классу кусочно гладких функций.

Напомним, что функция $\mathbf{u}(t)$ называется *кусочно непрерывной* на интервале $[t_0, t_f]$, если она (т.е. каждая его координата) непрерывна всюду на $[t_0, t_f]$, за исключением конечного числа точек, где она имеет разрыв первого рода (существуют конечные пределы слева и справа). Функция $\mathbf{x}(t)$ называется *кусочно гладкой* на $[t_0, t_f]$, если на $[t_0, t_f]$ она сама непрерывна, а ее производная кусочно непрерывна.

Управление $\mathbf{u}(t)$ из класса кусочно непрерывных функций называют *допустимым управлением*, а траекторию $\mathbf{x}(t)$ из класса кусочно гладких функций — *допустимой траекторией*. Пару $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ называют *допустимой*, если допустимыми являются $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$. В каждой конкретной задаче на допустимые управления и траектории могут быть наложены дополнительные ограничения. Поэтому при рассмотрении определенного класса задач эти понятия могут уточняться.

9.2.1. Уравнения Эйлера. Рассмотрим сначала простейшую задачу классического вариационного исчисления

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(y, \dot{y}, t) dt \rightarrow \text{extr}, \quad (9.16)$$

$$y(t_0) = y^0, \quad y(t_f) = y^f. \quad (9.17)$$

Пока для простоты будем считать, что $y(t)$ является скалярной функцией и принадлежит классу $C^1([t_0, t_f])$ непрерывно дифференцируемых функций на интервале $[t_0, t_f]$. Экстремум ищется среди функций указанного класса, удовлетворяющих заданным краевым условиям. Такие функции будем называть *допустимыми*.

Пусть экстремум достигается на допустимой функции $y^*(t)$. Функция $y(t) = y^*(t) + \varepsilon \tilde{y}(t)$ (ε — число) будет допустимой, если $\tilde{y}(t) \in C^1([t_0, t_f])$ и выполняются краевые условия

$$\tilde{y}(t_0) = 0, \quad \tilde{y}(t_f) = 0. \quad (9.18)$$

При каждом фиксированной $\tilde{y}(t)$ получаем функцию от числового аргумента

$$\Phi(\varepsilon) = J(y^* + \varepsilon \tilde{y}) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(y^* + \varepsilon \tilde{y}, \dot{y}^* + \varepsilon \dot{\tilde{y}}, t) dt,$$

которая достигает экстремума при $\varepsilon = 0$. Поэтому согласно необходимому условию экстремума производная этой функции по ε в точке $\varepsilon = 0$ обращается в нуль:

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} [f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) \tilde{y}(t) + f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) \dot{\tilde{y}}] dt = 0.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям и учитывая краевые условия (9.18), получим

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} [f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t)] \tilde{y} dt = 0. \quad (9.19)$$

Согласно основной лемме вариационного исчисления, при произвольной функции $\tilde{y}(t) \in C^1([t_0, t_f])$ последнее равенство возможно, если только

$$f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) = 0. \quad (9.20)$$

Это уравнение называется *уравнением Эйлера*.

Таким образом, если функция $y^*(t)$ доставляет экстремум функционалу (9.16), она удовлетворяет уравнению Эйлера.

Допустимая функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера, называется *экстремалью* или *стационарной точкой* задачи (9.16), (9.17). Следовательно, решения задачи (9.16), (9.17) являются экстремальями. В общем случае обратное неверно: не всякая экстремаль будет решением рассматриваемой задачи.

Выкладки при выводе уравнения (9.19) не изменятся и в случае, когда $y(t)$ — векторная функция. Покажем, как в случае векторной функции $y(t)$ из уравнения (9.19) получить векторное уравнение Эйлера (9.20).

По определению производные скалярной функции f_0 по векторным переменным $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p)^T$ и $\dot{y} = (\dot{y}_1 \ \dot{y}_2 \ \dots \ \dot{y}_p)^T$ являются вектор-строками (см. параграф 1.9):

$$f'_{0y} = (f'_{0y_1} \ f'_{0y_2} \ \dots \ f'_{0y_p}), \quad f'_{0\dot{y}} = (f'_{0\dot{y}_1} \ f'_{0\dot{y}_2} \ \dots \ f'_{0\dot{y}_p}).$$

Умножив эти вектор-строки на вектор-столбец $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1 \ \tilde{y}_2 \ \dots \ \tilde{y}_p)^T$, соотношение (9.19) можно представить в виде

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^p [f'_{0y_i} - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}_i}] \tilde{y}_i dt = 0.$$

Это равенство должно выполняться при произвольной функции $\tilde{\mathbf{y}}(t) \in C^1([t_0, t_f])$, и, в частности, когда все ее компоненты, кроме одной, равны нулю: $\tilde{y}_j \neq 0$ и $\tilde{y}_i = 0$ при всех $i \neq j$. Полагая, что j пробегает все значения от 1 до p , из последнего уравнения получим

$$f'_{0y_i} - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (9.21)$$

Эта система представляет собой скалярную форму записи векторного уравнения (9.20).

9.2.2. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Рассмотрим задачу Лагранжа

$$\Phi_i(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad (9.22a)$$

$$\varphi_k(\mathbf{z}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l; \quad (9.22б)$$

$$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}^0, \quad \mathbf{z}(t_f) = \mathbf{z}^f; \quad (9.22в)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Phi_0(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t) dt \rightarrow \text{extr}, \quad (9.22г)$$

Здесь $\mathbf{z}$ — вектор-столбец размера s ; Φ_i ($i = 0, 1, \dots, p$), φ_k ($k = 1, 2, \dots, l$) — дифференцируемые по всем своим аргументам функции.

Эта задача отличается от простейшей вариационной задачи тем, что на аргументы функционала помимо краевых условий наложены дополнительные ограничения (связи (9.22a) и (9.22б)). Для получения необходимого условия воспользуемся приемом Лагранжа, который преобразует задачу на условный экстремум в задачу на безусловный экстремум.

Составим функцию

$$L(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \sum_{i=1}^p \psi_i \Phi_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k + \psi_0 \Phi_0,$$

где ψ_i ($i = 1, 2, \dots, p$) — функции времени, λ_k ($k = 1, 2, \dots, l$) и ψ_0 — константы. Функция $L(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\lambda}, t)$ называется *функцией Лагранжа*, функции ψ_i ($i = 1, 2, \dots, p$) и константы λ_k ($k = 1, 2, \dots, l$) и ψ_0 — (неопределенными) *множителями Лагранжа*.

Прием Лагранжа состоит в том, что он преобразует задачу (9.22) в простейшую задачу вариационного исчисления

$$\tilde{J} = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\lambda}, t) dt \rightarrow \text{extr}, \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}^0, \quad \mathbf{z}(t_f) = \mathbf{z}^f.$$

Здесь $\boldsymbol{\psi} = (\psi_0 \ \psi_1 \ \dots \ \psi_p)^T$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_l)^T$.

Последняя задача имеет смысл, если множители Лагранжа не равны одновременно нулю. Под равенством нулю множителей ψ_i ($i = 1, 2, \dots, p$), являющихся функциями, понимается их тождественное обращение в нуль. Кроме того, если $\psi_0 = 0$, то функционал $\tilde{J}$ и соответственно решение не зависят от исходного функционала. Это возможно, если задача физически поставлена не совсем корректно, т. е. не имеет физического смысла. Этот случай назовем *особым*. Интерес представляет неособый случай $\psi_0 \neq 0$.

В преобразованной задаче роль независимого аргумента играет вектор $\mathbf{y} = (\mathbf{z}^T \ \boldsymbol{\psi}^T \ \boldsymbol{\lambda}^T)^T$, а роль подынтегральной функции — функция Лагранжа. С учетом того, что функция Лагранжа не зависит от производных $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ и $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$, уравнения Эйлера принимают вид (см. (9.21))

$$L'_{z_i} - \frac{d}{dt} L'_{\dot{z}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad (9.23a)$$

$$L'_{\psi_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad L'_{\lambda_k} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (9.23б)$$

Уравнения (9.23б) совпадают с уравнениями (9.22a) и (9.22б). Поэтому достаточно ограничиться уравнениями (9.23a) и решать их совместно с уравнениями (9.22a) и (9.22б) при краевых условиях (9.22в). Уравнения (9.23a) называют *уравнениями Эйлера–Лагранжа*.

9.2.3. Правило множителей Лагранжа для задач оптимального управления с фиксированными концами. Вернемся теперь к задаче оптимального управления с фиксированными концами и фиксированным временем. Приведем ее, видоизменив несколько запись уравнений объекта:

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{x}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.24a)$$

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l; \quad (9.24б)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_f) = x_i^f, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.24в)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \rightarrow \min.$$

Эта задача оптимального управления представляет собой рассмотренную выше задачу Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k.$$

Здесь роль аргумента $\mathbf{z}$ играет вектор $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. И так как в функцию Лагранжа не входит производная $\dot{\mathbf{u}}$, уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$L'_{x_i} - \frac{d}{dt} L'_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.25a)$$

$$L'_{u_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (9.25б)$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа записывают также с помощью функции

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k, \quad (9.26)$$

которая называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*. Так как гамильтониан связан с функцией Лагранжа соотношением

$$L = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i,$$

то уравнения Эйлера–Лагранжа (9.25) принимают вид

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.27a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r. \quad (9.27b)$$

Уравнения (9.27b) называют *условием стационарности*, так как они представляют собой условие экстремума гамильтониана при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_j]$. Как увидим дальше при рассмотрении принципа максимума, оказывается, что действительно на оптимальной траектории гамильтониан как функция от управления достигает максимума при оптимальном управлении. Сформулируем основной результат.

Правило множителей Лагранжа (с закрепленными концами и фиксированным временем). *Если допустимая пара $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ является решением задачи оптимального управления (9.24), то найдутся такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа, что эта пара удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа (9.25), (9.27).*

В соответствии с этим правилом, чтобы найти оптимальное управление и оптимальную траекторию, надо решить совместно уравнения (9.24a), (9.24b) и (9.27) при краевых условиях (9.24в).

Условия Вейерштрасса–Эрдмана. Уравнения Эйлера–Лагранжа получены при предположении, что управление $u(t)$ является непрерывной функцией, а траектория $\mathbf{x}(t)$ гладкая на интервале $[t_0, t_j]$. Однако правило множителей Лагранжа остается справедливым и в том случае, когда $\mathbf{u}(t)$ принадлежит классу кусочно непрерывных функций, а $\mathbf{x}(t)$ — классу кусочно гладких функций. Если оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ имеет разрыв первого рода в каких-либо точках, то оно само и соответствующая ему траектория $\mathbf{x}(t)$ должны удовлетворять указанным выше уравнениям лишь в точках непрерывности управления. В точках разрыва управления, которые называются *угловыми*, должны выполняться условия [3]

$$\psi^- = \psi^+, \quad H^- = H^+, \quad (9.28)$$

где индексы $-$ и $+$ обозначают левый и правый пределы соответствующих функций. Условия (9.28) называются *условиями Вейерштрасса–Эрдмана*.

Множители Лагранжа определяются с точностью до постоянного множителя. Действительно, они входят в уравнения Эйлера–Лагранжа линейно и однородно, и эти уравнения не изменятся, если все множители умножить на одно и то же постоянное число. Условимся в неособом случае ($\psi_0 \neq 0$) принимать $\psi_0 = -1$. Далее, если особо не оговаривается, будет подразумеваться, что имеет место неособый случай.

Как отмечалось, уравнения Эйлера–Лагранжа являются необходимым условием: любое решение задачи оптимального управления (9.24) является экстремалью, т.е. удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа, но не любая экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, является решением задачи (9.24). Но если решение задачи существует и экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, единственна, то, очевидно, эта экстремаль и будет решением.

Пример 9.1. Решить задачу поворота вала двигателя на угол 1 рад. с последующей остановкой за 10 с при минимальном расходе энергии без учета момента сопротивления ($u_c = 0$). Эта задача математически формулируется следующим образом:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_1(10) = 1, \quad x_2(10) = 0; \quad J = \int_0^{10} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Решение. Ясно, что задача имеет физический смысл, т.е. имеет место неособый случай. Поэтому, как мы условились, полагаем $\psi_0 = -1$. Составим гамильтониан (см. (9.26)):

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа (9.27) принимают вид

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 = 0.$$

Эта система имеет решение

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2, \quad u = \frac{-C_1 t + C_2}{2}.$$

Подставив полученное выражение для управления в уравнения объекта и решив их, получим

$$x_2 = -\frac{C_1 t^2}{4} + \frac{C_2 t}{2} + C_3, \quad x_1 = -\frac{C_1 t^3}{12} + \frac{C_2 t^2}{4} + C_3 t + C_4.$$

Из краевых условий имеем

$$x_2(0) = C_3 = 0, \quad x_1(0) = C_4 = 0, \quad x_2(10) = -25 C_1 + 5 C_2 = 0, \\ x_1(10) = -\frac{250}{3} C_1 + 25 C_2 = 1.$$

Отсюда находим $C_1 = 3/125$, $C_2 = 3/25$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Оптимальное управление и оптимальная траектория имеют вид

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{125} t + \frac{3}{25} \right), \quad x_1^*(t) = \frac{1}{100} \left(-\frac{1}{5} t^3 + 3t^2 \right), \\ x_2^*(t) = \frac{3}{50} \left(-\frac{1}{10} t^2 + t \right).$$

Если требуется, чтобы после поворота вала двигателя на угол 1 рад. он не вращался, нужно положить $u = 0$ при $t \geq 10$.

9.2.4. Правило множителей Лагранжа для задач оптимального управления с подвижными концами. Рассмотрим задачу оптимального управления с подвижными концами и фиксированным временем классического типа. Эта задача отличается от рассмотренной выше задачи (9.24) тем, что изменяются краевые условия, и критерий оптимальности может иметь любой из указанных при классификации видов, т.е. в этом случае задача оптимального управления может быть вариационной задачей Лагранжа, Больца и Майера. Когда концы закреплены и время фиксировано, задача оптимального управления может быть только задачей Лагранжа.

Получим необходимое условие. Начнем с простейшей вариационной задачи с подвижными концами и фиксированным временем

$$J = g_0[y(t_0), y(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(y, \dot{y}, t) dt \rightarrow \text{extr.}$$

Функции g_0 и f_0 непрерывны и дифференцируемы по всем своим аргументам.

Порядок вывода необходимых условий такой же, как и в случае задачи с закрепленными концами. Некоторые особенности появляются из-за того, что в силу подвижности граничных точек их также нужно варьировать, чтобы найти оптимальные граничные точки. Опять все выкладки будем выполнять, предполагая, что $y(t)$ принадлежит к классу гладких функций.

Пусть экстремум достигается на функции $y^*(t)$. При произвольной фиксированной функции $\tilde{y}(t)$ функционал

$$J = g_0[y^*(t_0) + \varepsilon \tilde{y}(t_0), y^*(t_f) + \varepsilon \tilde{y}(t_f)] + \\ + \int_{t_0}^{t_f} f_0(y^* + \varepsilon \tilde{y}(t), \dot{y}^* + \varepsilon \dot{\tilde{y}}(t), t) dt = \Phi(\varepsilon)$$

является функцией от числового аргумента ε . Эта функция достигает экстремума при $\varepsilon = 0$. Поэтому согласно необходимому условию экстремума функции имеем

$$\left. \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} \tilde{y}(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial y(t_f)} \tilde{y}(t_f) + \\ + \int_{t_0}^{t_f} [f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) \tilde{y}(t) + f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) \dot{\tilde{y}}(t)] dt = 0.$$

Интегрируя второе слагаемое под интегралом по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} \tilde{y}(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial y(t_f)} \tilde{y}(t_f) + \\ &+ f'_{0\dot{y}} \tilde{y} \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t)] \tilde{y} dt = 0. \end{aligned}$$

Пусть оптимальные граничные точки $y^*(t_0)$ и $y^*(t_f)$ найдены. Функция $y^*(t)$ должна доставлять экстремум функционалу при фиксированных граничных точках $y(t_0) = y^*(t_0)$ и $y(t_f) = y^*(t_f)$. Поэтому она должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) = 0.$$

С учетом этого уравнения имеем

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} - f'_{0\dot{y}} \Big|_{t=t_0} \right) \tilde{y}(t_0) + \left(\frac{\partial g_0}{\partial y(t_f)} + f'_{0\dot{y}} \Big|_{t=t_f} \right) \tilde{y}(t_f) = 0.$$

В силу произвольности и независимости $\tilde{y}(t_0)$ и $\tilde{y}(t_f)$ отсюда получаем

$$f'_{0\dot{y}} \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)}, \quad f'_{0\dot{y}} \Big|_{t=t_f} = -\frac{\partial g_0}{\partial y(t_f)}.$$

Эти соотношения называются *условиями трансверсальности*. В случае, когда y является вектором: $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p)^T$, условия трансверсальности принимают вид

$$f'_{0\dot{y}_i} \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial g_0}{\partial y_i(t_0)}, \quad f'_{0\dot{y}_i} \Big|_{t=t_f} = -\frac{\partial g_0}{\partial y_i(t_f)}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Уравнения Эйлера в скалярной форме имеют вид (9.21).

Итак, решение вариационной задачи с подвижными концами, кроме уравнений Эйлера, должно удовлетворять условиям трансверсальности. Уравнения Эйлера–Лагранжа имеют такой же вид, что и в случае задачи с закрепленными концами.

Заметим, что дифференциальные уравнения объекта (9.24a) и уравнения Эйлера–Лагранжа (9.27a) имеют порядок n . Поэтому при их решении будем иметь $2n$ постоянных интегрирования. При закрепленных концах граничные условия представляют собой $2n$ соотношений, которые позволяют определить все постоянные интегрирования. Однако при подвижных концах траектории граничных условий недостаточно, чтобы можно было их определить. Недостающие соотношения как раз и доставляют условия трансверсальности.

Получим необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления с подвижными концами:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.29a)$$

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l; \quad (9.29б)$$

$$g_j[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q < 2n; \quad (9.29в)$$

$$J = g_0[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \rightarrow \min. \quad (9.29\Gamma)$$

Граничные условия (9.29в) предполагаются независимыми, функции $[f_j[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)]]$ ($j = 1, 2, \dots, q$) — непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам. На остальные функции накладываются такие же требования, как и в случае задачи с закрепленными концами.

Используя прием Лагранжа, преобразуем задачу (9.29) в простейшую задачу Больца

$$\tilde{J} = G[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), \boldsymbol{\nu}] + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \boldsymbol{\lambda}, t) dt \rightarrow \min,$$

где

$$G = \sum_{i=0}^q \nu_i g_i, \quad \nu_0 = \psi_0;$$

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i.$$

Функцию G называют *терминантом* [3]. На основании полученных выше результатов можно показать, что уравнения Эйлера–Лагранжа совпадает с уравнениями (9.25) и (9.27). Продифференцировав функцию Лагранжа по $\dot{x}_i$, получим $L'_{\dot{x}_i} = -\psi_i$. Поэтому условия трансверсальности можно записать в виде

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}, \quad \psi_i(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.30)$$

Отдельные координаты граничных точек могут быть фиксированы. Соотношения, определяющие эти координаты, в выражение для терминанта G не включаются, и так как при определении необходимых условий они не варьируются, в условия трансверсальности не нужно включать соотношения, содержащие частные производные по этим координатам. В частности, если начальная точка закреплена, т.е. заданы все координаты точки $\mathbf{x}(t_0)$, то в условии (9.30) все первые соотношения с частными производными по $\mathbf{x}_i(t_0)$ должны быть исключены.

Правило множителей Лагранжа (с подвижными концами и фиксированным временем). *Если допустимая пара $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ является решением задачи оптимального управления (9.29), то найдутся такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа, что эта пара удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа (9.25), (9.27) и условиям трансверсальности (9.30).*

Если управление терпит разрыв, то решение $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ должно удовлетворять уравнениям Эйлера–Лагранжа в точках непрерывности управления. В угловых точках (в точках разрыва управления) должны выполняться условия Вейерштрасса–Ордамана.

Чтобы получить решение задачи (9.29), нужно решить уравнения (9.29а), (9.29б) совместно с уравнениями Эйлера–Лагранжа (9.27) при краевых условиях (9.29в) и условиях трансверсальности (9.30).

Пример 9.2. Решить задачу поворота вала двигателя на угол 1 рад. без последующей остановки за 10 с при минимальном расходе энергии без учета момента сопротивления ($u_c = 0$):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_1(10) = 1, \quad J = \int_0^{10} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Решение. Эта задача отличается от задачи, рассмотренной в примере 9.1, только краевым условием на правом конце траектории. Как было получено, гамильтониан и уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \\ \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u} - 2u + \psi_2 = 0.$$

Решением уравнений Эйлера–Лагранжа является

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2, \quad u = \frac{-C_1 t + C_2}{2}.$$

В данном случае $G = 0$ и нефиксированным является только координата $x_2(10)$. Поэтому условие трансверсальности принимает вид

$$\psi_2(10) = \frac{\partial G}{\partial x_2(10)} = 0.$$

Исходя из этого условия находим $\psi_2(10) = -C_1 10 + C_2 = 0$, или $C_2 = 10C_1$. Соответственно для управления получаем $u = C_1(10 - t)/2$. Подставив это выражение в уравнение объекта и проинтегрировав, получим

$$x_2 = \frac{C_1}{4} (20t - t^2) + C_3, \quad x_1 = \frac{C_1}{4} \left(10t^2 - \frac{t^3}{3} \right) + C_3 t + C_4.$$

Учитывая краевые условия

$$x_1(0) = C_4 = 0, \quad x_2(0) = C_3 = 0, \quad x_1(10) = \frac{500}{3} C_1 = 1,$$

находим

$$u^*(t) = 0,003(10 - t), \\ x_1^*(t) = 0,0005(30t^2 - t^3), \quad x_2^*(t) = 0,0015(20t - t^2).$$

9.2.5. Правило множителей Лагранжа для задач оптимального управления с нефиксированным временем. Задача оптимального управления с подвижными концами и нефиксированным временем формулируется следующим образом:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.31a)$$

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l; \quad (9.31б)$$

$$g_j[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q < 2n + 2; \quad (9.31\text{в})$$

$$J = g_0[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \rightarrow \min. \quad (9.31\text{г})$$

Очевидно, если допустимая пара $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{x}^*(t))$ является решением задачи (9.31) при $t \in [t_0^*, t_f^*]$, то она будет решением этой же задачи при фиксированном времени: $t_0 = t_0^*$ и $t_f = t_f^*$. Поэтому решение задачи (9.31) должно удовлетворять уравнениям Эйлера–Лагранжа и условиям трансверсальности, причем условия трансверсальности дополняются соотношениями, обусловленными вариацией начального или конечного моментов времени или того и другого и принимают вид

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}, \quad \psi_i(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.32\text{а})$$

$$H|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}, \quad H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f}. \quad (9.32\text{б})$$

Условия (9.32а) совпадают с условиями (9.30). Дополнительными являются соотношения (9.32б). Если начальный момент t_0 или конечный момент t_f фиксирован, то соответственно первое или второе условие из (9.32б) исключается.

Задачи с подвижными концами и нефиксированным временем являются наиболее общими. Из них как частные случаи получаются задачи с фиксированным временем и закрепленными концами.

Правило множителей Лагранжа (для задачи с подвижными концами и нефиксированным временем). Для того чтобы допустимая пара $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ была решением задачи оптимального управления (9.31), необходимо, чтобы существовали такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа, что эта пара удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа (9.25), (9.27) во всех точках непрерывности управления и условиям трансверсальности (9.32). В точках разрыва управления (если таковые существуют) выполняются условия Вейерштрасса–Эрдмана.

Пример 9.3. Определить оптимальное управление в задаче максимального быстродействия

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad \int_0^{t_f} u^2 dt = b,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(t_f) = d, \quad x_2(t_f) = 0, \quad J = t_f \rightarrow \min.$$

Решение. Преобразуем изопериметрическое ограничение:

$$\dot{x}_3 = u^2, \quad x_3(0) = 0, \quad x_3(t_f) = b.$$

В данном случае имеем $g_0 = t_f$ и $G = \nu_0 g_0 = -t_f$. Так как граничные точки траектории закреплены и начальный момент задан (фиксиро-

ван), то условия трансверсальности принимают вид

$$H|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f} = 1.$$

Гамильтониан и уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned} H &= \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2; \\ \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= \psi_2 + 2\psi_3 u = 0. \end{aligned}$$

Из последних уравнений имеем

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2, \quad \psi_3 = C_3, \quad u = \frac{C_1 t - C_2}{2C_3},$$

или

$$u = \tilde{C}_1 t - \tilde{C}_2, \quad \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2C_3}, \quad \tilde{C}_2 = \frac{C_2}{2C_3}.$$

Подставив последнее выражение для управления в уравнение объекта и в дополнительное уравнение, получим

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} \tilde{C}_1 t^2 - \tilde{C}_2 t + C_4, \quad x_1 = \frac{1}{6} \tilde{C}_1 t^3 - \frac{1}{2} \tilde{C}_2 t^2 + C_4 t + C_5, \\ x_3 &= \frac{1}{3} \tilde{C}_1^2 t^3 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 t^2 + \tilde{C}_2^2 t + C_6. \end{aligned}$$

Из граничных условий имеем

$$\begin{aligned} x_1(0) &= C_5 = 0, \quad x_2(0) = C_4 = 0, \quad x_3(0) = C_6 = 0; \\ x_1(t_f) &= \frac{1}{6} \tilde{C}_1 t_f^3 - \frac{1}{2} \tilde{C}_2 t_f^2 = d, \quad x_2(t_f) = \frac{1}{2} \tilde{C}_1 t_f^2 - \tilde{C}_2 t_f = 0, \\ x_3(t_f) &= \frac{1}{3} \tilde{C}_1^2 t_f^3 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 t_f^2 + \tilde{C}_2^2 t_f = b. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\tilde{C}_1 = -\frac{b}{d}, \quad \tilde{C}_2 = -\sqrt[3]{\frac{3b^2}{2d}}, \quad t_f = \sqrt[3]{\frac{12d^2}{b}}.$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \tilde{C}_1 t - \tilde{C}_2 = -\frac{b}{d} t + \sqrt[3]{\frac{3b^2}{2d}}.$$

Здесь, как и в примерах 9.1 и 9.2, из физических соображений предполагается, что решение задачи существует. Поэтому единственное управление, удовлетворяющее правилу множителей Лагранжа, будет оптимальным. В данном примере условия трансверсальности при нахождении оптимального управления не использовались. Они потребовались бы, если бы было нужно определить множители Лагранжа.

9.3. Принцип максимума Понтрягина

Во многих прикладных задачах на управление накладывается ограничение типа неравенства. Часто оптимальное управление в таких задачах имеет разрыв. Метод множителей Лагранжа не позволяет определить число и местоположения точек разрыва, и поэтому в этих случаях он неэффективен. Такие задачи легче решаются с помощью принципа максимума Понтрягина.

Принцип максимума, сформулированный Л. С. Понтрягиным в 1953 г. как необходимое условие экстремума для задач оптимального управления, был доказан и развит им, его учениками и сотрудниками [3, 12, 51].

9.3.1. Задача с закрепленными концами и фиксированным временем. При отсутствии фазового ограничения задачу оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем в общем виде можно сформулировать как следующую задачу Лагранжа:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{u} \in U \subseteq R^r; \quad (9.33a)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_f) = x_i^f, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.33б)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \rightarrow \min (\inf). \quad (9.33в)$$

Функции f_i ($i = 0, 1, \dots, n$) непрерывны по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r, t$ и непрерывно дифференцируемы по $x_1, \dots, x_n, t$. Эта задача отличается от задачи оптимального управления классического типа (9.24) тем, что ограничение задается только на управление и в виде включения $\mathbf{u} \in U$, где U — допустимое множество значений управления. Кроме того, здесь не требуется гладкость (непрерывная дифференцируемость) функций f_i ($i = 0, 1, \dots, n$) по $\mathbf{u}$.

В данной задаче *допустимыми управлениями* считаются управления $\mathbf{u}(t)$, принадлежащие к классу кусочно непрерывных функций и принимающие значения из допустимого множества U . Фазовая траектория $\mathbf{x}(t)$ называется *допустимой*, если она является кусочно гладкой. При допустимом управлении фазовая траектория задачи (9.33) является кусочно гладкой: координаты $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) непрерывны всюду на интервале t_0, t_f], их производные могут иметь разрывы 1-го рода в точках разрыва управления. Пара $(\tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t))$ называется *допустимой* для задачи (9.33), если $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ являются допустимыми управлением и траекторией и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ при $u = \tilde{u}(t)$ удовлетворяет уравнениям объекта и краевым условиям этой задачи.

Применим к задаче (9.33) прием Лагранжа [3]. Составим функцию

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i,$$

где

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i. \quad (9.34)$$

Здесь функции L и H также называют *функцией Лагранжа* и *гамильтонианом*. Но они отличаются от одноименных функций классического вариационного исчисления тем, что в них не входит ограничение на управление, имеющее в данном случае вид включения $\mathbf{u} \in U$. В конкретных задачах ограничение на управление может быть задано в виде неравенства или равенства. Гамильтониан (9.34), который не включает ограничение на управление, в отличие от гамильтониана, включающего ограничение на управление, называют также *функцией Понтрягина*.

В соответствии с приемом Лагранжа задача (9.33) сводится к задаче

$$\tilde{J} = \int L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, t) dt \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in U}; \quad (9.35a)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_f) = x_i^f, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.35b)$$

Функционал $\tilde{J}$ максимизируется, хотя функционал J в исходной задаче требуется минимизировать, так как множитель ψ_0 при f_0 в неособом случае принимается отрицательным ($\psi_0 = -1$). В особом случае ($\psi_0 = 0$) функционал $\tilde{J}$ не зависит от J .

Пусть тройка $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t))$ есть решение задачи (9.35). Задача (9.35) равносильна следующим двум задачам:

$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\psi}, t) dt \rightarrow \max_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}},$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_f) = x_i^f, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}^*, t) dt \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in U},$$

или

$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\psi}, t) - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i \right] dt \rightarrow \max_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}},$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_f) = x_i^f, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.36a)$$

$$\tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}^*, t) - \sum_{i=1}^n \psi_i^* \dot{x}_i^* \right] dt \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in U}. \quad (9.36b)$$

Естественно, задачи (9.35) и (9.36), как и исходная задача, рассматриваются в классе допустимых функций, причем функция $\boldsymbol{\psi}(t)$ называется *допустимой*, если она, как и $\mathbf{x}(t)$, принадлежит к классу кусочно гладких функций.

Задача (9.36а) является простейшей задачей вариационного исчисления. Для нее необходимо условие максимума (уравнения Эйлера) (9.25) принимает вид

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.37a)$$

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.37б)$$

В задаче (9.36б), очевидно, интеграл примет максимальное значение при таком управлении, при котором подынтегральное выражение как функция от управления $\mathbf{u}$ примет максимальное значение. Следовательно, управление $\mathbf{u}^*(t)$ будет решением задачи (9.36б), если оно доставляет максимум гамильтониану, или если всюду на интервале $[t_0, t_f]$, кроме точек разрыва $\mathbf{u}^*(t)$, будет выполнено равенство

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}^*, t) = H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\psi}^*, t). \quad (9.38)$$

Необходимое условие (9.37) совместно с соотношением (9.38) образует необходимые условия оптимальности исходной задачи (9.33), называемые *принципом максимума* или *принципом максимума Понтрягина*. Уравнения (9.37б) совпадают с уравнениями объекта, и поэтому их можно не рассматривать. Уравнения (9.37а) называют *сопряженными уравнениями* или *сопряженной системой*.

Принцип максимума (при закрепленных концах и фиксированном времени). Для того чтобы допустимая для задачи (9.33) пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ была ее решением, необходимо, чтобы существовали такие не обращающиеся одновременно в нуль константа $\psi_0^* \leq 0$ и решение $\boldsymbol{\psi}^* = (\psi_1^* \dots \psi_n^*)^T$ сопряженной системы (9.37а) при $x = x^*(t)$ и $u = \mathbf{u}^*(t)$, что при любом $t \in [t_0, t_f]$, кроме точек разрыва $\mathbf{u}^*(t)$, функция $\tilde{H}(\mathbf{u}) = H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}^*, t)$ при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ достигает максимума, т. е. выполняется соотношение (9.38).

9.3.2. Задача с подвижными концами и нефиксированным временем. Рассмотрим задачу Больца

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{u} \in U \subseteq R^r; \quad (9.39a)$$

$$g_j[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q < 2n + 2; \quad (9.39б)$$

$$J = g_0[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \rightarrow \min. \quad (9.39в)$$

Используя прием Лагранжа, эту задачу можно свести к следующей простейшей вариационной задаче:

$$\tilde{J} = G + \int_{t_0}^{t_f} \left(H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i \right) dt \rightarrow \max,$$

где

$$G = \sum_{j=0}^q \nu_j g_j, \quad \nu_0 = \psi_0; \quad H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i.$$

Дальше, как и в случае задачи с закрепленными концами, последняя задача разбивается на две, и получаются необходимые условия в форме принципа максимума. Допустимая пара $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ для задачи (9.39) определяется так же, как и для задачи (9.33).

Принцип максимума (при подвижных концах и нефиксированном времени). Для того чтобы допустимая для задачи (9.39) пара $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ была ее решением, необходимо:

1) существование таких не обращающихся одновременно в нуль констант $\psi_0^* \leq 0$ и решения $\boldsymbol{\psi}^* = (\psi_1^* \dots \psi_n^*)^T$ сопряженной системы (9.37а) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$, что при любом $t \in [t_0, t_f]$, кроме точек разрыва $\mathbf{u}^*(t)$, функция $\tilde{H}(\mathbf{u}) = H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}^*, t)$ при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t)$ достигает максимума, т. е. выполняется соотношение (9.38)

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}^*, t) = H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\psi}^*, t);$$

2) выполнение условия трансверсальности (9.32):

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}, \quad \psi_i(t_f) = \frac{\partial G}{\partial x_i(t_f)}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$H \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial G}{\partial t_0}, \quad H \Big|_{t=t_f} = -\frac{\partial G}{\partial t_f}.$$

Рассмотрим, какова связь между принципом максимума и методом множителей Лагранжа. Как отмечалось, функция Понтрягина отличается от гамильтониана, рассматриваемого в методе множителей Лагранжа, тем, что в нее не включено ограничение на управление. Сопряженные уравнения (9.37а) совпадают с уравнениями Эйлера–Лагранжа (9.27а), если отсутствует фазовое ограничение: функция φ_k , определяющая ограничение на управление, не зависит от фазовых координат. Но они не включают условия стационарности гамильтониана (уравнения (9.27б)). Их заменяет условие максимума (9.38). Если ограничение на управление задается в виде равенств, то, используя метод неопределенных множителей Лагранжа нахождения экстремума функции, из (9.38) получим недостающие уравнения Эйлера–Лагранжа.

Пример 9.4. Определить оптимальное управление в следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad |u| \leq a,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_2(10) = 0, \quad J = -x_1(10) \rightarrow \min.$$

Решение. Функция Понтрягина и сопряженные уравнения имеют вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u;$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1.$$

Терминант и условия трансверсальности имеют вид

$$G = \nu_0 g_0 = x_1(10), \quad \psi_1(10) = -\frac{\partial G}{\partial x_1(10)} = -1.$$

Решив сопряженные уравнения и учитывая условия трансверсальности, находим

$$\psi_1 = -1, \quad \psi_2 = C_2 - t.$$

В условии $\max_{|u| \leq a} H = \psi_1 x_2 + \max_{|u| \leq a} \psi_2 u$ максимум достигается, когда управление принимает граничные значения и его знак совпадает со знаком функции ψ_2 , т.е. при $u = a \operatorname{sign} \psi_2$. Так как знак линейной функции может измениться только один раз, то оптимальным может быть управление

$$u = \begin{cases} a, & 0 \leq t < t_1, \\ -a, & t_1 \leq t \leq 10, \end{cases}$$

или

$$u = \begin{cases} -a, & 0 \leq t < t_1, \\ a, & t_1 \leq t \leq 10, \end{cases}$$

где t_1 — момент изменения знака функции ψ_2 . В частности, если $t_1 = 10$, то это значит, что функция ψ_2 на интервале $[0, 10]$ не меняет знака, и управление не переключается. Выбор из двух управлений можно сделать исходя из того, какое из этих управлений обеспечивает выполнение граничных условий. Но в данном примере этот выбор можно сделать на основании физических соображений. По условию задачи нужно повернуть вал двигателя на максимальный угол и остановить его за заданное время. Поэтому оптимальным может быть только первое из двух приведенных управлений. Остается определить только момент t_1 переключения управления.

Проинтегрируем уравнения объекта при первом управлении с учетом начальных условий:

$$x_2 = \begin{cases} at, & 0 \leq t < t_1, \\ C_2 - at, & t_1 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

Используя непрерывность $x_2(t)$, т. е. равенство $at_1 = C_2 - at_1$, находим $C_2 = 2at_1$. Поэтому последнее соотношение можно записать в виде

$$x_2 = \begin{cases} at, & 0 \leq t < t_1, \\ a(2t_1 - t), & t_1 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

Из краевого условия на правом конце траектории имеем $x_2(10) = a(2t_1 - 10) = 0$. Отсюда для момента переключения находим $t_1 = 5$. Таким образом, оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \begin{cases} a, & 0 \leq t < 5, \\ -a, & 5 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

9.3.3. Задача максимального быстрогодействия. Теорема об n интервалах. Рассмотрим задачу максимального быстрогодействия, когда объект является линейным:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^r b_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.40a)$$

$$\alpha_j \leq u_j \leq \beta_j, \quad \alpha_j < 0, \quad \beta_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, r; \quad (9.40б)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(t_f) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.40в)$$

$$J = t_f - t_0 \rightarrow \min. \quad (9.40г)$$

Эта задача называется *линейной задачей максимального быстрогодействия*. В векторной форме уравнения объекта принимают вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Предполагается, что эти уравнения являются уравнениями в отклонениях и поэтому конечное состояние, в которое нужно перевести объект, есть начало координат ($\mathbf{x}(t_f) = 0$).

Функция Понтрягина имеет вид

$$H = \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^r b_{ij} u_j \right),$$

где $\boldsymbol{\psi}^T = (\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n)$ подчиняется сопряженному уравнению

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}.$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление определяется из условия

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H = \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \max_{\mathbf{u} \in U} \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{j=1}^r b_{ij} u_j,$$

или

$$\max_{\mathbf{u} \in U} \sum_{j=1}^r u_j \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i = \sum_{j=1}^r \max_{\mathbf{u} \in U} \left(u_j \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i \right),$$

где

$$U = \{\mathbf{u}: \alpha_j \leq u_j \leq \beta_j, \ j = 1, 2, \dots, r\}.$$

Если выполняется так называемое условие нормальности (см. ниже), то сумма $\sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i$ обращается в нуль только в изолированных точках. В этом случае из последнего тождества следует, что координаты u_j^* ($j = 1, \dots, r$) оптимального управления $\mathbf{u}^*(t)$ кусочно

постоянны и принимают крайние значения α_j или β_j :

$$u_j^* = \begin{cases} \alpha_j, & \sum_{i=1}^n b_{ij}\psi_i < 0, \\ \beta_j, & \sum_{i=1}^n b_{ij}\psi_i > 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

В частном случае, когда $\beta_j = -\alpha_j$, имеем

$$u_j^* = \beta_j \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_{ij}\psi_i, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Для линейных задач максимального быстродействия при выполнении так называемого условия нормальности принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Для определения этого понятия введем в рассмотрение $(n \times n)$ -матрицы

$$N[j] = [B^j \quad (AB)^j \quad \dots \quad (A^{n-1}B)^j],$$

где $B^j, (AB)^j, \dots, (A^{n-1}B)^j$ — j -е столбцы матриц $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ соответственно.

Условие нормальности. Говорят, что для объекта $\dot{x} = Ax + Bu$ выполнено условие нормальности или условие общности положения, если матрицы $N[j]$ невырождены: $\det N[j] \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, r$) [12, 39].

Очевидно, в случае скалярного управления условие нормальности совпадает с условием управляемости. Так как линейный объект всегда может быть представлен в приведенном выше нормальной форме, то о выполнимости или невыполнимости условия нормальности можно говорить для любой линейной стационарной системы. Объект, для которого выполнено условие нормальности, будем называть *нормальным объектом* или *нормальной управляемой системой*.

Согласно утверждению 1.2 одномерная управляемая система, описываемая уравнением

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u,$$

или

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) u, \\ 0 \leq m < n,$$

где не все коэффициенты b_i ($i = 0, 1, \dots, m$) равны нулю, вполне управляема. Следовательно, эта управляемая система является нормальной.

Пример 9.5. Определить, выполнено ли условие нормальности для объекта

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = u_1 + u_2.$$

Решение. В данном примере имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы $N[j]$ имеют вид

$$N[1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N[2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

и обе они невырождены. Следовательно, условие нормальности выполняется.

Необходимое и достаточное условие оптимальности [12]. *Если в линейной задаче максимального быстродействия объект является нормальным, то для того чтобы пара $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{x}^*(t))$ была ее решением, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла принципу максимума.*

В оптимальном по быстродействию управлении линейным объектом функции $u_j^*(t)$ принимают только граничные значения при любых собственных значениях матрицы A , если объект является нормальным. В общем случае эти функции имеют произвольное число переключений — точек перехода из одного граничного значения на другое. В частном случае справедлива следующая теорема [12].

Теорема об n интервалах. *Если в линейной задаче максимального быстродействия объект является нормальным и характеристическое уравнение*

$$\det(A - Is) = 0$$

имеет только действительные корни, то компоненты оптимального управления $u_j^*(t)$ ($j = 1, 2, \dots, r$) кусочно постоянны, принимают только граничные значения и имеют не более n интервалов постоянства, или не более $n - 1$ переключений.

Впервые теорему об n интервалах для объекта, который описывается уравнением вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u \quad (a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0),$$

сформулировал и доказал А. А. Фельдбаум. Как было отмечено, условие нормальности для такого объекта всегда выполняется, поэтому для справедливости теоремы об n интервалах необходимо и достаточно, чтобы все корни его характеристического уравнения были действительными.

Если характеристическое уравнение объекта имеет комплексные корни, то число переключений зависит от начальных условий. В каждом конкретном случае оно возрастает при удалении начальной точки от начала координат и может быть сколь угодно большим, но всегда конечным при любом начальном условии.

9.3.4. Вырожденные задачи. Методы классического вариационного исчисления и принцип максимума не всегда позволяют найти оптимальное управление. Существуют задачи, в которых необходимые условия оптимальности, даваемые этими методами, выполняются тривиальным образом и им, помимо одного оптимального управления, удовлетворяет множество других управлений, среди которых могут быть как оптимальные, так и неоптимальные управления. Задачи такого типа называют *вырожденными*. К числу вырожденных задач относятся линейные задачи максимального быстрогодействия для которого не выполняется условие нормальности.

Если обнаружится, что внутри интервала $[t_9, t_f]$ имеется конечный отрезок времени $[t_1, t_2]$ такой, что на нем вдоль соответствующих управлению $\mathbf{u}^*(t)$ траектории $\mathbf{x}^*(t)$ и сопряженной функции $\psi^*(t)$ выполняются тождества

$$\frac{\partial H(\psi^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 H(\psi^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}^2} \equiv 0, \quad (9.41a)$$

или

$$E(\psi^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{u}, t) = H(\psi^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) - H(\psi^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}, t) \equiv 0, \quad (9.41б)$$

то оптимальное управление называют *вырожденным в классическом смысле* в случае (9.41a) или *вырожденным в смысле принципа максимума* в случае (9.41б). Вообще говоря, условия (9.41a) и (9.41б) не всегда выполняются одновременно.

В случае вырожденных задач оптимальное управление нельзя найти только из условий (9.41a) или (9.41б). Требуются дополнительные условия. Одним из необходимых дополнительных условий для вырожденных скалярных управлений являются неравенства

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right] \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

При использовании этого условия производится последовательное дифференцирование производной $\partial H / \partial \mathbf{u}$ по времени, пока в одной из производных не появится $\mathbf{u}$, что и даст возможность найти оптимальное управление. Доказано, что при s последовательных дифференцированиях управление может появиться лишь при четном $s = 2k$.

Такого рода вырожденные задачи встречаются, в частности, когда гамильтониан линейно зависит от $\mathbf{u}$.

Пример 9.6. Определить оптимальное управление и оптимальную траекторию в следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = 4, \quad x(10) = 0, \quad J = \int_0^{10} x^2 dt \rightarrow \min.$$

Решение. Гамильтониан, сопряженное уравнение и условие стационарности гамильтониана имеют вид

$$H = \psi u - x^2, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \psi = 0.$$

В соответствии с принципом максимума $u^* = \text{sign } \psi$. Если на каком-либо отрезке времени интервала $[0, 10]$ функция $\psi(t)$ обращается в нуль, то управление будет вырожденным. Допустим, что такой отрезок существует. Для такого отрезка справедливы соотношения

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u} = \dot{\psi} = 2x = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} = 2\dot{x} = 2u = 0,$$

откуда для вырожденного управления получаем $u^* = 0$.

Таким образом, оптимальное управление может принимать только граничные значения: -1 или 1 , когда $\psi \neq 0$, и нуль, когда $\psi = 0$. Одним из управлений, удовлетворяющих этому условию, является управление

$$u = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < t_1, \\ 0, & t_1 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

Проинтегрировав уравнение объекта при этом управлении с учетом граничных условий, получим

$$x = \begin{cases} 4 - t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t_1 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

Из условия непрерывности траектории следует $x(t_1) = 4 - t_1 = 0$, откуда $t_1 = 4$. Таким образом, решением рассматриваемой задачи является

$$u^* = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 4, \\ 0, & 4 \leq t \leq 10, \end{cases} \quad x^* = \begin{cases} 4 - t, & 0 \leq t \leq 4, \\ 0, & 4 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

То, что среди различных вариантов сразу удалось «угадать» оптимальное управление, объясняется тем, что при его выборе неявно использовалась физическая сущность задачи (граничные условия).

9.3.5. Особые задачи. Как отмечалось, в функции Понтрягина (гамильтониане) $H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i$ сопряженную координату ψ_0 обычно выбирают равной $\psi_0 = -1$. Однако встречаются задачи, в которых оптимальным управлением и траектории соответствует $\psi_0 = 0$. Такие задачи называются *особыми*.

Примером особых задач могут быть некорректно сформулированные задачи оптимального управления, например, такие, у которых решения не зависят от критерия оптимальности или имеется только одно возможное допустимое управление. Для последних задач не существует возможности выбора наилучшего решения, и сама постановка задачи оптимального управления становится бессодержательной.

Пример 9.7. Найти решение следующей задачи оптимального управления:

$$\dot{x} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad J = - \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} dt \rightarrow \min.$$

Решение. Функция Понтрягина и сопряженное уравнение имеют вид

$$H = -\psi_0 \sqrt{1 - u^2} + \psi_1 u, \quad \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Из последнего уравнения находим $\psi_1 = C$.

В соответствии с принципом максимума если $u^*(t)$ — оптимальное управление и $x^*(t)$ — оптимальная траектория, то

$$H(x^*, u^*, \psi^*) \geq H(x^*, u, \psi^*),$$

причем $\psi_0 = \text{const} \leq 0$.

Возможное допустимое управление — это кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая ограничению $|u| \leq 1$ и переводящая изображающую точку из начального положения $x(0) = 0$ в конечное положение $x(1) = 1$ за время $t_f = 1$. Такое управление единственно, и оно равно $u(t) = 1$. Так как других допустимых управлений нет, то оно и должно быть решением задачи: $u^*(t) = 1$. При этом $H(x^*, u^*, \psi^*) = \psi_1 = C$, и по принципу максимума должно выполняться неравенство

$$C \geq -\psi_0 \sqrt{1 - u^2} + Cu$$

при допустимом управлении, т. е. при $|u(t)| \leq 1$. При $\psi_0 = 0$ это неравенство выполняется. Однако при $\psi_0 = -1$ нельзя подобрать такое C , при котором данное неравенство выполняется. Следовательно, в данной задаче оптимальному решению соответствует $\psi_0^* = 0$.

9.4. Метод динамического программирования

Динамическим программированием называют разработанный Р. Беллманом в начале 50-х годов прошлого столетия метод оптимизации многошаговых процессов различной природы. Основу динамического программирования как метода оптимизации составляют [8, 19]: 1) принцип оптимальности; 2) инвариантное погружение, т. е. включение исходной задачи в семейство аналогичных задач; 3) функциональное уравнение, получаемое на основе принципа оптимальности и инвариантного погружения.

9.4.1. Инвариантное погружение и функциональное уравнение. Основная идея метода динамического программирования заключается в следующем. Вместо того чтобы решать исходную задачу, ее включают в некоторое семейство задач оптимизации (инвариантное погружение). При этом может оказаться, что между отдельными задачами существуют простые соотношения и среди задач семейства найдется такая, которая легко решается. Тогда, используя решение последней и соотношение, связывающее отдельные задачи семейства, т. е. функциональное уравнение, получают решение исходной задачи.

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере [19]. Пусть требуется найти минимум функции $f(\mathbf{x})$ специального вида:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in G^n}.$$

Здесь G^n — прямое произведение областей (множеств) G_i определения функций $f_i(x_i)$:

$$G^n = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n; \quad x_i \in G_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим семейство задач

$$f^{(m)}(\mathbf{x}^{(m)}) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \rightarrow \min_{\mathbf{x}^{(m)} \in G^m}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (9.42)$$

где $\mathbf{x}^{(m)} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)^T$ и $G^m = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$. Исходная задача погружена (инвариантно погружение) в построенное семейство задач в том смысле, что она входит в это семейство как частный случай при $m = n$. В задаче (9.42) параметр m можно рассматривать как дискретное время. Введем в рассмотрение функцию

$$B_m = \min_{\mathbf{x}^{(m)} \in G^m} \sum_{i=1}^m f_i(x_i).$$

Эту функцию называют *функцией Беллмана*.

Очевидно, справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} B_{m+1} &= \min_{\mathbf{x}^{(m+1)} \in G^{m+1}} \left[f_{m+1}(x_{m+1}) + \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \right] = \\ &= \min_{x_{m+1} \in G_{m+1}} \left[f_{m+1}(x_{m+1}) + \min_{\mathbf{x}^{(m)} \in G^m} \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \right]. \end{aligned}$$

Но второе слагаемое в последнем выражении есть B_m , поэтому получаем следующее функциональное уравнение:

$$B_{m+1} = \min_{x_{m+1} \in G_{m+1}} [f_{m+1}(x_{m+1}) + B_m],$$

или, так как в данном случае B_m не зависит от x_{m+1} ,

$$B_{m+1} = \min_{\mathbf{x}^{(m+1)} \in G^{m+1}} f_{m+1}(x_{m+1}) + B_m, \quad (9.43)$$

причем

$$B_1 = \min_{x_1 \in G_1} f_1(x_1).$$

Уравнение (9.43) называют *уравнением Беллмана*. Решая его с учетом последнего условия, получим $B_1, B_2, \dots, B_n$ и $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Решением исходной задачи являются B_n и $\mathbf{x}^* = (x_1^* \ x_2^* \ \dots \ x_n^*)^T$.

Как видно, метод динамического программирования сводит задачу минимизации скалярной функции от n переменных к n задачам минимизации скалярных функций от одной переменной. В результате при числовом решении задачи существенно сокращается объем вычисления. Действительно, пусть G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — конечные множества и каждое из них состоит из l точек. Тогда при решении исходной задачи методом перебора без использования метода динамического программирования потребуется рассмотреть l^n вариантов, а с использованием метода динамического программирования — всего $l \cdot n$ вариантов.

При использовании уравнения (9.43) вычисление B_m происходит в направлении возрастания аргумента, т.е. в прямом «времени», поэтому это уравнение называют *прямым уравнением Беллмана* в отличие от *обратного уравнения Беллмана*, при использовании которого вычисление B_m производится в направлении убывания времени.

Для получения обратного уравнения Беллмана произведем инвариантное погружение исходной задачи в семейство задач

$$\tilde{f}^{(m)}(\tilde{\mathbf{x}}^{(m)}) = \sum_{i=m}^n f_i(x_i) \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{x}}^{(m)} \in \tilde{G}^m}, \quad m = n, n-1, \dots, 1,$$

где

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(m)} = (x_m \ x_{m+1} \ \dots \ x_n)^T, \quad \tilde{G}^m = G_m \times G_{m+1} \times \dots \times G_n.$$

При $m = 1$ имеем $f(\mathbf{x}) = \tilde{f}^{(1)}(\mathbf{x})$. Введем функцию Беллмана

$$S_m = \min_{\tilde{\mathbf{x}}^{(m)} \in \tilde{G}^m} \sum_{i=m}^n f_i(x_i).$$

Очевидно, имеем

$$S_{m-1} = \min_{x_{m-1} \in G_{m-1}} \left[f_{m-1}(x_{m-1}) + \min_{\tilde{\mathbf{x}}^{(m)} \in \tilde{G}^m} \sum_{i=m}^n f_i(x_i) \right],$$

или

$$S_{m-1} = \min_{x_{m-1} \in G_{m-1}} [f_{m-1}(x_{m-1}) + S_m].$$

Последнее уравнение есть *обратное уравнение Беллмана*.

9.4.2. Принцип оптимальности. В рассмотренном простейшем примере вывод уравнения Беллмана основывался на очевидных соотношениях. В более сложных случаях при выводе уравнения Беллмана используется принцип оптимальности. В общем виде этот принцип формулируется следующим образом.

Оптимальная стратегия (поведение) обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и решения на начальном этапе, решения на последующем этапе должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, которое получается в результате принятия решений на начальном этапе.

В задачах оптимального управления оптимальность определяется функционалом (критерием оптимальности) $J(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$, состояние — фазовым вектором $\mathbf{x}(t)$, стратегия — это управление $\mathbf{u}(t)$ на всем интервале $[t_0, t_f]$, решение — это выбор конкретного управления.

Для задачи оптимального управления справедлив принцип оптимальности, если она обладает марковским свойством. По определению задача оптимального управления обладает *марковским свойством*, если после выбора управления на начальном интервале $[t_0, t']$, каково бы оно ни было, на величину критерия $J(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ на конечном интервале $[t', t_f]$ оказывают влияние выбор управления на этом интервале и значение фазового вектора в конце начального интервала, т. е. $\mathbf{x}(t')$.

Чтобы сформулировать принцип оптимальности применительно к задачам оптимального управления, рассмотрим задачу

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{u}(t) \in U_t; \quad (9.44a)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_f) \in X_f; \quad (9.44б)$$

$$J = g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \rightarrow \min. \quad (9.44в)$$

Условимся управление $\mathbf{u}(t)$ на интервале $[a, b]$ обозначать $\mathbf{u}[a, b]$: $\mathbf{u}[a, b] = (\mathbf{u}(t), a \leq t \leq b)$. Если интервал слева или справа является открытым, то соответственно слева или справа будем писать круглые скобки: $\mathbf{u}(a, b] = (\mathbf{u}(t), a < t \leq b)$ и $\mathbf{u}[a, b) = (\mathbf{u}(t), a \leq t < b)$.

Для задачи (9.44) справедлив принцип оптимальности, и он может быть сформулирован следующим образом.

Для оптимальности допустимой для задачи (9.44) пары $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{x}^*(t))$ необходимо, чтобы при любом $t' \in [t_0, t_f]$ управление $\mathbf{u}^*[t', t_f]$ было оптимальным относительно состояния $\mathbf{x}^*(t')$, в котором окажется объект в момент t' при выборе на начальном отрезке времени $[t_0, t')$ управления $\mathbf{u}^*[t_0, t')$.

Это утверждение легко доказывается от противного. Допустим, что оно неверно и существует допустимое управление $\mathbf{u}^0[t', t_f]$, переводящее объект из точки $\mathbf{x}^0(t')$ в точку $\mathbf{x}^0(t_f) \in X_f$ в момент t_f^0 , при котором функционал

$$J_2(\mathbf{u}[t', t_f]) = g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

принимает меньшее значение, чем при управлении $\mathbf{u}^*[t', t_f]$:

$$J(\mathbf{u}^0[t', t_f^0]) < J(\mathbf{u}^*[t', t_f^*]).$$

Тогда критерий оптимальности в задаче (9.44) при управлении

$$\mathbf{u}^0[t_0, t_f^0] = \begin{cases} \mathbf{u}^*(t), & t_0 \leq t < t', \\ \mathbf{u}^0(t), & t' \leq t \leq t_f^0, \end{cases}$$

принимает меньшее значение, чем при управлении $\mathbf{u}^*[t_0, t_f^*]$, а это противоречит оптимальности управления $\mathbf{u}^*[t_0, t_f^*]$.

Принцип оптимальности для задачи оптимального управления является частным случаем следующего более общего утверждения.

Если допустимая для задачи (9.44) пара $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{x}^*(t))$ оптимальна, то, каков бы ни был подынтервал $[t_1, t_2] \subseteq [t_0, t_f]$, управление $\mathbf{u}^*(t)$ на этом подынтервале является оптимальным относительно граничных точек $\mathbf{x}^*(t_1)$ и $\mathbf{x}^*(t_2)$.

Это утверждение доказывается точно так же, как и принцип оптимальности. В частном случае, когда $t_1 = t_0$, приведенное утверждение называют *обратным принципом оптимальности* [19]. Приведем несколько иную формулировку этого принципа.

Обратный принцип оптимальности. *Для оптимальности допустимой для задачи (9.44) пары $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{x}^*(t))$ необходимо, чтобы при любом $t' \in [t_0, t_f]$ управление $\mathbf{u}^*[t_0, t']$ было оптимальным относительно конечного для интервала $[t_0, t']$ состояния $\mathbf{x}(t') = \mathbf{x}^*(t')$.*

9.4.3. Функции и уравнения Беллмана. Произведем инвариантное погружение задачи (9.44) в семейство задач, которое получается из задачи (9.44) при замене начального условия $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ параметрическим условием $\mathbf{x}(t') = \mathbf{x}'$, $t' \in [t_0, t_f]$. Здесь t' и $\mathbf{x}'$ рассматриваются как параметры. В частном случае, когда $t' = t_0$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^0$, из введенного семейства выделяется исходная задача.

Минимальное значение критерия оптимальности при параметрическом начальном условии зависит от выбранных значений t' и $\mathbf{x}'$:

$$S(\mathbf{x}(t'), t') = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ t' \leq t \leq t_f}} \left[g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \right],$$

причем $S(\mathbf{x}(t_f), t_f) = g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f)$. Функция $S(\mathbf{x}(t'), t')$ называется *функцией Беллмана*.

Получим уравнение Беллмана. Очевидно, имеем

$$S(\mathbf{x}(t' - \Delta t), t' - \Delta t) = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ t' - \Delta t \leq t \leq t_f}} \left[g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0 dt + \int_{t'}^{t_f} f_0 dt \right],$$

Для краткости записи аргументы функции $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ опущены. В силу принципа оптимальности можем записать

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}(t' - \Delta t), t' - \Delta t) &= \\ &= \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ t' - \Delta t \leq t \leq t_f}} \left[\int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0 dt + \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ t' \leq t \leq t_f}} \left(g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0 dt \right) \right], \end{aligned}$$

или

$$S(\mathbf{x}(t' - \Delta t), t' - \Delta t) = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ t' - \Delta t \leq t \leq t'}} \left[\int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0 dt + S(\mathbf{x}(t'), t') \right].$$

В последнем соотношении в правой части функцию Беллмана нельзя вынести за операцию $\min$, так как $\mathbf{x}(t')$ и соответственно функция Беллмана зависят от управления на интервале $[t' - \Delta t, t']$. В то же время $\mathbf{x}(t' - \Delta t)$ и соответственно функция Беллмана $S(\mathbf{x}(t' - \Delta t), t' - \Delta t)$ не зависят от управления на указанном интервале. Поэтому эту функцию можно перенести в правую часть и внести под знак минимума:

$$0 = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in U \\ t' - \Delta t \leq t \leq t'}} \left[\int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0 dt + S(\mathbf{x}(t'), t') - S(\mathbf{x}(t' - \Delta t), t' - \Delta t) \right].$$

В полученном уравнении интеграл представим в виде

$$\int_{t' - \Delta t}^{t'} f_0 dt = f_0(\mathbf{x}(t'), t') \Delta t + o(\Delta t).$$

Затем, разделив обе части на Δt , устремим Δt к нулю. Тогда, положив $t' = t$, в пределе получим уравнение

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U_t} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{dS(\mathbf{x}(t), t)}{dt} \right] = 0, \quad (9.45)$$

или

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U_t} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right] = 0,$$

которое называется *уравнением Беллмана*.

Так как функция Беллмана $S(\mathbf{x}(t), t)$ не зависит от управления $\mathbf{u}(t)$, последнее слагаемое в правой части можно вынести за скобки и уравнение Беллмана записать в виде

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U_t} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = -\frac{\partial S}{\partial t},$$

или, в векторной форме,

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U_t} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (9.46)$$

Сформулируем основной результат.

Если функция Беллмана дифференцируема, то для того чтобы допустимая пара $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))$ для задачи (9.44) была ее решением, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Беллмана (9.46) при граничном условии

$$S(\mathbf{x}(t_f), t_f) = g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f). \quad (9.47)$$

Если минимум в левой части уравнения (9.46) достигается во внутренней точке множества U_t , то его можно записать в виде

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (9.48a)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left[f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (9.48б)$$

Уравнения (9.48б) выражают необходимое условие минимума левой части (9.46) и заменяет опущенную в уравнении (9.48a) операцию минимизации по управлению.

Если правые части уравнений объекта и подынтегральное выражение в критерии оптимальности, т.е. функции f_i ($i = 0, 1, \dots, n$), явно не зависят от времени и конечный момент не фиксирован, то функция Беллмана не зависит явно от времени и $\partial S / \partial t = 0$.

Оптимальное управление методом динамического программирования находим так:

1) из уравнений (9.48б) определяем управление как функцию от S : $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(S)$;

2) подставив $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(S)$ в уравнение (9.48a) и решив его при краевом условии (9.47), находим функцию Беллмана;

3) подставив найденную функцию Беллмана в выражение $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(S)$, получаем оптимальное управление как функцию фазовых координат.

Пример 9.8. Определить оптимальное управление с обратной связью в следующей задаче:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \\ x_1(t_f) &= 0, \quad x_2(t_f) = 0; \quad J = \int_0^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt. \end{aligned}$$

Здесь x_1^0 и x_2^0 — заданные числа, момент t_f не фиксирован.

Решение. Воспользуемся методом динамического программирования и выпишем уравнения (9.48):

$$x_1^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u = 0, \quad 2u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0.$$

Из второго уравнения находим $u = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2}$. Подставим это выражение в первое уравнение:

$$x_1^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 = 0.$$

Нужно решить это уравнение при граничном условии $S(\mathbf{x}(t_f)) = 0$. Будем искать решение в виде квадратичной формы

$$S = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

которая в силу краевых условий удовлетворяет указанному граничному условию. Подставив это выражение в уравнение Беллмана, получим

$$x_1^2 - \frac{1}{4} (2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2)^2 + (2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2)x_2 = 0,$$

или

$$(1 - a_{12}^2)x_1^2 + (2a_{11} - 2a_{12}a_{22})x_1x_2 + (2a_{12} - a_{22}^2)x_2^2 = 0.$$

Последнее равенство будет выполняться тождественно, если

$$1 - a_{12}^2 = 0, \quad 2a_{11} - 2a_{12}a_{22} = 0, \quad 2a_{12} - a_{22}^2 = 0.$$

Эта система имеет следующие решения:

$$a_{12} = 1, \quad a_{22} = \pm\sqrt{2}, \quad a_{11} = \pm\sqrt{2}.$$

Так как по определению функция Беллмана имеет вид

$$S(\mathbf{x}(t)) = \min_{\substack{u(t) \\ t \leq \tau \leq t_f}} \int_t^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt,$$

то $S > 0$ при всех $t < t_f$. Поэтому квадратичная форма, удовлетворяющая уравнению Беллмана, будет функцией Беллмана, если она является положительно определенной. Критерию Сильвестра положительной определенности квадратичной формы удовлетворяет решение $a_{12} = 1$, $a_{22} = \sqrt{2}$, $a_{11} = \sqrt{2}$. Поэтому функция Беллмана и оптимальное управление имеют вид

$$S = \sqrt{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_2^2,$$

$$u^*(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2} = -(x_1 + \sqrt{2}x_2).$$

Методы классического вариационного исчисления и принцип максимума, как правило, позволяют находить оптимальное управление как функцию времени. В то же время, как следует из рассмотренного примера, метод динамического программирования позволяет находить оптимальное управление с обратной связью. Недостатком метода динамического программирования при решении задач оптимального управления является то, что он исходную задачу сводит к решению нелинейного уравнения в частных производных.

9.4.4. Достаточные условия оптимальности. Уравнение Беллмана как необходимое условие оптимальности получено в предположении, что функция Беллмана является гладкой (непрерывно дифференцируемой). Однако это допущение не вытекает из условия задачи оптимального управления и часто не выполняется. Поэтому применительно к задачам оптимального управления метод динамического программирования требует обоснования. В тех случаях, когда нет обоснования, он может быть использован как эвристический

прием. При определенных условиях метод динамического программирования дает достаточное условие оптимальности.

Достаточное условие оптимальности. Пусть $S(\mathbf{x}, t)$ — гладкое решение уравнения Беллмана (9.46) при граничном условии (9.47) и управление $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$, найденное из условия

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\mathbf{u} \in U} \left(f_0 + \frac{dS}{dt} \right),$$

порождает единственную траекторию $\mathbf{x}^*(t)$, удовлетворяющую уравнениям и граничным условиям задачи (9.44), вдоль которой функция $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*(t), t)$ кусочно непрерывна.

Тогда функция $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ является оптимальным управлением задачи (9.44).

Докажем это утверждение. В силу определения функции $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ в каждой точке ее непрерывности справедливо равенство

$$f_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) + \frac{dS(\mathbf{x}^*(t), t)}{dt} = 0.$$

Проинтегрируем обе части по t от t_0 до t_f :

$$\int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) dt + S(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - S(\mathbf{x}^*(t_0), t_0) = 0,$$

откуда с учетом граничного условия (9.47) и равенства $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}^0$ находим

$$S(\mathbf{x}^0, t_0) = g_0(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) dt. \quad (9.49)$$

Рассмотрим допустимую пару $(\tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t))$, где $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ — произвольное допустимое управление. В силу определения функции $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*(t), t)$ справедливо неравенство

$$f_0(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), t) + \frac{dS(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)}{dt} \geq f_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) + \frac{dS(\mathbf{x}^*(t), t)}{dt} = 0.$$

Интегрируя обе части по t от t_0 до t_f , получим

$$\int_{t_0}^{t_f} f_0(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), t) dt + S(\tilde{\mathbf{x}}(t_f), t_f) - S(\tilde{\mathbf{x}}(t_0), t_0) \geq 0,$$

или, с учетом граничного условия (9.47) и равенства $\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}^0$,

$$\int_{t_0}^{t_f} f_0(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), t) dt + g_0(\tilde{\mathbf{x}}(t_f), t_f) \geq S(\mathbf{x}^0, t_0).$$

Из этого неравенства и соотношения (9.49) следует, что при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ критерий оптимальности принимает минимальное значение, т. е. это управление является оптимальным.

9.5. Наблюдаемость и восстанавливаемость

При синтезе оптимальных систем с обратной связью управления получаются как функции от фазовых координат. В общем случае фазовые координаты не могут быть измерены непосредственно. Доступны измерению (наблюдению) координаты вектора $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p)^T$, который называется *выходным вектором*, *выходом* или *вектором выходных переменных*, а сами координаты — *выходными переменными* или *выходными величинами*.

Выходные переменные функционально связаны с фазовыми координатами, и для реализации управлений с обратной связью необходимо определить фазовые координаты по измеренным значениям выходных переменных. В связи с этим возникают проблемы наблюдаемости и восстанавливаемости, заключающиеся в установлении возможности определения состояния объекта (фазового вектора) по измеренным значениям выходного вектора на некотором интервале времени.

Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r, \quad (9.50a)$$

и выходной вектор связан с фазовым вектором соотношением

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{y} \in R^p, \quad (9.50б)$$

которое называется *уравнением наблюдения* или *уравнением выхода*.

Управляемая система (9.50) называется *наблюдаемой* или *вполне наблюдаемой*, если существует такое t_1 ($t < t_1 < \infty$), что по данным измерения выходного вектора $\mathbf{y}(\tau)$ и управления $\mathbf{u}(\tau)$ на интервале $t \leq \tau \leq t_1$ можно определить состояние $\mathbf{x}(t)$.

Наблюдаемость или полная наблюдаемость означает, что имеется возможность определить фазовый вектор $\mathbf{x}(t)$ по будущим значениям выходного вектора. Однако в задачах управления текущее состояние объекта должно определяться по прошлым значениям выходного вектора, так как по текущим значениям фазового вектора формируется управление с обратной связью. Поэтому более важным с точки зрения управления является понятие восстанавливаемости определяемое следующим образом [29].

Управляемая система (9.50) называется *восстанавливаемой* или *вполне восстанавливаемой*, если существует такое t_1 ($-\infty < t_1 < t$), что по данным измерения выходного вектора $\mathbf{y}(\tau)$ и управления $\mathbf{u}(\tau)$ на интервале $t_1 \leq \tau \leq t$ можно определить состояние $\mathbf{x}(t)$.

Для стационарных систем из полной наблюдаемости следует полная восстанавливаемость и наоборот, поэтому в таких случаях эти понятия можно не различать.

9.5.1. Наблюдаемость линейных стационарных систем.

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r, \quad (9.51a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} \in R^p. \quad (9.51б)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$H = [C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T], \quad (9.52a)$$

которая называется *матрицей наблюдаемости*. Эта матрица состоит из столбцов матрицы C^T и столбцов произведений матриц $A^T C^T$, $(A^T)^2 C^T$, ..., $(A^T)^{n-1} C^T$ и имеет размерность $n \times np$. Наряду с матрицей наблюдаемости рассмотрим транспонированную матрицу наблюдаемости

$$H^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (9.52б)$$

которая имеет такой же ранг, что и исходная матрица H .

Критерий наблюдаемости. *Управляемая система (9.51) вполне наблюдаема (восстанавливаема) тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости (9.52a), или, что то же, ранг транспонированной матрицы (9.52б), равен n .*

Необходимость. Пусть ранг матрицы H^T меньше n . Тогда размерность пространства R_H , порожденного строками матрицы H^T , меньше n , т.е. R_H является собственным подпространством пространства R^n . Поэтому существует ненулевой вектор $\mathbf{x}_\perp \in R^n$, ортогональный всем вектор-строкам матрицы H^T (таким вектором является любой вектор из R^n , не принадлежащий подпространству R_H):

$$C\mathbf{x}_\perp = 0, \quad CA\mathbf{x}_\perp = 0, \quad \dots, \quad CA^{n-1}\mathbf{x}_\perp = 0. \quad (9.53)$$

Как было показано, основываясь на теореме Гамильтона--Кели (см. (1.15)), матрицы A^k при $k \geq n$ можно линейно выразить через $I, A, \dots, A^{n-1}$, поэтому из (9.53) получаем, что $CA^l \mathbf{x}_\perp = 0$ при всех $l = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, имеем

$$Ce^{At} \mathbf{x}_\perp = C \left(I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots \right) \mathbf{x}_\perp = 0. \quad (9.54)$$

Пусть некоторому начальному условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(1)}$ соответствует выходной вектор $\mathbf{y}^{(1)}(t)$. В силу соотношения (9.54) всем начальным значениям фазового вектора вида $\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}_\perp$ соответствует один и тот же выходной вектор $\mathbf{y}^{(1)}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u} = Ce^{At}(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}_\perp) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau + D\mathbf{u} = \\ &= Ce^{At} \mathbf{x}^{(1)} + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau + D\mathbf{u} = \mathbf{y}^{(1)}(t). \end{aligned}$$

Это и доказывает невозможность определения состояния $\mathbf{x}(t_0)$ по значениям выходного вектора, если ранг матрицы наблюдаемости меньше n .

Достаточность. Пусть ранг матрицы наблюдаемости равен n . В силу стационарности управляемой системы достаточно показать возможность определения состояния $\mathbf{x}(0)$ по известным значениям выходного вектора и управления на некотором интервале $[0, t_1]$. Имеем

$$\mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}(0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau + D\mathbf{u},$$

или

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau - D\mathbf{u} = Ce^{At}\mathbf{x}(0).$$

Так как $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ доступны измерению, а матрицы C , B , D и A заданы, то функция $\Delta \mathbf{y}(t)$ и ее производные любого порядка являются известными функциями времени. Из последнего соотношения при $t = 0$ находим

$$\Delta \mathbf{y}(0) = C\mathbf{x}(0), \quad \Delta \dot{\mathbf{y}}(0) = CA\mathbf{x}(0), \quad \dots, \quad \Delta \mathbf{y}^{(n-1)}(0) = CA^{n-1}\mathbf{x}(0),$$

или

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{y}(0) \\ \Delta \dot{\mathbf{y}}(0) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{y}^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = H^T \mathbf{x}(0).$$

Полученное векторное уравнение с n неизвестными $x_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) равносильно системе из $n\rho$ уравнений. Так как ранг матрицы H^T равен n , то среди уравнений этой системы имеется ровно n независимых уравнений. Выделив эти уравнения и решив их, определим искомый вектор $\mathbf{x}(0)$. Критерий полностью доказан.

Наблюдаемость (восстанавливаемость) управляемой системы (9.51) полностью определяется матрицами A и C . Наряду с наблюдаемостью управляемой системы используется понятие наблюдаемости пары (A, C) .

Пара (A, C) , где A — $(n \times n)$ -матрица и C — $(\rho \times n)$ -матрица, называется *наблюдаемой* или *полностью наблюдаемой* (восстанавливаемой), если матрица наблюдаемости, составленная из этой пары, имеет ранг n , или, что то же, управляемая система (9.51) вполне наблюдаема.

Наблюдаемость управляемой системы, как и управляемость, является внутренним свойством системы: она не зависит от того, в какой системе координат записаны уравнения управляемой системы. Покажем это.

При неособом преобразовании

$$\mathbf{x} = T\tilde{\mathbf{x}}, \quad \det T \neq 0,$$

уравнения управляемой системы (9.51) принимают вид

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \tilde{C}\tilde{\mathbf{x}} + D\mathbf{u},$$

где

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B, \quad \tilde{C} = CT.$$

Как легко проверить, транспонированная матрица наблюдаемости преобразованной системы имеет вид

$$\tilde{H}^T = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T = H^T T.$$

Так как матрица T неособая и ее ранг равен n , ранг матрицы наблюдаемости $\tilde{H}^T$ совпадает с рангом матрицы H^T .

Пример 9.9. Исследовать наблюдаемость управляемой системы

$$y = \frac{p^2 + 1}{p(p+1)^2} u.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение в нормальную форму:

$$\frac{1}{p^2 + 1} y = \frac{1}{p(p+1)^2} u = x_1,$$

или

$$(p^3 + 2p^2 + p)x_1 = u, \quad y = (p^2 + 1)x_1,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_3, & \dot{x}_3 &= -x_2 - 2x_3 + u, \\ y &= x_1 + x_3. \end{aligned}$$

Матрицы A , C и их произведения имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 1],$$

$$CA = [0 \quad 0 \quad -2], \quad CA^2 = [0 \quad 2 \quad 4].$$

Отсюда для транспонированной матрицы наблюдаемости получаем

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 3, так как $\det H^T = 4 \neq 0$. Следовательно, рассматриваемая система вполне наблюдаема.

9.5.2. Каноническая форма наблюдаемости. Обнаруживаемость. Пусть ранг матрицы наблюдаемости управляемой системы (8.51) равен l ($l \leq n$). Если ранг l не равен нулю, но меньше n ($0 < l < n$), то будем говорить, что управляемая система (9.51) *частично наблюдаема*. Подпространство, порожаемое l независимыми строками транспонированной матрицы наблюдаемости, обозначим R_n и будем называть *подпространством наблюдаемости*. Если управляемая система частично наблюдаема, то ее подпространство наблюдаемости будет собственным подпространством пространства R^n .

Сформируем матрицу T преобразования $\tilde{\mathbf{x}} = T\mathbf{x}$ в виде

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix},$$

где строки матрицы T_1 образуют базис l -мерного подпространства наблюдаемости, а строки матрицы T_2 подбираются так, чтобы матрица T была неособой ($\det T \neq 0$). В частности, в качестве строк матрицы T_1 можно взять l независимых строк транспонированной матрицы наблюдаемости. При таком преобразовании уравнения управляемой системы примут вид так называемой *канонической формы наблюдаемости* [29]

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = (\tilde{C}_1 \ 0) \tilde{\mathbf{x}} + D\mathbf{u},$$

или

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^{(1)} = \tilde{A}_{11}\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} - \tilde{B}_1\mathbf{u}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^{(2)} = \tilde{A}_{21}\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} + \tilde{A}_{22}\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} + \tilde{B}_2\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \tilde{C}_1\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} + D\mathbf{u}, \end{cases} \quad (9.55)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$ — l -вектор, $\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}$ — $(n-l)$ -вектор, $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{A}_{21}$, $\tilde{A}_{22}$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_1$ — матрицы соответствующей размерности, причем пара $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ вполне наблюдаема.

Из структуры системы уравнений (9.55) видно, что вектор $\tilde{\mathbf{x}}_2$ никакого влияния на выходной вектор ни непосредственно, ни через фазовый вектор $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$ не оказывает. Поэтому его координаты не могут быть определены по наблюдениям выходного вектора $\mathbf{y}(t)$. Эти координаты называются *ненаблюдаемыми* или *невосстанавливаемыми*. Проекция фазового вектора на подпространство наблюдения R_n , определяемая равенством $\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} = 0$ и имеющая вид $\tilde{\mathbf{x}} = \text{col}(\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}, 0)$, вполне наблюдаема. Другими словами, если система движется в подпространстве R_n , то она вполне наблюдаема. Отсюда и название подпространства R_n : подпространство наблюдаемости. Полностью невосстанавливаемый вектор имеет вид $\tilde{\mathbf{x}} = \text{col}(0, \tilde{\mathbf{x}}^{(2)})$.

По канонической форме наблюдаемости можно судить о наблюдаемости управляемой системы: управляемая система вполне наблюдаема, если в канонической форме наблюдаемости отсутствует вектор $\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}$.

Обнаруживаемость. Если управляемая система частично наблюдаема, то фазовый вектор можно представить в виде суммы: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_n(t) + \mathbf{x}_\perp(t)$, где $\mathbf{x}_n$ — вектор из подпространства наблюдаемости, $\mathbf{x}_\perp$ — полностью ненаблюдаемый вектор. Вектор $\mathbf{x}(t)$ восстанавливается по наблюдениям $\mathbf{y}(\tau)$ и $\mathbf{u}(\tau)$ на интервале $t_0 \leq \tau \leq t$ с точностью до невозстанавливаемого вектора $\mathbf{x}_\perp$. Он в асимптотике становится восстанавливаемым, если $\mathbf{x}_\perp \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$.

Частично наблюдаемая управляемая система (9.51) называется *обнаруживаемой*, если невозстанавливаемые координаты при нулевых остальных координатах и нулевом управлении стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Непосредственно из определения следует, что вполне наблюдаемая система является обнаруживаемой. Также является обнаруживаемой любая асимптотически устойчивая система.

Из канонической формы наблюдаемости вытекает следующий критерий обнаруживаемости.

Частично наблюдаемая управляемая система обнаруживаема в том и только том случае, если в канонической форме наблюдаемости матрица $\tilde{A}_{22}$ является (асимптотически) устойчивой.

Пример 9.10. Исследовать наблюдаемость и обнаруживаемость управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = cx_1 + x_2$$

в зависимости от параметра c .

Решение. В данном случае имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [c \quad 1], \quad CA = [0 \quad c], \quad H^T = \begin{bmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Система вполне наблюдаема при $c \neq 0$. При $c = 0$ система частично наблюдаема и не обнаруживаема. Действительно, при $c = 0$ уравнения принимают вид канонической формы наблюдаемости, если принять $x^{(1)} = x_2$, $x^{(2)} = x_1$. При этом матрица $\tilde{A}_{22} = 0$ и не является устойчивой.

9.5.3. Принцип двойственности управляемости и наблюдаемости. Рассмотрим наряду с системой

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x} \quad (9.56)$$

так называемую *двойственную* ей систему

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A^T \tilde{\mathbf{x}} + C^T \mathbf{u}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = B^T \mathbf{x}. \quad (9.57)$$

Здесь принято $D = 0$, так как эта матрица не влияет на управляемость и наблюдаемость. Как легко проверить, матрица управляемости системы (9.56) совпадает с матрицей наблюдаемости системы (9.57), а матрица наблюдаемости системы (9.56) совпадает с матрицей управляемости системы (9.57).

Поэтому справедлив следующий принцип двойственности (дуальности).

Система (9.56) вполне управляема тогда и только тогда, когда двойственная ей система (9.57) вполне наблюдаема, и система (9.56) вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда двойственная ей система (9.57) вполне управляема.

9.5.4. Наблюдатели полного порядка. Перейдем от задачи возможности восстановления к задаче синтеза устройства, восстанавливающего текущие значения фазового вектора. Восстановленные значения называются *оценками*, а устройства, обеспечивающие получение оценок по измерениям (наблюдениям) управления $\mathbf{u}(\tau)$ и выходного вектора $\mathbf{y}(\tau)$ на интервале $t_0 \leq \tau \leq t$, называются *наблюдателями* [29]. В частности, устройство, описываемое уравнением

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = F\hat{\mathbf{x}} + K\mathbf{y} + H\mathbf{u}, \quad (9.58)$$

называется *наблюдателем полного порядка* для управляемой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \quad (9.59)$$

если при $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ выполняется равенство $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ при всех $\mathbf{u}(t)$, $t \geq t_0$.

Наблюдатель (9.58) называется *наблюдателем полного порядка*, так как оценка $\hat{\mathbf{x}}$ имеет такую же размерность, что и вектор состояния $\mathbf{x}$.

Теорема 9.1 [29]. *Наблюдатель полного порядка для управляемой системы (9.59) имеет вид*

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}), \quad (9.60)$$

где K — произвольная матрица, которая может быть функцией времени и которая называется *матрицей коэффициентов усиления*.

Доказательство. Вычтем из первого уравнения (9.59) уравнение (9.58) и подставим в полученное соотношение выражение для $\mathbf{y}$ из (9.59):

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (A - KC)\mathbf{x} - F\hat{\mathbf{x}} + (B - H)\mathbf{u}. \quad (9.61)$$

Из этого уравнения следует, что при начальном условии $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ равенство $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ будет выполнено при всех $\mathbf{u}(t)$, $t \geq t_0$, если имеют место равенства

$$A - KC = F, \quad B = H.$$

Так как в первое уравнение входят две неизвестные матрицы, одну из них, например, матрицу K , можно задать произвольно. Подставив выражения для матриц F и H из последних соотношений в уравнение (9.58), получим (9.60). Теорема доказана.

Из уравнения (9.60) следует, что наблюдатель системы (9.59) включает саму эту систему и дополнительное слагаемое, пропор-

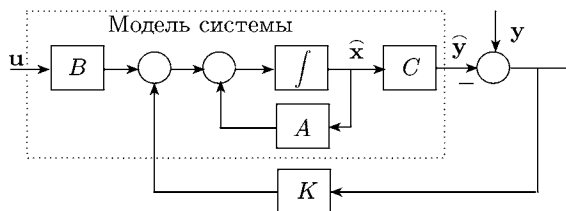


Рис. 9.3. Структурная схема наблюдателя

циональное разности $y - \hat{y}$ выходного вектора и его оценки $\hat{y} = C\hat{x}$ (рис. 9.3).

Устойчивость наблюдателя (9.60) зависит от матрицы $A - KC$. Уравнение для ошибки $e = x - \hat{x}$ имеет вид (см. (9.61))

$$\dot{e} = (A - KC)e.$$

Отсюда следует, что ошибка $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ независимо от начальной ошибки тогда и только тогда, когда наблюдатель является асимптотически устойчивым. Поэтому при выборе матрицы коэффициентов усиления K необходимо прежде всего позаботиться о том, чтобы наблюдатель был асимптотически устойчивым. Но от матрицы $A - KC$ и соответственно матрицы K зависит еще и качество наблюдателя. Поэтому выбор матрицы K , к которому сводится синтез наблюдателя вида (9.60), должен производиться из условия устойчивости и заданных требований к его качеству. В том случае, когда все матрицы системы и матрица коэффициентов усиления постоянны, т.е. наблюдатель является стационарным, его устойчивость и качество зависят от расположения корней его характеристического уравнения, т.е. от собственных значений матрицы $A - KC$ на комплексной плоскости. Собственные значения матрицы $A - KC$ могут быть произвольно размещены на комплексной плоскости путем выбора матрицы коэффициентов усиления в том и только том случае, если исходная система, т.е. пара (A, C) , вполне наблюдаема. Если система частично наблюдаема, можно найти постоянную матрицу K , при котором наблюдатель асимптотически устойчив, в том и только том случае, если система обнаруживаема [29].

В случае стационарного наблюдателя ошибка $e(t)$ тем быстрее сходится к нулю, чем дальше от мнимой оси расположены корни характеристического уравнения наблюдателя на комплексной плоскости. Этого можно достичь при больших элементах матрицы коэффициентов усиления. Однако с увеличением коэффициентов усиления наблюдатель становится чувствительным к шумам измерения. Поэтому оптимальная матрица K может быть определена только с учетом реальных помех.

9.5.5. Наблюдатели пониженного порядка. Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (9.62)$$

где $\mathbf{x}$ — n -вектор, $\mathbf{y}$ — ρ -вектор, причем $n > \rho$, A, B, C — матрицы соответствующей размерности. Пусть матрица C имеет максимальный ранг, т.е. ρ . Тогда уравнение наблюдения дает ρ независимых линейных уравнений для неизвестного вектора состояния $\mathbf{x}(t)$. Чтобы определить $\mathbf{x}(t)$, необходимо получить дополнительно $n - \rho$ уравнений для координат этого вектора.

Введем в рассмотрение $(n - \rho)$ -вектор $\mathbf{p}(t)$, определяемый соотношением

$$\mathbf{p} = C' \mathbf{x}, \quad (9.63)$$

где матрица C' такова, что матрица $\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$ является невырожденной (неособой). Из уравнения

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

находим

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

Используя представление

$$\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix}, \quad (9.64)$$

где L_1 и L_2 — $(n \times \rho)$ - и $[n \times (n - \rho)]$ -матрица соответственно, получаем

$$\mathbf{x} = L_1 \mathbf{y} + L_2 \mathbf{p}. \quad (9.65)$$

Если получить оценку $\hat{\mathbf{p}}$ для введенного вектора, то для оценки фазового вектора имеем

$$\hat{\mathbf{x}} = L_1 \mathbf{y} + L_2 \hat{\mathbf{p}}. \quad (9.66)$$

Таким образом, задача восстановления фазового вектора свелась к задаче восстановления вектора $\mathbf{p}$ меньшей размерности. Используя определенные выше матрицы C' , L_1 и L_2 , можно определить искомый наблюдатель.

Теорема 9.2 [29]. *Наблюдатель пониженного порядка для управляемой системы (9.59) имеет вид*

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = L_2 \mathbf{q} + (L_1 + L_2 K) \mathbf{y}, \quad (9.67)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = (C' A L_2 - K C A L_2) \mathbf{q} + (C' A L_2 K + C A L_1 - K C A L_1 - K C A L_2 K) \mathbf{y} + (C' B - K C B) \mathbf{u}, \quad (9.68)$$

$$\mathbf{q}(t_0) = C' \mathbf{x}(t_0) - K \mathbf{y}(t_0),$$

где K — произвольная матрица.

Наблюдатель пониженного порядка (9.67), (9.68) называют *наблюдателем Луенбергера*.

Доказательство. Сначала найдем наблюдатель, который в качестве одного из уравнений включает уравнение (9.66). Для этого

достаточно построить наблюдатель для переменной $\mathbf{p}$. Найдем для этой переменной дифференциальное уравнение. Дифференцируя (9.63) и используя (9.62), получим

$$\dot{\mathbf{p}} = C' A \mathbf{x} + C' B \mathbf{u},$$

или, с учетом (9.65),

$$\dot{\mathbf{p}} = C' A L_2 \mathbf{p} + C' A L_1 \mathbf{y} + C' B \mathbf{u}. \quad (9.69)$$

Чтобы построить наблюдатель для $\mathbf{p}$, основываясь на теореме 9.1, необходимо добавить к уравнению (9.69) уравнение наблюдения. Примем в качестве такого уравнения уравнение, которое получается дифференцированием исходного уравнения наблюдения $\mathbf{y} = C \mathbf{x}$ с учетом (9.65):

$$\dot{\mathbf{y}} = C \dot{\mathbf{x}} = C A \mathbf{x} + C B \mathbf{u} = C A L_2 \mathbf{p} + C A L_1 \mathbf{y} + C B \mathbf{u}.$$

При таком уравнении наблюдения наблюдатель для объекта (9.69) по аналогии с наблюдателем (9.60) для системы (9.59) можно представить в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = C' A L_2 \hat{\mathbf{p}} + C' A L_1 \mathbf{y} + C' B \mathbf{u} + K(\dot{\mathbf{y}} - C A L_2 \hat{\mathbf{p}} - C A L_1 \mathbf{y} - C B \mathbf{u}). \quad (9.70)$$

В это уравнение входит производная $\dot{\mathbf{y}}$. Чтобы избавиться от нее, введем новую переменную $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{p}} - K \mathbf{y}$. Продифференцировав это соотношение, затем подставив выражение для $\dot{\hat{\mathbf{p}}}$ из (9.70) и $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{q} + K \mathbf{y}$, получим уравнение (9.68). Исключив из (9.66) переменную $\hat{\mathbf{p}}$, получим соотношение (9.67). Начальное условие

$$\mathbf{q}(t_0) = C' \mathbf{x}(t_0) - K \mathbf{y}(t_0)$$

определяется исходя из соотношения (9.63) и равенства $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{p}} - K \mathbf{y}$. Теорема доказана.

Пример 9.11. Построить наблюдатели полного и пониженного порядков для управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1.$$

Решение. В данном случае имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0).$$

Как следует из (9.60), наблюдатель полного порядка имеет вид

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (y - \hat{x}_1),$$

или, в скалярной форме,

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1(y - \hat{x}_1), \quad \dot{\hat{x}}_2 = u + k_2(y - \hat{x}_1).$$

Для построения наблюдателя пониженного порядка необходимо определить матрицы C' , L_1 , L_2 . Матрица C' должна быть такой,

чтобы квадратная матрица $\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$ была невырожденной. В остальном она может быть произвольной. Условию невырожденности указанной выше квадратной матрицы удовлетворяет матрица $C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Из соотношения (9.64), которое в данном случае принимает вид

$$\begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (L_1 \quad L_2),$$

находим

$$L_1 = (1 \quad 0)^T, \quad L_2 = (0 \quad 1)^T.$$

Подставив выражения для A , B , C , C' , L_1 и L_2 в (9.67) и (9.68), получим

$$\dot{q} = -kq - k^2 + u, \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} q + \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} y.$$

Напомним, что матрица K или, в случае наблюдателя пониженного порядка, скалярная величина k выбирается из условия устойчивости и требований к качеству наблюдателя.

9.6. Синтез оптимальных систем управления

Как отмечалось, методы множителей Лагранжа и принцип максимума, как правило, позволяют находить программное оптимальное управление, т. е. оптимальное управление как функцию времени. Метод динамического программирования позволяет находить оптимальное управление с обратной связью, но при этом приходится решать нелинейные уравнения в частных производных. В этом параграфе будут рассмотрены методы решения некоторых задач синтеза оптимальных систем управления с обратной связью.

9.6.1. Метод фазовой плоскости синтеза оптимальной по быстродействию системы. Пусть задана вполне управляемая линейная стационарная система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad |u| \leq 1, \quad x \in R^n, \quad u \in R,$$

все корни характеристического уравнения которой действительны. Заметим, что ограничения более общего вида $\alpha \leq u \leq \beta$, где $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, введением нового переменного $v = 2u - (\alpha + \beta)/(\alpha\beta)$ всегда приводится к приведенному выше виду $|u| \leq 1$. Рассмотрим задачу синтеза оптимального по быстродействию регулятора, обеспечивающего перевод системы из произвольной начальной точки в начало координат.

Так как управление скалярное, условие нормальности совпадает с условием управляемости, поэтому выполняются все условия теоремы об n интервалах. В соответствии с этой теоремой оптимальное управление, имея не более n интервалов постоянства, принимает только крайние значения: -1 или 1 . Если представить его как функцию

фазовых координат $u^* = u^*(\mathbf{x})$, то ясно, что все фазовое пространство разбивается на два подпространства: подпространство, в котором $u^* = -1$, и подпространство, в котором $u^* = 1$. Гиперповерхность (при $n = 2$ — кривая, при $n = 3$ — поверхность), которая делит фазовое пространство на указанные подпространства, называют *гиперповерхностью (кривой, поверхностью) переключения*. Если записать уравнение гиперповерхности $\sigma(\mathbf{x}) = 0$, то (при соответствующем выборе $\sigma(\mathbf{x})$) $\sigma(\mathbf{x}) > 0$ по одну сторону от гиперповерхности и $\sigma(\mathbf{x}) < 0$ по другую. Всегда можно выбрать функцию $\sigma(\mathbf{x})$ так, чтобы она была отрицательна в подпространстве, где $u^* = -1$, и положительна в подпространстве, где $u^* = 1$. Тогда, очевидно, оптимальным управлением будет $u^* = \text{sign } \sigma(\mathbf{x})$. Поэтому нахождение оптимального управления с обратной связью сводится к определению функции $\sigma(\mathbf{x})$, которая называется *функцией переключения*.

При $n = 2$ для нахождения функции переключения можно воспользоваться методом фазовой плоскости. На фазовой плоскости строятся семейства фазовых траекторий, соответствующих управлениям $u^* = -1$ и $u^* = 1$. Оптимальная траектория представляет собой часть траектории или соединение частей двух траекторий из построенных семейств. В силу граничного условия на правом конце траектории $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ она должна оканчиваться в начале координат. Используя эти свойства оптимальных траекторий, нетрудно определить кривую переключения. Проиллюстрируем изложенное на простейшем примере.

Пример 9.12. Определить оптимальный по быстродействию закон управления двигателем, описываемым уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет кратный нулевой корень. Выполняются все условия теоремы об n интервалах. Оптимальное управление может принимать значения -1 или 1 . Найдем соответствующие им фазовые траектории. Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u}{x_2},$$

или

$$x_2 dx_2 = u dx_1.$$

Проинтегрировав последнее уравнение при $u = -1$ и $u = 1$, соответственно получим

$$\frac{1}{2} x_2^2 = -x_1 + C_1, \quad \frac{1}{2} x_2^2 = x_1 + C_2.$$

На рис. 9.4, а представлены оба семейства траекторий. Оптимальная траектория должна состоять из участка траектории одного семейства, проходящей через начальную точку, и участка траектории другого семейства, проходящей через начало координат. Из сказанного следует, что переключение должно происходить на полутраектории

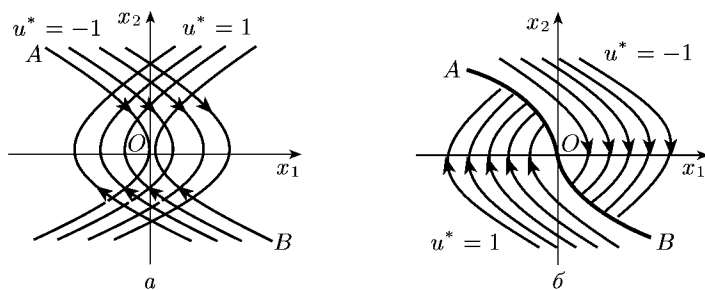


Рис. 9.4. Построение фазового портрета оптимальной системы

ях AO и OB (рис. 9.4, а). Если вначале изображающая точка движется по траектории, соответствующей $u^* = -1$, то переключение должно произойти на полутраектории BO , которая описывается уравнением

$$x_2^2 - 2x_1 = 0.$$

И если вначале изображающая точка движется по траектории, соответствующей $u^* = 1$, то переключение должно произойти на полутраектории OA , которая описывается уравнением

$$x_2^2 + 2x_1 = 0.$$

Фазовый портрет оптимальной системы представлен на рис. 9.4, б. Уравнение линии переключения AOB , основываясь на уравнениях полутраекторий AO и OB , можно записать так:

$$\sigma(\mathbf{x}) = -(x_2^2 + 2x_1 \operatorname{sign} x_2) \operatorname{sign} x_2 = 0.$$

Функция $\sigma(\mathbf{x})$ отрицательна справа от линии переключения, где $u^* = -1$, и положительна слева, где $u^* = 1$. Поэтому имеем

$$u^* = \operatorname{sign} \sigma(\mathbf{x}) = -\operatorname{sign} [(x_2^2 + 2x_1 \operatorname{sign} x_2) \operatorname{sign} x_2].$$

Заметим, что кривая AOB может быть описана уравнением

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) = -(x_2^2 + 2x_1 \operatorname{sign} x_2) = 0.$$

Однако знак функции $\tilde{\sigma}(\mathbf{x})$ слева и справа от кривой AOB меняется при переходе с верхней полуплоскости в нижнюю полуплоскость. Поэтому эта функция не может быть функцией переключения.

Как следует из фазового портрета, переходный процесс оптимальной системы является аperiодическим. Однако из-за неидеальности переключающего устройства, неточности математической модели объекта и других возмущений реальный переходный процесс может оказаться колебательным.

9.6.2 Синтез оптимальной по интегральному квадратичному критерию нестационарной линейной системы управления.

Постановка задачи. Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \mathbf{h}(t) \quad (9.71a)$$

и критерий оптимальности имеет вид

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)R(t)\mathbf{u}(t)] dt. \quad (9.71б)$$

Здесь $\mathbf{h}(t)$ — известная функция времени; F — положительно полуопределенная матрица; $Q(t)$, $R(t)$ — положительно определенные матрицы ($\mathbf{x}^T F \mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} > 0$ и $\mathbf{x}^T R \mathbf{x} > 0$ и $\mathbf{x}^T R \mathbf{x} > 0$ при всех $\mathbf{x} \neq 0$ и $t \in [t_0, t_f]$); функции $A(t)$, $B(t)$, $\mathbf{h}(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ являются непрерывными на интервале $[t_0, t_f]$; начальный и конечный моменты времени t_0 и t_f фиксированы.

Требуется найти управление с обратной связью, при котором при произвольном начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ критерий оптимальности принимает минимальное значение.

Эту задачу называют *задачей синтеза нестационарного линейного регулятора состояния*.

В критерии оптимальности (9.71б) первое слагаемое, представляющее терминальную квадратичную ошибку, включается, если необходимо обеспечить максимальную близость состояния системы в конечный момент времени к желаемому состоянию. Слагаемое

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T(t)R(t)\mathbf{x}(t) dt$$

является интегральной квадратической ошибкой и характеризует качество управления на всем интервале $[t_0, t_f]$. Последнее слагаемое

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t)R(t)\mathbf{u}(t) dt$$

есть взвешенная «энергия» управления, и оно ограничивает управление. Требуемое ограничение на управление, которое в явной форме не учтено в постановке задачи, может быть обеспечено соответствующим выбором матричной функции $R(t)$.

Утверждение 9.1. *Решение задачи (9.71) синтеза оптимального нестационарного линейного регулятора существует, единственно и оптимальное управление имеет вид*

$$\mathbf{u}^* = -\left(R^{-1}B^TK\mathbf{x} + \frac{1}{2}R^{-1}B^T\mathbf{p}\right), \quad (9.72а)$$

где симметрическая $(n \times n)$ -матрица K и n -вектор $\mathbf{p}$ определяются из уравнений

$$\dot{K} = -KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - Q, \quad (9.72б)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = KBR^{-1}B^T\mathbf{p} - A^T\mathbf{p} - 2K\mathbf{h} \quad (9.72в)$$

при граничных условиях

$$K(t_f) = F, \quad \mathbf{p}(t_f) = 0. \quad (9.72г)$$

Для любого $t \in [t_0, t_f]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)K(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}^T(t)\mathbf{x}(t) + q(t) = \\ = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_t^{t_f} [\mathbf{x}^{*T}(t)Q(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{u}^{*T}(t)R(t)\mathbf{u}^*(t)] dt, \end{aligned} \quad (9.73a)$$

где $q(t)$ — скалярная функция, которая определяется из уравнения

$$\dot{q} = \frac{1}{4} \mathbf{p}^T B R^{-1} B^T \mathbf{p} - \mathbf{p}^T \mathbf{h}, \quad q(t_f) = 0. \quad (9.73b)$$

При $\mathbf{h}(t) = \mathbf{0}$ оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1} B^T K \mathbf{x}, \quad (9.74)$$

где симметрическая $(n \times n)$ -матрица K определяется из уравнения

$$\dot{K} = -KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q, \quad K(t_f) = F. \quad (9.75)$$

Для любого $t \in [t_0, t_f]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)K(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_t^{t_f} [\mathbf{x}^{*T}(t)Q(t)\mathbf{x}^*(t) + \\ + \mathbf{u}^{*T}(t)R(t)\mathbf{u}^*(t)] dt. \end{aligned} \quad (9.76)$$

Уравнение (9.72б) (и соответственно (9.75)) называют *матричным уравнением Риккати*.

Доказательство. Воспользуемся методом динамического программирования. Уравнение Беллмана (9.46) и граничное условие (9.47) принимают вид

$$\begin{aligned} \min_u \left[\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} \mathbf{x} + B \mathbf{u} + \mathbf{h}) \right] = -\frac{\partial S}{\partial t}, \\ S(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{x}^T F \mathbf{x}(t_f). \end{aligned} \quad (9.77)$$

В уравнении Беллмана выражение в квадратных скобках представляет квадратный трехчлен относительно векторного управления, и так как нет ограничения на управление, то минимум достигается в стационарной точке. Поэтому уравнение Беллмана можно представить в виде системы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} \mathbf{x} + B \mathbf{u} + \mathbf{h}) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \\ 2\mathbf{u}^T R + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} B = 0. \end{aligned} \quad (9.78)$$

Из последнего уравнения имеем

$$\mathbf{u}^T = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} B R^{-1},$$

или, после транспонирования,

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T. \quad (9.79)$$

Подставим эти выражения для управления в (9.78):

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} B R^{-1} B^T \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{\partial S}{\partial t} (A \mathbf{x} + \mathbf{h}) = - \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (9.80)$$

Решение последнего уравнения будем искать в виде квадратичного трехчлена

$$S(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T K(t) \mathbf{x} + \mathbf{p}^T(t) \mathbf{x} + q(t), \quad (9.81)$$

где $K(t)$ — симметрическая $(n \times n)$ -матрица, $\mathbf{p}(t)$ — вектор-функция размерности n , $q(t)$ — скалярная функция.

После подстановки (9.81) в уравнение (9.80) его можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T (K A + A^T K - K B R^{-1} B^T K + Q) \mathbf{x} - \\ & - \mathbf{x}^T (K B R^{-1} B^T \mathbf{p} - A^T \mathbf{p} - 2K \mathbf{h}) - \frac{1}{4} \mathbf{p}^T B R^{-1} B^T \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{h} = \\ & = -(\mathbf{x}^T \dot{K} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{p}} + \dot{q}). \end{aligned}$$

Приравняв в обеих частях полученного соотношения выражения при одинаковых степенях x , получим уравнения (9.72б), (9.72в) и (9.73б). Подставив квадратный трехчлен (9.81) в (9.79), получим оптимальный закон управления (9.72а); подставив его в (9.77), получим граничные условия (9.72г) и $q(t_f) = 0$.

Квадратный трехчлен (9.81), если функции $K(t)$, $\mathbf{p}(t)$ и $q(t)$ определяются из уравнений (9.72б), (9.72в), (9.73б) при граничных условиях (9.72г) и $q(t_f) = 0$, является функцией Беллмана, причем эта функция является гладкой. Как легко проверить, выполняются все условия, при которых уравнение Беллмана является достаточным условием оптимальности. Поэтому соотношения (9.72) действительно определяют оптимальный закон управления. Существование и единственность решения задачи синтеза оптимального нестационарного линейного регулятора следуют из существования и единственности решения уравнений (9.72б), (9.72в) при граничных условиях (9.72г). При этом в этой задаче не требуется, чтобы объект был вполне управляем. Решение существует и единственно и в том случае, когда объект является частично (не полностью) управляемым. Это обусловлено тем, что управляемый процесс рассматривается на конечном интервале времени и вклад неуправляемых фазовых координат в значение критерия оптимальности является конечным, даже если они расходятся.

Равенство (9.73а) получается из определения функции Беллмана

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{u}(\tau), t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \mathbf{x}^T(t_f) F \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) Q(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) R(t) \mathbf{u}(t)] dt \right\}. \quad (9.82)$$

При $\mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{0}$ уравнения (9.72в) и (9.73б) становятся однородными, и их решениями при нулевых начальных условиях являются $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$ и $q(t) = 0$. Поэтому в этом случае оптимальное управление определяется соотношениями (9.74) и (9.75), равенство (9.73а) принимает вид (9.76).

Решение матричного уравнения Риккати. Матричное уравнение Риккати является нелинейным. Его можно решить на аналоговой или цифровой машине в обратном времени, начиная с момента t_f . При этом вводится новая переменная (обратное время) $\tau = t_f - t$, и уравнение и граничное условие (9.75) преобразуются к виду

$$\dot{\tilde{K}} = \tilde{K}\tilde{A} + \tilde{A}^T\tilde{K} - \tilde{K}\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T\tilde{K} + \tilde{Q}, \quad 0 \leq \tau \leq t_f - t_0, \quad \tilde{K}(0) = F, \quad (9.83)$$

где

$$\tilde{K}(\tau) = K(t_f - \tau), \quad \tilde{A}(\tau) = A(t_f - \tau), \quad \dots$$

9.6.3. Синтез оптимальной по интегральному квадратичному критерию стационарной линейной системы управления.

Постановка задачи. Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (9.84a)$$

и критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t)] dt. \quad (9.84б)$$

Здесь Q и R — положительно определенные матрицы; все матрицы A , B , Q и R являются постоянными, объект стабилизируем.

Требуется найти оптимальное управление с обратной связью, переводящее систему из произвольной начальной точки $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ в конечную точку $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$ и обеспечивающее минимум функционалу (9.84б).

Эту задачу называют *задачей синтеза стационарного линейного регулятора состояния*.

Утверждение 9.2. *Задача (9.84) имеет решение тогда и только тогда, когда объект (9.84а) стабилизируем и оптимальное управление имеет вид*

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1}B^T\bar{K}\mathbf{x}, \quad (9.85a)$$

где $\bar{K}$ — постоянная положительно определенная симметрическая $(n \times n)$ -матрица, определяемая из уравнения

$$-\bar{K}A - A^T\bar{K} + \bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K} - Q = 0, \quad (9.85б)$$

называемого алгебраическим уравнением Риккати. Для любого $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\mathbf{x}^T(t)\bar{K}\mathbf{x}(t) = \int_t^\infty [\mathbf{x}^T(\tau)Q\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^{*T}(\tau)R\mathbf{u}^*(\tau)] d\tau. \quad (9.86)$$

Доказательство. Соотношения (9.85) и (9.86) получаются точно так же, как и аналогичные соотношения при решении нестационарной задачи. Только в данном случае функция Беллмана отыскивается в виде квадратичной формы $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T K \mathbf{x}$, где K — постоянная положительно определенная симметрическая $(n \times n)$ -матрица.

Следует иметь в виду, что если t_f является конечным фиксированным числом, то и в том случае, когда матрицы A , B , Q и R являются постоянными, матрица K в оптимальном законе управления зависит от времени и находится из дифференциального уравнения Риккати.

Покажем, что стабилизируемость является необходимым и достаточным условием существования решения задачи синтеза оптимального стационарного линейного регулятора. Необходимость очевидна. Действительно, стабилизируемость означает, что неуправляемая составляющая $\mathbf{x}_\perp \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если это условие не выполняется, то фазовый вектор замкнутой системы при $\mathbf{x}_\perp \neq 0$ не будет с течением времени стремиться к нулю, так как управление и соответственно присоединение регулятора к объекту никакого влияния на неуправляемую составляющую $\mathbf{x}_\perp$ не оказывают.

Чтобы доказать достаточность, нужно показать, что существует положительно определенная матрица, удовлетворяющая алгебраическому уравнению Риккати и что замкнутая система асимптотически устойчива. Представим критерий оптимальности в виде

$$J = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) R \mathbf{u}(t)] dt.$$

При конечном t_f и $F = 0$ из (9.76) и (9.82) имеем

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}, t; t_f) &= \mathbf{x}^T(t) K(t) \mathbf{x}(t) = \int_t^{t_f} [\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^{*T} R \mathbf{u}^*] dt = \\ &= \min_{\mathbf{u}(t), t \leq t \leq t_f} \left\{ \int_t^{t_f} [\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}] dt \right\}. \end{aligned} \quad (9.87)$$

Функция Беллмана $S(\mathbf{x}, t; t_f)$ при фиксированных $\mathbf{x}$ и t является функцией от t_f , причем функцией монотонно неубывающей. Действительно, если $t_f'' \geq t_f'$, то

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}, t; t_f'') &= \int_t^{t_f''} [\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^{*T} R \mathbf{u}^*] dt + \int_{t_f'}^{t_f''} [\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^{*T} R \mathbf{u}^*] dt \geq \\ &\geq \int_t^{t_f'} [\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^{*T} R \mathbf{u}^*] dt = S(\mathbf{x}, t; t_f'), \end{aligned}$$

так как под интегралом стоит неотрицательное выражение.

Покажем, что эта функция ограничена сверху. Так как объект стабилизируем, существует управление с обратной связью, при котором замкнутая система асимптотически устойчива. При таком управлении выражение под знаком минимума в (9.87) сходится к конечному пределу при $t_f \rightarrow \infty$. Этот предел является верхней границей функции $S(\mathbf{x}, t; t_f)$. Таким образом, $S(\mathbf{x}, t; t_f)$ как функция от t_f является монотонно неубывающей и ограниченной сверху. Следовательно, существует предел этой функции при $t_f \rightarrow \infty$. Из равенства

$$S(\mathbf{x}, t; t_f) = \mathbf{x}^T(t)K(t)\mathbf{x}(t),$$

где справа от t_f зависит только $K(t)$, следует, что существует предел функции $K(t)$ при $t_f \rightarrow \infty$, и этот предел, который обозначим K_Π , не зависит от F , т.е. от граничного условия $K(t_f) = F$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)K_\Pi\mathbf{x}(t) &= \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_t^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{*T}(t)R\mathbf{u}^*(t)] dt = \\ &= \lim_{t_f \rightarrow \infty} \left\{ \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_t^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{*T}(t)R\mathbf{u}^*(t)] dt \right\} = \\ &= \int_t^\infty [\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{*T}(t)R\mathbf{u}^*(t)] dt, \quad (9.88) \end{aligned}$$

так как $\mathbf{x}(t_f) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t_f \rightarrow \infty$. Из этого равенства также следует, что матрица K_Π , являющаяся единственным установившимся решением дифференциального уравнения Риккати, положительно определена, так как матрицы Q и R положительно определены. Из (9.86) и (9.88) имеем

$$\mathbf{x}^T(t)K_\Pi\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t)\bar{K}\mathbf{x}(t),$$

откуда $\bar{K} = K_\Pi$. Таким образом, $\bar{K}$ является единственной положительно определенной матрицей, удовлетворяющей алгебраическому уравнению Риккати.

Подставив управление (9.85а) в уравнение объекта, получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BR^{-1}B^T\bar{K})\mathbf{x}. \quad (9.89)$$

Покажем, что функция Беллмана является функцией Ляпунова для синтезированной оптимальной системы (9.89). Функция $S(x) = \mathbf{x}^T\bar{K}\mathbf{x}$, как было показано, является положительно определенной функцией. Ее полная производная по времени в силу уравнения (9.89) имеет вид

$$\frac{dS}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^T\bar{K}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\bar{K}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T(A^T\bar{K} + \bar{K}A - 2\bar{K}BR^{-1}B^T\bar{K})\mathbf{x},$$

или, с учетом алгебраического уравнения Риккати,

$$\frac{dS}{dt} = -\mathbf{x}^T(\bar{K}BRR^{-1}B^T\bar{K} + Q)\mathbf{x}.$$

Квадратичная форма $\mathbf{x}^T \bar{K} B R^{-1} B^T \bar{K} \mathbf{x}$ положительно полуопределена, так как матрица R и соответственно обратная матрица R^{-1} положительно определены и, следовательно, $\mathbf{z}^T R^{-1} \mathbf{z} \geq 0$, где $\mathbf{z} = B^T \bar{K} \mathbf{x}$. Матрица Q положительно определена по условию. Следовательно, производная dS/dt отрицательно определена.

Метод решения алгебраического уравнения Риккати. Алгебраическое уравнение Риккати является нелинейным, и в общем случае аналитически решить его не удастся. Как было показано выше, искомое решение этого уравнения совпадает с установившимся решением дифференциального матричного уравнения Риккати. Поэтому один из возможных способов его решения основан на нахождении установившегося решения матричного уравнения Риккати (9.83), записанного в обратном времени, при начальном условии $\tilde{K}(0) = F$, где F — произвольная положительно полуопределенная симметрическая матрица.

Пример 9.13. Определить оптимальное управление с обратной связью в следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad J = \int_0^\infty (x_1^2 + q x_2^2 + r u^2) dt \rightarrow \min, \quad q \geq 0, \quad r > 0.$$

Решение. В данной задаче имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (9.85а) и (9.85б) оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} (k_{21} x_1 + k_{22} x_2),$$

где k_{ij} определяются из уравнения

$$-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

или из равносильной ему системы

$$\frac{k_{12}^2}{r} - 1 = 0, \quad -k_{11} + \frac{k_{12} k_{22}}{r} = 0, \quad -2k_{12} + \frac{k_{22}^2}{r} - q = 0.$$

Эта система имеет решения

$$k_{12} = \pm \sqrt{r}, \quad k_{22} = \pm \sqrt{r(q + 2k_{12})}, \quad k_{11} = \frac{k_{12} k_{22}}{r}.$$

Критерию Сильвестра положительной определенности матрицы $\bar{K}$ удовлетворяет решение

$$k_{12} = k_{21} = \sqrt{r}, \quad k_{22} = \sqrt{r(q + 2\sqrt{r})}, \quad k_{11} = \sqrt{q + 2\sqrt{r}}.$$

Оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -\frac{1}{r} \left(\sqrt{r} x_1 + \sqrt{r(q + 2\sqrt{r})} x_2 \right).$$

Пример 9.14. Определить, при каких значениях параметра α задача оптимального управления

$$\dot{x}_1 = x_1 + u \quad \dot{x}_2 = \alpha x_2, \quad J = \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt \rightarrow \min$$

имеет решение.

Решение. В данной задаче имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

В соответствии с (9.85а) и (9.85б) оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(k_{11}x_1 + k_{12}x_2),$$

где k_{ij} определяются из уравнения

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

или из системы

$$-2k_{11} + k_{11}^2 - 1 = 0, \quad -2\alpha k_{12} + k_{11}k_{12} = 0, \quad -2k_{22} + k_{12}^2 - 1 = 0.$$

Эта система имеет решения

$$k_{11} = 1 \pm \sqrt{2}, \quad k_{12} = k_{21} = 0, \quad k_{22} = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Критерий Сильвестра положительной определенности матрицы $\bar{K}$ будет выполнен, если $k_{11} > 0$ и $k_{22} > 0$. Второе неравенство будет выполнено и задача будет иметь решение, если $\alpha < 0$. При $\alpha > 0$ задача не имеет решения. Это обусловлено тем, при этих значениях параметра объект не стабилизуем.

9.6.4. Синтез оптимального линейного регулятора выхода.

Пусть задана управляемая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{h}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (9.90a)$$

и критерий оптимальности

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{y}^T \tilde{Q}\mathbf{y} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u}) dt. \quad (9.90б)$$

Здесь $\mathbf{h}$ — известная функция времени, F — положительно полуопределенная матрица, $\tilde{Q}$ и R — положительно определенные матрицы, зависящие в общем случае от времени. Матрицы A , B , C , $\tilde{Q}$, R как функции от времени предполагаются непрерывными на интервале $[t_0, t_f]$.

Требуется определить управление с обратной связью, при котором критерий оптимальности при произвольной фиксированной начальной точке принимает минимальное значение.

Эту задачу называют *задачей синтеза оптимального линейного регулятора выхода*. Если объект или критерий нестационарен (хотя бы одна из матриц A , B , C , $\tilde{Q}$, R зависит от времени) или t_f конечен, задачу называют *нестационарной*, а если объект и критерий стационарны и $t_f = \infty$, задачу называют *стационарной задачей синтеза линейного регулятора выхода*.

Задача синтеза оптимального линейного регулятора выхода отличается от рассмотренной задачи синтеза оптимального регулятора состояния только тем, что в критерий оптимальности вместо вектора состояния входит выходной вектор и условие задачи дополняется уравнением наблюдения.

Подставив выражение для выходного вектора из (9.90а) в критерий оптимальности (9.90б), получим

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T C^T \tilde{Q} C \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt. \quad (9.91)$$

Таким образом, задача синтеза оптимального линейного регулятора выхода свелась к рассмотренной задаче синтеза оптимального линейного регулятора состояния. Отличие задачи синтеза (9.90а), (9.91) от задачи синтеза (9.71) состоит в том, что здесь роль матрицы Q играет произведение $C^T \tilde{Q} C$. При этом может оказаться, что, хотя матрица $\tilde{Q}$ является положительно определенной, произведение этим свойством не обладает: оно может быть положительно полуопределенным. Произведение $C^T \tilde{Q} C$ будет положительно определенным, если $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ в том и только том случае, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Пример 9.15. Определить оптимальный закон управления в следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1 \quad J = \int_0^{\infty} (y^2 + u^2) dt \rightarrow \min.$$

Решение. В данной задаче имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0),$$

$$\tilde{Q} = 1, \quad R = 1, \quad Q = C^T \tilde{Q} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (9.85а) и (9.85б) оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = -(k_{21}x_1 + k_{22}x_2),$$

где k_{ij} определяются из уравнения

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

или из равносильной ему системы

$$k_{12}^2 - 1 = 0, \quad -k_{11} + k_{12}k_{22} = 0, \quad -2k_{12} + k_{22}^2 = 0.$$

Эта система имеет решения

$$k_{12} = k_{21} = 1, \quad k_{22} = \pm\sqrt{2}, \quad k_{11} = \pm\sqrt{2}.$$

Критерию Сильвестра положительной определенности матрицы $\bar{K}$ удовлетворяет решение

$$k_{12} = k_{21} = 1, \quad k_{22} = \sqrt{2}, \quad k_{11} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -(x_1 + \sqrt{2}x_2).$$

9.6.5. Синтез оптимальной системы по критерию обобщенной работы. Как мы видели выше, при решении задач синтеза оптимальных систем управления по интегральному квадратичному критерию мы сталкиваемся с необходимостью решать нелинейные дифференциальные уравнения Риккати в случае нестационарной задачи и нелинейные алгебраические уравнения Риккати в случае стационарной задачи. А. А. Красовский ввел критерий оптимальности, который он назвал *критерием* (функционалом) *обобщенной работы*, при котором удастся избавиться от необходимости решать нелинейные уравнения. Суть метода синтеза оптимальной системы по критерию обобщенной работы состоит в том, что интегральный квадратичный критерий выбирают так, чтобы уравнение Беллмана получилось линейным.

Пусть объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{u} \quad (9.92a)$$

и критерий оптимальности имеет вид

$$J = g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [Q(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}^T R \tilde{\mathbf{u}}] dt, \quad (9.92б)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ — функция, которую выбирают так, чтобы уравнение Беллмана получилось линейным. Так как ограничений на управления нет, то уравнение Беллмана в данной задаче можно представить в виде (см. (9.48))

$$Q(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}^T R \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\partial S}{\partial x} [A(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}] = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (9.93а)$$

$$2\mathbf{u}^T R + \frac{\partial S}{\partial x} B(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (9.93б)$$

Из уравнения (9.93б) находим

$$\mathbf{u}^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T. \quad (9.94)$$

Подставив это выражение для управления в уравнение (9.93а), получим

$$Q(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} B(\mathbf{x}, t) R^{-1} B^T(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \tilde{\mathbf{u}}^T R \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} A(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Нелинейным относительно функции Беллмана является второе слагаемое. Чтобы избавиться от него, нужно выбрать

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T.$$

При подстановке этого выражения в последнее уравнение получим

$$Q(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial S}{\partial x} A(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad S(\mathbf{x}(t_f), t_f) = g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f). \quad (9.95)$$

Синтез линейной оптимальной системы по критерию обобщенной работы. Рассмотрим задачу синтеза оптимальной линейной системы, когда уравнения управляемой системы и критерий оптимальности имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (9.96а)$$

$$J = \mathbf{x}^T(t_f) F \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}^T R \tilde{\mathbf{u}}) dt, \quad (9.96б)$$

где F — постоянная положительно полуопределенная матрица, Q , R — положительно определенные матрицы, которые могут зависеть от времени.

Утверждение 9.3. В задаче (9.96) оптимальный закон управления имеет вид

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1} B^T K \mathbf{x}, \quad (9.97а)$$

где положительно определенная симметрическая матрица K определяется из линейного дифференциального уравнения

$$\dot{K} = -KA - A^TK - Q, \quad K(t_f) = F, \quad (9.97б)$$

если система является нестационарной.

Оптимальный закон управления имеет вид

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1}B^TK\mathbf{x}, \quad (9.98а)$$

где положительно определенная симметрическая матрица $\bar{K}$ определяется из линейного алгебраического уравнения

$$\bar{K}A + A^T\bar{K} + Q = 0, \quad (9.98б)$$

если система является стационарной (все матрицы являются постоянными и $t_f = \infty$).

Доказательство. В случае задачи (9.96) уравнение Беллмана и граничное условие (9.95) принимают вид

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} A \mathbf{x} = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad K(t_f) = F.$$

Решение уравнения будем искать в виде квадратичной формы $S = \mathbf{x}^T K \mathbf{x}$. Подставив ее в уравнение Беллмана, получим

$$\mathbf{x}^T (Q + 2KA) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \dot{K} \mathbf{x}.$$

Учитывая тождество $\mathbf{x}^T 2KA \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (KA + A^TK) \mathbf{x}$, последнее уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{x}^T (Q + KA + A^TK) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \dot{K} \mathbf{x}.$$

Отсюда получаем уравнение (9.97б). То, что матрица K должна быть положительно определенной, следует из определения функции Беллмана. Подставив функцию Беллмана (квадратичную форму) в (9.94), получим (9.97а).

Оптимальный закон управления (9.98) в случае стационарной задачи получается точно так же, как и в случае нестационарной задачи. Только в этом случае в квадратичной форме $S = \mathbf{x}^T K \mathbf{x}$ матрица K принимается постоянной.

Пример 9.16. Определить оптимальный закон управления по критерию обобщенной работы при условии, что уравнения объекта и критерий оптимальности имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u, \quad J = \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \tilde{u}^2) dt.$$

Решение. В данной задаче имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

В соответствии с (9.98) оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(k_{21}x_1 + k_{22}x_2),$$

где k_{ij} определяются из уравнения

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

или из системы

$$\begin{aligned} -k_{12} - k_{21} + 1 &= 0, & k_{11} - k_{12} - k_{22} &= 0, \\ k_{21} - k_{22} + k_{12} - k_{22} + 1 &= 0, & k_{12} &= k_{21}. \end{aligned}$$

Эта система имеет следующее решение:

$$k_{12} = k_{21} = \frac{1}{2}, \quad k_{22} = 1, \quad k_{11} = \frac{3}{2}.$$

Это решение удовлетворяет критерию Сильвестра. Оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = -\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right).$$

9.6.6. Метод прогонки решения задачи синтеза оптимальной линейной системы. Выше задача синтеза оптимальной линейной системы методом динамического программирования была сведена к решению матричного уравнения Риккати. Здесь рассматривается еще один метод решения этой задачи, основанный на вариационном методе и прогонке (переносе) граничных условий из одного конца на другой. Этот метод иногда позволяет получить аналитическое выражение для оптимального закона управления и в том случае, когда матричное уравнение Риккати аналитически не удастся решить.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

$$J = \frac{1}{2} \left[\mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \right] \rightarrow \min.$$

Здесь для удобства в качестве критерия оптимальности принят интегральный квадратичный функционал, поделенный на 2. Это не скажется на решении задачи.

Составим гамильтониан (принимаем $\psi_0 = -1$):

$$H = -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) + \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}).$$

Запишем уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = -\mathbf{u}^T \mathbf{R} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Из последнего уравнения имеем

$$\mathbf{u} = R^{-1}B^T\boldsymbol{\psi}. \quad (9.99)$$

Подставим это выражение в уравнение объекта:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + BR^{-1}B^T\boldsymbol{\psi}.$$

Запишем это уравнение совместно с первым уравнением Эйлера–Лагранжа:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix},$$

или

$$\dot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z}, \quad (9.100)$$

где

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix}.$$

Условие трансверсальности принимает вид

$$\boldsymbol{\psi}(t_f) = -F\mathbf{x}(t_f). \quad (9.101)$$

Запишем решение уравнения (9.100), используя нормированную фундаментальную матрицу $Z(t, t_0)$: $Z(t, t) = I$ при любом t из рассматриваемого интервала времени. Согласно формуле (1.9) решение однородного уравнения (9.100), если за начальный момент принять $t' \in [t_0, t_f]$, примет вид

$$\mathbf{z}(t) = Z(t, t')\mathbf{z}(t'). \quad (9.102)$$

Представим фундаментальную матрицу в соответствии со структурой уравнения (9.100) в виде

$$Z(t, t') = \begin{bmatrix} Z_{11}(t, t') & Z_{12}(t, t') \\ Z_{21}(t, t') & Z_{22}(t, t') \end{bmatrix},$$

где Z_{ij} — матрицы размерности $n \times n$. Используя это представление и положив $t' = t_f$, решение (9.102) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = Z_{11}(t, t_f)\mathbf{x}(t_f) + Z_{12}(t, t_f)\boldsymbol{\psi}(t_f),$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = Z_{21}(t, t_f)\mathbf{x}(t_f) + Z_{22}(t, t_f)\boldsymbol{\psi}(t_f),$$

или, после подстановки (9.101),

$$\mathbf{x}(t) = [Z_{11}(t, t_f) - Z_{12}(t, t_f)F]\mathbf{x}(t_f),$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = [Z_{21}(t, t_f) - Z_{22}(t, t_f)F]\mathbf{x}(t_f).$$

Исключим из полученной системы уравнений $\mathbf{x}(t_f)$:

$$\boldsymbol{\psi}(t) = [Z_{21}(t, t_f) - Z_{22}(t, t_f)F][Z_{11}(t, t_f) - Z_{12}(t, t_f)F]^{-1}\mathbf{x}(t).$$

В результате проведенного преобразования по существу граничное условие из точки t_f на временной оси переносится в точку $t \in [t_0, t_f]$.

Подставив выражение для ψ из последнего соотношения в (9.99), получим оптимальный закон управления

$$\mathbf{u}^* = R^{-1}B^T[Z_{21}(t, t_f) - Z_{22}(t, t_f)f][Z_{11}(t, t_f) - Z_{12}(t, t_f)F]^{-1}\mathbf{x}(t). \quad (9.103)$$

Решая ту же самую задачу методом динамического программирования, получили (см. (9.74))

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1}B^TK\mathbf{x}.$$

Сравнивая это соотношение с (9.103), получаем

$$K = -[Z_{21}(t, t_f) - Z_{22}(t, t_f)F][Z_{11}(t, t_f) - Z_{12}(t, t_f)F]^{-1}. \quad (9.104)$$

При $F = 0$ формулы (9.103) и (9.104) принимают соответственно вид

$$\mathbf{u}^* = R^{-1}B^TZ_{21}(t, t_f)Z_{11}^{-1}(t, t_f)\mathbf{x}(t), \quad (9.105)$$

$$K = -Z_{21}(t, t_f)Z_{11}^{-1}(t, t_f). \quad (9.106)$$

Соотношения (9.104) и (9.106) определяют решение уравнения Риккати (9.75а) при $F \neq 0$ и $F = 0$ соответственно через фундаментальную матрицу системы, состоящей из уравнения объекта и уравнения Эйлера–Лагранжа для сопряженных координат.

Простейшая задача перехвата. Решим изложенным методом прогонки задачу перехвата, несколько отличную от задачи, рассмотренной в [13].

Пусть цель движется равномерно и прямолинейно на постоянной высоте со скоростью $v_{ц}$. Перехватчик движется с постоянной скоростью $v_{п}$. Курсовые углы цели $q_{ц}$ и перехватчика $q_{п}$ (рис. 9.5) достаточно малы:

$$|q_{ц}| \ll 1, \quad |q_{п}| \ll 1. \quad (9.107)$$

При указанных допущениях в первом приближении уравнения движения перехватчика можно записать в виде

$$\dot{x}_1 = -v_{п}q_{п}, \quad \dot{q}_{п} = \omega_{п},$$

где x_1 — текущее расстояние от перехватчика до траектории движения цели; $\omega_{п}$ — угловая скорость перехватчика. Принимая угловую скорость перехватчика за его управление и вводя обозначения $q_{п} = x_2$, $\omega_{п} = u$, уравнения перехватчика можно записать в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu,$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -v_{п} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Примем за начальное время $t_0 = 0$. Время перехвата $t_f = r_0/v_c$, v_c — скорость сближения перехватчика и цели. В силу условия (9.107)

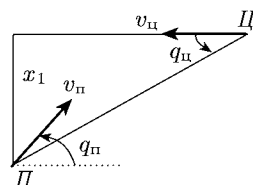


Рис. 9.5. К задаче перехвата

в первом приближении можем положить

$$v_c = v_n + v_n, \quad r = |\Pi\Pi|;$$

промахом будет $x_1(t_f)$. Потребуем, чтобы промах был равен нулю. Тогда граничные условия примут вид

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad x_1(t_f) = 0.$$

Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления с обратной связью при критерии оптимальности

$$J = \frac{1}{2} \int (\varepsilon^2 x_2^2 + u^2) dt.$$

В данном случае имеем $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}$, $R = 1$. Гамильтониан и уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$H = -\frac{1}{2} (\varepsilon^2 x_2^2 + u^2) - \psi_1 v_n x_2 + \psi_2 u,$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \varepsilon^2 x_2 + \psi_1 v_n, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = -u + \psi_2 = 0.$$

Если записать уравнения объекта совместно с уравнениями Эйлера–Лагранжа в виде (9.100), то для матрицы D получим

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -v_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & v_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Условия трансверсальности имеет вид $\psi_2(t_f) = 0$. Из последнего уравнения Эйлера–Лагранжа находим

$$u = \psi_2. \quad (9.108)$$

Поэтому задача сводится к определению ψ_2 как функцию $\mathbf{x}$.

Так как матрица D постоянна, то фундаментальная матрица зависит от одного аргумента:

$$Z(t, t') = Z(t - t') = Z(\tau) = [z_{ik}(\tau)], \quad \tau = t - t'.$$

С учетом граничных условий решение объединенной системы можно записать в виде

$$x_1(t) = z_{12}(t - t_f)x_2(t_f) + z_{13}(t - t_f)\psi_1(t_f),$$

$$x_2(t) = z_{22}(t - t_f)x_2(t_f) + z_{23}(t - t_f)\psi_1(t_f),$$

$$\psi_2(t) = z_{42}(t - t_f)x_2(t_f) + z_{43}(t - t_f)\psi_1(t_f).$$

Найдем из первых двух уравнений $x_2(t_f)$ и $\psi_1(t_f)$, а затем подставим их в последнее уравнение. Тогда получим

$$\psi_2(t) = \frac{1}{\Delta} \{ z_{43}(t-t_f)[z_{23}(t-t_f)x_1(t) - z_{13}(t-t_f)x_2(t)] + \\ + z_{43}(t-t_f)[z_{12}(t-t_f)x_2(t) - z_{22}(t-t_f)x_1(t)] \}, \quad (9.109)$$

где

$$\Delta = z_{12}(t-t_f)z_{23}(t-t_f) - z_{22}(t-t_f)z_{13}(t-t_f). \quad (9.110)$$

Найдем фундаментальную матрицу $Z(\tau)$. Так как матрица D постоянна, то имеем

$$Z(\tau) = e^{D\tau} = I + D\tau + \frac{1}{2!} D^2\tau^2 + \dots + \frac{1}{n!} D^n\tau^n + \dots \quad (9.111)$$

Вычислим степени матрицы D :

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -v_{\pi} \\ 0 & \varepsilon^2 & v_{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \quad D^3 = \begin{bmatrix} 0 & -v_{\pi}\varepsilon^2 & -v_{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^4 & v_{\pi}\varepsilon^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D^{2k} = \varepsilon^{2(k-1)} D^2, \quad D^{2k+1} = \varepsilon^{2(k-1)} D^3, \quad k = 2, 3, \dots$$

Подставив эти степени в (9.111), получим

$$z_{12}(\tau) = -v_{\pi} \left(\tau + \varepsilon^2 \frac{\tau^3}{3!} + \varepsilon^4 \frac{\tau^5}{5!} + \dots \right) = -\frac{v_{\pi}}{2\varepsilon} (e^{\varepsilon\tau} - e^{-\varepsilon\tau}),$$

$$z_{13}(\tau) = -v_{\pi}^2 \left(\frac{\tau^3}{3!} + \varepsilon^2 \frac{\tau^5}{5!} + \varepsilon^4 \frac{\tau^7}{7!} + \dots \right) = \frac{v_{\pi}^2\tau}{\varepsilon^2} - \frac{v_{\pi}}{2\varepsilon^3} (e^{\varepsilon\tau} - e^{-\varepsilon\tau}),$$

$$z_{22}(\tau) = 1 + \varepsilon^2 \frac{\tau^2}{2!} + \varepsilon^4 \frac{\tau^4}{4!} + \dots = \frac{1}{2} (e^{\varepsilon\tau} + e^{-\varepsilon\tau}),$$

$$z_{23}(\tau) = v_{\pi} \left(\frac{\tau^2}{2!} + \varepsilon^2 \frac{\tau^4}{4!} + \varepsilon^4 \frac{\tau^6}{6!} + \dots \right) = -\frac{v_{\pi}}{\varepsilon^2} + \frac{v_{\pi}}{2\varepsilon^2} (e^{\varepsilon\tau} + e^{-\varepsilon\tau}),$$

$$z_{42}(\tau) = \varepsilon^2\tau + \varepsilon^4 \frac{\tau^3}{3!} + \varepsilon^6 \frac{\tau^5}{5!} + \dots = \frac{\varepsilon}{2} (e^{\varepsilon\tau} - e^{-\varepsilon\tau}),$$

$$z_{43}(\tau) = v_{\pi} \left(\tau + \varepsilon^2 \frac{\tau^3}{3!} + \varepsilon^4 \frac{\tau^5}{5!} + \dots \right) = \frac{v_{\pi}}{2\varepsilon} (e^{\varepsilon\tau} - e^{-\varepsilon\tau}).$$

Подставив эти выражения в (9.109) и (9.110), а затем найденное выражение для ψ_2 в (9.108), получим оптимальный закон управления

$$u^*(\mathbf{x}) = -\frac{\varepsilon^2}{v_{\pi}} \frac{(e^{\varepsilon\tau} - e^{-\varepsilon\tau})(x_1 + v_{\pi}\tau x_2)}{e^{\varepsilon\tau} - e^{-\varepsilon\tau} - \varepsilon\tau(e^{\varepsilon\tau} + e^{-\varepsilon\tau})}.$$

При $\varepsilon^2 \ll 1$, разложив экспоненциальные функции в ряд и отбросив члены, содержащие множитель ε выше пятой степени, находим

$$u^*(\mathbf{x}) = (3 + 0,2\varepsilon^2\tau^2) \left(\frac{x_1}{v_{\pi}\tau^2} + \frac{x_2}{\tau} \right).$$

В исходных переменных это соотношение принимает вид

$$\omega_{\Pi} = (3 + 0,2 \varepsilon^2 \tau^2) \left(\frac{x_1}{v_{\Pi} \tau^2} + \frac{q_{\Pi}}{\tau} \right).$$

С учетом (9.107) можно записать (см. рис. 9.5)

$$q_{\Pi} = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{v_{\Pi}(t_f - t)},$$

или, после дифференцирования,

$$\dot{q} = \frac{v_{\Pi}}{v_c} \left(\frac{q_{\Pi}}{\tau} + \frac{x_1}{v_{\Pi} \tau^2} \right).$$

Используя это соотношение, оптимальный закон управления можно представить в виде

$$\omega_{\Pi} = \frac{1}{v_{\Pi} v_c} (3v^2 + 0,2 \varepsilon^2 r^2) \dot{q}_{\Pi}.$$

Это соотношение определяет закон пропорционального сближения с переменным коэффициентом навигации [30].

Задачи

1. Сформулировать задачу вывода летательного аппарата (ЛА) на заданную высоту за минимальное время при ограничении на максимальную перегрузку.

2. Сформулировать задачу вывода ЛА в заданную точку «геометрического» пространства при минимальном расходе топлива и ограничении максимальной перегрузки.

3. Сформулировать задачу поворота вала двигателя на максимальный угол за время T при ограничении на максимальный ток в цепи якоря:

а) с остановкой; б) без остановки.

4. Сформулировать задачу поворота вала двигателя на заданный угол при минимальной затрате энергии и ограничении максимального тока в якорной цепи:

а) с остановкой; б) без остановки.

5. Сформулировать задачу поворота вала на максимальный угол с остановкой за время T при заданном расходе энергии.

6. Записать уравнения Эйлера–Лагранжа и условия трансверсальности при условии, что объект описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u_2,$$

а краевые условия и критерий оптимальности имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_3(0) = 0, \quad x_2^2(0) + x_4^2(0) = v^2 \quad (v = \text{const}), \\ x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0, \quad x_3(t_f) = \alpha \quad (\alpha = \text{const}), \end{aligned}$$

$$J = \int_0^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt.$$

7. Записать уравнения Эйлера–Лагранжа и условия трансверсальности при условии, что объект описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u_2,$$

на управление наложено ограничение

$$\int_0^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt = V \quad (V = \text{const}),$$

а краевые условия и критерий оптимальности имеют вид:

а) $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0, \quad x_4(t_f) = 0, \quad J = -x_3(t_f);$

б) $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0, \quad x_3(t_f) = 0, \quad J = -x_1(t_f).$

8. Записать уравнения Эйлера–Лагранжа и условия трансверсальности в следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u_2,$$

$$|u| \leq u_m, \quad \int_0^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt = V \quad (u_m, V = \text{const}),$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0, \quad x_3(t_f) = 0,$$

$$J = -x_1(t_f) \rightarrow \min.$$

9. Определить оптимальное программное управление и оптимальную траекторию в следующих задачах оптимального управления:

а) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq u_m,$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad x_1(t_f) = x_1^0, \quad J = t_f \rightarrow \min;$$

б) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq u_m,$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad x_1(t_f) = x_1^0, \quad x_2(t_f) = 0, \quad J = t_f \rightarrow \min;$$

в) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - 1, \quad |u| \leq 2,$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad x_1(t_f) = x_1^0, \quad J = t_f \rightarrow \min;$$

г) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - 1, \quad |u| \leq 2,$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad x_1(t_f) = x_1^0, \quad x_2(t_f) = 0, \quad J = t_f \rightarrow \min;$$

д) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u,$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad x_1(t_f) = x_1^0, \quad J = \int_0^{t_f} u^2 dt \rightarrow \min;$$

е) $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u,$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad x_1(t_f) = x_1^0, \quad x_2(t_f) = 0, \quad J = \int_0^{t_f} u^2 dt \rightarrow \min.$$

10. Исследовать наблюдаемость и обнаруживаемость следующих управляемых систем:

а) $\dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad y = x_1 + x_2;$

б) $\dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad y = x_2;$

в) $\dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad y = x_3;$

г) $\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = u, \quad y = x_1 + x_2.$

11. Записать уравнения объекта в нормальной форме и исследовать наблюдаемость и обнаруживаемость:

а) $y = \frac{5}{p(p+1)} u;$ б) $y = \frac{10}{p(p^2+2p+1)} u;$ в) $y = \frac{2p+1}{p(p^2+2p+1)} u.$

12. Определить, при каких значениях параметров управляемая система вполне наблюдаема, обнаруживаема:

а) $\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \quad y = ax_1 + bx_2;$

б) $\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = ax_1 + x_2 + u, \quad y = ax_1 + bx_2.$

13. Определить оптимальный закон управления (управление с обратной связью) в следующих задачах оптимального управления:

а) $\dot{x} = (2e^{-t} - 1)x + u, \quad x(0) = x^0, \quad J = \int_0^{10} (x^2 + u^2) dt \rightarrow \min;$

б) $\dot{x} = x + u, \quad x(0) = x^0, \quad J = \int_0^{10} (x^2 + u^2) dt \rightarrow \min.$

14. Определить оптимальный закон управления (управление с обратной связью) в следующих задачах оптимального управления:

а) $\dot{x}_1 = x_1 + u, \quad \dot{x}_2 = \alpha x_2, \quad x(0) = x^0,$

$$J = \int_0^{10} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt \rightarrow \min;$$

б) $\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \mathbf{x}(0) = x^0,$

$$J = \int_0^{10} (x_1^2 + 2bx_1x_2 + ax_2^2 + u^2) dt \rightarrow \min, \quad a^2 - b^2 > 0.$$

15. Определить оптимальный закон управления (управление с обратной связью) в следующих задачах оптимального управления:

а) $y = \frac{1}{p^2 + p + 1} u, \quad J = \int_0^{10} (y^2 + ru^2) dt \rightarrow \min, \quad r > 0;$

$$\text{б) } y = \frac{p+1}{p^2+p+1} u, \quad J = \int_0^{10} (y^2 + ru^2) dt \rightarrow \min, \quad r > 0.$$

16. Определить оптимальный закон управления (управление с обратной связью) по критерию обобщенной работы в следующих задачах оптимального управления:

$$\text{а) } y = \frac{p+1}{p^2+p+1} u, \quad J = \int_0^{10} (y^2 + ru^2 + ru^{*2}) dt \rightarrow \min, \quad r > 0;$$

$$\text{б) } y = \frac{p+1}{p^2+p+1} u, \quad J = \int_0^{10} (y^2 + ru^2 + ru^{*2}) dt \rightarrow \min, \quad r > 0.$$

Глава 10

АНАЛИЗ СИСТЕМ И СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В предыдущих главах при анализе и синтезе систем управления случайные возмущающие воздействия никак не учитывались. В то же время во многих случаях (например, при управлении различными технологическими процессами, летательными аппаратами и другими объектами) они оказывают существенные влияния на процесс управления, и их нужно учитывать. Данная глава посвящена анализу систем управления, а также синтезу оптимальных систем управления при случайных возмущающих воздействиях (случайных возмущениях).

10.1. Случайные величины и процессы

Кратко изложим основные сведения из теории вероятностей, которые потребуются при изложении материала этой главы. Цель этого изложения состоит в том, чтобы напомнить понятия и характеристики, связанные со случайными величинами и случайными функциями.

10.1.1. Случайные величины и их характеристики. Переменная величина X называется *случайной величиной*, если то, что она при проведении эксперимента (при реализации заданного комплекса условий) примет значение, меньшее заданного числа x , т.е. $x < X$, является случайным событием. Вероятность этого события $P(x < X)$ называется *функцией распределения* и обозначается $F(x)$: $F(x) = P(x < X)$. Если функция $F(x)$ дифференцируема, то ее производная $dF(x)/dx$ называется *плотностью распределения* или *плотностью вероятностей* и обозначается $f(x)$: $f(x) = dF(x)/dx$. Иногда функцию распределения $F(x)$ называют также *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*, а плотность распределения $f(x)$ — *дифференциальной функцией распределения* или *дифференциальным законом распределения*. Функция распределения и плотность распределения обладают следующими

свойствами:

$$\text{а) } F(-\infty) = 0; \text{ б) } F(\infty) = 1; \text{ в) } F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx; \text{ г) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Функции распределения $F(x)$ и $f(x)$ являются исчерпывающими характеристиками случайных величин. Однако наряду с ними используются числовые характеристики: начальные и центральные моменты.

Начальным моментом s -го порядка случайной величины X называется интеграл

$$\alpha_s = M[X^s] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^s dF(x),$$

где M обозначает операцию математического ожидания. Наиболее часто используется начальный момент первого порядка

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

который называется *математическим ожиданием* или *средним значением*.

Разность $\tilde{X} = X - m_x$ называют *центрированной случайной величиной*. *Центральным моментом s -го порядка* случайной величины X называют математическое ожидание s -й степени центрированной случайной величины

$$\mu_s = M[\tilde{X}^s] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s dF(x).$$

Наиболее часто используется центральный момент второго порядка

$$\begin{aligned} \mu_2 = D_x = D[X] = M[\tilde{X}^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 dF(x), \end{aligned}$$

который называется *дисперсией*.

Корень квадратный из дисперсии $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ называется *средним квадратическим отклонением*.

Случайная величина X *подчиняется нормальному закону*, или *закону Гаусса*, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)},$$

где m — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение.

Вектор $\mathbf{X} = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)^T$, компоненты X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) которого являются случайными величинами, называют *случайным век-*

тором. Исчерпывающими характеристиками случайного вектора X являются n -мерные законы распределения: n -мерная функция распределения и n -мерная плотность распределения. n -мерной функцией распределения называется вероятность совместного выполнения n неравенств $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n),$$

а n -мерной плотностью распределения — производная

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Функция распределения $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и плотность распределения $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ обладают следующими свойствами:

$$1) F_1(x) = F_n(x_1, \infty, \dots, \infty),$$

$$F_k(x_1, \dots, x_k) = F_n(x_1, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty);$$

$$2) f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n,$$

$$f_k(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n.$$

При рассмотрении системы случайных величин для характеристики зависимости между различными случайными величинами, входящими в эту систему, используются условные законы распределения. Условным законом распределения случайной величины X , входящей, например, в систему из двух случайных величин (X, Y) , называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина Y приняла определенное значение: $Y = y$.

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения (обозначение $F(x/y)$), так и плотностью распределения (обозначение $f(x/y)$). Согласно теореме умножения

$$f_2(x, y) = f_1(x)f(y/x).$$

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если их совместная плотность распределения равна произведению их плотностей распределения:

$$f_2(x, y) = f_1(x)f_1(y).$$

Числовыми характеристиками случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1 X_2 \dots X_n)^T$, являются:

1) математическое ожидание $M[\mathbf{X}] = (m_1 m_2 \dots m_n)^T$, где $m_i = M[X_i]$;

2) дисперсия $D[\mathbf{X}] = (D_1 D_2 \dots D_n)^T$, где $D_i = D[X_i]$;

3) корреляционная матрица

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix},$$

где $K_{ij} = M[(X_i - m_i)(X_j - m_j)]$ — корреляционный момент случайных величин X_i и X_j .

Из определения корреляционного момента ясно, что корреляционная матрица является симметрической. Корреляционная матрица K является корреляционным моментом векторной случайной величины и определяется следующим образом: $K = M[\tilde{X}\tilde{X}^T]$.

10.1.2. Случайные процессы и их характеристики. Случайную функцию $X(t)$ можно определить как семейство случайных величин, зависящих от параметра t . Если параметр t является временем, функция $X(t)$ называется *случайным (вероятностным, стохастическим) процессом*. При каждом эксперименте случайная функция $X(t)$ принимает конкретный вид $x(t)$. Функция $x(t)$ является детерминированной и называется *реализацией* случайного процесса $X(t)$. Случайная функция $X(t)$ при фиксированном параметре t является случайной величиной, которая обладает законами распределения $F_1(x, t)$ и $f_1(x, t)$, зависящими от времени.

Функции $F_1(x, t)$ и $f_1(x, t)$ называются *одномерными законами распределения*, причем $F_1(x, t)$ называется *одномерной функцией распределения*, а $f_1(x, t)$ — *одномерной плотностью распределения*. Одномерные законы распределения не являются исчерпывающей характеристикой случайного процесса $X(t)$. Они, например, не позволяют определить, как зависят между собой случайные величины, которые получаются при различных фиксированных значениях t . Более полной характеристикой случайного процесса является двумерные законы распределения: функция распределения $F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ и плотность распределения $f_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$. Но и они, как любые конечные законы распределения, не могут служить исчерпывающими характеристиками.

Для описания случайных процессов наряду с функцией распределения и плотностью распределения используют моментные характеристики: *начальные моменты*

$$\begin{aligned} M[X(t_1) X(t_2) \dots X(t_n)] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_n f_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n; \end{aligned}$$

центральные моменты

$$\begin{aligned} M[\tilde{X}(t_1) \dots \tilde{X}(t_n)] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1) \dots (x_n - m_n) f_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

где $\tilde{X}(t_i) = X(t_i) - M[X(t_i)]$ — центрированная случайная величина, $m_i = M[X(t_i)]$ — математическое ожидание (среднее значение) случайной величины $X(t_i)$.

Наибольшее применение находят:
начальный момент первого порядка

$$m_x(t) = M[X(t)], \quad (10.1)$$

который называется *математическим ожиданием* или *средним значением* случайного процесса $X(t)$;

центральный момент второго порядка

$$K_x(t_1, t_2) = M[\tilde{X}(t_1)\tilde{X}(t_2)],$$

который называется *корреляционной* или *автокорреляционной функцией*;

начальный момент второго порядка

$$B_x(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)],$$

который называется *ковариационной функцией*. (Ковариационную функцию также записывают в виде $\text{cov}[X(t_1), X(t_2)]$.)

Ясно, что если математическое ожидание $M[X(t)] = 0$, то корреляционная и ковариационная функции равны между собой. При $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция равна дисперсии (дисперсионной функции): $D[X(t)] = K(t, t)$.

В переводной литературе ковариационной функцией или ковариацией, называют корреляционную функцию (см., например, [48]).

Если $\mathbf{X}(t)$ и $Y(t)$ — две случайные процессы, то функция

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M[\tilde{X}(t_1)\tilde{Y}(t_2)]$$

называется *взаимной корреляционной функцией*. Если $K_{xy}(t_1, t_2) = 0$, то случайные процессы $\tilde{X}(t)$ и $\tilde{Y}(t)$ называются *некоррелированными*, а если $K_{xy}(t_1, t_2) \neq 0$, то называются *коррелированными*.

Если $\mathbf{X}(t)$ — векторный случайный процесс, то корреляционная функция $K(t_1, t_2) = M[\tilde{\mathbf{X}}(t_1)\tilde{\mathbf{X}}^T(t_2)]$ представляет собой симметрическую матрицу, и ее также называют корреляционной матрицей.

Математическое ожидание, корреляционная функция и ковариационная функция обладают следующими свойствами:

$$1) K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1), \quad B(t_1, t_2) = B(t_2, t_1);$$

2) если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — детерминированная функция, то

$$M[Y(t)] = M[X(t)] + \varphi(t), \quad K_x(t_1, t_2) = K_y(t_1, t_2);$$

3) если $Y(t) = \varphi(t)X(t)$, где $\varphi(t)$ — детерминированная функция, то

$$m_y(t) = \varphi(t)m_x(t), \quad K_y(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_x(t_1, t_2).$$

10.1.3. Некоторые типы случайных процессов.

Гауссов процесс. Случайный процесс называется гауссовым или *нормальным*, если каковы бы ни были число n и моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$, случайный вектор $[X(t_1) X(t_2) \dots X(t_n)]^T$ имеет плотность распределения

$$f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \frac{\sqrt{|K^{-1}|}}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp \left\{ - \left[\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T K^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \right] \right\},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; $\mathbf{m}_x = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$ — вектор математических ожиданий; $K = [K_{ik}]$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) — корреляционная матрица. При $n = 1$ имеем

$$x = x_1, \quad m = M[X(t)], \quad K = K_{11} = D[X(t)] = \sigma^2(t),$$

и гауссова плотность распределения принимает вид

$$f_1(x, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

Как видно, гауссов закон распределения однозначно определяется математическим ожиданием и корреляционной матрицей.

Стационарные процессы. Случайный процесс $X(t)$ называется *строго стационарным* или *стационарным в узком смысле*, если при любом n его n -мерная функция распределения не зависит от сдвига времени, т. е. обладает следующим свойством:

$$F(x_1, t_1 + \xi; \dots; x_n, t_n + \xi) = F(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)$$

при любом ξ . Если случайный процесс является строго стационарным, то его математическое ожидание не зависит от времени и корреляционная функция зависит от одного параметра. Действительно, имеем

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dF(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \xi) dF(x, t + \xi) = m_x(t + \xi),$$

откуда следует $m_x = \text{const}$. Аналогично можно показать, что

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_1 + \xi, t_2 + \xi).$$

Отсюда, положив $\xi = -t_1$, получим

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau) \quad (\tau = t_2 - t_1).$$

В силу свойства $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$ корреляционная функция $K(\tau)$ является четной функцией: $K(\tau) = K(-\tau)$.

Случайный процесс $X(t)$ называется *слабо стационарным* или *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание не зависит от времени и корреляционная функция зависит от одной переменной:

$$1) m_x = \text{const}; \quad 2) K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau).$$

Если моменты m_x и $K_x(\tau)$ существуют, то строго стационарный случайный процесс является и слабо стационарным. Однако не всякий слабо стационарный процесс является строго стационарным.

Стационарные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *стационарно связанными*, если их взаимная корреляционная функция зависит от одного параметра: $K_{xy}(t_1, t_2) = K_{xy}(t_1 - t_2)$.

Стационарные процессы, помимо законов распределения и моментов, характеризуются еще спектральной плотностью.

Спектральной плотностью стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$ называется двустороннее преобразование Фурье от его корреляционной функции:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (10.2)$$

Корреляционная функция выражается с помощью спектральной плотности обратным преобразованием Фурье:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (10.3)$$

Аналогично определяется взаимная спектральная плотность двух стационарных и стационарно связанных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$K_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Эргодический процесс. Стационарный случайный процесс $X(t)$ называется *эргодическим*, если выполняются следующее соотношение:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = m_x, \quad (10.4)$$

где $x(t)$ — (произвольная) реализация случайного процесса $X(t)$.

Соотношение (10.1), определяющее математическое ожидание, можно трактовать как среднее по множеству реализаций, а соотношение (10.4) — как среднее по времени одной реализации. Поэтому эргодический процесс можно определить как такой процесс, для которого среднее по множеству реализаций равно среднему по времени одной реализации.

Стационарный процесс $X(t)$ является эргодическим, если его корреляционная функция удовлетворяет соотношению

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_x(u, v) du dv = 0.$$

Процессы с независимыми и ортогональными приращениями. Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если случайные величины

$$X(t_0), \quad X(t_1) - X(t_0), \quad \dots, \quad X(t_n) - X(t_{n-1})$$

при любых $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ (из области определения случайного процесса) взаимно независимы [48]. Если эти величины только некоррелированы, процесс $X(t)$ называется процессом с *некоррелированными* или *ортогональными приращениями*.

Процесс с независимыми приращениями полностью определяется распределением $X(t_0)$ и распределением приращений $X(t) - X(s)$ для произвольных t и s . Если распределение $X(t) - X(s)$ зависит от $t - s$, то процесс $X(t)$ называется *процессом с независимыми стационарными приращениями*; если $X(t) - X(s)$ имеет нормальное распределение — *процессом с независимыми нормальными приращениями*. Векторный процесс с нулевым средним значением и независимыми нормальными приращениями называют *винеровским процессом*.

Корреляционная функция для случайного процесса $X(t)$ с ортогональными приращениями имеет следующий вид:

$$K_x(t_1, t_2) = \begin{cases} K_x(t_1, t_1), & t_1 \leq t_2, \\ K_x(t_2, t_2), & t_2 \leq t_1. \end{cases} \quad (10.5)$$

Действительно, имеем: при $t_1 \leq t_2$

$$M[X(t_1)X(t_2)] = M\{X(t_1)[X(t_2) - X(t_1) + X(t_1)]\} = M[X(t_1)X(t_1)];$$

при $t_2 \leq t_1$

$$M[X(t_1)X(t_2)] = M\{[X(t_1) - X(t_2) + X(t_2)]X(t_2)\} = M[X(t_2)X(t_2)].$$

Белый шум. Стационарный случайный процесс $X(t)$ называется *белым шумом*, если его спектральная плотность постоянна: $S_x(\omega) = G$ ($G = \text{const}$). Постоянная G называется *интенсивностью* белого шума. Если исходить из определения спектральной плотности (10.2), то спектральная плотность будет постоянна, когда корреляционная функция имеет вид $K(\tau) = G\delta(\tau)$. Здесь $\delta(\tau)$ — функция Дирака (δ -функция).

Более общее определение белого шума основано на корреляционной функции. Случайный процесс $X(t)$ называется *белым шумом*, если его корреляционная функция имеет вид $K_x(t, \tau) = G(t)\delta(t - \tau)$. Белый шум называется *стационарным*, если его интенсивность является постоянной.

Процесс $V(t)$ является белым шумом, если процесс $X(t)$, связанный с $V(t)$ уравнением

$$\dot{X}(t) = Q(t)V(t),$$

где $Q(t)$ — детерминированная функция (матрица), является процессом с ортогональными приращениями. Если $X(t)$ является винеровским процессом, то белый шум $V(t)$ называется *нормальным (гауссовым) белым шумом*.

10.2. Анализ линейных систем и синтез оптимальных параметров при случайных воздействиях

Если на систему управления действует случайное воздействие, то его выходная переменная $Y(t)$ и ошибка $E(t)$ будут случайными процессами. И в этом случае для оценки качества системы управления используют вероятностные характеристики ошибки: математическое ожидание $m_e = M[E(t)]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_e = \sqrt{D_e}$.

Математическое ожидание ошибки называется *систематической ошибкой*, ее среднее квадратическое отклонение — *среднеквадратической ошибкой*. Анализ качества систем управления сводится к определению указанных ошибок по вероятностным характеристикам случайных внешних воздействий.

10.2.1. Преобразование случайных процессов линейными системами. Пусть на вход линейной системы с весовой функцией $w(t, \tau)$ подается случайный процесс $X(t)$ (рис. 10.1). По заданным математическому

$$\frac{X(t)}{x(t)} \rightarrow \boxed{w(t, \tau)} \rightarrow \frac{Y(t)}{y(t)}$$

Рис. 10.1. Прохождение случайного процесса через линейную систему

ожиданию $m_x(t)$ и корреляционной функции $K_x(t, t')$ входного сигнала найдем математическое ожидание $m_y(t)$ и корреляционную функцию $K_y(t, t')$ выходного сигнала $Y(t)$.

Переходный режим. Пусть когда на вход подается реализация $x(t)$, на выходе имеем $y(t)$ — реализацию случайного процесса $Y(t)$. Как известно из теории линейных систем, эти функции связаны соотношением

$$y(t) = \int_0^t w(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$

Точно так же связаны сами процессы $X(t)$ и $Y(t)$:

$$Y(t) = \int_0^t w(t, \tau) X(\tau) d\tau. \quad (10.6)$$

Математическое ожидание $m_y(t)$ и корреляционная функция $K_y(t, t')$ выходного сигнала связаны с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t, t')$ входного сигнала соотношениями

$$m_y(t) = \int_0^t w(t, \tau) m_x(\tau) d\tau, \quad (10.7a)$$

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} w(t, \tau_1) w(t', \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (10.7b)$$

В случае стационарной системы весовая функция зависит от одного аргумента, и формулы (10.7) принимают вид

$$m_y(t) = \int_0^t w(t - \tau) m_x(\tau) d\tau, \quad (10.8a)$$

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} w(t - \tau_1) w(t' - \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (10.8б)$$

Эти формулы легко выводятся. Действительно, учитывая, что операции математического ожидания и интегрирования можно переставлять местами, из (10.6) получаем

$$\begin{aligned} m_y(t) = M[Y(t)] &= M\left[\int_0^t w(t, \tau) X(\tau) d\tau\right] = \int_0^t w(t, \tau) M[X(\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^t w(t, \tau) m_x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Вычитая (10.7a) из (10.6), находим

$$\tilde{Y}(t) = \int_0^t w(t, \tau) \tilde{X}(\tau) d\tau, \quad (10.9)$$

где $\tilde{Y}(t) = Y(t) - m_y(t)$, $\tilde{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ — центрированные случайные процессы. Используя (10.9), получаем

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[\tilde{Y}(t) \tilde{Y}(t')] = M\left[\int_0^t w(t, \tau) \tilde{X}(\tau) d\tau \int_0^{t'} w(t', \tau) \tilde{X}(\tau) d\tau\right] = \\ &= \int_0^t \int_0^{t'} w(t, \tau_1) w(t', \tau_2) M[\tilde{X}(\tau_1) \tilde{X}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^t \int_0^{t'} w(t, \tau_1) w(t', \tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Справедливость формулы (10.7) доказана. Формулы (10.8) непосредственно получаются из (10.7).

Пример 10.1. На вход линейного звена с передаточной функцией $W(p) = 5/(p + 1)$ приложен случайный процесс с математическим ожиданием $m_x = 2$ и корреляционной функцией $K_x(\tau) = e^{-|\tau|}$. Требуется определить математическое ожидание и корреляционную функцию выходного сигнала.

Решение. Записав уравнение звена и решив его при единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях, найдем переходную функцию $h(t) = 5(1 - e^{-t})$. Продифференцировав ее, получим весовую функцию $w(t) = dh/dt = 5e^{-t}$. По формуле (10.8a) получим

$$m_y(t) = \int_0^t 5e^{-(t-\tau)} 2 d\tau = 10(1 - e^{-t}).$$

По формуле (10.86) получаем

$$\begin{aligned}
 K_y(t, t') &= 25 \int_0^t \int_0^{t'} e^{-(t-\tau_1)} e^{-(t'-\tau_2)} e^{-|\tau_1-\tau_2|} d\tau_1 d\tau_2 = \\
 &= 25 e^{-(t+t')} \int_0^t e^{\tau_1} \left[\int_0^{t'} e^{-|\tau_1-\tau_2|+\tau_2} d\tau_2 \right] d\tau_1 = \\
 &= 25 e^{-(t+t')} \int_0^t e^{\tau_1} \left[\int_0^{\tau_1} e^{-(\tau_1-\tau_2)+\tau_2} d\tau_2 + \int_{\tau_1}^{t'} e^{-(\tau_2-\tau_1)+\tau_2} d\tau_2 \right] d\tau_1 = \\
 &= \frac{25}{2} [(1+t'-t)e^{-(t'-t)} - (t+t'+1)e^{-(t+t')}] .
 \end{aligned}$$

Установившийся режим. При рассмотрении установившегося режима полагают, что входное воздействие подается при $t_0 = -\infty$, и формулу (10.6) записывают в виде

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t w(t, \tau) X(\tau) d\tau. \quad (10.10)$$

Формулы (10.8) для математического ожидания и корреляционной функции в случае стационарной системы в установившемся режиме принимают вид

$$m_y(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\tau) m_x(\tau) d\tau, \quad (10.11)$$

$$K_y(t, t') = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} w(t-\tau_1) w(t'-\tau_2) K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (10.12)$$

Если на вход устойчивой линейной стационарной системы подается стационарный случайный процесс в широком смысле, то на ее выходе в установившемся режиме устанавливается стационарный случайный процесс в широком смысле. Иначе говоря, в этом случае математическое ожидание выходного сигнала в установившемся режиме является постоянным, а корреляционная функция зависит от одного аргумента. Покажем это.

По условию имеем

$$m_x = \text{const}, \quad K_x(t, t') = K_x(t-t') = K_x(\tau).$$

В формуле (10.11) сделаем замену переменных $\tau' = t - \tau$. Тогда получим

$$m_y(t) = m_x \int_0^{\infty} w(\tau') d\tau'.$$

Так как линейная система устойчива, интеграл сходится и принимает конечное значение.

Формула (10.12) в данном случае принимает вид

$$K_y(t, t') = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} w(t - \tau_1) w(t' - \tau_2) K_x(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Сделаем замену переменных $\tau'_1 = t - \tau_1$ и $\tau'_2 = t - \tau_2$. Тогда последнее соотношение примет вид

$$K_y(t, t') = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(\tau'_1) w(\tau'_2) K_x(t - \tau'_1 + \tau'_2 - t') d\tau'_1 d\tau'_2 = K_y(t - t'),$$

или, если положить $t - t' = \tau$ и опустить штрих, вид

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(\tau_1) w(\tau_2) K_x(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = K_y(\tau). \quad (10.13)$$

Зависимость между спектральными плотностями выходного и входного сигналов в установившемся режиме. Если на вход устойчивой стационарной линейной системы с передаточной функцией $W(p)$ подается стационарный случайный сигнал с спектральной плотностью $S_x(\omega)$, то спектральная плотность $S_y(\omega)$ выходного сигнала в установившемся режиме связана со спектральной плотностью $S_x(\omega)$ соотношением

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (10.14)$$

В соответствии с формулой (10.3) для корреляционной функции выходного сигнала можем записать

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (10.15)$$

Так как $D_y = K_y(0)$, из последнего соотношения находим

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (10.16)$$

Получим формулу (10.14). В формулу (10.13) подставим выражение для корреляционной функции входного сигнала (см. (10.3))

$$K_x(\tau - \tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega(\tau - \tau_1 + \tau_2)} d\omega.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega(\tau - \tau_1 + \tau_2)} w(\tau_1) w(\tau_2) d\omega d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{-j\omega\tau} \left[\int_0^{\infty} w(\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_0^{\infty} w(\tau_2) e^{j\omega\tau_2} d\tau_2 \right] d\omega = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} W(j\omega) W(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Согласно формуле (10.3) имеем

$$K_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Сравнив правую часть этой формулы с правой частью предыдущего соотношения, получим формулу (10.14).

10.2.2. Анализ линейных систем в переходном режиме.

Выше были получены все расчетные формулы, которые необходимы для вычисления вероятностных характеристик случайных процессов, прошедших через линейную систему. Рассмотрим систему управления, представленную на рис. 10.2. Пусть задающее воздействие $G(t)$

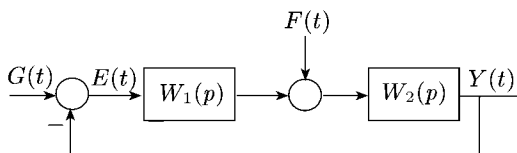


Рис. 10.2. К анализу систем при случайных воздействиях

и возмущение являются случайными процессами с известными математическими ожиданиями и корреляционными функциями. Определим систематическую и среднеквадратическую ошибки в переходном режиме. Учитывая, что среднеквадратическая ошибка равна корню квадратному из дисперсии, ограничимся вычислением последней.

Передаточные функции ошибки от задающего воздействия и от возмущения имеют соответственно вид

$$W_{eg}(p) = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)}, \quad W_{ef}(p) = \frac{-W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

По передаточной функции можно определить весовую функцию $w_{eg}(t)$ ошибки от задающего воздействия и весовую функцию $w_{ef}(t)$ от возмущения. В соответствии с формулой (10.6) можем записать

$$E_g(t) = \int_0^t w_{eg}(t - \tau) G(\tau) d\tau, \quad E_f(t) = \int_0^t w_{ef}(t - \tau) F(\tau) d\tau,$$

где $E_g(t)$ — ошибка от задающего воздействия ($F(t) = 0$), $E_f(t)$ — ошибка от возмущения ($G(t) = 0$). Здесь принимается, что система стационарна. Согласно принципу суперпозиции имеем

$$E(t) = E_g(t) + E_f(t) = \int_0^t w_{eg}(t - \tau) G(\tau) d\tau + \int_0^t w_{ef}(t - \tau) F(\tau) d\tau. \quad (10.17)$$

Отсюда для систематической ошибки получаем

$$M[E(t)] = M[E_g(t)] + M[E_f(t)] = \int_0^t w(t-\tau)M[G(\tau)]d\tau + \int_0^t w(t-\tau)M[F(\tau)]d\tau. \quad (10.18)$$

Если внешние воздействия не коррелированы, то дисперсия ошибки равна сумме дисперсий ошибок от задающего воздействия и от возмущения:

$$D_e = D_{eg} + D_{ef},$$

где $D_e = D[E(t)]$, $D_{eg} = D[E_g(t)]$, $D_{ef} = D[E_f(t)]$.

Действительно, из (10.17) имеем

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}_g(t) + \tilde{E}_f(t) = \int_0^t w(t-\tau)\tilde{G}(\tau)d\tau + \int_0^t w(t-\tau)\tilde{F}(\tau)d\tau.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} D_e &= M[\tilde{E}^2] = M[(\tilde{E}_g(t) + \tilde{E}_f(t))^2] = \\ &= M[\tilde{E}_g^2(t)] + 2M[\tilde{E}_g(t)\tilde{E}_f(t)] + M[\tilde{E}_f^2(t)] = M[\tilde{E}_g^2(t)] + M[\tilde{E}_f^2(t)], \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} M[\tilde{E}_g(t)\tilde{E}_f(t)] &= M\left[\int_0^t w(t-\tau)\tilde{G}(\tau)d\tau \int_0^t w(t-\tau)\tilde{F}(\tau)d\tau\right] = \\ &= \int_0^t \int_0^t w(t-\tau_1)w(t-\tau_2)M[\tilde{G}(\tau_1)\tilde{F}(\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2 = 0 \end{aligned}$$

в силу $M[\tilde{G}(\tau_1)\tilde{F}(\tau_2)] = 0$.

10.2.3. Анализ линейных систем в установившемся режиме. В соответствии с формулой (10.11) систематическая ошибка от задающего воздействия $m_{eg}(t)$ и систематическая ошибка от возмущения $m_{ef}(t)$ в установившемся режиме определяются следующим образом:

$$m_{eg}(t) = \int_{-\infty}^t w_{eg}(t-\tau)m_g(\tau)d\tau, \quad m_{ef}(t) = \int_{-\infty}^t w_{ef}(t-\tau)m_f(\tau)d\tau. \quad (10.19)$$

Систематическая ошибка $m_e(t)$, когда к системе приложены оба внешних воздействия, равна сумме этих ошибок:

$$m_e(t) = m_{eg}(t) + m_{ef}(t).$$

Как следует из формул (10.19), при вычислении систематических ошибок можно считать, что к системе приложены не случайные процессы, а детерминированные воздействия — их математические ожидания. Поэтому здесь, как и при рассмотрении детерми-

нированных систем, для вычисления систематических ошибок $m_{eg}(t)$ и $m_{ef}(t)$ можно воспользоваться коэффициентами ошибок. С помощью коэффициентов ошибок эти ошибки определяются следующим образом:

$$m_{eg}(t) = C_{g0}m_g(t) + C_{g1} \frac{dm_g(t)}{dt} + C_{g2} \frac{d^2m_g(t)}{dt^2} + \dots, \quad (10.20a)$$

$$m_{ef}(t) = C_{f0}m_f(t) + C_{f1} \frac{dm_f(t)}{dt} + C_{f2} \frac{d^2m_f(t)}{dt^2} + \dots, \quad (10.20б)$$

где коэффициенты ошибок от задающего воздействия C_{gi} и коэффициенты ошибок от возмущения C_{fi} определяются так [31]:

$$C_{g0} = W_{eg}(0), \quad C_{gi} = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_{eg}(s)}{ds^i} \right|_{s=0}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$C_{f0} = W_{ef}(0), \quad C_{fi} = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_{ef}(s)}{ds^i} \right|_{s=0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Если система астатическая, то коэффициенты ошибок до первого отличного от нуля коэффициента включительно можно определять по более простым формулам [31]

$$C_{gi} = \frac{W_{eg}(s)}{s^i} \Big|_{s=0}, \quad C_{fi} = \frac{W_{ef}(s)}{s^i} \Big|_{s=0}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (10.21)$$

Пример 10.2. Дана система (см. рис. 10.2) с передаточными функциями

$$W_1 = \frac{0,5(2p+1)}{p}, \quad W_2 = \frac{2}{p+1}.$$

Задающее воздействие $g(t) = 0,1t$, возмущение является стационарным случайным процессом с математическим ожиданием $m_f = 2$.

Требуется определить систематическую ошибку в установившемся режиме.

Решение. Так как вторая и более высокие производные от задающего воздействия и все производные от математического ожидания возмущения равны нулю, то формулы (10.20) принимают вид

$$m_{eg} = C_{g0}g(t) + C_{g1} \frac{dg}{dt}, \quad m_{ef} = C_{f0}m_f.$$

Так как W_1 содержит одно интегрирующее звено (множитель $1/p$), система является астатической с астатизмом первого порядка как относительно задающего воздействия, так и относительно возмущения. Поэтому первые коэффициенты ошибок равны нулю: $C_{g0} = 0$, $C_{f0} = 0$. Осталось вычислить коэффициент C_{g1} . Передаточная функция ошибки относительно задающего воздействия имеет вид

$$W_{eg}(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{s(s+1)}{s(s+1) + 0,5(2s+1)}.$$

Так как $C_{g0} = 0$, коэффициент C_{g1} можно вычислять по формуле (10.21):

$$C_{g1} = \frac{(s+1)}{s(s+1) + 0,5(2s+1)} \Big|_{s=0} = 2.$$

Таким образом, находим

$$m_{eg} = 2 \cdot 0,1 = 0,2, \quad m_{ef} = 0, \quad m_e = m_{eg} + m_{2f} = 0,2.$$

Среднеквадратическая ошибка. Ограничимся случаем, когда внешние воздействия стационарны и не коррелированы, а линейная система стационарна. Согласно формуле (10.16) дисперсии ошибок от задающего воздействия D_{eg} и возмущения D_{ef} принимают вид

$$D_{eg} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{eg}(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega, \quad D_{ef} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{ef}(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega,$$

или, в силу четности подынтегрального выражения,

$$D_{eg} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W_{eg}(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega, \quad D_{ef} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W_{ef}(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega. \quad (10.22)$$

Если внешние воздействия не коррелированы, то дисперсия ошибки, как было показано выше, равна сумме дисперсий D_{eg} и D_{ef} :

$$D_e = D_{eg} + D_{ef}.$$

И соответственно формула для вычисления среднеквадратической ошибки принимает вид

$$\sigma_e = \sqrt{D_{eg} + D_{ef}}.$$

Если передаточные функции и спектральные плотности внешних воздействий представляют дробно-рациональные функции, то каждый из интегралов (10.22) можно представить в виде

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{b_0(j\omega)^{n-1} + b_1(j\omega)^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} \right|^2 d\omega.$$

Как известно, такие интегралы выражаются через коэффициенты полиномов подынтегрального выражения и для $n = 1, 2, 3$ имеют вид [31]

$$I_1 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1}, \quad I_2 = \frac{b_0^2a_2 + a_0b_1^2}{2a_0a_1a_2}, \quad (10.23a)$$

$$I_3 = \frac{b_0^2a_2a_3 + a_0a_3(b_1^2 - 2b_0b_2) + a_0a_1b_2^2}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}. \quad (10.23b)$$

Пример 10.3. Дана система (см. рис. 10.2) с передаточными функциями

$$W_1 = \frac{0,5(2p+1)}{p}, \quad W_2 = \frac{2}{p+1}.$$

Задающее воздействие $g(t) = 0,1t$, возмущение является стационарным случайным процессом с математическим ожиданием $m_f = 2$

и корреляционной функцией $K_f(\tau) = \beta e^{-\alpha|\tau|}$. Требуется определить среднеквадратическую ошибку в установившемся режиме.

Решение. Так как задающее воздействие является детерминированной функцией, то дисперсия ошибки от задающего воздействия равна нулю: $D_{eg} = 0$. Поэтому дисперсия ошибки D_e определяется из соотношения $D_e = D_{ef}$. Чтобы воспользоваться формулой

$$D_{ef} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W_{ef}(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega,$$

необходимо определить спектральную плотность возмущения $S_f(\omega)$. Так как спектральная плотность получается двусторонним преобразованием Фурье корреляционной функции, то имеем (см. (10.2))

$$\begin{aligned} S_f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \beta e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 \beta e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} \beta e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha - j\omega} e^{(\alpha - j\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0 - \\ &\quad - \frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)\tau} \Big|_0^{\infty} = \beta \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

или

$$S_f(\omega) = \beta \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \left| \frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{j\omega + \alpha} \right|^2.$$

Определим передаточную функцию ошибки относительно возмущения:

$$W_{ef}(s) = \frac{-W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{-2s}{s^2 + 3s + 1}.$$

Подставив выражения для $W_{ef}(j\omega)$ и $S_f(\omega)$ в формулу для дисперсии, найдем

$$\begin{aligned} D_e = D_{ef} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W_{ef}(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{2\sqrt{2\alpha\beta}s}{(j\omega)^3 + (3 + \alpha)(j\omega)^2 + (3\alpha + 1)j\omega + \alpha} \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$

При дальнейших расчетах примем $\beta = 2$ и $\alpha = 1$. Подставив эти значения, получим

$$D_e = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{4j\omega}{(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 4j\omega + 1} \right|^2 d\omega.$$

Справа мы имеем интеграл I_3 с коэффициентами подынтегральных полиномов

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 4, \quad b_2 = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 1.$$

По формуле (10.236) находим

$$I_3 = \frac{b_0^2 a_2 a_3 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_0 a_1 b_2^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{8}{15}.$$

Следовательно, среднеквадратическая ошибка равна $\sqrt{8/15}$.

10.2.4. Синтез параметров системы по минимуму среднеквадратической ошибки. Рассмотрим линейную стационарную систему, у которой не все параметры фиксированы, внешние случайные воздействия стационарны, а на параметры могут быть наложены ограничения. Пусть требуется определить варьируемые (нефиксированные) параметры, доставляющие минимум среднеквадратической ошибке в установившемся режиме. В этом случае среднеквадратическая ошибка будет функцией варьируемых параметров, и задача синтеза в общем случае сводится к задаче на условный минимум этой функции — к определению ее минимума при наличии ограничений на варьируемые параметры.

Пример 10.4. Дана система (см. рис. 10.2) с передаточными функциями

$$W_1 = \frac{k}{Ts + 1}, \quad W_2 = \frac{1}{s}.$$

Задающее воздействие представляет собой смесь полезного сигнала и помехи и имеет вид

$$G(t) = g(t) + N(t),$$

где помеха $N(t)$ — белый шум с нулевым средним значением и с интенсивностью N_0 ($K_n(\tau) = N_0 \delta(\tau)$); $g(t) = 0,1t$ — полезный сигнал, который нужно воспроизводить; возмущение $F(t)$ отсутствует ($F(t) = 0$).

Требуется определить параметры k и T , при которых систематическая ошибка не превышает 0,01 ($|m_e| \leq 0,01$) и среднеквадратическая ошибка в установившемся режиме принимает минимальное значение.

Решение. Найдем систематическую ошибку m_e . Для этого сначала определим среднее значение (математическое ожидание) входного сигнала:

$$m_g(t) = M[G(t)] = g(t) = 0,1t.$$

Передаточная функция ошибки имеет вид

$$W_{eg}(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + k}.$$

Отсюда для первых двух коэффициентов ошибки находим

$$C_{g0} = W_{eg}(0) = 0, \quad C_{g1} = \left. \frac{W_{eg}(s)}{s} \right|_{s=0} = \frac{1}{k}.$$

Систематическая ошибка в данном случае вычисляется следующим образом:

$$m_e = C_{g0}g(t) + C_{g1} \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{k} 0,1.$$

Параметр k должен удовлетворять условию

$$|m_e| = \frac{0,1}{k} \leq 0,01,$$

или $k \geq 10$.

Найдем теперь дисперсию ошибки. Спектральная плотность внешнего воздействия равна спектральной плотности помехи $N(t)$:

$$S_n(\omega) = N_0.$$

Так как помеха приложена в одной точке с задающим воздействием, то передаточная функция ошибки по помехе равна $-W_{yg}(s)$ [31]. Здесь

$$W_{yg}(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1) + k}.$$

Согласно формулам (10.22) для искомой дисперсии D_e имеем

$$D_e = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W_{yg}(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{k}{T(j\omega)^2 + j\omega + k} \right| N_0 d\omega = N_0 I_2,$$

где I_2 определяется согласно второй формуле из (10.23а) со следующими коэффициентами:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = k, \quad a_0 = T, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = k.$$

Подставив эти коэффициенты в указанную формулу, получим

$$I_2 = \frac{Tk^2}{2Tk} = \frac{k}{2}.$$

Следовательно, среднеквадратическая ошибка принимает вид

$$\sigma_e = \sqrt{D_e} = \sqrt{\frac{N_0 k}{2}}$$

и достигает минимума при полученном выше ограничении на k при $k = 10$. От параметра T среднеквадратическая ошибка не зависит, и он может быть выбран произвольно.

10.3. Винеровская задача оптимальной фильтрации

Как следует из предыдущей главы, для управления с обратной связи необходимо прежде всего получить оценку фазовых координат, которые входят в закон управления. В системах управления, подверженных случайным воздействиям, получение такой оценки связано с решением задачи фильтрации. В этом параграфе рассмотрим ставшую классической теорию оптимальной фильтрации Н. Винера.

10.3.1. Постановка винеровской задачи оптимальной фильтрации. Пусть наблюдается случайный процесс $X(t)$, представляющий сумму полезного сигнала $S(t)$ и помехи (шума) $N(t)$:

$$X(t) = S(t) + N(t).$$

По данным его наблюдения на интервале времени $[t_0, t]$ нужно получить оценку полезного сигнала в момент t' . При этом возможны три случая: 1) $t_0 < t' < t$; 2) $t' = t$; 3) $t' > t$.

В соответствии с этими тремя случаями могут быть рассмотрены три различные задачи.

Задача получения оценки $\hat{S}(t')$ полезного сигнала в момент t' в случае 1) называется *задачей интерполяции* или *задачей сглаживания*, в случае 2) — *задачей фильтрации* и в случае 3) — *задачей экстраполяции* или *задачей упреждения*.

Здесь рассматривается только задача фильтрации.

Рассмотрим точную формулировку винеровской задачи оптимальной фильтрации. Пусть случайный процесс $X(t) = S(t) + N(t)$ наблюдается на интервале $(-\infty, t]$, а $S(t)$, $N(t)$ — стационарные и стационарно связанные случайные процессы. Известны корреляционная функция наблюдаемого (входного) сигнала $K_x(\tau)$ и взаимная корреляционная функция входного и полезного сигналов $K_{xs}(\tau)$. Требуется определить линейную систему, выдающую на выходе оценку $\hat{S}(t)$, оптимальную в смысле минимума среднеквадратической ошибки, или, что то же, минимума дисперсии:

$$J = M[\tilde{E}^2] \rightarrow \min.$$

Здесь $\tilde{E}$ — центрированная ошибка оценки $E(t) = S(t) - \hat{S}(t)$.

Линейная система, которая получается в результате решения этой задачи, называется *фильтром Винера* или *оптимальным фильтром Винера*.

10.3.2. Уравнение Винера–Хопфа.

Теорема 10.1. Для того чтобы $w(t)$ была весовой функцией оптимального фильтра, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\int_0^{\infty} K_x(\tau - \lambda)w(\lambda) d\lambda = K_{xs}(\tau), \quad (10.24)$$

которое называется *уравнением Винера–Хопфа*.

Доказательство. Так как среднеквадратическая ошибка и дисперсия не зависят от математического ожидания, то, не нарушая общности, положим $M[S(t)] = 0$ и $M[N(t)] = 0$. Оценку $\hat{S}(t)$ на выходе линейного фильтра представим с помощью его весовой функции $w(t)$:

$$\hat{S}(t) = \int_{-\infty}^t w(t - \lambda)X(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} w(\lambda)X(t - \lambda) d\lambda.$$

Так как ошибка оценки при этом принимает вид

$$E(t) = S(t) - \hat{S}(t) = S(t) - \int_0^{\infty} w(\lambda)X(t - \lambda) d\lambda,$$

то для критерия оптимальности получаем

$$\begin{aligned}
 J = M[E^2(t)] &= M \left[S^2(t) - 2 \int_0^\infty w(\lambda) S(t) X(t - \lambda) d\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty w(\lambda) w(\lambda') X(t - \lambda) X(t - \lambda') d\lambda d\lambda' \right] = \\
 &= K_s(0) - 2 \int_0^\infty w(\lambda) K_{sx}(\lambda) d\lambda + \int_0^\infty \int_0^\infty w(\lambda) w(\lambda') K_x(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda'.
 \end{aligned}$$

Необходимость. Введем в рассмотрение весовую функцию

$$w_\alpha(t) = w^*(t) + \alpha r(t),$$

где $w^*(t)$ — весовая функция оптимального фильтра (оптимальная весовая функция), α — параметр, $r(t)$ — произвольная непрерывная функция. Подставим это выражение для весовой функции в полученное выше выражение для критерия оптимальности:

$$\begin{aligned}
 J(\alpha) &= K_s(0) - 2 \int_0^\infty [w^*(\lambda) + \alpha r(\lambda)] K_{sx}(\lambda) d\lambda + \\
 &\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty [w^*(\lambda) + \alpha r(\lambda)][w^*(\lambda') + \alpha r(\lambda')] K_x(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda'. \quad (10.25)
 \end{aligned}$$

Критерий является функцией от скалярного параметра и достигает минимума при $\alpha = 0$. Поэтому необходимо, чтобы его производная по этому параметру обращалась в нуль в точке $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= -2 \int_0^\infty r(\lambda) K_{sx}(\lambda) d\lambda + \int_0^\infty \int_0^\infty r(\lambda) w^*(\lambda') K_x(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' + \\
 &\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty w^*(\lambda) r(\lambda') K_x(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' = 0.
 \end{aligned}$$

Два последних интеграла равны. Поэтому полученное соотношение можно преобразовать к виду

$$\left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 2 \int_0^\infty r(\lambda) \left[-K_{sx}(\lambda) + \int_0^\infty w^*(\lambda') K_x(\lambda - \lambda') d\lambda' \right] d\lambda = 0.$$

При произвольной функции $r(t)$ последнее равенство возможно, если выражение в квадратных скобках обращается в нуль, т.е. если выполняется уравнение Винера–Хопфа. Необходимость доказана.

Достаточность. Положив в (10.25) $\alpha = 0$, находим

$$\begin{aligned}
 J^* = J(0) &= K_s(0) - 2 \int_0^\infty w^*(\lambda) K_{sx}(\lambda) d\lambda + \\
 &\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty [w^*(\lambda) w^*(\lambda')] K_x(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda'. \quad (10.26)
 \end{aligned}$$

Раскрыв в (10.25) квадратные скобки, получим

$$\begin{aligned}
 J(\alpha) = & K_s(0) - 2 \int_0^\infty w^*(\lambda) K_{sx}(\lambda) d\lambda - 2\alpha \int_0^\infty r(\lambda) K_{sx}(\lambda) d\lambda + \\
 & + \int_0^\infty \int_0^\infty [w^*(\lambda) w^*(\lambda') K_x(\lambda - \lambda')] d\lambda d\lambda' + \\
 & + 2\alpha \int_0^\infty \int_0^\infty [w^*(\lambda) r(\lambda')] K_x(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' + \\
 & + \alpha^2 \int_0^\infty \int_0^\infty [r(\lambda) r(\lambda') K_x(\lambda - \lambda')] d\lambda d\lambda'.
 \end{aligned}$$

Учитывая (10.26), последнее соотношение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 J(\alpha) = & J^* + 2\alpha \int_0^\infty r(\lambda) [-K_{sx}(\lambda) + \int_0^\infty w^*(\lambda) K_x(\lambda - \lambda')] d\lambda d\lambda' + \\
 & + M \left[\alpha \int_0^\infty r(\lambda) X(\lambda) d\lambda \right]^2.
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части в силу уравнения Винера–Хопфа обращается в нуль. Поэтому последнее соотношение можно представить в виде

$$J^* = J(\alpha) - M \left[\alpha \int_0^\infty r(\lambda) X(\lambda) d\lambda \right]^2.$$

Отсюда следует неравенство $J^* \leq J(\alpha)$. Достаточность доказана.

Дальше при решении уравнения Винера–Хопфа потребуются понятия формирующего фильтра.

10.3.3. Формирующий фильтр. *Формирующим фильтром* называется звено, формирующее из белого шума случайный процесс с заданной спектральной плотностью.

Пусть на вход устойчивого линейного стационарного звена (фильтра) подается белый шум $V(t)$ с единичной интенсивностью (рис. 10.3):

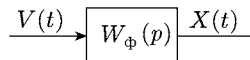


Рис. 10.3. Формирующий фильтр

$$K_v(\tau) = \delta(\tau), \quad S_v(\omega) = 1.$$

В установившемся режиме выходной сигнал $X(t)$ будет стационарным, и его спектральная плотность будет связана с спектральной плотностью входного сигнала соотношением

$$S_x(\omega) = |W_\Phi(j\omega)|^2 S_v(\omega) = |W_\Phi(j\omega)|^2.$$

Отсюда следует: чтобы сформировать стационарный случайный процесс с заданной спектральной плотностью $S_x(\omega)$, которую можно

представить в виде

$$S_x(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega) = |\psi(j\omega)|^2, \quad (10.27)$$

где все полюсы функции $\psi(s)$ расположены в левой полуплоскости, достаточно принять передаточную функцию фильтра $W_\Phi(s)$, равной $\psi(s)$:

$$W_\Phi(s) = \psi(s).$$

Как мы увидим далее, важно, чтобы не только полюсы, но и нули функции $\psi(s)$ располагались в левой полуплоскости.

Представление функции $S_x(\omega)$ в виде (10.27) называется ее *факторизацией*.

Факторизация спектральной плотности. В простейших случаях факторизация спектральной плотности и нахождение передаточной функции формирующего фильтра не представляет труда. Например, случайный процесс с корреляционной функцией $K_x(\tau) = \beta e^{-\alpha|\tau|}$, как было показано в примере 10.3, имеет спектральную плотность

$$S_f(\omega) = \beta \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

которая может быть представлена в виде

$$S_f(\omega) = \left| \frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{j\omega + \alpha} \right|^2.$$

Поэтому передаточная функция формирующего фильтра такого процесса будет иметь вид

$$W_\Phi(s) = \frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{s + \alpha}.$$

В более сложных случаях можно воспользоваться общим методом факторизации.

Пусть спектральная плотность $S_x(\omega)$ является дробно-рациональной функцией:

$$S_x(\omega) = \frac{H(\omega)}{G(\omega)},$$

где $H(\omega)$, $G(\omega)$ — полиномы от ω , а дисперсия конечна:

$$D_x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega < \infty. \quad (10.28)$$

Спектральная плотность $S_x(\omega)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $S_x(\omega)$ — четная функция, причем полиномы $H(\omega)$, $G(\omega)$ содержат только четные степени ω ;
- 2) в силу условия (10.28) ($S_x(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$) степень полинома $H(\omega)$ строго меньше степени полинома $G(\omega)$;
- 3) в силу (10.28) уравнение $G(\omega) = 0$ не имеет действительных корней;
- 4) корни уравнений $H(\omega) = 0$ и $G(\omega) = 0$ расположены симметрично относительно обеих осей системы координат.

Пусть полиномы $H(\omega)$ и $G(\omega)$ имеют вид

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \beta_0 \omega^{2m} + \beta_1 \omega^{2(m-1)} + \dots + \beta_m, \\ G(\omega) &= \alpha_0 \omega^{2n} + \alpha_1 \omega^{2(n-1)} + \dots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Разложим их на элементарные множители и представим спектральную плотность в виде

$$S_x(\omega) = \frac{\sqrt{\beta_0} H_+ \sqrt{\beta_0} H_-}{\sqrt{\alpha_0} G_+ \sqrt{\alpha_0} G_-} = \frac{(j)^m \sqrt{\beta_0} H_+ (-j)^m \sqrt{\beta_0} H_-}{(j)^n \sqrt{\alpha_0} G_+ (-j)^n \sqrt{\alpha_0} G_-}, \quad (10.29)$$

где H_+ , G_+ — произведения элементарных множителей, соответствующих корням уравнений $H(\omega) = 0$ и $G(\omega) = 0$, расположенным в верхней полуплоскости; H_- , G_- — произведения элементарных множителей, соответствующих корням уравнений $H(\omega) = 0$ и $G(\omega) = 0$, расположенным в нижней полуплоскости.

Положим

$$P(j\omega) = (j)^m \sqrt{\beta_0} H_+, \quad Q(j\omega) = (j)^n \sqrt{\alpha_0} G_+. \quad (10.30a)$$

Тогда имеют место следующие равенства:

$$P(-j\omega) = (-j)^m \sqrt{\beta_0} H_-, \quad Q(-j\omega) = (-j)^n \sqrt{\alpha_0} G_-. \quad (10.30б)$$

Действительно, пусть $\alpha + j\beta$ ($\alpha \geq 0$, $\beta > 0$) — один из корней уравнения $H(\omega) = 0$. Тогда его корнями будут также $-\alpha - j\beta$, $\alpha - j\beta$ и $-\alpha + j\beta$. Этим корням будут соответствовать следующие множители в полиномах H_+ и H_- :

$$\begin{aligned} H_+ &: [\omega - (\alpha + j\beta)][\omega - (-\alpha + j\beta)]; \\ H_- &: [\omega - (\alpha - j\beta)][\omega - (-\alpha - j\beta)]. \end{aligned}$$

Этим множителям в выражениях $(j)^m H_+$ и $(-j)^m H_-$ соответствуют следующие множители:

$$\begin{aligned} (j)^m H_+ &: j[\omega - (\alpha + j\beta)]j[\omega - (-\alpha + j\beta)] = \\ &= [j(\omega - \alpha) + \beta][j(\omega + \alpha) + \beta]; \\ (-j)^m H_- &: (-j)[\omega - (\alpha - j\beta)](-j)[\omega - (-\alpha - j\beta)] = \\ &= [-j(\omega - \alpha) + \beta][-j(\omega + \alpha) + \beta]. \end{aligned}$$

Правые части приведенных двух соотношений являются комплексно-сопряженными выражениями.

Итак, используя обозначения (10.30), соотношение (10.29) можно представить в виде

$$S_x(\omega) = \frac{P(j\omega)P(-j\omega)}{Q(j\omega)Q(-j\omega)} = \left| \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2.$$

Отсюда для передаточной функции формирующего звена получаем

$$W_\Phi(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Заметим, что корням уравнений $H(\omega) = 0$ и $G(\omega) = 0$, расположенным в верхней полуплоскости на плоскости корней ω , на плоскости $s = j\omega$ соответствуют левые корни. Поэтому в соответствии с построением полиномов $P(s)$ и $Q(s)$ все нули и полюсы передаточной функции формирующего фильтра располагаются в левой полуплоскости.

Пример 10.5. Определить передаточную функцию формирующего фильтра для стационарного случайного процесса со спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{\omega^2 + b^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} \quad (b > 0).$$

Решение. В данном случае нулями спектральной плотности являются $\omega_1 = jb$, $\omega_2 = -jb$; полюсами являются $\omega_1 = j$, $\omega_2 = -j$, $\omega_3 = j$, $\omega_4 = -j$. Поэтому имеем

$$H_+ = \omega - jb, \quad P(j\omega) = j(\omega - jb) = j\omega + b, \\ G_+ = (\omega - j)^2, \quad Q(j\omega) = j^2(\omega - j)^2 = (j\omega + 1)^2.$$

Передаточная функция формирующего фильтра есть $W(s) = (s + b)/((s + 1)^2)$.

10.3.4. Фильтр Винера. Передаточная функция оптимального фильтра (фильтра Винера) имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{1}{W_\Phi(j\omega)} \left[\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\Phi(-j\omega)} \right]_+, \quad (10.31)$$

где $W_\Phi(j\omega)$ — частотная передаточная функция формирующего фильтра входного сигнала $X(t) = S(t) + N(t)$; $S_{xs}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность входного и полезного сигналов; $[\dots]_+$ — выражение, которое получается, если в разложении на простые дроби дробно-рациональной функции, заключенной в квадратные скобки, исключить те слагаемые, полюсы которых расположены в нижней полуплоскости на комплексной плоскости ω или в правой полуплоскости на комплексной плоскости $s = j\omega$.

Прежде чем доказать формулу (10.31), рассмотрим пример.

Пример 10.6. Принимаемый сигнал $X(t)$ представляет сумму полезного сигнала $S(t)$ и помехи $N(t)$:

$$X(t) = S(t) + N(t).$$

Корреляционные функции полезного сигнала и помехи имеют вид

$$K_s(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad K_n(\tau) = N_0 \delta(\tau),$$

полезный сигнал и шум не коррелированы.

Определить передаточную функцию фильтра Винера.

Решение. В соответствии с формулой (10.31) для определения искомой передаточной функции необходимо знать передаточную функцию формирующего фильтра принимаемого (входного) сигнала $W_\Phi(s)$

и взаимную спектральную плотность входного и полезного сигналов $S_{xs}(\omega)$. Так как полезный сигнал и помеха не коррелированы, имеем

$$K_x(\tau) = K_s(\tau) + K_n(\tau), \quad S_x(\omega) = S_s(\omega) + S_n(\omega).$$

Спектральные плотности полезного сигнала и помехи имеют вид

$$S_s(\omega) = \sigma^2 \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}, \quad S_n(\omega) = N_0.$$

Подставив эти выражения в приведенную выше формулу для $S_x(\omega)$, получим

$$S_x(\omega) = \frac{N_0(\beta^2 + \omega^2)}{\alpha^2 + \omega^2},$$

или

$$S_x(\omega) = \left| \frac{\sqrt{N_0}(\beta + j\omega)}{\alpha + j\omega} \right|^2,$$

где $\beta^2 = 2\sigma^2\alpha/N_0 + \alpha^2$. Из последнего соотношения находим

$$W_\Phi(j\omega) = \frac{\sqrt{N_0}(\beta + j\omega)}{\alpha + j\omega}.$$

Найдем взаимную корреляционную функцию входного и полезного сигналов:

$$K_{xs}(\tau) = M[\tilde{X}(t)\tilde{S}(t + \tau)] = M[(\tilde{S}(t) + \tilde{N}(t))\tilde{S}(t + \tau)] = K_s(\tau).$$

Отсюда следует

$$S_{xs}(\omega) = S_s(\omega) = \sigma^2 \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

Теперь найдем выражение, заключенное в квадратные скобки в формуле для оптимального фильтра (10.31):

$$\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\Phi(-j\omega)} = \frac{2\alpha\sigma^2(\alpha - j\omega)}{(\omega^2 + \alpha^2)\sqrt{N_0}(\beta - j\omega)} = \frac{2\alpha\sigma^2}{(j\omega + \alpha)\sqrt{N_0}(\beta - j\omega)}.$$

Далее, разложив правую часть методом неопределенных коэффициентов на элементарные дроби, находим

$$\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\Phi(-j\omega)} = \frac{2\alpha\sigma^2}{\sqrt{N_0}(\alpha + \beta)} \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\beta - j\omega} \right).$$

Отбросив вторую элементарную дробь, полюс которой расположен в нижней полуплоскости на плоскости ω , получим

$$\left[\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\Phi(-j\omega)} \right]_+ = \frac{2\alpha\sigma^2}{\sqrt{N_0}(\alpha + \beta)} \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Подставив это выражение и выражение для передаточной функции формирующего фильтра в (10.31), найдем искомую передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1},$$

где

$$T = \frac{1}{\beta}, \quad k = \frac{2\alpha\sigma^2}{N_0\beta(\alpha + \beta)}.$$

Вывод формулы (10.31). Представим оптимальный фильтр в виде соединения двух звеньев (рис. 10.4): обратного фильтра $W_{\Phi}^{-1}(p)$, преобразующего входной сигнал $X(t) = S(t) + N(t)$ в белый шум $V(t)$ с единичной интенсивностью:

$$\begin{array}{c} X(t) \rightarrow \boxed{W_{\Phi}^{-1}} \rightarrow V(t) \rightarrow \boxed{W_1} \rightarrow \widehat{S}(t) \\ V(t) = W_{\Phi}^{-1}(p)X(t), \end{array}$$

Рис. 10.4. Структурное представление оптимального фильтра

и звена с передаточной функцией $W_1(p)$, которую предстоит определить.

Пусть входной сигнал представляет собой белый шум: $X(t) = V(t)$. Тогда, так как $K_x(\tau) = \delta(\tau)$ и весовая функция фильтра Винера $w(t) = w_1(t)$, уравнение Винера–Хопфа (10.24)

$$\int_0^{\infty} K_x(\tau - \lambda)w(\lambda) d\lambda = K_{xs}(\tau)$$

принимает вид

$$\int_0^{\infty} \delta(\tau - \lambda)w_1(\lambda) d\lambda = K_{vs}(\tau),$$

или

$$w_1(\tau) = K_{vs}(\tau).$$

В связи с тем, что передаточная функция связана с весовой функцией преобразованием Лапласа, из последнего равенства получаем

$$W_1(s) = \int_0^{\infty} K_{vs}(\tau)e^{-s\tau} d\tau. \quad (10.32)$$

Таким образом, $W_1(s)$ есть передаточная функция фильтра Винера, когда входной сигнал является белым шумом с единичной интенсивностью. Как следует из структурной схемы (см. рис. 10.4), в общем случае, когда входной сигнал не является белым шумом, передаточная функция оптимального фильтра определяется по формуле

$$W(s) = W_{\Phi}^{-1}(s)W_1(s). \quad (10.33)$$

Следовательно, решение уравнения Винера–Хопфа сводится к определению передаточной функции формирующего звена входного сигнала и вычислению интеграла (10.32).

В соотношение (10.32) входит корреляционная функция $K_{vs}(\tau)$, которая не задана. Найдём ее, основываясь на корреляционной функции $K_{xs}(\tau)$. Положим $\widetilde{W}(s) = W_{\Phi}^{-1}(s)$. Тогда имеем (см. рис. 10.4)

$$V(t) = \int_0^{\infty} \widetilde{w}(\lambda)X(t - \lambda) d\lambda.$$

Умножим обе части на $S(t + \tau)$ и выполним операцию математического ожидания:

$$K_{vs}(\tau) = \int_0^{\infty} \widetilde{w}(\lambda)K_{xs}(\tau + \lambda) d\lambda.$$

Подставив в это равенство взаимную корреляционную функцию

$$K_{xs}(\tau + \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xs}(\omega) e^{(\tau + \lambda)/j\omega} d\omega$$

и поменяв порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} K_{vs}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xs}(\omega) e^{j\omega\tau} \int_0^{\infty} \tilde{w}(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xs}(\omega) e^{j\omega\tau} \widetilde{W}(-j\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая $\widetilde{W}(j\omega) = W_{\Phi}^{-1}(j\omega)$, последнее соотношение можно записать в виде

$$K_{vs}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{xs}(\omega)}{W_{\Phi}(-j\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Подставим это выражение в (10.32):

$$W_1(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{xs}(\omega)}{W_{\Phi}(-j\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega d\tau.$$

Таким образом, передаточная функция оптимального фильтра имеет вид (см. (10.33))

$$W(s) = \frac{1}{2\pi W_{\Phi}(s)} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{xs}(\omega)}{W_{\Phi}(-j\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega d\tau.$$

Если $S_{xs}(\omega)/W_{\Phi}(-j\omega)$ — дробно-рациональная функция, то двойной интеграл вычисляется (с помощью теории вычетов) в конечном виде, и передаточная функция оптимального фильтра принимает вид (10.31).

10.4. Фильтры Калмана–Бьюси

При получении фильтра Винера предполагалось, что оценка получается на основе наблюдения на бесконечном отрезке времени, что является ограничительным условием применительно к задачам управления. Фильтр Калмана–Бьюси, который будет рассмотрен в этом параграфе, позволяет получать оценку фазовых координат на основе наблюдения выхода системы на конечном интервале времени $[t_0, t]$.

10.4.1. Задача оптимальной фильтрации при белых шумах.

Постановка задачи. Дана управляемая система

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (10.34a)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + \mathbf{V}_n(t), \quad (10.34б)$$

где A, B, C в общем случае являются функциями времени, $\mathbf{x}^0$ — случайная величина и $\mathbf{V}_0(t), \mathbf{V}_n(t)$ — белые шумы с вероятностными характеристиками

$$\begin{aligned} M[\mathbf{x}^0] &= \bar{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0, \\ M[\mathbf{V}_0(t)] &= \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'), \\ M[\mathbf{V}_n(t)] &= \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_n(t)\mathbf{V}_n^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t'), \\ M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_n^T(t')] &= S_0(t)\delta(t - t'); \end{aligned}$$

Q_0, P_0 — положительно полуопределенные матрицы; R_0 — положительно определенная матрица; случайная величина $\mathbf{x}^0$ не коррелирована с шумами $\mathbf{V}_0(t)$ и $\mathbf{V}_n(t)$.

Требуется на основе наблюдения выхода $y(t)$ на интервале $[t_0, t]$ определить несмещенную линейную оценку $\hat{\mathbf{x}}(t)$ фазового вектора $\mathbf{x}(t)$, обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки:

$$J = M[(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))^T(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))] \rightarrow \min_{\hat{\mathbf{x}}(t)}. \quad (10.34\text{в})$$

Напомним: оценка $\hat{\mathbf{x}}(t)$ называется *несмещенной*, если $M[\hat{\mathbf{x}}(t)] = M[\mathbf{x}(t)]$.

Условие положительной определенности матрицы R_0 (матрицы интенсивности шума наблюдения) означает, что ни одна компонента выхода $y(t)$ не измеряется точно. И в этом случае задача оценивания называется *несингулярной (невыврожденной)* [29]. Таким образом, задача (10.34) является несингулярной задачей оптимального оценивания (фильтрации).

Уравнение (10.34а) называют *уравнением объекта*, уравнение (10.34б) — *уравнением наблюдения*. Шум $V_0(t)$ называют *шумом объекта*, шум $V_n(t)$ — *шумом наблюдения*.

Теорема 10.2. Если шумы объекта и наблюдения не коррелированы ($S_0(t) \equiv 0$), то оценка $\hat{\mathbf{x}}(t)$ является несмещенной и оптимальной в том случае, когда она находится из уравнения

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}^0, \quad (10.35\text{а})$$

с матрицей коэффициентов усиления

$$K^0 = PC^T R_0^{-1}, \quad (10.35\text{б})$$

где P определяется из уравнения

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0, \quad P(t_0) = P_0. \quad (10.35\text{в})$$

Матрица P является дисперсионной матрицей ошибки $\mathbf{e} = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$:

$$P = M[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)];$$

уравнение (10.35в), которому она удовлетворяет, называется *дисперсионным уравнением*.

Теорема 10.3. Если шумы объекта и наблюдения коррелированы ($S_0(t) \neq 0$), то оценка $\hat{x}(t)$ является несмещенной и оптимальной в том случае, когда она находится из уравнения (10.35а) с матрицей коэффициентов усиления

$$K^0 = (PC^T + S_0)R_0^{-1}, \quad (10.36а)$$

где дисперсионная матрица P определяется из уравнения

$$\dot{P} = (A - S_0 R_0^{-1} C)P + P(A - S_0 R_0^{-1} C)^T - \\ - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0 - S_0 R_0^{-1} S_0^T, \quad P(t_0) = P_0. \quad (10.36б)$$

Несингулярная задача оптимальной фильтрации (10.34) при некоррелированных шумах впервые была решена Р. Калманом и Р. Бьюси. Поэтому фильтры (10.35) и (10.35а), (10.36), а также другие фильтры, которые будут рассмотрены в этом параграфе, называют *фильтрами (наблюдателями) Калмана-Бьюси*.

Сравнивая уравнения фильтра Калмана-Бьюси (10.35а) и уравнение объекта (10.34а), замечаем, что они отличаются последними слагаемыми: в уравнении фильтра вместо шума объекта появляется слагаемое, пропорциональное разности $y - C\hat{x}$. Эта разность между текущим значением выхода и его оценкой $\hat{y} = C\hat{x}$ называется *невязкой*. Структурная схема фильтра Калмана-Бьюси полностью включает структурную схему объекта. Заметим, фильтр Калмана-Бьюси имеет такую же структуру, что и наблюдатель полного порядка (9.60) в детерминированном случае. Отличие состоит только в том, что, когда случайные воздействия не учитываются (т.е. в детерминированном случае), матрица коэффициентов усиления выбирается произвольно, а когда случайные воздействия учитываются, эта матрица определяется однозначно.

Доказательство теоремы 10.2 приведем после рассмотрения примера.

Пример 10.7. Определить оптимальную оценку постоянной величины x по наблюдениям за $y = x + V_n(t)$, где $V_n(t)$ — белый шум с интенсивностью r_0 , математическим ожиданием $M[x] = m$ и дисперсией $M[(x - m)^2] = p_0$.

Решение. В данном случае уравнение объекта имеет вид $\dot{x} = 0$, и поэтому

$$A = 0, \quad B = 0, \quad Q_0 = 0.$$

Фильтр Калмана-Бьюси описывается уравнением

$$\dot{\hat{x}} = K^0(y - \hat{x}), \quad \hat{x}(t_0) = m,$$

где $k^0 = p/r_0$; p определяется из уравнения

$$\dot{p} = -p^2/r, \quad p(t_0) = p_0.$$

Последнее уравнение имеет решение $p = p_0 r_0 / (r_0 + p_0 t)$. Поэтому для коэффициента усиления получаем $k^0 = p_0 / (r_0 + p_0 t)$.

Доказательство теоремы 10.2 основывается на следующей лемме.

Лемма 10.1 [29]. Пусть дано матричное уравнение

$$-\dot{\tilde{P}} = (\tilde{A} - \tilde{K}^0 \tilde{C})\tilde{P} + \tilde{P}(\tilde{A} - \tilde{K}^0 \tilde{C})^T + \tilde{Q}_0 + \tilde{K}^0 \tilde{R} \tilde{K}^{0T}, \quad (10.37)$$

$$\tilde{P}(t_f) = P_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f,$$

где $\tilde{A}$, $\tilde{C}$, $\tilde{Q}_0$, $\tilde{R}_0$ — известные матричные функции, причем $\tilde{Q}_0$ — положительно полуопределенная матрица, $\tilde{R}_0$ — положительно определенная функция, P_0 — известная симметрическая постоянная матрица. При произвольно заданной матрице $\tilde{K}^0 = \tilde{K}^0(t)$ (соответствующей размерности) решение $\tilde{P} = \tilde{P}(t)$ уравнения (10.37) удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{x}^T \tilde{P} \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (10.38)$$

где P — решение уравнения Риккати

$$-\dot{P} = \tilde{A}P + P\tilde{A}^T - P\tilde{C}^T \tilde{R}_0^{-1} \tilde{C}P + \tilde{Q}_0, \quad P(t_f) = P_0. \quad (10.39)$$

Неравенство (10.38) обращается в равенство, если положить

$$\tilde{K}^0 = \tilde{P} \tilde{C}^T \tilde{R}_0^{-1}. \quad (10.40)$$

Следствие. Диагональные элементы матриц $\tilde{P}$ и P удовлетворяют следующим условиям:

$$\tilde{p}_{ii} \geq p_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.41)$$

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_{ii} \geq \sum_{i=1}^n p_{ii}. \quad (10.42)$$

Неравенство (10.41) получается из (10.38), если положить $x_i = 1$ и $x_j = 0$ при $j \neq i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Неравенство (10.42) непосредственно следует из (10.41).

Доказательство леммы 10.1. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}^T \mathbf{x} + \tilde{C}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (10.43a)$$

$$J = \mathbf{x}^T(t_f) P_0 \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \tilde{Q}_0 \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \tilde{R}_0 \mathbf{u}) d\tau \rightarrow \min. \quad (10.43b)$$

Как известно, оптимальное управление имеет вид (см. (9.74))

$$\mathbf{u} = \tilde{R}_0^{-1} \tilde{C} P \mathbf{x}, \quad (10.44)$$

где P — решение уравнения (10.39) (см. (9.75)). При этом (см. (9.76))

$$\mathbf{x}^T P \mathbf{x} = \min \left\{ \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \tilde{Q}_0 \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \tilde{R}_0 \mathbf{u}) d\tau + \mathbf{x}^T(t_f) P_0 \mathbf{x}(t_f) \right\}. \quad (10.45)$$

При управлении $\mathbf{u} = -\tilde{K}^{0T}\mathbf{x}$ уравнение замкнутой системы примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = (\tilde{A}^T - \tilde{C}^T \tilde{K}^{0T})\mathbf{x}, \quad (10.46)$$

и на решениях этого уравнения интеграл (критерий оптимальности) (10.436) на интервале $[t, t_f]$ примет значение $\mathbf{x}^T \tilde{P} \mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^T \tilde{P} \mathbf{x} = \int_t^{t_f} (\mathbf{x}^T \tilde{Q}_0 \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \tilde{R}_0 \mathbf{u}) d\tau + \mathbf{x}^T(t_f) P_0 \mathbf{x}(t_f), \quad (10.47)$$

где $\tilde{P}$ — решение уравнения (10.37).

Действительно, подставим в (10.47) выражение $\mathbf{u} = -\tilde{K}^{0T}\mathbf{x}$ и продифференцируем по t :

$$\mathbf{x}^T \tilde{P} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \tilde{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\tilde{P}} \mathbf{x} = -[\mathbf{x}^T \tilde{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \tilde{K}^0 \tilde{R}_0 \tilde{K}^{0T} \mathbf{x}].$$

Подставим сюда производную $\dot{\mathbf{x}}$ из (10.46):

$$\mathbf{x}^T [(\tilde{A} - \tilde{K}^0 \tilde{C}) \tilde{P} + \tilde{P} + \tilde{P}(\tilde{A}^T - \tilde{C}^T \tilde{K}^{0T})] \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T (\tilde{Q} + \tilde{K}^0 \tilde{R}_0 \tilde{K}^{0T}) \mathbf{x}.$$

Это равенство будет выполнено тождественно, если

$$(\tilde{A} - \tilde{K}^0 \tilde{C}) \tilde{P} + \dot{\tilde{P}} + \tilde{P}(\tilde{A}^T - \tilde{C}^T \tilde{K}^{0T}) = -(\tilde{Q} + \tilde{K}^0 \tilde{R}_0 \tilde{K}^{0T}),$$

или

$$-\dot{\tilde{P}} = (\tilde{A} - \tilde{K}^0 \tilde{C}) \tilde{P} + \tilde{P}(\tilde{A} - \tilde{K}^0 \tilde{C})^T + \tilde{Q} + \tilde{K}^0 \tilde{R}_0 \tilde{K}^{0T}.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (10.37). Из (10.47) при $t = t_f$ получаем граничное условие в соотношении (10.37). Из (10.45) и (10.47) вытекает неравенство (10.38). Если в уравнение (10.37) подставить (10.40), получим уравнение (10.39), т.е. когда $\tilde{K}^0$ определяется соотношением (10.40), имеет место равенство $\tilde{P} = P$, и неравенство (10.38) обращается в равенство. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 10.2. Сначала рассмотрим случай $\mathbf{u}(t) \equiv 0$. При этом уравнение объекта примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{V}_0(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \quad (10.48)$$

Так как входом фильтра является наблюдаемая переменная y и оптимальный фильтр ищется в классе линейных систем, то уравнение фильтра можно представить в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = D\hat{\mathbf{x}} + K^0 y, \quad (10.49)$$

где D , K^0 — матричные функции времени соответствующих размеров. При таком представлении фильтра задача сводится к определению матриц D и K^0 .

Продифференцировав соотношение для ошибки $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, с учетом (10.48) и (10.49) находим

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\mathbf{x} + \mathbf{V}_0 - D\hat{\mathbf{x}} - K^0 y.$$

Подставим сюда выражение для $\mathbf{y}$ из (10.34б):

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = A\mathbf{x} + \mathbf{V}_0 - D\hat{\mathbf{x}} - K^0(C\mathbf{x} + \mathbf{V}_n).$$

Используя соотношения для ошибки, исключим отсюда оценку $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (A - K^0C - D)\mathbf{x} + D\mathbf{e} + \mathbf{V}_0 - K^0\mathbf{V}_n. \quad (10.50)$$

Оценка будет несмещенной, если при любом $t \geq t_0$ имеет место равенство

$$M[\hat{\mathbf{x}}(t)] = M[\mathbf{x}(t)].$$

Поэтому при любом $t \geq t_0$ должны выполняться равенства

$$M[\mathbf{e}(t)] = 0, \quad M[\dot{\mathbf{e}}(t)] = 0 \quad \forall t \geq t_0, \quad (10.51)$$

и из (10.50) получаем $A - K^0C - D = 0$, или

$$D = A - K^0C.$$

Подставив это выражение в (10.49), получим

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (A - K^0C)\hat{\mathbf{x}} + K^0\mathbf{y},$$

или

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + K^0(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}). \quad (10.52)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (10.35а) (напомним, что $u = 0$). Из (10.51) имеем также

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = M[\mathbf{x}(t_0)] = \bar{\mathbf{x}}^0.$$

Так что осталось показать, что матрица K^0 , доставляющая минимум среднему квадрату ошибки, определяется соотношением (10.35б).

Получим уравнение для дисперсионной матрицы

$$P = M[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)].$$

Используя уравнения объекта (10.48), оценки (10.52) и наблюдения (10.34б), равенство $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}$ можно преобразовать к виду

$$\dot{\mathbf{e}} = (A - K^0C)\mathbf{e} + \mathbf{V}_0 - K^0\mathbf{V}_n. \quad (10.53)$$

Подставив это выражение в уравнение

$$\dot{P} = M[\dot{\mathbf{e}}(t)\mathbf{e}^T(t)] + M[\mathbf{e}(t)\dot{\mathbf{e}}^T(t)],$$

найдем

$$\begin{aligned} \dot{P} = & (A - K^0C)P + M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{e}^T(t)] - K^0M[\mathbf{V}_n(t)\mathbf{e}^T(t)] + \\ & + P(A - K^0C)^T + M[\mathbf{e}(t)\mathbf{V}_0^T(t)] - M[\mathbf{e}(t)\mathbf{V}_n^T(t)]K^{0T}. \end{aligned} \quad (10.54)$$

Так как $\mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}^0$ и начальное значение $\mathbf{x}(t_0)$ не коррелировано с шумами, то

$$\begin{aligned} M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{e}^T(t_0)] &= 0, & M[\mathbf{V}_n(t)\mathbf{e}^T(t_0)] &= 0, \\ M[\mathbf{e}(t_0)\mathbf{V}_0^T(t)] &= 0, & M[\mathbf{e}(t_0)\mathbf{V}_n^T(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (10.55)$$

Запишем решение уравнения (10.53) по формуле Коши:

$$\mathbf{e}(t) = X(t, t_0)\mathbf{e}(t_0) + \int_{t_0}^t X(t, \tau)\mathbf{V}_0(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t X(t, \tau)K^0\mathbf{V}_n(\tau) d\tau, \quad (10.56)$$

где $X(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$; $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения

$$\dot{\mathbf{e}} = (A - K^0C)\mathbf{e}.$$

Очевидно, имеем $X(t, t) = I$. Используя (10.56) и учитывая условия (10.55), находим

$$\begin{aligned} M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{e}^T(t)] &= M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{e}^T(t_0)]X^T(t, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(\tau)]X^T(t, \tau) d\tau - \int_{t_0}^t M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_n^T(\tau)]K^{0T}X^T(t, \tau) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t Q_0(t)\delta(t - \tau)X^T(t, \tau) d\tau - \int_{t_0}^t S_0(t)\delta(t - \tau)K^{0T}X^T(t, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} [Q_0(t) - S_0(t)K^{0T}(t)]. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент $1/2$ появляется при вычислении интеграла с δ -функцией из-за того, что точка t находится на границе интегрирования. Аналогично получим

$$\begin{aligned} M[\mathbf{V}_n(t)\mathbf{e}^T(t)] &= \frac{1}{2} [S_0^T(t) - R_0(t)K^{0T}(t)], \\ M[\mathbf{e}^T\mathbf{V}_0^T(t)] &= \frac{1}{2} [Q_0^T(t) - K^0(t)S_0^T(t)], \\ M[\mathbf{e}(t)\mathbf{V}_n^T(t)] &= \frac{1}{2} [S_0(t) - K^0(t)R_0(t)]. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения для моментов в уравнение (10.54):

$$\begin{aligned} \dot{P} &= (A - K^0C)P + P(A - K^0C)^T + Q_0 - S_0K^{0T} - \\ &\quad - K^0S_0^T + K^0R_0K^{0T}. \end{aligned} \quad (10.57)$$

Так как $\mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0$, то имеем

$$P(t_0) = M[\mathbf{e}(t_0)\mathbf{e}^T(t_0)] = M[(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0. \quad (10.58)$$

Когда шумы объекта и наблюдения не коррелированы между собой ($S_0 = 0$), из (10.57) получаем

$$\dot{P} = (A - K^0C)P + P(A - K^0C)^T + Q_0 + K^0R_0K^{0T}. \quad (10.59)$$

Введем новую переменную (обратное время) $\tau = t_f - t$. Тогда если положить

$$P(t) = P(t_f - \tau) = \tilde{P}(\tau), \quad A(t) = A(t_f - \tau) = \tilde{A}(\tau), \quad \dots,$$

то уравнение (10.59) и начальное условие (10.58) примут вид

$$-\dot{\tilde{P}} = (\tilde{A} - \tilde{K}^0 \tilde{C})\tilde{P} + \tilde{P}(\tilde{A} - \tilde{K}^0 \tilde{C})^T + \tilde{Q} + \tilde{K}^0 \tilde{R}_0 \tilde{K}^{0T},$$

$$P(t_0) = \tilde{P}(\tau_f) = P_0.$$

Это уравнение совпадает с (10.37). Из леммы 10.1 и следствия вытекает, что диагональные элементы дисперсионной матрицы $\tilde{P}$ принимают минимальные значения, когда (см. (10.40))

$$\tilde{K}^0 = \tilde{P}\tilde{C}^T \tilde{R}_0^{-1}. \quad (10.60a)$$

Подставив это выражение в последнее уравнение, получим

$$-\dot{\tilde{P}} = \tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A}^T - \tilde{P}\tilde{C}^T \tilde{R}_0^{-1} \tilde{C}\tilde{P} + \tilde{Q}_0, \quad P(t_0) = \tilde{P}(\tau_f) = P_0. \quad (10.60b)$$

Если вернуться к исходной переменной (времени), то соотношения (10.60) примут вид (10.35)

$$K^0 = PC^T R_0^{-1},$$

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0, \quad P(t_0) = P_0.$$

Так что теорема 10.2 в случае, когда управление отсутствует ($u(t) \equiv 0$), доказана.

Рассмотрим теперь случай $u \neq 0$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + V_0, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x} + V_n.$$

Представим вектор состояния в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}$, где $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ подчиняются уравнениям

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A\mathbf{x}^{(1)} + V_0, \quad \mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{x}^0,$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A\mathbf{x}^{(2)} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t_0) = \mathbf{0}.$$

Наблюдаемый вектор $\mathbf{y}$ также представим в виде суммы двух векторов:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{y}^{(2)},$$

где

$$\mathbf{y}^{(2)} = C\mathbf{x}^{(2)}, \quad \mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^{(2)} = C\mathbf{x} + V_n - C\mathbf{x}^{(2)} = C\mathbf{x}^{(1)} + V_n.$$

Оценку $\hat{\mathbf{x}}$ можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}.$$

Очевидно, для оценки $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$ имеем (случай $\mathbf{u} = \mathbf{0}$)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} = A\hat{\mathbf{x}}^{(1)} + K^0(\mathbf{y}^{(1)} - C\hat{\mathbf{x}}^{(1)}), \quad \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}^0.$$

Поэтому для оценки фазового вектора имеем

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)} + \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A\hat{\mathbf{x}}^{(1)} + K^0(\mathbf{y}^{(1)} - C\hat{\mathbf{x}}^{(1)}) + A\mathbf{x}^{(2)} + B\mathbf{u}.$$

Добавив в правую часть равное нулю слагаемое $K^0(\mathbf{y}^{(2)} - C\mathbf{x}^{(2)})$, получим

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}).$$

Начальное условие имеет вид

$$\widehat{\mathbf{x}}(t_0) = \widehat{\mathbf{x}}^{(1)}(t_0) + \widehat{\mathbf{x}}^{(2)}(t_0) = \overline{\mathbf{x}}^0.$$

Теорема 10.2 доказана.

Теорема 10.3 может быть доказана аналогично, но здесь ее доказательство не рассматривается.

10.4.2. Фильтр Калмана–Бьюси при цветном шуме объекта. Рассмотрим задачу линейного оптимального оценивания при условии, что шум объекта не является белым. Небелый шум называют *цветным шумом*.

Постановка задачи. Пусть управляемая система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1 \mathbf{x}^{(1)} + B_1 \mathbf{u} + \mathbf{x}^{(2)}, \quad \mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(1)}, \quad (10.61a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_2 \mathbf{x}^{(2)} + \widetilde{\mathbf{V}}_0, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(2)}, \quad (10.61б)$$

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{V}_n, \quad (10.61в)$$

где $\mathbf{x}_0^{(1)}$ и $\mathbf{x}_0^{(2)}$ — случайные величины и $\widetilde{\mathbf{V}}_0(t)$, $\mathbf{V}_n(t)$ — белые шумы с вероятностными характеристиками

$$M[\mathbf{x}_0^{(1)}] = \overline{\mathbf{x}}_0^{(1)}, \quad M[(\mathbf{x}_0^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}_0^{(1)})(\mathbf{x}_0^{(1)} - \overline{\mathbf{x}}_0^{(1)})^T] = P_{01},$$

$$M[\mathbf{x}_0^{(2)}] = \overline{\mathbf{x}}_0^{(2)}, \quad M[(\mathbf{x}_0^{(2)} - \overline{\mathbf{x}}_0^{(2)})(\mathbf{x}_0^{(2)} - \overline{\mathbf{x}}_0^{(2)})^T] = P_{02},$$

$$M[\widetilde{\mathbf{V}}_0] = \mathbf{0}, \quad M[\widetilde{\mathbf{V}}_0(t) \widetilde{\mathbf{V}}_0^T(t')] = \widetilde{Q}_0(t) \delta(t - t'),$$

$$M[\mathbf{V}_n] = \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_n(t) \mathbf{V}_n^T(t')] = R_0(t) \delta(t - t'),$$

$$M[\widetilde{\mathbf{V}}_0(t) \mathbf{V}_n^T(t')] = \mathbf{0};$$

$\widetilde{Q}_0$, P_0 — положительно полуопределенные матрицы, R_0 — положительно определенная матрица, случайные величины $\mathbf{x}_0^{(1)}$ и $\mathbf{x}_0^{(2)}$ не коррелированы с шумами $\widetilde{\mathbf{V}}_0(t)$ и $\mathbf{V}_n(t)$.

Требуется на основе наблюдения выхода $\mathbf{y}(t)$ на интервале $[t_0, t]$ определить несмещенную линейную оценку $\widehat{\mathbf{x}}^{(1)}(t)$ фазового вектора $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, обеспечивающую минимум среднего квадрата ошибки:

$$J = M[(\mathbf{x}^{(1)}(t) - \widehat{\mathbf{x}}^{(1)}(t))^T (\mathbf{x}^{(1)}(t) - \widehat{\mathbf{x}}^{(1)}(t))] \rightarrow \min_{\widehat{\mathbf{x}}^{(1)}(t)}. \quad (10.61г)$$

Здесь (10.61a) является уравнением объекта, в котором $\mathbf{x}^{(2)}$ — цветной шум объекта; (10.61б) — уравнение формирователя, формирующего из белого шума $\widetilde{\mathbf{V}}_0$ шум объекта $\mathbf{x}^{(2)}$; (10.61в) — уравнение наблюдения.

Преобразуем данную задачу в рассмотренную выше задачу фильтрации с белыми шумами. С этой целью введем следующие переменные

и матрицы:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0^{(1)} \\ \mathbf{x}_0^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}^0 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0^{(1)} \\ \bar{\mathbf{x}}_0^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & I \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [C_1 \quad 0], \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & P_{20} \end{bmatrix}, \quad Q_0 = G\tilde{Q}G^T.$$

Используя их, сформулированную выше задачу можно переформулировать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (10.62a)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + \mathbf{V}_n(t), \quad (10.62б)$$

$$J = M[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]^T (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) \rightarrow \min, \quad (10.62в)$$

где $\mathbf{V}_0(t) = G\tilde{\mathbf{V}}_0$, а фазовый вектор в начальный момент и шумы не коррелированы между собой и имеют следующие вероятностные характеристики:

$$M[\mathbf{x}^0] = \bar{\mathbf{x}}^0, \quad M[\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0](\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)^T = P_0,$$

$$M[\mathbf{V}_0] = \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\mathbf{V}_n] = \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_n(t)\mathbf{V}_n^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t').$$

Переформулированная задача является задачей оптимального оценивания с некоррелированными между собой белыми шумами объекта и наблюдения. Поэтому согласно теореме 10.2 для оптимальной оценки имеем (см. (10.35))

$$\hat{\mathbf{x}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}^0,$$

$$K^0 = PC^T R_0^{-1},$$

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0, \quad P(t_0) = P_0.$$

Представим дисперсионную матрицу в виде блочной матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{21} & P_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда, принимая во внимание введенные обозначения, матрицу коэффициентов усиления K^0 и уравнения для оценки можно представить так:

$$K^0 = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{21} & P_2 \end{bmatrix} [C_1 \quad 0]^T R_0^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 C_1^T R_0^{-1} \\ P_{21} C_1^T R_0^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_1 \hat{\mathbf{x}}^{(1)} + B_1 \mathbf{u} + \hat{\mathbf{x}}^{(2)} + K_1(\mathbf{y} - C_1 \hat{\mathbf{x}}^{(1)}), \quad \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0^{(1)},$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_2 \hat{\mathbf{x}}^{(2)} + K_2(\mathbf{y} - C_1 \hat{\mathbf{x}}^{(1)}), \quad \hat{\mathbf{x}}^{(2)}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0^{(2)}.$$

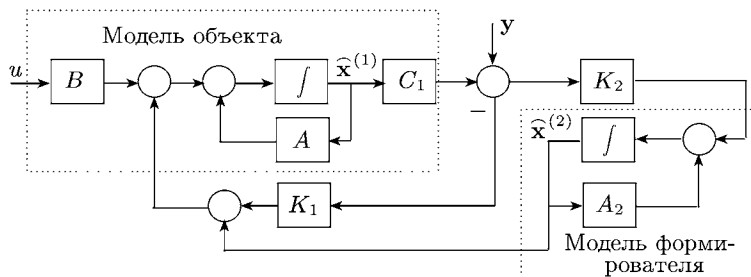


Рис. 10.5. Структурная схема фильтра Калмана–Бьюси при цветном шуме объекта

Фильтр Калмана–Бьюси при цветном шуме объекта помимо модели объекта включает еще модель формирователя (рис. 10.5).

Пример 10.8. Пусть уравнения объекта и наблюдения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(t_0) = x_1^0, \quad y = x_1 + V_n,$$

где x_2 — стационарный случайный процесс (шум объекта) с характеристиками

$$M[x_2] = 0, \quad K_{x_2}(\tau) = M[x_2(t)x_2(t+\tau)] = \frac{1}{2} e^{-|\tau|};$$

начальное значение x_1^0 и шум наблюдения не коррелированы ни между собой, ни с шумом объекта и имеют следующие характеристики: $M[x_1^0] = 0$, $M[(x_1^0)^2] = p_0$, $M[V_n] = 0$, $M[V_n(t)V_n(t+\tau)] = r_0\delta(\tau)$.

Требуется определить оптимальную оценку.

Решение. Спектральная функция шума объекта может быть вычислена путем двухстороннего преобразования Фурье и представлена в виде

$$S(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{|1+j\omega|^2}.$$

Отсюда для передаточной функции формирователя получаем

$$W_\Phi(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Уравнение формирователя имеет вид

$$\dot{x}_2 = -x_2 + \tilde{V}_0,$$

где $\tilde{V}_0$ — белый шум с нулевым средним и единичной интенсивностью: $\tilde{Q}_0 = 1$.

В данном случае

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad P_{02} = K_{x_2}(0) = \frac{1}{2},$$

$$R_0 = r_0, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = G\tilde{Q}_0G^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Фильтр Калмана–Бьюси описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \hat{x}_2 + k_1(y - \hat{x}_1), & \hat{x}_1(t_0) &= 0, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_2 + k_1(y - \hat{x}_1), & \hat{x}_2(t_0) &= 0,\end{aligned}$$

где

$$k_1 = p_{11}/r_0, \quad k_2 = p_{21}/r_0.$$

Дисперсионное уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \\ &- \frac{1}{r_0} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 0) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

или, в скалярной форме,

$$\begin{aligned}\dot{p}_{11} &= 2p_{21} - \frac{1}{r_0} p_{11}^2, & \dot{p}_{21} &= p_{22} - p_{21} - \frac{1}{r_0} p_{21}p_{11}, \\ \dot{p}_{22} &= -2p_{22} - \frac{1}{r_0} p_{21}^2 + 1.\end{aligned}$$

При записи скалярных уравнений учтена симметричность дисперсионной матрицы ($p_{12} = p_{21}$). Начальные условия имеют вид

$$p_{11}(t_0) = p_0, \quad p_{21}(t_0) = 0, \quad p_{22}(t_0) = 1/2.$$

10.4.3. Фильтр Калмана–Бьюси при цветном шуме наблюдения. Рассмотрим задачу линейного оптимального оценивания при условии, что шум объекта является белым, шум наблюдения — цветным.

Постановка задачи. Пусть управляемая система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (10.63a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \mathbf{z}, \quad (10.63б)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}, \quad (10.63в)$$

где $\mathbf{x}^0$ — случайная величина и $\mathbf{V}_0$, $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}$ — белые шумы с вероятностными характеристиками

$$\begin{aligned}M[\mathbf{x}^0] &= \bar{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0, \\ M[\mathbf{V}_0] &= \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'), \\ M[\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}] &= \mathbf{0}, \quad M[\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}(t)\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T(t')] = \tilde{R}_0(t)\delta(t - t'), \\ M[\mathbf{V}_0(t)\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}^T(t')] &= \tilde{S}(t)\delta(t - t');\end{aligned}$$

Q_0 , P_0 — положительно полуопределенные матрицы; $\tilde{R}_0$ — положительно определенная матрица; случайная величина $\mathbf{x}^0$ не коррелирована с шумами $\mathbf{V}_0(t)$ и $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{n}}(t)$.

Требуется на основе наблюдения выхода $\mathbf{y}(t)$ на интервале $[t_0, t]$ определить несмещенную линейную оценку $\hat{\mathbf{x}}(t)$ фазового вектора $\mathbf{x}(t)$,

обеспечивающую минимум среднему квадрату ошибки:

$$J = M[(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))^T (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))] \rightarrow \min_{\hat{\mathbf{x}}(t)}. \quad (10.63\text{г})$$

Здесь (10.63а) является уравнением объекта, (10.63б) — уравнением наблюдения, в котором z — цветной шум наблюдения, (10.63в) — уравнение формирователя, формирующего из белого шума $\tilde{\mathbf{V}}_n$ шум наблюдения.

Данную задачу преобразуем в задачу фильтрации с белыми шумами. Из уравнений (10.63) находим

$$\dot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{z}} = (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{C}}A)\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{C}}B\mathbf{u} + D\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}_n.$$

Введем новый вектор наблюдения

$$\mathbf{y} = \dot{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{C}}B\mathbf{u} - D\tilde{\mathbf{y}}. \quad (10.64)$$

После подстановки сюда выражений для $\dot{\mathbf{y}}$ и $\tilde{\mathbf{y}}$ получим

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + \mathbf{V}_n, \quad (10.65)$$

где

$$C = \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{C}}A - D\tilde{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{V}_n = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}_n. \quad (10.66)$$

В преобразованном уравнении наблюдения (10.65) шум $\mathbf{V}_n$ является белым, а его интенсивность R_0 и интенсивность взаимной корреляционной функции его и шума объекта S_0 определяются следующим образом:

$$R_0 = \tilde{\mathbf{C}}A_0\tilde{\mathbf{C}}^T + \tilde{\mathbf{S}}^T\tilde{\mathbf{C}}^T + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{S}} + \tilde{R}_0, \quad S_0 = Q_0\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{S}}. \quad (10.67)$$

Из последнего равенства следует, что шум объекта $\mathbf{V}_0$ и шум $\mathbf{V}_n$ преобразованного уравнения наблюдения будут коррелированы, хотя шум объекта $\mathbf{V}_0$ и шум $\tilde{\mathbf{V}}_n$ на входе формирователя не коррелированы ($\tilde{\mathbf{S}} = 0$).

Итак, если матрица R_0 положительно определена, то оптимальный фильтр, согласно теореме 10.3, описывается уравнениями

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}^0, \quad (10.68\text{а})$$

$$K^0 = (PC^T + S_0)R_0^{-1}, \quad (10.68\text{б})$$

$$\begin{aligned} \dot{P} = (A - S_0R_0^{-1}C)P + P(A - S_0R_0^{-1}C)^T - \\ - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0 - S_0R_0^{-1}S_0^T, \quad P(t_0) = P_0. \end{aligned} \quad (10.68\text{в})$$

Новый вектор наблюдения определяется соотношением (10.64). Однако в это соотношение входит производная $\dot{\mathbf{y}}$; это делает необходимым дифференцирование наблюдаемой переменной, что нежелательно.

Рассмотрим другой способ получения оптимальной оценки, исключаящий необходимость дифференцирования. Введем вектор $\tilde{\mathbf{x}}$, определяемый соотношением

$$\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} + K^0\tilde{\mathbf{y}}. \quad (10.69)$$

Продифференцируем это равенство по времени и подставим в него выражения для $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$ и $\mathbf{y}$ из (10.68а) и (10.64) соответственно. Тогда получим

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (A - K^0 C)\hat{\mathbf{x}} + (B - K^0 \tilde{C}B)\mathbf{u} - (\dot{K}^0 + K^0 D)\tilde{\mathbf{y}},$$

или, принимая во внимание (10.69),

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (A - K^0 C)\hat{\mathbf{x}} + (B - K^0 \tilde{C}B)\mathbf{u} + [(A - K^0 C)K^0 - \dot{K}^0 - K^0 D]\tilde{\mathbf{y}}, \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) &= \bar{\mathbf{x}}^0 - K^0(t_0)\tilde{\mathbf{y}}(t_0).\end{aligned}\quad (10.70)$$

В последнее уравнение производная $\dot{\hat{\mathbf{y}}}$ не входит. Из него определяется $\tilde{\mathbf{x}}$, а затем из (10.69) находится искомая оценка.

Пример 10.9. Объект и наблюдение описываются уравнениями

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = x + z; \quad Mx(0) = 0, \quad M[x^2(0)] = p_0.$$

Шум наблюдения является стационарным случайным процессом с характеристиками

$$M[z] = 0, \quad M[z(t)z(t+\tau)] = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}.$$

Уравнение формирователя имеет вид (см. пример 10.8)

$$\dot{z} = -z + \tilde{V}_n, \quad M[\tilde{V}_n] = 0, \quad M[\tilde{V}_n(t)\tilde{V}_n(t')] = \delta(t - t').$$

В данном случае

$$A = 0, \quad B = 0, \quad \tilde{C} = 1, \quad Q_0 = 0, \quad D = -1, \quad \tilde{R}_0 = 1, \quad \tilde{S} = 0.$$

Поэтому из (10.66) и (10.67) получаем

$$C = 1, \quad R_0 = 1, \quad S_0 = 0.$$

Из (10.70) и (10.69) находим

$$\dot{\tilde{x}} = -k^0 \tilde{x} + (-k^{02} - \dot{k}^0 + k^0)\tilde{y}, \quad \tilde{x}(0) = -k^0 \tilde{y}(0),$$

$$\hat{x} = \tilde{x} + k^0 \tilde{y}.$$

Так как $S_0 = 0$, то k^0 и p определяются, согласно теореме 10.2, по формулам (10.35б) и (10.35в):

$$k^0 = p, \quad \dot{p} = -p^2, \quad p(0) = p_0.$$

Как легко проверить,

$$p = \frac{p_0}{1 + p_0 t}, \quad k^0 = \frac{p_0}{1 + p_0 t}.$$

Выше были рассмотрены задачи оценивания, когда цветными являются или шум объекта, или шум наблюдения. Ясно, что, используя оба рассмотренных способа, можно решить задачу оценивания, когда цветными являются как шум объекта, так и шум наблюдения.

10.4.4. Вырожденная задача оптимального оценивания.

Напомним: задача оптимального оценивания называется *вырожденной* или *сингулярной*, если матрица интенсивности шума наблюдения является вырожденной (не является положительно определенной). Вырожденные задачи возникают, когда часть компонент выходного вектора измеряются точно или когда шум наблюдения является цветным и матрица интенсивности преобразованного шума наблюдения является вырожденной. Если задача оценивания является вырожденной, то приведенные выше оптимальные фильтры использовать нельзя. Если шумы являются цветными, то, согласно описанным выше процедурам, исходная задача может быть преобразована в задачу с белыми шумами. Поэтому ограничимся рассмотрением только сингулярной задачи с белыми шумами.

Сингулярную задачу оптимального оценивания можно сформулировать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (10.71a)$$

$$\mathbf{y}^{(1)} = C_1\mathbf{x} + \mathbf{V}_n, \quad (10.71б)$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = C_2\mathbf{x}, \quad (10.71в)$$

$$J = M[(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))^T(\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))] \rightarrow \min_{\widehat{\mathbf{x}}(t)}, \quad (10.71г)$$

где фазовый вектор в начальный момент $\mathbf{x}^0$ не коррелирован с шумами объекта $\mathbf{V}_0$ и наблюдения $\mathbf{V}_n$, и они имеют следующие вероятностные характеристики:

$$\begin{aligned} M[\mathbf{x}^0] &= \overline{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \overline{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0, \\ M[\mathbf{V}_0] &= \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'), \\ M[\mathbf{V}_n] &= \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_n(t)\mathbf{V}_n^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t'), \\ M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_n^T(t')] &= S_0(t)\delta(t - t'). \end{aligned}$$

Здесь, как обычно, принимается, что P_0, Q_0 — положительно полуопределенные матрицы, R_0 — положительно определенная матрица.

Эта задача отличается от несингулярной задачи оценивания тем, что в ней уравнение наблюдения представлено двумя уравнениями: (10.71б) — уравнением, определяющим неточно измеряемые выходные переменные, (10.71в) — уравнением, определяющим точно измеряемые выходные переменные.

Оптимальная оценка определяется следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{x}} = L_1\mathbf{y}^{(2)} + L_2\widehat{\mathbf{q}}, \quad (10.72a)$$

$$\dot{\widehat{\mathbf{q}}} = \tilde{A}\widehat{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{u}} + K^0(\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{C}\widehat{\mathbf{q}}), \quad \widehat{\mathbf{q}}(t_0) = C_2'\overline{\mathbf{x}}^0, \quad (10.72б)$$

$$K^0 = (\tilde{P}\tilde{C}^T + \tilde{S}_0)\tilde{R}_0^{-1}, \quad (10.72в)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}} = & (\tilde{A} - \tilde{S}_0 \tilde{R}_0^{-1} \tilde{C}) \tilde{P} + \tilde{P} (\tilde{A} - \tilde{S}_0 \tilde{R}_0^{-1} \tilde{C})^T - \\ & - \tilde{P} \tilde{C}^T \tilde{R}_0^{-1} \tilde{C} \tilde{P} + \tilde{Q}_0 - \tilde{S}_0 \tilde{R}_0^{-1} \tilde{S}_0^T, \quad \tilde{P}(t_0) = C_2' P_0 C_2'^T. \end{aligned} \quad (10.72\Gamma)$$

Здесь приняты следующие обозначения: L_1 и L_2 определяются из соотношения

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2' \end{pmatrix}^{-1}, \quad (10.73)$$

где матрица C_2' выбирается так, чтобы $(n \times n)$ -матрица в (10.73) справа была невырождена;

$$\tilde{A} = (\dot{C}_2' + C_2' A) L_2, \quad \tilde{\mathbf{u}} = (\dot{C}_2' + C_2' A) L_1 \mathbf{y}^{(2)} + C_2' B \mathbf{u}, \quad (10.74a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{y}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{y}}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}, \quad (10.74б)$$

где

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(1)} = \mathbf{y}^{(1)} - C_1 L_1 \mathbf{y}^{(2)}, \quad (10.75a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(2)} = \dot{\mathbf{y}}^{(2)} - (\dot{C}_2 + C_2 A) L_1 \mathbf{y}^{(2)} - C_2 B \mathbf{u},$$

$$\tilde{C}_1 = C_1 L_2, \quad \tilde{C}_2 = (\dot{C}_2 + C_2 A) L_2; \quad (10.75б)$$

вероятностные характеристики преобразованных шумов имеют вид

$$\tilde{Q}_0 = C_2' Q_0 C_2'^T, \quad \tilde{R}_0 = \begin{bmatrix} R_0 & S_0^T C_2'^T \\ C_2 S_0 & C_2 Q_0 C_2^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{S}_0 = [C_2' S_0 \quad C_2' Q_0 C_2^T]. \quad (10.76)$$

Получим алгоритм (10.72). Компоненты вектора $\mathbf{y}^{(2)}$ измеряются точно. Пусть размер этого вектора равен ρ_1 и матрица C_2 имеет ранг ρ_1 . Тогда (10.71в) представляет собой ρ_1 линейных независимых уравнений для неизвестного фазового вектора. Поэтому достаточно получить еще $n - \rho_1$ уравнений, которые совместно с (10.71в) позволят определить оценку $\hat{\mathbf{x}}$.

Введем $(n - \rho_1)$ -вектор $\mathbf{q}$, определяемый соотношением $\mathbf{q} = C_2' \mathbf{x}$. Из этого соотношения и уравнения наблюдения (10.71в) имеем

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2' \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y}^{(2)} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix},$$

или, учитывая (10.73),

$$\mathbf{x} = L_1 \mathbf{y}^{(2)} + L_2 \mathbf{q}. \quad (10.77)$$

Очевидно, если найдем оптимальную оценку $\hat{\mathbf{q}}$, то, подставив ее в (10.77), получим формулу (10.72), определяющую оптимальную оценку $\hat{\mathbf{x}}$. Поэтому задача свелась к определению оптимальной оценки для $\mathbf{q}$. Продифференцировав тождество $\mathbf{q} = C_2' \mathbf{x}$ и учтя соотношения (10.71a) и (10.77), получим

$$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{C}_2' + C_2' A) L_2 \mathbf{q} + (\dot{C}_2 + C_2' A) L_1 \mathbf{y}^{(2)} + C_2' B \mathbf{u} + C_2' \mathbf{V}_0.$$

Воспользовавшись обозначениями (10.74а) и положив $\tilde{\mathbf{V}}_0 = C'_2 \mathbf{V}_0$, последнее уравнение можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \tilde{A} \mathbf{q} + \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{V}}_0. \quad (10.78)$$

Преобразуем уравнение наблюдения (10.71б): нужно получить уравнение, связывающее выходную переменную с $\mathbf{q}$. Подставив выражение для $\mathbf{x}$ из (10.77) в (10.71б), получим

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(1)} = \tilde{C}_1 \mathbf{q} + \mathbf{V}_n,$$

где $\tilde{\mathbf{y}}^{(1)}$ и $\tilde{C}_1$ определены в (10.75). Продифференцировав второе уравнение наблюдения (10.71в) и используя уравнение объекта (10.71а) и представление (10.77), находим

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(2)} = \tilde{C}_2 \mathbf{q} + C_2 \mathbf{V}_0,$$

где $\tilde{\mathbf{y}}^{(2)}$ и $\tilde{C}_2$ определены в (10.75). И если воспользоваться представлением (10.74б) и положить $\tilde{\mathbf{V}}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_n \\ C_2 \mathbf{V}_0 \end{pmatrix}$, то уравнение наблюдения можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{C} \mathbf{q} + \tilde{\mathbf{V}}_n. \quad (10.79)$$

Таким образом, чтобы найти оптимальную оценку $\hat{\mathbf{q}}$, нужно найти фильтр Калмана–Бьюси для системы (10.78), (10.79). Вычислив корреляционные функции преобразованного шума объекта $\tilde{\mathbf{V}}_0 = C'_2 \mathbf{V}_0$ и преобразованного шума наблюдения $\tilde{\mathbf{V}}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_n \\ C_2 \mathbf{V}_0 \end{pmatrix}$, а также их взаимную корреляционную функцию для интенсивности $\tilde{Q}_0$ шума $\tilde{\mathbf{V}}_0$, интенсивности $\tilde{R}_0$ шума $\tilde{\mathbf{V}}_n$ и их взаимной интенсивности $\tilde{S}_0$, получим формулы, приведенные в (10.76). Так как взаимная корреляционная функция шумов объекта и наблюдения отлична от нуля, то оптимальная оценка $\hat{\mathbf{q}}$ определяется, согласно теореме 10.3, по формулам (10.72б), (10.72в), (10.72г). Начальные условия $\mathbf{q}(t_0)$ и $\tilde{P}(t_0)$ определяется исходя из соотношения $\mathbf{q} = C'_2 \mathbf{x}$.

Пример 10.10. Объект и наблюдение описываются уравнениями

$$\dot{x} = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + V_{02},$$

$$y_1 = x_1 + V_n, \quad y_2 = x_2.$$

Фазовые координаты в начальный момент не коррелированы с шумами объекта и наблюдения и имеют следующие вероятностные характеристики:

$$Mx_i(0) = 0, \quad M[x_i^2(0)] = p_{0i}, \quad i = 1, 2,$$

$$M[x_1(0)x_2(0)] = 0, \quad M[V_{02}(t)] = 0, \quad M[V_{02}(t)V_{02}(t')] = q_{22}\delta(t-t'),$$

$$M[V_n(t)] = 0, \quad M[V_n(t)V_n(t')] = r_{11}\delta(t-t'); \quad M[V_{02}(t)V_n(t')] = 0.$$

Требуется определить оптимальную оценку.

Решение. Задача является сингулярной. В данном случае имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = (1 \ 0), \quad C_2 = (0 \ 1),$$

$$y^{(1)} = y_1, \quad y^{(2)} = y_2, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}, \quad R_0 = r_{11},$$

$$S_0 = 0, \quad \bar{x}^0 = 0, \quad P_0 = \begin{bmatrix} p_{01} & 0 \\ 0 & p_{02} \end{bmatrix}.$$

Примем $C'_2 = (1 \ 0)$. Тогда $q = C'_2 x = x_1$. Из равенства

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ C'_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [L_1 \ L_2]$$

получаем $L_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Из формул (10.74)–(10.76) находим

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= 0, \quad \tilde{u} = y_2, \quad \tilde{y}^{(1)} = y_1, \quad \tilde{C}_1 = 1, \quad \tilde{y}^{(2)} = \dot{y}_2 - u, \\ \tilde{C}_2 &= 0, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}^{(1)} \\ \tilde{y}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_2 - u \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q}_0 = 0, \\ \tilde{R}_0 &= \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{S}_0 = 0. \end{aligned}$$

Из (10.72б), (10.72в), (10.72г) имеем

$$\begin{aligned} \hat{q} &= y_2 + k_1^0(y_1 - \hat{q}) + k_2^0(\dot{y}_2 - u), \quad \hat{q}(0) = 0, \\ k_1^0 &= \frac{\tilde{p}}{r_{11}}, \quad k_2^0 = 0, \quad \dot{\tilde{p}} = \frac{\tilde{p}^2}{r_{11}}, \quad \tilde{p}(0) = p_{10}. \end{aligned}$$

Для искомой оценки из (10.72а) получаем $\hat{x}_1 = \hat{q}$, $\hat{x}_2 = y_2$.

10.4.5. Линеаризованный фильтр Калмана–Бьюси. Рассмотрим алгоритмы оценивания фазового вектора нелинейных систем, основанные на линеаризации. Пусть объект и наблюдение описываются уравнениями вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_n. \end{aligned}$$

Случайный вектор $\mathbf{x}^0$ и шумы объекта $\mathbf{V}_0$ и наблюдения $\mathbf{V}_n$ не коррелированы между собой и обладают следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} M\mathbf{x}^0 &= \bar{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0, \\ M[\mathbf{V}_0(t)] &= 0, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'), \\ M[\mathbf{V}_n(t)] &= 0, \quad M[\mathbf{V}_n(t)\mathbf{V}_n^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t'); \end{aligned}$$

матрицы P_0, Q_0 положительно полуопределены, матрица R_0 положительно определена.

Произведем линеаризацию относительно некоторой траектории $\mathbf{x}^*(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{V}_0,$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^*, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{V}_n,$$

где звездочка сверху производной означает, что она вычисляется в точках $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.

Учитывая, что фильтр Калмана–Бьюси состоит из модели системы и обратной связи по невязке, можно записать

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) + K^0[\mathbf{y} - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, t)], \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}^0, \quad (10.80a)$$

$$K^0 = P \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* R_0^{-1}, \quad (10.80б)$$

$$P = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* P + P \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* T - P \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* R_0^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* P, \quad P(t_0) = P_0. \quad (10.80в)$$

Здесь в уравнении для оценки используется точная модель системы. Линеаризованная модель используется при вычислении матрицы коэффициентов усиления.

Теперь остановимся на выборе траектории $\mathbf{x}^*(t)$, относительно которой производится линеаризация. В качестве такой траектории можно принять *номинальную* траекторию, которая выбирается до начала процесса получения оценки на основе априорной информации о реальной траектории. Такой способ удобен тем, что производные и соответственно матрицу коэффициентов усиления можно вычислить заранее. Это важно, когда оценку нужно получить в реальном масштабе времени. Его недостаток состоит в том, что при неудачном выборе номинальной траектории (траектории $\mathbf{x}^*(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ сильно отличаются) возможны большие погрешности в оценке. А чтобы выбрать траекторию $\mathbf{x}^*(t)$, близкую $\mathbf{x}(t)$, нужна большая априорная информация. Указанного недостатка лишен *расширенный фильтр Калмана–Бьюси* [57]. Так называется фильтр (10.80), если линеаризация производится относительно точек оценки $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Недостатком этого фильтра является то, что матрицу коэффициентов заранее вычислить нельзя, и возникают трудности получения оценки в реальном масштабе времени из-за увеличения объема вычисления в процессе получения оценки. Еще большей точности можно добиться, если использовать *итерационный фильтр Калмана–Бьюси* [57]. Так называется фильтр (10.80), если после линеаризации относительно номинальной траектории и получения оценки $\hat{\mathbf{x}}(t)$ вновь производится линеаризация относительно $\hat{\mathbf{x}}(t)$ и получается уточненная оценка $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$. Эта процедура продолжается до тех пор, пока изменение оценки не станет допустимым. Очевидно,

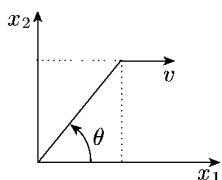


Рис. 10.6. К примеру 10.11

такой фильтр потребует большого объема вычислений, что является его недостатком.

Пример 10.11. Самолет летит на постоянной высоте с постоянной скоростью v . Измеряется угол θ направления на маяк (рис. 10.6) с помехой, представляющий собой белый шум с интенсивностью r_0 .

Требуется определить дальность x_1 и высоту x_2 в текущий момент времени.

Решение. Составим уравнения объекта (движения самолета) и наблюдения и выпишем необходимые вероятностные характеристики:

$$\dot{x}_1 = v, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad y = \theta = \arctg \frac{x_2}{x_1} + V_n,$$

$$M[x_1(0)] = l_0, \quad M[x_2(0)] = h_0,$$

$$M[\tilde{\mathbf{x}}(0)\tilde{\mathbf{x}}^T(0)] = P_0, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) - M[\mathbf{x}(0)],$$

$$M[V_n(t)] = 0, \quad M[V_n(t)V_n(t')] = r_0\delta(t - t').$$

Расширенный фильтр Калмана-Бьюси описывается следующими уравнениями:

$$\hat{x}_1 = v + k_1 \left(\theta - \arctg \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1} \right), \quad \hat{x}_1(0) = l_0,$$

$$\hat{x}_2 = k_2 \left(\theta - \arctg \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1} \right), \quad \hat{x}_2(0) = h_0,$$

$$K^0 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = P \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \frac{1}{r_0},$$

$$\dot{P} = -P \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right)^* P \frac{1}{r_0}, \quad P(0) = P_0,$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right)^* = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) = \left(-\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2} \quad \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2} \right).$$

10.5. Стохастические оптимальные системы

Для строго детерминированных систем управления не имеет значения, какое управление — программное или с обратной связью — используется, так как знание управления и начального состояния позволяет однозначно определять состояние системы в любой момент времени. Наблюдение за текущим состоянием системы не дает новой информации. В стохастических системах управления, т. е. в системах, подверженных случайным воздействиям, по известным управлению и начальному состоянию предсказать ход протекания процесса невозможно. И возможности качественного управления такими системами существенно зависят от той информации, которая может быть получена путем измерения (наблюдения) и обработки выходными (наблюдае-

мыми) переменными. Поэтому стохастические системы управления должны быть замкнутыми.

При рассмотрении детерминированных систем управления основное внимание также уделяется замкнутым системам, так как практически все системы управления подвержены случайным или неслучайным, но заранее не прогнозируемым воздействиям, т. е. строго детерминированных систем управления не бывает. Однако при анализе и синтезе рассматриваются детерминированные модели ввиду их простоты по сравнению со стохастическими моделями, когда случайные воздействия не оказывают существенного влияния.

10.5.1. Стохастическое оптимальное управление и уравнение Беллмана. Уравнение объекта и критерий оптимальности имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{V}_0(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (10.81a)$$

$$J = M \left[g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \right], \quad (10.81b)$$

где $\mathbf{x}^0$ — гауссова случайная величина, $\mathbf{V}_0(t)$ — гауссов белый шум, $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{V}_0(t)$ не коррелированы; белый шум имеет следующие характеристики:

$$M[\mathbf{V}_0(t)] = 0, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t').$$

Пусть требуется определить управление объекта (10.81a) с обратной связью, доставляющее минимум критерию оптимальности (10.81b).

Такое управление называется *стохастическим оптимальным управлением*.

Итак, рассматривается задача стохастического оптимального управления, в которой шум объекта является гауссовым белым шумом и входит в уравнение аддитивно; ограничение на правый конец траектории отсутствует, фазовый вектор наблюдается полностью и без помех. В этой задаче $\mathbf{x}(t)$ является марковским процессом (так как случайное воздействие является белым шумом), и вся информация, которая может быть использована при определении характеристики будущего состояния, содержится в $\mathbf{x}(t)$. Поэтому оптимальное управление должно быть функцией только от текущего состояния и, быть может, текущего времени.

Управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$ считается допустимым, если функция $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$ кусочно непрерывна и принимает значения из допустимого множества U_t . Кроме того, предполагается, что при допустимом управлении уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t)$$

при каждом фиксированном $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ имеет единственное решение на интервале $[t_0, t_f]$. Функции $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ и $Q_0(t)$ предполагаются непрерывными.

Достаточное условие оптимальности [54]. Если существует скалярная функция $S(x, t)$, обладающая непрерывными частными производными $\partial S/\partial t$, $\partial S/\partial \mathbf{x}$, $\partial^2 S/\partial \mathbf{x}^2$, и допустимое управление $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U_t} \left\{ f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n q_{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\} = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (10.82a)$$

где q_{ij} — элементы матрицы Q_0 , при граничном условии

$$S(\mathbf{x}(t_f), t_f) = g_0(\mathbf{x}(t_f), t_f), \quad (10.82b)$$

то это управление является стохастическим оптимальным управлением (для задачи (10.81)).

Уравнение (10.82a) называется *уравнением Беллмана* (для задачи стохастического оптимального управления), а функция $S(\mathbf{x}, t)$ — *функцией Беллмана*.

Если множество U_t открыто и минимум в левой части уравнения (10.82a) достигается в стационарной точке, уравнение Беллмана можно представить в виде

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n q_{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (10.83a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left\{ f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\} = 0. \quad (10.83b)$$

Обычно уравнение Беллмана записывают, используя след матрицы.

Следом (шпуром) матрицы называют сумму элементов ее главной диагонали. Например, след $(n \times n)$ -матрицы $A = [a_{ij}]$ (обозначение $\text{tr } A$ или $\text{Sp } A$) определяется так: $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что имеет место равенство

$$\sum_{i,j=1}^n q_{ij} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} = \text{tr} \left(Q_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right).$$

Поэтому уравнение Беллмана (10.82a) обычно записывают в виде

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in U_t} \left\{ f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(Q_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right) \right\} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Вывод уравнения Беллмана можно найти в [54]. Здесь он не рассматривается.

10.5.2. Стохастическая оптимальная линейная система при полной информации о состоянии. Пусть уравнение объекта и критерий оптимальности имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (10.84a)$$

$$J = M \left[\mathbf{x}^T(t_f) F \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) R \mathbf{u}(t)] dt \right]. \quad (10.84б)$$

Здесь $\mathbf{V}_0$ — гауссов белый шум, $\mathbf{x}^0$ — гауссова случайная величина; $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{x}^0$ не коррелированы и имеют следующие характеристики:

$$M \mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0,$$

$$M[\mathbf{V}_0(t)] = \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_0(t) \mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t) \delta(t - t');$$

матрицы A , B , Q и R , вообще говоря, являются функциями времени, R — положительно определенная матрица, Q , P_0 , Q_0 — положительно полуопределенные матрицы, объект стабилизируем.

Требуется найти оптимальное управление объекта (10.84а) с обратной связью, обеспечивающее минимум функционалу (10.84б), при условии, что фазовый вектор доступен точному измерению.

Теорема 10.4. *Стохастическое оптимальное управление с обратной связью для объекта (10.84а) при критерии оптимальности (10.84б) имеет вид*

$$\mathbf{u} = -R^{-1} B^T K \mathbf{x}, \quad (10.85а)$$

где K — симметрическая матрица, которая определяется из матричного уравнения Риккати

$$\dot{K} = -KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q \quad (10.85б)$$

при граничном условии

$$K(t_f) = F. \quad (10.85в)$$

Оптимальный закон управления (10.85) совпадает с оптимальным законом управления (9.74), (9.75) в детерминированном случае. Таким образом, случайное воздействие на объект и случайное начальное условие не влияют на оптимальный закон управления, если имеется полная информация о фазовом векторе.

Доказательство. Уравнение Беллмана (10.83) в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} (A \mathbf{x} + B \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(Q_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right) &= -\frac{\partial S}{\partial t}, \\ 2\mathbf{u}^T R + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} B &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения полученной системы находим

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T. \quad (10.86)$$

Подставив это выражение в первое уравнение, получим

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} B R^{-1} B^T \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} A \mathbf{x} + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(Q_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \right) = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде функции

$$S = \mathbf{x}^T K(t) \mathbf{x} + k_0(t), \quad (10.87)$$

где $K(t)$ — симметрическая матричная функция, $k_0(t)$ — скалярная функция. Подставим (10.87) в указанное уравнение:

$$\mathbf{x}^T(Q - KBR^{-1}B^TK + KA + A^TK)\mathbf{x} + \text{tr}(Q_0K) = -\mathbf{x}^T\dot{K}\mathbf{x} - \dot{k}_0.$$

Это равенство возможно, если

$$Q - KBR^{-1}B^TK + KA + A^TK = -\dot{K}, \quad \text{tr}(Q_0K) = -\dot{k}_0.$$

Первое уравнение совпадает с уравнением Риккати (10.85б). Подставив (10.87) в (10.86), получим оптимальное управление (10.85а).

Граничное условие (10.82б) принимает вид

$$\mathbf{x}^T(t_f)K(t_f)\mathbf{x}(t_f) + k(t_f) = \mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f).$$

Это равенство возможно, если

$$K(t_f) = F, \quad k_0(t_f) = 0.$$

Таким образом, и граничное условие (10.85в) получено. Теорема доказана.

10.5.3. Стохастическая оптимальная линейная система при неполной информации о состоянии. Принцип разделения.

Постановка задачи. Пусть уравнения объекта и наблюдения и критерий оптимальности имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (10.88a)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + \mathbf{V}_n, \quad (10.88б)$$

$$J = M \left[\mathbf{x}^T(t_f)F\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t)] dt \right]. \quad (10.88в)$$

Здесь $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_n$ — гауссовы белые шумы, $\mathbf{x}^0$ — гауссова случайная величина; $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_n$ и $\mathbf{x}^0$ не коррелированы и имеют следующие характеристики:

$$M\mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{x}}^0, \quad M[(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0,$$

$$M[\mathbf{V}_0(t)] = \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_0(t)\mathbf{V}_0^T(t')] = Q_0(t)\delta(t - t'),$$

$$M[\mathbf{V}_n(t)] = \mathbf{0}, \quad M[\mathbf{V}_n(t)\mathbf{V}_n^T(t')] = R_0(t)\delta(t - t');$$

матрицы A , B , Q и R , вообще говоря, являются функциями времени, R , R_0 — положительно определенные матрицы, Q , P_0 , Q_0 — положительно полуопределенные матрицы.

Требуется найти управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}\{\mathbf{y}(\tau), t_0 \leq \tau \leq t\}, \quad t_0 \leq t \leq t_f,$$

при котором критерий оптимальности (10.88в) принимает минимальное значение.

Эта задача отличается от задачи стохастического оптимального управления с полной информацией тем, что в данном случае управле-

ние формируется на основе информации, получаемой путем обработки измеряемой с помехой выходной переменной.

Теорема 10.5. *Стохастическое оптимальное управление с обратной связью для объекта (10.88а), (10.88б) при критерии оптимальности (10.88в) имеет вид*

$$\mathbf{u} = R^{-1}B^TK\hat{\mathbf{x}}, \quad (10.89a)$$

где K — симметрическая матрица, которая определяется из матричного уравнения Риккати

$$\dot{K} = -KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - Q \quad (10.89б)$$

при граничном условии

$$K(t_f) = F; \quad (10.89в)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ — оптимальная оценка, которая определяется с помощью фильтра Калмана–Бьюси:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad (10.90a)$$

$$K^0 = PC^TR_0^{-1}, \quad (10.90б)$$

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0, \quad P(t_0) = P_0. \quad (10.90в)$$

Оптимальный закон управления (10.89) совпадает с оптимальным законом управления (9.74), (9.75) в детерминированном случае и со стохастическим оптимальным управлением (10.85) при полной информации лишь с тем отличием, что в законе управления (10.89а) используется не сам фазовый вектор, а его оценка, которая получается на выходе фильтра Калмана–Бьюси.

Таким образом, при неполной информации стохастически оптимальный регулятор состоит из оптимального фильтра (фильтра Калмана–Бьюси) и детерминированного оптимального регулятора

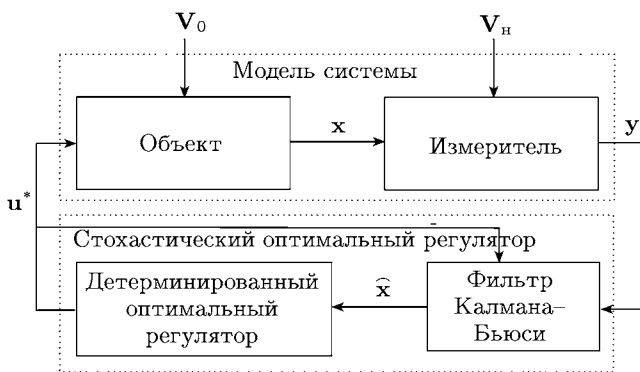


Рис. 10.7. Стохастическая оптимальная система при неполной информации

(рис. 10.7). Этот результат известен как *принцип разделения* [29], или *принцип стохастической эквивалентности* [13]. В соответствии с этим принципом задача синтеза стохастической оптимальной системы

управления при неполной информации сводится к двум задачам: к задаче синтеза фильтра Калмана–Бьюси и задаче синтеза детерминированной оптимальной системы. Если шумы и начальное состояние подчиняются нормальному закону распределения, то в результате такого синтеза получим стохастическую оптимальную систему, в противном случае (когда шумы и начальное состояние подчиняются другим законам) можно гарантировать только, что полученная таким путем система будет оптимальной в классе линейных систем.

Доказательство. Докажем прежде всего, что ошибка $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ и оценка $\hat{\mathbf{x}}$ не коррелированы. Подставим в уравнение (10.90а) выражения для $\mathbf{y}$ из (10.88б) и $\mathbf{u}$ из (10.89а):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}^*)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}^0\mathbf{C}\mathbf{e} + \mathbf{K}^0\mathbf{V}_n. \quad (10.91)$$

Здесь

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}.$$

Вычитая из уравнения объекта (10.88а) уравнение для оценки (10.90а), с учетом (10.88б) получим

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}^0\mathbf{C})\mathbf{e} + \mathbf{V}_0 - \mathbf{K}^0\mathbf{V}_n. \quad (10.92)$$

Запишем это уравнение совместно с уравнением для оценки (10.91) в виде одного уравнения

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{H}\mathbf{V}, \quad (10.93а)$$

где

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{K}^0\mathbf{C} & 0 \\ \mathbf{K}^0\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{BK}^* \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K}^0 \\ 0 & \mathbf{K}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_n \end{pmatrix}. \quad (10.93б)$$

Найдем корреляционную функцию $K_z(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_z(t)$ для рассматриваемого процесса. По формуле Коши решение уравнения (10.93а) имеет вид

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z}(t, t_0)\mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{Z}(t, \tau)\mathbf{H}(\tau)\mathbf{V}(\tau) d\tau,$$

где $\mathbf{Z}(t, t_0)$ — нормированная фундаментальная матрица (см. (1.7)). Фундаментальная матрица удовлетворяет однородному уравнению (10.93а):

$$\dot{\mathbf{Z}}(t, t_0) = \mathbf{G}\mathbf{Z}(t, t_0). \quad (10.94)$$

Так как

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{M}[\mathbf{z}] = \mathbf{Z}(t, t_0)\mathbf{M}[\mathbf{z}(t_0)] = \mathbf{Z}(t, t_0)\bar{\mathbf{z}}^0,$$

то

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(t, t_0)\tilde{\mathbf{z}}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{Z}(t, \tau)\mathbf{H}(\tau)\mathbf{V}(\tau) d\tau.$$

Поэтому для корреляционной функции в силу (10.55) имеем

$$K_z(t_1, t_2) = M[\tilde{\mathbf{z}}(t_1)\tilde{\mathbf{z}}^T(t_2)] = Z(t_1, t_0)D_z(t_0)Z^T(t_2, t_0) + \\ + M\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} Z(t_1, \tau_1)H(\tau_1)\mathbf{V}(\tau_1)(Z(t_2, \tau)H(\tau)\mathbf{V}(\tau))^T d\tau_1 d\tau\right].$$

Выполнив операцию математического ожидания под интегралом, получим

$$K_z(t_1, t_2) = Z(t_1, t_0)D_z(t_0)Z^T(t_2, t_0) + \\ + \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} Z(t_1, \tau)H(\tau)S(\tau)H^T(\tau)Z^T(t_2, \tau) d\tau,$$

где $S(t)$ — интенсивность шума $V(t)$. Отсюда, положив $t_1 = t_2 = t$, для дисперсии получим

$$D_z(t) = Z(t, t_0)D_z(t_0)Z^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t Z(t, \tau)H(\tau)S(\tau)H^T(\tau)Z^T(t, \tau) d\tau. \quad (10.95)$$

Используя тождество $Z(t_2, \tau) = Z(t_2, t_1)Z(t_1, \tau)$ (см. (1.8a)), при $t_2 \geq t_1$ формулу для корреляционной функции можно преобразовать следующим образом:

$$K_z(t_1, t_2) = Z(t_1, t_0)D_z(t_0)Z^T(t_1, t_0)Z^T(t_2, t_1) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} Z(t_1, \tau)H(\tau)S(\tau)H^T(\tau)Z^T(t_1, \tau) d\tau Z^T(t_2, t_1) = \\ = \left[Z(t_1, t_0)D_z(t_0)Z^T(t_1, t_0) + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} Z(t_1, \tau)H(\tau)S(\tau)H^T(\tau)Z^T(t_1, \tau) d\tau \right] Z^T(t_2, t_1),$$

или, учитывая (10.95),

$$K_z(t_1, t_2) = D_z(t_1)Z^T(t_2, t_1), \quad t_2 \geq t_1.$$

Аналогично, используя тождество $Z(t_1, \tau) = Z(t_1, t_2)Z(t_2, \tau)$, при $t_1 \geq t_2$ получим

$$K_z(t_1, t_2) = Z(t_1, t_2)D_z(t_2), \quad t_1 \geq t_2.$$

Запишем полученные выражения для корреляционной функции в виде одной формулы:

$$K_z(t_1, t_2) = \begin{cases} D_z(t_1)Z^T(t_2, t_1), & t_2 \geq t_1, \\ Z(t_1, t_2)D_z(t_2), & t_1 \geq t_2. \end{cases} \quad (10.96)$$

Продифференцируем обе части равенства (10.95) по t :

$$\begin{aligned}\dot{D}_z(t) &= \dot{Z}(t, t_0) D_z(t_0) Z^T(t, t_0) + Z(t, t_0) D_z(t_0) \dot{Z}^T(t, t_0) + \\ &+ H(t) S(t) H^T(t) + \int_{t_0}^t \dot{Z}(t, \tau) H(\tau) S(\tau) H^T(\tau) Z^T(t, \tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t Z(t, \tau) H(\tau) S(\tau) H^T(\tau) \dot{Z}^T(t, \tau) d\tau.\end{aligned}$$

Подставив сюда выражение для производной фундаментальной матрицы из (10.94) и учитывая соотношение (10.95), получим

$$\dot{D}_z = G D_z + D_z G + H S H^T. \quad (10.97)$$

Найдем интенсивность S шума V (см. (10.936):

$$\begin{aligned}M[\mathbf{V}(t) \mathbf{V}^T(t')] &= M \left[\begin{pmatrix} \mathbf{V}_0(t) \\ \mathbf{V}_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0(t') \\ \mathbf{V}_n(t') \end{pmatrix}^T \right] = \\ &= M \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(t) \mathbf{V}_0^T(t') & \mathbf{V}_0(t) \mathbf{V}_n^T(t') \\ \mathbf{V}_n(t) \mathbf{V}_0^T(t') & \mathbf{V}_n(t) \mathbf{V}_n^T(t') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0(t) & 0 \\ 0 & R_0(t) \end{bmatrix} \delta(t - t'), \quad (10.98) \\ S(t) &= \begin{bmatrix} Q_0(t) & 0 \\ 0 & R_0(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Представим дисперсионную матрицу D_z в виде блочной матрицы:

$$D_z = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}.$$

Используя это представление и соотношения (10.936) и (10.98), уравнение (10.97) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{D}_{11} & \dot{D}_{12} \\ \dot{D}_{21} & \dot{D}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - K^0 C & 0 \\ K^0 C & A - B K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - K^0 C & 0 \\ K^0 C & A - B K^* \end{bmatrix}^T + \\ &+ \begin{bmatrix} I & -K^0 \\ 0 & K^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -K^0 \\ 0 & K^0 \end{bmatrix}^T.\end{aligned}$$

Так как нас интересует корреляция между оценкой и ошибкой, выпишем уравнение для взаимной дисперсионной матрицы:

$$\dot{D}_{12} = (A - K^0 C) D_{12} + D_{12} (A - B K^*)^T + D_{11} C^T K^{0T} - K^0 R_0 K^{0T}.$$

Так как $D_{11} = P$ и $K^0 = P C^T R_0^{-1}$, то последние два слагаемых сокращаются, и уравнение становится линейным и однородным. И силу начального условия $D_{12}(t_0) = M[\mathbf{e}(t_0) \hat{\mathbf{x}}^T(t_0)] = 0$ оно имеет единственное решение $D_{12}(t) = 0$. Следовательно, оценка и ошибка не коррелированы.

Теперь преобразуем критерий оптимальности. Как легко проверить, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются произвольными векторами (столбцами) одинакового размера, то имеет место равенство $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \text{tr}(\mathbf{b} \mathbf{a}^T)$. Используя это равенство, получаем

$$M[\mathbf{e}^T Q \mathbf{e}] = \text{tr} M[\mathbf{e} \mathbf{e}^T Q] = \text{tr}(PQ),$$

$$M[\mathbf{e}^T Q \hat{\mathbf{x}}] = \text{tr} M[\hat{\mathbf{x}} \mathbf{e}^T Q] = \text{tr}(D_{12}Q) = 0.$$

В силу этих соотношений имеем

$$\begin{aligned} M[\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}] &= M[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}})^T Q (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}})] = \\ &= M[\mathbf{e}^T Q \mathbf{e}] + 2M[\mathbf{e}^T Q \hat{\mathbf{x}}] + M[\hat{\mathbf{x}}^T Q \hat{\mathbf{x}}] = \text{tr}(PQ) + M[\mathbf{x}^T Q \hat{\mathbf{x}}], \\ M[\mathbf{x}^T(t_f) F \mathbf{x}(t_f)] &= \text{tr}(P(t_f)F) + M[\hat{\mathbf{x}}^T(t_f) F \hat{\mathbf{x}}(t_f)]. \end{aligned}$$

Поэтому критерий оптимальности можно преобразовать к виду

$$J = M \left[\hat{\mathbf{x}}^T(t_f) F \hat{\mathbf{x}}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\hat{\mathbf{x}}^T Q \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \right] + \text{tr} \left[P(t_f) F + \int_{t_0}^{t_f} P Q dt \right].$$

Второе слагаемое не зависит от управления, и его можно отбросить.

Таким образом, исходная задача свелась к задаче стохастического оптимального управления с полной информацией (10.84)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + K^0(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}^0;$$

$$J = M \left[\hat{\mathbf{x}}^T(t_f) F \hat{\mathbf{x}}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\hat{\mathbf{x}}^T Q \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \right] \rightarrow \min_{\mathbf{u}}.$$

Здесь слагаемое $K^0(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}})$ соответствует шуму объекта $\mathbf{V}_0$. И если это слагаемое или $\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}$ является белым шумом, то решение этой задачи, как следует из теоремы 10.4, определяется соотношениями (10.89). Так что осталось показать, что невязка $\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}$ является белым шумом.

Невязка будет белым шумом, если интеграл от нее, или стохастический процесс $\boldsymbol{\eta}(t)$, определяемый уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\eta}(t_0) = 0,$$

является процессом с ортогональными приращениями, т. е. его корреляционная функция имеет вид (10.5). Чтобы доказать это, рассмотрим совместно процессы $\boldsymbol{\eta}(t)$ и $\mathbf{e}(t)$. Подставив выражение для $\mathbf{y}$, последнее уравнение можно преобразовать к виду $\dot{\boldsymbol{\eta}} = C\mathbf{e} + \mathbf{V}_n$. Это уравнение совместно с уравнением (10.92) для ошибки можно опять записать в виде

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \tilde{G} \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{H} \mathbf{V},$$

где

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A - K^0 C \end{bmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -K^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_n \end{pmatrix}.$$

Дисперсионное уравнение (10.97) в данном случае примет вид

$$\dot{D}_{\tilde{z}} = \tilde{G}D_{\tilde{z}} + D_{\tilde{z}}\tilde{G}^T + \tilde{H}S\tilde{H}^T.$$

Если дисперсионную матрицу представить в виде

$$D_{\tilde{z}} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix},$$

то последнее уравнение можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{D}}_{11} & \dot{\tilde{D}}_{12} \\ \dot{\tilde{D}}_{21} & \dot{\tilde{D}}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A - K^0 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C^T & A^T - C^T K^{0T} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -K^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -K^{0T} \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} \tilde{D}_{11}(t_0) & \tilde{D}_{12}(t_0) \\ \tilde{D}_{21}(t_0) & \tilde{D}_{22}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.99)$$

Здесь $\tilde{D}_{11}$ — дисперсионная матрица случайного процесса $\boldsymbol{\eta}(t)$, $\tilde{D}_{22}$ — дисперсионная матрица ошибки ($\tilde{D}_{22} = P$); $\tilde{D}_{11}(t_0) = \tilde{D}_{12}(t_0) = \tilde{D}_{21}(t_0) = 0$, так как $\boldsymbol{\eta}(t_0) = 0$. Из уравнения (10.99) имеем

$$\dot{\tilde{D}}_{11} = C\tilde{D}_{12} + \tilde{D}_{12}C^T + R_0, \quad \tilde{D}_{11}(t_0) = 0,$$

$$\dot{\tilde{D}}_{12} = C\tilde{D}_{22} + \tilde{D}_{12}(A^T - C^T K^{0T}) - R_0 K^{0T}, \quad \tilde{D}_{12}(t_0) = 0.$$

В силу равенств $\tilde{D}_{22} = P$ и $K^0 = PC^T R_0^{-1}$ в правой части второго уравнения первое и последнее слагаемые сокращаются. Поэтому оно становится однородным и в силу нулевого начального условия имеет единственное решение $\tilde{D}_{12}(t) = 0$. Уравнение для $\tilde{D}_{11}$ принимает вид

$$\dot{\tilde{D}}_{11} = R_0, \quad \tilde{D}_{11}(t_0) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{D}_{11} = \int_{t_0}^t R_0(\tau) d\tau.$$

Для корреляционной матрицы имеем (см. (10.96))

$$K_{\tilde{\mathbf{z}}}(t_1, t_2) = \begin{cases} D_{\tilde{\mathbf{z}}}(t_1)\tilde{Z}^T(t_2, t_1), & t_2 \geq t_1, \\ \tilde{Z}(t_1, t_2)D_{\tilde{\mathbf{z}}}(t_2), & t_1 \geq t_2. \end{cases} \quad (10.100)$$

Здесь $Z(t, t_0)$ — нормированная фундаментальная матрица уравнения

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \tilde{G}\tilde{\mathbf{z}},$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A - K^0 C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}. \quad (10.101)$$

Представим фундаментальную матрицу $\tilde{Z}(t, t_0)$ в виде блочной матрицы:

$$\tilde{Z}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{11}(t, t_0) & \tilde{Z}_{12}(t, t_0) \\ \tilde{Z}_{21}(t, t_0) & \tilde{Z}_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

Тогда решение однородного уравнения (10.101) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(t) &= \tilde{Z}_{11}(t, t_0)\boldsymbol{\eta}(t_0) + \tilde{Z}_{12}(t, t_0)\mathbf{e}(t_0), \\ \mathbf{e}(t) &= \tilde{Z}_{21}(t, t_0)\boldsymbol{\eta}(t_0) + \tilde{Z}_{22}(t, t_0)\mathbf{e}(t_0). \end{aligned}$$

С другой стороны, из уравнений (см. (10.101))

$$\dot{\mathbf{e}} = (A - K^0 C)\mathbf{e}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = C\mathbf{e}$$

находим

$$\mathbf{e}(t) = E_{22}(t, t_0)\mathbf{e}(t_0), \quad \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}(t_0) + \int_{t_0}^t E_{22}(\tau, t_0) d\tau C\mathbf{e}(t_0),$$

где $E_{22}(t, t_0)$ — нормированная фундаментальная матрица первого из двух приведенных уравнений. Поэтому имеем

$$\tilde{Z}_{11}(t, t_0) = I, \quad \tilde{Z}_{12}(t, t_0) = \int_{t_0}^t E_{22}(\tau, t_0) d\tau,$$

$$\tilde{Z}_{21}(t, t_0) = 0, \quad \tilde{Z}_{22}(t, t_0) = E_{22}(t, t_0).$$

Представим корреляционную матрицу $K_{\bar{z}}(t_1, t_2)$ в виде блочной матрицы:

$$K_{\bar{z}}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} K_{11}(t_1, t_2) & K_{12}(t_1, t_2) \\ K_{21}(t_1, t_2) & K_{22}(t_1, t_2) \end{bmatrix}.$$

Используя также блочное представление матриц $D_{\bar{z}}(t)$ и $\tilde{Z}(t, t_0)$, из (10.100) для корреляционной матрицы $K_{11}(t, t_0)$ находим:

при $t_1 \leq t_2$

$$K_{11}(t_1, t_2) = \tilde{D}_{11}(t_1)\tilde{Z}_{11}^T(t_2, t_1) + \tilde{D}_{12}(t_1)\tilde{Z}_{21}^T(t_2, t_1);$$

при $t_2 \leq t_1$

$$K_{11}(t_1, t_2) = \tilde{Z}_{11}(t_1, t_2)\tilde{D}_{11}(t_2) + \tilde{Z}_{12}(t_1, t_2)\tilde{D}_{21}(t_2).$$

Так как $\tilde{D}_{12}(t) = \tilde{D}_{21}(t) = 0$ и $\tilde{Z}_{11}(t, t_0) = I$, то, объединяя полученные соотношения для корреляционной функции $K_{11}(t, t_0)$, получаем

$$K_{11}(t_1, t_2) = \begin{cases} \tilde{D}_{11}(t_1) = K_{11}(t_1, t_1), & t_1 \leq t_2, \\ \tilde{D}_{11}(t_2) = K_{11}(t_2, t_2), & t_2 \leq t_1. \end{cases}$$

Матрица $K_{11}(t_1, t_2)$ является корреляционной функцией для процесса $\eta(t)$ и имеет вид корреляционной функции для процесса с ортогональными приращениями (10.5). Следовательно, разность $y - C\hat{x}$ является белым шумом, что и требовалось доказать.

Задачи

1. Определить систематическую и среднеквадратическую ошибки системы (рис. 10.8) в установившемся режиме при следующих исходных данных ($G(t)$ и $F(t)$ не коррелированы):

$$\text{а) } W_1(p) = 2, \quad W_2(p) = \frac{5}{(0,1p+1)p}, \quad G(t) = 0,2t, \quad M[F] = 0,5, \\ K_f(\tau) = e^{-0,1|\tau|};$$

$$\text{б) } W_1(p) = 2 + \frac{1}{p}, \quad W_2(p) = \frac{5}{0,1p+1}, \quad G(t) = 0,2t, \quad M[F] = 0,5, \\ K_f(\tau) = 0,5e^{-0,1|\tau|};$$

$$\text{в) } W_1(p) = 2, \quad W_2(p) = \frac{5}{(0,1p+1)p}, \quad M[G(t)] = 0,2t, \\ K_g(\tau) = e^{-0,1|\tau|}, \quad M[F] = 0,5, \quad K_f(t, \tau) = 0,5\delta(t - \tau);$$

$$\text{г) } W_1(p) = 2 + \frac{1}{p}, \quad W_2(p) = \frac{5}{0,1p+1}, \quad M[G(t)] = 0,2t, \\ K_g(\tau) = e^{-0,1|\tau|}, \quad M[F] = 0,5, \quad K_f(t, \tau) = 0,5\delta(t - \tau);$$

$$\text{д) } W_1(p) = 2 + \frac{1}{p}, \quad W_2(p) = \frac{5}{0,1p+1}, \\ G(t) = 0,5 + H(t) \quad (H(t) \text{ — помеха}), \quad M[H(t)] = 0,5, \\ K_h(\tau) = 0,5e^{-0,1|\tau|}, \quad M[F] = 2, \quad K_f(t, \tau) = 0,5\delta(t - \tau).$$

2. Дана система (см. рис. 10.8) с передаточными функциями

$$W_1 = k, \quad W_2 = \frac{1}{(0,1p+1)p}.$$

Задающее воздействие $G(t)$ является детерминированной функцией, возмущение $F(t)$ — белым шумом с интенсивностью N_0 .

Определить параметр k , при котором переходный процесс является апериодическим и среднеквадратическая ошибка в установившемся режиме принимает минимальное значение.

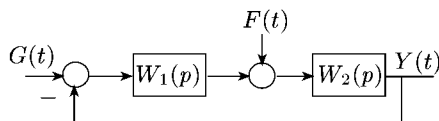


Рис. 10.8. Структурная схема к задачам

3. Дана система (см. рис. 10.8) с передаточными функциями

$$W_1 = k, \quad W_2 = \frac{1}{(0,1p+1)p}.$$

Задающее воздействие $G(t)$ является детерминированной функцией, возмущение $F(t)$ — случайным процессом с корреляционной функцией $K_f(\tau) = 0,1 e^{-|\tau|}$.

Определить параметр k , при котором переходный процесс является аperiodическим и среднеквадратическая ошибка в установившемся режиме принимает минимальное значение.

4. Определить передаточную функцию формирователя, предназначенного для получения из белого шума с единичной интенсивностью случайного процесса со следующими спектральными плотностями:

$$\text{а) } S(\omega) = \frac{4}{(\omega^2 + 1)(\omega^4 + 5\omega^2 + 6)}; \quad \text{б) } S(\omega) = \frac{4(\omega^2 + 9)}{(\omega^2 + 1)(\omega^4 + 5\omega^2 + 6)};$$

$$\text{в) } S(\omega) = \frac{4(\omega^4 + 6\omega^2 + 9)}{(\omega^2 + 1)(\omega^4 + 5\omega^2 + 6)}; \quad \text{г) } S(\omega) = \frac{4(\omega^4 + 6\omega^2 + 9)}{(\omega^2 + 1)(\omega^4 + 20\omega^2 + 64)}.$$

5. Принимается сигнал $X(t) = S(t) + N(t)$, где $S(t)$ — полезный сигнал, $N(t)$ — помеха. Синтезировать (определить передаточную функцию) фильтр Винера при следующих характеристиках (спектральных плотностях) сигнала и помехи:

$$\text{а) } S_s(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 1}, \quad S_n(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 4}, \quad S_{sn}(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 1};$$

$$\text{б) } S_s(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 4}, \quad S_n(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 1}, \quad S_{sn}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 4}.$$

6. Принимается сигнал $X(t) = S(t) + N(t)$, где $S(t)$ — полезный сигнал, $N(t)$ — помеха. Синтезировать фильтр Винера при следующих характеристиках (корреляционных функциях) сигнала и помехи:

$$\text{а) } K_s(\tau) = e^{-|\tau|}, \quad K_n(\tau) = e^{-4|\tau|}, \quad K_{sn}(\tau) = 0;$$

$$\text{б) } K_s(\tau) = 4e^{-0,1|\tau|}, \quad K_n(\tau) = e^{-0,4|\tau|}, \quad K_{sn}(\tau) = 0;$$

$$\text{в) } K_s(\tau) = e^{-0,4|\tau|}, \quad K_n(\tau) = 4e^{-0,1|\tau|}, \quad K_{sn}(\tau) = 0.$$

7. Синтезировать фильтр Калмана–Бьюси при следующих исходных данных:

а) $\dot{x} = x + V_0$, $M[x(0)] = \bar{x}_0$, $M[(x(0) - \bar{x}_0)^2] = p_0$, $y = x + V_n$; V_0 и V_n — белые шумы с интенсивностями q и r соответственно; $x(0)$, V_0 и V_n между собой не коррелированы;

б) $\dot{x} = x + u + V_0$, $M[x(0)] = \bar{x}_0$, $M[(x(0) - \bar{x}_0)^2] = p_0$, $y = x + V_n$; V_0 и V_n — белые шумы с интенсивностями q и r соответственно, их взаимная интенсивность равна S ; начальное значение $x(0)$ с шумами V_0 и V_n не коррелировано;

в) $\dot{x} = x + z$, $M[x(0)] = \bar{x}_0$, $M[(x(0) - \bar{x}_0)^2] = p_0$, $y = x + V_n$; z — случайный процесс с корреляционной функцией $K_z(\tau) = 2e^{-0,2|\tau|}$ и V_n — белый шум с интенсивностью r ; $x(0)$, z и V_n между собой не коррелированы;

г) $\dot{x} = x + u + V_0$, $M[x(0)] = \bar{x}_0$, $M[(x(0) - \bar{x}_0)^2] = p_0$, $y = x + z$; V_0 — белый шум с интенсивностью q и z — случайный процесс с корреляционной функцией $K_z(\tau) = 2e^{-0,2|\tau|}$; $x(0)$, V_0 и z между собой не коррелированы;

д) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u + V_{02}$, $M[\mathbf{x}(0)] = \bar{\mathbf{x}}^0$, $M[(\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0$, $y_1 = x_1 + V_n$, $y_2 = x_1 + x_2$; V_{02} и V_n — белые шумы с интенсивностями q и r соответственно; $x(0)$, V_0 и V_n между собой не коррелированы.

8. Синтезировать стохастически оптимальный линейный регулятор при следующих исходных данных:

а) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u + V_{02}$, $M[\mathbf{x}(0)] = \bar{\mathbf{x}}^0$, $M[(\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0$; V_{02} — белый шум с интенсивностью q ; $x(0)$ и V_{02} между собой не коррелированы; фазовые координаты полностью наблюдаемы (без помех); критерий оптимальности имеет вид

$$J = M \left[x_1^2(10) + \int_0^{10} (x_1^2 + u^2) dt \right];$$

б) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u + V_{02}$, $M[\mathbf{x}(0)] = \bar{\mathbf{x}}^0$, $M[(\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0$, $y_1 = x_1 + V_n$; V_{02} и V_n — белые шумы с интенсивностями q_2 и r соответственно; $x(0)$, V_{02} и V_n между собой не коррелированы; критерий оптимальности имеет вид

$$J = M \left[x_1^2(10) + \int_0^{10} (x_1^2 + u^2) dt \right];$$

в) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u + V_{02}$, $M[\mathbf{x}(0)] = \bar{\mathbf{x}}^0$, $M[(\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^0)(\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^0)^T] = P_0$, $y_1 = x_1 + V_n$; V_{02} и V_n — белые шумы с интенсивностями q_2 и r соответственно, их взаимная интенсивность равна s ; начальное значение $\mathbf{x}(0)$ с шумами V_{02} и V_n не коррелированно; критерий оптимальности имеет вид

$$J = M \left[x_1^2(10) + \int_0^{10} (x_1^2 + u^2) dt \right].$$

Глава 11

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

11.1. Общие положения. Постановка задачи

Система управления называется *адаптивной*, если в ней текущая информация, помимо выработки управляющего воздействия, используется также для изменения алгоритма управления. В обычных (неадаптивных) системах управления текущая информация используется только для формирования управляющего воздействия.

Адаптивная система, если структура алгоритма не изменяется, а изменяются только его параметры, называется *самоадаптивной системой* (СНС); если изменяется структура, адаптивная система называется *самоорганизующейся системой*.

Адаптивные системы управления используются, когда с помощью обычных систем не удается справиться с поставленной задачей. А это обычно происходит, когда начальной (априорной) информации об объекте недостаточно или характеристика объекта в процессе функционирования системы изменяется непредвиденным образом в широких пределах.

Исследования по построению адаптивных систем управления начались в начале 50-х годов прошлого столетия в связи с построением автопилотов для новых самолетов, высота и скорости которых изменяются в широких пределах [69]. Однако первые попытки применения принципов адаптивного управления при построении автопилота закончились неудачей, что привело к снижению интереса к адаптивному управлению на какое-то время. После небольшого перерыва исследования по адаптивному управлению продолжились. Особенно интенсивно теория адаптивного управления развивалась в конце прошлого века, и тогда были достигнуты большие успехи в этом направлении. Сначала практическое применение разработанных алгоритмов адаптивного управления сдерживалось из-за их сложности. Однако в последнее время в связи с большими возможностями современных вычислительных устройств (при их сравнительной дешевизне) методы адаптивного управления нашли практические применения в таких областях, как робототехника, управление самолетами и ракетами, энергетическая система, управление сложными технологическими процессами [62, 69].

11.1.1. Назначение адаптивных систем управления. Как отмечалось выше, необходимость адаптивного управления возникает, когда недостаточна априорная информация или динамические характеристики объекта в процессе функционирования системы управления изменяется в широких пределах. Такая ситуация возникает во многих производствах.

Аэродинамические характеристики самолетов зависят от скорости и высоты полета, от атмосферных условий, в которых происходит полет. И во время полета отдельные параметры, определяющие динамические свойства самолета, могут изменяться в десятки раз. В этих условиях с задачей качественного управления самолетом обычные автопилоты могут не справиться.

Модели технологических процессов в металлургии, химии, нефтехимии являются сложными. Их параметры и, возможно, структуры из-за недостаточной априорной информации не всегда известны. Кроме того, эти параметры могут изменяться во время протекания технологического процесса в указанных отраслях. Поэтому обычные системы управления во многих случаях не могут обеспечить качественного, а иногда и просто устойчивого управления такими технологическими процессами [62].

При разработке унифицированных регуляторов для широкого класса объектов параметры регуляторов заранее не могут быть точно рассчитаны и установлены. Поэтому если эти регуляторы являются неадаптивными, то при их использовании в каждом конкретном случае они требуют настройки. Использование адаптивных регуляторов избавит пользователей от этой процедуры, что позволит сэкономить их время и «силы».

В большинстве случаев адаптивное управление преследует цель нейтрализации параметрической неопределенности или неизбежных изменений параметров объекта. Однако в некоторых случаях, в особенности при управлении технологическими процессами, где могут присутствовать сотни управляющих контуров, адаптивное управление также используется, чтобы уменьшить число конструктивных параметров ручной настройки и тем самым увеличить эффективность и практичность системы управления.

Резюмируя изложенное, можно утверждать, что применение принципов адаптивного управления позволит [49, 4]:

- обеспечить оптимальный режим работы системы управления в условиях неполной информации;
- обеспечить работоспособность системы управления в условиях изменения динамических свойств объекта в широких пределах;
- создать унифицированные регуляторы для широкого класса объектов;
- снизить технологические требования к изготовлению отдельных узлов и элементов;
- сократить сроки разработки и наладки систем.

11.1.2. Структура и типы адаптивных систем управления.

В этой книге рассматриваются только самонастраивающиеся системы управления. И дальше под адаптивными системами управления будем подразумевать именно такие системы управления.

Адаптивные системы управления включают объект, регулятор и адаптор (рис. 11.1). Объект O и регулятор P , вырабатывающий управляющее воздействие на объект, образуют *основной контур*. Регулятор содержит варьируемые параметры. Адаптор A на основе обработки доступной ему информации вырабатывает управляющее воздействие, производящее подстройку варьируемых параметров регулятора. Регулятор совместно с адаптором образуют *адаптивный регулятор*.

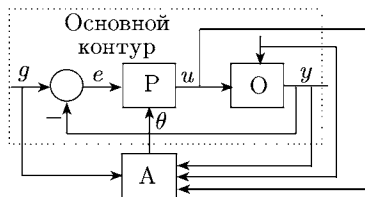


Рис. 11.1. Блок-схема самонастраивающейся системы

Как видим, адаптивная система управления имеет иерархическую структуру: она имеет два уровня. Основной контур образует первый (низший) уровень, а контур, содержащий адаптор и называемый *контуром адаптации*, — второй уровень. В общем случае возможны три и больше уровней.

В частности, если для синтеза адаптора в завершенном виде априорной информации недостаточно и, допустим, какие-либо его параметры должны уточняться в процессе функционирования системы, потребуется третий уровень — контур адаптации адаптора. Адаптор выполняет двоякую функцию: изучение объекта и настройку регулятора. По способу изучения объекта адаптивные системы делятся на поисковые и беспоисковые.

Адаптивная система управления называется *поисковой*, если в нее для изучения объекта подаются специальные (поисковые) сигналы, и *беспоисковой*, если в систему никаких поисковых сигналов для изучения объекта не подается. Среди поисковых систем широко распространены *экстремальные системы*. Отличительным признаком таких систем является наличие у статических характеристик их объектов управления явно выраженного экстремума. При этом положение экстремума под влиянием различных факторов может меняться. Целью управления в экстремальных системах управления является поддержание экстремума на их выходе. И для определения управляющих воздействий, обеспечивающих движение к экстремуму, к управляющему сигналу добавляется поисковый сигнал.

Беспоисковые адаптивные системы управления по способу получения информации для подстройки параметров регулятора делятся на *адаптивные системы управления* (или *самонастраивающиеся системы* (СНС)) с *эталонной моделью* и *идентификатором*. Адаптивные системы управления с эталонной моделью содержат динамическую модель системы, обладающую требуемым качеством и называемую

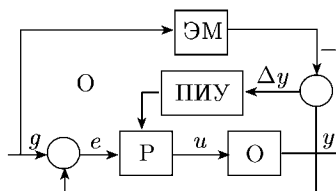


Рис. 11.2. СНС с эталонной моделью

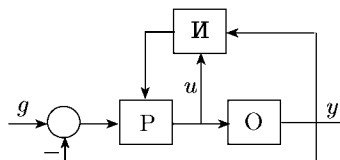


Рис. 11.3. СНС с идентификатором

эталонной моделью (рис. 11.2). Адаптивная система управления с эталонной моделью (ЭМ), кроме основного контура, содержащего регулятор (Р) и объект (О), включает контур с ЭМ и преобразовательно-исполнительное устройство (ПИУ). Эталонная модель вырабатывает желаемый (эталонный) выходной сигнал.

Преобразовательно-исполнительное устройство (его также называют механизмом адаптации) обрабатывает разностный сигнал (разность между фактическим и эталонным сигналами) и производит подстройку параметров регулятора. Выбор эталонной модели является частью процесса синтеза адаптивной системы управления.

Эталонная модель должна удовлетворять двум требованиям: с одной стороны, она должна отражать все требования к качеству синтезируемой системы, с другой стороны, эталонная реакция должна быть достижима для основного контура. Последнее требование накладывает ограничения на структуру эталонной модели, определяемой предполагаемой структурой основного контура.

Регулятор должен обладать идеальной следящей способностью. Другими словами, закон (алгоритм) управления должен быть таким, чтобы существовали такие значения его параметров, называемые *идеальными*, при которых передаточная функция основного контура относительно задающего воздействия и выхода равна передаточной функции эталонной модели. Принцип работы адаптивной системы с ЭМ состоит в том, чтобы адаптор обеспечивал сходимость к нулю ошибки слежения — разность между выходными сигналами основного контура и эталонной модели.

Адаптивные системы управления с идентификатором в контуре адаптации содержат идентификатор И (рис. 11.3), который служит для идентификации (определения) неизвестных параметров объекта на основе изучения входного и выходного сигналов объекта. Полученная идентификатором информация затем используется для определения нужных значений параметров регулятора и их подстройки.

Возможны два способа адаптивного управления с идентификатором: прямой и непрямой. При *непрямом* адаптивном управлении сначала получается оценка параметров объекта, а затем на основе полученных оценок определяются требуемые значения параметров регулятора и производится их подстройка. При *прямом* адаптивном управлении исключается этап идентификации параметров объекта.

В этом случае, учитывая, что между параметрами регулятора и объекта имеется связь, определяемая выбранным законом управления, производится непосредственная оценка и прямая подстройка параметров регулятора.

11.1.3. Общая постановка задачи адаптивного управления.

Пусть объект с неопределенными параметрами описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, t), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),\end{aligned}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор состояния, $\mathbf{u}$ — управление, $\boldsymbol{\xi}$ — вектор неизвестных параметров, $\mathbf{y}$ — выход. При синтезе адаптивной системы цель управления обычно задается в виде достижения экстремума некоторого критерия (функционала) [49], обеспечения неравенства [45, 58]

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, t) \leq \Delta$$

или предельного соотношения

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Здесь $Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, t)$ — функция или функционал, $\boldsymbol{\theta}$ — вектор варьируемых (подстраиваемых) параметров регулятора.

Приведенные соотношения называются *целевыми условиями*, а $Q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, t)$ — *целевой функцией*.

Целевое условие, заданное в виде неравенства, должно выполняться по прошествии определенного времени. Минимальное время t , по прошествии которого указанное условие выполняется при любом $t \geq t$, называется *временем адаптации*.

В зависимости от того, какие переменные доступны измерению (наблюдению) и могут быть использованы в алгоритмах управления и адаптации, различают задачи адаптивного управления по состоянию и по выходу.

Задача адаптивного управления по состоянию ставится следующим образом: при заданных уравнений объекта и целевом условии определить алгоритм адаптивного управления

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{U}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t), \\ \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t),\end{aligned}$$

при котором адаптивная система глобально устойчива (т. е. устойчива по Ляпунову и все переменные ограничены при любом начальном условии) и выполняется целевое условие.

Первое из приведенных соотношений называется *алгоритмом управления* и является алгоритмом управления основного контура, а второе — *алгоритмом адаптации*.

Название «адаптивное управление по состоянию» обусловлено тем, что в алгоритме управления и алгоритме адаптации используются фазовые координаты. Предполагается, что они доступны измерению или вычислению.

Задача адаптивного управления по выходу ставится следующим образом: при заданных уравнений объекта и целевом условии определить алгоритм адаптивного управления

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, t),$$

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, t),$$

при котором адаптивная система управления глобально устойчива и выполняется целевое условие. (В данном случае в алгоритм адаптивного управления вместо вектора состояния входит выходной вектор.)

11.1.4. Общая характеристика методов синтеза адаптивных систем управления. Прежде чем перейти к конкретным методам синтеза адаптивных систем управления с ЭМ, рассмотрим общие принципы построения алгоритмов адаптивного управления.

Процедуру построения алгоритмов адаптивного управления условно можно разбить на следующие три этапа:

1) определение закона (алгоритма) управления, включающего варьируемые параметры;

2) определение алгоритма адаптации, обеспечивающего нужную настройку варьируемых параметров регулятора;

3) исследование синтезированной адаптивной системы управления.

Решение задачи синтеза алгоритма управления основного контура (этап 1)) адаптивной системы с ЭМ ничем не отличается от решения задачи синтеза обычных систем управления лишь за одним исключением. Синтез алгоритма управления адаптивной системы управления с ЭМ имеет одну особенность, обусловленную необходимостью обеспечения регулятором идеального слежения за выходом эталонной модели, когда параметры регулятора идеально настроены. Возможность синтеза такого регулятора зависит от эталонной модели. Идеальное слежение за выходом эталонной модели в принципе возможно, если относительный порядок r_m ее передаточной функции W_m не меньше относительного порядка r_0 передаточной функции объекта $W_o(p)$ ($r_m \geq r_0$). Действительно, если при заданной передаточной функции объекта $W_o(p)$ произведен синтез регулятора (рис. 11.4)

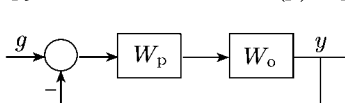


Рис. 11.4. Структурная схема основного контура

и синтезированная система идентична эталонной модели с передаточной функцией $W_m(p)$, то должно выполняться равенство

$$W_{yg}(p) = \frac{W_p(p)W_o(p)}{1 + W_p(p)W_o(p)} = W_m(p).$$

Разрешив это равенство относительно передаточной функции регулятора, получим

$$W_p(p) = \frac{1}{W_o} \frac{W_m}{1 - W_m}.$$

Отсюда относительный порядок регулятора r может быть представлен в виде $r = r_m - r_0$. Из условия физической осуществимости

относительный порядок регулятора не должен быть отрицательным:

$$r_p = r_m - r_0 \geq 0,$$

или

$$r_m \geq r_0.$$

Адаптивные системы управления являются нелинейными, и поэтому основным методом исследования является метод функций Ляпунова. Более того, этот метод используется уже в процессе синтеза. Многие алгоритмы адаптивного управления были получены исходя из того, что некоторая выбранная функция является функцией Ляпунова для синтезируемой системы.

Заметим, что при исследовании систем управления методом функции Ляпунова уравнения системы должны быть записаны в «отклонениях», т. е. в переменных, при которых положению равновесия соответствует начало координат. Поэтому если уравнения системы представлены в других переменных, то эти уравнения нужно предварительно преобразовать, чтобы можно было использовать этот метод.

11.2. Алгоритмы адаптивного управления с ЭМ

Задачу синтеза адаптивной системы управления с ЭМ содержательно можно сформулировать следующим образом. Заданы уравнения объекта и эталонной модели. Требуется синтезировать алгоритм адаптивного управления, т. е. алгоритм управления (основного контура) и алгоритм адаптации, при которых система глобально устойчива и ошибка слежения — разность между выходными сигналами основного контура и эталонной модели — сходится к нулю при стремлении времени к бесконечности.

Здесь предполагается, что эталонная модель задана, хотя она должна быть определена исходя из заданных требований к синтезируемой системе управления. Это связано с тем, что определение эталонной модели по заданным требованиям к системе управления является обычной задачей управления и не связано со спецификой адаптивного управления.

11.2.1. Алгоритм адаптивного управления линейным объектом 1-го порядка. Начнем изучение метода синтеза адаптивных систем управления с ЭМ со случая, когда объект описывается линейным уравнением 1-го порядка

$$\dot{y} + a_0 y = b_0 u. \quad (11.1)$$

Здесь y — выход, u — вход (управление), a_0 , b_0 — неизвестные параметры, знак параметра b_0 известен.

Пусть на основании заданных требований к синтезируемой системе выбрана эталонная модель, которая описывается уравнением

$$\dot{y}_m + \alpha_0 y_m = \beta_0 g(t) \quad (\alpha_0, \beta_0 > 0), \quad (11.2)$$

где y_m — выход эталонной модели, $g(t)$ — задающее воздействие, которое предполагается ограниченным.

Требуется найти алгоритм адаптивного управления, при котором ошибка слежения

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad (11.3)$$

и система глобально устойчива.

Утверждение 11.1. *Алгоритмом адаптивного управления с ЭМ (11.2) объектом (11.1), обеспечивающим глобальную устойчивость и выполнение целевого условия (11.3), является алгоритм управления*

$$u = k_y y + k_g g \quad (11.4a)$$

совместно с алгоритмом адаптации

$$\dot{k}_y = -\text{sign}(b_0)\gamma u e, \quad \dot{k}_g = -\text{sign}(b_0)\gamma g e, \quad (11.4б)$$

где k_y, k_g — варьируемые параметры, γ — произвольная положительная константа.

Доказательство. Как отмечалось, при адаптивном управлении с ЭМ одним из основных требований является возможность принятия варьируемыми параметрами регулятора идеальных значений, т.е. таких значений, при которых уравнение основного контура совпадает с уравнением эталонной модели. Покажем, что алгоритм (11.4a) удовлетворяет этому условию.

Подставив выражение для управления (11.4a) в уравнение объекта (11.1), получим уравнение основного контура

$$\dot{y} + (a_0 - b_0 k_y)y = b_0 k_g g. \quad (11.5)$$

Это уравнение совпадает с уравнением эталонной модели (11.2), когда

$$k_y = k_y^* = \frac{a_0 - \alpha_0}{b_0}, \quad k_g = k_g^* = \frac{\beta_0}{b_0}. \quad (11.6)$$

Дальше, чтобы можно было использовать метод функций Ляпунова, преобразуем уравнения синтезированной системы управления в уравнения в отклонениях — переменных $e, \Delta k_y, \Delta k_g$, где

$$\Delta k_y = k_y - k_y^*, \quad \Delta k_g = k_g - k_g^*. \quad (11.7)$$

Так как k_y^* и k_g^* являются константами, алгоритм адаптации (11.4б) можно записать в виде

$$\Delta \dot{k}_y = -\text{sign}(b_0)\gamma u e, \quad \Delta \dot{k}_g = -\text{sign}(b_0)\gamma g e. \quad (11.8)$$

Для получения уравнения для переменной e вычтем из уравнения основного контура (11.5) уравнение эталонной модели (11.2):

$$\dot{e} + (a_0 + b_0 k_y)y - \alpha_0 y_m = b_0 k_g g - \beta_0 g.$$

Прибавив и вычитая из левой части $\alpha_0 y$, получим

$$\dot{e} + \alpha_0 e - b_0 \left(k_y - \frac{a_0 - \alpha_0}{b_0} \right) y = b_0 \left(k_g - \frac{\beta_0}{b_0} \right) g.$$

Учитывая обозначения (11.6) и (11.7), последнее уравнение можно представить в виде

$$\dot{e} = -\alpha_0 e + b_0(\Delta k_y y + \Delta k_g g). \quad (11.9)$$

Итак, адаптивная система управления в новых переменных описывается уравнениями (11.8) и (11.9).

В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим квадратичную форму

$$V(e, \Delta \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left[e^2 + \frac{|b_0|}{\gamma} (\Delta k_y^2 + \Delta k_g^2) \right], \quad (11.10)$$

где $\Delta \mathbf{k} = (\Delta k_y \ \Delta k_g)^T$. Производная от этой функции по времени имеет вид

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{|b_0|}{\gamma} (\Delta k_y \dot{k}_y + \Delta k_g \dot{k}_g).$$

Подставив в правую часть выражения для производных из уравнений адаптивной системы управления (11.8) и (11.9), получим

$$\dot{V} = -\alpha_0 e^2 \leq 0.$$

Таким образом, квадратичная форма (11.10) является функцией Ляпунова для синтезированной системы, и эта система устойчива по Ляпунову. Так как $V(e, \Delta \mathbf{k}) > 0$ (положительно определена) и $\dot{V} \leq 0$, функция $V(e, \Delta \mathbf{k})$ и соответственно переменные e , $\Delta k_y(k_y)$ и $\Delta k_g(k_g)$ (см. (11.10)) являются ограниченными. Кроме того, квадратичная форма $V(e, \Delta \mathbf{k})$ как функция времени стремится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$.

Так как по условию задачи задающее воздействие $g(t)$ ограничено, то, как следует из (11.9), производная $\dot{e}$ и соответственно вторая производная $\ddot{V} = 2\alpha_0 e\dot{e}$ ограничены. Следовательно, первая производная $\dot{V}$ равномерно непрерывна, по лемме Барбалата $\dot{V} \rightarrow 0$ и, как следствие, $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Из приведенного анализа следует, что ограниченность переменных и сходимость ошибки слежения $e(t)$ к нулю гарантируется при любых положительных γ , α_0 и β_0 .

Параметрическая сходимость. При адаптивном управлении с ЭМ основное целевое условие — это обеспечение сходимости к нулю ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$. Если параметры регулятора принимают идеальные значения, то, естественно, это условие будет выполнено. Однако, как покажем ниже, из сходимости к нулю ошибки слежения не следует параметрическая сходимость — сходимость варьируемых параметров к идеальным значениям.

Параметрическая сходимость зависит от структуры задающего воздействия. Если задающее воздействие простое, например, константа, то по окончании процесса адаптации варьируемые параметры в зависимости от начальных условий могут принять различные значения. Проанализируем этот вопрос на примере рассмотренной выше адаптивной системы управления.

Как было показано, ошибка слежения $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, можно принять, что при достаточно большом времени $e(t) = 0$ и $\dot{e}(t) = 0$. Тогда из уравнения (11.9) следует

$$\Delta k_y y + \Delta k_g g = 0.$$

Если задающее воздействие является константой ($g(t) = g_0$), то по окончании переходного процесса, т. е. при достаточно большом времени (см. (11.2)),

$$y(t) = y_m(t) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} g_0.$$

Подставив это выражение в предыдущее равенство, получим

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} \Delta k_y + \Delta k_g = 0.$$

Отсюда видно, что параметры регулятора сходятся не к определенной точке, а к любой точке прямой. Однако когда задающее воздействие $g(t)$ обладает таким свойством, что вектор сигналов $\mathbf{v} = (y \ g)^T$ удовлетворяет так называемому *условию постоянного возбуждения*, сходимости к нулю ошибки слежения влечет за собой параметрическую сходимость [69].

Определение 11.1. *Условие постоянного возбуждения n -векторного сигнала $v(t)$ выполняется*, если существуют положительные константы T и α такие, что при любом $t > 0$

$$\int_t^{t+T} \mathbf{v}(\tau) \mathbf{v}^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_n, \quad (11.11)$$

где I_n — единичная матрица порядка n .

Покажем, что в случае адаптивной системы с объектом 1-го порядка, которую мы рассмотрели, при выполнении условия (11.11) имеется параметрическая сходимость.

Используя векторные обозначения $\Delta \mathbf{k} = (\Delta k_y \ \Delta k_g)^T$ и $\mathbf{v} = (y \ g)^T$, уравнение, которое получается из (11.9) при $e(t) = \dot{e}(t) = 0$, можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{k}^T \mathbf{v} = 0.$$

Умножив последнее равенство справа на $\mathbf{v}^T$ и проинтегрировав от t до $t + T$, получим

$$\int_t^{t+T} \Delta \mathbf{k}^T(\tau) \mathbf{v}(\tau) \mathbf{v}^T(\tau) d\tau = 0.$$

По окончании процесса адаптации, т. е. при достаточно большом t , вектор $\Delta \mathbf{k}$ становится постоянным, и его можно вывести за знак интеграла:

$$\Delta \mathbf{k}^T \int_t^{t+T} \mathbf{v}(\tau) \mathbf{v}^T(\tau) d\tau = 0.$$

Отсюда следует, что если выполняется условие постоянного возбуждения сигнала (11.11), то

$$\Delta \mathbf{k}^T = 0,$$

или

$$\mathbf{k}_y = \mathbf{k}_y^*, \quad \mathbf{k}_g = \mathbf{k}_g^*.$$

11.2.2. Адаптивное управление по состоянию линейным объектом.

Постановка задачи. Пусть линейный объект описывается уравнением

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = u, \quad (11.12)$$

где y — выход, u — управление, a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) — неизвестные параметры; знак a_0 известен. Эталонная модель задается уравнением

$$y_m^{(n)} + \alpha_1 y_m^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_m = \beta_0 g(t). \quad (11.13)$$

Здесь y_m — выход эталонной модели, α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и β_0 — известные положительные постоянные, $g(t)$ — задающее воздействие.

Требуется определить алгоритм адаптивного управления, при котором система глобально устойчива и ошибка слежения

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Ниже при записи решения используется n -матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T \quad (11.14)$$

и $(n \times n)$ -матрица P , которая является решением уравнения Ляпунова

$$PA + A^T P = -Q, \quad (11.15)$$

где Q — положительно определенная матрица, A — $(n \times n)$ -матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

в которой элементами последней строки являются коэффициенты уравнения эталонной модели.

Утверждение 11.2. Алгоритмом адаптивного управления с ЭМ (11.13) линейным объектом (11.12), обеспечивающим глобальную устойчивость и сходящуюся ошибку $e(t) = y(t) - y_m(t)$ к нулю при $t \rightarrow \infty$, является

$$u = \hat{k}_0 g(t) + \hat{k}_1 y^{(n-1)} + \dots + \hat{k}_n y = \hat{\mathbf{k}}^T \mathbf{v}, \quad (11.17a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{k}}} = -\text{sign}(a_0) \Gamma \mathbf{v} B^T P \mathbf{x}, \quad (11.17b)$$

где $\widehat{\mathbf{k}} = (\widehat{k}_0 \ \widehat{k}_1 \ \dots \ \widehat{k}_n)^T$ — $(n+1)$ -вектор варьируемых параметров регулятора, $\mathbf{v} = (g \stackrel{(n-1)}{y} \ \dots \ y)^T$ — вектор сигналов, Γ — произвольная положительно определенная $(n+1) \times (n+1)$ -матрица, $\mathbf{x} = (e \ \dot{e} \ \dots \ \stackrel{(n-1)}{e})^T$ — вектор состояния.

Если в качестве Q принимается матрица qI_n ($q > 0$, I_n — единичная матрица n -го порядка), то, не нарушая общности, можно при записи уравнения Ляпунова (11.15) принять $q = 1$, т.е. рассмотреть уравнение

$$PA + A^T P = -I_n,$$

а значение q учесть при выборе матрицы Γ .

Доказательство. Алгоритм управления (11.17а) можно получить методом обратной задачи динамики. Для этого зададимся желаемым законом изменения ошибки в виде следующего уравнения:

$$\stackrel{(n)}{e} + \alpha_1 \stackrel{(n-1)}{e} + \dots + \alpha_n e = 0, \quad (11.18)$$

где α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) являются коэффициентами уравнения эталонной модели. Так как эталонная модель устойчива, то нулевое решение (11.18) также (глобально асимптотически) устойчиво, и ошибка будет стремиться к нулю при любых начальных условиях. Так как $\stackrel{(n)}{e} = \stackrel{(n)}{y} - \stackrel{(n)}{y}_m$, то из (11.18) находим

$$\stackrel{(n)}{y} = \stackrel{(n)}{y}_m - (\alpha_1 \stackrel{(n-1)}{e} + \dots + \alpha_n e).$$

Подставив это выражение для $\stackrel{(n)}{y}$ в уравнение объекта (11.12), получим алгоритм управления основного контура

$$u = a_0 \stackrel{(n)}{y}_m - a_0 (\alpha_1 \stackrel{(n-1)}{e} + \dots + \alpha_n e) + a_1 \stackrel{(n-1)}{y} + \dots + a_n y.$$

Учитывая равенство $\stackrel{(i)}{e} = \stackrel{(i)}{y} - \stackrel{(i)}{y}_m$, его можно преобразовать к виду

$$u = a_0 (\stackrel{(n)}{y}_m + \alpha_1 \stackrel{(n-1)}{y}_m + \dots + \alpha_n y_m) + \\ + (a_1 - a_0 \alpha_1) \stackrel{(n-1)}{y} + \dots + (a_n - a_0 \alpha_n) y,$$

или, учитывая уравнение эталонной модели, к виду

$$u = a_0 \beta_0 g(t) + (a_1 - a_0 \alpha_1) \stackrel{(n-1)}{y} + \dots + (a_n - a_0 \alpha_n) y.$$

Так как во все коэффициенты входят неизвестные параметры, заменим их варьируемыми параметрами $\widehat{k}_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Тогда получим алгоритм управления (11.17а).

Подставив выражение для управления (11.17а) в уравнение объекта (11.12), получим уравнение основного контура

$$a_0 \stackrel{(n)}{y} = \widehat{\mathbf{k}}^T \mathbf{v} - (a_1 \stackrel{(n-1)}{y} + \dots + a_n y). \quad (11.19)$$

Как легко проверить, это уравнение совпадает с уравнением эталонной модели, когда

$$\widehat{k}_0 = k_0^* = \alpha_0 \beta_0, \quad \widehat{k}_i = k_i^* = a_i - \alpha_0 \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.20)$$

Таким образом, алгоритм управления удовлетворяет требованию принятия варьируемыми коэффициентами регулятора идеальных значений.

Теперь, чтобы доказать глобальную устойчивость и сходимости ошибки $e(t) = y(t) - y_m(t)$ к нулю, получим для синтезированной системы уравнения в отклонениях. Вычтем из обеих частей уравнения (11.19) выражения

$$a_0 \left[y_m^{(n)} - (\alpha_1^{(n-1)} e + \dots + \alpha_n e) \right].$$

Тогда получим

$$a_0 (e^{(n)} + \alpha_1^{(n-1)} e + \dots + \alpha_n e) = \widehat{\mathbf{k}}^T \mathbf{v} - (a_1^{(n-1)} y + \dots + a_n y) - a_0 \left[y_m^{(n)} - (\alpha_1^{(n-1)} e + \dots + \alpha_n e) \right].$$

Учитывая уравнения эталонной модели (11.13) и обозначения (11.20), последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$a_0 (e^{(n)} + \alpha_1^{(n-1)} e + \dots + \alpha_n e) = \widehat{\mathbf{k}}^T \mathbf{v} - \mathbf{k}^{*T} \mathbf{v},$$

или

$$e^{(n)} + \alpha_1^{(n-1)} e + \dots + \alpha_n e = \frac{1}{a_0} \Delta \mathbf{k}^T \mathbf{v}. \quad (11.21)$$

Здесь

$$\mathbf{k}^* = (k_0^* \ k_1^* \ \dots \ k_n^*)^T, \quad \Delta \mathbf{k} = \widehat{\mathbf{k}} - \mathbf{k}^*.$$

Если записать уравнение (11.21) в нормальной форме, то оно примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B \left(\frac{1}{a_0} \Delta \mathbf{k}^T \mathbf{v} \right), \quad (11.22)$$

где A и B — ранее введенные матрицы (11.16) и (11.14) соответственно, $\mathbf{x} = (e \ \dot{e} \ \dots \ e^{(n-1)})^T$.

Так как $\mathbf{k}^*$ является вектором постоянных параметров, алгоритм адаптации (11.176) можно записать в виде

$$\Delta \dot{\mathbf{k}} = -\text{sign}(a_0) \Gamma \mathbf{v} B^T P \mathbf{x}. \quad (11.23)$$

Таким образом, адаптивная система управления в новых переменных описывается уравнениями (11.22) и (11.23). В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим квадратичную форму

$$V(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}) = \left(\mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \frac{1}{|a_0|} \Delta \mathbf{k}^T \Gamma^{-1} \Delta \mathbf{k} \right). \quad (11.24)$$

Здесь Γ — произвольная положительно определенная матрица, P — решение уравнения Ляпунова (11.15). Так как матрица A устойчива, решение указанного уравнения существует.

Производная по времени от функции (11.24) имеет вид

$$\dot{V} = 2\mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} + \frac{2}{|a_0|} \Delta \mathbf{k}^T \Gamma^{-1} \Delta \dot{\mathbf{k}}.$$

После подстановки выражений производных из (11.22) и (11.23) последнее соотношение можно преобразовать к виду

$$\dot{V} = 2\mathbf{x}^T P A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (P A + A^T P) \mathbf{x}.$$

Принимая во внимание то, что P является решением уравнения Ляпунова (11.15), можем записать

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \leq 0. \quad (11.25)$$

Отсюда следует, что квадратичная форма (11.24) является функцией Ляпунова для синтезированной адаптивной системы управления, и эта система устойчива по Ляпунову. В соотношении (11.25) стоит знак нестрогого неравенства, хотя матрица Q положительно определена, так как функция Ляпунова V зависит не только от фазового вектора, но и от вектора параметрических ошибок $\Delta \mathbf{k}$.

Так как $V(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}) > 0$ и $\dot{V}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}) \leq 0$, то функция $V(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k})$ и соответственно переменные $\mathbf{x}$ и $\Delta \mathbf{k}$ ограничены. Так как по условию вектор сигналов $\mathbf{v}$ ограничен, то из (11.22) следует, что производная $\dot{\mathbf{x}}$ и соответственно вторая производная $\ddot{V} = -2\mathbf{x}^T Q \dot{\mathbf{x}}$ ограничены. Поэтому производная $\dot{V}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k})$ равномерно непрерывна, и по лемме Барбалата $\dot{V}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k})$ и соответственно (как следует из (11.25)) $\mathbf{x}$ и $e = x_1$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Пример 11.1. Объект описывается уравнением

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = u,$$

где a_0, a_1, a_2 — неизвестные параметры; уравнение эталонной модели имеет вид

$$\ddot{y}_m + 2\dot{y}_m + y_m = g(t).$$

Определить алгоритм адаптивного управления, обеспечивающего ограниченность всех переменных и сходимость ошибки $e = y - y_m$ к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Решение. В данном случае $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 1$, матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение Ляпунова

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

после перемножения матриц, принимает вид

$$\begin{bmatrix} -p_{12} & p_{11} - 2p_{12} \\ -p_{22} & p_{21} - 2p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} - 2p_{21} & p_{12} - 2p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это уравнение, учитывая равенство $p_{12} = p_{21}$, можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} -2p_{12} &= -1, \\ p_{11} - 2p_{12} - p_{22} &= 0, \\ 2p_{12} - 4p_{22} &= -1. \end{aligned}$$

Эта система имеет следующее решение:

$$p_{12} = \frac{1}{2}, \quad p_{22} = \frac{1}{2}, \quad p_{11} = \frac{3}{2}.$$

Поэтому матрица P имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В данном случае $\mathbf{v} = (g \quad \dot{y} \quad y)^T$ и $\mathbf{x} = (e \quad \dot{e})^T$. Для алгоритма адаптивного управления в соответствии с (11.14) получаем

$$u = \hat{k}_0 g + \hat{k}_1 \dot{y} + \hat{k}_2 y,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{k}_0 \\ \hat{k}_1 \\ \hat{k}_2 \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{2} \begin{pmatrix} g \\ \dot{y} \\ y \end{pmatrix} (0 \quad 1) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \end{pmatrix} = -\frac{\gamma(e + \dot{e})}{2} \begin{pmatrix} g \\ \dot{y} \\ y \end{pmatrix}.$$

11.2.3. Адаптивное управление по выходу линейным объектом с единичным относительным порядком. Выше был рассмотрен случай, когда в уравнение объекта не входили производные управления, или, что то же, когда относительный порядок передаточной функции объекта был равен ее порядку и все фазовые координаты были доступны измерению. Однако обычно не все фазовые координаты доступны измерению. И чтобы получить их, нужно дифференцировать выходную переменную, что нежелательно из-за помех, которые при этом возникают.

Ниже рассматривается адаптивное управление по выходу, т.е. такое управление, при котором в алгоритмах управления и адаптации используются только входной и выходной сигналы объекта и сигналы, получаемые путем их фильтрации.

Постановка задачи. Пусть задан объект с передаточной функцией

$$W_o(p) = k_0 \frac{P_o(p)}{R_o(p)} = k_0 \frac{p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (11.26)$$

и выбрана эталонная модель с передаточной функцией

$$W_m(p) = k_m \frac{P_m(p)}{R_m(p)} = k_m \frac{p^{n-1} + \beta_1 p^{n-2} + \dots + \beta_{n-1}}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n}; \quad (11.27)$$

k_0, b_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — неизвестные параметры объекта, знак k_0 известен; $P_m(p), R_m(p)$ — устойчивые полиномы

и передаточная функция $W_m(p)$ является строго вещественно положительной.

Требуется определить алгоритм адаптивного управления, при котором система глобально устойчива и ошибка $e(t) = y(t) - y_m(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. При этом в алгоритмах управления и адаптации должны быть использованы только доступные измерения сигналы (задающее воздействие, входной и выходной сигналы объекта) и сигналы, которые получаются путем их фильтрации, т.е. сигналы на выходе фильтров, на вход которых подается указанные сигналы. Принимается, что уравнения фильтров в нормальной форме Коши имеют вид

$$\dot{\mathbf{v}} = E\mathbf{v} + F\mathbf{u}, \quad (11.28a)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = E\mathbf{z} + F\mathbf{y}. \quad (11.28б)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1})^T$ — $(n-1)$ -вектор переменных, получаемых путем фильтрации входного сигнала (управления) объекта; $\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{n-1})^T$ — $(n-1)$ -вектор переменных, получаемых путем фильтрации выходного сигнала объекта; E — $((n-1) \times (n-1))$ -матрица, F — $((n-1) \times 1)$ -матрица, и они имеют следующий вид:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\beta_{n-1} & -\beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \dots & -\beta_1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.29)$$

где в последней строке матрицы E стоят коэффициенты полинома числителя передаточной функции эталонной модели.

Утверждение 11.3. Алгоритмом адаптивного управления с ЭМ (11.27) линейным объектом (11.26), обеспечивающим глобальную устойчивость и сходимость ошибки $e(t) = y(t) - y_m(t)$ к нулю при $t \rightarrow \infty$, является

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}_v^T \mathbf{v} + \mathbf{k}_z^T \mathbf{z} + k_y y + k_g g,$$

$$\dot{\mathbf{k}}_v = -\text{sign}(k_0) \gamma \mathbf{v} e,$$

$$\dot{\mathbf{k}}_z = -\text{sign}(k_0) \gamma \mathbf{z} e,$$

$$\dot{k}_y = -\text{sign}(k_0) \gamma y e,$$

$$\dot{k}_g = -\text{sign}(k_0) \gamma g e,$$

где $\mathbf{k}_v = (k_{v1} \ k_{v2} \ \dots \ k_{vn-1})^T$ и $\mathbf{k}_z = (k_{z1} \ k_{z2} \ \dots \ k_{zn-1})^T$ — векторы варьируемых параметров регулятора, k_y и k_g — скалярные варьируемые параметры регулятора; $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1})^T$ и $\mathbf{z} = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{n-1})^T$ — выходы фильтров (11.28a) и (11.28б) соответственно.

Используя обозначения

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}_v^T \ \mathbf{k}_z^T \ k_y \ k_g)^T, \quad \mathbf{w} = (\mathbf{v}^T \ \mathbf{z}^T \ y \ g)^T,$$

Следовательно, имеем

$$u_1 = k_v^T \mathbf{v} = \frac{k_{v1} + k_{v2}p + \dots + k_{vn-1}p^{n-2}}{P_m(p)} u. \quad (11.32a)$$

Аналогично можно получить

$$y_1 = \mathbf{k}_z^T \mathbf{z} = \frac{k_{z1} + k_{z2}p + \dots + k_{zn-1}p^{n-2}}{P_m(p)} y. \quad (11.32б)$$

Прежде всего покажем, что при законе управления (11.30а) варьируемые параметры могут принимать идеальные значения. Введем для передаточных функций обратной связи основного контура (см. рис. 11.5) относительно входа u и выхода u_1 обозначение W_u ,

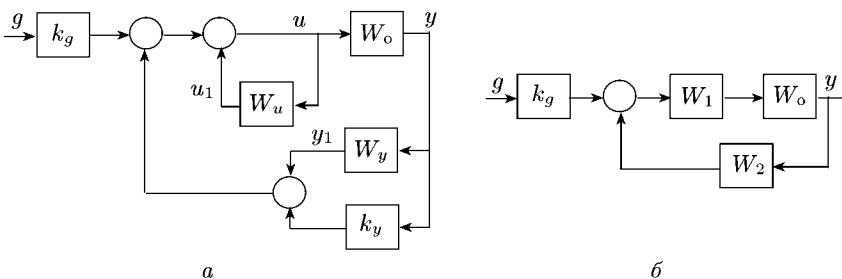


Рис. 11.7. Структурная схема основного контура: а — исходная схема; б — преобразованная схема

а относительно входа y и выхода y_1 обозначение W_y . Тогда структурную схему основного контура можно представить так, как это показано на рис. 11.7, а.

Из уравнений (11.32) для передаточных функций W_u и W_y находим

$$W_u(p) = \frac{P_v(p)}{P_m(p)}, \quad P_v(p) = k_{v1} + k_{v2}p + \dots + k_{vn-1}p^{n-2},$$

$$W_y = \frac{P_y(p)}{P_m(p)}, \quad P_y(p) = k_{z1} + k_{z2}p + \dots + k_{zn-1}p^{n-2}.$$

Передаточные функции W_1 и W_2 на преобразованной схеме (рис. 11.7, б) имеют вид

$$W_1 = \frac{1}{1 - W_u} = \frac{P_m(p)}{P_m(p) - P_v(p)},$$

$$W_2 = W_y + k_y = \frac{k_y P_m(p) + P_y(p)}{P_m(p)}.$$

Найдем передаточную функцию основного контура W_{yg} относительно входа g и выхода y :

$$W_{yg} = \frac{k_g W_1 W_o}{1 - W_1 W_o W_2} = \frac{k_g P_m(p) k_o P_o(p)}{[P_m(p) - P_v(p)] R_o(p) - k_o P_o(p) [k_y P_m(p) + P_y(p)]}.$$

Если положить

$$k_{v1} = k_{v1}^* = \beta_{n-1} - b_{n-1}, \quad k_{v2} = k_{v2}^* = \beta_{n-2} - b_{n-2}, \quad \dots \\ \dots, \quad k_{vn-1} = k_{vn-1}^* = \beta_1 - b_1,$$

то $P_m(p) - P_v(p) = P_0(p)$, и в знаменателе полином $P_0(p)$ можно вынести за скобки и сократить с подобным членом в числителе. Тогда после подстановки в знаменателе выражений для $P_v(p)$, $P_m(p)$ и $R_z(p)$ получим

$$W_{yg} = \frac{k_g k_0 P_m(p)}{R(p)},$$

где

$$R(p) = p^n + (a_1 - k_0 k_y) p^{n-1} + [a_2 - k_0(k_y \beta_1 + k_{zn-1})] p^{n-2} + \dots \\ \dots + a_n - k_0(k_y \beta_{n-1} + k_{z1}).$$

Отсюда следует, что имеет место равенство $W_{yg} = W_m$, если

$$k_g = k_g^* = \frac{k_m}{k_0}, \quad k_y = k_y^* = \frac{a_1 - \alpha_1}{k_0},$$

$$k_{zn-1} = k_{zn-1}^* = \frac{a_2 - \alpha_2}{k_0} - k_y^* \beta_1, \quad \dots \\ \dots, \quad k_{z1} = k_{z1}^* = \frac{a_n - \alpha_n}{k_0} - k_y^* \beta_{n-1}. \quad (11.33)$$

Таким образом, при законе управления (11.30а) его параметры могут принять идеальные значения. Для доказательства устойчивости системы при алгоритме (11.30) получим уравнения в отклонениях.

Пусть $\mathbf{k}^*$ — вектор идеальных параметров и $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}^*$. Алгоритм (11.30а) при подстановке $\mathbf{k} = \Delta \mathbf{k} + \mathbf{k}^*$ принимает вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}^{*T} \mathbf{w} + \Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w}.$$

При таком представлении алгоритма управления структурную схему основного контура с переменными параметрами можно представить

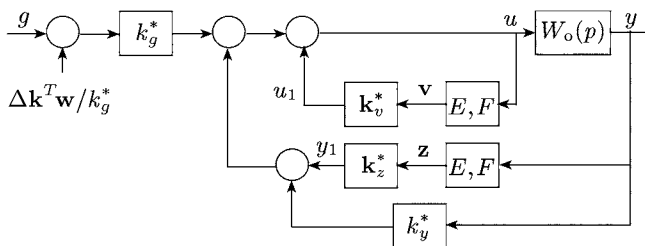


Рис. 11.8. Эквивалентная структурная схема основного контура

в виде эквивалентной схемы (рис. 11.8), рассматривая $\Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w} / k_g^*$ как внешнее воздействие.

Так как при идеальных значениях параметров регулятора передаточная функция основного контура идентична передаточной функ-

ции эталонной модели, из эквивалентной структурной схемы находим

$$y = W_m(p)g(t) + W_m(p) \frac{\Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w}}{k_g^*}, \quad (11.34)$$

или, учитывая (см. (11.33)) равенство $k_g^* = k_m/k_0$,

$$y = W_m(p)g(t) + W_m(p) \left(\frac{k_0}{k_m} \Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w} \right).$$

Из последнего уравнения, принимая во внимание равенство $y_m = W_m(p)g(t)$, получим

$$e = y - y_m = W_m(p) \left(\frac{k_0}{k_m} \Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w} \right).$$

Запишем это уравнение в нормальной форме Коши:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bk_0\Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w}, \quad (11.35a)$$

$$e = \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (11.35b)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ — вектор состояния системы, $\mathbf{c} = (\beta_{n-1} \ \dots \ \beta_1 \ 1)^T$, A и B — ранее введенные матрицы (11.16) и (1.14). Так как $\mathbf{k}^*$ является постоянным вектором, то имеем $\dot{\mathbf{k}} = \Delta \dot{\mathbf{k}}$. Поэтому алгоритм адаптации (11.306) можно записать в виде

$$\Delta \dot{\mathbf{k}} = -\text{sign}(k_0)\gamma \mathbf{w}e. \quad (11.35b)$$

Так как $W_m(p)$ по условию является строго вещественно положительной передаточной функцией, по теореме Калмана–Якубовича существуют положительно определенные матрицы P и Q такие, что выполняются равенства

$$A^T P + P A = -Q, \quad P B = \mathbf{c}. \quad (11.36)$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова выберем квадратичную форму

$$V(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + |k_0| \Delta \mathbf{k}^T \gamma^{-1} \Delta \mathbf{k},$$

где γ — произвольное положительное число. Производная по времени от этой функции в силу (11.35a) и (11.35b) имеет вид

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T P B k_0 \Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w} - 2k_0 \Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w}e.$$

Учитывая (11.36) и (11.35b), ее можно представить в виде

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{k}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \leq 0.$$

Следовательно, система управления при адаптивном управлении (11.30) устойчива по Ляпунову. Так как $V \geq 0$ и $\dot{V} \leq 0$, функция Ляпунова и соответственно переменные $\mathbf{x}$ и $\Delta \mathbf{k}$ ограничены. При ограниченном $g(t)$ производная $\dot{x}$ и соответственно $\ddot{V} = -2\mathbf{x}^T Q \dot{\mathbf{x}}$ ограничены. Поэтому по лемме Барбалата $\dot{V} \rightarrow 0$ и соответственно стремятся к нулю фазовый вектор $\mathbf{x}$ и ошибка $e = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ при $t \rightarrow \infty$. Так как матрица E в (11.28) устойчива, то и остальные переменные ограничены.

Пример 11.2. Пусть объект и эталонная модель задаются передаточными функциями

$$W_o = k_0 \frac{p + b_1}{p^2 + a_1 p + a_2}, \quad W_m = k_m \frac{p + 1}{p^2 + 3p + 2},$$

где k_0, b_1, a_1, a_2 — неизвестные параметры; знак k_0 известен: $k_0 > 0$.

Требуется определить алгоритм адаптивного управления, обеспечивающего глобальную устойчивость системы и сходимости к нулю разности между выходами системы и эталонной модели.

Решение. Передаточная функция эталонной модели является строго вещественно положительной, так как она устойчива и вещественная часть частотной передаточной функции при любой частоте $\omega \geq 0$ положительна:

$$\operatorname{Re} W_m(j\omega) = k_m \frac{2(1 + \omega^2)}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} > 0.$$

В данном случае $n = 2$, $\beta_1 = 1$, и уравнения (11.28) принимают вид

$$\dot{v} = -v + u, \quad \dot{z} = -z + y.$$

Алгоритмы управления и адаптации (11.30) принимают вид

$$u = k_v v + k_z z + k_y y + k_g g,$$

$$\dot{k}_v = -\gamma v e, \quad \dot{k}_z = -\gamma z e, \quad \dot{k}_y = -\gamma y e, \quad \dot{k}_g = -\gamma g e.$$

11.2.4. Адаптивное управление по выходу линейным объектом с относительным порядком, превышающим единицу.

Постановка задачи. Пусть задан объект с передаточной функцией

$$W_o(p) = k_0 \frac{P_o(p)}{R_o(p)} = k_0 \frac{p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (11.37)$$

и выбрана эталонная модель с передаточной функцией

$$W_m(p) = k_m \frac{P_m(p)}{R_m(p)} = k_m \frac{p^m + \beta_1 p^{m-1} + \dots + \beta_m}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n}; \quad (11.38)$$

где k_0, b_i ($i = 1, 2, \dots, m$), a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — неизвестные параметры объекта, знак k_0 известен; $P_m(p), R_m(p)$ — устойчивые полиномы; передаточные функции объекта и эталонной модели имеют один и тот же относительный порядок, который больше единицы.

Требуется определить алгоритм адаптивного управления, при котором система глобально устойчива и ошибка $e(t) = y(t) - y_m(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. При этом в алгоритмах управления и адаптации должны быть использованы только доступные измерению сигналы (задающее воздействие, входной и выходной сигналы объекта) и сигналы, которые получаются путем их фильтрации, т.е. сигналы на выходе фильтров, на вход которых подаются указанные сигналы.

Введем в рассмотрение полином

$$P'_m(p) = P_m(p)P_1(p) = p^{n-1} + \beta'_1 p^{n-2} + \dots + \beta'_{n-1}, \quad (11.39)$$

где $P_1(p)$ — устойчивый полином порядка $n - 1 - m$.

Уравнения фильтров в нормальной форме Коши имеют вид

$$\dot{\mathbf{v}} = E\mathbf{v} + F\mathbf{u}, \quad (11.40a)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = E\mathbf{z} + F\mathbf{y}. \quad (11.40a)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1})^T$ — $(n - 1)$ -мерный вектор переменных, получаемых путем фильтрации входного сигнала (управления) объекта; $\mathbf{z} = (z_1, z_2 \ \dots \ z_{n-1})^T$ — $(n - 1)$ -вектор переменных, получаемых путем фильтрации выходного сигнала объекта; E — $((n - 1) \times (n - 1))$ -матрица, F — $((n - 1) \times 1)$ -матрица, и они имеют следующий вид:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\beta'_{n-1} & -\beta'_{n-2} & -\beta'_{n-3} & \dots & -\beta'_1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где в последней строке матрицы E стоят коэффициенты полинома (11.39), а не числителя передаточной функции эталонной модели, как это было при единичном относительном порядке.

В данном случае в алгоритме адаптивного управления помимо вектора сигналов

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}^T \ \mathbf{z}^T \ y \ g)^T$$

используется преобразованный вектор сигналов

$$\tilde{\mathbf{w}} = W_m(p)\mathbf{w}.$$

Утверждение 11.4. Алгоритмом адаптивного управления с ЭМ (11.38) линейным объектом (11.37), обеспечивающим глобальную устойчивость и сходямость ошибки $e(t) = y(t) - y_m(t)$ к нулю при $t \rightarrow \infty$, является

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}^T \mathbf{w}, \quad (11.41a)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\text{sign}(k_0)\gamma\varepsilon\tilde{\mathbf{w}}}{1 + |\tilde{\mathbf{w}}|^2}, \quad (11.41б)$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\gamma\varepsilon\eta}{1 + |\tilde{\mathbf{w}}|^2}, \quad (11.41в)$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = W_m(p)\mathbf{w}, \quad (11.41г)$$

$$\eta = \mathbf{k}^T W_m(p)\mathbf{w} - W_m(p)(\mathbf{k}^T \mathbf{w}), \quad (11.41д)$$

$$\varepsilon = e + \mu\eta, \quad (11.41е)$$

где γ — произвольная положительная константа; $\mathbf{k}$ — вектор варьируемых параметров регулятора; μ — дополнительный переменный параметр, который вычисляется в процессе адаптации; η — вспомогательная ошибка; ε — комбинированная ошибка.

Комбинированную ошибку также называют *расширенной ошибкой* [45].

Структурные схемы основного контура и обратной связи регулятора имеют вид, представленный на рис. 11.5 и рис. 11.6.

Доказательство. Прежде всего покажем, что варьируемые параметры алгоритма управления (11.41а) могут принимать идеальные значения. Как было показано, структурная схема основного контура может быть преобразована к виду, показанному на рис. 11.7. И так как роль полинома $P_m(p)$ в данном случае играет полином $P'_m(p)$, то передаточная функция W_{yg} принимает вид

$$W_{yg} = \frac{k_g P'_m(p) k_0 P_0(p)}{[P'_m(p) - P_v(p)] R_0(p) - k_0 P_0(p) [k_y P'_m(p) + P_y(p)]}.$$

Так как (см. (11.39)) $P'_m(p) = P_m(p) P_1(p)$, то для того чтобы передаточная функция основного контура W_{yg} была равна передаточной функции эталонной модели W_m , нужно, чтобы существовали такие значения варьируемых параметров k_{vi} ($i = 1, 2, \dots, n-1$), k_{zi} ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и k_y , при которых имеет место равенство

$$(P'_m - P_v) R_0 - k_0 P_0 (k_y P'_m + P_y) = R_m P_1 P_0.$$

Такие значения параметров существуют и однозначно определяются из этого соотношения [69]. Так как относительный порядок передаточной функции эталонной модели, как и относительный порядок передаточной функции объекта, должен быть больше единицы, то эталонная модель не может быть выбрана так, чтобы ее передаточная функция была вещественно положительной. Поэтому функцию Ляпунова нельзя строить так, как это делалось при единичном относительном порядке.

Так как алгоритм управления и структура основного контура совпадает с алгоритмом управления и структурой основного контура адаптивной системы управления с объектом, имеющим передаточную функцию с единичным относительным порядком, то снова можно получить для выходной переменной y уравнение в виде (11.34). Поэтому для ошибки слежения опять получим

$$e = y - y_m = W_m(p) \left(\frac{k_0}{k_m} \Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w} \right). \quad (11.42)$$

Алгоритм адаптации в данном случае не может быть выбран в виде (11.30б), так как передаточная функция эталонной модели не является строго вещественно положительной. Поэтому для получения алгоритма адаптации используется так называемый метод комбинирования ошибки (error augmentation) [69]. Основная идея метода состоит в введении новой ошибки, представляющей собой линейную комбинацию ошибки слежения и некоторой вспомогательной ошибки. Вспомогательная ошибка (auxiliary error) $\eta(t)$ строится следующим образом:

$$\eta(t) = \mathbf{k}^T W_m(p) \mathbf{w} - W_m(p) (\mathbf{k}^T \mathbf{w}). \quad (11.43)$$

Эта ошибка может быть вычислена в процессе функционирования системы (так как вектор варьируемых параметров $\mathbf{k}$ и вектор сигналов $\mathbf{w}$ доступны измерению) и использована для управления. Она обращается в нуль, когда $\mathbf{k} = \mathbf{k}^*$:

$$\mathbf{k}^{*T} W_M(p) \mathbf{w} - W_M(p) \mathbf{k}^{*T} \mathbf{w} = 0.$$

Последнее равенство возможно, так как постоянный вектор $\mathbf{k}^*$ во втором слагаемом можно вынести из-под действия оператора $W_M(p)$. Таким образом, $\eta(t)$ косвенно характеризует параметрическую ошибку. Вычитая из правой части (11.43) левую часть последнего равенства, получим

$$\eta(t) = \Delta \mathbf{k}^T W_M(p) \mathbf{w} - W_M(p) (\Delta \mathbf{k}^T \mathbf{w}). \quad (11.44)$$

Комбинированная ошибка определяется следующим образом:

$$\varepsilon(t) = e(t) + \mu(t)\eta(t),$$

где $\mu(t)$ — дополнительный параметр, определяемый в процессе адаптации. Положив $\Delta\mu = \mu - k_0/k_m$, последнее равенство можно записать в виде

$$\varepsilon(t) = e(t) + \frac{k_0}{k_m} \eta(t) + \Delta\mu(t)\eta(t).$$

Подставив сюда выражения для $e(t)$ из (11.42) и для $\eta(t)$ из (11.44), получим

$$\varepsilon(t) = \frac{k_0}{k_m} \Delta \mathbf{k}^T \tilde{\mathbf{w}}(t) + \Delta\mu\eta(t), \quad (11.45)$$

где

$$\tilde{\mathbf{w}} = W_M(p) \mathbf{w}.$$

Итак, адаптивная система управления может быть описана соотношениями (11.41а), (11.44б), (11.44в), (11.42), (11.44) и (11.45).

Выберем в качестве кандидата на функцию Ляпунова квадратичную форму

$$V(\Delta \mathbf{k}, \Delta\mu) = \frac{1}{2\gamma} \frac{|k_0| \Delta \mathbf{k}^T \Delta \mathbf{k}}{k_m} + \frac{1}{2\gamma} \Delta\mu^2.$$

Здесь γ — произвольное положительное число. Продифференцировав по времени, получим

$$\dot{V}(\Delta \mathbf{k}, \Delta\mu) = \frac{1}{\gamma} \frac{|k_0| \Delta \dot{\mathbf{k}}^T \Delta \dot{\mathbf{k}}}{k_m} + \frac{1}{\gamma} \Delta\mu \dot{\Delta\mu}.$$

Так как $\Delta \dot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{k}}$ и $\Delta \dot{\mu} = \dot{\mu}$, подставим сюда выражения для $\dot{\mathbf{k}}$ из (11.41б) и $\dot{\mu}$ из (11.41в) вместо $\Delta \dot{\mathbf{k}}$ и $\Delta \dot{\mu}$. Тогда с учетом (11.45) получим

$$\dot{V} = -\frac{\varepsilon^2}{1 + |\tilde{\mathbf{w}}|^2} \leq 0.$$

Следовательно, адаптивная система устойчива по Ляпунову.

Из неравенств $V \geq 0$ и $\dot{V} \leq 0$ следует, что функция $V(\Delta \mathbf{k}, \Delta\mu)$ и соответственно переменные $\mathbf{k}$ и μ ограничены. Доказательство ограниченности других переменных и выполнения целевого условия

($e(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$) несколько сложнее, и здесь оно не рассматривается (см., например, [45]).

Пример 11.3. Объект и эталонная модель описываются уравнениями

$$y = \frac{k_0}{p^2 + a_1 p + a_2} u,$$

$$y_m = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} g(t),$$

где k_0, a_1, a_2 — неизвестные параметры; знак k_0 известен ($k_0 > 0$).

Определить алгоритм адаптивного управления, обеспечивающего ограниченность всех переменных и сходимости ошибки $e = y - y_m$ к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Решение. В данном случае имеем $n = 2$ и $P_m(p) = 1$. Поэтому $P'_m(p) = P_1(p)$, и в качестве полинома $P_1(p)$ в соотношении (11.39) можно принять любой устойчивый полином 1-го порядка. Выберем в качестве $P_1(p)$ полином

$$P'_m(p) = P_1(p) = p + 2.$$

В этом случае $\beta'_1 = 2$, и матрицы E и F представляют скалярные величины: $E = -2$ и $F = 1$. Поэтому уравнения (11.40) и алгоритм управления (11.41а) принимают вид

$$\dot{v}_1 = -2v_1 + u, \quad \dot{z}_1 = -2z_1 + y,$$

$$u = k_{v1}v_1 + k_{z1}z_1 + k_y y + k_g g.$$

Так как $\mathbf{k} = (k_{v1} \ k_{z1} \ k_y \ k_g)^T$ и $\mathbf{w} = (v_1 \ z_1 \ y \ g)^T$, то алгоритмы (11.41б) и (11.41в) принимают вид

$$\begin{pmatrix} \dot{k}_{v1} \\ \dot{k}_{z1} \\ \dot{k}_y \\ \dot{k}_g \end{pmatrix} = -\frac{\gamma \varepsilon}{1 + |\bar{\mathbf{w}}|^2} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \\ \bar{w}_4 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mu} = -\frac{\gamma \varepsilon \eta}{1 + |\bar{\mathbf{w}}|^2},$$

где

$$\bar{w}_1 = W_m(p)v_1, \quad \bar{w}_2 = W_m(p)z_1, \quad \bar{w}_3 = W_m(p)y, \quad \bar{w}_4 = W_m(p)g,$$

$$|\bar{\mathbf{w}}|^2 = \bar{w}_1^2 + \bar{w}_2^2 + \bar{w}_3^2 + \bar{w}_4^2, \quad \eta = \mathbf{k}^T \bar{\mathbf{w}} - W_m(p)(\mathbf{k}^T \mathbf{w}), \quad \Delta \mu = \mu - k_0,$$

$$\varepsilon = e + \mu \eta, \quad e = y - y_m.$$

11.2.5. Адаптивное управление по состоянию нелинейным объектом. Методы синтеза алгоритмов адаптивного управления разработаны и для определенного класса нелинейных объектов. Обычно такой класс объектов характеризуется тем, что неизвестные параметры входят в уравнение объекта линейно, вектор состояния доступен измерению и от нелинейности можно избавиться путем соответствующего выбора закона управления, если параметры известны.

Постановка задачи. Пусть объект описывается уравнением

$$a_0 \overset{(n)}{y} + \sum_{i=1}^n a_i f_i(\mathbf{x}, t) = u, \quad (11.46)$$

где $\mathbf{x} = (y \dot{y} \dots \overset{(n-1)}{y})^T$ — вектор состояния; $f_i(\mathbf{x}, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — известные нелинейные функции, ограниченные при ограниченном векторе состояния и любом $t \geq t_0$; a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) — неизвестные постоянные параметры, знак a_0 известен; все фазовые переменные доступны измерению. Эталонная модель задается уравнением

$$\overset{(n)}{y}_m + \alpha_1 \overset{(n-1)}{y}_m + \dots + \alpha_n y_m = \beta_0 g(t). \quad (11.47)$$

Здесь $g(t)$ — задающее воздействие. Естественно, предполагается, что характеристический полином этого уравнения устойчив.

Требуется определить алгоритм адаптивного управления, при котором все переменные ограничены и ошибка слежения сходится к нулю: $e(t) = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Ниже при записи алгоритма адаптивного управления используется $(n \times 1)$ -матрица

$$B = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 1)^T$$

и $(n \times n)$ -матрица P , которая является решением уравнения Ляпунова

$$PA + A^T P = I_n,$$

где матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$

Элементами последней строки матрицы A являются коэффициенты уравнения эталонной модели с обратными знаками.

Утверждение 11.5. Алгоритмом адаптивного управления с ЭМ (11.47) нелинейным объектом (11.46), обеспечивающим глобальную устойчивость и сходимость ошибки $e(t) = y(t) - y_m(t)$ к нулю при $t \rightarrow \infty$, является

$$u = \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{v}, \quad (11.49a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = -\text{sign}(a_0) \Gamma \mathbf{v} B^T P \mathbf{x}. \quad (11.49b)$$

Здесь $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_0 \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n)^T$ — вектор варьируемых параметров регулятора; Γ — положительно определенная $((n+1) \times (n+1))$ -матрица; $\mathbf{v} = (z f_1 f_2 \dots f_n)^T$ — вектор сигналов, где $z = \beta_0 g(t) - (\alpha_1 \overset{(n-1)}{y} + \alpha_2 \overset{(n-2)}{y} + \dots + \alpha_n)$.

Доказательство. В данном случае варьируемыми параметрами регулятора являются оценки неизвестных параметров, и их идеальные значения a_i^* совпадают с истинными значениями: $a_i^* = a_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Получим уравнение в отклонениях — переменных $e = y - y_m$ и $\tilde{a}_i = \hat{a}_i - a_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Алгоритм управления (11.49а) в скалярной форме имеет вид

$$u = \hat{a}_0 [\beta_0 g(t) - (\alpha_1 {}^{(n-1)}y + \dots + \alpha_n y)] + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i f_i.$$

Подставим сюда вместо $\beta_0 g(t)$ левую часть уравнения эталонной модели:

$$u = \hat{a}_0 [{}^{(n)}y_m - (\alpha_1 {}^{(n-1)}e + \dots + \alpha_n e)] + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i f_i.$$

Подставив это выражение для управления в уравнение (11.46), получим уравнение основного контура

$$a_0 {}^{(n)}y = \hat{a}_0 [{}^{(n)}y_m - (\alpha_1 {}^{(n-1)}e + \dots + \alpha_n e)] + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i f_i.$$

Если из обеих частей вычесть выражение $a_0 [{}^{(n)}y_m - (\alpha_1 {}^{(n-1)}e + \dots + \alpha_n e)]$, то последнее соотношение можно преобразовать к виду

$${}^{(n)}e + \alpha_1 {}^{(n-1)}e + \dots + \alpha_n e = \frac{1}{a_0} \left(\tilde{a}_0 z + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i f_i \right) = \frac{1}{a_0} \tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{v},$$

где $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n)^T$. Это уравнение, записанное в нормальной форме, примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \frac{1}{a_0} B(\tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{v}). \quad (11.50а)$$

Здесь $\mathbf{x} = (e \dot{e} \dots e^{(n-1)})^T$. Так как $\hat{\mathbf{a}} = \dot{\hat{\mathbf{a}}}$, то алгоритм адаптации (11.49б) можно записать в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = -\text{sign}(a_0) \Gamma \mathbf{v} B^T P \mathbf{x}. \quad (11.50б)$$

Таким образом, адаптивная система управления в переменных e и $\tilde{a}$ описывается уравнениями (11.50).

В качестве кандидата на функцию Ляпунова примем квадратичную форму

$$V(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \frac{1}{|a_0|} \tilde{\mathbf{a}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{a}},$$

где P — решение уравнения Ляпунова $PA + A^T P = -I$. Производная по времени от этой функции в силу (11.50) имеет вид

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq 0.$$

Следовательно, адаптивная система управления устойчива по Ляпунову. Так как $V \geq 0$ и $\dot{V} \leq 0$, то функция Ляпунова ограничена и

имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$. В силу ограниченности функции Ляпунова переменные x , $\tilde{a}$ и соответственно $\tilde{y}^{(i)}$, $\tilde{a}_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ограничены. При ограниченном $g(t)$ ограничены производная $\dot{x}$ и вторая производная $\ddot{V} = -2x^T \dot{x}$. Поэтому по лемме Барбалата $\dot{V}(t)$ и соответственно $e(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

11.2.6. Адаптивное управление и робастность. Выше алгоритмы адаптивного управления получены при условии, что имеется только параметрическая неопределенность. Другими словами, принималось, что неопределенность обуславливается наличием только неизвестных постоянных параметров. В действительности неопределенность может быть обусловлена множеством других факторов, например:

- неточностью используемой модели объекта;
- наличием шума измерения;
- внешними возмущающими воздействиями;
- ошибками округления и запаздыванием, возникающими при использовании цифровых устройств;
- изменениями параметров во времени.

Все неучтенные факторы, обуславливающие неопределенность, выступают как возмущения. Выводы об устойчивости, ограниченности переменных и сходимости к нулю ошибки слежения были сделаны при идеальных условиях, т.е. при условии, что возмущения отсутствуют. Однако в действительности любая система функционирует в условиях действия всех или части указанных выше возмущающих факторов. Поэтому пригодные на практике системы управления должны обладать свойством робастности (грубости), т.е. их свойства не должны качественно изменяться при наличии не очень больших возмущений.

Алгоритмы адаптивного управления, при которых адаптивная система управления обладает свойством робастности, называют *робастными*. Для того чтобы обеспечить ограниченность всех переменных и избежать потери устойчивости при нарушении идеальных условий, необходимо, чтобы алгоритмы адаптивного управления были робастными.

Как показывают исследования, проведенные путем моделирования на частных примерах [69], полученные выше алгоритмы адаптивного управления обладают определенной робастностью по отношению к некоторым возмущениям, когда сигнал v удовлетворяет условию постоянного возбуждения (11.11). Если сигнал v является простым (например, задающее воздействие является постоянным), то малое возмущение может привести к неустойчивости. По этой причине синтез адаптивной системы управления, как, впрочем, и обычной системы, должен сопровождаться моделированием. И при необходимости алгоритм адаптивного управления должен модифицироваться.

Простейшим методом модификации является так называемый *метод мертвой зоны*. Так как этот метод прост и эффективен, то он

чаще всего используется. Метод мертвой зоны заключается в том, что, когда ошибка слежения мала и на результат адаптации преобладающее влияние оказывает возмущающее воздействие, процесс адаптации приостанавливается. Это достигается заменой алгоритма адаптации

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = -\gamma \mathbf{v} e$$

на алгоритм вида

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = \begin{cases} -\gamma \mathbf{v} e, & |e| > \Delta, \\ 0, & |e| \leq \Delta, \end{cases}$$

где Δ — размер мертвой зоны.

Другой метод — это *метод замены регрессора* [69]. Под регрессором понимается вектор сигналов $\mathbf{v}$ (в формуле (11.30) вектор w). Этот метод основан на следующей идее. Вектор сигналов находится путем обработки измеренных значений выхода y . Поэтому он подвержен влиянию шума измерения $n(t)$. Но так как алгоритм адаптации включает произведение $\mathbf{v}(t)$ и $e(t)$, скорость обновления параметров зависит от квадрата шума наблюдения (измерения), что может стать причиной неустойчивости. Например, в присутствии шума измерения $n(t)$ в алгоритм адаптации

$$\dot{\hat{k}}_y = -\text{sign}(b_0) \gamma y e$$

вместо y нужно подставить $y + n(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{k}}_y &= -\text{sign}(b_0) \gamma [y + n(t)][y + n(t) - y_m] = \\ &= -\text{sign}(b_0) \gamma [y(y - y_m) + n(t)(y - y_m) + n^2(t)]. \end{aligned}$$

В правой части последнего равенства первый член содержит информацию о параметрах, второй член определяет усредненную величину полезного сигнала и шума, третий член включает только шум, он является основной причиной дрейфа параметра k_y и соответственно неустойчивости адаптивной системы управления. Метод замены регрессора состоит в том, что при малой ошибке слежения переменную y , зависящую от шума, заменяют на переменную y_m , не зависящую от шума.

В заключение остановимся на выборе параметра γ и положительно определенной матрицы Γ . Для простоты примем $\Gamma = \gamma I_n$ и ограничимся анализом влияния γ на качество адаптивной системы управления.

Адаптивная система управления является негрубой по отношению к различным возмущениям по следующей причине. Как отмечалось, при невыполнении условия постоянного возбуждения полезного сигнала по мере сходимости ошибки слежения к нулю на процесс адаптации все большее влияние оказывают возмущающие факторы. Вследствие этого при малых ошибках слежения изменение варьируемых параметров под влиянием возмущений происходит случайным образом. Другими словами, по мере уменьшения ошибки слежения наступает момент, когда начинается дрейф варьируемых параметров. В про-

цессе этого дрейфа параметры принимают такие значения, при которых система управления становится неустойчивой.

Скорость дрейфа зависит от величины γ : чем больше γ , тем больше скорость дрейфа. Поэтому с точки зрения робастности чем меньше γ , тем лучше. Однако чем меньше γ , тем медленнее протекает процесс адаптации и соответственно тем дольше качество адаптивной системы управления будет плохим. С увеличением γ процесс адаптации может стать колебательным, и амплитуда колебаний увеличивается, а затем может наступить такой момент, когда процесс начнет расходиться, и система станет неустойчивой.

11.3. Адаптивное управление с идентификатором

При синтезе адаптивных систем управления с идентификатором алгоритм управления основного контура строится так же, как и в случае, когда параметры объекта известны. Но в данном случае алгоритм управления и соответственно параметры построенного на его основе регулятора зависят от неизвестных параметров объекта. И чтобы подстроить параметры регулятора нужно определить значения неизвестных параметров объекта в процессе функционирования системы управления. Для этой цели и предназначен *идентификатор*.

11.3.1. Идентификация и модель для получения оценки.

Идентификацией системы называется построение (получение) математической модели системы в результате обработки ее входных и выходных сигналов в процессе эксперимента. Эксперимент может быть *активным*, т.е. проводится специально для решения задачи идентификации, или *пассивным*: идентификация осуществляется в процессе нормального функционирования системы. Если структура системы определена или задана, то задача идентификации сводится к определению (идентификации) ее параметров. Идентификация, которую выполняет идентификатор, состоит в получении оценки неизвестных параметров объекта в реальном времени и в процессе нормального функционирования адаптивной системы управления. Поэтому ее называют *адаптивной идентификацией*. Сложность адаптивной идентификации заключается в том, что она происходит одновременно с процессами адаптации (подстройки параметров регулятора) и управления; в этих условиях необходимо обеспечить работоспособность и прежде всего устойчивость системы управления.

Модель для получения оценки. Суцность оценки параметров — это выделение информации о параметрах из доступных данных, получаемых путем измерения. Для получения оценки используется модель для получения оценки, или *идентификационная модель*, которая связывает возможные данные с неизвестными параметрами. Довольно общей идентификационной моделью является линейная параметрическая форма [69]

$$y = W(t)a, \quad (11.51)$$

где $\mathbf{y}$ — выходной вектор, $\mathbf{a}$ — вектор неизвестных параметров, $W(t)$ — матричная функция, которая называется *сигнальной матрицей*. Выходной вектор и сигнальная матрица должны быть известны из данных, получаемых путем измерения сигналов системы.

В каждый момент времени *идентификационная модель* (11.51) представляет собой линейную систему уравнений относительно неизвестных параметров. Если даны измерения $\mathbf{y}(t)$ и $W(t)$ на некотором интервале времени, то имеем бесконечное число уравнений вида (11.51). Если даны значения $\mathbf{y}(t)$ и $W(t)$ в l дискретных точках, то имеем систему из l уравнений. Получение оценки неизвестных параметров сводится к решению этих избыточных уравнений для r неизвестных параметров. Для получения оценки для r параметров необходимо иметь по меньшей мере r уравнений. Однако чтобы получить хорошую оценку параметров при присутствии шумов и ошибки в модели, желательно иметь данные в большем количестве точек.

При определении оценки в реальном масштабе времени уравнения решаются рекуррентно, так как данные об $\mathbf{y}(t)$ и $W(t)$ обновляются с течением времени. Быстрота и точность оценки зависят от двух факторов: идентификационной модели и метода решения.

Модель (11.51) является достаточно общей. Любая линейная система может быть представлена в такой форме после надлежащего преобразования. Преобразование сводится к пропусканию измеряемых сигналов через фильтры, на выходе которых получаем преобразованные сигналы. Поэтому преобразование линейных систем в идентификационную модель называют *фильтрацией*.

Идентификационная модель линейного объекта 1-го порядка. Рассмотрим объект, который описывается уравнением

$$\dot{y} + a_1 y = b_0 u.$$

Здесь параметры a_1 и b_0 неизвестны; доступны измерению выход y и управление u . Данное уравнение не может быть использовано в качестве идентификационной модели, так как в него входит производная $\dot{y}$ и дифференцирование y нежелательно из-за появления дополнительных шумов.

Чтобы исключить $\dot{y}$, произведем формальное преобразование данного уравнения с помощью оператора $1/(p + \lambda)$:

$$\frac{py}{p + \lambda} + \frac{a_1}{p + \lambda} y = b_0 \frac{1}{p + \lambda} u.$$

Далее это уравнение можно преобразовать к виду

$$y = \frac{\lambda - a_1}{p + \lambda} y + b_0 \frac{1}{p + \lambda} u.$$

Введем новые переменные:

$$\tilde{y} = \frac{1}{p + \lambda} y, \quad \tilde{u} = \frac{1}{p + \lambda} u.$$

Эти переменные получаются путем пропуска исходных переменных через фильтр с передаточной функцией $1/(p + \lambda)$. Используя новые переменные, последнее уравнение можно записать в виде

$$y = (\lambda - a_1)\tilde{y} + b_0\tilde{u}.$$

Здесь в качестве неизвестных параметров можно принять $\lambda - a_1$ и b_0 : определив $\lambda - a_1$, легко найдем a_1 . Если положить $W(t) = (\tilde{y} \ \tilde{u})$ и $\mathbf{a} = (\lambda - a_1 \ b_0)^T$, то последнее уравнение примет вид (11.51).

Идентификационная модель линейного объекта n -го порядка. В общем случае линейный одномерный объект с относительным порядком $r_0 \geq 1$ может быть задан уравнением

$$A(p)y = B(p)u, \quad (11.52)$$

где

$$A(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n, \quad B(p) = b_1p^{n-1} + b_2p^{n-2} + \dots + b_n.$$

Разделив обе части на операторный полином

$$A_0(p) = p^n + \alpha_1p^{n-1} + \dots + \alpha_n,$$

уравнение (11.52) можно преобразовать к виду

$$y = \frac{A_0(p) - A(p)}{A_0(p)} y + \frac{B(p)}{A_0(p)} u. \quad (11.53)$$

Имеем

$$A_0(p) - A(p) = (\alpha_1 - a_1)p^{n-1} + (\alpha_2 - a_2)p^{n-2} + \dots + \alpha_n - a_n.$$

Введем новые переменные:

$$\tilde{y}_i = \frac{p^{n-i}}{A_0(p)} y, \quad \tilde{u}_i = \frac{p^{n-i}}{A_0(p)} u, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Уравнение (11.53) примет вид оценочной модели (11.51), если положить

$$W(t) = [\tilde{y}_1 \ \dots \ \tilde{y}_n \ \tilde{u}_1 \ \dots \ \tilde{u}_n], \\ \mathbf{a} = (\alpha_1 - a_1 \ \dots \ \alpha_n - a_n \ b_1 \ \dots \ b_n)^T.$$

11.3.2. Градиентный идентификатор. Пусть $\hat{\mathbf{a}}(t)$ является оценкой в момент t вектора неизвестных параметров $\mathbf{a}$ в (11.51). Оценка выхода

$$\hat{y}(t) = W(t)\hat{\mathbf{a}}(t), \quad (11.54)$$

которая получается при подстановке в (11.51) вместо a его оценки, называется *прогнозируемым выходом*, а разность

$$e_{\text{п}}(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (11.55)$$

— *прогнозируемой ошибкой*. Очевидно, прогнозируемая ошибка есть не что иное, как *невязка* (этот термин был определен при рассмотрении фильтра Калмана–Бьюси). Подставив в (11.55) выражения для $y(t)$ из (11.51) и $\hat{y}(t)$ из (11.54), получим

$$e_{\text{п}}(t) = W(t)\hat{\mathbf{a}}(t) - W(t)\mathbf{a}(t). \quad (11.56)$$

Рассмотрим алгоритм для получения оценки (*алгоритм идентификации*), использующий невязку,

$$\hat{\mathbf{a}} = -\gamma W^T \mathbf{e}_n. \quad (11.57)$$

Здесь γ — положительная константа.

Алгоритм (11.57) является градиентным: его правая часть пропорциональна градиенту квадрата модуля невязки $|\mathbf{e}_n|^2 = \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n$ по вектору параметров $\hat{\mathbf{a}}$. Действительно, для указанного градиента имеем

$$\text{grad}_{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n) = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n) = 2 \mathbf{e}_n^T \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \hat{\mathbf{a}}},$$

или, учитывая (11.56),

$$\text{grad}_{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n) = 2 \mathbf{e}_n^T W.$$

Отсюда следует, что в правой части (11.57) стоит векторная величина, пропорциональная указанному градиенту (с обратным знаком).

Исследуем, обеспечивает ли градиентный алгоритм идентификации (11.57) сходимости параметрической ошибки к нулю при $t \rightarrow \infty$. Как следует из (11.56), невязка $\mathbf{e}_n(t)$ связана с *параметрической ошибкой* (*ошибкой оценки*) $\tilde{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$ соотношением

$$\mathbf{e}_n(t) = W(t) \tilde{\mathbf{a}}(t). \quad (11.58)$$

Подставив это выражение для $\mathbf{e}_n(t)$ в алгоритм идентификации (11.57) и учитывая равенство $\dot{\hat{\mathbf{a}}} = \dot{\tilde{\mathbf{a}}}$, получим

$$\dot{\tilde{\mathbf{a}}} = -\gamma W^T(t) W(t) \tilde{\mathbf{a}}(t).$$

Выберем в качестве кандидата на функцию Ляпунова квадрат модуля ошибки оценки

$$V(\tilde{\mathbf{a}}) = |\tilde{\mathbf{a}}|^2 = \tilde{\mathbf{a}}^T \tilde{\mathbf{a}}.$$

Ее производная по времени в силу приведенного выше уравнения для $\tilde{\mathbf{a}}(t)$ имеет вид

$$\dot{V} = 2\tilde{\mathbf{a}}^T \dot{\tilde{\mathbf{a}}} = -2\gamma \tilde{\mathbf{a}}^T W^T W \tilde{\mathbf{a}} = -2\gamma |W \tilde{\mathbf{a}}|^2 \leq 0.$$

Следовательно, *градиентный идентификатор*, т.е. идентификатор, использующий градиентный алгоритм идентификации, устойчив по Ляпунову. И так как функция Ляпунова равна квадрату модуля параметрической ошибки, то эта ошибка будет убывать. Однако, будет ли она стремиться к нулю, зависит от сигнальной матрицы $W(t)$, которая в свою очередь зависит от внешних воздействий.

Чтобы исследовать зависимость оценки от сигнальной матрицы, рассмотрим оценку параметров, когда в идентификационной модели $y = Wa$ все величины являются скалярными. Согласно градиентному алгоритму

$$\dot{\hat{a}} = -\gamma W e_n.$$

В этом случае уравнение для ошибки оценки принимает вид

$$\dot{\tilde{a}} = -\gamma W^2 \tilde{a},$$

или

$$\frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}} = -\gamma W^2 dt.$$

Проинтегрировав последнее уравнение от 0 до t , получим

$$\tilde{a} = \tilde{a}(0) \exp\left(-\gamma \int_0^t W^2(\tau) d\tau\right).$$

Отсюда следует, что ошибка $\tilde{a}$ сходится к нулю, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t W^2(\tau) d\tau = \infty.$$

Последнее условие будет выполнено, и параметрическая ошибка будет экспоненциально сходиться к нулю, если существуют положительные постоянные T и α такие, что при любых $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$\int_t^{t+T} W^2(\tau) d\tau \geq \alpha,$$

т.е. выполняется условие постоянного возбуждения сигнала $W(t)$. Ясно, что если $W(t)$ является константой, то гарантируется экспоненциальная сходимость.

Полученный выше результат для одного параметра можно распространить на случай многих параметров [69]: если матрица сигналов $W(t)$ удовлетворяет *условию постоянного возбуждения*, т.е. существуют положительные константы T и α такие, что при любых $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$\int_t^{t+T} W^T(\tau) W(\tau) d\tau \geq \alpha I, \quad (11.59)$$

то параметрическая ошибка экспоненциально сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Выше в алгоритме оценивания (11.57) был использован скалярный коэффициент γ . Несколько более общий алгоритм идентификации получим, если вместо скалярного коэффициента усиления принять положительно определенную матрицу Γ , называемую *матрицей коэффициентов усиления*.

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = -\Gamma W^T \mathbf{e}_n.$$

Устойчивость этого алгоритма можно доказать, приняв в качестве кандидата на функцию Ляпунова квадратичную форму $V(\tilde{\mathbf{a}}) = \tilde{\mathbf{a}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{a}}$.

Коэффициент усиления γ (матрица коэффициентов усиления Γ) оказывают сильное влияние на характер сходимости алгоритма идентификации. В случае одного параметра легко видеть, что чем больше γ , тем скорость сходимости больше. В случае многих параметров связь между γ и скоростью сходимости не такая простая. Как показывают исследования [69], на некотором малом интервале увеличение

оценочного коэффициента усиления может привести к увеличению скорости сходимости. Но вне указанного интервала дальнейшее увеличение этого коэффициента может привести к колебаниям и более медленной сходимости.

Кроме влияния на скорость сходимости, выбор γ оказывает также влияние на способность идентификатора следить за изменяющимися параметрами и противостоять возмущениям.

Свойство робастности. Чтобы идентификатор имел практическое значение, он должен обладать робастностью (грубостью), т. е. он должен выдавать удовлетворительную оценку при изменении параметров, при наличии шума измерения и других возмущений.

Качество градиентного идентификатора зависит от нескольких факторов, главными из которых являются:

- уровень постоянного возбуждения матрицы сигналов $W(t)$;
- скорости изменения параметров и уровня непараметрической неопределенности;
- величины оценочного коэффициента усиления γ .

Уровень постоянного возбуждения $W(t)$ определяется задачей управления. Постоянное возбуждение существенно для робастности идентификатора. Если сигнал постоянно не возбуждается, параметры не будут сходиться к точному значению даже при отсутствии непараметрической неопределенности. При наличии непараметрической неопределенности идентификатор может стать неустойчивым. Может оказаться, что нужно добавлять некоторое возмущающее воздействие к управлению, чтобы получить качественную оценку параметров.

Если оцениваемые параметры изменяются, то чем быстрее происходят эти изменения, тем больше непараметрические неопределенности влияют на качество оценки параметров. Очевидно, чем быстрее изменяются параметры, тем труднее получить точную оценку. Кроме того, чем выше уровень шума и больше неучтенных возмущений и динамики, тем идентификатор функционирует хуже.

Пример 11.4. Задан объект

$$\dot{y} + a_1 y = b_0 u,$$

где a_1, b_0 — неизвестные параметры.

Требуется определить алгоритм адаптивного управления, при котором по окончании процесса адаптации свободное движение основного контура будет описываться функцией

$$y = Ce^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0).$$

Решение. Свободное движение будет описываться указанной функцией, если уравнение основного контура при отсутствии внешнего воздействия будет иметь вид

$$\dot{y} + \alpha y = 0.$$

Пусть алгоритм управления основного контура имеет вид

$$u = -ky.$$

Подставив это выражение в уравнение объекта, получим

$$\dot{y} + (a_1 + b_0 k)y = 0.$$

Это уравнение примет требуемый вид, если имеет место равенство

$$a_1 + b_0 k = \alpha,$$

или

$$k = \frac{\alpha - a_1}{b_0}.$$

Но так как параметры a_1 и b_0 не известны, воспользуемся их оценками. Тогда для алгоритма управления получим

$$u = -\frac{\alpha - \hat{a}_1}{\hat{b}_0} y.$$

Найдем алгоритм идентификации. Идентификационная модель имеет вид

$$y = W a,$$

где

$$W = (\tilde{y} \quad \tilde{u}), \quad \mathbf{a} = (\lambda - a_1 \quad b_0)^T, \quad \tilde{y} = \frac{1}{p + \lambda} y, \quad \tilde{u} = \frac{1}{p + \lambda} u.$$

Градиентный алгоритм идентификации (11.57) принимает вид

$$\begin{pmatrix} -\dot{\hat{a}}_1 \\ \dot{\hat{b}}_0 \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} e_n,$$

или

$$a_1 = \gamma \tilde{y} e_n, \quad b_0 = -\gamma \tilde{u} e_n,$$

где

$$e_n = W \hat{\mathbf{a}} - y = (\tilde{y} \quad \tilde{u}) \begin{pmatrix} \lambda - \hat{a}_1 \\ \hat{b}_0 \end{pmatrix} - y = \tilde{y} \lambda - \tilde{y} \hat{a}_1 + \tilde{u} \hat{b}_0 - y.$$

Подставив это выражение в алгоритм идентификации, получим

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_1 &= \gamma \tilde{y} (\tilde{y} \lambda - \tilde{y} \hat{a}_1 + \tilde{u} \hat{b}_0 - y), \\ \dot{\hat{b}}_0 &= -\gamma \tilde{u} (\tilde{y} \lambda - \tilde{y} \hat{a}_1 + \tilde{u} \hat{b}_0 - y). \end{aligned}$$

Уравнения фильтров, на выходах которых получаем $\tilde{y}$ и $\tilde{u}$, имеют вид

$$\dot{\tilde{y}} = -\lambda \tilde{y} + y, \quad \dot{\tilde{u}} = -\lambda \tilde{u} + u.$$

11.3.3. МНК-идентификатор. Для получения оценки параметров широкое применение находит метод наименьших квадратов. При этом методе оценка получается путем минимизации *интегральной прогнозируемой ошибки (невязки)*

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t |\mathbf{y}(\tau) - W(\tau) \hat{\mathbf{a}}(\tau)|^2 d\tau. \quad (11.60)$$

Алгоритм идентификации, получаемый методом наименьших квадратов, будем называть *МНК-алгоритмом* или *МНК-алгоритмом*

идентификации, а идентификатор, построенный на основе такого алгоритма, — *МНК-идентификатором*.

Интегральная невязка (11.60) учитывает все измерения, которые производится до текущего момента. Поэтому оценки, получаемые методом наименьших квадратов, имеют то преимущество, что они меньше зависят от шумов измерения, так как в процессе измерения и интегрирования они сглаживаются. МНК-алгоритмы хорошо противостоят не только шумам измерения, но и другим возмущающим воздействиям.

Утверждение 11.6. *МНК-алгоритм идентификации имеет вид*

$$\hat{\mathbf{a}}(t) = -P(t)W^T(t)e_n(t), \quad (11.61)$$

где $e_n(t)$ — прогнозируемая ошибка (невязка), $P(t)$ — матрица коэффициентов усилителя, которая определяется из уравнения

$$\dot{P}(t) = -P(t)W^T(t)W(t)P(t). \quad (11.62)$$

Алгоритм (11.61), (11.62) обеспечивает параметрическую сходимость ($\hat{\mathbf{a}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$), если выполняется условие постоянного возбуждения сигнала (11.59).

Доказательство. Запишем интегральную невязку в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t [\mathbf{y}(\tau) - W(\tau)\hat{\mathbf{a}}(t)]^T [\mathbf{y}(\tau) - W(\tau)\hat{\mathbf{a}}(t)] d\tau.$$

При дифференцировании этого соотношения по времени следует обратить внимание на то, что интегрирование производится по τ , и оно на оценку $\hat{\mathbf{a}}(t)$ не распространяется, так как она зависит от t . Это связано с тем, что неизвестные параметры считаются постоянными, и при получении оценки в момент t для определения невязки используются значения неизвестных параметров в момент t .

Необходимое условие минимума $dJ/d\hat{\mathbf{a}} = 0$, которое в данном случае является и достаточным, принимает вид

$$\int_0^t [\mathbf{y}(\tau) - W(\tau)\hat{\mathbf{a}}(t)]^T W(\tau) d\tau = 0.$$

Произведя транспонирование подынтегрального выражения, последнее равенство можно записать в виде

$$\int_0^t W^T(t)W(t)\hat{\mathbf{a}}(t) d\tau = \int_0^t W^T(\tau)\mathbf{y}(\tau) d\tau.$$

Продифференцируем обе части по t :

$$W^T(t)W(t)\hat{\mathbf{a}}(t) + \int_0^t W^T(\tau)W(\tau) d\tau \cdot \dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) = W^T(t)\mathbf{y}(t).$$

Отсюда, если положить

$$P^{-1}(t) = \int_0^t W^T(\tau)W(\tau) d\tau \quad (11.63)$$

и учесть, что $\mathbf{e}_n(t) = \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$ и $\hat{\mathbf{y}}(t) = W(t)\hat{\mathbf{a}}(t)$, получим МНК-алгоритм (11.61).

Теперь покажем, что матрица коэффициентов усиления $P(t)$ определяется из уравнения (11.62). Из очевидного равенства

$$\frac{d}{dt}(PP^{-1}) = \dot{P}P^{-1} + P\frac{d}{dt}(P^{-1}) = 0$$

имеем

$$\dot{P} = -P\frac{d}{dt}(P^{-1})P. \quad (11.64)$$

Подставив в это равенство выражение

$$\frac{dP^{-1}(t)}{dt} = W^T(t)W(t), \quad (11.65a)$$

которое находится путем дифференцирования (11.63), получим (11.62).

Докажем параметрическую сходимость при МНК-алгоритме. Проинтегрировав (11.65a) от 0 до t , будем иметь

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(0) + \int_0^t W^T(\tau)W(\tau) d\tau. \quad (11.65b)$$

Умножив обе части соотношения (11.61) слева на $P^{-1}(t)$ и подставив выражение для невязки из (11.58), получим

$$P^{-1}(t)\dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) = -W^T(t)W(t)\tilde{\mathbf{a}}(t).$$

Так как $\dot{\hat{\mathbf{a}}} = \dot{\tilde{\mathbf{a}}}$, то последнее равенство можно записать в виде

$$P^{-1}(t)\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(t) = -W^T(t)W(t)\tilde{\mathbf{a}}(t).$$

Подставив сюда выражение для $W^T(t)W(t)$ из (11.65a), получим

$$P^{-1}(t)\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(t) + \frac{dP^{-1}(t)}{dt}\tilde{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{0},$$

или

$$\frac{d}{dt}[P^{-1}(t)\tilde{\mathbf{a}}(t)] = \mathbf{0}.$$

Отсюда

$$P^{-1}(t)\tilde{\mathbf{a}}(t) - P^{-1}(0)\tilde{\mathbf{a}}(0) = \mathbf{0},$$

или

$$\tilde{\mathbf{a}}(t) = P(t)P^{-1}(0)\tilde{\mathbf{a}}(0). \quad (11.66)$$

Из этого равенства следует, что параметрическая ошибка $\tilde{\mathbf{a}}(t)$ будет сходиться к нулю, если будет выполнено предельное соотношение

$$P(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

или

$$P^{-1}(t) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Как следует из (11.656), это соотношение будет выполнено, если

$$\int_0^t W^T(\tau)W(\tau) d\tau \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

А это условие будет выполнено, если будет выполнено условие постоянного возбуждения (11.59). Действительно, для любого целого числа N

$$\int_0^{NT+T} W^T(\tau)W(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^N \int_{iT}^{iT+T} W^T(\tau)W(\tau) d\tau \geq N\alpha I.$$

Следовательно, если выполняется условие постоянного возбуждения, то $P(t) \rightarrow 0$ и $\tilde{a}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Утверждение 11.6 полностью доказано.

Кратко рассмотрим, как влияют начальные значения $\tilde{a}(0)$ и $P(0)$ на оценку. Положив $P(0) = p_0 I$ и подставив выражение для $P(t)$ из (11.656) в (11.66), получим

$$\tilde{a}(t) = \left[I + p_0 \int_0^t W^T(\tau)W(\tau) d\tau \right]^{-1} \tilde{a}(0).$$

Отсюда видно, что малая ошибка при выборе $\tilde{a}(0)$ приводит к малым ошибкам в течение всего процесса оценивания. Кроме того, чем больше p_0 , тем меньше ошибка. Поэтому p_0 нужно выбирать настолько большим, насколько позволяет чувствительность к шумам.

11.3.4. МНК-идентификатор с экспоненциальной потерей памяти. До сих пор предполагалось, что неизвестные параметры вовсе не изменяются или изменяются очень медленно: за время адаптации они практически не меняются. Однако если эти параметры в действительности, хотя и медленно, изменяются, старые данные при оценке текущих значений неизвестных параметров обесцениваются, так как они отражают старые значения параметров. Поэтому представляется разумным, чтобы старые данные оказывали меньшее влияние на оценку, чем новые данные. Эти соображения привели к методу наименьших квадратов, при котором вклад старых данных на значение оценки экспоненциально убывает. Экспоненциальное «забывание» достигается за счет того, что в этом случае в качестве минимизируемого функционала принимается интеграл

$$J = \frac{1}{2} \int_0^t \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) |y(s) - W(s)\hat{a}(t)|^2 ds, \quad (11.67)$$

где $\lambda(\tau) \geq 0$ — переменный коэффициент потери памяти. Алгоритм идентификации, получаемый путем минимизации функционала (11.67), будем называть *МНК-алгоритмом идентификации с экспоненциальной потерей памяти*, а идентификатор, построенный на основе такого алгоритма, — *МНК-идентификатором с экспоненциальной потерей памяти*.

Утверждение 11.7. МНК-алгоритм идентификации с экспоненциальной потерей памяти имеет вид

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) = -P(t)W^T(t)\mathbf{e}_n(t), \quad (11.68a)$$

$$\dot{P}(t) = \lambda(t)P(t) - P(t)W^T(t)W(t)P(t), \quad (11.68b)$$

и он обеспечивает параметрическую сходимость ($\hat{\mathbf{a}}(t) \rightarrow \mathbf{a}(t)$ при $t \rightarrow \infty$), если выполняется условие постоянного возбуждения (11.59).

Как видим, уравнение для $\hat{\mathbf{a}}(t)$ остается таким же, как и при обычном МНК-алгоритме, изменяется только уравнение для матрицы коэффициентов усиления.

Доказательство. Условие минимума функционала (11.67) имеет вид

$$\frac{dJ}{d\hat{\mathbf{a}}} = -\int_0^t \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) [\mathbf{y}(s) - W(s)\hat{\mathbf{a}}(t)]^T W(s) ds = 0.$$

После транспонирования это равенство можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) W^T(s)\mathbf{y}(s) ds = \\ = \int_0^t \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) W^T(s)W(s)\hat{\mathbf{a}}(t) ds. \end{aligned} \quad (11.69)$$

Продифференцируем обе части по времени. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^t -\lambda(t) \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) W^T(s)\mathbf{y}(s) ds + W^T(t)\mathbf{y}(t) = \\ = \int_0^t -\lambda(t) \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) W^T(s)W(s)\hat{\mathbf{a}}(t) ds + W^T(t)W(t)\hat{\mathbf{a}}(t) + \\ + \int_0^t \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) W^T(s)W(s)\dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) ds. \end{aligned}$$

В первых интегралах обеих частей последнего равенства функцию $-\lambda(t)$ можно вынести за знак интеграла, и в силу равенства (11.69) их можно сократить. После сокращения из последнего равенства получим (11.68a):

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) = -P(t)W^T(t)\mathbf{e}_n(t),$$

где

$$P^{-1}(t) = \int_0^t \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) W^T(s)W(s) ds. \quad (11.70)$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по времени:

$$\frac{dP^{-1}(t)}{dt} = \int_0^t -\lambda(t) \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) W^T(s)W(s) ds + W^T(t)W(t).$$

Отсюда, используя (11.70), находим

$$\frac{dP^{-1}(t)}{dt} = -\lambda(t)P^{-1}(t) + W^T(t)W(t). \quad (11.71)$$

Подставив это выражение в (11.64), получим (11.68б).

Осталось доказать параметрическую сходимость. Чтобы сделать это, найдем в явном виде параметрическую ошибку и выражение для обратной матрицы коэффициентов усиления. Умножив обе части (11.68а) слева на $P^{-1}(t)$ и произведя подстановку $\hat{\mathbf{a}} = \dot{\hat{\mathbf{a}}}$ и $\mathbf{e}_n(t) = W(t)\tilde{\mathbf{a}}$, получим

$$P^{-1}(t)\dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) = -W^T(t)W(t)\tilde{\mathbf{a}}(t).$$

Это равенство, подставив в него выражение для $W^T(t)W(t)$, которое получается из (11.71), можно представить в виде

$$P^{-1}(t)\dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) = -\left(\frac{dP^{-1}(t)}{dt} + \lambda(t)P^{-1}(t)\right)\tilde{\mathbf{a}}(t)$$

или

$$\frac{d}{dt}[P^{-1}(t)\tilde{\mathbf{a}}(t)] = -\lambda(t)P^{-1}(t)\tilde{\mathbf{a}}(t).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$P^{-1}(t)\tilde{\mathbf{a}}(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) P^{-1}(0)\tilde{\mathbf{a}}(0).$$

Отсюда имеем

$$\tilde{\mathbf{a}}(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) P(t)P^{-1}(0)\tilde{\mathbf{a}}(0). \quad (11.72)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$\begin{aligned} P^{-1}(t) = P^{-1}(0) \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right) + \\ + \int_0^t \exp\left(-\int_s^t \lambda(\tau) d\tau\right) W^T(s)W(s) ds \end{aligned} \quad (11.73)$$

является решением уравнения (11.71). Подставив это выражение в (11.72), получим

$$\tilde{\mathbf{a}}(t) = \left[P^{-1}(0) + \int_0^t \exp\left(\int_0^s \lambda(\tau) d\tau\right) W^T(s)W(s) ds \right]^{-1} P^{-1}(0)\tilde{\mathbf{a}}(0).$$

Так как $\exp\left(\int_0^s \lambda(\tau) d\tau\right) \geq 1$, то $P^{-1}(t)$ в последней формуле воз-

растает быстрее, чем $P^{-1}(t)$ в (11.65б). Следовательно, МНК-алгоритм идентификации с экспоненциальной потерей памяти улучшает

параметрическую сходимость по сравнению с обычным МНК-алгоритмом идентификации. Кроме того, из последней формулы также следует, что условие бесконечности интеграла в (11.65б) по-прежнему гарантирует экспоненциальную сходимость оцениваемых параметров. А это значит, что условие постоянного возбуждения сигнальной матрицы $W(t)$ может гарантировать параметрическую сходимость при МНК-алгоритме с экспоненциальной памятью.

Рассмотрим идентификацию одного параметра с постоянным коэффициентом потери памяти. В этом случае минимизируемым функционалом будет

$$J = \int_0^t e^{-\lambda_0(t-\tau)} [\mathbf{y}(\tau) - w(\tau)\hat{\mathbf{a}}(t)]^2 d\tau,$$

и МНК-алгоритм с экспоненциальной потерей памяти (11.68) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) &= -p(t)w(t)\mathbf{e}_n(t), \\ \dot{p}(t) &= \lambda_0 p(t) - p^2(t)w^2(t).\end{aligned}$$

Уравнение (11.71) принимает вид

$$\frac{dp^{-1}(t)}{dt} = -\lambda_0 p^{-1}(t) + w^2(t),$$

и его решением будет

$$p^{-1}(t) = p^{-1}(0)e^{-\lambda_0 t} + \int_0^t e^{-\lambda_0(t-\tau)} w^2(\tau) d\tau.$$

Параметрическая ошибка (11.72) принимает вид

$$\hat{\mathbf{a}}(t) = e^{-\lambda_0 t} p(t) p^{-1}(0) \tilde{\mathbf{a}}(0).$$

Если $w(t)$ подчиняется условию постоянного возбуждения, то функция $p^{-1}(t)$ ограничена снизу положительным числом, а функция $p(t)$ — сверху, и ошибка $\tilde{\mathbf{a}}(t)$ сходится к нулю со скоростью λ_0 .

11.3.5. Выбор коэффициента потери памяти. При выборе коэффициента потери памяти нужно проявлять осторожность. Если коэффициент потери памяти выбрать равным нулю (обычный МНК-идентификатор), то матрица коэффициентов усиления стремится к нулю; в этом случае невозможно слежение за изменяющимися параметрами и при наличии постоянного возбуждения. Если коэффициент потери памяти выбрать постоянным, то это может привести к резкому росту коэффициентов усиления, а при отсутствии постоянного возбуждения — к возникновению сильных колебаний оцениваемых параметров. Так как сигнал может иметь различные уровни возбуждения, то желательно иметь подстраиваемый коэффициент потери памяти. Значение нормы матрицы коэффициентов усиления зависит от уровня возбуждения матрицы сигналов. Поэтому коэффициент

потери памяти естественно связать с величиной $\|P(t)\|$. Одним из возможных алгоритмов изменения коэффициента потери памяти в зависимости от $\|P(t)\|$ определяется соотношением [69]

$$\lambda(t) = \lambda_0 \left(1 - \frac{\|P(t)\|}{k_0} \right), \quad (11.74)$$

где λ_0 — константа, определяющая максимальный коэффициент потери памяти; k_0 — константа, определяющая максимальное значение нормы матрицы коэффициентов усиления и удовлетворяющая неравенству $k_0 \geq \|P(0)\|$.

Если коэффициент потери памяти выбирается в соответствии с формулой (11.74), то параметрическая ошибка и норма матрицы коэффициентов усиления всегда ограничены сверху [69]. Если матрица сигналов $W(t)$ удовлетворяет условию постоянного возбуждения, то оценка параметров сходится экспоненциально, и матрица $P(t)$ ограничена снизу и сверху положительно определенными матрицами.

Из соотношения (11.74) следует, что при малом $\|P(t)\|$ коэффициент потери памяти приблизительно равен λ_0 , и с ростом $\|P(t)\|$ коэффициент потери памяти убывает, обращаясь в нуль, когда $\|P(t)\|$ принимает максимальное значение.

Большое значение λ_0 означает большую скорость забывания и лучшее отслеживания изменяющихся параметров. Однако чем больше λ_0 , тем больше колебания параметров. Поэтому при выборе λ_0 приходится исходить из противоположных требований — хорошее отслеживание изменяющихся параметров и низкий уровень их колебаний.

Константа k_0 должна быть больше $\|P(0)\|$. При этом норма матрицы $P(t)$ не превышает k_0 независимо от уровня постоянного возбуждения. Это связано с тем, что, когда норма $\|P(t)\|$ становится равной k_0 , коэффициент потери памяти становится равным нулю, и матрица $P(t)$ начинает убывать.

Константа k_0 влияет на скорость обновления данных и на колебания оцениваемых параметров из-за возмущения так же, как и константа λ_0 . Поэтому выбор k_0 приходится производить при таких же противоречивых требованиях, что и при выборе λ_0 .

11.3.6. Сравнительная характеристика различных методов получения оценки. В этом параграфе были рассмотрены различные методы построения идентификатора: градиентный метод, метод наименьших квадратов и метод наименьших квадратов с экспоненциальной потерей памяти. Важным условием получения качественной оценки является условие постоянного возбуждения сигналов. Большинство рассмотренных идентификаторов не обладают одновременно хорошим качеством сходимости и высокой робастностью.

Градиентный идентификатор является простым, но обладает медленной сходимостью. Обычный МНК-идентификатор хорошо проти-

востоит шумам, но не позволяет получить оценку изменяющихся параметров. МНК-идентификатор с экспоненциальной потерей памяти обладает способностью отслеживать переменные параметры, но элементы его матрицы коэффициентов усиления могут резко возрасть при отсутствии постоянного возбуждения сигналов, что приводит к большим колебаниям оценки. МНК-идентификатор с автоматической настройкой коэффициента потери памяти позволяет сохранить достоинство МНК-идентификатора с экспоненциальной потерей памяти и исключить резкий рост коэффициентов усиления при отсутствии постоянного возбуждения, т. е. этот идентификатор обеспечивает хорошую сходимость и высокую робастность.

Чтобы МНК-идентификатор с автоматической настройкой коэффициента потери памяти обладал хорошей характеристикой, нужно соответствующим образом сделать выбор:

- полосы пропускания фильтра при построении идентификационной модели;
- начальных значений параметров и матрицы коэффициентов усиления;
- констант, определяющих максимальный коэффициент потери памяти и максимальное значение нормы матрицы коэффициентов усиления.

При выборе указанных выше величин нужно исходить из компромисса: полосу пропускания фильтра нужно выбрать больше, чем полоса пропускания объекта, для того, чтобы сигналы системы могли проходить через него без искажения; но в то же время она должна быть меньше ширины частотного спектра шума.

Начальные значения оцениваемых параметров, естественно, должны быть заданы как можно точнее. Начальные значения коэффициентов усиления должны быть выбраны так, чтобы обеспечить определенную скорость сходимости и необходимую робастность.

Константы λ_0 и k_0 в соотношении (11.74), определяющие коэффициент потери памяти, должны быть выбраны довольно большими, чтобы как можно точнее отслеживать изменяющиеся параметры. Однако они не должны быть слишком большими, чтобы не вызвать недопустимо большие колебания оцениваемых параметров. Параметр k_0 , определяющий максимальное значение нормы матрицы коэффициентов усиления, выбирается исходя из допустимого уровня колебаний оценки. Чем выше уровень шума, тем меньше должно быть значение этой константы.

Возбуждающие сигналы должны содержать достаточное количество спектров для того, чтобы имело место сходимость параметров. И частоты должны находиться в пределах полосы пропускания объекта.

Все выводы получены при предположении, что, хотя неизвестные параметры могут изменяться, скорость их изменения намного меньше скорости протекания процессов в системе.

Задачи

1. Объект и эталонная модель описываются уравнениями

$$\begin{aligned} a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y &= b_0 u, \\ \ddot{y}_m + 2\dot{y}_m + y &= g(t), \end{aligned}$$

Определить алгоритм адаптивного управления по состоянию при следующих коэффициентах уравнения объекта:

- а) $a_0 = b_0 = 1$, a_1, a_2 — неизвестные параметры;
- б) $a_2 = 1, b_0 = 2$, a_0, a_1 — неизвестные параметры;
- в) $a_1 = 1, b_0 = 2$, a_0, a_2 — неизвестные параметры.

2. Объект описывается уравнением

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 u,$$

где a_1, a_2, b_0 — неизвестные параметры. Построить модель для получения оценки.

3. Объект описывается уравнением

$$\ddot{y} + a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = b_0 \dot{u} + b_1 u,$$

где a_1, a_2, a_3, b_0, b_1 — неизвестные параметры. Построить модель для получения оценки.

4. Объект описывается уравнением

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 u,$$

где a_1, a_2, b_0 — неизвестные параметры.

Определить:

- а) градиентный алгоритм идентификации;
- б) МНК-алгоритм идентификации;
- в) МНК-алгоритм идентификации с экспоненциальной потерей памяти.

5. Объект описывается уравнением

$$\ddot{y} + a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = b_0 \dot{u} + b_1 u,$$

где a_1, a_2, a_3, b_0, b_1 — неизвестные параметры.

Определить:

- а) градиентный алгоритм идентификации;
- б) МНК-алгоритм идентификации;
- в) МНК-алгоритм идентификации с экспоненциальной потерей памяти.

Список литературы

1. Автоматизация производства и промышленная электроника. В 4-х т. Т. 1 / Под ред. А.И. Берга и В.А. Трапезникова. — М.: Сов. энциклопедия, 1962.
2. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Некоторые вопросы теории нелинейных систем автоматического регулирования с разрывными характеристиками // Тр. Первого Международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению. Теория непрерывных систем. — М.: АН СССР, 1961.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 430 с.
4. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Избранные главы теории автоматического управления. — СПб: Наука, 1999. — 466 с.
5. Антимюк В. Л., Опейко О. Ф., Михеев Н. Н. Теория автоматического управления. — Минск: ДизайнПРО, 2002. — 352 с.
6. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968. — 764 с.
7. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.
8. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. — М.: Наука, 1964. — 360 с.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
10. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1966. — 992 с.
11. Бойчук Л. М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. — М.: Энергия, 1971.
12. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.
13. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
14. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. Справочник по математике. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 608 с.
15. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979.

16. *Воронов А. А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. — М.: Наука, 1985. — 352 с.
17. *Воронов А. А., Ким Д. П., Лотин В. М. и др.* Теория автоматического управления. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1986. — 504 с.
18. *Воронов А. А., Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Наука, 1987.
19. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Основы динамического программирования. — Минск: Изд-во БГУ, 1975. — 204 с.
20. *Галицун А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
21. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 548 с.
22. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — М.: Физматлит, 1961. — 228 с.
23. *Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э.* Математические основы теории управляемых систем. — М.: Наука, 1969. — 512 с.
24. *Гришанин Ю. С., Лебедев Г. Н., Липатов А. В., Степаньянц Г. А.* Теория оптимальных систем. Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1999. — 318 с.
25. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
26. *Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А. и др.* Теория систем с переменной структурой. — М.: Наука, 1970. — 592 с.
27. *Иванов В. А., Фалдин Н. В.* Теория оптимальных систем автоматического управления. — М. Наука, 1981. — 331 с.
28. *Казаков И. Е.* Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
29. *Квакернак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
30. *Ким Д. П.* Методы поиска и преследования подвижных объектов. — М.: Наука, 1989. — 336 с.
31. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Линейные системы. — М.: Физматлит, 2003. — 288 с.
32. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968. — 720 с.
33. *Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. — М.: Наука, 1977. — 272 с.
34. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматлит, 1959.

35. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линеинные модели. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
36. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова: Пер. с англ. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
37. Лефшец С. Устойчивость нелинейных систем. — М.: Мир, 1987. — 183 с.
38. Летов А. М. Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969. — 359 с.
39. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 574 с.
40. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. — 216 с.
41. Лурье А. И., Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. — 1944. — Т. 8. Вып. 3. — С. 246–248.
42. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
43. Макаров И. М., Дмитриева Н. Д., Ким Д. П. и др. Основы автоматизации управления производством. — М.: Высшая школа: 1983. — 504 с.
44. Матросов В. М. К теории устойчивости движения // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26. — С. 992–1002.
45. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб: Наука, 2000. — 550 с.
46. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1975. — 526 с.
47. Нетушил А. В., Гольдфарб Л. С., Александровский И. М. и др. Теория автоматического управления. Ч. II. — М.: Высшая школа, 1972. — 430 с.
48. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973. — 322 с.
49. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Крутова И. Н., Земляков С. Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. — М.: Машиностроение, 1972. — 260 с.
50. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965. — 332 с.
51. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматлит, 1961. — 392 с.
52. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970. — 454 с.
53. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1979. — 256 с.

54. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978. — 552 с.
55. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.
56. *Уткин В. И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. — М.: Наука, 1974. — 272 с.
57. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. Е. Т. Леондеса. — М.: Наука, 1980.
58. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
59. *Фурасов В. Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. — М.: Наука, 1977. — 248 с.
60. *Чураков Е. П.* Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Энергоиздат, 1987. — 256 с.
61. *Цыпкин Я. З.* Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977. — 560 с.
62. *Ядыкин И. Б., Шумский В. М., Осемян Ф. А.* Адаптивное управление непрерывными технологическими процессами. — М.: Энергоиздат, 1986. — 240 с.
63. *Якубович В. А., Барабанов А. Т., Катковник В. Я. и др.* Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1975. — 448 с.
64. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974. — 488 с.
65. *Bailey F. N.* The Application of Lyapunov Second Method to Interconnected Systems // SIAM Journal of Control. — 1966. — №. 3. — P. 443–462.
66. *Bellman R.* Vector Lyapunov Functions // SIAM Journal of Control. — 1962. — №. 1. — P. 32–34.
67. *Kim D. P.* Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System. — Seoul: Harnol, 2000. — 558 p.
68. *Marino R., Tomei P.* Nonlinear Control Design. — Prentice Hall Europe, 1995. — 396 p.
69. *Slotine J. J. E., Li W.* Applied Nonlinear Control. — Prentice Hall International Editions, 1991.

Предметный указатель

- Автоколебания 52
- Адаптивная система 411
 - — беспоисковая 413
 - — поисковая 413
 - — с идентификатором 413
 - — — эталонной моделью 413
- Алгоритм робастный 438
- Вектор состояний 12
 - управления 12
 - фазовый 12
- Вибрационное сглаживание 101
- Винеровский процесс 357
- Восстанавливаемость 316
- Вполне управляемая пара 21
- Время адаптации 415
- Выход 304
- Гамильтониан 289, 298
- Гипотеза фильтра 69
- Движение возмущенное 47
 - невозмущенное 47
- Декомпозиция 212
- Децентрализация 216
- Динамика внешняя 192, 193
 - внутренняя 188
- Динамическое программирование 307
- Диффеоморфизм 181
- Задача Больца 284
 - вырожденная 305, 391
 - динамики обратная 238
 - — прямая 238
 - изопериметрическая 283
- Задача Лагранжа 284
 - Майера 284
 - максимального быстродействия 284, 302
 - несингулярная 378
 - особая 306
 - сингулярная 369
 - терминального управления 284
- Идентификатор 414
 - градиентный 442
- Идентификация адаптивная 440
 - системы 440
- Инвариантность свойства управляемости 25
- Каноническая форма наблюдаемости 320
 - — управляемости 26
- Колебания несимметричные 86
 - — симметричные 71
- Контур основной 413
- Коэффициент вибрационной линеаризации 99
 - гармонической линеаризации 70
- Критерий абсолютной устойчивости круговой 169
 - квадратичный 162, 163
 - наблюдаемости 317
 - обнаруживаемости 321
 - обобщенной работы 338, 339
 - оптимальности 279
 - положительной определенности эрмитовой матрицы 161
- Попова 147, 148, 150, 151

- Критерий Севастьянова–Котелянского 224
— Сильвестра 112
— стабилизируемости 36
— управляемости 21
— устойчивости Ляпунова линейных систем 127
— устойчивости Ляпунова по линейному приближению 131
Критический случай 133
Лемма Барбалата 37
— Калмана–Якубовича 39
Линеаризация гармоническая 70
— вибрационная 101
— обратной связью 174
— — — по выходу 190
— — — — состоянию 184, 185
Линия переключения 60
Локальная связь 161
Матричная экспонента 18
Матричный экспоненциал 18
Матрица коэффициентов усиления 418
— наблюдаемости 317
— отрицательно определенная 109
— — полуопределенная 109
— положительно определенная 109
— — полуопределенная 109
— сигнальная 441
— управляемости 21, 185
— фундаментальная 17, 18
— — нормированная 18
— эрмитова 159
Метод Гольдфарба 86
— декомпозиции 212
— Красовского 138
— Лурье–Постникова 138
— разделения переменных 137
— фазовой плоскости 60
— эквивалентного управления 245
— Филиппова 236, 237
— функций Ляпунова 107
М-матрица 205
МНК-идентификатор 446, 447
Множество инвалютинное 182
— интегрируемое 18
Модель эталонная 413, 414
Моменты начальные 351, 353
— центральные 351, 353
Наблюдаемость 316
Наблюдатели 322
— полного порядка 322
— пониженного порядка (Луенбергера) 324
Невязка 379
Неустойчивость 50, 51
Норма матрицы 220
— — эвклидова 220
Нуль-динамика 197
Область захвата 99
— управляемости 25
Обнаруживаемость 321
Объект линейный стабилизируемый 34
— нормальный 303
Относительная степень 192
Относительный порядок 192
Оценка несмещенная 378
Ошибка систематическая 358
— среднеквадратическая 358
Пара наблюдаемая 318
— управляемая 21
Поверхность переключения 327
— скольжения 243
Погружение инвариантное 307
Подпространство управляемости 26
Правило множителей Лагранжа 293, 295
Предельный цикл 58, 59
Преобразование Луенбергера 208
— обратной связью 175
Принцип двойственности 322
— максимума Понтрягина 299, 300

- Принцип разделения 380
 Производная Ли 177
 Пространство состояний 12
 — фазовое 12
 Процессы с независимыми приращениями 357
 Прямая Попова 147
 Прямой метод Ляпунова 107
 Регулятор адаптивный 413
 Сепаратриса 58
 Система автономная 119
 — адаптивная 411
 — вполне управляемая 19
 — децентрализованного управления 216
 Система многомерная 13
 — неавтономная 111
 — одномерная 13
 — оптимальная 277, 278
 — самонастраивающаяся 411
 — самоорганизующаяся 411
 — сопряженная 29
 — с переменной структурой 62
 — сравнения 142, 159
 — централизованного управления 216
 Скобки Ли 178
 Скользящий режим 62
 — — идеальный 244
 Слабо стационарные процессы 353
 След матрицы 398
 Спектральная плотность 356
 Среднее квадратическое отклонение 351
 Стабилизируемость 34
 Стационарные процессы 355
 Строго стационарные процессы 357
 Строго вещественно-положительная передаточная функция 39
 Сходимость параметрическая 419
 Теорема Барбашина–Красовского 123
 Теорема Кели–Гамильтона 21
 — Красовского 206
 — Ляпунова о неустойчивости вторая 118, 124
 — — — первая 117, 124
 — Ляпунова об асимптотической устойчивости 113, 120
 — Ляпунова об устойчивости 112, 119
 — Малкина об устойчивости 125
 — о линеаризации обратной связи 185
 — о существовании решения уравнения Ляпунова 129, 130
 — об асимптотической устойчивости в целом 115, 123
 — — n интервалах 304
 — Фробениуса 183
 Терминант 293
 Тождество Якоби 179
 Точка изображающая 53
 — особая 54
 Траектория вырожденная 65
 — оптимальная 279
 — фазовая 53
 — целая 122
 Управление допустимое 285, 297
 — модальное 31
 — оптимальное 279, 397
 — программное 277
 — с обратной связью 277
 — стабилизирующее 260
 — эквивалентное 239
 Управляемая система
 — — вполне восстанавливаемая 316
 — — — наблюдаемая 316
 — — — управляемая 19, 260
 — — стабилизируемая 260
 Управляемая форма Луенбергера 28, 29
 Управляемость 19, 20, 21
 Уравнение Беллмана 309, 311

- Уравнение Винара–Хопфа 369
— выхода 12, 316
— Ляпунова 128
— наблюдения 12, 316, 378
— объекта 378
— Риккати 330
— — алгебраическое 332
— состояния 12
— Эйлера 286
— Эйлера–Лагранжа 288
— эталонное 239
Уравнения в нормальной форме 12
— — — — Коши 12
— сопряженные 299
Условие нормальности 303
— попадания 244, 258
— постоянного возбуждения 420
— скольжения 243, 249
— стационарности 289
— частотное 163
— устойчивости скользящего движения 253
Условия Вейерштрасса–Эрдмана 289
— краевые 272
— трансверсальности 292, 295
Устойчивость абсолютная 142, 244
— асимптотическая 50, 51
— — в целом 50
— — глобальная 50
— — орбитальная 51
— глобальная 50
— минимальная 161
— орбитальная
— по Лагранжу 50
— — Ляпунову 48, 49
— при постоянно действующих возмущениях 125
— равномерная 48
— экспоненциальная 206
— — в целом 206
Фазовая плоскость 53
Фазовый портрет 53
Факторизация 372
Фильтр Винара 369, 374
— Калмана–Бьюси 379, 385, 388
— формирующий 371
Формула Коши 18
Форма нормальная 12
— управляемая Бруновского 12
— — Луенбергера 29
Функции знакоопределенные 108
— знакопеременные 108
— знакопостоянные 108
Функция автокорреляционная 339
— Беллмана 308, 311, 398
Функция Гамильтона 289
—, допускающая бесконечно большой нижний предел 113
—, — — малый верхний предел 113
— знакоотрицательная 107
— знакоположительная 107
— ковариационная 354
— корреляционная 354
— — взаимная 354
— Лагранжа 287, 298
— Ляпунова 107, 112
— — векторная 215, 217
— отрицательно определенная 108
— — полуопределенная 107
— положительно определенная 108
— — полуопределенная 107
— переключения 326
— Понтрягина 298
— целевая 415
Шум белый 357
— наблюдения 378
— объекта 378
Экстремаль 286
Эргодический процесс 356
Эрмитова форма 159

Учебное издание

Дмитрий Петрович КИМ

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Том 2

МНОГОМЕРНЫЕ, НЕЛИНЕЙНЫЕ, ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Редактор *Е.Ю. Ходан*

Компьютерная верстка и иллюстрации *Е.А. Королевой*

Оформление обложки *А.Ю. АLEXИНОЙ*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 09.09.04.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 31,9. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru; <http://www.fml.ru>

Отпечатано с диапозитивов
в ОАО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0534-5



9 785922 105347