В.Н.АФАНАСЬЕВ
В.Б.КОЛМАНОВСКИЙ
В.Р.НОСОВ

Математическая теория конструирования систем управления

Издание третье,
исправленное и дополненное

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Прикладная математика»



Москва
«Высшая школа» 2003

УДК 51
ББК 22.11
А94

Рецензент — академик РАН Н. А. Кузнецов

Афанасьев, В. Н.

А94 Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов./В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — 3-е изд., испр. и доп.— М.: Высш. шк., 2003. — 614 с.: ил.

ISBN 5-06-004162-X

Книга посвящена современной теории управления и разнообразным приложениям ее результатов. Она состоит из четырех частей, в которых излагаются вопросы устойчивости, управления в детерминированных и стохастических системах, методы расчета систем управления. Во 2-е издание (1-е — 1989 г.) добавлены главы и параграфы, посвященные особым, скользящим и четеринг-управлениям, расчету нелинейных систем и другим вопросам, а также новые задачи.

Для студентов вузов, обучающихся по специальностям прикладной математики, кибернетики, управления, автоматики. Будет также полезна инженерам, аспирантам и преподавателям соответствующих специальностей.

УДК 51
ББК 22.11

ISBN 5-06-004162-X © ФГУП «Издательство «Высшая школа», 2003

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Посвящается студентам Московского государственного института электроники и математики (МГИЭМ)

В основу книги положены курсы лекций по теории управления, читавшиеся авторами в течение ряда лет в Московском институте электронного машиностроения (ныне — Московский государственный институт электроники и математики). Она состоит из введения и четырех частей.

В первой части изложены основы современной теории устойчивости. Здесь приведены: общие утверждения об устойчивости и неустойчивости; достаточные условия устойчивости линейных систем, приемы исследования устойчивости различных типов систем; теоремы об устойчивости при случайных возмущениях.

Вторая часть посвящена оптимальному управлению детерминированными системами. Здесь рассмотрены: основные постановки задачи управления, вытекающие из конкретных приложений; связь современных задач и методов теории управления с теорией устойчивости и вариационным исчислением; основные результаты теории управления — принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования Беллмана, теория линейных управляемых систем.

Третья часть посвящена задачам управления системами при случайных возмущениях их параметров. Здесь рассмотрены: основные принципы теории оценивания; фильтр Калмана; задачи управления при слежения за системой; методы синтеза оптимального управления.

В четвертой части излагаются современные численные методы теории управления: численное определение условий устойчивости; методы решения уравнений Ляпунова и Риккати; численные методы в линейно-квадратичной задаче; методы анализа управляемых систем, включая одношаговые и многошаговые методы.

Изложение материала книги носит строгий, но доступный характер. Этому способствует подробное рассмотрение конкретных управляемых систем, встречающихся в различных областях механики, космонавтики, автоматического управления технологическими процессами. Кроме того, приведены упражнения, предназначенные для самостоятельного решения, а также разнообразный иллюстративный материал. Вместе с тем в книге дано детальное изложение центральных разделов современной теории управления. Освоение материала книги поможет пониманию современных статей и монографий по специальным вопросам теории управления.

Большое внимание уделено точным формулировкам излагаемых утверждений, а также численным и приближенным алгоритмам построения управления, рассмотрению разнообразных реальных примеров управляемых систем, в том числе и с использованием ЭВМ. Этим примерам отводится особая роль. Они не только иллюстрируют основные утверждения и алгоритмы, но и способствуют выработке навыков при построении моделей изучаемых явлений, расчету нелинейных систем управления и разъяснению качественных особенностей различных классов систем управления, а также использованию изложенных результатов при исследовании конкретных систем.

Список литературы не претендует на полноту. В него включены лишь работы, непосредственно использованные в данном пособии.

Внутри одной и той же главы принята двойная нумерация формул и утверждений (первая цифра — номер параграфа, вторая — номер формулы или утверждения в нем). При ссылках на формулу или утверждение из другой главы вначале добавляется еще и указание номера соответствующей главы.

Второе издание книги существенно расширено и переработано по сравнению с первым. Оно содержит две новые главы. В гл. VIII рассматриваются некоторые редко излагаемые в учебной литературе вопросы теории оптимального управления, такие, как теорема о существовании оптимального управления, особые управления, скользящие и четеринг-режимы. В гл. XV излагаются методы приближенного численного построения оптимального управления для нелинейных задач (методы, основанные на решении краевых задач, методы линеаризации и др.). Новый материал включен и в другие главы. Например, рассмотрены теорема о робастной устойчивости, достаточные условия существования оптимального управления, новые критерии управляемости и наблюдаемости и ряд других вопросов. Написан новый параграф, посвященный моделям и задачам управления экологическими системами. Добавлены новые задачи.

Некоторые материалы, использованные во втором издании книги, были любезно предоставлены авторам С. М. Лавреновым, А. А. Меликяном, Е. М. Смагиной. Всем им, а также студентам и аспирантам, участвовавшим в подготовке настоящего издания, авторы выражают искреннюю признательность.

Третье издание книги исправлено и дополнено параграфами «Элементы финансовой математики», «Использование логарифмической нормы в теории устойчивости». В гл. XI включен § 3. Дискретный фильтр Калмана.

Настоящая книга является учебником по курсу «Теория управления» и предназначена для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика», «Механика», «Управление в технических системах», «Автоматика». Она может быть также полезна студентам близких инженерных специальностей, аспирантам и инженерам.

Авторы отчетливо осознают, что книга не свободна от недостатков, и будут признательны за любые критические предложения по ее улучшению.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Изучение поведения и конструирование систем управления, обладающих требуемыми в приложениях свойствами, является ключевой задачей теории управления. При этом на первый план выдвигаются такие свойства систем, как устойчивость, оптимальность, поведение в присутствии неопределенных помех и т. д.

Основное внимание в настоящей книге уделено исследованию эволюционных систем. Общее понятие абстрактной системы сформировалось за последние 20 — 30 лет, оно обладает большой общностью, и его строгое определение достаточно сложно.

Мы ограничимся некоторыми конкретными классами эволюционных систем и для них дадим все необходимые определения. На описательном уровне под эволюционной системой можно понимать техническую, физическую, биологическую, экологическую и любую иную систему, для которой изучаются изменения, протекающие в ней с течением времени. Математически эволюционные системы могут описываться различными способами. Укажем наиболее часто встречающиеся классы эволюционных систем и способы их описания:

непрерывные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями;

дискретные системы, описываемые конечно-разностными уравнениями;

системы с распределенными параметрами, описываемые эволюционными уравнениями в частных производных, такими, как, например, уравнения теплопроводности, колебаний, гидродинамики и т. д.;

системы с последействием, для описания которых используются функционально-дифференциальные уравнения. Такие системы возникают тогда, когда протекание процесса определяется не только состоянием системы в данный момент, но также и предысторией процесса;

стохастические системы. Стохастической может быть любая из названных выше систем, для описания которой используются вероятностные понятия и методы.

Приведем примеры эволюционных систем:

1) солнечная система, которая описывается с очень высокой степенью точности системой обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых из закона всемирного тяготения Ньютона;

2) движение жидкости, обычно описываемое нестационарным уравнением в частных производных Навье — Стокса. Для описания турбулентных движений часто используют вероятностные методы;

3) движение самолета. В зависимости от требований точности такая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями либо при учете упругих элементов конструкций — уравнениями в частных производных. При использовании ЭВМ в контуре управления возникают разностные уравнения.

Необходимо отметить, что одна и та же реальная физическая система может быть описана разными математическими моделями в зависимости от целей исследования и требований точности адекватности описания.

При рассмотрении различных практических задач управления существенную роль играет теория устойчивости. Термин «устойчивость» очень выразителен и имеет много различных значений. Под устойчивостью обычно понимают свойство системы или какого-либо состояния сохраняться при малых изменениях начальных состояний, внешних воздействий, параметров системы и т. д. Конечно, при математической формализации это понятие нуждается в уточнении, причем такая формализация может быть сделана по-разному. Это приводит к различным математическим понятиям, часть из которых в дальнейшем строго определена. В книге значительное внимание уделяется изложению основ второго метода Ляпунова (метода функций Ляпунова). Метод Ляпунова является не только одним из основных методов анализа уже созданных, существующих систем, но также важным методом синтеза вновь создаваемых систем управления. Методически оказывается целесообразным начать изложение курса именно с теории устойчивости и второго метода Ляпунова и объединить весь материал вокруг них.

При исследовании реальных объектов зачастую приходится принимать во внимание разнообразные неопределенные факторы, действующие на систему. Указанные факторы могут быть связаны, например, с неопределенностью в силах, действующих на систему, запаздыванием и ошибками программы управления и др. Возможны разные способы математической формализации неопределенностей. При вероятностном подходе, используемом в книге, разного рода неопределенности интерпретируются как случайные процессы. Приведены основные сведения из теории вероятностей и теории случайных процессов, необходимые для дальнейшего изложения. Даны определения различных типов стохастической устойчивости и описан стохастический аналог второго метода Ляпунова.

Характерной чертой современной эпохи является бурный взрыв исследовательского интереса к экстремальным задачам (т. е. задачам определения наибольших и наименьших значений, оптимальных условий протекания процессов и т. д.). Следует подчеркнуть, что подобные задачи встречались в истории человечества в том или ином виде начиная еще со времен античности.

Экстремальные задачи были предметом исследования И. Кеплера, П. Ферма, Х. Гюйгенса, И. Ньютона, И. Бернулли, Ж. Лагранжа, Л. Эйлера, К. Вейерштрасса и др.

Однако именно на современном этапе развития экстремальные задачи заняли доминирующее положение прежде всего вследствие ограниченности природных и материальных ресурсов, необходимости жесткой экономии энергии и материалов, роста народонаселения и других причин. Существенный прогресс при исследовании и практическом применении экстремальных задач связан также с развитием ЭВМ. Возникшие первоначально из нужд экономики и механики полета современные экстремальные задачи находят все возрастающую сферу применений в таких областях, как физика, различные технологические процессы, ядерная энергетика, биология, экология, медицина и др.

Одна из характерных особенностей в постановке современных задач управления состоит в том, что действующие на систему силы можно разделить на два класса: управляющие и возмущающие. Характер ограничений, наложенных на управляющие силы, в этих задачах часто оказывается таким, что применение методов классического вариационного исчисления становится невозможным. В рамках теории подобного рода задач, построенной в 50-е годы, были созданы принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана. В настоящее время учеными ведутся интенсивные исследования в различных разделах теории оптимального управления.

В книге рассмотрены задачи управления как детерминированными, так и стохастическими системами, что представляется целесообразным прежде всего с точки зрения методологии изложения. Кроме того, значительное внимание уделяется изучению приближенных и численных алгоритмов решения конкретных классов задач управления.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

ГЛАВА 1

НЕПРЕРЫВНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

В этой главе приведены основные постановки задач теории устойчивости и методы их исследования. Рассмотрены разнообразные примеры и изложены современные результаты теории устойчивости.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

1. Устойчивость. Пусть непрерывная эволюционная система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в нормальной форме:

$$\dot{x}_i(t)=f_i(t, x_1, ..., x_n),\ i=1, ..., n; \qquad x_i(t_0)=x_{i0}. \tag{1.1}$$

Здесь t — независимая переменная, обычно называемая временем; $x_1(t), ..., x_n(t)$ — искомые функции, t_0 и x_{i0} — заданные начальные условия, а символ $\dot{x}_i(t)=\dfrac{dx_i(t)}{dt}$ обозначает производную функции $x_i(t)$. Функции $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ предполагаются вещественными. Систему дифференциальных уравнений (1.1) запишем в векторной форме:

$$\dot{x}(t)=f(t, x),\ x=\operatorname{colon}(x_1, ..., x_n)\in R_n, \qquad x(t_0)=x_0.$$

Обозначим через S_H шар радиуса H с центром в начале координат в евклидовом пространстве R_n с нормой $|x|=(x'x)^{1/2}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Символ «штрих» здесь и далее обозначает знак транспонирования. Через T обозначим интервал действительной оси вида

$T=\{a<t<\infty\}$, где a есть — ∞ или же некоторое число. Будем считать, что функция $f(t, x)$, $f: T\times S_H\to R_n$ непрерывная по обоим аргументам и является липшицевой по второму аргументу, т. е.

$$|f(t, x)-f(t, y)|\leqslant L|x-y|,\ L=\text{const}>0.$$

При этих условиях справедливы теоремы о локальном существовании, единственности и непрерывной зависимости на конечном интервале решения $x(t, t_0, x_0)$ задачи (1.1) от начальных условий $t_0\in T$ и $x_0\in S_H$ [14].

Многие фундаментальные результаты теории устойчивости были получены великим русским математиком А. М. Ляпуновым (1857 — 1918) в его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» (1892).

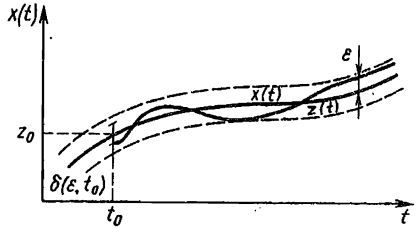


Рис. 1.1. Устойчивость по Ляпунову невозмущенного решения z (t)

В теории устойчивости Ляпунова исследуется на устойчивость какое-нибудь одно решение. Пусть $z(t, t_0, z_0)$ — решение задачи (1.1), продолжимое вправо до бесконечности, т. е. $z(t)$ существует на интервале $[t_0, \infty)$, причем $z(t)\in S_H$ при $t_0\leqslant t<\infty$.

Определение 1.1. Решение $z(t, t_0, z_0)$ задачи (1.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого ε $(0<\varepsilon<H)$ существует $\delta=\delta(\varepsilon, t_0)>0$ такое, что все решения $x(t, t_0, x_0)$ задачи (1.1) бесконечно продолжимы вправо, как только $|x_0-z_0|\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)$, и для этих решений справедливо неравенство

$$|x(t, t_0, x_0)-z(t, t_0, z_0)|\leqslant\varepsilon,\quad t_0\leqslant t\leqslant\infty.$$

Геометрически устойчивость по Ляпунову означает, что сколь угодно узкая ε-трубка решения $z(t)$ содержит все решения $x(t)$ задачи (1.1), которые в начальный момент t_0 отстояли от z_0 не более чем на $\delta(\varepsilon, t_0)$ (рис. 1.1).

Следуя Ляпунову, решение $z(t)$ называют *невозмущенным решением*, а $x(t)$ — *возмущенным*.

Важно отметить, что имеет смысл говорить только об устойчивости определенного решения $z(t)$, а не всех решений уравнения (1.1).

Пример 1.1. [21]. Общее решение уравнения

$$\ddot{x}(t)=-\frac{1}{2}[x^2(t)+(x^4(t)+4\dot{x}^2(t))^{1/2}]x(t) \qquad (1.2)$$

имеет вид $x(t)=c\sin(ct+d)$, где c и d — произвольные постоянные. Решение $z(t)\equiv 0$ уравнения (1.2) устойчиво по Ляпунову, поскольку все решения уравнения (1.2) бесконечно продолжимы и $|x(t)|\leqslant|c|<\varepsilon$, если начальные условия $x_0(t_0)=c\sin(ct_0+d)$

и $\dot{x}_0(t_0)=c^2\cos(ct_0+d)$ достаточно малы. Любое другое решение $x_1(t)=c_1\sin(c_1t+d)$, $c_1\neq 0$ неустойчиво. В самом деле, всегда существует такое решение $x_2(t)=c_2\sin(c_2t+d)$, для которого $c_2\neq 0$ и отношение частот c_1/c_2 иррационально. Для этих решений

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,|x_1(t)-x_2(t)|=|c_1|+|c_2| \tag{1.3}$$

независимо от $x_2(t_0)$, $\dot{x}_2(t_0)$ и $x_1(t_0)$, $\dot{x}_1(t_0)$. Здесь $\overline{\lim}$ означает верхний предел. Таким образом, решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ расходятся на конечную величину $|c_1|+|c_2|\neq 0$ независимо от близости начальных условий.

Для линейных уравнений устойчивость одного решения влечет устойчивость любого другого решения и можно говорить просто, что некоторая линейная система устойчива (или неустойчива).

Теорема 1.1. *Для устойчивости решения $z(t, t_0, z_0)$ линейной системы $\dot{y}(t)=A(t)y(t)+f(t)$ при любом z_0 и любой правой части $f(t)$, где $A(t)$ и $f(t)$ — непрерывные функции, необходимо и достаточно, чтобы тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ однородной системы $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$ было устойчивым.*

□ Необходимость. Известно, что все решения линейного уравнения бесконечно продолжимы вправо. Поэтому первое требование определения 1.1 выполнено всегда. Пусть $z(t, t_0, z_0)$ — некоторое устойчивое решение. Это означает, что любое другое решение $y(t, t_0, y_0)$ удовлетворяет неравенству $|y(t, t_0, y_0)-z(t, t_0, z_0)|\leqslant\varepsilon$, $t_0\leqslant t<\infty$, если $|y_0-z_0|\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)$. Разность $x(t, t_0, y_0-z_0)=y(t, t_0, y_0)-z(t, t_0, z_0)$ есть решение однородного уравнения и $|x(t, t_0, y_0-z_0)|\leqslant\varepsilon$, $t_0\leqslant t<\infty$. Согласно определению 1.1, это означает, что решение $x(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

Достаточность. Всякое решение $y(t)$ неоднородного уравнения можно представить в виде $y(t)=z(t)+x(t)$, где $z(t)$ — заданное решение неоднородного уравнения, а $x(t)$ — решение однородного уравнения. Теперь достаточность непосредственно вытекает из определения 1.1. ■

Исследование устойчивости любого решения $z(t)$ уравнения (1.1) можно свести к исследованию устойчивости тривиального (нулевого) решения некоторого другого уравнения. Функция $y(t)=x(t)-z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}(t)=f(t, y+z)-f(t, z)=g(t, y),\ g(t, 0)\equiv 0. \tag{1.4}$$

В дальнейшем будем исследовать устойчивость только тривиального решения $x(t)\equiv 0$ уравнения (1.1), сразу предполагая, что

$$f(t, 0)\equiv 0. \tag{1.5}$$

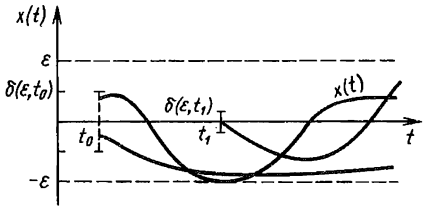


Рис. 1.2. Устойчивость по Ляпунову тривиального решения $x(t)=0$

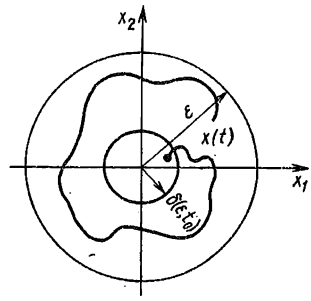


Рис. 1.3. Фазовая траектория, устойчивая по Ляпунову

Определение 1.2. Тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (1.4) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0)>0$ такое, что неравенство $|x(t, t_0, x_0)|\leqslant\varepsilon$ выполнено при всех $t\geqslant t_0$, как только $|x_0|\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)$ (рис. 1.2 и 1.3).

Решение, не являющееся устойчивым, называют неустойчивым. Точнее, можно дать следующее определение.

Определение 1.3. Тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ называется *неустойчивым по Ляпунову*, если для некоторого $\varepsilon>0$ и любого $\delta>0$ найдутся решение $x(t, t_0, x_0)$ и момент времени $t_1>t_0$ такие, что $|x(t_1, t_0, x_0)|>\varepsilon$, хотя $|x_0|\leqslant\delta$ (рис. 1.4 и 1.5).

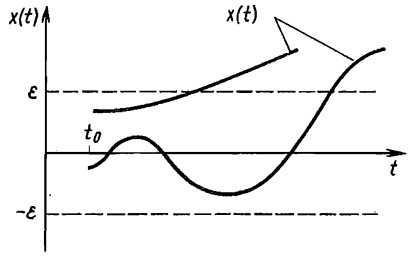


Рис. 1.4. Неустойчивость тривиального решения $x(t)=0$

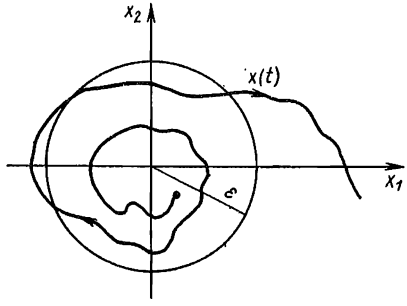


Рис. 1.5. Фазовый портрет неустойчивой траектории

Усилением понятия устойчивости является устойчивость, равномерная по начальному моменту времени.

Определение 1.4. Решение $x(t)\equiv 0$ называется *равномерно устойчивым* по t_0 $(t_0\in T)$, если для любого $\varepsilon(0<\varepsilon<H)$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, не зависящее от t_0, что $|x(t, t_0, x_0)|\leqslant\varepsilon$, $t\geqslant t_0$ $(t_0\in T)$, как только $|x_0|\leqslant\delta(\varepsilon)$.

Пример 1.2. Решение уравнения

$$\dot{x}(t)=t^{-2}x(t),\ x(t_0)=x_0,\ t_0\in(0,\ \infty) \tag{1.6}$$

имеет вид

$$x(t,\ t_0,\ x_0)=x_0\exp(t_0^{-1}-t^{-1}).$$

Так как $|x(t,\ t_0,\ x_0)|\leqslant|x_0|\exp(t_0^{-1})$, то для любого $\varepsilon>0$, взяв $\delta(\varepsilon,\ t_0)=\varepsilon\exp(-t_0^{-1})$, получим, что решение $x(t)\equiv0$ устойчиво в смысле определения 1.2. Однако равномерной устойчивости нет, поскольку $\delta(\varepsilon,\ t_0)\to0$ при $t_0\to0$.

Теорема 1.2. *Для автономного* ($f(t,\ x)\equiv f(x)$) *или* ω*-периодического* ($f(t+\omega,\ x)=f(t,\ x)$, $\omega>0$) *уравнения* (1.5) *из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость, равномерная по начальному моменту.*

□ Для произвольного решения $x(t,\ t_0,\ x_0)$ периодического уравнения (1.1) справедливы тождества

$$\begin{gathered}x(t,\ t_1,\ x(t_1,\ t_0,\ x_0))\equiv x(t,\ t_0,\ x_0),\\ x(t\pm m\omega,\ t_0\pm m\omega,\ x_0)=x(t,\ t_0,\ x_0)\end{gathered} \tag{1.7}$$

при любом целом m. Первое из этих тождеств есть очевидное следствие теоремы существования и единственности решения, а второе вытекает из ω-периодичности уравнения (1.1). Из второго тождества (1.7) следует, что при доказательстве равномерной устойчивости достаточно рассмотреть только t_0 из отрезка $[0,\ \omega]$. Возьмем произвольное $\varepsilon(0<\varepsilon<H)$ и определим $\eta(\varepsilon,\ \omega)>0$ такое, что $|x(t,\ \omega,\ x_0)|\leqslant\varepsilon$, $t\geqslant\omega$, $|x_0|\leqslant\eta(\varepsilon,\ \omega)$. В силу устойчивости решения в момент $t_0=\omega$ такое $\eta(\varepsilon,\ \omega)$ найдется. Выберем теперь $\delta(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\max_{0\leqslant t_0\leqslant\omega}\ \max_{|x_0|\leqslant\delta(\varepsilon)}|x(\omega,\ t_0,\ x_0)|\leqslant\eta(\varepsilon,\ \omega).$$

Вследствие непрерывной зависимости решения на конечном отрезке $[0,\ \omega]$ от начальных данных такое $\delta(\varepsilon)$ существует. При таком выборе $\delta(\varepsilon)$ для всякого $t_0\in(-\infty,\ \infty)$ получим

$$\begin{aligned}|x(t,\ t_0,\ x_0)|&=|x\ (t-m\omega,\ t_0,\ x_0)|=|x(t^1,\ t_0^1,\ x_0)|=\\&=|x(t^1,\ \omega,\ x(\omega,\ t_0^1,\ x_0))|\leqslant\varepsilon,\ t\geqslant t_0,\ |x_0|\leqslant\delta(\varepsilon).\end{aligned}$$

Здесь обозначено $t^1=t-m\omega$, $t_0^1=t_0-m\omega$, $t_0^1\in[0,\ \omega]$, m — целое число. ■

2. Асимптотическая устойчивость. Другим усилением понятия устойчивости является асимптотическая устойчивость.

Определение 1.5. Тривиальное решение $x(t)\equiv0$ уравнения (1.1) называется *асимптотически устойчивым*, если:

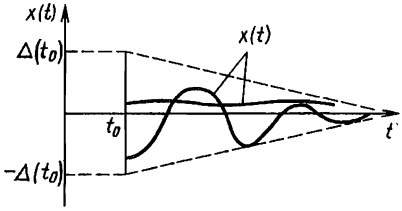


Рис. 1.6. Асимптотическая устойчивость тривиального решения

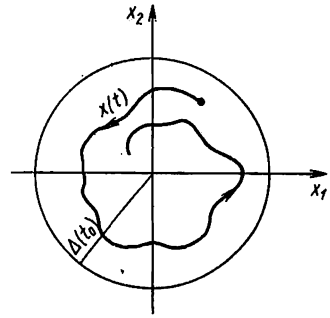


Рис. 1.7. Фазовый портрет асимптотически устойчивой траектории

1^0) оно устойчиво по Ляпунову;

2^0) для всякого $t_0 \in T$ существует $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ такое, что $x(t, t_0, x_0) \to 0$, $t \to \infty$ при $|x_0| \leqslant \Delta(t_0)$ (рис. 1.6 и 1.7).

Множество $\Omega(t_0) \subset R_n$ всех тех начальных условий x_0, для которых $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = 0$, называют *областью притяжения тривиального решения в начальный момент* t_0. Если $\Omega(t_0) = R_n$, то говорят, что решение $x(t) \equiv 0$ *асимптотически устойчиво в целом* (или *глобально асимптотически устойчиво*).

Если выполняется только условие 2^0 из определения 1.5, то говорят, что тривиальное решение является *притягивающим* (или *аттрактором*). Из притяжения, вообще говоря, не следует устойчивость. Однако для скалярного обыкновенного дифференциального уравнения притяжение всегда влечет устойчивость. Поэтому примеры, когда имеется притяжение, но нет устойчивости, можно построить только при $n \geqslant 2$ или для уравнений более общих, чем обыкновенные дифференциальные. Приведем пример так называемого функционально-дифференциального уравнения первого порядка, для которого притяжение не приводит к устойчивости.

Пример 1.3*. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = t^{-1}x(t) - 27t(t+2)^{-3}x^3\left(\frac{t+2}{3}\right). \qquad (1.8)$$

Это уравнение содержит значения неизвестной функции $x(t)$ в различные моменты времени t и $(t+2)/3 = g(t)$. Функция $g(t) \leqslant t$ при $t \geqslant 1$. Поэтому уравнение (1.8) описывает некоторый эволюционный процесс, зависящий от прошлого. Для этого уравнения можно задать начальное условие в виде $x(1) = x_0$. При этом

---

*Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.

легко сформулировать определения устойчивости и асимптотической устойчивости для уравнения (1.8), которые полностью аналогичны определениям 1.2 и 1.5.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что решение $x(t, 1, x_0)$ уравнения (1.8) с начальным условием $x(1)=x_0$ можно записать в виде

$$x(t, 1, x_0)=x_0 t \exp(-x_0^2(t-1)),\ t\geqslant 1.$$

Очевидно, что при любом x_0 имеем

$$x(t, 1, x_0)\to 0,\ t\to\infty.$$

В то же время при $|x_0|=\delta$ в момент $t=1+\delta^{-2}$ получим

$$|x(1+\delta^2, 1, x_0)|=\delta(1+\delta^{-2})\exp(-\delta^2(1+\delta^{-2}-1))=$$
$$=(\delta+\delta^{-1})\,e^{-1}\geqslant 2e^{-1}.$$

Таким образом, для всех решений уравнения (1.8) имеет место притяжение, но условие 1^0 из определения 1.5 не выполнено. Тривиальное решение уравнения (1.8) не является устойчивым и тем более асимптотически устойчивым.

Определение 1.6. Тривиальное решение уравнения (1.1) называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и для любого числа $\gamma>0$ найдутся числа Δ_1 $(0<\Delta_1<H)$ и $T(\gamma)$ такие, что $|x(t, t_0, x_0)|\leqslant\gamma$ при $t\geqslant t_0+T(\gamma)$, $|x_0|\leqslant\Delta_1$ (рис. 1.8).

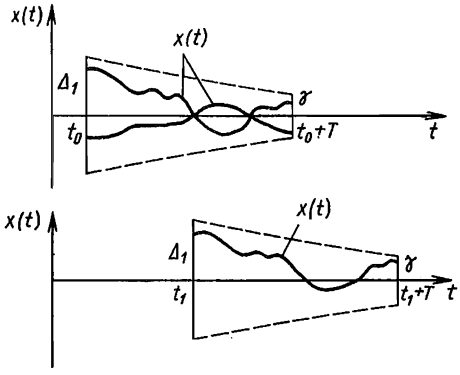


Рис. 1.8. Равномерная асимптотическая устойчивость

Требования равномерной асимптотической устойчивости, вообще говоря, сильнее требований асимптотической устойчивости. Однако, аналогично теореме 1.2, можно показать, что если уравнение (1.1) — автономное или ω-периодическое и его тривиальное решение асимптотически устойчиво, то это решение является и равномерно асимптотически устойчивым.

3. Другие понятия устойчивости. Определение 1.7. Говорят, что тривиальное решение уравнения (1.1) *экспоненциально устойчиво*, если всякое решение $x(t, t_0, x_0)$ этого уравнения удовлетворяет оценке

$$|x(t, t_0, x_0)|\leqslant B|x_0|\exp(-\alpha(t-t_0)),$$
$$B>0,\ \alpha>0,\ t\geqslant t_0,\ |x_0|\leqslant H_1<H \text{ (рис. 1.9).}$$

Отметим, что для линейных уравнений $\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)$ экспоненциальная устойчивость эквивалентна равномерной асимптотической устойчивости.

Пусть наряду с системой (1.1) рассматривается возмущенная система

$$\dot{z}(t)=f(t, z)+\varphi(t, z). \qquad (1.9)$$

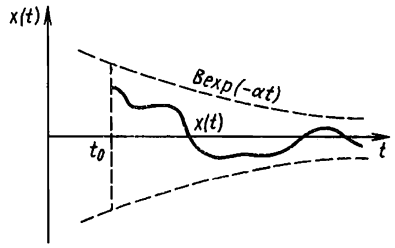


Рис. 1.9. Экспоненциальная устойчивость

Определение 1.8. Тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (1.1) называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*, если для любого $\varepsilon>0$ и $t_0\in T$ существует $\delta(\varepsilon, t_0)>0$ такое, что при $|\varphi(t, z)\leqslant\delta$ и $|z(t_0)|\leqslant\delta$ все решения уравнения (1.9) удовлетворяют условию $|z(t)|\leqslant\varepsilon$.

Кроме приведенных определений устойчивости используются также и другие, такие, как устойчивость по части переменных, устойчивость на конечном интервале времени, абсолютная устойчивость, орбитальная устойчивость и т. д. [1; 4; 16; 17; 21].

§ 2. ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Универсальным методом исследования устойчивости различных классов систем является второй метод Ляпунова. В качестве инструмента исследования во втором методе используются некоторые специальные функции, называемые функциями Ляпунова.

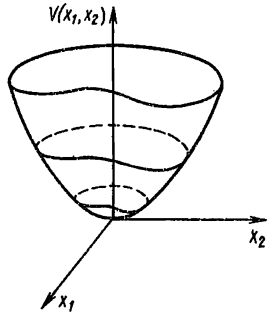


Рис. 2.1. Примерный вид функции Ляпунова

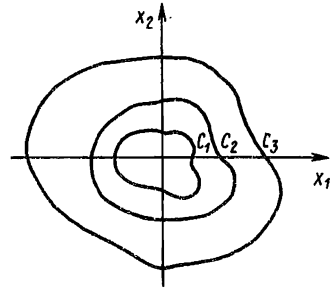


Рис. 2.2. Поверхности уровня функции Ляпунова $V(x_1, x_2)=C_i$ $(i=1, 2, 3)$, $C_1<C_2<C_3$

Вещественную непрерывно дифференцируемую функцию $V(t, x)$, $V: T\times S_H\to R_1$, удовлетворяющую условию $V(t, 0)\equiv 0$, называют *функцией Ляпунова*. Примерный вид функции Ляпунова двух переменных x_1, x_2 и ее поверхности уровня $V(x_1, x_2)=C$ изображены на рис. 2.1 и 2.2. Назовем *производной* $\dot{V}$ *функции* $V(t, x)$ *в силу уравнения* (1.1) величину

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t, x)=\frac{\partial V}{\partial t}+(\operatorname{grad} V, f(t, x)). \qquad (2.1)$$

Если $x=x(t)$ есть решение уравнения (1.1), то $\dot{V}$ представляет собой полную производную по времени сложной функции $V(t, x(t))$. Отметим, что для вычисления $\dot{V}$ фактического знания решения $x(t)$ не требуется.

Всюду в дальнейшем через $\omega_i(u)$ $(u\geqslant 0,\ i=0, 1, \ldots)$ обозначены скалярные непрерывные неубывающие функции такие, что $\omega_i(0)=0$ и $\omega_i(u)>0$ при $u>0$ (рис. 2.3).

Теорема 2.1 (первая теорема Ляпунова). *Пусть существует функция Ляпунова $V(t, x)$ такая, что*

$$\omega_1(|x|)<V(t, x), \qquad (2.2)$$

$$\dot{V}\leqslant 0. \qquad (2.3)$$

Тогда тривиальное решение уравнения (1.1) *устойчиво по Ляпунову.*

□ Возьмем любое ε $(0<\varepsilon<H)$ и любое $t_0\in T$. В качестве $\delta(\varepsilon, t_0)$ выберем такое число, что

$$\max_{|x_0|\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)} V(t_0, x_0)\leqslant\omega_1(\varepsilon).$$

Из непрерывности функции $V(t, x)$ и условия $V(t_0, 0)=0$ следует, что такое $\delta(\varepsilon, t_0)$ обязательно найдется (рис. 2.4). Условие (2.3) означает, что функция $V(t, x(t))$ не возрастает вдоль решений уравнения (1.1). Используя неравенства (2.2) и (2.3), при $|x_0|\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)$ и $t\geqslant t_0$ получим

$$\omega_1(|x(t)|)\leqslant V(t, x(t))\leqslant V(t_0, x_0)\leqslant\max_{|x_0|\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)} V(t_0, x_0)\leqslant\omega_1(\varepsilon).$$

В силу монотонности $\omega_1(u)$ отсюда вытекает, что $|x(t, t_0; x_0)|\leqslant\varepsilon$. ■

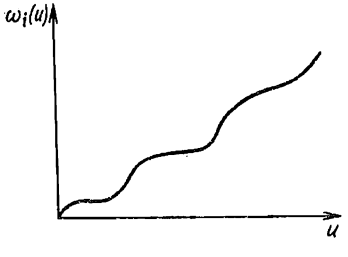


Рис. 2.3. Вид функции $\omega_i(u)$

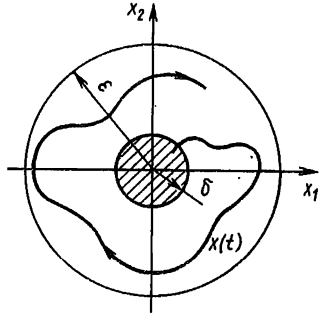


Рис. 2.4. Иллюстрация теоремы Ляпунова об устойчивости

Функции $V(t, x)$, удовлетворяющие условию (2.2), называются *определенно-положительными*. Сам Ляпунов использовал другое, эквивалентное (2.2) определение таких функций [10]. Производная $\dot{V}$, удовлетворяющая условию (2.3), называется *знакоотрицательной*.

Теорема 2.2 (К. П. Персидский). *Если в дополнение к условиям теоремы* 2.1 *справедливо неравенство*

$$V(t, x) \leqslant \omega_2(|x|), \tag{2.4}$$

то тривиальное решение уравнения (1.1) *равномерно устойчиво по начальному моменту* t_0.

□ По заданному ε $(0<\varepsilon<H)$ определим число $\delta=\delta(\varepsilon)$ (δ не зависит от t_0) таким образом, что $\omega_1(\varepsilon)=\omega_2(\delta)$. Используя (2.2) — (2.4) и монотонность $\omega_2(u)$, при $t \geqslant t_0$ и $|x_0| \leqslant \delta(\varepsilon)$ получим

$$\omega_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x(t)) \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant \omega_2(|x_0|) \leqslant \omega_2(\delta) = \omega_1(\varepsilon).$$

В силу монотонности $\omega_1(u)$ отсюда следует, что $|x(t)| \leqslant \varepsilon$. ■

Про функции Ляпунова, удовлетворяющие условию (2.4), говорят, что они *допускают бесконечно малый высший предел*, хотя первоначально использовалось другое эквивалентное определение [10].

Теорема 2.3 (вторая теорема Ляпунова). *Пусть существует функция Ляпунова* $V(t, x)$ *такая, что*

$$\omega_1(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant \omega_2(|x|), \tag{2.5}$$

$$\dot{V}(t, x) \leqslant -\omega_3(|x|). \tag{2.6}$$

Тогда тривиальное решение уравнения (1.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

□ В силу теоремы Персидского решение $x(t) \equiv 0$ равномерно устойчиво. Покажем, что второе условие определения 1.6 также выполнено. Возьмем $\gamma>0$ и определим δ из соотношения $\omega_1(\gamma)=\omega_2(\delta)$. В качестве $T(\gamma)$ возьмем число $T(\gamma)=2\omega_2(\Delta_1)/\omega_3(\delta)$. На отрезке $[t_0, t_0+T(\gamma)]$ найдется момент t_1 такой, что $t_0<t_1 \leqslant t_0+T(\gamma)$ и $|x(t_1, t_0, x_0)| \leqslant \delta$ при $|x_0| \leqslant \Delta_1$. Если это не так, то получим

$$V(t_0+T(\gamma), x(t_0+T(\gamma), t_0, x_0)) - V(t_0, x_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T(\gamma)} \dot{V}(s, x(s, t_0, x_0))\, ds \leqslant -\int_{t_0}^{t_0+T(\gamma)} \omega_3(|x(s)|)\, ds \leqslant -\omega_3(\delta)\, T(\gamma).$$

Отсюда

$$0 \leqslant V(t_0+T(\gamma), x(t_0+T(\gamma))) \leqslant V(t_0, x_0) - \omega_3(\delta)\, T(\gamma) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_2(\Delta_1) - \omega_3(\delta)\, T(\gamma). \tag{2.7}$$

Если $T(\gamma)=2\omega_2(\Delta_1)/\omega_3(\delta)$, то неравенство (2.7) невозможно. Значит, найдется $t_1\in[t_0, t_0+T(\gamma)]$ такое, что $|x(t_1, t_0, x_0)|\leqslant\delta$. Но тогда в силу равномерной устойчивости при всех $t\geqslant t_0+T(\gamma)\geqslant t_1\geqslant t_0$ имеем $|x(t, t_0, x_0)|\leqslant\gamma$. ■

В классической работе А. М. Ляпунова [10] теорема 2.3 сформулирована следующим образом: *пусть существует определенно-положительная функция $V(t, x)$, допускающая бесконечно малый высший предел, производная которой в силу уравнений* (1.1) *определенно отрицательна. Тогда тривиальное решение уравнения* (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Если не предполагать выполненным неравенство (2.4), то решение $x(t)\equiv 0$ может не быть асимптотически устойчивым.

Пример 2.1 (Х. Л. Массера). Определим функцию $g(t)\in C^1[0, \infty)$, $g:[0, \infty)\to[0, 1]$, совпадающую с $\exp(-t)$ всюду, кроме узких пиков ширины меньше 2^{-n} с центром в точке $t=n$; пусть $g(n)=1$, $n=1, 2, 3, \ldots$ (рис. 2.5).

Рассмотрим уравнение $\dot{x}=\dot{g}(t)x/g(t)$. Его общее решение имеет вид $x(t)=g(t)x_0/g(t_0)$. Отсюда вытекает, что тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ не является асимптотически устойчивым.

Однако если взять функцию Ляпунова

$$V(t, x)=\frac{x^2(t)}{g^2(t)}\left[3-\int_0^t g^2(s)\,ds\right], \tag{2.8}$$

то получим $\dot{V}(t, x)=-x^2$ и $V(t, x)\geqslant x^2$, поскольку $\int_0^\infty g^2(s)\,ds<$ $<\int_0^\infty e^{-s}ds+\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}=2$. Вместе с тем функция (2.8) не допускает бесконечно малого высшего предела, так как имеются точки t, где $V(t, x)\geqslant e^{2t}x^2(t)$.

Отметим, что В. П. Марачковым была доказана следующая теорема: *пусть правая часть $f(t, x)$ уравнения* (1.1) *ограничена в $T\times S_H$, $|f(t, x)|\leqslant M$, $t\in T$, $x\in S_H$. Тогда если существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая оценкам* (2.2) *и* (2.6), *то тривиальное решение уравнения* (1.1) *асимптотически устойчиво* [21].

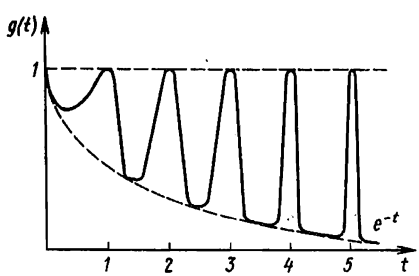


Рис. 2.5. Вид функции $g(t)$ из примера 2.1

Теорема 2.4 (Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский). *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.3 *и, кроме того,*

$$\omega_1(u)\to\infty,\ u\to\infty. \tag{2.9}$$

Тогда решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (1.1) *асимптотически устойчиво в целом.*

□ Возьмем произвольное начальное условие $x_0 \in R_n$ и определим такое k, что $\omega_1(k) = \omega_2(|x_0|)$. В силу (2.9) такое k обязательно найдется. При этом так же, как и в теореме 2.2, устанавливается, что решение $x(t, t_0, x_0)$ не покинет шар S_k при $t \geqslant t_0$. Применяя к шару S_k теорему 2.3, получим утверждение теоремы 2.4. ■

При нарушении условия (2.9) асимптотической устойчивости в целом может не быть. Соответствующий пример приведен в [4].

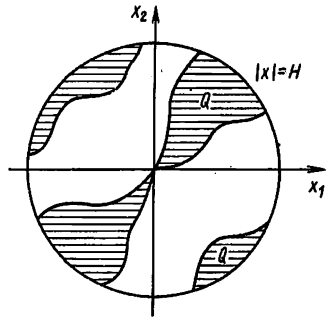


Рис. 2.6. Структура области $Q=\{V>0\}$

Докажем одну теорему о неустойчивости. Возьмем непрерывно дифференцируемую функцию $V(t, x)$ и обозначим через Q область вида $Q=\{|x|<H,\ V(t, x)>0\}$. Предположим, что область Q обладает следующими свойствами:

1^0) Q состоит из нескольких связных открытых компонент;

2^0) в Q имеются точки x с произвольно малой нормой $|x|$ (рис. 2.6).

Теорема 2.5 (теорема Четаева). *Пусть существует функция $V(t, x)$ такая, что область $Q=\{|x|<H,\ V(t, x)>0\}$ удовлетворяет условиям 1^0 и 2^0. Тогда если в области Q функция $V(t, x)$ ограничена, а ее производная в силу системы* (1.1) *определенно-положительна (т. е. $\dot{V}(t, x) \geqslant \omega_4(|x|)$, $x \in Q$), то тривиальное решение системы* (1.1) *неустойчиво.*

□ Согласно условию, в сколь угодно малой окрестности $|x|<\lambda$ начала координат найдется точка x_0 такая, что $V(t_0, x_0)=V_0>0$. На решении $x(t, t_0, x_0)$ функция $V(t, t_0, x_0))$ не убывает, т. е. $V(t, x(t, t_0, x_0)) \geqslant V_0>0$. Это означает, что через границу $V=0$ это решение не может покинуть область Q. Решение $x(t, t_0, x_0)$ не может всегда оставаться в области Q. Действительно, в этом случае при $V(t) \geqslant V_0$ в силу условия теоремы найдется $\alpha>0$ такое, что $\dot{V}(t) \geqslant \alpha$ при $t>t_0$. Тогда было бы выполнено неравенство

$$V(t)-V(t_0)=\int_{t_0}^{t} \dot{V}(s)\,ds \geqslant \alpha\,(t-t_0) \to \infty,\ t \to \infty.$$

Но это невозможно, поскольку V ограничена в области Q. Значит, решение $x(t, t_0, x_0)$ обязательно попадет на границу $|x|=H$ области Q за конечное время. ■

Замечания. 1. Условия теорем 2.1—2.5 можно несколько ослабить. Именно: можно потребовать только, чтобы $V(t, x)$ была непрерывной по (t, x) и локально липшицевой по x. Тогда

если в теоремах 2.1—2.4 заменить производную в силу системы $\dot{V}$ на правое верхнее производное число в силу системы D^+V, то утверждения этих теорем останутся справедливыми. В теореме 2.5 вместо $\dot{V}$ можно рассматривать правое нижнее производное число D_+V.

2. Метод функций Ляпунова является универсальным методом исследования устойчивости и большинство теорем метода Ляпунова допускают обращение. Точнее, если функция $f(t, x)$ в уравнении (1.1) непрерывно дифференцируема и начало координат $x=0$ устойчиво, то существуют некоторая окрестность Ω начала координат и непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$, определенная на $T\times\Omega$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1. Это утверждение было установлено К. П. Персидским. Обращение теоремы 2.2 о равномерной устойчивости было установлено Я. Курцвейлем. Х. Л. Массера доказал теорему, обратную теореме 2.3 о равномерной асимптотической устойчивости. Обращение теоремы Четаева о неустойчивости получено И. Вркочем. Доказательство теорем обращения и их обсуждение можно найти в книге Н. Н. Красовского [9].

§ 3. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ЛЯПУНОВА

1. Устойчивость движения снаряда [22]. При настильной стрельбе можно считать, что центр тяжести снаряда движется равномерно и прямолинейно. Движение снаряда вокруг центра масс можно характеризовать следующими величинами:

α — углом между осью и направлением движения снаряда;

β — углом между осью снаряда и ее проекцией на вертикальную плоскость;

n — проекцией угловой скорости вращения снаряда на его ось.

Достаточно давно было замечено, что при малых n снаряд начинает «кувыркаться» в полете. При этом углы α и β меняются очень сильно. Точность стрельбы в таком случае резко падает. При больших n «кувырканий» не происходит, углы α и β незначительно меняются во время полета и при этом достигается меньшее рассеивание снарядов. Изменяя параметры нарезки ствола орудия, можно менять n и тем самым добиваться устойчивости полета снаряда. Несмотря на большую важность этого вопроса, полное теоретическое исследование устойчивости полета снаряда было осуществлено лишь в 40—50-х гг. XX столетия.

Уравнения, описывающие изменения во времени углов α и β, установлены академиком А. Н. Крыловым и имеют вид

$$\begin{aligned} A\ddot{\beta}+A\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta-Cn\dot{\alpha}\cos\beta&=eR\sin\beta\cos\alpha,\\ A\ddot{\alpha}\cos\beta-2A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta+Cn\dot{\beta}&=eR\sin\alpha. \end{aligned} \tag{3.1}$$

В уравнениях (3.1) постоянные A, C, n, e, R имеют следующий смысл: C — момент инерции снаряда относительно его оси; A — момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести; e — расстояние от центра тяжести до центра давления (так называется точка, где приложены силы сопротивления воздуха); R — лобовое сопротивление*.

Уравнения (3.1) допускают решение $\alpha=\dot{\alpha}=\beta=\dot{\beta}=0$. Определим условия, при которых это решение устойчиво. Эта задача была решена Н. Г. Четаевым с помощью введенной им *связки интегралов*. Четаев исходил из того, что при движении снаряда сохраняются энергия и момент количества движения. Иными словами, уравнения движения (3.1) имеют два первых интеграла:

интеграл энергии

$$F_1(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta})=\frac{1}{2}A(\dot{\beta}^2+\dot{\alpha}^2\cos^2\beta)+eR(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const};$$

интеграл момента количества движения

$$F_2(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta})=A(\dot{\beta}\sin\alpha-\dot{\alpha}\cos\beta\sin\beta\cos\alpha)+$$
$$+Cn(\cos\alpha\cos\beta-1)=\text{const}.$$

Легко убедиться непосредственным дифференцированием с учетом уравнений (3.1), что

$$\frac{dF_1}{dt}=\frac{dF_2}{dt}=0. \tag{3.2}$$

Однако ни F_1, ни F_2 не являются определенно положительными функциями α, $\dot{\alpha}$, β, $\dot{\beta}$ (т. е. не удовлетворяют условию (2.2) ни для какой функции ω_1 $(\sqrt{\alpha^2+\dot{\alpha}^2+\beta^2+\dot{\beta}^2})$). Четаев предложил искать функцию Ляпунова в виде связки интегралов $V=F_1-\lambda F_2$ ($\lambda=$ $=\text{const}$), где нужно подобрать λ так, чтобы V стало определенно положительной. Разложим $V=F_1-\lambda F_2$ в ряд по α, $\dot{\alpha}$, β и $\dot{\beta}$:

$$V=\frac{1}{2}\{A\dot{\alpha}^2+(Cn\lambda-eR)\beta^2+2A\lambda\dot{\alpha}\beta\}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2}\{A\dot{\beta}^2+(Cn\lambda-eR)\alpha^2-2A\alpha\dot{\beta}\}+\ldots. \tag{3.3}$$

Невыписанные члены в разложении (3.3) имеют порядок не ниже третьего относительно α, $\dot{\alpha}$, β, $\dot{\beta}$. Если λ таково, что обе квадратичные формы в фигурных скобках положительно определены, то функция V также определенно положительна в малой окрестности

*Вывод уравнений (3.1) можно найти в кн.: Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, т. II, § 153. — М.: Гостехиздат, 1948.

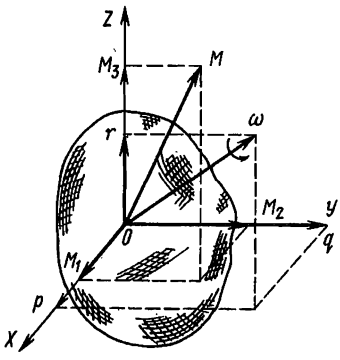


Рис. 3.1. Вращение твердого тела около неподвижной точки O

точки $\alpha=\dot{\alpha}=\beta=\dot{\beta}=0$. Для положительной определенности обеих форм необходимо и достаточно, чтобы $A>0$ и $A\lambda^2-Cn\lambda+eR<0$. Первое неравенство всегда имеет место и при выполнении условия $C^2n^2-4AeR>0$ найдутся такие λ, что второе неравенство также будет выполнено. Таким образом, при выполнении так называемого *условия Маиевского—Крылова*

$$n^2>4\frac{AeR}{C^2} \tag{3.4}$$

найдутся такие λ, что функция $V=F_1-\lambda F_2$ в силу (3.2) удовлетворяет условиям теоремы 2.1. При выполнении условия (3.4) движение снаряда будет устойчивым, без «кувырканий». Используя аналогичные построения и теорему о неустойчивости, можно показать, что при невыполнении условия (3.4) снаряд будет обязательно «кувыркаться» (см. также ниже пример 7.1).

2. Движение твердого тела, закрепленного в одной точке. Рассмотрим движение твердого тела, закрепленного в неподвижной точке O, совпадающей с центром инерции тела (рис. 3.1). Главные моменты инерции тела равны A, B и C. *Уравнения Эйлера* для проекций p, q, r вектора угловой скорости ω на главные центральные оси инерции имеют вид

$$A\dot{p}=(B-C)\,qr,\ B\dot{q}=(C-A)\,rp,\ C\dot{r}=(A-B)\,pq. \tag{3.5}$$

Исследуем устойчивость установившегося вращения вокруг первой оси $p=p_0$, $q=r=0$. В системе (3.5) имеется два первых интеграла

$$F_1=Ap^2+Bq^2+Cr^2,$$
$$F_2=B\,(B-A)\,q^2+C\,(C-A)\,r^2.$$

Для новых переменных $x=p-p_0$, $y=q$, $z=r$ получим уравнения

$$A\dot{x}=(B-C)\,yz,\ B\dot{y}=(C-A)\,(p_0+x)\,z,\ C\dot{z}=(A-B)\,(p_0+x)\,y. \tag{3.6}$$

Если первая ось является наибольшей осью эллипсоида инерции, то $A<B\leqslant C$ и можно взять функцию Ляпунова в виде четаевской связки интегралов при $\lambda=1$:

$$V_1=B\,(B-A)\,y^2+C\,(C-A)\,z^2+[By^2+Cz^2+A\,(x^2+2xp_0)]^2 \tag{3.7}$$

При $A<B\leqslant C$ функция (3.7) является определенно положительной и $\dot{V}_1=0$. Значит, согласно теореме 2.1, вращение вокруг наибольшей оси устойчиво.

Если первая ось есть наименьшая ось эллипсоида инерции, то $A>B\geqslant C$ и в качестве функции Ляпунова можно взять связку интегралов вида

$$V_2=B\,(A-B)\,y^2+C\,(A-C)\,z^2+[By^2+Cz^2+A\,(x^2+2xp_0)]^2.$$

Поскольку $\dot{V}_2=0$, вращение вокруг наименьшей оси также устойчиво.

При вращении вокруг средней оси ($C>A>B$) в качестве вспомогательной функции возьмем

$$V_3=yz. \tag{3.8}$$

Производная функции (3.8) в силу уравнений (3.6) имеет вид

$$\dot{V}_3=(p_0+x)\left[\frac{C-A}{B}\,z^2+\frac{A-B}{C}\,y^2\right].$$

В шаре S_H, где $H<p_0^2$, выполнены условия теоремы Четаева. Это означает, что вращение вокруг средней оси неустойчиво.

При использовании этих результатов для исследования движения реальных объектов, например при изучении угловых движений космических аппаратов (КА), необходимо иметь в виду следующее. Реальные КА являются упругими, а не твердыми телами. Внутреннее рассеивание энергии за счет упругости КА не позволяет использовать допущения, применяемые в классических работах Эйлера и Пуансо при выводе уравнений (3.5). Более тщательное исследование вопроса об устойчивости вращения упругого тела вокруг неподвижной точки показывает, что, как и для твердого тела, вращение вокруг средней оси — неустойчивое. Вращение же вокруг малой оси при учете упругих сил становится неустойчивым. Этот факт был сначала обнаружен экспериментально при наблюдениях за первыми искусственными спутниками Земли. Обработка радиоастрономических наблюдений показала, что первый советский искусственный спутник Земли (1957) имел устойчивое вращение, а американский спутник «Эксплорер 1» (1958) оказался неустойчивым и совершал переходы из одного крайнего положения в другое каждые 90 мин. Теоретическое изучение этого явления и привело к выводу о том, что учет упругих сил меняет устойчивость вращения тела вокруг неподвижной точки*.

---

*Ликинз П. Угловые движения КА и управление. Личная оценка ранних разработок // Аэрокосмическая техника. 1986. № 12.

Многочисленные другие примеры исследования устойчивости движения механических систем можно найти в книге Н. Г. Четаева [22], а также в [1; 9; 10; 11; 16; 19], где имеются примеры из других областей.

§ 4. РАЗВИТИЕ МЕТОДА ЛЯПУНОВА

Хотя теоремы, приведенные в § 2, полностью решают большинство задач устойчивости, их применение в ряде случаев сложно, поскольку трудно построить функции Ляпунова, удовлетворяющие условиям этих теорем. Имеется ряд других теорем, использующих функции Ляпунова с иными свойствами.

1. Теорема Барбашина — Красовского. Рассмотрим автономную систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)=f(x),\ f(0)=0,\ x\in R_n,\\ &x(t_0)=x_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Через $x(t, x_0)$ обозначим решение системы (4.1).

Определение 4.1. Точка $y\in R_n$ называется *ω-предельной точкой* для точки x_0, если существует последовательность t_n, $t_n\to\infty$, такая, что $y=\lim x(t_n, x_0)$.

Теорема 4.1. *Множество* Ω *всех ω-предельных точек данной точки* x_0 *есть замкнутое множество, состоящее из целых траекторий* (рис. 4.1).

□ Замкнутость множества Ω проверяется следующим образом. Если $y^*=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $y_n\in\Omega$, то $y_n=\lim\limits_{k\to\infty} x(t_{n_k}, x_0)$ и поэтому $y^*=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} x(t_{n_k}, x_0)=\lim\limits_{n_k\to\infty} x(t_{n_k}, x_0)$. Далее, если $y\in\Omega$, то обязательно $x(t, y)\in\Omega$ при всех $t\geqslant t_0$. В самом деле, для любого $t>t_0$ имеем

$$x(t, y)=x(t, \lim_{n\to\infty} x(t_n, x_0))=$$
$$=\lim_{n\to\infty} x(t_n+t, x_0).$$

Поэтому $x(t, y)\in\Omega$. ■

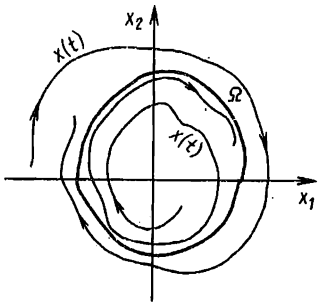


Рис. 4.1. Структура предельного множества Ω

Множество, состоящее из целых траекторий, называют *инвариантным* множеством. Если $V(x)\geqslant 0$ — некоторая функция Ляпунова и $\dot{V}\leqslant 0$, то все ω-предельные точки для данной точки x_0 лежат на одной поверхности уровня функции $V(x)$, т. е. для $y_1, y_2\in\Omega$ имеет место равенство $V(y_1)=V(y_2)$. В самом деле, если

$y_1 = \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n, x_0)$, $y_2 = \lim\limits_{m\to\infty} x(t_m, x_0)$, то в силу непрерывности $V(x)$ получим

$$V(y_1) = \lim_{n\to\infty} V(x(t_n, x_0)) = V_\infty = \lim_{m\to\infty} V(x(t_m, x_0)) = V(y_2).$$

Теорема 4.2 (Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский). *Пусть существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что $V(x) \geqslant \omega_1(|x|)$, $\dot{V} \leqslant 0$, причем множество $\{x : \dot{V} = 0\}$ не содержит целых траекторий системы* (4.1), *кроме точки $x = 0$. Тогда тривиальное решение уравнения* (4.1) *асимптотически устойчиво.*

□ В силу теоремы 2.1 решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво, т. е. для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|x_0| < \delta \Rightarrow |x(t, x_0)| \leqslant \varepsilon$. Пусть $\Omega \subset S_\varepsilon$ — множество ω-предельных точек для некоторого $x_0 \in S_\delta$. Покажем, что $\Omega = \{0\}$. Предположим, что это не так. Тогда существует $y \neq 0$, $y \in \Omega$. Поскольку V определенно положительна, имеем $V(y) > 0$. Согласно теореме 4.1, траектория $x(t, y) \in \Omega$; поэтому $V(x(t, y)) = V(y)$. Значит, $\dot{V} = 0$ вдоль траектории $x(t, y)$, т. е. $x(t, y)$ должно принадлежать такому множеству, где $\dot{V} = 0$. Но по условию множество $\dot{V} = 0$ не содержит целых траекторий. Из полученного противоречия вытекает утверждение теоремы. ■

Если уравнение $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ описывает множество $\dot{V} = 0$, то условие

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i(x) \neq 0 \tag{4.2}$$

достаточно для отсутствия целых траекторий во множестве $\dot{V} = 0$.

Заметим, что теорема 4.2 остается справедливой и для периодических систем (1.1).

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0, \quad \varphi(0) = f(0) = 0. \tag{4.3}$$

Это уравнение описывает колебания материальной точки под действием нелинейной восстанавливающей силы $f(x)$ в среде, сопротивление которой нелинейно зависит от скорости $\dot{x}$. Запишем уравнение (4.3) в виде системы

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -f(x) - \varphi(y). \tag{4.4}$$

Введем функцию Ляпунова

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(u)\, du. \tag{4.5}$$

Пусть выполнены условия

$$xf(x) > 0, \ x \neq 0, \ y\varphi(y) > 0, \ y \neq 0. \tag{4.6}$$

Тогда функция (4.5) является определенно положительной, а ее производная равна $\dot{V}=-y\varphi(y)$. Множество $\dot{V}=0$ в данном случае имеет вид $\{y=0,\ x$ — произвольное$\}$. Но если на некотором решении $y\equiv 0$, то и $\dot{y}\equiv 0$, а значит, и $f(x)=0$. В силу условий (4.6) точка $x=0$ является единственным нулем функции $f(x)$. Следовательно, в множестве $\dot{V}=0$ нет целых траекторий, кроме точки $x=0$, $y=0$. Согласно теореме 4.2, тривиальное решение уравнения (4.3) асимптотически устойчиво, если выполняются неравенства (4.6). Если, кроме того, $\lim\limits_{|x|\to\infty}\int\limits_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=\infty$, то в силу теорем 4.2 и 2.4 тривиальное решение асимптотически устойчиво в целом.

2. Критерий Матросова. Теорема Барбашина — Красовского не может быть обобщена на неавтономный случай. В самом деле, для уравнения $\dot{x}(t)=-a(t)x$ $(x\in R_1,\ a(t)>0)$ функция $V(x)=x^2$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2. В то же время решение $x(t)\equiv 0$ асимптотически устойчиво или нет в зависимости от сходимости или расходимости интеграла $\int\limits_{t_0}^{\infty} a(s)\,\mathrm{d}s$. Для неавтономного уравнения (2.1) имеет место удобный критерий устойчивости, который получается, если использовать две функции Ляпунова.

Теорема 4.3 (В. М. Матросов). *Для равномерной асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции* $V(t, x)$ *и* $W(t, x)$, *обладающие следующими свойствами:*

$1^0)$ $\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x)\leqslant\omega_2(|x|)$; $x\in S_H$, $t_0\leqslant t$;

$2^0)$ $\dot{V}(t, x)\leqslant a(|x|)\leqslant 0$;

$3^0)$ $|W(t, x)|\leqslant L=\mathrm{const}$, $t_0\leqslant t$, $x\in S_H$;

$4^0)$ $|\dot{W}(t, x)|\geqslant\omega_4(|x|)$, $t_0\leqslant t$, $x\in E(\mu, \rho)$,

где $a(|x|)$ — *произвольная непрерывная скалярная функция;* $E(\mu, \rho)$ — *множество вида* $\{x\in S_H,\ d(x, Q(a=0))\leqslant\rho,\ \mu\leqslant|x|\leqslant H\}$ (рис. 4.2). *Здесь* $Q(a=0)$ — *такое множество из* S_H, *для которого* $a(|x|)=0$, *и* $d(x, Q(a=0))$ — *расстояние от точки* x *до множества* $Q(a=0)$.

Доказательство этой теоремы см. в [17].

Пример 4.2. *Маятник с вязким трением, зависящим от времени.* Колебания такого маятника (рис. 4.3) описываются уравнением

$$\ddot{x}+h(t)\dot{x}+\sin x=0,\ k_1\leqslant h(t)\leqslant k_2 \tag{4.7}$$

или эквивалентной системой

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-h(t)y-\sin x.$$

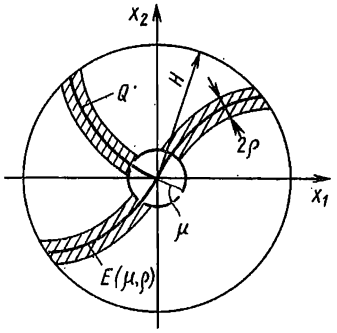


Рис. 4.2. Вид множества $E(\mu, \rho)$

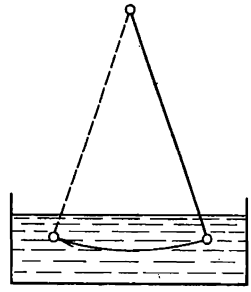


Рис. 4.3. Маятник в среде с вязким трением

Возьмем функцию $V(x, y)$ в виде

$$V(x, y)=\frac{y^2}{2}+(1-\cos x).$$

В области $\Omega=\{(x^2+y^2)^{1/2}<\pi-\varepsilon,\ \varepsilon>0\}$ имеем

$$\frac{2}{\pi^2}(x^2+y^2)\leqslant V(x, y)\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Производная $\dot{V}=-h(t)y^2\leqslant -k_1y^2\leqslant 0$. Множество Q $(\omega_3=0)$ имеет вид $\{y=0,\ x$ — произвольное$\}$. В качестве второй функции W возьмем $W(x, y)=-y$. Она ограничена в любом шаре S_H и $\dot{W}=h(t)y+\sin x$. При $|y|\leqslant\rho$ и $|x|\geqslant 3k_2\rho$ имеем $\dot{W}\geqslant|x|-k_2\rho\geqslant$ $\geqslant\frac{1}{2}(|x|+k_2|y|)$. В силу теоремы 4.3 тривиальное решение уравнения (4.7) равномерно асимптотически устойчиво.

3. Принцип сравнения. Для решения вопроса об устойчивости сложных или составных систем удобно использовать *векторные функции Ляпунова*. Сформулируем некоторые результаты.

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим уравнение

$$\dot{u}(t)=F(t, u),\ u\in R_m. \tag{4.8}$$

Вектор-функция $F(t, u)=(F_1, \ldots, F_m)'$ называется *квазимонотонно возрастающей*, если для каждой пары точек (t, u) и (t, v) таких, что $u_i=\mathrm{v}_i$, $u_j\geqslant\mathrm{v}_j$ $(j\neq i)$, при всех $i=1, \ldots, m$ имеет место неравенство $F_i(t, u)\geqslant F_i(t, \mathrm{v})$.

Теорема 4.4 (В. М. Матросов). *Пусть существует векторная непрерывно дифференцируемая функция* $V(t, x)=(V_1(t, x), \ldots, V_m(t, x))'$ *такая, что:*

$1^0)$ $\max V_i(t, x)\geqslant\omega_1(|x|)$, $V(t, 0)=0$;

$2^0)$ $\dot{V}_{(2.1)}(t, x)\leqslant F(t, V(t, x))$.

Здесь $\dot{V}_{(2.1)}(t, x)$ — *производная вектор-функции* $V(t, x)$ *в силу системы* (2.1), *определяемая формулой*

$$\dot{V}_{(2.1)}(t, x)=\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V_1}{\partial x_j}f_j, \ldots, \frac{\partial V_m}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V_m}{\partial x_j}f_j\right)'.$$

Функция $F(t, u)$ *предполагается квазимонотонно возрастающей. Тогда:*

устойчивость решения $u=0$ *уравнения* (4.8) *влечет устойчивость решения* $x=0$ *уравнения* (2.1);

равномерная асимптотическая устойчивость решения $u=0$ *влечет равномерную асимптотическую устойчивость решения* $x=0$.

Доказательство этого утверждения, а также большого числа связанных с этой проблематикой теорем см. в [12; 17].

Пример 4.3 [17]. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=(I\sin t+A(t, x))x, \; x\in R_n. \tag{4.9}$$

Здесь I — единичная $(n\times n)$-матрица, а $(n\times n)$-матрица $A(t, x)$ с элементами $a_{ij}(t, x)$, дифференцируемыми по t и x, является кососимметрической, т. е. такой, что $a_{ii}(t, x)\equiv 0$, $a_{ij}(t, x)=-a_{ji}(t, x)$.

Возьмем функцию Ляпунова вида

$$V(x_1, \ldots, x_n)=x_1^2+\ldots+x_n^2=x'x. \tag{4.10}$$

С учетом кососимметричности матрицы $A(t, x)$ имеем $x'A(t, x)x=0$. Поэтому производная функции Ляпунова (4.10) в силу системы (4.9) равна

$$\dot{V}=2x'x=2x'(I\sin t+A(t, x))x=2x'x\sin t=2V\sin t.$$

Производная $\dot{V}$ функции (4.10) не знакопостоянна и применить непосредственно теорему Ляпунова 2.1 нельзя. Однако решение $u(t)\equiv 0$ скалярного уравнения $\dot{u}=2u\sin t$ устойчиво, поскольку $u(t, t_0, u_0)=u_0\exp\left(2\int_{t_0}^{t}\sin s\,ds\right)$. По теореме 4.4 отсюда получаем, что тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (4.9) также устойчиво.

4. Устойчивость по части переменных. В ряде случаев поведение исследуемой системы таково, что можно ожидать устойчивости только некоторых из фазовых переменных в процессе эволюции этой системы. Так, например, при изучении устойчивости движения велосипедиста нужно только, чтобы отклонения его тела от вертикальной плоскости были малы, а поступательная скорость велосипедиста может меняться в широких пределах. Такой случай удобно изучать с помощью понятия *устойчивости по части переменных* [16].

Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x}=f(t, x, y),\ \dot{y}=g(t, x, y),\ x\in R_n,\ y\in R_m,$$
$$f(t, 0, 0)=g(t, 0, 0)=0,\ z'=(x', y')\in R_{n+m}. \qquad (4.11)$$

Определение 4.2. Тривиальное решение $z(t)\equiv 0$ ($x(t)\equiv 0$, $y(t)\equiv 0$) системы (4.11) называется *x-устойчивым (устойчивым по отношению к x)*, если для всякого $\varepsilon>0$ и всякого $t_0\in T$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0)>0$ такое, что как только $|z(t_0)|\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)$, выполняется неравенство $|x(t, t_0, z_0)|\leqslant\varepsilon$, $t\geqslant t_0$. Решение $z(t)\equiv 0$ называется *асимптотически x-устойчивым*, если оно x-устойчиво и для некоторого $\Delta>0$ справедливо соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, t_0, z_0)=0$, $|z_0|\leqslant\Delta$ (рис. 4.4).

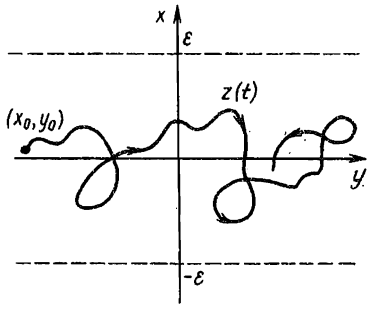


Рис. 4.4. Траектория, устойчивая по переменной x

Теорема 4.5 (В. В. Румянцев). *Пусть существует функция $V(t, x, y)$ такая, что:*

1^0) $V(t, x, y)\geqslant\omega_1(|x|)$;

2^0) $\dot{V}\leqslant 0$.

Тогда решение $z(t)\equiv 0$ системы (4.11) *является x-устойчивым. Если же функция $V(t, x, y)$ такова, что:*

3^0) $\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x, y)\leqslant\omega_2(|z|)$;

4^0) $\dot{V}(t, x, y)\leqslant-\omega_3(|x|)$,

то решение $z(t)\equiv 0$ асимптотически x-устойчиво.

§ 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Общие теоремы об устойчивости (см. § 2) не позволяют даже в простейших случаях по коэффициентам уравнения без вычислений судить об устойчивости его решений. Получение таких коэффициентных условий даже для частных классов уравнений представляет большой интерес. В первую очередь изучаются линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

1. Критерий Рауса — Гурвица. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t)=Ax(t),\ x\in R_n. \qquad (5.1)$$

Напомним некоторые сведения, касающиеся структуры общего решения уравнения (5.1).

Предположим сначала, что матрица A имеет только простые, собственные значения λ_i и собственные векторы h_i, т. е.

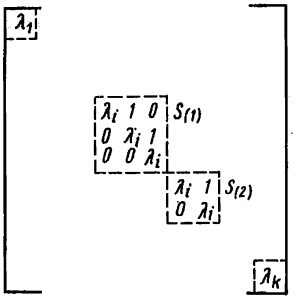


Рис. 5.1. Жорданова форма матрицы A

$Ah_i=\lambda_i h_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Тогда общее решение уравнения (5.1) имеет вид

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i h_i e^{\lambda_i t},$$

где C_i — произвольные постоянные.

При наличии кратных собственных значений для построения общего решения уравнения (5.1) приведем сначала матрицу A к жордановой форме. *Жордановой формой матрицы* называется клеточно-диагональная форма, в которой главную диагональ образуют клетки Жордана, а все остальные элементы равны нулю. При этом *клеткой Жордана* называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали находится одно и то же число, элементы одного ряда выше главной диагонали равны единице, а все прочие элементы — нулю (см. рис. 5.1, где изображены клетки Жордана, а все элементы вне диагональных блоков равны нулю).

Возможны различные способы приведения матрицы квадратной матрицы A размерности n к жордановой форме. Приведем один из них*, состоящий из следующих этапов:

1^0. Для каждого k $(k=0, \ldots, n)$ находят наибольший общий делитель $D_k(\lambda)$ всех миноров порядка k характеристической матрицы $\lambda I-A$. Старшие коэффициенты у всех полиномов $D_k(\lambda)$ берут равными единице. При этом

$$D_n(\lambda)=\det(\lambda I-A), \quad D_0(\lambda)=1.$$

2^0. Находят инвариантные многочлены $L_k(\lambda)$ (называемые также инвариантными множителями) по формулам

$$L_1(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, \; L_2(\lambda)=\frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \; \ldots, \; L_n(\lambda)=\frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}=D_1(\lambda).$$

3^0. Каждый инвариантный многочлен раскладывают на различные неприводимые многочлены, называемые *элементарными делителями* характеристической матрицы $\lambda I-A$ или просто матрицы A. Элементарный делитель представляют в виде степени одной из разностей $(\lambda-\lambda_i)$, где λ_i — собственные значения матрицы A. Таким образом, $L_k(\lambda)$ имеет вид

$$L_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\lambda_j)^{k_j}.$$

Отметим, что произведение всех элементарных делителей равно произведению всех инвариантных множителей и равно $D_n(\lambda)$.

---

*Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966.

4°. Каждому элементарному делителю $(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$ сопоставляют клетку Жордана порядка k_j с числом λ_j на главной диагонали. Клеточно-диагональная матрица, у которой на главной диагонали находятся все построенные указанным образом клетки Жордана, и есть жорданова форма матрицы A. Жорданова форма матрицы единственна с точностью до порядка расположения ее клеток Жордана на главной диагонали.

Приведем теперь формулы, определяющие общее решение уравнения (5.1) в случае кратных корней. Пусть λ_i — r-кратное собственное значение матрицы A. Ему соответствует некоторое количество собственных векторов. Степень вырождения собственного значения λ_i равна максимальному числу $m\ (i)$ линейно независимых собственных векторов, отвечающих λ_i. Число $m\ (i)$ равно также числу клеток Жордана, соответствующих λ_i. Обозначим через B_j одну из этих клеток. Если размерность клетки Жордана B_j есть $s\ (j)$, то

$$s\ (1)+s\ (2)+\ldots+s\ (m\ (i))=r.$$

Отсюда, в частности, видно, что жорданова форма матрицы A является диагональной, если кратность любого ее собственного значения равна его степени вырождения. В этом случае все собственные значения имеют простые элементарные делители. Каждой клетке Жордана B_j соответствует серия векторов h_l, $l=1, \ldots, s\ (j)$ (своих для каждой клетки), таких, что

$$h_1\neq 0,\ Ah_1=\lambda_i h_1,\ Ah_2=\lambda_i h_2+h_1,\ \ldots,\quad Ah_{s(j)}=\lambda_i h_{s(j)}+h_{s(j)-1}.$$

Векторы h_l, где $l=1, \ldots, s\ (j)$, каждой серии линейно независимы между собой. Подпространство, натянутое на все векторы h_l, соответствующие клетке B_j, является инвариантным, циклическим и имеет размерность, равную размерности серии, т. е. равную $s\ (j)$. В базисе, составленном из векторов всех серий, матрица A имеет жорданову форму.

Вернемся к уравнению (5.1). Решениями этого уравнения являются функции вида

$$x_{iq}(t)=\omega_q(t)e^{\lambda_i t}$$

$$\omega_q\ (t)=\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}\,h_1+\frac{t^{q-2}}{(q-2)!}\,h_2+\ldots+h_q,\ q=1, \ldots, s\ (j), \qquad (5.2)$$

$$s\ (1)+s\ (2)+\quad +s\ (m\ (i))=r_i,\ r_1+r_2+\quad +r_k=n.$$

Количество линейно независимых решений вида (5.2) равно n. Общее решение уравнения (5.1) есть линейная комбинация из частных решений вида (5.2).

Из описанного представления общего решения линейной стационарной системы немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Для устойчивости тривиального решения уравнения* (5.1) *необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения* λ_i *матрицы* A *удовлетворяли условию* $\mathrm{Re}\lambda_i \leqslant 0$, *причем собственные значения* λ_j *такие, что* $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$, *имеют простые элементарные делители (т. е. в формуле* (5.2) *все* $s(j) = 1$). *Для асимптотической устойчивости уравнения* (5.1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$.

Таким образом, устойчивость (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) уравнения (5.1) определяется расположением относительно мнимой оси корней характеристического уравнения матрицы A:

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{5.3}$$

Здесь I — единичная $(n \times n)$-матрица. Раскрывая определитель, можно привести уравнение (5.3) к виду

$$P_n(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n = 0,\ a_n = 1. \tag{5.4}$$

Будем говорить, что многочлен $P_n(\lambda)$ является *устойчивым многочленом (многочленом Гурвица)*, если все его корни λ_j имеют отрицательную вещественную часть, т. е.

$$\mathrm{Re}\lambda_j < 0. \tag{5.5}$$

При выполнении условия (5.5) матрицу A также называют *устойчивой*.

Теорема 5.2 (А. Стодола). *Все коэффициенты устойчивого многочлена положительны.*

□ Пусть $\lambda_j = -\alpha_j \pm i\beta_j$ $(j = 1, \ldots\ r)$, $i^2 = -1$, $\lambda_k = -\gamma_k$ $(k = 1, \ldots, l,\ 2r + l = n)$ — корни устойчивого многочлена $P_n(\lambda)$. Тогда $\alpha_j > 0$, $\gamma_k > 0$ и, раскладывая $P_n(\lambda)$ на множители, имеем

$$P_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda^2 + 2\alpha_j\lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2) \prod_{k=1}^{l} (\lambda + \gamma_k).$$

Таким образом, $P_n(\lambda)$ представлен в виде произведения многочленов с положительными коэффициентами. Поэтому все его коэффициенты $a_j > 0$. ■

Положительность коэффициентов есть необходимое, но не достаточное условие для выполнения неравенств (5.5). Например, многочлен $P_3(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$ имеет корни $z_1 = -3$, $z_{2,3} = 1 \pm 3i$.

Сформулируем теперь необходимый и достаточный признак устойчивости. *Матрицей Гурвица* M_{P_n} многочлена (5.4) называется матрица вида

$$M_{P_n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ & & & & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & & & a_n \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

В матрице (5.6) все $a_s=0$ при $s<0$ и $s>n$. Например, для многочлена шестой степени матрица Гурвица такова:

$$M_{P_s}=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Критерий Рауса — Гурвица. *Для того чтобы многочлен* $P_n(\lambda)$ *с* $a_0>0$ *и* $a_n\neq 0$ *был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры*

$$\Delta_1=a_1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n=a_n\Delta_{n-1}$$

его матрицы Гурвица M_{P_n}.

Критерий Льенара — Шипара. *Для того чтобы многочлен с положительными коэффициентами был устойчивым, необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:* а) $\Delta_1>0$, $\Delta_3>0$, б) $\Delta_2>0$, $\Delta_4>0$, ...

Доказательства этих критериев можно найти в [4].

В качестве примера рассмотрим многочлен

$$P_3(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\lambda^3\ (a_i>0).$$

Из вида матрицы (5.6), используя критерий Льенара — Шипара, получим, что многочлен $P_3(\lambda)$ является устойчивым, если $0<a_0<a_1a_2$.

2. Частотные критерии устойчивости. Применение критерия Рауса — Гурвица к реальным системам автоматического регулирования приводит к сложным вычислениям и не позволяет выявить влияние отдельных параметров на устойчивость системы. Более удобными в приложениях оказываются частотные критерии А. В. Михайлова и Г. Найквиста.

Рассмотрим многочлен (5.4). Положим $\lambda=i\omega$ $(i^2=-1)$ и построим *годограф Михайлова (амплитудно-фазовую характеристику)* $P_n(i\omega)$ этого многочлена:

$$z=P_n(i\omega)=a_n(i\omega-\lambda_1)\ldots(i\omega-\lambda_n).$$

Геометрически $i\omega-\lambda_k$ есть вектор в комплексной плоскости z, началом которого служит точка λ_k — корень многочлена $P_n(\lambda)$, а концом — точка $\lambda=i\omega$.

Так как $P_n(i\omega)$ — комплексное число, то

$$\arg P_n(i\omega) = \arg a_n + \arg(i\omega - \lambda_1) + \ldots + \arg(i\omega - \lambda_n). \qquad (5.8)$$

Если корень λ_k лежит в левой полуплоскости ($\operatorname{Re}\lambda_k < 0$), то при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $i\omega - \lambda_k$ вращается в положительном направлении (против хода часовой стрелки) и приращение аргумента равно π:

$$\Delta \arg(i\omega - \lambda_k)\,|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \pi. \qquad (5.9)$$

Если же корень λ_l лежит в правой полуплоскости, то вектор $(i\omega - \lambda_l)$ вращается по ходу часовой стрелки и

$$\Delta \arg(i\omega - \lambda_l)\,|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = -\pi.$$

Из соотношений (5.8) и (5.9) вытекает следующая теорема.

Теорема 5.3. *Многочлен $P_n(\lambda)$, не имеющий чисто мнимых корней, является устойчивым тогда и только тогда, когда*

$$\Delta \arg P_n(i\omega)\,|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = n\pi. \qquad (5.10)$$

Для упрощения условия (5.10) отделим действительную и мнимую части $P_n(i\omega)$. Имеем

$$P_n(i\omega) = a_0 + a_1 i\omega + a_2 (i\omega)^2 + \ldots + a_n (i\omega)^n =$$
$$= (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \ldots) + i(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 + \ldots).$$

Отсюда видно, что $\operatorname{Re} P_n(i\omega)$ есть четная функция от ω, а $\operatorname{Im} P_n(i\omega)$ — нечетная. Поэтому годограф многочлена $P_n(i\omega)$ состоит из двух частей, симметричных относительно действительной оси, первая из которых соответствует изменению ω от $-\infty$ до 0, а вторая — от 0 до ∞. В результате получаем следующее утверждение.

Критерий Михайлова. *Для устойчивости многочлена $P_n(\lambda)$, не имеющего чисто мнимых корней, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Delta \arg P_n(i\omega)\,|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2}\, n. \qquad (5.11)$$

На рис. 5.2 приведены различные годографы Михайлова для $n = 2, \ldots, 6$. Чем ближе годограф подходит к началу координат, тем меньше запас устойчивости. Если годограф проходит через начало координат, то система находится на границе области устойчивости. Таким образом, критические значения параметров $a_{кр}$ и частоты $\omega_{кр}$ линейной стационарной системы с характеристическим уравнением (5.4) находят из условий

$$\operatorname{Re} P_n(i\omega_{кр}, a_{кр}) = \operatorname{Im} P_n(i\omega_{кр}, a_{кр}) = 0.$$

Чтобы подчеркнуть зависимость многочлена (5.4) от параметров $a=(a_0, \ldots, a_n)$, он обозначен через $P_n(\lambda, a)$. Интересно отметить, что на практике амплитудно-фазовую характеристику можно определить экспериментально, подавая на вход линейной стационарной системы сигнал частоты ω и амплитуды 1. На выходе системы получится сигнал той же частоты ω, а амплитуда $|P_n(i\omega)|$ окажется сдвинутой по фазе на $\arg P_n(i\omega)$ относительно входного сигнала.

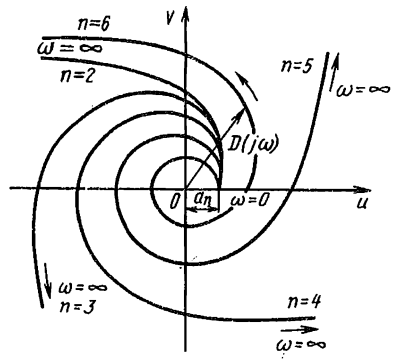


Рис. 5.2. Годографы Михайлова для устойчивых систем при $n=2, 3, 4, 5, 6$

3. Система автоматической подстройки частоты гетеродинного приемника*. В гетеродинных приемниках для обеспечения качественного звучания основное усиление производится на фиксированной, так называемой промежуточной частоте $\omega_{\text{пром}}$. Поскольку частота принимаемого сигнала $\omega_{\text{сигн}}$ постоянно меняется из-за разного рода неконтролируемых возмущений, для обеспечения хорошей работы гетеродинного приемника в его состав вводят систему автоматической подстройки частоты (АПЧ). Задачей системы АПЧ является поддержание заданного значения $\omega_{\text{пром}}=\omega_{\text{пром}}^{\text{ном}}$. Одна из возможных систем АПЧ изображена на рис. 5.3.

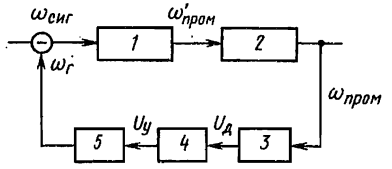


Рис. 5.3. Система автоматической подстройки частоты гетеродинного приемника: *1* — смеситель; *2* — усилитель промежуточной частоты; *3* — дискриминатор; *4* — усилитель; *5* — управляющий элемент гетеродина

Работа каждого из устройств *1*—*5* описывается следующими соотношениями, записанными сразу для отклонений частот $\delta\omega$:

1. Смеситель: $\delta\omega_{\text{сигн}}-\delta\omega_{\text{г}}=\delta\omega'_{\text{пром}}$.
2. Усилитель промежуточной частоты (УПЧ):

$$T_{\text{у}}\frac{\text{d}}{\text{d}t}(\delta\omega_{\text{пром}})+\delta\omega_{\text{пром}}=\delta\omega'_{\text{пром}}.$$

3. Дискриминатор: $U_{\text{д}}=K_{\text{д}}\delta\omega_{\text{пром}}$.
4. Усилитель: $T_{\text{д}}\frac{\text{d}U_{\text{у}}}{\text{d}t}+U_{\text{у}}=U_{\text{д}}$.

*Гитис Э. И., Данилович Г. А., Самойленко В. И. Техническая кибернетика. — М.: Советское радио, 1968.

5. Управляющий элемент гетеродина:

$$T_{\text{г}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\delta\omega_{\text{г}}) + \delta\omega_{\text{г}} = K_{\text{г}} U_{\text{у}}.$$

Входной величиной АПЧ будем считать $\delta\omega_{\text{сигн}}$, а выходом — $\delta\omega_{\text{г}}$, т. е. будем рассматривать АПЧ как следящую систему. Применяя операторный метод, получим:

$$\delta\omega_{\text{пром}} = \frac{1}{T_{\text{у}} D + 1} \delta\omega'_{\text{пром}}, \quad D = \frac{d}{dt},$$

$$U_{\text{д}} = \frac{K_{\text{д}}}{T_{\text{у}} D + 1} \delta\omega'_{\text{пром}},$$

$$U_{\text{у}} = \frac{1}{T_{\text{д}} D + 1} U_{\text{д}} = \frac{K_{\text{д}}}{(T_{\text{у}} D + 1)(T_{\text{д}} D + 1)} \delta\omega'_{\text{пром}},$$

$$\delta\omega_{\text{г}} = \frac{K_{\text{г}}}{T_{\text{г}} D + 1} U_{\text{у}} = \frac{K_{\text{г}} K_{\text{д}}}{(T_{\text{г}} D + 1)(T_{\text{у}} D + 1)(T_{\text{д}} D + 1)} \delta\omega'_{\text{пром}} =$$

$$= \frac{K(\delta\omega_{\text{сигн}} - \delta\omega_{\text{г}})}{(T_{\text{г}} D + 1)(T_{\text{у}} D + 1)(T_{\text{д}} D + 1)}, \quad K = K_{\text{г}} K_{\text{д}}, \quad D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

Окончательно получим уравнение АПЧ в виде

$$[(T_{\text{г}} D + 1)(T_{\text{у}} D + 1)(T_{\text{д}} D + 1) + K] \delta\omega_{\text{г}} = K \delta\omega_{\text{сигн}}. \qquad (5.12)$$

Установим условия устойчивости АПЧ, описываемой уравнением (5.12). Воспользуемся критерием Михайлова. Построим годограф:

$$G(i\omega) = (T_{\text{г}}(i\omega) + 1)(T_{\text{у}}(i\omega) + 1)(T_{\text{д}}(i\omega) + 1) + K.$$

Отделим действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} G(i\omega) = 1 + K - \omega^2 (T_{\text{у}} T_{\text{д}} + T_{\text{у}} T_{\text{г}} + T_{\text{д}} T_{\text{г}}),$$
$$\operatorname{Im} G(i\omega) = \omega (T_{\text{у}} + T_{\text{д}} + T_{\text{г}} - \omega^2 T_{\text{у}} T_{\text{д}} T_{\text{г}}).$$

Определим критический коэффициент усиления $K_{\text{кр}}$ и критическую частоту $\omega_{\text{кр}}$ из условий $\operatorname{Re} G(i\omega) = \operatorname{Im} G(i\omega) = 0$. Из условия $\operatorname{Im} G(i\omega) = 0$ находим, что

$$\omega_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{T_{\text{у}} + T_{\text{д}} + T_{\text{г}}}{T_{\text{у}} T_{\text{д}} T_{\text{г}}}},$$

а из условия $\operatorname{Re} G(i\omega)=0$ — что

$$K_{кр}=\omega_{кр}^2\,(T_у T_д+T_у T_г+T_д T_г)-1=$$

$$=2+\frac{T_д}{T_г}+\frac{T_у}{T_г}+\frac{T_д}{T_у}+\frac{T_г}{T_у}+\frac{T_г}{T_д}+\frac{T_у}{T_д}.$$

При значениях $T_у=0{,}003$ с, $T_д=0{,}002$ с, $T_г=0{,}001$ с получим $K_{кр}=10$. Следовательно, такая система АПЧ при $K<10$ устойчива, а при $K>10$ — неустойчива.

4. Линейные одноконтурные системы автоматического регулирования. Вывод, аналогичный предыдущему, верен и для любой одноконтурной системы автоматического регулирования (САР), содержащей произвольное число звеньев (рис. 5.4). Пусть характеристическое уравнение одноконтурной системы имеет вид

$$\prod_{j=1}^{m}(T_j\lambda+1)\prod_{j=1}^{n}(a_j\lambda^2+b_j\lambda+1)+K=0. \qquad (5.13)$$

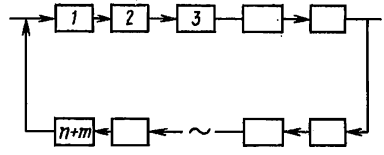


Рис. 5.4. Произвольная одноконтурная система автоматического регулирования

Первые m сомножителей в (5.13) соответствуют апериодическим звеньям, вторые n — колебательным.

Теорема 5.4. *Для любой одноконтурной САР с характеристической функцией* (5.13) *существует критическое значение коэффициента усиления* $K_{кр}$ *такое, что при* $K<K_{кр}$ *система устойчива, а при* $K>K_{кр}$ *она неустойчива**.

5. Робастная устойчивость**. Приведенные в теоремах этого параграфа условия устойчивости получены в предположении, что все коэффициенты системы $\dot{x}=Bx$, т. е. все элементы постоянной матрицы B, априори известны точно. Однако указанное предположение не всегда выполняется. В реальной ситуации зачастую бывает известна лишь некоторая область U, которой принадлежит матрица B. Ясно, что если устойчивость имеет место при любой матрице B из области U, то реальная система также будет устойчива. Оказывается, что в некоторых ситуациях об устойчивости всех систем при произвольных матрицах $B\in U$ можно судить по их отдельным представителям.

---

*Доказательство этой теоремы см. в кн.: Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. — М.: Наука, 1978.

**Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1978. Т. 14, № 11.

Приведем соответствующие утверждения.

Пусть $P_n(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы B, а W — множество всех таких многочленов, соответствующих всем матрицам $B \in U$. Произвольный многочлен $P_n(\lambda) \in W$ запишем в виде

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_n. \tag{5.14}$$

Предположим, что известны границы изменения коэффициентов b_i $i=1, \ldots, n$, когда многочлен $P_n(\lambda)$ пробегает множество W. Иначе говоря, предположим, что известны числа α_i, β_i $(i=1, n)$ такие, что

$$\alpha_i = \min_{P_n \in W} b_i, \quad \beta_i = \max_{P_n \in W} b_i, \quad b_i \in [\alpha_i, \beta_i], \quad 0 < \alpha_i \leqslant \beta_i, \quad i=1, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Оказывается, что для проверки устойчивости всего бесконечного множества многочленов W достаточно убедиться в устойчивости только четырех многочленов: $f_n^1(\lambda), f_n^2(\lambda), f_n^3(\lambda), f_n^4(\lambda)$.

Коэффициенты a_i^1 многочлена $f_n^1(\lambda)$ таковы:

$$a_{n-2j}^1 = \begin{cases} \beta_{n-2j}, & \text{если } j \text{ четно;} \\ \alpha_{n-2j}, & \text{если } j \text{ нечетно;} \end{cases} \qquad a_{n-2j-1}^1 = \begin{cases} \beta_{n-2j-1} & \text{если } j \text{ четно;} \\ \alpha_{n-2j-1}, & \text{если } j \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Коэффициенты a_i^2 многочлена $f_n^2(\lambda)$ имеют вид

$$a_{n-2j}^2 = \begin{cases} \alpha_{n-2j}, & \text{если } j \text{ четно;} \\ \beta_{n-2j}, & \text{если } j \text{ нечетно;} \end{cases} \qquad a_{n-2j-1}^2 = \begin{cases} \alpha_{n-2j-1}, & \text{если } j \text{ четно;} \\ \beta_{n-2j-1}, & \text{если } j \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Коэффициенты a_i^3 многочлена $f_n^3(\lambda)$ имеют вид

$$a_{n-2j}^3 = \begin{cases} \alpha_{n-2j}, & \text{если } j \text{ четно;} \\ \beta_{n-2j}, & \text{если } j \text{ нечетно;} \end{cases} \qquad a_{n-2j-1}^3 = \begin{cases} \beta_{n-2j-1}, & \text{если } j \text{ четно;} \\ \alpha_{n-2j-1}, & \text{если } j \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Коэффициенты a_i^4 многочлена $f_n^4(\lambda)$ таковы:

$$a_{n-2j}^{4/} = \begin{cases} \beta_{n-2j}, & \text{если } j \text{ четно;} \\ \alpha_{n-2j}, & \text{если } j \text{ нечетно;} \end{cases} \qquad a_{n-2j-1}^4 = \begin{cases} \alpha_{n-2j-1}, & \text{если } j \text{ четно;} \\ \beta_{n-2j-1}, & \text{если } j \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Теорема 5.5 (В. Л. Харитонов). *Для того чтобы любой многочлен $P_n(\lambda)$ вида* (5.14) *с коэффициентами, удовлетворяющими условиям* (5.15), *был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все четыре многочлена $f_n^1(\lambda), f_n^2(\lambda), f_n^3(\lambda)$ и $f_n^4(\lambda)$ были устойчивыми.*

Пример 5.1. Установим необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости множества скалярных систем третьего порядка

$$\dddot{x}(t)+b_1\ddot{x}(t)+b_2\dot{x}(t)+b_3=0 \tag{5.16}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям

$$\alpha_i\leqslant b_i\leqslant\beta_i,\ i=1,\ 2,\ 3. \tag{5.17}$$

Характеристический многочлен уравнения (5.16) имеет вид

$$\lambda^3+b_1\lambda^2+b_2\lambda+b_3=0.$$

Построим многочлены $f_3^1(\lambda), f_3^2(\lambda), f_3^3(\lambda), f_3^4(\lambda)$:

$$f_3^1(\lambda)=\lambda^3+\alpha_1\lambda^2+\beta_2\lambda+\beta_3;\ f_3^2(\lambda)=\lambda^3+\beta_1\lambda^2+\alpha_2\lambda+\alpha_3;$$
$$f_3^3(\lambda)=\lambda^3+\beta_1\lambda^2+\beta_2\lambda+\alpha_3;\ f_3^4(\lambda)=\lambda^3+\alpha_1\lambda^2+\alpha_2\lambda+\beta_3. \tag{5.18}$$

Учитывая результат примера на с.33, запишем условия устойчивости многочленов (5.18). Они имеют вид

$$0<\beta_3<\alpha_1\beta_2,\ 0<\alpha_3<\beta_1\alpha_2,\ 0<\alpha_3<\beta_1\beta_2,\ 0<\beta_3<\alpha_1\alpha_2. \tag{5.19}$$

Поскольку $\alpha_3<\beta_3$ и $\alpha_1\alpha_2$ меньше любого из произведений $\alpha_1\beta_2$, $\beta_1\alpha_2$ и $\beta_1\beta_2$, все условия (5.19) будут выполняться одновременно, если окажется выполненным лишь одно неравенство

$$0<\beta_3<\alpha_1\alpha_2. \tag{5.20}$$

Таким образом, все уравнения из множества (5.16) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (5.17), устойчивы, если выполнены неравенства (5.20). Эти неравенства представляются весьма естественными. Если же они нарушаются, то, взяв уравнение (5.16), у которого $b_1=\alpha_1$, $b_2=\alpha_2$, $b_3=\beta_3$, получим неустойчивое уравнение.

§ 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. О методе замороженных коэффициентов. Для уравнения

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t) \tag{6.1}$$

определение условий устойчивости является трудной, до сих пор не решенной до конца задачей. Часто в технических приложениях используют так называемый *метод «замороженных» коэффициентов*. Этот метод заключается в следующем. При каждом $t(t_0\leqslant t<\infty)$ найдем все собственные значения $\lambda_i(t)$ матрицы $A(t)$. Если они удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\leqslant-\sigma<0$ $(1\leqslant i\leqslant n,$ $t_0\leqslant t<\infty)$, то считают, что система (6.1) асимптотически устойчива. Если же для некоторого s выполняется условие $\operatorname{Re}\lambda_s(t)\geqslant\sigma>0$, то система (6.1) неустойчива. Эти утверждения без дополнительных предположений неверны, что иллюстрируют следующие примеры.

Пример 6.1. Система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=(-1-9\cos^2 6t+6\sin 12t)\,x_1+(12\cos^2 6t+4{,}5\sin 12t)\,x_2,\\ \dot{x}_2(t)&=(-12\sin^2 6t+4{,}5\sin 12t)\,x_1-(1+9\sin^2 6t+6\sin 12t)\,x_2\end{aligned}\tag{6.2}$$

имеет решение

$$\begin{aligned}x_1(t)&=Ce^{2t}(\cos 6t+2\sin 6t),\\ x_2(t)&=Ce^{2t}(2\cos 6t-\sin 6t)\end{aligned}$$

и поэтому является неустойчивой. Однако собственными значениями матрицы $A(t)$ служат $\lambda_1(t)=-1$ и $\lambda_2(t)=-10$.

Пример 6.2. Для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=(-5{,}5+7{,}5\sin 12t)\,x_1+(7{,}5\cos 12t)\,x_2,\\ \dot{x}_2(t)&=(7{,}5\cos 12t)\,x_1+(-5{,}5-7{,}5\sin 12t)\,x_2\end{aligned}\tag{6.3}$$

собственные значения матрицы $A(t)$ таковы: $\lambda_1(t)\equiv 2$, $\lambda_2(t)=-13$. Вместе с тем фундаментальная матрица $X(t)$ решений системы (6.3) имеет элементы вида

$$\begin{aligned}x_{11}(t)&=0{,}5e^{-t}(\cos 6t+3\sin 6t)+0{,}5e^{-10t}(\cos 6t-3\sin 6t),\\ x_{12}(t)&=\frac{1}{6}e^{-t}(\cos 6t+3\sin 6t)-\frac{1}{6}e^{-10t}(\cos 6t-3\sin 6t),\\ x_{21}(t)&=\frac{1}{2}e^{-t}(3\cos 6t-\sin 6t)-\frac{1}{2}e^{-10t}(3\cos 6t+\sin 6t),\\ x_{22}(t)&=\frac{1}{6}e^{-t}(3\cos 6t-\sin 6t)+\frac{1}{6}e^{-10t}(3\cos 6t+\sin 6t).\end{aligned}\tag{6.4}$$

В силу этого тривиальное решение системы (6.3) асимптотически устойчиво.

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть* $\mu_j(t)\leqslant-\sigma<0$ $(j=1, \ldots, n;\ t_0\leqslant t<\infty)$, *где* $\mu_j(t)$ — *собственные значения матрицы* $A^H(t)=\frac{1}{2}[A(t)+A'(t)]$. *Тогда система* (6.1) *асимптотически устойчива.*

□ Доказательство вытекает из неравенства

$$|x(t_0)|\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mu_{\min}(s)\,ds\right)\leqslant|x(t)|\leqslant|x(t_0)|\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mu_{\max}(s)\,ds\right),\tag{6.5}$$

называемого *неравенством Важевского*. В самом деле,

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^2=\frac{d}{dt}(x'x)=\dot{x}'x+x'\dot{x}=2x'A^H(t)x.$$

Значит,

$$2\mu_{\min}(t)|x(t)|^2 \leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x(t)|^2 \leqslant 2\mu_{\max}(t)|x(t)|^2.$$

Интегрируя это неравенство, получим неравенство (6.5) и утверждение теоремы 6.1. ■

2. Системы с почти постоянной матрицей. Приведем сначала важную для многих приложений лемму.

Лемма 6.1 (лемма Гронуолла — Беллмана). *Пусть скалярные непрерывные функции $x(t)$ и $g(t) \geqslant 0$ удовлетворяют неравенству*

$$x(t) \leqslant \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} g(s)\,x(s)\,\mathrm{d}s,\ t \geqslant t_0, \tag{6.6}$$

где $\alpha(t)$ — некоторая неубывающая интегрируемая функция. Тогда

$$x(t) \leqslant \alpha(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\right]. \tag{6.7}$$

□ Положим $u(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,x(s)\,\mathrm{d}s$. Из неравенства (6.6) следует, что

$$\dot{u}(t) = g(t)\,x(t) \leqslant g(t)\,[\alpha(t) + u(t)]. \tag{6.8}$$

Умножая обе части неравенства (6.8) на $\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\right)$, получим

$$[\dot{u}(t) - g(t)\,u(t)]\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqslant g(t)\,\alpha(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

или

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[u(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\right)\right] \leqslant g(t)\,\alpha(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Отсюда, интегрируя, имеем

$$u(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} g(s)\,\alpha(s)\exp\left(\int_{t_0}^{t} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s;\ t \geqslant t_0.$$

Подставляя эту оценку в (6.6) и учитывая, что функция $\alpha(t)$ является неубывающей, получим

$$x(t) \leqslant \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} g(s)\,\alpha(s) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \alpha(t)\left[1 + \int_{t_0}^{t} g(s) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\right] = \alpha(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right). \blacksquare$$

Рассмотрим систему с почти постоянной матрицей

$$\dot{x} = [A + B(t)]\,x,\ x \in R_n,\ t_0 \geqslant 0. \tag{6.9}$$

Предположим, что элементы матрицы $B(t)$ непрерывны и

$$\int_0^{\infty} \|B(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |B_{ij}(t)|\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{6.10}$$

В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.2 (Р. Беллман). *Пусть решение $y = 0$ системы $\dot{y} = Ay$ устойчиво и выполнено условие* (6.10). *Тогда решение $x = 0$ системы* (6.9) *также устойчиво.*

□ Фундаментальная матрица $Y(t)$ системы $\dot{y} = Ay$ ограничена, т. е. $\|Y(t)\| \leqslant M$. Рассматривая член $B(t)x$ в (6.9) как правую часть и применяя формулу Коши, получим

$$x(t) = Y(t)\,x(0) + \int_0^{t} Y(t-s)\,B(s)\,x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Отсюда

$$|x(t)| \leqslant M\,|x(0)| + \int_0^{t} M\,\|B(s)\|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s. \tag{6.11}$$

Согласно лемме 6.1 из (6.11) получаем

$$|x(t)| \leqslant M\,|x(0)| \exp\left[M \int_0^{\infty} \|B(s)\|\,\mathrm{d}s\right] \leqslant C\,|x(0)|,\ |x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Таким образом, решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво. Аналогично устанавливается, что асимптотическая устойчивость $y=0$ влечет асимптотическую устойчивость $x=0$. ■

В том случае, когда матрица $A(t)$ переменная, утверждение теоремы 6.2, вообще говоря, неверно.

3. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t)=A(t)x,\ A(t+\omega)=A(t)\in C^0,\ x\in R_n. \tag{6.12}$$

Обозначим через $X(t)$ фундаментальную матрицу решений уравнения (6.12), т. е. такую матрицу, что

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t),\ X(0)=I. \tag{6.13}$$

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 6.3 (А. Флоке). *Фундаментальная матрица* (6.13) *может быть представлена в виде*

$$X(t)=\Phi(t)e^{Lt},\ \Phi(t+\omega)=\Phi(t)\in C^1,\ L=\text{const}. \tag{6.14}$$

Матрица $X(\omega)$ называется *матрицей монодромии*. Она определяет *оператор сдвига* вдоль решений уравнения (6.12) на период по формуле $x(\omega)=X(\omega)x(0)$. Собственные значения ρ_j матрицы монодромии $X(\omega)$ называются *мультипликаторами Флоке системы* (6.12), т. е.

$$\det[X(\omega)-\rho_j I]=0. \tag{6.15}$$

Из уравнения (6.15), формулы Виета и теоремы Остроградского — Лиувилля следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_j=\operatorname{Tr}X(\omega)=\sum_{i=1}^{n}x_{ii}(\omega),$$

$$\prod_{j=1}^{n}\rho_j=\det X(\omega)=\exp\left(\int_0^{\omega}\operatorname{Tr}A(t)\,dt\right). \tag{6.16}$$

Далее, для любого мультипликатора Флоке ρ_j существует решение $\xi_j(t)\neq 0$ уравнения (6.12) такое, что $\xi_j(t+\omega)=\rho_j\xi(t)$. Это решение можно построить следующим образом. Пусть ξ_j^0 — собственный вектор матрицы $X(\omega)$, соответствующий ρ_j, т. е. $X(\omega)\xi_j^0=\rho_j\xi_j^0$. Тогда искомое решение имеет вид

$$\xi_j(t)=X(t)\xi_j^0,\ \xi_j(t)=p(t)e^{\lambda_j t},\ \lambda_j=\frac{1}{\omega}\ln\rho_j, \tag{6.17}$$

$$p(t+\omega)=p(t).$$

Если ρ_j — кратное собственное значение матрицы $X(\omega)$ с жордановой клеткой размерности m, то ему соответствует m решений Флоке вида

$$\xi_{j1}(t)=p_{j1}(t)\,e^{\lambda_j t},\ \xi_{j2}(t)=[tp_{j1}(t)+p_{j2}(t)]\,e^{\lambda_j t},$$
$$\xi_{jm}(t)=\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}p_{j1}(t)+\ldots+p_{j1}(t)\right]e^{\lambda_j t}, \tag{6.18}$$
$$p_{jk}(t+\omega)=p_{jk}(t),\ \lambda_j=\frac{1}{\omega}\ln\rho_j.$$

Раскладывая начальное значение $x(0)$ по базису, состоящему из собственных и присоединенных векторов матрицы $X(\omega)$, можно получить представление общего решения уравнения (6.12) в виде линейной комбинации решений (6.17), (6.18). Нетрудно проверить также, что $\operatorname{Re}\lambda_j=\frac{1}{\omega}\operatorname{Re}\ln\rho_j<0$, если $|\rho_j|<1$, и $\operatorname{Re}\lambda_j>0$, если $|\rho_j|>1$. Из этого и соотношений (6.17), (6.18) вытекает следующая теорема.

Теорема 6.4. *Уравнение* (6.12) *асимптотически устойчиво, если все его мультипликаторы Флоке ρ_j лежат внутри единичного круга $|\rho_j|<1$. Если же $|\rho_j|\leqslant 1$, причем мультипликаторы ρ_l, лежащие на единичной окружности $|\rho_l|=1$, имеют простые элементарные делители, то уравнение* (6.12) *устойчиво. В остальных случаях уравнение* (6.12) *неустойчиво.*

4. Уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами. В случае уравнения второго порядка удается значительно подробнее исследовать устойчивость его решений. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}(t)+p(t)x(t)=0,\ p(t+\omega)=p(t). \tag{6.19}$$

С помощью подстановки $z(t)=x(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t a(s)\,ds\right)$ к этому уравнению сводится и более общее уравнение $\ddot{z}+a(t)\dot{z}+b(t)z=0$.

Запишем уравнение (6.19) в виде системы (6.12):

$$\dot{x}=y,$$
$$\dot{y}=-p(t)x,\ A(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -p(t) & 0\end{bmatrix},\ \operatorname{Tr}A(t)=0. \tag{6.20}$$

Фундаментальная матрица $X(t)$ такова:

$$X(t)=\begin{vmatrix}\varphi(t) & \psi(t)\\ \dot{\varphi}(t) & \dot{\psi}(t)\end{vmatrix},\ \varphi(0)=1,\ \dot{\varphi}(0)=0,\ \psi(0)=0,\ \dot{\psi}(0)=1.$$

Уравнение (6.15) в данном случае имеет вид

$$\rho^2 - a\rho + \det X(\omega) = 0. \tag{6.21}$$

В силу (6.16), (6.20), (6.21) получаем

$$\det X(\omega) = 1, \quad a = \varphi(\omega) + \dot{\psi}(\omega), \quad \rho_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4}).$$

Величина $a = \varphi(\omega) + \dot{\psi}(\omega)$ называется *константой Ляпунова* и определяет устойчивость уравнения (6.19). Возможны три случая:

а) $|a| > 2$; в этом случае оба мультипликатора ρ_1 и ρ_2 вещественны, причем $|\rho_1| > 1$, а $|\rho_2| < 1$; в силу теоремы 6.4 *уравнение* (6.19) *неустойчиво*;

б) $|a| < 2$; в этом случае мультипликаторы представляют собой различные комплексно-сопряженные числа и $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$; *уравнение* (6.19) *устойчиво*;

в) $|a| = 2$ — двойной корень $\rho_1 = \rho_2$; это *критический случай*, который требует более точного рассмотрения.

Таким образом, если

$$|\varphi(\omega) + \dot{\psi}(\omega)| < 2, \tag{6.22}$$

то уравнение (6.19) устойчиво. Соотношение (6.22) позволяет для каждого конкретного уравнения с помощью численного решения двух задач Коши найти $\varphi(\omega)$ и $\dot{\psi}(\omega)$ и тем самым определить, является ли уравнение (6.19) устойчивым.

Одно из часто встречающихся в приложениях уравнений — *уравнение Матье*

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \varepsilon \cos t)\, x = 0. \tag{6.23}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (6.23) имеет вид $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ и его решения выражаются формулами $\varphi(t) = \cos \omega t$, $\psi(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$. Следовательно, $a = 2 \cos 2\pi\omega$. Ясно, что $|a| < 2$ при $\omega \neq 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ \ldots$. Точки $\omega = 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,$ можно рассматривать как границы областей устойчивости. При $\varepsilon \neq 0$ области устойчивости в пространстве параметров (ω, ε) находятся численно. Они изображены на рис. 6.1.

На рис. 6.1 при значениях параметров в заштрихованных областях соответствующее уравнение неустойчиво, в незаштрихованных — устойчиво. Для уравнения Матье с трением

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (\omega^2 + \varepsilon \cos t)\, x = 0, \ \alpha > 0, \tag{6.24}$$

области устойчивости изображены на рис. 6.2.

Области неустойчивости шире всего вблизи точки $\omega = 1/2$. Наличие такой области неустойчивости может объяснить эффект раскачивания качелей. Качели описываются уравнением (6.24). При периодических приседаниях, т. е. при периодическом изменении

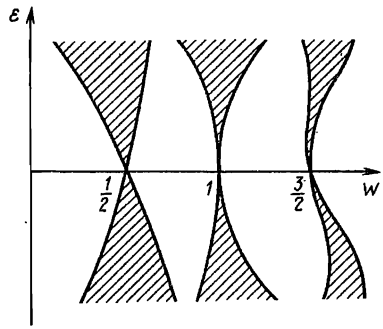


Рис. 6.1. Области неустойчивости для уравнения Матье

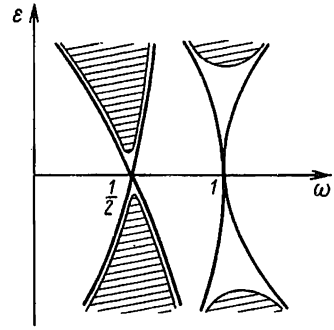


Рис. 6.2. Области неустойчивости для уравнения Матье с трением

момента инерции; качели становятся неустойчивыми и амплитуда их колебаний начинает расти. Это явление называется *параметрическим резонансом*. При этом параметрический резонанс вызвать проще всего, если частота приседаний равна 1/2, т. е. если на каждый период качелей делается два приседания.

5. Параметрический резонанс в технике. Явление параметрического резонанса довольно часто встречается в практике. Иногда оно играет положительную роль, например в параметрических усилителях в радиотехнике. В других случаях параметрический резонанс может привести к катастрофам, среди которых наиболее известны падения висячих мостов. Уже давно было замечено, что висячие мосты, несмотря на неоспоримые технические, эстетические и экономические преимущества, являются весьма неустойчивыми к возмущениям. Чтобы не вызывать резонансов, в устав пехоты Наполеоном был введен параграф, запрещавший ходить в ногу по мостам. Резонансы, вызываемые ветром, привели к падению мостов через Ниагару в 1864 и 1889 гг. (в первом случае мост имел длину 320 м, а во втором — 386 м). Летом 1940 г. было закончено строительство моста через реку Такома на крайнем Западе США (рис. 6.3). Мост имел пролет длиной 854 м и шириной 11,9 м, поддерживаемый двумя стальными канатами диаметром 44 см каждый со стрелой провеса 70,7 м. Сразу же была обнаружена большая чувствительность моста к ветру. Были предприняты попытки устранить такие колебания введением дополнительных связей. Однако 7 ноября 1940 г. около 10 часов утра, когда скорость ветра возросла до 18,7 м/с, начались сильные изгибно-крутильные колебания проле-

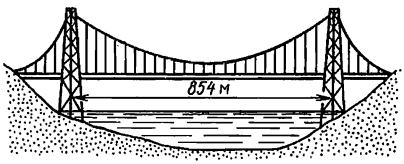


Рис. 6.3. Такомский мост

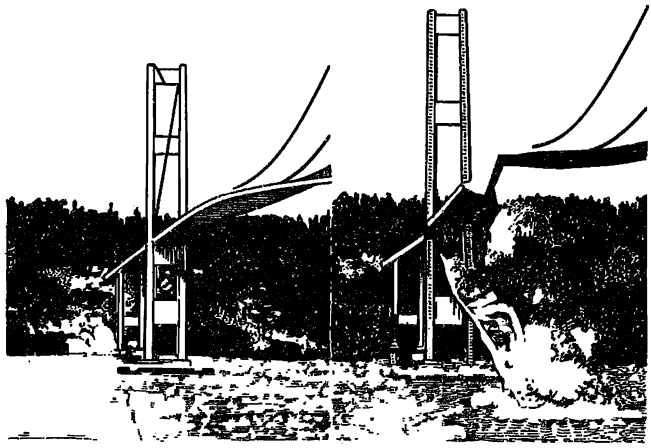


Рис. 6.4. Такомский мост в момент разрушения

та моста, причем проезжая часть моста наклонялась под углом 45°. Мост выдерживал эти колебания около часа, после чего развалился и упал в воду (рис. 6.4). Интересно, что мост был рассчитан на статическую ветровую нагрузку в 50 м/с, а при динамической колебательной нагрузке он упал при значительно меньшей скорости ветра. Более подробно об устойчивости уравнения с периодическими коэффициентами и о параметрическом резонансе см. [19; 23].

§ 7. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

1. Матричное уравнение Ляпунова. Для линейной стационарной системы

$$\dot{x}=Ax,\ x\in R_n \tag{7.1}$$

будем искать функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V(x)=x'Bx,\ B'=B. \tag{7.2}$$

Потребуем, чтобы производная $\dot{V}$ в силу системы (7.1) была равна произвольной заданной квадратичной форме $x'Cx$, т. е.

$$\dot{V}(x)=x'Cx,\ C'=C. \tag{7.3}$$

Подставляя в (7.3) выражение (7.2), получим

$$\dot{V}(x)=\dot{x}'Bx+x'B\dot{x}=x'(A'B+BA)x=x'Cx. \tag{7.4}$$

Тождество (7.4) при всех x возможно тогда и только тогда, когда

$$A'B+BA=C. \tag{7.5}$$

Матричное уравнение (7.5) называют *уравнением Ляпунова*. Здесь C — заданная симметрическая матрица, а B — искомая симметрическая матрица.

Обозначим через $\lambda_i(A)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ собственные значения матрицы A.

Теорема 7.1. *Пусть*

$$\lambda_i(A)+\lambda_k(A) \neq 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n). \tag{7.6}$$

Тогда уравнение Ляпунова (7.5) *однозначно разрешимо для любой симметричной матрицы* C.

□ В пространстве R_N, где $N=n(n+1)/2$, симметричных $(n \times n)$-матриц введем линейный оператор F по формуле $F(B)=A'B+BA$, $B \in R_N$. Для существования ограниченного обратного оператора F^{-1} (или, что то же самое, для однозначной разрешимости уравнения (7.5)) необходимо и достаточно, чтобы оператор F не имел нулевых собственных значений. Иначе говоря, если $F(B)=\mu B$ $(B \neq 0)$, то должно быть $\mu \neq 0$. Пусть все $\lambda_i(A)$ различны и все суммы $\lambda_i+\lambda_k$ также различны. Обозначим через x^i собственные вектор-столбцы матрицы A', т. е. $A'x^i=\lambda^i x^i$. Отметим, что собственные значения матриц A и A' совпадают, но собственные векторы у этих матриц, вообще говоря, различны. Определим матрицу $B^{ik} \in R_N$ формулой

$$B^{ik}=x^i(x^k)'+x^k(x^i)'.$$

Тогда

$$F(B^{ik})=A'[x^i(x^k)'+x^k(x^i)']+[x^i(x^k)'+x^k(x^i)']A=$$
$$=[\lambda_i x^i(x^k)'+\lambda_k x^k(x^i)'+\lambda_k x^i(x^k)'+\lambda_i x^k(x^i)']=$$
$$=(\lambda_i+\lambda_k)[x^i(x^k)'+x^k(x^i)]=(\lambda_i+\lambda_k)B^{ik}.$$

Значит, B^{ik} — собственная матрица оператора F, соответствующая собственному значению $\mu_{ik}=\lambda_i+\lambda_k$. Поэтому при выполнении сделанных предложений и условия (7.6) оператор F имеет ровно $n(n+1)/2$ собственных значений μ_{ik}, ни одно из которых не равно нулю. Других собственных значений F иметь не может. Итак, в рассматриваемом случае теорема доказана. Доказательство для случая кратных корней см. [1]. ■

Ниже символ $C>0$ $(C<0)$ означает, что симметрическая матрица C положительно определена (отрицательно определена).

Теорема 7.2 (А. М. Ляпунов). *Пусть*

$$\operatorname{Re}\lambda_j(A)<0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{7.7}$$

Тогда для любой матрицы $C<0$ *существует единственное решение* $B>0$ *уравнения Ляпунова* (7.5). *Кроме того, справедлива формула*

$$B = -\int_0^\infty e^{A't} C e^{At}\, dt. \tag{7.8}$$

Обратно: если хотя бы для одной матрицы $C<0$ существует решение $B>0$ уравнения (7.5), *то матрица A устойчива* (т. е. *выполняется условие* (7.7)).

□ Из условия (7.7) вытекает (7.6). Следовательно, уравнение Ляпунова (7.5) разрешимо для любой матрицы $C<0$. Покажем, что при этом матрица $B>0$. Введем форму $V(x)=x'Bx$; предположим, что она неположительно определена. Тогда найдется точка $x_0 \neq 0$ такая, что либо $V(x_0)<0$, либо $V(x_0)=0$. В первом случае $V(kx_0)=k^2V(x_0)<0$ для всех $k>0$. Значит, в любой окрестности начала координат найдутся точки вида kx_0, в которых $V(kx_0)<0$ и $\dot{V}=k^2x_0'Cx_0<0$. Таким образом, в этом случае на основании теоремы 2.5 (в которой V заменено на $-V$) тривиальное решение (7.1) было бы неустойчиво, что противоречит условию (7.7).

В том случае, когда $V(x_0)=0$ $(x_0 \neq 0)$, имеем $\dot{V}(x_0)<0$ и обязательно найдется точка $x_1 \neq 0$ такая, что $V(x_1)<0$, т. е. приходим к предыдущему случаю. Это также невозможно.

Для доказательства справедливости формулы (7.8) заметим, что

$$V(x(t))-V(x_0)=x'(t)Bx(t)-x_0'Bx_0=$$

$$=\int_0^t \dot{V}(x(s))\,ds=\int_0^t x'(s)Cx(s)\,ds=x_0'\left[\int_0^t e^{A's}Ce^{As}\,ds\right]x_0. \tag{7.9}$$

Переходя в равенстве (7.9) к пределу при $t\to\infty$ и учитывая, что $x(t)\to 0$, $t\to\infty$, из (7.9) получаем тождество

$$x_0'Bx_0=-x_0'\left[\int_0^\infty e^{A's}Ce^{As}\,ds\right]x_0,$$

из которого сразу следует (7.8).

Если же для некоторой матрицы $C<0$ существует решение $B>0$ уравнения (7.5), то функция $V(x)=x'Bx$ удовлетворяет теореме 2.3 об асимптотической устойчивости. Отсюда вытекает, что матрица A удовлетворяет условию (7.7). ■

Из теоремы 7.2 вытекает способ вычисления интегралов вида

$$\int_0^\infty x'(t)Dx(t)\,dt,\ D>0. \tag{7.10}$$

Интеграл (7.10) характеризует среднеквадратическое отклонение решения $x(t)$ системы (7.1) от ее положения равновесия и является интегральной оценкой качества переходных процессов в системе (7.1). Предположим, что матрица A устойчива, и обозначим через $P>0$ единственное решение уравнения $A'P+PA=-D$. Записав соотношение (7.9) для матриц D и P, получим

$$\int_0^\infty x'(t)\,Dx(t)\,dt=V(x_0)=x_0'\,Px_0. \tag{7.11}$$

Следующее утверждение приведем без доказательства.

Теорема 7.3 (А. М. Ляпунов). *Если хотя бы для одного* $j\,(1\leqslant j\leqslant n)$ *выполнено неравенство* $\operatorname{Re}\lambda_j(A)>0$, *то для любой матрицы* $C>0$ *найдутся матрица* B *и число* $\alpha>0$ *такие, что* $A'B+BA=C+\alpha B$. *При этом матрица* B *не является отрицательно определенной.*

Следствия из теорем 7.2 и 7.3.

1^0. *Если тривиальное решение уравнения* (7.1) *асимптотически устойчиво, то существует функция Ляпунова* $V(x)=x'Bx$, *удовлетворяющая теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.*

2^0. *Если тривиальное решение уравнения* (7.1) *неустойчиво, то существует функция Ляпунова* $V(x)=x'Bx$, *удовлетворяющая теореме Четаева о неустойчивости.*

Конкретные численные алгоритмы решения матричного уравнения Ляпунова будут рассмотрены в гл. XIV.

2. Устойчивость по первому приближению. В приложениях устойчивость решений часто исследуется по так называемым «уравнениям первого приближения». Пусть требуется исследовать на устойчивость решение $x(t)\equiv 0$ системы

$$\dot{x}(t)=f(t,\,x), \tag{7.12}$$

где $f(t,\,x)$ — некоторая дифференцируемая функция. Линеаризуем уравнение (7.12) в окрестности решения $x(t)\equiv 0$. Для этого запишем (7.12) в виде

$$\dot{x}(t)=A(t)x+R(t,\,x),\ |R(t,\,x)|\leqslant C_1|x|^{1+\alpha},\ \alpha>0,\ C_1>0. \tag{7.13}$$

Наряду с (7.13) рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}(t)=A(t)x,\ A(t)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{7.14}$$

Система (7.14) называется *уравнением первого приближения* для (7.13). Далее изучают устойчивость уравнения (7.14) и по ней судят

об устойчивости нелинейной системы (7.13). Такой прием без должного обоснования применялся задолго до Ляпунова. Ляпунов первым установил, когда это является правомерным, а когда нет.

Предположим, что уравнение первого приближения (7.14) является *стационарным*, т. е. совпадает с (7.1): $A(t) \equiv A$, $\dot{x}(t) = Ax$.

Теорема 7.4 (А. М. Ляпунов). *Пусть тривиальное решение уравнения* (7.1) *асимптотически устойчиво. Тогда тривиальное решение нелинейного уравнения* (7.13) *также асимптотически устойчиво.*

□ Обозначим через B решение уравнения $A'B + BA = -I$, где I — единичная матрица. Введем функцию Ляпунова $V(x) = x'Bx$ и найдем ее производную $\dot{V}$ в силу системы (7.13). Имеем

$$\dot{V} = \dot{x}'Bx + x'B\dot{x} = (x'A' + R'(t, x))Bx + x'B(Ax + R(t, x)) =$$
$$= x'(A'B + BA)x + R'Bx + x'BR \leqslant -|x|^2 +$$
$$+ 2C_1 \|B\| \, |x|^{2+\alpha} \leqslant |x|^2 (-1 + 2C_1 \|B\| \, |x|^{\alpha}) \leqslant -\frac{1}{2} |x|^2$$

для столь малых x, что

$$2C_1 \|B\| \, |x|^{\alpha} < \frac{1}{2}. \tag{7.15}$$

Таким образом, функция $V(x) = x'Bx$ удовлетворяет теореме 2.3 об асимптотической устойчивости и, значит, тривиальное решение уравнения (7.13) асимптотически устойчиво. ■

Замечание. Отметим, что области притяжения уравнений (7.13) и (7.14) не совпадают. Если для (7.14) областью притяжения является все пространство R_n, то для (7.13) можно гарантировать, что $x(t, t_0, x_0) \to 0$ лишь для x_0, удовлетворяющих оценке (7.15).

Теорема 7.5 (А. М. Ляпунов). *Если тривиальное решение уравнения первого приближения* (7.1) *неустойчиво, то тривиальное решение нелинейного уравнения* (7.13) *также неустойчиво.*

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему, только функция Ляпунова строится с использованием теоремы 7.3 и далее применяется теорема Четаева о неустойчивости.

Случаи, рассмотренные в теоремах 7.4 и 7.5, называют *некритическими*. В некритических случаях матрица A не имеет собственных значений на мнимой оси. В этих случаях характер устойчивости полной нелинейной системы совпадает с характером устойчивости системы первого приближения независимо от вида нелинейных членов.

Случаи, когда матрица A имеет собственные значения $\lambda_j(A)$ на мнимой оси, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_j(A) = 0$, называются *критическими*. В критических случаях устойчивость или неустойчивость зависит от вида нелинейных членов. Исследование критических случаев весьма сложно, но является важным для многих приложений. Например,

устойчивость Солнечной системы сводится к исследованию сложного критического случая. В настоящее время хорошо изучены случаи одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней. Ряд результатов получен для случаев одного нулевого и двух чисто мнимых корней, а также двух пар чисто мнимых корней. Более подробно о критических случаях см. [11].

3. Вращательное движение снаряда. Такое движение описывается уравнениями (3.1). Полагая в этих уравнениях $\sin\alpha\approx\alpha$, $\cos\alpha\approx 1$, $\sin\beta\approx\beta$, $\cos\beta\approx 1$ и отбрасывая члены выше первого порядка, получим уравнения первого приближения для (3.1) в виде

$$\begin{aligned} A\ddot{\beta}-Cn\dot{\alpha}&=eR\beta,\\ A\ddot{\alpha}+Cn\dot{\beta}&=eR\alpha. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Характеристическое уравнение линейной системы (7.16) имеет вид

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2-eR, & -Cn\lambda\\ Cn\lambda, & A\lambda^2-eR \end{vmatrix}=0, \tag{7.17}$$

$$(A\lambda^2-eR)^2+C^2n^2\lambda^2=0.$$

Корни уравнения (7.17) таковы:

$$\lambda_{1,\,2,\,3,\,4}=(2A)^{-1}\,[\pm Cni\pm\sqrt{4AeR-C^2n^2}]. \tag{7.18}$$

Если $4AeR-C^2n^2>0$ (т. е. нарушается условие Маиевского — Крылова (3.4)), то два корня (7.18) имеют положительную вещественную часть и решение линейной системы (7.16) неустойчиво. При этом в силу теоремы (7.5) решение нелинейной системы (3.1) также неустойчиво.

Если же $4AeR-C^2n^2<0$, то уравнение (7.17) имеет две пары чисто мнимых корней. В этом критическом случае уравнения первого приближения (7.16) не позволяют судить об устойчивости полной системы (3.1). Это еще раз показывает силу результата Н. Г. Четаева, подробно изложенного в § 3.

Хотя метод линеаризации является основным методом решения различных инженерных задач, необходимо учитывать, что только в некритических случаях он приводит к правильным выводам*.

*Необоснованное применение метода линеаризации может привести к качественно неверным результатам. В этой связи уместно привести высказывание американского специалиста по космической технике, сотрудника Лаборатории реактивного движения, проректора Колумбийского университета, профессора П.Ликинза из его статьи, цитированной на с. 24: «Я думаю, будет справедливым заметить, что в начале 60-х гг. очень немногие, даже из тех, кто писал докторские диссертации по техническим дисциплинам, связанным с механикой, понимали ограничения, накладываемые методами линеаризации при анализе устойчивости движения. С фундаментальными работами Ляпунова по теории устойчивости были знакомы в Америке лишь некоторые математики. В этом отношении ученые из СССР, по всей вероятности, были подготовлены лучше.»

4. Нестационарные уравнения первого приближения. В случае нестационарных уравнений первого приближения (7.14) теоремы 7.4 и 7.5, вообще говоря, не верны.

Пример 7.1. Решение уравнения $\dot{x}(t)=-xt^{-1}$, $t\geqslant 2$ имеет вид

$$x(t,\ t_0,\ x_0)=x_0t_0t^{-1},\quad t_0\geqslant 2. \tag{7.19}$$

Ясно, что тривиальное решение (7.19) асимптотически устойчиво. С другой стороны, нелинейное уравнение

$$\dot{x}(t)=-xt^{-1}+b(t)x^2,$$
$$b(t)=\frac{1+\ln t}{t(\ln t)^2} \tag{7.20}$$

с ограниченным при $t\geqslant 2$ коэффициентом $b(t)$ имеет решение $x(t)=\ln t$. Тривиальное решение уравнения (7.20) неустойчиво.

Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 7.6. *Пусть тривиальное решение нестационарного уравнения первого приближения* (7.14) *экспоненциально устойчиво. Тогда тривиальное решение уравнения* (7.13) *асимптотически устойчиво.*

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЛЯПУНОВА

1. Однозвенный робот-манипулятор. Рассмотрим однозвенный манипулятор, состоящий из абсолютно твердого однородного прямолинейного стержня длиной L и массой M (рис. 8.1). Один конец стержня связан идеальным цилиндрическим шарниром O с неподвижным основанием, а на другом конце жестко закреплен перемещаемый груз массой m. К оси шарнира O приложен управляющий момент u. Движение манипулятора происходит в вертикальной плоскости в поле силы тяжести. Ось шарнира O перпендикулярна плоскости движения. Уравнения движения имеют вид

$$L^2m_1\ddot{\varphi}+\alpha\dot{\varphi}+gL\left(m+\frac{M}{2}\right)\sin\varphi=u, \tag{8.1}$$
$$\varphi(0)=\varphi_0,\ \dot{\varphi}(0)=\dot{\varphi}_0,\ m_1=m+\frac{M}{3}.$$

Здесь φ — угол между осью стержня и вертикальной прямой, проходящей через точку O. Через g обозначено ускорение свободного падения, а через $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ — коэффициент вязкого трения. Величина α обычно известна неточно: предполагается лишь, что известно α_0, а конкретное значение α неизвестно.

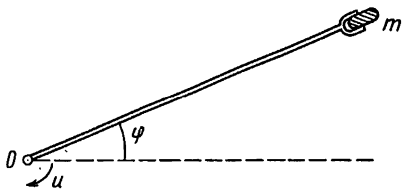


Рис. 8.1. Однозвенный манипулятор

Задача состоит в выборе такого управляющего момента u, при котором груз известной массы m перемещается из произвольного начального положения $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ в положение равновесия $(\varphi=0, \dot{\varphi}=0)$. Поскольку коэффициент трения α неизвестен, естественно априори не задавать и время достижения положения равновесия. Поэтому возможной формализацией поставленной задачи является выбор такого управления u, при котором

$$\lim \dot{\varphi}(t)=0, \ \lim \varphi(t)=0, \ t\to\infty. \tag{8.2}$$

Зададим управляющий момент в виде $u=-b\varphi(t)$, $b>0$, который просто реализуется с помощью стандартных П-регуляторов (пропорциональных регуляторов). Запишем уравнения движения (8.1) при этом управлении:

$$\begin{aligned}&\dot{\varphi}_1=\varphi_2, \ \dot{\varphi}_2=-a_1\varphi_2-a_2\sin\varphi_1-b\varphi_1,\\ &a_1=\alpha L^{-2}m_1^{-1}, \ a_2=gL^{-1}(m+M/2)m_1^{-1},\\ &b=b_1L^{-2}m_1^{-1}.\end{aligned} \tag{8.3}$$

В качестве функции Ляпунова V для системы (8.3) возьмем

$$V=2b\varphi_1^2+\varphi_2^2+(\varphi_2+a_1\varphi_1)^2.$$

Производная $\dot{V}$ функции V вдоль траекторий системы (8.3) удовлетворяет при любом $\delta>0$ соотношениям

$$\begin{aligned}\dot{V}=4b\varphi_1\varphi_2+2\varphi_2(-a_1\varphi_2-a_2\sin\varphi_1-b\varphi_1)+2(\varphi_2+a_1\varphi_1)(-b\varphi_1-\\ -a_2\sin\varphi_1)=2a_1\varphi_2^2-4a_2\varphi_2\sin\varphi_1-2a_1b\varphi_1^2-2a_1a_2\varphi_1\sin\varphi_1\leqslant\\ \leqslant-2\varphi_2^2(a_1-\delta a_2)-2a_1\varphi_1^2(b-a_2-a_2\delta^{-1}).\end{aligned}$$

Выберем и зафиксируем δ так, что $a_1-\delta a_2=\alpha L^{-2}m_1^{-1}-\delta a_2>0$, а после этого выберем b из условия $b-a_2-a_2\delta^{-1}>0$. Тогда $\dot{V}$ будет отрицательно определена. Отсюда и из теоремы 2.3 вытекают равенства (8.2). Таким образом, в данном случае достаточно сильная обратная связь только по координате стабилизирует движение манипулятора.

2. Робот типа «Циклон». Изучим задачу стабилизации объекта, соответствующего, например, роботам типа «Циклон» (рис. 8.2). Рука робота длиной L приводится в движение пневмоцилиндрами двойного действия через передаточный механизм с плечом l. В захвате руки робота находится груз неизвестной массы m. Уравнения плоского движения имеют вид*

*Герц Е. В., Крейнин Г. В. Расчет пневмоприводов. — М.: Машиностроение, 1975.

$$\ddot{\varphi}=2PFl(m_1L^2)^{-1}+f(\dot{\varphi}),$$

$$\dot{P}=-4P_{\text{ср}}Fl(V_{\text{ср}})^{-1}\dot{\varphi}+2RTg(V_{\text{ср}})^{-1}.$$

Здесь φ — угловое перемещение руки манипулятора; $m_1=m+\frac{M}{3}$, где M — масса руки манипулятора; P — текущее значение давления в пневмоцилиндрах; F — площадь поршня; R — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура газа; $V_{\text{ср}}$ — объем пневмоцилиндра; $P_{\text{ср}}$ — среднее давление в пневмоцилиндре; g — массовый расход в полости цилиндров; $f(\dot{\varphi})=-\alpha\dot{\varphi}$ — сила вязкого трения в исполнительном устройстве с неизвестным коэффициентом трения $\alpha>0$. Положим

$$x_1=\dot{\varphi},\ x_2=\varphi,\ x_3=P,$$

$$a_1=2Fl(m_1L^2)^{-1},\ a_3=4P_{\text{ср}}Fl\,(V_{\text{ср}})^{-1},$$

$$b=2RT(V_{\text{ср}})^{-1},\ u=bg.$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\dot{x}_1=a_1x_3-\alpha x_1,\ \dot{x}_2=x_1,\ \dot{x}_3=-a_3x_1+u. \quad (8.4)$$

Задача состоит в выборе такого управления u, при котором

$$\lim_{t\to\infty}(|x_1(t)|+|x_2(t)|+|x_3(t)|)=0 \quad (8.5)$$

для любых начальных значений переменных x_i. Отметим, что поставленная задача соответствует задаче о переносе неизвестного груза массой m из произвольного положения в начало координат в фазовом пространстве (x_1, x_2, x_3), т. е. в такое положение, в котором угловое перемещение, его скорость и давление равны нулю. Положим $u=-b_1x_2-b_2x_3$. Выберем постоянные $b_i>0$ так, чтобы удовлетворялось соотношение (8.5). Введем функцию Ляпунова

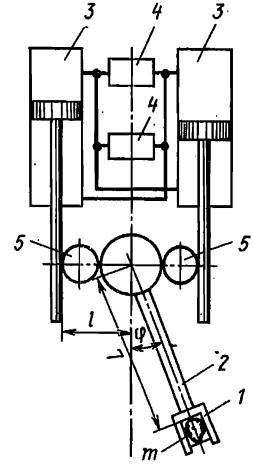


Рис. 8.2. Робот-манипулятор типа «Циклон»: *1* — схват робота с грузом m; *2* — рука манипулятора длиной L и массой M; *3* — пневмоцилиндры двойного действия; *4* — распределительное устройство пневмоцилиндров; *5* — передаточный механизм с плечом l

$$V=(x_3+b_2a_1^{-1}x_1)^2+(x_3+b_2a_1^{-1}x_1+a_3x_2)^2+$$

$$+x_3^2+2a_1^{-1}x_1^2(a_3+\alpha b_2a_1^{-1})+b_2a_1^{-1}x_2^2(2b_1+\alpha a_3).$$

Полная производная $\dot{V}$ этой функции вдоль траекторий системы (8.4) при выбранном управлении имеет вид

$$\dot{V}=2(x_3+b_2a_1^{-1}x_1)(\dot{x}_3-b_2a_1^{-1}\alpha x+b_2x_3)+$$

$$+2(x_3+x_1b_2a_1^{-1}+a_3x_2)(\dot{x}_3+b_2x_3+a_3x_1-b_1x_2-b_2x_3)+$$

$$+4a_3x_1x_3-4a_3a_1^{-1}\alpha x_1^2+2x_1x_2a_1^{-1}b_2\,(2b_1+\alpha a_3)+$$
$$+4x_1x_3\,(a_3+a_1^{-1}\alpha b_2)-4x_1^2a_1^{-1}\alpha\,(a_3+a_1^{-1}\alpha b_2).$$

С учетом уравнений движения (8.4) отсюда следует, что

$$\dot V=-x_1^2\,(2a_3b_2a_1^{-1}+4b_2^2a_1^2\alpha+4a_3a_1^{-1}\alpha)-$$
$$-2a_3b_1x_2^2-2b_2x_3^2-6b_1x_2x_3. \tag{8.6}$$

Но при любом $\delta>0$ выполняется неравенство

$$6b_1x_2x_3\leqslant 3b_1\,(x_2^2\delta+x_3^2\delta^{-1}).$$

Выберем и зафиксируем $\delta>0$ так, что

$$2a_3-3\delta>0. \tag{8.7}$$

Затем возьмем любые $b_1>0$ и b_2, удовлетворяющие условию

$$2b_2>3b_1\delta^{-1}. \tag{8.8}$$

Из условий (8.6)—(8.8) следует, что $\dot V$ — определенно отрицательная функция. Отсюда и из определенной положительности V вытекает соотношение (8.5). Итак, при выбранных b_1 и b_2 предложенное управление разрешает поставленную задачу. Отметим, что если требуется перевести систему (8.4) из произвольного начального положения в конечное $(0,\ \bar x_2,\ 0)$ с произвольным $\bar x_2$ и нулевой скоростью x_1 в конце, то можно использовать управление

$$u=-b_1\,(x_2-\bar x_2)-b_2x_3$$

с прежними значениями b_1 и b_2 коэффициентов обратной связи.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Основным методом исследования устойчивости нелинейных систем является второй метод Ляпунова. Этот метод позволяет свести изучение устойчивости к построению определенно положительной функции Ляпунова, производная которой в силу системы определенно отрицательна или знакопостоянна. Несмотря на справедливость теорем обращения, использование классических теорем Ляпунова для исследования конкретных систем сопряжено со значительными трудностями, обусловленными указанными требованиями к функции Ляпунова. В связи с этим значительные усилия были направлены на получение достаточных условий устойчивости, справедливых при менее ограничительных предположениях о функциях Ляпунова.

В настоящем параграфе приведем некоторые утверждения об устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений,

основанные на использовании скалярной вырожденной функции Ляпунова.

Рассмотрим уравнение

$$x^{(n+1)}(t)=F(t, x(t), ..., x^{(n)}(t)), \ t\geqslant t_0. \tag{9.1}$$

Здесь вектор $x(t)\in R_m$, целое число $n\geqslant 1$; непрерывная функция $F\in R_m$ удовлетворяет условию

$$F(t, 0, ..., 0)\equiv 0.$$

Введем обозначение

$$S_k(x(t))=\sum_{i=0}^{k}|x^{(i)}(t)|.$$

Начальные условия для уравнения (9.1) имеют вид

$$x(t_0)=x_0^0, ..., x^{(n)}(t_0)=x_0^{(n)}. \tag{9.2}$$

Предполагается, что для задачи (9.1), (9.2) выполнены условия локальной теоремы существования и единственности решения. Определение 1.2 в данном случае примет следующий вид.

Определение 9.1. Тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (9.1) называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta=\delta(\varepsilon, t_0)>0$ такое, что, как только $S_n(x(t_0))\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)$, соответствующее этим начальным условиям решение удовлетворяет неравенству $S_n(x(t))\leqslant\varepsilon$ при $t\geqslant t_0$. Если решение $x(t)\equiv 0$ устойчиво и, кроме того, $S_n(x(t))\to 0$, $t\to\infty$ для начальных условий $S_n(x(t_0))\leqslant\Delta(t_0)$, то тривиальное решение называется *асимптотически устойчивым*.

Аналогично вводятся и другие определения — равномерной устойчивости, равномерной асимптотической устойчивости и т. д.

Для исследования устойчивости используем непрерывные функции Ляпунова вида

$$V(t)=V(t, x(t), ..., x^{(n)}(t), g(t, x(t), ..., x^{(n)}(t))), \tag{9.3}$$

где g — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $g(t, 0, ..., 0)=0$. Относительно функции V предполагается лишь, что $V\geqslant 0$, но, вообще говоря, V не является определенно положительной по аргументам $x(t), ..., x^{(n)}(t)$. Такие функции V называются *вырожденными функциями Ляпунова*.

Ниже большую роль играют понятия, связанные с устойчивостью неравенства вида

$$|g(t, y(t), ..., y^{(n)}(t))|\leqslant f(t), \ t\geqslant t_0. \tag{9.4}$$

Обозначим через $y(t, t_0, y_0^0, ..., y_0^{(n-1)})$ любое решение дифференциального неравенства (9.4) с начальным условием

$$y(t_0)=y_0^0,\ \ldots\ y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{n-1}. \tag{9.5}$$

Определение 9.2. Тривиальное решение $y(t)\equiv 0$ неравенства (9.4) называется *f-устойчивым*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0)>0$, что при всех начальных условиях и правых частях, удовлетворяющих неравенствам $S_{n-1}(y(t_0))\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)$ и $f(t)\leqslant\delta(\varepsilon, t_0)$, $t\geqslant t_0$, выполняется неравенство $S_n(y(t, t_0, y_0^0, \ldots, y_0^{(n-1)}))\leqslant\varepsilon$ при всех $t\geqslant t_0$.

Решение $y(t)\equiv 0$ называется *асимптотически f-устойчивым*, если оно f-устойчиво, и, кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} S_n(t, t_0, y_0^0, \ldots, y_0^{(n-1)})=0$$

для всех начальных условий (9.5), удовлетворяющих неравенству $S_{n-1}(y(t_0))\leqslant\Delta(t_0)$, и всякой правой части $f(t)$ такой, что $f(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Теорема 9.1. *Пусть существует функция V вида* (9.3), *для которой выполнены следующие условия*:

1^0) $\omega_1(|g(t, x(t), x^{(n)}(t))|)\leqslant V\leqslant\omega_2(S_n(x(t)))$;

2^0) $\dot V\leqslant 0$;

3^0) *тривиальное решение неравенства* (9.4) *является f-устойчивым.*

Тогда тривиальное решение уравнения (9.1) *равномерно устойчиво.*

□ Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Вследствие f-устойчивости неравенства (9.4) для этого ε найдется такое $\delta_1>0$, что любое решение неравенства (9.4) с начальным условием (9.2) удовлетворяет соотношению $S_n(y(t))<\varepsilon$, как только $f(t)\leqslant\delta_1$ и $S_{n-1}(y(t_0))\leqslant\delta_1$. Выберем теперь δ_2 так, что $0<\delta_2\leqslant\delta_1$ и $\omega_2(\delta_2)=\omega_1(\delta_1)$. Тогда при $S_n(x(t_0))\leqslant\delta_2$ в силу условий 1^0 и 2^0 имеем

$$\omega_1(|g(t, x(t), \ldots, x^{(n)}(t))|)\leqslant V(t)\leqslant$$
$$\leqslant V(t_0, x(t_0), \ldots, x^{(n)}(t_0), g(x(t_0), \ldots, x^{(n)}(t_0)))\leqslant$$
$$\leqslant\omega_2(S_n(x(t_0)))\leqslant\omega_2(\delta_2)=\omega_1(\delta_1).$$

Отсюда и из монотонности функции ω_1 следует, что $|g(t, x(t), \ldots, x^n(t))|=f(t)\leqslant\delta_1$. Учитывая f-устойчивость неравенства (9.4), получаем $S_n(x(t))\leqslant\varepsilon$ $(t\geqslant t_0)$ для всех начальных условий таких, что $S_n(x(t_0))\leqslant\delta_2\leqslant\delta_1$. ■

Замечание. Если при выполнении условий теоремы 9.1 удается установить, что $f(t)$ не только ограничена, а стремится к нулю при $t\to\infty$ по определенному закону, то достаточно проверить f-устойчивость неравенства (9.4) только для таких правых частей $f(t)$.

Пример 9.1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}=\frac{(1+x^2)\dot{x}+2x\dot{x}^2}{1+x^2} \tag{9.6}$$

и функцию $g(x, \dot{x})=(1+x^2)\dot{x}$. Тогда уравнение (9.6) можно записать в виде

$$\dot{g}=-g. \tag{9.7}$$

Возьмем $V(g(x, \dot{x}))=g^2(x, \dot{x})$. Из (9.7) следует, что

$$|g(x(t), \dot{x}(t))|\leqslant Ce^{-(t-t_0)}.$$

Таким образом, нужно установить f-устойчивость решения $x(t)\equiv 0$ неравенства

$$|(1+x^2)\dot{x}|\leqslant Ce^{-(t-t_0)}. \tag{9.8}$$

Из неравенства (9.8) следует, что $|x(t)+x^2(t)/3|\leqslant C_1$ или $|x(t)|\leqslant \leqslant C_2$. Далее, из (9.8) вытекает, что

$$|\dot{x}|\leqslant\frac{C}{1+x^2}e^{-(t-t_0)}\leqslant C.$$

На основании теоремы 9.1 и замечания к ней заключаем, что решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (9.6) устойчиво.

Для исследования асимптотической устойчивости предположим, что

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|+\ldots+\left|\frac{\partial g}{\partial x^{(n)}}\right|+|F(t, x, \ldots, x^{(n)}|\leqslant M \tag{9.9}$$

при $S_n(x(t))\leqslant H$.

Теорема 9.2. *Пусть существует функция V вида* (9.3) *такая, что:*

1^0) *выполнено условие* 1^0 *теоремы* 9.1;

2^0) $\dot{V}(t)\leqslant-\omega_3(|g(t, x(t), \ldots, x^{(n)}(t))|)$;

3^0) *тривиальное решение неравенства* (9.4) *асимптотически f-устойчиво.*

Тогда тривиальное решение уравнения (9.1) *асимптотически устойчиво.*

□ Согласно теореме 9.1, решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (9.1) устойчиво. Значит, $S_n(x(t))\leqslant H$ при $t\geqslant t_0$ для всех начальных условий таких, что $S_n(x(t_0))\leqslant\delta(H)$. Покажем, что при этом $|g(t, x(t), \ldots, x^{(n)}(t))|\to 0$ при $t\to\infty$. Предположим, что это не так. Тогда существует число γ $(0<\gamma<H)$ и последовательность $t_i\to\infty$ такие, что $|g(t_i, x(t_i), \ldots, x^{(n)}(t_i))|>\gamma$. В силу неравенства (9.9) и уравнения (9.1) при $S_n(x(t))\leqslant H$ имеем

$$\left|\frac{\mathrm{d}g(t,\ x(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t))}{\mathrm{d}t}\right|=\left|\frac{\partial g}{\partial t}+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}x^{(i+1)}(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant MH+M^2=L.$$

При этом для $\tau\in[t_i-\gamma/(2L),\ t_i+\gamma/(2L)]$ получим $|g(\tau,\ x(\tau),\ \ldots,\ x^n(\tau))|\geqslant\gamma/2$. Обозначив через $n(t)$ число точек $t_i\in[t_0,\ t]$, находим

$$V(t)-V(t_0)=\int_{t_0}^{t}\dot{V}(s)\,\mathrm{d}s\leqslant-\int_{t_0}^{t}\omega_3\left(|g(s,\ x(s),\ \ldots,\ x^{(n)}(s))|\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\leqslant-\gamma L^{-1}\omega_3(\gamma/2)\,n(t)\to-\infty,\ t\to\infty.$$

Это противоречит условию 1^0. Значит, доказано, что $|g(t,\ x(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t))|\to0$ при $t\to\infty$ и $S_n(x(t_0))\leqslant\delta(H)$. Отсюда в силу асимптотической f-устойчивости неравенства (9.4) следует асимптотическая устойчивость решения $x(t)\equiv0$ уравнения (9.1). ■

Следствие. *Пусть дано уравнение*

$$\dot{u}(t)=F_1(t,\ u(t)),\ u\in R_k,\ F_1(t,\ 0)\equiv0. \tag{9.10}$$

Пусть, далее, функция $g(t,\ x(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t))\in R_k$ *при* $t\geqslant t_0$. *Тогда если тривиальное решение уравнения* (9.10) *равномерно асимптотически устойчиво, а тривиальное решение неравенства* (9.4) *асимптотически f-устойчиво, то тривиальное решение уравнения*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t,\ x(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t))=F_1(t,\ g(t,\ x(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t))$$

асимптотически устойчиво.

Сделаем несколько замечаний относительно понятий f-устойчивости и асимптотической f-устойчивости решений дифференциального неравенства (9.4). Нетрудно установить, что f-устойчивость тривиального решения неравенства (9.4) при выполнении условия (9.9) следует из устойчивости при постоянно действующих возмущениях тривиального решения уравнения

$$g(t,\ x(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t))=0.$$

Понятие асимптотической f-устойчивости не сводится к известным ранее понятиям. Однако оно имеет простой механический смысл. Пусть неравенство (9.4) описывает некоторую механическую систему и $f(t)$ — оценка нормы всех действующих на эту систему внешних сил. Тогда требование асимптотической f-устойчивости означает, что если внешние силы при $t\to0$ исчезают, то система должна стремиться к состоянию покоя.

С использованием других терминов было установлено [1], что для линейного нестационарного неравенства

$$|y^{(n)}(t)+A_1(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+A_n(t)y(t)|\leqslant f(t) \tag{9.11}$$

из экспоненциальной устойчивости тривиального решения уравнения

$$y^{(n)}(t)+A_1(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+A_n(t)y(t)=0$$

следует асимптотическая f-устойчивость тривиального решения неравенства (9.11).

§ 10. УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

При описании динамических систем часто встречается такая ситуация, когда состояние системы $x(t)$ известно (измеряется) только в дискретные моменты $t_k=kh$ ($k=0, 1, 2, \ldots$; $h>0$). Динамику такой системы можно описать уравнением вида

$$x(t_{k+1})=f(t_k, x(t_k), x(t_{k-1}), x(t_{k-2}), \ldots, x(t_{k-p})). \tag{10.1}$$

Обозначив $x(t_k)=x_k$, $t_k=k$, запишем (10.1) в виде

$$x_k=f(k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-p}). \tag{10.2}$$

Уравнение (10.2) называют *уравнением в конечных разностях p-го порядка*. Введя вектор $X_n'=(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1})$, можно записать уравнение (10.2) в виде системы

$$X_{n+1}=F(n, X_n). \tag{10.3}$$

Начальное условие для системы (10.3) имеет вид $X_{n_0}=X^0$. Системы вида (10.3) часто встречаются при описании импульсных систем. Дискретные системы встречаются также, когда в контур управления включается цифровая вычислительная машина.

1. Второй метод Ляпунова. Приведем основные сведения об устойчивости дискретных систем. Рассмотрим уравнение

$$x_{k+1}=f(k, x_k),\ x_k\in R_n,\ f(k, 0)\equiv 0. \tag{10.4}$$

Решение уравнения (10.4) с начальным условием $x_{k_0}=x^0$ обозначим через $x(k, k_0, x^0)$.

Определение 10.1. Решение $x_k\equiv 0$ уравнения (10.4) называется *равномерно устойчивым*, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из неравенства $|x_{k_0}|\leqslant\delta(\varepsilon)$ следует $|x_k|\leqslant\varepsilon$ при всех $k\geqslant k_0$. Решение $x_k\equiv 0$ называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и для любого $\gamma>0$ найдутся целое

число $N(\gamma)>0$ и число $H_1>0$ такие, что $|x(k, k_0, x^0)|\leqslant\gamma$ при $k\geqslant k_0+N(\gamma)$ и $|x^0|\leqslant H_1$.

Остальные определения устойчивости для разностного уравнения (10.4) аналогичны соответствующим определениям для дифференциального уравнения (1.5).

Для исследования устойчивости решения $x_k\equiv 0$ уравнения (10.4) можно также использовать второй метод Ляпунова. Приведем без доказательства некоторые утверждения.

Теорема 10.1. *Для равномерной устойчивости решения $x_k\equiv 0$ уравнения* (10.4) *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $V(k, x)$, удовлетворяющая условиям*

$$\omega_1(|x|)\leqslant V(k, x)\leqslant\omega_2(|x|),\ V(k+1, f(k, x))-V(k, x)\leqslant 0.$$

Теорема 10.2. *Пусть существует функция $V(k, x)$ такая, что*

$$\omega_1(|x|)\leqslant V(k, x)\leqslant\omega_2(|x|),$$
$$V(k+1, f(k, x_k))-V(k, x_k)\leqslant-\omega_3(|x_k|).$$

Тогда решение $x_k\equiv 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

На разностные уравнения вида (10.4) естественным образом переносятся и другие теоремы* из § 2 и 4.

2. Линейные стационарные уравнения. Рассмотрим случай линейного стационарного разностного уравнения

$$x_{k+1}=Ax_k,\ x_0=x^0,\ x\in R_n. \tag{10.5}$$

Как и в п. 1 § 5, общее решение уравнения (10.5) может быть получено следующим образом. Если $\lambda_1(A)$ — простое собственное значение матрицы A с собственным вектором h_1, то ему соответствует решение уравнения (10.5), имеющее вид $x_k^1=\lambda_1^k h_1$. Если же $\lambda_2(A)$ — кратное собственное значение с жордановой клеткой размерности m, то ему соответствует m решений вида

$$x_k^2=\lambda_2^k h_2;\ x_k^3=k\lambda_2^{k-1}h_2+\lambda_2^k h_3;\ \ldots;$$
$$x_k^{m+1}=C_k^{m-1}\lambda_2^{k-m+1}h_2+\ldots+\lambda_2^k h_{m+1},$$

где $h_2, \ldots, h_{m+1}$ — серия векторов, удовлетворяющих условиям

$$h_2\neq 0,\ Ah_2=\lambda_2 h_2,\ \ldots,\ Ah_{m+1}=\lambda_2 h_{m+1}+h_m.$$

Аналогично записываются решения и для других клеток Жордана и собственных значений $\lambda_j(A)$. Линейная комбинация этих решений

*См., например: Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971.

является общим решением уравнения (10.5). Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 10.3. *Если* $|\lambda_i(A)|<1$ *для всех* i, *то решение* $x_k\equiv 0$ *уравнения* (10.5) *равномерно асимптотически устойчиво. Если же* $|\lambda_i(A)|\leqslant 1$ *и всем собственным значениям* λ_k, *для которых* $|\lambda_k(A)|=1$, *отвечают жордановы клетки размерности* 1, *то решение* $x_k\equiv 0$ *равномерно устойчиво. Во всех других случаях решение* $x_k\equiv 0$ *неустойчиво.*

3. Устойчивость по первому приближению. Рассмотрим уравнение

$$x_{k+1}=Ax_k+R(k, x_k),\ |R(k, x_k)|\leqslant C|x_k|^{1+\alpha},\ \alpha>0. \qquad (10.6)$$

Теорема 10.4. *Если нулевое решение линейного уравнения первого приближения* $x_{k+1}=Ax_k$ *асимптотически устойчиво, то решение* $x_k\equiv 0$ *уравнения* (10.6) *также асимптотически устойчиво. Если имеется собственное значение* $\lambda_j(A)$, *для которого* $|\lambda_j(A)|>1$, *то решение* $x_k\equiv 0$ *уравнения* (10.6) *неустойчиво независимо от вида нелинейности* $R(k, x)$.

Случаи, когда имеются собственные значения $\lambda_i(A)$ с $|\lambda_i(A)|=1$, являются критическими. В этих случаях устойчивость нелинейной системы (10.6) зависит от вида нелинейности $R(k, x_k)$.

4. Устойчивость по заданным переменным*. Приведем одну теорему об устойчивости разностного уравнения (10.4), которая не имеет аналога в теории дифференциальных уравнений. Наряду с уравнением (10.4) рассмотрим вектор переменных y_k, имеющий вид

$$y_k=q(k, x_k),\ y_k\in R_l. \qquad (10.7)$$

Функция $q(k, x_k)$ предполагается непрерывной по второму аргументу.

Определение 10.2. Решение $x_k\equiv 0$ уравнения (10.4) называется *устойчивым по переменным* $y_k=(y_k^1, \ldots, y_k^l)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon, k_0)$, что для любых начальных состояний x^0, удовлетворяющих неравенству $|y_{k_0}|=|q(k_0, x_{k_0})|\leqslant\delta$, условие $|y_k|=|q(k, x_k)|\leqslant\varepsilon$ выполняется для всех $k\geqslant k_0$. Если же, кроме того,

$$|y_k|=|q(k, x_k)|=|q(k, x(k, k_0, x^0))|\to 0,\ k\to\infty,$$

для всех x^0, лежащих в области притяжения решения $x_k\equiv 0$, имеющей вид $|q(k_0, x^0)|\leqslant\Delta$, то решение $x_k\equiv 0$ уравнения (10.4) называется *асимптотически устойчивым по переменным* $y_k=q(k, x_k)$.

Определение 10.2 обобщает определение устойчивости и устойчивости по части переменных. Другие определения устойчивости по заданным переменным можно ввести аналогично.

---

*Носов В. Р. Об устойчивости дискретных систем относительно заданных переменных... ЖВМ и МФ, 1979. Т. 19, С. 316 — 328.

Теорема 10.5. *Пусть существует функция Ляпунова* $V(k, x)$ *такая, что*

$$\omega_1(|q(k, x)|) \leqslant V(k, x) \leqslant \omega_2(|q(k, x)|),$$
$$V(k+1, f(k, x)) - V(k, x) \leqslant 0.$$

Тогда решение $x_k \equiv 0$ *равномерно устойчиво по переменным* $y_k = q(k, x_k)$.

Теорема 10.6. *Пусть существует функция Ляпунова* $V(k, x)$ *такая, что*

$$0 \leqslant V(k, x), \quad V(k_0, x) \leqslant \omega_2(|q(k_0, x)|),$$
$$V(k+1, f(k, x_k)) - V(k, x_k) \leqslant -\omega_3(|q(k, x_k)|).$$

Тогда решение $x_k \equiv 0$ *асимптотически устойчиво по переменным* $y_k = q(k, x_k)$.

5. Безусловная минимизация функций. Для отыскания минимума функций $f(x)$, где $x \in R_n$, $f(x) \in C^1(R_n)$, часто применяются *градиентные методы с регулировкой шага**. Алгоритм градиентного метода заключается в следующем:

1^0. Выбирают $x_0 \in R_n$.

2^0. Строят последовательность x_k вида

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k f_x(x_k), \quad f_x = \frac{df(x)}{dx}. \tag{10.8}$$

3^0. Выбирают шаг λ_k так, чтобы $0 \leqslant \lambda_k \leqslant A$ и

$$f(x_k - \lambda_k f_x(x_k)) \leqslant f(x_k) - \frac{1}{2}\lambda_k |f_x(x_k)|^2. \tag{10.9}$$

Предположим, что функция $f(x) \in C^2(R_n)$ и является строго выпуклой, т. е. матрица вторых производных $f_{xx}(x)$ является равномерно положительно определенной:

$$(f_{xx}(x)p, p) \geqslant \alpha(p, p), \quad \alpha > 0, \quad \forall x, p \in R_n, \quad (x, p) = x'p.$$

Пусть, кроме того, матрица f_{xx} ограничена сверху: $|f_{xx}(x)p| \leqslant M|p|$. Известно, что такие функции $f(x)$ имеют единственную точку минимума.

При этих условиях последовательность (10.8) сходится к точке минимума функции $f(x)$.

---

*Детали доказательств, приведенных в этом пункте утверждений, см. в кн.: Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980; Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975.

Для доказательства этого рассмотрим неотрицательную функцию

$$V(x)=f(x)-\min_{x\in R_n} f(x). \tag{10.10}$$

Из сильной выпуклости $f(x)$ вытекают оценки

$$\frac{m}{8M^2}|f_x(x)|^2\leqslant V(x)\leqslant\frac{2M}{m^2}|f_x(x)|^2,\ \frac{1}{2M}\leqslant\lambda_k\leqslant\frac{1}{M}.$$

Из (10.9) следует, что

$$V(x_{k+1})\leqslant V(x_k)-\frac{1}{2}\lambda_k|f_x(x_k)|^2\leqslant V(x_k)-\frac{1}{4M}|f_x(x_k)|^2.$$

Таким образом, функция (10.10) удовлетворяет условиям теоремы 10.6 об асимптотической устойчивости решений уравнения (10.8) по переменной $y_k=f_x(x_k)$. Иначе говоря, градиентный метод (10.8), (10.9) приводит к последовательности, сходящейся к точке x^*, и такой, что $f_x(x^*)=0$, т. е. к единственной точке x^* минимума функции $f(x)$.

Основные результаты и формулы главы I

Первая теорема Ляпунова. Пусть существует функция $V(t, x)$ такая, что $\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x)$, $\dot V(t, x)\leqslant 0$. Тогда тривиальное решение устойчиво по Ляпунову.

Вторая теорема Ляпунова. Если $\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x)\leqslant\omega_2(|x|)$, $\dot V(t, x)\leqslant-\omega_3(|x|)$, то тривиальное решение равномерно асимптотически устойчиво.

Устойчивость в целом. Если в дополнение к условиям второй теоремы Ляпунова $\omega_1(u)\to\infty$, $u\to\infty$, то тривиальное решение равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Теорема Четаева о неустойчивости. Если в области $V(t, x)>0$ имеет место неравенство $\dot V(t, x)\geqslant\omega_4(|x|)$, то тривиальное решение неустойчиво.

Теорема Барбашина — Красовского. Если система автономна, $V(x)\geqslant\omega_1(|x|)$, $\dot V(x)\leqslant 0$, и, кроме того, множество $\{x:\dot V(x)=0\}$ не содержит целых траекторий, то тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Критерий Матросова. Если существуют две функции $V(t, x)$ и $W(t, x)$ такие, что $\omega_1(|x|)=V(t, x)\leqslant\omega_2(|x|)$, $\dot V(t, x)\leqslant a(|x|)\leqslant 0$, $|W(t, x)|\leqslant L=\text{const}$, $|\dot W(t, x)|\geqslant\omega_4(|x|)$ в $E(\mu, \rho)$, то тривиальное решение равномерно асимптотически устойчиво.

Принцип сравнения Матросова. Пусть существует вектор-функция $V(t, x)=(V_1(t, x), \ldots, V_m(t, x))$ такая, что $\max V_i(t, x)\geqslant\omega_1(|x|)$, $V(t, 0)=0$, $\dot V(t, x)\leqslant F(t, V(t, x))$, где $F(t, u)$ — квазимонотонно возрастающая функция. Тогда устойчивость (асимптотическая устойчивость) решения $u\equiv 0$ уравнения $\dot u=F(t, u)$ влечет устойчивость (асимптотическую устойчивость) решения $x\equiv 0$.

Теорема Румянцева об устойчивости по части переменных. Если существует функция $V(t, x, y)$ такая, что $\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x, y)\leqslant\omega_2(|z|)$, $\dot V(t, x, y)\leqslant-\omega_3(|x|)$, то решение $z\equiv 0$ асимптотически x-устойчиво.

Критерий Рауса — Гурвица. Для устойчивости многочлена $P_n(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры его матрицы Гурвица M_{P_n}.

Робастная устойчивость. Для робастной устойчивости $P_n(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы все четыре многочлена $f_n^1(\lambda)$, $f_n^2(\lambda)$, $f_n^3(\lambda)$ и $f_n^4(\lambda)$ были устойчивыми.

Критерий Михайлова. Для устойчивости многочлена $P_n(\lambda)$, не имеющего чисто мнимых корней, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta \arg P_n(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} n.$$

Лемма Гронуолла — Беллмана. Если скалярные функции $x(t)$, $g(t) \geqslant 0$ и неубывающая функция $\alpha(t)$ удовлетворяют неравенству

$$x(t) \leqslant \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} g(s)\, x(s)\, ds, \quad t \geqslant t_0,$$

то

$$x(t) \leqslant \alpha(t) \exp\left[\int_{t_0}^{t} g(s)\, ds\right].$$

Теорема Беллмана. Пусть решение $y=0$ системы $\dot{y}=Ay$ устойчиво (асимптотически устойчиво) и $\int_0^\infty \|B(t)\|\, dt < \infty$. Тогда решение $x=0$ системы $\dot{x} = [A+B(t)]\, x$ устойчиво (асимптотически устойчиво).

Теорема Флоке. Фундаментальная матрица $X(t)$ линейной ω-периодической системы представима в виде

$$X(t) = \Phi(t) e^{Lt}, \quad \Phi(t+\omega) = \Phi(t), \quad L = \text{const}.$$

Теорема Ляпунова. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда для любой матрицы $C < 0$ существует единственное решение $B > 0$ матричного уравнения Ляпунова $A'B + BA = C$.

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда тривиальное решение нелинейного уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax + R(t, x), \quad |R(t, x)| \leqslant C|x|^{1+\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

асимптотически устойчиво. Если же хотя бы для одного k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ имеет место неравенство $\operatorname{Re}\lambda_k(A) > 0$, то тривиальное решение нелинейного уравнения неустойчиво.

Вырожденные функции Ляпунова. Пусть существует функция

$$V(t, x(t), \ldots, x^{(n)}(t),\ g(t, x(t), \ldots, x^{(n)}(t))) \text{ такая, что}$$
$$\omega_1(|g(t, x(t), \ldots, x_{(n)}(t)|) \leqslant V \leqslant \omega_2(S_n(x(t))),\ \dot{V} \leqslant 0,$$

и тривиальное решение неравенства $|g(t, x(t), \ldots, x^{(n)}(t))| \leqslant f(t)$ является f-устойчивым. Тогда тривиальное решение уравнения $x^{(n+1)}(t) = F(t, x(t), \ldots, x^{(n)}(t))$ равномерно устойчиво.

Устойчивость дискретных систем. Если

$$\omega_1(|x|) \leqslant V(k, x) \leqslant \omega_2(|x|), \quad |V(k, x) - V(k, y)| \leqslant M|x-y|,$$
$$V(k+1, f(k, x)) - V(k, x) \leqslant -\omega_3(|x|),$$

то тривиальное решение дискретной системы $x_{k+1} = f(k, x_k)$ асимптотически устойчиво.

ГЛАВА II

УСТОЙЧИВОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этой главе приведены основные постановки задач теории устойчивости динамических систем при случайных возмущениях. Кроме того, изложены необходимые сведения из теории стохастических уравнений, используемые в дальнейшем.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи устойчивости при неполной информации встречаются в различных отраслях техники, механики, экономики, биологии и т. д. В этих задачах эволюция системы происходит при наличии факторов, известных не точно. Рассмотрим, например, движение летательного аппарата в атмосфере. В реальной ситуации это движение происходит под действием большого числа разнообразных, слабо контролируемых или непредсказуемых факторов, которые сложным образом взаимодействуют друг с другом, носят изменчивый, случайный характер. К их числу относятся внешние не точно известные силы, возмущения и ошибки в определении начальных условий, разброс аэродинамических характеристик и конструктивных параметров летательного аппарата, порывы ветра, вариации плотности атмосферы, магнитного и гравитационного поля Земли и др.

Источник неполноты информации может быть связан с наличием помех в канале наблюдения за движением системы. Одним из важных источников неполноты информации является запаздывание, вызванное конечностью времени, необходимого для проведения наблюдений и обработки их результатов.

Возможны разные способы математической формализации задач устойчивости при неполной информации. При вероятностном подходе, принятом в настоящей книге, неполнота информации интерпретируется как действие на систему случайных возмущений с заданными статистическими характеристиками.

Задачи устойчивости динамических систем при случайных возмущениях связаны с выяснением условий, при которых некоторые статистические характеристики движения (например, математическое ожидание координат и скоростей, их матрица ковариации и т. д.) мало меняются при малом изменении возмущающих факторов. В этой главе изложены общие постановки задач стохастической устойчивости, приведены некоторые способы их решения и рассмотрены конкретные примеры.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Основное вероятностное пространство. Пусть дано пространство Ω элементов ω. В пространстве Ω выделим семейство множеств U, образующее *σ-алгебру*. Это означает, что для любого конечного или счетного набора множеств $A_i \in U$ их пересечение $\bigcap_i A_i$, сумма $\bigcup_i A_i$ и дополнения $\bar{A}_i$ множеств A_i до Ω принадлежат U.

Обозначим через P *вероятностную меру* на U, т. е. такую неотрицательную счетно-аддитивную функцию P, заданную на U, для которой $P(\Omega)=1$.

Множества из U называются *случайными событиями*, а элементы $\omega \in \Omega$ — *элементарными исходами*. Совокупность (Ω, U, P) называется *основным вероятностным пространством*.

Пример 2.1. Пусть монету подбрасывают один раз. Исключая возможность монете встать на ребро и исчезнуть, заключаем, что $\Omega=\{0, 1\}$, где $\omega=0$ отвечает выпадению решетки, $\omega=1$ — герба. Если же монету подбрасывают n раз, то общее число всевозможных исходов равно 2^n, пространство элементарных исходов Ω имеет вид $\Omega=\{\omega : \omega=(\omega_1, ..., \omega_n)\}$ и вероятность каждого из исходов равна 2^{-n}. Здесь ω_i равно либо 0, либо 1.

Пример 2.2. Пусть бросают две игральные кости, грани которых занумерованы числами от 1 до 6. Множество Ω, содержащее 36 элементов, есть множество всевозможных пар (n, m), т. е. $\Omega=\{(n, m) : n, m=1, 2, ..., 6\}$. Вероятность элементарного исхода равна 1/36.

2. Случайные величины. *Случайным вектором* $\xi(\omega)$ *называется* U-измеримая почти всюду конечная функция $\xi(\omega)$ со значениями в (R_n, B), т. е. $\xi : (\Omega, U) \to (R_n, B)$, где B — борелевская σ-алгебра борелевских подмножеств из R_n. Напомним, что *σ-алгеброй борелевских множеств* пространства R_n называется минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества S (при этом σ-алгебра, содержащая все открытые множества S, называется *минимальной*, если она представляет собой пересечение всех σ-алгебр, содержащих S).

Случайный вектор $\xi(\omega)$ можно задавать *функцией распределения* $F(x_1, ..., x_n)$, равной вероятности события $(\xi_1 < x_1, ..., \xi_n < x_n)$, где ξ_i — компоненты вектора ξ. Иначе говоря,

$$F(x_1, ..., x_n) = P(\xi_1 < x_1, ..., \xi_n < x_n).$$

По любому из аргументов $x_1, ..., x_n$ при фиксированных остальных аргументах функция $F(x_1, ..., x_n)$ монотонно не убывает. Кроме того, из определения F вытекает, что

$$\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\lim_{x_i \to \infty} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_{i-1} < x_{i-1}, \xi_{i+1} < x_{i+1}, \ldots, \xi_n < x_n).$$

В ряде случаев функцию F можно характеризовать с помощью плотности вероятности. *Плотностью распределения вероятностей* (называемой иначе *плотностью вероятности*) называется такая измеримая по Лебегу неотрицательная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, что

$$P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n = F(x_1, \ldots, x_n).$$

Из этого равенства вытекает следующая зависимость плотности вероятности f от функции распределения F:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F(x_1, \ldots, x_n).$$

Ясно, что интеграл от плотности вероятности f по всему пространству R_n равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1.$$

Говорят, что случайный вектор $\xi(\omega) \in R_n$ имеет невырожденное *гауссовское* (или *нормальное*) *распределение вероятностей*, если существуют вектор $m \in R_n$ и симметричная положительно-определенная матрица D такие, что для плотности вероятности f вектора ξ справедливо выражение

$$f(x) = [(2\pi)^n (\det D)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)' D^{-1} (x-m)\right],$$
$$x' = (x_1, \ldots, x_n). \qquad (2.1)$$

Вектор *математического ожидания* $M\xi$ произвольного случайного вектора $\xi(\omega)$ определяется формулой

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, P(d\omega). \qquad (2.2)$$

Здесь предполагается, что функция $|\xi(\omega)|$ является P-интегрируемой (т. е. интегрируемой по мере P). Из равенства (2.1), вычисляя соответствующие интегралы (2.2), можно установить, что математическое ожидание $M\xi$ гауссовского вектора ξ равно m, а корреляционная матрица

$$M((\xi-m)(\xi-m)')=D.$$

Условным математическим ожиданием $M(\xi/\sigma_0)$ произвольного случайного вектора ξ относительно σ-алгебры $\sigma_0 \subset U$ называется случайный вектор $\eta(\omega)=M(\xi/\sigma_0)$, который: а) σ_0-измерим; б) удовлетворяет равенству

$$\int_A \eta(\omega) P(d\omega) = \int_A \xi(\omega) P(d\omega) \tag{2.3}$$

для любого множества $A \in \sigma_0$. Указанные два требования определяют условное математическое ожидание η однозначно с вероятностью 1. Условное математическое ожидание всегда существует, если только $M|\xi| < \infty$.

Отметим некоторые свойства условного математического ожидания, используемые ниже. Прежде всего в силу (2.3) имеем

$$M\xi = M[M(\xi/\sigma_0)].$$

Далее, если случайная величина ζ измерима относительно σ_0, то

$$M(\zeta\xi/\sigma_0)=\zeta M(\xi/\sigma_0).$$

Если случайная величина ξ не зависит от σ-алгебры σ_0, то

$$M(\xi/\sigma_0)=M\xi.$$

Напомним, что две случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются *независимыми*, если для любых x_1 и x_2 справедливо равенство

$$P(\xi_1<x_1,\ \xi_2<x_2)=P(\xi_1<x_1)\,P(\xi_2<x_2).$$

3. Случайные процессы. Пусть B_1 есть σ-алгебра борелевских множеств отрезка T такого, что $0 \leqslant t \leqslant T$; обозначим через $B_1 \times U$ минимальную σ-алгебру множеств из $T \times \Omega$, содержащую все подмножества вида $\Delta \times A$, где $\Delta \in T$, $A \in U$.

Функция $\zeta(t, \omega)$ двух аргументов $t \in T$ и $\omega \in U$ со значениями в (R_n, B) называется *измеримым случайным процессом*, если она $(B_1 \times U)$-измерима и при любом фиксированном $t \in T$ вектор $\zeta(t, \omega)$ представляет собой случайный вектор. Функция $\zeta(t, \omega)$ при фиксированном ω называется *траекторией* (или *реализацией*, или *выборочной функцией*) случайного процесса.

Обычно рассматривают сепарабельные случайные процессы. Случайный процесс называется *сепарабельным*, если его поведение при всех $t \in T$ с точностью до событий вероятности нуль определяется поведением на каком-либо счетном всюду плотном множестве $\Delta \subset T$. Известно, что для любого стохастически непрерывного (т. е. непрерывного в смысле сходимости по вероятности) процесса $\zeta(t, \omega)$ всюду на T, кроме, быть может, счетного множества точек, существует сепарабельный процесс $\zeta_1(t, \omega)$ такой, что

$$P(\zeta(t, \omega) = \zeta_1(t, \omega)) = 1, \forall t \in T.$$

Для описания процесса $\zeta(t, \omega)$ можно использовать его всевозможные конечномерные распределения. Обозначим через $A_i \in R_n$ произвольные борелевские множества, а через t_i $(i = 1, ..., m)$ — произвольные точки из T.

Конечномерными распределениями вероятностей процесса $\zeta(t, \omega)$ называются вероятности

$$F(t_1, ..., t_m, A_1, ..., A_m) = P(\zeta(t_1, \omega) \in A_1, ..., \zeta(t_m, \omega) \in A_m). \quad (2.4)$$

В соответствии с теоремой Колмогорова [8] для любого согласованного набора функций $F(t_1, ..., t_m, A_1, ..., A_m)$ существует такой случайный процесс, для которого эти функции служат конечномерными распределениями.

По аналогии с (2.2), *математическое ожидание случайного процесса* ζ определяется формулой

$$M\zeta(t, \omega) = \int_{\Omega} \zeta(t, \omega) P(\mathrm{d}\omega).$$

Важной характеристикой случайного процесса является *корреляционная матрица*, равная

$$M[\zeta(s, \omega) - M\zeta(s, \omega)][\zeta(t, \omega) - M\zeta(t, \omega)]'.$$

Случайный процесс называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения вероятностей являются гауссовскими. Эти распределения зависят только от математического ожидания и корреляционной матрицы.

Процесс $\zeta(t, \omega)$, $t \in T$, называется *процессом с независимыми приращениями*, если случайные величины $\zeta(t_1, \omega) - \zeta(0, \omega)$, $\zeta(t_m, \omega) - \zeta(t_{m-1}, \omega)$ взаимно независимы для любых $t_1, ..., t_m$ таких, что $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m \leqslant T$. Интересно отметить, что любой процесс с непрерывными реализациями и независимыми приращениями является гауссовским [5].

Гауссовский процесс с независимыми приращениями и непрерывными реализациями называется *процессом броуновского движения* (или *винеровским процессом*).



Рис. 2.1. Траектории броуновского движения

Винеровский процесс $\xi(t, \omega)$ может служить математической моделью для описания броуновского движения, т. е. движения микрочастицы в жидкости (рис. 2.1 и 2.2). Как показал Н. Винер, при таком описании траектория движения микрочастицы нигде не имеет касательной, т. е. почти все реализации винеровского процесса $\xi(t, \omega)$ являются непрерывными, нигде не дифференцируемыми функциями* Винеровский процесс $\xi(t, \omega)$ называется *стандартным*, если $\xi(0, \omega)=0$, $M\xi(t, \omega)=0$, $M\xi(t, \omega)\xi'(t, \omega)=It$, где I — единичная матрица.

Приведем еще в качестве примера формулу для плотности конечномерного распределения вероятностей скалярного стандартного винеровского процесса $\xi(t, \omega)$. Возьмем произвольное натуральное число m и моменты времени $t_1<t_2<\ldots<t_{m-1}<t_m$. Тогда плотность вероятности случайного вектора $(\xi(t_1, \omega), \xi(t_m, \omega))$ имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_m)=[(2\pi)^m t_1 (t_2-t_1)\ldots(t_m-t_{m-1})]^{-1/2}\times$$

$$\times \exp\left[-\frac{x_1^2}{2t_1}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}(x_{j+1}-x_j)^2 (t_{j+1}-t_j)^{-1}\right].$$

Для винеровского процесса $\xi(t, \omega)$ с вероятностью 1 справедливо соотношение, называемое *законом повторного логарифма*:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \xi(t, \omega)(2t\ln\ln t)^{-1/2}=1, \qquad (2.5)$$

где $\overline{\lim}$ означает верхний предел.

Кроме того, траектории винеровского процесса имеют неограниченную вариацию на любом отрезке $[0, T]$, $T>0$. Иными

*Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. — М.: Мир, 1968.

словами, для любого положительного числа δ справедливо соотношение

$$P\left[\sum_{j=0}^{m-1} |\xi(t_{j+1}, \omega) - \xi(t_j, \omega)| > \delta\right] \to 1 \qquad (2.6)$$

при $\max(t_{j+1} - t_j) \to 0$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$. Винеровский процесс является тем фундаментальным математическим объектом, с помощью которого описывается значительное число реальных явлений окружающего мира: неравновесная статистическая термодинамика, тепловые флуктуации, помехи измерительной аппаратуры, возмущающие силы и моменты, действующие на движущееся тело, погрешности измерений и т. д. [2].

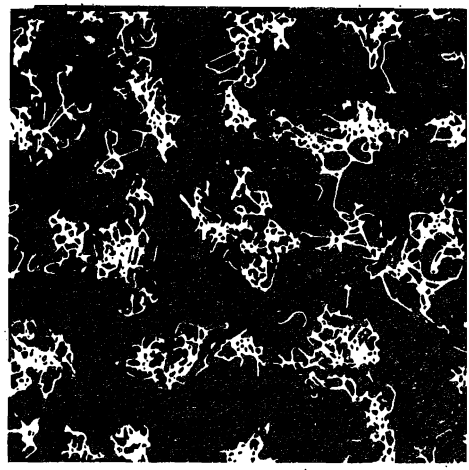


Рис. 2.2. Траектории движения молекул, полученные на ЭВМ, иллюстрирующие двумерное броуновское движение

Обычно в теории случайных процессов переменную ω опускают, а случайный процесс обозначают $\zeta(t)$. В дальнейшем будем также придерживаться этого соглашения.

Подробные доказательства приведенных выше утверждений см. в [3; 5].

§ 3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Стохастические интегралы Ито и Стратоновича. Существуют различные классы случайных процессов (например, стационарные процессы, процессы с независимыми приращениями, мартингалы и т. д.). Важное место среди них занимают марковские процессы. Интуитивно *марковский процесс* можно определить как такой процесс, значение которого в данный момент t_0 полностью определяет его будущее поведение независимо от прошлого. Примером марковского процесса является винеровский процесс. Решение обыкновенного детерминированного дифференциального уравнения также представляет собой марковский процесс. С помощью винеровского процесса $\xi(t)$ можно построить широкий класс марковских процессов с непрерывными траекториями, определяемых как решение *стохастического дифференциального уравнения* вида

$$dx(t)=f(t, x(t))\,dt+b(t, x(t))\,d\xi(t),\ t\geqslant 0, \tag{3.1}$$
$$x(0)=x_0,\ x\in R_n,\quad \xi\in R_m.$$

Здесь x_0 — детерминированный вектор начальных условий; вектор-функция $f(t, x)\in R_n$ и матрица $b(t, x)$ размера $n\times m$ заданы; ξ — стандартный винеровский процесс.

Уравнение (3.1) является символической записью следующего интегрального тождества:

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(s, x(s))\,ds+\int_0^t b(s, x(s))\,d\xi(s). \tag{3.2}$$

Последний интеграл в правой части равенства (3.2) называется *стохастическим*. Возможны различные схемы построения стохастического интеграла. Приведем две из них, принадлежащие К. Ито и Р. Л. Стратоновичу [6; 18]. Возьмем произвольное разбиение отрезка $[0, t]$ точками t_i, причем $0=t_0<t_1<\ldots<t_N=t$. Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{N-1} b(t_i, x(t_i))\,(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i))=J(N). \tag{3.3}$$

Если при стремлении к нулю длины максимального интервала $t_{i+1}-t_i$ разбиений сумма (3.3) сходится в среднеквадратическом к некоторому пределу, то этот предел называется *стохастическим интегралом Ито* и обозначается $\int_0^t b(s, x(s))\,d\xi(s)$.

При этом сходимость в среднеквадратическом означает, что

$$M\left[\int_0^t b(s, x(s))\,d\xi(s)-J(N)\right]^2\to 0$$

при $\max(t_{i+1}-t_i)\to 0$.

Отметим, что в смысле Стилтьеса стохастический интеграл Ито может и не существовать в силу соотношений (2.5). Из сходимости же в среднеквадратическом интегральных сумм (3.3) вытекает лишь их сходимость по вероятности, но не с вероятностью 1. Впрочем, из сходимости J в среднеквадратическом следует, что для некоторой последовательности $\{t_i\}$ разбиений J сходится и с вероятностью 1.

Пример 3.1. Найдем значение интеграла $\int_0^T \xi(t)\,d\xi(t)$, где $\xi(t)$ —

стандартный винеровский процесс. Соответствующая интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{j=0}^{m-1} \xi(t_j)\,(\xi(t_{j+1})-\xi(t_j)),\quad 0=t_0<t_1<\ldots<t_m=T.$$

Заметим, что

$$\xi(t_j)\,(\xi(t_{j+1})-\xi(t_j))=\frac{1}{2}\,[(\xi^2(t_{j+1})-\xi^2(t_j))-(\xi(t_{j+1})-\xi(t_j))^2].$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \xi(t_j)\,(\xi(t_{j+1})-\xi_j))=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}[\xi^2(t_{j+1})-\xi^2(t_j)]-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}(\xi(t_{j+1})-\xi(t_j))^2.$$

Здесь первая сумма в правой части равна $\xi^2(T)/2$, а вторая в силу свойств винеровского процесса стремится к $T/2$ при $\max(t_{j+1}-t_j)\to 0$. Таким образом,

$$\int_0^T \xi(t)\,\mathrm{d}\xi(t)=\frac{1}{2}\,[\xi^2(T)-T].$$

Для построения интеграла Стратоновича рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{N-1} b\left(t_i,\frac{1}{2}\,(x(t_{i+1})+x(t_i))\right)(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)). \tag{3.4}$$

Предел в среднеквадратическом этой суммы называется *стохастическим интегралом Стратоновича* и обозначается так:

$$\int_0^t b(s, x(s))\,\overline{\mathrm{d}\xi(s)}.$$

Стохастическое уравнение (3.2) понимается соответственно тому, в каком смысле понимается стохастический интеграл в (3.2). Оказывается, что если процесс $x(t)$ удовлетворяет *уравнению Стратоновича*

$$\mathrm{d}x(t)=f(t, x(t))\,\mathrm{d}t+b(t, x(t))\,\overline{\mathrm{d}\xi(t)}, \tag{3.5}$$

то он также является решением следующего *уравнения Ито*:

$$dx(t)=f(t, x(t))\,dt+b(t, x(t))\,d\xi(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial b(t, x(t))}{\partial x}b(t, x(t))\,dt. \quad (3.6)$$

Здесь через $(\partial b/\partial x)\,b$ обозначен вектор, i-я компонента которого равна

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial b_{ik}(t, x)}{\partial x_j}\right)b_{ik}(t, x),\ i=1, \ldots, n.$$

Приведем эвристическое обоснование эквивалентности уравнений (3.5) и (3.6). Запишем разностное уравнение, предел решений которого в среднеквадратическом представляет собой решение уравнений (3.5):

$$x(t_{i+1})-x(t_i)=f(t_i, x(t_i))(t_{i+1}-t_i)+$$
$$+b\left(t_i, \frac{1}{2}(x(t_{i+1})+x(t_i))\right)(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)). \quad (3.7)$$

С точностью до бесконечно малых высшего порядка малости с помощью формулы Тейлора можно записать выражение

$$b\left(t_i, \frac{1}{2}(x(t_{i+1})+x(t_i))\right)=b(t_i, x(t_i))+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial b(t_i, x(t_i))}{\partial x}(x(t_{i+1})-x(t_i)). \quad (3.8)$$

Подставив выражение (3.8) в (3.7) и обозначая через I единичную матрицу, получим

$$\left[I-\frac{1}{2}\frac{\partial b(t_i, x(t_i))}{\partial x}(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i))\right](x(t_{i+1})-x(t_i))=$$
$$=f(t_i, x(t_i))(t_{i+1}-t_i)+b(t_i, x(t_i))(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i)).$$

Отсюда вытекает, что

$$x(t_{i+1})-x(t_i)=\left[I-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b(t_i, x(t_i))}{\partial x}\right)(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i))\right]^{-1}\times$$
$$\times f(t_i, x(t_i))(t_{i+1}-t_i)+b(t_i, x(t_i))(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i))=$$
$$=f(t_i, x(t_i))(t_{i+1}-t_i)+b(t_i, x(t_i))(\xi(t_{i+1})-\xi(t_i))+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b(t_i, x(t_i))}{\partial x}\right)b(t_i, x(t_i)).$$

Последнее соотношение представляет собой разностную аппроксимацию уравнения Ито (3.6).

Ввиду эквивалентности уравнений (3.5) и (3.6) ограничимся в дальнейшем изложении рассмотрением стохастических уравнений Ито.

Приведем ряд свойств стохастических интегралов Ито. Определим на основном вероятностном пространстве (Ω, U, P) семейство σ-алгебр F_t, порожденных винеровским процессом $\xi(t)$, удовлетворяющих условиям:

1^0) для любых t и s, $t<s$, справедливо вложение $F_t \subset F_s$;

2^0) винеровский процесс $\xi(t)$ измерим относительно F_t. Последнее означает, что для любого борелевского множества $A \in R_n$ событие $\{\omega : \xi(t) \in A\}$ принадлежит F_t;

3^0) при любых неотрицательных t и s процесс $\xi(t+s)-\xi(t)$ не зависит от любого из событий σ-алгебры F_t.

Стохастический интеграл Ито

$$\zeta(t)=\int_0^t \alpha(s)\,\mathrm{d}\xi(s) \tag{3.9}$$

определен для любых случайных процессов $\alpha(t)$, удовлетворяющих требованиям:

1) процесс $\alpha(t)$ измерим относительно F_t при любом t;

2) с вероятностью 1 конечен интеграл

$$J(\alpha)=\int_0^T M\left(|\alpha(t)|^2/F_0\right)\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

Рассматриваемый как функция верхнего предела стохастический интеграл (3.9) определяет некоторый случайный процесс $\zeta(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$M\zeta(t)=M\int_0^t \alpha(s)\,\mathrm{d}\xi(s)/F_0=0,$$

$$M\left(\zeta(t_1)\zeta'(t_2)\right)=\int_0^{\min(t_1,\,t_2)} M\left(\alpha(s)\alpha'(s)/F_0\right)\mathrm{d}s.$$

Значения стохастического интеграла (3.9) при различных значениях верхнего предела t могут быть согласованы таким образом, что процесс $\zeta(t)$ будет сепарабельным и непрерывным.

2. Формула Ито. Рассмотрим некоторый процесс $\gamma(t)$, измеримый относительно F_t для любого t, причем

$$\gamma(t_2)-\gamma(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\sigma(t)\,d\xi(t),\ 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T.$$

Здесь вектор $f(t)$ и матрица $\sigma(t)$ со случайными элементами измеримы относительно F_t при любом t и $J(t)<\infty$, $J(\sigma)<\infty$, где функционал J определен формулой (3.10). Говорят, что сумма $f(t)\,dt+\sigma(t)\,d\xi(t)$ есть *стохастический дифференциал* $d\gamma(t)$ процесса $\gamma(t)$, и пишут

$$d\gamma(t)=f(t)\,dt+\sigma(t)\,d\xi(t). \tag{3.11}$$

Пусть для скалярной функции $V(t, x)$ существуют непрерывные частные производные $V_t=\partial V/\partial t$, $V_x=\partial V/\partial x$ и V_{xx}. Тогда если процесс $\gamma(t)$ имеет стохастический дифференциал (3.11), то процесс $\eta(t)=V(t, \gamma(t))$ также имеет стохастический дифференциал $d\eta(t)$. Этот дифференциал выражается с помощью *формулы Ито*:

$$d\eta(t)=[V_t(t, \gamma(t))+V'_x(t, \gamma(t))f(t)+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\sigma(t)\sigma'(t)V_{xx}(t, \gamma(t))]\,dt+V'_x(t, \gamma(t))\sigma(t)\,d\xi(t). \tag{3.12}$$

Здесь Tr — след матрицы; $V_x\in R_n$ — вектор с компонентами $\partial V/\partial x_i$; V_{xx} — квадратная матрица с элементами $\partial^2 V/(\partial x_i\partial x_j)$ $(i, j=1, \ldots, n)$. Формула Ито представляет собой аналог формулы дифференцирования сложной функции.

Приведем эвристический вывод этой формулы. Пусть τ_1 и τ_2 $(\tau_1<\tau_2)$ — два произвольных момента времени. Разобьем отрезок $[\tau_1, \tau_2]$ точками t_i: $\tau_1=t_0<t_1<\ldots<t_m=\tau_2$. Ясно, что

$$\eta(\tau_2)-\eta(\tau_1)=\sum_{j=0}^{m-1}[V(t_{j+1}, \gamma(t_{j+1}))-V(t_j, \gamma(t_j))].$$

Используя формулу Тейлора, преобразуем правую часть:

$$V(t_{j+1}, \gamma(t_{j+1}))-V(t_j, \gamma(t_i))=V_t(t_j+\theta_j(t_{j+1}-t_j), \gamma(t_j))(t_{j+1}-t_j)+$$
$$+V'_x(t_j, \gamma(t_j))(\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j))+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}V_{xx}(t_j, \gamma(t_j)+\lambda_j(\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j)))\times$$
$$\times(\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j))(\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j)).$$

Здесь θ_j и λ_j — числа из отрезка [0, 1]. В соответствии с равенством (3.11) приращение процесса $\gamma(t)$ можно с точностью до величин, стремящихся с вероятностью 1 к нулю при $\max(t_{j+1}-t_j)\to 0$, представить в виде

$$\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j)=f(t_j)(t_{j+1}-t_j)+\sigma(t_j)(\xi(t_{j+1})-\xi(t_j)).$$

Из последних двух формул с той же точностью получим

$$V(t_{j+1}, \gamma(t_{j+1})) - V(t_j, \gamma(t_j)) =$$
$$= [V_t(t_j, \gamma(t_j)) + V'_x(t_j, \gamma(t_j)) f(t_j)](t_{j+1} - t_j) +$$
$$+ V'_x(t_j, \gamma(t_j)) \sigma(t_j)(\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)) +$$
$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Tr} V_{xx}(t_j, \gamma(t_j)) \sigma(t_j) \sigma'(t_j)(t_{j+1} - t_j).$$

При выводе последнего равенства было использовано, что при $\max(t_{j+1} - t_j) \to 0$ стремятся к нулю по вероятности величины

$$\sum_{j=0}^{m-1} \operatorname{Tr} V_{xx}(t_j, \gamma(t_j)) f(t_j) f'(t_j)(t_{j+1} - t_j)^2,$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \operatorname{Tr} V_{xx}(t_j, \gamma(t_j)) f(t_j)(t_{j+1} - t_j)(\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j))' \sigma'(t_j),$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \operatorname{Tr} V_{xx}(t_j, \gamma(t_j)) \sigma(t_j) [\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)(\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j))' -$$
$$- I(t_{j+1} - t_j)] \sigma'(t_j).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\eta(t_2) - \eta(t_1) = \sum_{j=0}^{m-1} \left[\left(V_t(t_j, \gamma(t_j)) + V'_x(t_j, \gamma(t_j)) f(t_j) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} V_{xx}(t_j, \gamma(t_j)) \sigma(t_j) \sigma'(t_j) \right)(t_{j+1} - t_j) +$$
$$\left. + V'_x(t_j, \gamma(t_j)) \sigma(t_j)(\xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)) \right].$$

Замечая, что пределы всех сумм в этом выражении равны соответствующим интегралам, приходим к формуле Ито (3.12).

Рассмотрим теперь некоторые примеры вычисления стохастических интегралов.

Пример 3.2. Пусть $\xi(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс. Вычислим интеграл Ито:

$$\int_0^T \xi(t)\, d\xi(t). \tag{3.13}$$

Интеграл (3.13) уже был найден в примере 3.1. Здесь же приведем другой способ его вычисления. Обозначим через $x(t)$ случайный процесс, удовлетворяющий уравнению

$$dx(t)=d\xi(t),\ x(0)=0. \tag{3.14}$$

Ясно, что $x(t)=\xi(t)$. Применим теперь формулу Ито к функции $V(t, x(t))=x^2(t)$. Учитывая соотношение (3.12), имеем

$$dx^2(t)=2x(t)\,d\xi(t)+dt=2\xi(t)\,d\xi(t)+dt.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$\int_0^T dx^2(t)=x^2(T)-x^2(0)=\xi^2(T)=2\int_0^T \xi(t)\,d\xi(t)+T.$$

Таким образом, окончательно находим

$$\int_0^T \xi(t)\,d\xi(t)=\frac{1}{2}[\xi^2(T)-T]. \tag{3.15}$$

Пример 3.3. Найдем значение интеграла, аналогичного (3.13), но понимаемого в смысле Стратоновича: $\int_0^T \xi(t)\,\overline{d\xi(t)}$. Этот интеграл можно вычислить тем же способом, что и выше. Однако можно поступить и иначе, используя непосредственно определение интеграла. В силу (3.4) величина этого интеграла есть предел в среднеквадратическом интегральных сумм

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(\xi(t_{j+1})+\xi(t_j))(\xi(t_{j+1})-\xi(t_j))=$$

$$=\sum_{j=0}^{N-1}\xi(t_j)(\xi(t_{j+1})-\xi(t_j))+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(\xi(t_{j+1})-\xi(t_j))^2. \tag{3.16}$$

В правой части равенства (3.16) первое слагаемое представляет собой интегральную сумму, соответствующую интегралу Ито (3.13), т. е. в силу (3.15) оно стремится к $(\xi^2(T)-T)/2$. Согласно свойству винеровского процесса, вторая сумма сходится по вероятности к $T/2$, поскольку

$$\sum_{j=0}^{N-1}[(\xi(t_{j+1})-\xi(t_j))^2-(t_{j+1}-t_j)]\to 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^T \xi(t)\,\overline{d\xi(t)}=\frac{1}{2}\xi^2(T).$$

Этот пример показывает, что интеграл Стратоновича по формальным свойствам более похож на обычный определенный интеграл, чем интеграл Ито.

Пример 3.4. Рассмотрим систему двух стохастических уравнений Ито

$$\begin{aligned} dx(t) &= -\frac{1}{2}x(t)\,dt + y(t)\,d\xi(t), \\ dy(t) &= -\frac{1}{2}y(t)\,dt - x(t)\,d\xi(t), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $\xi(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс. Покажем, что решением системы (3.17) являются процессы $x(t) = \sin\xi(t)$, $y(t) = \cos\xi(t)$. Используя формулу Ито, имеем

$$dx(t) = (\cos\xi(t))\,d\xi(t) - \frac{1}{2}(\sin\xi(t))\,dt = y(t)\,d\xi(t) - \frac{1}{2}x(t)\,dt,$$

$$dy(t) = -(\sin\xi(t))\,d\xi(t) - \frac{1}{2}\cos\xi(t)\,dt = -x(t)\,d\xi(t) - \frac{1}{2}y(t)\,dt.$$

Пример 3.5. Пусть скалярная функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Найдем стохастический интеграл Ито:

$$\int_0^T f(\xi(t))\,d\xi(t), \quad f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}.$$

Применим формулу Ито к функции $F(x(t))$, где процесс $x(t)$ описывается соотношениями (3.14). Имеем

$$dF(x(t)) = dF(\xi(t)) = f(\xi(t))\,d\xi(t) + \frac{1}{2}f_x(x(t))\,dt.$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$\int_0^T f(\xi(t))\,d\xi(t) = F(\xi(T)) - F(0) - \frac{1}{2}\int_0^T f_x(\xi(t))\,dt.$$

3. Марковские диффузионные процессы. Решение стохастического дифференциального уравнения (3.1) определяется как случайный процесс $x(t)$, измеримый относительно F_t при каждом t и удовлетворяющий интегральному тождеству (3.2) при любом t с вероятностью 1. Приведем некоторые условия существования решения уравнения (3.1).

Теорема 3.1 [3]. *Пусть функции $f(t, x)$ и $b(t, x)$ измеримы по совокупности аргументов $t \geqslant 0$, $x \in R_n$ и удовлетворяют условиям*

$$|f(t, x)|^2+|b(t, x)|^2 \leqslant C(1+|x|^2), \quad C \geqslant 0, \tag{3.18}$$

$$|f(t, x)-f(t, y)|+|b(t, x)-b(t, y)| \leqslant C|x-y| \tag{3.19}$$

для любых $x, y \in R_n$, $|x|=(x'x)^{1/2}$. *Тогда существует, и притом единственное, решение уравнения* (3.1) *на любом отрезке* $[0, T]$. *При этом единственность понимается в следующем смысле: если* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *— два непрерывных решения уравнения* (3.1), *то при любом* $T>0$ *справедливо соотношение*

$$P(\sup_t |x_1(t)-x_2(t)|>0)=0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Решение уравнения (3.1) представляет собой марковский процесс, переходная вероятность которого $P(t, x, t_1, A)$ (где $t_1>t$, $A \in R_n$) определяется равенством

$$P(t, x, t_1, A)=P(X_{t, x}(t_1) \in A). \tag{3.20}$$

В равенстве (3.20) процесс $X_{t, x}(s)$ есть решение уравнения (3.1) при $s>t$ начальным условием $X_{t, x}(t)=x$. Если вектор x — случайный, то при выполнении условий (3.18) имеет место неравенство

$$M|X_{t, x}(t_1)|^4 \leqslant C_1(1+M|x|^4). \tag{3.21}$$

Здесь постоянная C_1 зависит от t, t_1 и постоянной C в условии (3.18).

Во многих задачах возникает необходимость вычисления средних значений некоторых функционалов от решений уравнения (3.1). В ряде случаев эту задачу можно свести к решению краевой задачи для уравнений в частных производных. Пусть, например, требуется вычислить математическое ожидание

$$MF(X_{t, x}(s)), \quad s \geqslant t. \tag{3.22}$$

Здесь $F(x)$ — заданная непрерывная ограниченная скалярная функция. Значение функционала (3.22) зависит от начального момента t и начального вектора x. Положим

$$u(t, x)=MF(X_{t, x}(s)), \quad s \geqslant t, \tag{3.23}$$

где s фиксировано. Предположим, что коэффициенты $f(t, x)$ и $b(t, x)$ уравнения (3.1) и функция F в (3.22) определены при $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in R_n$ и имеют в этой области непрерывные ограниченные производные по x до второго порядка включительно. Тогда функция $u(t, x)$ из (3.23) имеет непрерывные производные по x до второго порядка включительно, дифференцируема по t и удовлетворяет уравнению

$$Lu(t, x)=0 \quad (t \leqslant s, x \in R_n). \tag{3.24}$$

Дифференциальный оператор L, называемый *производящим оператором марковского процесса* (3.1), выражается формулой

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+f'\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\operatorname{Tr} bb'\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{3.25}$$

Из (3.23) вытекает начальное условие для функции $u(t, x)$:

$$\lim_{t\to s} u(t, x)=F(x),\ x\in R_n. \tag{3.26}$$

Решив задачу Коши (3.24) — (3.26), получим значение функционала (3.22) при производных (t, x). Уравнение (3.24) называется *обратным уравнением Колмогорова.*

Опишем вероятностный смысл оператора (3.25). Возьмем ограниченную область $Q\in R_n$. Пусть в момент времени t_0 решение системы (3.1) находится в Q, т. е. $P\{x(t_0)\in Q\}=1$. Обозначим через τ_Q момент первого выхода из области Q процесса $X_{t_0, x(t_0)}(t)$ $(t\geqslant t_0)$. Положим $\tau_Q(t)=\min(\tau_Q, t)$. Тогда для любой функции $V(t, x)$, непрерывно дифференцируемой по t и дважды непрерывно дифференцируемой по x, справедлива формула

$$M[V(\tau_Q(t), X_{t_0, x(t_0)}(\tau_Q(t)))-V(t_0, x(t_0))]=$$
$$=M\int_{t_0}^{\tau_Q(t)} LV(s, X_{t_0, x(t_0)}(s))\,ds. \tag{3.27}$$

Пример 3.6. Рассмотрим скалярный процесс $x(t)$, удовлетворяющий уравнению

$$dx(t)=ax(t)\,dt+\sigma x(t)\,d\xi(t),\ x(0)=x_0,\ T\geqslant t\geqslant 0.$$

Здесь a, x_0, σ — заданные постоянные, $\xi(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс. Найдем второй момент $Mx^2(T)$. В рассматриваемом примере его можно определить двумя способами: непосредственно с помощью формулы Ито и с помощью обратного уравнения Колмогорова.

Применяя формулу Ито к функции $x^2(t)$, получаем

$$dx^2(t)=2x(t)\,(ax(t)\,dt+\sigma x(t)\,d\xi(t))+\sigma^2x^2(t)\,dt.$$

Проинтегрируем обе части этого соотношения в пределах от нуля до t и вычислим математическое ожидание от обеих частей полученного равенства. Имеем

$$Mx^2(t)-x_0^2=(2a+\sigma^2)\int_0^t Mx^2(s)\,ds.$$

Отсюда видно, что функция $Mx^2(t)$ является решением детерминированного уравнения

$$\frac{d}{dt} Mx^2(t) = (2a+\sigma^2) Mx^2(t), \quad Mx_0^2(0) = x_0^2.$$

Решая это уравнение, заключаем, что

$$Mx^2(T) = x_0^2 \exp[(2a+\sigma^2)T].$$

Приведем теперь другой способ определения $Mx^2(T)$. Положим

$$V(t, x) = M[x^2(T)/x(t) = x], \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Запишем для функции $V(t, x)$ обратное уравнение Колмогорова:

$$LV = V_t + axV_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V_{xx} = 0,$$
$$V(T, x) = x^2. \tag{3.28}$$

Будем искать решение задачи Коши (3.28) в виде

$$V(t, x) = P(t) x^2, \tag{3.29}$$

где функция $P(t)$ подлежит определению. Подставляя выражение (3.29) в (3.28) для определения $P(t)$, получаем уравнение

$$\dot{P}(t) + (2a+\sigma^2) P(t) = 0, \quad P(T) = 1.$$

Значит,

$$P(t) = \exp[(2a+\sigma^2)(T-t)].$$

Поэтому

$$Mx^2(T) = V(0, x_0) = P(0) x_0^2 = x_0^2 \exp[(2a+\sigma^2)T].$$

4. Линейные стохастические уравнения. Так же как и в примере 3.1, можно получить выражения для моментов решений системы линейных уравнений вида

$$dx(t) = A(t) x(t) dt + \sigma(t) d\xi(t) + f(t) dt, \quad t \geqslant 0,$$
$$x(0) = x_0, \quad x \in R_n, \quad \xi \in R_m, \quad f \in R_n. \tag{3.30}$$

Здесь A и σ — заданные матрицы, имеющие соответственно размеры $n \times n$ и $n \times m$, с непрерывными элементами; f — заданная непрерывная функция. Случайная величина x_0 имеет характеристики

$$Mx_0 = m_0, \quad M(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)' = D_0.$$

Обозначим через $m(T)$ вектор математического ожидания, а через $D(t)$ — матрицу ковариации процесса $x(t)$:

$$m(t) = Mx(t), \quad D(t) = M[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))'].$$

Используя формулу Ито, заключаем, что справедливы уравнения

$$\dot{m}(t)=A(t)m(t)+f(t),\ m(0)=m_0, \tag{3.31}$$

$$\dot{D}(t)=A(t)D(t)+D(t)A'(t)+\sigma(t)\sigma'(t),\ D(0)=D_0. \tag{3.32}$$

Обозначим через $Z(t, s)$ матрицу Коши линейного уравнения $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$. Тогда в силу (3.31), (3.32) математическое ожидание процесса (3.30) и матрица ковариации выражаются соотношениями

$$m(t)=Z(t, 0)m_0+\int_0^t Z(t, s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$D(t)=Z(t, 0)D_0Z'(t, 0)+\int_0^t Z(t, s)\sigma(s)\sigma'(s)Z'(t, s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.33}$$

Аналогично можно записать выражения для моментов решений линейного уравнения с диффузией, зависящей от фазовых координат:

$$\mathrm{d}x(t)=A(t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t)x(t)\,\mathrm{d}\xi(t)+f(t)\,\mathrm{d}t,\ t\geqslant 0,$$
$$x(0)=x_0,\ \xi\in R_1,$$

где A и σ — матрицы размера $n\times n$ с непрерывными элементами. В этом случае уравнение для $m(t)$ записывается в виде (3.31), а уравнение для $D(t)$ — в виде

$$\dot{D}(t)=A(t)D(t)+D(t)A'(t)+\sigma(t)(D(t)+m(t)m'(t))\,\sigma'(t),$$
$$D(0)=D_0.$$

Пример 3.7. Рассмотрим систему второго порядка (см. [6] ко второй части)

$$\dot{x}_1=x_2,$$
$$\dot{x}_2=-\omega^2x_1-2\alpha\omega x_2+\omega^2\sqrt{q}\dot{\xi}(t), \tag{3.34}$$

где $\alpha>0$, $q>0$ и $\omega>0$ — заданные постоянные. Вектор $(x_1(0), x_2(0))$ имеет нулевое математическое ожидание и матрицу ковариации $D(0)$ с элементами $d_{ij}(0)$, $i, j=1,2$. Выражение для $D(t)$ имеет вид (3.33), где элементы $z_{ij}(t, s)=z_{ij}(t-s)$ и $\sigma(t)$ таковы:

$$z_{11}(t)=\mathrm{e}^{-\alpha\omega t}\left(\cos\beta t+\frac{\alpha\omega}{\beta}\sin\beta t\right),$$
$$z_{12}(t)=\frac{1}{\beta}\sin\beta t,$$
$$z_{21}(t)=-\omega^2\beta^{-1}\sin\beta t,$$

$$z_{22}(t)=\cos\beta t-\alpha\omega\beta^{-1}\sin\beta t,\ \beta=\omega(1-\alpha^2)^{1/2},$$

$$\sigma(t)=\begin{pmatrix}0\\ \omega^2\sqrt{q}\end{pmatrix}.$$

Из выражений для элементов $d_{ij}(t)$ матрицы $D(t)$ следует, что при $t\to\infty$, $\alpha>0$ справедливы соотношения

$$\lim_{t\to\infty} d_{11}(t)=q\omega(4\alpha)^{-1},\ \lim_{t\to\infty} d_{12}(t)=0,\ \lim_{t\to\infty} d_{22}(t)=q\omega^3(4\alpha)^{-1}.$$

Графики функций $d_{11}(t)$, $d_{12}(t)$, $d_{22}(t)$, умноженных на некоторые постоянные, при $\alpha=0{,}2$ и $D(0)=0$ изображены на рис. 3.1. На рис. 3.2 жирной линией изображена функция $(Mx_1(t), Mx_2(t))$ для траек-

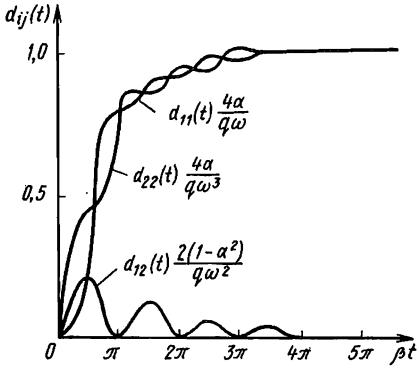


Рис. 3.1. Графики элементов матрицы ковариации гауссовского марковского процесса второго порядка с малым демпфированием $\alpha=0{,}2$

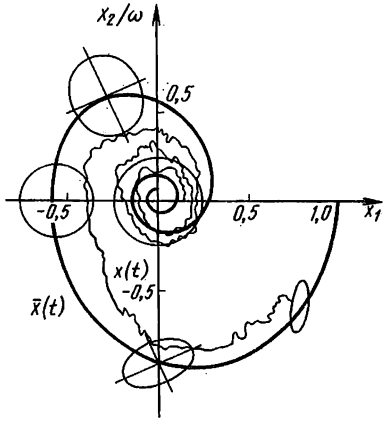


Рис. 3.2. Фазовая траектория $x(t)$ и математическое ожидание $\bar{x}(t)$ гауссовского марковского процесса второго порядка с малым демпфированием $\alpha=0{,}2$

торий системы, начинающихся из положения $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$, а ломаной линией — выборочная траектория. На этом же рисунке для некоторых моментов времени t изображены эллипсы, вероятность пребывания системы (3.34) внутри которых в момент t составляет 0,865.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Как и обычно в теории устойчивости, вопрос об устойчивости некоторого решения уравнения (3.1) с помощью замены переменных может быть сведен к исследованию вопроса об устойчивости тривиального решения. Поэтому можно считать, что

$$f(t, 0)\equiv 0,\ \sigma(t, 0)\equiv 0,\ t\geqslant 0. \tag{4.1}$$

При выполнении условия (4.1) уравнение (3.1) имеет тривиальное решение $x(t)\equiv 0$. Под устойчивостью тривиального решения уравнения (3.1) понимается его свойство мало изменяться при малом изменении начальных условий. В зависимости от конкретного понимания выражения «малое изменение решения» возможны различные определения устойчивости. Некоторые из них приводятся ниже.

Определение 4.1. Тривиальное решение уравнения (3.1) называется:

слабо устойчивым по вероятности, если для $\forall\varepsilon>0$, $\forall\delta>0$ найдется такое $\eta(\varepsilon, \delta)>0$, что при $t\geqslant t_0$ и $|x_0|<\eta(\varepsilon, \delta)$ выполняется неравенство

$$P\{|X_{t_0, x_0}(t)|>\varepsilon\}<\delta; \tag{4.2}$$

асимптотически слабо устойчивым по вероятности, если оно слабо устойчиво по вероятности и, кроме того, для $\forall\varepsilon>0$ найдется такое $\eta(\varepsilon)>0$, что при $|x_0|<\eta(\varepsilon)$ имеет место соотношение

$$P\{|X_{t_0, x_0}(t)|>\varepsilon\}\to 0,\ t\to\infty;$$

асимптотически слабо устойчивым по вероятности в целом, если оно асимптотически слабо устойчиво по вероятности и, кроме того, для $\forall x_0$, $\forall\varepsilon_1>0$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} P\{|X_{t_0, x_0}(t)|>\varepsilon_1\}=0;$$

асимптотически слабо устойчивым по вероятности в целом равномерно по начальным данным, если в предыдущем определении стремление к нулю равномерно для $\forall t_0\geqslant 0$ и всех $|x_0|<\eta$.

Определение 4.2. Тривиальное решение уравнения (3.1) называется:

p-устойчивым ($p>0$), если для $\forall\varepsilon>0$ найдется $\eta(\varepsilon)>0$ такое, что при $|x_0|<\eta(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$M|X_{t_0, x_0}(t)|^p\leqslant\varepsilon,\ \forall t\geqslant t_0;$$

асимптотически p-устойчивым, если оно p-устойчиво, и, кроме того, для $|x_0|<\eta$ при некотором $\eta>0$ имеет место соотношение

$$\lim_{t\to\infty} M|X_{t_0, x_0}(t)|^p=0;$$

экспоненциально p-устойчивым, если найдутся такие положительные постоянные C_0 и C_1, что

$$M|X_{t_0, x_0}(t)|^p\leqslant C_0|x_0|^p\exp(-C_1(t-t_0));$$

асимптотически p-устойчивым в целом, если оно асимптотически p-устойчиво и для $\forall x_0$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\infty} M|X_{t_0,\,x_0}(t)|^p = 0.$$

Кроме приведенных определений используется также понятие *устойчивости с вероятностью* 1. Под этим понятием подразумевается такая устойчивость, при которой все траектории системы (кроме, быть может, множества траекторий нулевой вероятности) устойчивы в соответствующем смысле.

Предположим, что тривиальное решение уравнения (3.1) p-устойчиво ($p>0$). Тогда для любого $p_1\in(0, p)$ в силу неравенства Гельдера имеем $M|X_{t_0,\,x_0}(t)|^{p_1} \leqslant [M|X_{t_0,\,x_0}(t)|^p]^{p_1/p}$. Значит, в этом случае тривиальное решение является также и p_1-устойчивым при любом $p_1\in(0, p)$. Аналогично из асимптотической p-устойчивости следует асимптотическая p_1-устойчивость при всех $p_1\in(0, p)$.

Воспользуемся теперь *неравенством Чебышева*:

$$P\{|X_{t_0,\,x_0}(t)|>\varepsilon\} \leqslant MV(t, X_{t_0,\,x_0}(t))[\inf_{t\geqslant t_0,\ |x_0|>\varepsilon} V(t, x)]^{-1}.$$

Здесь $V(t, x)$ — произвольная неотрицательная функция, для которой существует $MV(t, X_{t_0,\,x_0}(t))$. На основании неравенства Чебышева при $V(t, x)=|x|^p$ для любого $p>0$ имеем

$$P\{|X_{t_0,\,x_0}(t)|>\varepsilon\} \leqslant \varepsilon^{-p} M|X_{t_0,\,x_0}(t)|^p.$$

Следовательно, из p-устойчивости тривиального решения уравнения (3.1) вытекает его слабая устойчивость по вероятности, а из асимптотической p-устойчивости — асимптотическая слабая устойчивость по вероятности. Отметим еще, что p-устойчивость при $p=2$ называется также *устойчивостью в среднеквадратическом*.

Определение 4.3. Тривиальное решение уравнения (3.1) называется:

устойчивым по вероятности, если для $\forall\, s\geqslant t_0$, $\forall\, \varepsilon>0$ выполняется соотношение

$$\lim_{x_0\to 0} P\{\sup_{t\geqslant s} |X_{s,\,x_0}(t)|>\varepsilon\}=0; \tag{4.3}$$

асимптотически устойчивым по вероятности, если оно устойчиво по вероятности и

$$\lim_{x_0\to 0} P\{\lim_{t\to\infty} X_{t_0,\,x_0}(t)=0\}=1;$$

равномерно устойчивым по вероятности, если $P\{\sup_t |X_{s,\,x_0}(t)|>$ $>\varepsilon\}$ стремится к нулю при $x_0\to 0$ равномерно по x_0 и $s\geqslant t_0$;

асимптотически устойчивым по вероятности в целом, если оно устойчиво по вероятности и для $\forall t_0$, $\forall x_0$ имеет место соотношение

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} X_{t_0,\,x_0}(t)=0\right\}=1.$$

Устойчивость по вероятности значительно сильнее слабой устойчивости и означает, что траектории процесса, начинающиеся в момент t_0 из точки x_0, всегда остаются в любой наперед заданной окрестности тривиального решения с вероятностью, стремящейся к единице, когда $x_0\to 0$. В задачах устойчивости стохастических систем наиболее интересным, по-видимому, представляется исследование устойчивости по вероятности и p-устойчивости.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

1. Достаточные условия устойчивости. Сформулируем ряд достаточных условий устойчивости, используя функции Ляпунова. Приводимые ниже теоремы 5.1 — 5.3 установлены Р. З. Хасьминским [20].

Напомним, что функция $V(t, x)$ называется положительно определенной, если $V(t, 0)\equiv 0$ и $V(t, x)\geqslant\omega_1(|x|)$. Как и в гл. I, через $\omega_i(u)$ обозначены непрерывные скалярные неубывающие функции такие, что $\omega_i(u)>0$ при $u>0$ и $\omega_i(0)=0$. Будем говорить, что функция $V(t, x)\in C_2^1(U)$, где область $U=\{t\geqslant t_0\}\times\{|x|\leqslant r\}$, если эта функция дважды непрерывно дифференцируема по x и один раз по t всюду в области U, кроме, быть может, множества $\{x=0\}$, и непрерывна в замкнутом множестве $U_\varepsilon=\{t\geqslant t_0\}\times\{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant r\}$ при любом $\varepsilon>0$.

Теорема 5.1. *Пусть в области U существует непрерывная функция $V(t, x)\in C_2^1(U)$, для которой при $x\neq 0$ справедливы неравенства*

$$\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x),\quad LV\leqslant 0, \tag{5.1}$$

где оператор L определен формулой (3.25). *Тогда тривиальное решение уравнения* (3.1) *устойчиво по вероятности.*

□ Возьмем произвольное $\varepsilon\in(0, r)$, произвольный момент s и начальную точку $x_0\in(-\varepsilon, \varepsilon)$. Рассмотрим решение $X_{s,\,x_0}(t)$ $(t\geqslant s)$ уравнения (3.1). Проверим, что при выполнении условий теоремы 5.1 процесс $X_{s,\,x_0}(t)$ удовлетворяет соотношению (4.3). Обозначим через τ_ε момент первого достижения процессом $X_{s,\,x_0}(t)$ поверхности $|x|=\varepsilon$. Если некоторые траектории процесса X ни за какое конечное время не достигают поверхности $|x|=\varepsilon$, то для них τ_ε считаем равным ∞. Положим $\tau_\varepsilon(t)=\min(\tau_\varepsilon, t)$. Тогда в силу (3.27) имеем

$$M[V(\tau_\varepsilon(t), X_{s,\,x_0}(\tau_\varepsilon(t)))-V(s, x_0)]=$$

$$=M\int_s^{\tau_\varepsilon(t)} LV(s_1, X_{s,\,x_0}(s_1))\,ds_1.$$

Отсюда и из условия (5.1) вытекает, что

$$MV(\tau_\varepsilon(t), X_{s, x_0}(\tau_\varepsilon(t))) \leqslant V(s, x_0). \tag{5.2}$$

Положим $V_\varepsilon = \inf\limits_{t \geqslant t_0,\ \varepsilon \leqslant |x| \leqslant r} V(t, x) > 0$. Тогда в силу неравенства Чебышева, оценки (5.2) и определения V_ε находим

$$P\left\{\sup_{s \leqslant s_1 \leqslant t} |X_{s, x_0}(s_1)| > \varepsilon\right\} \leqslant V_\varepsilon^{-1} V(\tau_\varepsilon(t), X_{s, x_0}(\tau_\varepsilon(t))) \leqslant$$
$$\leqslant V_\varepsilon^{-1} V(s, x_0).$$

Если в последнем соотношении $t \to \infty$, то получаем

$$P\left\{\sup_{t \geqslant s} |X_{s, x_0}(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant V_\varepsilon^{-1} V(s, x_0).$$

Так как функция $V(s, x_0)$ непрерывна и удовлетворяет первому из неравенств (5.1), то

$$\lim_{x_0 \to 0} P\left\{\sup_{t \geqslant s} |X_{s, x_0}(t)| > \varepsilon\right\} = 0. \ \blacksquare$$

Аналогично теореме 5.1, используя функции Ляпунова, можно сформулировать условия устойчивости и в других смыслах. Приведем некоторые из них.

Теорема 5.2. *Пусть существует функция Ляпунова* ($V(t, x) \in C_2^1((t \geqslant t_0) \times R_n)$ *такая, что*

$$\omega_1(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant \omega_2(|x|),\ \omega_1(u) \to \infty,\ u \to \infty,\ LV \leqslant -\omega_3(|x|).$$

Тогда тривиальное решение уравнения (3.1) *асимптотически устойчиво в целом по вероятности.*

Теорема 5.3. *Пусть существует функция* $V(t, x) \in C_2^1((t \geqslant t_0) \times R_n)$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$k_1 |x|^p \leqslant V(t, x) \leqslant k_2 |x|^p, \tag{5.3}$$
$$LV(t, x) \leqslant -k_3 |x|^p,\ k_i > 0,\ p > 0. \tag{5.4}$$

Тогда тривиальное решение системы (3.1) *экспоненциально p-устойчиво при* $t \geqslant 0$.

□ Из условий теоремы и (3.22) следует существование $MV(t, X_{s, x}(t))$ при всех $t \geqslant s$, а также равенство

$$MV(t, X_{s, x}(t)) - V(s, x) = \int_s^t MLV(\tau, X_{s, x}(\tau))\, d\tau.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t и учитывая неравенства (5.3) и (5.4), получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} MV(t, X_{s,x}(t)) = MLV(t, X_{s,x}(t)) \leqslant -k_3 M |X_{s,x}(t)|^p \leqslant$$

$$\leqslant -k_3 k_2^{-1} MV(t, X_{s,x}(t)).$$

Отсюда следует, что

$$MV(t, X_{s,x}(t)) \leqslant V(s, x) \exp\{-k_3 k_2^{-1}(t-s)\}.$$

Из этого неравенства и (5.3) вытекает оценка

$$k_1 M |X_{s,x}(t)|^p \leqslant k_2 |x|^p \exp\{-k_3 k_2^{-1}(t-s)\},$$

означающая, что тривиальное решение уравнения (3.1) экспоненциально p-устойчиво. ■

Пример 5.1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\mathrm{d}x(t) = bx(t)\,\mathrm{d}t + \sigma x(t)\,\mathrm{d}\xi(t), \quad t \geqslant 0, \; x(0) = x_0. \tag{5.5}$$

Возьмем в качестве функции Ляпунова $V(x) = |x|^p$, $p > 0$. Тогда

$$L = bx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \; LV(x) = p|x|^p \left[b + \frac{\sigma^2}{2}(p-1)\right].$$

Значит, в силу теоремы 5.3 при $2b + \sigma^2(p-1) < 0$ тривиальное решение уравнения (5.5) экспоненциально p-устойчиво. Отметим, что, поскольку функция $V = |x|^p$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.2, тривиальное решение уравнения (5.5) также является асимптотически устойчивым по вероятности в целом.

Пример 5.2. При рассмотрении работы реальных систем в условиях неопределенности можно использовать разные классы случайных величин и процессов для моделирования различных источников неполноты информации. Вопрос о выборе адекватной модели весьма существен и крайне не прост. В каждом конкретном случае он должен специально исследоваться. Пусть, например, неустойчивая скалярная система находится под действием случайных сил и описывается уравнением (5.5). Тогда в соответствии с формулой Ито (3.12) решение уравнения (5.5) имеет вид

$$x(t) = x_0 \exp\left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\xi(t)\right).$$

Отсюда, используя закон повторного логарифма (2.5), заключаем, что при достаточной большой интенсивности σ возмущения система (5.5) асимптотически устойчива по вероятности, т. е., в частности,

систему можно стабилизировать (сделать устойчивой) за счет неопределенных факторов. Однако если работа системы описывается уравнением (5.5) в смысле Стратоновича, то это уже не имеет места. Действительно, в силу (3.5) и (3.6) уравнение Стратоновича (5.5) эквивалентно следующему уравнению Ито:

$$\mathrm{d}x(t)=\left(b+\frac{\sigma^2}{2}\right)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma x(t)\,\mathrm{d}\xi(t).$$

На основании формулы Ито решение этого уравнения имеет вид

$$x(t)=x_0\exp(bt+\sigma\xi(t)).$$

Значит, при таком способе описания скалярную систему нельзя стабилизировать случайными силами. Таким образом, этот пример показывает, что при описании конкретных физических систем в ряде случаев интеграл Стратоновича предпочтительнее.

2. Устойчивость линейных систем в среднеквадратическом. Исследуем условия экспоненциальной устойчивости в среднеквадратическом линейных систем вида

$$\mathrm{d}x(t)=A(t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)x(t)\,\mathrm{d}\xi_i(t),\ t\geqslant t_0,\ x\in R_n,\ \xi_i(t)\in R_1. \tag{5.6}$$

Здесь $A(t)$ и b_i — заданные матрицы размера $n\times n$ с непрерывными ограниченными элементами, стандартные винеровские процессы $\xi_i(t)$ взаимно независимы.

Теорема 5.4. *Для экспоненциальной устойчивости в среднеквадратическом системы* (5.6) *необходимо и достаточно существование функции* $V(t,\ x)\in C_2^1((t\geqslant t_0)\times R_n)$, *удовлетворяющей оценкам* (5.3), (5.4) *при* $p=2$.

□ Достаточность следует из теоремы 5.3.

Необходимость. Зададим функцию $V(t,\ x)$ с помощью равенства

$$V(t,\ x)=\int_t^{t+\tau}M|X_{t,\ x}(s)|^2\,\mathrm{d}s. \tag{5.7}$$

Здесь постоянный параметр $\tau>0$ будет выбран ниже, а через $X_{t,\ x}(s)$ обозначено решение уравнения (5.6) при $s\geqslant t$ с начальным условием $X_{t,\ x}(t)=x$, $x\in R_n$. Согласно определению экспоненциальной устойчивости в среднеквадратическом, имеем

$$M|X_{t,\ x}(s)|^2\leqslant C_0|x|^2\mathrm{e}^{C_1(t-s)},\ t\leqslant s. \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) вытекает неравенство

$$V(t, x) \leqslant C_0 |x|^2 \int_t^{t+\tau} e^{-C_1(t-s)}\, ds = k_2 |x|^2. \tag{5.9}$$

Для обоснования положительной определенности функции $V(t, x)$ заметим, что в силу формулы Ито стохастический дифференциал по s процесса $|X_{t,x}(s)|^2$ имеет вид

$$\begin{aligned} d|X_{t,x}(s)|^2 = [y' A(s) \frac{\partial}{\partial y} |y|^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} Tr(\sigma_i(s) y y' \sigma_i'(s) \frac{\partial^2}{\partial y^2} |y|^2)]\, ds + \\ + \sum_{i=1}^{m} y' \sigma_i'(s) \frac{\partial}{\partial y} |y|^2\, d\xi_i(s), \end{aligned} \tag{5.10}$$

где штрих означает знак транспонирования и положено $y = X_{t,x}(s)$. Выражение в квадратных скобках в (5.10) с учетом (3.25) есть результат применения производящего оператора L, соответствующего процессу (5.6), к функции $|y|^2$. Иными словами,

$$d|X_{t,x}(s)|^2 = (L(|y|^2))\, ds + \sum_{i=1}^{m} y' \sigma_i'(s) \frac{\partial}{\partial y} |y|^2\, d\xi_i(s), \tag{5.11}$$
$$y = X_{t,x}(s).$$

Напомним, что $|y|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$. Поэтому $\frac{\partial}{\partial y} |y|^2 = 2y$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} |y|^2 = 2$. Отсюда и из ограниченности коэффициентов A и σ_i уравнения (5.6) следует существование такой постоянной $k_1 > 0$, что

$$|L(|y|^2)| \leqslant \frac{1}{2k_1} |y|^2. \tag{5.12}$$

Далее, вследствие (3.21) четвертый момент процесса $X_{t,x}(s)$ конечен на любом конечном интервале изменения аргумента $s \geqslant t$. Отсюда и из свойств стохастических интегралов Ито вытекает, что

$$M \int_t^{t+\tau} X'_{t,x}(s) \sigma'_i(s) X_{t,x}(s)\, d\xi_i(s) = 0. \tag{5.13}$$

Проинтегрируем теперь обе части равенства (5.11) по s в пределах от $s = t$ до $s = t + \tau$ и вычислим затем математическое ожидание. С учетом (5.11) — (5.13) заключаем, что

$$M|X_{t,x}(t+\tau)|^2-|x|^2\geqslant-\frac{1}{2k_1}\int_t^{t+\tau}M|X_{t,x}(s)|^2\,ds=-\frac{1}{2k_1}V(t,x). \quad (5.14)$$

На основании (5.8) параметр $\tau>0$ можно выбрать так, что при всех t справедливо неравенство

$$M|X_{t,x}(t+\tau)|^2\leqslant\frac{1}{2}|x|^2.$$

Отсюда и из (5.14) следует оценка

$$V(t,x)\geqslant k_1|x|^2.$$

Тем самым установлено, что функция (5.7) удовлетворяет соотношениям (5.3) при $p=2$. Проверим, что для функции (5.7) справедливо неравенство (5.4) при $p=2$, имеющее в рассматриваемом случае вид

$$LV(t,x)\leqslant-k_3|x|^2,\ k_3>0,$$

где оператор L задается выражением

$$LV=\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+x'A(t)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Tr}\left(\sigma_i(t)\,xx'\sigma_i'(t)\frac{\partial^2V(t,x)}{\partial x^2}\right).$$

Действуя на обе части формулы (5.7) оператором L, находим

$$LV(t,x)=M|X_{t,x}(t+\tau)|^2-|x|^2+\int_t^{t+\tau}LM|X_{t,x}(s)|^2\,ds. \quad (5.15)$$

Но в силу (3.24) имеем $LM|X_{t,x}(s)|^2=0$, $s\geqslant t$. Поэтому на основании равенства (5.15) получим

$$LV(t,x)=M|X_{t,x}(t+\tau)|^2-|x|^2\leqslant-\frac{1}{2}|x|^2. \ \blacksquare$$

3. Скалярные уравнения n-го порядка. Приведем условия асимптотической устойчивости в среднеквадратическом линейного уравнения, коэффициенты которого a_i возмущаются взаимно независимыми винеровскими процессами $\xi_i(t)$. Рассматриваемое уравнение имеет вид

$$x^{(n)}(t)+(a_1+\sigma_1\dot{\xi}_1(t))x^{(n-1)}(t)+\ldots+(a_n+\sigma_n\dot{\xi}_n(t))x(t)=0,\ t>0, \quad (5.16)$$

где a_i и σ_i — заданные постоянные, и введено обозначение

$$x^{(n)}(t)=\frac{d^n x(t)}{dt^n},\ x(t)\in R_1.$$

Решение уравнения (5.16) при $t>0$ определяется заданием в начальный момент времени $t=0$ значений величин $x(0),..., x^{(n-1)}(0)$. Условия асимптотической устойчивости в среднеквадратическом системы (5.16) относительно возмущений начального положения формулируются следующим образом.

Теорема 5.5. *Для асимптотической устойчивости в среднеквадратическом системы* (5.16) *необходимо и достаточно, чтобы детерминированная система, полученная из* (5.16) *при* $\sigma_1=\sigma_2=...=\sigma_n=0$, *была асимптотически устойчивой и чтобы был положителен определитель*

$$\Delta=\det\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_2^2 & \sigma_3^2 & (-1)^{n-2}\sigma_{n-1}^2 & (-1)^{n-1}\sigma_n^2 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

§ 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА

1. Устойчивость по тангажу симметричного спутника на круговой орбите*. Движение реального спутника Земли определяется многими факторами, среди которых лишь градиент силы тяжести можно рассматривать как детерминированный. Все же остальные (например, аэродинамические и магнитные моменты, солнечная радиация, электрическое поле Земли, метеоритный поток и др.) имеют случайные составляющие. Кроме того, моменты инерции спутника, на величину которых влияют термоупругие колебания антенн и солнечных батарей, перемещение экипажа, движение жидкости в баках, также являются случайными.

Второй метод Ляпунова может быть применен при рассмотрении вопросов устойчивости движения спутника под действием случайных возмущений. Рассмотрим плоское движение симметричного спутника по круговой орбите. Предполагается, что угол тангажа x и скорость $y=\dot{x}$ описываются системой двух уравнений Ито:

---

*Сагиров П. Стохастические методы в динамике спутников // Сб.переводов "Механика", 1974, № 5(147).

$$\dot{x}=y,$$
$$dy=(-\sin x+l\sin 2x-\eta_0 y)\,dt-\sqrt{\sigma}\,(\sin x+\eta y)\,d\xi. \qquad (6.1)$$

Здесь $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс, постоянные η и $l<1/2$ определяются параметрами движения спутника, σ — интенсивность случайных возмущений атмосферы. При этом η — динамический коэффициент аэродинамического момента, l — момент сил тяготения. Задача состоит в определении условий устойчивости по вероятности нулевого решения систем (6.1). Для этого используем теорему 5.1 и положим

$$V(x, y)=\frac{1}{2}b\eta x^2+bxy+y^2+4\left(1-\eta\sigma-2l\cos^2\frac{x}{2}\right)\sin^2\frac{x}{2}, \qquad (6.2)$$

где параметр b будет выбран ниже.

В силу (6.1), (6.2), (3.25) получаем

$$LV=-(2\eta-b-\sigma\eta^2)y^2-\left(b-2bl\cos x-\sigma\frac{\sin x}{x}\right)x\sin x\leqslant$$
$$\leqslant-(2\eta-b-\sigma\eta^2)y^2-(b-2bl-\sigma)x\sin x. \qquad (6.3)$$

Из соотношений (6.2), (6.3) следует, что условия (5.1) выполнены, если $0<b<2\eta$, $\sigma<\min\left[b(1-2l),\ \frac{2\eta-b}{\eta^2}\right]$. Исследуя зависимость допустимых значений σ от b при фиксированном η, заключаем, что область изменения σ окажется наибольшей при

$$b=\frac{2\eta}{1+\eta^2(1-2l)}.$$

Значит, устойчивость по вероятности движения спутника по углу тангажа имеет место, если

$$\sigma<\frac{2\eta(1-2l)}{1+\eta^2(1-2l)}. \qquad (6.4)$$

Из этого условия видно, что при отсутствии возмущений ($\sigma=0$) движение по тангажу устойчиво, если момент сил тяготения l удовлетворяет неравенству $l<1/2$. При наличии же возмущений на основании (6.4) получим

$$l<\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sigma}{2\eta-\sigma\eta^2}\right).$$

Следовательно, учет возмущений приводит к уменьшению возможных значений моментов сил тяготения, при которых сохраняется устойчивость по тангажу движения спутника.

2. Устойчивость по углу рыскания спутника на круговой и экваториальной орбитах. Рассмотрим плоские колебания симметричного спутника на круговой и экваториальной орбитах по углу рыскания, обусловленные случайными флуктуациями магнитного поля Земли. Уравнения для угла рыскания x имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}=y, \\ &\mathrm{d}y=(-\alpha\sin x+\beta y)\,\mathrm{d}t-(2\sin x+2\beta y)\sqrt{\sigma}\,\mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{6.5}$$

где σ — интенсивность случайных возмущений магнитного поля, а α и β — положительные постоянные, зависящие от детерминированной составляющей магнитного поля и характеристик спутника.

Исследуем устойчивость по вероятности нулевого положения равновесия системы (6.5) с помощью теоремы (5.1). Положим

$$V(x, y)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta}x+\frac{y}{\sqrt{\beta}}\right)^2+\frac{2\beta}{\alpha}y^2+4(\alpha+4\beta^2)\left(\frac{1}{2\beta}-\sigma\right)\sin\frac{x}{2}.$$

Вычисляя LV, получим

$$LV\leqslant-\frac{\alpha+4\beta^2}{2\alpha\beta}\left(\frac{2\beta}{\alpha+4\beta^2}-\sigma\right)(\alpha^2 x\sin x+4\beta^2 y^2).$$

Отсюда видно, что условия (5.1) выполнены, если

$$\sigma<\frac{2\beta}{4\beta^2+\alpha},\quad \alpha>0,\quad \beta>0. \tag{6.6}$$

Таким образом, колебания по углу рыскания относительно случайных возмущений магнитного поля Земли устойчивы по вероятности, если интенсивность этих возмущений удовлетворяет неравенству (6.6).

Основные результаты и формулы главы II

Плотность вероятности гауссовского вектора:

$$f(x)=[(2\pi)^n(\det D)]^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)'D^{-1}(x-m)\right].$$

Математическое ожидание случайного вектора:

$$M\zeta=\int_{\Omega}\zeta(\omega)P(\mathrm{d}\omega).$$

Условное математическое ожидание $M(\xi/\sigma_0)=\eta(\omega)$ случайного вектора ξ относительно σ-алгебры σ_0 удовлетворяет равенству

$$\int\limits_A \eta(\omega) P(\mathrm{d}\omega) = \int\limits_A \xi(\omega) P(\mathrm{d}\omega), \quad \forall A \in \sigma_0.$$

Конечномерные распределения вероятностей случайного процесса $\xi(t, \omega)$:

$$F(t_1, \ldots, t_m, A_1, \ldots, A_m) = P(\zeta(t_1, \omega) \in A_1, \ldots, \zeta(t_m, \omega) \in A_m).$$

Корреляционная матрица случайного процесса:

$$M[\zeta(s, \omega) - M\zeta(s, \omega)][\zeta(t, \omega) - M\zeta(t, \omega)]'.$$

Плотность конечномерного распределения вероятностей стандартного винеровского процесса $\xi(t, \omega)$:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = [(2\pi)^m t_1 (t_2 - t_1) \ldots (t_m - t_{m-1})]^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{x_1^2}{2t_1} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} (x_{j+1} - x_j)^2 (t_{j+1} - t_j)^{-1}\right].$$

Закон повторного логарифма для винеровского процесса:

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, \xi(t, \omega) (2t \ln \ln t)^{-1/2} = 1.$$

Стохастический интеграл Ито $\int\limits_0^t b(s, x(s))\, \mathrm{d}\xi(s)$ есть предел в среднеквадратическом интегральных сумм

$$\sum_{i=0}^{N-1} b(t_i, x(t_i))(\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)).$$

Стохастический интеграл Стратоновича $\int\limits_0^t b(s, x(s))\, \overline{\mathrm{d}\xi}(s)$ есть предел в среднеквадратическом сумм

$$\sum_{i=0}^{N-1} b\left(t_i, \frac{1}{2}(x(t_{i+1}) + x(t_i))\right)(\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)).$$

Стохастическое дифференциальное уравнение Ито:

$$\mathrm{d}x(t) = f(t, x(t))\mathrm{d}t + b(t, x(t))\mathrm{d}\xi(t), \quad x(0) = x_0.$$

Стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича:

$$\mathrm{d}x(t) = f(t, x(t))\mathrm{d}t + b(t, x(t))\, \overline{\mathrm{d}\xi(t)}, \quad x(0) = x_0.$$

Всякое решение $x(t)$ уравнения Стратоновича есть также решение уравнения Ито:

$$\mathrm{d}x(t) = \left[f(t, x(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial b(t, x(t))}{\partial x} b(t, x(t))\right]\mathrm{d}t + b(t, x(t))\, \mathrm{d}\xi(t).$$

Формула Ито: если $V=V(t, x)$ и $\mathrm{d}\gamma(t)=f(t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t)$, то

$$\mathrm{d}V(t, \gamma(t))=\Big[V_t(t, \gamma(t))+V'_x(t, \gamma(t))f(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma(t)\sigma'(t)\,V_{xx}(t, \gamma(t)))\Big]\mathrm{d}t+V'_x(t, \gamma(t))\sigma(t)\mathrm{d}\xi(t).$$

Теорема существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения Ито. Пусть

$$|f(t, x)|^2+|b(t, x)|^2\leqslant C(1+|x|^2),$$
$$|f(t, x)-f(t, y)|+|b(t, x)-b(t, y)|\leqslant C|x-y|.$$

Тогда существует, и притом единственное, решение уравнения Ито на любом отрезке $[0, T]$.

Производящий оператор уравнения Ито:

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+f'\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}bb'\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Теорема Хасьминского. Если существует функция $V(t, x)$ такая, что

$$\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x),\ LV\leqslant 0,$$

то тривиальное решение уравнения Ито устойчиво по вероятности. Если же

$$\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x)\leqslant\omega_2(|x|),\ \omega_1(u)\to\infty,\ u\to\infty,\ LV(t, x)\leqslant-\omega_3(|x|),$$

то тривиальное решение уравнения Ито асимптотически устойчиво в целом по вероятности.

Устойчивость линейных систем в среднеквадратическом. Для устойчивости в среднеквадратическом системы

$$\mathrm{d}x(t)=A(t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{m}b_i(t)\,x(t)\,\mathrm{d}\xi_i(t),\ t\geqslant t_0,$$
$$x\in R_n,\ \xi_i(t)\in R_1,\ i=1, \ldots, m,$$

необходимо и достаточно существование функции $V(t, x)\in C_2^1((t\geqslant t_0)\times R_n)$, удовлетворяющей оценкам

$$k_1|x|^2\leqslant V(t, x)\leqslant k_2|x|^2,$$
$$LV(t, x)\leqslant-k_3|x|^2,\ k_1, k_2, k_3>0.$$

Для асимптотической устойчивости в среднеквадратическом уравнения

$$x^{(n)}(t)+(a_1+\sigma_1\dot{\xi}_1(t))x^{(n-1)}(t)+\ldots+(a_n+\sigma_n\dot{\xi}_n(t))x(t)=0,$$
$$a_i,\ \sigma_i=\text{const},\ x\in R_1,\ \xi_i(t)\in R_1,\ i=1, \ldots, n,\ t\geqslant 0$$

необходимо и достаточно, чтобы детерминированное уравнение

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=0$$

было асимптотически устойчиво и чтобы был положителен определитель

$$\Delta=\det\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_2^2 & \sigma_3^2 & (-1)^{n-2}\sigma_{n-1}^2 & (-1)^{n-1}\sigma_n^2 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Упражнения к первой части

1. Исследовать на устойчивость линейную систему $\dot{x}(t)=Ax(t)$, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

2. Определить, при каких значениях параметров α или (α, β) устойчивы следующие уравнения:

а) $\ddot{x}+(2-\alpha^2)\dot{x}+\alpha x=0$;

б) $\dddot{x}+\ddot{x}+\alpha^2\dot{x}+5\alpha x=0$;

в) $\dot{x}=-x+\alpha y$, $\dot{y}=\beta x-y+\alpha z$, $\dot{z}=\beta y-z$.

3. Пользуясь критерием Рауса — Гурвица, исследовать на устойчивость следующие многочлены:

а) $z^5+7z^4+33z^3+88z^2+122z+60=0$;

б) $z^4+7z^3+19z^2+23z+10=0$.

4. С помощью критерия Михайлова исследовать на устойчивость следующие уравнения:

а) $\dddot{x}+2\ddot{x}+\dot{x}+x=0$; б) $\dddot{x}+x=0$;

в) $x^{(IV)}+13\dddot{x}+28\ddot{x}+23\dot{x}+6x=0$;

г) $x^{(IV)}+\dddot{x}+\dot{x}+x=0$;

д) $x^{(V)}+2x^{(IV)}+\dddot{x}+2\ddot{x}+\dot{x}+2x=0$;

е) $x^{(IV)}+\dddot{x}+4\ddot{x}+\dot{x}+x=0$.

5. *Задача об автоматической стабилизации курса корабля.* Простейшая модель нейтрально устойчивого судна описывается уравнением

$$I\ddot{\varphi}+h\dot{\varphi}=-k\psi,\ I>0,\ h>0,\ k>0,$$

где φ — угол уклонения корабля от курса; ψ — угол отклонения руля от оси судна; I — момент инерции корабля относительно вертикальной оси, проходящей через центр корабля; h — коэффициент жидкостного трения; k — коэффициент эффективности руля (рис. У.1).

Пусть уравнения авторулевого для корабля имеют вид

$$T\dot{\psi}+\psi=\alpha\xi+\beta\dot{\xi},\ T>0.$$

Здесь T — постоянная времени авторулевого; α и β — параметры авторулевого, которые могут выбираться; ξ — измеренное значение угла уклонения φ от курса. Изменение угла уклонения не происходит мгновенно, а описывается уравнением $\tau\dot{\xi}+\xi=\varphi$, $\tau>0$, где τ — постоянная времени измерителя.

В пространстве параметров (α, β), характеризующих авторулевой, найти ту область, в которой замкнутая система, состоящая из корабля и авторулевого, асимптотически устойчива при следующих значениях остальных параметров: $I=10^3$, $h=10^{-2}$, $k=1$, $T=10^2$; $\tau=10^{-1}$.

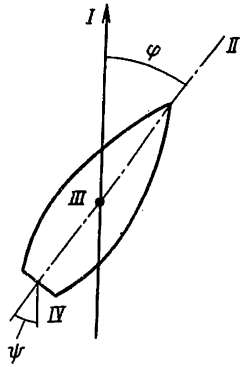


Рис. У.1. Простейшая модель корабля: *I* — курс корабля; *II* — ось корабля; *III* — центр инерции корабля; *IV* — руль

6. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x}+x=\cos t$ и исследовать его на устойчивость.

7. Используя теоремы Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение следующих уравнений:

а) $\dot{x}=-2x-3y+x^5$, $\dot{y}=x+y-y^2$, $V=4x^2+14xy+19y^2$;

б) $\dot{x}=-xy^4$, $\dot{y}=yx^4$, $V=x^4+y^4$;

в) $\dot{x}=-2y-x^5$, $\dot{y}=5x-y^5$, $V=5x^2+y^2$;

г) $\dot{x}=-x-\dfrac{y}{\ln(x^2+y^2)}$, $\dot{y}=-y+\dfrac{x}{\ln(x^2+y^2)}$.

8. При каком значении параметра α тривиальное решение системы $\dot{x}=\alpha x+y-x^5$, $\dot{y}=-x-y^5$, $V=x^2+y^2$ устойчиво?

9. Исследовать с помощью теоремы Четаева следующие уравнения:

а) $\dot{x}=y^3+x^5$, $\dot{y}=x^3+y^5$, $V=x^4-y^4$;

б) $\dot{x}=y+x^2$, $\dot{y}=0$, $V=(\alpha x-y)\,y$, $\alpha>0$.

10. Исследовать на устойчивость тривиальные решения систем:

а) $\dot{x}=-y-x^3$, $\dot{y}=x-y^3$;

б) $\dot{x}=x-y+x^2+y^2\sin t$, $\dot{y}=x+y-y^2$;

в) $\dot{x}=2x+8\sin y$, $\dot{y}=2-e^x-3y-\cos y$.

11. Пусть в одноконтурной системе, изображенной на рис. 5.4, каждое звено является апериодическим, т. е. пусть одноконтурная система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1=-a_1x_1+b_1x_m,\ a_1>0,\ b_1>0;$$

$$\dot{x}_i=-a_ix_i+b_ix_{i-1},\ a_i>0,\ b_i>0,\ i=2,\ \ldots,\ m.$$

Показать, что такая одноконтурная система асимптотически устойчива, если $\prod\limits_{i=1}^{m}\dfrac{a_i}{b_i}>1$.

12. Исследовать устойчивость системы $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-2x-3y$, с помощью функций Ляпунова $V_1(x, y)=x^2+y^2$, $V_2(x, y)=12x^2+4xy+3y^2$. Построить поверхности уровня функций V_1 и V_2 и объяснить геометрически, почему функция V_1 не позволяет исследовать устойчивость, а функция V_2 позволяет это сделать.

13. Можно ли использовать функцию $V(x, y)=x^2+1-e^{-y^2}$ для исследования устойчивости системы $\dot{x}=(-x+yx)e^{-y^2}$, $\dot{y}=-y-x^2$?

14. Исследовать на устойчивость уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0,\ \varepsilon>0,\ V=x^2+y^2.$$

15. Для уравнения Ван-дер-Поля показать, что область притяжения тривиального решения содержит внутри себя круг $x^2+y^2<3$.

16. Найти условия устойчивости тривиального решения уравнения Льенара

$$\ddot{x}+f(x)\,\dot{x}+g(x)=0.$$

Записать его в виде системы $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-g(x)-f(x)\,y$ и использовать функцию Ляпунова $V=\frac{1}{2}y^2+\int\limits_0^x g(s)\,ds$.

17. С помощью функции Ляпунова

$$V=(cx-ay)^2+2c\int\limits_0^x f(s)\,ds-abx^2=(cx-ay)^2+2\int\limits_0^x (cf(s)-abs)\,ds$$

найти условия устойчивости тривиального решения системы

$$\dot{x}=f(x)+ay,\ \dot{y}=bx+cy.$$

18. С помощью функции Ляпунова

$$V=(cx-ay)^2+2\int\limits_0^x [cf_1(s)-af_2(s)]\,ds$$

найти условия устойчивости тривиального решения системы

$$\dot{x}=f_1(x)+ay,\ \dot{y}=f_2(x)+cy.$$

19. Рассмотрим маятник с трением, описываемый уравнением $\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega^2\sin x=0$, $\beta>0$, $\omega^2>0$. Физически очевидно, что наличие трения приводит к тому, что положение равновесия $x=\dot{x}=0$ асимптотически устойчиво. Можно ли использовать в качестве функции Ляпунова полную энергию маятника $E(x,\dot{x})=\frac{\dot{x}^2}{2}+$ $+(1-\omega^2\cos x)$?

20. Доказать асимптотическую устойчивость положения равновесия маятника с трением (см. задачу 11):

а) используя теорему об устойчивости по первому приближению;

б) используя функцию Ляпунова $V(x,\dot{x})=\dot{x}^2+(\dot{x}+x)^2+4(1-\omega^2\cos x)$.

21. Исследовать устойчивость положения равновесия маятника с трением (см. задачу 19), на которой действует постоянный момент L. Маятник описывается уравнением $\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega^2\sin x=L$, $|L|\leqslant\omega^2$.

22. Рассмотрим маятник с коэффициентом трения, быстро растущим по времени. Пусть его линеаризованное уравнение имеет вид $\ddot{x}+(2+e^t)\dot{x}+x=0$. Показать, что функция $x(t)=a(1+e^{-t})$ при любом a служит его решением и поэтому положение равновесия маятника не является асимптотически устойчивым. Как это можно объяснить физически?

23. Используя векторную функцию Ляпунова $V'(x,y)=((x+y)^2,(x-y)^2)$ и теорему 4.4, исследовать устойчивость тривиального решения системы

$$\dot{x}=e^{-t}x+y\sin t-(x^3+xy^2)\sin^2 t,\ \dot{y}=x\sin t+e^{-t}y-(x^2y+x^3)\sin^2 t.$$

24. Развитие изолированной биологической популяции можно описать логистическим уравнением

$$\dot{N}=N(\alpha-\gamma N),\ \alpha,\ \gamma>0,$$

где $N(t)$ — численность популяции в момент времени t. Найти стационарные состояния $N(t)=N_i$ $(i=0, 1)$ логистического уравнения. Показать, что стационарное состояние $N_1>0$ асимптотически устойчиво.

25. Исследовать устойчивость стационарного состояния $N_1>0$ логистического уравнения с помощью функций Ляпунова.

26. Развитие изолированной популяции можно описывать с помощью закона Олли $\dot{N}(t)=\varepsilon(N)N$, где $\varepsilon(N)$ — нелинейный коэффициент размножения. Экспериментально полученный вид некоторых зависимостей Олли показан на рис. У.2. При линейной зависимости $\varepsilon(N)=\alpha-\gamma N$ закон Олли приводит к логистическому уравнению.

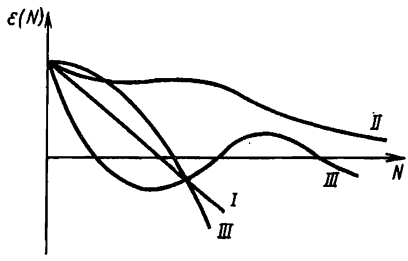


Рис. У.2. Вид экспериментальных зависимостей Олли для $\varepsilon(N)=\dot{N}/N$ и некоторых типов развития популяций: *I* — логистическое уравнение; *II* — монотонные законы развития популяций; *III* — немонотонные законы

Найти равновесные состояния N_i популяций, описываемых законом Олли, и исследовать их на устойчивость. Использовать функцию Ляпунова $V(N)=\varepsilon^2(N)$.

27. Биологическое сообщество, состоящее только из двух видов: хищника (например, рысей) и жертвы (например, зайцев), — можно описать моделью Вольтерра

$$\dot{x}(t)=\alpha x-\beta xy,\ \dot{y}(t)=k\beta xy-my,$$
$$\alpha,\ \beta,\ k,\ m>0.$$

Здесь $x(t)$ — численность жертв; $y(t)$ — численность хищников; α — коэффициент естественного прироста жертв; m — коэффициент естественной смертности хищника; β — коэффициент, характеризующий вероятность поедания хищниками жертвы при их встрече, вероятность которой пропорциональна произведению xy. Требуется:

а) найти стационарные состояния (x_0, y_0) и (x_1, y_1) в модели «хищник — жертва»;

б) исследовать устойчивость состояния (x_1, y_1), $x_1>0$, $y_1>0$ с помощью функции Ляпунова

$$V=m\left(\frac{x}{x_1}-\ln\frac{x}{x_1}-1\right)+\alpha\left(\frac{y}{y_1}-\ln\frac{y}{y_1}-1\right).$$

28. Модель «хищник — жертва» с учетом внутривидовой конкуренции жертв описывается уравнениями

$$\dot{x}=\alpha x-\beta xy-\gamma x^2,\ \dot{y}=k\beta xy-my,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ k,\ m>0.$$

Найти равновесные состояния этой модели и исследовать их на устойчивость.

29. В теории генетического контроля бактерий* используется уравнение Гудвина

$$\dot{x}=\frac{\gamma}{y}-\alpha,\ \dot{y}=Ax-\beta.$$

Здесь x — концентрация первичного генного продукта, а y — концентрация экзиматического протеина, все постоянные γ, α, A и β — положительные.

Исследовать устойчивость ненулевого положения равновесия $\bar{x}=\frac{\beta}{A}$, $\bar{y}=\frac{\gamma}{\alpha}$. Использовать функцию $V(x, y)=W(x, y)-W(\bar{x}, \bar{y})$, где $W(x, y)=-\gamma\ln y+\alpha y+\frac{A}{2}x^2-\beta x$. Является ли функция $V(x, y)$ положительно определенной?

---

*Rosen R. Dynamical system theory in biology. — New York, J.Wiley, 1970.

30. В другой модели генетического контроля бактерий используются уравнения

$$\dot{x}=\frac{\gamma}{y}-\alpha,\ \dot{y}=Ax-\beta y,\ \gamma,\ \alpha,\ A,\ \beta>0,$$

где переменные имеют тот же смысл, что и в задаче 29. Исследовать устойчивость ненулевого положения равновесия $\bar{x}=\frac{\beta\gamma}{A\alpha}$, $\bar{y}=\frac{\gamma}{\alpha}$. Использовать функцию $V(x, y)=$ $=W(x, y)-W(\bar{x}, \bar{y})$, где

$$W(x, y)=-\gamma\ln y+\alpha y+\frac{1}{2A}(Ax-\beta y)^2.$$

В упр. 31—38 через $\xi(t)$ обозначен стандартный винеровский процесс.

31. Вычислить

$$M\left(\int_0^T \xi^n(t)\,\mathrm{d}\xi(t)\right)^2,\ n=0, 1,\ldots;\quad M\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\xi(t)}\,\mathrm{d}\xi(t)\right)^2.$$

32. Вычислить стохастический интеграл $J=\int_0^T \cos\xi(t)\,\mathrm{d}\xi(t)$. Показать, что $J=$ $=\sin\xi(T)+\frac{1}{2}\int_0^T \sin\xi(s)\,\mathrm{d}s$.

33. Пусть случайный процесс $(x(t), y(t))$ имеет стохастический дифференциал

$$\mathrm{d}x(t)=-(\sin\alpha(t))\,\mathrm{d}\xi(t),\ \alpha(t)=\operatorname{arctg}\frac{y(t)}{x(t)},$$

$$\mathrm{d}y(t)=(\cos\alpha(t))\,\mathrm{d}\xi(t),\ t\geqslant 0,\ x(0)\neq 0.$$

Применяя формулу Ито, доказать, что

$$x^2(t)+y^2(t)=x^2(0)+y^2(0)+t,\ t\geqslant 0.$$

34. Пусть функция $F(x)$, $x\in(-\infty, \infty)$ дважды непрерывно дифференцируема. С помощью формулы Ито доказать, что

$$F(0)+\frac{1}{2}\int_0^t F''(\xi(s))\,\mathrm{d}s=F(\xi(t))-\int_0^t F'(\xi(s))\,\mathrm{d}\xi(s).$$

35. Доказать, что функции $x(t)=\operatorname{sh}\xi(t)$, $y(t)=\operatorname{ch}\xi(t)$ являются решением системы стохастических уравнений Ито

$$\mathrm{d}x(t)=\frac{1}{2}x(t)\,\mathrm{d}t+y(t)\,\mathrm{d}\xi(t),\ \mathrm{d}y(t)=\frac{1}{2}y(t)\,\mathrm{d}t+x(t)\,\mathrm{d}\xi(t).$$

36. Исследовать на устойчивость в среднеквадратическом скалярную систему

$$\mathrm{d}x(t)=ax(t)\,\mathrm{d}t+\sigma\sin x(t)\,\mathrm{d}\xi(t).$$

Показать с помощью функции Ляпунова $V=x^2$, что условие устойчивости имеет вид $a+\frac{\sigma^2}{2}<0$.

37. Дана система стохастических уравнений в смысле Стратоновича

$$\mathrm{d}x(t)=\omega y(t)\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y(t)=-(ky(t)+\omega x(t))\,\mathrm{d}t-\sigma(t)\,y(t)\,\overline{\mathrm{d}\xi}(t).$$

Эти уравнения моделируют движение колебательной системы с собственной частотой ω и коэффициентом вязкого трения $k+\sigma\dot{\xi}(t)$. С помощью функции Ляпунова

$$W=\left(\frac{1}{k-\sigma^2}+\frac{1}{2\omega^2}\left(k-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)x^2+\frac{1}{\omega}\,xy+\frac{1}{k-\sigma^2}\,y^2$$

показать, что условие устойчивости в среднеквадратическом имеет вид $\sigma^2<k$.

38. Дано скалярное уравнение Ито

$$\mathrm{d}x(t)=-ax(t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t),\ t>0.$$

Показать, что любое решение этого уравнения, определяемое детерминированным начальным условием $x(0)$, стремится к нулю при $t\to\infty$, если постоянная $a>0$ и $\int\limits_0^\infty \sigma^2(t)\,\mathrm{d}t<\infty$. Воспользоваться для этого соотношениями

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{-at}+\mathrm{e}^{-at}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{as}\sigma(s)\,\mathrm{d}\xi(s),$$

$$M[x(t)-x_0\mathrm{e}^{-at}]^2=\mathrm{e}^{-2at}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{2as}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s\leqslant \mathrm{e}^{-at}\int\limits_0^{t/2}\sigma^2(s)\,\mathrm{d}s+\int\limits_{t/2}^t \sigma^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

УПРАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ

ГЛАВА III

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

В этой главе описываются различные математические постановки задач оптимального управления непрерывными детерминированными системами. Приводится вид этих задач для различных конкретных технических систем, таких, как выбор компоновки ядерного реактора, мягкая посадка на Луну и др.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Разнообразные реальные процессы, происходящие в окружающем мире, зачастую являются управляемыми, т. е. протекают различным образом в зависимости от конкретного воздействия на них управляющей стороны. При этом естественным является стремление выбрать в некотором смысле оптимальное управляющее воздействие, т. е. наилучшее по сравнению со всеми другими возможными способами управления. Исторически задачи оптимизации встречались еще в древние века, однако интерес к ним особенно возрос в последнее время, что связано, в частности, с ограниченностью природных ресурсов, развитием техники и ростом возможностей ЭВМ, благодаря которым стали осуществимы расчет и реализация сложных законов управления.

Результаты первоначального развития теории оптимизации объединяются в рамках классического математического анализа и вариационного исчисления, основным предметом изучения которого является исследование гладких функций и функционалов, определенных во всем пространстве или на гладком многообразии. При этом необходимые условия экстремума записываются в виде условий стационарности (обращение в нуль градиента функции, уравнение Эйлера и т. д.).

Однако в процессе эволюции общества возникли новые задачи управления, в которых управляющие параметры могут принадлежать некоторому замкнутому множеству.

Примером подобного рода задач является управление движением ракеты с целью достижения ею заданной высоты или дальности при минимальном расходе горючего. Отметим, что хотя указанные задачи приобрели особую актуальность в 40-е годы нашего столетия, однако еще в 1919 г. Р. Годдард, изучая задачу о подъеме реактивного аппарата на заданную высоту при минимальном расходе топлива, пришел к выводу о невозможности решить ее в рамках классического вариационного исчисления.

Необходимые условия оптимальности в задачах с ограничениями на управление (существенно развивающие основные результаты классического вариационного исчисления) записываются в виде принципа максимума Понтрягина. Другой подход основан на методе динамического программирования Беллмана.

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Конкретная задача оптимального управления определяется типом уравнений, описывающих эволюцию системы, видом минимизируемого функционала (критерия качества) и ограничениями на траекторию и управление. Остановимся на этих понятиях подробнее.

1. Уравнения эволюции системы. В зависимости от характера рассматриваемого явления для его описания можно использовать обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, разностные уравнения, уравнения в частных производных, стохастические уравнения и т. д. Рассмотрим объект, положение которого в момент времени t определяется *фазовым вектором* $x(t) \in R_n$, где R_n — евклидово пространство размерности n. Иногда фазовый вектор $x(t)$ называется также *вектором состояния*. Ниже все векторы $x \in R_n$ будем рассматривать как вектор-столбцы с компонентами $x_1, \ldots, x_n$, т. е.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Предположим, что движение объекта при $t \geqslant t_0$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \tag{2.1}$$

Здесь $u \in R_m$ — управление, $f \in R_n$ — заданная функция. Придавая управлению u различные допустимые значения, получаем множество всевозможных состояний объекта, среди которых и надлежит выбрать наилучшее (оптимальное).

Пример 2.1. *Уравнения движения твердого тела.* Движение твердого тела слагается из движения центра масс и вращения относите-

льно центра масс как неподвижной точки. Если $r(t)$ — трехмерный вектор координат центра масс, то в ряде случаев уравнения движения центра масс имеют вид

$$\ddot{r}(t)=u. \tag{2.2}$$

Здесь u — вектор всех действующих на тело сил, часть из которых может быть управляющими.

Уравнения движения твердого тела относительно центра масс были получены Л. Эйлером и носят его имя. Пусть A, B, C — главные центральные моменты инерции, а p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела на главные центральные оси инерции Ox, Oy, Oz. Тогда уравнения Эйлера можно записать в виде

$$\begin{aligned} A\dot{p}+(C-B)\,qr&=M_1,\\ B\dot{q}+(A-C)\,rp&=M_2,\\ C\dot{r}+(B-A)\,pq&=M_3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь M_1, M_2, M_3 — проекции на оси Ox, Oy, Oz управляющего момента.

Устойчивость вращательных движений твердого тела была исследована в § 3 гл. I.

Важный класс систем управления образуют *линейные системы*. В этом случае уравнения движения (2.1) являются линейными по фазовым координатам и управлению, т. е.

$$\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,u.$$

С помощью линейных уравнений можно аппроксимировать поведение реальных систем в окрестности номинальной (невозмущенной) траектории.

Другой класс систем, встречающихся при рассмотрении реальных объектов и называемых *билинейными*, описывается билинейными уравнениями, правые части которых являются линейными по координатам при фиксированных значениях управлений и линейными по управлениям при фиксированных значениях координат:

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} u_k(t)\,B_{ijk}(t)\,x_j+Bu_0.$$

2. Минимизируемый функционал (критерий качества). Управление u системой (2.1) осуществляется для достижения ряда заранее поставленных целей, которые часто можно записать в терминах минимизации некоторых функционалов, зависящих от траектории движения системы и управления. В зависимости от способа задания *минимизируемого функционала* (называемого также *критерием качества*) принято различать задачи Лагранжа, Майера и Больца.

В *задаче Лагранжа* критерий качества J_0 имеет вид

$$J_0=\int_{t_0}^{T} F_0\,(t,\,x\,(t),\,u)\,\mathrm{d}t,\quad x\in R_n,\ u\in R_m. \tag{2.4}$$

Здесь F_0 — заданная скалярная функция, а T — момент окончания движения. Момент T может быть либо заранее задан, либо определяться конкретной траекторией движения. В последнем случае T можно рассматривать как дополнительный параметр оптимизации.

В *задаче Майера* критерий качества J_0 зависит от траектории системы только в момент T окончания движения:

$$J_0=\varphi_0\,(T,\,x\,(T)). \tag{2.5}$$

Наконец, в *задаче Больца* требуется минимизировать функционал J_0 смешанного вида:

$$J_0=\int_{t_0}^{T} F_0\,(t,\,x\,(t),\,u)\,\mathrm{d}t+\varphi_0\,(T,\,x\,(T)). \tag{2.6}$$

Отметим, что приведенное деление задач управления по виду минимизируемого функционала весьма условно. Так, задача Больца (а тем самым, конечно, и задача Лагранжа) легко сводится к задаче Майера. Для этого введем еще одну скалярную переменную $x_{n+1}\,(t)$, определяемую соотношениями

$$\dot{x}_{n+1}\,(t)=F_0\,(t,\,x\,(t),\,u),\quad t\geqslant t_0,\quad x_{n+1}\,(t_0)=0. \tag{2.7}$$

Тогда

$$x_{n+1}\,(T)=\int_{t_0}^{T} F_0\,(t,\,x\,(t),\,u)\,\mathrm{d}t.$$

Поэтому функционал (2.6) можно записать следующим образом в форме (2.5):

$$J_0=x_{n+1}\,(T)+\varphi_0\,(T,\,x\,(T)). \tag{2.8}$$

Таким образом, для объекта управления (2.1), (2.7) получена задача Майера с критерием качества (2.8), эквивалентная исходной задаче (2.1), (2.6). Аналогично, в случае дифференцируемости функции $\varphi_0\,(t,\,x)$ задачу Майера можно свести к задаче Лагранжа.

Если в функционале (2.4) функция $F_0\,(t,\,x,\,u)=1$, то задача, состоящая в минимизации времени управления, называется *задачей быстродействия.*

В ряде случаев целью управления является *стабилизация заданного программного движения*, т. е. удержание истинной траектории движения в некоторой окрестности желаемой траектории. В этом случае функции F_0 и φ_0 в функционале (2.6) должны характеризовать отклонение реальной траектории от программной.

Довольно часто для этой цели используют *квадратичные функционалы*, имеющие вид

$$J_0 = x'(T) N_1 x(T) + \int_{t_0}^{T} (x'(t) N_2(t) x(t) + u'(t) N_3(t) u(t)) \mathrm{d}t. \quad (2.9)$$

В функционале (2.9) матрицы $N_i \geqslant 0$ (т. е. N_i неотрицательно определены), штрих означает знак транспонирования. Последнее слагаемое в (2.9), характеризующее затраты на управление, возникает весьма естественным образом в ряде задач.

Пример 2.2. Рассмотрим задачу управления полетом реактивного аппарата, которое осуществляется выбором реактивного ускорения $u(t)$. Обозначим через $m(t)$ массу аппарата. Одно из требований, предъявляемых к управлению, состоит в том, чтобы расход рабочего тела был минимален, т. е. должно быть справедливо соотношение

$$\frac{m(T)}{m(t_0)} \to \max \text{ по } u(t). \quad (2.10)$$

Преобразуем левую часть соотношения (2.10). Из определения реактивной силы следует, что

$$u(t) = -\frac{v}{m} \cdot \dot{m}. \quad (2.11)$$

Здесь $\dot{m}(t)$ — секундный расход массы, v — относительная скорость движения частиц в реактивной струе относительно аппарата. Для ряда двигателей малой тяги (например, ионных и плазменных двигателей) мощность γ в струе является постоянной и равной

$$\gamma = -\frac{v^2}{2} \cdot \dot{m}. \quad (2.12)$$

Исключая из соотношений (2.11), (2.12) скорость истечения v, получаем уравнение $2\gamma m^{-2} \dot{m} = -u^2(t)$.

Решая это уравнение, находим, что отношение в (2.10) имеет вид

$$\frac{m(T)}{m(t_0)} = \left[1 + \frac{m(t_0)}{2\gamma} \int_{t_0}^{T} u^2(t) \mathrm{d}t\right]^{-1}$$

Значит, цель управления (2.10) будет достигнута, если минимизировать интеграл $\int_{t_0}^{T} u^2(t)\,dt$.

Если начальное положение (т. е. момент времени t_0 и вектор $x(t_0)$) системы также можно варьировать, то критерий качества с учетом этого можно записать в виде

$$J_0 = J_0(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) = \int_{t_0}^{T} F_0(t, x(t), u)\,dt + \varphi_0(t_0, x(t_0), T, x(T)). \quad (2.13)$$

Иногда задачи с заданными значениями t_0 и T называют *задачами с фиксированным временем*, а задачи, в которых либо t_0, либо T не задано, — *задачами с нефиксированным временем*.

В качестве аргументов критерия качества J_0 условимся записывать только те переменные, которые можно независимо варьировать. В частности, в задачах с фиксированным временем минимизируемый функционал (2.13) имеет вид $J_0(x(t_0), u, x(T))$, а в задачах с заданным начальным положением $(t_0, x(t_0))$ и конечным $(T, x(T))$ функционал (2.13) зависит только от управления, т. е. $J_0 = J_0(u)$.

3. Ограничения на траекторию. В ряде реальных ситуаций система не может заходить в те или иные области фазового пространства. Это находит отражение в соответствующих ограничениях на траекторию $x(t)$ движения системы, состоящих в том, что в каждый момент времени t задается область $G(t) \in R_n$, в которой может находиться вектор состояния $x(t)$.

В зависимости от вида этих ограничений выделяют различные классы задач управления. В *задачах с фиксированными концами* начальное $x(t_0)$ и конечное $x(T)$ положения заданы. Если же $x(t_0)$ (или $x(T)$) не задано, то соответствующая задача называется *задачей со свободным левым (правым) концом*. *Задачей с подвижными концами* называется такая задача, в которой моменты t_0 и T заданы, а начальное $x(t_0)$ и конечное $x(T)$ положения могут изменяться соответственно в пределах областей $G(t_0)$ и $G(T)$.

В *задачах с изопериметрическими ограничениями* считаются заданными величины интегралов

$$J_j = \int_{t_0}^{T} F_j(t, x(t))\,dt \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m_1), \quad (2.14)$$

где F_j — заданные скалярные функции.

Задача с ограничениями вида (2.14) является обобщением задачи вариационного исчисления об определении замкнутой кривой заданной длины (заданного периметра), которая охватывает наибольшую площадь*. Отсюда, кстати, происходит и термин «изопериметрические ограничения».

Наряду с ограничениями на траекторию типа неравенств (2.14) возможны также и ограничения типа равенств:

$$J_i = \int_{t_0}^{T} F_i(t, x(t))\, dt = 0 \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m_2). \tag{2.15}$$

4. Ограничения на управление. При построении оптимального управления системой (2.1) важное значение имеет то, какая именно информация о системе (2.1) доступна управляющей стороне. Если фазовый вектор $x(t)$ недоступен измерению, то оптимальное управление, называемое в этом случае *программным* или П-*управлением*, ищется в классе функций $u(t)$, зависящих только от времени t. Напротив, если в каждый момент времени t фазовый вектор $x(t)$ известен точно, то оптимальное управление ищется в классе функций, зависящих от времени и фазовых координат, и имеет вид $u = u(t, x(t))$. Построенное таким образом управление $u(t, x(t))$ называется С-*управлением (управлением по принципу обратной связи* или *синтезом управления*). Ясно, что С-управление является более гибким по сравнению с П-управлением, т. е. реализует не большее значение минимизируемого критерия качества по сравнению с П-управлением. Простейшим примером обратной связи является пропорциональная обратная связь, при которой управляющий сигнал связан пропорциональной зависимостью с фазовым вектором.

Идея обратной связи появилась почти 2 тыс. лет назад в устройстве водяных часов, в которых уровень воды поддерживался постоянным с помощью поплавкового клапана. Поплавковые регуляторы уровня нашли широкое распространение в различных технических устройствах, например в карбюраторах автомобильных двигателей. В таких регуляторах вес поплавка уравновешивается силой Архимеда. Если происходит отклонение уровня жидкости от номинального значения, то поплавок либо опускается, либо поднимается. В результате изменяется положение регулирующего органа, дозирующего подвод жидкости или ее сток.

В 1620 г. голландский мастер Корнелиус Дреббель построил печь с автоматической регулировкой температуры, изображенную на рис. 2.1. В этой печи небольшое увеличение температуры в ин-

*Любопытно отметить, что первая изопериметрическая задача, известная еще в древности, была связана с основанием города Карфагена царицей Дидоной.

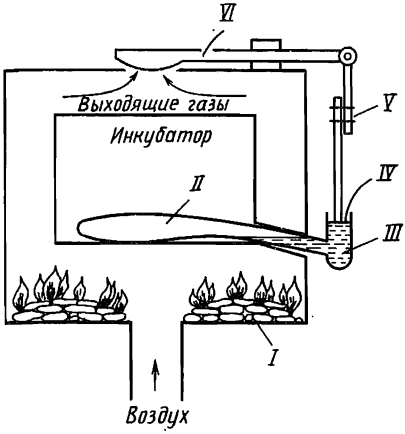


Рис. 2.1. Регулятор температуры Корнелиуса Дреббеля: *I* — горящий каменный уголь; *II* — спирт; *III* — ртуть; *IV* — поплавок; *V* — настройка длины плеча; *VI* — демпфирующий клапан

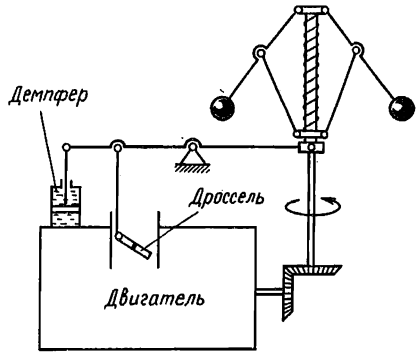


Рис. 2.2. Центробежный регулятор Уатта

кубаторе приводит к расширению спирта, вызывающему подъем поплавка, и к перекрытию щели демпфирующим клапаном, т. е. приводит к уменьшению нагревания инкубатора. Изменяя длину плеча демпфирующего клапана можно менять значение стационарной температуры, поддерживаемой в инкубаторе. Современные исследования этой печи показали, что с помощью этого несложного устройства температура поддерживается с точностью до 0,6°С.

Другими классическими примерами использования обратной связи являются центробежные регуляторы Ползунова (1766) и Уатта (1784). Последний изображен на рис. 2.2. При создании первого авиационного автопилота (рис. 2.3) Ольховским в 1912 г. и братьями Сперри в 1914 г. также был применен принцип обратной связи. Все эти регуляторы относятся к так называемым *регуляторам прямого действия*, в которых измерительное устройство непосредственно воздействует на регулятор. Такое управление возможно только на машинах малой мощности. Теперь более употребительно непрямое управление, при котором в цепь управления

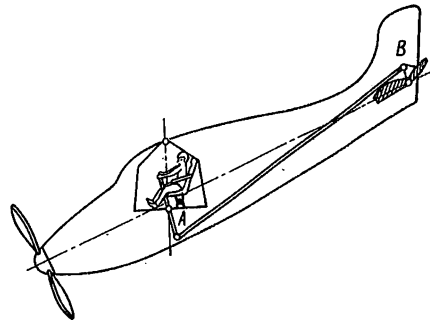


Рис. 2.3. Маятниковый автопилот Ольховского для стабилизации по углу тангажа

включают различные усилители или другие исполнительные механизмы. Впервые гидравлический усилитель в цепи управления был использован Ж. Фарко в 1873 г.*

Если координаты системы $x(t)$ можно не только точно измерять, но и хранить в памяти их значения на интервале времени от начального момента t_0 до текущего момента t, то оптимальное С-управление можно искать в виде функционала $u(t, x_t)$, где x_t — отрезок траектории системы (2.1), равный $x_t = x(t+\theta)$, $t_0 - t \leqslant \theta \leqslant 0$.

В этом случае при подстановке управления $u(t, x)$ в уравнение (2.1) меняется тип этого уравнения — оно становится уравнением с последействием.

Однако для детерминированных систем, которым посвящена настоящая глава, оптимальное значение критерия качества, реализуемое в классе С-управлений и в классе П-управлений, является одним и тем же. В самом деле, если С-управление $u(t, x)$ в системе (2.1) построено, то, определив ее решение $x(t)$ при управлении $u(t, x)$ и заданном начальном условии, получим П-управление $v(t) = u(t, x(t))$. Обратно: если найдено П-управление $v_{x, t_0}(t)$ для произвольных начальных условий $x(t_0) = x$, то С-управление $u(t, x)$ определяется формулой $u(t, x) = v_{x, t}(t)$. В связи со сказанным в дальнейшем изложении достаточно ограничиться рассмотрением лишь П-управлений.

Наряду с описанными информационными ограничениями, обусловленными степенью информированности управляющей стороны, возможен и другой тип ограничений, связанный с ограниченностью ресурсов управления.

Эти ограничения могут иметь вид

$$u(t) \in U(t), \tag{2.16}$$

где $U(t) \subset R_m$ — заданное множество.

Примером ограничения (2.16) является следующее: $(u'(t), u(t))^{1/2} = |u(t)| \leqslant u_0$. Ограничение такого вида встречается, например, при управлении поворотами космического аппарата, если вращающий момент $M(t)$ создается парой поворотных реактивных двигателей.

Соотношение (2.16) означает, что управление $u(t)$ удовлетворяет ограничениям в каждый момент времени. Иногда ограничения на управление $u(t)$ имеют интегральный тип, аналогичный ограничениям (2.14) и (2.15) на траекторию:

$$J_j = \int_{t_0}^{T} F_j(t, u(t))\, dt \leqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, m_3), \tag{2.17}$$

*Воронов А. А. Регулирование автоматическое // БСЭ. 1975. Т. 21.

$$J_k=\int_{t_0}^{T} F_k(t, u(t))\,dt=0 \quad (k=m_3+1, \ldots, m_4). \tag{2.18}$$

В ряде случаев соотношения (2.17), (2.18) можно интерпретировать как ограничения на стоимость процесса управления.

Отметим, что ограничения типа неравенств (2.14) или (2.17) можно расширением фазового вектора свести к ограничениям на траекторию в моменты t_0 и T. Действительно, в случае, например, ограничений (2.14) достаточно ввести вектор $y(t)\in R_{m_1}$, удовлетворяющий уравнениям

$$\dot{y}_j(t)=F_j(t, x(t)),\ y(t_0)=0,\ \dot{y}(T)\leqslant 0 \quad (j=1, \ldots, m_1).$$

Тогда исходная задача управления вектором $x(t)$ с ограничениями (2.14) эквивалентна задаче управления вектором $(x(t), y(t))$ без ограничений (2.14).

5. Совместные ограничения. Выше были рассмотрены постановки ряда задач оптимального управления. Они определяются уравнениями движения (2.1), критерием качества (2.13), ограничениями на траекторию (2.14), (2.15) и ограничениями на управление (2.16), (2.17), (2.18). Новые постановки задач получаются, если ограничения носят совместный характер, т. е. зависят одновременно и от траектории, и от управления. Выпишем совокупность соотношений, определяющих постановку задачи оптимального управления в этом случае:

1) уравнения движения (2.1)

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ t_0\leqslant t\leqslant T; \tag{2.19}$$

2) скалярный критерий качества

$$J_0(t_0, x(t_0), u, T, x(T))\to\inf. \tag{2.20}$$

Часто индекс 0 в критерии качества опускается и последний обозначается просто буквой J;

3) ограничения

$$J_j(t_0, x(t_0), u, T, x(T))\leqslant 0 \quad (j=1, \ldots, m_1), \tag{2.21}$$

$$J_i(t_0, x(t_0), u, T, x(T))=0 \quad (i=m_1+1, \ldots, m_2), \tag{2.22}$$

$$u(t)\in U. \tag{2.23}$$

Здесь скалярные функционалы J_k имеют вид

$$J_k(t_0, x(t_0), u, T, x(T))=\int_{t_0}^{T} F_k(t, x(t), u(t))\,dt+$$

$$+\varphi_k(t_0, x(t_0), T, x(T)),\ k=0, \ldots, m_2. \tag{2.24}$$

Задача определения минимума функционала (2.20) при наличии ограничений (2.19), (2.21), (2.22) называется *задачей Лагранжа*. В (2.19) — (2.23) функции f, $F=(F_k)$, $\varphi=(\varphi_k)$ заданы, причем

$$f: R_1 \times R_n \times R_m \to R_n; \; F_k: R_1 \times R_n \times R_m \to R_1;$$
$$\varphi_k: R_1 \times R_n \times R_1 \times R_n \to R_1, \; k=0, \ldots, m_2.$$

Отметим, что в соотношениях (2.20) — (2.22) некоторые из функций φ_k или F_k могут быть равны нулю. Моменты t_0 начала движения и его окончания T принадлежат некоторому заданному конечному отрезку D числовой оси.

Управление $u(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций, а траектория $x(t)$ — в классе кусочно-непрерывно-дифференцируемых функций $t \in D$.

Совокупность варьируемых параметров $q=(t_0, x(t_0), u, T, x(T))$ называется *допустимой*, если она удовлетворяет всем ограничениям (2.19), (2.21) — (2.23). Допустимая совокупность параметров q называется *оптимальной*, если для любой близкой в определенном смысле допустимой совокупности $\bar{q}$ значение функционала (2.20), соответствующее q, не превосходит значения этого же функционала, соответствующего $\bar{q}$. В зависимости от того, в каком именно смысле понимается близость q и $\bar{q}$, возникают различные типы экстремума (например, сильный экстремум, слабый экстремум и т. д.). Всюду во второй части книги рассматриваются условия существования локально оптимального в сильном смысле экстремума.

Определение 2.1. Допустимая совокупность параметров q называется *локально оптимальной в сильном смысле*, если найдется такое $\varepsilon>0$, что для любой допустимой совокупности $\bar{q}$, удовлетворяющей оценке

$$|t_0-\bar{t}_0|+|T-\bar{T}|+\max_t |x(t, u)-\bar{x}(t, \bar{u})|<\varepsilon, \; t \in [t_0, T] \cap [\bar{t}_0, \bar{T}],$$

справедливо неравенство

$$J_0(\bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{u}, \bar{T}, \bar{x}(\bar{T})) \geqslant J(t_0, x(t_0), u, T, x(T)).$$

Замечание. Предположим, что моменты t_0 и T заданы, дифференциальная связь (2.19) отсутствует, а функции F_k в (2.24) не зависят от траектории $x(t)$. Тогда задача минимизации функционала (2.20) при ограничениях (2.21) — (2.22) называется *ляпуновской задачей* [2].

§ 3. ПРИМЕРЫ КОНКРЕТНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Оптимальное управление электродвигателем [4]. Рассмотрим задачу поворота вала двигателя постоянного тока с управлением по току возбуждения. Электрическая схема цепи возбуждения приведе-

на на рис. 3.1. Управляющее напряжение $u(t)$ прикладывается к обмотке возбуждения. При этом изменение тока $i(t)$ в обмотке и магнитного потока $\varphi(t)$ описывается уравнениями

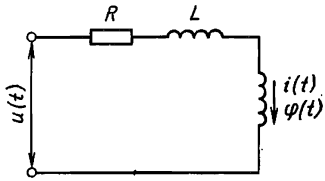


Рис. 3.1. Электрическая схема цепи возбуждения электродвигателя

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u(t),\ i(0)=i_0,\ \varphi(t)=k_1 i(t), \quad (3.1)$$

где R и L — соответственно сопротивление и индуктивность обмотки возбуждения.

Вращающий момент $M(t)$ якоря, через который протекает постоянный ток, равен $M(t)=k_2\varphi(t)=k_1k_2i(t)$, где $k_1, k_2>0$ — некоторые коэффициенты пропорциональности. Выходное угловое смещение $x(t)$ вала двигателя удовлетворяет уравнению

$$J\ddot{x}(t)=M(t)=ki(t),\ k>0. \quad (3.2)$$

Здесь J — момент инерции всех вращающихся элементов ротора и нагрузки. Подставляя выражение (3.2) в (3.1), получим

$$LJ\dddot{x}(t)+JR\ddot{x}(t)=ku(t). \quad (3.3)$$

В качестве функционала, описывающего качество управления $u(t)$ в этой задаче, естественно взять энергию $E_{вх}$, подводимую к входу двигателя за время управления от $t=0$ до $t=T$. Ясно, что

$$E_{вх}=E_R+E_L, \quad (3.4)$$

где E_R — энергия, выделяющаяся в сопротивлении R, а E_L — энергия, накапливаемая в индуктивности L за время от $t=0$ до $t=T$. Известно, что

$$E_R=R\int_0^T i^2(t)\,dt,$$
$$E_L=L\int_0^T i(t)\frac{di}{dt}\,dt=L\left[i^2(T)-i^2(0)\right]. \quad (3.5)$$

Из уравнения (3.1) находим, что

$$i(t)=i(0)\,e^{-RL^{-1}t}+\int_0^t \exp\left(-RL^{-1}(t-s)\right)u(s)\,ds=g(u). \quad (3.6)$$

Здесь $g(u(t+\theta))$, где $-t\leqslant\theta\leqslant 0$ — функционал вида (3.6), зависящий от значений управления $u(s)$ при $0\leqslant s\leqslant t$.

Используя соотношение (3.5) и (3.6), получаем окончательный вид минимизируемого функционала $E_{вх}$:

$$J_0(u)=R\int_0^T g^2(u(t+\theta))\,dt+L\left[g^2(u(T+\theta))-i^2(0)\right]\to\inf_u \quad (3.7)$$

На управление $u(t)$ накладываются два ограничения:

$$0\leqslant u(t)\leqslant U_{max},$$

$$L\left|\frac{di}{dt}\right|=\left|\frac{L\,dg(u(t+\theta))}{dt}\right|\leqslant U_{пр}. \quad (3.8)$$

Физический смысл этих ограничений состоит в следующем. Первое ограничение показывает, что входное напряжение не может быть больше напряжения в сети, к которой подключен двигатель. Далее, при резких изменениях входного напряжения $u(t)$ возможны резкие скачки напряжения на индуктивности, которые могут привести к пробою обмотки возбуждения. Чтобы избежать этого, необходимо наложить второе из ограничений (3.8), где постоянная в правой части определяется напряжением пробоя $U_{пр}$ обмотки возбуждения.

Таким образом, задача оптимального управления поворотом вала электродвигателя может быть сформулирована так: перевести вал двигателя из начального положения $x(0)=x_0$ в конечное положение $x(T)=x_1$ так, чтобы функционал (3.7) имел наименьшее значение и в процессе вращения постоянно выполнялись ограничения (3.8).

Поставленная задача является достаточно сложной. Поэтому часто пользуются упрощенной моделью, в которой полагают $L=0$. Тем самым одновременно понижается порядок уравнения (3.3) и упрощается функционал (3.7), в котором пропадает второе слагаемое, а в первом слагаемом вместо $i(t)=g(u(t+\theta))$ можно написать просто $u(t)$, поскольку в силу уравнения (3.1) имеем $Ri(t)=u(t)$. Кроме того, становится лишним второе ограничение (3.8). Упрощенная задача имеет вид

$$\ddot{x}(t)=k_3u(t),\ k_3=kJ^{-1}R^{-1},$$
$$x(0)=x_0,\ x(T)=x_1, \quad (3.9)$$
$$J_1(u)=\int_0^T u^2(t)\,dt\to\inf_u,\ 0\leqslant u(t)\leqslant U_{max}.$$

Интересным для теоретического исследования является вопрос о связи решений задачи (3.3), (3.7), (3.8) и задачи (3.9). Можно ли

считать, что при достаточно малом $L>0$ решения этих задач будут близки? Пусть в задаче (3.9) найдено оптимальное управление исходной системой (3.3). Какая ошибка в значении функционала (3.7) при этом допущена? Эти и другие подобные вопросы рассматриваются в теории возмущений задач оптимального управления, ряд задач из которой рассмотрен ниже.

В случае задач (3.3), (3.7), (3.8) и (3.9) положение осложняется тем, что малый параметр L служит множителем при старшей производной в уравнении (3.3). Такие задачи называют *сингулярно возмущенными*. Оказывается, что не всегда решения сингулярно возмущенных (при $L>0$) и порождающих (при $L=0$) задач близки между собой. Особый интерес представляет определение условий, при которых такая близость имеет место. Первые исследования сингулярно возмущенных уравнений были выполнены в работах академика А. Н. Тихонова. Различные задачи управления для сингулярно возмущенных систем рассматривались многими авторами*.

2. Оптимизация характеристик ядерных реакторов.** При конструировании и эксплуатации ядерных реакторов встречаются различные оптимизационные задачи, которые можно разбить на две большие группы.

К первой группе относятся динамические задачи, в которых необходимо оптимизировать некоторые временны́е характеристики ядерных реакторов. Такова, например, задача об оптимальном выжигании ксенона-135 и т. д.

Ко второй группе принадлежат пространственные оптимизационные реакторные задачи, такие, как максимизация мощности реактора при ограничении плотности потока нейтронов, оптимальное размещение поглотителя в реакторе и т. д.

Наконец, имеются задачи смешанного пространственно-временно́го типа, например задача оптимизации выгорания ядерного горючего.

Приведем более детальные постановки задач об оптимуме мощности реактора и об оптимизации ксеноновых переходных процессов.

Задача об оптимуме мощности реактора. Рассмотрим упрощенную модель реактора, которая весьма близко описывает свойства реальных энергетических реакторов с газовым охлаждением (рис. 3.2). Правильная решетка заполняет весь заданный объем реактора.

---

*Дончев А. Возмущения, приближения и анализ чувствительности в оптимальных системах управления. — М.: Мир, 1987; Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. — В кн.: Математический анализ (Итоги науки и техники, т. 20). — М.: ВИНИТИ, 1982.

**Рудик А. П. Оптимизация физических характеристик ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1979; Рудик А. П. Ядерные реакторы и принцип максимума Понтрягина. — М.: Атомиздат, 1970.

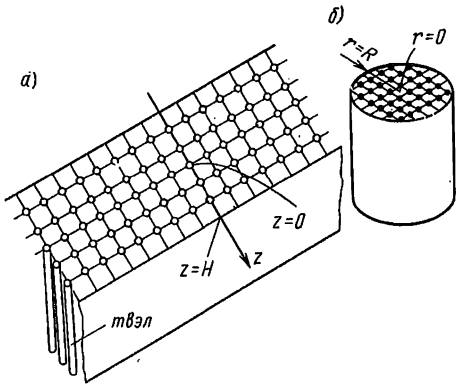


Рис. 3.2. Упрощенные модели ядерных реакторов: а) — плоский реактор; б) — цилиндрический реактор

В узлах решетки расположены каналы с твэлами (тепловыделяющими элементами). Изменяя конструкцию твэла, можно менять количество ядерного горючего u в твэле, т. е. изменять концентрацию ядерного горючего в единице объема реактора. Ограничимся только одномерными задачами — о плоском, цилиндрическом или сферическом реакторе. Кроме того, рассмотрим одногрупповое приближение, при котором учитываются нейтроны только одного типа. Это приближение, с физической точки зрения, справедливо для реакторов с хорошим замедлителем, работающих на тепловых нейтронах, или же для реакторов на быстрых нейтронах, когда тепловые нейтроны практически отсутствуют.

Обозначим пространственную переменную через z и будем считать, что $z=0$ соответствует центру реактора, а $z=H$ — его границе. При этих предположениях для плоского реактора плотность нейтронов $N(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2N(z)}{dz^2}+\alpha^2(u)\,N(z)=0. \tag{3.10}$$

Примерный эмпирический график коэффициента $\alpha^2(u)\geqslant 0$ изображен на рис. 3.3, его конкретный вид зависит от конструкции реактора, однако в окрестности точек I или II эту зависимость можно считать линейной, т. е.

$$\alpha^2(u)=a+bu. \tag{3.11}$$

Граничные условия для уравнения (3.10) имеют вид

$$N(0)=N_{\max},\ \left.\frac{dN}{dz}\right|_{z=0}=0;\ N(H)=p,\ \left.\frac{dN}{dz}\right|_{z=H}=q. \tag{3.12}$$

Выберем нормировку так, что $N_{\max}=1$. Управление должно удовлетворять ограничениям

$$0\leqslant u_{\min}\leqslant u\leqslant u_{\max}, \tag{3.13}$$

где $u_{\min}$, $u_{\max}$ определяются конструкцией реактора, в частности количеством прутков урана в канале.

Оптимизируемый функционал W имеет смысл мощности, снимаемой с единицы объема реактора. С точностью до постоянной его значение определяется соотношением

$$W=\int_0^H u(z)\,N(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (3.14)$$

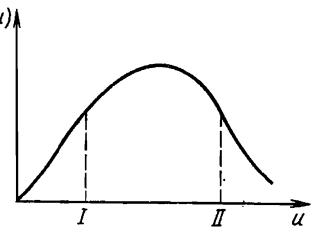


Рис. 3.3. Эмпирический график коэффициента $\alpha^2(u)$

Действительно, вероятность захвата нейтрона ядерным горючим пропорциональна произведению концентрации нейтронов $N(z)$ на концентрацию горючего u. Каждый захват нейтрона вызывает деление урана, сопровождающегося выделением постоянного количества теплоты. Следовательно, общая тепловая мощность реактора пропорциональна интегралу в выражении (3.14).

Часто приходится учитывать теплотехнические ограничения, сводящиеся к требованию ограниченности температуры или же тепловыделения во всех точках реактора. Эти ограничения можно записать в виде

$$u(z)\,N(z)\leqslant p_1 \qquad (3.15)$$

или в виде

$$u(z)\,N(z)+\int_0^z u(s)\,N(s)\,\mathrm{d}s\leqslant p_2. \qquad (3.16)$$

Итак, постановка задачи о максимуме мощности реактора заключается в следующем: найти такое распределение ядерного горючего $u(z)$, удовлетворяющее ограничениям (3.13), (3.15), чтобы максимизировать мощность W реактора (3.14), где $N(z)$ есть решение задачи (3.10) — (3.12).

Для цилиндрического реактора задача о максимуме мощности имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}N(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\alpha^2(u)\,N(r)=0,$$

$$N(0)=N_{\max},\ \left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0}=0,\ N(R)=0,$$

$$W=\int_0^R N(r)\,u(r)\,r\,\mathrm{d}r\to\max,\ 0\leqslant u_{\min}\leqslant u\leqslant u_{\max}.$$

Можно рассмотреть также задачу об оптимизации мощности реактора в двухгрупповом приближении. Обозначим через $N(z)$

плотность нейтронов в тепловой группе, а через $n(z)$ — плотность нейтронов в замедляющей группе. Тогда, если размножение происходит только в тепловой группе и не происходит захват нейтронов в замедляющейся группе, двухгрупповые уравнения для плоского реактора можно записать в виде

$$\frac{d^2N(z)}{dz^2}+\alpha^2(u)N(z)=n(z),$$
$$\frac{d^2n(z)}{dz^2}-\frac{n(z)}{\tau}=k(u)\frac{\alpha^2(u)}{\tau}N(z). \qquad (3.17)$$

Здесь τ — квадрат длины замедления, не зависящий от управления; $k(u)$ — коэффициент размножения, зависящий от управления. В качестве управления выбирают либо величину $u_1(z)$, пропорциональную концентрации ядерного горючего, либо величину $u_2(z)$, пропорциональную концентрации специально вводимого в реактор поглотителя. При этом обычно полагают

$$\alpha^2(u_1)=a+bu_1,\ k(u_1)\alpha^2(u_1)=\eta u_1,\ u_{1\min}\leqslant u_1\leqslant u_{1\max}$$

либо

$$\alpha^2(u_2)=a+bu_2,\ k(u_2)\alpha^2(u_2)=\eta,\ u_{2\min}\leqslant u_2\leqslant u_{2\max}.$$

Требуется выбрать управление так, чтобы максимизировать полную мощность реактора, пропорциональную интегралу

$$\int_0^H N(z)u(z)\,dz\to\max,$$

при теплотехническом ограничении $N(z)u(z)\leqslant p_1$.

Задача об оптимизации ксеноновых переходных процессов. Среди разнообразных продуктов деления урана-235 (^{235}U) образуется нестабильный изотоп ксенон-135 (^{135}Xe). Влияние ^{135}Xe на работу ядерного реактора обусловлено тем, что он имеет большое сечение захвата тепловых нейтронов и поэтому его присутствие в реакторе подобно наличию поглотителя нейтронов. При эксплуатации ядерных реакторов одной из наиболее часто встречающихся задач управления является перевод реактора с одного уровня мощности на другой, например его остановка для проведения каких-либо работ. В начале процесса количество ^{135}Xe в реакторе резко возрастает, а затем он самопроизвольно распадается в течение 1,5—2 сут. Все это время реактор непроизводительно простаивает. Возникает проблема, которая называется *проблемой ксенонового отравления реактора.* Это приводит к задаче нахождения такого способа остановки реактора, при котором не происходило бы ксенонового отравления,

т. е. к задаче оптимального управления переходными процессами образования ^{135}Xe.

Сформулируем эту задачу более подробно. Схема образования и распада ^{135}Xe имеет вид

$$\begin{array}{l} {}^{235}U+n \nearrow {}^{135}Te \xrightarrow[\beta]{2\text{мин}} {}^{135}I \xrightarrow[\beta]{9{,}7\text{ч}} {}^{135}Xe \xrightarrow[\beta]{13{,}4\text{ч}} {}^{135}Cs \xrightarrow[\beta]{2\cdot 10^6\text{лет}} {}^{135}Ba, \\ \qquad\quad \searrow {}^{135}Xe \xrightarrow[\beta]{13{,}4\text{ч}} {}^{135}Cs \xrightarrow[\beta]{2\cdot 10^6\text{лет}} {}^{135}Ba. \end{array} \tag{3.18}$$

Цифры над стрелками указывают время жизни соответствующих изотопов. Вероятность верхней цепочки реакций весьма высока: $\gamma_1 = 0{,}06$, а нижней цепочки $\gamma_2 = 0{,}003$. Таким образом, в основном ^{135}Xe образуется из ^{135}I. Обозначим через $x_1(t)$ и $x_2(t)$ концентрации ^{135}I и ^{135}Xe в момент t, а через $u(t)$ — управление, под которым удобно понимать среднюю плотность тепловых нейтронов в реакторе. Считается, что концентрация ядерного горючего в процессе управления не меняется. Тогда имеют место следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\lambda_1 x_1(t) + \gamma_1 \sigma_1 u(t); \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda_1 x_1(t) - \lambda_2 x_2(t) + \gamma_2 \sigma_1 u(t) - \sigma_2 u(t) x_2(t). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь λ_1, λ_2, γ_1, γ_2, σ_1, σ_2 — некоторые величины, которые при сделанных допущениях можно считать постоянными.

Уравнения (3.19) имеют простой физический смысл. Первое уравнение описывает изменение количества атомов ^{135}I во времени: член $\lambda_1 x_1$ — количество исчезающих в единицу времени из-за β-распада атомов иода (λ_1 обратно пропорционально времени жизни ^{135}I, равному $T = 9{,}7$Ч; член $\gamma_1 \sigma_1 u(t)$ — количество ^{135}I, образующегося за счет деления ядерного горючего ($\gamma_1 = 0{,}06$ — вероятность верхней цепочки реакции в схеме (3.18), σ_1 — макроскопическое эффективное сечение деления ядерного горючего, постоянное в силу предположения о постоянстве концентрации ядерного горючего). Аналогично, для второго уравнения член $\lambda_1 x_1$ показывает количество ^{135}Xe, образующееся за счет β-распада ^{135}I; член $-\lambda_2 x_2$ учитывает β-распад ^{135}Xe; член $\gamma_2 \sigma_1 u(t)$ — прямое возникновение ^{135}Xe при делении ^{235}U согласно нижней цепочке реакций в схеме (3.18); член $-\sigma_2 u(t) x_2(t)$ описывает выгорание ^{135}Xe за счет реакции, связанной с захватом ^{135}Xe тепловых нейтронов.

Начальные условия для уравнений (3.19) обычно задаются в соответствии с физической постановкой задачи. Пусть требуется, например, перевести реактор с заданного уровня мощности $W_{\text{нач}}$ на конечный уровень $W_{\text{кон}} = 0$. Уровень мощности $W_{\text{нач}}$ при постоянной концентрации ^{235}U однозначно определяет поток нейтронов $u = u_{\text{нач}}$.

Далее, подставляя это значение в уравнение (3.19) и полагая $\dot{x}_1(t)=\dot{x}_2(t)=0$, найдем $x_1(0)$ и $x_2(0)$. Кривая ξ на рис. 3.4 дает изображение зависимости $x_1(0)$ и $x_2(0)$ от концентрации ^{235}U, т. е. от σ_1 (в качестве единицы измерения принято 10^{16} см$^{-2}$).

Терминальные значения $x_1(T)$ и $x_2(T)$ определяются аналогично из условия $W_{\text{кон}}=0$. Кривая Ω на рис. 3.4 изображает зависимость $x_1(T)$, $x_2(T)$ от начальной концентрации ^{135}I.

Будем считать, что минимизируемый функционал имеет вид

$$J(u)=\int_0^T [a+bu(t)]\,dt. \tag{3.20}$$

Еще раз отметим, что в силу постоянства концентрации ^{235}U выделяемая энергия $W(t)$ пропорциональна $u(t)$. При различных значениях a и b получаем следующие задачи:

задача на быстродействие ($a=1$, $b=0$);

задача на минимум выделения энергии ($a=0$, $b=1$);

задача на максимум выделения энергии ($a=0$, $b=-1$);

задача на минимум отклонения энергии от максимально возможной ($a=U_{\max}$, $b=-1$).

Другие задачи оптимального управления ядерными реакторами можно найти в приведенных в сноске на с.119 книгах А. П. Рудика.

3. Оптимальное управление космическими аппаратами. Разнообразные и интересные задачи возникают в ракетодинамике и космонавтике при управлении космическими аппаратами. Важность оптимального управления в космонавтике в значительной мере обусловлена жесткими весовыми ограничениями. Известно, что вывод 1 кг на орбиту требует 30—50 кг топлива, поэтому необходимо осуществление таких маневров в космосе, при которых используется минимальное количество топлива. Таким образом, решение различных оптимизационных задач в космонавтике является технически необходимым и экономически оправданным.

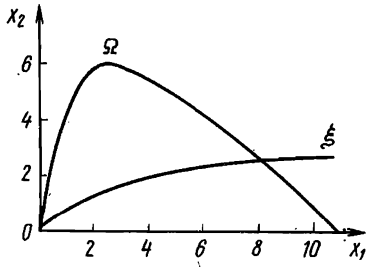


Рис. 3.4. Начальные и конечные условия в задаче оптимизации ксеноновых переходных процессов

Многочисленные задачи оптимального управления КА можно условно подразделять на несколько групп. В одну группу входят те задачи, в которых КА можно рассматривать как материальную точку и использовать уравнения движения типа

(2.2). К этой группе относятся задачи о подъеме ракеты на максимальную высоту, о выводе ракеты в заданную точку, о прилунении и т. д. В другую группу входят те задачи, в которых КА рассматривается как твердое тело и описывается уравнениями Эйлера (2.3). Это в основном задачи стабилизации или поворота КА. В ряде задач приходится учитывать упругие свойства КА или таких его частей, как антенны, солнечный парус и т. д. Такие задачи составляют еще одну группу. Наконец, удобно выделить в особую группу навигационные задачи, связанные с осуществлением космических перелетов Земля — Луна, Земля — Марс, изменением орбиты и т. д.

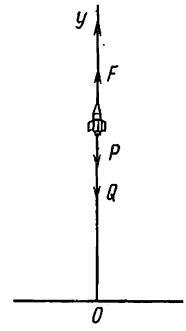


Рис. 3.5. Вертикальный подъем ракеты

Вертикальный подъем ракеты на максимальную высоту (задача Годдарда). Пусть ракета с начальной массой m_0 совершает взлет по вертикали Oy (рис. 3.5). Благодаря сгоранию топлива масса ракеты $m\ (t)$ изменяется по закону $\dot{m}\ (t) = -u\ (t)$, где $u\ (t)$ — секундный расход топлива. На ракету действуют сила тяжести $P = m\ (t)\, g$, сила лобового сопротивления Q и сила тяги $F = \beta u\ (t)$. Предположим, что сила Q имеет вид $Q = C\mathrm{v}^2\ (t)$, где $\mathrm{v}\ (t) = \dot{y}$. Будем предполагать, что параметры C и β — постоянные, зависящие от конструкции ракеты, и рассматривать ракету как материальную точку. Тогда второй закон Ньютона приводит к уравнениям движения ракеты (*уравнениям Мещерского*)

$$\dot{\mathrm{v}} = \frac{\beta u\ (t) - Q}{m} - g,\quad \dot{y} = \mathrm{v},\quad \dot{m} = -u\ (t). \tag{3.21}$$

Начальные условия для задачи (3.21) имеют вид

$$y\ (0) = 0,\quad \mathrm{v}(0) = 0,\quad m\ (0) = m_0. \tag{3.22}$$

Конечные условия таковы: момент T не задан, но

$$\mathrm{v}\ (T) = 0,\quad m\ (T) = m_1. \tag{3.23}$$

Задача Годдарда состоит в выборе такого управления $u\ (t)$, чтобы максимизировать высоту подъема ракеты, т. е.

$$J\ (u) = y\ (T) \to \max. \tag{3.24}$$

Таким образом, поставленная задача (3.21) — (3.24) есть задача Майера с нефиксированным моментом окончания движения.

*Задача о мягкой посадке на Луну**. Рассмотрим задачу о прилунении КА. Пусть прилунение происходит по вертикальной прямой. На

*Летов А. М. Математическая теория процессов управления. — М.: Наука, 1981.

Луне отсутствует атмосфера, поэтому мягкая посадка может быть обеспечена только реактивными двигателями, что повышает требования к точности управления двигателями.

Сохраняя обозначения задачи о вертикальном подъеме ракеты, запишем уравнения мягкой посадки в виде

$$\dot{y}=\mathrm{v},\ \dot{\mathrm{v}}=\frac{\beta u(t)}{m}-g_{\text{л}},\ \dot{m}=-u(t) \tag{3.25}$$

с начальными условиями $y(0)=y_0$, $\mathrm{v}(0)=\mathrm{v}_0$, $m(0)=m_0$.

В некоторый конечный, заранее не заданный момент T должны выполняться условия $y(T)=0$, $\mathrm{v}(T)=0$. В уравнениях (3.25) $g_{\text{л}}$ есть ускорение свободного падения на Луне, равное 1,62 м/с^2. Требуется выбрать управление $u(t)$, имеющее смысл секундного расхода топлива, так, чтобы минимизировать затраты топлива на посадку, т. е.

$$J(u)=m_0-m(T)\to\inf \tag{3.26}$$

при ограничении

$$0\leqslant u(t)\leqslant u_{\max}. \tag{3.27}$$

Задача о прилунении (3.25)—(3.27) очень похожа на задачу Годдарда (3.21)—(3.24). Однако указанная модель приводит к управлению, которое трудно реализовать на практике. В самом деле, пусть найдено оптимальное П-управление $u_{\text{опт}}(t)$ в задаче (3.25)—(3.27). Это управление состоит из двух этапов:

свободное падение от момента $t=0$ до момента $t=t_1$ при $u_{\text{опт}}(t)=0$;

торможение на отрезке $[t_1, T]$ при $u_{\text{опт}}(t)=u_{\max}$.

Такое П-управление на практике дает плохие результаты. Пусть момент включения тормозного двигателя $t_{\text{дв}}$ не совпадает с t_1, что в действительности всегда имеет место. Если $t_{\text{дв}}<t_1$, то КА остановится на некоторой высоте над Луной, а затем улетит от нее. Если же $t_{\text{дв}}>t_1$, то скорость при посадке не будет нулевой и мягкой посадки не произойдет. Момент t_1 зависит от начальной высоты $y(0)$ и начальной скорости $\mathrm{v}(0)$, его точное определение требует весьма точного определения значений $y(0)$, $\mathrm{v}(0)$, что невозможно.

Поэтому система мягкой посадки усложняется. Кроме основного тормозного двигателя в нее включаются двигатели малой реактивной тяги. В этом случае назначение основного тормозного двигателя состоит в обеспечении программного движения в задаче

$$\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = \frac{\beta\omega(t)}{z_3} - g_л,\ \dot{z}_3 = -\omega(t),$$

$$z_1(0) = z_{10},\ z_2(0) = z_{20},\ z_3(0) = z_{30},\ z_1(T) = z_{11} > 0,\ z_2(T) = z_{21} > 0, \quad (3.28)$$
$$J(\omega) = z_3(0) - z_3(T) \to \inf,\ 0 \leqslant \omega(t) \leqslant \omega_{max}.$$

Здесь z_{11} и z_{21} — некоторые малые, заранее заданные величины. Управление $\omega(t)$ обеспечивается основным тормозным двигателем.

Второй контур управления обеспечивается двигателями малой тяги. Введем возмущенные переменные y_1, y_2, y_3, ξ так, чтобы $y = z_1 + y_1$, $v = z_2 + y_2$, $m = z_3 + y_3$, $u = \omega + \xi$. Для возмущенных переменных в первом приближении получаем уравнение

$$\dot{y}_1 = y_2;\ \dot{y}_2 = -\frac{C\omega}{z_3^2} y_3 + \frac{C}{z_3}\xi;\ \dot{y}_3 = -\xi. \quad (3.29)$$

Начальные условия для уравнений (3.29) определяются точностью выполнения программного движения (3.28). Можно считать, что начальные условия представляют собой произвольные величины y_{10}, y_{20}, y_{30}, удовлетворяющие условию

$$\alpha_1 y_{10}^2 + \alpha_2 y_{20}^2 + \alpha_3 y_{30}^2 \leqslant R^2. \quad (3.30)$$

В качестве минимизируемого функционала в задаче (3.29), (3.30) естественно взять функционал, описывающий точность выполнения условий мягкой посадки:

$$J_1(\xi) = (z_{11} + y_1(T_1))^2 + \alpha_4 (z_{21} + y_2(T_1))^2 + \alpha_5 y_3^2(T_1) \to \inf, \quad (3.31)$$
$$0 \leqslant \xi(t) \leqslant \xi_{max}.$$

Здесь T_1 — заранее не фиксированный момент мягкой посадки, α_i — относительные весовые коэффициенты, R — величина, определяющая точность программного движения.

Отметим, что в задаче (3.29)—(3.31) необходимо найти С-управление $\xi = \xi(y_1, y_2, y_3)$. Важно также то, что задачи (3.29)—(3.31) и (3.28) не являются независимыми и должны решаться совместно. Обычно на решение обеих задач выделяется общий ресурс топлива Q, т. е. должно выполняться условие

$$\omega_{max}(T - t_1) + \xi_{max}(T_1 - T) \leqslant Q.$$

Кроме того, точность выполнения программного движения определяет величину R в неравенстве (3.30) и минимальное значение $J_1(\xi)$, т. е. значение скорости при мягкой посадке.

По описанной выше схеме 3 февраля 1966 г. была произведена первая в истории мягкая посадка советской автоматической стан-

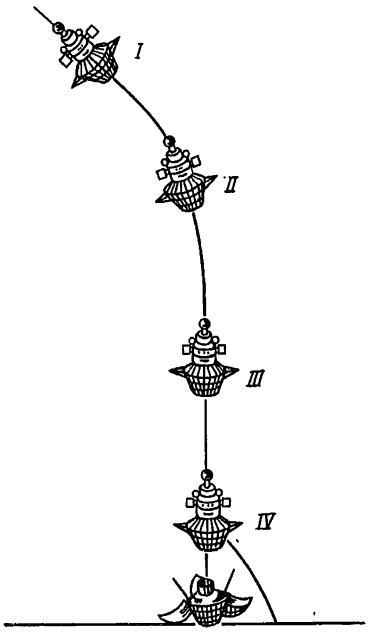


Рис. 3.6. Мягкая посадка на Луну космической станции «Луна-9»: *I* — высота 8300 км, ориентация по лунной вертикали; *II* — высота 75 км, включение основного тормозного двигателя; *III* — высота 150 м, включение малых ракетных двигателей; *IV* — высота 5 м, касание Луны штыревым датчиком

ции* «Луна-9». Скорость соударения с Луной, которую нужно было погасить при посадке, составляла 2600 м/с. Схема мягкой посадки станции «Луна-9» изображена на рис. 3.6. На высоте 8300 км за час до прилунения станция была сориентирована по лунной вертикали и падала на Луну до высоты 75 км. На этой высоте за 48 с до посадки по команде от радиовысотомера был включен основной тормозной двигатель. На высоте около 150 м основной двигатель был выключен и включены малые ракетные двигатели, которые обеспечили скорость посадки в 4 — 7 м/с. На высоте 5 м специальный штыревой датчик коснулся лунной поверхности, в результате чего эластичная оболочка, в которую была заключена станция, надулась сжатым газом из баллонов. Подпрыгнув несколько раз, станция остановилась, оболочка распалась на две части, которые были отброшены в сторону, и «Луна-9» оказалась на лунном грунте в районе Океана Бурь.

Основные результаты и формулы главы III

Общая постановка задачи оптимального управления включает:
уравнения эволюции системы $\dot{x}(t)=f(t, x, u)$;
минимизируемый функционал (критерий качества)

$$J_0(t_0, x(t_0), u, T, x(t))\to\inf_u;$$

ограничения на траекторию

$$J_j(t_0, x(t_0), u, T, x(T))\leqslant 0,\ j=1, \ldots, m_1;$$
$$J_j(t_0, x(t_0), u, T, x(T))=0,\ j=m_1+1, \ldots, m_2;$$

*Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении. — М.: Наука, 1980.

ограничения на управление:

$$u(t) \in U(t)$$

или

$$\int_{t_0}^{T} F_j(t, u(t))\,dt \leqslant 0,\ j=1, \ldots, m_3,$$

$$\int_{t_0}^{T} F_j(t, u(t))\,dt = 0,\ j=m_3+1, \ldots, m_4.$$

Задача Лагранжа: $J_0 = \int_{t_0}^{T} F_0(t, x(t), u(t))\,dt.$

Задача Майера: $J_0 = \varphi_0(T, x(T))$.

Задача Больца: $J_0 = \int_{t_0}^{T} F_0(t, x(t), u(t))\,dt + \varphi_0(T, x(T))$.

Задача быстродействия: $F_0(t, x(t), u(t)) = 1$.

ГЛАВА IV

КЛАССИЧЕСКОЕ ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этой главе изучаются необходимые условия локально оптимального в сильном смысле экстремума в задачах без ограничений на управление. Сначала устанавливаются необходимые условия для задач со свободным правым концом траектории. Затем приводится правило решения рассматриваемых задач в общем виде, которое позволяет изучить ряд частных случаев.

§ 1. ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ И ФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. Основные предположения. Установим необходимые условия оптимальности в задаче управления системой

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ x(t_0)=x_0,\ t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.1}$$
$$x\in R_n,\ u\in R_m,$$

с критерием качества

$$J(u)=\varphi(x(T))\to\inf. \tag{1.2}$$

Моменты начала движения t_0 и его окончания T, а также начальное положение x_0 заданы. Предположим, что непрерывные функции

$$f(t, x, u): R_1\times R_n\times R_m\to R_n,\ \varphi(x): R_n\to R_1$$

непрерывно дифференцируемы по x и u. Производные функции $f(t, x, u)$ будем обозначать соответствующим нижним индексом:

$$f_x(t, x, u)=\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x},\ f_u(t, x, u)=\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u},\ \varphi_x(x)=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}.$$

Напомним, что f_x — матрица размера $n\times n$ с элементами $\frac{\partial f_j(t, x, u)}{\partial x_i}$, где $i, j=1, \ldots, n$ (i — номер строки, j — номер столбца), а $\varphi_x(x)$ — вектор-столбец с компонентами $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}$, где $i=1, \ldots, n$.

Будем предполагать, что функция $f(t, x, u)$, а также $f_x(t, x, u)$ и $\varphi_x(x)$ удовлетворяют условию Липшица по (x, u), т. е. существует постоянная $C>0$ такая, что для любых $t\in R_1$, $x, y\in R_n$, $u, v\in R_m$ выполнены следующие неравенства:

$$\begin{gathered}|f(t, x, u)-f(t, y, v)|\leqslant C(|x-y|+|u-v|),\\ |f_x(t, x, u)-f_x(t, y, v)|\leqslant C(|x-y|+|u-v|),\\ |\varphi_x(x)-\varphi_x(y)|\leqslant C|x-y|.\end{gathered} \tag{1.3}$$

В задаче (1.1), (1.2) управление $u(t)$ ищется в классе непрерывных функций.

2. Формула Коши. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t),\ x\in R_n. \tag{1.4}$$

Квадратная матрица $A(t)$ размера $n\times n$ имеет кусочно-непрерывные ограниченные элементы. Обозначим через $X(t)$ фундаментальную матрицу системы (1.4), т. е. матрицу, столбцы которой представляют собой любые n линейно независимых решений уравнения (1.4). Матрица Коши $Z(t, s)$ системы (1.4) определяется равенством

$$Z(t, s)=X(t)X^{-1}(s). \tag{1.5}$$

Решение линейного неоднородного уравнения

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+f(t),\ x(t_0)=x_0, \tag{1.6}$$

где $f(t)$ — кусочно-непрерывная функция, выражается следующей *формулой Коши:*

$$x(t)=Z(t, t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} Z(t, s)f(s)\,ds. \tag{1.7}$$

При этом оказываются полезными следующие свойства матрицы $Z(t, s)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial Z(t, s)}{\partial t}=A(t)Z(t, s),\ \frac{\partial Z(t, s)}{\partial s}=-Z(t, s)A(s),\\ Z(s, t)=Z^{-1}(t, s),\ \frac{\partial Z^{-1}(t, s)}{\partial t}=-Z^{-1}(t, s)A(t),\\ Z(t, s)Z(s, t_1)=Z(t, t_1).\end{gathered} \tag{1.8}$$

Справедливость соотношений (1.7), (1.8) вытекает из определения (1.5) матрицы Коши. Отметим, что для постоянной матрицы $A(t)\equiv B$ матрица Коши $Z(t, s)$ имеет вид

$$Z(t, s)=\exp[B(t-s)]. \tag{1.9}$$

Ниже используется неравенство Коши — Буняковского в следующем виде. Для любых двух скалярных функций $x(t)$ и $y(t)$, интегрируемых с квадратом на отрезке $[t_0, T]$, справедливо *неравенство Коши — Буняковского*

$$\left[\int_{t_0}^{T}|x(t)y(t)|\,dt\right]^2\leqslant\left(\int_{t_0}^{T}x^2(t)\,dt\right)\left(\int_{t_0}^{T}y^2(s)\,ds\right). \tag{1.10}$$

3. Необходимые условия оптимальности. Введем следующее обозначение:

$$H(t, x, u, \psi)=\psi' f(t, x, u). \tag{1.11}$$

Теорема 1.1 (необходимые условия оптимальности). *Пусть* $u_0(t)$ *— оптимальное* П*-управление в задаче* (1.1), (1.2), *а* $x_0(t)$ *— соответствующая ему траектория* $\dot{x}_0(t)=f(t, x_0(t), u_0(t))$, $x_0(t_0)=x_0$. *Тогда*

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x_0(t)\\ u_0(t)}}=H_u(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))\equiv 0,\ t_0\leqslant t\leqslant T. \tag{1.12}$$

Здесь $\psi(t)\in R_n$ *есть решение задачи Коши*

$$\dot{\psi}(t)=-H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)),\ \psi(T)=-\varphi_x(x_0(T)). \tag{1.13}$$

□ Рассмотрим любое непрерывное управление $\mathrm{v}(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$. Определим траекторию $y(t)$ системы (1.1), соответствующую управлению $u_0(t)+\mathrm{v}(t)$:

$$\dot{y}(t)=f(t, y(t), u_0(t)+\mathrm{v}(t)),\ y(t_0)=x_0,\ t_0\leqslant t\leqslant T.$$

Оценим изменение $\Delta(t)=y(t)-x_0(t)$ оптимальной траектории, вызванное изменением оптимального управления на величину $\mathrm{v}(t)$. Ясно, что

$$\Delta(t)=\int_{t_0}^{t}[f(s, y(s), u_0(s)+\mathrm{v}(s))-f(s, x_0(s), u_0(s))]\,\mathrm{d}s.$$

Отсюда и из условия Липшица (1.3) следует, что

$$|\Delta(t)|\leqslant C\int_{t_0}^{t}(|\Delta(s)|+|\mathrm{v}(s)|)\,\mathrm{d}s.$$

Значит, в силу леммы Гронуолла — Беллмана (см. § 6 гл. I) имеем

$$|\Delta(t)|\leqslant \mathrm{e}^{C(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}|\mathrm{v}(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant C_1\int_{t_0}^{t}|\mathrm{v}(s)|\,\mathrm{d}s. \tag{1.14}$$

Здесь и далее через C_i обозначены некоторые неотрицательные постоянные.

Оценим теперь изменение критерия качества (1.2), т. е. оценим разность $\Delta J = J(u_0+\mathrm{v}) - J(u_0)$. Учитывая (1.2), находим

$$\Delta J = \varphi'_x(x_0(T))\,\Delta(T) + N_1, \tag{1.15}$$

$$N_1 = [\varphi'_x(x_0(T)+\theta\Delta(T)) - \varphi'_x(x_0(T))]\,\Delta(T). \tag{1.16}$$

Здесь и ниже через θ обозначены некоторые числа из отрезка (0, 1). Из соотношений (1.14), (1.16) и условия Липшица (1.3) вытекает, что

$$|N_1| \leqslant C_2 \left(\int_{t_0}^{T} |\mathrm{v}(s)|\,\mathrm{d}s \right)^2 \tag{1.17}$$

Преобразуем теперь первое слагаемое в правой части равенства (1.15). Используя выражение (1.13), имеем

$$\varphi'_x(x_0(T))\,\Delta(T) = -\psi'(T)\,\Delta(T) = -\int_{t_0}^{T} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi'(t)\,\Delta(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{t_0}^{T} (\dot{\psi}'(t)\,\Delta(t) + \psi'(t)\,\dot{\Delta}(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{t_0}^{T} \psi'(t)\,[f(t, y(t), u_0(t)+\mathrm{v}(t)) - f(t, x_0(t), u_0(t))]\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} H'_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))\,\Delta(t)\,\mathrm{d}t.$$

Отсюда и из соотношений (1.11), (1.15) вытекает равенство

$$\Delta J = -\int_{t_0}^{T} [H(t, y(t), u_0(t)+\mathrm{v}(t), \psi) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi)]\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} H'_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi)\,\Delta(t)\,\mathrm{d}t + N_1. \tag{1.18}$$

Заметим теперь, что

$$H(t, y(t), u_0(t)+\mathrm{v}(t), \psi) = H(t, x_0(t), u_0(t)+\mathrm{v}(t), \psi) +$$
$$+ H'_x(t, x_0(t)+\theta\Delta(t), u_0(t)+\mathrm{v}(t), \psi)\,\Delta(t).$$

Поэтому равенство (1.18) можно представить в виде

$$\Delta J = -\int_{t_0}^{T} [H(t, x_0(t), u_0(t)+\mathrm{v}(t), \psi) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi)]\,\mathrm{d}t + \\ + N_1 + N_2, \tag{1.19}$$

где

$$N_2 = -\int_{t_0}^{T} [H'_x(t, x_0(t)+\theta\Delta(t), u_0(t)+\mathrm{v}(t), \psi) - \\ - H'_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi)]\,\Delta(t)\,\mathrm{d}t.$$

В силу равенства (1.13) и условий теоремы функция $|\psi(t)|$ равномерно ограничена при $0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда, а также из определения N_2 и требования (1.3) вытекает, что

$$|N_2| \leqslant C_3 \int_{t_0}^{T} (|\Delta(t)|^2 + |\Delta(t)|\,|\mathrm{v}(t)|)\,\mathrm{d}t. \tag{1.20}$$

Используя неравенство (1.14), получаем

$$\int_{t_0}^{T} |\Delta(t)|\,|\mathrm{v}(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant C_1 \int_{t_0}^{T} |\mathrm{v}(t)| \left(\int_{t_0}^{T} |\mathrm{v}(s)|\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_{t_0}^{T} |\mathrm{v}(t)|\,\mathrm{d}t \int_{t_0}^{T} |\mathrm{v}(s)|\,\mathrm{d}s = C_1 \left[\int_{t_0}^{T} |\mathrm{v}(t)|\,\mathrm{d}t\right]^2 \tag{1.21}$$

Аналогично в силу (1.14) имеем

$$\int_{t_0}^{T} |\Delta(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant (T-t_0)\,C_1^2 \left[\int_{t_0}^{T} |\mathrm{v}(s)|\,\mathrm{d}s\right]^2 \tag{1.22}$$

Формулы (1.20)—(1.22) означают, что

$$|N_2| \leqslant C_4 \left[\int_{t_0}^{T} |\mathrm{v}(t)|\,\mathrm{d}t\right]^2 \tag{1.23}$$

Итак, для произвольной допустимой вариации $v(t)$ оптимального управления $u_0(t)$ доказано основное соотношение (1.19) для приращения ΔJ критерия качества.

Положим теперь $v(t)=\varepsilon\omega(t)$, где $\omega(t)$ — произвольное непрерывное управление, а параметр $\varepsilon>0$. Тогда из (1.19) следует, что

$$0\leqslant\Delta J=-\int_{t_0}^{T} H'_u(t, x_0(t), u_0(t)+\theta\varepsilon\omega(t), \psi)\varepsilon\omega(t)\,dt+N_1+N_2. \quad (1.24)$$

Заметим, что в силу неравенств (1.17), (1.23) при $v=\varepsilon\omega$ имеем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} N_1\varepsilon^{-1}=0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} N_2\varepsilon^{-1}=0$. Значит, поделив обе части (1.24) на ε и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$0\leqslant-\int_{t_0}^{T} H'_u(t, x_0(t), u_0(t), \psi)\omega(t)\,dt.$$

Теперь, модифицируя основную лемму вариационного исчисления, заключаем, что последнее неравенство возможно только тогда, когда выполнено равенство (1.12). ■

4. Задача Больца. Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0, \quad (1.25)$$

$$J(u)=\int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))\,dt+\varphi(x(T))\to\inf. \quad (1.26)$$

Здесь t_0 и T — заданные моменты времени, а $x_0\in R_n$ — заданный вектор начального положения системы. Правый конец траектории $x(T)$ свободен. Необходимые условия оптимальности в задаче (1.25), (1.26) можно получить с помощью теоремы 1.1, воспользовавшись описанным в § 2 гл. III способом сведения задачи Больца к задаче Майера. В соответствии с этим способом задача (1.25), (1.26) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned}&\dot{x}_{n+1}(t)=F(t, x(t), u(t)),\ x_{n+1}(t_0)=0,\\ &\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ x(t_0)=x_0,\\ &x_{n+1}(T)+\varphi(x(T))\to\inf.\end{aligned} \quad (1.27)$$

Необходимые условия оптимальности в задаче (1.27) сформулированы в теореме 1.1. В рассматриваемом случае вследствие соотношений (1.27), (1.11) функция H имеет вид

$$H=\psi'(t)f(t, x, u)+\psi_{n+1}(t)F(t, x, u).$$

Уравнение для вектора $\psi(t)\in R_n$ сохраняет прежний вид (1.12), а скалярная функция $\psi_{n+1}(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\dot{\psi}_{n+1}(t)=-\partial H/\partial x_{n+1}=0,\ \psi_{n+1}(T)=-1.$$

Значит, $\psi_{n+1}(t)\equiv -1$. Поэтому

$$H(t, x, u, \psi)=-F(t, x, u)+\psi'(t)f(t, x, u).$$

Таким образом, совокупность необходимых условий оптимальности в задаче (1.25), (1.26), которым удовлетворяют оптимальная траектория $x_0(t)$ и оптимальное управление $u_0(t)$, выражается соотношениями

$$\dot{x}_0(t)=f(t, x_0(t), u_0(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x_0(t_0)=x_0, \tag{1.28}$$

$$\dot{\psi}(t)=-f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t)+F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \tag{1.29}$$

$$\psi(T)=-\varphi_x(x_0(T)),$$

$$f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t)-F_u(t, x_0(t), u_0(t))=0. \tag{1.30}$$

Если решение задачи оптимального управления (1.25), (1.26) существует и единственно, то оно полностью определяется соотношениями (1.28), (1.29). При этом построение оптимального управления состоит из следующих шагов:

1^0. Решают уравнение (1.30) относительно u_0 и определяют функцию $u_0=u_0(t, \psi(t), x_0(t))$.

2^0. Подставляют найденное выражение u_0 в уравнения (1.28), (1.29). В результате получается двухточечная краевая задача относительно неизвестных $x_0(t)$ и $\psi(t)$.

3^0. Решают полученную краевую задачу и определяют функции времени $x_0(t)$ и $\psi(t)$. Подставляя найденные функции $x_0(t)$, $\psi(t)$ в формулу, определяющую оптимальное управление, получают программное оптимальное управление $u_0(t)$.

Реализация изложенного метода в конкретных случаях сопряжена с многочисленными трудностями, связанными, в частности, с необходимостью решать краевую задачу (1.28), (1.29), с большой размерностью систем, с их нелинейностью и т. д. [23].

Кроме того, необходимо иметь в виду, что для доказательства оптимальности полученного таким образом управления следует установить существование решения исходной задачи оптимального управления и единственного решения краевой задачи (1.28), (1.29), в которой вместо u подставлено $u_0(t, \psi(t), x_0(t))$. Численная реализация изложенного метода будет рассмотрена в гл. XV.

Вместе с тем в некоторых важных случаях описанный метод может быть эффективно осуществлен. Один из таких случаев — управление линейной системой с квадратичным функционалом — рассмотрен в следующем параграфе.

§ 2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

1. Необходимые условия оптимальности. Линейно-квадратичная задача, ниже для краткости называемая *ЛК-задачей*, состоит в минимизации квадратичного функционала

$$J(x)=x'(T)N_1x(T)+\int_{t_0}^{T}(x'(t)N_2(t)x(t)+u'(t)N_3(t)u(t))\,dt \quad (2.1)$$

на траекториях линейной системы

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ t\in[t_0,\ T],\ x\in R_n,\ u\in R_m;$$
$$x(t_0)=x_0. \quad (2.2)$$

Моменты времени t_0 и T, а также начальное положение x_0 заданы. Предполагается, что матрицы $A(t)$, $B(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ соответствующих размерностей имеют кусочно-непрерывные элементы, причем

$$N_1\geqslant 0,\ N_2(t)\geqslant 0,\ N_3(t)>0. \quad (2.3)$$

Напомним, что матрица $N\geqslant 0$, если $x'Nx\geqslant 0$ для любого вектора $x\in R_n$, и $N>0$, если $x'Nx>0$, для любого $x\in R_n$, $x\neq 0$.

Для определения оптимального управления в ЛК-задаче (2.1), (2.2) используем установленные в § 1 необходимые условия оптимальности (1.28)—(1.30). В рассматриваемом случае они заданы уравнениями (2.2) и соотношениями

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t))=-x'(t)N_2(t)x(t)-$$
$$-u'(t)N_3(t)u(t)+\psi'(t)[A(t)x(t)+B(t)u(t)],$$
$$-\frac{\partial H}{\partial x}=\dot{\psi}(t)=-A'(t)\psi(t)+2N_2(t)x(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$
$$\psi(T)=-2N_1x(T), \quad (2.4)$$
$$\frac{\partial H}{\partial u}=B'(t)\psi(t)-2N_3(t)u(t)=0.$$

В силу условий (2.3) функционал (2.1) является выпуклым по u. Используя это, так же как и в конечномерном случае, можно показать [18], что соотношения (2.2), (2.4) выражают не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности.

2. Построение оптимального управления. Для определения оптимального управления с помощью необходимых условий (2.2), (2.4) применим описанный в § 1 метод.

1^0. Из уравнения (2.4) следует, что оптимальное управление u_0 определяется формулой

$$u_0=\frac{1}{2} N_3^{-1}(t) B'(t) \psi(t). \tag{2.5}$$

2^0. Подставим выражение (2.5) в (2.2), (2.4). В результате получится краевая задача для оптимальной траектории $x_0(t)$ и вектора сопряженных переменных $\psi(t)$:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_0(t)=A(t) x_0(t)+\frac{1}{2} B_1(t) \psi(t),\\
&x_0(t_0)=x_0,\\
&\dot{\psi}(t)=-A'(t) \psi(t)+2N_2(t) x_0(t),\\
&\psi(T)=-2N_1 x_0(T),\\
&B_1(t)=B(t) N_3^{-1}(t) B'(t).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

3^0. Для решения краевой задачи (2.6) будем искать функцию $\psi(t)$ в виде

$$\psi(t)=-2P(t) x_0(t), \tag{2.7}$$

где симметричная матрица $P(t)$ подлежит определению. Продифференцируем обе части равенства (2.7) по t:

$$\dot{\psi}(t)=-2\left[\dot{P}(t) x_0(t)+P(t) \dot{x}_0(t)\right].$$

Заменим здесь производные $\dot{\psi}$ и $\dot{x}_0$ в соответствии с равенствами (2.6), а затем подставим вместо $\psi(t)$ выражение (2.7). Получим

$$\begin{aligned}
&-A'(t) \psi(t)+2N_2(t) x_0(t)=-2\left[\dot{P}(t) x_0(t)+\right.\\
&\left.+P(t) A(t) x_0(t)+\frac{1}{2} P(t) B_1(t) \psi(t)\right],\\
&\left[\dot{P}(t)+A'(t) P(t)+P(t) A(t)-P(t) B_1(t) P(t)+N_2(t)\right] x_0(t)=0,\\
&P(T) \cdot x_0(T)=N_1 x_0(T).
\end{aligned}$$

Последние равенства будут выполнены для любого вектора $x_0(t)$, если

$$\dot{P}(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)-P(t)B_1(t)P(t)+N_2(t)=0, \quad (2.8)$$
$$P(T)=N_1.$$

Уравнение (2.8), служащее для определения матрицы $P(t)$, называется *матричным уравнением Риккати*. Оно играет важную роль в теории ЛК-задач управления.

После того как матрица $P(t)$ определена, оптимальное управление в силу равенств (2.5) и (2.7) выражается формулой

$$u_0(t)=-N_3^{-1}(t)B'(t)P(t)x_0(t). \quad (2.9)$$

Кроме того, как будет показано в гл. VI, минимальное значение критерия качества (2.1), соответствующее управлению (2.9), определяется соотношением

$$\min_u J(u)=J(u_0)=x_0'P(t_0)x_0. \quad (2.10)$$

Таким образом, построение матрицы $P(t)$ позволяет полностью решить задачу управления (2.1), (2.2).

Отметим еще, что управление (2.9) получено в виде С-управления, т. е. в виде функции времени и фазовых координат. В самом деле, обозначая реализованное значение оптимальной траектории $x_0(t)$ через x, получим, что оптимальное управление системой, находящейся в состоянии x в момент t, имеет вид

$$u_0(t, x)=-N_3^{-1}(t)B'(t)P(t)x. \quad (2.11)$$

3. Матричное уравнение Риккати. Рассмотрим некоторые свойства матричного уравнения Риккати (2.8).

1^0. *Решение уравнения* (2.8) *существует и единственно при всех* $t<T$.

Локальное (т. е. принадлежащее некоторой окрестности точки T) существование и единственность задачи (2.8) являются очевидным следствием общих теорем существования решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Значительно труднее доказательство того, что решение задачи (2.8) определено при всех $t<T$. Эта трудность связана с тем, что уравнение (2.8) содержит квадратичную нелинейность $P(t)B_1(t)P(t)$. Не всякое уравнение с квадратичной нелинейностью имеет решения, продолжимые на всю ось. Например, скалярное уравнение

$$\dot{y}(t)=1+y^2(t), \; y(0)=0$$

имеет решение $y(t)=\operatorname{tg} t$, которое обращается в бесконечность при $t=\pm\pi/2$ и поэтому непродолжимо за точку $t=\pi/2$ как вправо, так и за точку $t=-\pi/2$ влево. Однако специальная структура уравнения (2.8) позволяет установить продолжимость решений на полуось $t\leqslant T$.

Рассмотрим скалярное уравнение типа (2.8):

$$\dot{p}(t)-b_1p^2(t)+n_2=0,\ p(T)=n_1;\ b_1, n_1, n_2>0. \qquad (2.12)$$

Решение уравнения (2.12) не может пересечь прямую $p(t)=0$. В самом деле, если в точке $t=t_1<T$ решение пересекает прямую $p(t)=0$, то должно быть $p(t_1)=0$ и $\dot{p}(t_1)\geqslant 0$. Но тогда уравнение (2.12) в этой точке t_1 нарушается. Решение $p(t)$ не может также пересечь прямую $p(t)=\sqrt{n_2/b_1}$, поскольку на этой прямой $-b_1p^2(t)+n_2=0$, а всюду выше этой прямой $-b_1p^2(t)+n_2<0$. Таким образом, решение уравнения (2.12) всегда заключено в следующих пределах: $0\leqslant p(t)\leqslant \sqrt{n_2/b_1}$, $t\leqslant T$. Значит, $p(t)$ не может уходить в бесконечность для конечных значений t в отличие от решений уравнения (2.12).

Используя близкие по идее рассуждения, Р. Калман доказал, что решения уравнения (2.8) определены при всех $t\leqslant T$.

2^0. *Решение уравнения* (2.8) *неотрицательно, т. е.* $P(t)\geqslant 0$. Из соотношения (2.10) следует, что

$$x_0'P(t)x_0=J(u_0)\geqslant 0, \qquad (2.13)$$

поскольку всегда функционал $J(u)\geqslant 0$. В соотношении (2.13) момент $t_0<T$, а также x_0 могут быть выбраны произвольно. Это и означает, что $P(t)\geqslant 0$.

3^0. *Пусть* $N_2(t)\equiv 0$ *и* $N_1>0$. *Тогда уравнение* (2.8) *интегрируется в явном виде.*

Уравнение (2.8) при $N_2(t)\equiv 0$ называется *уравнением Бернулли* и имеет вид

$$\dot{P}(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)-P(t)B_1(t)P(t)=0,$$
$$P(T)=N_1,\ N_1>0. \qquad (2.14)$$

Рассмотрим матрицу $D(t)=P^{-1}(t)$. Так как

$$\frac{d}{dt}(P^{-1}(t)P(t))=\dot{P}^{-1}(t)P(t)+P^{-1}(t)\dot{P}(t)=0,$$

то $\dot{D}(t)=-P^{-1}(t)\dot{P}(t)P^{-1}(t)$. Умножая уравнение (2.14) слева и справа на $P^{-1}(t)$, получим, что матрица $D(t)$ является решением линейного уравнения

$$\dot{D}(t)-D(t)A'(t)-A(t)D(t)+B_1(t)=0,$$
$$D(T)=N_1^{-1}. \qquad (2.15)$$

Непосредственной подстановкой в (2.15) можно убедиться, что решение представимо в виде

$$D(t)=Z(t, T)\,N_1^{-1}Z'(t, T)+\int_t^T Z(t, s)\,B_1(s)\,Z'(t, s)\,ds. \quad (2.16)$$

Здесь матрица Коши $Z(t, s)$ определяется соотношениями (1.5) и (1.8). Из (2.16) и (1.8) следует, что

$$P(t)=\Big[Z(t, T)\,(N_1^{-1}+Z^{-1}(t, T)\times$$

$$\times\int_t^T Z(t, s)\,B_1(s)\,Z'(t, s)\,ds\,Z'(t, T)^{-1})\,Z'(t, T)\Big]^{-1}=$$

$$=Z'(T, t)\left[I+N_1\int_t^T Z(T, s)\,B_1(s)\,Z'(T, s)\,ds\right]^{-1}N_1Z(T, t). \quad (2.17)$$

Формула (2.17) показывает, что условие $N_1>0$ не является необходимым для ее справедливости. Достаточно лишь потребовать, чтобы матрица в квадратных скобках в (2.17) была невырождена.

4^0. *Формула для решений задачи* (2.8) *при произвольной матрице* $N_2(t)$. Выведем теперь формулу для решений задачи (2.8) при произвольной матрице $N_2(t)$, используя матрицу Коши $G(t, s)$ размера $2n\times 2n$. Рассмотрим систему $2n$ линейных уравнений

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1(t)=A(t)x_1(t)-B(t)x_2(t),\ x_1\in R_n;\\&\dot{x}_2(t)=-N_2(t)x_1(t)-A'(t)x_2(t),\ x_2\in R_n;\\&x_2(T)=N_1x_1(T).\end{aligned} \quad (2.18)$$

Найдем матрицу $K(t)$ такую, что $K(T)=N_1$ и $x_2(t)=K(t)x_1(t)$ при всех $t\leqslant T$. С учетом уравнений (2.18) получим

$$\dot{x}_2(t)=-N_2(t)x_1(t)-A'(t)K(t)x_1(t)=$$
$$=\dot{K}(t)x_1(t)+K(t)[A(t)x_1(t)-B_1(t)K(t)x_1(t)].$$

Отсюда следует, что

$$[\dot{K}(t)+A'(t)K(t)+K(t)A(t)-K(t)B_1(t)K(t)+N_2(t)]x_1(t)=0.$$

Последнее равенство возможно при любом $x_1(t)$, если выражение в квадратных скобках равно нулю при всех t. Таким образом, $K(t)$ удовлетворяет уравнению (2.8) и тому же начальному условию $K(T)=N_1$, что и $P(t)$. В силу свойства единственности (см. п. 1^0) заключаем, что $K(t)\equiv P(t)$.

Представим матрицу $G(t, s)$ в виде четырех блоков размера $n \times n$:

$$G(t, s)=\begin{pmatrix} G_{11}(t, s) & G_{12}(t, s) \\ G_{21}(t, s) & G_{22}(t, s) \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

На основании формулы Коши (1.7) решение системы (2.18) можно записать в виде

$$x_1(t)=G_{11}(t, T)x_1(T)+G_{12}(t, T)x_2(T),$$
$$x_2(t)=G_{21}(t, T)x_1(T)+G_{22}(t, T)x_2(T).$$

Следовательно,

$$x_2(t)=(G_{21}(t, T)+G_{22}(t, T)N_1)x_1(T),$$
$$x_2(t)=P(t)x_1(t)=P(t)(G_{11}(t, T)+G_{12}(t, T)N_1)x_1(T).$$

Сравнивая эти две формулы и учитывая, что $x_1(T)$ произвольно, получаем

$$P(t)=[G_{21}(t, T)+G_{22}(t, T)N_1][G_{11}(t, T)+G_{12}(t, T)N_1]^{-1}. \tag{2.20}$$

Представление (2.20) решения задачи (2.8) справедливо при условии, что матрица во вторых квадратных скобках в (2.20) является невырожденной.

Упомянем еще об одном способе получения соотношения (2.20). Положим $P(t)=\beta(t)\alpha(t)^{-1}$, где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — квадратные матрицы, подлежащие определению. Дифференцируя, с учетом (2.8) получим

$$\dot{\beta}(t)\alpha^{-1}(t)-\beta\alpha^{-1}\dot{\alpha}\alpha^{-1}=\dot{P}(t)=-A'P-PA+PB_1P-N_2=$$
$$=-A'\beta\alpha^{-1}-\beta\alpha^{-1}A+\beta\alpha^{-1}B_1\beta\alpha^{-1}-N_2.$$

Умножим обе части этого выражения справа на α и слева на $\alpha\beta^{-1}=(\beta\alpha^{-1})^{-1}$. Тогда решение уравнения (2.8) можно найти, если матрицы α и β определить с помощью соотношений, аналогичных (2.18):

$$\dot{\alpha}=A\alpha-B_1\beta,\ \dot{\beta}=-A'\beta-N_2\alpha,\ \alpha(0)=I,\ \beta(0)=N_1.$$

Записывая теперь общее решение этих уравнений с помощью формулы Коши, приходим к представлению (2.20).

5°. *Метод последовательных приближений.* Рассмотрим последовательность симметричных матриц $P_i(t)$ $(i \geqslant 1)$, введенную с помощью рекуррентных формул

$$\dot{P}_0(t)+A'(t)P_0(t)+P_0(t)A(t)+N_2(t)=0,\ P_0(T)=N_1,$$
$$\dot{P}_i(t)+A'_i(t)P_i(t)+P_i(t)A_i(t)+P_{i-1}(t)B_1(t)P_{i-1}(t)+N_2(t)=0,$$
$$P_i(T)=N_1,\ A_i(t)=A(t)-B_1(t)P_{i-1}(t),\ i=1, 2, \tag{2.21}$$

Используя формулу Коши и уравнения (2.21), заключаем, что

$$P_i(t)=\int_t^T W'_i(t, s)\,[P_{i-1}(s)B_1(s)\,P_{i-1}(s)+N_2(s)]\,W_i(t, s)\,ds+$$

$$+W'_i(t, T)\,N_1W_i(t, T),\ i\geqslant 1. \qquad (2.22)$$

Здесь W_i — матрица Коши решений однородного уравнения $\dot{y}(t)=-A_i(t)y(t)$. Из соотношения (2.22) и аналогичного представления для матрицы $P_0(t)$ следует, что все $P_i(t)\geqslant 0$. Положим $Q_i=P_{i+1}-P_i$. Тогда на основании (2.21) при $i\geqslant 2$ получаем уравнения

$$\dot{Q}_i(t)+A'_i(t)Q_i(t)+Q_i(t)A_i(t)-Q_{i-1}(t)B_1(t)Q_{i-1}(t)=0.$$

$$Q_i(T)=0.$$

Отсюда и из формулы Коши вытекает, что

$$Q_i(t)=-\int_t^T W'_i(t, s)\,Q_{i-1}(s)B_1(s)\,Q_{i-1}(s)\,W_i(s, T)\,ds.$$

Последние равенства означают, что все матрицы $Q_i(t)\leqslant 0$, т. е. $0\leqslant P_i(t)\leqslant P_{i-1}(t)$ при $i\geqslant 2$. Таким образом, $\{P_i(t)\}$ представляет собой невозрастающую последовательность неотрицательно определенных матриц, т. е. $P_{i+1}-P_i\leqslant 0$. Можно доказать, что последовательность $\{P_i(t)\}$ имеет предел $P(t)\geqslant 0$ при $t\to\infty$, причем сходимость $P_i(t)\to P(t)$ является равномерной на каждом ограниченном интервале времени. Значит, переходя к пределу при $i\to\infty$ в интегральном тождестве, соответствующем уравнению (2.21), заключаем, что матрица $P(t)$ есть решение задачи (2.8). Итак, для приближенного решения уравнения Риккати (2.8) достаточно определить решение линейного уравнения (2.21), которое выражается формулой (2.22). Обозначим через $\|P\|$ норму матрицы P, равную корню квадратному из суммы квадратов элементов матрицы P. Тогда справедлива оценка

$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\|P(t)-P_i(t)\|\leqslant\frac{C}{i}.$$

4. Скалярный случай [4]. Рассмотрим в качестве примера задачу управления вида (2.1), (2.2) с постоянными коэффициентами a, b, $N_2\geqslant 0$, $N_3>0$, $N_1\geqslant 0$:

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bu(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x(0)=x_0, \qquad (2.23)$$

$$J(u)=N_1x^2(T)+\int_0^T(N_2x^2(t)+N_3u^2(t))\,dt.$$

В этой задаче оптимальное управление $u_0(t)$ в соответствии с равенством (2.9) выражается формулой

$$u_0(t) = -bN_3^{-1} P(t) x(t),$$

где $x(t)$ — решение задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = (a - r^{-1}P(t)) x(t), \quad x(0) = x_0, \quad r = b^{-2}N_3.$$

В силу формулы Коши (1.14) и соотношения (1.16) получаем, что оптимальная траектория $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = x_0 \exp\left[at - r^{-1}\int_0^t P(s)\,ds\right].$$

Скалярная функция $P(t)$ определяется как решение задачи (2.8), принимающей в рассматриваемом случае вид

$$\dot{P}(t) = -N_2 - 2aP(t) + r^{-1}P^2(t), \quad P(T) = N_1. \qquad (2.24)$$

Отсюда, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$P(t) = r\,[N_1 r^{-1} - a + \beta - (N_1 r^{-1} - a - \beta)\alpha(t)]^{-1}\,[(\beta + a)(N_1 r^{-1} - a + \beta) + (\beta - a)(N_1 r^{-1} - a - \beta)\alpha(t)],$$

$$\alpha(t) = \exp[-2\beta(T - t)], \quad \beta = \sqrt{a^2 + N_2 r^{-1}}.$$

Полученные выражения для $P(t)$ и оптимальной траектории $x(t)$ позволяют исследовать их вид при различных значениях параметров.

На рис. 2.1 изображены оптимальные траектории $x(t)$ для $a = -1$, $N_1 = 0$, $N_2 = 1$, $T = 1$, $x(0) = 1$ при значениях $r = b^{-2}N_3$, равных 100; 1; 0,2 и 0,02. Видно, что скорость убывания траектории $x(t)$ к нулю существенно зависит от величины r, характеризующей сто-

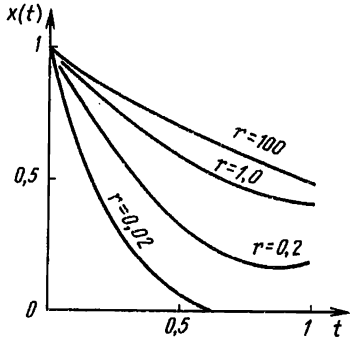


Рис. 2.1. Переходные процессы в задаче (2.23) в зависимости от r

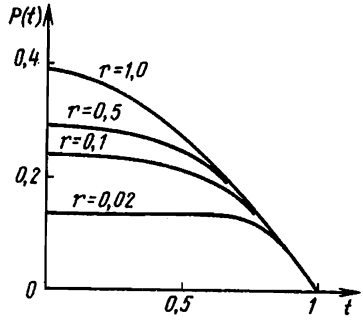


Рис. 2.2. Зависимость решения уравнения Риккати (2.24) от r

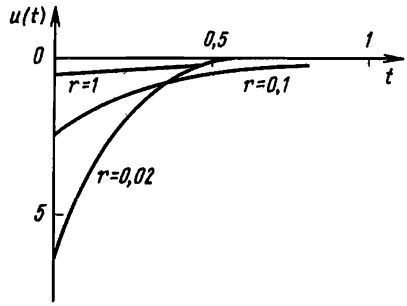


Рис. 2.3. Оптимальное управление в задаче (2.23)

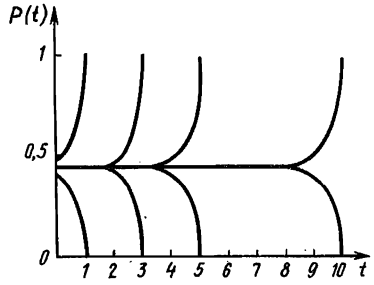


Рис. 2.4. Зависимость решения уравнения Риккати (2.24) от времени управления: $N_1=0$ — нижние участки; $N_1=1$ — верхние участки

имость управления (множитель N_3) и эффективность управления (множитель b^{-2}).

На рис. 2.2 изображены графики решений уравнения (2.24) при $r=1$; 0,5; 0,1; 0,02. Видно, что для $t \leqslant T-3\beta/2$ функция $P(t)$ близка к постоянной, равной $N_2(\beta-a)$. Последнее означает, что при $t \leqslant T-3\beta/2$ управление системой (2.23) осуществляется с почти постоянным коэффициентом усиления обратной связи.

На рис. 2.3 изображены графики оптимального управления при $r=1$; 0,1; 0,02. Видно, что с уменьшением стоимости управления (с уменьшением N_3) или с увеличением его эффективности (с увеличением b) оптимальное управление стремится к дельта-функции, т. е. принимает импульсный характер.

Из рис. 2.4, где представлена зависимость решений задачи при $a=-1$; $r=1$; $T=1$; 3; 5; 10 и $N_1=0$; 1, видно, что, как и выше, для $t \leqslant T-3\beta/2$ функция $P(t)$ близка к постоянной $N_2/(\beta-a)$.

На рис. 2.5 изображены оптимальные траектории при $a=1$, $x(0)=1$, $N_1=0$, $N_2=1$, $T=1$ для $r=100$; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,05. Исходная

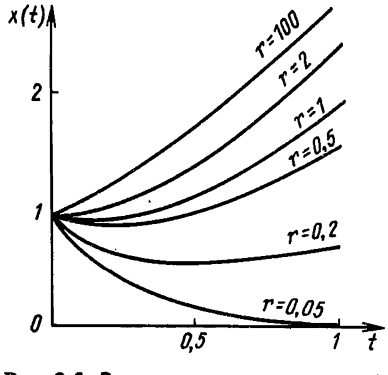


Рис. 2.5. Зависимость оптимальных траекторий от параметра r

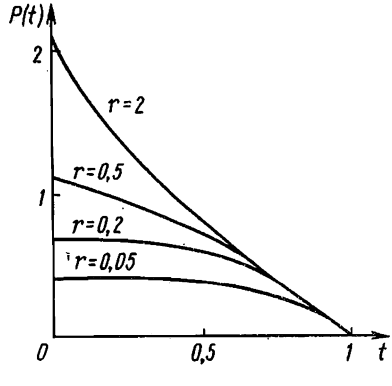


Рис. 2.6. Зависимость решения уравнения Риккати от r

система (2.23) при $b=0$ неустойчива. Видно, что при малых ресурсах управления (т. е. больших значениях r) управление слабо влияет на траектории системы.

Наконец, на рис. 2.6 приведены графики $P(t)$ при $a=1$, $N_1=0$, $T=1$ и $r=2$; 0,5; 0,2; 0,05.

5. Оптимальное управление намоткой провода [13]. На рис. 2.7 изображен механизм для намотки провода. Электродвигатель вращает катушку, на которую наматывается провод. Во избежание обрывов провода или его провисания скорость намотки должна поддерживаться постоянной. Во время намотки диаметр катушки увеличивается, что приводит к увеличению момента инерции катушки $g(t)$. Для поддержания постоянной линейной скорости намотки $v(t)=v_0$ необходимо во время намотки уменьшать угловую скорость $\omega(t)$ так, чтобы

$$r(t)\omega(t)=v(t)=v_0. \quad (2.25)$$

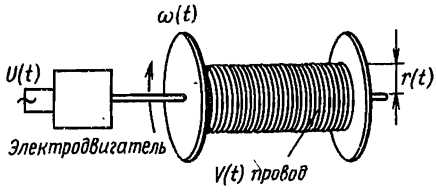


Рис. 2.7. Механизм для намотки провода: $U(t)$ — напряжение на электродвигателе; $\omega(t)$ — угловая скорость катушки; $r(t)$ — радиус катушки с проводом; $v(t)$ — линейная скорость намотки провода

Уравнение вращения катушки имеет вид

$$\frac{d}{dt}[g(t)\omega(t)]=æU(t)-\psi\omega(t). \quad (2.26)$$

В уравнении (2.26) использованы обозначения: $U(t)$ — напряжение на входе электродвигателя; $æ$ — коэффициент пропорциональности между вращающим моментом двигателя и его входным напряжением; ψ — коэффициент трения вращения. Управлением в данном случае является $U(t)$, а регулируемой величиной — $\omega(t)$, которую необходимо менять так, чтобы выполнялось условие (2.25). Найдем зависимость $r(t)$ и $g(t)$ от времени при постоянной скорости намотки v_0.

За время $t_{об}$, необходимое для намотки одного ряда провода, радиус изменится от r_0 до $r(t_{об})$ так, что

$$r^2(t_{об})-r_0^2=kv_0t_{об}, \quad (2.27)$$

где $k>0$ — некоторый коэффициент, характеризующий привод. Из равенства (2.27) при $t_{об}\ll 1$ получаем

$$r(t)=\sqrt{r_0^2+Ct}. \quad (2.28)$$

Так как для круга радиуса R момент инерции пропорционален R^4, то

$$g(t)=g(0)+C_1[r^4(t)-r^4(0)].$$

Номинальное значение $\omega_{\text{ном}}(t)$ для угловой скорости определяется выражением $\omega_{\text{ном}}(t)=v_0 r^{-1}(t)$, а номинальное управляющее напряжение $U_{\text{ном}}(t)$ есть

$$U_{\text{ном}}(t)=\frac{1}{æ}\left[\frac{d}{dt}(g(t)\omega_{\text{ном}}(t))+\psi\omega_{\text{ном}}(t)\right].$$

В теории устойчивости $\omega_{\text{ном}}(t)$ и $U_{\text{ном}}(t)$ принято называть *невозмущенным решением*. Для возмущенных значений соответствующих переменных

$$x(t)=g(t)[\omega(t)-\omega_{\text{ном}}(t)],\quad u(t)=U(t)-U_{\text{ном}}(t)$$

получаем уравнение

$$\dot{x}(t)=-\psi g^{-1}(t)x(t)+æu(t). \tag{2.29}$$

Критерий качества, подлежащий минимизации, естественно выбрать в виде

$$J(u)=\int_0^T[(r(t)g^{-1}(t)x(t))^2+\rho u^2(t)]\,dt,\ \rho>0. \tag{2.30}$$

Первое слагаемое в интеграле (2.30) пропорционально кинетической энергии вращающейся катушки, а второе — электрической энергии, расходуемой электродвигателем (см. § 3 гл. III).

Таким образом, задача оптимального управления намоткой провода сведена к ЛК-задаче (2.29), (2.30) с переменными коэффициентами. При этом С-управление, дающее решение задачи (2.29), (2.30), имеет вид

$$u(t)=-K(t)x(t),\ K(t)=æ\rho^{-1}P(t).$$

Здесь $P(t)$ есть решение уравнения Риккати:

$$\dot{P}(t)-2\psi g^{-1}(t)P(t)-æ^2\rho^{-1}P^2(t)=-r^2(t)g^{-2}(t),\ P(T)=0. \tag{2.31}$$

Уравнение (2.31) можно проинтегрировать численно. Возьмем следующие числовые значения параметров задачи (2.31):

$$g(t)=0{,}02+66{,}67\,[r^4(t)-r^4(0)]\quad (\text{кг}\cdot\text{м}^2),$$

$$r(t)=\sqrt{0{,}01+0{,}0005t}\quad (\text{м}),$$

$$\psi=0{,}01\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}},\quad æ=0{,}1\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{рад}}{\text{В}\cdot\text{с}},\quad \rho=0{,}06\,\frac{\text{м}^2}{\text{В}^2\cdot\text{с}^2}.$$

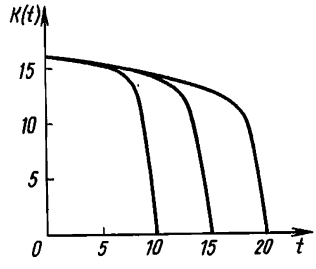


Рис. 2.8. Оптимальный коэффициент усиления $K(t)$ в задаче о намотке провода

На рис. 2.8 изображены графики оптимального коэффициента усиления $K(t)$ в зависимости от времени t для значений

$T=10$; 15; 20 с. Видно, что оптимальный коэффициент усиления $K(t)$ ведет себя одинаково при разных T всюду, за исключением конечного участка времени.

§ 3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

1. Метод множителей Лагранжа. Удобным и эффективным методом получения необходимых условий оптимальности в конечномерных задачах оптимизации и в вариационном исчислении является *метод множителей Лагранжа*. Используя понятие множителей Лагранжа, приведем необходимые условия оптимальности для следующей задачи:

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$

$$J_0(t_0, x(t_0), u, T, x(T))\to\inf,$$

$$J_j(t_0, x(t_0), u, T, x(T))\leqslant 0,\ j=\overline{1, m_1},$$

$$J_i(t_0, x(t_0), u, T, x(T))=0,\ i=\overline{m_1+1, m_2}, \tag{3.1}$$

$$J_k=\int_{t_0}^{T} F_k(t, x(t), u(t))\,dt+\varphi_k(t_0, x(t_0), T, x(T)),\ k=\overline{0, m_2}.$$

Пусть решение задачи (3.1) существует и имеет вид $(t_0, T, u_0(t), x_0(t))$. Здесь $u_0(t)$ — оптимальное управление в задаче (3.1), $x_0(t)$ — оптимальная траектория; t_0 и T — неизвестные моменты начала и окончания движения.

Предположим, что функции f, F, f_x, f_u, F_x, φ, φ_x непрерывны в некоторой окрестности $(x_0(t), u_0(t), t)$, $t\in[t_0, T]$, где $F=(F_0, \ldots, F_{m_2})$, $\varphi=(\varphi_0, \ldots, \varphi_{m_2})$.

Теорема 3.1. *Пусть $(t_0, T, u_0(t), x_0(t))$ — решение задачи (3.1). Тогда существуют такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda=(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m_2})$, $\psi(t)\in R_n$, причем $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0, T]$, что справедливы соотношения:*

уравнения эволюции системы

$$\dot{x}_0(t)=f(t, x_0(t), u_0(t)); \tag{3.2}$$

уравнения Эйлера

$$\dot{\psi}(t)=-f_x(t, x_0(t), u_0(t))\,\psi(t)-F_x(t, x_0(t), u_0(t))\,\lambda; \tag{3.3}$$

условия трансверсальности

$$\psi(t_0)=-\varphi_x(t_0, x, T, y)\,\lambda,\ \psi(T)=\varphi_y(t_0, x, T, y)\,\lambda \tag{3.4}$$

при $x=x_0(t_0)$, $y=x_0(T)$;

условия стационарности

$$F_u(t, x_0(t), u_0(t))\lambda + f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) = 0; \tag{3.5}$$

условия на подвижные концы t_0, T (учитываемые лишь в случае подвижных концов)

$$F'(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0))\lambda - [\varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) + \varphi'_x(t_0, x, T, y)\dot{x}_0(t_0)]'\lambda = 0, \tag{3.6}$$

$$F'(T, x_0(T), u_0(T))\lambda + [\varphi_T(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) + \varphi'_y(t_0, x, T, y)\dot{x}_0(T)]'\lambda = 0 \tag{3.7}$$

при $x = x_0(t_0)$, $y = x_0(T)$;

условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_j\left[\int_{t_0}^{T} F_j(t, x_0(t), u_0(t))\,dt + \varphi_j(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T))\right] = 0,$$
$$j = 1, \ldots, m_1; \tag{3.8}$$

условия неположительности

$$\lambda_i \leqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m_1. \tag{3.9}$$

Доказательство сформулированной теоремы см. в [2].

Отметим, что условие (3.6) следует учитывать, если варьируется момент t_0 начала движения, а условие (3.7) — если варьируется момент T. Если же какой-либо из моментов t_0 или T является заданным, то соответствующее условие (3.6) или (3.7) не учитывается. Кроме того, если λ_0 отлично от нуля, т. е. если $\lambda_0 < 0$, то в качестве λ_0 можно взять любую отрицательную постоянную.

Условия (3.6), (3.7) удобно записать в терминах функции $H(t, x, u, \psi)$, определяемой равенством

$$H(t, x, u, \psi) = \psi'(t) f(t, x, u) + \lambda' F(t, x, u).$$

При этом условие (3.6) представимо в виде

$$H(t, x, u, \psi)|_{t=t_0} = \lambda' \varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)).$$

Условие (3.7) записывается в форме

$$H(t, x, u, \psi)|_{t=T} = -\lambda' \varphi_T(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)).$$

Здесь $H|_{t=T}$ есть значение функции H при $t = T$.

Итак, для задачи управления (3.1) необходимые условия оптимальности выражаются соотношениями (3.1) — (3.9).

Способ определения оптимального управления, основанный на использовании необходимых условий оптимальности, состоит из следующих шагов.

1^0. Из уравнения (3.5) находят управление u_0 в виде функции времени t, траектории $x_0(t)$ и множителей Лагранжа λ, $\psi(t)$, т. е.

$$u_0 = u_0(t, x_0(t), \psi(t), \lambda).$$

2^0. Подставляют это управление в уравнения (3.2), (3.3), (3.6) — (3.9). Тогда для определения траектории $x_0(t)$ и вектора $\psi(t)$ получают краевую задачу, образованную системой уравнения (1.1), (3.3), граничными условиями (3.4), (3.6), (3.7) и соотношениями (3.8), (3.9).

3^0. Строят общее решение $x_0(t)$, $\psi(t)$ системы $2n$ уравнений (1.1), (3.3). Это общее решение зависит от $2n$ произвольных постоянных, а также от множителей Лагранжа λ и двух моментов времени t_0 и T.

Заметим, что соотношения (3.1) — (3.9) сохраняют свой вид при замене ψ на $C\psi$ и λ на $C\lambda$ для произвольной постоянной $C>0$. Значит, число независимых компонент вектора $\lambda \in R_{m_2+1}$ не превосходит m_2. Таким образом, общее решение системы (3.2), (3.3) зависит от $2n+m_2+2$ постоянных, для определения которых имеется $2n$ условий (3.4), два условия (3.6), (3.7) на подвижные концы t_0, T и, наконец, m_1 условий (3.8) и m_2-m_1 равенств из (3.1). Следовательно, число условий, служащих для построения оптимального управления, совпадает с числом искомых постоянных.

Ниже, используя теорему 3.1, приведем вид условий оптимальности для характерных задач управления.

Пример 3.1. Рассмотрим систему, состоящую из источника ЭДС, соединенного через сопротивление R с конденсатором емкости C. Требуется выбрать закон управления $u(t)$ напряжением источника так, чтобы за заданное время T изменить напряжение $x(t)$ конденсатора от величины $x_0 = x(0)$ до величины $x_1 = x(T)$ и при этом минимизировать энергию J, диссипированную сопротивлением. Уравнения задачи имеют вид

$$RC\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$J = \frac{1}{R}\int_0^T (u(t) - x(t))^2 \, dt \to \min_u.$$

Покажем, что оптимальное управление $u_0(t)$ и соответствующее ему изменение $x_0(t)$ определяются выражениями

$$u_0(t)=x_0+\frac{1}{T}(x_1-x_0)(RC+t),$$

$$x_0(t)=x_0\left(1-\frac{t}{T}\right)+x_1\frac{t}{T}.$$

Приведем решение, основанное на использовании теоремы 3.1. Имеем

$$H(x, u, \psi)=\lambda_0\frac{(u-x)^2}{R}+\frac{\psi}{RC}(u-x).$$

Если бы $\lambda_0=0$, то из условия $\partial H/\partial u=0$ следовало бы, что $\psi\equiv 0$, т. е. вектор множителей Лагранжа (λ_0, ψ) — нулевой, что невозможно. Поэтому $\lambda_0<0$; тогда можно положить $\lambda_0=-1$. При этом из условия $\partial H/\partial u=0$ находим $u_0(t)=\frac{1}{2C}\psi(t)+x(t)$. Подставив это выражение в уравнение для $\psi(t)$, имеем $\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-2\frac{u-x}{R}+\frac{\psi}{RC}=0$. Значит, $\psi(t)$ — постоянная, т. е. $\psi(t)\equiv\psi_0$. Для определения ψ_0 подставим $u_0(t)$ в уравнение для $x(t)$. Получим

$$RC\dot{x}(t)=-x(t)+\frac{1}{2C}\psi_0+x(t)=\frac{1}{2C}\psi_0.$$

Интегрируя это уравнение, заключаем, что $x_0(T)=x_1=x_0+\frac{\psi_0 T}{2RC^2}$. Следовательно, $\psi_0=2RC^2\frac{x_1-x_0}{T}$. Отсюда, используя уравнение для x и выражение для u_0, находим искомое решение.

2. Фиксированные начало, конец движения и начальное состояние. В этом случае необходимые условия оптимальности выражаются теоремой 1.1. Утверждение теоремы 1.1 получается как следствие из общих необходимых условий оптимальности, сформулированных в теореме 3.1. Вектор λ множителей Лагранжа сводится в данном случае к скаляру λ_0, неположительному в силу условий (3.9). Поэтому уравнения (3.3), (3.4) принимают вид

$$\dot{\psi}(t)=-f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t)-\lambda_0 F_{0x}(t, x_0(t), u_0(t)), \quad (3.10)$$

$$\psi(T)=\lambda_0\varphi_{0x}(x_0(T)). \quad (3.11)$$

Условие (3.5) приводит к соотношению

$$f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t)+\lambda_0 F_{0u}(t, x_0(t), u_0(t))=0. \quad (3.12)$$

Так как моменты t_0 и T и начальное положение системы $x(t_0)$ заданы и фиксированы, а ограничения типа равенств и неравенств

из (3.1) отсутствуют, то остальные необходимые условия оптимальности (3.6) — (3.8) не учитываются. Значит, для задачи (1.1), (1.2) необходимые условия оптимальности сводятся к существованию числа $\lambda_0 \leqslant 0$ и вектора $\psi(t) \in R_n$, не равных одновременно нулю, для которых выполняются уравнения (1.1), (3.10), (3.11).

Заметим далее, что если $\lambda_0 = 0$, то вследствие (3.10), (3.11) функция $\psi(t) \equiv 0$, что невозможно. Поэтому $\lambda_0 < 0$, т. е. в качестве λ_0 можно взять любую отрицательную постоянную. Положим $\lambda_0 = -1$. Тогда соотношения (3.10) — (3.12) переходят в доказанные ранее условия оптимальности из теоремы 1.1.

3. Фиксированные начало и конец движения, свободные начальное и конечное положения. Рассмотрим задачу управления системой (3.2) с заданными моментами t_0, T и критерием качества

$$J = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))\,dt + \varphi(x(t_0), x(T)) \to \inf.$$

Начальное положение $x(t_0)$ и конечное $x(T)$ свободны. Необходимые условия оптимальности (3.3) — (3.9) принимают в данном случае вид уравнений (3.10), (3.12) и граничных условий

$$\psi(t_0) = -\lambda_0 \varphi_x(x, y), \quad \psi(T) = \lambda_0 \varphi_y(x, y),$$
$$x = x_0(t_0), \quad y = x_0(T).$$

Рассуждая так же, как и в п. 2, заключаем, что можно положить $\lambda_0 = -1$. Таким образом, необходимые условия оптимальности в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.13}$$
$$\dot{\psi}(t) = -f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) + F_x(t, x_0(t), u_0(t)),$$
$$\psi(t_0) = \varphi_x(x, y), \quad x = x_0(t_0),$$
$$\psi(T) = -\varphi_y(x, y), \quad y = x_0(T),$$
$$f_y(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - F_u(t, x_0(t), u_0(t)) = 0.$$

4. Задачи с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в заданные моменты начала и конца движения. Рассмотрим ту же задачу управления, что и в п. 3, но с заданными значениями некоторых компонент векторов $x(t_0)$ и $x(T)$. При этом уравнения движения имеют вид (3.2) с критерием качества J, моменты времени t_0 и T заданы. Кроме того, заданными являются q_1 компонент $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{q_1}^0$ вектора $x(t_0)$ и q_2 компонент $x_1^T, x_2^T, \ldots, x_{q_2}^T$ вектора $x(T)$, где целые числа q_1, q_2 не превосходят n.

Запишем последние ограничения в виде (3.1):

$$x_i(t_0)-x_i^0=0,\ i=1,\ ...,\ q_1,\ x_j(T)-x_j^T=0,\ j=1,...,\ q_2. \quad (3.14)$$

В силу ограничений (3.14) естественно считать, что функция φ в функционале J зависит только от остальных значений фазовых координат, т. е. $\varphi(x(t_0)),\ x(T))=\varphi(x_{q_1+1}(t_0),\ ...,\ x_n(t_0),\ x_{q_2+1}(T),\ ...\ ...,\ x_n(T))$. Вектор множителей Лагранжа имеет вид $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{m_2})$, где $m_2=q_1+q_2$, $\lambda_0\leqslant 0$. Следовательно, необходимые условия оптимальности (3.3) — (3.9) в данном случае можно представить в виде

$$\dot{x}_0(t)=f(t, x_0(t), u_0(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant T, \quad (3.15)$$

$$\dot{\psi}(t)=f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t)-\lambda_0 F_x(t, x_0(t), u_0(t)),$$

$$f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t)+\lambda_0 F_u(t, x_0(t), u_0(t))=0,$$

причем выполняются условия трансверсальности

$$\psi_i(t_0)=-\lambda_i,\ i=1,\ ...,\ q_1,$$

$$\psi_j(t_0)=-\lambda_0\varphi_{x_j(t_0)}(x(t_0),\ x(T)),\ j=q_1+1,\ ...,\ n,$$

$$\psi_k(T)=\lambda_{q_1+k},\ k=1,\ ...,\ q_2, \quad (3.16)$$

$$\psi_l(T)=\lambda_0\varphi_{x_l(T)}(x(t_0),\ x(T)),\ l=q_2+1,\ ...,\ n.$$

Пример 3.2. Рассмотрим одномерную задачу управления

$$\dot{x}(t)=ax(t)+u(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$x(0)=0,\ x(T)=1,\ \int_0^T u^2(t)\,dt\to\min, \quad (3.17)$$

где a и T — заданные постоянные.

Необходимые условия оптимальности (3.15), (3.16) приводят к соотношениям

$$\dot{\psi}=-a\psi(t),\ -2\lambda_0 u(t)-\psi(t)=0, \quad (3.18)$$

$$\psi(0)=-\lambda_1,\ \psi(T)=\lambda_2. \quad (3.19)$$

Если $\lambda_0=0$, то на основании (3.18) функция $\psi(t)\equiv 0$. Поэтому в силу (3.19) постоянные $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, т. е. все множители Лагранжа (λ_0, λ_1, λ_2, $\psi(t)$), одновременно равны нулю, что невозможно. Значит, в качестве λ_0 можно взять любую отрицательную постоянную. Положим $\lambda_0=-1/2$. Тогда $u(t)=\psi(t)$ в силу (3.18). Отсюда и из

формулы Коши вытекает, что $\psi(t) = -\lambda_1 e^{-at} = u(t)$. Подставляя это выражение для управления $u(t)$ в (3.17), находим

$$x(t) = -\lambda_1 \int_0^t e^{a(t-2s)}\,ds.$$

Полагая здесь $t=T$ и используя граничное условие $x(T)=1$, получим

$$\lambda_1 = -2a\,[e^{aT} - e^{-aT}]^{-1}.$$

Следовательно, оптимальное управление $u_0(t)$ имеет вид

$$u_0(t) = 2ae^{-at}\,[e^{aT} - e^{-aT}]^{-1}, \tag{3.20}$$

а соответствующая этому управлению траектория — вид

$$x(t) = [e^{at} - e^{-at}]\,[e^{aT} - e^{-aT}]^{-1}. \tag{3.21}$$

Формулы (3.20), (3.21) справедливы при любом a. В частности, если $a=0$, то с учетом правила Лопиталя имеем $u_0(t) = 1/T$, $x(t) = t/T$.

5. Задачи с неопределенным моментом окончания движения. Рассмотрим задачу управления (3.1) для заданных начальных момента t_0 и положения $x(t_0)$ и свободных конечных момента T и положения $x(T)$ со скалярным критерием качества

$$J_0(u, T, x(T)) \to \inf \tag{3.22}$$

при ограничениях вида

$$J_i(u, T, x(T)) = 0,\ i = 1, \ldots, m_2. \tag{3.23}$$

Здесь скалярные функционалы J_k определяются равенствами

$$J_k(u, T, x(T)) = \int_{t_0}^{T} F_k(t, x(t), u(t))\,dt + \varphi_k(T, x(T)),\ k = 0, \ldots, m_2. \tag{3.24}$$

Необходимые условия оптимальности в задаче (3.1), (3.22) — (3.24) заключаются в существовании вектора $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{m_2})$, $\lambda_0 \leqslant 0$ и функции $\psi(t) \in R_n$, не равных одновременно нулю и таких, что справедливы уравнения (3.2), (3.3) — (3.5), (3.7), в которых $F = (F_0, \ldots, F_{m_2})$, $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{m_2})$.

6. Задача Чаплыгина. Предположим, что в горизонтальной плоскости Oxy движется самолет с постоянной скоростью v, составляющей угол u с осью Ox. На самолет действует ветер, скорость которого ω постоянна и направлена по оси Ox (рис. 3.1). *Задача Чаплыгина* состоит в выборе такого управления u (угла курса самолета или же направления оси самолета), при котором самолет, начав движение из точки $A(x_0, y_0)$, облетит за заданное время T фигуру максимальной площади S.

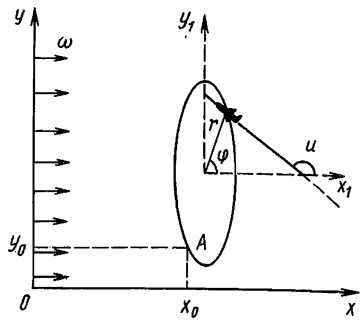


Рис. 3.1. Задача Чаплыгина

Обозначим текущие координаты самолета через $x(t)$ и $y(t)$. Тогда уравнения движения самолета, начальные и конечные условия имеют вид

$$\dot{x}=\mathrm{v}\cos u-\omega, \quad \dot{y}=\mathrm{v}\sin u, \tag{3.25}$$

$$x(0)=x(T)=x_0, \; y(0)=y(T)=y_0. \tag{3.26}$$

Площадь S, облетаемая самолетом, определяется выражением

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T (x(t)\dot{y}(t)-y(t)\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t\to\max.$$

Значит, в качестве минимизируемого функционала $J(u)$ можно взять

$$J(u)=-\int_0^T [x\mathrm{v}\sin u-y(\mathrm{v}\cos u-\omega)]\,\mathrm{d}t. \tag{3.27}$$

Таким образом, задача Чаплыгина есть классическая вариационная задача типа Лагранжа.

Для ее решения, как это было изложено выше, построим функцию

$$H=[x\mathrm{v}\sin u-y(\mathrm{v}\cos u-\omega)]+\psi_1(\mathrm{v}\cos u-\omega)+\psi_2\mathrm{v}\sin u.$$

Положим $\lambda_1=-\psi_1$, $\lambda_2=-\psi_2$. Тогда из уравнений (3.3) для сопряженных переменных ψ_1 и ψ_2 и условия стационарности (3.5) получаем

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1=-\dot{\psi}_1=\frac{\partial H}{\partial x}=\mathrm{v}\sin u=\dot{y},\\
&\dot{\lambda}_2=-\dot{\psi}_2=\frac{\partial H}{\partial y}=-(\mathrm{v}\cos u-\omega)=-\dot{x},\\
&\frac{\partial H}{\partial u}=\lambda_1\mathrm{v}\sin u-\lambda_2\mathrm{v}\cos u=0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Из первых двух уравнений (3.28) следует, что $\lambda_1=y+C_2$, $\lambda_2=-x-C_1$. Тогда из последнего уравнения (3.28) находим

$$(y+C_2)\sin u+(x+C_1)\cos u=0. \tag{3.29}$$

Уравнения (3.25), (3.29) задают параметрически некоторую кривую. Покажем, что эта кривая при $\omega<\mathrm{v}$ есть эллипс. Введем новые переменные $x_1=x+C_1$, $y_1=y+C_2$; $\varphi=\frac{\pi}{2}+u$. Относительно этих переменных вместо уравнений (3.25), (3.29) получим систему

$$\dot{x}_1+\mathrm{v}\sin\varphi-\omega=0,\ \dot{y}_1-\mathrm{v}\cos\varphi=0,\ y_1\cos\varphi-x_1\sin\varphi=0. \tag{3.30}$$

Из последнего уравнения (3.30) следует, что

$$x_1=r\cos\varphi,\ y_1=r\sin\varphi,\ r^2=x_1^2+y_1^2. \tag{3.31}$$

Дифференцируя (3.31) и используя (3.30), получим

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{x_1^2+y_1^2})=\frac{2(x_1\dot{x}_1+y_1\dot{y}_1)}{2\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=$$

$$=\dot{x}_1\cos\varphi+\dot{y}_1\sin\varphi=\omega\cos\varphi=\frac{\omega}{\mathrm{v}}\dot{y}_1.$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$r=\frac{\omega}{\mathrm{v}}y_1+C=r\frac{\omega}{\mathrm{v}}\sin\varphi+C,$$

или

$$r=\frac{C}{1+\frac{\omega}{\mathrm{v}}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}. \tag{3.32}$$

Известно*, что уравнение (3.32) задает при $\omega<\mathrm{v}$ эллипс в полярной системе координат с эксцентриситетом ω/v, фокальным параметром C и большой осью, параллельной оси Oy. Определив постоянную интегрирования C из условий (3.26), получим, что максимальная площадь S, облетаемая самолетом за время T, такова:

$$S_{\max}=\frac{\mathrm{v}^2T^2}{4\pi}\left(1-\frac{\omega^2}{\mathrm{v}^2}\right)^{3/2}$$

---

* Бронштейн И. Р., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов . — М.: Наука, 1986.

7. Максимизация скорости ракеты в конце участка выведения ее на прямолинейную траекторию [6]. Предположим, что ракета, рассматриваемая как материальная точка постоянной массы m, движется в плоскости Oxy под действием силы тяги $F_т = ma(t)$ (рис. 3.2). Реактивное ускорение $a(t)$ считается известной функцией времени, в простейшем случае — постоянной, т. е. $a(t) = a$. Такая модель движения реальной ракеты оправдана, если масса ракеты в процессе движения изменяется незначительно ($(m_т - m_0) \ll m_0$), и массой ракеты можно пренебречь ($g \ll a(t)$). Обозначим через $v_x(t)$ и $v_y(t)$ горизонтальную и вертикальную компоненты скорости ракеты, т. е. $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$. В качестве управления выберем угол $\theta(t) = u$ между силой тяги $F_т$ и осью x. Движение ракеты описывается уравнениями

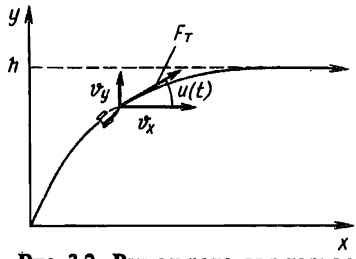


Рис. 3.2. Вывод ракеты в горизонтальный полет

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = a\cos u, \quad \dot{v}_y = a\sin u. \tag{3.33}$$

Задача состоит в том, чтобы за заданное время T перевести ракету на траекторию, параллельную оси Ox и отстоящую от нее на расстояние h, так, чтобы достигалось максимальное значение скорости. Иначе говоря, начальные условия имеют вид

$$x(0) = y(0) = v_x(0) = v_y(0) = 0. \tag{3.34}$$

Конечные условия при заданном T имеют вид

$$y(T) = h, \quad v_y(T) = 0, \quad x(T) \text{ произвольно}. \tag{3.35}$$

Требуется выбрать такое управление $\theta(t)$, чтобы максимизировать функционал:

$$J(u) = v_x(T) \to \max. \tag{3.36}$$

На угол $\theta = u$ никаких ограничений не накладывается. Значит, сформулированная задача является классической вариационной задачей Майера.

Гамильтониан H в этой задаче записывается в виде

$$H = \psi_1 a\cos\theta + \psi_2 a\sin\theta + \psi_3 v_x + \psi_4 v_y.$$

Для сопряженных переменных ψ_i справедливы уравнения

$$\dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2, \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0,$$

откуда

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = C_2, \quad \psi_3 = -C_1 t + C_3,$$
$$\psi_4 = -C_2 t + C_4.$$

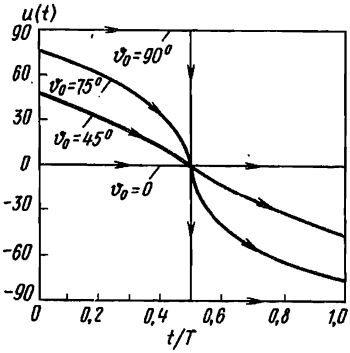


Рис. 3.3. Оптимальное П-управление углом тяги $u_{\text{опт}}$

Из условия оптимальности

$$\frac{\partial H}{\partial u}=-\psi_3\sin u+\psi_4\cos u=0$$

получаем, что оптимальное направление силы тяги выражается формулой

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{опт}}=\frac{\psi_4}{\psi_3}=\frac{-C_2t+C_4}{-C_1t+C_3}. \qquad (3.37)$$

Закон изменения направления тяги (3.37) называют *законом дробно-линейного тангенса.*

Из краевых условий (3.34), (3.35) следует, что $\psi_1\equiv 0$, а $\psi_3\equiv 1$. Поэтому закон (3.37) принимает вид

$$\operatorname{tg}u=\operatorname{tg}\theta_0-Ct.$$

Величины θ_0 и C определяются из двух граничных условий $v_y(T)=0$, $y(T)=h$. На рис. 3.3 изображены программы управления углом тяги $u_{\text{опт}}$ в зависимости от параметра θ_0. В литературе рассматриваются другие задачи проектирования систем наведения*.

Основные результаты и формулы главы IV

Задача Майера без ограничений на управление:

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ x(t_0)=x_0,\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$

$$\varphi(x(T))\to\inf_u;$$

необходимые условия оптимальности:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0,\ H(t, x, u, \psi)=\psi'(t)f(t, x, u);$$

$$\dot{\psi}(t)=-H_x(t, x, u, \psi),\ \psi(T)=-\varphi_x(x(T)).$$

Задача Больца без ограничений на управление:

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0;$$

$$\int_{t_0}^{T}F(t, x(t), u(t))\,dt+\varphi(x(T))\to\inf_u;$$

*См., например: Федосов Е. А. Проектирование систем наведения. — М.: Машиностроение, 1975.

необходимые условия оптимальности:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0, \text{ где } H(t, x, u, \psi)=-F(t, x, u)+\psi'(t)f(t, x, u);$$

$$\dot{\psi}(t)=-H_x(t, x, u, \psi),\ \psi(T)=-\varphi_x(x(T)).$$

Линейно-квадратичная задача:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0,$$

$$J_0=x'(T)N_1x(T)+\int_{t_0}^{T}(x'(t)N_2(t)x(t)+u'(t)N_3(t)u(t))\,dt,$$

$$N_1\geqslant 0,\ N_2(t)\geqslant 0,\ N_3(t)>0;$$

оптимальное управление

$$u_0(t)=-N_3^{-1}(t)B'(t)P(t)x_0(t);$$

матричное уравнение Риккати:

$$\dot{P}(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)-P(t)B(t)N_3^{-1}(t)B'(t)P(t)+N_2(t)=0,$$

$$0\leqslant t\leqslant T,\quad P(T)=N_1.$$

Метод множителей Лагранжа. Пусть $(t_0, T, u_0(t), x_0(t))$ — решение общей задачи оптимального управления (3.1) с фазовыми ограничениями и неизвестными моментами начала и окончания движения. Тогда существуют такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\lambda=(\lambda_0, ..., \lambda_{m_2})$, $\psi(t)\in R_n$, что справедливы соотношения:

уравнения эволюции системы

$$\dot{x}_0(t)=f(t, x_0(t), u_0(t));$$

уравнения Эйлера

$$\dot{\psi}(t)=-f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t)-F_x(t, x_0(t), u_0(t))\lambda;$$

условия трансверсальности

$$\psi(t_0)=-\varphi_x(t_0, x, T, y)\lambda,\ \psi(T)=\varphi_y(t_0, x, T, y)\lambda,\ x=x_0(t_0),\ y=x_0(T);$$

условия стационарности

$$F_u(t, x_0(t), u_0(t))\lambda+f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t)=0;$$

условия на подвижные концы t_0, T (учитываемые лишь в случае подвижных концов)

$$F'(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0))\lambda-[\varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T))+$$

$$+\varphi'_x(t_0, x, T, y)\dot{x}_0(t_0)]'\lambda=0,$$

$$F'(T, x_0(T), u_0(T))\lambda+[\varphi_T(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T))+\varphi'_y(t_0, x, T, y)\dot{x}_0(T)]'\lambda=0,$$

$$x=x_0(t_0),\ y=x_0(T);$$

или

$$H(t, x, u, \psi)|_{t=t_0} = \lambda' \varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)),$$

$$H(t, x, u, \psi)|_{t=T} = -\lambda' \varphi_T(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T));$$

условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_j \left[\int_{t_0}^{T} F_j(t, x_0(t), u_0(t))\, dt + \varphi_j(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) \right] = 0,$$

$$j = 1, \ldots, m_1;$$

условия неположительности

$$\lambda_j \leqslant 0, \ j = 0, 1, \ldots, m_1.$$

ГЛАВА V

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В практических задачах на множество управлений чаще всего накладываются некоторые существенные ограничения. Для этих задач установленные в предыдущей главе необходимые условия оптимальности, вообще говоря, непригодны. Необходимые условия оптимальности в таких задачах дает принцип максимума Понтрягина, изучаемый в настоящей главе. При этом оказывается, что в модификации нуждается лишь условие стационарности, а все остальные необходимые условия оптимальности сохраняют свой прежний вид [1; 2; 8—10; 19—21].

§ 1. ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ И ЗАДАННЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. Задача Майера. Рассмотрим задачу управления

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0, \quad (1.1)$$

$$J(u)=\varphi(x(T))\to\inf, \quad (1.2)$$

$$u(t)\in U. \quad (1.3)$$

Новым элементом в постановке задачи по сравнению с предыдущей главой является ограничение (1.3). Если множество U замкнуто и ограничено, то оптимальное управление, вообще говоря, может принадлежать границе множества U. В этом случае управление нельзя варьировать произвольным образом и, следовательно, методы классического вариационного исчисления неприменимы. Предполагается, что f и φ удовлетворяют ограничениям (1.3)—(1.5) гл. IV, а оптимальное управление ищется в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$. Так как значения $u(t)$ в точках разрыва не влияют на величину критерия качества (1.2), то значение управления в точках разрыва можно доопределить произвольно. Для определенности считается, что рассматриваемые управления кусочно-непрерывны справа, т. е.

$$u(t)=\lim_{s\to t+0} u(s),\ t\in[t_0, T),\ u(T)=u(T-0).$$

Если ограничения (1.3) отсутствуют, то необходимые условия оптимальности приведены в теореме 1.1 гл. IV. Наличие же ограничения (1.3) требует модификации условия (1.7) гл. IV указанной теоремы, поскольку оптимальное управление $u(t)$ может лежать на границе множества U и потому производная $\partial H/\partial u$, вообще говоря, может быть отлична от нуля. Необходимые условия оптимальности, называемые принципом максимума Понтрягина, формулируются следующим образом.

Теорема 1.1 (принцип максимума Понтрягина). *Пусть* $u_0(t)$ — *оптимальное управление в задаче* (1.1)—(1.3), *а* $x_0(t)$ — *соответствующая ему оптимальная траектория. Тогда* $u_0(t)$ *удовлетворяет условию максимума*

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)). \tag{1.4}$$

Здесь гамильтониан H *определяется равенством*

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \psi'(t) f(t, x(t), u(t)),$$

а вектор сопряженных переменных $\psi(t)$ *является решением задачи*

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \quad \psi(T) = -\varphi_x(x_0(T)).$$

Замечание. По сравнению с необходимыми условиями оптимальности в классической вариационной задаче управления (теорема 1.1 гл. IV) в принципе максимума Понтрягина заменено только условие стационарности $\partial H/\partial u = 0$ на условие максимума (1.4). Все же остальные условия остаются без изменений.

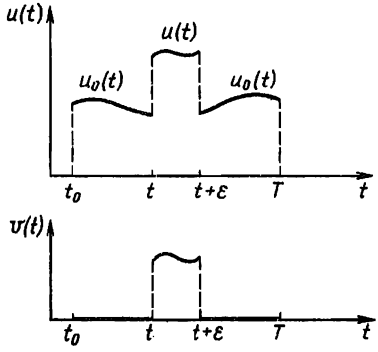


Рис. 1.1. Игольчатая вариация управления

□ Доказательство данной теоремы вплоть до формулы (1.24) гл. IV дословно повторяет доказательство теоремы 1.1 гл. IV. Изменения в доказательстве, обусловленные ограничением на управление (1.3), касаются дальнейших рассуждений. Приведем их. Возьмем произвольный элемент $u \in U$ и моменты времени t и $t+\varepsilon$ на отрезке $[t_0, T]$, где $\varepsilon > 0$. Обозначим через $v(s)$ *игольчатую вариацию управления* (рис. 1.1), задаваемую формулой

$$v(s) = -u_0(s) + u, \quad t \leqslant s \leqslant t+\varepsilon,$$
$$v(s) = 0, \quad s \in [t_0, T] \setminus [t, t+\varepsilon].$$

Отметим, что $u_0(t) + v(t) \in U$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда из (1.19) гл. IV (подобно выводу (1.24) гл. IV) следует, что

$$0 \leqslant \Delta J = -\int_t^{t+\varepsilon} \gamma(s)\,ds + N_1 + N_2,$$

$$\gamma(t) = H(t, x_0(t), u, \psi(t)) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)).$$

Здесь слагаемые N_1 и N_2 выражаются формулами (1.16) и (1.19) гл. IV. Используя неравенство Коши — Буняновского, оценки (1.17) и (1.23) гл. IV слагаемых N_1 и N_2 и выражения для вариации v, заключаем, что при некоторой постоянной $C>0$ справедливо неравенство

$$|N_1|+|N_2|\leqslant C\left[\int_t^{t+\varepsilon}|\mathrm{v}\,(s)|\,\mathrm{d}s\right]^2\leqslant \varepsilon C\int_t^{t+\varepsilon}|\mathrm{v}\,(s)|^2\,\mathrm{d}s.$$

В силу сделанных предположений H есть непрерывная функция своих аргументов. Поэтому с учетом кусочной непрерывности управления $u_0(t)$ найдется столь малое $\varepsilon>0$, что функция $\gamma(t)$ непрерывна при $s\in[t, t+\varepsilon]$. Значит, при некотором $\theta\in[0, 1]$ получим

$$\int_t^{t+\varepsilon}\gamma\,(s)\,\mathrm{d}s=\varepsilon\gamma\,(t+\theta\varepsilon).$$

Отсюда и из выражения для ΔJ следует, что

$$0\leqslant\Delta J\leqslant-\varepsilon\gamma\,(t+\theta\varepsilon)+\varepsilon C\int_t^{t+\varepsilon}|\mathrm{v}\,(s)|^2\,\mathrm{d}s,\ \varepsilon>0.$$

Разделив обе части полученного неравенства на ε и перейдя к пределу при $\varepsilon\to0$, заключаем, что $\gamma(t)\leqslant0$. Так как элемент $u\in U$ является произвольным, то соотношение (1.4) установлено при $t\in[t_0, T)$. Подобным же образом устанавливается справедливость равенства (1.4) и при $t=T$, если положить $\mathrm{v}(s)=u-u_0(s)$, $T-\varepsilon\leqslant s\leqslant T$ и $\mathrm{v}(s)=0$, $s\leqslant T-\varepsilon$. ■

Отметим, что в условиях доказанной теоремы $H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))$ как функция времени t непрерывна, поскольку независимо от того, является ли управление непрерывным или имеет скачок, значение функции H в любой момент времени одно и то же и равно левой части выражения (1.4).

2. Задача Больца. В качестве следствия из теоремы 1.1 приведем необходимые условия оптимальности в задаче управления системой (1.1) с ограничениями (1.3) и с минимизируемым функционалом

$$J(u)=\int_{t_0}^{T}F_0\,(t, x\,(t), u\,(t))\,\mathrm{d}t+\varphi\,(x\,(T))\to\inf. \tag{1.5}$$

Моменты времени t_0 и T, а также начальное условие $x(t_0)=x_0\in R_n$ заданы.

Подобно выводу необходимых условий в теореме 1.1 гл. IV, заключаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть $u_0(t)$ — оптимальное управление в задаче* (1.1), (1.3), (1.5), *а $x_0(t)$ — оптимальная траектория. Тогда существует такой вектор $\psi(t)$, удовлетворяющий уравнениям*

$$\dot{\psi}(t)=-H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$
$$\psi(T)=-\varphi_x(x_0(T)), \tag{1.6}$$

что справедливо условие максимума

$$\max_{u\in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t))=H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \tag{1.7}$$

где функция H определяется равенством

$$H(t, x(t), u, \psi(t))=\psi'(t)f(t, x(t), u)-F_0(t, x(t), u). \tag{1.8}$$

Отметим, что максимум функции $H(t, x_0(t), u, \psi(t))$ в левой части условия (1.7) вычисляется по параметру $u\in U$ при фиксированных значениях остальных аргументов t, $x_0(t)$ и $\psi(t)$.

Построение оптимального управления в задаче (1.1), (1.3), (1.5) проводится так же, как в классической вариационной задаче управления, с той лишь разницей, что управление исключается благодаря использованию соотношения (1.7). Таким образом, указанный метод состоит из следующих шагов:

1^0. Определяют управление $u_0(t, \psi(t), x_0(t))$ из уравнения (1.7).

2^0. Подставляют найденное управление u_0 в равенства (1.1), (1.6) и решают полученную краевую задачу относительно $x_0(t)$ и $\psi(t)$.

3^0. Подставляют найденное значение $x_0(t)$, $\psi(t)$ в выражение для u_0. В результате применения этого метода получается П-управление $u_0(t)$. Как и для задач без ограничений (1.3), полученное П-управление является оптимальным, если решение исходной задачи управления (1.1), (1.3), (1.5) существует, а решение краевой задачи в п. 2^0 единственно.

Пример 1.1. Рассмотрим задачу оптимального управления скалярной системой с постоянными коэффициентами a и b

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bu(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x(0)=0 \tag{1.9}$$

с критерием качества

$$J=\int_0^T [x^2(t)+u^2(t)]\,dt\to\min. \tag{1.10}$$

Решение задачи (1.9), (1.10), очевидно, есть $u_0(t)=0$ и $x_0(t)=0$. Установим его также и с помощью принципа максимума. Функция H в силу равенства (1.8) в рассматриваемом случае имеет вид

$$H=\psi(t)[ax(t)+bu(t)]-x^2(t)-u^2(t). \tag{1.11}$$

Условие (1.7) с учетом (1.11) дает $u_0=b\psi(t)/2$. Уравнение (1.6) для сопряженной переменной $\psi(t)$ принимает вид

$$\dot{\psi}(t)=2x(t)-a\psi(t),\ \psi(T)=0. \tag{1.12}$$

Подставим в (1.9) вместо u выражение $b\psi(t)/2$. Тогда для определения траектории $x_0(t)$ и функции $\psi(t)$ получаем краевую задачу, образованную уравнением (1.12) и уравнением

$$\dot{x}(t)=ax(t)+b^2\psi(t)/2,\ x(0)=0. \tag{1.13}$$

Решением краевой задачи (1.12), (1.13) является $x_0(t)\equiv 0$, $\psi(t)\equiv \equiv 0$, т. е. $u_0(t)=b\psi(t)/2\equiv 0$.

3. О решениях уравнений принципа максимума. Предположим, что решение задачи оптимального управления Майера (1.1) — (1.3) (или Больца (1.1), (1.3), (1.5)) существует и, кроме того, принципу максимума удовлетворяет только одно допустимое управление. Тогда это управление и является оптимальным. Отметим, однако, что в общем случае принцип максимума представляет собой лишь необходимое условие оптимальности, а не достаточное. Иными словами, траектория $x(t)$ и управление $u(t)$ могут удовлетворять всем условиям принципа максимума, но не быть оптимальными. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 1.2. Пусть $x(t)\in R_1$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t)=u(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ x(0)=0,\ x(1)=0. \tag{1.14}$$

Требуется выбрать управление $u(t)$ так, чтобы минимизировать функционал

$$J(u)=\int_0^1 [u^2(t)-4x(t)u^3(t)+2tu^4(t)]\,dt\to\inf_u. \tag{1.15}$$

Запишем соотношения принципа максимума для задачи (1.14), (1.15). Имеем

$$H=p_0(u^2-4xu^3+2tu^4)+\psi(t)u.$$

При этом постоянную p_0 можно положить равной $p_0=-1$. Следовательно,

$$\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-4u^3(t). \tag{1.16}$$

Заметим, что функции

$$x_0(t)=0,\ \psi_0(t)=0,\ u_0(t)=0 \tag{1.17}$$

удовлетворяют уравнениям (1.14), (1.16), а также для любого управления u условию максимума

$$H(t, x_0, \psi_0, u_0)\equiv 0\geqslant H(t, x_0, \psi_0, u)=-u^2(1+2tu^2).$$

Иначе говоря, функции (1.17) удовлетворяют всем условиям принципа максимума. Покажем, однако, что траектория $x_0(t)=0$ и управление $u_0(t)=0$ не являются решением задачи оптимального управления (1.14), (1.15). Значение функционала (1.15) при управлении $u_0(t)$ есть $J(u_0)=0$. Построим теперь последовательность управлений, для которых значение критерия качества может быть сделано отрицательным (и притом стремящимся к $-\infty$). Положим

$$u_\varepsilon(t)=\begin{cases}\varepsilon^{-1}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon,\\ (\varepsilon-1)^{-1}, & \varepsilon\leqslant t\leqslant 1,\end{cases} \tag{1.18}$$

где $\varepsilon\in(0, 1)$. Соответствующая траектория $x_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$x_\varepsilon(t)=\begin{cases}t\varepsilon^{-1}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon,\\ (1-t)(1-\varepsilon)^{-1}, & \varepsilon\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{1.19}$$

Найдите значение критерия качества (1.15), соответствующее уравнениям (1.18), (1.19). Имеем

$$J(u_\varepsilon)=[\varepsilon(1-\varepsilon)]^{-1}-\varepsilon^{-2}+2(1-\varepsilon)^{-2}+(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-3}. \tag{1.20}$$

Отсюда видно, что

$$J(u_\varepsilon)\to-\infty,\ \varepsilon\to 0. \tag{1.21}$$

Из (1.20) и (1.21) вытекает, что управление $u_0(t)\equiv 0$ не является оптимальным.

4. Поворот вала электродвигателя на максимальный угол. Эту задачу рассмотрим на основе упрощенной модели электродвигателя из § 3 гл. III. Используя обозначения указанного параграфа, имеем

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=u,\ |u|\leqslant b, \tag{1.22}$$

$$x_1(0)=x_2(0)=0, \tag{1.23}$$

$$x_2(T)=0,\ x_1(T)\to\max. \tag{1.24}$$

Здесь x_1 — угол поворота вала двигателя; u — приведенный вращающий момент; T — заданное время окончания поворота. Требуется выбрать управление $u(t)$ так, чтобы в момент времени T скорость

вращения была равна нулю, а угол поворота при этом был максимальным.

Для того чтобы воспользоваться методами настоящего параграфа, сведем задачу (1.22) — (1.24) к задаче Майера с помощью введения штрафной функции. Отметим, что *метод штрафных функций* достаточно часто используется для учета различных ограничений.

Введем функционал

$$J_k(u) = -x_1(T) + \frac{k}{2} x_2^2(T) \to \min. \tag{1.25}$$

Здесь $k \gg 1$ называется *коэффициентом штрафа*. Можно доказать, что при $k \to \infty$ оптимальное управление в задаче (1.22), (1.23), (1.25) должно стремиться к оптимальному управлению в задаче (1.22)—(1.24).

Для задачи (1.22), (1.23), (1.25) на основании теоремы 1.1 получаем

$$\begin{gathered} H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \ \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \ \psi_1(T) = 1, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \ \psi_2(T) = -k x_2(T), \ \max_{|u| \leqslant b} H = \max_{|u| \leqslant b} \psi_2 u. \end{gathered} \tag{1.26}$$

Из равенств (1.26) следует, что оптимальное управление имеет вид

$$\begin{gathered} \psi_1(t) \equiv 1, \ \psi_2(t) = C - t, \ u_0(t) = b \operatorname{sign} \psi_2(t), \\ u_0^k(t) = \begin{cases} b, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ -b, & \tau < t \leqslant T. \end{cases} \end{gathered} \tag{1.27}$$

Здесь τ — момент переключения, для которого $\psi_2(\tau) = 0$; он будет определен ниже. Из уравнений (1.22) для $x_2(t)$ и $x_1(t)$ при управлении (1.27) получим

$$\begin{gathered} x_2(t) = \begin{cases} bt, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 2b\tau - bt, & \tau \leqslant t \leqslant T; \end{cases} \\ x_1(t) = \begin{cases} b\dfrac{t^2}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ b\dfrac{t^2}{2} + 2b\tau(t-\tau) - \dfrac{b}{2}(t^2 - \tau^2), & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \end{gathered} \tag{1.28}$$

Для нахождения момента переключения τ используем краевое условие $\psi_2(T) = -k x_2(T)$. Отсюда следует, что

$$\psi_2(T) = C - T = -k(2b\tau - bT), \ C = T - k(2b\tau - bT).$$

Поскольку $\psi_2(\tau)=0$, имеем

$$T-k(2b\tau-bT)-\tau=0.$$

Таким образом, для определения момента переключения получаем формулу

$$\tau=T(1+bk)(1+2bk)^{-1}. \tag{1.29}$$

Приведем и другой возможный способ определения момента τ. Вычислим значение функционала $J_k(u)$ на траектории (1.28):

$$J_k(u)=\frac{bT^2}{2}+b\tau^2+\frac{kb^2}{2}(2\tau-T)^2-2bT\tau. \tag{1.30}$$

Теперь момент переключения τ можно определить из условия минимума выражения (1.30) по τ:

$$\frac{dJ}{d\tau}=2b\tau+2kb^2(2\tau-T)-2bT=0,$$

откуда

$$\tau=T(1+bk)(1+2bk)^{-1},$$

т. е. получен тот же результат, что и раньше.

Из равенства (1.29) видно, что $\tau\to T/2$ при $k\to\infty$. Далее, так как

$$x_2(T)=bT(1+2bk)^{-1},$$

то $x_2(T)\to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно, оптимальное управление $u_0^k(t)$ найдено и при достаточно большом k близко к оптимальному управлению $u_0(t)$ в задаче (1.22) — (1.24), которое равно

$$u_0(t)=\begin{cases} b, & 0\leqslant t\leqslant T/2,\\ -b, & T/2\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

§ 2. ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

1. Сведение к задаче Майера. Рассмотрим задачу управления системой (1.1) с ограничением (1.3) и критерием качества

$$J(u)=\int_{t_0}^{T}F_0(t, x(t), u(t))\,dt\to\inf_u,\quad x\in R_n. \tag{2.1}$$

Предполагается, что начальное положение $x(t_0)=x_0$ и конечное положение $x(T)=x_1$ заданы; момент t_0 задан, а момент T не задан. Сформулируем поставленную задачу иначе, воспользовавшись тем

же методом, что и при переходе от задачи Лагранжа к задаче Майера из § 1 гл. IV. Введем векторы

$$y(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t), x_{n+1}(t)),\ y(t)\in R_{n+1},$$
$$F=(f_1, \ldots, f_n, F_0),\ F\in R_{n+1}.$$
$$\dot{x}_{n+1}(t)=F_0(t, x(t), u(t)),\quad x_{n+1}(0)=0.$$

Тогда задача (1.1), (1.3), (2.1) преобразуется в следующую задачу:

$$\dot{y}(t)=F(t, y(t), u(t)),\ t\geqslant t_0,\ y(t_0)=(x_0, 0), \tag{2.2}$$
$$y_1(T)=x_1(T), \ldots, y_n(T)=x_n(T),\ y_{n+1}(T)\to\inf_u,\ u(t)\in U(t).$$

Отметим, что в уравнении (2.2) правая часть F не зависит от переменной $y_{n+1}(t)$.

Момент времени T окончания процесса не задан заранее, а определяется из условия попадания системы (2.2) в заданное конечное положение $x(T)$.

2. Необходимые условия оптимальности для линейных по скалярному управлению систем. Выведем необходимые условия оптимальности для линейной по управлению системы вида (2.2)

$$\dot{y}(t)=F(t, y(t))+b(t)u(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ y\in R_{n+1},\ u\in R_1, \tag{2.3}$$
$$y(t_0)=y_0.$$

Предполагается, что F не зависит от y_{n+1} и удовлетворяет условиям Липшица (1.3) гл. IV, а в $b(t)\in R_{n+1}$ — вектор с ограниченными и кусочно-непрерывными компонентами. Скалярное управление $u(t)$ удовлетворяет ограничению

$$|u(t)|\leqslant a,\ a=\text{const}. \tag{2.4}$$

Момент t_0 начала движения, начальное положение $y(t_0)$, а также n первых компонент $y(T)$ заданы. Момент T и управление $u(t)$ определяются из условия попадания системы в конечное состояние $y(T)$ с минимальным значением $y_{n+1}(T)$:

$$y_{n+1}(T)\to\inf_u. \tag{2.5}$$

Предположим, что решение задачи (2.3) — (2.5) существует. Обозначим через $u_0(t)$ оптимальное управление, а через $y_0(t)$ — оптимальную траекторию с компонентами $y_{0,1}(t), \ldots, y_{0,n+1}(t)$.

Пусть $v(t)$ — любая кусочно-непрерывная функция такая, что $u_0(t)+v(t)$ удовлетворяет ограничению (2.4), т. е.

$$|u_0(t)+v(t)|\leqslant a. \tag{2.6}$$

Такую функцию $v(t)$ назовем *допустимой*.

Обозначим через $\alpha(t) \in R_{n+1}$ решение уравнения в вариациях:

$$\dot{\alpha}(t) = A(t)\alpha(t) + b(t)\mathrm{v}(t), \quad \alpha(t_0) = 0,$$
$$A(t) = F_y(t, y_0(t)). \tag{2.7}$$

Решение задачи (2.7), отвечающее заданному $\mathrm{v}(t)$, обозначим $\alpha(t, \mathrm{v})$.

Введем в пространстве R_{n+1} множество $Q(T)$ (рис. 2.1), определяемое следующим образом: $Q(T) = \{q \in Q(T) : q = y(T) + \alpha(T, \mathrm{v})$, где v — любая допустимая функция$\}$.

Установим свойства множества $Q(T)$, которые существенно используются при получении необходимых условий оптимальности:

1°. *Множество $Q(T)$ ограничено.*

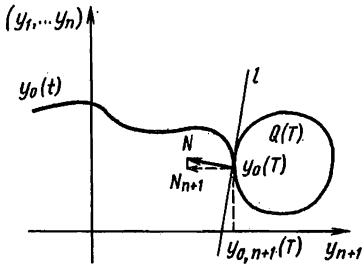


Рис. 2.1. Вид множества $Q(T)$, опорной гиперплоскости l и нормали N

Поскольку множество допустимых $\mathrm{v}(t)$ ограничено ($|\mathrm{v}(t)| \leqslant 2a$) и матрица $A(t)$ также ограничена на $[t_0, T]$, все $\alpha(t, \mathrm{v})$ ограничены на $[t_0, T]$.

2°. *Множество $Q(T)$ выпукло.*

Напомним, что множество $Q \in R_n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $q_1 \in Q$, $q_2 \in Q$ и любого числа $\nu \in [0, 1]$ точка $\nu q_1 + (1-\nu) q_2$ также принадлежит Q.

Пусть q_1 и q_2 — две точки из $Q(T)$. Покажем, что все точки q_γ вида $q_\gamma = \gamma q_1 + (1-\gamma) q_2$, где $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, принадлежат $Q(T)$. Если $q_1, q_2 \in Q(T)$, то существуют допустимые $\mathrm{v}_1(t)$ и $\mathrm{v}_2(t)$ такие, что

$$q_1 = y_0(T) + \alpha(T, \mathrm{v}_1), \quad q_2 = y_0(T) + \alpha(T, \mathrm{v}_2).$$

Тогда

$$q_\gamma = y_0(T) + \gamma\alpha(T, \mathrm{v}_1) + (1-\gamma)\alpha(T, \mathrm{v}_2).$$

Для линейного уравнения (2.7) справедлив принцип суперпозиции, в силу которого

$$\gamma\alpha(T, \mathrm{v}_1) + (1-\gamma)\alpha(T, \mathrm{v}_2) = \alpha(T, \gamma\mathrm{v}_1 + (1-\gamma)\mathrm{v}_2).$$

Функция $\mathrm{v}_\gamma(t) = \gamma\mathrm{v}_1(t) + (1-\gamma)\mathrm{v}_2(t)$ при всех $\gamma \in [0, 1]$ и $t \in [t_0, T]$ является допустимой, так как

$$|u_0(t) + \mathrm{v}_\gamma(t)| = |u_0(t) + \gamma\mathrm{v}_1(t) + (1-\gamma)\mathrm{v}_2(t)| =$$
$$= |\gamma(u_0(t) + \mathrm{v}_1(t)) + (1-\gamma)(u_0(t) + \mathrm{v}_2(t))| \leqslant$$
$$\leqslant \gamma|u_0(t) + \mathrm{v}_1(t)| + (1-\gamma)|u_0(t) + \mathrm{v}_2(t)| \leqslant a.$$

Значит, $\alpha(T, v_\gamma)$ при любом $\gamma \in [0, 1]$ отвечает допустимой функции $v_\gamma(t)$. Поэтому, по определению,

$$q_\gamma = y_0(T) + \alpha(T, v_\gamma) \in Q(T),$$

что и доказывает выпуклость множества $Q(T)$.

3^0. *Точка $y_0(T)$ есть граничная точка множества $Q(T)$.*

Напомним, что точка $q \in Q \subset R_n$ называется *внутренней точкой* множества Q, если она принадлежит Q вместе с некоторым шаром с центром в точке q. Совокупность всех внутренних точек множества Q обозначим через Q_0, а замыкание множества Q — через $\bar{Q}$. *Граничной точкой* множества Q называется любая точка из множества $(\bar{Q} \setminus Q_0)$. Иначе говоря, в любой окрестности граничной точки найдутся точки как принадлежащие Q, так и не принадлежащие Q.

Докажем теперь, что $y_0(T)$ есть граничная точка множества $Q(T)$. Предположим противное, т. е. что $y_0(T)$ — внутренняя точка множества $Q(T)$. Тогда найдется такое число $\beta < y_{0,\,n+1}(T)$, что отрезок, параллельный оси y_{n+1} и соединяющий точку $y_0(T)$ и точку $q_\beta = (y_{0,\,1}(T), \ldots, y_{0,\,n}(T), \beta)$, целиком лежит в множестве $Q(T)$. Поскольку $q_\beta \in Q(T)$, найдется такая допустимая функция $v_\beta(t)$, что $q_\beta = y_0(T) + \alpha(T, v_\beta)$. Обозначим через $y_\beta(t)$ решение уравнения (2.3), соответствующее допустимому управлению $u_0(t) + v_\beta(t)$.

В силу формул (1.17) и (1.23) гл. IV получаем, что при некоторых постоянных C_1 и C_2 имеют место неравенства

$$|y_0(T) - y_\beta(T)| \leqslant C_1 \left(\int_{t_0}^{T} |v_\beta(t)|\, dt \right),$$

$$|q_\beta - y_\beta(T)| \leqslant C_2 \left(\left[\int_{t_0}^{T} |v_\beta(t)|\, dt \right]^2 \right).$$

Отсюда вытекает, что при β, достаточно близком к $y_{0,\,n+1}(T)$, справедливо неравенство $y_{\beta,\,n+1}(T) < y_{0,\,n+1}(T)$. Однако это неравенство невозможно, поскольку оно противоречит оптимальности $y_0(T)$. Таким образом, показано, что $y_0(T)$ — граничная точка множества $Q(T)$.

4^0. *Существует вектор $N \neq 0$ такой, что для любого $\alpha(T, v)$, удовлетворяющего условию $(y_0(T) + \alpha(T, v)) \in Q(T)$, имеет место неравенство*

$$N'\alpha(T, v) \leqslant 0. \tag{2.8}$$

Напомним [10; 21], что через граничную точку $y_0(T)$ выпуклого множества $Q(T)$ можно провести опорную гиперплоскость такую,

что все точки $Q(T)$ лежат по одну сторону от этой гиперплоскости. В качестве N возьмем нормаль единичной длины к гиперплоскости l в точке $y_0(T)$, направленную в ту сторону, которая не содержит точек множества $Q(T)$ (рис. 2.1). Ясно, что для такого вектора N выполняется неравенство (2.8).

Продолжим теперь вывод необходимых условий. Пусть $Z(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{\alpha}(t)=A(t)\alpha(t)$. Обозначим через $\psi(t)=(\psi_1, ..., \psi_n, \psi_{n+1})$ вектор сопряженных переменных. Имеем

$$\psi(t)=Z'(T, t)N,$$

где N — вектор, существование которого установлено в п. 4^0. Ясно, что $\psi(t)\not\equiv 0$, так как $N\neq 0$ и матрица $Z'(T, t)$ не вырождена. В силу свойства (1.8) гл. IV матрицы Коши $Z(t, s)$ получим

$$\dot{\psi}(t)=\frac{\partial Z'(T, t)}{\partial t}N=-A'(t)Z'(T, t)N=-A'(t)\psi(t). \qquad (2.9)$$

Введем теперь гамильтониан $H(t, y(t), u, \psi(t))$ задачи (2.3)—(2.5) с помощью равенства

$$H(t, y(t), u, \psi(t))=\psi'(t)[F(t, y(t))+b(t)u]. \qquad (2.10)$$

Тогда уравнение (2.9) для сопряженных переменных $\psi(t)$ можно записать в виде

$$\dot{\psi}(t)=-H_y(t, y_0(t), u_0(t), \psi(t)),\ \psi(T)=N. \qquad (2.11)$$

Докажем теперь, что оптимальное управление $u_0(t)$ максимизирует гамильтониан H, т. е. что выполняется условие максимума вида

$$\max_{u,\ |u(t)|\leqslant a} H(t, y_0(t), u, \psi(t))=H(t, y_0(t), u_0(t), \psi(t)). \qquad (2.12)$$

Из формулы (2.10) для гамильтониана и из соотношения (2.12) при этом следует, что

$$u_0(t)=a\cdot\operatorname{sign}(\psi'(t)b(t)). \qquad (2.13)$$

Предположим, что равенство (2.13) не выполняется. Рассмотрим сначала те точки $t\in[t_0, T]$, в которых $\psi'(t)b(t)=0$. В этих точках условие максимума (2.12), очевидно, имеет место. Следовательно, условие (2.12) может не выполняться лишь в тех точках $t\in[t_0, T]$, в которых $\psi'(t)b(t)\neq 0$. Поскольку $\psi'(t)b(t)$ кусочно-непрерывна, найдется такой отрезок $[t_1, t_2]\subset[t_0, T]$, $t_1<t_2$, что либо

$$\psi'(t)b(t)<0,\ u_0(t)\geqslant -a_1>-a,\ t\in[t_1, t_2],$$

либо

$$\psi'(t)b(t)>0,\ u_0(t)\leqslant a_1<a,\ t\in[t_1, t_2],\ t_1<t_2. \qquad (2.14)$$

Для определенности рассмотрим только случай (2.14). Из соотношений (2.7), (2.8) и формулы Коши следует, что

$$N'\alpha(T, \mathrm{v}) = N' \int_{t_0}^{T} Z(T, t)\, b(t)\, \mathrm{v}(t)\, \mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Отсюда и из определения $\psi(t)$ вытекает неравенство

$$\int_{t_0}^{T} \psi'(t) b(t)\, \mathrm{v}(t)\, \mathrm{d}t \leqslant 0. \tag{2.15}$$

Положим $\mathrm{v}(t) = C$, где $t \in [t_1, t_2]$, $0 < C \leqslant a - a_1$ и $\mathrm{v}(t) = 0$, $t \overline{\in} [t_1, t_2]$. Для такого $\mathrm{v}(t)$ формула (2.9) в силу (2.14) приводит к неравенству

$$N'\alpha(T) = \int_{t_0}^{T} b'(t)\psi(t)\, \mathrm{v}(t)\, \mathrm{d}t = C \int_{t_1}^{t_2} b'(t)\psi(t)\, \mathrm{d}t > 0,$$

которое противоречит (2.15). Тем самым справедливость равенства (2.13) доказана. Из соотношений (2.10), (2.11) вытекает, что $\psi_{n+1}(t) \equiv 0$, т. е. $\psi_{n+1}(t)$ постоянна и $\psi_{n+1}(T) = N_{n+1}$. Кроме того, можно показать, что $N_{n+1} \leqslant 0$ (рис. 2.1). Следовательно $\psi_{n+1}(t) = N_{n+1} \leqslant 0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $u_0(t)$ и $y_0(t)$ — оптимальные управление и траектория в задаче* (2.3)—(2.5). *Тогда существует такой ненулевой вектор $\psi(t)$, удовлетворяющий уравнению* (2.11), *что выполняется условие максимума* (2.12), *причем ψ_{n+1} постоянна и неположительна.*

3. Случай многомерного управления. Сформулируем условия оптимальности для задачи

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ t \geqslant t_0,\ x \in R_n,\ u \in R_m,$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(T) = x_1,\ u(t) \in U(t),$$

$$\int_{t_0}^{T} F_0(t, x(t), u(t))\, \mathrm{d}t \to \inf_{u}. \tag{2.16}$$

Здесь t_0, x_0, x_1 заданы, а T свободно.

Теорема 2.2. *Если* $u_0(t)$, $x_0(t)$ — *оптимальные управление и траектория в задаче* (2.16), *то существует ненулевой вектор* $(\psi(t), \psi_{n+1})$, $\psi(t) \in R_n$ *такой, что*

$$\psi_{n+1}(t) = \text{const} \leqslant 0, \quad \dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)). \tag{2.17}$$

Гамильтониан H *в задаче* (2.16) *имеет вид*

$$H(t, x, u, \psi(t)) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) f_i(t, x, u) + \psi_{n+1} F_0(t, x, u). \tag{2.18}$$

При этом выполняется условие максимума

$$\max_{u \in U(t)} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)). \tag{2.19}$$

Кроме того,

$$H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) = \int_T^t H_s(s, x_0(s), u_0(s), \psi(s))\, ds, \tag{2.20}$$

$$H_s = \frac{\partial H}{\partial s}.$$

4. Случай стационарных систем. Приведем необходимые условия оптимальности для задачи (2.16) при дополнительном предположении о стационарности. Стационарность задачи (2.16) означает, что f, F_0 и U не зависят явно от времени, т. е.

$$f(t, x, u) \equiv f(x, u), \quad F_0(t, x, u) = F_0(x, u), \quad U(t) \equiv U. \tag{2.21}$$

Если стационарная задача (2.16), (2.21) имеет оптимальное управление $u_0(t)$ и оптимальную траекторию $x_0(t)$, то существует ненулевой вектор сопряженных переменных $(\psi(t), \psi_{n+1})$, $\psi(t) \in R_n$, удовлетворяющий условиям (2.17), и выполнено условие максимума (2.19). Кроме того, в стационарном случае имеет место тождество

$$H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) \equiv 0. \tag{2.22}$$

5. Перевод системы с многообразия на многообразие. Приведем еще необходимые условия оптимальности для стационарной задачи (2.16), в которой относительно начального и конечного положений x_0 и x_1 предполагается, что они принадлежат заданным гладким многообразиям M_0 и M_T, размерности которых меньше n, т. е. $x_0 \in M_0$, $x_1 \in M_T$. Необходимые условия оптимальности в этой задаче совпадают с условиями оптимальности из п. 4 и, кроме того, должны быть выполнены условия трансверсальности, состоящие в том, что $\psi(t_0)$ перпендикулярно всем касательным векторам

многообразия M_0 в точке x_0, а $\psi(T)$ перпендикулярно всем касательным векторам многообразия M_T в точке x_1. Ниже для конкретных задач приведен явный аналитический вид условий трансверсальности.

6. Задачи управления с изопериметрическими ограничениями. Приведем необходимые условия оптимальности для задачи (2.19)—(2.23) гл. III:

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.23}$$
$$J_0(t_0, x(t_0), u, T, x(T))\to\inf,$$

$$J_j(t_0, x(t_0), u, T, x(T))\leqslant 0,\ j=1, \ldots, m_1, \tag{2.24}$$
$$J_i(t_0, x(t_0), u, T, x(T))=0,\ i=m_1+1, \ldots, m_2,\ u(t)\in U.$$

Здесь скалярные функционалы J_k имеют вид

$$J_k(t_0, x(t_0), u, T, x(T))=\int_{t_0}^{T} F_k(t, x(t), u(t))\,dt+$$
$$+\varphi_k(t_0, x(t_0), T, x(T)),\ k=0, 1, \ldots, m_2.$$

При отсутствии ограничений на управление вида $u(t)\in U$ необходимые условия оптимальности приведены в гл. IV. Ограничение на управление $u(t)\in U$ приводит к необходимости модифицировать только лишь условие стационарности (3.5) гл. IV.

Обозначим через $\lambda=(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m_2})$, $\psi(t)\in R_n$ векторы множителей Лагранжа. Предположим, что решение $(t_0, T, u_0(t), x_0(t))$ задачи (2.24) существует. Предполагается, что функции $f(t, x, u)$, $F=(F_0(t, x, u), \ldots, F_{m_2}(t, x, u))$ и их частные производные по x и u непрерывны в некоторой окрестности $(t, x_0(t), u_0(t))$, $t\in[t_0, T]$, а функция $\varphi=(\varphi_0(t_0, \xi, T, \zeta), \ldots, \varphi_{m_2}(t_0, \xi, T, \zeta)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T))$.

При сделанных предположениях существуют такие не равные одновременно нулю множители Лагранжа λ и $\psi(t)$, что справедливы соотношения (2.23), *а также* (3.2) — (3.9) *гл.* IV, *имеющие вид:*

уравнения эволюции системы

$$\dot{x}_0=f(t, x_0(t), u_0(t)); \tag{2.25}$$

уравнения Эйлера для сопряженных переменных

$$\dot{\psi}(t)=-f_x(t, x_0(t), u_0(t))\,\psi(t)-F_x(t, x_0(t), u_0(t))\,\lambda; \tag{2.26}$$

условия трансверсальности

$$\psi(t_0) = -\varphi_x(t_0, x, T, y)\lambda, \quad \varphi(T) = \varphi_y(t_0, x, T, y)\lambda \qquad (2.27)$$

при $x = x_0(t_0)$, $y = x_0(T)$; *при этом вместо условий стационарности* (3.5) *гл.* IV *справедливо условие максимальности*

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \qquad (2.28)$$

где гамильтониан имеет вид

$$H(t, x, u, \psi) = \psi'(t) f(t, x, u) + \lambda' F(t, x, u);$$

условия на подвижные концы t_0, T *(учитываемые лишь в случае подвижных концов)*

$$F'(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0))\lambda - [\varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) + \varphi'_x(t_0, x, T, y)\dot{x}_0(t_0)]'\lambda = 0; \qquad (2.29)$$

$$F'(T, x_0(T), u_0(T))\lambda + [\varphi_T(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) + \varphi'_y(t_0, x, T, y)\dot{x}_0(T)]'\lambda = 0 \qquad (2.30)$$

при $x = x_0(t_0)$, $y = x_0(T)$;

условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_j \left[\int_{t_0}^{T} F_j(t, x_0(t), u_0(t))\,dt + \varphi_j(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) \right] = 0, \quad j = 1, \ldots, m_1; \qquad (2.31)$$

условия неположительности

$$\lambda_j \leqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m_1. \qquad (2.32)$$

В терминах функции H *условия (2.29) и (2.30) записываются соответственно в виде*

$$H(t, x, u, \psi)\Big|_{t=t_0} = \lambda'\varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)),$$

$$H(t, x, u, \psi)\Big|_{t=T} = -\lambda'\varphi_T(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)).$$

Здесь $H|_{t=t_0}$ есть значение функции H при $t = t_0$.

Из сказанного вытекают следующие утверждения:

1^0. *Функция* $H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))$ *непрерывна по* t *при всех* $t \in [t_0, T]$.

□ Это утверждение, вообще говоря, не очевидно, поскольку управление $u_0(t)$ может иметь разрывы. Для доказательства непрерывности H возьмем два произвольных момента времени t и τ $(\tau > t)$ на отрезке $[t_0, T]$ и рассмотрим разность

$$\Delta H = H(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau), \psi(\tau)) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)).$$

Покажем, что $\Delta H \to 0$ при $\tau \to t$. Заметим, что в силу (2.28) справедливы неравенства

$$H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) \geqslant H(t, x_0(t), u_0(\tau), \psi(t)),$$
$$H(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau), \psi(\tau)) \geqslant H(\tau, x_0(\tau), u_0(t), \psi(\tau)).$$

Значит,

$$H(\tau, x_0(\tau), u_0(t), \psi(\tau)) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) \leqslant$$
$$\leqslant \Delta H \leqslant H(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau), \psi(\tau)) - H(t, x_0(t), u_0(\tau), \psi(t)).$$

Однако левая и правая части последнего соотношения стремятся к нулю при $\tau \to t$ в силу непрерывности функций $x_0(t)$, $\psi(t)$, f, F и того факта, что управление u_0 входит в них при одинаковых значениях аргумента. Поэтому $\Delta H \to 0$ при $\tau \to t$. ■

2^0. *Пусть сверх сделанных предположений функции $f(t, x, u)$ и $F(t, x, u)$ непрерывно дифференцируемы по t. Тогда для тех $t \in [t_0, T]$, где оптимальное управление $u_0(t)$ непрерывно, справедливо равенство*

$$\dot{H}(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) = \frac{\partial H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))}{\partial t}.$$

Здесь $\dot{H}$ — полная производная функции H по t, а $\partial H/\partial t$ — частная производная H по первому аргументу.

□ Справедливость этого равенства установим аналогично доказательству утверждения 1^0. Имеем

$$\frac{\Delta H}{\tau - t} \geqslant \alpha(t, \tau), \quad \tau > t,$$

где функция $\alpha(t, \tau)$ определяется равенством

$$\alpha(t, \tau) = \frac{1}{\tau - t}[(H(\tau, x_0(\tau), u_0(t), \psi(\tau)) -$$
$$- H(\tau, x_0(t), u_0(t), \psi(\tau))) + (H(\tau, x_0(t), u_0(t), \psi(\tau)) -$$
$$- H(\tau, x_0(t), u_0(t), \psi(t))) + (H(\tau, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) -$$
$$- H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)))], \quad \tau > t.$$

Отсюда и из уравнений (2.25), (2.26) вытекает, что

$$\lim_{\tau \to t} \alpha(t, \tau) = \frac{\partial H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial H'(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))}{\partial x} \dot{x}_0(t) +$$

$$+ \frac{\partial H'(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))}{\partial \psi} \dot{\psi}(t) = \frac{\partial H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))}{\partial t}.$$

Поэтому, обозначая через $\underline{\lim}$ нижний предел, получаем

$$\underline{\lim_{\tau \to t}} \frac{\Delta H}{\tau - t} \geqslant \lim_{\tau \to t} \alpha(t, \tau) = \frac{\partial H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))}{\partial t}.$$

Подобным же образом устанавливаются соотношения

$$\overline{\lim_{\tau \to t}} \frac{\Delta H}{\tau - t} \leqslant \lim_{\tau \to t} \alpha(t, \tau) = \frac{\partial H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))}{\partial t}, \quad \alpha(t, \tau) \geqslant \frac{\Delta H}{\tau - t},$$

где $\overline{\lim}$ — верхний предел. Из последних формул вытекает справедливость данного утверждения. ■

Пример 2.1. Рассмотрим скалярную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \to \min. \tag{2.33}$$

Управление $u(t)$ в каждый момент времени может принимать два значения: либо $u(t) = 0$, либо $u(t) = 1$, что соответствует случаю, когда в каждый момент времени можно либо управлять, либо не управлять. При этом задано изопериметрическое ограничение на время управления:

$$\int_0^T u(t)\,dt = T_0, \quad 0 \leqslant T_0 \leqslant T. \tag{2.34}$$

Здесь a, T, T_0, x_0 — заданные постоянные.

Для решения задачи (2.33), (2.34) воспользуемся необходимыми условиями оптимальности (2.25)—(2.32). Функция H в задаче (2.33), (2.34) имеет вид

$$H = \psi(t)(ax(t) + u(t)) + \lambda_1 u(t), \tag{2.35}$$

а уравнение для функции $\psi(t)$ — вид

$$\dot{\psi}(t) = -a\psi(t) = -H_x, \quad \psi(T) = \lambda_0. \tag{2.36}$$

В выражениях (2.35), (2.36) λ_0 и λ_1 обозначены постоянные множители Лагранжа.

Если $u_0(t)$ — оптимальное управление, то на основании (2.28) должно быть справедливо соотношение

$$\max_{u:u=0,1} (\psi(t)+\lambda_1) u=(\psi(t)+\lambda_1) u_0. \tag{2.37}$$

Вектор $(\psi(t), \lambda_0, \lambda_1)$ должен быть ненулевым. Отсюда следует, что $\lambda_0 \neq 0$. Действительно, если бы $\lambda_0=0$, то в силу (2.36) функция $\psi(t) \equiv 0$, т. е. $\lambda_1 \neq 0$. Однако при этом в силу (2.37) управление $u_0(t)$ должно быть постоянным, что невозможно, так как это противоречит изопериметрическому условию (2.34).

Следовательно, $\lambda_0 \neq 0$, т. е. в качестве λ_0 можно взять любую отрицательную постоянную. Положим $\lambda_0=-1$.

Отсюда и из (2.36) вытекает, что $\psi(t)=-\exp[a(T-t)]$. Полученное выражение для $\psi(t)$ показывает, что $\psi(t)$ монотонно возрастает при $a>0$ и монотонно убывает при $a<0$. Поэтому, используя равенство (2.37), получаем, что если $a>0$, то $u_0(t)=0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $u_0(t)=1$ при $\tau<t \leqslant T$; если же $a<0$, то $u_0(t)=1$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $u_0(t)=0$ при $\tau<t \leqslant T$. Здесь τ — момент переключения управления, равный единственному нулю $t=\tau$ монотонной функции

$$\lambda_1+\psi(t)=\lambda_1-\exp[a(T-t)].$$

Выбрав постоянную λ_1 так, чтобы удовлетворялось ограничение (2.34), заключаем, что $\tau=T-T_0$ при $a>0$ и $\tau=T_0$ при $a<0$. Если же $a=0$, то оптимальным является любое управление, равное в каждый момент t либо нулю, либо единице и удовлетворяющее условию (2.34).

7. Достаточность принципа максимума. В ряде случаев принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Рассмотрим, например, задачу управления линейной системой [10]

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.38}$$

$$x(t_0)=x_0, \quad x(T)=x_1, \quad u \in U,$$

$$\int_{t_0}^{T} F_0(t, x(t), u(t))\,dt \to \inf_u, \quad x \in R_n, \quad u \in R_m.$$

Здесь моменты времени t_0, T и векторы x_0, x_1 заданы. Функция $F_0(t, x, u)$ выпукла и непрерывно дифференцируема по x, u и непрерывна по t; матрицы $A(t)$, $B(t)$ непрерывны. Множество $U \subset R_m$ замкнуто и выпукло, причем совокупность всех внутренних точек

множества U не пуста. Наконец, $B'(t)\psi(t)\not\equiv 0$ для любого ненулевого решения $\psi(t)$ системы $\dot{\psi}(t)=-A'(t)\psi(t)$. Тогда необходимые условия оптимальности в задаче (2.38), имеющие вид (2.26), (2.28), при сделанных предположениях являются и достаточными.

8. Связь принципа максимума и классического вариационного исчисления. Используя принцип максимума, можно получить известные из вариационного исчисления условия экстремума в задачах без ограничений.

В качестве примера рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\int_{t_0}^{T} F(x(t), \dot{x}(t))\,dt,\ x\in R_n,\ x(t_0)=x_0,\ x(T)=x_1. \tag{2.39}$$

Здесь t_0, T, x_0, x_1 и скалярная функция F заданы. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$ должна быть выбрана так, чтобы удовлетворялись заданные граничные условия и достигался минимум функционала (2.39).

Необходимые условия оптимальности функции $x(t)$ состоят в том, что она удовлетворяет *уравнению Эйлера*

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))-F_x(x(t), \dot{x}(t))=0. \tag{2.40}$$

Покажем, что уравнение (2.40) можно получить, используя принцип максимума. Положим $u=\dot{x}$. Тогда задача (2.39) эквивалентна следующей задаче оптимального управления:

$$\dot{x}(t)=u,\ x(t_0)=x_0,\ x(T)=x_1,\ \int_{t_0}^{T} F(x(t), u(t))\,dt\to\min. \tag{2.41}$$

Необходимые условия оптимальности в задаче (2.41) выражает теорема 1.2. Для того чтобы записать их, рассмотрим гамильтониан $H=\psi' u-F(x, u)$. Поскольку ограничений на управление u не наложено, условие максимума H по u приводит к соотношению

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\psi(t)-\frac{\partial F}{\partial u}=0.$$

Уравнение для вектора сопряженных переменных $\psi(t)$ дает

$$\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Из этих двух соотношений вытекает, что

$$\dot{\psi}(t)=F_x(x(t), u(t)),\ \psi(t)=F_u(x(t), u(t)).$$

Отсюда с учетом обозначения $u=\dot{x}$ получим

$$\frac{d}{dt} F_u(x(t), u(t)) = F_x(x(t), u(t)) = \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)),$$

что совпадает с уравнением (2.40).

Отметим, что при некоторых предположениях другие необходимые условия минимума (условия Вейерштрасса, Лежандра и Якоби) также могут быть выведены из принципа максимума.

9. Принцип максимума для дискретных систем*. Рассмотрим управляемую дискретную систему

$$x(j+1)=f(x(j), u(j)),\ j=0, 1, \ldots, N-1;\ x(0)=x_0; \qquad (2.42)$$
$$x\in R_n,\ u\in R_m,\ f: R_n\times R_m\to R_n.$$

Предполагается, что

$$u(j)\in U\subset R_m. \qquad (2.43)$$

Управление $u(j)$ требуется выбрать таким образом, чтобы для заданных целого числа N и вектора x_N удовлетворялось условие

$$x(N)=x_N \qquad (2.44)$$

и минимизировался функционал

$$J(u)=\sum_{j=0}^{N-1} F_0(x(j), u(j))\to \inf_u,\ F_0: R_n\times R_m\to R_1. \qquad (2.45)$$

Обозначим через $H(x, u, \psi)$ функцию вида

$$H(x, u, \psi)=\psi_{n+1} F_0(x, u)+\psi' f(x, u),$$

где ψ_{n+1} — некоторая постоянная.

Вектор сопряженных переменных $\psi(j)\in R_n$ удовлетворяет уравнению

$$\psi(j-1)=\frac{\partial H(x(j), u(j), \psi(j))}{\partial x},\ j=N-1, \ldots, 1. \qquad (2.46)$$

В пространстве R_{n+1} рассмотрим множество

$$Q(x)=\bigcup_{u\in U} (F_0(x, u), f(x, u)),$$

представляющее для каждого $x\in R_n$ совокупность всех точек $(F_0(x, u), f(x, u))$ при всевозможных $u\in U$.

---

*Пропой А. И. О принципе максимума для дискретных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. № 7.

Теорема 2.3. *Пусть множество $Q(x)$ является выпуклым для любого $x \in R_n$. Тогда для оптимальности управления $u_0(j)$ и соответствующей ему траектории $x_0(j)$ системы (2.42)—(2.45) необходимо существование такого ненулевого вектора $(\psi_{n+1}, \psi(j))$, где постоянная $\psi_{n+1} \leqslant 0$, а $\psi(j)$ удовлетворяет уравнению (2.46), что при любом $j=0, 1, \ldots, N-1$ справедливо соотношение*

$$\max_{u \in U} H(x(j), u, \psi(j)) = H(x_0(j), u_0(j), \psi(j)). \tag{2.47}$$

Сравнение необходимых условий оптимальности для дискретной задачи (2.42)—(2.45) и соответствующей непрерывной задачи показывает, что в дискретном случае появляется дополнительное требование о выпуклости множества $Q(x)$. Без этого требования дискретный принцип максимума, вообще говоря, неверен. Приведем соответствующий пример*.

Пример 2.2. Рассмотрим двумерную управляемую систему со скалярным управлением

$$x_1(j+1) = f(x_1(j)) + f_1(u(j)), \quad j=0, 1, \tag{2.48}$$

$$x_2(j+1) = f(x_2(j)) + f_2(u(j)), \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0. \tag{2.49}$$

Правая часть системы (2.48) определяется соотношениями

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4,$$

$$f_1(u) = 1-2u, \; f_2(u) = 0 \text{ при } 0 \leqslant u \leqslant 1/2, \tag{2.50}$$

$$f_1(u) = 0, \; f_2(u) = -2+4u \text{ при } 1/2 \leqslant u \leqslant 1.$$

Критерий качества имеет вид

$$-x_1(2) - x_2(2) \to \min. \tag{2.51}$$

Ясно, что соответствующее поставленной задаче множество $Q(x)$ не является выпуклым. Если бы в поставленной задаче (2.48)—(2.51) дискретный принцип максимума был справедлив, то оптимальные управления $u_0(j)$ и траектория $x_0(j)$ должны были бы удовлетворять соотношению (2.47), в котором функции ψ_1 и ψ_2 определяются уравнениями

$$\psi_1(j-1) = \psi_1(j) \frac{\partial f(x_1(j))}{\partial x_1}, \; \psi_1(1) = 1, \tag{2.52}$$

$$\psi_2(j-1) = \psi_2(j) \frac{\partial f(x_2(j))}{\partial x_2}, \; \psi_2(1) = 1.$$

Покажем, однако, что оптимальное управление $u_0(0)$ соотношению (2.47) не удовлетворяет.

---

*Бутковский А. Г. О необходимых и достаточных условиях оптимальности для импульсных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1963. Т. 24, № 3.

Для определения оптимальности управления вычислим величину критерия качества (2.51) при некотором управлении, а затем найдем его минимум. В силу (2.48), (2.58) имеем

$$x_1(1)=f_1(u(0)),\ x_2(1)=f_2(u(0)),$$
$$x_1(2)=f(f_1(u(0)))+f_1(u(1)),\qquad (2.53)$$
$$x_2(2)=f(f_2(u(0)))+f_2(u(1)).$$

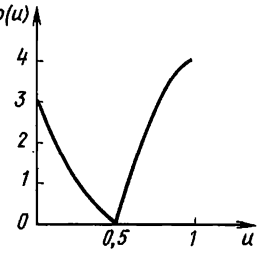


Рис. 2.2. Зависимость критерия качества $\varphi(u)$ от выбора управления u в начальный момент времени

Подставим (2.53) в (2.51) и выделим в критерии качества те слагаемые, которые зависят от выбора управления $u(0)$. В результате получим, что оптимальное значение управления $u_0(0)$ должно удовлетворять условию

$$\max_{0\leqslant u\leqslant 1}\varphi(u)=\varphi(u_0(0)),$$

где

$$\varphi(u)=f(f_1(u))+f(f_2(u)).$$

График функции $\varphi(u)$ (рис. 2.2) показывает, что оптимальное управление $u_0(0)=1$. Поэтому на основании (2.47), (2.49) оптимальные значения траектории таковы:

$$x_1(1)=0,\ x_2(1)=2. \qquad (2.54)$$

Отсюда и из (2.52) вытекает, что

$$\psi_1(0)=\psi_1(1)\frac{\partial f(x_1(1))}{\partial x_1}=-2(x_1(1)-2)=4,$$
$$\psi_2(0)=\psi_2(1)\frac{\partial f(x_2(1))}{\partial x_2}=-2(x_2(1)-2)=0. \qquad (2.55)$$

Функция $H(x, u, \psi)$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$H(x(j), u(j), \psi(j))=\psi_1(j)[f(x_1(j))+f_1(u(j))]+$$
$$+\psi_2(j)[f(x_2(j))+f_2(u(j))]. \qquad (2.56)$$

Значит, при $j=0$ с учетом (2.54)—(2.56) имеем

$$H(x(0), u, \psi(0))=4f_1(u). \qquad (2.57)$$

Из (2.57) видно, что максимум функции $H(x(0), u, \psi(0))$ по u в силу (2.49) достигается при $u=0$ и равен $H(x(0), 0, \psi(0))=4$. В то же самое время на оптимальном управлении $u_0(0)=1$ функция $H(x_0(0), u_0(0), \psi(0))=0$, т. е. не достигает своего максимального значения.

§ 3. КОНКРЕТНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Принцип максимума Понтрягина находит широкое применение при исследовании различных технических систем управления. С его помощью отыскание оптимального управления сводится к исследованию некоторых краевых задач. Хотя построение оптимального управления аналитическим путем, вообще говоря, затруднительно, тем не менее в ряде интересных и важных случаев его удается довести до конца. Эти случаи иллюстрируются приведенными ниже примерами. В более сложных случаях для отыскания и исследования оптимальных управлений используются приближенные и численные методы, изложенные в четвертой части.

1. Оптимальная компоновка ядерного реактора. Рассмотрим задачу о выборе оптимальной компоновки ядерного реактора без отражателя в одногрупповом приближении, которая была описана в § 3 гл. III. Размер реактора L не задан. Обозначим плотность нейтронов $N(z)$ через $x_1(z)$ и положим $x_2(z)=\mathrm{d}N(z)/\mathrm{d}z$. За управление u примем концентрацию ядерного горючего в единице объема реактора. Тогда рассматриваемая задача имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}x_1(z)}{\mathrm{d}z}=x_2(z),\ \frac{\mathrm{d}x_2(z)}{\mathrm{d}z}=-(a+bu)\,x_1(z),\\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=0,\ x_1(L)=0,\\ -\int_0^L u(z)\,x_1(z)\,\mathrm{d}z\to\min,\ 0\leqslant u_1\leqslant u\leqslant u_2,\\ a+bu(z)>0,\ 0\leqslant z\leqslant L.\end{gathered}\tag{3.1}$$

Здесь u_1, u_2, a, $b\neq 0$ — заданные постоянные.

Для решения задачи используем необходимые условия оптимальности (теорему 2.2 и условия трансверсальности).

Гамильтониан H для задачи (3.1) есть

$$\begin{gathered}H=\psi_1(z)\,x_2(z)-a\psi_2(z)\,x_1(z)-u\gamma(z),\\ \gamma(z)=(\psi_0+b\psi_2(z))\,x_1(z).\end{gathered}\tag{3.2}$$

Здесь постоянная ψ_0 вследствие (2.17) неположительна: $\psi_0\leqslant 0$. Сопряженные переменные ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\psi_1(z)}{\mathrm{d}z}=a\psi_2(z)+(\psi_0+b\psi_2)(z))\,u,\\ \frac{\mathrm{d}\psi_2(z)}{\mathrm{d}z}=-\psi_1(z),\ \psi_2(L)=0.\end{gathered}\tag{3.3}$$

Согласно физическому смыслу, поток нейтронов $N(z)=x_1(z)\geqslant 0$. Поэтому задачу (3.1) следует рассматривать только на отрезке $[0, L]$, где L — точка первого обращения в нуль функции $x_1(z)$. Поэтому из (3.1) следует, что $dx_2(z)/dz<0$ при $z\in[0, L)$. Значит, $x_2(z)<0$ при $z=(0, L]$ и на отрезке $[0, L]$ функция $x_1(z)$ монотонно убывает от значения $x_1(0)=1$ до $x_1(L)=0$.

Покажем, что

$$\psi_0<0. \tag{3.4}$$

Действительно, оптимальное значение гамильтониана (3.2) равно нулю:

$$H(z, x_0(z), u_0(z), \psi(z))=0,\ z\in[0, L]. \tag{3.5}$$

Если бы $\psi_0=0$, то при $z=L$ с учетом (3.1) и (3.5) имели бы, что $H=\psi_1(L)x_2(L)=0$. Отсюда $\psi_1(L)=0$. Значит, было бы $\psi_0=0$, $\psi_1(L)=\psi_2(L)=0$, что противоречит утверждению теоремы 2.2 о существовании ненулевого вектора сопряженных переменных.

Из условия максимума (2.19), примененного к гамильтониану (3.2), вытекает, что оптимальное управление $u_0(z)$ определяется формулами

$$u_0(z)=\begin{cases} u_2, & \gamma(z)<0,\\ \text{не определено}, & \gamma(z)=0,\\ u_1, & \gamma(z)>0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Покажем, что внутри отрезка $[0, L]$ нет отрезков ненулевой длины, где $\gamma(z)=0$. Пусть $\gamma(z_0)=0$ для некоторого $z_0\in(0, L)$. Тогда

$$(\psi_0+b\psi_2(z_0))x_1(z_0)=0, \text{ т. е. } \psi_0+b\psi_2(z_0)=0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\gamma(z_0)}{dz}=b\frac{d\psi_2(z_0)}{dz}x_1(z_0)=-b\psi_1(z_0)x_1(z_0).$$

Кроме того, из равенства (3.5) следует, что

$$\psi_1(z_0)x_2(z_0)-a\psi_2(z_0)x_1(z_0)=0,$$

откуда

$$\psi_1(z_0)=-a\frac{x_1(z_0)}{x_2(z_0)}\cdot\frac{\psi_0}{b}.$$

Значит, в тех точках z_0, где $\gamma(z_0)=0$, имеем

$$\frac{d\gamma(z_0)}{dz}=a\frac{x_1^2(z_0)}{x_2(z_0)}\cdot\psi_0\neq 0.$$

Отсюда вытекает, что не существует отрезков ненулевой длины, на которых функция $\gamma(z)$ обращается в нуль. Таким образом, в силу (3.6) оптимальное управление $u_0(z)$ определяется формулой

$$u_0(z)=\begin{cases}u_2, & \gamma(z)<0,\\ u_1, & \gamma(z)>0.\end{cases} \tag{3.7}$$

Иными словами, оптимальная компоновка реактора состоит из зон, в которых $u(t)$ принимает значения u_1 и u_2.

Определим число таких зон и их взаимное расположение. Так как производная $d\gamma(z)/dz$ отлична от нуля в точках, где $\gamma(z_0)=0$, то при изменении z от 0 до L функция $\gamma(z)$ может менять знак только один раз и, следовательно, число зон не превосходит двух. При этом $\gamma(L)=0$, а производная

$$\frac{d\gamma(L)}{dL}=(\psi_0+b\psi_2(L))\frac{dx_1(L)}{dL}=(\psi_0+b\psi_2(L))x_2(L)=\psi_0 x_2(L)>0.$$

Значит, в зоне, примыкающей к точке $z=L$, должно быть $u_0(z)=u_2$. Вторая зона примыкает к точке $z=0$. Согласно (3.5) имеем $0=a\psi_2(0)+\psi_0 u(0)+b\psi_2(0)u(0)$. Поэтому $\psi_2(0)=-\psi_0 u(0)[a+bu(0)]^{-1}$. Далее находим

$$\gamma(0)=\psi_0+b\psi_2(0)=\psi_0-b\psi_0 u_0[a+bu(0)]^{-1}=a\psi_0[a+bu(0)]^{-1}.$$

Но, по условию, $a+bu(0)>0$. Поэтому

$$\operatorname{sign}\gamma(0)=\operatorname{sign}a\psi_0=-\operatorname{sign}a.$$

Таким образом, если $a>0$, то при всех $z\in[0, L]$ управление $u_0(z)=u_2$, т. е. имеет место однозонная компоновка. Если же $a<0$, то в зоне, примыкающей к точке $z=0$, получим $u_0(z)=u_1$, т. е. имеет место двухзонная компоновка.

Аналогично исследуются и задача об оптимальной компоновке реактора при заданном его размере L. В этом случае оказывается, что в зависимости от параметров задачи (3.1) оптимальное число зон равно либо двум, либо трем.

Эта, а также другие задачи о компоновке ядерного реактора подробно рассмотрены в цитированных на с. 119 книгах А. П. Рудика.

2. Управление движением с регулируемым трением*. Рассмотрим материальную точку массы m, движущуюся по прямой Ox под действием силы тяги u_2 и силы трения $(k_1+c_1u_1)\dot{x}$. Обозначим через

---

*Колмановский В. Б., Носов В. Р. Об управлении одной билинейной системой // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1990, № 2.

$x_1 = x$ координату точки, а через $x_2 = \dot{x}$ — ее скорость. Тогда уравнения движения являются билинейными и имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2,\ m\dot{x}_2 = u_2 - k_1 x_2 - u_1 c_1 x_2,\ k_1 \geqslant 0,\ c_1 \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Уравнения (3.8) иногда используются как модель движения автомобиля или вагона, причем управление u_1 характеризует силу, приложенную к тормозной колодке. Разделим обе части второго из уравнений (3.8) на m и положим $b = m^{-1}$, $k = k_1 m^{-1}$, $c = c_1 m^{-1}$. Тогда уравнения (3.8) примут вид

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = bu_2 - kx_2 - u_1 c x_2. \tag{3.9}$$

Естественные ограничения на управления состоят в следующем:

$$0 \leqslant u_1 \leqslant 1,\ |u_2| \leqslant 1. \tag{3.10}$$

Отметим, что задача с ограничениями на управление вида $0 \leqslant u_1 \leqslant v_1$, $|u_2| \leqslant v_2$ сводится к (3.9), (3.10) заменой переменных $u_1 \to u_1 v_1$, $u_2 \to u_2 v_2$, $b \to b v_2$, $c \to c v_1$.

Требуется с помощью выбора управлений u_1, u_2 перевести систему (3.9) из заданного начального положения (x_1 (0), x_2 (0)) в начало координат (0, 0) за минимальное время T, т. е.

$$x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0,\ T \to \min. \tag{3.11}$$

Ясно, что момент T совпадает с моментом первого попадания системы (3.9) в начало координат.

Отметим, что в задаче оптимального управления (3.9)—(3.11) существует допустимое управление (u_1, u_2), переводящее систему (3.9) в начало координат за конечное время. Действительно, в качестве допустимого u_1 можно взять, например, $u_1 \equiv 0$. При управлении $u_1 \equiv 0$ система (3.9) становится линейной и принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = bu_2 - k_1 x_2,\ b > 0,\ |u_2| \leqslant 1.$$

Для этой линейной системы существует оптимальное по быстродействию управление $\bar{u}_2$, переводящее ее из произвольного начального положения в начало координат [20, с. 181]. Следовательно, в исходной задаче (3.9)—(3.11) допустимыми являются управления $u_1 \equiv 0$, $\bar{u}_2$.

Для решения задачи (3.9)—(3.11) используем принцип максимума Понтрягина. Гамильтониан задачи (3.9)—(3.11) имеет вид

$$H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (bu_2 - kx_2 - u_1 c x_2),\ \psi_0 = \text{const} \leqslant 0. \tag{3.12}$$

Сопряженные переменные ψ_1, ψ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\psi}_1 = 0,\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 (k + cu_1). \tag{3.13}$$

Значит, ψ_1 — постоянная. Из условия (2.19) максимальности гамильтониана H следует, что

$$u_1(t)=\begin{cases}0, & x_2(t)\psi_2(t)<0\\ 1, & x_2(t)\psi_2(t)>0,\end{cases}$$

или

$$u_1(t)=\frac{1}{2}[1+\operatorname{sign}\varphi_1(t)] \text{ при } \varphi_1(t)\neq 0,\ \varphi_1(t)=-x_2(t)\psi_2(t), \tag{3.14}$$

$$u_2(t)=\operatorname{sign}\psi_2(t) \text{ при } \psi_2(t)\neq 0. \tag{3.15}$$

Исследуем поведение функций $\varphi_1(t)$ и $\psi_2(t)$. Покажем, что функция $\varphi_1(t)$ не может обращаться в нуль на целых интервалах. Предположим противное, т. е. предположим, что $\varphi_1(t)\equiv 0$ на некотором интервале. Тогда либо $x_2(t)\equiv 0$ $(t\in S)$, либо $\psi_2(t)\equiv 0$ $(t\in S_1)$, причем один из интервалов S или S_1 имеет ненулевую длину. Сначала рассмотрим случай, когда $\psi_2(t)\equiv 0$, $t\in S_1$. Тогда в силу (3.13) имеем

$$\dot{\psi}_2(t)\equiv 0=-\psi_1+\psi_2(k+cu_1)=-\psi_1,\ t\in S_1.$$

Значит, $\psi_1=0$. Кроме того, в силу (2.22) максимальное значение гамильтониана равно нулю:

$$H\equiv 0,\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.16}$$

Поэтому $\psi_0=0$. Таким образом, все сопряженные переменные равны нулю:

$$\psi_2(t)=0,\ t\in[0, T],\ \psi_1=0,\ \psi_0=0. \tag{3.17}$$

Однако на основании принципа максимума соотношение (3.17) невозможно.

Пусть теперь $x_2(t)=0$ $(t\in S)$. Тогда $\dot{x}_2(t)=0$ $(t\in S)$, т. е. в силу уравнения (3.9) управление $u_2(t)=0$ $(t\in S)$. Отсюда и из (3.16) следует, что $\psi_0=0$. Поэтому с учетом (3.15) равенство $u_2(t)=0$ $(t\in S)$ возможно только когда $\psi_2(t)\equiv 0$ $(t\in S)$. Однако, как показано выше, последнее тождество невозможно.

Покажем, что функция $\psi_2(t)$ не может иметь более одного нуля на отрезке $[0, T]$. Пусть это не так, т. е. $\psi_2(t_1)=\psi_2(t_2)=0$, $t_1<t_2$; t_1, $t_2\in[0, T)$. Тогда если в точках t_1 и t_2 функция $\dot{\psi}_2(t)\neq 0$, то в силу (3.13) постоянная $\psi_1=-\dot{\psi}_2(t_1)$, $\psi_1=-\dot{\psi}_2(t_2)$, что невозможно. Пусть теперь в одной из точек t_i, например в точке t_1, график функции $\psi_2(t)$ касается оси t. Тогда $\dot{\psi}_2(t_1)=0$, т. е. в силу (3.13) постоянная $\psi_1=0$. Отсюда и из (3.16) следует, что $\psi_0=0$. Значит, должно иметь место тождество (3.17), что невозможно. Таким образом, управление $u_2(t)$ может иметь только одну точку переключения.

Для исследования управления $u_1(t)$ покажем, что $x_2(t)$ не может иметь более одного нуля на $[0, T)$. Пусть это не так. Тогда существуют точки t_1, $t_2 \in [0, T)$ такие, что $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$. Предположим, кроме того, что

$$\dot{x}_2(t_1) \neq 0, \quad \dot{x}_2(t_2) \neq 0. \tag{3.18}$$

Тогда если $\psi_0 = 0$, то на основании (3.12), (3.16) и неравенств $u_2(t_1) = 0$, $u_2(t_2) = 0$, вытекающих из (3.9), получим

$$\psi_2(t_1) = \psi_2(t_2) = 0. \tag{3.19}$$

Равенства (3.19) невозможны, поскольку выше установлено, что $\psi_2(t)$ может иметь лишь один нуль. Итак, $\psi_0 < 0$. В этом случае из (3.9) следует, что

$$\operatorname{sign} u_2(t_i) = \operatorname{sign} \dot{x}_2(t_i), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, на каждом из отрезков $[t_1, t_2]$ и $[t_2, T]$ происходит хоть одно переключение управления $u_2(t)$, что невозможно.

Пусть теперь t_1 — кратный нуль функции $x_2(t)$, т. е. $x_2(t_1) = \dot{x}_2(t_1) = 0$. Тогда в силу (3.9) имеем $u_2(t_1) = 0$. При этом из (3.16) следует, что $\psi_0 = 0$, а из (3.15) — что $\psi_2(t_1) = 0$. Аналогично в точке t_2 получим либо $\dot{x}_2(t_2) \neq 0$, $\psi_0 = 0$, либо $\dot{x}_2(t_2) = x_2(t_2) = 0$. В обоих случаях $\psi_2(t_2)$ должно обращаться в нуль. Значит, было бы выполнено (3.19), что невозможно.

Итак, установлено, что управление $u_1(t)$ имеет не более двух точек переключения, а управление $u_2(t)$ — не более одной. При этом точка переключения управления $u_2(t)$ служит обязательно и точкой переключения управления $u_1(t)$.

Эти результаты имеют простой физический смысл. Пусть в начальный момент точка движется к началу координат, т. е. выполнено условие $x_1(0) x_2(0) < 0$. Тогда ясно, что оптимальное быстродействие получится при следующих управлениях. На отрезке времени $[0, t_1]$ сила тяги u_2 максимальна по величине и направлена к началу координат, а управление силой трения $u_1 = 0$. На отрезке $[t_1, T]$ сила тяги u_2 также максимальна по величине, но направлена от начала координат, а управление силой трения u_1 максимально. Значит, на отрезке $[0, t_1]$ происходит разгон тела, а на отрезке $[t_1, T]$ — торможение (рис. 3.1, *а*). В этом случае управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ имеют по одной точке переключения.

Пусть теперь в начальный момент тело движется от начала координат, т. е. $x_1(0) x_2(0) > 0$. Тогда на отрезке $[0, t_1]$, т. е. до тех пор, пока скорость $x_2(t)$ не станет равной нулю, сила тяги u_2 максимальна и направлена к началу координат, а сила трения максимальна по величине. На отрезке $[t_1, t_2]$ сила тяги та же, а сила трения равна нулю. На отрезке $[t_2, T]$ сила тяги

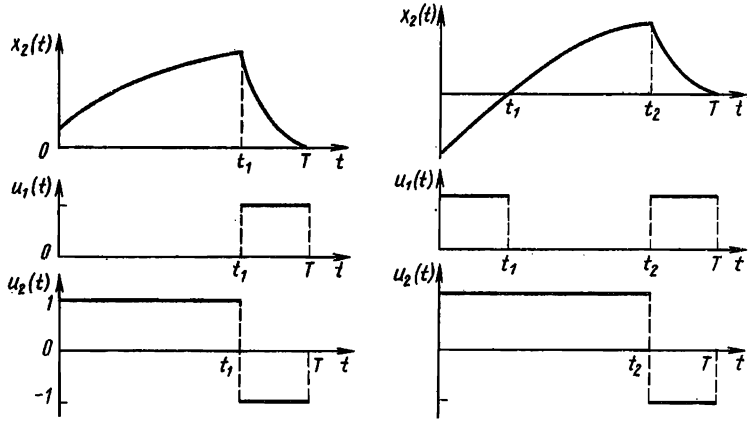


Рис. 3.1. Вид скорости движения $x_2(t)$ и управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$: а) при $x_1(0)<0$, $x_2(0)\geqslant 0$; б) при $x_1(0)\leqslant 0$, $x_2(0)<0$

u_2 максимальна и направлена от начала координат, а сила трения максимальна по величине. В этом случае управление $u_2(t)$ имеет одну точку переключения, а управление $u_1(t)$ — две точки переключения (рис. 3.1, *б*).

В случае $x_2(0)=0$, а $x_1(0)<0$ управления имеют тот же вид, что и на рис. 3.1, *а*. Если же $x_2(0)<0$, а $x_1(0)=0$, то оптимальные управления изображены на рис. 3.1, *б*. В случае $x_1(0)>0$ оптимальное управление силой тяги $u_2(t)$ имеет противоположный знак по сравнению со случаем $x_1(0)<0$, а сила трения сохраняет прежний вид.

Приведем еще аналитические выражения, определяющие моменты переключения. Способ их получения во всех случаях одинаков. Ограничимся поэтому случаем, изображенным на рис. 3.1, *б*. Выражение для t_1 получается из условия $x_2(t_1)=0$. Уравнение (3.9) на отрезке $[0, t_1]$ имеет вид

$$\dot{x}_2=b-(k+c)x_2,\ x_2(0)<0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$t_1=\frac{1}{k+c}\ln\frac{b-(k+c)x_2(0)}{b},\ x_2(0)<0.$$

Для определения момента переключения t_2 проинтегрируем на отрезке $[t_1, t_2]$ уравнение

$$\dot{x}_2=b-kx_2,\ x_2(t_1)=0,$$

а на отрезке $[t_2, T]$ — уравнение

$$\dot{x}_2=-b-(k+c)x_2,\ x_2(T)=0.$$

Приравнивая значения $x_2(t_2)$, найденные из этих двух уравнений, получаем одно из соотношений, связывающих неизвестные моменты T и t_2:

$$\frac{2k+c}{k}=e^{(k+c)(T-t_2)}+\frac{k+c}{k}e^{-k(t_2-t_1)}.$$

Другое соотношение, связывающее T и t_2, следует из выражения

$$\int_0^T \dot{x}_1(t)dt=x_1(T)-x_1(0)=-x_1(0)=\int_0^T x_2(t)\,dt.$$

Подставляя в него найденные выше выражения для $x_2(t)$ на отрезках $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, T]$, имеем

$$x_1(0)=\frac{b}{(k+c)^2}[e^{(k+c)t_1}-e^{(k+c)(T-t_2)}]+$$

$$+\frac{b}{k^2}[-e^{k(t_1-t_2)}+1]+\frac{b(T-t_1-t_2)}{k+c}-\frac{b(t_2-t_1)}{k}.$$

Из полученных уравнений можно определить моменты t_2 и T как функцию начального состояния $x(0)=x_1(0)$ и начальной скорости $\dot{x}(0)=x_2(0)$.

В качестве примера были приведены расчеты времен переключения t_1 и t_2, а также момента T окончания процесса для значений параметров $b=4$, $k=1$, $c=1$, $x_2(0)=2(1-e^2)<0$.

С использованием метода Ньютона получена следующая таблица:

Таблица 3.1

	$x_1(0)=-2$	$x_1(0)=-3$	$x_1(0)=-10$
t_1	1,00000	1,00000	1,00000
t_2	1,21432	1,28512	3,38075
T	1,88461	2,16037	4,09073

Приведем также вид линий переключения в задаче (3.9)—(3.11). Используя полученные результаты о структуре оптимальных управлений u_1 и u_2 и сравнивая времена быстродействия, заключаем, что линии переключения описываются кривой AOB и осью абсцисс (рис. 3.2). При этом

$$AO:\ x_1=-\frac{x_2}{b}+\frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{a+bx_2}{a}\right);\quad BO:\ x_1=-\frac{x_2}{b}-\frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{a-bx_2}{a}\right).$$

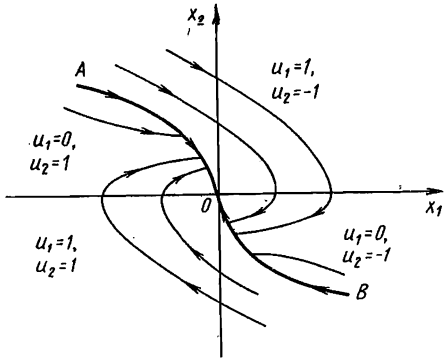


Рис. 3.2. Вид кривых переключения оптимального управления в задаче (3.9)—(3.11): на кривой АО: $u_1=1$, $u_2=-1$, на кривой ОВ: $u_1=1$, $u_2=1$

3. Задача о плоском переходе космического аппарата с одной круговой орбиты на другую* Пусть космический аппарат (КА) движется по заданной круговой орбите. Требуется перевести его на требуемую круговую орбиту в той же плоскости при минимальном расходе топлива, причем время перехода несущественно.

В качестве основных единиц возьмем следующие: R — радиус исходной орбиты; g_R — ускорение гравитационного поля на расстоянии R; M — начальная масса ракеты; $(Rg_R)^{1/2}$ и $R^{1/2}g_R^{-1/2}$ — скорость и период обращения КА на исходной круговой орбите. С помощью этих переменных можно записать безразмерные уравнения плоского движения КА в сферическом гравитационном поле в виде

$$\begin{aligned} &\dot r = \mathrm{v}_r,\ \dot\theta = \mathrm{v}_\theta r^{-1},\ \dot\mu = -c^{-1}u_1,\\ &\dot{\mathrm{v}}_r = \mathrm{v}_\theta^2 r^{-1} - r^{-2} + u_1\mu^{-1}\sin u_2,\\ &\dot{\mathrm{v}}_\theta = -\mathrm{v}_r\mathrm{v}_\theta r^{-1} + u_1\mu^{-1}\cos u_2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь r — безразмерный полярный радиус; θ — полярный угол; v_r и v_θ — безразмерные радиальные и тангенциальные скорости КА; μ — безразмерная мгновенная масса; c — безразмерная скорость истечения газов; u_2 — угол тяги по отношению к местному горизонту; u_1 — управление величиной тяги, $0\leqslant u_1\leqslant a$. Управлениями в данной задаче являются величины тяги u_1 и угол тяги u_2.

Минимизируемый функционал есть

$$J(u_1, u_2) = \mu(0) - \mu(T) \to \min. \tag{3.21}$$

Начальные условия имеют вид

$$r(0)=1,\ \mathrm{v}_r(0)=0,\ \mathrm{v}_\theta(0)=1,\ \theta(0)=\theta_0,\ \mu(0)=\mu_0, \tag{3.22}$$

а конечные условия — вид

$$r(T)=r_1,\ \mathrm{v}_r(T)=0,\ \mathrm{v}_\theta(T)=\mathrm{v}_1,\ \theta(T)\text{ произвольно}. \tag{3.23}$$

Момент окончания движения T не фиксирован.

*Анрион Р. Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1979; Ивашкин В. А. Оптимизация космических маневров. — М.: Наука, 1975.

Сформулированная задача является примером задачи, в которой заданы начальное многообразие (окружность радиуса $r(0)=1$) и конечное многообразие (окружность радиуса $r(T)=r_1$). Поэтому можно воспользоваться необходимыми условиями оптимальности (2.17)—(2.29).

Гамильтониан для задачи (3.20)—(3.23) выражается соотношениями

$$H=H_0+u_1H_1,$$
$$H_0=\psi_r v_r+\psi_\theta v_\theta r^{-1}+\psi_{v_r}(r^{-1}v_\theta^2-r^{-2})-\psi_{v_\theta}v_r v_\theta r^{-1},$$
$$H_1=\mu^{-1}(\psi_{v_r}\sin u_2+\psi_{v_\theta}\cos u_2-\psi_\mu\mu c^{-1}).$$

Уравнения для сопряженных переменных ψ_r, ψ_θ, ψ_{v_r}, ψ_{v_θ}, ψ_μ имеют вид

$$\dot\psi_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=\psi_\theta v_\theta r^{-2}+\psi_{v_r}(v_\theta^2 r^{-2}-2r^{-3})-\psi_{v_\theta}v_r v_\theta r^{-2},$$

$$\dot\psi_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=0,\quad \dot\psi_{v_r}=-\frac{\partial H}{\partial(v_r)}=-\psi_r+\psi_{v_\theta}v_\theta r^{-1},$$

$$\dot\psi_{v_\theta}=-\frac{\partial H}{\partial(v_\theta)}=-\psi_\theta r^{-1}-2\psi_{v_r}v_\theta r^{-1}+\psi_{v_\theta}v_r r^{-1},$$

$$\dot\psi_\mu=-\frac{\partial H}{\partial\mu}=u_1\mu^{-2}(\psi_{v_r}\sin u_2+\psi_{v_\theta}\cos u_2).$$

Из принципа максимума Понтрягина следует, что

$$\sin u_2=\psi_{v_r}\lambda^{-1},\quad \cos u_2=\psi_{v_\theta}\lambda^{-1},$$
$$\lambda=(\lambda_{v_r}^2+\lambda_{v_\theta}^2)^{1/2},\quad u_1=\begin{cases}0, & H_1<0,\\ a, & H_1>0,\end{cases}$$
$$H\equiv 0.$$

Условие трансверсальности в данном случае имеет вид

$$\psi_\theta=0. \tag{3.24}$$

Условие (3.24) обеспечивает ортогональность вектора $\psi(T)=(\psi_r(T),\ \psi_\theta(T),\ \psi_{v_r}(T),\ \psi_{v_\theta}(T),\ \psi_\mu(T))$ к касательной окружности радиуса r_1 в момент T в любой точке этой окружности.

Задача (3.20)—(3.23) исследовалась многими авторами. В результате этих исследований показано, что траектория перехода содержит активные ($u_1=a$) и баллистические ($u_1=0$) участки. Баллистические участки являются кеплеровскими эллиптическими орбитами, на которых по отношению к большой оси эллипса точки включения и выключения двигателя расположены симметрично или асимметрично. Симметричные участки обозначим через S, асимметрич-

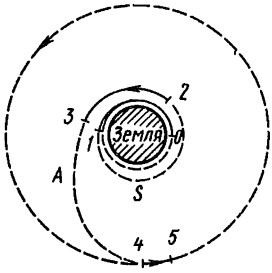


Рис. 3.3. Вид траектории *SA*: — активная дуга; — — — пассивная дуга

ные — через *A*. Вид траектории *SA* изображен на рис. 3.3.

Наиболее интересным результатом, полученным в этой задаче, является существование многих траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности — принципу максимума Понтрягина. На каждой из этих траекторий достигается локальный минимум функционала расхода топлива (3.21). При заданном числе активных участков $n=1, 2, 3$ получаются оптимальные и неоптимальные траектории, приведенные в табл. 3.2. Ни одна из этих траекторий не дает глобального минимума функционала (3.21). Сравнение различных локально оптимальных траекторий можно получить с помощью числовых расчетов, которые приводят к результатам, приведенным в табл. 3.3.

В табл. 3.3 даны в безразмерных приведенных единицах расходы топлива при переходе между двумя круговыми орбитами с отношением радиусов 2,2, при коэффициенте ускорения $a=0{,}03$ и безразмерной скорости истечения $c=0{,}3228$. При $n=4$ и $n=5$ получаются оптимальные траектории, требующие меньшего расхода топлива, но дающие незначительный выигрыш. Поэтому на практике можно ограничиться траекториями с 3—5 активными участками и не рассматривать более сложных вариантов, которые реализуются технически значительно сложнее.

Таблица 3.2

Число активных участков	Оптимальная траектория	Неоптимальная траектория
1	A	—
2	AS, SA	A_2
3	AS_2, SAS, S_2A	A_3, SA_2, A_2S, ASA

Таблица 3.3

Тип траектории	A	AS	AS_2	SA	SAS	S_2A
Расход топлива (в безразмерных единицах)	0,630843	0,630828	0,630825	0,625339	0,625198	0,623631

§ 4. УПРАВЛЕНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Одно из актуальных современных применений теории управления связано с экологией и посвящено исследованию целенаправленных воздействий на процесс взаимодействия растений и животных между собой и окружающим их миром.

Характерной особенностью экологических систем является то, что их поведение зависит от большого числа взаимосвязанных факторов, учет которых в полном объеме представляется затруднительным. В связи с этим при исследовании конкретных задач проводятся различные упрощения. Для описания упрощенных моделей используются различные типы уравнений: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с запаздыванием, в частных производных, стохастические и т. д. Некоторые из них приведены ниже. Отметим, что все они выводятся единообразным методом, для чего используется закон сохранения численности популяции (биологического вида).

1. Уравнения, описывающие эволюцию отдельной популяции. Имеется большое число различных моделей, описывающих поведение изолированной популяции*. В ряде этих моделей скорость изменения численности популяции представляется в виде суммы трех слагаемых, первое из которых определяется рождаемостью, второе — смертностью, третье — миграцией. Одна из первых таких моделей, предложенная Т. Р. Мальтусом в 1798 г., имеет вид

$$\dot{N}(t)=\lambda N(t),\ N(0)=N_0>0. \tag{4.1}$$

Здесь $N(t)$ — численность популяции в момент времени t, постоянная $\lambda>0$.

В модели Мальтуса миграция не учитывается, рождаемость и смертность пропорциональны численности, причем скорость рождаемости больше скорости смертности. В соответствии с законом Мальтуса (4.1) численность популяции должна расти экспоненциально, что не всегда справедливо.

Дж. Кьютелет предположил, что должно иметь место насыщение численности популяции. На основании этого в 1836 г. его ученик Ферхюльст предложил для описания численности популяции $N(t)$ использовать уравнение

$$\dot{N}(t)=\lambda N(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right),\ t\geqslant 0,\ N(0)=N_0>0. \tag{4.2}$$

Здесь постоянная K определяет численность стационарного состояния популяции. Постоянную K называют *емкостью среды* для данной популяции.

Решение задачи (4.2), полученное, например, методом разделения переменных, имеет вид

$$N(t)=\lambda N_0 e^{\lambda t}\left[\lambda+\frac{\lambda}{K}N_0\left(e^{\lambda t}-1\right)\right]^{-1} \tag{4.3}$$

*Уатт К. Е. Экология и управление природными ресурсами. — М.: Мир, 1971.

Из этого выражения следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)=K$. Значит, для модели (4.2) численность популяции стремится к конечному значению K. Кроме того, в силу (4.2) производная $\dot{N}(t)>0$, если $N_0<K$, и $\dot{N}(t)<0$, если $N_0>K$. Отсюда и из (4.3) следует асимптотическая устойчивость стационарного решения $N(t)\equiv K$ уравнения (4.2), а также неустойчивость нулевого равновесия $N(t)\equiv 0$.

Существенным недостатком моделей вида (4.2) является предположение о мгновенности реакции популяции на изменение ее численности. В действительности, однако, изменение численности популяции $N(t)$ не мгновенно сказывается на скорости $\dot{N}(t)$. Учет этого приводит к необходимости использовать уравнения с последействием. Если все эффекты последействия усредненно можно охарактеризовать временным запаздыванием $h>0$, то соответствующая модель, предложенная Г. Е. Хатчинсоном в 1948 г., имеет вид

$$\dot{N}(t)=\lambda N(t)\left(1-\frac{N(t-h)}{K}\right). \tag{4.4}$$

Более общая модель, учитывающая как дискретное, так и распределенное запаздывание, введенная Дж. И. Кушингом в 1976 г., описывается уравнением

$$\dot{N}(t)=\lambda N(t)\left[1-\int_0^{\infty} N(t-s)\,\mathrm{d}K(s)\right],\quad t\geqslant 0. \tag{4.5}$$

Здесь $K(s)$ — неубывающая ограниченная функция, а интеграл в правой части понимается в смысле Стилтьеса. Из уравнения (4.5) можно получить уравнения (4.1), (4.2), (4.4) при соответствующем выборе функции $K(s)$. Вместе с тем в модели (4.5) не учитывается возрастная неоднородность отдельных представителей популяции.

Модели популяции, в которых учитывается неоднородность возраста и миграция, описываются следующим образом. Обозначим через $N(t, \tau)$ численность части популяции в момент времени t, возраст представителей которой в этот момент t не превосходит τ. Плотность (т. е. производную) функции $N(t, \tau)$ по τ обозначим через $n(t, \tau)$, т. е. $n(t, \tau)=\partial N(t, \tau)/\partial\tau$. Тогда для функции $n(t, \tau)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial n(t, \tau)}{\partial t}+\frac{\partial n(t, \tau)}{\partial \tau}=-\mu(t, \tau)n(t, \tau)+g(t, \tau). \tag{4.6}$$

Здесь через $\mu(t, \tau)$ обозначен коэффициент смертности, а через $g(t, \tau)$ — скорость миграции. Иными словами, за малое время Δt число умирающих представителей популяции в момент t в возрасте τ рав-

но $\mu(t, \tau) n(t, \tau) \Delta t$, а число мигрирующих есть $g(t, \tau) \Delta t$. Знак функции g зависит от характера миграции: функция g положительна в случае иммиграции и отрицательна в случае эмиграции. Граничное условие для $n(t, 0)$ определяется числом родившихся представителей популяции в момент времени t. Оно представимо в виде

$$n(t, 0)=u(t) \int_{\tau_1}^{\tau_2} k(t, \tau) n(t, \tau) \mathrm{d}\tau. \tag{4.7}$$

Здесь τ_1 и $\tau_2 > \tau_1$ определяют границы возрастов, в пределах которых возможно воспроизводство: функция $u(t)$ характеризует скорость рождаемости: наконец, функция $k(t, \tau)$ отражает неравномерность воспроизводства в зависимости от возраста. Наряду с граничным условием (4.7) для решения уравнения (4.6) следует задать начальное условие

$$n(0, \tau)=n_0(\tau), \quad \tau \geqslant 0, \tag{4.8}$$

где $n_0(\tau)$ — заданная функция, определяющая распределение по возрастам в начальный момент времени $t=0$. Пусть функция $\mu(t, \tau)$ не зависит от t, т. е. $\mu(t, \tau) \equiv \mu(\tau)$, а граничное условие (4.7) имеет вид

$$n(t, 0)=u(t) N(t)=\varphi(t), \quad N(t)=\int_0^{\infty} n(t, \tau) \mathrm{d}\tau. \tag{4.9}$$

Тогда для решения задачи (4.6), (4.8), (4.9) справедливо представление

$$n(t, \tau)=\begin{cases} n_0(\tau-t) \exp\left(-\int_{\tau-t}^{\tau} \mu(s) \mathrm{d}s\right), & 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ \varphi(t-\tau) \exp\left(-\int_0^{\tau} \mu(s) \mathrm{d}s\right), & \tau \leqslant t. \end{cases}$$

Эти выражения могут быть использованы при анализе динамики численности популяции, описываемой уравнением (4.6).

Другой тип неоднородности возникает тогда, когда популяция неравномерно распределена в среде обитания, вследствие чего имеет место диффузия популяции, т. е. перемещение особей, популяции из одной области среды обитания в другую. Для описания эволюции в этом случае рассмотрим плотность популяции $D(t, x, y)$ в момент времени t в точке с координатами (x, y). Функция $D(t, x, y)$ является решением уравнения Хатчинсона с диффузией

$$\frac{\partial D(t, x, y)}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 D(t, x, y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D(t, x, y)}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\lambda D(t, x, y)\left(1-\frac{1}{K} D(t-h, x, y)\right),$$

где α — коэффициент диффузии и K — емкость среды.

Эффективным способом описания различных типов неоднородностей, а также неполноты информации является моделирование их с помощью случайных величин или процессов. Пусть, например, коэффициент роста λ в уравнении (4.2) случаен. Тогда для описания динамики популяции вместо уравнения (4.2) можно использовать уравнение

$$\mathrm{d}N(t)=(\lambda \mathrm{d}t+\sigma \mathrm{d}\xi(t)) N(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right),$$

где $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс.

2. Сообщества двух видов и более. Существует большое количество различных типов уравнений, моделирующих поведение сообществ, содержащих два вида и более (две популяции или более).

Одна из первых таких моделей (*модель Лотки — Вольтерра или модель «хищник» — «жертва»*) служит для описания поведения сообщества, состоящего из двух видов, интерпретируемых как «хищник» и «жертва». Обозначим через $x(t)$ и $y(t)$ численности соответственно жертв и хищников в момент t. Модель Лотки — Вольтерра описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)=a_1 x-a_2 xy, \quad t \geqslant 0, \quad x(0)=x_0>0, \\ &\dot{y}(t)=a_2 a_3 xy-a_4 y, \quad y(0)=y_0>0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где $a_i>0$ — некоторые постоянные.

Система (4.10) имеет только одно ненулевое положение равновесия $k(x_1, y_1)$ с координатами $x_1=a_4(a_2 a_3)^{-1}$, $y_1=a_1 a_2^{-1}$. Заметим, что решение $x(t)$, $y(t)$ задачи (4.10) положительно при любом t. Положим $x_2(t)=x(t) x_1^{-1}$, $y_2(t)=y(t) y_1^{-1}$. Тогда первый интеграл системы (4.10) записывается в форме

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}\right)^{a_4}\left(\frac{\mathrm{e}^{y_2}}{y_2}\right)^{a_1}=C. \tag{4.11}$$

Величины x_1 и y_1 представляют собой соответственно средние значения жертв и хищников за период. Значение постоянной C для конкретной траектории определяется левой частью (4.11) при $t=0$.

Из (4.11) вытекает, что фазовые траектории системы (4.10) представляют собой замкнутые кривые, вложенные друг в друга. При этом чем больше C, тем больше максимальные значения функции $x(t)$ и $y(t)$ (на рис. 4.1 стрелки указывают направления эволюции системы при возрастании времени). Если начальное положение системы (4.10) совпадает с положением равновесия k, то постоянная C в (4.11) принимает минимальное значение, равное $C_0 = \exp(a_1 + a_4)$. При $C > C_0$ фазовые траектории содержат внутри себя точку k. Таким образом, эта точка является устойчивым положением равновесия системы (4.10) относительно возмущений начального положения. Более детальный анализ показывает, что точка k есть центр. Действительно, линеаризуя уравнения (4.10) в окрестности этой точки, получаем, что в линейном приближении функции $x_3(t) = x(t) - x_1$, $y_3(t) = y(t) - y_1$ удовлетворяют соотношениям

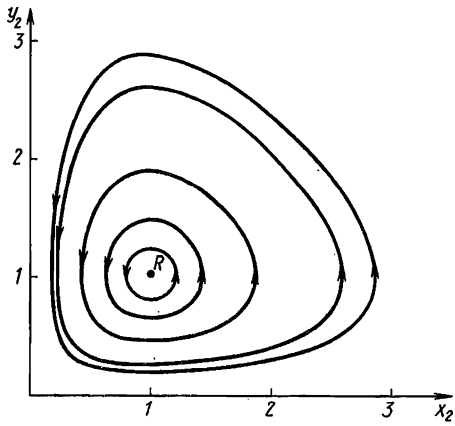


Рис. 4.1. Фазовые траектории модели Лотки — Вольтерра

$$\dot{x}_3(t) = -a_4 a_3^{-1} y_3(t), \quad \dot{y}_3(t) = a_3 a_1 x_3(t). \tag{4.12}$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее (4.12). Имеем

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & -a_4 a_3^{-1} \\ a_1 a_3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1 a_4 = 0.$$

Корни λ_1 и λ_2 этого уравнения чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{a_1 a_4}$. Значит, точка R является центром и период колебаний системы «хищник—жертва» относительно положения R в линейном приближении равен $2\pi (\sqrt{a_1 a_4})^{-1}$.

Модель Лотки — Вольтерра (4.10) позволила объяснить ряд явлений окружающего мира. Вместе с тем некоторые эффекты в этой модели не были учтены. В связи с этим указанная модель усовершенствовалась в различных направлениях, связанных с учетом внутривидовой конкуренции, запаздывания, случайных возмущений, неоднородности возраста и среды обитания и т. д. Например, уравнения взаимодействия хищника и жертвы с учетом внутривидовой конкуренции имеют вид

$$\dot{x}(t) = a_1 x - a_2 xy - \gamma_1 x^2, \quad \dot{y}(t) = a_2 a_3 xy - a_4 y - \gamma_2 y^2, \tag{4.13}$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ — заданные постоянные. Уравнения (4.13) отличаются от уравнений (4.10) слагаемыми $\gamma_1 x^2$ и $\gamma_2 y^2$, учитывающими соответственно конкуренцию среди жертв и хищников. Вопросы устойчивости стационарных состояний систем (4.4) — (4.13) рассмотрены в литературе*.

Для описания эволюции многих популяций были предложены различные модели. Приведем одну из них. Пусть имеется n видов конкурирующих между собой жертв с численностями $N_1(t), \ldots, N_n(t)$ и m видов хищников, численности которых равны $P_1(t), \ldots, P_m(t)$. Уравнения их взаимодействия можно представить в виде

$$\dot{N}_i(t) = N_i(t)\left[\lambda_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} N_j(t) - \sum \beta_{ij} P_j(t)\right], \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\dot{P}_l(t) = P_l(t)\left[-\gamma_l + \sum_{j=1}^{n} \delta_{lj} N_j(t)\right], \quad l = 1, \ldots, m.$$

Здесь λ_i, α_{ij}, β_{ij}, γ_l, δ_{lj} — некоторые положительные постоянные.

Приведенные выше модели сформулированы в терминах системы «хищник—жертва». Вместе с тем близкие по типу уравнения используются и при описании взаимодействия животного и растительного мира, а также в вопросах биотехнологии.

Изложим в качестве иллюстрации модель Моно, служащую для моделирования процесса биосинтеза, происходящего в резервуаре, содержащем микроорганизмы*. Предполагается, что в резервуар непрерывно поступают питательные вещества концентрации $u(t)$. В результате взаимодействия микроорганизмов и питательных веществ происходит прирост полезной биомассы, концентрацию которой обозначим через $x(t)$. Вытекающий из резервуара поток выносит полезную биомассу. Считается, что масса популяции микроорганизмов в резервуаре постоянна. Обозначим через $y(t)$ концентрацию питательных веществ внутри резервуара.

Процесс биосинтеза описывается функциями $x(t)$ и $y(t)$, для которых справедливы уравнения

$$\dot{x}(t) = [a(y) - \lambda] x(t), \quad \dot{y}(t) = -\beta a(y) x - \lambda y + \lambda u(t). \tag{4.14}$$

Здесь постоянные $\lambda\beta > 0$ и удельная скорость размножения $a(y)$ определяются конкретным типом процесса биосинтеза.

Отметим, что ряд реальных процессов в модели Моно (4.14) не учтен. Не учтена, например, конечность скорости перемешивания

---

*Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.

Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.

питательных веществ, поступающих в резервуар, не учтена также неодинаковая способность бактерий к размножению и реакции на питательные вещества в зависимости от их возраста и т. д. Указанные эффекты могут быть описаны введением в модель (4.14) запаздываний, сосредоточенных или распределенных.

3. Постановка задач управления экологическими системами. Как и обычно в теории управления, постановка конкретной задачи управления экологической системой включает в себя уравнения эволюции системы, критерий качества и ограничения на управление и траекторию.

В роли управляющих факторов в задачах экологии могут выступать различные целенаправленные воздействия, например внесение удобрений, использование пестицидов и инсектицидов, поливы, укосы, отловы особей, охота, рыбная ловля, влияние на миграцию и рост популяции и т. д. Указанные факторы тем или иным образом могут быть учтены в уравнениях эволюции системы, граничных условиях, критерии качества. Приведем некоторые характерные постановки задач управления.

Управление системой «хищник—жертва». Рассмотрим систему «хищник—жертва», моделируемую уравнениями Лотки—Вольтерра (4.10). Управление $u(t)$ в системе может действовать как на жертвы, так и на хищников и состоит в уничтожении и тех, и других с эффективностью соответственно $r_1u(t)x(t)$ и $r_2u(t)y(t)$, где r_1, r_2 — заданные неотрицательные числа. Вследствие (4.10) уравнения управляемой системы «хищник—жертва» можно взять в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)[a_1 - a_2 y(t) - r_1 u(t)], \quad t \geqslant 0, \\ \dot{y}(t) &= y(t)[a_2 a_3 x(t) - a_4 - r_2 u(t)]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Начальные условия для системы (4.15) имеют вид

$$x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0. \tag{4.16}$$

Естественным ограничением на управление $u(t)$ является выполнение неравенств

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \gamma. \tag{4.17}$$

Цели управления могут быть связаны с тем, чтобы система (4.15) функционировала в окрестности положения равновесия x_1 уравнения (4.10) при $u = 0$ или была приведена в положение равновесия за минимально возможное время.

Рассмотрим задачу быстродействия. Обозначим через $T = T(u)$ первый момент времени такой, что при управлении u для решения задачи (4.15), (4.16) справедливы соотношения

$$x(T) = x_1 = a_4 (a_2 a_3)^{-1}, \quad y(T) = y_1 = a_1 a_2^{-1}. \tag{4.18}$$

Тогда задача быстродействия состоит в выборе такого управления $u_0(t)$, чтобы для него были выполнены соотношения (4.15)—(4.18) и

$$\inf_u T(u) = T(u_0). \tag{4.19}$$

Исследование задачи (4.15)—(4.19) проведено ниже.

Пусть теперь $T>0$ — заданный фиксированный момент времени. Осуществить функционирование системы (4.15) в окрестности положения (x_1, y_1) на отрезке $[0, T]$ можно, выбирая управление из условия минимума интегрального квадратичного критерия качества:

$$\int_0^T [\alpha_1 (x(t)-x_1)^2 + \alpha_2 (y(t)-y_1)^2]\,dt \to \inf_u.$$

Здесь $\alpha_i \geqslant 0$ — весовые множители.

Отметим, что аналогичные постановки задач оптимального управления представляют интерес и для иных моделей, например для модели Моно (4.14), в которой управлением является концентрация $u(t)$ поступающих в резервуар питательных веществ.

Оптимальный вылов популяции. Задачи управления выловом популяции (например, рыбная ловля) состоят в выборе такого закона вылова, при котором суммарный улов максимален. Предположим, что численность популяции описывается уравнением Ферхюльста (4.2), а интенсивность лова (т. е. доля вылавливаемой рыбы в единицу времени) есть $u(t)$. Тогда уравнение динамики численности популяции имеет вид

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right) - u(t)N(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.20}$$

где T — заданный момент времени.

Управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению (4.17), требуется выбрать так, чтобы

$$\int_0^T u(t)N(t)\,dt \to \sup_u,$$

т. е. чтобы общее количество выловленной рыбы было максимальным.

Использование этого критерия качества не всегда оправдано, поскольку может привести к необратимым последствиям для популяции. В тех случаях, когда интересуются не только получением максимального улова, но и поддержанием численности популяции на некотором желаемом уровне N_0, можно использовать критерии качества

$$\int_0^T [\alpha_1 u(t) N(t) - \alpha_2 (N(t) - N_0)^2] \, dt \to \sup_u,$$

где $\alpha_i \geqslant 0$ — некоторые весовые коэффициенты.

Управление численностью народонаселения. Актуальной для многих стран является проблема регулирования численности их населения. При этом основным средством регулирования является влияние на количество детей в семье. Если для моделирования этой задачи использовать соотношения (4.6)—(4.8), то отражением количества детей в семье является функция $u(t)$, входящая в граничное условие (4.7).

Критерий качества в задаче (4.6)—(4.8) определяется желаемой плотностью $n_0(\tau)$ распределения населения по возрастам и может, например, быть задан в виде

$$\int_0^\infty d\tau \int_0^T [n(t, \tau) - n_0(\tau)]^2 h(t, \tau) \, dt \to \inf_u.$$

Здесь T и функция $h(t, \tau)$ заданы. При этом T определяет промежуток времени, на котором планируется численность населения, а функция $h(t, \tau)$ — удельный вклад различных групп населения в критерий качества. Ограничение на управление $u(t)$ имеет вид $0 \leqslant u(t) \leqslant u_0$, где u_0 задано. Отметим, что управление в этой задаче входит только в граничное условие (4.7).

Другой способ управления численностью народонаселения связан с регулированием законов миграции, т. е. с выбором функции $g(t, \tau)$ в уравнении (4.6).

Приведенные примеры постановок задач оптимального управления в экологии показывают, что они укладываются в рамки общей теории управления. Вместе с тем имеется и ряд специфических сфер. К их числу относится обычно имеющая место однонаправленность управляющих воздействий, т. е. ограничения, как правило, имеют вид (4.17). Кроме того, фазовые переменные в соответствии с их реальным смыслом неотрицательны. Поэтому уравнения, моделирующие динамику экологических явлений, и допустимые управления должны удовлетворять этим требованиям.

4. Управление по быстродействию системой «хищник—жертва». Рассмотрим задачу управления системой (4.15)—(4.18) при $r_2 = 0$, т. е. в предположении, что управляющее воздействие может действовать только на жертвы. Перейдем к новым переменным по формулам

$$t \to a_1^{-1} t, \; x \to a_4 (a_2 a_3)^{-1} x, \; y \to a_1 a_2^{-1} y, \; b \to a_4 a_1^{-1}, \; \gamma \to \gamma r_1 a_1^{-1}, \; u \to a_1 r_1^{-1} u.$$

Тогда задача быстродействия состоит в выборе такого управления $u_0(t)$, чтобы для него были выполнены соотношения (4.15)—(4.18) и

$$\inf_u T(u) = T(u_0). \tag{4.19}$$

Исследование задачи (4.15)—(4.19) проведено ниже.

Пусть теперь $T > 0$ — заданный фиксированный момент времени. Осуществить функционирование системы (4.15) в окрестности положения (x_1, y_1) на отрезке $[0, T]$ можно, выбирая управление из условия минимума интегрального квадратичного критерия качества:

$$\int_0^T [\alpha_1 (x(t) - x_1)^2 + \alpha_2 (y(t) - y_1)^2] \, dt \to \inf_u.$$

Здесь $\alpha_i \geqslant 0$ — весовые множители.

Отметим, что аналогичные постановки задач оптимального управления представляют интерес и для иных моделей, например для модели Моно (4.14), в которой управлением является концентрация $u(t)$ поступающих в резервуар питательных веществ.

Оптимальный вылов популяции. Задачи управления выловом популяции (например, рыбная ловля) состоят в выборе такого закона вылова, при котором суммарный улов максимален. Предположим, что численность популяции описывается уравнением Ферхюльста (4.2), а интенсивность лова (т. е. доля вылавливаемой рыбы в единицу времени) есть $u(t)$. Тогда уравнение динамики численности популяции имеет вид

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - u(t) N(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.20}$$

где T — заданный момент времени.

Управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению (4.17), требуется выбрать так, чтобы

$$\int_0^T u(t) N(t) \, dt \to \sup_u,$$

т. е. чтобы общее количество выловленной рыбы было максимальным.

Использование этого критерия качества не всегда оправдано, поскольку может привести к необратимым последствиям для популяции. В тех случаях, когда интересуются не только получением максимального улова, но и поддержанием численности популяции на некотором желаемом уровне N_0, можно использовать критерии качества

$$\int_0^T [\alpha_1 u(t) N(t) - \alpha_2 (N(t) - N_0)^2] \, dt \to \sup_u,$$

где $\alpha_i \geqslant 0$ — некоторые весовые коэффициенты.

Управление численностью народонаселения. Актуальной для многих стран является проблема регулирования численности их населения. При этом основным средством регулирования является влияние на количество детей в семье. Если для моделирования этой задачи использовать соотношения (4.6)—(4.8), то отражением количества детей в семье является функция $u(t)$, входящая в граничное условие (4.7).

Критерий качества в задаче (4.6)—(4.8) определяется желаемой плотностью $n_0(\tau)$ распределения населения по возрастам и может, например, быть задан в виде

$$\int_0^\infty d\tau \int_0^T [n(t, \tau) - n_0(\tau)]^2 h(t, \tau) \, dt \to \inf_u.$$

Здесь T и функция $h(t, \tau)$ заданы. При этом T определяет промежуток времени, на котором планируется численность населения, а функция $h(t, \tau)$ — удельный вклад различных групп населения в критерий качества. Ограничение на управление $u(t)$ имеет вид $0 \leqslant u(t) \leqslant u_0$, где u_0 задано. Отметим, что управление в этой задаче входит только в граничное условие (4.7).

Другой способ управления численностью народонаселения связан с регулированием законов миграции, т. е. с выбором функции $g(t, \tau)$ в уравнении (4.6).

Приведенные примеры постановок задач оптимального управления в экологии показывают, что они укладываются в рамки общей теории управления. Вместе с тем имеется и ряд специфических сфер. К их числу относится обычно имеющая место однонаправленность управляющих воздействий, т. е. ограничения, как правило, имеют вид (4.17). Кроме того, фазовые переменные в соответствии с их реальным смыслом неотрицательны. Поэтому уравнения, моделирующие динамику экологических явлений, и допустимые управления должны удовлетворять этим требованиям.

4. Управление по быстродействию системой «хищник—жертва». Рассмотрим задачу управления системой (4.15)—(4.18) при $r_2 = 0$, т. е. в предположении, что управляющее воздействие может действовать только на жертвы. Перейдем к новым переменным по формулам

$$t \to a_1^{-1} t, \; x \to a_4 (a_2 a_3)^{-1} x, \; y \to a_1 a_2^{-1} y, \; b \to a_4 a_1^{-1}, \; \gamma \to \gamma r_1 a_1^{-1}, \; u \to a_1 r_1^{-1} u.$$

В новых переменных уравнения системы имеют вид

$$\dot{x}(t)=(1-y-u)x,\ \dot{y}(t)=b(x-1)y,\ t>0,$$
$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ x_0>0,\ y_0>0,\ 0\leqslant u\leqslant\gamma,\ \gamma>0. \qquad (4.21)$$

При $u=0$ эта система имеет на плоскости (x, y) только одно ненулевое положение равновесия R с координатами (1, 1) и рассматриваемая задача состоит в переводе системы (4.21) из положения (x_0, y_0) в положение R (1, 1) за минимальное время.

Существование оптимального управления $u_0(t)$ поставленной задаче установлено в литературе*.

Для отыскания в исследовании оптимального решения используем принцип максимума. Введем функцию $H(x, y, \psi_0, \psi_1, \psi_2, u)$ с помощью равенства

$$H=\psi_1(1-y-u)x+\psi_2 b(x-1)y+\psi_0. \qquad (4.22)$$

Здесь постоянная $\psi_0\leqslant 0$, а функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\psi}_1(t)=\psi_1(t)(y(t)-1+u(t))-b\psi_2(t)y(t),$$
$$\dot{\psi}_2(t)=\psi_1(t)x(t)+b\psi_2(t)(1-x(t)). \qquad (4.23)$$

На основании принципа максимума существует такое ненулевое решение ψ_1, ψ_2 уравнений (4.23), что

$$\max_{0\leqslant u\leqslant\gamma} H(x, y, \psi_0, \psi_1, \psi_2, u)=H(x, y, \psi_0, \psi_1, \psi_2, u_0)\equiv 0. \qquad (4.24)$$

Из уравнений (4.23) вытекает, что функции $\psi_i(t)$ не могут обращаться в нуль на целых интервалах. Действительно, если, например, $\psi_1(t)\equiv 0$ при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, $t_1<t_2$, то и $\dot{\psi}_1(t)\equiv 0$ при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$. Поэтому в силу первого из уравнений (4.23) функция $\psi_2(t)\equiv 0$ при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, т. е. обе сопряженные переменные ψ_1 и ψ_2 равны нулю одновременно, что невозможно для задачи быстродействия. Подобные же рассуждения показывают, что функции ψ_1 и ψ_2 могут иметь только простые нули. Отсюда и из (4.22), (4.24) следует, что оптимальное управление $u_0(t)$ кусочно-постоянно и равно либо нулю, либо γ.

Для дальнейшего исследования оптимального управления перейдем от переменных $\psi_i(t)$ к переменным $\varphi_i(t)$ по формулам

$$\varphi_1(t)=x(t)\psi_1(t),\ \varphi_2(t)=y(t)\psi_2(t).$$

---

*Колмановский В. Б., Спивак А. К. Об управлении по быстродействию системой "хищник — жертва" // ПММ. 1990. Т.54, вып. 3.

Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ положительны, то знаки функций φ_1 и φ_2 совпадают соответственно со знаками ψ_1 и ψ_2. Из (4.21), (4.23) вытекают следующие уравнения:

$$\dot{\varphi}_1(t) = -bx(t)\varphi_2(t), \quad \dot{\varphi}_2(t) = y(t)\varphi_1(t). \tag{4.25}$$

Разделим теперь оптимальную траекторию на участки, целиком расположенные либо в области $x>1$, либо в области $x<1$.

Покажем сначала, что на любом участке оптимальной траектории, целиком расположенном в области $x>1$, может существовать не более одной точки переключения оптимального управления, причем переключение здесь возможно только от значения $u=0$ к значению $u=\gamma$.

Действительно, пусть $x(t)>1$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и имеется скачок управления в момент τ, где $\tau \in [t_1, t_2]$. Так как τ — точка переключения оптимального управления, то в силу (4.24) в этой точке $\varphi_1(\tau)=0$. Далее, из (4.21), (4.24) вытекает, что

$$\frac{\varphi_1(t)\dot{x}(t)}{x(t)} + \frac{\varphi_2(t)\dot{y}(t)}{y(t)} + \psi_0 = 0. \tag{4.26}$$

Но вследствие (4.21) производная $\dot{y}(t)>0$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Поэтому с учетом (4.26) имеем

$$\varphi_2(t) = \frac{y(t)}{\dot{y}(t)}\left[-\psi_0 - \varphi_1(t)\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\right], \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Подставляя это выражение для $\varphi_2(t)$ в первое из уравнений (4.25), получаем

$$\dot{\varphi}_1(t) = \frac{b}{\dot{y}(t)}\left[y(t)\dot{x}(t)\varphi_1(t) + \psi_0 x(t) y(t)\right], \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2; \tag{4.27}$$

$$\varphi_1(\tau) = 0.$$

Будем интерпретировать соотношения (4.27) как задачу Коши относительно функции $\varphi_1(t)$. Тогда в соответствии с формулой Коши (1.6) из гл. IV знак функции $\varphi_1(t)$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ определяется знаком ψ_0, поскольку все величины b, $\dot{y}(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ положительны при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Если $\psi_0=0$, то в силу (4.27) функция $\varphi_1(t) \equiv 0$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, что, как установлено выше, невозможно. Так как $\psi_0 \leqslant 0$, то постоянная $\psi_0<0$, ввиду чего $\varphi_1(t)<0$ при $\tau<t\leqslant t_2$ и $\varphi_1(t)>0$ при $t_1 \leqslant t<\tau$. Следовательно, на основании принципа максимума заключаем, что до тех пор, пока оптимальная траектория остается в области $x>1$, оптимальное управление $u_0=\gamma$ при $t>\tau$ и $u_0=0$ при $t<\tau$.

Подобным же образом, доказывается, что на участке оптимальной траектории, целиком расположенном в области $x<1$, может

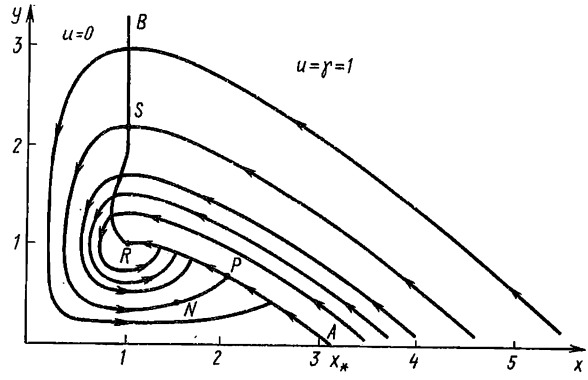


Рис. 4.2. Линия переключения оптимального управления в задаче быстродействия для модели Лотки—Вольтерра при $\gamma=1$

существовать не более одной точки переключения оптимального управления и переключение здесь возможно только от значения $u_0=\gamma$ к значению $u_0=0$. Качественный характер линии переключения оптимального управления зависит от величины γ.

Пусть сначала $\gamma=1$. Линия переключения оптимального управления $APRSB$ изображена на рис. 4.2, причем справа от этой линии оптимальное управление $u_0=1$, а слева $u_0=0$. Часть этой линии APR представляет собой траекторию системы (4.21) при $u_0=\gamma=1$, проходящую через точку R (1, 1).

Часть RSB линии переключения, где $u_0=0$, была получена численно. Алгоритм численного решения для любых γ состоял в следующем. Запишем уравнения (4.21), (4.25) в обратном времени $t\to -t$:

$$\dot{x}(t)=[u+y(t)-1]x(t),\ \dot{y}(t)=b[1-x(t)]y(t), \qquad (4.28)$$

$$\dot{\varphi}_1(t)=b\varphi_2(t)x(t),\ \dot{\varphi}_2(t)=-\varphi_1(t)y(t),\ t>0. \qquad (4.29)$$

Так как попадание системы (4.21) в целевую точку R (1, 1) на оптимальной траектории может произойти только при управлении, равном γ, то начальное условие $\varphi_1(0)$ для системы (4.29) должно иметь вид $\varphi_1(0)<0$. Рассмотрим теперь систему (4.28), (4.29) при $u=\gamma=1$ и начальных условиях

$$x(0)=1,\ y(0)=1,\ \varphi_1(0)<0,\ \varphi_2(0), \qquad (4.30)$$

где $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$ — некоторые заданные числа. Решим задачу (4.28)—(4.30) при $u=1$ на отрезке $[0, \tau_1]$, где τ_1 — первый нуль функции $\varphi_1(t)$. В момент τ_1 происходит переключение управления, которое становится равным нулю. Далее решение задачи (4.28), (4.29) ищется при $u=0$ с начальными условиями, задаваемыми в точке τ_1 и определенными на предшествующем шаге алгоритма.

Это решение ищется на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, где τ_2 — следующий после τ_1 нуль функции φ_1. Точка с координатами $x(\tau_2)$, $y(\tau_2)$ лежит на линии переключения *RSB*. Придавая другие начальные значения переменным $\varphi_1(0)$ и $\varphi_2(0)$, получаем другие точки кривой *RSB*.

Часть *APR* линии переключения есть траектория системы (4.28) при $u=1$ с начальными условиями $x(0)=1$, $y(0)=1$. Иными словами, кривая *APR* описывается уравнениями

$$\dot{x}=xy,\ \dot{y}=b(1-x)y,\ x(0)=1,$$
$$y(0)=1,\ t\geqslant 0. \qquad (4.31)$$

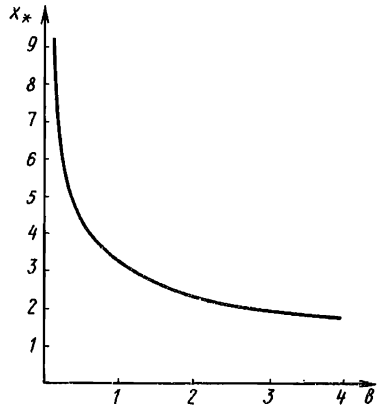


Рис. 4.3. Зависимость величины x_* от параметра b в задаче быстродействия для модели Лотки—Вольтерра

Первый интеграл системы (4.31) имеет вид $(xe^{-x})^b e^{-y}=C$. Отсюда и из начального условия $x(0)=1$, $y(0)=1$ следует уравнение, определяющее кривую *APR*:

$$y=b\ln x-bx+b+1. \qquad (4.32)$$

В силу (4.31) производная $\dot{x}(t)>0$, а $\dot{y}(t)<0$ при $t>0$. Кроме того, функции $x(t)$ и $y(t)$ положительны. Поэтому при $t\to\infty$ функция $x(t)$, монотонно возрастая, должна стремиться к конечному пределу, а функция $y(t)$, монотонно убывая, должна стремиться к нулю. Действительно, если бы предел функции $x(t)$ при $t\to\infty$ был равен $+\infty$, то в силу (4.32) функция $y(t)$ должна быть отрицательной для всех достаточно больших t, что невозможно. Далее, если предел функции $y(t)$ при $t\to\infty$ был бы равен некоторому положительному числу, то в силу первого из уравнений (4.31) предел $x(t)$ при $t\to\infty$ был бы равен $+\infty$, что, как показано выше, невозможно. Итак, для решения задачи (4.31), определяющего линию переключения *APR*, имеем $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=x_*$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$. График зависимости величины x_* от параметра b приведен на рис. 4.3. Кривые со стрелками на рис. 4.3 показывают оптимальные траектории системы (4.21).

Рассмотрим теперь случай $\gamma>1$. Кривая переключения *APRSB* для $\gamma>1$ изображена на рис. 4.4, *а*. Часть *APR* этой кривой определяется уравнениями

$$\dot{x}(t)=(\gamma-1+y)x,\ \dot{y}(t)=b(1-x)y,\ t\geqslant 0;\ x(0)=1,\ y(0)=1. \qquad (4.33)$$

Первый интеграл системы (4.33) есть $(xe^{-x})^b(y^{1-\gamma}e^{-y})=C$. Следовательно, уравнение кривой *APR* имеет вид

$$bx-b\ln x+(\gamma-1)\ln y+y=b+1.$$

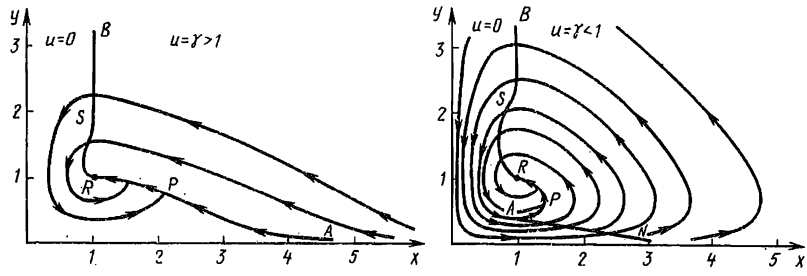


Рис. 4.4. Линия переключения оптимального управления в задаче быстродействия для модели Лотки—Вольтерра: а) при $\gamma > 1$, б) при $\gamma < 1$

Отметим еще, что решение задачи (4.33) удовлетворяет соотношениям $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Поэтому при $x \to \infty$ ордината линии переключения APR стремится к нулю. Часть кривой переключения RSB получена численно с помощью того же алгоритма, что и в случае $\gamma = 1$.

Наконец, в случае $\gamma < 1$ линия переключения $NAPRSB$ изображена на рис. 4.4, *б*. Как и ранее, часть APR линии переключения представляет собой траекторию задачи (4.33), а участки NA и RSB были получены численно.

Сравнение рис. 4.2, 4.4, *а*, *б* показывает, что в случае $\gamma \geqslant 1$ число точек переключения оптимального управления не превосходит двух, а в случае $\gamma < 1$ оно может быть сколь угодно большим при достаточно больших начальных численностях x_0 и y_0 жертв и хищников.

Основные результаты и формулы главы V

Принцип максимума Понтрягина для задачи Майера. Пусть $u_0(t)$ и $x_0(t)$ — оптимальные управление и траектория в задаче

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ t \leqslant t_0 \leqslant T,\ x(t_0) = x_0$$
$$J(u) = \varphi(x(T)) \to \inf_u,\ u(t) \in U.$$

Тогда $u_0(t)$ удовлетворяет условию максимума

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(u)),$$

где

$$H = \psi'(t) f(t, x(t), u(t)),$$
$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)),\ \psi(T) = -\varphi_x(x_0(T)).$$

Принцип максимума для задачи Больца:

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)),$$

где $H(t, x(t), u, \psi(t)) = \psi'(t) f(t, x(t), u) - F_0(t, x(t), u(t))$.

Принцип максимума для задачи со свободным правым концом:

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)),$$

где

$$H(t, x(t), u, \psi(t)) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) f_i(t, x, u) + \psi_{n+1} F_0(t, x, u),$$

$$\psi_{n+1} = \text{const} \leqslant 0, \quad \dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)).$$

Принцип максимума для дискретных систем. Пусть множество

$$Q(x) = \bigcup_{u \in U} (F_0(x, u), f(x, u))$$

является выпуклым для любого $x \in R_n$. Тогда для оптимальности управления $u_0(j)$ и соответствующей ему траектории $x_0(j)$ системы

$$x(j+1) = f(x(j), u(j)), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1, \quad x \in R_n,$$

$$x(0) = x_0, \quad u(j) \in U \subset R_m, \quad x(N) = x_N$$

$$J(u) = \sum_{j=0}^{N-1} F_0(x(j), u(j)) \to \inf_u$$

необходимо существование такого ненулевого вектора $(\psi_{n+1}, \psi(j))$, где постоянная $\psi_{n+1} \leqslant 0$, а вектор $\psi(j)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi(j-1) = \frac{\partial H(x(j), u(j), \psi(j))}{\partial x}, \quad j = (N-1), \ldots, 0,$$

что при любом $j = 0, 1, \ldots, N-1$ справедливы соотношения

$$\max_{u \in U} H(x(j), u, \psi(j)) = H(x_0(j), u_0(j), \psi(j)),$$

$$H(x, u, \psi) = \psi_{n+1} F_0(x, u) + \psi' f(x, u).$$

ГЛАВА VI

ЛИНЕЙНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Для линейных систем рассмотрены задачи об оптимальном быстродействии, управляемости, наблюдаемости и задача построения наблюдателей различных типов.

§ 1. ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ

1. Оценка числа точек переключения. Рассмотрим задачу о наискорейшем переводе линейной системы из начального положения $x(t_0)=x_0$ в конечное положение $x(T)=x_1$.

Пусть уравнения системы имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ x\in R_n,\ u\in R_m,\\ &x(t_0)=x_0,\ x(T)=x_1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где A и B — постоянные матрицы.

Здесь $u=(u_1, u_2, ..., u_m)$ — вектор управлений, удовлетворяющий ограничениям

$$|u_i(t)|\leqslant 1,\ i=1, ..., m. \tag{1.2}$$

Управление $u(t)$ выбирается из условия минимума времени быстродействия $T-t_0$, равного

$$\int_{t_0}^{T} dt\to\inf. \tag{1.3}$$

Необходимые условия оптимальности управления $u_0(t)$ в задаче (1.1)—(1.3) определяются принципом максимума, сформулированным в § 2 гл. V.

Гамильтониан H в задаче (1.1)—(1.3) имеет вид

$$H(x, u, \psi)=\psi'(Ax+Bu),\ \psi\in R_n. \tag{1.4}$$

Принцип максимума содержит требование существования такого ненулевого решения сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-A'\psi(t), \tag{1.5}$$

для которого выполняется условие максимальности, имеющее в данном случае вид

$$\max_{|u_j|\leqslant 1}\psi'(t)Bu=\psi'(t)Bu_0(t). \tag{1.6}$$

Обозначим через b_{ij} $(i=1, ..., n;\ j=1, ..., m)$ элементы матрицы B, а через b_j $(j=1, \quad m)$ — ее столбцы. Ясно, что $b_j=(b_{ij})$ $(i=1, ..., n)$.

Заметим, что

$$\psi'(t)Bu=\sum_{k=1}^{m}u_k\sum_{j=1}^{n}\psi_j b_{jk}. \tag{1.7}$$

Из равенств (1.6) и (1.7) видно, что компонента $u_{0,k}(t)$ оптимального управления $u_0(t)$ должна иметь вид

$$u_{0,k}(t)=\operatorname{sign}\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\,b_{ik}=\operatorname{sign}\psi'(t)b_k,\ \psi'(t)b_k\neq 0. \tag{1.8}$$

Таким образом, компоненты оптимального управления $u_{0,k}$ принимают только значения 1 и -1. Точки, в которых значение $u_{0,k}(t)$ меняется с -1 на 1 или наоборот, называют *точками переключения управления*.

Оценим для оптимального управления $u_0(t)$ количество точек переключения. Ниже предполагается выполненным следующее условие, называемое *условием общности положения*. Оно заключается в том, что все матрицы вида

$$G_j=(b_j, Ab_j, \ldots, A^{n-1}b_j)\ \ (j=1, \ldots, m)$$

являются невырожденными, т. е.

$$\det G_j\neq 0\ \ (j=1, \ldots, m). \tag{1.9}$$

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие общности положения* (1.9). *Тогда каждая компонента $u_{0,k}(t)$ оптимального управления $u_0(t)$ имеет конечное число точек переключения и может принимать только значения* 1 *или* -1.

□ В силу равенства (1.8) число точек переключения для $u_{0,k}(t)$ определяется числом нулей функции $\psi'(t)b_j$, причем $\psi(t)\not\equiv 0$.

Предположим, что функция $\psi'(t)b_j$ имеет бесконечное число нулей на отрезке $[t_0, T]$. Согласно формуле Коши, решение уравнения (1.5) можно записать в виде

$$\psi(t)=e^{-A'(t-t_0)}\psi(t_0),\ \psi'(t)=\psi'(t_0)\,e^{-A(t-t_0)}.$$

Функция

$$\psi'(t)b_j=\psi'(t_0)e^{-A(t-t_0)}b_j\ \ (j=1, \ldots, m)$$

при каждом j является аналитической и имеющей по предположению бесконечное число нулей на $[t_0, T]$. Но тогда она тождественно равна нулю, т. е.

$$\psi'(t)b_j\equiv 0\ \ (j=1, \ldots, m). \tag{1.10}$$

Дифференцируя тождество (1.10) $n-1$ раз по t, получаем

$$\psi'(t_0)\,e^{-A(t-t_0)}G_j\equiv 0,\ (j=1, \ldots, m).$$

В силу условия общности положения (1.9) отсюда следует, что $\psi(t_0)=0$, а значит, и

$$\psi(t)\equiv 0. \tag{1.11}$$

Условие (1.11) противоречит принципу максимума, что и доказывает теорему. ■

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие общности положения* (1.9) *и, кроме того, все собственные значения матрицы A действительны. Тогда число точек переключения каждой из компонент* $u_{0,k}(t)$ *оптимального управления* $u_0(t)$ *не превосходит* $n-1$.

□ Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ различные действительные собственные значения матрицы A, а через $q_1, \ldots, q_k$ — их кратности. Тогда любое решение $\psi(t)$ системы (1.5) можно представить в виде

$$\psi(t)=\gamma_1(t)\,e^{\lambda_1 t}+\ldots+\gamma_k(t)\,e^{\lambda_k t}, \tag{1.12}$$

где $\gamma_i(t)$ — многочлены, степени которых не превосходят q_i-1.

Оценим количество действительных нулей функции (1.12). Для этого воспользуемся методом математической индукции и покажем, что функция

$$\gamma_1(t)\,e^{\lambda_1 t}+\ldots+\gamma_j e^{\lambda_j t} \quad (j=1, \ldots, k)$$

имеет не более $q_1+\ldots+q_j-1$ действительных нулей. При $j=1$ функция $\gamma_1(t)\exp(\lambda_1 t)$ имеет не более q_1-1 нулей, поскольку степень многочлена $\gamma_1(t)$ не превосходит q_1-1. Предположим, что высказанное утверждение справедливо при $j=l-1$, а при $j=l$ уже неверно. Тогда функция

$$\varphi(t)=\gamma_1(t)\,e^{\lambda_1 t}+\ldots+\gamma_l(t)\,e^{\lambda_l t}$$

имеет не менее $q_1+\ldots+q_l$ действительных нулей. Значит, функция

$$\varphi_1(t)=\varphi(t)\,e^{-\lambda_l t}=\gamma_1(t)\,e^{(\lambda_1-\lambda_l)t}+\ldots+\gamma_{l-1}(t)\,e^{(\lambda_{l-1}-\lambda_l)t}+\gamma_l(t)$$

также имеет не менее $q_1+\ldots+q_l$ действительных нулей. Но между двумя нулями функции $\varphi_1(t)$ находится по крайней мере один нуль производной $\dot{\varphi}_1(t)$. Следовательно, дифференцируя q_1 раз функцию $\varphi_1(t)$, заключаем, что число нулей функции $d^{q_l}\varphi_1(t)/dt^{q_l}$ не меньше чем $q_1+\ldots+q_{l-1}$. Однако производная $d^{q_l}\varphi_1(t)/dt^{q_l}$ имеет вид

$$\bar{\gamma}_1(t)\,e^{\lambda_1 t}+\ldots+\bar{\gamma}_{l-1}(t)\,e^{\lambda_{l-1} t},$$

где $\bar{\gamma}_i(t)$ — полиномы, степень которых не выше q_{l-1}.

Согласно предположению индукции, число нулей производной $d^{q_l}\varphi_1(t)/dt^{q_l}$ не больше чем $q_1+\ldots+q_{l-1}-1$. Полученное противоре-

чие и показывает, что функция (1.12) имеет не более $n-1$ действительных нулей. Функции $\psi'(t)\, b_j$ также имеют вид (1.12), а поэтому число действительных нулей каждой функции $\psi'(t) b_j$ $(j=1, ..., m)$ не превосходит $n-1$. ■

Отметим без доказательства следующие утверждения [20]. Из существования допустимого управления вытекает существование и единственность оптимального управления в задаче (1.1)—(1.3). При этом допустимым называется управление, переводящее систему из положения x_0 в x_1 за конечное время. Далее, если матрица A — устойчивая (т. е. все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части) и выполнено условие общности положения, то существует допустимое, а следовательно, и оптимальное управление.

2. Успокоение материальной точки. Рассмотрим задачу о быстрейшем переводе материальной точки единичной массы, движущейся по прямой с начальной скоростью $\dot{x}(0)$, из произвольного начального состояния $x(0)$ в начало координат $x(T)=0$ с нулевой конечной скоростью $\dot{x}(T)=0$.

Обозначим через $x_1(t)$ координату точки, а через $x_2(t)$ — ее скорость. Тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t)=x_2(t),\ \dot{x}_2(t)=u(t),\ t\geqslant 0, \\ &x_1(0)=x(0),\ x_2(0)=\dot{x}(0), \end{aligned} \tag{1.13}$$

а ограничение на управление (движущую силу) — вид

$$|u(t)|\leqslant 1. \tag{1.14}$$

Выбором управления $u(t)$ требуется перевести систему (1.13) в начало координат за минимальное время T, т. е. требуется, чтобы

$$x_1(T)=x_2(T)=0,\ T\to\min. \tag{1.15}$$

В силу равенства (1.4) гамильтониан H есть

$$H(x, u, \psi)=\psi_1 x_2+\psi_2 u.$$

Уравнения (1.5) принимают вид

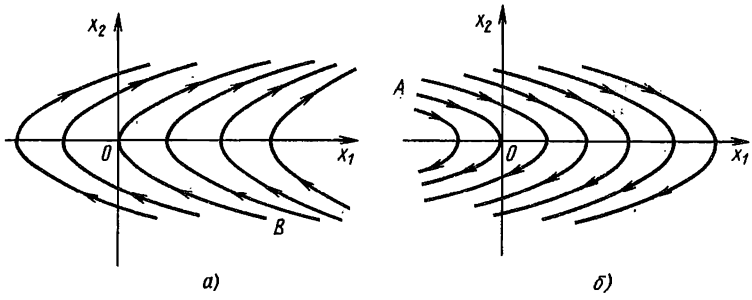
$$\dot{\psi}_1=0,\ \dot{\psi}_2=-\psi_1.$$

Значит,

$$\psi_1=C_1,\ \psi_2=-C_1 t+C_2,\ C_1,\ C_2=\text{const}.$$

Согласно равенству (1.8), оптимальное управление $u_0(t)$ в задаче (1.13)—(1.15) записывается в виде

$$u_0(t)=\operatorname{sign}\psi_2(t)=\operatorname{sign}(-C_1 t+C_2).$$



а) *б)*

Рис. 1.1. Фазовые траектории материальной точки:
а) при $u=1$; б) при $u=-1$

Так как функция $-C_1t+C_2$ является линейной, то оптимальное управление $u_0(t)$ имеет только одну точку переключения и два интервала постоянства, на которых оно равно либо -1, либо 1. Это вытекает также из теоремы 1.2, поскольку матрица

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

имеет два действительных собственных значения $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$.

Если на некотором интервале времени $u_0(t)=1$, то на этом интервале движение системы (1.13) происходит по параболам

$$x_1(t)=C_3+\frac{x_2^2(t)}{2}.$$

При этом движение происходит снизу вверх, поскольку $\dot{x}_2(t)=1>0$ (рис. 1.1, *а*).

Если же $u_0(t)=-1$, то движение происходит сверху вниз по параболам

$$x_1(t)=C_4-\frac{x_2^2(t)}{2}$$

(рис. 1.1, *б*). Постоянные C_3, C_4 определяются начальными условиями для системы (1.13).

Найдем теперь оптимальные траектории. Начала координат можно достигнуть только двигаясь по линиям AO или BO (рис. 1.2). В силу теоремы 1.2 оптимальное управление может иметь только одну точку переключения. Если начальное положение $(x_1(0), x_2(0))$ системы (1.13) лежит выше линии AOB, то $u_0(t)=-1$ до момента τ первого попадания системы на дугу BO. В момент τ управление $u_0(t)$ переключается и равно $u_0(t)=1$, $t\geqslant\tau$ до момента попадания системы в точку (0, 0). При этом движение происходит по дуге BO. Если же начальная точка $(x_1(0), x_2(0))$ лежит ниже AOB, то $u_0(t)=1$ до момента τ_1 первого попадания

системы (1.13) на дугу AO, а при $t \geqslant \tau_1$ управление $u_0(t) = -1$ и движение происходит по дуге AO до момента попадания системы в начало координат. Другим способом достигнуть начала координат не более чем с одной точкой переключения невозможно. Поэтому линия AOB является линией переключения. Оптимальные траектории изображены на рис. 1.2.

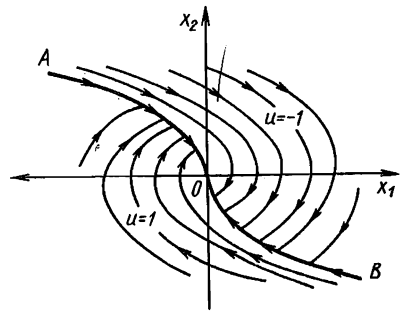


Рис. 1.2. Линия переключения AOB и оптимальные траектории в задаче об оптимальном успокоении материальной точки

Построенное на рис. 1.2 семейство траекторий получено с помощью необходимых условий оптимальности, согласно которым только эти траектории и могут быть оптимальными. Вместе с тем для доказательства оптимальности построенных траекторий необходимо еще доказать существование решения исходной задачи оптимального управления. Соответствующие рассуждения, обосновывающие оптимальность построенных траекторий, см., например, в [20], где приведены также и формулы для времен быстродействия. Обозначим через $V(x_1(0), x_2(0))$ минимальное время достижения системой (1.13) начала координат при условии, что движение системы начинается в момент времени $t=0$ из положения $(x_1(0), x_2(0))$. Тогда если точка $(x_1(0), x_2(0)$ лежит не ниже линии AOB, то

$$V(x_1(0), x_2(0)) = x_2(0) + 2[x_1(0) + x_2^2(0)/2]^{1/2};$$

если же точка $(x_1(0), x_2(0))$ лежит не выше линии AOB, то

$$V(x_1(0), x_2(0)) = -x_2(0) + 2[-x_1(0) + x_2^2(0)/2]^{1/2}.$$

3. Успокоение маятника. Движения маятника в приведенных переменных в окрестности нижнего устойчивого положения равновесия описываются линеаризованным уравнением

$$\ddot{x}(t) + \pi^2 x = \pi u, \quad |u| \leqslant 1,$$

которое эквивалентно системе

$$\dot{x}_1 = \pi x_2, \quad \dot{x}_2 = -\pi x_1 + \pi u, \quad t \geqslant 0, \quad x_1(0) = x_0, \quad x_2(0) = \dot{x}_0. \qquad (1.16)$$

Выбором управления $u(t)$ требуется быстрейшим способом перевести систему из начального положения $(x_0, \dot{x}_0)$ в конечное положение $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

Матрица системы (1.16) записывается в виде

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix},$$

и имеет два мнимых собственных значения $\lambda_1=-\pi i$, $\lambda_2=\pi i$. К системе (1.16) применима теорема 1.1, а теорема 1.2 неприменима.

Найдем оптимальное управление $u_0(t)$ для системы (1.16). Гамильтониан H и уравнения для сопряженных переменных ψ_1, ψ_2 имеют вид

$$H=\psi_1\pi x_2-\psi_2\pi x_1+\psi_2\pi u,\ \dot{\psi}_1=\pi\psi_2,\ \dot{\psi}_2=-\pi\psi_1.$$

Значит, $\psi_2(t)=C_1\sin\pi(t-\alpha)$ и, кроме того,

$$u_0(t)=\operatorname{sign}\psi_2(t)=\operatorname{sign}[C_1\sin\pi(t-\alpha)]. \tag{1.17}$$

Таким образом, значения $u_0(t)$ равны либо 1, либо -1 и переключения происходят через каждую секунду.

При $u=1$ система (1.16) принимает вид

$$\dot{x}_1=\pi x_2,\ \dot{x}_2=-\pi x_1+1. \tag{1.18}$$

Фазовые траектории системы (1.18) представляют собой окружности с центром в точке (1, 0), уравнения которых имеют вид

$$(x_1-1)^2+x_2^2=C_2^2. \tag{1.19}$$

Фазовая точка движется вдоль любой из окружностей (1.19) по часовой стрелке, проходя всю окружность за 2 с (рис. 1.3, *а*). Аналогично, при $u=-1$ фазовыми траекториями служат окружности $(x_1+1)^2+x_2^2=C_3^2$ с центром в точке $(-1, 0)$; любую из этих окружностей фазовая точка обходит по часовой стрелке за 2 с (рис. 1.3, *б*).

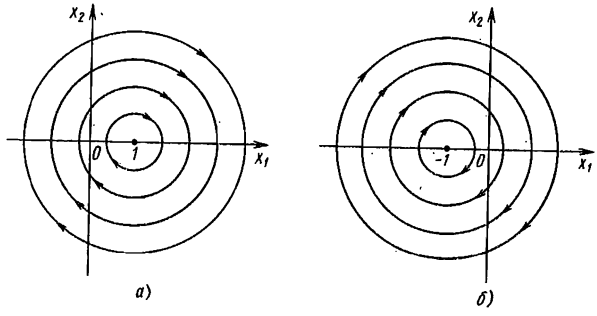


Рис. 1.3. Фазовые траектории системы (1.16): а) при $u=1$; б) при $u=-1$

Согласно формуле (1.17), оптимальное управление строится так, как изображено на рис. 1.4. Соответствующая ему оптимальная траектория получается следующим образом. На конечном отрезке $[3+\alpha, T]$, длина которого меньше 1, точка движется по части окружности N_1O, поскольку это единственный способ попасть в начало координат при управлении $u=-1$. На отрезке $[2+\alpha, 3+\alpha]$ управление $u=1$ и фазовая точка совершает ровно пол-оборота, пока не пересечет окружность M_1M_2. Далее, она совершает еще пол-оборота до пересечения с окружностью N_3N_2 и т. д. Наконец, двигаясь от $t=T$ к $t=0$, точка попадает в начало координат (траектория I на рис. 1.5). Ясно, что на каждой оптимальной траектории имеется свое конечное число точек переключения, зависящее от начальных условий $(x_0, \dot{x}_0)$. Чем больше величина $x_0^2+\dot{x}_0^2$, тем больше число переключений, прежде чем фазовая точка попадает в начало координат. На рис. 1.5 траектория I попадает в начало координат после трех, а траектория II — после двух переключений.

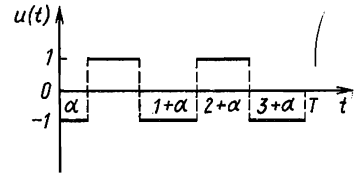


Рис. 1.4. Оптимальное управление для системы (1.16) при $\alpha>0$

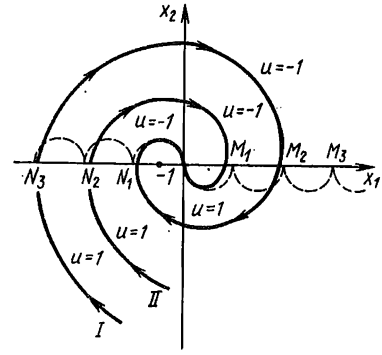


Рис. 1.5. Оптимальные траектории и линия переключения $N_3N_2N_1OM_1M_2M_3$ для системы (1.16)

4. Управление вращением осесимметричным космическим аппаратом [4]. Движение космического аппарата (КА), на котором установлено три пары поворотных двигателей, описывается уравнениями Эйлера

$$A\dot{x}_1=(B-C)\,x_2x_3+M_1\,(t),\quad B\dot{x}_2=(C-A)\,x_1x_3+M_2\,(t),$$
$$C\dot{x}_3=(A-B)\,x_1x_2+M_3\,(t). \qquad (1.20)$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции КА; $M_i\,(t)$ — моменты, создаваемые реактивными двигателями; $x_i\,(t)$ — угловые скорости вращения.

Существует много КА с одной осью симметрии, например «Союз», «Меркурий», «Джеминай», «Аполлон» и др.* Для КА с одной осью симметрии два момента инерции, например A и B, совпадают: $A=B$. Тогда уравнения (1.20) примут вид

*Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974.

$$\dot{x}_1=\frac{A-C}{A}x_2x_3+\frac{M_1(t)}{A},$$
$$\dot{x}_2=\frac{C-A}{A}x_1x_3+\frac{M_2(t)}{A},\quad \dot{x}_3=\frac{M_3(t)}{C}. \tag{1.21}$$

Из уравнений (1.21) видно, что угловой скоростью $x_3(t)$ можно управлять независимо, но благодаря гироскопическому эффекту ее изменения сказываются на скоростях $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Рассмотрим следующую задачу. Для придания КА устойчивости или создания искусственной силы тяжести необходимо поддерживать заданную скорость вращения вокруг оси симметрии $x_3(t)=\xi_3$, при этом два других вращения необходимо возможно быстрее уменьшить до нуля, т. е. $x_1(T)=0$, $x_2(T)=0$. Полагая

$$\omega=\frac{A-C}{A}\xi_3,\quad u_1(t)=\frac{M_1(t)}{A},\quad u_2(t)=\frac{M_2(t)}{A},$$

запишем первые два уравнения (1.21) в виде

$$\dot{x}_1(t)=\omega x_2(t)+u_1(t),\quad |u_1(t)|\leqslant 1,$$
$$\dot{x}_2(t)=-\omega x_1(t)+u_2(t),\quad |u_2(t)|\leqslant 1. \tag{1.22}$$

Для системы (1.22) ставится задача о быстродействии: выбрать управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ так, чтобы за минимальное время T перевести систему (1.22) из произвольного начального состояния $x_1(0)=\xi_1$, $x_2(0)=\xi_2$ в конечное состояние $x_1(T)=x_2(T)=0$. Решение этой задачи во многом аналогично решению задачи об успокоении маятника, но отличие состоит в том, что здесь имеются два управления, а не одно.

Гамильтониан задачи о быстродействии для системы (1.22) имеет вид

$$H=\psi_1(\omega x_2+u_1)+\psi_2(-\omega x_1+u_2).$$

Сопряженные переменные удовлетворяют уравнениям $\dot{\psi}_1=\omega\psi_2$, $\dot{\psi}_2=-\omega\psi_1$ и имеют вид

$$\psi_1(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,\quad \psi_2(t)=-C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t.$$

Оптимальные управления $u_{1,0}(t)$ и $u_{2,0}(t)$ в силу условия максимальности таковы:

$$u_{1,0}(t)=\operatorname{sign}\psi_1=\operatorname{sign}[C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t],$$
$$u_{2,0}(t)=\operatorname{sign}\psi_2=\operatorname{sign}[-C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t].$$

Примерный вид управлений $u_{1,0}(t)$ и $u_{2,0}(t)$ изображен на рис. 1.6. Из рисунка видно, что существует четыре области на плоскости

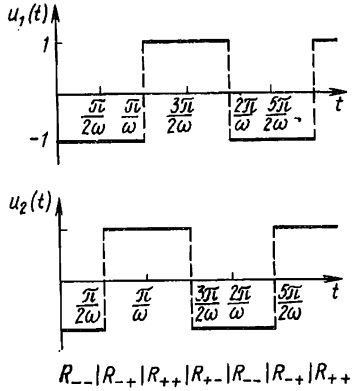


Рис. 1.6. Оптимальные управления u_1 и u_2 в задаче управления вращением КА

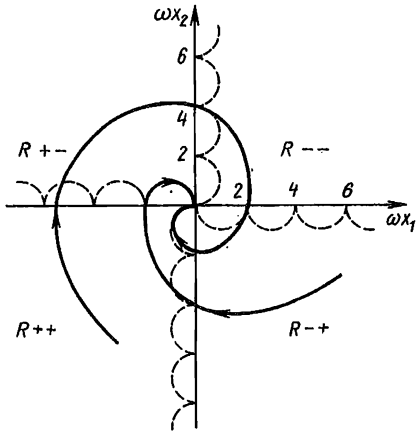


Рис. 1.7. Оптимальные траектории (сплошные линии) и линии переключения (штриховые линии) в задаче об управлении вращением КА

x_1, x_2, где управления постоянны. Обозначим эти области следующим образом:

$$R_{--}=\{u_{1,0}=-1,\ u_{2,0}=-1\},$$
$$R_{+-}=\{u_{1,0}=1,\ u_{2,0}=-1\},$$
$$R_{++}=\{u_{1,0}=1,\ u_{2,0}=1\},$$
$$R_{-+}=\{u_{1,0}=-1,\ u_{2,0}=1\}.$$

Тогда, рассуждая как и в п. 3, можно показать, что линиями переключения между областями R_{--}, R_{+-} и т. д. являются линии, изображенные пунктиром на рис. 1.7. Первый квадрант соответствует области R_{--}, второй — области R_{+-}, третий — области R_{++}, четвертый — области R_{-+}.

Кроме того, на рис. 1.7 изображены оптимальные траектории, составленные из дуг окружностей, и указано время движения фазовой точки.

На рис. 1.8 изображена система ручного управления вращением КА. Такая система отрабатывалась на натурном стенде, и было получено, что после небольшой тренировки космонавт может управлять успокоением КА в оптимальном режиме,

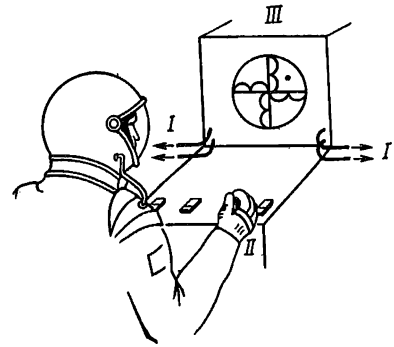


Рис. 1.8. Система ручного управления вращением КА: *I* — входы отклонений по x_1 и x_2; *II* — кнопки ручного управления; *III* — система отображения информации (дисплей)

если для КА его собственная частота ω удовлетворяет условию $\omega<3$ рад/с.

5. Множество управляемости. Задача быстродействия (1.1)—(1.3) разрешима, вообще говоря, не для любых векторов x_0 и x_1. Предположим, что при некотором x_1 перевод системы (1.1) в положение x_1 за конечное время возможен не из любых начальных положений x_0. Тогда возникает задача описания множества управляемости $M(x_1)$ всех тех начальных положений, для которых такой перевод возможен. Считается, что вектор $x_0 \in M(x_1)$, если найдутся такое управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничениям (1.2), и такой конечный момент времени T, что $x(T)=x_1$, где $x(t)$ — решение уравнения (1.1) при управлении $u(t)$ и начальном условии $x(t_0)=x_0$. При этом оптимальное управление в задаче (1.1)—(1.3) может существовать лишь при $x_0 \in M(x_1)$.

Разъясним сказанное подробнее на примере задачи об успокоении маятника в окрестности верхнего положения равновесия. Линеаризованные в окрестности этого положения уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид

$$\dot{x}_1(t)=x_2,\ \dot{x}_2(t)=x_1+u,\ |u|\leqslant 1,\ t\geqslant 0. \tag{1.23}$$

Отметим, что уравнение (1.23) отличается от уравнения (1.15) знаком при x_1. Управление u требуется выбрать таким образом, чтобы за минимально возможное время T привести систему (1.23) из заданного начального состояния в начало координат. Иными словами, оптимальное управление выбирается из условий $x_1(T)=0$, $x_2(T)=0$, $T\to\min$.

В рассматриваемом случае матрицы A, B и (B, AB) системы (1.1) таковы:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ (B, AB)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A действительны: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. Кроме того, выполнено условие общности положения, поскольку ранг матрицы (B, AB) равен двум. Поэтому в силу теоремы 1.2 оптимальное управление кусочно-постоянно, имеет не более двух интервалов постоянства и на каждом из них равно либо 1, либо -1. Впрочем, свойства оптимального управления можно получить и непосредственно из принципа максимума, в соответствии с которым оптимальное управление определяется из условия максимума по u функции $H=\psi_1 x_2+\psi_2(x_1+u)$, откуда $u=\operatorname{sign}\psi_2$. Здесь выражения для сопряженных переменных ψ_1 и ψ_2, удовлетворяющих уравнениям $\dot{\psi}_1=-\psi_2$, $\dot{\psi}_2=-\psi_1$, имеют вид

$$\psi_1=-C_1e^{t}+C_2e^{-t},\ \psi_2=C_1e^{t}+C_2e^{-t},\ |C_1|+|C_2|\neq 0,$$

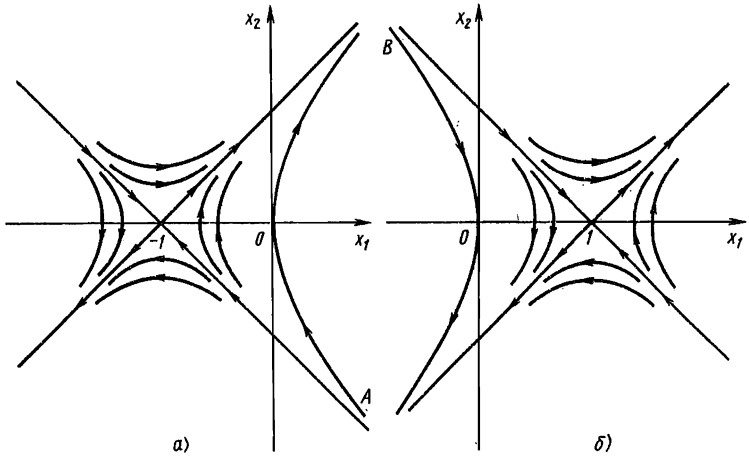


Рис. 1.9. Траектории системы (1.23): а) при $u=1$; б) при $u=-1$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. Значит, функция $\psi_2(t)$ может иметь не более одного нуля, а следовательно, оптимальное управление не более одной точки переключения.

Для построения линии переключения оптимального управления теперь удобно изобразить поле фазовых траекторий системы (1.23) при $u=1$ и при $u=-1$. Если $u=1$, то семейство фазовых траекторий уравнения (1.23) имеет вид $(x_1+1)^2-x_2^2=C$, где C — произвольная постоянная. Указанное семейство есть совокупность гипербол (при $C\neq 0$) и двух прямых $x_2=x_1+1$ и $x_2=-x_1-1$ (при $C=0$), представляющих собой асимптоты этих гипербол (рис. 1.9, *а*). Стрелки на рисунке указывают направление движения фазовой точки, изображающей решение системы (1.23) при возрастании времени t. Точка покоя $(-1, 0)$ системы (1.23) при $u=1$ является седлом. Аналогично, при $u=-1$ семейство фазовых траекторий опи-

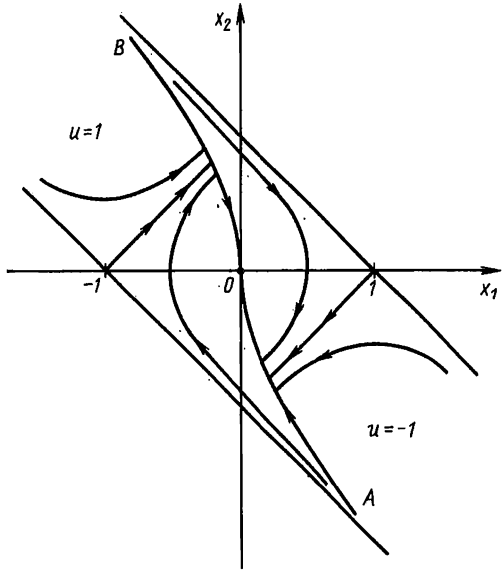


Рис. 1.10. Множество достижимости и линия переключения AOB для системы (1.23)

сывается уравнением $(x_1-1)^2-x_2^2=C$ и изображено на рис. 1.9, *б*. Точка покоя (1, 0) в этом случае также есть седло. Так как оптимальное управление имеет не более одной точки переключения и последний участок оптимальной траектории должен входить в начало координат, то из сравнения фазовых траекторий на рис. 1.9, *а*, *б* вытекает, что линия переключения состоит из дуг гипербол BO при $u=-1$ и OA при $u=1$, проходящих через начало координат.

Окончательно получаем, что множество управляемости есть полоса между прямыми $x_2=x_1-1$ и $x_2=x_1+1$, не содержащая эти прямые. Вид оптимальных траекторий и оптимального управления приведен на рис. 1.10. Оптимальное управление равно -1 над кривой AOB и на дуге BO и равно 1 под кривой AOB и на дуге AO.

§ 2. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Управляемость линейных стационарных систем. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad t\geqslant t_0,\quad x\in R_n,\quad u\in R_m, \tag{2.1}$$

где A и B — постоянные матрицы, имеющие соответственно размеры $n\times n$ и $n\times m$. Ограничения на управление не накладываются. Система (2.1) называется *управляемой* на отрезке $[t_0, t_1]$, где $t_1>t_0$, если для любых векторов $x_0, x_1\in R_n$ найдется такое управление $u(t)$, при котором существует решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$. Иными словами, управляемую систему из произвольного положения x_0 в момент времени t_0 можно перевести в положение x_1 в момент времени t_1 при соответствующем выборе управления. Условия управляемости системы (2.1) зависят от ранга *матрицы управляемости*, имеющей вид

$$K=(B, AB, \ldots, A^{n-1}B). \tag{2.2}$$

Пара матриц (A, B) называется *управляемой*, если ранг матрицы (2.2) равен n.

Теорема 2.1. *Для управляемости системы* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости K был равен n (размерности вектора x).*

□ Необходимость. Предположим, что система (2.1) управляема, но ранг матрицы K меньше n. Тогда найдется такой ненулевой вектор $y\in R_n$, который ортогонален всем столбцам матрицы K, т. е. $y'K=0$. Отсюда следует, что

$$y'B=0,\ y'AB=0,\ \ldots,\ y'A^{n-1}B=0. \tag{2.3}$$

Запишем теперь характеристическое уравнение матрицы A:

$$\det(A-\lambda I)=(-1)^n(\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_n)=0,$$

где α_i — некоторые числа. На основании теоремы Гамильтона — Кэли матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Поэтому

$$A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \ldots - \alpha_n I. \tag{2.4}$$

Умножим обе части равенства (2.4) справа на B и слева на y'. Тогда с учетом соотношений (2.3) получим

$$y'A^nB = -\alpha_1 y'A^{n-1}B - \ldots - \alpha_n y'B = 0.$$

Для $j \geqslant n+1$ аналогично можно показать, что $y'A^jB = 0$. Таким образом, при всех $j \geqslant 0$ окончательно имеем

$$y'A^jB = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{2.5}$$

Согласно формуле Коши, решение уравнения (2.1) с нулевым начальным условием $x(t_0) = 0$ можно представить в виде

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds. \tag{2.6}$$

Разлагая $\exp[A(t-s)]$ в ряд и используя равенство (2.5), при любом управлении $u(t)$ получаем

$$y'x(t) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{2.7}$$

Следовательно, при любом управлении траектории $x(t)$ системы (2.1) лежат в подпространстве из R_n, ортогональном ненулевому вектору y. Значит, для системы (2.1) не все точки достижимы, что противоречит управляемости системы (2.1).

Достаточность. Пусть ранг матрицы управляемости K равен n. Покажем, что в этом случае система (2.1) управляема. Сначала покажем, что множество достижимости Q_1 в момент $t_1 > t_0$ с начальным условием $x(t_0) = 0$ и ограничением на управление $|u_i(t)| \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ имеет размерность n. Нетрудно показать, что, множество Q_1 является компактным и выпуклым. Предположим, что размерность Q_1 меньше n. Тогда найдется ненулевой вектор $y \in R_n$ такой, что $y'x(t_1) = 0$ для любого $x(t_1) \in Q_1$. Иначе говоря,

$$y' \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)} Bu(s)\, ds = 0. \tag{2.8}$$

Из равенства (2.8) и того, что управление $u(t)$ произвольно, находим

$$y'e^{A(t_1-s)}B = 0, \quad t_0 \leqslant s \leqslant t_1. \tag{2.9}$$

Дифференцируя последовательно это выражение по s и полагая $s=t_1$, получим

$$y'B=0,\ y'AB=0,\ \ldots,\ y'A^{n-1}B=0. \tag{2.10}$$

Однако соотношения (2.10) противоречат предположению о том, что ранг матрицы K равен n. Далее, множество Q_1 симметрично относительно начала координат, поскольку наряду с любым управлением $u(t)$ допустимым является также и управление $-u(t)$. Значит, Q_1 содержит внутри себя некоторый шар с центром в начале координат.

Обозначим через Q_r множество достижимости системы (2.1) в момент $t_1>t_0$ с начальным условием $x(t_0)=0$ при управлении $u(t)$, удовлетворяющем ограничению $|u_i(t)|\leqslant r$. Ясно, что $Q_r=rQ_1$. При $r\to\infty$ множество Q_r поглощает любой шар из R_n. Значит, множество достижимости системы (2.1) совпадает со всем R_n. ■

Пример 2.1. Рассмотрим управляемое движение материальной точки на прямой под действием скалярной управляющей силы $u(t)$. Уравнения движения имеют вид $\ddot{x}(t)=u(t)$. Обозначим через $x_1(t)$ координату точки, а через $x_2(t)$ — ее скорость и перепишем уравнения движения в виде

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\ \dot{x}_2(t)=u(t). \tag{2.11}$$

Уравнения (2.11) представимы в форме (2.1), если положить

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Матрица K в силу равенства (2.2) имеет вид

$$K=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Значит, ранг матрицы K равен 2, т. е. движение материальной точки управляемо.

Замечания. 1. Пусть ранг матрицы B равен k. Тогда необходимое и достаточное условие управляемости системы (2.1) состоит в том, что ранг матрицы $(B,\ AB,\ \ldots\ A^{n-k}B)$ равен n.

2. Условие управляемости из теоремы 2.1, вообще говоря, слабее условия общности положения (1.9). В случае скалярного управления эти два условия эквивалентны.

3. Критерий управляемости, приведенный в теореме 2.1, установлен в предположении, что ограничения на управление отсутствуют. Представляют интерес аналоги критериев управляемости при наличии ограничений на управление. Ниже приве-

ден один из них для случая, когда управление $u(t)$ удовлетворяет ограничению $|u(t)| \leqslant C$, где $C>0$ — заданная постоянная. Подчеркнем, что при наличии ограничения $|u(t)| \leqslant C$ условия теоремы 2.1 для управляемости системы (2.1) недостаточны. Действительно, если все собственные значения матрицы A лежат в левой полуплоскости, то при любом начальном положении x_0 и любом управлении система (2.1) остается внутри некоторой ограниченной области. Напротив, если все собственные значения матрицы A лежат в правой полуплоскости, то ни при каком управлении нельзя достичь начала координат, если только начальное положение x_0 достаточно удалено от него. В обоих этих случаях система (2.1) неуправляема.

Приведем один критерий управляемости при наличии ограничений*.

Для управляемости системы (2.1) *при наличии ограничения* $|u(t)| \leqslant C$, $C>0$ *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы* (2.2) *был равен* n *и, кроме того, чтобы все собственные значения матрицы* A *лежали на мнимой оси.*

2. Управляемость линейных нестационарных систем. Приведем достаточные условия управляемости линейных нестационарных систем

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ x\in R_n,\ u\in R_m. \tag{2.12}$$

Предполагается, что матрицы $A(t)$ и $B(t)$ непрерывно дифференцируемы до порядка $n-1$ включительно в окрестности некоторой точки $\tau\in[t_0, t_1]$. Пусть матрицы $K_i(t)$ определяются следующими соотношениями:

$$K_1(t)=B(t),\ K_i(t)=A(t)K_{i-1}(t)-\frac{dK_{i-1}(t)}{dt},\ i=2, \ldots, n.$$

Теорема 2.2 [15]. *Если существует такая точка* $\tau\in[t_0, t_1]$, *в которой ранг матрицы*

$$K=(K_1, \ldots, K_n)$$

равен n, *то система* (2.12) *управляема на интервале времени* $[t_0, t_1]$.

□ Доказательство данной теоремы совпадает с доказательством достаточности в теореме 2.1, в котором нужно лишь модифицировать формулы (2.8)—(2.10) следующим образом. В соответствии с формулой Коши вместо (2.8) справедливо равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} y'Z(t, s)B(s)u(s)\,ds=0,$$

*Овсеевич А. И. О полной управляемости линейных систем // ПММ, 1989. Т. 53. Вып. 5.

где $Z(t, s)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$. Соотношение (2.9) в рассматриваемом случае принимает вид

$$y'Z(t_1, s)B(s)\equiv 0,\ t_0\leqslant s\leqslant t_1.$$

Дифференцируя последовательно это тождество по s и полагая $s=\tau$, получим цепочку равенств $y'_1K_1(\tau)=0$, ..., $y'_1K_n(\tau)=0$, $y_1=Z'(t_1, s)y$, противоречащую полноте ранга матрицы (2.13). Рассуждая далее так же, как и при доказательстве теоремы 2.1, убеждаемся в справедливости теоремы 2.2. ■

Приведем еще необходимые и достаточные условия управляемости системы (2.12) на отрезке $[t_0, t_1]$ в предположении, что матрицы $A(t)$ и $B(t)$ только лишь непрерывны при $t\in[t_0, t_1]$. Эти условия формулируются в терминах матрицы $W(t_0, t)$, равной $W(t_0, t)=\int_{t_0}^{t} Z(t_0, s)B(s)B'(s)Z'(t_0, s)\,ds$, где матрица Коши $Z(t, s)$ определяется соотношением (1.5) из гл. IV. Из определения матрицы $W(t_0, t)$ видно, что она всегда неотрицательно определена при $t_0\leqslant t$.

Теорема 2.3. *Для управляемости системы* (2.12) *на отрезке* $[t_0, t]$ *необходимо и достаточно, чтобы матрица* $W(t_0, t_1)$ *была положительно определена.*

□ Достаточность. Пусть x_0 и x_1 — две произвольные точки из R_n. Установим формулу для управления $u(t)$, под действием которого система (2.12) переходит из положения $x_0=x(t_0)$ в положение $x_1=x(t_1)$. В силу формулы Коши (1.7) из гл. IV

$$x(t)=Z(t, t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} Z(t, s)B(s)u(s)\,ds.$$

Так как в силу условия теоремы матрица $W^{-1}(t_0, t_1)$ существует, то положим

$$u(t)=-B'(t)Z'(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)[x_0-Z(t_0, t_1)x_1].$$

Покажем, что под действием этого управления система (2.12) переходит из начального положения $x_0=x(t_0)$ в конечное положение $x_1=x(t_1)$. С учетом формул (1.8) из гл. IV получаем

$$x(t_1)=Z(t_1, t_0)x_0-\int_{t_0}^{t_1} Z(t_1, s)B(s)B'(s)Z'(t_0, s)\,ds\times$$

$$\times W^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - Z(t_0, t_1)x_1] = Z(t_1, t_0)x_0 - Z(t_1, t_0)\times$$

$$\times \int_{t_0}^{t_1} Z(t_0, s)B(s)B'(s)Z'(t_0, s)\,ds\, W^{-1}(t_0, t_1)\times$$

$$\times [x_0 - Z(t_0, t_1)x_1] = x_1.$$

Необходимость. Согласно определению матрицы $W(t_0, t_1)$, она является неотрицательно определенной при $t_1 > t_0$. Поэтому для обоснования ее положительной определенности достаточно лишь установить, что равенство $x_0' W(t_0, t_1)x_0 = 0$ возможно только при $x_0 = 0$. Предположим противное, т. е. будем считать, что система (2.12) управляема на отрезке $[t_0, t_1]$, но матрица $W(t_0, t_1)$ вырождена. Тогда найдется такой ненулевой вектор $x_0 \in R_n$, что $x_0' W(t_0, t_1)x_0 = 0$. Поскольку система (2.12) управляема на отрезке $[t_0, t_1]$, существует управление $u(t)$, переводящее ее из положения $x(t_0) = x_0$ в положение $x(t_1) = 0$. Поэтому

$$x(t_1) = Z(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} Z(t_1, s)B(s)u(s)\,ds = 0.$$

Следовательно, учитывая соотношения (1.8) из гл. IV, имеем

$$x_0 = -Z^{-1}(t_1, t_0)\int_{t_0}^{t_1} Z(t_1, s)B(s)u(s)\,ds =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} Z(t_0, s)B(s)u(s)\,ds. \qquad (2.13)$$

Заметим теперь, что

$$0 = x_0' W(t_0, t_1)x_0 = x_0' \int_{t_0}^{t_1} Z(t_0, s)B(s)B'(s)Z'(t_0, s)\,ds\, x_0 =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \|B'(s)Z'(t_0, s)x_0\|^2\,ds.$$

Поэтому вектор $B'(s)Z'(t_0, s)x_0 \equiv 0$, $t_0 \leqslant s \leqslant t_1$. Значит, $x_0' Z(t_0, s)B(s)u(s) \equiv 0$. Таким образом, $0 = x_0' \int_0^T Z(t_0, s)B(s)u(s)\,ds$. Отсюда и из (2.13) вытекает, что

$$x'_0 x_0 = -x'_0 \int_{t_0}^{t_1} Z(t_0, s)\, B(s)\, u(s)\, ds = 0.$$

Однако последнее равенство невозможно, поскольку оно противоречит предположению о том, что x_0 — ненулевой вектор. ■

Из теоремы 2.3 и определения матрицы $W(t_0, t_1)$ вытекает, что если система (2.12) управляема на некотором отрезке $[t_0, t_1]$, то она управляема и на любом другом отрезке $[t_0, t_2]$ при $t_2 > t_1$.

Дифференцируя обе части формулы, определяющей матрицу $W(\tau, t)$, по τ и принимая во внимание соотношения (1.8) из гл. IV, получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial W(\tau, t)}{\partial \tau} = A(\tau) W(\tau, t) + W(\tau, t) A'(\tau) - B(\tau) B'(\tau), \quad W(t, t) = 0.$$

3. Канонический вид линейных стационарных систем управления. Рассмотрим снова линейную систему (2.1) с постоянными матрицами A и B. Предположим, что ранг матрицы (2.2) равен j, причем $j \leqslant n$. Покажем, что в этом случае существует такая замена переменных $x = Ty$ (где T — невырожденная матрица размера $n \times n$), при которой последние $n-j$ координат $y_{j+1}, \ldots, y_n$ вектора y не зависят ни от управления, ни от значений предшествующих координат $y_1, \ldots, y_j$. Обозначим через $k_1, \ldots, k_j$ линейно независимые столбцы матрицы K. Матрица преобразования T в качестве первых j столбцов имеет векторы $k_1, \ldots, k_j$. Остальные $n-j$ столбцов этой матрицы выбираются произвольно с тем лишь условием, чтобы полученная в результате матрица T была невырожденной. Из уравнения (2.1) следует, что

$$\dot{y}(t) = T^{-1}ATy + T^{-1}Bu. \tag{2.14}$$

Теорема 2.4. *Для матриц $T^{-1}AT$ и $T^{-1}B$ в уравнении (2.14) справедливы представления*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_1 & A_3 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0_2 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Здесь матрица A_1 имеет размер $j \times j$; матрица A_2 — размер $j \times (n-j)$; матрица A_3 — размер $(n-j) \times (n-j)$; матрица B_1 — размер $j \times m$. Через 0_1 и 0_2 в (2.15) обозначены нулевые матрицы размерностей $(n-j) \times j$ и $(n-j) \times m$. Кроме того, ранг матрицы

$$(B_1, A_1 B_1, \ldots, A_1^{j-1} B_1) \tag{2.16}$$

равен j.

□ Обозначим через N_j подпространство пространства R_n, представляющее собой линейную оболочку элементов $k_1, \ldots, k_j$. Подпро-

странство N_j является инвариантным для системы (2.1) (см. [15]). Последнее означает, что если $x(t_0) \in N_j$, то решение $x(t)$ уравнения (2.1) с начальным условием $x(t_0)$ при всех t и произвольном управлении $u(t)$ принадлежит N_j. Относительно новых переменных $y(t)$ уравнения пространства N_j имеют вид

$$y_{j+1}=0, \ldots, y_n=0.$$

Действительно, если вектор $y=(y_1, \ldots, y_j, 0, \ldots, 0)$, то соответствующий ему вектор x в силу определения матрицы преобразования T равен $x=y_1k_1+\ldots+y_jk_j$, т. е. в этом случае $x \in N_j$. Отсюда и из инвариантности множества N_j следует, что если

$$y_i(t_0)=0 \quad (i=j+1, \ldots, n), \tag{2.17}$$

то и при всех t для решения $y(t)$ системы (2.14) с этим начальным условием при любом управлении должно быть

$$y_i(t)=0 \quad (i=j+1, \ldots, n). \tag{2.18}$$

Предположим теперь, что представление (2.15) не имеет места. Тогда либо (i, q)-й элемент матрицы $T^{-1}AT$ отличен от нуля при $i \geqslant j+1$, $q<j+1$, либо (i, l)-й элемент матрицы $T^{-1}B$ отличен от нуля при $i \geqslant j+1$, $l=1, \ldots, m$. В любом из этих случаев существует такое управление $u(t)$, что соответствующее ему решение уравнения (2.14) с начальным условием (2.17) в некоторый момент времени $t \neq t_0$ будет удовлетворять неравенству $y_j(t) \neq 0$ для некоторого $i>j$. Однако это противоречит равенству (2.18). Тем самым представление (2.15) установлено.

Покажем теперь, что ранг матрицы (2.16) равен j. Рассмотрим матрицу $Q_1=T^{-1}K$. На основании соотношений (2.2), (2.15) имеем

$$Q_1=\begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 \ldots A_1^{j-1}B_1 \ldots A_1^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix},$$

где 0 — нулевые матрицы.

Так как матрица T — невырожденная, то ранг матрицы Q_1 равен рангу матрицы K, т. е. равен j. Кроме того, m линейно независимых столбцов матрицы K содержатся в матрице $(B, AB, \ldots, A^{j-1}B)$ [15, с. 139].

Значит, в силу определения матрицы Q_1 ее j линейно-независимых столбцов должны содержаться в матрице

$$\begin{pmatrix} B_1 \ldots A_1^{j-1}B_1 \\ 0 \qquad 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг матрицы Q_1 равен j, отсюда следует, что и ранг матрицы (2.16) также равен j. ■

Из теоремы 2.4 вытекает, что если вектор y представить в виде $y=(z_1, z_2)$, где $z_1 \in R_j$, $z_2 \in R_{n-j}$, то в силу (2.14), (2.15) для компонент z_i справедливы уравнения

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + A_2 z_2 + B_1 u, \quad \dot{z}_2 = A_3 z_2$$

с начальными условиями $\begin{pmatrix} z_1(t_0) \\ z_2(t_0) \end{pmatrix} = T^{-1} x(t_0)$.

Таким образом, компоненты z_2 вектора y не зависят ни от управления u, ни от z_1 и могут быть вычислены заранее в виде функции времени. Подставляя их в уравнение для z_1, получим неоднородное уравнение.

Предположим, что система (2.1) управляема, $u(t)$ — скалярное управление и B — вектор-столбец. Запишем характеристический полином матрицы A в виде

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n.$$

Рассмотрим далее совокупность векторов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, где

$$\gamma_1 = (A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \ldots + \alpha_n) B, \ \ldots, \ \gamma_{n-1} = (A + \alpha_1) B, \ \gamma_n = B.$$

Из предположения об управляемости системы (2.1) вытекает, что векторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ образуют базис в пространстве R_n.

Пусть L — невырожденная матрица перехода от исходного базиса к базису $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Положим $x(t) = Ly(t)$. Тогда

$$\dot{y}(t) = L^{-1} A L y + L^{-1} B u, \tag{2.19}$$

причем

$$L^{-1}AL = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, система (2.1) эквивалентна уравнению n-го порядка относительно $y_1(t)$, имеющему вид

$$y_1^{(n)}(t) + \alpha_1 y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_n y_1(t) = u(t), \quad y_1^{(i)}(t) = \frac{d^i y_1(t)}{dt^i}. \tag{2.20}$$

Значит, система (2.1) со скалярным управлением, удовлетворяющая условию управляемости, может быть сведена к одному уравнению n-го порядка вида (2.20).

4. Канонический вид линейных нестационарных систем управления. Опишем канонический вид системы (2.12) с переменными коэффициентами в предположении, что $u(t)$ — скалярное управление, $B(t)$ — вектор-столбец, ранг матрицы K, определенной в теореме 2.2, равен

n при всех $t\in[t_0, t_1]$. Определим последовательно следующие операторы и матрицы:

$$\Delta=A(t)-\frac{d}{dt},\ \alpha=K^{-1}\Delta^n B,$$

$$e_1=(1, 0, ..., 0)',\ e_{n-1}=(0, ..., 0, 1, 0)',\ e_i\in R_n,\ i=1, ..., n-1,$$

$$A_1=(\alpha, e_1, ..., e_{n-1}),\ \Delta_1=A'_1+\frac{d}{dt},$$

$$D=(e_1, \Delta_1 e_1, ..., \Delta_1^{n-1}e_1),\ F(t)=DK^{-1}.$$

Далее положим $z(t)=F(t)x(t)$. Тогда для функции $z(t)$ справедливо уравнение*

$$\dot z(t)=A_0(t)z(t)+B_0(t)u,\ z\in R_n,\ u\in R_1.$$

Здесь

$$A_0(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1\\ a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & a_n(t)\end{pmatrix},\ B_0(t)=(0, 0, ..., 0, 1)',$$

$$A_0(t)=F(t)A(t)F^{-1}(t)+\dot F(t)F^{-1}(t).$$

Эту систему, как и в п. 3, можно записать в виде одного уравнения n-го порядка относительно $z_1(t)$, которое имеет вид

$$z_1^{(n)}(t)+a_1(t)z_1^{(n-1)}(t)+...+a_n(t)z_1(t)=u(t).$$

5. Критерий управляемости Хаутуса.** В ряде задач для проверки управляемости системы можно использовать спектральный критерий Хаутуса.

Теорема 2.5. *Для управляемости системы* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы для любого комплексного числа λ ранг матрицы $(A-\lambda I, B)$ был равен n.*

Приведенный критерий управляемости можно сформулировать в следующем эквивалентном виде: *для управляемости системы* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы для любого комплексного числа λ уравнение*

$$x'(A-\lambda I, B)=0,\ x\in R_n,$$

или эквивалентная ему система двух уравнений

$$x'A=\lambda x',\ x'B=0$$

имели единственное решение $x=0$.

---

*Филимонов Н. Б. Управление фазовыми траекториями в линейных конечномерных нестационарных объектах // Тем. сб. научн. тр. МВТУ им. Баумана, 1979, № 297.

**Этот пункт и п. 2 § 3 написан совместно с С. М. Лавреновым.

□ Необходимость. Предположим, что система (2.1) управляема, но данная теорема неверна. Тогда существуют такое число λ и ненулевой вектор $x \in R_n$, что

$$x'A = \lambda x', \; x'B = 0, \; x' \neq 0.$$

Отсюда следуют равенства

$$x'AB = \lambda x'B = 0,$$
$$x'A^2B = x'AAB = \lambda x'AB = 0,$$

$$x'A^{n-1}B = x'AA^{n-2}B = \lambda x'A^{n-2}B = 0.$$

Значит, с учетом (2.2)

$$x' \, (B, \, AB, \, ..., \, A^{n-1}B) = 0 = x'K, \; x' \neq 0.$$

Однако последнее уравнение $x'K = 0$ должно иметь только нулевое решение $x = 0$, поскольку ранг матрицы управляемости K в силу теоремы 2.1 равен n. Это противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Предположим, что условия теоремы выполнены, но система (2.1) неуправляема. Тогда ранг матрицы (2.2) равен j, где $j < n$. Приведем систему (2.1) с помощью невырожденного преобразования T к виду (2.14), (2.15). Рассмотрим матрицу A_3 из представления (2.15), размер которой равен $(n-j) \times (n-j)$. Обозначим через $x_0 \in R_{n-j}$ ненулевой собственный вектор матрицы A_3', а через λ — соответствующее ему собственное значение, т. е. $A_3 x_0 = \lambda x_0$, $x_0 \neq 0$. Пусть, далее, $(0, \, x_0')$ — вектор-строка, первые j компонент которого равны нулю. Тогда с учетом (2.15) имеем

$$(0, \, x_0') \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O_1 & A_3 \end{pmatrix} = (0, \, x_0' A_3) = (0, \, \lambda x_0'); \; (0, \, x_0') \begin{pmatrix} B_1 \\ O_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Перепишем последние соотношения в виде

$$(0, \, x_0') \, T^{-1} A T = \lambda \, (0, \, x_0'), \; (0, \, x_0') = T^{-1} B = 0.$$

Отсюда следует существование ненулевого вектора $x' = (0, \, x_0') \, T^{-1}$ и числа λ, удовлетворяющих равенствам $x'A = \lambda x'$, $x'B = 0$. Однако последние равенства, противоречат условиям теоремы. ■

Замечание. Теорему 2.5 можно переформулировать следующим образом: для управляемости системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы для всех собственных значений λ_i ($i = 1, \, ..., \, n$) матрицы A ранг матрицы $(A - \lambda I, \; B)$ был равен n. Это следует из того, что уравнение $x'A = \lambda x'$ может иметь ненулевое решение только тогда, когда λ совпадает с одним из собственных значений λ_i ($i = 1, \, ..., \, n$).

Приведем примеры использования теоремы 2.5.

Пример 2.2. Пусть A — диагональная матрица с элементами λ_i на главной диагонали. Покажем, что система $\dot{x}=Ax+Bu$ управляема тогда и только тогда, когда все строки матрицы B ненулевые, а строки B, отвечающие одинаковым диагональным элементам матрицы A, линейно независимы.

Введем матрицу

$$S(\lambda)=(A-\lambda I,\ B)=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1m}\\ 0 & \lambda_2-\lambda & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n-\lambda & b_{n1} & \dots & b_{nm}\end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 2.5 необходимое и достаточное условие управляемости состоит в том, что для любого комплексного λ ранг матрицы $S(\lambda)$ равен n. Пусть $\lambda=\lambda_i$. Если соответствующая строка матрицы B нулевая, то нулевой становится вся строка $S(\lambda_i)$ и ранг $S(\lambda_i)$ заведомо меньше n. Если же $\lambda_i=\lambda_j$ $(i\neq j)$, то при $\lambda=\lambda_i=\lambda_j$ строки являются линейно независимыми, когда i-я и j-я строки матрицы B линейно независимы.

Пример 2.3. Покажем, что из управляемости пары (A, B) следует управляемость пары $(A+\eta I, B)$ для любого числа η.

На основании теоремы 2.5 достаточно показать, что для любого комплексного λ_1 ранг матрицы $(A+\eta I-\lambda_1 I, B)$ равен n. Из управляемости пары (A, B) следует, что для любого λ ранг матрицы $(A-\lambda I, B)$ также равен n. Но при $\lambda=\lambda_1-\eta$ имеем $(A+\eta I-\lambda_1 I, B)=(A-\lambda I, B)$. Значит, ранг матрицы $(A+\eta I-\lambda_1 I, B)$ для любого λ_1 равен n, т. е. пара $(A+\eta I, B)$ управляема.

Пример 2.4. Покажем, что из управляемости системы

$$\dot{x}=Ax+bu,\ x\in R_n,\ u\in R_1$$

следует управляемость системы

$$\dot{x}=Ax+b\mathrm{v},\ \dot{\mathrm{v}}=C'x+\alpha\mathrm{v}+u,\ \mathrm{v}\in R_1.$$

Здесь A — постоянная матрица, b и C — постоянные векторы из R_n, α — заданное число.

Обозначим через S_n матрицу $S_n(\lambda)=(A-\lambda I, b)$ размера $n\times(n+1)$. Покажем, что ранг матрицы

$$S_{n+1}(\lambda)=\begin{pmatrix}S_n(\lambda) & 0\\ C & \alpha-\lambda\ \ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-\lambda I & b & 0\\ C & \alpha-\lambda & 1\end{pmatrix}.$$

равен $n+1$. Здесь матрица $S_{n+1}(\lambda)$ размера $(n+1)\times(n+2)$ получена из S_n добавлением одной строки, образованной компонентами $(c_1, \dots, c_n)$ вектора C, числами $\alpha-\lambda$ и 1, а также одного столбца,

все элементы которого равны нулю, кроме последнего, равного единице.

Поскольку пара (A, b) управляема, ранг матрицы $S_n(\lambda)$ равен n. Значит, строки матрицы $S_n(\lambda)$ линейно независимы, а потому линейно независимы первые n строк матрицы $S_{n+1}(\lambda)$. Последняя строка матрицы $S_{n+1}(\lambda)$ линейно независима от ее первых n строк, так как их последние элементы — нулевые, а последний элемент $(n+1)$-й строки — единичный. Следовательно, ранг матрицы $S_{n+1}(\lambda)$ равен $n+1$.

6. Управляемость двухзвенного манипулятора. Рассмотрим двухзвенный манипулятор (рис. 2.1), состоящий из двух абсолютно твердых тел Q_1 и Q_2 с массами m_1 и m_2, которые скреплены друг с другом с помощью шарнира O_2 и с неподвижным основанием с помощью шарнира O_1. Оси шарниров параллельны. Манипулятор может двигаться в плоскости, перпендикулярной осям шарниров. Управление манипулятором происходит благодаря моментам u_1 и u_2, приложенным к осям шарниров O_1 и O_2. Предположим, что звено Q_2 манипулятора статически уравновешено, т. е. его центр масс расположен на оси O_2. Тогда уравнения движения манипулятора имеют вид

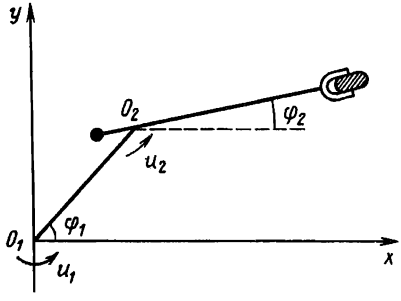


Рис. 2.1. Двухзвенный плоский манипулятор

$$(I_1+m_2L^2)\ddot{\varphi}_1=u_1-u_2,\ I_2\ddot{\varphi}_2=u_2. \quad (2.21)$$

Здесь φ_1 — угол между звеном Q_1 и осью O_1x неподвижной системы координат O_1xy; φ_2 — угол между Q_2 и Q_1x; L — расстояние между осями шарниров O_1 и O_2; I_1 и I_2 — моменты инерции звеньев Q_1 и Q_2 относительно осей O_1 и O_2 соответственно. Введя переменные $x_1=(I_1+m_2L^2)^{1/2}\varphi_1$, $x_3=I_2^{1/2}\varphi_2$, $x_2=(I_1+m_2L^2)^{1/2}\dot{\varphi}_1$, $x_4=I_2^{1/2}\dot{\varphi}_2$, запишем систему (2.21) в виде

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=u_1-u_2,\ \dot{x}_3=x_4,\ \dot{x}_4=u_2. \quad (2.22)$$

Система (2.22) имеет вид (2.1), где матрицы A и B таковы:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Матрица управляемости K системы (2.22) имеет размер 4×8:

$$K=(B,\ AB,\ a^2B,\ A^3B)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Первые четыре столбца этой матрицы линейно независимы, поскольку

$$\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=-1.$$

Так как ранг матрицы B равен 2, то в соответствии с замечанием 1 из п. 1 можно было бы ограничиться определением только ранга матрицы $(B,\ AB)$, который равен 4. Следовательно, система (2.22) управляема.

Этот же вывод можно сделать, используя критерий управляемости из теоремы 2.5. Действительно, все собственные значения матрицы A равны нулю. Далее, матрица $(A-\lambda I,\ B)$ при $\lambda=0$ принимает вид

$$(A,\ B)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы вследствие линейной независимости 2, 4, 5 и 6-го столбцов равен 4. Поэтому в силу замечания к теореме 2.5 система (2.22) управляема.

Покажем теперь, что система (2.22) неуправляема, если управление происходит только с помощью одного вращающего момента u_2. В этом случае матрицы B и $K=(B,\ AB,\ A^2B,\ A^3B)$ имеют вид

$$B=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку 2-й и 4-й столбцы матрицы K совпадают, ее ранг меньше 4. Значит, система (2.22) только при использовании одного управления u_2 неуправляема.

Исследование управляемости системы (2.22) в этом случае также можно осуществить с помощью теоремы 2.5. Так как все собственные значения матрицы A равны нулю, то для этого достаточно определить ранг матрицы (A, B), имеющей вид

$$(A, B)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 3. Значит, в силу теоремы 2.5 система (2.22) неуправляема при использовании лишь одного вращающего момента u_2.

§ 3. НАБЛЮДЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ. НАБЛЮДАТЕЛИ

1. Постановка задач наблюдения. Двойственность задач управления и наблюдения. Условия наблюдаемости. При исследовании эволюции во времени динамической системы, а также для построения С-управления необходимо уметь определять вектор состояния системы (фазовый вектор). Однако в реальных ситуациях непосредственное измерение фазового вектора затруднительно либо по техническим причинам, либо из-за невозможности проведения процесса наблюдения, либо вследствие чрезмерно высокой его стоимости. Следует также учитывать ошибки в канале наблюдений, затрудняющие определение фазового вектора. Задачи оценивания вектора состояний системы с учетом помех в измерительных устройствах изучаются в третьей части книги. Здесь же рассмотрим случай, когда указанные ошибки отсутствуют.

Предполагается, что движение системы описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t),\ x(t)\in R_n, \tag{3.1}$$

где матрица $A(t)$ известна, а вектор $x(t)$ непосредственному измерению недоступен. Наблюдаемый вектор $y(t)$ связан с вектором $x(t)$ соотношением

$$y(t)=Q(t)x(t),\ y\in R_l. \tag{3.2}$$

Здесь заданная матрица $Q(t)$ называется *матрицей состава измерений*. Она определяет, какие именно линейные комбинации вектора состояний $x(t)$ доступны измерению. Рассматриваемые задачи наблюдения состоят в определении некоторых функций координат x по результатам измерений (3.2).

Для определенности рассмотрим следующую задачу. Пусть измерения вектора $y(t)$ произведены на отрезке $[t_0, t_1]$. Требуется

построить такой линейный функционал от $y(t)$, где $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, чтобы восстановить значение $\alpha' x(t_1)$, где α — заданный вектор из R_n. Иными словами, требуется найти такую функцию $\gamma(t) \in R_l$, при которой

$$\int_{t_0}^{t_1} \gamma'(t) y(t)\, dt = \alpha' x(t_1). \tag{3.3}$$

Придавая вектору α конкретные значения, из равенства (3.3) получаем выражения для соответствующих комбинаций компонент вектора $x(t_1)$. В частности, если i-я компонента вектора α есть $\alpha_i = 1$, а все остальные $\alpha_j = 0$ $(j \neq i)$, то соотношение (3.3) определяет величину i-й компоненты $x_i(t)$ фазового вектора $x(t)$. Обозначим через $Z(t, s)$ матрицу Коши уравнения $\dot{x}(t) = A(t) x(t)$. Тогда на основании формулы Коши имеем $x(t) = Z(t, t_1) x(t_1)$. Поэтому

$$y(t) = Q(t) x(t) = Q(t) Z(t, t_1) x(t_1).$$

Подставляя это значение $y(t)$ в (3.3), получаем, что при произвольном значении $x(t_1)$ должно иметь место соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} \gamma'(t) y(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \gamma'(t) Q(t) Z(t, t_1)\, dt\, x(t_1) = \alpha' x(t_1).$$

Так как $x(t_1)$ — произвольный вектор, то функция $\gamma(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{t_0}^{t_1} Z'(t, t_1) Q'(t) \gamma(t)\, dt = \alpha. \tag{3.4}$$

Рассмотрим теперь вспомогательную управляемую линейную систему

$$\begin{aligned} &\dot{\beta}(t) = A_1(t) \beta(t) + B(t) u(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ &\beta(t_0) = \beta_0, \quad \beta(t_1) = \beta_1, \quad \beta \in R_n, \quad u \in R_l. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь $A_1(t)$ и $B(t)$ — некоторые матрицы, которые будут выбраны ниже. Требуется перевести систему (3.5) из заданного начального положения $\beta(t_0) = \beta_0$ в заданное конечное положение $\beta(t_1) = \beta_1$.

Поставленная задача сводится к определению управления $u(t)$ из уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} Z_1(t_1, t) B(t) u(t)\, dt = \beta_1 - Z(t_1, t_0) \beta_0. \tag{3.6}$$

Здесь $Z_1(t, s)$ — матрица Коши решений уравнения $\beta(t) = A_1(t)\beta(t)$. Итак, задача наблюдения сведена к решению интегрального уравнения (3.4) относительно функции $\gamma(t)$, а вспомогательная задача управления — к решению интегрального уравнения (3.6) относительно управления $u(t)$. Выберем теперь матрицы $A_1(t)$ и $B(t)$ в (3.5) так, чтобы уравнения (3.4) и (3.6) оказались эквивалентными. Сравнивая (3.4) и (3.6), сразу заключаем, что если $\alpha = \beta_1 - Z(t_1, t_0)\beta_0$, то должно быть $B(t) = Q'(t)$ и $Z'(t, t_1) = Z_1(t_1, t)$. Из последнего соотношения найдем выражение для $A_1(t)$. В силу свойств (1.8) гл. IV матрицы Коши имеем

$$Z'(t, t_1) = Z_1(t_1, t) = Z_1^{-1}(t, t_1).$$

Дифференцируя по t обе части этого равенства, на основании указанных свойств получаем

$$\frac{\partial Z'(t, t_1)}{\partial t} = Z'(t, t_1) A'(t) = \frac{\partial Z_1^{-1}(t, t_1)}{\partial t} = -Z_1^{-1}(t, t_1) A_1(t).$$

Следовательно,

$$Z'(t, t_1) A'(t) = -Z_1(t_1, t) A_1(t) = -Z'(t, t_1) A_1(t).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$A_1(t) = -A'(t), \quad B(t) = Q'(t). \tag{3.7}$$

Отметим, что равенства правых частей уравнений (3.4) и (3.6) всегда можно добиться с помощью выбора векторов $\beta(t_0)$ и $\beta(t_1)$. В этом случае решения интегральных уравнений (3.4) и (3.6) эквивалентны, а значит, эквивалентны и решения задачи наблюдения (3.1)—(3.3) и управления (3.5). Поэтому указанные задачи называются *двойственными*.

Определение 3.1. Система (3.1) называется *наблюдаемой на отрезке* $[t_0, t_1]$ по измерениям (3.2) на этом отрезке, если для любого вектора $\alpha \in R_n$ существует функция $\gamma(t)$, удовлетворяющая равенству (3.4).

Иными словами, для наблюдаемой на отрезке $[t_0, t_1]$ системы (3.1) возможно точное определение величины $\alpha' x(t_1)$ с помощью линейного преобразования результатов наблюдений $y(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Установленная выше двойственность задач наблюдения (3.1)—(3.3) и управления (3.5) позволяет утверждать, что введенное определение (3.1) наблюдаемости соответствует определению управляемости системы (3.5). Значит, условия наблюдаемости системы (3.1) совпадают с условиями управляемости системы (3.5), (3.7). Из условий управляемости, приведенных в теоремах 2.1, 2.2 (а также из того, что ранг матрицы не меняется при умножении любого сто-

лбца на любое отличное от нуля число), вытекают следующие условия наблюдаемости.

Теорема 3.1. *Если матрицы A и Q постоянны, то для наблюдаемости системы* (3.1) *по измерениям* (3.2) *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости*

$$(Q', A'Q', ..., (A')^{n-1}Q') \tag{3.8}$$

был равен n.

Теорема 3.2. *Пусть найдется точка $\tau \in [t_0, t_1]$, в которой существуют непрерывные производные матриц $A(t)$ и $Q(t)$ до порядка $n-1$ включительно. Пусть, кроме того, в точке τ равен n ранг матрицы $(K_1, ..., K_n)$, где*

$$K_1(\tau) = Q'(\tau),\ K_i(\tau) = A'(\tau) K_{i-1}(\tau) + \frac{dK_{i-1}(\tau)}{d\tau},\ i \geqslant 2.$$

Тогда система (3.1) *наблюдаема по измерениям* (3.2).

Аналогично теореме 2.5, условия наблюдаемости выражаются следующей теоремой **(критерием наблюдаемости Хаутуса).**

Теорема 3.3. *Если матрицы A и Q постоянны, то для наблюдаемости системы* (3.1) *по измерениям* (3.2) *необходимо и достаточно, чтобы для любого комплексного числа λ ранг матрицы $(A' - \lambda I, Q')$ или ранг матрицы* $\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ Q \end{pmatrix}$ *был равен n.*

Пара матриц (A, Q) называется *наблюдаемой*, если ранг матрицы (3.8) равен n.

Приведем примеры использования теоремы 3.3.

Пример 3.1. Пусть пара (A, Q) наблюдаема и справедливо представление матрицы Q в виде $Q = (O_1, I_l)$, где O_1 — матрица размера $l \times (n-l)$, состоящая из нулевых элементов, а I_l — единичная матрица размера $l \times l$. Запишем матрицу A в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{11} и A_{22} — квадратные матрицы размеров $(n-l) \times (n-l)$ и $l \times l$ соответственно, A_{12} — матрица размера $(n-l) \times l$; A_{21} — матрица размера $l \times (n-l)$. Докажем, что пара (A_{11}, A_{21}) наблюдаема.

Для доказательства используем теорему 3.3, в соответствии с которой достаточно установить, что для любого λ ранг матрицы

$$R_1 = \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda I_{n-l} \\ A_{21} \end{pmatrix}$$

равен $n-l$. Обозначим через R_2 матрицу размера $n \times l$, имеющую вид

$$R_2 = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} - \lambda I_l \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 3.3 для любого λ ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I_n \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ O_1 & I_l \end{pmatrix}$$

равен n. Так как ранг матрицы $\begin{pmatrix} R_2 \\ I_l \end{pmatrix}$ равен l (ввиду наличия подматрицы I_l), то ранг матрицы $\begin{pmatrix} R_1 \\ O_1 \end{pmatrix}$ должен быть равен $n-l$. Поэтому ранг матрицы R_1 равен $n-l$.

Пример 3.2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + Fx_2, \ \dot{x}_2 = Dx_2; \ x_1 \in R_n, \ x_2 \in R_m.$$

Наблюдению доступна только первая компонента вектора x_1, т. е. уравнение наблюдений имеет вид

$$y = Qx_1, \ Q = (1, 0, \ldots, 0), \ y \in R_1.$$

Известно, что матрицы A, D и F, имеющие соответственно размеры $n \times n$, $m \times m$ и $n \times m$, удовлетворяют соотношениям

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & -\alpha \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & & 0 \\ F_2 & 0 & & 0 \\ & & & \\ F_n & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь α и a_i ($i = 1, \ldots, n$) — заданные величины. Определим условия, которым должны удовлетворять элементы F_i матрицы F, чтобы имела место наблюдаемость. Отметим, что эта задача возникает при синтезе адаптивных наблюдателей.

Обозначим через A_0 матрицу размера $N\times N$ ($N=n+m$), а через $S(\lambda)$ матрицу размера $(N+1)\times N$, где

$$A_0=\begin{pmatrix} A & F \\ O_1 & D \end{pmatrix},\quad S(\lambda)=\begin{pmatrix} A_0-\lambda I_N \\ Q \quad O_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь O_1 и O_2 — нулевые матрицы размеров $m\times n$ и $1\times m$. В силу теоремы 3.3 необходимое и достаточное условие наблюдаемости пары (A_0, Q) состоит в том, что при любом λ ранг матрицы $S(\lambda)$ равен N. Положим

$$R_1=\begin{pmatrix} A-\lambda I_n \\ O_1 \\ Q \end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix} F \\ D-\lambda I_m \\ O_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $S(\lambda)=(R_1, R_2)$. Отметим, что при любом λ ранг матрицы R_1 равен n, поскольку первые $n-1$ строк матрицы R_1 и ее последняя строка линейно независимы.

Рассмотрим отдельно случаи, когда $\lambda\neq-\alpha$ и $\lambda=-\alpha$. Если $\lambda\neq-\alpha$, то ранг матрицы R_2 равен рангу матрицы $R_2-\lambda I_m$ и равен m при любой матрице F, поскольку матрица $D-\lambda I_m$ невырождена. Значит, при $\lambda\neq-\alpha$ ранг матрицы $S(\lambda)$ равен N.

Пусть теперь $\lambda=-\alpha$. Тогда матрица $S(-\alpha)$ имеет вид

$$S(-\alpha)=\begin{pmatrix} -a_1+\alpha & 1 & 0 & & 0 & F_1 & 0 & & 0 \\ -a_2 & \alpha & 1 & & 0 & F_2 & 0 & & 0 \\ & & & & & & & & \\ -a_n & 0 & 0 & & \alpha & F_n & 0 & & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \end{pmatrix}.$$

Последние m строк матрицы $S(-\alpha)$ линейно независимы. Отсюда видно, что ранг матрицы $S(-\alpha)$ равен числу $N=m+n$ в том случае, когда линейно независимы ее столбцы, начиная со 2-го и кончая $(n+1)$-м, содержащим компоненты F_i. Последнее требование выполнено, если отличен от нуля определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 & F_1 \\ \alpha & 1 & & 0 & F_2 \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & & \alpha & F_n \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель Δ. Обозначим через Δ_{n-i} определитель, полученный из Δ вычеркиванием его первых i строк и i столбцов. Тогда $\Delta=\Delta_n$ и, разлагая Δ по элементам 1-й строки, получим

$$\Delta=\Delta_n=\Delta_{n-1}+(-1)^{n+1}\alpha^{n-1}F_1=\Delta_{n-1}+(-\alpha)^{n-1}F_1.$$

Отсюда видно, что имеет место рекуррентная формула

$$\Delta_{i+1}=\Delta_i+(-\alpha)^iF_{n-i},\ \Delta_1=F_n.$$

Поэтому для определителя Δ получим следующее выражение:

$$\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}(-\alpha)^iF_{n-i}.$$

Итак, условие наблюдаемости $\Delta\neq 0$ принимает вид

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-\alpha)^iF_{n-i}\neq 0.$$

2. Об одном способе определения вектора состояния. Рассмотрим задачу наблюдений (3.1), (3.2) с постоянными матрицами A и Q, предполагая полноту ранга матрицы наблюдаемости (3.8). Покажем, что в этом случае фазовый вектор $x(t_0)$ (а следовательно, в силу формулы Коши и вектор $x(t)$ для любых t) можно восстановить по результатам наблюдений (3.2) на сколь угодно малом интервале $[t_1, t_2]$. Для этого воспользуемся вытекающим из формул (3.1), (3.2) соотношением

$$y(t)=Qx(t)=Q[\exp A(t-t_0)]x(t_0). \tag{3.9}$$

Дифференцируя последовательно равенство (3.9) по t и полагая $t=t_0$, получаем систему уравнений относительно $x(t_0)$:

$$y(t_0)=Qx(t_0),\ \dot{y}(t_0)=QAx(t_0),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0)=QA^{n-1}x(t_0). \tag{3.10}$$

Система (3.10) содержит nl уравнений с n неизвестными компонентами вектора $x(t_0)$. В силу их построения уравнения (3.10) совместны и их можно однозначно разрешить относительно $x(t_0)$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы (3.8) равен n. Таким образом, при выполнении условия наблюдаемости из теоремы 3.1, разрешая уравнения (3.10) относительно $x(t_0)$, можно восстановить фазовый вектор $x(t)$ по формуле

$$x(t)=[\exp A(t-t_0)]x(t_0).$$

Отметим, что все последующие производные $y^{(i)}(t_0)$ $(i\geqslant n)$ являются линейными комбинациями предыдущих производных $y^{(j)}(t_0)$ $(j=0, \ldots, n-1)$. Действительно, умножая равенство (2.4) слева на Q и справа на $x(t)$, в силу (3.9) получаем

$$(QA^n)x(t)=(-\alpha_1 QA^{n-1}-\ldots-\alpha_n Q)x(t),$$
$$y^{(n)}(t_0)=-\alpha_1 y^{(n-1)}(t_0)-\ldots-\alpha_n y(t_0). \tag{3.11}$$

Аналогично, умножая уравнение (2.4) слева на Q справа на $Ax(t)$, имеем

$$(QA^{n+1})x(t)=(-\alpha_1 QA^n-\ldots-\alpha_n QA)\,x(t), \tag{3.12}$$
$$y^{(n+1)}(t_0)=-\alpha_1 y^{(n)}(t_0)-\ldots-\alpha_n \dot{y}(t_0).$$

Заменяя в правой части равенства (3.12) производную $y^{(n)}(t_0)$ в соответствии с (3.11), заключаем, что $y^{(n+1)}(t_0)$ есть линейная комбинация функций $y^i(t_0)$ $(i=0, \ldots, n-1)$. Подобным же образом, умножая (2.4) слева на Q и справа на $A^{n+i}x(t)$ $(i=2, \ldots)$, убеждаемся в том, что все $y^i(t_0)$ представляют собой линейные комбинации функций $y^{(j)}(t_0)$ $(j=0, \ldots, n-1)$. Следовательно, при определении вектора $x(t_0)$ с помощью вычисления производных $y^{(i)}(t_0)$ достаточно ограничиться значениями $i=0, \ldots, n-1$, т. е. достаточно ограничиться системой уравнений (3.10).

3. Наблюдатель полного порядка. Изложенный в п. 2 способ определения вектора состояния основан на вычислении производных функции $y(t)$ со всеми вытекающими отсюда нежелательными последствиями. В связи с этим практическая реализация этого способа весьма затруднительна. Излагаемый далее подход к задаче оценивания вектора состояния $x(t)$ основан на построении такого уравнения, называемого *наблюдателем*, решение которого $m(t)$ сходится к $x(t)$ при любых начальных условиях $x(0)$ и $m(0)$ в следующем смысле:

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-m(t)|=0. \tag{3.13}$$

Рассмотрим задачу наблюдения (3.1), (3.2) с постоянными матрицами A и Q. Пусть ранг матрицы (3.8) является полным. Определим наблюдатель с помощью уравнения

$$\dot{m}(t)=Am(t)+V(t)\,(y(t)-Qm(t)),\quad t\geqslant 0. \tag{3.14}$$

Здесь матрица $V(t)$ размера $n\times l$ подлежит определению таким образом, чтобы удовлетворялось условие (3.13). Обозначим через $\varepsilon(t)$ ошибку оценивания:

$$\varepsilon(t)=x(t)-m(t). \tag{3.15}$$

Из (3.1), (3.14) вытекает, что ошибка $\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varepsilon}(t)=[A-V(t)\,Q]\,\varepsilon(t). \tag{3.16}$$

Известно [13], что если ранг матрицы (3.8) полный, т. е. равен n, то матрицу $V(t)$ можно выбрать постоянной и такой, что спектр матрицы $(A-VQ)$ принимает заранее заданные значения. Иными словами, в этом случае всегда можно выбрать такую постоянную матрицу V, что справедливо соотношение (3.13).

Замечание. Пусть уравнения системы (3.1) содержат в правой части управляющее воздействие вида $B(t)u(t)$, где $B(t)$ — заданная матрица, а $u(t)\in R_m$ — известная функция, т. е. имеют форму

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t). \tag{3.17}$$

Тогда условия наблюдаемости сохраняют прежний вид (см. теоремы 3.1 и 3.2), а наблюдатель полного порядка описывается соотношениями

$$\dot{m}(t)=A(t)m(t)+B(t)u(t)+V(t)(y(t)-Qm(t)). \tag{3.18}$$

При этом ошибка оценивания (3.15) по-прежнему удовлетворяет уравнению (3.16).

4. Наблюдатель пониженного порядка (наблюдатель Люенбергера). Наблюдатель (3.18) имеет тот же порядок n, что и фазовый вектор $x(t)$. Вместе с тем наличие измерений (3.2) для уравнения (3.17) позволяет понизить порядок уравнений наблюдателя. Пусть матрицы A и Q в (3.17), (3.2) постоянны, ранг матрицы (3.8) полный и ранг матрицы Q равен $l>0$. Выберем любую матрицу W размера $(n-l)\times n$ так, чтобы квадратная матрица L размера $n\times n$, равная

$$L=\begin{pmatrix}Q\\W\end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

была невырождена. Обозначим через E и D блоки обратной матрицы L^{-1}, т. е. $L^{-1}=(ED)$, где E — матрица размера $n\times l$, а D — матрица размера $n\times(n-l)$. Ясно, что $EQ+DW=I$, где I — единичная матрица размера $n\times n$. Рассмотрим вектор $\alpha(t)\in R_{n-l}$, связанный с $x(t)$ соотношением

$$x(t)=L^{-1}\begin{pmatrix}y(t)\\\alpha(t)\end{pmatrix}=Ey(t)+D\alpha(t). \tag{3.20}$$

Заметим, что $(y(t),\ \alpha(t))'=Lx(t)$. В правой части представления (3.20) в оценивании нуждается лишь вектор $\alpha(t)$. Поэтому с учетом (3.17), (3.19) получаем, что функция $\alpha(t)=Wx(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\alpha}(t)=W(AD\alpha(t)+AEy(t)+Bu(t)),\ \alpha(0)=\alpha_0. \tag{3.21}$$

Начальное условие α_0 для уравнения (3.21) может быть взято произвольно. Казалось бы, можно решить уравнение (3.21), полученное

решение подставить в правую часть (3.20) и найти таким образом оценку вектора $x(t)$. При таком способе оценивания ошибка $\varepsilon(t)=x(t)-(Ey(t)+D\alpha(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t)&=\dot{x}(t)-E\dot{y}(t)-D\dot{\alpha}(t)=\\&=Ax+Bu-EQ(Ax+Bu)-DW(ADx+AEy+Bu)=\\&=Ax-DWADx-DWAEy-EQAx=\\&=(EQ+DW)Ax-DWADx-DWAEy-EQAx=\\&=DWAx-DWA(Ey+D\alpha)=DWA\varepsilon.\end{aligned}$$

Ранги матриц D и W не превосходят $n-l$, поэтому в силу неравенства Сильвестра ранг матрицы DWA также не больше $n-l$.

Так как определитель матрицы равен произведению ее собственных значений, а матрица DWA вырождена, то она не может быть гурвицевой. Значит, $\varepsilon(t)$, вообще говоря, не стремится к нулю при $t\to\infty$. Это означает, что метод оценивания (3.20), (3.21) не удовлетворяет основному требованию (3.13), которому должны удовлетворять наблюдатели.

В связи с этим используем другой метод построения наблюдателя. Оценку $\alpha_1(t)\in R_{n-l}$ вектора $\alpha(t)$ зададим соотношениями, вытекающими из (3.21) и выражения для $\dot{y}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1(t)=WA(D\alpha_1(t)+Ey(t))+V[\dot{y}(t)-QA(Ey(t)+D\alpha_1(t)]+\\+(W-VQ)Bu(t),\ \alpha_1(0)=\alpha_1^0.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Здесь матрица V должна быть выбрана так, что $|\alpha(t)-\alpha_1(t)|\to 0$ при $t\to\infty$. Начальное значение оценки α_1^0 задается произвольно. Ошибка оценивания $\delta(t)=\alpha(t)-\alpha_1(t)$ в силу (3.21), (3.22) удовлетворяет уравнению

$$\dot{\delta}(t)=(W-VQ)AD\delta(t).\tag{3.23}$$

Действительно, из (3.22), (3.2), (3.17), (3.20) вытекает, что

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1(t)&=WA(D\alpha_1+Ey)+VQ[\dot{x}-A(Ey+D\alpha_1)-Bu]+\\&+WBu=WA(D\alpha_1+Ey)+VQA(x-Ey-D\alpha_1)+WBu=\\&=WA(D\alpha_1+Ey)+VQAD(\alpha-\alpha_1)+WBu.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Вычитая теперь из (3.21) уравнение (3.24), получаем (3.23). При сделанных предположениях постоянную матрицу V размера $(n-l)\times l$ можно выбрать так, чтобы тривиальное решение уравнения (3.23) было экспоненциально устойчиво относительно начальных возмущений [13]. Значит,

$$\lim_{t\to\infty}\delta(t)=0.\tag{3.25}$$

Теперь, после того как оценка $\alpha_1(t)$ вектора $\alpha(t)$ построена, оценку $m(t)$ вектора $x(t)$ в соответствии с (3.20) естественно задать с помощью равенства

$$m(t)=Ey(t)+D\alpha_1(t). \tag{3.26}$$

При этом можно показать, что соотношение (3.13) также имеет место. Действительно,

$$x(t)-m(t)=Ey(t)+D\alpha(t)-(Ey(t)+D\alpha_1(t))=$$
$$=D(\alpha(t)-\alpha_1(t))\to 0,\ t\to\infty.$$

В некоторых случаях построение оценки $\alpha_1(t)$ с помощью уравнений (3.22), правые части которых зависят от производной $\dot{y}(t)$ результатов наблюдений $y(t)$, может оказаться затруднительным. Однако фактически можно избежать этого, сделав замену переменных: $\alpha_2(t)=\alpha_1(t)-Vy(t)$. Тогда на основании (3.26) получим

$$m(t)=D\alpha_2(t)+(E+DV)y(t). \tag{3.27}$$

Уравнения, определяющие $\alpha_2(t)$, с учетом (3.22), (3.2), (3.17) имеют вид

$$\dot{\alpha}_2(t)=(W-VQ)[AD\alpha_2+Bu+A(DV+E)y],$$
$$\alpha_2(0)=\alpha_2^0. \tag{3.28}$$

Начальный вектор α_2^0 задается произвольно. Из соотношений (3.20), (3.26), (3.25) следует, что для ошибки оценивания $\delta_1(t)=x(t)-m(t)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty}\delta_1(t)=\lim_{t\to\infty}[x(t)-m(t)]=\lim_{t\to\infty}D\delta(t)=0.$$

Таким образом, формула (3.27) действительно определяет наблюдатель для системы (3.17). Поскольку при этом для фактической реализации наблюдателя (3.27) требуется определить вектор α_2 размерности $n-l$, соответствующий наблюдатель называется *наблюдателем пониженного порядка (наблюдателем Люенбергера)*.

Приведем еще уравнение для ошибки оценивания $\delta_1(t)$. Дифференцируя обе части равенства $\delta_1(t)=D\delta(t)$ по t, с учетом (3.23) получаем

$$\dot{\delta}_1=D\dot{\delta}=D(W-VQ)AD\delta=D(W-VQ)A\delta_1.$$

В заключение приведем основные этапы построения наблюдателя Люенбергера:

1^0. Выбирают матрицу W так, чтобы матрица L, определенная формулой (3.19), была невырожденной.

2^0. Представляют L^{-1} в виде $L^{-1}=(E, D)$, где E — матрица размера $n\times l$, а D — матрица размера $n\times(n-l)$.

3^0. Определяют матрицу V так, чтобы матрица $(W-VQ)AD$ была гурвицевой, т. е. чтобы все ее собственные значения лежали в левой полуплоскости плоскости комплексного переменного.

4^0. Находят решение $\alpha_2(t)$ задачи (3.28).

5^0. Определяют оценку $m(t)$ вектора $x(t)$ по формуле (3.27).

В тех случаях, когда возможно вычисление производной $\dot{y}(t)$, этапы 4^0 и 5^0 приведенного алгоритма могут быть заменены соответственно следующими этапами: 4^0) находят решение $\alpha_1(t)$ задачи (3.22); 5^0) определяют оценку $m(t)$ вектора $x(t)$ по формуле (3.26).

Замечание. Если измерения (3.2) осуществляются с помехами, то наблюдатель полного порядка (3.14) с матрицей $V(t)$, выбираемой из условия минимума среднеквадратичной ошибки оценивания, называют *фильтром Калмана*. Подробнее фильтр Калмана излагается в гл. XI. Были проведены экспериментальные сравнения фильтра Калмана и наблюдателя Люенбергера* в задаче оценки состояния двойного перевернутого маятника при неточно заданных начальных условиях и помехах. Наблюдатель Люенбергера оказался более чувствительным к помехам по сравнению с фильтром Калмана.

5. Наблюдатель пониженного порядка в системе стабилизации летательного аппарата**. Продольное движение ЛА можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} &\ddot{\vartheta} = d_1\alpha - d_2\delta, \quad \dot{\theta} = d_3\alpha, \\ &\alpha = \vartheta - \theta, \\ &T\dot{\delta} + \delta = K_{\text{рм}}u. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Здесь ϑ — угол тангажа, θ — угол наклона траектории, α — угол атаки, δ — отклонение руля высоты, d_i — аэродинамические коэффициенты, T и $K_{\text{ом}}$ — характеристики рулевой машинки (рис. 3.1). Введя переменные $x_1=\vartheta$, $x_2=\dot{\vartheta}$, $x_3=\delta$, $x_4=\theta$, запишем уравнение (3.18) в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -d_1 & -d_2 & d_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & d_3 & 0 & -d_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{\text{рм}}T^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

---

*Андреев Ю. Н. Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами // Автоматика и телемеханика, 1977, № 3.

**Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. — М.: Машиностроение, 1976.

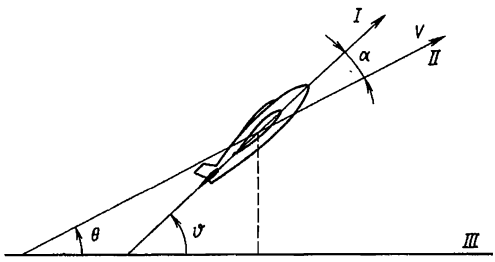


Рис. 3.1. Координаты продольного движения ЛА: *I* — ось ЛА; *II* — направление вектора мгновенной скорости v; *III* — горизонталь; v — угол тангажа; θ — угол наклона траектории; $\alpha = v - \theta$ — угол атаки

Здесь все параметры d_1, d_2, d_3, $K_{\text{рм}}$, T — положительные величины. Хотя в принципе можно было бы измерить любую из переменных состояния $x_1, \ldots, x_4$, это не всегда целесообразно. Можно, например, измерять только две из переменных состояния, а две другие определять с помощью наблюдателя.

В том случае, когда измеряются переменные $x_3 = \delta$ и $x_4 = \theta$, матрица Q состава наблюдений имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица наблюдаемости $(Q', A'Q', (A')^2Q', (A')^3Q')$ — вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & -d_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & -d_3^2 & 0 & -d_1d_3 + d_3^3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{T} & 0 & \frac{1}{T^2} & 0 & -\frac{1}{T^3} & -d_2d_3 \\ 0 & 1 & 0 & -d_3 & 0 & d_3^2 & 0 & d_1d_3 - d_3^3 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен 4, поскольку 2, 4, 6 и 8-й столбцы этой матрицы линейно независимы. Значит, при таком выборе измеряемых переменных система наблюдаема.

Аналогично проверяется, что если измеряются переменные $x_2 = \vartheta$ и $x_3 = \delta$, то система (3.29) также наблюдаема. Однако при измерениях переменных $x_1 = \dot{\vartheta}$ и $x_3 = \delta$ система ненаблюдаема. Матрица Q состава наблюдений в этом случае такова:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записывая матрицу наблюдаемости (3.8), можно убедиться, что ее ранг равен 3. Этот же вывод о ненаблюдаемости можно сделать, используя теорему 3.3. В данном случае матрица $(A' - \lambda I, Q')$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -d_1 & -\lambda & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ -d_2 & 0 & -\frac{1}{T}-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ d_1 & 0 & 0 & -d_3-\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda=0$ 2-я и 4-я строки этой матрицы линейно зависимы. Значит, система (3.29) при измерениях переменных x_1 и x_3 ненаблюдаема.

При измерении любых трех переменных состояния система (3.29) является наблюдаемой. Если же известны значения только одной переменной, то объект (3.29) ненаблюдаем.

Построим теперь наблюдатель пониженного порядка при условии, что измеряются переменные $x_1=\dot{\vartheta}$, $x_2=\vartheta$, $x_3=\delta$, а переменная $x_4=\theta$ восстанавливается наблюдателем. Матрица Q в данном случае имеет вид

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве W возьмем матрицу $W=(0\ 0\ 0\ 1)$. Ясно, что матрица L^{-1} в этом случае примет вид

$$L^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, матрицы E и D таковы:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве V матрицу $V=(0\ 0\ -1)$. Управление (3.28) для наблюдателя Люенбергера первого порядка с учетом явного вида матриц Q, W, E, D и выбора V запишется следующим образом:

$$\dot{\alpha}_2=-d_3\alpha_2+\frac{K_{\text{рм}}}{T}u+\left(d_3-\frac{1}{T}\right)x_3.$$

За оценку состояния системы (3.29) в этом случае принимается вектор $(x_1, x_2, x_3, \alpha_2)$.

Предположим теперь, что измеряются переменные x_3 и x_4. Тогда матрица состава измерений есть

$$Q=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

В качестве W можно взять матрицу

$$W=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

При этом матрицы L^{-1}, E, D, WAD имеют следующий вид:

$$L^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad WAD=\begin{pmatrix}0&d_1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Выберем матрицу V размера 2×2 в виде

$$V=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

С учетом такого выбора, последовательно вычисляя, получим

$$W-VQ=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix},\quad AD=\begin{pmatrix}0&-d_1\\1&0\\0&0\\0&d_3\end{pmatrix},$$

$$(W-VQ)AD=\begin{pmatrix}0&-d_1\\1&-d_3\end{pmatrix};\quad (W-VQ)B=\begin{pmatrix}\dfrac{-K_{\text{рм}}}{T}\\0\end{pmatrix},$$

$$(W-VQ)A(DV+E)=\begin{pmatrix}-d_2+\dfrac{1}{T}&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Уравнение наблюдателя второго порядка вида (3.28) в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix}\dot{\alpha}_2^1\\\dot{\alpha}_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-d_1\\1&-d_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2^1\\\alpha_2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\dfrac{K_{\text{рм}}}{T}\\0\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}-d_2+\dfrac{1}{T}&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Здесь α_2^1 и α_2^2 обозначают координаты вектора α_2. Отметим, что уравнение (3.30) асимптотически устойчиво, поскольку его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+d_3\lambda+d_1=0$, где $d_1>0$, $d_3>0$, и оба его корня лежат в левой полуплоскости.

В качестве оценки $m(t)$ вектора $x(t)$ на основании (3.27) возьмем вектор

$$m(t)=D\alpha_2(t)+(E+DV)y(t)=\begin{pmatrix}\alpha_2^1(t)\\ \alpha_2^2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{pmatrix}.$$

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИХ НУЛИ*

В теории автоматического регулирования большое внимание уделяется изучению линейных стационарных систем. Для таких систем сложилась своя терминология и выработаны специфические методы исследования, связанные с возможностью применения преобразования Лапласа. Многомерная стационарная система управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ x(0)=x_0,\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ t\geqslant 0,\\ &y(t)=Qx(t),\ y\in R_l.\end{aligned}\qquad(4.1)$$

Здесь A, B, Q — постоянные матрицы. Вектор $u(t)$ называется *входом* (или *управлением*), $y(t)$ — *выходом* (или *регулируемыми величинами*), $x(t)$ — *переменными состояния*.

Изложим некоторые результаты теории многомерных систем, связанные с понятием нуля системы.

Матрицей системы (4.1) называется блочная матрица $P(\lambda)$ размера $(n\times l)\times(n\times m)$, имеющая вид

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda I_n-A & -B\\ Q & 0\end{pmatrix}.\qquad(4.2)$$

В выражении (4.2) через λ обозначено произвольное комплексное число, а через I_n — единичная матрица размера $n\times n$.

Считается, что при $\lambda=0$ ранг матрицы $P(0)$ максимально возможный, т. е.

$$\operatorname{rank}P(0)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}-A & -B\\ Q & 0\end{pmatrix}=\min(n+l,\ n+m).$$

*Этот параграф написан совместно с Е. М. Смагиной и использует материалы кн.: Смагина Е.М. Вопросы анализа линейных многомерных объектов с использованием понятия нуля системы. — Томск: Томск.ун-т, 1990.

Инвариантным нулем системы (4.1) назовем такое комплексное число $\lambda=\alpha$, при котором ранг матрицы $P(\lambda)$ уменьшается, т. е.

$$\operatorname{rank} P(\lambda)|_{\lambda=\alpha}<\min(n+l, n+m). \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Пусть α — инвариантный нуль системы* (4.1), *причем он не совпадает ни с одним собственным значением λ_i ($i=1, \ldots, n$) матрицы A. Тогда существуют такие начальное условие x_0 и вход*

$$u(t)=u_0 e^{\alpha t} 1(t),\ u_0=\text{const},\ u_0\in R_m,\ 1(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases} \tag{4.4}$$

при которых выход $y(t)$ системы (4.1) *тождественно равен нулю.*

□ Произведем преобразование Лапласа уравнения (4.1). В результате получим

$$\lambda\bar{x}(\lambda)-x_0=A\bar{x}(\lambda)+B\bar{u}(\lambda), \tag{4.5}$$

$$\bar{y}(\lambda)=Q\bar{x}(\lambda),\ \bar{x}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}x(t)\,dt.$$

Здесь $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{u}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ — векторы, компоненты которых являются преобразованием Лапласа компонент векторов $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ соответственно.

Если $\lambda\neq\lambda_i$, то

$$\bar{x}(\lambda)=(\lambda I_n-A)^{-1}(x_0+B\bar{u}(\lambda)). \tag{4.6}$$

Преобразование Лапласа $\bar{u}(\lambda)$ от входа (4.4) вычисляется в явном виде:

$$\bar{u}(\lambda)=\frac{u_0}{\lambda-\alpha}. \tag{4.7}$$

Из (4.5)—(4.7) получаем, что

$$\begin{aligned}\bar{y}(\lambda)&=Q(\lambda I_n-A)^{-1}\left(x_0+B\frac{u_0}{\lambda-\alpha}\right)=\\ &=\frac{1}{\lambda-\alpha}Q(\lambda I_n-A)^{-1}((\lambda-\alpha)I_n x_0+Bu_0)=\\ &=\frac{1}{\lambda-\alpha}[Qx_0-Q(\lambda I_n-A)^{-1}((\alpha I_n-A)x_0-Bu_0)].\end{aligned} \tag{4.8}$$

При выводе последней формулы было использовано соотношение

$$(\lambda-\alpha)I_n=(\lambda I_n-A)-(\alpha I_n-A).$$

Потребуем теперь, чтобы $y(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$. При этом должно быть

$$y(t_0) = Qx_0 = 0, \ \bar{y}(\lambda) \equiv 0. \tag{4.9}$$

С учетом (4.8) из (4.9) получаем, что

$$Q(\lambda I_n - A)^{-1}((\alpha I_n - A)x_0 - Bu_0) \equiv 0. \tag{4.10}$$

Тождество (4.10) возможно при всех λ тогда и только тогда, когда

$$(\alpha I_n - A)x_0 - Bu_0 = 0. \tag{4.11}$$

Первое из равенств (4.9) и равенство (4.11) можно объединить в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha I_n - A & -B \\ Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.12}$$

Рассмотрим (4.12) как уравнение относительно x_0, u_0. Нетривиальное решение этого уравнения существует, если матрица

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha I_n - A & -B \\ Q & 0 \end{pmatrix}$$

имеет неполный ранг. При $l \geqslant m$ это необходимое и достаточное условие, а при $l < m$ — достаточное условие.

Итак, установлено, что если α — инвариантный нуль системы, то существуют такой вход вида (4.4) и такое начальное состояние x_0, что прохождение сигнала в системе (4.1) от входа к выходу отсутствует, т. е. $y(t) \equiv 0$. ■

Пример 4.1. Рассмотрим систему второго порядка с одним входом и одним выходом:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \ y = (1 \ \ 1)x. \tag{4.13}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ Q = (1 \ \ 1).$$

Матрица A имеет два различных собственных числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Определим инвариантный нуль системы (4.13). Для этого построим матрицу системы

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda I_2 - A & -B \\ Q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda=0$ ранг уменьшается с 3 до 2. Следовательно, $\alpha=0$ — инвариантный нуль системы (4.13). Так как ранг матрицы $P(\lambda)|_{\lambda=0}$ уменьшается, то, используя уравнение вида (4.12)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ u_0 \end{pmatrix} = 0, \tag{4.14}$$

можно определить вектор $(x_0', u_0)=(x_{10}, x_{20}, u_0)=(1, -1, -2)$, при котором выполняется равенство (4.14). Отсюда следует, что если на вход системы подается постоянный сигнал

$$u(t)=-2e^{0}1(t)=-2\cdot 1(t), \tag{4.15}$$

то при начальном условии $x(0)=(1, -1)$ сигнал на выходе системы должен отсутствовать.

Убедимся в этом непосредственно, определив решение системы (4.13) при найденных начальных условиях и входе (4.15).

Для этого систему (4.13) с входом (4.15) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 - 2, \quad x_1(0)=1; \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2, \quad x_2(0)=-1. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Непосредственно проверяется, что решение системы (4.16) имеет вид $x_1(t)=1$, $x_2(t)=-1$. Значит, выход $y(t)$ есть

$$y(t)=(1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=0.$$

Матрица G размера $l\times m$, имеющая вид

$$G(\lambda)=Q(\lambda I_n - A)^{-1}B, \tag{4.17}$$

называется *матричной передаточной функцией системы* (4.1). Матрица $G(\lambda)$ характеризует реакцию системы (4.17) на вход $u(\lambda)$ при нулевых начальных условиях $x(0)=0$.

Предположим, что $\operatorname{rank} G(0)=\min(l, m)$. Комплексное число λ, α называется *передаточным нулем системы*, если

$$\operatorname{rank} G(\lambda)|_{\lambda=\alpha} < \min(l, m).$$

Можно показать, что множество передаточных нулей системы (4.1) входит в множество инвариантных нулей той же системы, но, вообще говоря, уже его (см. задачу 19 ко второй части). Вместе с тем справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Если система* (4.1) *полностью управляема и наблюдаема, то множества ее передаточных и инвариантных нулей совпадают.*

□ Пусть $l \geqslant m$. Тогда изменение ранга матрицы $P(\lambda)$ системы (4.1) возможно только в том случае, когда при некотором $\lambda=\alpha$ какие-нибудь столбцы матрицы $P(\alpha)$ станут линейно зависимыми. Ранг матрицы $P(\lambda)$ размера $(n+l)\times(n+m)$ не изменится, если ее умножить справа на невырожденную матрицу $L_1(\lambda)$ размера $(n+m)\times(n+m)$, имеющую вид

$$L_1(\lambda)=\begin{pmatrix} I_n & (\lambda I_n - A)^{-1}B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq \lambda_i.$$

Отсюда получаем цепочку равенств

$$\operatorname{rank} P(\lambda)=\operatorname{rank}\left(P(\lambda)L_1(\lambda)\right)=$$

$$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda I_n - A & 0 \\ Q & Q(\lambda I_n - A)^{-1}B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda I_n - A & 0 \\ Q & G(\lambda) \end{pmatrix}.$$

В силу критерия наблюдаемости Хаутуса (см. с. 239)

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda I_n - A \\ Q \end{pmatrix}=n$$

для всех комплексных чисел λ. Поэтому уменьшение ранга матрицы $P(\lambda)$ при $\lambda=\alpha$ в этом случае может произойти тогда и только тогда, когда при $\lambda=\alpha$ уменьшается ранг матрицы $G(\lambda)$. Таким образом, в этом случае инвариантные и передаточные нули совпадают.

Пусть теперь $l<m$. Умножим матрицу $P(\lambda)$ слева на невырожденную матрицу $L_2(\lambda)$ размера $(n+l)\times(n+l)$:

$$L_2(\lambda)=\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -Q(\lambda I_n - A)^{-1} & I_l \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq \lambda_i.$$

Тогда

$$\operatorname{rank} P(\lambda)=\operatorname{rank}\left(L_2(\lambda)P(\lambda)\right)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda I_n - A & -B \\ 0 & G(\lambda) \end{pmatrix}.$$

В силу критерия управляемости Хаутуса (см. с. 231) $\operatorname{rank}(\lambda I_n - A, -B)=n$ для всех комплексных значений λ. Значит, при $\lambda=\alpha$ строки матрицы $P(\lambda)$ могут стать линейно зависимы, если при этом $\lambda=\alpha$ теряет ранг матрицы $G(\lambda)$. Этим теорема полностью доказана. ■

Пример 4.2. Для системы (4.13) передаточная функция $G(\lambda)$ имеет вид

$$G(\lambda)=Q(\lambda I_2 - A)^{-1}B=(1\ \ 1)\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{\lambda}{(\lambda-1)(\lambda-2)}. \quad (4.18)$$

Единственный передаточный нуль системы (4.13) есть $\lambda=0$.

Кроме того, система (4.13) управляема. В самом деле, в матрице

$$\begin{pmatrix} \lambda I_2 - A \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\lambda=0$ линейно независимы 1-я и 3-я строки, а при $\lambda\neq 0$ — 2-я и 3-я строки.

Система (4.13) наблюдаема, поскольку в матрице

$$(\lambda I_2 - A,\ B) = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix}$$

при $\lambda=1$ линейно независимы 1-й и 3-й столбцы, а при $\lambda\neq 0$ — 2-й и 3-й столбцы.

Таким образом, система (4.13) имеет только один инвариантный нуль $\lambda=0$, который совпадает с передаточным.

Некоторые другие свойства инвариантных и передаточных нулей можно найти в задачах 20—24 ко второй части, а также в цитированной на с. 251 книге.

Основные результаты и формулы главы VI

Условие общности положения. Для системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\quad x\in R_n,\ u\in R_m$$

все матрицы $G_j=(b_j,\ Ab_j,\ \ldots\ A^{n-1}b_j)$ невырождены; здесь $j=1,\ \ldots,\ m$, а b_j — столбцы матрицы B.

Теорема о конечности числа точек переключения. Если выполнено условие общности положения, то каждая компонента оптимального управления имеет конечное число точек переключения. Если, кроме того, все собственные значения матрицы A действительны, то число таких точек переключения не превосходит $n-1$.

Управляемость линейных систем. Для управляемости линейных стационарных систем необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $K=(B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B)$ был равен n (размерности вектора x).

Для управляемости системы (2.1) при наличии ограничений $|u(t)|\leqslant C,\ C>0$ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (2.2) был равен n и, кроме того, чтобы все собственные значения матрицы A лежали на мнимой оси.

Критерий управляемости Хаутуса. Для управляемости линейной стационарной системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы для любого комплексного числа λ ранг матрицы $(A-\lambda I,\ B)$ был равен n (размерности вектора x).

Управляемость линейных нестационарных систем. Для управляемости линейных нестационарных систем $\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)$ достаточно, чтобы нашлась точка $\tau\in[t_0,\ t]$, в которой ранг матрицы $K=(K_1,\ \ldots,\ K_n)$ равен n; здесь

$$K_1(t)=B(t),\quad K_i(t)=A(t)K_{i-1}(t)-\frac{dK_{i-1}(t)}{dt}.$$

Для управляемости системы (2.12) на отрезке $[t_0,\ t_1]$ необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0,\ t_1)$ была положительно определена.

Канонический вид линейных стационарных систем. Существует матрица T такая, что $Ty(t)=x(t)$, $\dot{y}(t)=T^{-1}ATy+T^{-1}Bu$ и при этом

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0_1 & A_3\end{pmatrix},\quad T^{-1}B=\begin{pmatrix}B_1\\ 0_2\end{pmatrix},$$

где 0_1 и 0_2 — нулевые матрицы размерности $(n-j)\times j$ и $(n-j)\times m$, а ранг матрицы $(B_1, A_1B_1, \ldots, A_1^{j-1}B)$ равен j.

Линейная стационарная система (2.1) со скалярным управлением может быть сведена к одному уравнению n-го порядка вида (2.20).

Линейная нестационарная система (2.12) со скалярным управлением и невырожденной матрицей $K(t)$, определенной в теореме 2.2, может быть сведена к одному уравнению n-го порядка.

Наблюдаемость линейных систем. Для наблюдаемости системы $\dot{x}(t)=Ax(t)$ по измерениям $y(t)=Qx(t)$ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $(Q', A'Q', \ldots, (A')^{n-1}Q')$ был равен n.

Для наблюдаемости той же системы необходимо и достаточно, чтобы при любом комплексном числе λ ранг матрицы $(A'-\lambda I, Q')$ равен n.

Наблюдатель полного порядка:

$$\dot{m}(t)=Am(t)+V[y(t)-Qm(t)].$$

Наблюдатель пониженного порядка (наблюдатель Люенбергера):

$$m(t)=D\alpha_2(t)+(E+DV)y(t),$$
$$\dot{\alpha}_2(t)=(W-VQ)[AD\alpha_2(t)+Bu(t)+A(DV+E)y(t)],$$

где

$$L=\begin{pmatrix}Q\\ W\end{pmatrix},\quad L^{-1}=(ED),\ \text{а } (W-VQ)AD \text{ — устойчивая матрица.}$$

Иначе:

$$m(t)=Ey(t)+D\alpha_1(t),$$
$$\dot{\alpha}_1(t)=WA(D\alpha_1(t)+Ey(t))+V[\dot{y}(t)-QA(Ey(t)+D\alpha_1(t))]+(W-VQ)Bu(t).$$

Линейные многомерные стационарные системы управления. Инвариантным нулем системы

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\ x(0)=x_0,\ x\in R_n,\ u\in R_m,$$
$$y(t)=Qx(t),\ y\in R_l$$

называется такое комплексное число $\lambda=\alpha$, при котором уменьшается ранг матрицы $P(\lambda)$ вида

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda I_n-A & -B\\ Q & 0\end{pmatrix}.$$

Если число α есть инвариантный нуль системы (4.1), не совпадающий ни с одним собственным значением матрицы A, то существуют такие начальное значение x_0 и вход $u(t)$, при которых выход системы тождественно равен нулю, т. е. $y(t)\equiv 0$.

Комплексное число $\lambda=\alpha$, при котором уменьшается ранг матричной передаточной функции $G(\lambda)$ вида

$$G(\lambda)=Q(\lambda I_n-A)^{-1}B,$$

называется передаточным нулем системы (4.1).

Если система (4.1) полностью управляема и наблюдаема, то множества ее передаточных и инвариантных нулей совпадают.

ГЛАВА VII

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Различные эволюционные процессы можно изучать, рассматривая либо индивидуальные траектории, либо свойства всего множества траекторий. Необходимые условия оптимальности в гл. IV и V были основаны на рассмотрении отдельных траекторий. Излагаемый в настоящей главе метод динамического программирования основан на изучении всего множества оптимальных траекторий.

§ 1. УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА И ЕГО СВОЙСТВА

1. Принцип динамического программирования. Эвристический вывод уравнения Беллмана. Метод динамического программирования является одним из распространенных методов синтеза оптимального управления объектами разнообразной природы. Он основан на *принципе динамического программирования*, который формулируется следующим образом [5]: *оптимальное управление обладает тем свойством, что для любого начального состояния и использованного начального управления последующее оптимальное управление совпадает с исходным оптимальным управлением относительно состояния, получающегося в результате применения начального управления.*

Поясним более подробно метод динамического программирования применительно к задаче управления на конечном интервале времени следующей системой:

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0,\ u\in U, \tag{1.1}$$

$$J(u)=\varphi(x(T))+\int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)\,\mathrm{d}t\to\inf_{u\in U}. \tag{1.2}$$

Введем скалярную функцию $V(s, x)$, называемую *функцией Беллмана*, которая определяется следующим образом. Пусть движение системы (1.1) происходит на отрезке $t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ и начальное условие имеет вид $x(s)=x$, $x\in R_n$, т. е.

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u),\ s\leqslant t\leqslant T,\ x(s)=x. \tag{1.3}$$

Для системы (1.3) рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$\varphi(x(T))+\int_{s}^{T} F(t, x(t), u)\,\mathrm{d}t\to\inf_{u\in U}. \tag{1.4}$$

Назовем *допустимым управлением* любую измеримую функцию $u(t) \in U$ такую, что для любых $s \in [t_0, T]$ и $x \in R_n$ существует решение задачи (1.3).

Отметим, что при $s = t_0$ и $x = x_0$ задача (1.3), (1.4) совпадает с задачей (1.1), (1.2). Ясно, что минимальное значение функционала (1.4) на траекториях системы (1.3) зависит от начального момента s и начального положения x. *Функцией Беллмана* $V(s, x)$ называется функция, равная инфимуму функционала (1.4) на траекториях системы (1.3) по всевозможным допустимым управлениям, т. е.

$$V(s, x) = \inf_{u(t) \in U} \left[\varphi(x(T)) + \int_s^T F(t, x(t), u)\, dt \right]. \tag{1.5}$$

Возьмем теперь произвольные моменты времени s и τ такие, что $t_0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant T$. Тогда на основании сформулированного выше принципа динамического программирования имеем

$$V(s, x) = \inf_{u(t) \in U} \left[\varphi\, x(T)) + \int_s^T F(t, x(t), u)\, dt \right] =$$

$$= \inf_{u(t) \in U,\ s \leqslant t \leqslant \tau} \inf_{u(t) \in U,\ \tau \leqslant t \leqslant T} \left[\varphi(x(T)) + \int_s^\tau F(t, x(t), u)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_\tau^T F(t, x(t), u)\, dt \right] = \inf_{u(t) \in U,\ s \leqslant t \leqslant \tau} \left[\int_s^\tau F(t, x(t), u)\, dt + \right.$$

$$\left. + \inf_{u(t) \in U,\ \tau \leqslant t \leqslant T} \left[\int_\tau^T F(t, x(t), u)\, dt + \varphi(x(T)) \right] \right] =$$

$$= \inf_{u(t) \in U,\ s \leqslant t \leqslant \tau} \left[\int_s^\tau F(t, x(t), u)\, dt + V(\tau, x(\tau)) \right]. \tag{1.6}$$

Отметим, что в равенстве (1.6) через $x(t)$ обозначено решение задачи (1.3). При этом выбор управления $u(t)$, $s \leqslant t \leqslant \tau$ влияет как на величину интеграла в правой части (1.6), так и на значение аргумента $x(\tau)$ функции $V(\tau, x(\tau))$. Перепишем уравнение (1.6) в виде

$$\inf_{u(t) \in U,\ s \leqslant t \leqslant \tau} \left[\int_s^\tau F(t, x(t), u)\, dt + V(\tau, x(\tau)) - V(s, x) \right] = 0. \tag{1.7}$$

Предположим, что функция Беллмана $V(t, x)$ непрерывно дифференцируема. Тогда при малых $\tau - s$ с точностью до малых более высокого порядка малости относительно $\tau - s$ получим

$$V(\tau, x(\tau)) - V(s, x) = \dot{V}(s, x)(\tau - s). \tag{1.8}$$

Здесь $\dot{V}(s, x)$ — полная производная функции V вдоль траекторий системы (1.1), равная

$$\dot{V}(s, x) = V_s(s, x) + V'_x(s, x)(f(t, x, u)), \tag{1.9}$$

$$V_s(s, x) = \frac{\partial V(s, x)}{\partial s}, \quad V_x(s, x) = \frac{\partial V(s, x)}{\partial x}.$$

Разделим обе части равенства (1.7) на $\tau - s$ и перейдем к пределу при $\tau \to s + 0$. Тогда, учитывая равенство (1.8), получим уравнение, называемое *уравнением Беллмана*:

$$\inf_{u \in U} [V_t(t, x) + V'_x(t, x) f(t, x, u) + F(t, x, u)] = 0, \tag{1.10}$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant T, \ x \in R_n.$$

Согласно определению (1.5) функции Беллмана имеем

$$V(T, x) = \varphi(x), \ x \in R_n. \tag{1.11}$$

Итак, если решение исходной задачи оптимального управления (1.1), (1.2) существует, а функция Беллмана $V(t, x)$ непрерывно дифференцируема, то справедливы соотношения (1.10), (1.11). Отметим, что инфимум (точная нижняя грань) в уравнении (1.10) вычисляется по векторному параметру $u \in U \subset R_m$.

2. Построение С-управления с помощью метода динамического программирования. Если управление u, реализующее инфимум выражения (1.10), существует, то оно является функцией времени t и фазовой координаты x, т. е. $u = u(t, x)$. Таким образом, с помощью метода динамического программирования управление может быть построено в виде С-управления.

Однако при этом необходимо иметь в виду следующее:

1^0. В заданном классе допустимых управлений не всегда существует такое, при котором достигается инфимум в (1.5) (напомним, что управление $u(t, x)$ называется допустимым, если при этом управлении существует решение уравнений (1.1) и функционал (1.2) конечен).

2^0. Функция Беллмана $V(t, x)$ не всегда обладает той гладкостью, которая была использована при выводе задачи Коши (1.10), (1.11). Иными словами, функция Беллмана не всегда удовлетворяет соответствующему рассматриваемой задаче уравнению Беллмана или же удовлетворяет ему в некотором обобщенном смысле. Сле-

довательно, решение уравнения Беллмана не обязательно совпадает с соответствующей функцией Беллмана.

3^0. Если функция Беллмана $V(t, x)$ удовлетворяет уравнению Беллмана, то отсюда не следует, что управление, при котором достигается инфимум в (1.10), является оптимальным. В частности, при этом управлении может, вообще говоря, не существовать решение уравнений движения (1.1).

4^0. Решение задачи Коши (1.10), (1.11) может оказаться не единственным. В этом случае требуется дополнительное исследование, позволяющее установить, какое из этих решений является функцией Беллмана исходной задачи оптимального управления.

Вместе с тем иногда метод динамического программирования приводит к решению задачи (1.1), (1.3). Приведем соответствующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть существует единственное непрерывно дифференцируемое решение V_0 задачи* (1.10), (1.11) *и существует допустимое управление $u_0(t, x)$ такое, что*

$$\inf_{u \in U}\left[f'(t, x, u)\frac{\partial V_0(t, x)}{\partial x}+F(t, x, u)\right]= \\ =f'(t, x, u_0)\frac{\partial V_0(t, x)}{\partial x}+F(t, x, u_0). \tag{1.12}$$

Тогда С-управление $u_0(t, x)$ является оптимальным, а соответствующая функция Беллмана есть $V_0(t, x)$.

□ Вычислим полную производную вдоль траекторий системы (1.1) при управлении u_0. В силу равенств (1.9) имеем

$$\dot{V}_0(t, x)=\frac{\partial V_0(t, x)}{\partial t}+f'(t, x, u_0)\frac{\partial V_0(t, x)}{\partial x}.$$

Далее, используя соотношения (1.12) и (1.10), находим

$$\dot{V}_0(t, x)=-F(t, x, u_0),\ t_0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in R_n. \tag{1.13}$$

Равенство (1.13) справедливо для любых $x \in R_n$. В частности, оно справедливо, если вместо x подставить траекторию $x_0(t)$, соответствующую С-управлению u_0, т. е.

$$\dot{V}_0(t, x_0(t))=-F(t, x_0(t), u_0(t, x_0(t))). \tag{1.14}$$

Проинтегрировав обе части (1.14) по t в пределах от t_0 до T, получим

$$V_0(t_0, x_0)=V(T, x(T))+\int_{t_0}^{T} F(t, x_0(t), u_0(t, x_0(t)))\,dt. \tag{1.15}$$

Но $V(T, x(T)) = \varphi(x(T))$ в силу условия (1.11). Отсюда, а также из (1.2) и (1.15) вытекает, что

$$J(u_0) = V_0(t_0, x_0). \tag{1.16}$$

Пусть теперь $u(t, x)$ — любое допустимое С-управление, а $x(t)$ — соответствующее ему решение уравнения (1.1). Тогда, используя равенство (1.10), как и при выводе соотношения (1.14), заключаем, что

$$\dot{V}(t, x(t)) \geqslant -F(t, x(t), u(t, x(t))).$$

Интегрируя это неравенство в пределах от t_0 до T, в силу (1.11) получаем соотношение

$$J(u) \geqslant V_0(t_0, x_0). \tag{1.17}$$

Сравнение (1.16) и (1.17) показывает, что $J(u_0) = V_0(t_0, x_0) \leqslant J(u)$. Тем самым оптимальность управления u_0 установлена. ■

Выделим теперь основные этапы построения С-управления на основе метода динамического программирования.

1^0. Находят управление $u = u(t, x, V)$, реализующее минимум левой части уравнения (1.10).

2^0. Подставляя это управление в (1.10), получают нелинейное уравнение в частных производных относительно функции $V(t, x)$. Краевое условие имеет вид (1.11).

3^0. Решают полученную задачу и определяют $V(t, x)$.

4^0. Подставляя найденное значение $V(t, x)$ в выражение $u(t, x, V)$, определенное в п. 1^0, находят оптимальное С-управление $u(t, x) = u(t, x, V(t, x))$.

Тогда на основании теоремы 1.1 можно утверждать, что если решение $V(t, x)$ уравнения Беллмана единственно, а найденное управление $u(t, x)$ допустимо, то $u(t, x)$ — оптимальное С-управление, а $V(t, x)$ — функция Беллмана.

3. Связь метода динамического программирования и принципа максимума. При ряде дополнительных предположений о гладкости функции Беллмана из метода динамического программирования может быть выведен принцип максимума Понтрягина.

Проиллюстрируем сказанное на примере задачи оптимального управления (1.1), (1.2). Метод динамического программирования позволяет свести эту задачу к решению задачи Коши (1.10), (1.11). Предположим, что существует единственное непрерывное решение этой задачи $V(t, x)$ с непрерывными производными V_t, V_x, V_{tx}, V_{xx} и допустимое управление $u_0(t, x)$, удовлетворяющее равенству (1.12):

$$\inf_{u \in U} [f'(t, x, u) V_x + F(t, x, u)] = f'(t, x, u_0) V_x + F(t, x, u_0). \tag{1.18}$$

Тогда, как показано в п. 2, управление u_0 является оптимальным. Соответствующую С-управлению u_0 оптимальную траекторию системы обозначим через $x_0(t)$.

Введем функции $\psi(t) \in R_n$ и $H \in R_1$ с помощью равенств

$$\psi(t) = -V_x(t, x(t)),$$
$$H(t, x, u, \psi(t)) = \psi'(t) f(t, x, u) - F(t, x, u). \tag{1.19}$$

Тогда из равенства (1.18) вытекает соотношение

$$f'(t, x_0(t), u_0)\, V_x(t, x_0(t)) + F(t, x_0(t), u_0) =$$
$$= \min_{u \in U} [f'(t, x_0(t), u)\, V_x(t, x_0(t)) + F(t, x_0(t), u)].$$

Отсюда и из (1.19) следует, что

$$\max_{u \in U} [-f'(t, x_0(t), u)\, V_x(t, x_0(t)) - F(t, x_0(t), u)] =$$
$$= \max_{u \in U} [\psi'(t) f(t, x_0(t), u) - F(t, x_0(t), u)] =$$
$$= \max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0 \psi(t)). \tag{1.20}$$

Далее, на основании (1.10) и (1.18) имеем

$$V_t(t, x) = -V'_x(t, x) f(t, x, u_0) - F(t, x, u_0) = H(t, x, u, \psi(t)).$$

Продифференцируем обе части этого выражения по x и положим $x = x_0(t)$. Это возможно сделать, поскольку V_{tx} существует и непрерывна. Учитывая равенства (1.19), заключаем, что

$$V_{tx}(t, x_0(t)) = -\dot{\psi}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, x_0(t), u_0(t) \psi(t)). \tag{1.21}$$

Аналогично, дифференцируя обе части (1.11) по x и полагая $x = x_0(T)$, в силу (1.19) получаем

$$V_x(T, x_0(T)) = -\psi(T) = \varphi_x(x_0(T)).$$

Отсюда и из (1.21) следует, что функция $\psi(t)$ есть решение задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \quad \psi(T) = -\varphi_x(x_0(T)). \tag{1.22}$$

Условия (1.20), (1.22) совпадают с доказанными в гл. V соотношениями (1.6), (1.7), (1.8) принципа максимума.

Заметим, что метод динамического программирования позволяет свести задачу оптимального управления к исследованию задачи

Коши (1.10), (1.11) для нелинейного уравнения в частных производных. В то же время с помощью принципа максимума решение задач управления сводится к изучению краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что, вообще говоря, представляется более простым.

4. Построение С-управления в задаче об успокоении твердого тела. Рассмотрим задачу о наискорейшем успокоении твердого тела, совершающего вращательное движение относительно центра масс O. Обозначим через x_1, x_2, x_3 проекции вектора кинетического момента на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3, где оси системы координат Ox_i представляют собой главные центральные оси инерции тела. Проекции управляющего момента на те же оси обозначим через u_i. Напомним, что если угловая скорость твердого тела $\omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, то $x_1=A\omega_1$, $x_2=B\omega_2$, $x_3=C\omega_3$, где A, B, C — главные центральные моменты инерции твердого тела. В этих обозначениях уравнения Эйлера принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)+\frac{C-B}{CB}x_2x_3=u_1,\\
&\dot{x}_2(t)+\frac{A-C}{AC}x_1x_2=u_2,\ |u|=(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{1/2}\leqslant b;\\
&\dot{x}_3(t)+\frac{B-A}{AB}x_1x_2=u_3,\ t\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

В начальный момент времени $t_0=0$ значение компонент кинетического момента $x_i(0)$ задано, причем $|x(0)|\geqslant R$. Обозначим через $T\geqslant 0$ первый момент времени, когда $|x(T)|=R$, где $R\geqslant 0$ — заданное число. Управляющий момент u требуется выбрать так, чтобы минимизировать время успокоения T.

Для решения поставленной задачи используем метод динамического программирования. Пусть V — функция Беллмана рассматриваемой задачи, имеющая смысл минимального времени успокоения. Так как уравнения движения (1.23) и ограничение на управление не зависят явно от времени, то время успокоения зависит только от вектора $x(0)$, но не зависит от момента начала движения. Поэтому функция Беллмана также зависит только от $x(0)$, т. е. $V=V(x_1, x_2, x_3)$. Поскольку в задачах быстродействия $F\equiv 1$, уравнение Беллмана имеет вид

$$\inf_{u,\ |u|\leqslant b}\left[V_{x_1}\left(u_1-x_2x_3\frac{C-B}{CB}\right)+\right.$$

$$\left.+V_{x_2}\left(u_2-x_1x_3\frac{A-C}{AC}\right)+V_{x_3}\left(u_3-x_1x_2\frac{B-A}{AB}\right)\right]=-1, \tag{1.24}$$

$$V(x)=0 \text{ при } |x|=R. \tag{1.25}$$

Найдем то управление, при котором достигается инфимум выражения

$$u_1 V_{x_1} + u_2 V_{x_2} + u_3 V_{x_3}, \quad |u| \leqslant b. \tag{1.26}$$

Заметим, что выражение (1.26) представляет собой скалярное произведение векторов u и V_x, причем вектор u в силу ограничения $|u| \leqslant b$ можно повернуть на любой угол относительно вектора V_x. Отсюда и из определения скалярного произведения двух векторов (равного произведению их длин на косинус угла между ними) вытекает, что искомое управление должно быть максимально по величине, а его направление противоположно направлению вектора V_x. Единичный вектор, направленный вдоль вектора V_x, равен $V_x |V_x|^{-1}$. Следовательно, управление u_i, на котором достигается инфимум выражения (1.26), имеет вид

$$u_i = -b \frac{\partial V}{\partial x_i} \left(\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{-1/2} \tag{1.27}$$

Подставляя управление (1.27) в (1.24), получаем

$$V_{x_1} x_2 x_3 \frac{C-B}{CB} + V_{x_2} x_1 x_3 \frac{A-C}{AC} +$$

$$+ V_{x_3} x_1 x_2 \frac{B-A}{BA} - b \left(\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{-1/2} = -1. \tag{1.28}$$

Вследствие сферической симметрии задачи (1.24), (1.25) будем искать ее решение в виде $V(x) = b^{-1} \omega (|x|)$, где ω — скалярная функция, а $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Для определения функции ω, используя (1.24), (1.25), получаем уравнение

$$\frac{d\omega(r)}{dr} = -1, \quad \omega(R) = 0.$$

Значит, $\omega(|x|) = |x| - R$. Итак, находим оптимальное управление u_i и время успокоения $V(x)$:

$$u_i = -b x_i |x|^{-1}, \quad |u| = b, \quad V(x) = \frac{1}{b} (|x| - R). \tag{1.29}$$

Выражения (1.29) показывают, что вектор оптимального управления максимален по величине, а его направление противоположно направлению вектора кинетического момента.

5. Оптимальный режим снижения мощности ядерного реактора. Исследуем оптимальное управление процессом снижения мощности реактора в одногрупповом приближении (см. § 3 гл. III). Пусть

$n(t)$ — число нейтронов в реакторе в момент t, а управление $u(t)$ пропорционально изменению коэффициента размножения нейтронов. Тогда

$$\dot{n}(t)=u(t)n(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ n(0)=n_0>0, \tag{1.30}$$

где T — заданное время снижения мощности. Предположим, что минимизируемый критерий качества имеет вид

$$J(u)=\alpha\ln^2 n(T)+\beta\int_0^T u^2(t)\,dt\to\inf_u. \tag{1.31}$$

Здесь $\alpha\geqslant 0$ и $\beta>0$ — заданные постоянные, а интеграл пропорционален квадрату вносимого поглощения. Управление $u(t)$ подчинено естественному ограничению $u(t)\geqslant 0$. Уравнение Беллмана для задачи (1.30), (1.31) записывается в виде

$$V_t+\inf_u\,(unV_n+\beta u^2)=0,\ V(T,n)=\alpha\ln^2 n. \tag{1.32}$$

Управление, минимизирующее левую часть (1.32), есть

$$u=-\frac{n}{2\beta}V_n. \tag{1.33}$$

Подставляя это управление в (1.32), для определения функции $V(t, n)$ получаем уравнение

$$V_t-\frac{n^2}{4\beta}(V_n)^2=0,\ V(T,n)=\alpha\ln^2 n.$$

Дифференцированием можно проверить, что решением этой задачи является функция

$$V(t,n)=\frac{\alpha\ln^2 n}{1+\alpha\beta^{-1}(T-t)}. \tag{1.34}$$

Из (1.33) и (1.34) вытекает, что оптимальное С-управление имеет вид

$$u(t,n)=-[\beta+\alpha(T-t)]^{-1}\alpha\ln n.$$

6. Линейно-квадратичная задача. Найдем решение ЛК-задачи с помощью метода динамического программирования и сравним это решение с тем, которое было получено ранее в § 2 гл. IV. Пусть уравнения движения системы имеют вид

$$\dot{x}(t)=Ax+Bu,\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ t\geqslant t_0,\ x(t_0)=x_0. \tag{1.35}$$

За квадратичный критерий качества примем выражение

$$J(u)=x'(T)N_1x(T)+\int_{t_0}^{T}(x'(s)N_2(s)x(s)+$$

$$+u'(s)N_3(s)u(s))\,ds,\ N_1\geqslant 0,\ N_2(s)\geqslant 0,\ N_3(s)>0. \qquad (1.36)$$

Для задачи (1.35), (1.36) запишем уравнение Беллмана (1.10):

$$\inf_u [V_t+V'_x(Ax+Bu)+x'N_2x+u'N_3u]=0. \qquad (1.37)$$

Граничное условие (1.11) для уравнения (1.37) примет вид

$$V(T, x)=x'N_1x. \qquad (1.38)$$

Найдем управление u, реализующее инфимум выражения (1.37). Для этого продифференцируем по вектору u выражение в квадратных скобках в (1.37) и приравняем полученную производную нулю. Последовательно находим

$$B'V_x+2N_3(t)u=0,\ u=-\frac{1}{2}N_3^{-1}(t)B'V_x. \qquad (1.39)$$

Подставляя выражение (1.39) вместо u в (1.37), приходим к уравнению для V:

$$V_t+x'N_2x+V'_xAx-\frac{1}{4}V'_xBN_3^{-1}B'V_x=0. \qquad (1.40)$$

Таким образом, функция Беллмана удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных (1.40) с краевым условием (1.38). Будем искать решение уравнения (1.40) с условием (1.38) в виде

$$V(t, x)=x'P(t)x, \qquad (1.41)$$

где матрица $P(t)$ подлежит определению. Подставляя выражение (1.41) в уравнение (1.40), получаем, что матрица $P(t)$ есть решение задачи

$$\dot{P}(t)+N_2+A'P+PA-PBN_3^{-1}B'P=0,\ t_0\leqslant t\leqslant T,\quad P(T)=N_1. \qquad (1.42)$$

Сравнивая уравнение (1.42) с уравнением (2.8) гл. IV, видим, что они полностью совпадают. Дальнейшее исследование задачи (1.42) можно провести аналогично тому, как это было сделано в § 2 гл. IV, и получить те же результаты. При этом С-управление в силу равенств (1.39) и (1.41) выражается формулой

$$u(t, x)=-N_3^{-1}(t)B'P(t)x,$$

а минимальное значение критерия качества (1.36) есть

$$J(u_0)=x'_0P(t_0)x_0=V(t_0, x_0).$$

§ 2. УПРАВЛЕНИЕ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ. СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Постановка задач. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u),\ t\geqslant 0,\ f(t, 0, 0)=0,\quad x(0)=x_0,\ x(t)\in R_n,\ u\in R_m. \tag{2.1}$$

Управление u системой (2.1) ищется в классе функций, зависящих от времени t и текущих значений координат $x(t)$, т. е. в форме С-управления вида $u=u(t, x(t))$, причем удовлетворяется ограничение $u=u(t, x(t))\in U$, где U — заданное множество из R_m. Кроме того, предполагается, что $u(t, 0)=0$.

Можно выделить следующие постановки задач управления на неограниченном интервале времени.

1^0. *Найти С-управление $u(t, x)$, при котором система* (2.1) *становится асимптотически устойчивой в том или ином смысле.* При этом в зависимости от того, в каком именно смысле должна быть сделана устойчивой система (2.1), различают *задачи асимптотической стабилизации, экспоненциальной стабилизации, стабилизации в целом* и т. д., если тривиальное решение системы (2.1) при управлении u становится соответственно асимптотически устойчивым, экспоненциально устойчивым, асимптотически устойчивым в целом и т. д. Такое управление называют *стабилизирующим* (или, более точно, *асимптотически стабилизирующим, экспоненциально стабилизирующим, стабилизирующим в целом* и т. д.).

2^0. *Найти управление $u(t, x)$, минимизирующее критерий качества*

$$J(u)=\int_0^\infty F_0(t, x(t), u(t, x))\,dt\to\inf_{u\in U} \tag{2.2}$$

Здесь F_0, $F_0: R_1\times R_n\times R_m\to R_1$ есть заданная функция.

Отметим, что задачи стабилизации в этих двух постановках не всегда эквивалентны друг другу. Так, пусть функция F_0 в функционале (2.2) такова, что $F_0(t, x, u)\gg 1$ при $|x|\leqslant Nt$ и $F_0(t, x, u)\equiv\equiv 0$ при $|x|>N(t+1)$, где $N>0$ — заданное число. Тогда оптимальным управлением в задаче (2.1), (2.2) может оказаться стратегия, при которой решение задачи (2.1) как можно больше времени находится вне множества $|x|\leqslant Nt$. Система (2.1) при таком управлении, вообще говоря, не будет устойчивой.

Однако при некоторых дополнительных предположениях, излагаемых ниже, оптимальное управление в задаче (2.1), (2.2) одновременно превращает тривиальное решение системы (2.1) в асимптотически устойчивое.

В связи с этим представляет интерес третья постановка задачи стабилизации.

3^0. *Найти управление* $u(t, x)$, *которое минимизирует функционал* (2.2) *и одновременно превращает систему* (2.1) *в устойчивую (в том или ином смысле)*. Задача стабилизации в этой постановке называется *задачей оптимальной стабилизации*, а получаемое при этом управление — *оптимальным стабилизирующим*. Ниже основное внимание будет сосредоточено на задаче оптимальной стабилизации.

2. Второй метод Ляпунова в задаче оптимальной стабилизации. Сформулируем условия разрешимости задачи оптимальной стабилизации в терминах существования скалярных функций Ляпунова $V(t, x)$, обладающих определенными свойствами (о функциях Ляпунова и их свойствах см. гл. I).

Как и в гл. I, обозначим через $\omega_i(r)$ $(r \geqslant 0)$ скалярные непрерывные неубывающие функции такие, что $\omega_i(r) > 0$ при $r > 0$ и $\omega_i(0) = 0$. Далее, обозначим через L_u оператор

$$L_u V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + f'(t, x, u) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}.$$

Отметим, что $L_u V(t, x)$ представляет собой полную производную функции $V(t, x)$ вдоль траекторий системы (2.1) при управлении u.

Приведем условия того, что некоторое С-управление $u(t, x)$ является стабилизирующим.

Теорема 2.1. *Управление* $u(t, x)$ *является стабилизирующим для системы* (2.1), *если существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова* $V(t, x)$ *такая, что*

$$\omega_1(|x|) \leqslant V(t, x) \leqslant \omega_2(|x|), \tag{2.3}$$

$$L_u V(t, x) \leqslant -\omega_3(|x|). \tag{2.4}$$

При этом управлении тривиальное решение системы (2.1) *является равномерно асимптотически устойчивым.*

Справедливость сформулированного утверждения следует из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (теоремы 2.3 гл. I).

Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации. Управление $u \in U$ называется *допустимым* в задаче оптимальной стабилизации, если оно является стабилизирующим в целом и интеграл (2.2) существует.

Теорема 2.2 [16]. *Пусть существуют функция Ляпунова* $V(t, x)$ *и допустимое управление* $u_0(t, x)$ *такие, что выполнены неравенства* (2.3) *и справедливо соотношение*

$$\inf_{u \in U} [L_u V(t, x) + F_0(t, x, u)] = L_{u_0} V(t, x) + F_0(t, x, u_0) = 0, \tag{2.5}$$

где инфимум вычисляется по векторному параметру $u \in U \subset R_m$.

Тогда управление $u_0(t, x)$ является оптимальным стабилизирующим, причем

$$\inf \int_0^\infty F_0(t, x(t), u(t, x))\,dt = \int_0^\infty F_0(t, x_0(t), u_0(t, x_0(t)))\,dt = V(0, x_0), \tag{2.6}$$

где инфимум вычисляется по всем допустимым управлениям $u(t, x)$.

□ Из соотношения (2.5) вытекает равенство

$$L_{u_0} V(t, x) = -F_0(t, x, u_0(t, x)).$$

Подставив в него вместо x траекторию $x_0(t)$ и проинтегрировав полученное соотношение по t в пределах от 0 до $T > 0$, находим

$$\int_0^T L_{u_0} V(t, x_0(t))\,dt = V(T, x_0(T)) - V(0, x_0) =$$

$$= -\int_0^T F_0(t, x_0(t), u_0(t, x_0(t)))\,dt. \tag{2.7}$$

Так как управление u_0 допустимо, то

$$\lim_{t\to\infty} x_0(t) = 0. \tag{2.8}$$

Из неравенств (2.3) вытекает, что

$$0 \leqslant V(T, x_0(T)) \leqslant \omega_2(|x_0(T)|). \tag{2.9}$$

Переходя к пределу в (2.7) при $T \to \infty$ и учитывая (2.8) и (2.9), получим

$$\int_0^\infty F_0(t, x_0(t), u_0(t, x_0(t)))\,dt = V(0, x_0). \tag{2.10}$$

Пусть теперь $u(t, x)$ — произвольное допустимое управление. Тогда в силу (2.5) справедливо неравенство

$$L_u V(t, x) \geqslant -F_0(t, x, u(t, x)).$$

Подставим сюда вместо x траекторию $x(t)$, соответствующую управлению u, проинтегрируем полученное неравенство по t в пределах от 0 до T и перейдем к пределу при $T \to \infty$. Имеем

$$V(0, x_0) \leqslant \int_0^\infty F_0(t, x(t, u), u(t, x(t, u)))\,dt.$$

Сравнивая это неравенство с равенством (2.10), убеждаемся в справедливости соотношений (2.6). ■

3. Экспоненциальная стабилизация. Как условия, так и утверждения теоремы 2.2 могут быть модифицированы в различных направлениях при других ограничениях на V, u_0 и правые части системы (2.1). Приведем одну из таких модификаций.

В этом пункте *допустимым* управлением называется такое С-управление $u(t, x) \in U$, при котором существуют решение уравнения (2.1) и интеграл в (2.2). Отметим, что из сходимости интеграла (2.2), вообще говоря, не вытекает стремление $x(l)$ к нулю при $t \to \infty$. Приводимые далее условия обеспечивают асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (2.1). Сформулируем сначала следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть неотрицательная скалярная дифференцируемая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям*

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)\right| \leqslant C_1 f(t),\ t \geqslant 0,\ C_1 > 0,\ \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C_2 < \infty,\ C_2 > 0. \tag{2.11}$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

□ Интегрируя неравенства (2.11), получим

$$f(t) \leqslant f(0) + C_1 \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \leqslant f(0) + C_1 C_2;$$

$$f(t) \geqslant f(0) - C_1 \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \geqslant f(0) - C_1 C_2.$$

Эти неравенства означают, что $f(t)$ — равномерно ограниченная функция при $t \geqslant 0$. Из неравенств (2.11) следует, что и $|f(t)|$ также ограничена на полуоси $[0, \infty)$, т. е. $|f(t)| \leqslant C_3$ и $|dt/dt| \leqslant C_1 C_3$.

Предположим теперь, что соотношение $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ неверно. Тогда существуют последовательность точек t_i и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$f(t_i) \geqslant \varepsilon,\ t_i \to \infty,\ i \to \infty,\ |t_i - t_{i-1}| > \frac{2\varepsilon}{C_1 C_3}.$$

При этом имеем

$$f(s) \geqslant \frac{\varepsilon}{2},\ s \in L_i = \left[t_i - \frac{\varepsilon}{2C_1C_3},\ t_i + \frac{\varepsilon}{2C_1C_3}\right].$$

Отрезки L_i и L_j не пересекаются при любых i и j $(i \neq j)$. Значит, интеграл (2.11) должен расходиться, поскольку

$$\int_0^\infty f(t)\,dt \geqslant \int_0^T f(t)\,dt \geqslant \sum_{ij \leqslant T} \int_{L_i} f(t)\,dt \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{\varepsilon}{C_1 C_3} N(T). \tag{2.12}$$

Здесь $N(T)$ — число точек t_i, не превосходящих T. Так как $N(T) \to \infty$ при $T \to \infty$, то интеграл слева в (2.12) расходится, что противоречит условиям леммы. Из этого противоречия и вытекает справедливость леммы. ■

Теорема 2.3. *Пусть при любом допустимом управлении $u(t, x)$ выполнены неравенства*

$$F_0(t, x, u(t, x)) \geqslant C_1 |x|^\alpha, \quad t \geqslant 0, \quad C_1, \alpha > 0, \tag{2.13}$$

$$|f(t, x, u(t, x))| \leqslant C_2 |x|, \quad t \geqslant 0, \quad C_2 > 0. \tag{2.14}$$

Пусть, далее, некоторое допустимое управление $u_0(t, x)$ и непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$ удовлетворяют уравнению (2.5), *причем*

$$0 \leqslant V(t, x) \leqslant \omega_2(|x|). \tag{2.15}$$

Тогда $u_0(t, x)$ является оптимальным стабилизирующим управлением, а $V(t, x)$ — функцией Беллмана в задаче (2.1), (2.2). *Это означает, что тривиальное решение системы* (2.1) *при управлении $u_0(t, x)$ экспоненциально устойчиво в целом и справедливо равенство* (2.6).

□ При любом допустимом управлении $u(t, x)$ в силу неравенства (2.13) имеем

$$C_1 \int_0^t |x(s)|^\alpha\,ds \leqslant \int_0^t F_0(s, x, u(s, x))\,ds.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \to \infty$, получим

$$\int_0^\infty |x(s)|^\alpha\,ds \leqslant C_1^{-1} J(u) < \infty.$$

Далее, используя неравенство (2.14), найдем

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^\alpha = \alpha |x(t)|^{\alpha-2} x'(t) f(t, x, u),$$

$$\left|\frac{d}{dt}|x(t)|^\alpha\right| \leqslant \alpha C_2 |x(t)|^\alpha$$

Применяя теперь к функции $|x(t)|^{\alpha}$ лемму 2.1, имеем

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)|^{\alpha}=0,\ \lim_{t\to\infty}x(t)=0. \tag{2.16}$$

Используя соотношение (2.16) и повторяя доказательство теоремы 2.2, заключаем, что управление $u_0(t, x)$, удовлетворяющее равенству (2.5), является оптимальным, т. е.

$$V(0, x_0)=J(u_0)\leqslant J(u). \tag{2.17}$$

Для завершения доказательства теоремы 2.3 остается установить экспоненциальную устойчивость в целом тривиального решения системы (2.1) при управлении $u_0(t, x)$. Покажем, что функция $V(t, x)$ удовлетворяет оценке

$$C_3|x|^{\alpha}\leqslant V(t, x),\ t\geqslant 0,\ x\in R_n. \tag{2.18}$$

Обозначим через $y(s, t, x)$ решение задачи

$$\dot{y}(s)=f(s, y, u_0(s, y)),\ s\geqslant t,\ y(t)=x. \tag{2.19}$$

Аналогично предыдущему устанавливается, что решение задачи (2.19) обладает следующими свойствами:

$$V(t, x)=\int_t^{\infty}F_0(s, y(s), u_0(s, y(s)))\,ds,$$

$$-\alpha C_2|y(s)|^{\alpha}\leqslant\frac{d}{ds}|y(s)|^{\alpha}\leqslant\alpha C_2|y(s)|^{\alpha},\ y(s)\to 0,\ s\to\infty.$$

Значит, существует такое T, что

$$|y(T)|^{\alpha}\leqslant\frac{1}{2}|x|^{\alpha}.$$

Из этих оценок вытекает цепочка неравенств

$$V(t, x)=\int_t^{\infty}F_0(s, y(s), u_0(s, y(s)))\,ds\geqslant C_1\int_t^{\infty}|y(s)|^{\alpha}ds\geqslant$$

$$\geqslant C_1\int_t^{T}|y(s)|^{\alpha}ds\geqslant-\frac{C_1}{2C_2}\int_t^{T}\frac{d\,|y(s)|^{\alpha}}{ds}ds=\frac{C_1}{\alpha C_2}[|x|^{\alpha}-|y(T)|^{\alpha}]\geqslant\frac{C_1}{2\alpha C_2}|x|^{\alpha}.$$

Оценка (2.18) установлена. Далее, из уравнения (2.5) следует, что

$$L_{u_0}V(t, x)=\dot{V}(t, x_0(t))=-F_0(t, x_0(t), u_0(t, x)). \tag{2.20}$$

Используя неравенства (2.13) и (2.18), из (2.20) получаем

$$\dot{V}(t, x_0(t)) \leqslant -C_1 |x_0(t)|^{\alpha} \leqslant -C_3 V(t, x_0(t)).$$

Интегрируя это неравенство, находим

$$V(t, x_0(t)) \leqslant -C_4 \exp(-C_3 t).$$

Используя снова неравенство (2.18), имеем

$$|x_0(t)| \leqslant C_4 \exp(-C_3 \alpha^{-1} t). \qquad (2.21)$$

Значит, в системе (2.1) при управлении $u_0(t, x)$ любое решение $x_0(t)$ удовлетворяет неравенству (2.21), т. е. тривиальное решение уравнения (2.1) экспоненциально устойчиво в целом. ■

4. Стабилизация движения робота-манипулятора. Одна из важных задач, встречающихся при изучении манипуляционных роботов, связана с построением контура управления. Если характеристики окружающей среды и робота точно известны, то соответствующая задача состоит в определении программного управления движением. Наряду с этим, если какие-либо параметры, определяющие движение, известны неточно, получаются различные задачи синтеза, в которых управление формируется в зависимости от реализовавшихся значений координат, доступных измерению.

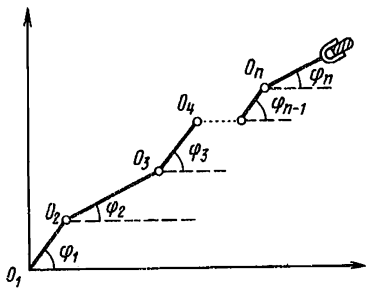


Рис. 2.1. Манипуляционный робот с n звеньями

Рассмотрим n-звенный манипулятор (рис. 2.1). Звенья манипулятора представляют собой абсолютно твердые тела, последовательно соединенные друг с другом с помощью шарниров. Первое из звеньев шарнирно связано с неподвижным основанием, а на конце последнего звена расположен схват, в котором находится перемещаемый груз массы m. Обозначим через $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ вектор шарнирных углов, через $H(\varphi)$ — матрицу инерции, а через T — кинетическую энергию манипулятора, равную $T = \frac{1}{2} \dot{\varphi}' H(\varphi) \dot{\varphi}$. Здесь штрих — знак транспонирования, $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ — вектор обобщенных скоростей. Пусть $\psi = H(\varphi)\dot{\varphi}$ — вектор обобщенного импульса. Тогда уравнения движения (уравнения Лагранжа) имеют вид

$$\dot{\psi}(t) = T_{\varphi} - \gamma H^{-1}(\varphi)\psi + u, \quad T_{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi}(t) = H^{-1}(\varphi)\psi, \quad t \geqslant 0, \qquad (2.22)$$

где H^{-1} — матрица, обратная к H (напомним, что $H(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая, положительно определенная равномерно ограниченная матрица), а γ — диагональная неотрицательно определенная матрица коэффициентов вязкого трения в шарнирах манипулятора с элементами $\gamma_i \geqslant 0$. Конкретные значения m и γ_i неизвестны, а известно лишь, что $0 \leqslant \gamma_i \leqslant \gamma_i^0$, $0 \leqslant m \leqslant m_0$, где m_0 и γ_i^0 заданы. В шарнирах манипулятора действуют управляющие моменты, которые в случае ПД-регулятора имеют вид

$$u = -A\dot{\varphi} - B\varphi. \tag{2.23}$$

Рассмотрим задачу о выборе таких диагональных матриц $A>0$, $B>0$, при которых управление (2.23) является стабилизирующим для системы (2.22).

Пусть скалярная функция Ляпунова имеет вид

$$V = T + \frac{1}{2}\varphi' B\varphi + \varepsilon\psi'\varphi, \tag{2.24}$$

где параметр $\varepsilon>0$ будет выбран ниже. Вычислим полную производную $\dot{V}$ функции (2.24) вдоль траекторий системы (2.22), (2.23). Так как $T = \frac{1}{2}\psi' H^{-1}\psi$, то

$$\dot{V} = \dot{\psi}' H^{-1}\psi + \frac{1}{2}\psi'\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H^{-1}\right)\psi + \dot{\varphi}' B\varphi + \varepsilon\dot{\psi}'\varphi + \varepsilon\psi'\dot{\varphi}. \tag{2.25}$$

Преобразуем отдельные слагаемые в равенстве (2.25). Заметим, что

$$\frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}t} = -\sum_{i=1}^{n}\dot{\varphi}_i H^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_i}\right)H^{-1}, \quad \dot{\psi}' = \psi' H^{-1}.$$

Значит,

$$\frac{1}{2}\psi'\left[\frac{\mathrm{d}H^{-1}(\varphi)}{\mathrm{d}t}\right]\psi = \frac{1}{2}\psi'\sum_{i=1}^{n}\dot{\varphi}_i\frac{\partial H^{-1}(\varphi)}{\partial\varphi_i}\psi =$$

$$= -\frac{1}{2}\psi'\sum_{i=1}^{n}\dot{\varphi}_i H^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial\varphi_i}\right)H^{-1}\psi =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}'\left(\frac{\partial H}{\partial\varphi_i}\right)\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(H^{-1}\psi)_i\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(\dot{\varphi}' H\dot{\varphi}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(H^{-1}\psi)_i\frac{\partial T}{\partial\varphi_i} = -\psi' H^{-1}T_\varphi,$$

$$\dot{\psi}' H^{-1}\psi = [T_\varphi - (A-\gamma)H^{-1}\psi - B\varphi]' H^{-1}\psi. \tag{2.26}$$

Кроме того,

$$\dot{\varphi}'B\varphi=\psi'H^{-1}B\varphi,\ \psi'\dot{\varphi}=\psi'H^{-1}\psi,$$
$$\dot{\psi}'\varphi=[T_\varphi-(A+\gamma)H^{-1}\psi-B\varphi]'\varphi. \tag{2.27}$$

Подставляя (2.26) и (2.27) в (2.25) и приводя подобные члены, получим

$$\dot{V}=\varepsilon\varphi'T_\varphi-\psi'\,[H^{-1}\,(A+\gamma)\,H^{-1}-\varepsilon H^{-1}]\,\psi-$$
$$-\varepsilon\varphi'B\varphi-\varepsilon\varphi'\,(A+\gamma)\,H^{-1}\psi. \tag{2.28}$$

Далее оценим слагаемые в равенстве (2.28) следующим образом:

$$\varepsilon\varphi'\,(A+\gamma)\,H^{-1}\psi\leqslant\frac{1}{2}\,\varepsilon^2\varphi'\,(A+\gamma)\,\varphi+\frac{1}{2}\,\psi'H^{-1}\,(A+\gamma)\,H^{-1}\psi,$$
$$\varepsilon\varphi'T_\varphi=-\frac{\varepsilon}{2}\,\psi'H^{-1}\sum_i\varphi_i\left(\frac{\partial H}{\partial\varphi_i}\right)H^{-1}\psi. \tag{2.29}$$

Из (2.28) и (2.29) вытекает неравенство

$$\dot{V}\leqslant W,$$

где

$$W=-\varepsilon\varphi'\left[B-\frac{\varepsilon}{2}\,(A+I\gamma)\right]\varphi-\psi'N^{-1}\times$$
$$\times\left[\frac{A+\gamma}{2}-\varepsilon H+\frac{\varepsilon}{2}\sum_i\varphi_i\frac{\partial H}{\partial\varphi_i}\right]H^{-1}\psi. \tag{2.30}$$

Из (2.29) следует, что $\dot{V}$ отрицательно определена при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ в любой ограниченной области $(\varphi,\ \dot{\varphi})$. Таким образом, тривиальное решение системы (2.22) с управлением (2.23) асимптотически устойчиво в целом.

Замечание. Рассмотренная задача тесно связана с задачей о переводе с успокоением манипулятора из заданного начального положения (φ (0), $\dot{\varphi}$ (0)) в заданное конечное положение $(\bar{\varphi}, 0)$. Однако значения параметров m и γ_i неизвестны, поэтому обеспечить перевод манипулятора в заданное конечное положение, вообще говоря, невозможно. Следовательно, возможной формализацией постановки задачи является выбор такого управления, при котором выполняются соотношения $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi\,(t)=\bar{\varphi}$, $\lim\limits_{t\to\infty}\dot{\varphi}\,(t)=0$. Этого всегда можно добиться с помощью регулятора $u=-A\dot{\varphi}-B\,(\varphi-\bar{\varphi})$ при произвольных диагональных матрицах $A>0$, $B>0$.

Проиллюстрируем сказанное на примере плоского двухзвенника на неподвижном основании (см. п. 4 § 2 гл. VI). Выражение для кинетической энергии T двухзвенника имеет вид

$$T=\frac{1}{2}(H_1\dot{\varphi}_1^2+H_2\dot{\varphi}_2^2+2H_3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (2.31)$$

Здесь φ_1 и φ_2 — шарнирные углы звеньев манипулятора в абсолютной системе координат. Массово-инерционные характеристики двухзвенника имеют следующие значения (кг·м^2): $H_1=42{,}7$; $H_2=9{,}4$; $H_3=5$.

Требуется перевести двухзвенник из положения $\varphi_i=1$ рад, $\dot{\varphi}_i=0$ в положение $\varphi_i=0$, $\dot{\varphi}_i=0$ $(i=1, 2)$ с помощью ПД-регулятора:

$$u=-75\dot{\varphi}-50\varphi. \qquad (2.32)$$

Для сравнения эта же задача решалась с помощью пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора (ПИД-регулятора) вида

$$u=-75\dot{\varphi}-500\int_0^t e^{-10(t-s)}\varphi(s)\,ds. \qquad (2.33)$$

Уравнения движения манипулятора (2.22), (2.31), (2.32) и (2.22), (2.31), (2.33) интегрировались численно. На рис. 2.2 и 2.4 регулятору (2.33) соответствуют сплошные, а регулятору (2.32) — штриховые линии. На рис. 2.2 изображены графики функции $\Phi=\varphi_1^2+\varphi_2^2++\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2$, иллюстрирующие стремление траекторий

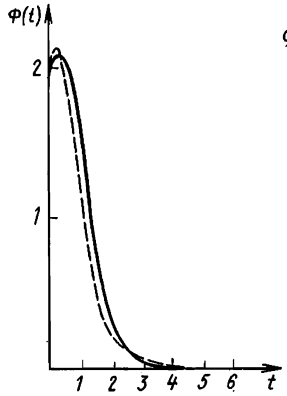


Рис. 2.2. Переходные процессы в двухзвеннике по совокупности угловых переменных и угловых скоростей

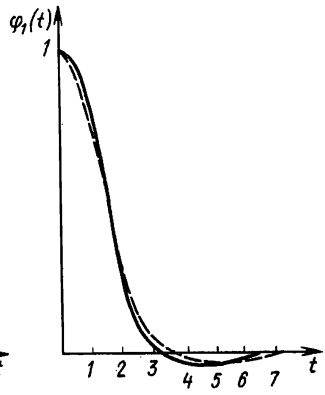


Рис. 2.3. Переходные процессы для шарнирного угла φ_1 первого звена двухзвенника

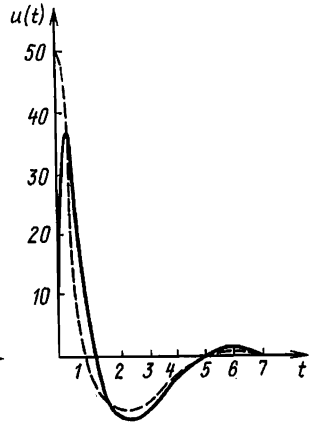


Рис. 2.4. Зависимость от времени управляющего момента в первом звене двухзвенника

движения к нулю. На рис. 2.3 приведены графики зависимости от времени шарнирного угла φ_1 (выраженного в радианах) для первого звена. Зависимость управления (управляющего момента в ньютонметрах) в первом шарнире изображена на рис. 2.4. Расчеты показывают, что при одинаковом качестве переходных процессов регулятор (2.33) по сравнению с регулятором (2.32) имеет то преимущество, что в случае его реализации требуемая максимальная величина управляющего момента существенно меньше.

§ 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Нестационарные линейно-квадратичные задачи. Одной из наиболее изученных задач стабилизации является ЛК-задача, т. е. задача управления линейными системами с квадратичным критерием качества. Приведем некоторые относящиеся к ней результаты, ограничиваясь лишь их формулировкой для линейных систем

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u,\ t\geqslant 0,\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ x(0)=x_0 \qquad (3.1)$$

с квадратичным минимизируемым функционалом

$$J(u)=\int_0^\infty [x'(t)N_1(t)x(t)+u'N_0(t)u]\,dt\to\inf_u. \qquad (3.2)$$

Заданные матрицы A, B, N_1, N_0 имеют ограниченные непрерывные элементы. Кроме того, матрицы N_1 и N_0 равномерно положительно определены, т. е. $N_1(t)\geqslant CI$, $N_0(t)\geqslant CI$, где $C>0$ — некоторая постоянная, I — единичная матрица. Последние неравенства означают, что для любых $x\in R_n$, $u\in R_m$ и $t\geqslant 0$ справедливы оценки $x'N_1(t)x\geqslant Cx'x$, $u'N_0(t)u\geqslant Cu'u$. Управление u в задаче (3.1), (3.2) ищется в виде $u=u(t, x(t))$. Другие ограничения на управление отсутствуют. В соответствии с теоремой 2.1 для решения задачи (3.1), (3.2) необходимо построить функцию $V(t, x)$, которую в рассматриваемом случае естественно искать в виде квадратичной формы:

$$V(t, x)=x'P(t)x.$$

Здесь симметричная матрица $P(t)>0$ подлежит определению.

Заметим теперь, что уравнения Беллмана для ЛК-задачи (2.1), (2.2) гл. IV на конечном интервале и для задачи (3.1), (3.2) на бесконечном интервале совпадают. Поэтому, используя формулы (2.8), (2.11) гл. IV, получаем, что оптимальное управление u_0 и матрица $P(t)$ для задачи (3.1), (3.2) удовлетворяют соотношениям

$$u_0(t, x)=-N_0^{-1}(t)B'(t)P(t)x,\ t\geqslant 0, \qquad (3.3)$$

$$\dot{P}(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)-P(t)B(t)N_0^{-1}(t)B'(t)P(t)+N_1(t)=0. \qquad (3.4)$$

При этом в силу теоремы 2.3, если существует решение $P(t)$ уравнения (3.4) такое, что

$$P(t) \geqslant \alpha I, \quad \|P(t)\| < C, \quad \alpha > 0, \quad C > 0, \tag{3.5}$$

то система (3.1) при управлении (3.3) экспоненциально устойчива. Кроме того, управление (3.3) минимизирует функционал (3.2), равный $V(0, x_0)$.

Сформулируем достаточные условия существования и единственности решения $P(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющего условиям (3.5). Предположим, что элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ при $t \geqslant 0$ имеют непрерывные ограниченные производные до порядка $n-1$ включительно. Введем теперь n матриц $Q_1(t)$, ..., $Q_n(t)$ размера $n \times m$ и матрицу $Q(t)$ размера $n \times nm$ с помощью соотношений

$$Q_1(t) = B(t), \quad Q_2(t) = \dot{Q}_1(t) - A(t) Q_1(t), \ \ldots, \ Q_i(t) =$$
$$= \dot{Q}_{i-1}(t) - A(t) Q_{i-1}(t); \quad i = 2, \ldots, n,$$
$$Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_n(t)).$$

Теорема 3.1 [16]. *Пусть выполнены сформулированные выше предположения о параметрах задачи* (3.1), (3.2). *Пусть, кроме того, существует такое число* $\Delta > 0$, *что на любом отрезке* $[t, t+\Delta]$, $t \geqslant 0$, *найдется точка* $\tau(t)$, *в которой матрица* $Q(\tau)$ *имеет ранг, равный* n, *т. е.*

$$\operatorname{rank} Q(\tau(t)) = n, \quad t \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Тогда при $t \geqslant 0$ *существует единственное решение* $P(t)$, *удовлетворяющее условиям* (3.5). *Оптимальное управление* $u_0(t, x)$ *имеет вид* (3.3), *система* (3.1) *при этом управлении экспоненциально устойчива и* $J(u_0) = V(0, x_0)$.

2. Метод последовательных приближений для определения оптимального управления. Теорема 3.1 дает некоторые достаточные условия существования положительно-определенного решения уравнения (3.4). Для конструктивного построения этого решения может быть использована следующая *процедура последовательных приближений*, близкая к методу Ньютона в интерпретации Р. Беллмана. Применительно к задаче (3.1), (3.2) полученные при этом результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть существует управление вида* $u = R(t)x$, *при котором уравнение* (3.1) *экспоненциально устойчиво и сходится интеграл*

$$P_1(t) = \int_t^\infty Z_1(t, s) \left(N_1(s) + R'(s) N_0(s) R(s)\right) Z_1'(t, s) \, ds, \quad t \geqslant 0,$$

где $Z_1(t, s)$ — *матрица Коши линейного уравнения*

$$\dot{x}(t) = -[A(t) + B(t) R(t)]' x(t).$$

Пусть, далее, последовательность матриц $P_i(t) \geqslant 0$ $(i \geqslant 2)$ *определена с помощью соотношений*

$$P_i(t) = \int_t^\infty Z_i(t, s) [N_1(s) + P_{i-1}(s) B(s) N_0^{-1}(t) B'(s) P_{i-1}(s)] \times$$
$$\times Z'_i(t, s)\, ds, \quad i \geqslant 2,$$

где $Z_i(t, s)$ *— фундаментальные матрицы линейных уравнений*

$$\dot{x}(t) = -[A'(t) - P_{i-1}(t) B(t) N_0^{-1}(t) B'(t)] x(t), \quad i \geqslant 2.$$

Тогда последовательность матриц $P_i(t)$ *монотонно не возрастает (т. е.* $P_{i+1}(t) - P_i(t) \leqslant 0$, $t \geqslant t_0$*) и сходится к единственному решению* $P(t)$ *уравнения* (3.4), *удовлетворяющему оценкам* (3.6). *При этом матрицы* $P_i(t)$, $(i \geqslant 2)$ *являются решением линейного уравнения вида*

$$\dot{P}_i(t) + [A' - P_{i-1} B N_0^{-1} B'] P_i + P_i [A - B N_0^{-1} B' P_{i-1}] +$$
$$+ N_1 + P_{i-1} B N_0^{-1} B' P_{i-1} = 0, \quad i \geqslant 2.$$

Последовательные приближения $u_i(t, x)$ *к оптимальному управлению выражаются формулой*

$$u_i(t, x) = -N_0^{-1}(t) B'(t) P_i(t) x.$$

3. Стационарная линейно-квадратичная задача. Приведем ряд результатов, касающихся задачи оптимальной стабилизации (3.1), (3.2) при постоянных матрицах A, B, N_0, N_1, т. е. для задачи

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{3.7}$$

$$J(u) = \int_0^\infty [x'(t) N_1 x(t) + u' N_0 u]\, dt, \quad N_1 > 0, \quad N_0 > 0. \tag{3.8}$$

Значение критерия качества (3.8) не изменяется при замене начального момента $t = 0$ на произвольный момент $t = t_0$. Поэтому функция Беллмана V зависит только от x, т. е. имеет вид

$$V(x) = x' P x. \tag{3.9}$$

При этом оптимальное управление есть

$$u_0(t, x) = u_0(x) = -N_0^{-1} B' P x. \tag{3.10}$$

Постоянная симметричная матрица $P>0$ в формулах (3.9), (3.10) является решением уравнения

$$A'P+PA-PBN_0^{-1}B'P+N_1=0, \tag{3.11}$$

которое называется *алгебраическим уравнением Риккати.*

Следующая теорема дает условия, при которых уравнение (3.11) имеет, и притом единственное, решение $P>0$.

Теорема 3.3 [16]. *Пусть в стационарной ЛК-задаче* (3.7), (3.8) *выполнены условия*

$$N_0>0,\ N_1>0,\ \operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)=n. \tag{3.12}$$

Тогда уравнение (3.11) *имеет единственное решение* $P>0$ *и справедливы соотношения* (3.9), (3.10). *При управлении* (3.10) *система* (3.7) *экспоненциально устойчива и*

$$\min_u J(u)=J(u_0)=x_0'Px_0.$$

Отметим, что последнее из условий (3.12) совпадает с условием управляемости из § 2 гл. VI.

Таким образом, при постоянных матрицах A, B, N_0, N_1 решение задачи стабилизации сводится к построению положительно-определенного решения уравнения (3.11).

4. Алгебраическое уравнение Риккати. Рассмотрим некоторые методы построения решения уравнения Риккати (3.11).

Один из них, называемый иногда *методом установления,* основан на аппроксимации ЛК-задачи (3.7), (3.8) на бесконечном интервале времени ЛК-задачей на конечном интервале времени $0\leqslant t\leqslant T$ для системы (3.7) с критерием качества

$$J_1(u)=\int_0^T [x'(t)N_1x(t)+u'N_0u]\,dt. \tag{3.13}$$

Если обозначить через u_1 оптимальное управление в задаче (3.7), (3.13), то очевидно, что $J_1(u_1)\leqslant J_1(u_0)$, где u_0 — оптимальное управление для задачи (3.7), (3.8). Кроме того, интуитивно ясно, что $J_1(u_1)\to J_1(u_0)$ при $T\to\infty$. Отсюда и из известного решения задачи (3.7), (3.13), выражаемого соотношениями (2.8) и (2.11) гл. IV, следует, что если существует положительно определенное решение P уравнения (3.11), то оно является пределом при $T\to\infty$ решений $\alpha(t)$ задачи Коши

$$\dot\alpha(t)+\alpha(t)A+A'\alpha(t)-\alpha(t)BN_0^{-1}B'\alpha(t)+N_1=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$\alpha(T)=0.$$

Удобно положить $\beta(t)=\alpha(T-t)$. Тогда функция $\beta(t)$ есть решение уравнения

$$\dot{\beta}=\beta A+A'\beta-\beta BN_0^{-1}B'\beta+N_1,\ \beta(0)=0,$$

откуда в результате получим $\lim_{t\to\infty}\beta(t)=P$. Обоснование этого соотношения имеется в [16].

Для некоторых задач оптимальной стабилизации (3.7), (3.8) коэффициенты оптимального управления могут быть вычислены непосредственно без предварительного определения оптимальной функции $V_0(t, x)$. Опишем некоторые способы вычисления этих коэффициентов.

Пусть в системе (3.7) u — скалярное управление, а матрица A и вектор-столбец B постоянны. В критерии качества (3.8) матрица $N_0=I$, где I — единичная матрица. Оптимальное управление в этой задаче имеет вид $u_0=Q'x$, где элементы постоянного вектор-столбца $Q\in R_n$ подлежат определению. Для определения вектора Q составим определитель $D(\lambda)$ порядка $2n$:

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}A-\lambda I & BB'\\ N_1 & -A'-\lambda I\end{vmatrix}.$$

Этот определитель, представляющий собой полином степени $2n$, можно записать в виде произведения:

$$D(\lambda)=(-1)^n D_1(\lambda)\,D_1(-\lambda).$$

Здесь все корни полинома $D_1(\lambda)$ степени n лежат в левой полуплоскости. Можно показать, что определитель матрицы $A+BQ'-\lambda I$ равен $(-1)^n D_1(\lambda)$, т. е.

$$\det|A+BQ'-\lambda I|-(-1)^n D_1(\lambda)=0. \qquad (3.14)$$

Таким образом, предлагаемый алгоритм определения коэффициентов Q оптимального управления состоит из следующих шагов:

1^0. Находят корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения $D(\lambda)=0$ с отрицательной действительной частью и составляют полином

$$D_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_n).$$

2^0. Приравнивают нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ в уравнении (3.14).

3^0. Решают полученную систему линейных уравнений относительно компонент вектора Q и определяют оптимальное С-управление $u_0=Q'x$.

Для определения вектора Q предложен* другой способ, вытека-

*Лурье А. И. Минимальный квадратичный критерий качества регулируемой системы // Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1963. № 4.

ющий из принципа максимума. Пусть $u_0(x)=Q'x$ — скалярное оптимальное С-управление в задаче (3.7), (3.8) при $N_0=I$. Обозначим через N_{ij} элементы матрицы N_1. В уравнении (3.7) B есть вектор-столбец.

Обозначим через $\mathrm{d}(\lambda)$ характеристический определитель системы (3.7) при нулевом управлении $u=0$, через $\mathrm{d}_0(\lambda, Q)$ — характеристический определитель системы (3.7) при управлении $u_0=Q'x$, а через $\mathrm{d}_k(\lambda)$ — определитель, который получается из определителя $\mathrm{d}(\lambda)$ заменой в нем k-го столбца на вектор B. Тогда уравнение

$$\mathrm{d}(\lambda)\mathrm{d}(-\lambda)+\sum_{i,j=1}^{n} N_{ij}\mathrm{d}_i(\lambda)\mathrm{d}_j(-\lambda)=0$$

имеет в точности n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с положительной действительной частью. При этом для всех λ справедливо равенство

$$(\lambda+\lambda_1)\ldots(\lambda+\lambda_n)=(-1)^n\mathrm{d}_0(\lambda, Q),$$

которое представляет собой линейное уравнение относительно компонент вектора Q и может служить для построения оптимального управления $u_0=Q'x$.

Замечание. Пусть для системы (3.7) существует допустимое непрерывное управление $u(t, x)$, имеющее непрерывную ограниченную производную по x, при котором система (3.7) экспоненциально устойчива. Тогда существует линейное управление, дающее решение задачи оптимальной стабилизации [22].

Сформулируем необходимые и достаточные условия существования указанного допустимого управления для задачи (3.7) при нарушении условия управляемости (3.12).

Приведем уравнение (3.7) к каноническому виду (2.14), (2.15) гл. VI с помощью замены переменных $x=Ty$. Пусть $y=(y_1, y_2)$, $y_1\in R_k$, $y_2\in R_{n-k}$, где k — ранг матрицы управляемости (3.12). Тогда

$$\dot{y}_1=A_1y_1+A_2y_2+B_1u,\ \dot{y}_2=A_3y_2.$$

Далее заметим, что справедливо равенство

$$\det(A-\lambda I)=\det(A_1-\lambda I_1)\det(A_3-\lambda I_2).$$

Кроме того, в силу условия $\operatorname{rank}(B_1, A_1B_1, \ldots, A_1^{k-1}B_1)=k$ задача оптимальной стабилизации для системы $\dot{y}_1=A_1y_1+B_1u$ разрешима. Значит, необходимое и достаточное условие существования допустимого управления, при котором система (3.7) экспоненциально устойчива, состоит в том, что все собственные значения матрицы A_3 лежат в левой полуплоскости.

§ 4. СТАБИЛИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Функционирование реальных систем происходит под действием возмущающих факторов различной природы. Если эти возмущения малы, то нелинейные системы возможно аппроксимировать линейными. В противном случае при построении управления необходимо учитывать нелинейные слагаемые в уравнениях движения.

1. Квазиоптимальная стабилизация и оценка ее погрешности. Ниже предложен способ квазиоптимальной стабилизации и получены оценки погрешности при произвольных начальных возмущениях. Управляемая система имеет вид

$$\dot{x}(t)=\varepsilon f(t, x(t))+B(t)u,\ t\geqslant 0,\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ x(0)=x_0 \quad (4.1)$$

и называется *квазилинейной системой.*

Здесь функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию $|f(t, x)|\leqslant Cx$ $(C>0)$, матрица $B(t)$ непрерывна и ограничена на интервале $[0, \infty)$, параметр $\varepsilon\geqslant 0$ и вектор x_0 заданы. Требуется выбрать С-управление $u=u(t, x(t))$ так, чтобы минимизировать функционал (3.2), т. е.

$$J(u)=\int_0^\infty (x'(t)N_1(t)x(t)+u'N_0(t)u)\,dt\to\inf. \quad (4.2)$$

Отметим, что если уравнение движения содержит линейные слагаемые $A(t)x(t)$, то оно сводится к виду (4.1) с помощью невырожденного преобразования координат. Кроме того, при сделанных предположениях, если для некоторого управления u функционал $J(u)<\infty$, решение системы (4.1), соответствующее этому управлению, стремится к нулю при $t\to\infty$.

Предположим, что решение задачи (4.1), (4.2) существует для рассматриваемых значений ε. Обозначим через $v(t, x)$ оптимальное управление, а через $V(t, x)$ — соответствующую функцию Беллмана. Иногда, чтобы подчеркнуть зависимость решений уравнений (4.1) от управления v, будем обозначать его символом $x(t, v)$.

Сначала приведем эвристическое описание *алгоритма квазиоптимальной стабилизации.* Запишем уравнение Беллмана для задачи (4.1), (4.2):

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}+\varepsilon f'(t, x)\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}+x'N_1x=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)' B_1\left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right),\ B_1=BN_0^{-1}B'. \quad (4.3)$$

Оптимальное управление v имеет вид

$$\mathrm{v}(t, x)=-\frac{1}{2} N_0^{-1} B' \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}. \tag{4.4}$$

Представим V в виде ряда по степеням ε:

$$V(t, x)=V_0(t, x)+\varepsilon V_1(t, x)+\ldots . \tag{4.5}$$

Для определения функций $V_i(t, x)$ подставим выражение (4.5) в (4.3) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда получим, что V_0 удовлетворяет уравнению (4.3) при $\varepsilon=0$, а для V_i, $(i\geqslant 1)$ имеем последовательность линейных относительно V_i уравнений

$$\frac{\partial V_i(t, x)}{\partial t}+f'(t, x) \frac{\partial V_{i-1}(t, x)}{\partial x}=\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{i} \frac{\partial V'_j(t, x)}{\partial x} B_1 \frac{\partial V_{i-j}(t, x)}{\partial x}. \tag{4.6}$$

Решение уравнения (4.6) ищется в классе непрерывно дифференцируемых ограниченных снизу функций, удовлетворяющих оценке $V_i(t, x)\leqslant C|x|^2$. Управление i-го приближения $u_i(t, x)$ к оптимальному управлению v имеет вид

$$u_i(t, x)=-\frac{1}{2} N_0^{-1} B' \frac{\partial W_i}{\partial x}, \quad W_i(t, x)=\sum_{j=0}^{i} \varepsilon^j V_j(t, x). \tag{4.7}$$

Таким образом, существенная часть алгоритма связана с необходимостью решения задачи (4.6). Напомним, что если задача (4.6) при $\varepsilon=0$ разрешима, то $V_0=x'P(t)x$, где матрица $P(t)$ — единственное ограниченное положительно определенное решение уравнения Риккати (3.4) при $A(t)\equiv 0$, т. е. уравнения

$$\dot{P}(t)-P(t)B_1P(t)+N_1(t)=0, \quad t\geqslant 0.$$

Остальные приближения при соответствующих предположениях о гладкости $f(t, x)$ выражаются формулой

$$V_i(t, x)=\int_t^{\infty}\left[f'(s, x(s)) \frac{\partial V_{i-1}(s, x(s))}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V'_j(s, x(s))}{\partial x} B_1(s) \frac{\partial V_{i-j}(s, x(s))}{\partial x}\right] \mathrm{d}s, \quad i\geqslant 1. \tag{4.8}$$

Здесь сумма при $i=1$ равна нулю, а через $x(s)$ обозначено решение уравнения (4.1) при $\varepsilon=0$, $s\geqslant t$, управлении $u_0=-N_0^{-1}(s)\times$ $\times B'(s)P(s)x(s)$ и начальном условии $x(t)=x$.

Установим оценку нулевого приближения. Управление нулевого приближения $u_0(t, x)$ определяется выражением (4.7) при $i=0$.

Предположим, что исходная задача управления (4.1), (4.2) имеет решение для заданного значения ε, а также для $\varepsilon=0$, причем справедливо неравенство

$$x'N_1x-2\varepsilon f'(t, x)P(t)x\geqslant C|x|^2. \tag{4.9}$$

Тогда при некоторой постоянной $C>0$, определяемой параметрами задачи (4.1), (4.2), имеет место неравенство

$$0\leqslant J(u_0)-J(\mathrm{v})\leqslant C\varepsilon. \tag{4.10}$$

Докажем справедливость этого неравенства, означающего, что при управлении системой (4.1) с помощью u_0 ошибка по функционалу (4.2) есть величина порядка ε. Рассмотрим функционал

$$J_0^\varepsilon(u)=J(u)-\varepsilon\int_0^\infty f'(t, x(t))\frac{\partial V_0(t, x(t))}{\partial x}\,\mathrm{d}t. \tag{4.11}$$

В силу условия (4.9) подынтегральная функция функционала $J_0(u)$ положительно определена по фазовым координатам, т. е. выполнено требование вида

$$x'N_1x+u'N_0u-\varepsilon f'(t, x)\frac{\partial V_0(t, x)}{\partial x}\geqslant C|x|^2. \tag{4.12}$$

Значит, на основании теоремы 2.3 решением задачи минимизации функционала (4.11) на траекториях системы (4.1) является управление $u_0(t, x)$, а соответствующая функция Беллмана есть $V_0(t, x)$. Отсюда и из неравенства (4.12) вытекает, что

$$\int_0^\infty |x(t, u_0)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant CV_0(0, x_0). \tag{4.13}$$

Из этого неравенства и выражения (4.7) для u_0 следует, что $J(u_0)<\infty$, т. е. управление u_0 является допустимым и для исходной задачи (4.1), (4.2). Представим разность из (4.10) в виде

$$J(u_0)-J(\mathrm{v})=|J_0^\varepsilon(u_0)-J(\mathrm{v})]+|J(u_0)-J_0^\varepsilon(u_0)]. \tag{4.14}$$

Оценим разности в правой части (4.14). В силу оптимальности управления v и допустимости управления u_0 получим

$$J(\mathrm{v})\leqslant J(u_0)=J_0^\varepsilon(u_0)+J(u_0)-J_0^\varepsilon(u_0). \tag{4.15}$$

Далее, используя равенство (4.11), ограниченность P и предположения относительно f, находим

$$|J(u_0)-J_0^\varepsilon(u_0)|\leqslant 2\varepsilon\int_0^\infty |f'(t, x(t, u_0))P(t)x(t, u_0)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon C\int_0^\infty |x(t, u_0)|^2\,dt. \tag{4.16}$$

Из неравенств (4.13) и (4.16) вытекает оценка

$$|J(u_0)-J_0^\varepsilon(u_0)|\leqslant \varepsilon C_1. \tag{4.17}$$

Таким образом, в силу (4.15) получим

$$J(\mathrm{v})\leqslant J_0^\varepsilon(u_0)+\varepsilon C_1. \tag{4.18}$$

Аналогично, вследствие оптимальности управления u_0 в задаче (4.1), (4.11) находим

$$J_0^\varepsilon(u_0)\leqslant J_0^\varepsilon(\mathrm{v})=J(\mathrm{v})+[J_0^\varepsilon(\mathrm{v})-J(\mathrm{v})].$$

Оценим значение разности $J_0^\varepsilon(\mathrm{v})-J(\mathrm{v})$. На основании (4.11), подобно (4.16), имеем

$$|J_0^\varepsilon(\mathrm{v})-J(\mathrm{v})|\leqslant 2\varepsilon C\int_0^\infty |x(t, \mathrm{v})|^2\,dt. \tag{4.19}$$

Но в силу равномерной положительной определенности матрицы N_1 и установленной оценки (4.18) справедливо неравенство

$$\int_0^\infty |x(t, \mathrm{v})|^2\,dt\leqslant CJ(\mathrm{v})\leqslant CV_0(0, x_0)+\varepsilon CC_1.$$

Отсюда и из (4.19) вытекает, что

$$|J_0^\varepsilon(\mathrm{v})-J(\mathrm{v})|\leqslant \varepsilon C_2.$$

Следовательно,

$$J_0^\varepsilon(u_0)\leqslant J(\mathrm{v})+|J_0^\varepsilon(\mathrm{v})-J(\mathrm{v})|\leqslant J(\mathrm{v})+\varepsilon C_2. \tag{4.20}$$

Сравнивая соотношения (4.18) и (4.20), заключаем, что $|J_0^\varepsilon(u_0)-J(\mathrm{v})|\leqslant\varepsilon C$. Из этого неравенства и (4.17) в силу (4.14) имеем

$$|J_0^\varepsilon(u_0)-J(\mathrm{v})|\leqslant\varepsilon C.$$

Тем самым оценка (4.10) нулевого приближения установлена.

Рассмотрим оценки высших приближений. При рассмотрении i-го приближения u_i к оптимальному управлению считается, что существуют непрерывно дифференцируемые ограниченные снизу функции $V_j(t, x)$, $j \leqslant i$, удовлетворяющие уравнению (4.6), а также оценкам

$$|W_j(t, x)| \leqslant C|x|^2, \ |\partial W_j(t, x)/\partial x| \leqslant C|x|, \ j \leqslant i. \tag{4.21}$$

Из определения (4.7) управлений $u_j(t, x)$ и (4.21) вытекает, что $u_j(t, 0) \equiv 0$.

При обосновании оценки нулевого приближения был использован прием, состоящий в том, что управление нулевого приближения $u_0(t, x)$ интерпретируется как оптимальное для исходной системы (4.1) с минимизируемым функционалом, отличающимся от исходного (4.2) на величину порядка ε. Используем тот же прием и при исследовании управлений $u_i(t, x)$, $i \geqslant 1$, определяемых равенством (4.7). Для построения вспомогательной задачи стабилизации, в которой $u_i(t, x)$ будет оптимальным управлением, запишем уравнение для функции $W_i(t, x)$ из (4.7). Умножая уравнение (4.6) на ε^i и суммируя полученные результаты по i, имеем

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \varepsilon f'(t, x)\frac{\partial W_i}{\partial x} + x'N_1x + \delta_i\varepsilon^{i+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial W_i}{dx}\right)' B_1\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right), \tag{4.22}$$

$$\delta_i = -f'\frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=0}^{l-1}\varepsilon^j\left(\frac{\partial V_l}{\partial x}\right)B_1\left(\frac{\partial V_{i+1+j-l}}{\partial x}\right).$$

Рассмотрим функционал

$$J_i^\varepsilon(u) = J(u) + \varepsilon^{i+1}\int_0^T \delta_i(t, x(t, u))\,dt. \tag{4.23}$$

Аналогично (4.9) в рассматриваемом случае предположим, что задача (4.1), (4.2) имеет решение для заданного ε, а также для $\varepsilon = 0$, причем справедливо неравенство

$$x'N_1x + \varepsilon^{i+1}\delta_i \geqslant C|x|^2. \tag{4.24}$$

При предположении (4.24) функционал $J_i(u)$ положительно определен по фазовым координатам. Поэтому, используя теорему 2.3 и учитывая уравнения (4.22) и оценки (4.21), заключаем, что в задаче (4.1), (4.23) управление $u_i(t, x)$ является оптимальным, а функция Беллмана равна $W_i(t, x)$.

Отсюда и из (4.24) вытекает, что интеграл

$$\int_0^\infty |x\ (t,\ u_i)|^2\ \mathrm{d}t \leqslant CW_i\ (0,\ x_0) \tag{4.25}$$

является конечным. Кроме того,

$$2u_i\ (t,\ x) = -N_0^{-1}\ (t) B'\ (t) \frac{\partial W_i}{\partial x}.$$

Поэтому на основании (4.21) и (4.7) имеем $|u_i\ (t,\ x)| \leqslant C\ |x|$. Значит, с учетом (4.25) получим $J\ (u_i) < \infty$, т. е. u_i — допустимое управление в задаче стабилизации (4.1), (4.2). Дальнейшее обоснование оценок i-го приближения подобно доказательству справедливости неравенства (4.10). А именно: покажем, что

$$0 \leqslant J\ (u_i) - J\ (\mathrm{v}) \leqslant C\varepsilon^{i+1}. \tag{4.26}$$

Ясно, что $J\ (u_i) - J\ (\mathrm{v}) = [J_i^\varepsilon (u_i) - J\ (\mathrm{v})] + [J\ (u_i) - J_i^\varepsilon (u_i)]$. Оценим разности в правой части последнего соотношения. В силу (4.24) и (4.25) имеем

$$J\ (\mathrm{v}) \leqslant J\ (u_i) \leqslant J_i^\varepsilon (u_i) + |J\ (u_i) - J_i^\varepsilon (u_i)| \leqslant J_i^\varepsilon (u_i) +$$

$$+ \varepsilon^{i+1} \left| \int_0^\infty \delta_i\ (t,\ x\ (t,\ u_i))\, \mathrm{d}t \right| \leqslant J_i^\varepsilon (u_i) + \varepsilon^{i+1} C \int_0^\infty |x\ (t,\ u_i)|^2\, \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant J_i^\varepsilon (u_i) + \varepsilon^{i+1} C\gamma_i,\ \gamma_i = \int_0^\infty |x\ (t,\ u_i)|^2\, \mathrm{d}t. \tag{4.27}$$

Чтобы установить неравенство, противоположное (4.27), используем оптимальность управления u_i в задаче стабилизации (4.1), (4.23). Тогда

$$J_i^\varepsilon (u_i) \leqslant J_i^\varepsilon (\mathrm{v}) \leqslant J\ (\mathrm{v}) + |J_i^\varepsilon (\mathrm{v}) - J\ (\mathrm{v})| \leqslant J\ (\mathrm{v}) +$$

$$+ \varepsilon^{i+1} \left| \int_0^\infty \delta_i\ (t,\ x\ (t,\ \mathrm{v}))\, \mathrm{d}t \right|^2 \leqslant J\ (\mathrm{v}) +$$

$$+ \varepsilon^{i+1} C \int_0^\infty |x\ (t,\ \mathrm{v})|^2\, \mathrm{d}t \leqslant J\ (\mathrm{v}) + \varepsilon^{i+1} C_1 W_i\ (0,\ x_0). \tag{4.28}$$

Из неравенств (4.27) и (4.28) вытекает, что

$$|J_i^\varepsilon(u_i)-J(\mathrm{v})|\leqslant\varepsilon^{i+1}C\gamma_i. \tag{4.29}$$

Кроме того, при выводе оценки (4.27) было установлено соотношение

$$|J(u_i)-J_i^\varepsilon(u_i)|\leqslant\varepsilon^{i+1}CC_i. \tag{4.30}$$

Соотношения (4.29) и (4.30) означают, что

$$0\leqslant J(u_i)-J(\mathrm{v})\leqslant|J_i^\varepsilon(u_i)-J(\mathrm{v})|+|J(u_i)-J_i^\varepsilon(u_i)|\leqslant\varepsilon^{i+1}CC_i.$$

Тем самым оценка i-го приближения (4.26) установлена.

Замечание. Приведем достаточные условия справедливости оценок (4.21). Предположим, что задача (4.1), (4.2) разрешима при $\varepsilon=0$, функция $f(t, x)$ и ее производные $\partial^j f(t, x)/\partial x^j$ непрерывны, причем $|\partial^j f/\partial x^j|\leqslant C, j=1, \ldots, i$. Тогда существует единственное решение уравнения (4.6), удовлетворяющее (4.21). Это решение представимо в виде (4.8).

2. Адаптивная стабилизация. В этом пункте будем считать, что конкретное значение параметра ε в (4.1) неизвестно. *Задача адаптивной стабилизации* состоит в выборе такого закона управления, при котором тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво. Адаптивное управление, разрешающее задачу адаптивной стабилизации, будем искать в виде

$$B\omega(t, x)-k(t)f(t, x).$$

Функция $\omega(t, x)$ и скалярный коэффициент $k(t)$ дополнительного контура регулирования подбираются таким образом, чтобы обеспечить устойчивость тривиального решения системы

$$\dot{x}(t)=(\varepsilon-k(t))f(t, x(t))+B(t)\omega(t, x(t)). \tag{4.31}$$

Лемма 4.1. *Пусть при некотором фиксированном значении ε_0 найдется управление $\omega_0(t, x)$, $\omega_0(t, 0)=0$, при котором тривиальное решение уравнения*

$$\dot{y}(t)=\varepsilon_0 f(t, y(t))+B\omega_0(t, y(t)),\ t\geqslant 0$$

асимптотически устойчиво равномерно по начальным данным. Тогда задача адаптивной стабилизации разрешима при любом ε.

□ Из условий леммы и теоремы обращения из § 2 гл. I следует существование функции Ляпунова $V(t, x)$. Функция V определенно положительна, имеет бесконечно малый высший предел и сумма

$$V_t(t, x)+V'_x(t, x)(\varepsilon_0 f(t, x)+B\omega_0(t, x))=R(t, x)$$

определенно отрицательна. Введем коэффициент регулирования $k(t)$ в (4.31) с помощью соотношений

$$\dot{k}(t)=-\frac{1}{2}f'(t, x(t))V_x(t, x(t)),\ t\geqslant 0,$$

$$V_x=\partial V/\partial x,\ k(0)=0. \tag{4.32}$$

Рассмотрим функцию

$$R_1=V(t, x)+(\varepsilon-\varepsilon_0-k(1))^2.$$

Вычислив полную производную $\dot{R}_1$ функции $R_1(t, x)$ вдоль траекторий системы (4.31), (4.32), получим $\dot{R}_1=R$.

Значит, в силу теоремы 4.5 гл. I об устойчивости по части переменных тривиальное решение системы (4.31) асимптотически устойчиво. Тем самым управление $\omega_0(t, x)$ и регулятор (4.32) обеспечивают стабилизацию системы (4.1) при любом априори неизвестном значении параметра ε.

Лемма 4.1 позволяет свести вопрос об адаптивной стабилизации системы (4.1) к выбору функции Ляпунова V и управления ω_0. При этом можно использовать построения п. 1. В частности, если система (4.1) стабилизируема при $\varepsilon=0$, то можно положить $V=V_0$, $\omega_0=u_0$, где $V_0=x'P(t)x$, а $u_0=-N_0^{-1}(t)B'P(t)x$.

Если же выполнены условия п. 1 при $\varepsilon=\varepsilon_0$, то можно положить $V=W(t, x)$, $\omega_0=u_i(t, x)$, где функции W и u_i при $\varepsilon=\varepsilon_0$ имеют вид (4.7). В обоих случаях коэффициент $k(t)$ определяется уравнением (4.32). Вместе с тем при рассмотрении конкретных систем, используя их специфику, можно с помощью леммы 4.1 построить стабилизирующее управление, зависящее не от всех фазовых координат. Последнее обстоятельство существенно с точки зрения минимизации числа позиционных датчиков. Отметим, что аналогично может быть сформулировано решение задачи об адаптивной стабилизации заданного программного движения системы (4.1).

§ 5. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе приведены достаточные условия оптимальности, полученные в [17]. Формулировки этих условий используют некоторые идеи, близкие ко второму методу Ляпунова и методу динамического программирования.

1. Условия оптимальности. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in R_n,\ u\in R_m. \tag{5.1}$$

Начальное положение x_0 системы (5.1) при $t=0$ задано:

$$x(0)=x_0. \tag{5.2}$$

Под решением $x(t)$ задачи (5.1), (5.2), соответствующим управлению $u(t)$, понимается абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (5.1) при всех $t \in [0, T]$ и управлении $u(t)$.

В заданный момент T окончания процесса должно быть выполнено терминальное условие

$$x(T) = x_1 \in X_1 \subset R_n. \tag{5.3}$$

Здесь X_1 — заданное множество допустимых терминальных значений процесса $x(t)$.

Управление $u(t): R_1 \to R_m$ является измеримой функцией времени, которая при почти всех t принимает значения из заданного множества U:

$$u(t) \in U \subset R_m. \tag{5.4}$$

Критерий качества выражается функционалом

$$J(u) = \varphi_0(x(T)) + \int_0^T F_0(t, x(t), u(t))\, dt. \tag{5.5}$$

При выводе условий оптимальности предполагается, что функции $F_0(t, x, u)$ и $f(t, x, u)$ измеримы по совокупности переменных (t, x, u), непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по x, а функция $\varphi_0(x)$ непрерывно дифференцируема по x.

Управление $u(t)$ называется *допустимым*, если при этом управлении существует единственное решение задачи (5.1), функционал (5.5) конечен и выполнены условия (5.2)—(5.4). Совокупность всех допустимых управлений на отрезке $[0, T]$ обозначим через W.

Задача оптимального управления системой (5.1) состоит в определении такого допустимого управления u_0, при котором достигается абсолютный минимум критерия качества (5.5) на множестве W. Если же указанный минимум не достигается, то представляет интерес вопрос о построении минимизирующей последовательности допустимых управлений $u_i \in W$ таких, что $\lim\limits_{i \to \infty} J(u_i) = \inf\limits_{u \in W} J(u)$.

Сформулируем достаточные условия оптимальности в терминах свойств вспомогательной функции $V(t, x)$, в некотором смысле аналогичной функции Ляпунова из первой части. Функция $V(t, x): [0, T] \times R_n \to R_1$ является непрерывно дифференцируемой по независимым переменным $t \in [0, T]$ и $x \in R_n$.

Возьмем произвольное допустимое управление $u(t)$ и соответствующую ему траекторию $x(t)$ системы (5.1). Через $\dot{V}_u(t, x)$ обозначим полную производную функции V вдоль траекторий системы (5.1) при управлении $u(t)$. При сделанных предположениях имеем

$$\dot{V}_u(t, x) = V_t + V'_x f(t, x, u),$$

$$V_t = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial V(t, x)}{\partial x},$$

$$V(t_1, x(t_1)) - V(t, x(t)) = \int_t^{t_1} \dot{V}_u(s, x(s))\,\mathrm{d}s. \tag{5.6}$$

Из соотношений (5.5), (5.6) вытекает следующее представление функционала $J(u)$, справедливое при любом допустимом управлении u:

$$J(u) = \int_0^T [F_0(t, x(t), u(t)) - \dot{V}_u(t, x(t))]\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \varphi_0(x(T)) + V(T, x(T)) - V(0, x_0). \tag{5.7}$$

Теорема 5.1. *Пусть существуют скалярная непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$ и допустимое управление $u_0(t) \in W$, удовлетворяющее для всех $u(t) \in W$ условиям*

$$\int_0^T [F_0(t, x(t), u(t)) - \dot{V}_u(t, x(t))]\,\mathrm{d}t \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T [F_0(t, x_0(t), u_0(t)) - \dot{V}_{u_0}(t, x_0(t))]\,\mathrm{d}t = 0, \tag{5.8}$$

$$\varphi_0(x(T)) + V(T, x(T)) \geqslant \varphi_0(x_0(T)) + V(T, x_0(T)) =$$

$$= \inf_{x \in X_1} [\varphi_0(x) + V(T, x)] = q, \tag{5.9}$$

где $x(t)$ и $x_0(t)$ — решения задачи (5.1), соответствующие управлениям $u(t)$ и $u_0(t)$. Тогда управление $u_0(t)$ — оптимальное, причем минимальное значение $J(u_0)$ критерия качества (5.7) есть

$$J(u_0) = q - V(0, x_0). \tag{5.10}$$

□ Для доказательства достаточно заметить, что

$$J(u) - J(u_0) = \int_0^T [F_0(t, x(t), u(t)) - \dot{V}_u(t, x(t))]\,\mathrm{d}t +$$

$$+\varphi_0 x(T)+V(T, x(T))-V(0, x_0)\Big\}-$$

$$-\Big\{\int_0^T [F_0(t, x_0(t), u_0(t))-\dot{V}_{u_0}(t, x_0(t))]\,dt+\varphi_0(x_0(T))+$$

$$+V(T, x_0(T))-V(0, x_0)\Big\}=\Big\{\int_0^T [F_0(t, x(t), u(t))-$$

$$-\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt-\int_0^T [F_0(t, x_0(t), u_0(t))-\dot{V}_{u_0}(t, x_0(t))]\,dt\Big\}+$$

$$+\{\varphi_0(x(T))+V(T, x(T))-\varphi_0(x_0)-V(T, x_0(T))\}\geqslant 0.$$

Отсюда и из требований (5.8), (5.9) вытекает, что $J(u)-J(u_0)\geqslant 0$ при любом $u\in W$. Тем самым оптимальность управления u_0 установлена. Соотношение (5.10) непосредственно следует из (5.7), (5.9). ■

Замечание. Иногда условие (5.8) теоремы 5.1 записывают с помощью функции R, определяемой равенством

$$R(t, x, u)=-F_0(t, x, u)+V_t(t, x)+V'_x(t, x)f(t, x, u)=$$
$$=-F_0(t, x, u)+\dot{V}_u(t, x).$$

Условие (5.8) в терминах функции R имеет вид

$$\int_0^T R(t, x(t), u(t))\,dt\leqslant\int_0^T R(t, x_0(t), u_0(t))\,dt=0.$$

Теорема 5.1 не указывает способов построения оптимального управления u_0 и функции $V(t, x)$. Приведем один из них, основанный на несколько ином представлении функционала $J(u)$.

Рассмотрим функцию

$$H(t, x, u, V_x)=-F_0(t, x, u)+V'_x(t, x)f(t, x, u).$$

Верхнюю грань функции $H(t, x, u, V_x)$ по независимой переменной $u\in U$ обозначим через $\overline{H}$, т. е. $\overline{H}(t, x, V_x)=\sup\limits_{u\in U} H(t, x, u, V_x)$. Используя соотношения (5.6), заключаем, что справедливо представление функционала (5.5) в виде

$$J(u)=\varphi_0(x(T))+V(T, x(T))-V(0, x_0)+\int_0^T[(\overline{H}-H)-(V_t+\overline{H})]\,dt. \tag{5.11}$$

Здесь аргументами функций H, $\overline{H}$, V являются $(t, x(t), u(t))$.

Теорема 5.2. *Пусть существуют непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$ и допустимое управление $u_0(t)$, удовлетворяющее требованию (5.9) и условиям*

$$\overline{H}(t, x_0(t), V_x(t, x_0(t)))=H(t, x_0(t), u_0(t), V_x(t, x_0(t))),$$
$$0\leqslant t\leqslant T,\ x\in R_n, \tag{5.12}$$

$$V_t(t, x)+\overline{H}(t, x, V_x(t, x))\leqslant V_t(t, x_0(t))+$$
$$+\overline{H}(t, x_0(t), V_x(t, x_0(t)))=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in R_n. \tag{5.13}$$

Тогда $u_0(t)$ — оптимальное управление, а $J(u_0)$ выражается формулой (5.10).

Пример 5.1. Рассмотрим скалярную управляемую систему

$$\dot{x}(t)=u(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$x(0)=x(1)=0,\ |u|\leqslant 1. \tag{5.14}$$

Критерий качества $J(u)$, подлежащий минимизации, имеет вид

$$J(u)=\int_0^1(x^2(t)-u(t))\,dt\to\inf_u. \tag{5.15}$$

Покажем, что в этой задаче оптимальное управление $u_0(t)\equiv 0$ и оптимальная траектория $x_0(t)\equiv 0$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

Проверим, что эти функции удовлетворяют требованиям теоремы 5.1 при $V(t, x)=-x$. При любом допустимом управлении $u(t)$ с учетом (5.14), (5.15) имеем

$$F_0(t, x(t), u(t))-\dot{V}_u(t, x(t))=x^2(t)\geqslant 0. \tag{5.16}$$

Кроме того, при управлении $u_0(t)\equiv 0$ и $x_0(t)\equiv 0$ справедливо равенство

$$F_0(t, x_0(t), u_0(t))-\dot{V}_{u_0}(t, x_0(t))=0. \tag{5.17}$$

Сравнивая (5.16) и (5.17), заключаем, что требование (5.8) теоремы 5.1 выполнено. Обратимся к проверке условия (5.9). Множество X_1 в рассматриваемом случае состоит из одной точки $x=0$, а функция $\varphi_0=0$. Значит,

$$V(T, x_0(T))=V(1, x_0(1))=0,\ \inf_{x\in X_1}V(T, x)=\inf_{x\in X_1}(-x)=0.$$

Поэтому условие (5.9) также справедливо. Таким образом, на основании теоремы 5.1 оптимальное управление $u_0(t) \equiv 0$.

Пример 5.2. Рассмотрим скалярную линейно-квадратичную задачу

$$\dot{x}(t) = u, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = x_0,$$

$$J(u) = \alpha x^2(T) + \int_0^T u^2(t)\,dt \to \inf_u. \tag{5.18}$$

Здесь x_0, T, α — заданные постоянные. Докажем с помощью теоремы 5.1, что оптимальное управление u_0 в задаче (5.18) имеет вид

$$u_0(t) = \alpha x(t)\,[\alpha(t-T)-1]^{-1}. \tag{5.19}$$

В качестве $V(t, x)$ возьмем функцию

$$V(t, x) = \alpha x^2\,[\alpha(t-T)-1]^{-1}. \tag{5.20}$$

Проверим справедливость условия (5.7). Так как функция F_0 в рассматриваемом случае есть $F_0 = u^2$, то

$$F_0(t, x, u) - \dot{V}_u(t, x) = u^2 - 2\alpha x u\,[\alpha(t-T)-1]^{-1} + \\ + \alpha^2 x^2\,[\alpha(t-T)-1]^{-2} = [\alpha(t-T)-1]^{-2},\ [u(\alpha(t-T)-1) - \alpha x]^2 \geqslant 0. \tag{5.21}$$

В то же время на основании (5.19) имеем

$$F_0(t, x, u_0) - \dot{V}_{u_0}(t, x) = [\alpha(t-T)-1]^{-2}\,[u_0(\alpha(t-T)-1) - \alpha x]^2 = 0. \tag{5.22}$$

Из (5.21), (5.22) следует справедливость условия (5.8) теоремы 5.1. Кроме того, при любом x с учетом (5.18), (5.20) получаем равенство $\varphi_0(x) + V_0(T, x) = \alpha x^2 - \alpha x^2 = 0$. Поэтому требование (5.9) также выполнено. Значит, в силу теоремы 5.1 управление (5.19) — оптимальное.

2. Достаточные условия существования минимизирующей последовательности. Аналогично теореме 5.1 формулируются достаточные условия того, что некоторая последовательность допустимых управлений u_i является минимизирующей. Формально для этого достаточно в условиях (5.8), (5.9) заменить управление u_0 на u_i, траекторию x_0 — на x_i и перейти к пределу при $i \to \infty$. Указанным образом убеждаемся в том, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пусть существуют непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$ и последовательность допустимых управлений $u_i(t)$ таких, что*

$$\lim_{i\to\infty}[\varphi_0(x_i(T))+V(T, x_i(T))]=\inf_{x\in X_1}[\varphi_0(x)+V(T, x)]=q, \quad (5.23)$$

где $x_i(t)$ есть решение задачи (5.1), (5.2) при управлении $u_i(t)$. Пусть, далее, для любого $u\in W$ выполнено соотношение

$$\int_0^T[F_0(t, x(t), u(t))-\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\lim_{i\to\infty}\int_0^T[F_0(t, x_i(t), u_i(t))-\dot{V}_{u_i}(t, x_i(t))]\,dt=0. \quad (5.24)$$

Тогда последовательность управлений u_i является минимизирующей для задачи (5.1)—(5.5), причем $\lim_{i\to\infty} J(u_i)=q-V(0, x_0)$.

3. Задачи с нефиксированным временем. Приведенный выше способ получения достаточных условий оптимальности в терминах вспомогательных функций V может быть использован и в иных задачах (например, в задачах с фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств, в задачах, где множество U зависит от координат, и т. д.). Опишем возникающие при этом модификации условий оптимальности для задачи (5.1)—(5.5), в постановке которой дополнительно предполагается, что момент окончания процесса $T\geqslant 0$ заранее не задан. Иными словами, минимизация функционала (5.5) осуществляется за счет выбора управления $u(t)$ и момента $T\geqslant 0$. Совокупность момента времени $T\in\theta$ и управления $u(t)$, где $0\leqslant t\leqslant T$, называется *допустимой*, если для нее выполнены соотношения (5.1)—(5.4) и функционал (5.5) конечен.

Теорема 5.4. *Пусть существуют непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$, допустимые управление $u_0(t)$ и момент времени $T_0\in\theta$ такие, что:*

1°) *для любых допустимых $(T, u(t))$ выполнено неравенство*

$$\int_T^{T_0}[F_0(t, x(t), u(t))-\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt\leqslant 0; \quad (5.25)$$

2°) *выполнено условие (5.8) при $T=T_0$;*

3°) *имеет место неравенство*

$$\varphi_0(x(T))+V(T, x(T))\geqslant\varphi_0(x_0(T_0))+V(T_0, x_0(T_0))=$$
$$=\inf_{x\in X_1,\ T\in\theta}[\varphi_0(x)+V(T, x)]. \quad (5.26)$$

Тогда T_0, $u_0(t)$, где $0\leqslant t\leqslant T_0$, — оптимальные.

□ Для оптимальности управления u_0 достаточно проверить, что $J(u, T)-J(u_0, T_0)\geqslant 0$. На основании представления (5.7) имеем

$$\begin{aligned} J(u, T)-J(u_0, T_0)=&\int_0^T [F_0(t, x(t), u(t))\,\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt+\\ &+\varphi_0(x(T))+V(T, x(T))-V(0, x_0)-\\ &-\int_0^{T_0}[F_0(t, x_0(t), u_0(t))-\dot{V}_{u_0}(t, x_0(t))]\,dt-\\ &-V(T_0, x_0(T))+V(0, x_0)-\varphi_0(x_0(T)). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Рассмотрим отдельные слагаемые в правой части (5.27). С учетом условия (5.26) получаем

$$V(T, x(T))+\varphi_0(x(T))-V(T_0, x_0(T))-\varphi_0(x_0(T))\geqslant 0. \tag{5.28}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} &\int_0^T [F_0(t, x(t), u(t))-\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt=\\ &=\int_0^{T_0}[F_0(t, x(t), u(t))-\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt-\\ &-\int_T^{T_0}[F_0(t, x(t), u(t))-\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Из (5.28)—(5.29) и из условий (5.25), (5.26) вытекает, что

$$\begin{aligned} J(u, T)-J(u_0, T_0)\geqslant&\int_0^{T_0}[F_0(t, x(t), u(t))-\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt-\\ &-\int_0^{T_0}[F_0(t, x_0(t), u_0(t))-\dot{V}_{u_0}(t, x_0(t))]\,dt-\\ &-\int_T^{T_0}[F_0(t, x(t), u(t))-\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt\geqslant 0. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Основные результаты и формулы главы VII

Для задачи Больца

$$\dot{x}(t)=f(t, x, u),\ x(t_0)=x_0,$$

$$\int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u)\,dt+\varphi(x(T))\to\inf_{u\in U}$$

функция Беллмана

$$V(s, x)=\inf_{u\in U}\left[\varphi(x(T))+\int_{s}^{T} F(t, x(t), u)\,dt\right],$$

уравнение Беллмана

$$\inf_{u\in U}[V_t(s, x)+V'_x(t, x)f(t, x, u)+F(t, x, u)]=0,\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$
$$V(T, x)=\varphi(x),$$

оптимальное управление $u_0(t, x)$

$$\inf_{u\in U}\left[f'(t, x, u)\frac{\partial V_0(t, x)}{\partial x}+F(t, x, u)\right]=$$
$$=f'(t, x, u_0)\frac{\partial V_0(t, x)}{\partial x}+F(t, x, u_0),$$

где V_0 — единственное решение уравнения Беллмана.

В ЛК-задаче функция Беллмана $V(t, x)=x'P(t)x$, где $P(t)$ есть решение матричного уравнения Риккати, а минимальное значение критерия качества $J(u_0)=V(t_0, x_0)$.

Стабилизация. Управление $u(t, x)$ является стабилизирующим, если

$$\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x)\leqslant\omega_2(|x|),\ L_uV(t, x)\leqslant-\omega_3(|x|).$$

Управление $u_0(t, x)$ является оптимальным стабилизирующим, если

$$\omega_1(|x|)\leqslant V(t, x)\leqslant\omega_2(|x|),$$

$$\inf_{u\in U}[L_uV(t, x)+F_0(t, x, u)]=L_{u_0}V(t, x)+F_0(t, x, u_0)=0.$$

В стационарной ЛК-задаче

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ x(0)=x_0,$$

$$J(u)=\int_{0}^{\infty}[x'(t)N_1x(t)+u'(t)N_0u(t)]\,dt\to\inf_{u},\ N_0>0,\ N_1>0,$$

оптимальное управление $u_0(t, x)=-N_0^{-1}B'Px$, где P удовлетворяет *алгебраическому уравнению Риккати*:

$$A'P+PA-PBN_0^{-1}B'P+N_1=0.$$

Если система управляема, то существует единственное решение $P>0$ алгебраического уравнения Риккати, система экспоненциально устойчива и $J(u_0)=x_0'Px_0$.

Для **задачи квазилинейной стабилизации**

$$\dot{x}=\varepsilon f(t, x)+Bu,$$

$$J(u)=\int_0^\infty [x'(t)N_1(t)x(t)+u'(t)N_0(t)u(t)]\,dt\to\inf_u$$

управление i-го приближения $u_i(t, x)$ к оптимальному управлению v имеет вид

$$u_i(t, x)=-\frac{1}{2}N_0^{-1}B'\frac{\partial W_i}{\partial x},\ W_i(t, x)=\sum_{j=0}^{i}\varepsilon^j V_j(t, x),$$

где

$$V_0(t, x)=x'P(t)x,\ \dot{P}(t)-P(t)BN_0^{-1}(t)B'P(t)+N_1(t)=0,$$

$$V_i(t, x)=\int_t^\infty\left[f'(s, x(s))\frac{\partial V_{i-1}(s, x(s))}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial V_j'(s, x(s))}{\partial x}BN_0^{-1}(t)B'\frac{\partial V_{i-j}(s, x(s))}{\partial x}\right]ds,\ i\geqslant 1.$$

При этом

$$0\leqslant J(u_0)-J(\mathrm{v})\leqslant C\varepsilon,\ 0\leqslant J(u_i)-J(\mathrm{v})\leqslant C\varepsilon^{i+1}$$

Достаточные условия оптимальности, использующие вспомогательные функции. Пусть для задачи (5.1)—(5.5) существуют скалярная непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$ и допустимое управление $u_0(t)\in W$, удовлетворяющее для всех $u(t)\in W$ условиям

$$\int_0^T[F_0(t, x(t), u(t))-\dot{V}_u(t, x(t))]\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^T[F_0(t, x_0(t), u_0(t))-\dot{V}_{u_0}(t, x_0(t))]\,dt=0,$$

$$\varphi_0(x(T))+V(T, x(T))\geqslant\varphi_0(x_0(T))+V(T, x_0(T))=$$

$$=\inf_{x\in X_1}[\varphi_0(x)+V(T, x)]=q.$$

Тогда управление $u_0(t)$ — оптимальное, причем минимальное значение $J(u_0)$ критерия качества (5.7) есть $J(u_0)=q-V(0, x_0)$.

Управление $u_0(t)$ является оптимальным, если вместо предыдущих условий выполняются следующие условия:

$$\overline{H}(t, x_0(t), V_x(t, x_0(t))) = H(t, x_0(t), u_0(t), V_x(t, x_0(t))),$$

$$V_t(t, x) + \overline{H}(t, x, V_x(t, x)) \leqslant$$

$$\leqslant V_t(t, x_0(t)) + \overline{H}(t, x_0(t), V_x(t, x_0(t))) = 0,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in R_n.$$

Пусть существуют непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$ и последовательность допустимых управлений $u_i(t)$ таких, что для любого $u \in W$ справедливы условия

$$\lim_{i \to \infty} [\varphi_0(x_i(T)) + V(T, x_i(T))] =$$

$$= \inf_{x \in X_1} [\varphi_0(x) + V(t, x)] = q,$$

$$\int_0^T [F_0(t, x(t), u(t)) - \dot{V}_u(t, x(t))] \, dt \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{i \to \infty} \int_0^T [F_0(t, x_i(t), u_i(t)) - \dot{V}_{u_i}(t, x_i(t))] \, dt = 0.$$

Тогда последовательность управлений u_i является минимизирующей для задачи (5.1)—(5.5), причем $\lim_{i \to \infty} J(u_i) = q - V(0, x_0)$.

ГЛАВА VIII

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этой главе приведены некоторые условия существования оптимального управления. Кроме того, рассмотрены случаи, в которых применение принципа максимума связано с рядом специфических трудностей.

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Постановка задачи и основные предположения. При исследовании задач управления естественным представляется вопрос о существовании оптимального управления, т. е. такого, при котором критерий качества достигает минимального значения. Обоснование условий существования оптимального управления обычно связано с построением минимизирующей последовательности управлений и возможностью предельного перехода. При доказательстве этого используется ряд сведений из теории функций и функционального анализа (см., например, [3] из третьей части).

Ниже приведены основные этапы соответствующих построений для задачи оптимального управления системой:

$$\dot{x}(t)=f_0(t, x(t))+f_1(t, x(t))u(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.1}$$

$$x(t)\in R_n,\ u(t)\in U\subset R_m,\ x(t_0)=x_0,\ x(T)=x_1. \tag{1.2}$$

Здесь моменты начала движения t_0 и его окончания T, постоянное множество U, а также начальное и конечное положения x_0 и x_1 заданы. Минимизируемый критерий качества имеет вид

$$J(u)=\int_{t_0}^{T} \mathrm{F}_0(t, x(tu))\,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Предполагается, что функции f_0, F_0 и матрица f_1, имеющие вид

$$f_0(t, x) : R_1\times R_n\to R_n, f_1(t, x) : R_1\times R_n\to \quad (R_m, R_n)$$
$$F_0(t, x) \quad R_1\times R_n\to R_1,$$

непрерывны по совокупности аргументов. Кроме того, функции f_0 и f_1 удовлетворяют при некоторых постоянных $C_i\geqslant 0$ условию Липшица

$$|f_i(t, x)-f_i(t, y)|\leqslant C_i|x-y|,\ i=0, 1;\ t_0\leqslant t\leqslant T;\ x, y\in R_n. \tag{1.4}$$

В неравенстве (1.4) символ $|f_1|$ означает какую-либо норму матрицы.

Определим теперь класс W допустимых управлений, среди которых ищется оптимальное управление $u(t) \in W$, если в каждый момент времени $t (t_0 \leqslant t \leqslant T)$ оно принадлежит множеству U и как функция t измеримо по Лебегу. Кроме того, предполагается, что при этом управлении существует решение уравнения (1.1), удовлетворяющее заданным граничным условиям (1.2). Напомним, что решением уравнения (1.1), отвечающим измеримой функции $u(t)$, называется абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая соответствующему (1.1) интегральному тождеству

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [f_0(s, x(s)) + f_1(s, x(s))u(s)]\,ds, \; t_0 \leqslant t \leqslant T. \quad (1.5)$$

Точную нижнюю грань функционала (1.3) по множеству всех допустимых управлений обозначим через J_0. Таким образом,

$$J_0 = \inf_{u(t) \in W} J(u).$$

2. Основная теорема. Теорема 1.1*. *Пусть выполнены предположения п.* 1 *в задаче* (1.1), (1.2) *и существует хотя бы одно допустимое управление. Пусть, кроме того, множество* $U \subset R_m$ *компактно и выпукло. Тогда в задаче* (1.1) — (1.3) *существует оптимальное управление*** $u^0(t)$.

Доказательство теоремы весьма сложно, поэтому разобьем его на несколько этапов.

1^0. *Свойства минимизирующей последовательности управлений.* Из существования допустимого управления и определения точной нижней грани следует существование последовательности управлений $u_i(t) \in W$ $(i = 1, 2, \ldots)$, называемой *минимизирующей*, для которой

$$\inf_{u(t) \in W} J(u) = \lim_{i \to \infty} J(u_i) = J_0.$$

Соответствующую последовательности $u_i(t)$ последовательность решений задачи (1.1), (1.2) обозначим через $x_i(t)$. Проверим, что последовательность решений $x_i(t)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна.

Множество U, будучи компактом в конечномерном пространстве R_m, является замкнутым и ограниченным. Поэтому совокупность всех допустимых управлений W равномерно ограничена на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$ некоторой постоянной C, т. е., в частности,

$$|u_i(t)| \leqslant C, \; t_0 \leqslant t \leqslant T, \; i = 1, 2, \ldots \quad (1.6)$$

---

*Филлипов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального управления // Вестник МГУ. 1959. № 2.

**В этом параграфе во избежание путаницы оптимальное управление и оптимальная траектория обозначены соответственно через $u^0(t)$ и $x^0(t)$.

Кроме того, в силу условия Липшица (1.4) справедливы оценки

$$|f_j(t, x)| = |f_j(t, x) - f_j(t, 0) + f_j(t, 0)| \leqslant |f_j(t, 0)| + \\ + |f_j(t, x) - f_j(t, 0)| \leqslant |f_j(t, 0)| + C_j|x|, j = 0, 1. \quad (1.7)$$

Из тождества (1.5) с учетом (1.6), (1.7) вытекает, что при всех $i \geqslant 1$ имеют место неравенства

$$|x_i(t)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} [|f_0(s, 0)| + C|f_1(s, 0)|]\,ds + (C_0 + CC_1) \int_{t_0}^{t} |x_i(s)|\,ds.$$

Отсюда и из леммы Гронуолла — Беллмана (см. лемму 6.1 гл. I) вытекает, что

$$|x_i(t)| \leqslant [|x_0| + \int_{t_0}^{t} (|f_0(s, 0)| + C|f_1(s, 0)|)\,ds] \cdot e^{(C_0 + CC_1)(t - t_0)} \quad (1.8)$$

Но функции $f_j(t, 0)$ непрерывны, а значит, и ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T$. Следовательно, на основании (1.8) последовательность $x_i(t)$ равномерно ограничена, т. е. найдется такая постоянная C_2, что сразу для всех $i \geqslant 1$ и $t_0 \leqslant t \leqslant T$ можно утверждать, что

$$|x_i(t)| \leqslant C_2. \quad (1.9)$$

Для доказательства равностепенной непрерывности множества функций $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ возьмем две произвольные точки t_1 и t_2 на отрезке $[t_0, T]$. Учитывая (1.5), имеем

$$x_i(t_2) - x_i(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [f_0(s, x_i(s)) + f_1(s, x_i(s))u_i(s)]\,ds. \quad (1.10)$$

Далее заметим, что в силу (1.7)

$$|f_j(s, x_i(s))| \leqslant |f_j(s, 0)| + C_j|x_i(s)|. \quad (1.11)$$

Из (1.11), (1.9) и (1.6) следует, что подынтегральная функция в (1.10) при некоторой постоянной C_3 удовлетворяет оценке

$$|f_0(s, x_i(s))| + |f_1(s, x_i(s))u_i(s)| \leqslant C_3,\ i \geqslant 1,\ t_0 \leqslant s \leqslant T.$$

Значит, ввиду (1.10) функции $x_i(t)$ удовлетворяют условию Липшица:

$$|x_i(t_2) - x_i(t_1)| \leqslant C_3|t_2 - t_1|,\ i \geqslant 1,\ t_0 \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant T. \quad (1.12)$$

Последнее неравенство, справедливое для всех $i \geqslant 1$ и любых точек t_1 и t_2 на отрезке $[t_0, T]$, означает, что последовательность $x_i(t)$ равностепенно непрерывна.

Напомним теперь, что в силу леммы Арцела равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная последовательность непрерывных функций $x_i(t)$ компактна в пространстве непрерывных функций на отрезке $[t_0, T]$. Это означает, что из нее можно выделить равномерно сходящуюся на $[t_0, T]$ подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что и сама последовательность $x_i(t)$ равномерно сходится. Соответствующий равномерный предел обозначим через $x^0(t)$. Итак, установлено, что

$$\lim_{i \to \infty} \max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |x^0(t) - x_i(t)| = 0. \tag{1.13}$$

2^0. *Свойства функции* $x^0(t)$. Из равенств (1.3), (1.13) и определения числа J_0 видно, что

$$J_0 = \lim_{i \to \infty} J(u_i) = \lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{T} F_0(t, x_i(t))\,dt = \int_{t_0}^{t} F_0(t, x^0(t))\,dt.$$

Значит, для функции $x^0(t)$ критерий качества (1.3) достигает минимального возможного значения. Поэтому для доказательства того, что $x^0(t)$ — оптимальная траектория системы (1.1), (1.2), достаточно убедиться в существовании такого управления $u^0(t) \in W$, что пара $(x^0(t), u^0(t))$ есть решение задачи (1.1), (1.2).

Приведем это доказательство. Прежде всего заметим, что функция $x^0(t)$ удовлетворяет условию Липшица (1.12), поскольку все элементы последовательности $x_i(t)$ удовлетворяют неравенству (1.12) и справедливо соотношение (1.13).

Следовательно, по теореме Лебега, функция $x^0(t)$ абсолютно непрерывна, т. е. она почти всюду дифференцируема, а ее производная $\dot{x}^0(t)$ интегрируема на $[t_0, T]$.

Рассмотрим теперь множества $D(t) \subset R_n$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. При заданном t множество $D(t)$ состоит из всех точек $f_0(t, x^0(t)) + f_1(t, x^0(t))u$ пространства R_n, которые получаются, когда u пробегает все множества U. Так как U выпукло, то $D(t)$ также выпукло. Покажем, что для тех t, при которых $\dot{x}^0(t)$ существует, справедливо включение

$$\dot{x}^0(t) \in D(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.14}$$

Заметим, что если формула (1.14) при некотором t справедлива, то из определения множества $D(t)$ сразу следует существование вектора $u_0(t) \in U$, для которого при этом t имеет место равенство

$$\dot{x}^0(t) = f_0(t, x^0(t)) + f_1(t, x^0(t))u^0(t). \tag{1.15}$$

Пусть число $\Delta>0$. Для обоснования включения (1.14) аппроксимируем производную $\dot{x}^0(t)$ выражением $[x_i(t+\Delta)-x_i(t)]\Delta^{-1}$, которое при $i\to\infty$ и $\Delta\to 0$ сходится к $\dot{x}^0(t)$. Поскольку они представимы в виде интегралов от их производных, в соответствии с уравнением (1.1) имеем

$$\frac{1}{\Delta}[x_i(t+\Delta)-x_i(t)]=\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta}[f_0(s)x_i(s))+f_1(s,\ x_i(s))\ u_i(s)\,\mathrm{d}s. \quad (1.16)$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Определим выпуклое компактное множество $D_\varepsilon(t)\subset R_n$ как совокупность всех точек из R_n, евклидово расстояние которых от множества $D(t)$ не больше ε.

Установим, что правая часть выражения (1.16) при всех достаточно малых Δ и больших i принадлежит множеству $D_\varepsilon(t)$. В свою очередь, ввиду выпуклости $D_\varepsilon(t)$ для этого достаточно установить, что подынтегральная функция в (1.16) обладает этим свойством. Функция $f_0(s,\ x)+f_1(s,\ x)u$, будучи непрерывной, является и равномерно непрерывной на компактном множестве $[t_0,\ T]\times\{x:|x|\leqslant C_2\}\times U$. Поэтому найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что при любом $u\in U$ вектор $f_0(s,x)+f_1(s,x)u\in D_\varepsilon$, как только $|s-t|+|x-x^0(t)|<\delta(\varepsilon)$. В частности, полагая здесь $x=x_i(s)$, $u=u_i(t)$, получаем, что вектор $f_0(s,\ x_i(s))+f_1(s,\ x_i(s))u_i(s)\in D_\varepsilon$, если

$$|s-t|+|x_i(s)-x^0(t)|<\delta(\varepsilon). \quad (1.17)$$

Далее имеем

$$|x_i(s)-x^0(t)|\leqslant|x_i(s)-x^0(s)|+|x^0(s)-x^0(t)|. \quad (1.18)$$

Учитывая равномерную непрерывность функции $x^0(t)$, выберем Δ_0 столь малым, что при всех $s\in[t,\ t+\Delta]$, $\Delta\leqslant\Delta_0$ было выполнено неравенство

$$|s-t|+|x^0(s)-x^0(t)|<\delta/2. \quad (1.19)$$

Кроме того, учитывая (1.13), зададим такое i_0, чтобы для всех $i\geqslant i_0$ имело место неравенство

$$|x_i(s)-x^0(s)|<\delta/2. \quad (1.20)$$

Формулы (1.18) — (1.20) показывают, что при выбранных i_0 и Δ_0 для всех $i\geqslant i_0$, $\Delta\leqslant\Delta_0$ и $s\in[t,\ t+\Delta]$ справедливо неравенство (1.17). Тем самым принадлежность правой части выражения (1.16) множеству $D_\varepsilon(t)$ для указанных i и Δ установлена.

Значит, в силу (1.2) — (1.16) множеству $D_\varepsilon(t)$ принадлежат и функции

$$\Delta^{-1}[x_i(t+\Delta)-x_i(t)]. \quad (1.21)$$

Вследствие того, что множество $D_\varepsilon(t)$ замкнуто, предел функций (1.21) при $i\to\infty$ также принадлежит $D_\varepsilon(t)$. С учетом (1.13) этот предел равен $\Delta^{-1}[x^0(t+\Delta)-x^0(t)]$. Переходя к пределу при $\Delta\to 0$ в последнем выражении и учитывая замкнутость $D_\varepsilon(t)$, получаем, что $\dot{x}^0(t)\in D_\varepsilon(t)$. Отсюда и из произвольности числа ε следует справедливость включения (1.14), а потому и равенства (1.15).

3°. *Измеримость функции* $u^0(t)$. Для завершения доказательства осталось лишь показать, что функцию $u^0(t)$ в (1.15) можно выбрать измеримой. Используем для этого **лемму об измеримом выборе**, которая применительно к рассматриваемому случаю формулируется следующим образом:

Лемма 1.1. *Пусть множество* $Q\subset[t_0, T]\times U$ *представимо в виде* $Q=\bigcup_{i=1}^{\infty}\alpha_i$, *где* α_i *— компакты в* $[t_0, T]\times U$. *Тогда существует измеримая функция* $u(t)$ *такая, что* $(t, u(t))\in Q$ *для почти всех* $t\in N\subset[t_0, T]$. *Здесь* N *есть множество всех тех точек отрезка* $[t_0, T]$, *для которых не пусто множество* $Q_t=\{u : (t, u)\in Q\}$.

Кроме того, при доказательстве используется **теорема Лузина***.

Для измеримости функции $u^0(t)\in R_m$, $t_0\leqslant t\leqslant T$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon>0$ *существовало замкнутое множество* $\tau\subset[t_0, T]$, *на котором функция* $u^0(t)$ *непрерывна и мера которого больше* $T-t_0-\varepsilon$.

На основании этой теоремы и измеримости функции $\dot{x}^0(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, существуют замкнутые множества $\tau_i\subset[t_0, T]$, на которых функция $\dot{x}^0(t)$ непрерывна, причем $\tau_1\subset\tau_2\subset\tau_3\subset\ldots$, а мера множества $[t_0, T]-\bigcup_{i=1}^{\infty}\tau_i$ равна нулю.

Определим теперь при произвольном фиксированном i множество α_i как совокупность точек $t\in\tau_i$ и $u\in U$, для которых справедливо равенство

$$\dot{x}^0(t)=f_0(t, x^0(t))+f_1(t, x^0(t))u. \tag{1.22}$$

Иными словами,

$$\alpha_i=\{(t, u) : t\in\tau_i, u\in U, \dot{x}^0(t)=f_0(t, x^0(t))+f_1(t, x^0(t))u\}. \tag{1.23}$$

Как установлено выше, при любом $t\in\tau_i$ множество точек $u\in U$, удовлетворяющих (1.22), не пусто. Ясно также, что это множество компактно. Поэтому компактными и непустыми являются множества α_i, определенные формулой (1.23). Отсюда и из леммы 1.1 вытекает существование измеримой функции $u^0(t)$, удовлетворяющей при почти всех t уравнению (1.15).

Этим и завершается доказательство основной теоремы.

---

*Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. — М.: Физматгиз, 1960.

Замечание. Аналогично, при соответствующих дополнительных условиях могут быть установлены условия существования оптимального управления и для других задач, например для задач с незаданными терминальными условиями, задач с нефиксированным временем, при иных критериях качества и ограничениях на управляющее воздействие и т. д.

3. Анализ условий основной теоремы. В этом пункте обсуждаются условия теоремы 1.1. Ясно, что если в задаче (1.1) — (1.3) нет ни одного допустимого управления, то, конечно, нет и оптимального. Требования компактности и выпуклости множества U также являются существенными. Приведем примеры.

Пример 1.1. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)=u,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\\ &x(0)=x(1)=0,\\ &J(u)=\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t\to \sup_{u(t)\in W}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

В качестве множества U возьмем интервал $(-1, 1)$, т. е.

$$U=(-1, 1). \tag{1.25}$$

Множество U вида (1.25) выпукло, но не компактно.

Если в задаче (1.24) вместо множества U взять его замыкание $U=[-1, 1]$, то в такой задаче единственное оптимальное решение имеет следующий вид:

$$u^0(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1/2,\\ -1, & 1/2\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\quad x^0(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1/2,\\ 1/2-t, & 1/2\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{1.26}$$

Однако функция $u^0(t)$ вида (1.26) не принадлежит множеству (1.25). С другой стороны, в задаче (1.24), (1.25) существует последовательность

$$u_i(t)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{i}, & 0\leqslant t<1/2,\\ -1+\dfrac{1}{i}, & 1/2\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

сходящаяся к функции $u^0(t)$ и такая, что

$$J(u_i)<J(u^0)=\sup_{u(t)\in W} J(u),\ J(u_i)\to J(u_0),\ i\to\infty.$$

Таким образом, в задаче (1.24), (1.25) оптимальное управление не существует.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\dot{x}=u,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\\ &x(0)=x(1)=0,\\ &J(u)=\int_0^1 x^2(t)\,dt\to \inf_{u(t)\in W} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Пусть множество U состоит только из точек -1 и 1, т. е.

$$U=\{-1\}\bigcup\{1\}. \tag{1.28}$$

Ясно, что множество U компактно, но не выпукло. Покажем, что для задачи (1.27), (1.28) оптимальное управление не существует. В самом деле, для любого допустимого управления u имеем $J(u)\geqslant 0$ и существует минимизирующая последовательность и такая, что $J(u_i)\to 0$. В качестве u_i можно взять последовательность вида

$$u_i(t)=\begin{cases} 1, & \dfrac{2k}{2i}\leqslant t<\dfrac{2k+1}{2i},\\ -1, & \dfrac{2k+1}{2i}\leqslant t<\dfrac{2(k+1)}{2i}, \end{cases}\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ i-1. \tag{1.29}$$

Этой последовательности u_i соответствует последовательность решений $x_i(t)$ вида

$$x_i(t)=\begin{cases} t-\dfrac{k}{i}, & \dfrac{2k}{2i}\leqslant t<\dfrac{2k+1}{2i},\\ -t+\dfrac{k+1}{i}, & \dfrac{2k+1}{2i}\leqslant t\leqslant\dfrac{2(k+1)}{i}, \end{cases}\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ i-1. \tag{1.30}$$

На рис. 1.1 и 1. 2 изображены графики управления $u_3(t)$ и траекторий $x_3(t)$ и $x_6(t)$.

Вычисляя, получим, что

$$J(u_i)=\frac{1}{4i}\to 0,\ i\to\infty.$$

Из формулы (1.29) (см. также рис. 1.2) следует, что последовательность $x_i(t)$ равномерно при $0\leqslant t\leqslant 1$ сходится к нулю: $x_i(t)\to x^0(t)\equiv 0$, $0\leqslant t\leqslant 1$. В то же время последовательность управлений $u_i(t)$ поточечно не сходится при $t\in(0,\ 1)$ (рис. 1.1).

Далее, пусть при некотором t_1 имеет место равенство (1.15), которое в данном случае записывается в виде

$$0=\dot{x}^0(t_1)=u^0(t_1). \tag{1.31}$$

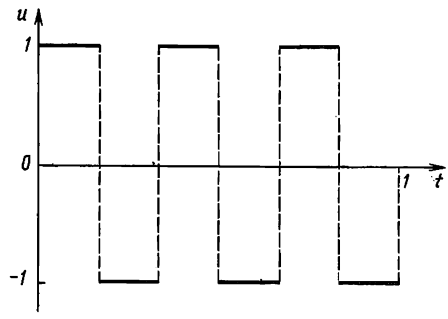


Рис. 1.1. Вид управления $u_3(t)$

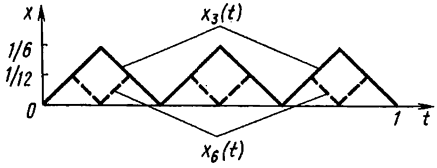


Рис. 1.2. Вид траекторий $x_3(t)$ и $x_6(t)$ в задаче (1.26), (1.27)

Тогда из равенства (1.31) следует, что в момент t_1 оптимальное управление $u^0(t)$ должно быть равно нулю. Однако это невозможно, поскольку нуль не принадлежит множеству U. Значит, оптимальное управление в этой задаче не существует.

Отметим, что если принять выпуклую замкнутую оболочку множества U за множество допустимых управлений U_1, т. е. $U_1=[-1, 1]$, то оптимальное управление в задаче (1.27) существует. В самом деле, в этом случае $u^0(t)\equiv 0$ есть оптимальное управление.

Другие примеры отсутствия оптимального управления приведены ниже (см. § 4).

§ 2. ОСОБЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

1. Определение и вычисление особых управлений. В тех случаях, когда условия теоремы существования оптимального управления выполнены, возникает вопрос о его фактическом отыскании с помощью различных условий экстремума, например на основании принципа максимума. При построении оптимального управления с помощью принципа максимума желательно, чтобы оптимальное управление однозначно определялось из условия максимума функции H по u (см., например, формулу (2.28) из гл. V). Однако для некоторых задач это условие может оказаться невыполненным, т. е. максимум функции H по u может достигаться на целом интервале времени t более чем в одной точке множества U. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу о минимизации функционала $J(u)=\int_0^1 x^2(tu)\,dt$ на решениях уравнения $\dot{x}(t)=u(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $x(0)=0$, $x(1)=0$ при ограничении $|u|\leqslant 1$. В соответствии с теоремой 1.1 оптимальное управление в рассматриваемой задаче существует.

Ясно, что в этой задаче оптимальное управление есть $u_0(t)\equiv 0$, а оптимальная траектория $x_0(t)\equiv 0$. С другой стороны, гамильтониан H в рассматриваемой задаче имеет вид $H=\psi(t)u-x^2$. На основании принципа максимума оптимальное управление равно $\operatorname{sign}\psi(t)$

при $\psi(t) \neq 0$. Далее, поскольку оптимальное управление $u_0(t) \equiv 0$, максимум гамильтониана H при этом управлении может достигаться лишь при $\psi(t) \equiv 0$. Однако в этом случае при любом другом управлении u достигается максимум гамильтониана H. Значит, условие максимума не позволяет отличить оптимальное управление от неоптимального.

В подобных случаях могут возникнуть особые оптимальные управления, которые нельзя определить, используя только соотношения принципа максимума, и поэтому требуется привлекать иные условия оптимальности. Некоторые из этих условий приведены ниже. Подробному изложению теории особых оптимальных управлений посвящена книга*, на которую опираются п. 1 и 2 этого параграфа.

Отметим, что фактическое вычисление особых управлений и вид условий их оптимальности существенно зависят от характера ограничений на область возможных значений управления, размерности вектора управления и типа вариаций, используемых при выводе условий оптимальности.

Основные построения, связанные с особыми управлениями, приведем для системы со скалярным управлением u, меняющимся в открытой области. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + f_1(x(t))u, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ &x \in R_n, \ u \in U \subset R_1, \\ &x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь момент времени T, множество U и вектор x_0 заданы, функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ дифференцируемы столько раз, сколько необходимо для справедливости проводимых далее преобразований. Критерий качества $J(u)$ определяется выражением

$$J(u) = \varphi(x(T)) \to \inf_{u \in U}. \tag{2.2}$$

В силу теоремы 1.2 из гл. V соотношения принципа максимума для задачи (2.1), (2.2) имеют вид

$$\begin{gathered} H(x, \psi, u) = H_0(x, \psi) + H_1(x, \psi)u, \\ H_0 = f_0'(x)\psi, \ H_1 = f_1'(x)\psi, \\ \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \ x(0) = x_0, \\ \dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left[\frac{\partial f_0(x)}{\partial x} + u\frac{\partial f_1(x)}{\partial x}\right]' \psi, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \psi(T) = -\frac{\partial \varphi(x(T))}{\partial x}, \ \psi \in R_n. \end{gathered} \tag{2.3}$$

*Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.

Далее, если $u_0(t)$ — оптимальное управление, а $(x_0(t), \psi_0(t))$ — соответствующее ему решение задачи (2.3), то для любого момента времени $t \in [0, T]$ справедливо равенство

$$H(x_0(t), \psi_0(t, u_0(t)) = \max_{u \in U} H(x_0(t), \psi_0(t), u). \tag{2.4}$$

Дадим теперь определение особого управления. Рассмотрим какую-либо совокупность функций $(u(t), x(t), \psi(t))$, удовлетворяющих соотношениям (2.3), (2.4), и некоторое подмножество U_1 множества U, состоящее более чем из одной точки. Предположим, что на некотором промежутке времени $[\tau_0, \tau_1]$, где $0 \leqslant \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant T$, для любого $u \in U_1$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u) \equiv \\ \equiv H(x(t), \psi(t), u), \ \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \ u \in U_1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Тогда промежуток времени $[\tau_0, \tau_1]$ называется *промежутком особого режима*, управление $u(t)$, $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ — *особым управлением*, траектория $x(t)$ — *траекторией особого режима*, наконец, совокупность $(u(t), x(t))$ — *особым режимом* на промежутке $[\tau_0, \tau_1]$. Заметим, что в рассматриваемом случае ввиду (2.3) тождество (2.5) возможно только тогда, когда

$$H_1(x(t), \psi(t)) \equiv 0, \ \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1. \tag{2.6}$$

Рассмотрим вопрос о построении одного из особых управлений. Для этого будем последовательно вычислять полные производные по времени функции $H(x, \psi)$ в силу системы (2.3). На основании тождества (2.5) они равны нулю при $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$. Указанное дифференцирование осуществляется до тех пор, пока в одной из производных не появится управление с ненулевым множителем. Для удобства вычислений воспользуемся скобками Пуассона $\{H_0, H_1\}$, представляющими собой скалярную функцию вида

$$\{H_0, (x, \psi), H_1(x, \psi)\} = \left[\frac{\partial H_0(x, \psi)}{\partial x}\right]' \frac{\partial H_1(x, \psi)}{\partial \psi} - \left[\frac{\partial H_0(x, \psi)}{\partial \psi}\right]' \frac{\partial H_1(x, \psi)}{\partial x}.$$

С учетом (2.3) имеем

$$\dot{H} = -\{H_0, H_1\} = \dot{H}_1, \ \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1. \tag{2.7}$$

Это выражение для $\dot{H}$ не содержит управления. Поэтому продолжим вычисление и найдем вторую производную $\ddot{H}$ функции H в силу системы (2.3). На основании (2.7) при $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ получаем

$$\ddot{H}_1 = \{H_0, \{H_0, H_1\}\} + u(t)\{H_1\{H_0, H_1\}\} = 0. \tag{2.8}$$

Отметим, что равенства (2.7), (2.8) справедливы, вообще говоря, лишь вдоль рассматриваемых траекторий системы (2.3). Отсюда

следует, что в тех точках $t \in [\tau_0, \tau_1]$, где множитель $\{H_1, \{H_0, H_1\}\}$ при $u(t)$ отличен от нуля, особое управление есть

$$u(t) = -\frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}}. \tag{2.9}$$

Если же в формуле (2.8) слагаемое, содержащее $u(t)$, равно нулю при $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$, то вычисляем следующие полные производные функции H_1 в силу системы (2.3). При этом оказывается, что управление $u(t)$ может возникать только в производных четного порядка $2k$, имеющих вид

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} H = 0 = \{H_0, \{H_0, ..., \{H_0, H_1\}, ...\}\} +$$
$$+ u(t)\{H_1, \{H_0, ..., \{H_0, H_1\}, ...\}\}, \ \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1. \tag{2.10}$$

В правой части (2.10) в первом слагаемом перед H_1 содержится $2k$ символов H_0, а во втором слагаемом между двумя H_1 содержится $2k-1$ символов. Соотношения (2.8), (2.9) вытекают из (2.10) при $k=1$. Из тождества (2.10) можно определить особое управление.

Замечание. Пусть на каком-то шаге вычислений множитель при $u(t)$ в (2.10) оказался отличным от нуля на некоторой части Δ промежутка $[\tau_0, \tau_1]$. Тогда на Δ особое управление определяется из (2.10). При этом дальнейшие вычисления полных производных следует проводить только на той части $[\tau_0, \tau_1]$, которая не содержит Δ.

2. Оптимальность особых управлений. Доказательство принципа максимума (см. теорему 1.1 из гл. V) было основано на использовании игольчатых вариаций управления и условия оптимальности в виде неравенства $J(u) - J(u_0) \geqslant 0$, где u — любое допустимое, а u_0 — оптимальное управление. При этом разность $J(u) - J(u_0)$ была представлена в виде (1.19) из гл. V, т. е. условия оптимальности были получены на основе анализа первой вариации функционала J.

В процессе доказательства необходимых условий оптимальности особого управления в выражении для приращения функционала $J(u) - J(u_0)$ учитывают следующий член разложения и принимают во внимание, что он должен быть неотрицателен при любых допустимых вариациях управления u_0. Иными словами, необходимые условия оптимальности особого управления получаются из требования неотрицательности второй вариации функционала. Выбирая сооответствующим образом указанные вариации управления, получают те или иные необходимые условия оптимальности особого управления.

Приведем их для задачи (2.1), (2.2).

Пусть $u_0(t)$ — оптимальное особое управление в задаче (2.1), (2.2), функции f_0 и f_1 непрерывно дифференцируемы не менее

$2l+1$ раз, где $l \geqslant 1$, и вдоль управления $u(t)$ справедливы равенства

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1. \tag{2.11}$$

Тогда для оптимальности управления $u_0(t)$ необходимо выполнение при этом управлении неравенства

$$(-1)^l \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2l}}{dt^{2l}} \frac{\partial H}{\partial u} \leqslant 0. \tag{2.12}$$

В формулах (2.11), (2.12) функция H определена соотношением (2.3), символ $\frac{d}{dt}$ означает, как и выше, полную производную в силу системы (2.3) при управлении $u_0(t)$, фраза «при управлении $u(t)$» означает, что производная по u вычисляется в точке $u(t)$. Отсюда, в частности, следует, что использование требований (2.11), (2.12) при $l>1$ предполагает соответствующую гладкость по t особого управления $u(t)$.

При $l=1$ условия (2.11), (2.12) переходят в неравенство

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \geqslant 0, \tag{2.13}$$

которое называется *необходимым условием Келли оптимальности особых управлений.*

При $l=2$ из (2.11), (2.12) получаются *необходимые условия Копа — Мойера:*

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial H}{\partial u} \leqslant 0. \tag{2.14}$$

В конкретных задачах могут встретиться ситуации, когда оптимальное управление состоит из особых и неособых участков. Приведенные выше условия оптимальности сохраняют силу на особых участках. Вместе с тем возникает задача об условиях сопряжения особых и неособых участков оптимального управления, т. е. об условиях, имеющих место в точках, разделяющих особые и неособые участки оптимального управления. При этом в результате сопряжения особых и неособых участков могут иметь место четеринг-режимы (см. § 3).

Пример 2.2. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u, \ \dot{x}_3 = -x_1^2, \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \ |u(t)| < 1, \\ J(u) = x_3(1) \to \inf_{|u|<1}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Функции H, H_0, H_1 в силу (2.3), (2.15) имеют вид

$$H=\psi_1 x_2+\psi_2 u-\psi_3 x_1^2,$$
$$H_0=\psi_1 x_2-\psi_3 x_1^2, \tag{2.16}$$
$$H_1=\psi_2,$$

а уравнения для сопряженных переменных ψ_i — вид

$$\dot{\psi}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=2\psi_3 x_1,\ \dot{\psi}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\psi_1,$$
$$\dot{\psi}_3=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=0, \tag{2.17}$$
$$\psi_1(1)=0,\ \psi_2(1)=0,\ \psi_3(1)=-1.$$

Определим особое управление. Для этого будем последовательно вычислять полные производные функции H_1 в силу системы (2.15), (2.17) до тех пор, пока впервые не появится управление u. С учетом (2.16), (2.17) имеем

$$\dot{H}_1=\dot{\psi}_2=-\psi_1,\ \ddot{H}_1=\dot{\psi}_2=-\dot{\psi}_1=-2\psi_3 x_1,$$
$$\dddot{H}_1=-2(\dot{\psi}_3 x_2+\psi_3\dot{x}_1)=-2\psi_3 x_2,$$
$$\frac{d^4 H_1}{dt^4}=-2(\dot{\psi}_3 x_2+\psi_3\dot{x}_2)=-2\psi_3 u. \tag{2.18}$$

Так как в силу (2.17) сопряженная переменная $\psi_3(t)\equiv -1$, то из (2.18) и (2.10) следует, что особое управление $u(t)\equiv 0$. При этом управление функции $x_i(t)\equiv 0 (i=1, 2, 3)$, $\psi_1(t)=\psi_2(t)=0$, $0\leqslant t\leqslant 1$, т. е. H не зависит от управления u. Далее, ввиду (2.18) условие Келли (2.13) выполнено, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2 H_1}{dt^2}=0.$$

Поэтому на основании условия Келли сделать вывод о неоптимальности особого управления $u(t)\equiv 0$ нельзя. Однако условие Коппа — Мойера (2.14) нарушается. Действительно, в силу (2.18) имеем

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^4}{dt^4}\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^4 H_1}{dt^4}=-2\psi_3=2.$$

Значит, особое управление $u(t)\equiv 0$ не является оптимальным.

Отметим, впрочем, что в данном примере неоптимальность управления $u(t)\equiv 0$ можно установить и непосредственно, поскольку при любом допустимом управлении $u(t)$, отличном от нуля на некотором интервале, величина $x_3(1)<0$, а при $u(t)\equiv 0$ справедливо равенство $x_3(t)=0$.

Пример 2.3. Рассмотрим задачу оптимального управления, в которой система описывается теми же уравнениями, что и в (2.15),

а функционал качества имеет вид $J_1(u)=x_3(1)\to\sup\limits_{|u|<1}$. Для того чтобы использовать здесь необходимые условия оптимальности, нужно заменить функционал $J_1(u)$ на функционал $-J_1(u)$, подлежащий минимизации. Таким образом, в рассматриваемой задаче система описывается уравнениями (2.15), а функционал качества имеет вид

$$J_2(u)=-J_1(u)=-x_3(1)\to\inf_{|u|<1}. \tag{2.19}$$

Из уравнений (2.15) непосредственно вытекает, что для любого допустимого управления u величина критерия $J_2(u)\geqslant 0$, а при $u(t)\equiv 0$ значение $J_2(0)\equiv 0$. Значит, $u(t)\equiv 0$ есть оптимальное управление в задаче (2.15), (2.19).

Повторяя те же вычисления, что и в примере 2.2, получим, что в задаче (2.15) с функционалом $J_2(u)$ существует особое управление $u(t)\equiv 0$, которому соответствуют функции

$$x_1(t)=x_2(t)=x_3(t)=\psi_1(t)=\psi_2(t)=0,\ \psi_3(t)\equiv 1,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

При этом, как и в предыдущем примере, выполнено условие Келли:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2 H_1}{\mathrm{d}t^2}=0.$$

Условие Коппа — Мойера в данном случае также выполнено:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^4 H_1}{\partial t^4}=-2\psi_3(t)=-2\leqslant 0.$$

3. Обобщение условий Келли и Коппа — Мойера*. Для управляемой системы (2.1) с краевыми условиями

$$x(0)=x_0,\ x(T)=x_1 \tag{2.20}$$

рассмотрим задачу быстродействия

$$J(u)=T\to\min_{u_0\leqslant u\leqslant u_1} \tag{2.21}$$

Предположим, что решение задачи (2.1), (2.20), (2.21) существует и содержит промежуток особого режима $[\tau_0,\ \tau_1]$, $0\leqslant\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant T$. Ввиду условия (2.6) множитель $H_1(x(t),\ \psi(t))$ при управлении u в гамильтониане системы (2.1) тождественно обращается в нуль на интервале $[\tau_0,\ \tau_1]$, т. е.

$$H_1(x(t),\ \psi(t))=f_1'(x(t))\psi(t)\equiv 0,\ \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1.$$

В силу (2.9) особое управление на отрезке $[\tau_0,\ \tau_1]$ выражается формулой

---

*Меликян А. А. Позиционный метод анализа особых движений в экстремальных задачах динамики // ДАН СССР, 1990. Т. 311, № 1.

$$u^0(t)=-\frac{\{H_0,\{H_0,H_1\}\}}{\{H_1,\{H_0,H_1\}\}},\ \{H_1,\{H_0,H_1\}\}\neq 0,\ H_0=f_0'\psi. \qquad (2.22)$$

Для существования особого участка управления необходимо, чтобы управление (2.22) удовлетворяло ограничениям $u_0\leqslant u^0(t)\leqslant u_1$. Анализ этих ограничений позволяет получить более компактную форму записи необходимых условий оптимальности.

Введем следующие функции переменных x, ψ:

$$H^0=f_0'(x)\psi+u_0f_1'(x)\psi,\ H^1=f_0'(x)\psi+u_1f_1'(x)\psi.$$

Величины H^0, H^1 являются гамильтонианами, соответствующими регулярным траекториям принципа максимума с крайними значениями управления u_0 или u_1. Введем функции

$$A_0=\{H^1,\{H^1,H^0\}\},\ A_1=\{H^0,\{H^0,H^1\}\}.$$

Непосредственное вычисление дает

$$A_0+A_1=(u_1-u_0)^2\{H_1,\{H_0,H_1\}\},$$
$$u_0A_0+u_1A_1=-(u_1-u_0)^2\{H_0,\{H_0,H_1\}\}.$$

Тогда выражение (2.22) для особого управления можно записать в виде

$$u^0(t)=\frac{u_0A_0+u_1A_1}{A_0+A_1},\ A_0+A_1\neq 0. \qquad (2.23)$$

Если $A_0+A_1>0$, то из неравенства $u_0\leqslant u^0(t)\leqslant u_1$ следует, что $A_0\geqslant 0$ и $A_1\geqslant 0$. Если же $A_0+A_1<0$, то должно быть $A_0\leqslant 0$, $A_1\leqslant 1$. Таким образом, величины A_0, A_1 имеют тот же знак, что и их сумма A_0+A_1, т. е. точка (A_0, A_1) может находиться лишь в I или III квадранте. Далее, из условия Келли (2.13) следует, что III квадрант исключается. В самом деле, ввиду условия Келли имеем

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial u}=\{H_1,\{H_0,H_1\}\}=\frac{A_0+A_1}{(u_1-u_0)^2}\geqslant 0. \qquad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что

$$A_0\geqslant 0,\ A_1\geqslant 0. \qquad (2.25)$$

Далее, так как $\{H^0, H^1\}=(u_0-u_1)\{H_0, H_1\}$, то с учетом (2.25) приходим к следующей *системе необходимых условий оптимальности для особого участка:*

$$\{H^0,H^1\}=0,\ \{H^0,\{H^0,H^1\}\}\geqslant 0,\ \{H^1,\{H^0,H^1\}\}\geqslant 0. \qquad (2.26)$$

Отметим некоторые особенности системы необходимых условий (2.26). Во-первых, они записаны только в терминах регулярных

управлений u_0, u_1. Во-вторых, из неравенств (2.26) следуют условия Келли (2.24) и ограничения на особое управление $u_0 \leqslant u^0(t) \leqslant u_1$.

В более общей ситуации, когда A_0, A_1 могут обратиться тождественно по времени в нуль, вместо (2.26) справедлива расширенная система необходимых условий оптимальности. Именно, для некоторого нечетного числа $m=2l+1\geqslant 3$ имеют место равенства и неравенства, справедливые на некоторой особой гиперповерхности в фазовом пространстве:

$$\begin{gathered}\{H^0, H^1\}=0,\ \{H^{i_k}, \{\ldots H^{i_3}, \{H^0, H^1\}, \ldots\}\}=0,\ k=1, \ldots, 2l,\\ (-1)^p\{H^{i_m}, \{\ldots H^{i_3}, \{H^0, H^1\}, \ldots\}\}\geqslant 0,\ m=2l+1\geqslant 3.\end{gathered} \tag{2.27}$$

При $m=3$ условия (2.27) совпадают с (2.26). Здесь индексы i_k ($k=3$, ...) принимают любое из значений 0, 1; p — число нулевых компонент целочисленного вектора (0, 1, i_3, ..., i_m). Таким образом, в соотношениях (2.27) столько равенств и неравенств, сколько существует подобных целочисленных векторов. Условия (2.27) являются *обобщением условий Келли — Мойера.*

При некоторых специальных предположениях аналогичные результаты верны и для неавтономных систем с функционалами более общего вида. Точные формулировки можно найти в цитированной на с. 311 работе.

§ 3. ЧЕТЕРИНГ-РЕЖИМЫ

В приведенных ранее примерах оптимальное управление могло быть выбрано либо гладким, либо имеющим конечное число точек переключения. Вместе с тем теорема 1.1 гарантирует существование лишь измеримого управления. Возникает вопрос: имеются ли конкретные ситуации с оптимальным управлением более сложной структуры, например с бесконечным числом точек переключения управления на конечном интервале времени? Оказывается, что такие случаи встречаются. Возникающие при этом оптимальные управления называются *четеринг-режимами.*

Четеринг-режимы обычно связаны с особыми управлениями. Если у оптимального управления существуют особые участки, то это может привести к возникновению четеринг-режимов, т. е. таких режимов, когда оптимальное управление имеет бесконечное число точек переключения на конечном интервале времени.

Рассмотрим этот вопрос подробнее для задачи управления*

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2(t)=u,\ 0\leqslant t\leqslant T=8, \tag{3.1}$$

$$x_1(0)=x_1(T)=2,\ x_2(0)=-2,\ x_2(T)=2,\ |u|\leqslant 1, \tag{3.2}$$

*C. Marchal. Chattering arcs and chattering controls. J. of optimization theory and applications, 1973, 11, 5, 441 — 468.

$$J(u)=\int_0^T x_1^2(t)\,dt\to\inf_{|u|\leqslant 1}. \tag{3.3}$$

Существование оптимального решения (x_1, x_2, u_0) задачи (3.1) — (3.3) вытекает из теоремы 1.1.

□ Докажем его единственность. Предположим, что существует другое решение (y_1, y_2, v) задачи (3.1) — (3.3), при котором достигается то же самое значение $J(u_0)$ критерия качества (3.3), что и при исходном решении (x_1, x_2, u_0). Рассмотрим непрерывную функцию $z_1(t)=\frac{1}{2}(x_1+y_1)$, которая удовлетворяет соотношениям (3.1), (3.2) при управлении $\frac{1}{2}(u_0+v)=w$. Заметим далее, что

$$4z_1^2=(x_1+y_1)^2=x_1^2+y_1^2+2x_1y_1=2x_1^2+2y_1^2-(x_1-y_1)^2.$$

Значит,

$$4J(w)=2J(u_0)+2J(v)-\int_0^T (x_1(t)-y_1(t))^2\,dt. \tag{3.4}$$

Кроме того, ввиду оптимальности управления u_0 справедливо неравенство $J(w)\geqslant J(u_0)$. Отсюда и из (3.4) следует, что

$$2J(v)=4J(w)-2J(u_0)+\int_0^T (x_1(t)-y_1(t))^2\,dt\geqslant$$

$$\geqslant 2J(u_0)+\int_0^T (x_1(t)-y_1(t))^2\,dt>2J(u_0).$$

Однако последнее соотношение невозможно, так как оно противоречит оптимальности управления v. Тем самым единственность решения задачи (3.1) — (3.3) установлена. ■

Запишем теперь необходимые условия оптимальности для задачи (3.1) — (3.3) в форме принципа максимума. На основании формул (2.26), (2.28) гл. V они имеют вид

$$\dot\psi_1=-2\lambda_0 x_1,\quad \dot\psi_2=-\psi_1, \tag{3.5}$$

$$\max_u H(t, x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, u)=H(t, x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, u_0),$$
$$H(t, x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, u)=\lambda_0 x_1^2(t)+\psi_1(t)x_2(t)+\psi_2(t)u. \tag{3.6}$$

Здесь постоянная $\lambda_0\leqslant 0$. Из (3.6) вытекает, что для тех t, где $\psi_2(t)\neq 0$, оптимальное управление есть

$$u_0(t)=\operatorname{sign}\psi_2(t). \tag{3.7}$$

В тех же точках t, где $\psi_2(t)=0$, оптимальное управление $u_0(t)$ может принимать любые значения на отрезке $[-1, 1]$.

Покажем, что $\lambda_0<0$. Действительно, если бы $\lambda_0=0$, то в силу (3.5) функция ψ_1 была бы постоянной, а функция $\psi_2(t)$ — линейной и притом отличной от нуля, поскольку переменные $(\lambda_0, \psi_1, \psi_2)$ одновременно в нуль не обращаются. Однако при отличной от нуля линейной функции $\psi_2(t)$ оптимальное управление ввиду (3.7) может иметь не более одной точки переключения, а никакое управление такого типа не может удовлетворять всем граничным условиям (3.2). Следовательно, $\lambda_0<0$ и поэтому λ_0 можно взять равным любой отрицательной постоянной.

Положим $\lambda_0=-1/2$. Тогда соотношения (3.5) примут вид

$$\dot{\psi}_1=x_1,\ \dot{\psi}_2=-\psi_1. \tag{3.8}$$

Существование решения краевой задачи (3.1), (3.2), (3.7), (3.8) следует из существования решения задачи оптимального управления (3.1) — (3.3). Кроме того, так как принцип максимума в рассматриваемом случае является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности (см. п. 7 § 2 гл. V), а решение задачи управления (3.2), (3.3) единственно, то единственно и решение краевой задачи (3.1), (3.2), (3.7), (3.8).

Исследуем это решение. Продифференцировав последовательно функцию $\psi_2(t)$ вдоль траекторий систем (3.1), (3.8), получим

$$\dot{\psi}_2=-\psi_1,\ \ddot{\psi}_2=-\dot{\psi}_1=-x_1,\ \dddot{\psi}_2=-\dot{x}_1=-x_2, \tag{3.9}$$

$$\frac{d^4\psi_2(t)}{dt^4}=-u_0(t)=-\operatorname{sign}\psi_2(t). \tag{3.10}$$

В соответствии с уравнениями (3.1), (3.9) и (3.10) имеем

$$\frac{d^4\psi_2(t)}{dt^4}=-1,\ \ddot{x}_1(t)=1, \text{ если } \psi_2(t)>0; \tag{3.11}$$

$$\frac{d^4\psi_2(t)}{dt^4}=1,\ \ddot{x}_1(t)=-1, \text{ если } \psi_2(t)<0. \tag{3.12}$$

Если же на некотором интервале функция $\psi_2(t)\equiv 0$, то и все ее производные на этом интервале равны нулю. Отсюда и из (3.9) имеем

$$\frac{d^4\psi_2(t)}{dt^4}\equiv 0,\ x_1(t)=x_2(t)=\ddot{x}_1(t)\equiv 0, \text{ если } \psi_2(t)\equiv 0. \tag{3.13}$$

В силу (3.10) точками разрыва управления $u_0(t)$ могут быть только такие, где $\psi_2(t)\equiv 0$. Интервалы, где $\psi_2(t)\equiv 0$, в силу (3.6) являются промежутками особого режима. Нетрудно проверить выполнение условий Келли и Коппа — Мойера (2.13), (2.14) на этих интервалах. Покажем, что к промежуткам особого режима не могут примыкать

интервалы, где $\psi_2(t)>0$ или $\psi_2(t)<0$. Действительно, предположим, что на $[\gamma_0, \gamma_1]$ справедливы соотношения (3.11), а на $[\gamma_1, \gamma_2]$ — соотношения (3.13). Пусть $\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2$. Тогда, интегрируя соотношение (3.11), при $t\in[\gamma_0, \gamma_1]$ имеем

$$\psi_2(t)=\frac{(t-\gamma_1)^4}{24}+\alpha_1(t-\gamma_1)^3+\alpha_2(t-\gamma_1)^2+\alpha_3(t-\gamma_1)+\alpha_4,\ \gamma_0<t\leqslant\gamma_1, \quad (3.14)$$

где α_i — некоторые постоянные. Но на промежутке $[\gamma_1, \gamma_2)$ справедливо равенство $\psi_2(t)\equiv\dot{\psi}_2(t)\equiv\ddot{\psi}_2(t)\equiv\dddot{\psi}_3(t)\equiv 0$. В силу непрерывности $\psi_2(t)$ и ее трех производных в точке $t=\gamma_1$, что следует из уравнений (3.9), заключаем, что в формуле (3.14) все $\alpha_i=0$. Значит, ввиду (3.14) функция $\psi_2(t)$ должна быть строго отрицательной, т. е. $\psi_2(t)<0$ при $\gamma_0<t<\gamma_1$, что противоречит определению интервала (γ_0, γ_1).

В упомянутой на с. 318 работе показано, что в рассматриваемом случае задачи (3.1) — (3.3) переход к промежутку особого режима управления (т. е. к интервалу вида (3.13)) возможен только благодаря использованию управления с бесконечным числом точек переключения. Иначе говоря, в задаче (3.1) — (3.3) имеет место четеринг-режим.

Для обоснования этого факта было установлено, что функция $\psi_2(t)$ обладает следующими свойствами:

1^0. $\psi_2(t)$ симметрична относительно точки $T/2$.

2^0. $\psi_2(t)\equiv 0$ на некотором отрезке $[t_0, T-t_0]$.

3^0. Пусть τ_i $(i\geqslant 0)$ нули функции $\psi_2(t)$ на $(T-t_0, T]$ такие, что $\tau_0>\tau_1>\tau_2>\ldots$, причем τ_0 — нуль, ближайший к T. Тогда при некотором $q>1$ справедливы соотношения

$$\tau_{i+1}=(T-t_0)\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{\tau_i}{q},\ s_{i+1}=\frac{s_i}{q}=\frac{s_0}{q^{i+1}},$$

где через s_i обозначены величины $s_i(\tau_i-T+t_0)$.

4^0. При $0\leqslant t<t_0$ нули функции $\psi_2(t)$ расположены симметрично относительно точки $T/2$ с нулями τ_i.

5^0. Точки t_0 и $(T-t_0)$ являются точками сгущения нулей функции $\psi_2(t)$.

6^0. Справедливы соотношения

$$\psi_2\left(\frac{t-T+t_0}{q}\right)=-\frac{1}{q^4}\psi_2(t-T+t_0),\ t\geqslant T-t_0;\ \psi_2\left(\frac{s}{q}\right)=-\frac{1}{q^4}\psi_2(s), \quad (3.15)$$

где через s обозначена величина $s=(t-T+t_0)$, $0\leqslant s\leqslant t_0$.

7^0. Функция $\psi_2(t)$ зависит от трех параметров: t_0, τ_0 и q.

Используя свойства 1^0 — 7^0, можно вывести уравнения для определения числовых значений параметров q, t_0 и τ_0.

Рассмотрим функцию $\psi_2(s)$ аргумента $s=t-T+t_0$. Если на интервале (s_1, s_0) справедливы соотношения (3.11), то

$$\psi_2(s)=-\frac{s^4}{24}+\alpha_1 s^3+\alpha_2 s^2+\alpha_3 s+\alpha_4,\ s_1\leqslant s\leqslant s_0. \tag{3.16}$$

Заметим, что при $s_2\leqslant s\leqslant s_1$ величина qs изменяется на отрезке $[s_1, s_0]$. Поэтому из формул (3.15) и (3.16) следует, что при $s_2\leqslant s\leqslant s_1$ функция $\psi_2(s)$ имеет вид

$$\psi_2(s)=-\frac{1}{q^4}\psi_2(qs)=-\frac{1}{q^4}\left[-\frac{q^4s^4}{24}+\alpha_1 q^3 s^3+\alpha_2 q^2 s^2+\alpha_3 qs+\alpha_4\right]=$$

$$=-\left[-\frac{s^4}{24}+\alpha_1\frac{s^3}{q}+\alpha_2\frac{s^2}{q^2}+\alpha_3\frac{s}{q^3}+\alpha_4\frac{1}{q^4}\right]. \tag{3.17}$$

Аналогично, при $s_{i+1}\leqslant s\leqslant s_i$ получим

$$\psi_2(s)=(-1)^i\left[-\frac{s^4}{24}+\alpha_1 q^{-i}s^3+\alpha_2 q^{-2i}s^2+\alpha_3 q^{-3i}s+\alpha_4 q^{-4i}\right]. \tag{3.18}$$

На основании (3.9) функция $\psi_2(t)$ и ее первые три производные непрерывны. Значит, приравнивая их значения при $s=s_1$, полученные из (3.16) и (3.17), приходим к уравнениям

$$\psi_2(s_1)=-\frac{s_1^4}{24}+\alpha_1 s_1^3+\alpha_2 s_1^2+\alpha_3 s_1+\alpha_4=$$

$$=\frac{s_1^4}{24}-\alpha_1 q^{-1}s_1^3-\alpha_2 q^{-2}s_1^2-\alpha_3 q^{-3}s_1-\alpha_4 q^{-4},$$

$$\dot{\psi}_2(s_1)=-\frac{s_1^3}{6}+3\alpha_1 s_1^2+2\alpha_2 s_1+\alpha_3=$$

$$=\frac{s_1^3}{6}-3\alpha_1 q^{-1}s_1^2-2\alpha_2 q^{-2}s_1-\alpha_3 q^{-3},$$

$$\ddot{\psi}_2(s_1)=-\frac{s_1^2}{2}+6\alpha_1 s_1+2\alpha_2=\frac{s_1^2}{2}-6\alpha_1 q^{-1}s_1-2\alpha_2 q^{-2},$$

$$\dddot{\psi}_2(s_1)=-s_1+6\alpha_1=s_1-6\alpha_1 q^{-1}.$$

Разрешая эти уравнения относительно α_i, находим:

$$\alpha_1=\frac{s_1 q}{3(1+q)},\ \alpha_2=-\frac{s_1^2 q^2}{2(1+q^2)},\ \alpha_3=\frac{s_1^3 q^3}{3(1+q^3)},\ \alpha_4=-\frac{s_1^4 q^4}{12(1+q^4)}. \tag{3.19}$$

Подставляя эти значения α_i в выражение (3.16) и используя равенство $\psi_2(s_0)=0$, получаем, что число q есть корень уравнения

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{1+q}+\frac{6}{1+q^2}-\frac{4}{1+q^3}+\frac{1}{1+q^4}=0. \tag{3.20}$$

Можно показать, что уравнение (3.20) имеет единственное действительное решение $q>1$.

После того как значение q определено, значения параметров t_0 и τ_0 находятся из условия минимума функционала (3.3). В работе, цитированной на с. 318, найдены значения с пятью десятичными знаками параметров q, t_0, τ_0, которые оказались равными $q=4{,}13016$; $t_0=3{,}43039$; $\tau_0=7{,}94223$.

Теперь можно записать точную формулу для функции $\psi_2(s)$. При $s_{i+1}\leqslant s\leqslant s_i$ функция $\psi_2(s)$ представима в виде

$$\psi_2(s)=\frac{(-1)^i}{12}\left[-\frac{s^4}{2}+4\frac{s_{i+1}s^3q}{1+q}-6\frac{s_{i+1}^2s^2q^2}{1+q^2}+4\frac{s_{i+1}^3sq^3}{1+q^3}-\frac{s_{i+1}^4q^4}{1+q^4}\right]. \quad (3.21)$$

Здесь $s_0=\tau_0-T+t_0=3{,}48816$, а $s_i=\dfrac{s_0}{q^{i+1}}=\dfrac{3{,}48816}{(4{,}13016)^{i+1}}$, $i\geqslant 1$.

Опишем вид управления $u_0(t)$ и траектории $x_1(t)$. Используя симметрию функции $\psi_2(t)$, получаем, что первое переключение управления $u_0(t)$ происходит при $t=T-\tau_0=0{,}05777$. При этом $u_0(t)=-1$ для $0\leqslant t\leqslant 0{,}05777$. Затем до следующего нуля функции $\psi_2(t)$ управление $u_0(t)=1$, потом снова $u_0(t)=-1$ и т. д. Таким образом, на отрезке [0; 3,43039) управление имеет бесконечное число точек переключения, а значения управления равны 1 или -1. Это участок четеринг-режима. На отрезке [3,43039; 4,56961] управление $u_0(t)\equiv 0$. Это промежуток особого управления. На отрезке (4,56961; 8] снова имеет место четеринг-режим.

Оптимальная траектория $x_1(t)$ состоит из чередующихся дуг парабол $\ddot{x}(t)=1$ и $\ddot{x}(t)=-1$. Вид оптимальной траектории $x_1(t)$ приведен на рис. 3.1. При приближении к точке 3,43039 слева

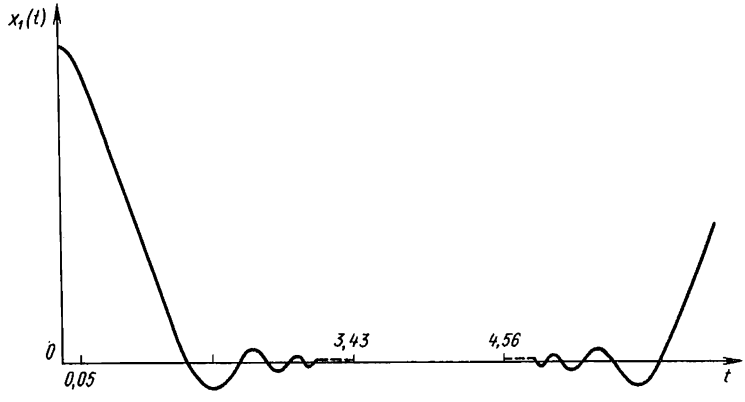


Рис. 3.1. Траектория системы (3.1) при наличии четеринг-режима оптимального управления

и к точке 4,56961 справа траектория $x_1(t)$ совершает колебания с амплитудой, стремящейся к нулю, и с частотой, стремящейся к бесконечности. Неприведенная часть графика $x_1(t)$ отмечена на рис. 3.1 точками.

§ 4. СКОЛЬЗЯЩИЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ

В ряде конкретных ситуаций, представляющих практический интерес, оптимальное управление может не существовать. При этом можно построить минимизирующую последовательность (которая всегда существует), т. е. такую последовательность, что соответствующие значения критерия качества сходятся к его точной нижней грани. Однако не всегда оказывается возможным указать предельное допустимое управление, на котором достигалась бы указанная нижняя грань. В таких случаях управление обычно тем лучше (с точки зрения рассматриваемого функционала качества), чем больше точек переключения оно имеет. Изучение подобного рода ситуаций приводит к понятию скользящего оптимального режима. Имеется определенное сходство между скользящими и четеринг-режимами. Однако между ними есть и принципиальное различие. В случае четеринг-режима оптимальное управление существует, хотя и имеет весьма сложную структуру. Скользящие же режимы характеризуются тем, что оптимальное управление вообще не существует.

Приведем примеры, поясняющие сказанное.

Пример 4.1. Построим минимизирующую последовательность для скалярной задачи со свободным правым концом

$$\dot{x}(t)=u(t),\ |u(t)|\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ x(0)=0, \tag{4.1}$$

$$J(u)=\int_0^1 (x^2(t)-u^2(t))\,dt\to\inf. \tag{4.2}$$

Рассмотрим последовательность допустимых управлений $u_i(t)$ ($i=1, 2, \ldots$), задаваемых соотношениями

$$u_i(t)=\begin{cases} 1, & \dfrac{k}{i}<t\leqslant\dfrac{2k+1}{2i},\\ -1, & \dfrac{2k+1}{2i}<t\leqslant\dfrac{k+1}{i}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь индекс k при каждом фиксированном i пробегает значения $k=0, 1, \ldots, i-1$. Соответствующая последовательность $x_i(t)$ решений задачи (4.1), (4.2) имеет вид

$$x_i(t)=\begin{cases} t-\dfrac{k}{i}, & \dfrac{k}{i}<t\leqslant\dfrac{2k+1}{2i},\\ -t+\dfrac{k+1}{i}, & \dfrac{2k+1}{2i}<t\leqslant\dfrac{k+1}{i}, \end{cases}\quad k=0, 1, \ldots, i-1. \tag{4.4}$$

Отметим, что $u_i(t)$ и $x_i(t)$ совпадают с управлениями (1.29) и траекториями (1.30) из примера 1.2. В частности, вид управления $u_3(t)$ и траектории $x_3(t)$ и $x_6(t)$ приведены на рис. 1.1 и 1.2.

Вычислим значение критерия (4.2) при управлении $u_i(t)$. Учитывая (4.3) и (4.4), получим $J(u_i)=\dfrac{1}{12i^2}-1$. Из формулы (4.2) видно, что для любого допустимого управления $u(|u|\leqslant 1)$ функционал $J(u)\geqslant -1$. Поэтому $J(u_i)\to \inf\limits_{|u|\leqslant 1} J(u)=-1$. При этом последовательность траекторий $x_i(t)$, как следует из формулы (4.4) (см. также рис. 1.2), равномерно при $0\leqslant t\leqslant 1$ сходится к нулю. В то же время последовательность управлений $u_i(t)$ не сходится поточечно.

Если же при некотором t_1 справедливо равенство $\dot{x}_0(t_1)=u_0(t_1)$, то в этот момент $u_0(t_1)=0$. Однако допустимое управление $u(t)\equiv 0$ не оптимально, поскольку $J(0)=0>\inf\limits_{|u|\leqslant 1} J(u)=-1$.

Таким образом, оптимальное управление в задаче (4.1), (4.2) не существует. Отметим, что это не противоречит утверждению теоремы 1.1, поскольку в рассматриваемом случае критерий качества (4.2) явным образом зависит от $u(t)$.

В подобных случаях предельную траекторию называют *траекторией скользящего режима.*

Пример 4.2. Рассмотрим скалярную задачу управления

$$\dot{x}(t)=u(t),\ 0\leqslant t\leqslant 4,\ x(0)=x(4)=1,$$

$$J(u)=\int_0^4 |x(t)|\,dt\to\inf_u,\ u(t)\in U.$$

Множество U состоит из двух точек 1 и -1, т. е. $|u(t)|=1$.

Построим последовательность управлений $u_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots)$ следующим образом. Все управления $u_i(t)\equiv -1$ при $0\leqslant t\leqslant 1$ и $u_i(t)\equiv 1$ при $3\leqslant t\leqslant 4$. Далее разделим отрезок [1,3] на i равных частей и положим

$$u_i(t)=\begin{cases} -1, & 1+\dfrac{2j}{i}\leqslant t\leqslant 1+\dfrac{2j+1}{i},\\ 1, & 1+\dfrac{2j+1}{i}\leqslant t<1+\dfrac{2(j+1)}{i},\end{cases}$$

где $j=0, \ldots, i-1$.

Ясно, что в рассматриваемом примере точная нижняя грань J_0 критерия качества $J(u)$ есть $J_0=\inf\limits_{u\in U} J(u)=1$. Кроме того, вычисляя, получим, что $J(u_i)=1+\dfrac{1}{i}$. Значит, $J(u_i)\to J_0$ при $i\to\infty$. Таким образом, последовательность u_i является минимизирующей, однако

ни при каком допустимом управлении получить величину критерия J_0 нельзя. Предельная траектория (т. е. траектория скользящего режима) имеет вид $x(t)=1-t$ при $0\leqslant t\leqslant 1$; $x(t)\equiv 0$ при $1\leqslant t\leqslant 3$; $x(t)=t-3$ при $3\leqslant t\leqslant 4$.

В связи с трудностью описания скользящих режимов с помощью допустимых управлений их определение дается в терминах траекторий, соответствующих этим управлениям*.

Приведем определение скользящего режима для управляемой системы с ограниченным замкнутым множеством U:

$$\dot{x}(t)=f(x(t), u(t)),\ x\in R_n,\ u\in U\subset R_m,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x(0)=x_0,$$
$$J(u)=\int_0^T F(t, x(t), u(t))\,dt+\varphi(x(T))\to \inf_{u\in U}. \tag{4.5}$$

Здесь T и x_0 заданы.

Пусть $u_i(t)$ — минимизирующая последовательность допустимых управлений, т. е. измеримых функций $u_i(t)\in U$ при каждом t из отрезка $[0, T]$ и таких, что $J(u_i)\underset{i\to\infty}{\to} J_0=\inf\limits_{u\in U} J(u)$, а $x_i(t)$ — соответствующая последовательность траекторий системы (4.5), причем $x_i(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$ — поточечно сходится к функции $x_0(t)$.

Определение 4.1. Пусть выполнено одно из двух условий:

1^0) либо траектория $x_0(t)$ не является решением уравнения (4.5) ни при каком допустимом управлении v;

2^0) либо траектория $x_0(t)$ является решением уравнения (4.5) при некотором допустимом управлении v, но при этом $J(v)>\inf\limits_{u\in U} J(u)$.

Тогда траектория $x_0(t)$ называется *траекторией скользящего оптимального режима.*

Отметим, что скользящий оптимальный режим в примере 4.1 соответствует случаю 2^0 в определении 4.1. В самом деле, в этом примере траекторию скользящего режима $x_0(t)\equiv 0$ можно реализовать с помощью допустимого управления $v=0$. Однако вместе с тем $J(v)=0>\inf\limits_{u\in U} J(u)=-1$.

В примере 4.2 скользящий режим $x_0(t)\equiv 0$ не может быть реализован никаким допустимым управлением.

Из изложенного видно, что случай 2^0 может иметь место тогда, когда критерий качества явным образом зависит от управления $u(t)$.

Для описания множества функций, являющихся пределами последовательностей траекторий $x_i(t)$ системы (4.5), соответствующих

*Гамкрелидзе Р. В. О скользящих оптимальных режимах // ДАН СССР, 1962. Т. 143, № 6.

последовательностям управлений $u_i(t)$, можно поступить следующим образом.

Рассмотрим вспомогательную управляемую систему

$$\dot{y}(t)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)f(y(t),\ v_i(t)),\ y\in R_n,\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{4.6}$$

В уравнении (4.6) управлениями являются: $n+1$ вектор $v_i(t)\in R_m$; $n+1$ скалярные функции $\alpha_i(t)$, удовлетворяющие ограничениям

$$v_i(t)\in U\subset R_m,\ \alpha_i(t)\geqslant 0,\ \alpha_0(t)+\ldots+\alpha_n(t)\equiv 1. \tag{4.7}$$

Иными словами, система (4.6) зависит от $(m+1)(n+1)$ управляющих функций $(v_0(t),\ \ldots,\ v_n(t),\ \alpha_0(t),\ \ldots,\ \alpha_n(t))$.

Системы (4.5), (4.6) связаны между собой следующим образом. Возьмем произвольную фиксированную точку $x\in R_n$ и образуем множества $A(x)$ и $B(x)$. Множество $A(x)$ есть совокупность всех точек $f(x,\ u)$, которые получаются, когда u пробегает всю область U, а множество $B(x)$ — совокупность точек $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f(x,\ v_i)$, когда α_i и v_i — пробегают всю область их определения (4.7). Таким образом, $A(x)$ — это множество всех фазовых скоростей системы (4.5), которые могут в точке x, а $B(x)$ — аналогичное множество фазовых скоростей для системы (4.6). Из построения видно, что $B(x)$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку множества $A(x)$.

Пусть, далее, последовательность $\{x_i(t)\}$ решений уравнения (4.5) сходится в каждой точке $t\in[0,\ T]$ к функции $y(t)$. Тогда $y(t)$ является некоторым решением системы (4.6), (4.7). Обратно: любое решение системы (4.6), (4.7) является пределом некоторой поточечно сходящейся при $t\in[0,\ T]$ последовательности решений уравнения (4.5).

Аналогично определяются и оптимальные скользящие режимы. При этом их описание может быть дано в терминах оптимальных траекторий соответствующей задачи управления для системы (4.6).

Рассмотрим, например, задачу быстродействия для системы (4.5), т. е. задачу о переводе этой системы из заданного начального положения x_0 в заданное конечное положение x_1 за минимальное время. Уравнения, определяющие постановку этой задачи, имеют вид

$$\dot{x}(t)=f(x(t),\ u(t)),\ x\in R_n,\ u\in U\subset R_m,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$x(0)=x_0,\ x(T)=x_1,\ T\to\inf_{u\in U}.$$

Критерий качества в этом случае не зависит от u явным образом. Поэтому, как отмечено выше, здесь скользящий оптимальный режим может иметь место, если предельная траектория $x_0(t)$ не

является решением системы (4.5) ни при каком допустимом управлении.

Предположим, что существует допустимое управление, переводящее систему (4.5) из x_0 в x_1 за конечное время. Представляется естественным следующее определение оптимального по быстродействию скользящего режима.

Определение 4.2. Пусть $(u_i(t), x_i(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T_i$ — последовательность допустимых управлений и соответствующих им траекторий системы (4.5) таких, что

$$x_i(0) = x_0,\ x_i(T_i) = x_1,\ \lim_{i \to \infty} T_i = T. \tag{4.8}$$

Здесь T означает точную грань времени перехода системы (4.5) из x_0 в x_1. Пусть, далее, последовательность $x_i(t)$ сходится поточечно при $i \to \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$ к функции $x_0(t)$, которая ни при каком допустимом управлении не является решением задачи (4.5). Тогда кривая $x_0(t)$ называется *оптимальной по быстродействию траекторией скользящего режима* системы (4.5).

Попытаемся теперь искать оптимальные по быстродействию скользящие режимы для системы (4.5) среди решений задачи быстродействия для системы (4.6) с теми же начальным и конечным положениями x_0 и x_1. Отметим прежде всего, что время быстродействия T_1 для системы (4.6) не больше нижней грани времени перехода T системы (4.5) из x_0 в x_1. Однако возможны случаи*, когда нижняя грань времени перехода T системы (4.5) из x_0 в x_1 строго больше времени быстродействия T_1 системы (4.6).

В связи с этим целесообразно переопределить траекторию скользящего режима так, чтобы вдоль нее время перехода из x_0 в x_1 было равно T_1.

Определение 4.3. Пусть $(u_i(t), x_i(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T_1$,— последовательность управлений и соответствующих им траекторий системы (4.5), причем $x_i(t)$ сходится поточечно при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ к функции $x_0(t)$, удовлетворяющей условиям $x_0(0) = x_0$, $x_0(T_1) = x_1$. Если функция $x_0(t)$ ни при каком допустимом управлении не является решением задачи (4.5), то она называется *оптимальной по быстродействию траекторией скользящего режима* системы (4.5).

Отметим разницу между определениями 4.2 и 4.3 оптимального скользящего режима. В определении 4.2 требуется, чтобы последовательность траекторий $x_i(t)$ удовлетворяла краевым условиям (4.8), а в определении 4.3 — нет. Все оптимальные траектории скользящего режима системы (4.5) в смысле определения 4.3 содержатся среди оптимальных по быстродействию траекторий системы (4.6). Для отыскания последних можно использовать принцип максимума (см. теоремы 2.2 из гл. V).

---

*Вапнярский И. Б. Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее применения и необходимые условия оптимальности скользящих и основных режимов // ЖВМ и МФ, 1967. Т. 7, № 2.

Приведем необходимые условия разрешимости задачи быстродействия для системы (4.6), (4.7). Пусть решение $(y(t), \alpha_0(t), \ldots, \alpha_n(t), v_0(t), \ldots, v_n(t))$ этой задачи существует. Тогда найдется такое ненулевое решение $\psi(t) \in R_n$ уравнения

$$\dot{\psi}(t) = -\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t) \frac{\partial}{\partial y} H(\psi, y(t), v_i(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1,$$

$$H(\psi, y, v_i) = \psi' f(y, v_i).$$

что при почти всех t, где $\alpha_i(t) > 0$, для $i = 0, \ldots, n$ справедливо равенство

$$H(\psi(t), y(t), v_i(t)) = \max_{u \in U} H(\psi(t), y(t), u). \tag{4.9}$$

Из последнего равенства вытекает, что возникновение скользящего режима связано с неединственностью точки, в которой достигается максимум по u функции $H(\psi, y, u)$. Если же уравнение (4.9) имеет единственное решение относительно $v_i(t)$, то функция $y(t)$ $0 \leqslant t \leqslant T_1$ является оптимальной по быстродействию траекторией системы (4.5).

Пример 4.3. Рассмотрим задачу быстродействия для системы

$$\dot{x}_1 = u, \ \dot{x}_2 = |u| - x_1^2. \tag{4.10}$$

Начальное и конечное положения заданы соотношениями

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \tag{4.11}$$

$$x_1(T) = 0, \ x_2(T) = 1. \tag{4.12}$$

Наконец, ограничения на управление и критерий качества имеют вид

$$|u| \leqslant 1, \ T \to \inf_u. \tag{4.13}$$

Построим последовательность $u_i(t)$ измеримых функций, удовлетворяющих (4.13) и таких, что предел соответствующей последовательности решений задачи (4.10), (4.11) равномерно на отрезке [0, 1] сходится к траектории, для которой справедливы соотношения (4.12) при $T = 1$. Положим $u_i(t) = (-1)^j$ при $ji^{-1} \leqslant t \leqslant (j+1)i^{-1}$, где $j = 0, 1, \ldots, i-1$, и найдем предел решений задачи (4.10), (4.11) при $i \to \infty$:

$$x_1(t) \equiv 0, \ x_2(t) = t. \tag{4.14}$$

Значит, время перехода системы (4.10) по траектории (4.14) из положения (4.11) в положение (4.12) есть $T = 1$. Для доказательства того, что это время перехода $T = 1$ является минимально возможным, рассмотрим соответствующую задачу быстродействия для системы (4.6), (4.7), имеющей вид

$$\begin{gathered}\dot{y}_1(t)=\alpha_1(t)v_1(t)+\alpha_2(t)v_2(t),\\ \dot{y}_2(t)=\alpha_1(t)|v_1(t)|+\alpha_2(t)|v_2(t)|-y_1^2,\\ |v_i(t)|\leqslant 1,\ \alpha_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \alpha_1(t)+\alpha_2(t)=1,\\ y_1(0)=y_2(0)=0,\ y_1(T)=0,\ y_2(T)=1,\ T\to\inf_{\alpha_i,\ v_i}.\end{gathered}\tag{4.15}$$

За оптимальное управление в задаче (4.15) можно взять следующее:

$$\alpha_1(t)=\alpha_2(t)\equiv\frac{1}{2},\ v_1(t)\equiv -1,\ v_2(t)\equiv 1.\tag{4.16}$$

Оптимальность управления (4.16) вытекает из того, что при этом управлении правая часть уравнения (4.15) для y_2 достигает максимального значения, равного 1. Поскольку время быстродействия в задаче (4.15) с учетом (4.16) равно 1, тем самым минимальность времени перехода $T=1$ в исходной задаче (4.10) — (4.13) установлена.

Основные результаты и формулы главы VIII

Существование оптимального управления. Пусть для задачи (1.1), (1.2) существует хотя бы одно допустимое управление и множество $U\subset R_n$ компактно и выпукло. Тогда в задаче (1.1), (1.2) существует оптимальное управление.

Особые оптимальные управления. Пусть U_1 — некоторое подмножество U, состоящее более чем из одной точки, и $[\tau_0,\ \tau_1]$, $0\leqslant\tau_0<\tau_1\leqslant T$ — некоторый промежуток такие, что справедливо тождество

$$H(x(t),\ \psi(t),\ u(t))=\max_{u\in U}H(x(t)/\psi(t),\ u)\equiv H(x(t),\ \psi(t),\ u),\ u\in U_1,\ \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1.$$

Тогда промежуток $[\tau_0,\ \tau_1]$ называется промежутком особого режима, управление $u(t)$, $\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$ — особым управлением, траектория $x(t)$ — траекторией особого режима, а совокупность $(u(t),\ x(t))$ — особым режимом на промежутке $[\tau_0,\ \tau_1]$.

Необходимые условия Келли оптимальности особых управлений:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial H}{\partial u}\geqslant 0.$$

Необходимые условия Коппа — Мойера оптимальности особых управлений:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial H}{\partial u}=0,\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}\frac{\partial H}{\partial u}\leqslant 0.$$

Четеринг-режимы. Четеринг-режимом называется такой оптимальный режим, для которого оптимальное управление имеет бесконечное число точек переключения на конечном интервале времени.

В задаче

$$\begin{gathered}\dot{x}_1=x_0,\ \dot{x}_2=u,\ 0\leqslant t\leqslant 8,\\ x_1(0)=x_2(8)=x_1(8)=2,\ x_2(0)=-2,\\ J(u)=\int_0^8 x_1^2(t)\,\mathrm{d}t\to\inf_{|u|\leqslant 1}\end{gathered}$$

возникает четеринг-режим на отрезках [0; 3,43039) и (4,56961; 8], а отрезок [3,43039; 4,56961] есть отрезок особого режима.

Скользящие оптимальные режимы. Пусть $u_i(t)$ — минимизирующая последовательность допустимых управлений в задаче (4.5), а $x_i(t)$ — соответствующая последовательность траекторий системы (4.5), причем последовательность $x_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ поточечно сходится к функции $x_0(t)$. Тогда траектория $x_0(t)$ называется траекторией скользящего режима, если выполнено одно из двух условий:

1^0) либо траектория $x_0(t)$ не является решением уравнения (4.5) ни при каком допустимом управлении v;

2^0) либо траектория $x_0(t)$ является решением уравнения (4.5) при некотором допустимом управлении v, но при этом $J(v) > \inf\limits_{u \in U} J(u)$.

Пусть последовательность $\{x_i(t)\}$ решений уравнения (4.5) сходится в каждой точке $t \in [0, T]$ к функции $y(t)$. Тогда $y(t)$ является некоторым решением системы

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t) f(y(t), v_i(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \ y \in R_n,$$

$$v_i(t) \in U \subset R_m, \ \alpha_i(t) \geqslant 0, \ \alpha_0(t) + \ldots + \alpha_n(t) \equiv 1.$$

Обратно: любое решение этой системы является пределом некоторой поточечно сходящейся при $t \in [0, t]$ последовательности решений уравнения (4.5).

Пусть $(u_i(t), x_i(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T_i$ — последовательность допустимых управлений и соответствующих им траекторий системы (4.5) таких, что $x_i(0) = x_0$, $x_i(T_i) = x_1$, $\lim\limits_{i \to \infty} T_i = T$, где T означает точную нижнюю грань времени перехода системы (4.5) из x_0 в x_1. Пусть последовательность $x_i(t)$ сходится поточечно при $i \to \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T$ к функции $x_0(t)$, которая ни при каком допустимом управлении не является решением задачи (4.5). Тогда функция $x_0(t)$ называется оптимальной по быстродействию траекторией скользящего режима системы (4.5).

Упражнения ко второй части

1. Пусть управление движением точки, описываемое уравнением

$$\ddot{x} = u(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 2, \ x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 1,$$

осуществляется с помощью ПД-регулятора

$$u(t) = -C_1 x(t) - C_2 \dot{x}(t).$$

а) Найти значения C_1 и C_2 коэффициентов регулятора, при которых минимален критерий качества

$$J(u) = x^2(2) + \int_0^2 u^2(t)\, dt.$$

Решить эту задачу в предположении, что в регуляторе используется только координата (т. е. $C_2 = 0$) или только скорость (т. е. $C_1 = 0$). Сравнить соответствующие оптимальные значения критерия качества.

2. Пусть управляемые малые колебания маятника в окрестности нижнего устойчивого положения равновесия описываются уравнением

$$\ddot{x}(t) = -x(t) + u(t), \ x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = 0.$$

Найти коэффициенты C_1 и C_2 регулятора

$$u(t) = -C_1 x(t) - C_2 \dot{x}(t),$$

при которых минимален критерий качества

$$J(u)=x^2(2)+\dot{x}^2(2)+\int_0^2 u^2(t)\,dt.$$

3. Решить упр. 2 для маятника в окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия, когда уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x}=x(t)+u(t),\ x(0)=1\ \dot{x}(0)=0.$$

4. Процесс изменения температуры $x_1(t)$ в изолированной комнате может быть описан уравнением

$$\dot{x}_1(t)=-\frac{1}{Cm}[k(x_1(t)-x_0)]+u,\ t\geqslant 0.$$

Здесь x_0 — температура наружного воздуха; C — теплоемкость воздуха; m — масса воздуха комнаты; $k>0$ — заданное число, характеризующее потери за счет конвенции, u — управление количеством теплоты, выделяемой нагревателем, расположенным в комнате. Пусть требуется нагреть комнату до температуры x_T за заданное время T при минимальных расходах на управление и при заданной начальной температуре $x_1(0)$.

а) Найти управление, минимизируя функционал

$$J(u)=\alpha_1(x_1(T)-x_T)^2+\int_0^T u^2(t)\,dt,$$

где постоянная $\alpha_1>0$.

б) Убедиться, что при отсутствии нагревателя (т. е. при $u=0$) температура в комнате стремится к температуре наружного воздуха.

в) Построить управление, стабилизирующее температуру в комнате на заданном уровне x_T, минимизируя функционал

$$J(u)=\int_0^\infty [(x_1(t)-x_T)^2\alpha_1+u^2]\,dt,\ \alpha_1=1;\ 10;\ 100.$$

г) Найти оптимальное управление, при котором $x_1(T)=x_T$ и минимален критерий качества $\int_0^T |u(t)|\,dt$.

5. Рассмотрим процесс изменения температуры в двухкомнатной квартире со смежными комнатами и нагревателем, расположенным в первой из них. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — температуры, а m_1, m_2 — массы воздуха в первой и второй комнатах; k_1 — коэффициент теплообмена между комнатами; постоянные C и k те же, что и в упр. 4. Уравнения для x_1 и x_2 имеют вид

$$\dot{x}_1=-\frac{1}{Cm_1}[k(x_1(t)-x_0)]+u+k_1(x_2(t)-x_1(t)),$$

$$\dot{x}_2=-\frac{k}{Cm_2}(x_2(t)-x_0)+k_1(x_1(t)-x_2(t)).$$

а) Показать, что при $u=0$ температуры в комнатах стремятся к температуре наружного воздуха.

б) Ответить на вопросы упр. 4 для рассматриваемого случая.

6. Пусть ракета совершает вертикальный подъем под действием гравитационных и управляющих сил. Уравнения движения имеют вид $\ddot{x}(t) = -g + u$, где g — гравитационная постоянная, u — реактивное ускорение. Требуется найти такое u, при котором высота подъема максимальна и справедливо одно из ограничений:

$$\int_0^T |u(t)|\,dt = u_0, \quad \int_0^T u^2(t)\,dt = u_0,$$

где u_0 — заданная постоянная, T — время достижения максимальной высоты. Решить ту же задачу при дополнительном ограничении $0 \leqslant u \leqslant u_1$, где u_1 — заданная постоянная.

7. Процесс управления высокотемпературной печью можно описать уравнением

$$\dot{x}(t) = -\alpha_1(x(t) - x_0) - \alpha_2(x^4(t) - x_0^4) + \alpha_3 u, \; t \geqslant 0.$$

Здесь $x(t)$ — температура печи; x_0 — температура воздуха, окружающего печь; u — управление количеством теплоты, поступающей в печь. Слагаемое $\alpha_1(x - x_0)$ характеризует потери за счет конвекции, а слагаемое $\alpha_2(x^4 - x^4{}_0)$ — за счет радиации. Управление u выбирается так, чтобы печь в заданный момент времени T имела заданную температуру x_T и функционал $J(u) = \int_0^T u^2(t)\,dt$ достигал минимального значения. Записать необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума.

Неотрицательные постоянные α_i заданы.

8. Двухкамерная модель «поглощения лекарства и метаболизма» может быть описана уравнениями

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + u, \; \dot{x}_2 = \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \; t \geqslant 0, \; 0 \leqslant u \leqslant u_0.$$

Здесь x_1 — масса лекарства в желудочно-кишечном тракте; x_2 — масса лекарства в крови; управление u представляет собой количество принимаемых лекарств; постоянные $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Целью управления является достижение желаемого количества лекарств $x_2(T)$ в крови за минимально возможное время T. Записать необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума.

9. Определить, какая из систем $\dot{x} = Ax + Bu$ является управляемой, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. Определить, какая из систем $\dot{x} = Ax$, $y = B'x$ является наблюдаемой, где матрицы A и B те же, что и в упр. 9.

11. Дана скалярная система $\dot{x}(t) = ax(t) + bu$, $t \geqslant 0$, с критерием качества

$$J(u) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\alpha x^2(s) + \beta u^2(s))\,ds \to \inf.$$

Найти оптимальное управление и исследовать его зависимость от параметров a, b, α, β.

12. Дана скалярная система $\dot{x}=ax+bu$, $t\geqslant 0$ с критерием качества

$$J(u)=\int_0^\infty (\alpha x^2(s)+\beta u^2)\,dt\to\inf,$$

где a, $b\neq 0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ — заданные постоянные. Показать, что оптимальное управление u_0 имеет вид

$$u_0=-\frac{1}{b}[a+\sqrt{a^2+b^2\alpha\beta^{-1}}]x,$$

а функция Беллмана V — вид

$$V(t,x)=x^2\beta b^{-2}[a+\sqrt{a^2+b^2\alpha\beta^{-1}}].$$

13. Дана скалярная система

$$\dot{x}(t)=-ax(t)+bu,\ t>0$$

(a и b — заданные постоянные коэффициенты) с критерием качества

$$J(u)=\int_0^\infty [x^2(t)+\alpha x(t)u+u^2]\,dt\to\inf.$$

Определить область изменения параметра α, при котором замкнутая система асимптотически устойчива.

14. Найти функцию Беллмана и оптимальное управление для следующих скалярных систем на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1$:

а) $\dot{x}=u$, $x(1)\to\min$, $|u|\leqslant 1$;

б) $\dot{x}=u$, $|x(1)|\to\inf$, $|u|\leqslant 1$;

в) $\dot{x}=ax+u$, $x^2(1)\to\inf$, $|u|\leqslant 1$;

г) $\dot{x}=ax+u$, $x(1)\to\inf$, $|u|\leqslant 1$;

д) $\dot{x}(t)=u+t$,

$$J(u)=x^2(1)+\int_0^1 u^2(t)\,dt\to\inf.$$

15. Доказать, что система $\dot{x}=\Lambda x+Bu$ с диагональной матрицей Λ управляема тогда и только тогда, когда ни одна строка матрицы B не является нулевой. Доказательство: а) провести непосредственно; б) получить как следствие критерия управляемости.

16. Доказать, что для управляемости системы $\dot{x}=Jx+Bu$ с жордановой матрицей J необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один элемент матрицы B в строке, соответствующей нижней строке каждого блока Жордана, и как минимум один элемент матрицы B в каждой другой строке были отличны от нуля.

17. Система $\dot{x}=Ax+Bu$, $y=Cx$, $x\in R_n$, $y\in R_q$ называется управляемой по выходу, если ее можно перевести из любого начального состояния $y(t_0)=Cx(t_0)$ в любое конечное состояние $y(t_1)$ за конечный промежуток времени при приложении к системе кусочно-непрерывного управления $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Доказать, что для управляемости по выходу рассматриваемой системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $M=[CB,\ CAB,\ CA^2B,\ \ldots,\ CA^{n-1}B]$ был равен q.

18. Доказать, что система $\dot{x}=\Lambda x+Bu$, $y=Cx$ с диагональной матрицей Λ наблюдаема тогда и только тогда, когда ни один столбец матрицы C не является нулевым. Доказательство: а) провести непосредственно; б) получить как следствие критерия наблюдаемости (теоремы 3.1 из гл. VI).

19. Показать, что передаточные нули системы $\dot{x}=Ax+Bu$, $y=Hx$ являются инвариантными нулями этой же системы. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

20. Показать, что невырожденное преобразование переменных состояния $\hat{x}=Nx(\det N\neq 0)$ не меняет инвариантных и передаточных нулей системы.

21 Показать, что невырожденное преобразование входов $\hat{u}=Mu$ $(\det M\neq 0)$ не меняет инвариантных и передаточных нулей системы.

22. Показать, что невырожденное преобразование выходов $\hat{y}=Ty(\det T\neq 0)$ не меняет инвариантных и передаточных нулей системы.

23. Показать, что пропорциональная обратная связь по состоянию $u=Kx$ (или по выходу $u=Ky$) не меняет инвариантных и передаточных нулей.

24. Показать, что пропорционально-интегральная обратная связь по выходу $u=K_1x+K_2\int\limits_0^t y(s)\,ds+K_3y(0)+v$ не меняет инвариантных и передаточных нулей системы.

25. Рассмотрим задачу о приведении в начало координат за минимальное время скалярной системы $\dot{x}(t)=ax(t)+bu$, $t\geqslant 0$, $x(0)=x_0$, где $a>0$ и $b>0$ — заданные постоянные, x_0 — заданное начальное положение, управление u удовлетворяет ограничению $|u|\leqslant 1$. Показать, что:

а) уравнение Беллмана для поставленной задачи имеет вид

$$\inf_{u,\ |u|\leqslant 1}\left[\frac{\partial V(x)}{\partial x}(ax+bu)\right]=-1,\ V(0)=0;$$

б) при $a\leqslant 0$ задача разрешима при любых x_0 и время быстродействия $V(x)$ определяется выражением

$$V(x)=-\frac{1}{a}\ln\left(1-\frac{a}{b}|x|\right),\ a\neq 0;\ V(x)=\frac{|x|}{b},\ a=0;$$

в) при $a>0$ задача разрешима только в области $|x|<ba^{-1}$, в которой $V(x)$ определяется тем же выражением, что и при $a\leqslant 0$;

г) оптимальное управление $u(x)=-\operatorname{sign} x$.

д) построить решение уравнения

$$\dot{x}=ax-b\operatorname{sign} x,\ b>|a|.$$

26. Груз массой m скользит по прямой под действием силы $u(t)$. Пусть $x_1(t)$ — координата центра масс груза, а $x_2(t)$ — его скорость. При некоторых предположениях уравнения движения можно представить в виде

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\ m\dot{x}_2(t)=u(t)-x_2^2(t)\operatorname{sign} x_2(t),\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

Здесь T, а также начальные положения $x_1(0)$ и скорость $x_2(0)$ заданы. Критерий качества, подлежащий минимизации, имеет вид

$$J(u)=\int\limits_0^T F(t,\ x_1(t),\ x_2(t),\ u(t))\,dt\to\min_u,$$

где скалярная функция $F(t,\ x_1,\ x_2,\ u)$ непрерывно дифференцируема по x_1, x_2, u. Ограничения на управление u отсутствуют. Показать, что необходимые условия оптимальности задаются исходными уравнениями движения и соотношениями

$$H=-F(t,\ x_1,\ x_2,\ u)+\psi_1x_2+\psi_2(u-x_2^2\operatorname{sign} x_2)/m,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0,\ \dot{\psi}_1(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_1},\ \dot{\psi}_2(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_2},\ \psi_1(T)=0,\ \psi_2(T)=0.$$

С учетом вида функции H последние соотношения представимы в виде

$$\dot{\psi}_1(t)=\frac{\partial F}{\partial x_1},\ \psi_1(T)=0,\ \psi_2(t)=m\frac{\partial F}{\partial u},$$

$$\dot{\psi}_2(t)=\frac{\partial F}{\partial x_2}+2(\psi_2 x_2\operatorname{sign} x_2)/m-\psi_1,\ \psi_2(T)=0.$$

Здесь все производные функции F вычисляются в «точке» $(t, x_1(t)), x_2(t), u(t))$.

27. Работа синхронного электродвигателя может быть описана уравнениями

$$\dot{x}_1=x_2,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$\dot{x}_2=a_1-a_2x_2-a_3x_3\sin x_1-a_4\sin 2x_1,$$

$$\dot{x}_3=u-a_5x_3+a_6\cos x_1,\ 0\leqslant u\leqslant U_1.$$

В этих уравнениях x_1 — угол поворота ротора, x_2 — его угловая скорость, переменная x_3 характеризует потокосцепление. Управление $u(t)$ осуществляется благодаря изменению напряжения, создающего вращающееся поле в двигателе. Начальные значения $x_i(0)$, время T и постоянные a_i заданы. Критерий качества тот же, что и в предыдущей задаче. Записать необходимые условия оптимальности.

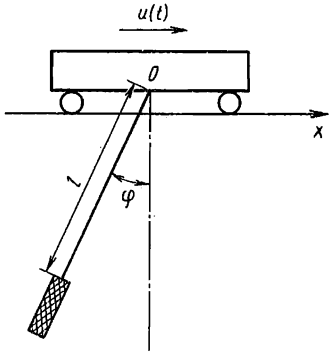


Рис. У.1. Управление перемещением маятника

28. Рассмотрим задачу об асимптотической стабилизации движения твердого тела, описываемого уравнениями (2.3) из гл. III. Используя функцию Ляпунова V, равную квадрату модуля кинетического момента, т. е. $V=A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2$, показать, что задача об асимптотической стабилизации твердого тела разрешима в классе управляющих моментов, пропорциональных угловым скоростям: $M_1=\alpha_1 p$, $M_2=\alpha_2 q$, $M_3=\alpha_3 r$.

29. На фиксированном отрезке $[0, T]$ рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u,\ x\in R_n,\ u\in R_m,$$

$$x(0)=x_0,\ x(T)=x_1.$$

Требуется определить управление, минимизирующее интеграл: $\int_0^T |u(t)|^2\,dt\to\min_u$,— при котором система переходит из положения x_0 в положение x_1. Показать, что оптимальное управление u_0 в этой задаче есть

$$u_0(t)=B'(t)Z'(T, t)\left[\int_{t_0}^{T} Z(t, s)B(s)B'(s)Z(T, s)\,ds\right]^{-1}\left[x_1-Z(T, t_0)x_0\right].$$

Здесь $Z(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$.

Управление маятником осуществляется благодаря выбору скорости $u(t)$ перемещения вдоль горизонтальной оси точки подвеса O, которая ограничена по величине $|u(t)| \leqslant u_0$. Требуется переместить маятник из заданного начального положения $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = x(0) = u(0) = 0$ в заданное конечное положение $\varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = u(T) = 0$, $x(T) = s > 0$, где $T = [J(mgl)^{-1}]^{1/2}$ — период малых колебаний маятника. Показать*, что оптимальное управление $u_0(t)$ принимает только значения либо u_0, либо $-u_0$. Число n интервалов постоянства управления $u_0(t)$ есть

$$n = \begin{cases} 1, \text{ если } s(2\pi u_0 T)^{-1} \text{ — целое число;} \\ 2[s(2\pi u_0 T)^{-1}] + 3 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь через $[b]$ обозначена целая часть числа b. При этом если $n = 1$, то оптимальное управление $u_0(t) \equiv u_0$, $0 < t < T$, а время перехода равно su_0^{-1}.

*Черноусько Ф. Л. и др. Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Эта часть книги посвящена задачам управления стохастическими системами, т. е. одному из классов задач управления при неполной информации (называемыми также задачами управления в условиях неопределенности). Неполнота информации в реальных системах может быть обусловлена разнообразными факторами, связанными, например, с неопределенностью в силах, действующих на систему, ошибками исполнения программы управления, запаздыванием, вызванным конечностью времени, необходимого для проведения наблюдений и обработки их результатов, и т. д. При вероятностном подходе возмущающие силы и ошибки измерений интерпретируются как случайные процессы.

Задачи оптимального управления стохастическими системами состоят в определении управления, реализующего экстремум математического ожидания заданного функционала (критерия качества), зависящего от траектории движения системы и управления.

ГЛАВА IX

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В этой главе приведены постановки основных задач управления стохастическими системами, выведено уравнение Беллмана, рассмотрена линейно-квадратичная задача при различных условиях информированности управляющей стороны, исследованы задачи стабилизации, изучены приближенные методы синтеза оптимального управления.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Как и для детерминированных систем, постановка конкретных задач управления стохастическими системами зависит от вида уравнений движения, минимизируемого функционала, ограничений на

управление и фазовую траекторию системы, длительности интервала времени, на котором развивается управляемый процесс, и т. д. Рассмотрим каждую из этих постановок задачи более подробно.

1. Уравнения эволюции системы. Уравнения эволюции стохастической системы отличаются от уравнений детерминированной системы наличием членов, учитывающих случайные возмущения. В основном ниже рассматриваются уравнения управляемого движения, имеющие вид

$$\mathrm{d}x(t)=a(t, x(t), u)\,\mathrm{d}t+\sigma(t, x(t), u)\,\mathrm{d}\xi(t),\ t\geqslant 0. \tag{1.1}$$

Здесь фазовый вектор $x(t)\in R_n$, управление $u\in R_m$, стандартный винеровский процесс $\xi(t)\in R_k$. Вектор-функция $a:[0, \infty)\times R_n\times R_m\to R_n$ и матрица σ размера $n\times k$ заданы.

Напомним, что

$$\xi(0)=0,\ M\xi(t)=0,\ M\xi(t)\xi'(t)=It,$$

где M — математическое ожидание, I — единичная матрица. Уравнения (1.1) понимаются в смысле Ито (см., например, § 3 гл. II). Решение уравнения (1.1) при $t\geqslant 0$ определяется начальным условием

$$x(0)=x_0. \tag{1.2}$$

Здесь x_0 — детерминированный или случайный вектор из R_n.

Если время $T>0$ движения системы (1.1) задано, то говорят о *задачах управления на конечном интервале времени* $[0, T]$. Вместе с тем в ряде конкретных случаев управление системой оканчивается лишь тогда, когда она достигнет заданного целевого множества. В этих случаях момент окончания движения заранее не задан и представляет собой случайную величину, определяемую конкретной траекторией движения. Примером подобного рода задач являются задачи стохастического быстродействия. Такие задачи называют иногда *задачами со случайным моментом остановки*. Рассматриваются также *задачи на бесконечном интервале времени*. Примером такой задачи является задача оптимальной стохастической стабилизации.

2. Ограничения на управление. Задачи управления стохастическими системами решаются при различных ограничениях на управляющее воздействие, которые могут зависеть либо от имеющихся ресурсов, либо от степени информированности. Примером ограничений первого типа является следующее:

$$u(t)\in U, \tag{1.3}$$

где заданное множество $U\subset R_m$. Ограничение (1.3) означает, что все реализации управления принадлежат множеству U.

Наряду с (1.3) возможны интегральные ограничения вида

$$\int_0^T |u(t)|^\sigma \, dt \leqslant u_0, \tag{1.4}$$

где $\sigma > 0$, $u_0 > 0$ — заданные постоянные. Условие (1.4) при $\sigma = 1$ можно интерпретировать как ограничение на суммарный импульс управления, а при $\sigma = 2$ оно представляет собой энергетическое ограничение. Интегральные ограничения на управление возникают весьма естественным образом в ряде реальных задач (см. примеры в § 3 гл. III). Интегральные ограничения могут иметь и более общий вид:

$$\int_0^T F(t, x(t), u(t)) \, dt \leqslant u_0.$$

Другим существенным фактором при построении управления является характер имеющейся информации. Если все фазовые координаты системы недоступны измерению, то оптимальное управление может быть сконструировано только в зависимости от времени t. Полученное таким образом оптимальное управление $u(t)$ называется *программным*. Ниже такое управление называется П-*управлением*. Обычно П-управление $u(t)$ рассчитывается на стадии проектирования управляющих систем на основе априорной информации о характеристиках объекта, о входных и выходных сигналах. При этом П-управление не позволяет учитывать изменение характеристик управляемого объекта, вызванное воздействием неконтролируемых (и непредсказуемых) внутренних и внешних возмущений, а также ошибками исполнительных органов.

Более гибким по сравнению с П-управлением является управление, построенное по принципу обратной связи, называемое ниже С-*управлением*. Если фазовый вектор $x(s)$ может быть точно измерен на всем интервале движения $s \in [0, t]$ от начала движения $(s = 0)$ до текущего значения времени t, то оптимальное С-управление u должно быть построено в виде функционала $u = u(t, x_t)$. Здесь через x_t обозначен отрезок траектории $x(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Отметим, что в результате подстановки этого С-управления в систему (1.1) она описывается *уравнением с последействием*

$$dx(t) = a(t, x(t), u(t, x_t)) \, dt + \sigma(t, x(t), u(t, x_t)) \, d\xi(t).$$

Впрочем, в некоторых случаях оптимальное С-управление, выбираемое среди функционалов $u(t, x_t)$, реализуется в виде функции $u(t, x(t))$, зависящей только от текущего времени t и текущего значения фазовой координаты $x(t)$. Такие С-управления называются *марковскими*.

В целом ряде реальных ситуаций точное определение фазового вектора $x(t)$ невозможно, но может быть измерен некоторый вектор $y(t)$, зависящий от $x(t)$. Распространенным является предположение о том, что измерения (наблюдения) $y(t) \in R_l$ связаны с вектором $x(t)$ линейным соотношением вида

$$dy(t) = Q(t)x(t)\,dt + \sigma_0(t)\,d\xi_0(t),\ y(0) = 0. \qquad (1.5)$$

Здесь $Q(t)$ — матрица размера $l \times n$, определяющая состав измерений, матрица $\sigma_0(t)$ определяет точность измерений, а вектор $\xi_0(t)$ произвольной размерности есть шум (помеха) в канале измерений. Измеряемый вектор $y(t)$ содержит всю доступную информацию о системе (1.1), управление которой в этом случае строится в виде функционала $u(t, y_t)$, где $y_t = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$ (рис. 1.1).

Такая постановка задач оптимального управления стохастическими системами включает в себя как задачи программного оптимального управления, так и задачи синтеза оптимального управления. В самом деле, если измерения (1.5) не несут никакой информации о состоянии системы (1.1), то оптимальное управление является П-управлением, так как представляет собой функцию лишь времени t. При этом отсутствие информации в измерениях (1.5) возможно в двух случаях:

либо интенсивность σ_0 помех в канале наблюдений бесконечно больше полезного сигнала Qx;

либо $Q \equiv 0$ и шумы ξ и ξ_0 взаимно независимы.

Задачи синтеза оптимального С-управления получаются, если в (1.5) положить $\sigma_0 \equiv 0$ и считать матрицу $Q(t)$ невырожденной при всех t. Тогда фазовый вектор $x(t)$ может быть точно восстановлен по результатам наблюдений $y(t)$. Значит, в этом случае оптимальное управление можно искать в виде функционала $u(t, x_t)$.

Другие постановки задач управления связаны с тем, что управляющая сторона может варьировать либо матрицу состава измерений $Q(t)$, либо точность измерений, определяемую матрицей $\sigma_0(t)$. Если при этом цель варьирования матриц $Q(t)$ и $\sigma_0(t)$ заключается

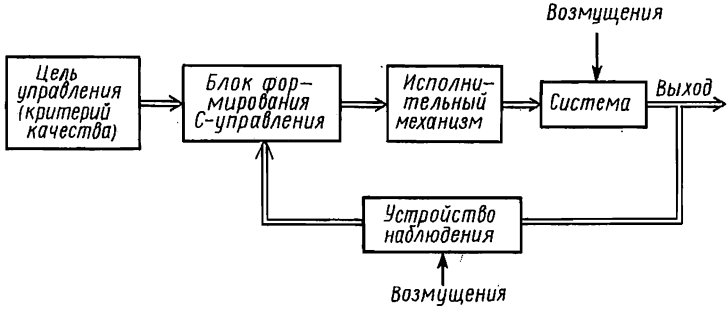


Рис. 1.1. Схема формирования С-управления

в минимизации ошибки оценивания фазового вектора $x(t)$ по результатам наблюдений y_t, то соответствующие задачи называются *задачами оптимизации процесса наблюдения*. Задачи, в которых одновременно можно варьировать управление $u(t, y_t)$, состав измерений $Q(t)$ и их точность $\sigma_0(t)$, называются *задачами оптимального сочетания управления и наблюдения*. Отметим, что в стохастических задачах управления оптимальные П- и С-управления, вообще говоря, различны (в том смысле, что реализуют различные значения критерия качества) в отличие от детерминированного случая, для которого оптимальные П- и С-управления эквивалентны (см. § 2 гл. III).

3. Целевой функционал (критерий качества). Цели, поставленные перед управляющей стороной, обычно формализуются в виде задания критерия качества работы системы. Для стохастических систем критерий качества, как правило, представляет собой математическое ожидание заданных функционалов, зависящих от управления и траектории системы. Приведем некоторые характерные примеры. Предположим сначала, что интервал времени $[0, T]$, на котором функционирует система, задан. Тогда критерий качества можно записать в виде

$$J(u)=M\left[\varphi(x(T))+\int_0^T F(t, x(t), u)\,\mathrm{d}t\right]. \tag{1.6}$$

Здесь F и F_1 — заданные функции, т. е.

$$\varphi: R_n\to R_1,\ F:[0, \infty]\times R_n\times R_m\to R_1.$$

Как и в детерминированном случае, задача управления (1.1), (1.6) при $\varphi=0$ называется задачей Лагранжа, при $F=0$ — задачей Майера, и в общем случае — задачей Больца. Задача управления системой (1.1), (1.6) всегда может быть сведена к задаче Майера (к задаче минимизации терминального функционала), если ввести новую фазовую переменную $x_{n+1}(t)$ с помощью соотношений

$$\dot{x}_{n+1}(t)=F(t, x(t), u),\ x_{n+1}(0)=0. \tag{1.7}$$

Тогда $x_{n+1}(T)$ равно второму слагаемому в (1.6) и критерий качества (1.6) примет вид

$$J_1=M[\varphi(x(T))+x_{n+1}(T)],$$

т. е. исходная задача управления (1.1), (1.6) сведена к задаче Майера управления системой (1.1), (1.7) с критерием качества J.

В ряде задач представляет интерес вероятность того, что система достигнет заданного целевого множества G. Соответствующий

критерий качества может быть получен из (1.6). Положим $F=0$ и $\varphi(x)=1$ при $x\in G$ и $\varphi(x)=0$ при $x\in R_n\setminus G$, где G — заданное множество из R_n. Тогда функционал (1.6) равен вероятности достижения системой (1.1) целевого множества G в конечный момент времени T. Если нормальное функционирование системы происходит лишь тогда, когда ее координаты принадлежат G на всем интервале движения, то критерий качества можно выбрать в виде

$$P\{x(t)\in G,\ 0\leqslant t\leqslant T\}. \tag{1.8}$$

Здесь через P обозначена вероятность события в фигурных скобках.

Рассмотрим теперь постановки некоторых задач управления, в которых момент окончания движения является случайной величиной, определяемой конкретной траекторией. Обозначим через $\tau_x(u)$ момент первого достижения системой (1.1) множества G при управлении u и начальном условии $x(0)=x$. *Задача стохастического быстродействия* состоит в минимизации по u функционала $M\tau_x(u)$, представляющего собой среднее время достижения целевого множества G. Обобщением приведенной постановки является задача о минимизации функционала

$$M\int_0^{\tau_x(u)} F(t, x(t), u)\,\mathrm{d}t. \tag{1.9}$$

В задачах об удержании системы внутри множества G в качестве критерия качества можно наряду с (1.8) взять также функционал $M\tau_x(u)$, который в этих задачах должен быть максимизирован.

Если движение системы (1.1) протекает на неограниченном интервале времени, то рассматриваются задачи с критерием качества

$$M\int_0^{\infty} F(t, x(t), u)\,\mathrm{d}t. \tag{1.10}$$

Эти задачи иногда называются *задачами оптимальной стохастической стабилизации*. Такое название обусловлено тем, что при некоторых условиях оптимальное управление в задаче (1.1), (1.10) делает систему (1.1) асимптотически устойчивой.

§ 2. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Одним из основных методов построения управления системами при случайных возмущениях является *метод динамического программирования Беллмана*. С помощью этого метода синтез управления осуществляется на основе некоторого нелинейного уравнения в частных производных, называемого уравнением Беллмана.

Отметим, что указанный метод особенно эффективен для систем без последствия, оптимальное управление которыми ищется в классе марковских управлений.

1. Функция Беллмана. Для каждой из сформулированных в § 1 задач может быть построена скалярная *функция Беллмана* $V(t, x)$. Эта функция представляет собой наименьшее или наибольшее значение критерия качества в соответствии с рассматриваемой задачей при условии, что движение системы (1.1) начинается в момент времени $t \geqslant 0$ из положения x.

Опишем более подробно функцию Беллмана $V(t, x)$ на примере задачи (1.1), (1.3), (1.6), в которой оптимальное С-управление ищется в виде $u(t, x(t))$. Назовем С-управление $u(t, x)$ *допустимым*, если функция $u(t, x)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in R_n$, удовлетворяет ограничению (1.3) и при этом управлении существует решение задачи (1.1), (1.2) для любого $x_0 \in R_n$.

Обозначим через $X_{t, x}(s, u)$ решение уравнения (1.1) при $s \geqslant t$ с детерминированным начальным условием $X_{t, x}(t, u) = x$ при С-управлении $u = u(s, X_{t, x}(s, u))$.

Функция Беллмана $V(t, x)$ а задаче (1.1), (1.3), (1.6) определяется соотношением

$$V(t, x) = \inf_u M\left[\varphi(X_{t, x}(T, u)) + \int_t^T F(s, X_{t, x}(s, u), u(s, X_{t, x}(s, u)))\, ds\right]. \tag{2.1}$$

Здесь инфимум вычисляется по множеству $U_д$ всех допустимых управлений. Из определения (2.1) функции $V(t, x)$ вытекает, что в конечный момент времени T справедливо граничное условие

$$V(T, x) = \varphi(X_{T, x}(T, u)) = \varphi(x), \quad x \in R_n. \tag{2.2}$$

Аналогично определяется функция Беллмана и для других задач из § 1. Так, например, для задачи стохастического быстродействия (1.1), (1.3), (1.9) функция $V(t, x)$ имеет вид

$$V(t, x) = \inf_u M\tau_{t, x}(u), \quad u \in U_д, \tag{2.3}$$

где $\tau_{t, x}(u)$ — момент первого достижения целевого множества G решением $X_{t, x}(s, u)$, $s \geqslant t$.

Пример 2.1. Построим функцию Беллмана для скалярной неуправляемой системы

$$dx(t) = ax(t)\, dt + \sigma\, d\xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \ x \in R_1, \ \xi \in R_1, \tag{2.4}$$

где a и σ — некоторые постоянные.

В функционале (1.6) функции $\varphi(x) = x^2$, $F = 0$. Тогда в соответствии с (2.1) имеем $V(t, x) = MX^2_{t, x}(T)$, где $X_{t, x}(s)$ — решение урав-

нения (2.4) при $s \geqslant t$ с начальным условием $X_{t,\,x}(t)=x$. На основании формулы Ито (3.12) гл. II имеем

$$X_{t,\,x}(s)=xe^{a(s-t)}+\int_t^s e^{a(s-\tau)}\sigma\,d\xi(\tau).$$

Отсюда и из свойств стохастического интеграла Ито следует, что

$$V(t,\,x)=MX_{t,\,x}^2(T)=x^2e^{2a(T-t)}+$$

$$+\int_t^T e^{2a(T-\tau)}\sigma^2\,d\tau=x^2\,e^{2a(T-t)}+\frac{\sigma^2}{2a}[e^{2a(T-t)}-1].$$

Пример 2.2. Рассмотрим скалярную управляемую систему

$$dx(t)=(u+ax(t))\,dt+\sigma d\xi(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.5}$$

где a и σ — постоянные, управление $u\in R_1$ удовлетворяет ограничению $|u|\leqslant 1$. В критерии качества (1.6), подлежащем минимизации, функция $\varphi(x)=x$, $F=0$. Ясно, что в этой задаче оптимальное управление $u_0\equiv -1$, т. е. оно равно минимально возможному допустимому значению. Значит, функция Беллмана $V(t,\,x)$ имеет вид

$$V(t,\,x)=MX_{t,\,x}(T,\,-1).$$

Из уравнения (2.5) при $s\geqslant t$, управлении $u\equiv -1$ и начальном условии $X_{t,\,x}(t,\,-1)=x$ следует, что

$$x_{t,\,x}(s,\,-1)=xe^{a(s-t)}-\int_t^s e^{a(s-\tau)}\,d\tau+\int_t^s e^{a(s-\tau)}\sigma d\xi(\tau).$$

Поэтому

$$V(t,\,x)=xe^{a(T-t)}-\int_t^T e^{a(T-\tau)}\,d\tau=xe^{a(T-t)}-\frac{1}{a}[e^{a(T-t)}-1].$$

2. Уравнение Беллмана. Выведем уравнение Беллмана, которое является необходимым условием оптимальности. Оно может служить для определения функции Беллмана $V(t,\,x)$ и оптимального С-управления.

Сформулируем *принцип динамического программирования*, на основе которого выводится уравнение Беллмана. Этот принцип заключается в следующем: *пусть* u_0 *— оптимальное* С*-управление на всем интервале движения* $[0,\,T]$. *Тогда управление* u_0 *обладает тем свойством, что, каковы бы ни были момент времени* $s\in[0,$

T] и допустимое управление v на отрезке $[0, s]$, управление u_0 окажется оптимальным на отрезке $[s, T]$ относительно состояния $X_{0,\, x_0}(s, v)$, возникшего в результате использования управления v на отрезке $[0, s]$.

Обозначим через $P_u(t, x, s, A)$ переходную функцию марковского процесса $X_{t,\, x}(s, u)$, где A — произвольное борелевское множество из σ-алгебры подмножеств пространства R_n. Переходная функция определяется равенством

$$P_u(t, x, s, A) = P\{X_{t,\, x}(s, u) \in A\}.$$

Отсюда, учитывая, что процесс X является марковским, находим

$$P_u(t, x, s, A) = \int_{R_n} P\{X_{t,\, x}(\tau, u) \in \mathrm{d}z) \cap (X_{t,\, x}(s, u) \in A)\} =$$

$$= \int_{R_n} P(X_{t,\, x}(\tau, u) \in \mathrm{d}z) P(X_{\tau,\, z}(s, u) \in A), \quad t \leqslant \tau \leqslant s.$$

Полученное уравнение для переходной функции

$$P_u(t, x, s, A) = \int_{R_n} P(X_{t,\, x}(\tau, u) \in \mathrm{d}z) P(X_{\tau,\, z}(s, u) \in A), \quad t \leqslant \tau \leqslant s, \tag{2.6}$$

называется *уравнением Колмогорова — Чепмена.*

Рассмотрим теперь задачу управления (1.1), (1.3), (1.6) при $F_1 \equiv 0$. Из определения функции Беллмана (2.1) следует, что

$$V(t, x) = \inf_{v} \int_{R_n} \varphi(y) P_v(t, x, T, \mathrm{d}y), \tag{2.7}$$

где инфимум вычисляется по множеству всех допустимых управлений v задачи (1.1), (1.3), (1.6) на отрезке $[t, T]$. Возьмем число $\Delta \geqslant 0$, так, что $t + \Delta \leqslant T$. Обозначим через u допустимое управление на отрезке $[t, t+\Delta]$, а через v_1 — допустимое управление на отрезке $[t+\Delta, T]$. Тогда в силу (2.6), (2.7) и принципа динамического программирования получим

$$V(t, x) = \inf_{u} \inf_{v_1} \int_{R_n} \int_{R_n} P_u(t, x, t+\Delta, \mathrm{d}z) P_{v_1}(t+\Delta, z, T, \mathrm{d}y) F(y) =$$

$$= \inf_{u} \int_{R_n} P_u(t, x, t+\Delta, \mathrm{d}z) V(t+\Delta, z) = \inf_{u} MV(t+\Delta, X_{t,\, x}(t+\Delta, u)).$$

Следовательно,

$$\inf_u M[V(t+\Delta, X_{t,x}(t+\Delta, u)) - V(t, x)] = 0. \tag{2.8}$$

Для дальнейших преобразований предположим, что функция $V(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и один раз по t. Тогда на основании формулы Ито при малых $\Delta \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$MV(t+\Delta, X_{t,x}(t+\Delta, u)) - V(t, x) = L_u V(t, x) + O(\Delta). \tag{2.9}$$

Здесь производящий оператор L_u определен формулой

$$L_u V(t, x) = V_t(t, x) + V'_x(t, x) a(t, x, u) +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Tr}[\sigma(t, x, u) \sigma'(t, x, u) \cdot V_{xx}(t, x)],$$

$$V_t = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i}, \quad V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где Tr — след матрицы. Подставив (2.9) в (2.8) и перейдя к пределу при $\Delta \to +0$, получим *уравнение Беллмана*

$$\inf_{u \in U} L_u V(t, x) = 0, \quad x \in R_n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.10}$$

Граничное условие для этого уравнения имеет вид (2.2). Подчеркнем, что инфимум в (2.10) вычисляется по множеству параметров $u \in U \subset R_m$.

Аналогично можно получить уравнение Беллмана для задачи (1.1), (1.3), (1.6) при произвольной функции F, которое имеет вид

$$\inf_{u \in U} [L_u V(t, x) + F(t, x, u)] = 0, \quad x \in R_n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$V(T, x) = \varphi(x). \tag{2.11}$$

Приведем еще вид уравнения Беллмана для некоторых задач. Для задачи стохастического быстродействия (1.1), (1.3), (1.9) оно имеет вид

$$\inf_{u \in U} L_u V(t, x) = -1, \quad t \geqslant 0, \quad x \in R_n \setminus G,$$

$$V(t, x) = 0, \quad x \in G.$$

Для задачи о максимизации на траекториях системы (1.1) вероятностного критерия качества (1.8) уравнения Беллмана имеет вид

$$\sup_{u \in U} L_u V(t, x) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in G,$$

$$V(t, x) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in R_n \setminus G,$$

$$V(T, x) = 1, \quad x \in G.$$

При моделировании возмущений, действующих на систему, наряду с винеровским используются и другие случайные процессы. Так, например, если на систему действуют импульсные (ударные) возмущения, то эти возмущения можно моделировать с помощью пуассоновского процесса $\eta(t)$. Процесс $\eta(t) \in R_r$ имеет компоненты $\eta_1, \ldots, \eta_r$, где $\eta_i(t)$ — скалярные взаимно независимые пуассоновские процессы с параметром $\lambda_i(t)$, $i=1, \ldots, r$. Кроме того, процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ взаимно независимы. Уравнения системы имеют вид

$$\mathrm{d}x(t)=a(t, x(t), u)\,\mathrm{d}t+\sigma(t, x(t), u)\,\mathrm{d}\xi(t)+ \\ +\sigma_1(t, x(t), u)\,\mathrm{d}\eta(t),\ t\geqslant 0. \tag{2.12}$$

Производящий оператор L_u процесса (2.12), соответствующий допустимому С-управлению $u(t, x(t))$, есть

$$L_uV=V_t(t, x)+a'(t, x, u)V_x(t, x)+ \\ +\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)\cdot V_{xx}(t, x)+ \\ +\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t)\,[V(t, x+\sigma_1(t, x, u)e_i)-V(t, x)]. \tag{2.13}$$

Здесь вектор $e_i \in R_r$ имеет i-ю компоненту, равную единице, а все остальные компоненты вектора e_i равны нулю. Для управляемой системы (2.12) справедливы те же постановки задач, что и для системы (1.1). При этом соответствующее уравнение Беллмана сохраняет прежний вид, а его оператор L_u выражается формулой (2.13).

Выпишем в заключение уравнение Беллмана для одной задачи оптимального сочетания управления и наблюдения. Предположим, что объект описывается системой линейных по фазовым координатам уравнений вида (1.1):

$$\mathrm{d}x(t)=[A(t, u)x(t)+B(t, u)]\,\mathrm{d}t+\sigma(t, u)\,\mathrm{d}\xi(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x(0)=x_0. \tag{2.14}$$

Координаты $x(t)$ системы (2.14) недоступны точному измерению, а наблюдается вектор $y(t) \in R_l$, описываемый линейным по x соотношением

$$\mathrm{d}y(t)=Q(t, u)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_0(t, u)\,\mathrm{d}\xi_0(t),\ t\geqslant 0,\ y(0)=0. \tag{2.15}$$

В уравнениях (2.14), (2.15) через $\xi(t)$ и $\xi_0(t)$ обозначены стандартные винеровские процессы произвольных размерностей; случайные процессы $\xi(t)$ и $\xi_0(t)$ и x_0 взаимно независимы при всех $0\leqslant t\leqslant T$; случайный вектор $x_0 \in R_n$ имеет невырожденное гауссовское распределение вероятностей с заданными математическим ожиданием и матрицей ковариации D_0. Оптимальное управление ищется в виде функционала $u(t, y_t)$ так, чтобы удовлетворялось ограничение (1.3)

и минимизировался критерий качества $M\varphi(x(T))$. Предположим, что матрица $\sigma_0(t, u)\sigma_0'(t, u)$ равномерно по t положительно определена. Обозначим через $m(t)$ и $D(t)$ соответственно вектор математического ожидания и матрицу ковариации условного распределения $x(t)$ при условии y_t. Отметим [1; 7; 11], что это условное распределение является гауссовским, причем для $m(t)$ и $D(t)$ справедливы соотношения

$$\dot{m}(t)=A(t, u)m(t)+B(t, u)+D(t)Q'(t, u)[\sigma_0(t, u)\sigma_0'(t, u)]^{-1}[\dot{y}(t)- -Q(t, u)m(t)], m(0)=m_0, \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}\dot{D}(t)=A(t, u)D(t)+D(t)A'(t, u)- \\ -D(t)Q'(t, u)[\sigma_0(t, u)\sigma_0'(t, u)]^{-1}Q(t, u)\times \\ \times D(t)+\sigma(t, u)\sigma'(t, u), D(0)=D_0.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Разность $\dot{y}(t)-Q(t, u)m(t)$ называется *обновляющим процессом*. Она является гауссовским белым шумом с корреляционной матрицей $\sigma_0(t, u)\sigma_0(s, u)\delta(t-s)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция. Из сказанного и уравнений (2.16), (2.17) вытекает, что функция Беллмана рассматриваемой задачи имеет вид $V=V(t, m, D)$ и зависит от $(n+2)(n+1)/2$ аргументов (скалярного аргумента t, вектора m размерности n и симметричной матрицы D размера $n\times n$). Уравнение Беллмана записывается в виде

$$\begin{gathered}V_t(t, m, D)+\inf_{u\in U}\{A(t, u)m+B'(t, u)V_m(t, m, D)+ \\ +\mathrm{Tr}[V_D(t, m, D)(A(t, u)D+DA'(t, u)- \\ -DQ'(t, u)\sigma_0(t, u)\sigma_0'(t, u))^{-1}Q(t, u)D+\sigma(t, u)\sigma'(t, u)+ \\ +\frac{1}{2}DQ'(t, u)\sigma_0(t, u)\sigma_0'(t, u))^{-1}QDV_{mm}(t, m, D)]\}=0.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Граничное условие для уравнения (2.18) выражается соотношением

$$V(T, m, D)=[(2\pi)^n\det D]^{-1/2}\int_{R_n}\varphi(x)\exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)'D^{-1}(x-m)\right]dx.$$

В уравнении (2.18) через V_D обозначена матрица с элементами $dV/\partial d_{ij}$, где d_{ij} — элементы матрицы D, а V_{mm} — матрица с элементами $\partial^2V/(\partial m_i\partial m_j)$, $i, j=1, \ldots, n$.

3. Связь между функцией и уравнением Беллмана. При использовании уравнения Беллмана возникают следующие вопросы:

1^0) всегда ли функция Беллмана удовлетворяет уравнению Беллмана рассматриваемой задачи;

2^0) всегда ли решение уравнения Беллмана совпадает с функцией Беллмана;

3^0) является ли оптимальным управление, найденное с помощью уравнения Беллмана?

В общем случае ответ на все три вопроса отрицателен по следующим причинам:

1^0. Функция Беллмана $V(t, x)$, вообще говоря, не обладает той гладкостью по t и x, которая была использована при выводе уравнения Беллмана. Иными словами, функция Беллмана не всегда удовлетворяет уравнению Беллмана рассматриваемой задачи.

2^0. Решение уравнения Беллмана может быть не единственно. В этом случае необходимо дополнительное исследование, позволяющее выяснить, какое из имеющихся решений может претендовать на роль функции Беллмана исходной задачи оптимального управления.

3^0. Даже если уравнение Беллмана имеет гладкое решение, управление, найденное из этого уравнения, вообще говоря, не является оптимальным, поскольку это управление может не быть допустимым, например, потому, что при этом управлении не существует решение стохастического уравнения движения. Кроме того, в заданном классе допустимых управлений не всегда существует такое, при котором достигается точная нижняя грань критерия качества.

Отмеченные обстоятельства необходимо иметь в виду при рассмотрении конкретных задач управления. Вместе с тем в ряде ситуаций уравнение Беллмана позволяет получить как оптимальное C-управление, так и соответствующее ему минимальное значение критерия качества. Рассмотрим, например, на конечном интервале времени $[0, T]$ задачу управления системой (1.1) с критерием качества (1.6) при наличии ограничений (1.3) на управление. Уравнение Беллмана, соответствующее задаче (1.1) — (1.3), (1.6), имеет вид (2.11). Приведем достаточные условия, при выполнении которых краевая задача (2.11) определяет решение исходной задачи оптимального управления (1.1) — (1.3), (1.6).

Теорема 2.1. *Пусть краевая задача (2.11) имеет единственное решение $V(t, x)$, непрерывно дифференцируемое один раз по t и два раза по x, причем*

$$\left|\left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)' \sigma(t, x, u)\right| \leqslant C < \infty$$

равномерно по $t \in [0, T]$, $x \in R_n$, $u \in U$. Пусть, далее, C-управление $u_0(t, x)$, минимизирующее выражение (2.11), *является допустимым. Тогда управление $u_0(t, x)$ — оптимальное и минимальное значение критерия качества* (1.6) *есть $J(u_0) = V(0, x_0)$.*

□ Обозначим через $x_0(t)$ решение уравнения (1.1) при управлении u_0 и детерминированном начальном условии (1.2). Решение

$x_0(t)$ существует, поскольку $u_0(t, x)$ — допустимое управление. Применив формулу Ито к функции $V(t, x_0(t))$, получим

$$dV(t, x_0(t)) = L_{u_0} V(t, x_0(t))\, dt + \left(\frac{\partial V(t, x_0(t))}{\partial x}\right)' \sigma(t, x_0(t), u_0)\, d\xi(t). \tag{2.19}$$

В соответствии с уравнением Беллмана (2.11) из (2.19) вытекает, что

$$dV(t, x_0(t)) = -F(t, x_0(t), u_0)\, dt + \left(\frac{\partial V(t, x_0(t))}{\partial x}\right)' \sigma(t, x_0(t), u_0)\, d\xi(t). \tag{2.20}$$

Проинтегрируем обе части (2.20) по t в пределах от $t=0$ до $t=T$ и вычислим математическое ожидание. С учетом граничного условия $V(T, x_0(T)) = \varphi(x_0(T))$ получаем

$$M\varphi(x_0(T)) - V(0, x_0) = -M \int_0^T F(t, x_0(t), u_0)\, dt. \tag{2.21}$$

Тем самым установлено равенство

$$J(u_0) = V(0, x_0). \tag{2.22}$$

Пусть теперь u — любое допустимое управление, а $x(t)$ — соответствующее ему решение задачи (1.1), (1.2). Тогда аналогично (2.19) получаем

$$dV(t, x(t)) = L_u V(t, x(t))\, dt + \left(\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}\right)' \sigma(t, x(t), u)\, d\xi(t).$$

Отсюда и из уравнения (2.11) следует неравенство

$$dV(t, x(t)) \geqslant -F(t, x(t), u)\, dt + \left(\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x}\right)' \sigma(t, x(t), u)\, d\xi(t).$$

Интегрируя обе части этого неравенства по t от $t=0$ до $t=T$ и вычисляя математическое ожидание, подобно (2.21) получаем

$$M\varphi(x(T)) - V(0, x_0) \geqslant -M \int_0^T F(t, x(t), u)\, dt.$$

Следовательно, для любого допустимого управления u имеем

$$J(u) \geqslant V(0, x_0).$$

Тем самым ввиду (2.22) оптимальность управления u_0 установлена. ■

Таким образом, метод динамического программирования иногда является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

§ 3. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

В этом параграфе на основе метода динамического программирования рассматривается задача оптимального управления линейной стохастической системой с квадратичным минимизируемым функционалом. Эта задача называется *стохастической* ЛК-*задачей.*

1. Линейно-квадратичные задачи при точных измерениях фазовых координат. Предположим, что управляемая система (1.1), линейная по координатам и управлению, имеет вид

$$\begin{aligned} dx(t)=[A(t)x(t)+f(t)+B(t)u]\,dt+\sigma_1(t)x(t)\,d\xi_1(t)+\\ +\sigma_2(t)u\,d\xi_2(t)+\sigma(t)\,d\xi(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x(0)=x_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь вектор $x\in R_n$; управление $u\in R_m$, скалярные стандартные винеровские процессы ξ_1, ξ_2 и стандартный винеровский процесс $\xi(t)\in R_l$ взаимно независимы; элементы матриц A, B, σ_1, σ_2, σ представляют собой σ-измеримые ограниченные функции; размерности этих матриц равны соответственно $n\times n$, $n\times m$, $n\times n$, $n\times m$, $n\times l$; функция $f(t)\in R_n$ с измеримыми ограниченными элементами задана. Предполагается, что фазовые координаты $x(t)$ в каждый момент времени могут быть точно измерены. При этом С-управление системой (3.1) ищется в классе марковских управлений (т. е. в виде функции $u(t, x(t))$ из условия минимума квадратичного критерия качества

$$\begin{aligned} J(u)=M\Bigg[x'(T)N_1x(T)+2h_1'x(T)+\int_0^T(x'(t)N_2(t)x(t)+u'(t)N_3(t)u(t)+\\ +2x'(t)N_4(t)u(t)+2h_2'(t)x(t)+2h_3'(t)u(t))\,dt\Bigg],\\ J(u)\geqslant C>-\infty,\ \forall u \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $N_1\geqslant 0$, $N_2(t)\geqslant 0$, $N_3(t)>0$. Элементы матриц N_2, N_3, N_4 и векторов $h_2\in R_n$, $h_3\in R_m$ — заданные измеримые ограниченные функции. Уравнение Беллмана (2.11) с учетом (3.1), (3.2) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\inf_u[L_uV(t, x)+\lambda(t, x, u)]=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in R_n, \tag{3.3}$$

$$L_uV=V_t+V_x'(Ax+f+Bu)+\frac{1}{2}(x'\sigma_1'V_{xx}\sigma_1x+u'\sigma_2'V_{xx}\sigma_2u+\mathrm{Tr}\sigma\sigma'V_{xx}),$$

$$\lambda=x'N_2x+u'N_3u+2x'N_4u+2h_2'x+2h_3'u.$$

Граничное условие для уравнения (3.3) в силу (3.2) выражается соотношением

$$V(T, x)=x'N_1x+2h_1'x. \tag{3.4}$$

В уравнении (3.3) выражение

$$\left(V_x'B+u'N_3+2x'N_4+2h_3'+\frac{1}{2}u'\sigma_2'V_{xx}\sigma_2\right)u \tag{3.5}$$

зависит от выбора параметра $u\in R_m$. Это выражение представляет собой квадратичную форму по u. Если матрица $2N_3+\sigma_2'V_{xx}\sigma_2>0$, то квадратичная форма (3.5) положительно определена и имеет единственный минимум по u, который достигается при управлении

$$u_0(t, x)=-(2N_3(t)+\sigma_2'(t)V_{xx}(t, x)\sigma_2(t))^{-1}\times$$
$$\times(2h_3+2N_4'(t)x+B'(t)V_x(t, x)). \tag{3.6}$$

Для получения формулы (3.6) необходимо продифференцировать выражение (3.5) по u и приравнять производную нулю. При этом следует использовать соотношения

$$\frac{\partial}{\partial u}u'N_3u=2N_3u,\ \frac{\partial}{\partial u}h_3'u=h_3,\ \frac{\partial}{\partial u}x'N_4u=N_4'x.$$

Поясним смысл этих соотношений. В результате дифференцирования скалярной функции по векторному аргументу получается вектор-столбец. Поэтому, например, вектор $\partial(x'N_4u)/\partial u$ имеет в качестве i-й компоненты выражение

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_{j,\,k}x_jN_{jk}u_k=\sum_j x_jN_{ji},$$

где N_{jk} — элементы матрицы N_4. Значит, $\partial(x'N_4u)/\partial u=N_4'x$.

Решение краевой задачи (3.3), (3.4) ищется в виде

$$V(t, x)=x'P(t)x+2G'(t)x+g(t). \tag{3.7}$$

Здесь $(n\times n)$-матрица $P(t)\geqslant 0$, вектор $G(t)\in R_n$ и скалярная функция $g(t)$ должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялось уравнение (3.3) и граничные условия (3.4). Отметим, что если $V(t, x)$ имеет вид (3.7), то квадратичная форма (3.5) положительно определена по u и поэтому оптимальное управление u_0 в силу (3.6) определяется выражением

$$u_0(t, x)=K(t, P)[B'(t)P(t)x+N_4'(t)x+B'(t)G(t)+h_3(t)],$$
$$-K(t, P)=(N_3(t)+\sigma_2'(t)P(t)\sigma_2(t))^{-1}>0. \tag{3.8}$$

Так как управление u_0 минимизирует выражение (3.5), то в силу уравнения (3.3) справедливо соотношение

$$L_{u_0}V(t, x)+\lambda(t, x, u_0)=0. \tag{3.9}$$

Подставим в это соотношение выражения (3.7), (3.8) для v и u_0. В результате получим тождество, справедливое при всех $x \in R_n$, $0 \leqslant t \leqslant T$; левая часть этого тождества есть квадратичная форма от x, а правая часть равна нулю. Поэтому указанное тождество может быть выполнено тогда и только тогда, когда все коэффициенты квадратичной формы равны нулю. Из условия равенства нулю коэффициентов при квадратичных по x слагаемых этой формы вытекают уравнения

$$\dot{P}(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)-(P(t)B(t)+ \\ +N_4(t))K(t, P)(P(t)B(t)+N_4(t))'+N_2(t)+\sigma_1'(t)P(t)\sigma_1(t)=0, \\ 0 \leqslant t \leqslant T, \quad P(T)=N_1. \tag{3.10}$$

Аналогично, из условия равенства нулю коэффициентов при линейных по x слагаемых квадратичной формы следует, что

$$\dot{G}(t)+A'(t)G(t)+P(t)f(t)+h_2(t)+(-N_4(t)+ \\ +P(t)B(t))K(t, P)(h_3(t)+B'(t)G(t))=0, \\ 0 \leqslant t \leqslant T, \quad G(T)=h_1. \tag{3.11}$$

Наконец, приравнивая нулю свободный член квадратичной формы, определяем скалярную функцию $g(t)$ из (3.7) в виде квадратуры:

$$g(t)=\int_t^T [2G'(s)f(s)+(h_3'(s)+G'(s)B(s))K(s, P)(h_3(s)+ \\ +B'(s)G(s))+\mathrm{Tr}(P(s)\sigma(s)\sigma'(s))]\,ds. \tag{3.12}$$

Установленные соотношения (3.10) — (3.12) служат для определения коэффициентов функции Беллмана (3.7) оптимального управления (3.8). Рассмотрим нелинейное уравнение (3.10) для матрицы $P(t)$. При сделанных предположениях о параметрах системы (3.1) и функционале (3.2) существует, и притом единственная, матрица $P(t) \geqslant 0$, удовлетворяющая соотношениям (3.10). Для ее определения может быть использован *метод последовательных приближений*. Этот метод, по существу, является развитием метода касательных Ньютона, модифицированным для задач оптимального управления Беллманом. В рассматриваемом случае он состоит в следующем. Возьмем произвольное линейное по x управление u_0. Далее найдем значение критерия качества (3.2) при этом управлении. Оно совпадает с решением V_1 линейного уравнения (3.9) с граничным условием (3.4). Следующее приближение u_1 к оптимальному управлению определим из уравнений

$$L_{u_0}V_1(t, x)+\lambda(t, x, u_0)=0, \\ \inf_u [L_uV_1(t, x)+\lambda(t, x, u)]=L_{u_1}V_1(t, x)+\lambda(t, x, u_1)=0.$$

Продолжая указанную процедуру, можно построить последовательности функций $V_i(t, x)$ и управлений u_i. При этом оказывается, что все управления $u_i (i \geqslant 1)$ определяются формулой (3.6), в правую часть которой вместо $V(t, x)$ входит $V_i(t, x)$. Все функции $V_i(t, x)$ $(i \geqslant 1)$ определяются формулой (3.7), в которую вместо P, G, g входят соответственно функции P_i, G_i, g_i. Функции $G_i(t)$ и $g_i(t)$ определяются соотношениями (3.11), (3.12), в которых всюду $P(t)$ заменено на $P_i(t)$. Наконец, матрицы $P_i(t)$, $i \geqslant 1$ являются решением задачи Коши для системы линейных уравнений

$$P_i(t) + A'P_i + P_iA + N_2 + \sigma_1'P_i\sigma_1 - (N_4 + P_{i-1}B)K(t, P_{i-1})K^{-1}(t, P_i) \times$$
$$\times K(t, P_{i-1})(N_4 + P_{i-1}B)' + (P_iB + N_4)K(t, P_{i-1})(N_4 + P_{i-1}B)' +$$
$$+ (P_{i-1}B + N_4)K(t, P_{i-1})(N_4 + P_iB)' = 0, \; l \geqslant 1,$$
$$P_i(T) = N_1, \; P_0(t) = N_1, \; 0 \leqslant t \leqslant T.$$

При сделанных предположениях последовательность (P_i, G_i, g_i) равномерно на $[0, T]$ сходится к решению задачи (3.10) — (3.12), причем*

$$\|P - P_i\| + \|G - G_i\| + \|g - g_i\| = O\left(\frac{1}{i!}\right).$$

Здесь через $\|f(t)\|$ обозначена равномерная норма функции $f(t)$, равная $\|f(t)\| = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |f(t)|$, а через $O(1/i!)$ обозначены величины порядка $1/i!$ Построенное решение P, G, g системы уравнений (3.10) — (3.12) полностью определяет решение исходной задачи оптимального управления (3.1), (3.2). Действительно, управление (3.8), будучи линейным по x, является допустимым, так как при этом управлении существует единственное решение стохастических уравнений (3.1), а решение задачи Коши для уравнения Беллмана (3.3), (3.4) единственно в классе функций, растущих при $|x| \to \infty$ не быстрее степени $|x|$. Таким образом, в стохастических ЛК-задачах принцип динамического программирования позволяет построить оптимальное С-управление и определить соответствующее ему экстремальное значение критерия качества. Отметим еще, что при $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$ уравнение (3.10) совпадает с матричным уравнением Риккати (см. § 2 гл. IV), возникающим в теории детерминированных ЛК-задач. Поэтому в рассматриваемом случае для решения задачи (3.10) могут быть использованы методы теории детерминированных ЛК-задач, приведенных в § 2 гл. IV.

2. Линейно-квадратичные задачи при неполной информации. Рассмотрим ЛК-задачу, в которой в отличие от предшествующего фазовый вектор $x(t) \in R_n$ недоступен точному измерению, а наблюдаемая

*Колмановский В. Б. Об аппроксимации линейных управляемых систем с последействием // Проблемы управления и теории информации. 1974. Т. 3. № 1.

величина $y(t)$ описывается соотношениями (1.5). Предполагается, что уравнения системы имеют вид (3.1) при $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$, т. е.

$$\mathrm{d}x(t)=[A(t)x(t)+B(t)u+f(t)]\,\mathrm{d}t+\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t),$$
$$0\leqslant t\leqslant T,\ x(0)=x_0. \tag{3.13}$$

Для наблюдаемой величины $y(t)\in R_l$ с учетом (1.5) имеем

$$\mathrm{d}y(t)=Q(t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_0(t)\,\mathrm{d}\xi_0(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ y(0)=0. \tag{3.14}$$

Вектор начальных условий x_0 имеет невырожденное гауссовское распределение вероятностей с заданным математическим ожиданием m_0 и матрицей ковариации D_0. Матрицы состава измерений $Q(t)$ и точности измерений $\sigma_0(t)$ заданы. Они имеют измеримые ограниченные элементы, причем матрица $\sigma_0(t)\sigma_0'(t)$ невырождена при всех $t\in[0, T]$. Наконец, $\xi(t)$ и $\xi_0(t)$ — стандартные взаимно независимые винеровские процессы произвольных размерностей. При этом С-управление выбирается в виде функционала $u(t, y_t)$ (где $y_t=y(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$, представляет собой все результаты предшествующих измерений) с целью минимизации квадратичного функционала (3.2).

Обозначим через $m(t)$ и $D(t)$ математическое ожидание и матрицу ковариации условного распределения $x(t)$ при условии y_t. Функции $m(t)$ и $D(t)$ описываются уравнениями (2.16), (2.17). Преобразуем функционал $J(u)$, выражая в (3.2) момент координаты x через m и D. Для этого используем равенства

$$Mx'(t)N_2x(t)=M[x(t)-m(t)+m(t)]'N_2[x(t)-m(t)+m(t)]=$$
$$=M[x(t)-m(t)]'N_2[x(t)-m(t)]+Mm'(t)N_2m(t)+$$
$$+2M[x(t)-m(t)]'N_2m(t),$$
$$Mx(t)=M[Mx(t)/y_t]=Mm(t),\ Mu(t, y_t)/y_t=u(t, y_t). \tag{3.15}$$

Заметим далее, что

$$M[x(t)-m(t)]'N_2m(t)=M[Mx(t)-m(t))'N_2m(t)/y_t]=$$
$$=M[M(x(t)-m(t))'/y_t]N_2m(t)=M[m(t)-m(t)]N_2m(t)=0.$$

Отсюда и из выражения (3.15) следует соотношение

$$Mx'(t)N_2x(t)=M\,\mathrm{Tr}[(x(t)-m(t)(x(t)-m(t))'N_2]+$$
$$+Mm'(t)N_2x(t)=M\,\mathrm{Tr}\,D(t)N_2+Mm'(t)N_2m(t), \tag{3.16}$$

где Tr — след матрицы (равный сумме ее диагональных элементов). Аналогично имеем

$$Mx'(T)N_1x(T)=\mathrm{Tr}\,D(T)N_1+Mm'(T)N_1m(T),$$
$$Mx'(t)N_4(t)u(t, y_t)=M[Mx'(t)N_4(t)u(t, y_t)/y_t]=$$
$$=M[Mx'(t)/y_t]N_4(t)u(t, y_t)=Mm'(t)N_4(t)u(t, y_t),$$
$$Mh_2'(t)x(t)=Mh_2'(t)m(t). \tag{3.17}$$

Из (3.15) — (3.17) вытекает, что критерий качества (3.2) можно представить в виде $J=J_1+J_2$, где

$$J_1=\operatorname{Tr} D(T)N_1+\int_0^T \operatorname{Tr} D(t)N_2(t)\,dt,$$

$$J_2=M[m'(T)N_1m(T)+2h_1'm(T)+\int_0^T (m'(t)N_2(t)m(t)+$$

$$+2m'(t)N_4(t)u+u'N_3(t)u+2h_2'(t)m(t)+2h_3'(t)u)\,dt]. \quad (3.18)$$

Однако в рассматриваемой задаче (3.13), (3.14), (3.2) С-управление выбирается в виде функционала $u(t, y_t)$. Поэтому в силу уравнения (2.17) для матрицы ковариации $D(t)$ функционал J_1 не зависит от управления $u(t, y_t)$, поскольку от этого управления не зависят коэффициенты A, Q, σ и σ_0. Значит, задача (3.13), (3.14), (3.2) сведена к ЛК-задаче оптимального управления вектором $m(t)$, удовлетворяющим линейному уравнению вида (2.16), с квадратичным минимизируемым функционалом (3.18). Напомним (см. § 2), что в уравнении (2.16) для $m(t)$ разность $\dot{y}(t)-Q(t)m(t)$ является гауссовским белым шумом с корреляционной функцией $\sigma_0(t)\sigma_0'(s)\delta(t-s)$. Таким образом, уравнение (2.16) для $m(t)$ допускает представление

$$dm(t)=[A(t)m(t)+f(t)+B(t)u]\,dt+\sigma_3(t)\,d\xi_3(t),$$
$$0\leqslant t\leqslant T,\ m(0)=m_0. \quad (3.19)$$

Здесь $\xi_3(t)\in R_l$ — стандартный винеровский процесс, а матрица $\sigma_3(t)$ удовлетворяет равенству

$$\sigma_3(t)\sigma_3'(t)=D(t)Q'(t)(\sigma_0(t)\sigma_0'(t))^{-1}Q(t)D(t). \quad (3.20)$$

С точностью до обозначений ЛК-задачи (3.18), (3.19) и (3.1), (3.2) при $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$ эквивалентны. Поэтому решение задачи (3.18), (3.19) получается из решения (3.7) — (3.12) задачи (3.1), (3.2) при $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$. Приведем соответствующие формулы, дающие решение ЛК-задачи (3.18), (3.19). Функция Беллмана $V(t, m)$ задачи (3.18), (3.19) в соответствии с (3.7) имеет вид

$$V(t, m)=m'P(t)m+2G'(t)m+g(t). \quad (3.21)$$

Оптимальное управление $u_0(t, m)$ системой (3.19) выражается формулой

$$u_0(t, m)=-N_3^{-1}(t)[(B'(t)P(t)+N_4'(t))m+B'(t)G(t)+h_3(t)] \quad (3.22)$$

В соотношениях (3.21), (3.22) функции P, G, g определяются уравнениями (3.10) — (3.12), в которых всюду следует положить $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$, $\sigma\sigma'=\sigma_3\sigma_3'$, где $\sigma_3\sigma_3'$ выражается формулой (3.20). Вернемся

теперь к исходной задаче управления (3.13), (3.14), (3.2). Оптимальное управление $u(t, m(t))$ системой (3.13) определяется выражением (3.22), в котором $m(t)$ на основании (2.16) описывается уравнением

$$\mathrm{d}m(t)=[A(t)m(t)+f(t)+B(t)u(t, m(t))]\,\mathrm{d}t+$$
$$+D(t)Q'(t)(\sigma_0(t)\sigma_0'(t))^{-1}[\mathrm{d}y(t)-Q(t)m(t)\,\mathrm{d}t],\ m(0)=m_0. \quad (3.23)$$

Матрица ковариации $D(t)$ в силу (2.17) удовлетворяет уравнению

$$\dot{D}=AD+DA'-DQ'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}QD+\sigma\sigma',\ D(0)=D_0. \quad (3.24)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае матрица $D(t)$ не зависит от результатов наблюдений y_t. Следовательно, $D(t)$ вместе с функциями P, G, g может быть вычислена до начала процесса управления. Оценка $m(t)$ удовлетворяет линейному по m уравнению (2.23), в которое подставлено управление $u_0(t, m)$, выраженное формулой (3.22). Решение $m(t)$ уравнения (3.23) представляет собой линейный функционал от результатов наблюдений y_t. Наконец, минимальное значение критерия качества (3.2), полученное при управлении системой (3.13) с помощью управления $u_0(t, m(t))$, определяется выражением

$$\min_u J=V(0, m_0)+\mathrm{Tr}(D(T)N_1)+\int_0^T \mathrm{Tr}(D(t)N_2(t))\,\mathrm{d}t. \quad (3.25)$$

Отметим, что минимальное значение критерия качества (3.2), как и в случае точных измерений координат $x(t)$, может быть вычислено заранее в соответствии с формулой (3.25).

3. Оптимальное программное управление в линейно-квадратичных задачах. Рассмотрим ЛК-задачу в предположении, что координаты системы недоступны измерению. В этом случае оптимальное управление ищется в классе П-управлений $u(t)$, зависящих только от времени. Предположим, что уравнения системы имеют вид (3.13), а критерий качества — вид (3.2). Тогда решение ЛК-задачи (3.13), (3.2) об оптимальном П-управлении может быть получено из результатов п. 2. Действительно, как было отмечено в § 1, предположение о невозможности измерять координаты $x(t)$ эквивалентно либо условию $Q\equiv 0$, либо условию $\sigma_0\sigma_0'\to\infty$. При выполнении любого из этих условий формулы (3.21) — (3.25) приводят к следующему выражению для оптимального П-управления $u(t)$ системой (3.13) с критерием качества (3.2):

$$u(t)=-N_3^{-1}(t)[(B'(t)P(t)+N_4'(t))m(t)+B'(t)G(t)+h_3(t)]. \quad (3.26)$$

Опишем входящие в (3.26) функции. Вектор $m(t)=Mx(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (3.23) при $Q=0$:

$$\dot{m}(t)=A(t)m(t)+f(t)+B(t)u(t),\ m(0)=Mx_0. \tag{3.27}$$

Матрица $P(t)$ и вектор-функция $G(t)$ определяются соотношениями (3.10), (3.11) при $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$:

$$P+A'P+PA-(PB+N_4)N_3^{-1}(PB+N_4)'+N_2=0,\ P(T)=N_1, \tag{3.28}$$

$$\dot{G}+A'G+Pf+h_2-(N_4+PB)N_3^{-1}(h_3+B'G)=0,\ G(T)=h_1. \tag{3.29}$$

Тем самым соотношения (3.26) — (3.29), определяющие оптимальное П-управление $u(t)$ системой (3.13), установлены. В соответствии с этими соотношениями алгоритм построения оптимального П-управления $u(t)$ состоит из следующих шагов:

1^0. Находят решение задачи (3.28).

2^0. Находят решение задачи (3.29).

3^0. Подставляют в (3.27) вместо управления $u(t)$ правую часть соотношения (3.26) и находят решение $m(t)$ задачи (3.27).

4^0. Подставляя найденные функции $P(t)$, $G(t)$, $m(t)$ в правую часть формулы (3.26), определяют оптимальное П-управление $u(t)$ системой (3.13).

Приведем теперь выражение для минимального значения критерия качества (3.2) при управлении (3.26). Это выражение определяется формулой (3.25) при $Q=0$:

$$\min_{u(t)} J=m'(0)P(0)m(0)+2G'(0)m(0)+g(0)+$$
$$+\operatorname{Tr}(D(T)N_1)+\int_0^T \operatorname{Tr}(D(t)N_2(t))\,dt. \tag{3.30}$$

Здесь матрица ковариации $D(t)=M(x(t)-m(t))(x(t)-m(t))'$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{D}=AD+DA'+\sigma\sigma',\ D(0)=D_0. \tag{3.31}$$

Решение этого уравнения выражается формулой

$$D(t)=Z(t,0)D_0Z'(t,0)+\int_0^t Z(t,s)\sigma(s)\sigma'(s)Z'(t,s)\,ds,$$

где $Z(t,s)$ — матрица Коши решений обыкновенного уравнения $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$.

Итак, для системы (3.13) с критерием качества (3.2) построены два оптимальных управления в зависимости от имеющейся инфор-

мации. Первое — для случая, когда осуществляются наблюдения (3.14). В этом случае оптимальное управление определяется формулой (3.22), а значение критерия качества — выражением (3.25). Во втором случае, когда наблюдения не проводятся, оптимальное программное управление и значение критерия определяются соответственно выражениями (3.26) и (3.30). Интуитивно ясно, что значение критерия (3.25) должно быть не больше его значения (3.30).

Этот вывод подтверждается и непосредственным сравнением выражений (3.25) и (3.30). Действительно, обозначим через $R(t)$ матрицу, представляющую собой разность решений задачи (3.31) и (3.24). Тогда разность правых частей выражений (3.30) и (3.25) имеет вид

$$\operatorname{Tr}(R(T)N_1)+\int_0^T \operatorname{Tr}(R(t)N_2(t))\,\mathrm{d}t.$$

В последней сумме достаточно установить неотрицательность ее слагаемых. Поскольку матрица N_1 неотрицательно определена, ее можно представить в виде $N_1=MM'$.

Кроме того, из (3.31) и (3.34) следует, что $R(t)$ неотрицательно определена. Поэтому

$$\operatorname{Tr}(R(T)N_1=\operatorname{Tr}(M'R(T)M)\geqslant 0.$$

Аналогично устанавливается и неотрицательность второго слагаемого. Таким образом, установлено, что наличие дополнительной информации приводит к более эффективному оптимальному управлению.

Установленные выражения (3.26) — (3.31) для оптимального П-управления могут быть получены и непосредственно следующим образом. Уравнения (3.27) для $m(t)$ и (3.31) для $D(t)$ являются следствием формулы Ито. Проведем далее преобразование (3.15) — (3.17) (в которых $u(t, y_t)$ заменено на $u(t)$, а условное математическое ожидание — на безусловное) и представим критерий качества (3.2) в виде (3.18). В результате получаем задачу минимизации функционала J_2 из (3.18) на траекториях детерминированной системы (3.27). Используя решение этой задачи (получающееся, например, из решения задачи (3.1), (3.2) при $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$, $\sigma=0$), убеждаемся в справедливости соотношений (3.26) — (3.31), определяющих оптимальное П-управление системой (3.13) с критерием качества (3.2).

Замечание. Аналогично можно рассматривать и ЛК-задачу об оптимальном П-управлении линейной системой (3.1) при $\sigma_2=0$ (с помехой, зависящей от координат), имеющей вид

$$\mathrm{d}x(t)=[A(t)x(t)+f(t)+B(t)u(t)]\,\mathrm{d}t+$$
$$+\sigma_1(t)x(t)\,\mathrm{d}\xi_1(t)+\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x(0)=x_0. \quad (3.32)$$

Оптимальное П-управление в задаче (3.32), (3.2) также определяется соотношениями (3.26) — (3.30), в которых (и в этом единственное отличие от изученного выше случая $\sigma_1=0$) матрица ковариации $D(t)$ описывается уравнением

$$\dot{D}=AD+DA'+\sigma\sigma'+\sigma_1'D\sigma_1=0,\ D(0)=D_0.$$

4. Линейно-квадратичная задача при гауссовских и пуассоновских возмущениях. Рассмотренную выше ЛК-задачу можно обобщить в разных направлениях с помощью усложнения вида изучаемых уравнений движения, исследования более широких классов случайных возмущений, действующих на систему, различных модификаций критерия качества и т. д. При этом построение оптимального управления во многих случаях сводится к интегрированию детерминированных уравнений (например, обыкновенных дифференциальных уравнений, как это имело место для задачи (3.1), (3.2)). Проиллюстрируем сказанное более подробно, предполагая, что на систему наряду с гауссовскими возмущениями типа белого шума действуют еще и импульсные (ударные) возмущения, моделируемые пуассоновским процессом. Уравнения (2.12) такой системы в линейном случае могут быть представлены в виде

$$\mathrm{d}x(t)=[A(t)x(t)+B(t)u+f(t)]\,\mathrm{d}t+\sigma_1(t)x(t)\,\mathrm{d}\xi_1(t)+\sigma_2(t)u\,\mathrm{d}\xi_2(t)+$$
$$+\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t)+\sigma_3(t)\,\mathrm{d}\eta(t),\ x(0)=x_0,\ 0\leqslant t\leqslant T. \qquad (3.33)$$

Это уравнение отличается от уравнения (3.1) только последним слагаемым $\sigma_3(t)\,\mathrm{d}\eta(t)$, где $\sigma_3(t)$ — заданная матрица с измеримыми ограниченными элементами, $\eta(t)$ — пуассоновский процесс (описанный в § 2). Остальные величины в (3.33) имеют тот же смысл, что и идентичные по обозначению величины в уравнении (3.1). При этом С-управление системой (3.33) выбирается в виде марковского управления $u(t,\ x(t))$ с целью минимизации квадратичного функционала (3.2). Предполагается, что координаты $x(t)$ системы доступны точному измерению. Уравнение Беллмана для задачи (3.33), (3.2) имеет вид (3.3), где оператор L_u должен быть модифицирован в соответствии с общей формулой (2.13) для производящего оператора системы (2.12). Таким образом, получаем

$$\inf_u[L_uV(t,\ x)+\lambda(t,\ x,\ u)+$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(t)(V(t,\ x+\sigma_1(t,\ x,\ u)e_i)-V(t,\ x))]=0,$$
$$T\geqslant t\geqslant 0,\ x\in R_n,\ V(T,\ x)=x'N_1x+2h_1'x. \qquad (3.34)$$

Здесь $\lambda_i(t)$ — параметр i-й компоненты пуассоновского процесса; вектор $e_i\in R_r$ имеет i-ю компоненту, равную единице, а все остальные — равные нулю; оператор L_u и функция $\lambda(t,\ x,\ u)$ определены формулой (3.3). Решение $V(t,\ x)$ задачи (3.34) ищется в виде

$$V(t,\ x)=x'P(t)x+2G_1'(t)x+g_1(t). \qquad (3.35)$$

Аналогично выводу соотношений (3.10) — (3.12) заключаем, что матрица $P(t)$ удовлетворяет уравнению (3.10), а для вектор-функции $G_1(t) \in R_n$ справедливы соотношения

$$\dot{G}_1 + A'G_1 + Pf + h_2 + (N_4 + PB)K(h_3 + B'G_1) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(t) P\sigma_3 e_i = 0,$$

$$G_1(T) = h_1,\ K = -(N_3 + \sigma_2' P \sigma_2)^{-1}.$$

Скалярная функция $g_1(t)$ определяется квадратурой:

$$g_1(t) = \int_t^T [2G_1'(s)f(s) + (h_3(s) + G_1'(s)B(s))K(s)(h_0(s) +$$

$$+ B'(s)G_1(s)) + \mathrm{Tr}(P(s)\sigma(s)\sigma'(s)) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(s)(2G_1'(s)\sigma_3(s)e_i +$$

$$+ e_i'\sigma_3'(s)P(s)\sigma_3(s)e_i)]\,\mathrm{d}s.$$

Из (3.34), (3.35) вытекает, что оптимальное управление $u_0(t, x)$ системой (3.33) выражается формулой (3.8), в которой G заменено на G_1, а g — на g_1, т. е.

$$u_0(t, x) = K(t)[B'(t)P(t) + N_4'(t)x) + h_3(t) + B'(t)G_1(t)].$$

5. Управление намоткой провода с учетом случайных возмущений. Эта задача в детерминированной постановке изложена в п. 5 § 2 гл. IV. Вместе с тем в реальных ситуациях ряд величин, входящих в постановку задачи, изменяются случайным образом. Рассмотрим подробнее ситуацию, когда случайным флуктуациям подвержены входное напряжение $U(t)$ и коэффициент трения вращения ψ. При этом предполагается, что отклонение напряжения от его номинального значения можно представить в форме $u(t) + \sigma_2 \dot{\xi}_2(t)$, а коэффициент трения имеет вид $\psi - \sigma_1 \dot{\xi}_1(t)$. Здесь σ_1 и σ_2 — заданные постоянные, а ξ_1 и $\xi_2(t)$ — взаимно независимые стандартные винеровские процессы. Тогда вместо задачи (2.29), (2.30) гл. IV получаем следующую стохастическую ЛК-задачу управления:

$$\mathrm{d}x(t) = (-\psi g^{-1}(t)\dot{x}(t) + æu)\,\mathrm{d}t + \sigma_1 g^{-1}(t)x(t)\,\mathrm{d}\xi_1(t) +$$

$$+ æ\sigma_2\,\mathrm{d}\xi_2(t),\ t \geqslant 0. \tag{3.36}$$

Минимизируемый критерий качества имеет вид

$$J(u) = M\int_0^T [(r(t)g^{-1}(t)x(t))^2 + \rho u^2]\,\mathrm{d}t. \tag{3.37}$$

В соответствии с (3.8) оптимальное управление в задаче (3.36), (3.37) выражается формулой

$$u_0(t) = -K_1(t)x(t),\ K_1(t) = æ\rho^{-1}P_1(t).$$

Здесь $P_1(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\dot{P}_1 - 2\psi g^{-1}(t)P_1(t) - æ^2\rho^{-1}P_1^2(t) + r^2(t)g^{-2}(t) = \\ = -\sigma_1^2 g^{-2}(t)P_1(t),\ P_1(T) = 0. \qquad (3.38)$$

Сравнивая уравнения (2.31) гл. IV и (3.38), заключаем, что учет случайных возмущений приводит к появлению в уравнении Риккати нового слагаемого $\sigma_1^2 g^{-2}P_1$, обусловленного флуктуацией коэффициента трения. Учет же случайных колебаний входного напряжения не влияет на величину оптимального С-управления, а сказывается лишь на величине $J(u_0)$ минимального значения критерия качества. Если, например, $\sigma_1 = 0$, то $J(u_0)$ превосходит минимальное значение критерия (2.30) гл. IV соответствующей детерминированной задачи (т. е. задачи (3.36), (3.37) при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) на величину $æ^2\sigma_2^2 \int_0^T P(t)\,dt$. Здесь $P(t)$ — решение задачи (3.38) при $\sigma_1 = 0$, совпадающей в этом случае с задачей (2.31) гл. IV.

§ 4. УПРАВЛЕНИЕ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ. СТАБИЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Постановка задачи. Постановки задач стабилизации стохастических систем отличаются от постановок детерминированных задач стабилизации, описанных в гл. VII, прежде всего тем, что уравнения движения (1.1) содержат случайные слагаемые. Это, в свою очередь, приводит к соответствующей модификации критерия качества и большему разнообразию постановок задач, что обусловлено большим количеством возможных определений устойчивости (см. гл. II). Остановимся на сказанном подробнее. Отметим, что дальнейшее изложение в значительной мере следует [10]. Уравнения движения имеют вид (1.1), т. е.

$$dx(t) = a(t, x(t), u)\,dt + \sigma(t, x(t), u)\,d\xi(t),\ t \geqslant 0,\ x(0) = x_0. \qquad (4.1)$$

Здесь $x \in R_n$; управление $u \in R_m$, стандартный винеровский процесс $\xi(t) \in R_k$; непрерывная вектор-функция $a \in R_n$; матрица σ размера $n \times k$ и детерминированный вектор $x_0 \in R_n$ заданы. При этом С-управление системой (4.1) ищется в классе марковских управлений, т. е. в классе функций вида $u(t, x(t) \in U$, где U — заданное множество из R_m.

Подобно детерминированному случаю, возможны следующие постановки задач стабилизации:

1^0. Найти управление $u(t, x)$, при котором система (4.1) становится устойчивой в том или ином смысле.

2^0. Найти управление $u(t, x)$, минимизирующее критерий качества

$$J(u)=M\int_0^\infty F(t, x(t), u(t, x(t)))\,dt\to\inf_{u\in U}, \tag{4.2}$$

где M — математическое ожидание; $F(t, x, u)$, $F:[0, \infty]\times \times R_n\times R_m\to R_1$ — заданная непрерывная функция.

3^0. Найти управление $u(t, x)$, которое минимизирует функционал (4.2) и делает систему (4.1) устойчивой. По аналогии с гл. VII задача стабилизации в этой постановке называется *задачей стохастической оптимальной стабилизации.*

2. Применение второго метода Ляпунова к задачам оптимальной стабилизации. Назовем С-управление $u(t, x)$ *допустимым*, если $u(t, 0)=0$, функции $a(t, x, u(t, x))$, $\sigma(t, x, u(t, x))$ непрерывны, а их первые производные по x существуют и равномерно ограничены по t. Предполагается также, что $a(t, 0, 0)=0$, $\sigma(t, 0, 0)=0$. Ниже через C_i, P, q обозначены некоторые положительные постоянные. Производящий оператор L_u задается выражением

$$L_uV(t, x)=\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}+a'(t, x, u)\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}+ +\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)\frac{\partial^2V(t, x)}{\partial x^2}\right].$$

Теорема 4.1. *Пусть существуют допустимое* С*-управление* $u_0(t, x)$ *и скалярная функция* $V_0(t, x)$, *дважды непрерывно дифференцируемая по* x *и один раз по* t *всюду, кроме, быть может, множества* $x=0$, *удовлетворяющая при всех* $t\geqslant 0$, $x\in R_n$ *условиям*

$$C_1|x|^p\leqslant V_0(t, x)\leqslant C_2|x|^p,$$
$$\left|\frac{\partial V_0(t, x)}{\partial x}\right|\leqslant C_2(1+|x|^q),\ p>0,\ q>0, \tag{4.3}$$
$$\inf_{u\in U}[L_uV_0(t, x)+F(t, x, u)]=$$
$$=L_{u_0}V_0(t, x)+F(t, x, u_0(t, x))=0, \tag{4.4}$$
$$F(t, x, u)\geqslant C_3|x|^p. \tag{4.5}$$

Тогда тривиальное решение системы (4.1) *при управлении* $u_0(t, x)$ *экспоненциально p-устойчиво, причем*

$$J(u_0)=V_0(0, x_0)=\inf_u\int_0^\infty MF(t, x(t, u), u(t, x(t, u)))\,dt, \tag{4.6}$$

где через $x(t, u)$ обозначено решение задачи (4.1) *и инфимум вычисляется по множеству всех допустимых управлений u.*

□ Из формулы Ито вытекает, что при любом допустимом управлении $u(t, x)$ справедливо соотношение

$$dV_0(t, x(t, u)) = L_u V_0(t, x(t, u))\,dt + \left(\frac{\partial V_0(t, x(t, u))}{\partial x}\right)' \sigma(t, x(t, u), u(t, x(t, u)))\,d\xi(t).$$

Проинтегрируем это соотношение по t в пределах от $t=0$ до $t=T>0$ и затем вычислим математическое ожидание. Получим

$$MV_0(T, x(T, u)) - V_0(0, x_0) = M\int_0^t L_u V_0(t, x(t, u))\,dt + M\int_0^t \left(\frac{\partial V_0(t, x(t, u))}{\partial x}\right)' \sigma(t, x(t, u), u(t, x(t, u)))\,d\xi(t). \quad (4.7)$$

Из определения допустимого управления $u(t, x)$ следует, что при этом управлении существует решение задачи (4.1), имеющее ограниченные моменты на любом конечном отрезке времени $[0, T]$. Значит, с учетом ограничения (4.3) на производную $\partial V_0/\partial x$ математическое ожидание стохастического интеграла в (4.7) равно нулю. Таким образом, при любом допустимом управлении $u(t, x)$ имеем

$$MV_0(T, x(T, u)) - V_0(0, x_0) = M\int_0^T L_u V_0(t, x(t, u))\,dt. \quad (4.8)$$

Из равенства (4.8) при $u=u_0$ в силу условия (4.4) следует, что

$$-MV_0(T, x(T, u_0)) + V_0(0, x_0) = M\int_0^T F(t, x(t, u_0), u_0(t, x(t, u_0)))\,dt. \quad (4.9)$$

Однако функция $V_0(t, x)$ ограничена снизу. Поэтому с учетом последнего равенства при $T\to\infty$ получаем, что $J(u_0)<\infty$. Отсюда и из условия (4.5) вытекает оценка

$$\int_0^\infty M|x(t, u_0)|^p\,dt < \infty. \quad (4.10)$$

Проверим теперь, что функция $M|x(t, u_0)|^p$ удовлетворяет условию Липшица по t. Применяя формулу Ито к функции $|x(t, u_0)|^p$, находим

$$|x(t, u_0)^p - |x_0|^p = \int_0^t L_{u_0}|x(s, u_0)|^p \, ds +$$

$$+ p \int_0^t |x(s, u_0)|^{p-2} x'(s, u_0) \sigma(s, x(s, u_0), u_0(s, x(s, u_0))) \, d\xi(s).$$

Вычисляя математическое ожидание от обеих частей последнего равенства, заключаем, что

$$M|x(t, u_0)|^p - |x_0|^p = M \int_0^t L_{u_0}|x(s, u_0)|^p \, ds. \tag{4.11}$$

Кроме того, из определения допустимого управления вытекает, что при некоторой постоянной $C > 0$ выполняются неравенства

$$|a(t, x, u_0)| \leqslant C|x|, \ |\sigma(t, x, u_0)| \leqslant C|x|.$$

Отсюда и из вида оператора L_{u_0} следует неравенство

$$|L_{u_0}|x(t, u_0)|^p| \leqslant C_4|x(t, u_0)|^p. \tag{4.12}$$

Соотношения (4.10) — (4.12) означают, что

$$\sup_{t \geqslant 0} M|x(t, u_0)|^p < \infty. \tag{4.13}$$

Далее, из (4.11) следует, что для любых двух моментов времени $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$ справедливо равенство

$$M|x(t_2, u_0)|^p - M|x(t_1, u_0)|^p = M \int_{t_1}^{t_2} L_{u_0}|x(s, u_0)|^p \, ds.$$

Отсюда и из (4.12), (4.13) вытекает, что

$$|M|x(t_2, u_0)|^p - M|x(t_1, u_0)|^p| \leqslant C_5(t_2 - t_1).$$

Таким образом,

$$\lim_{t \to \infty} M|x(t, u_0)|^p = 0. \tag{4.14}$$

Перейдем теперь к пределу в выражении (4.9) при $T \to \infty$. Учитывая (4.14), заключаем, что

$$J(u_0) = V_0(0, x_0). \tag{4.15}$$

Покажем теперь, что $J(u) \geqslant V_0(0, x_0)$ при любом допустимом С-управлении $u(t, x)$, для которого $J(u) < \infty$. Прежде всего аналогично (4.14) устанавливается, что для указанных допустимых управлений $\lim\limits_{t\to\infty} M|x(t, u)|^p = 0$. Поэтому в силу оценки (4.3) для V_0 получим

$$\lim_{t\to\infty} MV_0(t, x(t, u)) = 0. \tag{4.16}$$

Заметим, что на основании (4.8), (4.4) справедливо неравенство

$$MV_0(T, x(T, u)) - V_0(0, x_0) \geqslant$$

$$\geqslant -M\int_0^T F(t, x(t, u), u(t, x(t, u)))\,\mathrm{d}t.$$

Переходя в нем к пределу при $T\to\infty$, в силу (4.16) заключаем, что $J(u) \geqslant V_0(0, x_0)$. Сравнивая это соотношение и (4.15), убеждаемся в справедливости формул (4.6).

В силу результатов гл. II для доказательства экспоненциальной p-устойчивости тривиального решения системы (4.1) при управлении $u_0(t, x)$ достаточно убедиться, что $V_0(t, x) \geqslant C_6|x|^p$. Обозначим через $y(s)$ решение уравнения (4.1) при $s \geqslant t$ с начальным условием $y(t) = x$ при управлении u_0. Аналогично (4.14), (4.15) устанавливается, что

$$V_0(t, x) = \int_t^\infty MF(s, y(s), u_0(s, y(s)))\,\mathrm{d}s,$$

$$\lim_{s\to\infty} M|y(s)|^p = 0. \tag{4.17}$$

Отсюда следует существование такого момента времени T, что

$$M|y(T)|^p < \frac{1}{2}|x|^p. \tag{4.18}$$

Далее, подобно выводу соотношения (4.12), нетрудно убедиться, что

$$L_{u_0}|y(s)|^p \geqslant C_7|y(s)|^p. \tag{4.19}$$

Из формул (4.17) — (4.19) с учетом (4.5) вытекает, что

$$V_0(t, x) \geqslant C_3\int_t^\infty M|y(s)|^p\,\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\geqslant C_3\int_t^T M|y(s)|^p\,\mathrm{d}s \geqslant -C_3C_7^{-1}\int_t^T ML_{u_0}|y(s)|^p\,\mathrm{d}s =$$

$$= C_3C_7^{-1}[|x|^p - M|y(T)|^p] \geqslant C_3C_7^{-1}|x|^p/2.$$

Итак, функция V_0 удовлетворяет всем условиям теоремы об экспоненциальной p-устойчивости. Значит, тривиальное решение системы (4.1) экспоненциально p-устойчиво при управлении $u_0(t, x)$.■

3. Стабилизация линейных стохастических систем. Остановимся кратко на задачах оптимальной стабилизации линейных стохастических систем

$$\mathrm{d}x(t)=[A(t)x(t)+B(t)u(t)]\,\mathrm{d}t+\sigma(t)x(t)\,\mathrm{d}\xi(t),$$
$$t\geqslant 0,\ x(0)=x_0\in R_n,\ u\in R_m. \tag{4.20}$$

Здесь подлежит минимизации квадратичный критерий качества:

$$J(u)=\int_0^\infty M[x'(t)N_1(t)x(t)+u'N_0(t)u]\,\mathrm{d}t\to\inf_u. \tag{4.21}$$

В уравнении (4.20) через $\xi(t)$ обозначен скалярный стандартный винеровский процесс. Матрицы A, B, σ, $N_0>0$, $N_1>0$ заданы и имеют непрерывные элементы. В задаче (4.20), (4.21) С-управление ищется в виде $u=u(t, x(t))$. Для решения указанной задачи используем теорему 4.1. В соответствии с этой теоремой необходимо построить скалярную функцию $V_0(t, x)$ и управление $u_0(t, x)$, удовлетворяющее условиям (4.3) — (4.5). Будем искать V_0 в виде $V_0(t, x)=x'P(t)x$, где симметричная матрица $P(t)\geqslant 0$ подлежит определению. Подставим V_0 в уравнение (4.4) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях x. Аналогично выводу соотношений (3.8), (3.10) получим

$$u_0(t, x)=-N_0^{-1}(t)B'(t)P(t)x, \tag{4.22}$$

$$\dot P(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)-P(t)B(t)N_0^{-1}(t)B'(t)P(t)+$$
$$+N_1(t)+\sigma'(t)P(t)\sigma(t)=0,\ t\geqslant 0. \tag{4.23}$$

На основании теоремы 4.1 если существует ограниченное положительно определенное решение $P(t)$ уравнения (4.23), то при С-управлении (4.22) система является экспоненциально устойчивой в среднеквадратическом и минимизирует функционал (4.21), равный $J(u_0)=V_0(0, x_0)$.

В ряде случаев при построении единственного положительно-определенного ограниченного при $t\geqslant 0$ решения уравнения (4.23) может быть использована следующая теорема.

Теорема 4.2. [10]. *Пусть существует линейное допустимое управление $u=R(t)x$, при котором система* (4.20)' *экспоненциально устойчива в среднеквадратическом и существует предел $P_1(t)=\lim\limits_{T\to\infty} P_1(t, T)$. Здесь функция $P_1(t, T)$ определяется при каждом фиксированном T соотношениями*

$$\frac{\partial P_1(t,\ T)}{\partial t}+(A(t)+B(t)R(t))'P_1(t,\ T)+P_1(t,\ T)(A(t)+B(t)R(t))+$$
$$+N_1(t)+R'(t)N_0(t)R(t)+\sigma'(t)P_1(t,\ T)\sigma(t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$P_1(T,\ T)=0.$$

Пусть, далее, определена последовательность $P_i(t)$ $(i\geqslant 2)$ положительно определенных матриц таким образом:

$$P_i(t)=\lim_{T\to\infty} P_i(t,\ T),\ i\geqslant 2,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

где матрица $P_i(t,\ T)$ есть решение линейного уравнения

$$\frac{\partial P_i(t,\ T)}{\partial t}+(A'(t)-P_{i-1}(t)BN_0^{-1}B')P_i(t,\ T)+$$
$$+P_i(t,\ T)(A-BN_0^{-1}B'P_{i-1}(t))+N_1(t)+$$
$$+P_{i-1}(t)BN_0^{-1}B'P_{i-1}(t)=0,\ i\geqslant 2,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$P_i(T,\ T)=0.$$

Тогда последовательность $P_i(t)$ сходится к единственному положительно определенному решению уравнения (4.23), *причем $x'P_{i+1}x\leqslant x'P_ix$ для любого $x\in R_n$.*

Замечание. Аналогичные результаты справедливы и для линейных систем вида

$$\mathrm{d}x(t)=[A(t)x(t)+B(t)u]\,\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{j}\sigma_i(t)x(t)\,\mathrm{d}\xi_i(t)$$

с критерием качества (4.21). Здесь $\xi_i(t)$ — скалярные взаимно независимые стандартные винеровские процессы. Оптимальное управление u_0 выражается формулой (4.22), причем матрица $P(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{P}+A'P+PA-PBN_0^{-1}B'P+N_1+\sum_{i=1}^{j}\sigma_i'P\sigma_i=0.$$

§ 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Одним из действенных методов синтеза оптимального управления в стохастических системах является метод возмущений, основанный на наличии в уравнениях движения малых параметров. Малый параметр ε может быть обусловлен малостью нелинейных слагаемых, малостью случайных возмущений, действующих на систему, малостью запаздывания, малостью помехи исполнения программы управления и т. д. При этом, как правило, при $\varepsilon=0$ задача

упрощается, а соответствующее оптимальное управление может быть использовано в качестве нулевого приближения к оптимальному управлению исходной задачи.

В настоящем параграфе описана схема применения метода возмущений и установлены оценки погрешности для квазилинейных систем и квадратичного критерия качества. При $\varepsilon=0$ эта задача переходит в линейно-квадратичную, аналитическое решение которой изложено в § 3.

1. Описание алгоритма последовательных приближений. Рассмотрим стохастическую управляемую систему

$$dx(t)=[\varepsilon f(t, x)+B(t)u]\,dt+\sigma(t)\,d\xi(t),\ x(0)=x_0,\ 0\leqslant t\leqslant T. \quad (5.1)$$

Здесь вектор фазовых координат $x\in R_n$; управление $u\in R_m$; матрицы B, σ заданы и имеют измеримые ограниченные элементы; вектор $f(t, x)\in R_n$ измерим по t, x и удовлетворяет условиям

$$|f(t, x_1)-f(t, x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|,$$
$$|f(t, x)|\leqslant C(1+|x|). \quad (5.2)$$

Здесь и далее через C обозначены различные положительные постоянные. В соотношениях (5.1) число T, вектор начального состояния системы $x(0)$ и параметр $\varepsilon\geqslant 0$ заданы; ξ — стандартный винеровский процесс.

Требуется определить С-управление u в виде функции времени t и фазового вектора $x(t)$, минимизирующей квадратичный функционал $J(u)$ при произвольном x_0:

$$J(u)=M\left[x'(T)N_2x(T)+\int_0^T (x'(t)N_1(t)x(t)+u'N_0(t)u)\,dt\right]. \quad (5.3)$$

Здесь $x(t)$ означает решение системы (5.1) на отрезке $[0, T]$ при управлении u; матрицы N_i заданы: $N_1\geqslant 0$, $N_2\geqslant 0$, $N_0(t)>0$, $0\leqslant t\leqslant T$; элементы матриц N_0, N_1 измеримы и ограничены. Отметим, что задача управления системой

$$\dot y(t)=A(t)y+\varepsilon f(t, y)+Bu+\sigma(t)\dot\xi$$

с функционалом (5.3) сводится к задаче (5.1), (5.3) с помощью замены переменных $y(t)=z(t)x(t)$, где z определяется условиями $\dot z=Az$, $z(0)=I$. Ниже считается, что оптимальное управление $u(t, x)$ в задаче (5.1), (5.3) существует. Обозначим через $V(t, x)$ функцию Беллмана задачи (5.1), (5.3).

Запишем формально управление для V. С учетом (2.11) имеем

$$LV+\varepsilon f'V_x-\frac{1}{4}V_x'B_1V_x+x'N_1x=0,\ x\in R_n,$$
$$V(T, x)=x'N_2x,\ 0\leqslant t\leqslant T, \quad (5.4)$$

где $LV = V_t + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sigma\sigma' V_{xx}$, $B_1 = BN_0^{-1}B'$. Здесь V_t — частная производная по t; V_x — вектор первых частных производных; V_{xx} — матрица вторых частных производных по компонентам вектора x; Tr — след матрицы.

Если решение V задачи Коши (5.4) найдено, то оптимальное управление u задается формулой

$$v(t, x) = v = -\frac{1}{2}N_0^{-1}B'V_x(t, x). \tag{5.5}$$

Представим $V(t, x)$ в виде ряда по степеням ε:

$$V = V^0 + \varepsilon V^1 + \ldots \tag{5.6}$$

Уравнения для определения V^i в разложении (5.6) получим, подставляя (5.6) в (5.4) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Уравнение для V^0 задается соотношением (5.4) при $\varepsilon = 0$. Уравнения для V^i при $t \geqslant 1$ имеют вид

$$LV^i + f'V_x^{i-1} - \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{i}(V_x^j)'B_1(V_x^{i-j}) = 0. \tag{5.7}$$

Приближение u_i к оптимальному управлению зададим формулой

$$u_i(t, x) = -\frac{1}{2}N_0^{-1}B'(V_x^0 + \ldots + \varepsilon^i V_x^i),$$
$$i \geqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in R_n. \tag{5.8}$$

Ниже считается, что V^i существует, единственно и

$$|V_x^i| \leqslant C(1 + |x|). \tag{5.9}$$

Используемый далее способ обоснования оценок погрешности состоит в том, что управление i-го приближения является оптимальным в задаче управления системой (5.1) с критерием качества, отличающимся от исходного (5.3) на величины порядка ε^{i+1}.

2. Оценка нулевого приближения. Установим оценку нулевого приближения по минимизируемому функционалу, т. е. оценку разности $J(u_0) - J(v)$. При $\varepsilon = 0$ задача Коши (5.4) допускает точное решение, приведенное в § 3. В соответствии с формулами (3.7) — (3.12) имеем

$$V_0(t, x) = x'P(t)x + \mathrm{Tr}\int_t^T \sigma'(s)P(s)\sigma(s)\,\mathrm{d}s,$$
$$\dot{P} - PB_1P + N_1 = 0,\ P(T) = N_2. \tag{5.10}$$

В силу (5.8), (5.10) синтез оптимального управления u_0 при $\varepsilon=0$ для задачи (5.1), (5.3) выражается формулой

$$u_0(t, x)=-N_0^{-1}B'Px.$$

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу — управление системой (5.1) с минимизируемым критерием качества

$$J_0^\varepsilon(u)=J(u)-2\varepsilon M\int_0^T f'(t, x(t))P(t)x(t)\,dt. \tag{5.11}$$

Уравнение Беллмана для задачи (5.1), (5.11) имеет вид

$$LW+\varepsilon f'W_x-\frac{1}{4}W_x'B_1W_x+x'N_1x-2\varepsilon f'(t, x)Px=0,\ x\in R_n,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$W(T, x)=x'N_2x. \tag{5.12}$$

Решение краевой задачи (5.12) единственно в классе функций, удовлетворяющих неравенству (5.9). Непосредственной проверкой убеждаемся также, что функция V_0, определенная равенством (5.10), является решением краевой задачи (5.12). Следовательно, управление $u_0(t, x)$ оптимально в задаче (5.1) и соответствующая функция Беллмана равна $V_0(t, x)$.

Найдем теперь оценку разности $J(u_0)-J(v)$. Обозначим через $x(t)$ решение задачи (5.1) при управлении v, а через $y(t)$ — решение этой же задачи при управлении u_0. Вследствие оптимальности v ясно, что

$$0\leqslant J(u_0)-J(v)=[J_0^\varepsilon(u_0)-J(v)]+[J(u_0)-J_0^\varepsilon(u_0)]. \tag{5.13}$$

Оценим разности в квадратных скобках в правой части. Так как v — оптимальное управление в исходной задаче (5.1), (5.3), то с учетом (5.11) имеем

$$J(v)\leqslant J(u_0)=J_0^\varepsilon(u_0)-2\varepsilon M\int_0^T f'(t, y(t))P(t)y(t)\,dt. \tag{5.14}$$

Но управление $u_0(t, x)$ линейно по x. Отсюда и из оценки (5.2) на рост функции $f(t, x)$ вытекает, что $M|y(t)|^2\leqslant C(1+|x_0|^2)$. Значит,

$$\left|M\int_0^T f'(t, y(t))P(t)y(t)\,dt\right|\leqslant C(1+|x_0|^2). \tag{5.15}$$

Таким образом, в силу (5.14) получим

$$J(v)\leqslant J_0^\varepsilon(u_0)+\varepsilon C(1+|x_0|^2).$$

Проверим теперь, что

$$J_0^\varepsilon(u_0) \leqslant J(v) + \varepsilon C(1 + |x_0|^2). \tag{5.16}$$

На основании оптимальности управления u_0 в задаче (5.1), (5.11) заключаем, что

$$J_0^\varepsilon(u_0) \leqslant J_0^\varepsilon(v) = J(v) - 2\varepsilon M \int_0^T f'(t, x(t))P(t)x(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.17}$$

Для оценки интегрального члена в правой части (5.17) оценим сначала величину $M\int_0^T |v(t, x(t))|^2\,\mathrm{d}t$. Пусть λ — минимальное положительное собственное значение матрицы N_0. Тогда в силу оптимальности v в задаче (5.1), (5.3) справедливо соотношение

$$\lambda M \int_0^T |v(t, x(t))|^2\,\mathrm{d}t \leqslant J(0) \leqslant C(1 + |x_0|^2).$$

Следовательно,

$$M \int_0^T |v(t, x(t))|^2\,\mathrm{d}t \leqslant C(1 + |x_0|^2).$$

Отсюда, а также из уравнения (5.1) и условий (5.2) вытекает неравенство

$$M|\dot{x}(t)|^2 \leqslant C(1 + |x_0|^2). \tag{5.18}$$

Поэтому аналогично (5.15) имеем

$$M \int_0^T f'(t, x(t))P(t)x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C(1 + |x_0|^2).$$

Отсюда и из (5.17) следует справедливость формулы (5.16). Сравнивая (5.14) и (5.16), заключаем, что

$$|J_0^\varepsilon(u_0) - J(v)| \leqslant \varepsilon C(1 + |x_0|^2). \tag{5.19}$$

Тем самым интересующая нас оценка первой разности в (5.13) получена. Для второй разности в (5.13) с учетом (5.11), (5.15) имеем

$$|J(u_0) - J_0^\varepsilon(u_0)| = 2\varepsilon |M \int_0^T f'(t, y(t))P(t)y(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant \varepsilon C(1 + |x_0|^2). \tag{5.20}$$

Оценки (5.13), (5.20), (5.19) означают, что

$$0 \leqslant J(u_0) - J(v) \leqslant \varepsilon C(1 + |x_0|^2).$$

Смысл этого неравенства состоит в том, что если исходной системой управлять не оптимальным образом, а с помощью управления нулевого приближения u_0, то ошибка по минимизируемому функционалу (5.3) есть величина порядка ε. Напомним, что при обосновании оценки нулевого приближения буквой C обозначались различные положительные постоянные, зависящие только от исходных данных задачи и не зависящие от ε.

3. Оценка первого приближения. В соответствии с (5.8) первое приближение u_1 к оптимальному управлению задается формулой

$$u_1(t, x) = -\frac{1}{2} N_0^{-1}(t) B'(t) [V_x^0 + \varepsilon V_x^1]. \tag{5.21}$$

Здесь функция V^1 с учетом уравнения (57) есть решение краевой задачи

$$LV^1 + 2x'Pf - x'PB_1V_x^1 = 0, \; V^1(T, x) = 0. \tag{5.22}$$

Для применения техники обоснования оценок погрешности из п. 2 построим вспомогательную управляемую систему, для которой управление (5.21) является оптимальным, а функция Q, определенная равенством $Q = V^0 + \varepsilon V^1$,— функцией Беллмана. Из уравнений (5.10), (5.22) получаем уравнение для Q:

$$LQ + 2\varepsilon x'Pf - \frac{1}{4}(V_x^0)'B_1V_x^0 + x'N_1x - \frac{\varepsilon}{2}(V_x^0)'B_1V_x^1 = 0,$$
$$Q(T, x) = x'N_2x. \tag{5.23}$$

Ясно, что

$$(V_x^0)'B_1V_x^0 = Q_x'B_1Q_x + \varepsilon^2(V_x^1)'B_1V_x^1 - 2\varepsilon(V_x^1)'B_1(V_x^0 + \varepsilon V_x^1). \tag{5.24}$$

Из (5.23), (5.24) следует, что

$$LQ + \varepsilon f'Q_x - \varepsilon^2 f'V_x^1 - \frac{1}{4}Q_x'B_1Q_x + \frac{1}{4}\varepsilon^2(V_x^1)'B_1V_x^1 + x'N_1x = 0, \tag{5.25}$$
$$Q(T, x) = x'N_2x.$$

Сравнивая (5.25) и (5.4), заключаем, что u_1 есть оптимальное управление для следующей задачи: найти управление, реализующее на траекториях системы (5.1) минимум функционала $J_1^\varepsilon(u)$:

$$J_1^\varepsilon(u) = J(u) + \alpha_1(u),$$
$$\alpha_1(u) = \varepsilon^2 M \int_0^T \left[\frac{1}{4}(V_x^1(t, x(t))'B_1V_x^1(t, x(t)) - f'(t, x(t))V_x^1(t, x(t))\right] dt. \tag{5.26}$$

Таким образом, вспомогательная задача оптимального управления построена. Это задача управления системами (5.1) с критерием качества (5.26). Подчеркнем, что уравнения движения имеют в ней тот же вид (5.1), что и в исходной задаче оптимального управления, а критерий качества (5.26) отличается от исходного (5.3) на величину $\alpha_1(u)$, имеющую порядок ε^2. Кроме того, в силу предположения (5.9) второй момент решения $x(t)$ уравнения (5.1) при управлении u_1 удовлетворяет оценке типа (5.18). Функция Беллмана во вспомогательной задаче управления (5.1), (5.26) есть $Q(t, x)$. Дальнейшее обоснование оценок первого приближения в значительной мере аналогично рассуждениям п. 2. Приведем его для полноты изложения. Прежде всего подобно (5.13) имеем

$$0 \leqslant J(u_1) - J(v) = [J_1^\varepsilon(u_1) - J(v)] + [J(u_1) - J_1^\varepsilon(u_1)]. \tag{5.27}$$

Разность в первой квадратной скобке в (5.27) оценивается аналогично (5.18). Сначала, согласно (5.26), получим

$$J(v) \leqslant J(u_1) = J_1^\varepsilon(u_1) - \alpha_1(u_1).$$

Кроме того, в силу (5.26), (5.2), (5.9) имеем

$$|\alpha_1(u_1)| \leqslant \varepsilon^2 C(1 + |x_0|^2).$$

Следовательно,

$$J(v) \leqslant J_1^\varepsilon(u_1) + \varepsilon^2 C(1 + |x_0|^2). \tag{5.28}$$

Установим теперь неравенство, противоположное (5.28). На основании оптимальности управления u_1 в задаче (5.1), (5.26) находим

$$J_1^\varepsilon(u_1) \leqslant J_1^\varepsilon(v) = J(v) + \alpha_1(v).$$

На второй момент решения $x(t)$ уравнения (5.1) при управлении v удовлетворяет оценке (5.18) и из условий (5.2), (5.9) следует, что $|\alpha_1(v)| \leqslant \varepsilon^2 C(1 + |x_0|^2)$. Значит,

$$J_1^\varepsilon(u_1) \leqslant J(v) + \varepsilon^2 C(1 + |x_0|^2). \tag{5.29}$$

Соотношения (5.28), (5.29) позволяют утверждать, что

$$|J_1^\varepsilon(u_1) - J(v)| \leqslant \varepsilon^2 C(1 + |x_0|^2). \tag{5.30}$$

Для второй квадратной скобки в (5.27) в силу (5.26) имеем

$$|J(u_1) - J_1^\varepsilon(u_1)| = |\alpha_1(u_1)| \leqslant \varepsilon^2 C(1 + |x_0|^2).$$

Отсюда и из (5.30) окончательно получим

$$0 \leqslant J(u_1) - J(v) \leqslant \varepsilon^2 C(1 + |x_0|^2). \tag{5.31}$$

Последняя оценка означает, что если системой (5.1) управлять с помощью управления u_1, то ошибка по функционалу (5.3) есть величина порядка ε^2.

4. Оценки высших приближений. Существенной частью при обосновании оценок нулевого и первого приближений была вспомогательная задача управления. При этом, после того как эта задача построена, обоснование оценок погрешности осуществляется единообразно. Поэтому ограничимся в отношении высших приближений u_j к оптимальному управлению v лишь построением вспомогательной задачи управления.

Как и выше, вспомогательная задача управления должна быть такой, чтобы оптимальное управление в ней совпадало с $u_j(t, x)$, а функция Беллмана $Q_j(t, x)$ была равна отрезку ряда (5.6):

$$Q_j(t, x) = V^0 + \varepsilon V^1 + \ldots + \varepsilon^j V^j, \; j \geqslant 1. \tag{5.32}$$

Просуммируем уравнение (5.4) при $\varepsilon = 0$ и уравнения (5.7), умноженные на ε^j $(i = 1, \ldots, j)$. В полученном равенстве добавим и вычтем выражение

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial Q_j(t, x)}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial Q_j(t, x)}{\partial x}.$$

В результате получим

$$L_u Q_j + x' N_1 x + \varepsilon f' \frac{\partial Q_j}{\partial x} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial Q_j}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{j} \varepsilon^i \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{\partial V^k}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial V^{i-k}}{\partial x}\right] - \varepsilon^{j+1} f' \frac{\partial V^j}{\partial x} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial Q_j}{\partial x}.$$

Заменяя Q_j суммой (5.32), представим выражение в квадратных скобках в виде

$$\sum_{i=0}^{j} \sum_{k=0}^{i} \varepsilon^{i+k} \left(\frac{\partial V^i}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial V^k}{\partial x} - \sum_{i=0}^{j} \varepsilon^i \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{\partial V^k}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial V^{i-k}}{\partial x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \sum_{i=k}^{k+j} \varepsilon^i \left(\frac{\partial V^k}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial V^{i-k}}{\partial x} - \sum_{k=0}^{j} \sum_{i-k}^{j} \varepsilon^i \left(\frac{\partial V^k}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial V^{i-k}}{\partial x} =$$

$$= \sum_{k=1}^{j} \sum_{i=j+1}^{k+j} \varepsilon^i \left(\frac{\partial V^k}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial V^{i-k}}{\partial x} = \varepsilon^{j+1} \delta_j,$$

$$\delta_j = \sum_{k=1}^{j} \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^i \left(\frac{\partial V^k}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial V^{i-k}}{\partial x}.$$

Значит, функция Q_j удовлетворяет уравнению

$$LQ_j + \varepsilon f' \frac{\partial Q_j}{\partial x} + x' N_1 x + \varepsilon^{j+1} \delta_j = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x}\right)' B_1 \frac{\partial Q_j}{\partial x}, \; Q_j(T, x) = x' N_2 x.$$

Следовательно, $Q_j(t, x)$ есть функция Беллмана для задачи управления системой (5.1) с критерием качества

$$J(u)+\varepsilon^{j+1}M\int_0^T \delta_j(t, x(t))\,\mathrm{d}t. \tag{5.33}$$

Оптимальное управление в задаче (5.1), (5.33) есть $u_j(t, x)$. Проведя рассуждения, аналогичные доказательству оценок нулевого и первого приближений, в результате заключаем, что

$$0 \leqslant J(u_j) - J(v) \leqslant \varepsilon^{j+1} C(1+|x_0|^2).$$

Основные результаты и формулы главы IX

Задача оптимального управления стохастическими системами:
уравнения эволюции системы:

$$\mathrm{d}x(t) = a(t, x, u)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, x, u)\,\mathrm{d}\xi(t);$$

минимизируемый функционал (критерий качества)

$$J(u) = M\left[\varphi(x(T)) + \int_0^T F(t, x(t), u)\,\mathrm{d}t\right] \to \inf_u;$$

ограничения на управление

$$u(t) \in U(t);$$

функция Беллмана

$$V(t, x) = \inf_u M\left[\varphi(X_{t,\ x}(T, u)) + \int_t^T F(s, X_{t,\ x}(s, u), u(s, X_{t,\ x}(s, u)))\,\mathrm{d}s\right];$$

уравнение Беллмана

$$\inf_{u\in U}[L_u V(t, x) + F(t, x, u)] = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$V(T, x) = \varphi(x),$$

$$L_u V(t, x) = V_t(t, x) + V'_x(t, x)a(t, x, u) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)V_{xx}(t, x)].$$

Стохастическая линейно-квадратичная задача:

$$\mathrm{d}x(t) = [A(t)x(t) + f(t) + B(t)u]\,\mathrm{d}t + \sigma_1(t)x(t)\,\mathrm{d}\xi_1(t) + \sigma_2(t)u\,\mathrm{d}\xi_2(t) + \sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x(0) = x_0,$$

$$J(u) = M\left[x'(T)N_1x(T) + 2h_1'x(T) + \int_0^T \{x'(t)N_2(t)x(t) + u'(t)N_3(t)u(t) + 2x'(t)N_4(t)u(t) + 2h_2'(t)x(t) + 2h_3'(t)u(t)\}\,\mathrm{d}t\right]$$

$$N_1 \geqslant 0,\ N_2 \geqslant 0,\ N_3 > 0;$$

оптимальное управление

$$u_0(t, x) = -K(t, P)[B'(t)P)(t)x + N_4'(t)x + B'(t)G(t) + h_3(t)],$$

где

$$K(t, P) = [N_3(t) + \sigma_2'(t)P(t)\sigma_2(t)]^{-1} > 0;$$

$$\dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) + (P(t)B(t) + N_4(t)) \times$$
$$\times K(t, P)(P(t)B(t) + N_4(t))' + N_2(t) + \sigma_1'(t)P(t)\sigma_1(t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$P(T) = N_1;$$
$$\dot{G}(t) + A'(t)G(t) + P(t)f(t) + h_2(t) +$$
$$+ (N_4(t) + P(t)B(t))K(t, P)(h_3(t) + B'(t)G(t)) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$G(T) = h_1;$$

$$g(t) = \int_t^T [2G'(s)f(s) + (h_3'(s) + G'(s)B(s))K(s, P)(h_3(s) + B'(s)G(s)) +$$
$$+ \operatorname{Tr} P(s)\sigma(s)\sigma'(s)]\,ds.$$

ЛК-задача при неполной информации:

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u + f(t)]\,dt + \sigma(t)\,d\xi(t),$$
$$dy(t) = Q(t)x(t)\,dt + \sigma_0(t)\,d\xi_0(t);$$

математическое ожидание $m(t)$ и матрица ковариации $D(t)$ условного распределения $x(t)$ при условии $y(t)$

$$dm(t) = [A(t)m(t) + f(t) + B(t)u]\,dt + \sigma_3(t)\,d\xi_3(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ m(0) = m_0,$$
$$\sigma_3(t)\sigma_3'(t) = D(t)Q'(t)(\sigma_0(t)\sigma_0'(t))Q(t)D(t);$$
$$\dot{D} = AD + DA' - DQ'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}QD + \sigma\sigma',\ D(0) = D_0;$$

Оптимальное управление

$$u_0(t, m) = -N_3^{-1}(t)[(B'(t)P(t) + N_4'(t))m + B'(t)G(t) + h_3(t)];$$

минимальное значение критерия качества

$$\min_u J = V(0, m_0) + \operatorname{Tr}(D(T)N_1) + \int_0^T \operatorname{Tr}(D(t)N_2(t))\,dt.$$

Стабилизация управляемых стохастических систем:

$$dx(t) = a(t, x(t), u)\,dt + \sigma(t, x(t), u)\,d\xi(t),\ t \geqslant 0,\ x(0) = x_0$$

$$J(u) = M\int_0^\infty F(t, x(t), u(t, x(t)))\,dt \to \inf_{u \in U};$$

уравнение Беллмана

$$\inf_{u \in U}[L_u V(t, x), F(t, x, u)]\,dt = 0,$$

где

$$L_u V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + a'(t, x, u)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\sigma(t, x, u)\sigma'(t, x, u)\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2}\right);$$

оптимальное управление $u_0(t, x)$ есть решение уравнения

$$L_{u_0}V_0(t, x)+F(t, x, u_0(t, x))=0.$$

Стабилизация стохастических ЛК-задач:

$$dx(t)=[A(t)x(t)+B(t)u(t)]\,dt+\sigma(t)x(t)\,d\xi(t),\ x(0)=x_0,$$

$$J(u)=\int_0^\infty M[x'(t)N_1(t)x(t)+u'N_0(t)u]\,dt\to\inf_u,\ N_0>0,\ N_1>0;$$

оптимальное управление

$$u_0(t, x)=-N_0^{-1}(t)B'(t)P(t)x,$$

где $P(t)$ — единственное положительно определенное решение матричного уравнения Риккати

$$\dot P(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)-P(t)B(t)N_0^{-1}(t)B'(t)P(t)+N_1(t)+\sigma'(t)P(t)\sigma(t)=0,\ t\geqslant 0.$$

Квазилинейная система:

$$dx(t)=[\varepsilon f(t, x)+B(t)u]\,dt+\sigma(t)\,d\xi(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x(0)=x_0$$

$$J(u)=M\left[x'(T)N_2x(T)+\int_0^T(x'(t)N_1(t)x(t)+u'N_0(t)u)\,dt\right].$$

функция Беллмана

$$V(t, x)=V^0(t, x)+\varepsilon V^1(t, x)+\dots,$$

где

$$V_t^0+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\sigma'V_{xx}^0-\frac{1}{4}(V_x^0)'B_1V_x^0+x'N_1x=0,$$

$$V^0(T, x)=x'N_2x,\ B_1=QN_0^{-1}B',$$

$$V_t^i+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma\sigma'V_{xx}^i)+f'V_x^{i-1}-\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{i}(V_x^j)'B_1V_x^{i-j}=0,$$

$$V^i(T, x)=0;$$

i-е приближение к оптимальному решению

$$u_i(t, x)=-\frac{1}{2}N_0^{-1}B'(V_x^0+\dots+\varepsilon'V_x^i);$$

оценка по функционалу i-го приближения

$$0\leqslant J(u_i)-J(v)\leqslant\varepsilon^{i+1}C(1+|x_0|^2),$$

где v — оптимальное управление.

ГЛАВА X

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НА ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

В этой главе приведены способы решения задач стохастического быстродействия и управления с вероятностным критерием качества. Рассмотрены примеры управления твердым телом, гиростатом, материальной точкой и математическим маятником при случайных возмущениях.

§ 1. УПРАВЛЕНИЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

1. Постановка задачи оптимального быстродействия в динамических системах при случайных возмущениях. Рассмотрим задачу быстродействия для автономных динамических систем

$$\dot{x}(t)=f(x(t))+Bu(x(t))+\sigma(x(t))\dot{\xi}(t),\ t\geqslant 0,$$
$$x(0)=x_0\in R_n. \tag{1.1}$$

Здесь B — заданная постоянная матрица, функция f и матрица σ удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование решения уравнения (1.1) при $u=0$. Кроме того, $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс, а u — С-управление, причем при всех x

$$u(x)\in U, \tag{1.2}$$

где U — заданное выпуклое компактное множество.

Пусть также задано некоторое замкнутое множество Q (ограниченное или нет) в фазовом пространстве R_n. В дальнейшем через Γ обозначается граница Q, а через $\tau_x(u)$ — случайная величина, равная моменту первого достижения множества Q системой (1.1) при управлении u и начальном условии $x(0)=x_0$, где произвольный начальный вектор $x\in R_n\setminus Q$. Если некоторые реализации системы (1.1) не достигают Q ни за какое конечное время, то для этих траекторий время $\tau_x(u)$ полагается равным бесконечности.

Требуется выбрать управление $u=u(x)$, удовлетворяющее ограничению (1.2) и минимизирующее при любом $x\in R_n\setminus Q$ среднее время достижения:

$$M\tau_x\to\inf_{u\in U}. \tag{1.3}$$

В теории оптимального управления детерминированными системами, т. е. системами (1.1) при $\sigma=0$, задача быстродействия занимает особое место. Для этой задачи получены довольно полные и законченные результаты. В частности, установлены теоремы существования и единственности оптимального по быстродействию управления, установлен вид оптимального управления, рассмотрены разнообразные примеры.

В то же время в поставленной выше задаче о минимизации среднего времени достижения управляемым стохастическим процессом заданного множества известные законченные результаты в основном сводятся к тому,

что при некоторых условиях гладкости минимального значения $V(x)$ функционала (1.3) функция $V(x)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных (см. § 2 гл. IX).

$$\inf_{u\in U}(L_uV(x)+1)=0,\ x\in Q_1,\ V(x)=0,\ x\in\Gamma,$$

$$L_uV=(f+Bu)'V_x+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma\sigma'V_{xx}). \tag{1.4}$$

Здесь Q_1 — дополнение Q до R_n; штрих — знак транспонирования; вектор V_x имеет координаты $\partial V/\partial x_i$; матрица V_{xx} имеет компоненты $\partial^2V/(\partial x_i\partial x_j)$; Tr — след матрицы.

Однако необходимо подчеркнуть, что задача (1.4), вообще говоря, имеет не единственное решение. Поэтому даже если $V(x)$ — достаточно гладкая функция, то заранее не ясно, с каким именно решением уравнения (1.4) она совпадает.

Поясним сказанное на примере.

Пример 1.1. Пусть (1.1) — скалярная система, имеющая вид

$$dx(t)=u(x(t))\,dt+\sqrt{2}\,d\xi(t),\ |u|\leqslant 1,\ x(0)=x. \tag{1.5}$$

Множество Q есть интервал $(-\infty, \alpha]$, где α — заданное число. Пусть $x>\alpha$. Уравнение (1.4) имеет вид

$$V_{xx}-|V_x|+1=0,\ x>\alpha,\ V(\alpha)=0.$$

Решением этого уравнения служит любая функция вида $V(x)=x-\alpha+C(e^{x-\alpha}-1)$. Здесь и ниже через C обозначены различные неотрицательные постоянные. Заметим, что в этом примере оптимальное управление $u(x)=-1$. Действительно, если $x(t, u)$ — решение задачи (1.5) при управлении u, то $x(t, -1)\leqslant x(t, u)$ с вероятностью 1 при любом управлении u, $|u|\leqslant 1$. При этом оптимальное время перехода при управлении $u=-1$ равно $x-\alpha$ для любого $x\geqslant\alpha$.

2. Существование допустимого управления. Назовем управление $u(x)$ *допустимым*, если при этом управлении существует решение уравнения (1.1) такое, что $M\tau_x(u)<\infty$ для любых конечных x. Приведем без доказательства условия существования допустимого управления в терминах второго метода Ляпунова.

Лемма 1.1. *Пусть в Q_1 существуют функция $u(x)$ и дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция $W(x)\geqslant 0$ такие, что при управлении $u(x)$ существуют решение системы* (1.1) и

$$L_uW(x)\leqslant -C,\ x\in Q_1. \tag{1.6}$$

Тогда $u(x)$ — допустимое управление, причем $M\tau_x(u)\leqslant C^{-1}W(x)$.

Пример 1.2. Рассмотрим движение материальной точки на прямой под действием управляющей силы $u(|u|\leqslant 1)$ и случайной воз-

мущающей силы $\sigma\dot{\xi}$, где σ — заданная постоянная, ξ — скалярный винеровский процесс. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}_1(t)=x_2,\ \mathrm{d}x_2(t)=u\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}\xi(t),\ t\geqslant 0. \tag{1.7}$$

Требуется за кратчайшее время добиться того, чтобы координата x_1 стала равной нулю при произвольном начальном условии (т. е. множество Q есть прямая $x_1=0$). Покажем, что при любом σ допустимое управление есть

$$u=1,\ x_1<0,\ u=-1,\ x_1>0. \tag{1.8}$$

Для доказательства допустимости управления (1.8) построим функцию $W(x)$ типа Ляпунова и проверим справедливость неравенства (1.6).

Зафиксируем постоянную $k_1>\sigma^2/2$. Затем подберем k_2 так, чтобы при всех x_1, x_2 функция

$$W=k_1x_2+\frac{1}{2}x_2^2+k_2+x_1,\ x_1>0;$$

$$W=-k_1x_2+\frac{1}{2}x_2^2+k_2-x_1,\ x_1<0$$

была положительна. Вычисляя, получим

$$L_uW=-k_1+\frac{\sigma^2}{2}<0$$

всюду вне прямой $x_1=0$. Значит, в силу леммы 1.1 управление (1.8) — допустимое. Нетрудно доказать, что это управление является оптимальным. Действительно, при $x_1(0)>0$ и любом управлении $u_1(x)\geqslant -1$ невозможно неравенство $\tau_{u_1}(x)<\tau_{-1}(x)$, так как $x_1(t,-1)\leqslant x_1(t,u_1)$ с вероятностью 1. Здесь $x_1(t,u)$ есть решение x_1 системы (1.7) при управлении u и произвольном начальном условии $x_1(0)$, $x_2(0)$. Аналогично устанавливается оптимальность управления $u=1$ при $x_1<0$.

При исследовании вопроса о существовании допустимого управления в некоторых конкретных случаях требования леммы 1.1 могут быть ослаблены. Точнее, пусть в Q_1 найдутся функция $u(x)$ и непрерывная скалярная функция $W(x)\geqslant 0$ такие, что при управлении $u(x)$ существует решение системы (1.1) и для любых $t_1\leqslant t_2$ справедливо неравенство

$$MW(x(t_2,u))-MW(x(t_1,u))\leqslant -C(t_2-t_1).$$

Тогда $u(x)$ — допустимое управление. В частности, от функции W достаточно требовать, чтобы

$$\overline{\lim_{\Delta\to+0}}\frac{1}{\Delta}[MW(x(\Delta,u))-W(x)]\leqslant -1. \tag{1.9}$$

При этом если W удовлетворяет требованиям леммы 1.1, то предел в (1.9) есть $L_u W(x)$.

3. Алгоритм построения оптимального управления. Приведем один способ построения оптимального по быстродействию управления. Обозначим через S_N последовательность концентрических шаров радиуса N в пространстве R_n таких, что $Q \subset S_N$. Границу S_N обозначим через s_N. Определим последовательность скалярных функций $V_N(x)$, являющихся решением краевых задач

$$\inf_{u \in U} (L_u V_N(x) + 1) = 0, \; x \in Q_1 \bigcap S_N,$$
$$V_N(x) = 0, \; x \in \Gamma \bigcup s_N. \tag{1.10}$$

Здесь выражение $L_u V_N$ определяется формулой (1.4). При выполнении некоторых условий (см. [11]) существует единственное решение $V_N(x)$ задачи (1.10), причем $V_N(x) \geqslant 0$ и для любых $N_2 \geqslant N_1$ справедливо неравенство

$$V_{N_2}(x) \geqslant V_{N_1}(x), \; x \in Q_1 \bigcap S_{N_1}.$$

Кроме того:

1) существует минимальное положительное решение внешней краевой задачи (1.4), обозначаемое через $V_0(x)$;

2) на любом ограниченном множестве изменения x последовательность $V_N(x)$ равномерно сходится к $V_0(x)$ при $N \to \infty$, монотонно не убывая;

3) ни при каком допустимом управлении нельзя получить значение функционала (1.3), меньшее $V_0(x)$;

4) если при управлении $u_0(x)$, определяемом из условия,

$$\inf_{u \in U} L_u V_0(x) = L_{u_0} V_0(x), \tag{1.11}$$

существует решение уравнения (1.1), то $u_0(x)$ — оптимальное управление.

Укажем некоторые особенности приведенного метода построения оптимального управления. Как уже отмечалось выше, уравнение Беллмана (1.4) имеет, вообще говоря, не единственное решение. Для того чтобы из этих решений выделить функцию Беллмана (равную среднему значению времени быстродействия (1.3)), вводится последовательность вспомогательных задач управления, состоящих в следующем. Рассмотрим систему (1.1) в области $Q_1 \bigcap S_N$; пусть $\tau_x^N(u)$ — момент первого достижения системой (1.1) границ множества $Q_2 \bigcap S_N$ при управлении u и начальном условии $x \in Q_1 \bigcap S_N$.

Вспомогательная задача управления состоит в выборе такого управления u, при котором время выхода из области $Q_1 \bigcap S_N$ минимально, т. е. $M\tau_x^N(u)$ минимально по u. Уравнение Беллмана (1.10), соответствующее этой вспомогательной задаче управления, имеет

единственное решение V_N. Пусть теперь $N\to\infty$, т. е. внешняя граница области $Q_1\bigcap S_N$ устремляется к бесконечности. Тогда во вспомогательных задачах оптимальное управление должно с ростом N изменяться таким образом, чтобы как можно больше траекторий системы (1.1) устремлялось к внутренней границе, поскольку время достижения внешней границы области $Q_1\bigcap S_N$ при любом заданном начальном условии становится больше, чем время достижения внутренней границы.

Выделим основные этапы построения оптимального по быстродействию управления:

1^0. Строят последовательность $V_N(x)$ решений краевой задачи (1.10).

2^0. Определяют предел $V_0(x)$ последовательности $V_N(x)$ при $n\to\infty$.

3^0. Определяют оптимальное управление u_0 с помощью формулы (1.11).

4. Управление по быстродействию движением твердого тела. Рассмотрим управляемое движение твердого тела относительно центра масс под действием управляющих моментов и случайных возмущений. Пусть x_i $(i=1, 2, 3)$ — компоненты кинетического момента тела относительно жестко связанной с телом системы координат, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции тела (см. рис. 3.1 гл. I). Уравнения Эйлера движения твердого тела имеют вид

$$\dot{x}_1(t)=x_2x_3(a_2-a_3)(a_2a_3)^{-1}+u_1+\sigma\dot{\zeta}_1,\ t\geqslant 0,\ (1;\ 2;\ 3). \quad (1.12)$$

Здесь символ (1; 2; 3) означает, что остальные два уравнения движения получаются из (1.12) циклической перестановкой индексов, числа a_i — главные центральные моменты инерции, σ — постоянная, управление $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ удовлетворяет при постоянной $b>0$ ограничению

$$|u|=(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{1/2}\leqslant b. \quad (1.13)$$

Система (1.12) с ограничением (1.13) допускает, например, следующую интерпретацию. Имеется в распоряжении одна пара управляемых газовых струй, создающих вращающие моменты, причем газовые сопла можно установить под любым углом относительно твердого тела, и воздействие управления на систему одинаково в каждом направлении.

Для системы (1.12) поставим задачу о синтезе управления, при котором за минимальное среднее время модуль кинетического момента становится равным заданной величине $r>0$ при произвольном начальном условии $x(0)$, $|x(0)|\geqslant r$. Для решения этой задачи сначала необходимо построить последовательность решений V_N краевой задачи (1.10), затем определить предел последовательности

V_N при $N\to\infty$ и, наконец, построить оптимальное управление. Конкретизируем соотношения (1.1) применительно к рассматриваемому случаю. При $r<|x|<N$ имеем

$$\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)V_N+\min_{u,\ |u|\leqslant b}\left(u_1\frac{\partial V_N(x)}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial V_N(x)}{\partial x_2}+\right.$$

$$\left.+u_3\frac{\partial V_N(x)}{\partial x_3}\right)+x_2x_3\frac{a_2-a_3}{a_2a_3}\frac{\partial V_N}{\partial x_1}+x_1x_3\frac{a_3-a_1}{a_1a_3}\frac{\partial V_N}{\partial x_2}+x_1x_2\frac{a_1-a_2}{a_1a_2}\frac{\partial V_N}{\partial x_3}=-1;$$

при

$$V_N(x)=0,\ \text{при}\ |x|=r,\ |x|=N. \tag{1.14}$$

Определим число $r_1(N)$ как корень уравнения

$$\int_r^{r_1} z(t)\,\mathrm{d}t\int_t^{r_1}\frac{\mathrm{d}u}{z(u)}=\int_{r_1}^{N} z_1(t)\,\mathrm{d}t\int_{r_1}^{t}\frac{\mathrm{d}u}{z_1(u)},\ r\leqslant r_1\leqslant N. \tag{1.15}$$

Здесь введены обозначения

$$z(t)=(rt^{-1})^2\exp[2b\sigma^{-2}(t-r)],$$
$$z_1(t)=(rt^{-1})^2\exp[2b\sigma^{-2}(r-t)]. \tag{1.16}$$

Левая часть (1.15) при $r_1=r$ равна нулю и с учетом (1.16) монотонно возрастает. Правая же часть (1.15) равна нулю при $r_1=N$ и монотонно убывает при $r\leqslant r_1\leqslant N$. Значит, уравнение (1.15) при любом фиксированном N имеет, и притом единственное, решение $r_1(N)$, причем

$$r<r_1(N)<N. \tag{1.17}$$

Подстановкой в (1.14) убеждаемся, что решение уравнения (1.14) задается формулами

$$V_N(x)=\frac{2}{\sigma^2}\int_r^{|x|} z(t)\,\mathrm{d}t\int_t^{r_1}\frac{\mathrm{d}t_1}{z(t_1)},\quad r\leqslant|x|\leqslant r_1(N),$$

$$V_N(x)=\frac{2}{\sigma^2}\int_{|x|}^{N} z_1(t)\,\mathrm{d}t\int_{r_1}^{t}\frac{\mathrm{d}t_1}{z_1(t_1)},\quad r_1(N)\leqslant|x|\leqslant N.$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{N\to\infty} r_1(N)=\infty. \tag{1.18}$$

Вычислим производную $\mathrm{d}r_1(N)/\mathrm{d}N$, для чего продифференцируем по N обе части равенства (1.15). Имеем

$$\frac{dr_1(N)}{dN}=\left[z_1(N)\int\limits_{r_1}^{N}\frac{dt}{z_1(t)}\right]\left[\frac{1}{z_1(r_1)}\int\limits_{r_1}^{N}z_1(t)\,dt+\frac{1}{z(r_1)}\int\limits_{r}^{r_1}z(t)\,dt\right]^{-1}>0. \quad (1.19)$$

Отсюда и из (1.17) вытекает, что последовательность $r_1(N)$ монотонно возрастает. Предположим, что равенство (1.18) неверно. Это означает, что существует такое число $r_0(r<r_0<\infty)$, что $r_1(N)\leqslant r_0$ при всех N. Покажем, однако, что в этом случае найдется такая постоянная $C_1<0$, что для всех $N>r_0$ справедлива оценка

$$\frac{dr_1(N)}{dN}\geqslant C_1, \quad (1.20)$$

которая, очевидно, противоречит неравенству $r_1(N)\leqslant r_0$. В силу (1.16) первый сомножитель в правой части (1.19) равен

$$d_1=\frac{1}{N^2}\exp\left(-\frac{2b}{\sigma^2}N\right)\int\limits_{r_1}^{t}t^2\exp\left(\frac{2b}{\sigma^2}t\right)dt.$$

Интегрируя, заключаем, что при всех $N>r_0$ и $C_2>0$ верно неравенство

$$0<d_1\leqslant C_2. \quad (1.21)$$

Аналогично можно показать, что при всех N и $U_3>0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{z_1(r_1)}\int\limits_{r_1}^{N}z_1(t)\,dt\leqslant\exp\left(-\frac{2b}{\sigma^2}r_1\right)\int\limits_{r_1}^{N}\exp\left(-\frac{2b}{\sigma^2}t\right)dt\leqslant C_3,$$

$$\frac{1}{z(r_1)}\int\limits_{r}^{r_1}z(t)\,dt\leqslant r_1^2\exp\left(-\frac{2b}{\sigma^2}r_1\right)\int\limits_{r}^{r_1}\left(\frac{1}{t}\right)^2\exp\left(-\frac{2b}{\sigma^2}t\right)dt\leqslant C_3. \quad (1.22)$$

Из (1.21), (1.22), (1.19) следует (1.20). Тем самым справедливость соотношения (1.18) установлена. В силу (1.18), (1.17) на любом ограниченном множестве изменения x имеем

$$\lim_{N\to\infty}V_N(x)=\lim_{r_1\to\infty}\frac{2}{\sigma^2}\int\limits_{r}^{|x|}z(t)\,dt\int\limits_{t}^{r_1}\frac{dt_1}{z(t_1)}.$$

Подставляя в это равенство вместо функции $z(t)$ ее выражение (1.16), получаем

$$\lim_{N\to\infty}V_N(x)=V_0(x)=\frac{1}{b}\left[|x|-r+\frac{\sigma^2}{b}\ln\frac{|x|}{r}+\frac{\sigma^4}{2b^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{|x|}\right)\right]. \quad (1.23)$$

Используя представление (1.23) для V_0, найдем управление $u_0(x)$, реализующее минимум по u, $|u|\leqslant b$ выражения

$$u_1\frac{\partial V_0}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial V_0}{\partial x_2}+u_3\frac{\partial V_0}{\partial x_3}.$$

Имеем

$$u_0(x)=-bx|x|^{-1}. \tag{1.24}$$

Для доказательства оптимальности управления (1.24) достаточно проверить, что управление (1.24) допустимо, т. е. что при этом управлении существует решение системы (1.12). Однако это непосредственно следует из (1.24), (1.22) и равенства $L_{u_3}V_0=-1$. Таким образом, для оптимального по быстродействию управления движением твердого тела оптимальное управление максимально по модулю и направлено в сторону, противоположную вектору кинетического момента. Минимальное среднее время достижения динамическим моментом заданного значения определяется выражением (1.23), не зависящим от моментов инерции.

5. Численное построение оптимального по быстродействию управления движением материальной точки. Используем изложенный выше алгоритм для численного решения задачи о быстродействии материальной точки. Движение точки происходит по прямой под действием скалярного управления u, $|u|\leqslant b$ и случайной возмущающей силы $\sigma\xi(t)$, где $\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс, b и σ — заданные постоянные. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}(t)=y(t),\ \mathrm{d}y(t)=u(x(t),y(t))\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}\xi(t),\ t\geqslant 0. \tag{1.25}$$

Здесь $x(t)$ — координата точки, а $y(t)$ — ее скорость. Пусть Q — заданная окрестность начала координат $x=0$, $y=0$. Обозначим через $\tau_u(x, y)$ момент первого достижения множества Q точкой, начинающей движение из произвольного положения $(x, y)\in R_2\setminus Q$ при $t=0$ и управлении u. Задача быстродействия состоит в выборе такого управления u_0, при котором среднее время достижения Q минимально, т. е.

$$M\tau_{u_0}(x, y)=\inf_u M\tau_u(x, y),\ |u|\leqslant b,\ u_0=u_0(x, y).$$

Уравнение Беллмана, соответствующее поставленной задаче при $(x, y)\in R_2\setminus Q$, в соответствии с (1.4) имеет вид

$$y\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}+\inf_{u,\ |u|\leqslant b}\left(u\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}\right)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2}=-1,$$

где граничное условие $V(x, y)=0$ для (x, y), лежащих на регулярной части границы множества Q, т. е. на той части границы множества

Q, которую траектории системы (1.25) достигают при каком-либо допустимом управлении. На остальной (нерегулярной) части границы граничное условие не задается. Процедура численного построения минимального положительного решения уравнения Беллмана V_0 и оптимального управления $u_0(x, y) = -b\,\mathrm{sign}\dfrac{dV_0(x, y)}{\partial y}$ основана на методе дробных шагов (см. [15] к четвертой части).

Приведем результаты счета, когда область Q — квадрат $abcd$ (рис. 1.1). Перейдем к безразмерным переменным по формулам $x \to bx$, $y \to by$, $u \to bu$, $b \to \sigma^2/(2b)^2$. Уравнение Беллмана относительно новых переменных имеет вид

$$y\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - \left|\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}\right| + b\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = -1. \qquad (1.26)$$

На рис. 1.1 заштрихована та часть границы области Q, которая не может быть достигнута точкой ни при каком управлении при условии, что движение начинается из положения вне Q и, следовательно, на этой части границы граничное условие для V задавать не нужно. На остальной части границы функция $V=0$. В качестве расширяющейся последовательности областей E_N, фигурирующей в алгоритме построения оптимального управления из п. 3, также возьмем квадраты $ABCD$ (рис. 1.2) со стороной $2N$. Вспомогательные функции $V_N(x, y)$ определяются как решение уравнения (1.25) в области $E_N \setminus Q$ с нулевыми граничными условиями на незаштрихованной части этой области. Куски границы EB, FD, ae и fc области $E_N \setminus Q$ являются нерегулярными. Они недостижимы системой, начинающей движение изнутри области $E_N \setminus Q$, ни при каком управлении и на них граничные условия для V_N не задаются.

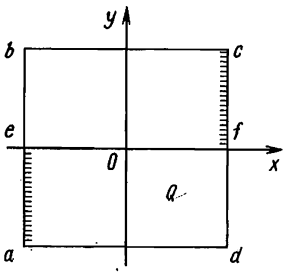


Рис. 1.1. Целевое множество в задаче о быстродействии материальной точки

Характерный вид линии переключения для функции $u_N(x, y) = -\mathrm{sign}\dfrac{\partial V_N(x, y)}{\partial y}$ представлен на рис. 1.2. Некоторые результаты вычислений для исходной задачи представлены на рис. 1.3 для случая, когда $abcd$ — квадрат со стороной 0,4 (в безразмерных переменных). В верхней части этого рисунка изображены линии уровня функции Беллмана, равной среднему значению времени быстродействия. В нижней части рисунка изображена линия переключения оптимального управления ($N=\infty$), а также приближенный вид этой линии при различных значениях параметра $N=12$; 24; 36; 48; 54. Для других частей рисунка линия переключения оп-

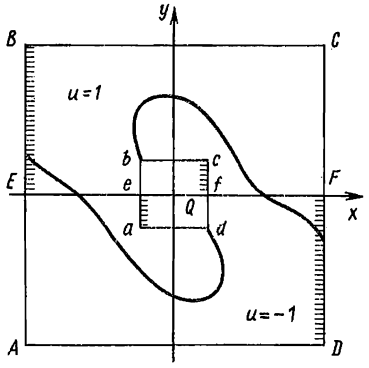


Рис. 1.2. Вид линии переключения во вспомогательной задаче быстродействия

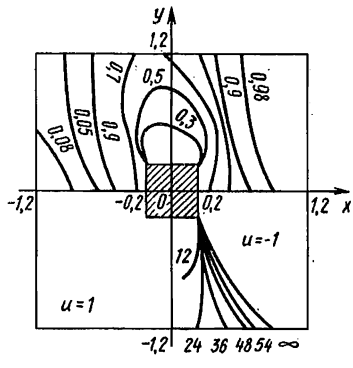


Рис. 1.3. Линии уровня функции Беллмана и линии переключения оптимального управления в задаче о быстродействии материальной точки

тимального управления и линии уровня функции Беллмана получаются с помощью равенств $V(x, y)=V(-x, -y)$, $u_0(x, y)=-u_0(-x, -y)$, вытекающих из симметрии задач. Отметим, что линия переключения детерминированной задачи быстродействия ($\sigma=0$), отмеченная на рис. 1.3 значением $N=\infty$, определяется уравнением $x\,\mathrm{sign}\,y+y^2/2=-0{,}18$. Вычисления показывают, что при $N\to\infty$ линия переключения стохастической задачи ($\sigma\neq 0$) сходится к линии переключения детерминированной задачи. Иными словами, оптимальное по быстродействию управление в детерминированной и стохастической задачах совпадает.

§ 2. УПРАВЛЕНИЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ДВИЖЕНИЕМ ГИРОСТАТА

В настоящем параграфе случайные результаты применяются к задаче об успокоении гиростата за минимальное среднее время. Эта задача относится, по существу, к одной из центральных проблем динамики — задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки — и связана с разработкой способов управления этим движением. Вопросы управления движением тела, в частности задачи стабилизации положений равновесия и вращательных движений тела, интенсивно развиваются в настоящее время преимущественно в детерминированной постановке. При этом используют два основных способа управления: пассивное и активное. Пассивное управление связано с применением аэродинамических магнитных и гравитационных сил и находит широкое применение из-за простоты технического исполнения. Активное управление использует реактивные двигатели и вращающиеся массы (роторы, гироскопы и т. д.). По сравнению с пассивным управлением оно обеспечивает

большую скорость затухания переходного процесса и точность, а также требуемое значение критерия качества.

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему S, состоящую из твердого тела с неподвижной точкой O и трех однородных симметричных роторов (рис. 2.1). Обозначим через $Ox_1x_2x_3$ неподвижную прямоугольную систему координат, а через $O\eta_1\eta_2\eta_3$ — систему координат, оси которой совмещены с главными осями инерции системы S относительно точки O. Предполагается, что оси вращения роторов совпадают с осями η_1, η_2, η_3. Система S называется *гиростатом*. Она характеризуется тем, что ее распределение масс не меняется в процессе движения. Вращение роторов осуществляется под действием двигателей, создающих управляющие моменты. На гиростат действуют внешние случайные силы, создающие случайные моменты.

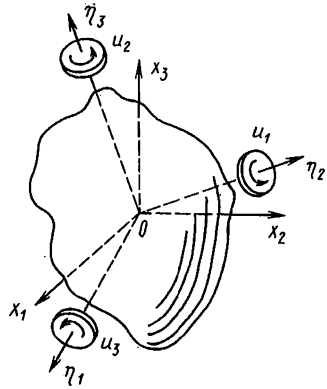


Рис. 2.1. Управление движением гиростата

Пусть p — вектор абсолютной угловой скорости системы S, рассматриваемой как одно твердое тело; z — абсолютный момент количества движения гиростата относительно точки 0. Управления движения в системе $0\eta_1\eta_2\eta_3$ имеют вид

$$\dot{z}+p\times z=\sigma\dot{\xi},\ t\geqslant 0, \qquad (2.1)$$

$$J_i(\dot{\omega}_i+\dot{P}_i)=-u_i,\ i=1,\ 2,\ 3. \qquad (2.2)$$

Здесь матрица $\sigma=(\sigma_{ij})$, где $i, j=1, 2, 3$, характеризующая интенсивность шумов, задана; J_i — осевые моменты инерции роторов; ω_i — их относительные угловые скорости; u_i — компоненты вектора управляющего момента u, создаваемого двигателями.

Случайный возмущающий момент $\dot{\xi}=(\dot{\xi}_1,\ \dot{\xi}_2,\ \dot{\xi}_3)$ представляет собой гауссовский белый шум; символ $\times$ означает векторное произведение. Уравнения (2.1), (2.2) описывают движение изучаемой механической системы. Исключим из уравнений (2.1), (2.2) угловые скорости вращения роторов ω_i. Заметим, что $z_i=c_ip_i+J_i\omega_i$, где c_i — момент инерции гиростата относительно оси η_i. В силу (2.1), (2.2) имеем

$$A_1\dot{p}_1=z_2p_3-z_3p_2+u_1+\sum_{j=1}^{3}\sigma_{1j}\dot{\xi}_j\ (1;\ 2;\ 3). \qquad (2.3)$$

Здесь (1; 2; 3) означает, что уравнения для p_2 и p_3 получаются циклической перестановкой индексов и, кроме того, положено $A_i=c_i-J_i>0$. Уравнения (2.1), (2.3) не содержат угловых скоростей

вращения роторов. Именно эти уравнения исследуются в дальнейшем.

Пусть имеется целевое ограниченное множество в $Ox_1x_2x_3$, содержащее O в качестве своей внутренней точки. Границу этого множества обозначим через Г, а внешность — через Q. Пусть $\tau_{pz}(u)$ — первый момент времени, когда угловая скорость $p(t) \in \Gamma$ при условии, что используется управление u и движение начинается при произвольных значениях угловой скорости $p \in Q$ и кинетического момента z.

Требуется выбрать управление u, удовлетворяющее ограничению

$$|u| = \left(\sum_{i=1}^{3} u_i^2 \right)^{1/2} \leqslant b, \; b > 0, \tag{2.4}$$

так, чтобы минимизировать выражение

$$M\tau_{pz}(u) \to \inf_u, \tag{2.5}$$

т. е. минимизировать среднее время достижения угловой скоростью $p(t)$ заданной окрестности нуля. В соответствии с этим поставлена задача об успокоении гиростата при случайных возмущениях.

2. Существование допустимого управления. Напомним, что управление u допустимо, если при этом управлении $M\tau_{pz}(u) < \infty$ для любых начальных значений p, z, т. е. если при этом управлении возможно успокоение гиростата за конечное среднее время.

Отметим, что при обосновании допустимости данного управления u без ограничения общности можно считать Г-сферой.

На основании леммы 1.1 для допустимости некоторого управления u в этом случае достаточно существования такой ограниченной снизу в Q функции $W(p, z)$ и такой постоянной $C > 0$, что при любых $p \in Q$ и z справедливо неравенство

$$L_u W(p, z) \leqslant -C. \tag{2.6}$$

В неравенстве (2.6) положено

$$\begin{aligned} L_u = {} & (z_2p_3 - z_3p_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + (z_3p_1 - z_1p_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + \\ & + (z_1p_2 - z_2p_1)\frac{\partial}{\partial z_3} + A_1^{-1}(z_2p_3 - z_3p_2 + u_1)\frac{\partial}{\partial p_1} + \\ & + A_2^{-1}(z_3p_1 - z_1p_3 + u_2)\frac{\partial}{\partial p_2} + A_3^{-1}(z_1p_3 - z_3p_1 + u_3)\frac{\partial}{\partial p_3} + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{j,\,l,\,k=1}^{3} \frac{1}{A_jA_l}\sigma_{jk}\sigma_{lk}\left(\frac{\partial^2}{\partial p_l \partial p_j} + A_jA_l\frac{\partial^2}{\partial z_l \partial z_j} + 2A_j\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial p_l}\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

В качестве функции W для системы (2.1), (2.3) возьмем

$$W=\varphi(p)-\alpha\varphi(p)^{-m},\ \varphi(p)=A_1p_1^2+A_2p_2^2+A_3p_3^2, \tag{2.8}$$

где положительные постоянные α и m будут выбраны ниже.

Предположим, что матрица σ невырождена, и с помощью функции (2.8) покажем, что допустимым является управление u_0, направленное в сторону, противоположную вектору угловой скорости, и равное

$$u_0=-pb|p|^{-1},\ |p|=\left(\sum_{l=1}^{3}p_l^2\right)^{1/2} \tag{2.9}$$

Вычисляя L_uW с учетом (2.7) — (2.9), получим

$$L_uW=-2b|p|+\sum_{j,\,k=1}^{3}\frac{1}{A_j}\sigma_{jk}^2+\alpha m\varphi(p)^{-m-1}\times$$

$$\times\left[-2|p|b+\sum_{j,\,k=1}^{3}\frac{1}{A_j}\sigma_{jk}^2-2(1+m)\varphi(p)^{-1}p'\sigma\sigma'p\right]. \tag{2.10}$$

Вследствие невырожденности матрицы σ при всех достаточно больших m квадратная скобка в (2.10) отрицательна для любого $p\in Q$. Выберем и зафиксируем какое-нибудь из указанных m. Далее, зададим некоторое достаточно большое число N такое, что

$$N>\frac{1}{2b}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{1}{A_j}\sigma_{jk}^2.$$

Ясно, что для всех p, $|p|\geqslant N$ и выбранного m правая часть (2.10) меньше некоторого отрицательного числа. Таким образом, оценку (2.6) остается установить лишь в области $Q\bigcap\{|p|\leqslant N\}$. Однако при $p\in Q\bigcap\{|p|\leqslant N\}$ функция $\varphi(p)$ равномерно ограничена. Следовательно, для этих p и выбранных m, N неравенство (2.6) удовлетворяется, если взять достаточно большое число α. Тем самым справедливость соотношения (2.6) установлена.

Поскольку, очевидно, функция (2.8) ограничена снизу в Q, управление (2.9) является допустимым.

Если возмущающие моменты в управлениях (2.3) отсутствуют, т. е. матрица $\sigma=0$, то управление (2.9) по-прежнему является допустимым, что обосновывается, как и выше, либо с помощью функции (2.8), либо с помощью более простой, равной $\varphi(p)$.

3. Построение оптимального управления. Рассмотрим теперь некоторые случаи, когда оптимальное управление и соответствующее ему значение времени (2.5) можно получить в явном виде. Пусть геометрия масс гиростата такова, что

$$A_1=A_2=A_3=A. \tag{2.11}$$

Предположим, что матрица диффузии σ — диагональная с одинаковыми элементами на диагонали, равными $\sqrt{\sigma_0}$, где число $\sigma_0 \geqslant 0$, а поверхность Γ есть сфера заданного радиуса r.

Вычислим при сделанных предположениях значение V_0 функционала (2.5) при управлении (2.9). Для этого определим последовательность функций W_N из соотношений

$$L_{u_0} W_N(p, z) = -1, \; r < |p| < N, \; z \in R_3,$$
$$W_N(p, z) = 0, \; |p| = r, \; |p| = N.$$

Вследствие допустимости управления u_0 имеем $V_0 = \lim\limits_{N \to \infty} W_N(p, z)$. Нетрудно проверить, что

$$W_N = \frac{2A^2}{\sigma_0} \left[\int_r^N q(t)\, dt \right]^{-1} \int_r^{|p|} q(t)\, dt \int_{|p|}^N q(t_1)\, dt_1 \int_t^{t_1} \frac{dt_2}{q(t_2)}, \tag{2.12}$$

где

$$q(t) = \left(\frac{r}{t}\right)^2 \exp\left[\frac{2Ab}{\sigma_0}(t - r)\right].$$

Поэтому, переходя к пределу при $N \to \infty$, заключаем, что

$$V_0(p) = \frac{A}{b}\left[|p| - r + \frac{\sigma_0}{Ab} \ln \frac{|p|}{r} + \frac{\sigma_0^2}{2A^2 b^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|p|}\right)\right], \; |p| \geqslant r. \tag{2.13}$$

Покажем теперь, что оптимальное управление задается формулой (2.9), а соответствующее ему минимальное значение времени (2.5) — выражением (2.13).

Для обоснования этого в шестимерном пространстве p, z рассмотрим последовательность функций V_N, определяемых как решение краевой задачи

$$\lim_{u, \, |u| \leqslant b} L_u V_N(p, z) = -1, \; r < |p| < N, \; z \in R_3,$$
$$V_N(p, z) = 0, \; |p| = r, \; |p| = N. \tag{2.14}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что решение задачи (2.14) имеет вид

$$V_N = \frac{2A^2}{\sigma_0} \int_r^{|p|} q(t)\, dt \int_t^{r_1} \frac{dt_1}{q(t_1)}, \; r \leqslant |p| \leqslant r_1,$$
$$V_N = \frac{2A^2}{\sigma_0} \int_{|p|}^N q_1(t)\, dt \int_{r_1}^t \frac{dt_1}{q_1(t_1)}, \; r_1 < |p| \leqslant N. \tag{2.15}$$

Здесь использованы обозначения (2.12) и равенство

$$q_1(t)=\left(\frac{r}{t}\right)^2 \exp\left[\frac{2Ab}{\sigma_0}(r-t)\right], \tag{2.16}$$

а $r_1(N)$ означает единственный корень уравнения

$$\int_r^{r_1} q(t)\,\mathrm{d}t \int_t^{r_1} \frac{\mathrm{d}u}{q(u)} = \int_{r_1}^{N} q_1(t)\,\mathrm{d}t \int_{r_1}^{t} \frac{\mathrm{d}u}{q_1(u)}. \tag{2.17}$$

Из представления (2.17) видно, что $\lim\limits_{N\to\infty} r_1(N)=\infty$. С учетом этого и равенств (2.12), (2.15), (2.16) заключаем, что

$$\lim_{N\to\infty} V_N = V_0(p), \tag{2.18}$$

где $V_0(p)$ определяется выражением (2.13).

Обозначим через $\gamma(u)=\tau_{pz}^N(u)$ момент первого достижения процессом (2.1), (2.3) границ Γ_N цилиндра $r\leqslant|p|\leqslant N$ при управлении u и начальных условиях $r\leqslant|p_0|\leqslant N$, z_0 произвольно, а через $p(t, u)$ — решение системы (2.3). Используя принцип динамического программирования и соотношения (2.14), (2.15), имеем

$$V_N=\inf_{u,\ |u|\leqslant b} M\gamma(u)=\inf_{|u|\leqslant b} Mr_{pz}^N(u).$$

Значит, функция V_N, определяемая формулами (2.15), есть минимальное среднее время достижения границы Γ_N.

Докажем теперь оптимальность управления (2.3) и соответствующего ему времени (2.13). Предположим, что при некотором допустимом управлении v для некоторых значений p_0, z_0 выполнено неравенство

$$M\gamma(v)<V_0(p_0). \tag{2.19}$$

Из формулы Ито следует, что

$$V_N(p(\gamma(v), v), z(\gamma(v), v))-V_N(p_0, z_0)=$$

$$=M\int_0^{\gamma(v)} L_v V_N(p(t, v), z(t, v))\,\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\geqslant M\int_0^{\gamma(v)} \inf_{u,\ |u|\leqslant b} L_u V_N(p(t, u), z(t, u)\,\mathrm{d}t=-M\gamma(v).$$

Следовательно, для любого N имеем

$$V_N(p_0, z)\leqslant M\gamma(v). \tag{2.20}$$

Из (2.20) и (2.18) вытекает соотношение $V_0(p_0) \leqslant M\gamma(\nu)$, которое противоречит (2.19). Тем самым оптимальность управления (2.9) установлена.

§ 3. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

В ряде реальных ситуаций нормальное функционирование системы происходит лишь тогда, когда ее координаты и скорости находятся в заданных пределах. Это приводит к различным задачам, связанным с максимизацией тех или иных критериев качества (например, вероятности достижения целевого множества, времени пребывания внутри заданной области фазовых координат и т. д.). Некоторые из этих задач изучаются в этом параграфе.

1. Постановка задачи и способ решения. Рассмотрим для системы (1.1) задачу управления с вероятностным критерием качества.

Пусть имеется ограниченное замкнутое целевое множество $Q \subset R_n$ с границей Г. Дополнение Q до R_n обозначим через Q_1. Пусть $\tau_x(u)$ — момент первого достижения Г системой (1.1) при управлении u и начальном условии $x(0)=x \in Q_1$. Назовем некоторое управление из (1.2) *допустимым*, если при этом управлении и произвольном $x(0) \in Q_1$ существует решение уравнения (1.1). Обозначим через $P(\cdot)$ вероятность события, заключенного в скобки.

Требуется выбрать среди допустимых управлений такое, которое максимизирует вероятность $P(\tau_x(u) < \infty)$, т. е. вероятность достижения за конечное время целевого множества Q при любом $x \in Q_1$.

Алгоритм построения оптимального управления в этой задаче подобен процедуре синтеза оптимального по быстродействию управления, изложенной в § 1. Опишем его без доказательства, которое имеется в [11]. С поставленной задачей управления свяжем следующую краевую задачу:

$$\sup_{u \in U} L_u V(x) = 0,\ x \in Q_1;\ V(x) = 1,\ x \in \Gamma. \tag{3.1}$$

Здесь оператор L_u определен формулой (1.4). Обычным образом устанавливается, что если функция

$$\sup_{u \in U} P(\tau_x(u) < \infty),\ x \in Q_1 \tag{3.2}$$

достаточно гладкая по x, то она удовлетворяет соотношениям (3.1). Однако даже в этом случае указанные соотношения, вообще говоря, не определяют функцию (3.2) ввиду возможной неединственности решения внешней краевой задачи (3.1). Кроме того, обычная процедура вычисления оптимального управления, состоящая в решении уравнения Беллмана и последующем нахождении оптимального управления, в поставленной задаче также не всегда осуществима, поскольку, например, возможны случаи,

когда функция (3.2) тождественно равна единице. Как и в § 1, обозначим через $S_N \subset R_n$ последовательность концентрических шаров радиуса N с границей S_N, причем $Q \subset S_N$, а последовательность функций $V_N(x)$ определяется соотношением

$$\sup_{u \in U} L_u V_N(x) = 0, \; x \in Q_1 \bigcap S_N,$$

$$V_N(x) = 1, \; x \in \Gamma, \; V_N(x) = 0, \; x \in S_N. \tag{3.3}$$

Отметим, что при ряде предположений существует, и притом единственное, решение краевой задачи (3.3) такое, что

$$1 > V_{N_2}(x) \geqslant V_{N_1}(x) > 0, \; x \in Q_1 \bigcap S_{N_1}, \; N_1 \geqslant N_2.$$

Последовательность $V_N(x)$ равномерно сходится к $V_0(x)$ при $N \to \infty$ на любом ограниченном множестве изменения аргумента x, а предел $V_0(x)$ есть минимальное положительное решение задачи (3.1).

Обозначим через $u_N(x)$ измеримую функцию, реализующую супремум в (3.3). Рассмотрим последовательность управлений $u_N(x)$, равных $u_N(x)$ при $x \in Q_1 \bigcap S_N$ и равных произвольной фиксированной постоянной из U при остальных значениях x. Тогда при любом допустимом управлении получим

$$J(x, u) = P(\tau_x(u) < \infty) \leqslant V_0(x).$$

Далее, если управления $u_N(x)$ допустимы, то $J(x, v_N) \to V_0(x)$ при $N \to \infty$, причем имеет место равномерная сходимость на любом ограниченном множестве изменения x. Далее, если в системе (1.1) использовать управление $v_N(x)$, то можно сколь угодно точно приблизиться к оптимальному значению $V_0(x)$ функционала (3.2) при достаточно большом N.

Рассмотрим некоторые свойства функции V_0. Как уже отмечалось, если $V_0 \equiv 1$, то задача (3.1) не определяет оптимального управления. Достаточным условием тождества $V_0 \equiv 1$ является существование единственного решения краевой задачи (3.1) в классе ограниченных функций, поскольку ограниченная функция $V_0(x)$ удовлетворяет соотношениям (3.1), а функция $V \equiv 1$ также есть решение (3.1).

Другим достаточным условием тождества $V_0 \equiv 1$ является существование при некотором допустимом управлении u такой неотрицательной функции W, что $L_u W(x) \leqslant -C$ при некоторой постоянной $C > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\lim_{|x| \to \infty} V_0(x) = 0. \tag{3.4}$$

Покажем, что при выполнении равенства (3.4) любое допустимое управление u_0, максимизирующее выражение $L_u V_0$, является оптимальным. Для этого воспользуемся формулой

$$MV_0(x(\tau_x^N(u_0), u_0)) - V_0(x) = 0. \tag{3.5}$$

Здесь $\tau_x^N(u)$ — момент первого выхода процесса $x(t, u)$ из области $Q_1 \bigcap S_N$ при начальном условии $x(0, u) = x \in Q_1 \bigcap S_N$. Представим первый член в (3.5) в виде

$$MV_0(x(\tau_x^N(u_0), u_0)) = \\ = P(x(\tau_x^N(u_0), u_0) \in \Gamma) + M_1 V_0(x(\tau_x^N(u_0), u_0)), \tag{3.6}$$

где символ M_1 означает, что математическое ожидание вычисляется по тем траекториям, для которых $x(\tau_x^N(u_0), u_0) \in S_N$.

Перейдем в равенстве (3.6) к пределу при $N \to \infty$. Тогда, учитывая соотношения (3.4) — (3.6), получим $J(x, u_0) = V_0$. Тем самым оптимальность управления u_0 на основании предыдущего установлена. Можно доказать, что достаточным условием (3.4) является существование такой положительной непрерывной функции W, для которой справедливы соотношения

$$\sup_{u \in U} L_u W(x) \leqslant 0, \; x \in Q_1, \; \lim_{|x| \to \infty} W(x) = 0.$$

2. Оптимальное управление движением материальной точки с вероятностным критерием качества. Пусть движение материальной точки описывается уравнениями (1.25). Рассмотрим задачу о синтезе оптимального управления u, максимизирующего вероятность достижения границы $x = 0$ раньше, чем границы $x = q_1$ ($q_1 > 0$ — заданное число), при условии, что в начальный момент времени движение системы (1.25) начинается из произвольной точки (x, y), причем $0 < x < q_1$. Обозначим через τ момент первого выхода системы (1.25) на границу области $0 \leqslant x \leqslant q_1$, а через $V(x, y)$ — функцию Беллмана, определяемую соотношением

$$V(x, y) = \sup_{u, \, |u| \leqslant b} P(x(\tau) = 0).$$

Уравнение для V в силу (3.1) имеет вид

$$yV_x + \sup_{u, \, |u| \leqslant b} (uV_y) + \frac{\sigma^2}{2} V_{yy} = 0, \; 0 < x < q_1, \; y \in (-\infty, \infty). \tag{3.7}$$

Заметим, что ни при каком управлении движение системы (1.25), начавшееся в полосе $0 < x < q_1$, не может закончиться на полупрямых $x = 0$, $y > 0$ и $x = q_1$, $y < 0$. Значит, на указанных полупрямых граничные условия для уравнения (3.7) задавать не следует. На лучах $x = 0$, $y \leqslant 0$ и $x = q_1$, $y \geqslant 0$ имеем

$$V(0, y) = 1, \; y \leqslant 0; \; V(q_1, y) = 0, \; y \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Из уравнений движения (1.25) следует, что в поставленной задаче оптимальное С-управление таково:

$$u_0(x, y) \equiv u_0 = -b.$$

Подставив управление u_0 в (3.7), получим

$$yV_x - bV_y + \frac{\sigma^2}{2} V_{yy} = 0,\ V(0, y) = 1,\ y \leqslant 0;\ V(q_1, y) = 0,\ y \geqslant 0.$$

С помощью замены переменных

$$y \to C_1 y,\ x \to C_2 x;\ C_1 = \frac{\sigma^2}{2} b^{-1},\ C_2 = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 b^{-3} \tag{3.9}$$

перепишем эти уравнения в виде

$$yV_x - V_y + V_{yy} = 0;\ V(0, y) = 1,\ y \leqslant 0;\ V(q, y) = 0,$$
$$q = q_1 C_2^{-1},\ y \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Для численного решения задачи (3.10) используем метод установления. Аппроксимируем функцию $V(x, y)$ функций $W(t, x, y)$, удовлетворяющей соотношениям

$$W_t + yW_x - W_y + W_{yy} = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant q,\ -T \leqslant t \leqslant 0,$$
$$W(t, q, y) = 0,\ t \leqslant 0,\ y \geqslant 0,\ W(t, 0, y) = 1,\ t \leqslant 0,\ y \leqslant 0,$$
$$W(0, x, y) = 0,\ x > 0,\ -\infty < y < \infty. \tag{3.11}$$

Отметим, что функция $W(t_0, x_0, y_0)$ есть вероятность достижения прямой $x = 0$ раньше, чем прямой $x = q$, системой (1.25), движущейся на отрезке $[-T, 0]$, при $u = -1$, $\sigma = 1$, если движение начинается в момент t_0 из точки x_0, y_0, причем $0 < x_0 < q$. Значит,

$$W(-T, x, y) \to V(x, y) \text{ при } T \to \infty.$$

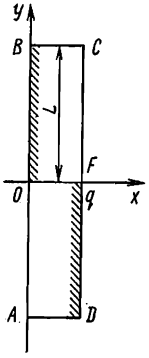


Рис. 3.1. Вид регулярных участков границы в задаче управления с вероятностным функционалом

Определим $W(t, x, y)$ при $-T \leqslant t \leqslant 0$ и x, y из прямоугольника $ABCD$, изображенного на рис. 3.1, где $BC = OF = AD = q$, $OB = OA = L$. При $L \to \infty$ область $ABCD$ превращается в полосу $0 \leqslant x \leqslant q$.

Зададим условия на границах области $ABCD$.

С учетом условия (3.11) и вероятностного смысла функции W имеем

$$W(t, x, y) = 1,\ t < 0,\ (x, y) \in OAD,$$
$$W(t, x, y) = 0,\ t \leqslant 0,\ (x, y) \in BCF. \tag{3.12}$$

Из недостижимости системой (1.25) лучей $x = 0$, $y > 0$ и $x = q$, $y < 0$ следует, что на этих лучах граничные условия не задаются. Недостижимая часть границы на рис. 3.1 заштрихована. При $t = 0$ в силу (3.11) имеем

$$W(0, x, y) = 0,\ x > 0;\ W(0, 0, y) = 1,\ y \leqslant 0. \tag{3.13}$$

Схема численного решения задачи (3.10) — (3.13) та же, что и в п. 5 из § 1. Здесь же приведем результаты

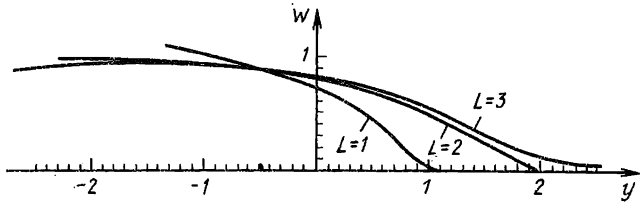


Рис. 3.2. Характер установления функции Беллмана

счета. На рис. 3.2 показан характер сходимости функции W по L после того, как установление по T уже произошло при $q=1$, $x=0{,}5$. Рис. 3.2 показывает, что стабилизация по L наступает уже при значении $L=3$. На рис. 3.3 изображены линии уровня функции $W(-T, x, y)$ при $T=10$, $L=3$, $q=1$, когда решение задачи (3.11) — (3.13) вышло на стационарный уровень как по t, так и по L. Значит, линии уровня на рис. 3.3 практически совпадают с линиями уровня искомой функции Беллмана $V(x, y)$. Результаты расчетов, приведенные на рис. 3.3, показывают, что максимальная вероятность достижения материальной точкой прямой $x=0$ раньше, чем прямой $x=q$, уменьшается как с увеличением скорости при фиксированной координате, так и при фиксированной скорости с ростом координаты.

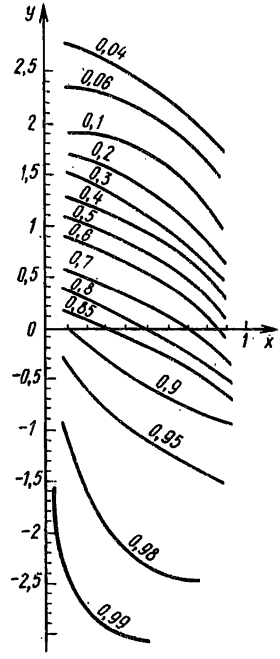


Рис. 3.3. Линии уровня функции Беллмана

3. Максимизация вероятности пребывания точки в заданной области. Рассмотрим управляемое движение материальной точки (1.25), начинающееся в момент $t=0$ из произвольного положения $(x, y)\in Q$. Требуется выбрать С-управление $u=u(x, y)$, максимизирующее вероятность пребывания внутри Q на заданном отрезке времени $0\leqslant t\leqslant T_1$. Уравнение Беллмана для этой задачи имеет вид

$$V_t+yV_x+\sup_{u,\ |u|\leqslant b} uV_y+\frac{\sigma^2}{2}V_{yy}=0.$$

Произведем здесь замену фазовых координат по формулам (3.9) и замену времени по формуле $t\to 2^{-1}\sigma^2 b^{-2}t$. Пусть область Q в новых переменных имеет вид квадрата $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$ (рис. 3.4). Уравнение Беллмана в новых переменных имеет вид

$$V_t+yV_x+|V_y|+V_{yy}=0,\ 0\leqslant t\leqslant T=2b^2\sigma^{-2}T_1. \qquad (3.14)$$

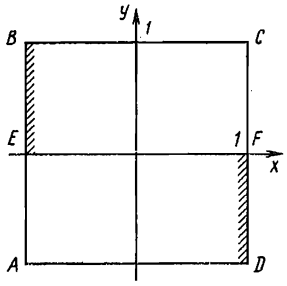


Рис. 3.4. Вид недостижимых участков границы в задаче о максимизации вероятности нахождения системы в области

При $t=T$ внутри Q справедливо начальное условие

$$V(T, x, y)=1,$$
$$|x|<1,\ |y|<1. \qquad (3.15)$$

При начале движения строго внутри квадрата Q куски границы BE и FD недостижимы. На рис. 3.4 недостижимая часть границы квадрата Q заштрихована. На заштрихованной части границы граничные условия для уравнения (3.14) не задаются. Для точек $(x, y)\in BCF\bigcup EAD$ справедливо соотношение

$$V(t, x, y)=0,$$
$$0\leqslant t\leqslant T. \qquad (3.16)$$

После вычисления решения V задачи (3.14) — (3.16) оптимальное управление u_0 выражается формулой

$$u_0(t, x, y)=\operatorname{sign} V_y(t, x, y). \qquad (3.17)$$

Задача (3.14) — (3.16) решалась численно с использованием метода дробных шагов при следующих значениях параметров: $T=1$; шаг сетки по координатам 0,1; шаг по времени 0,01. Результаты расчетов приведены на рис. 3.5. На левой части рисунка изображены линии уровня функции $V(t, x, y)$ при $t=0{,}5$; на правой части рисунка — линии переключения оптимального управления u_0 при $t=0{,}5$ и $t=0{,}9$. Вследствие центральной симметрии задачи для определения V и u_0 в другой части квадрата достаточно использовать соотношения

$$V(t, x, y)=V(t, -x, -y);\ u_0(t, x, y)=-u_0(t, -x, -y).$$

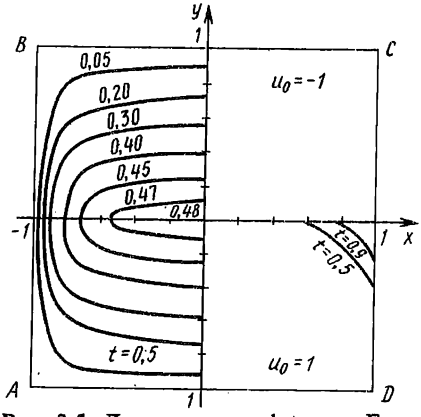


Рис. 3.5. Линии уровня функции Беллмана (слева) и линия переключения оптимального управления (справа)

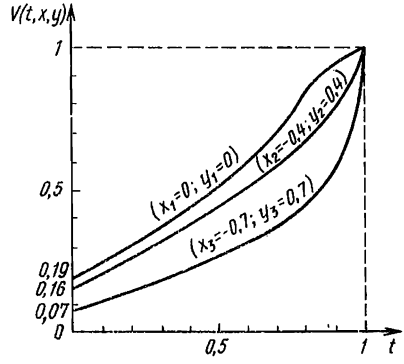


Рис. 3.6. Графики функции Беллмана

На рис. 3.6 изображена зависимость V от времени для трех фиксированных точек квадрата со следующими координатами: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=-0{,}4$, $y_2=0{,}4$; $x_3=-0{,}7$, $y_3=-0{,}7$.

4. Управление по вероятности движением математического маятника. Движение математического маятника, подверженного случайным возмущениям, описывается уравнениями

$$\dot{x}(t)=y(t),$$
$$dy(t)=[-a^2x(t)+u(x, y)]\,dt+\sigma\,d\xi(t)+\gamma\,d\omega(t),\ t\geqslant 0. \quad (3.18)$$

Здесь x — координата; y — скорость; $\xi(t)$ и $\omega(t)$ — независимые между собой стандартный винеровский и пуассоновский процессы; $M\omega(t)=\lambda t$; управление $u(x, y)$ подчинено условию $|u|\leqslant b$; постоянные a, b, σ, γ, λ заданы. Движение системы (3.18) начинается в момент времени $t=0$ из положения (x, y), принадлежащего заданной ограниченной области Q. Требуется выбрать управление, при котором вероятность пребывания системы (3.18) в области Q на заданном отрезке времени $[0, T]$ была бы максимальна.

Обозначим через $V(t, x, y)$ функцию Беллмана этой задачи, равную максимуму по u вероятности пребывания системы (3.18) в Q на отрезке $[t, T]$ при условии, что $(x(t), y(t))=(x, y)\in Q$.

Произведем замену переменных по формулам

$$t\to\frac{\sigma^2}{2b^2}t,\ x\to\frac{\sigma^4}{4b^3}x;\ y\to\frac{\sigma^2}{2b}y,\ u\to bu,$$
$$a^2\to\frac{4b^4}{\sigma^4}a^2,\ \lambda\to\frac{2b^2}{\sigma^4}\lambda,\ \gamma\to\frac{\sigma^2}{2b}\gamma,\ T\to\frac{\sigma^2}{2b^2}T.$$

В новых переменных уравнение для функции V имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}+y\frac{\partial V}{\partial x}-a^2x\frac{\partial V}{\partial y}+\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+$$
$$+\lambda(V(t, x, y+\gamma)-V(t, x, y))=0,\ t\in[0, T]. \quad (3.19)$$

Уравнение (3.19) решается в квадрате $Q=ABCD$ (см. рис. 3.4). Участки BE и FD границы Q недостижимы. Поэтому на них граничные условия задавать не следует. Для остальных точек границы области Q граничные условия имеют вид

$$V(t, x, y)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ (x, y)\in EAD\bigcup BCF. \quad (3.20)$$

Начальное условие задается равенством

$$V(T, x, y)=1,\ |x|<1,\ |y|<1. \quad (3.21)$$

Оптимальное управление рассматриваемой задачи определяется соотношением $u_0(t, x, y)=\operatorname{sign} V_y(t, x, y)$ вида (3.17). Для численного решения задачи (3.19) — (3.21), как и выше, использован метод дробных шагов. Приведем результаты расчетов при $T=1$, шаге аппроксимации по времени 0,01. Результаты расчетов представлены

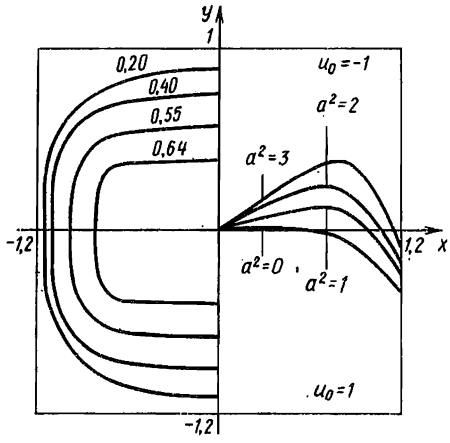


Рис. 3.7. Линия переключения и линии уровня функции Беллмана для задачи управления математическим маятником

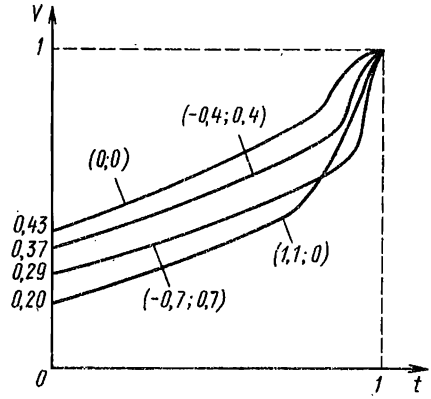


Рис. 3.8. Графики максимального значения вероятности

на рис. 3.7, где изображены линии переключения оптимального управления (справа) при $t=0{,}6$ для различных значений a^2 ($a^2=0$; 1; 2; 3), а также линии уровня функции $V(t, x, y)$ (слева) при $t=0{,}5$, $a^2=1$.

Для построения линии переключения оптимального управленияи и линий уровня функции $V(t, x, y)$ в другой половине квадрата достаточно заметить, что $V(t, x, y)=V(t, -x, -y)$, $u_0(t, x, y)=-u_0(t, -x, -y)$. На рис. 3.8 показана зависимость функции $V(t, x, y)$ от времени для четырех фиксированных точек с координатами (0; 0), (−0,4; 0,4), (−0,7; −0,7) (1,1; 0) при $a^2=1$. Отметим, что линии уровня функции $V(t, x, y)$ и ее зависимость от t при фиксированных (x, y) для различных a^2 качественно не меняются.

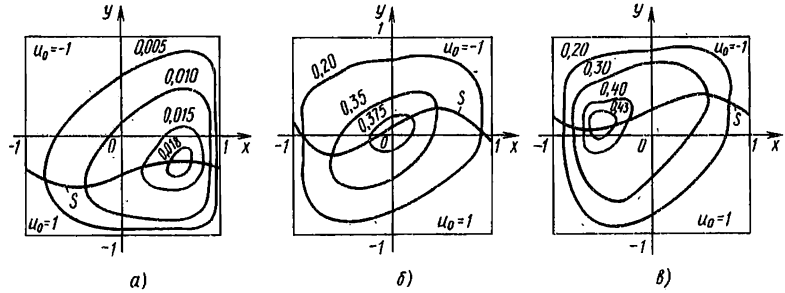


Рис. 3.9. Зависимость линий уровня функции Беллмана и линии переключения S оптимального управления от величины импульсного возмущения: а) $\lambda=10$, $\gamma=10$, $a^2=3$, $t=0{,}5$; б) $\lambda=10$, $\gamma=2$, $a^2=3$, $t=0{,}5$; в) $\lambda=1$, $\gamma=-10$, $a^2=3$, $t=0{,}5$

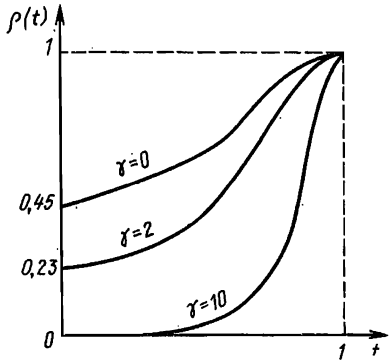


Рис. 3.10. Зависимость максимума функции Беллмана от величины импульсного возмущения

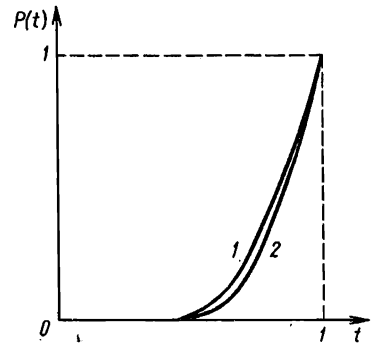


Рис. 3.11. Зависимость максимума критерия качества от времени

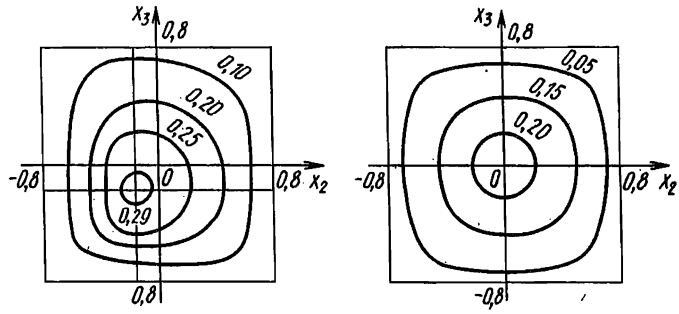


Рис. 3.12. Линии уровня Беллмана: а) $a_2=2$, $a_3=3$, $a_1=b_i=\varepsilon_i=1$ $(i=1, 2, 3)$; б) $a_2=2$, $a_1=a_3=b_1=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$, $b_2=b_3=0$

Пусть теперь $\gamma\neq 0$. Центральная симметрия линий уровня и линии переключения при этом нарушается (рис. 3.9, где $\lambda=10$, $\gamma=10$, $a^2=3$, $t=0{,}5$); на рис. 3.9 замкнутые кривые — линии уровня функции V, а линия переключения оптимального управления отмечена буквой S. Однако рассматривая V как функцию от γ, получим $V(t, x, y, \gamma)=V(t, -x, -y, -\gamma)$. Таким образом, при изменении знака γ картина отображается симметрично относительно начала координат. При $\gamma>0$ линия переключения опускается вниз (относительно оси Ox), при $\gamma<0$ поднимается вверх (рис. 3.10, где $\lambda=10$, $\gamma=2$, $a^2=3$, $t=0{,}5$; рис. 3.11, где $\lambda=1$, $\gamma=-10$, $a^2=3$, $t=0{,}5$). С увеличением γ (по абсолютной величине) функция $\rho(t)=\sup_{(x, y)\in S_0} V(t, x, y)$ при $t\to 0$ убывает быстрее (рис. 3.10, где $\lambda=10$). То же происходит с увеличением λ при постоянном γ.

5. Управление твердым телом с вероятностным критерием качества. Рассмотрим управляемое движение твердого тела под действием случайных возмущений. Пусть x_i — компоненты кинетического момента x относительно жестко связанной с телом системы координат, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции тела. Уравнения движения Эйлера имеют вид (1.12):

$$dx_1=\left(\frac{a_2-a_3}{a_2a_3}x_2x_3+u_1\right)dt+\sigma_1\,d\xi_1(t),\ a_i>0\ (1;\ 2;\ 3). \qquad (3.22)$$

Управление u_i подчинено ограничению $|u_i|\leqslant b_i$; через $\xi_i(t)$ обозначены стандартные винеровские процессы; наконец, σ_i и b_i — заданные постоянные. Движение системы (3.22) начинается в момент времени $t=0$ из точки x, принадлежащей ограниченной области $Q\subset R_3$. Задача заключается в выборе управлений u_i, максимизирующих вероятность пребывания системы (3.22) в области Q в течение отрезка времени $[0,\ T]$, где $T>0$ задано.

Уравнение Беллмана для поставленной задачи имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(a_2-a_3)(a_2a_3)^{-1}x_2x_3\frac{\partial V}{\partial x_1}+(a_3-a_1)(a_1a_3)^{-1}x_3x_1\frac{\partial V}{\partial x_2}+$$

$$+(a_1-a_2)(a_2a_1)^{-1}x_1x_2\frac{\partial V}{\partial x_3}+\sum_{i=1}^{3}\left[\varepsilon_i\frac{\partial^2V}{\partial x_i^2}+b_i\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\right]=0,\ \varepsilon_i=\frac{\sigma_i^2}{2},$$

$$V(t,\ x)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\Gamma,\ V(T,\ x)=1,\ x\in Q\setminus\Gamma. \qquad (3.23)$$

Оптимальные управления задаются соотношениями

$$u_{0i}=b_i\operatorname{sign}\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Уравнение (3.23) было решено в кубе Q с центром в начале координат и стороной 1,6. Алгоритм счета тот же, что и в п. 4. Расчеты проводились при шаге аппроксимации по координатам 0,1 и по времени 0,01.

Приведем результаты расчетов для некоторых конкретных случаев.

Случай 1. $a_2=2$, $a_3=3$, $a_1=b_i=\varepsilon_i=1$ $(i=1,\ 2,\ 3)$.

Случай 2. $a_2=2$, $a_1=a_3=b_1=\varepsilon_i=1$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, $b_2=b_3=0$.

Линией переключения для управления u_i в случае 1 является плоскость $x_i=-0{,}2$ при всех $i=1,\ 2,\ 3$. В случае 2 переключение управления u_1 происходит на плоскости $x_1=-0{,}2$. На рис. 3.11 показана зависимость от времени функции

$$p(t)=\sup_{x_2,\ x_3}V(t,\ 0,\ x_2,\ x_3).$$

Цифра 1 соответствует случаю 1, цифра 2 — случаю 2. Линиями уровня функции $V(t, x_1, x_2, x_3)$ являются вложенные друг в друга поверхности. На рис. 3.12, *а* изображены сечения этих поверхностей плоскостью $x_1=0$ при $t=0{,}8$ для случая 1, а на рис. 3.12, *б* — для случая 2.

Случай 3. $a_1=a_3=b_2=\sigma_2=1$, $a_2=2$, $b_1=b_3=\varepsilon_1=\varepsilon_3=0$.

На рис. 3.13 показано сечение поверхностей уровня функции $V(t, x_1, x_2, x_3)$ для случая 3 при $t=0{,}91$, $x_1=-0{,}7$, а также линия переключения оптимального управления в плоскости $x_1=-0{,}7$, отмеченная буквой S.

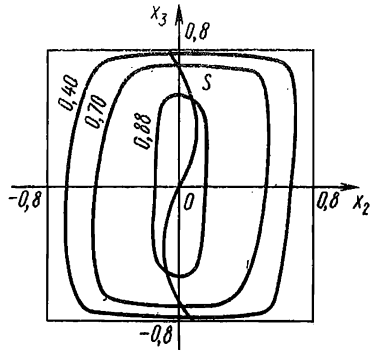


Рис. 3.13. Сечение поверхностей уровня функции Беллмана и линия переключения оптимального управления

В случае 3 при фиксированных b_i и σ_i были произведены расчеты для различных a_i. Во всех случаях картина линий уровня и линий переключения качественно одинакова.

6. Максимизация среднего времени пребывания системы внутри заданной области. Синтез оптимального управления движением твердого тела. В тех случаях, когда нормальное функционирование системы (1.1) происходит только внутри некоторой области Q, наряду с вероятностным критерием качества, рассмотренным выше, представляют интерес также и задачи, в которых требуется максимизировать математическое ожидание времени достижения системой границ Г области Q.

Управления $u(x)$, обеспечивающие существование решения уравнения (1.1) и принимающие значения из U, называются *допустимыми*.

Пусть $\tau_x(u)$ означает момент первого достижения границы Г системой (1.1) при управлении u и начальном условии $x(0)=x$. Задача состоит в выборе допустимого управления, при котором для любого $x\in Q$ максимизируется функционал $M\tau_x(u)$, представляющий собой среднее время выхода системы (1.1) из области Q.

Уравнение Беллмана для поставленной задачи имеет вид

$$\sup_{u\in U} L_u V(x)=-1,\ x\in Q,\ V(x)=0,\ x\in\Gamma, \qquad (3.24)$$

где оператор L_u определен формулой (1.4).

Изложим метод последовательных приближений для решения краевой задачи (3.24). Возьмем произвольное допустимое управление u_1 (первое приближение к оптимальному) и определим функцию V_1 как решение линейной задачи

$$V_{u_1}V_1=-1,\ x\in Q;\ V_1(x)=0,\ x\in\Gamma.$$

Построим далее последовательность u_i, V_i с помощью рекуррентных соотношений

$$L_{u_i}V_i(x)=-1,\ x\in Q,$$

$$V_i(x)=0,\ x\in\Gamma,\ \sup_{u\in U}u'B'\frac{\partial V_i(x)}{\partial x}=u_{i+1}'(x)\,B'\frac{\partial V_i(x)}{\partial x}.$$

Можно показать, что последовательность V_i сходится к решению задачи (3.24), причем $V_{i+1}(x)\geqslant V_i(x)$.

Рассмотрим управляемое движение твердого тела относительно центра масс под действием управляющих моментов и случайных возмущающих сил типа гауссовского белого шума.

Уравнения движения в проекциях на оси инерции имеют вид (1.12), (1.13). В начальный момент движения модуль кинетического момента удовлетворяет условию $|x(0)|<r$. С помощью выбора управления требуется максимизировать среднее время до момента первого достижения кинетическим моментом значения $|x|=r$ при произвольном $x(0)$, $|x(0)|<r$.

Уравнения (3.24), определяющие максимальное среднее время и оптимальное С-управление, в данном случае имеют вид

$$S(V)=\left[\frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2V}{\partial x_i^2}+\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2x_3(a_2-a_3)(a_2a_3)^{-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V}{\partial x_2}x_1x_3(a_3-a_1)(a_1a_3)^{-1}+\frac{\partial V}{\partial x_3}x_1x_2(a_1-a_2)(a_1a_2)^{-1}\right],$$

$$S(V)+\sup_u u'\frac{\partial V}{\partial x}=-1,$$

$$V(x)=0 \text{ при } |x|=r. \tag{3.25}$$

Решением этой краевой задачи является функция

$$V_0(x)=\frac{2}{\sigma^2}\int_{|x|}^{r}z(t)\,\mathrm{d}t\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{z(s)}, \tag{3.26}$$

где

$$z(t)=\exp\left(\int_t^r\frac{2}{\sigma^2}\left(-b+\frac{\sigma^2}{s}\right)\mathrm{d}s\right). \tag{3.27}$$

Подставим (3.26) в (3.25) и найдем такое $u_0(x)$, которое максимизирует левую часть (3.25). При $x\neq0$ имеем

$$u_0(x)=-bx|x|^{-1}. \tag{3.28}$$

При $x=0$ функция $V_0(x)$ имеет равную нулю производную и поэтому в точке $x=0$ не определяет управления. Покажем, однако, что справедливы следующие утверждения.

1^0. Если $x(0)\neq 0$, то при управлении (3.28) вероятность достижения системой (1.12) нуля раньше, чем значения $|x|=r$, равна 0.

2^0. Если $x(0)=0$, то при любом допустимом управлении система (1.12) за сколь угодно малое среднее время покинет точку O, а следовательно, в силу утверждения 1^0 с вероятностью 1 система достигнет поверхности $|x|=r$ раньше, чем снова вернется в начальную точку.

Из утверждений 1^0 и 2^0 следует, что значение управления в точке O не играет никакой роли в рассматриваемых вопросах и потому управление (3.28) — оптимальное.

Для обоснования утверждения 1^0 возьмем число $\varepsilon>0$ и вычислим вероятность $\omega(x)$ достижения системой (1.12) поверхности $|x|=\varepsilon$ раньше, чем $|x|=r$, при управлении (3.28) и начальном условии $x=x(0)$, $\varepsilon\leqslant|x(0)|\leqslant r$. Функция $\omega(x)$ есть решение задачи Дирихле

$$S(\omega)-b\frac{x'}{|x|}\frac{\partial\omega}{\partial x}=0,\ \omega(x)=1 \text{ при } |x|=\varepsilon;\ \omega(x)=0 \text{ при } |x|=r,$$

где $S(\omega)$ определено выражением в квадратных скобках в (3.25). Вычисляя, для $x(\varepsilon\leqslant|x|\leqslant r)$ получаем

$$\omega(x)=\int_{|x|}^{r} z(s)\,\mathrm{d}s\left[\int_{\varepsilon}^{r} z(s_1)\,\mathrm{d}s_1\right]^{-1} \tag{3.29}$$

где функция $z(t)$ задается равенством (3.27). Из (3.27), (3.29) заключаем, что $\omega(x)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Докажем теперь утверждение 2^0. Пусть $u(x)$ — любое допустимое управление, а $\tau_u(\varepsilon)=\beta$ — момент первого выхода из шара $|x|\leqslant\varepsilon$ системы (1.12) при управлении u и нулевом начальном условии. Так как $M\beta<\infty$, то, применяя формулу Ито, получим

$$V_0(\beta)-V_0(0)=M\int_0^{\beta} L_u V_0(x(t,u))\,\mathrm{d}t\leqslant M\int_0^{\beta}\sup_{|u|\leqslant b} L_u V_0(x(t,u))\,\mathrm{d}t=-M\beta.$$

Следовательно, в силу соотношения (3.26) и определения β имеем

$$M\beta\leqslant\frac{2}{\sigma^2}\int_0^{\varepsilon} z(t)\,\mathrm{d}t\int_0^{t}\frac{\mathrm{d}s}{z(s)}.$$

Отсюда, а также из равенства (3.27) и произвольности числа ε вытекает справедливость утверждения 2^0. Таким образом установлено, что в задаче управления движением твердого тела оптимальное управление задается формулой (3.28).

Формула (3.28) показывает, что оптимальное управление максимально по величине и направлено в сторону, противоположную вектору кинетического момента. Среднее время достижения модулем кинетического момента предельного значения r определяется формулой (3.26).

Основные результаты и формулы главы X

Задача быстродействия:

$$dx(t)=[f(x)+Bu(x)]\,dt+\sigma(x)\,d\xi,\ x(0)=x_0,$$

$$M\tau_x(u)\to\inf_{u\in U};\ x\in R_n\setminus Q$$

уравнение Беллмана

$$\inf_{u\in U}[L_uV(x)+1]=0,\ x\in R_n\setminus Q,$$

$$V(x)=0,\ x\in\Gamma,$$

$$L_uV=(f+Bu)'V_x+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\sigma\sigma'V_{xx});$$

оптимальное управление $u_0(t, x)$ есть решение уравнения

$$\inf_{u\in U}L_uV_0(x)=L_{u_0}V_0(x),$$

где $V_0(x)$ — минимальное положительное решение внешней краевой задачи для уравнения Беллмана.

Задачи с вероятностным функционалом:

$$P(\tau_x(u)<\infty)\to\sup_{u\in U};$$

уравнение Беллмана

$$\sup_{u\in U}L_uV(x)=0,\ x\in R_n\setminus Q,$$

$$V(x)=1,\ x\in\Gamma.$$

ГЛАВА XI

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

В этой главе рассмотрены задачи оптимального в среднеквадратическом смысле оценивания при различных предположениях о наблюдаемом и ненаблюдаемом процессах. Рассмотрен фильтр Калмана и исследованы его свойства. Изучены задачи оптимальной интерполяции и экстраполяции.

§ 1. ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

1. Постановка задач оптимального оценивания. Задачи оптимального оценивания могут быть описаны следующим образом. Имеется случайный процесс $x(t) \in R_n$, моделирующий движение системы. Непосредственному наблюдению (измерению) процесс $x(t)$ недоступен. Однако возможно измерять другой процесс $y(t)$, несущий некоторую информацию о координатах системы $x(t)$. Требуется по результатам наблюдений за процессом $y(t)$ на отрезке $[t_0, T]$, где $T > t_0$, построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $m(\tau)$ вектора $x(\tau)$.

В зависимости от соотношения между моментами времени τ и T принято различать следующие задачи: *задачу фильтрации*, если $\tau = T$; *задачу экстраполяции*, если $\tau > T$; *задачу интерполяции*, если $\tau < T$. Оценка $m(\tau)$ называется *наилучшей в среднеквадратическом смысле*, если

$$M\|x(\tau) - m(\tau)\|^2 = \min_F M\|x(\tau) - F(y_T)\|^2. \tag{1.1}$$

Здесь минимум вычисляется по всевозможным измеримым функционалам F, положено $\|x\|^2 = x'x$ и предполагается, что случайные величины $x(\tau)$ и $F(y_T)$ имеют конечные моменты второго порядка. Символ y_T означает совокупность результатов наблюдений $y(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Из определения (1.1) наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки $m(\tau)$ вытекает, что

$$m(\tau) = Mx(\tau)/y_T. \tag{1.2}$$

Действительно, положим $\gamma(\tau) = Mx(\tau)/y_T$. Тогда

$$M\|x(\tau) - F(y_T)\|^2 = M\|x(\tau) - F(y_T) + \gamma(\tau) - \gamma(\tau)\|^2 = M\|x(\tau) - \gamma(\tau)\|^2 + \\ + M\|\gamma(\tau) - F(y_T)\|^2 + 2M(x(\tau) - \gamma(\tau))'(\gamma(\tau) - F(y_T)). \tag{1.3}$$

Кроме того, в силу свойств условного математического ожидания имеем

$$M(x(\tau) - \gamma(\tau))'(\gamma(\tau) - F(y_T)) = M[M(x(\tau) - \gamma(\tau))'(\gamma(\tau) - F(y_T))/y_T] = \\ = M[(M(x(\tau) - \gamma(\tau))'/y_T)(\gamma(\tau) - F(y_T))] = \\ = M(\gamma(\tau) - \gamma(\tau))'(\gamma(\tau) - F(y_T)) = 0.$$

Отсюда и из (1.3) следует равенство

$$M\|x(\tau)-F(y_T)\|^2=M\|x(\tau)-\gamma(\tau)\|^2+M\|\gamma(\tau)-F(y_T)\|^2. \quad (1.4)$$

Заметим теперь, что функционал F ввиду (1.1) выбирается из условия минимума по F левой части равенства (1.4), а в правой части указанного равенства от F зависит только второе слагаемое. Но это слагаемое неотрицательно и обращается в нуль при $F=\gamma(\tau)$. Отсюда и из определения $\gamma(\tau)$ вытекает справедливость соотношения (1.2).

Таким образом, решение задачи оценивания в весьма общей ситуации задается формулой (1.2). Однако использование этой формулы в реальных ситуациях сопряжено со значительными трудностями, связанными со сложностью вычисления входящего в нее условного математического ожидания. Вместе с тем при дальнейших ограничениях на исходные данные задачи оценивания ее решение иногда удается получить в замкнутом виде. Ниже это решение излагается в следующих трех случаях: линейное оценивание; оценивание гауссовских величин; фильтр Калмана — Бьюси.

2. Линейное оценивание. *Задача линейного оценивания* состоит в определении наилучшего линейного функционала F, при котором минимально среднеквадратичное отклонение вектора $x(\tau)$ от его линейной оценки $F(y_T)$.

Рассмотрим эту задачу в предположении, что $x(\tau)$ и $y(t)$ имеют конечные вторые моменты. Для построения наилучшей линейной оценки вектора $x(\tau)$ по результатам наблюдений за процессом $y(t)$ на отрезке $[0, T]$ рассмотрим гильбертово пространство H_0 случайных векторов $\alpha\in R_n$ с конечным вторым моментом и гильбертово пространство H, которое представляет собой замкнутую линейную оболочку величин $y(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$ (т. е. результатов наблюдения) и единичного вектора. Скалярное произведение двух элементов α и β из H равно $M\alpha'\beta$. Напомним, что *гильбертовым пространством* называется полное линейное пространство с заданным в нем скалярным произведением. Наилучшая линейная оценка x_0 вектора x представляет собой тот элемент из гильбертова пространства H, который отстоит от x на минимальное расстояние. Таким образом, вектор x_0 может быть определен из уравнения

$$\min_{\alpha\in H} M\|x-\alpha\|^2=M\|x-x_0\|^2. \quad (1.5)$$

На основании [3] уравнение (1.5) имеет, и притом единственное, решение x_0, причем x_0 является проекцией x на H. Элемент $x_0\in H$ определяется единственным образом из уравнения

$$M(x-x_0)'\alpha=0,\ \forall\alpha\in H. \quad (1.6)$$

При этом ошибка оценивания, равная квадрату длины перпендикуляра, опущенного из конца вектора x на H, имеет вид $\delta=M|x|^2-M|x_0|^2$. Полагая в (1.6) элемент α равным единичному

вектору, получаем, что $Mx=Mx_0$. Следовательно, оптимальная линейная оценка является несмещенной.

В общем случае оптимальная линейная оценка может оказаться неудовлетворительной, как показывает следующий пример. Пусть в дискретные моменты времени $k\neq l$ наблюдается случайная величина $\xi(k)=\exp(i\varphi k)$, где $i=\sqrt{-1}$, а случайная величина φ равномерно распределена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Требуется по результатам наблюдений $\xi(k)$, $k\neq l$, построить оценку величины $\xi(l)$. Так как $M\xi(k)\xi(l)=0$ при $k\neq l$, то наилучшая линейная оценка в силу (1.6) равна нулю и от результатов наблюдений вообще не зависит. В то же время достаточно произвести только одно наблюдение $\xi(k)$ в любой момент времени k, как вся последовательность $\xi(l)$ восстанавливается по формуле $\xi(l)=[\xi(k)]^{l/k}$.

3. Оптимальное оценивание гауссовских величин. Будем считать, что кроме уже наложенных ограничений случайные величины x и $y(t)$, где $0\leqslant t\leqslant T$, имеют совместное гауссовское распределение вероятностей и нулевые математические ожидания. Тогда из уравнения (1.6), определяющего оптимальную линейную оценку x_0, вытекает независимость случайных величин $x-x_0$ и $y(t)$. Значит,

$$Mx/y_T=M(x-x_0+x_0)/y_T=M(x-x_0)/y_T+Mx_0/y_T=\\=M(x-x_0)+x_0=x_0.$$

Таким образом, в гауссовском случае наилучшая в среднеквадратическом смысле оценка x по результатам наблюдений y_T (равная Mx/y_T) совпадает с наилучшей линейной оценкой x_0.

4. Линейное оценивание стационарных процессов. Рассмотрим задачу оптимального линейного оценивания процесса $x(t+T)$, $T\geqslant 0$ по результатам наблюдений за $y(s)$ при $-\infty\leqslant s\leqslant t$ в предположении, что скалярные процессы $x(t)$ и $y(t)$ стационарны в широком смысле и стационарно связаны. Последнее означает, что математические ожидания процессов $x(t)$ и $y(t)$ постоянны (и без ограничения общности полагаются равными нулю), вторые моменты процессов x, y конечны, а корреляционные функции зависят только от разности аргументов, т. е.

$$R_{xx}(t-s)=Mx(t)x(s),\ R_{yy}(t-s)=My(t)y(s),\\R_{xy}(t-s)=Mx(t)y(s). \tag{1.7}$$

Функции R_{xx}, R_{yy}, R_{xy} считаются заданными. Наилучшую линейную оценку $x_0(t+T)$ процесса $x(t+T)$ по результатам наблюдений y_t будем искать в виде

$$x_0(t+T)=\int_{-\infty}^{t}k(t, s)y(s)\,ds. \tag{1.8}$$

Ядро $k(t, s)$ оценки (1.8) подлежит определению. Используем для этого уравнение (1.6). В соответствии с этим уравнением справедливо соотношение

$$Mx_0(t+T)y(s)=Mx(t+T)y(s),\ s\leqslant t.$$

Подставляя в него выражение (1.8) для оценки x_0 и учитывая равенства (1.7), получаем уравнение

$$R_{xy}(t+T-s)=\int_{-\infty}^{t}k(t,\tau)R_{yy}(\tau-s)\,d\tau.$$

Произведем замену переменных $t-s=s_1$, $t-\tau=\tau_1$. Тогда

$$R_{xy}(T+s_1)=\int_{0}^{\infty}k(t,t-\tau_1)R_{yy}(-\tau_1+s_1)\,d\tau_1,\ s_1\geqslant 0. \tag{1.9}$$

Однако левая часть уравнения (1.9) не зависит от t. Поэтому и правая часть (1.9) не должна зависеть от t. Значит, ядро k оценки (1.8) таково, что $k(t, t-\tau)=\gamma(\tau)$, где функция $\gamma(\tau)$ в силу (1.9) определяется *уравнением Винера — Хопфа*

$$R_{xy}(T+s_1)=\int_{0}^{\infty}\gamma(\tau)R_{yy}(s_1-\tau)\,d\tau,\ s_1\geqslant 0. \tag{1.10}$$

При этом выражение для оптимальной оценки (1.8) можно представить в форме

$$x_0(t+T)=\int_{-\infty}^{t}k(t,s)y(s)\,ds=\int_{0}^{\infty}k(t,t-s_1)y(t-s_1)\,ds_1=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\gamma(s)y(t-s)\,ds. \tag{1.11}$$

Из выражения (1.11) и стационарности процесса $y(t)$ вытекает стационарность оценки x_0. Используя равенство (1.11) для оптимальной линейной оценки, заключаем, что ошибка оценивания δ есть

$$\delta=M|x(t+T)|^2-M|x_0(t+T)|^2=$$

$$=R_{xx}(0)-\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\gamma(s)R_{yy}(s-\tau)\gamma(\tau)\,ds\,d\tau. \tag{1.12}$$

Таким образом, для вычисления как оценки (1.11), так и ошибки оценивания (1.12) необходимо решить уравнение (1.10). Это уравнение представляет собой интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром относительно функции γ; решение этого уравнения может и не существовать. Некоторые условия существования решения и метод его построения, предложенный Винером, излагаются ниже. Предположим, что корреляционная функция $R_{yy}(t)$ допускает представление

$$R_{yy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|h(i\omega)|^2\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\omega,\ i=\sqrt{-1}, \tag{1.13}$$

и существует такая функция $a(t)$, удовлетворяющая условию $a(t)=0$ при $t<0$, что

$$h(z)=\int_0^{\infty}a(t)\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{Re}z\geqslant 0, \tag{1.14}$$

где z — комплексная переменная. Выражения (1.13), (1.14) имеют место для стационарных процессов с абсолютно непрерывным спектром и спектральной плотностью, допускающей факторизацию. Из (1.13), (1.14) и равенства Парсеваля вытекает, что

$$R_{yy}(t)=\int_0^{\infty}a(t+s)\bar{a}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.15}$$

где $\bar{a}(t)$ — функция, комплексно сопряженная с $a(t)$.

Как и при выводе формулы (1.15), предположим, что существует такая функция $b(t)$, для которой взаимная корреляционная функция $R_{xy}(t)$ имеет представление

$$R_{xy}(t)=\int_0^{\infty}b(t+s)\bar{a}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.16}$$

Подставляя (1.15), (1.16) в (1.10), получаем уравнение

$$\int_0^{\infty}\left[b(T+\tau+s)-\int_0^{\infty}\gamma(t)a(\tau-t+s)\,\mathrm{d}t\right]\bar{a}(s)\,\mathrm{d}s=0.$$

Достаточным условием справедливости этого уравнения является то, что функция γ удовлетворяет соотношению

$$b(T+t)-\int_0^\infty \gamma(\tau)a(t-\tau)\,d\tau=0,\ t>0. \tag{1.17}$$

Так как функция $a(t)=0$ при $t<0$, то равенство (1.17) можно записать в виде свертки:

$$b(T+t)=\int_0^t \gamma(\tau)a(t-\tau)\,d\tau,\ t>0. \tag{1.18}$$

Для определения решения γ уравнения (1.18) используем метод преобразования Лапласа. Положим

$$b_0(T,z)=\int_0^\infty b(T+s)\,e^{-zs}ds,\ \gamma_0(z)=\int_0^\infty \gamma(s)\,e^{-zs}ds. \tag{1.19}$$

Далее найдем преобразование Лапласа от обеих частей (1.18). Учитывая равенство (1.14) и обозначения (1.19), получаем

$$b_0(T,z)=\gamma_0(z)h(z).$$

Значит, используя формулу обращения Меллина, имеем

$$\gamma(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\frac{b_0(T,i\omega)}{h(i\omega)}d\omega. \tag{1.20}$$

Тем самым решение $\gamma(t)$ уравнения (1.10) получено. В [1] сформулированы условия справедливости преобразований (1.13) — (1.19), результатом которых является формула (1.20).

§ 2. ФИЛЬТР КАЛМАНА

1. Постановка задачи. Исследуем задачу фильтрации в предположении, что движение системы $x(t)$ и процесс наблюдения за ним $y(t)$ описываются системой линейных стохастических уравнений Ито, имеющей вид

$$dx(t)=A(t)x(t)\,dt+\sigma(t)\,d\xi(t),\ x(0)=x_0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.1}$$

$$dy(t)=Q(t)x(t)\,dt+\sigma_0(t)\,d\xi_0(t),\ y(0)=0. \tag{2.2}$$

Здесь векторы $x(t)\in R_n$, $y(t)\in R_m$; матрицы A, σ, Q, σ_0 заданы и имеют измеримые ограниченные элементы; через ξ и ξ_0 обозначены стандартные винеровские процессы произвольных размерностей, а через x_0 — гауссовский случайный вектор, параметры распределе-

ния вероятностей которого равны $Mx_0=0$, $Mx_0x_0'=D_0$. Считается, что случайные векторы $\xi(t)$, $\xi_0(t)$, x_0 взаимно независимы, а матрица ковариации D_0 положительно определена. Матрица $\sigma_0(t)\sigma_0'(t)$ невырождена при всех $t\in[0, T]$, где T — произвольный фиксированный момент времени. Задача фильтрации состоит в построении наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки вектора $x(T)$ по результатам наблюдений y_T процесса (2.2) на отрезке $[0, T]$.

Обозначим через $m(T)$ и $D(T)$ соответственно условное математическое ожидание и матрицу ковариации вектора $x(T)$ при условии y_T:

$$m(T)=Mx(T)/y_T,\ D(T)=M(x(T)-m(T))(x(T)-m(T))'/y_T.$$

В силу результатов § 1 вектор $m(T)$ представляет собой наилучшую в среднеквадратическом смысле оценку $x(T)$, а $D(T)$ есть матрица ковариации разности $x(T)-m(T)$. Из сделанных предположений о параметрах систем (2.1), (2.2) вытекает, что совместное распределение вероятностей процесса $(x(t), y(t))$ — гауссовское. Поэтому оптимальная оценка $m(T)$ является линейным функционалом от результатов наблюдений, т. е.

$$m(T)=\int_0^T u'(t, T)\,\mathrm{d}y(t). \tag{2.3}$$

Здесь матрица $u'(t, T)$ размера $n\times m$ (ядро оценки) подлежит определению из условия минимума по u выражения $M\|x(T)-m(T)\|^2=J$. Поскольку аргумент T предполагается произвольным, но фиксированным, его, ради сокращения записи, удобно опустить и вместо $u(t, T)$ записывать просто $u(t)$. Вместе с тем подчеркнем, что ядро оценки $u(t, T)$, вообще говоря, зависит от обоих аргументов t и T. Последнее обстоятельство необходимо иметь в виду, если аргумент T варьируется.

2. Двойственная задача оптимального управления. Покажем, что ядро $u(t)$ наилучшей оценки (2.3) является оптимальным управлением линейной детерминированной системой с квадратичным критерием качества, которые строятся по исходным данным задачи фильтрации (2.1), (2.2).

Обозначим через $\alpha(t)$ квадратную матрицу размера $n\times n$, которая описывается соотношениями

$$\dot\alpha(t)=-A'(t)\alpha(t)+Q'(t)u(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ \alpha(T)=I, \tag{2.4}$$

где I — единичная матрица размера $n\times n$, управление $u(t)$ совпадает с ядром оценки (2.3), а матрицы $A(t)$ и $Q(t)$ те же, что и в уравнениях (2.1), (2.2). Подберем теперь такой критерий качества для уравнения (2.4), чтобы оптимальное управление в полученной таким образом задаче оптимизации было равно ядру наилучшей оценки

(2.3). Для этого умножим уравнение (2.1) слева на $\alpha'(t)$, а уравнение (2.4) для $\alpha'(t)$ справа на $x(t)$ и сложим полученные результаты. Имеем

$$\alpha'(t)\,\mathrm{d}x(t)+(\mathrm{d}\alpha'(t))x(t)=\alpha'(t)\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t)+u'(t)Q(t)x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Заменяя здесь произведение $Q(t)x(t)$ в соответствии с уравнением наблюдения (2.2), приходим к равенству

$$\mathrm{d}(\alpha'(t)x(t))=\alpha'(t)\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t)+u'(t)(\mathrm{d}y(t)-\sigma_0(t)\,\mathrm{d}\xi_0(t)).$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от $t=0$ до $t=T$ и учитывая условие $\alpha(T)=I$, заключаем, что

$$\alpha'(0)x(0)+\int_0^T\alpha'(t)\sigma(t)\mathrm{d}\xi(t)-\int_0^T u'(t)\sigma_0(t)\mathrm{d}\xi_0(t)=x(T)-\int_0^T u'(t)\mathrm{d}y(t). \quad (2.5)$$

Заметим, что в силу независимости $x(0)$, $\xi(t)$ и $\xi_0(t)$ и равенства $\mathrm{Tr}\,xx'=x'x$ имеет место соотношение

$$M\left[\alpha'(0)x(0)+\int_0^T\alpha'(t)\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t)-\int_0^T u'(t)\sigma_0(t)\,\mathrm{d}\xi_0(t)\right]'\times$$

$$\times\left[\alpha'(0)x(0)+\int_0^T\alpha'(t)\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t)-\int_0^T u'(t)\sigma_0(t)\,\mathrm{d}\xi_0(t)\right]=$$

$$=\mathrm{Tr}\left[\alpha'(0)D_0\alpha(0)+\int_0^T(\alpha'(t)N_1(t)\alpha(t)+u'(t)N_0(t)u(t))\,\mathrm{d}t\right], \quad (2.6)$$

где $N_0=\sigma_0\sigma_0'$, $N_1=\sigma\sigma'$.

Умножим теперь скалярно обе части равенства (2.5) на себя и вычислим затем математическое ожидание. С учетом соотношения (2.6) получаем

$$J=M\|x(t)-m(T)\|^2=M\left\|x(T)-\int_0^T u'(t)\,\mathrm{d}y(t)\right\|^2=$$

$$=\mathrm{Tr}\left[\alpha'(0)D_0\alpha(0)+\int_0^T(\alpha'(t)N_1(t)\alpha(t)+u'(t)N_0(t)u(t))\,\mathrm{d}t\right]. \quad (2.7)$$

Из равенства (2.7) следует, что ядро $u(t)$ оптимальной оценки (2.3) одновременно должно минимизировать квадратичный по α функци-

онал (2.7) на траекториях детермированной системы (2.4). Задача оптимального управления (2.4), (2.7) является двойственной к исходной задаче фильтрации (2.1), (2.2). Используя изложенное в § 3 гл. IX решение двойственной линейно-квадратичной задачи управления, можно получить выражения для оптимального фильтра (2.3) и ошибки оценивания J.

3. Уравнение для ошибки оценивания. Задача (2.4), (2.7) несколько отличается от задачи из § 3 гл. IX тем, что она рассматривается для матричного процесса $\alpha(t)$ с начальным условием, заданным при $t=T$.

Для того чтобы непосредственно использовать результаты § 3 гл. IX, рассмотрим управлямую систему (2.4) отдельно для каждого столбца $\alpha_i(t)$, $i=1, \ldots, n$, матрицы $\alpha(t)$. Из (2.4) следует, что

$$\dot{\alpha}_i(t) = -A'(t)\alpha_i(t) + Q'(t)u_i(t), \ \alpha_i(T) = \delta_i, \tag{2.8}$$

где $u_i(t)$ означает i-й столбец матрицы управлений $u(t)$, а $\delta_i \in R_n$ — вектор, у которого i-я компонента равна единице, а остальные — нулю. В силу (2.7) управление $u_i(T)$ выбирается из условия минимума функционала

$$J_i = \alpha_i'(0)D_0\alpha_i(0) + \int_0^T (\alpha_i'(t)N_1(t)\alpha_i(t) + u_i'(t)N_0(t)u_i(t))\,\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

Дословно повторяя вывод формулы (2.7), заключаем, что

$$\min_{u_i} J_i = \mathrm{d}_{ii}(T), \ m_i(T) = \int_0^T u_i'(t)\,\mathrm{d}y(t), \ i=1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Здесь $u_i(t)$ — оптимальное управление в задаче (2.8), (2.9), положено $m(T) = (m_i(T), \ldots, m_n(T))$, а $d_{ij}(T)$ — элементы матрицы $D(T)$. Наконец, для того чтобы движение системы (2.8) происходило в сторону возрастания времени (как и в § 3 гл. IX), произведем замену переменных $s=T-t$, $\beta_i(s) = \alpha_i(T-s)$, $0 \leqslant s \leqslant T$.

В силу (2.8) уравнение для $\beta_i(s)$ имеет вид

$$\dot{\beta}_i(s) = A'(T-s)\beta_i(s) - Q'(T-s)u_i(T-s), \ \beta_i(0) = \delta_i. \tag{2.11}$$

Относительно новых переменных критерий качества (2.9) записывается следующим образом:

$$J_i = \beta_i'(T)D_0\beta_i(T) + \int_0^T (\beta_i'(s)N_1(T-s)\beta_i(s) + u_i'(T-s)N_0(T-s)u_i(T-s))\,\mathrm{d}s. \tag{2.12}$$

Решение задачи (2.10), (2.11) дают формулы (3.7) и (3.8) гл. IX, в соответствии с которыми

$$\min_{u_i} J_i=\delta_i'P(0)\delta_i,\ u_i(T-s)=N_0^{-1}(T-s)Q(T-s)P(s)\beta_i'(s). \quad (2.13)$$

Здесь матрица P размера $n\times n$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{dP(s)}{ds}+A(T-s)P(s)+P(s)A'(T-s)-N_1(T-s)-$$
$$-P(s)Q'(T-s)N_0^{-1}(T-s)Q(T-s)P(s)=0,\ P(T)=D_0. \quad (2.14)$$

Но в силу (2.8), (2.10), (2.13) имеем

$$d_{ii}(T)=\min_{u_i} J_i=\beta_i'(0)P(0)\beta_i(0)=\delta_i'P(0)\delta_i=P_{ii}(0),$$

где P_{ij} — элементы матрицы P. Иными словами, диагональные элементы матриц $D(T)$ и $P(0)$ совпадают. Покажем, что и остальные элементы этих матриц равны. Для этого рассмотрим сумму $x_i(T)+x_j(T)$, оптимальная оценка которой задается выражением

$$\int_0^T (u_i'(t)+u_j'(t))\,dy(t). \quad (2.15)$$

Отсюда и из определения матрицы ковариации $D(T)$ заключаем, что ошибка оценивания суммы $x_i(t)+x_j(T)$ есть

$$J_{ij}=M\left[x_i(T)+x_j(T)-\int_0^T (u_i'(t)+u_j'(t))\,dy(t)\right]^2=$$
$$=d_{ii}(T)+d_{jj}(T)+2d_{ij}(T). \quad (2.16)$$

Установим теперь другое выражение для величины J_{ij}. Обозначим через $\alpha_{ij}(t)$ решение уравнения (2.8), в котором u_i заменено на u_i+u_j, с начальным условием $\alpha_{ij}(T)=\delta_i+\delta_j$. Повторяя предшествующие рассуждения от формулы (2.3) до формулы (2.7), убеждаемся в том, что ядро оптимальной оценки (2.15) является одновременно оптимальным управлением процессом $\alpha_{ij}(t)$ с квадратичным критерием качества (2.9), в котором α_i заменено на α_{ij}, а u_i — на u_i+u_j. Решение этой задачи оптимального управления также задается формулами (2.13), (2.14), в которых α_i заменено на α_{ij}, а δ_i — на $\delta_i+\delta_j$. Значит, в частности, на основании (2.13), (2.16) получим

$$J_{ij}=2d_{ij}(T)+d_{ii}(T)+d_{jj}(T)=(\delta_i+\delta_j)'P(0)(\delta_i+\delta_j).$$

Отсюда и из установленного выше равенства диагональных элементов матриц $D(T)$ и $P(0)$ вытекает, что $d_{ij}(T)=P_{ij}(0)$ для

любых значений индексов $i, j=1, \ldots, n$. Таким образом, $D(T)=P(0)$. Найдем теперь уравнение, которому удовлетворяет матрица $D(t)$ как функция $t\in[0, T]$. При этом удобно обозначить решение задачи (2.14) через $P(T, s)$, $0\leqslant s\leqslant T$, чтобы отразить его зависимость от T. Тогда для матрицы ковариации $D(T)$ справедливо представление $D(T)=P(T, 0)$. Отсюда, учитывая, что T — произвольный момент времени, для любого $t\in[0, T]$ имеем

$$D(t)=P(t, 0). \tag{2.17}$$

Здесь матрица $P(t, \tau)$, где $\tau\in[0, t]$, удовлетворяет по τ при каждом t соотношениям типа (2.14), в которых T заменено на t, а s — на τ, т. е. соотношениям

$$\frac{\partial P(t, \tau)}{\partial\tau}+A(t-\tau)P(t, \tau)+P(t, \tau)A'(t-\tau)-N_1(t-\tau)-$$
$$-P(t, \tau)Q'(t-\tau)N_0^{-1}(t-\tau)Q(t-\tau)P(t, \tau)=0,\ P(t, t)=D_0.$$

Отсюда и из (2.14) вытекает, что $P(t, 0)=P(T, T-t)$. Поэтому с учетом (2.17) имеем $D(t)=P(T, T-t)$. Из этого равенства и (2.14) вытекает справедливость следующего уравнения для $D(t)$:

$$\dot D(t)=A(t)D(t)+D(t)A'(t)-D(t)Q'(t)N_0^{-1}(t)Q(t)D(t)+$$
$$+N_1(t),\ t\geqslant 0,\ D(0)=D_0,\ N_0=\sigma_0\sigma_0',\ N=\sigma\sigma'. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) не зависит от результатов наблюдений y_t. Поэтому ошибка оценивания в момент времени t, равная $\mathrm{Tr}D(t)$, может быть вычислена заранее, до начала процесса измерения. Уравнение (2.18) представляет собой матричное дифференциальное уравнение Риккати, аналогичное уравнению (2.8) гл. IV из теории линейно-квадратичных задач управления. Поэтому для решения уравнения (2.18) можно использовать методы, изложенные в § 2 гл. IV.

Отметим, что при сделанных предположениях о параметрах задачи (2.18) ее решение существует при всех конечных $t\geqslant 0$, единственно и положительно определено*.

4. Уравнение для оптимальной оценки. Оптимальная оценка $m(T)$ имеет вид (2.3), причем ядро $u(t, T)$ на основании равенств (2.13) определяется выражением

$$u(t, T)=N_0^{-1}(t)Q(t)P(T-t)\alpha(t),$$

где матрица P задается соотношениями (2.14). Значит,

$$u(t, T)=N_0^{-1}(t)Q(t)D(t)\alpha(t). \tag{2.19}$$

---

*Kalman R. New methods in Wiener filtering theory. Proc. of the first symposium on engineering applications of random function theory and probability, J. Wiley, N — Y, 1963.

Здесь $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению (2.4) при управлении (2.19). При этом в правой части (2.19) от аргумента T зависит лишь матрица α. Выше этот аргумент у матрицы α был опущен, поскольку момент времени T считался произвольным, но фиксированным. Теперь же при определении уравнения, которому удовлетворяет оптимальная оценка $m(T)$ как функция T, целесообразно отразить эту зависимость. Итак, обозначим решение задачи Коши (2.4), (2.19) через $\alpha(T, t)$. Тогда в соответствии с (2.3), (2.19) справедливо следующее выражение:

$$m(T)=\int_0^T \alpha'(T, t)D(t)Q'(t)N_0^{-1}(t)\mathrm{d}y(t). \qquad (2.20)$$

Здесь матрица $\alpha'(T, t)$ в силу (2.4), (2.19) удовлетворяет по t при каждом фиксированном T уравнениям

$$\frac{\partial\alpha'(T, t)}{\partial t}=-\alpha'(T, t)\,[A(t)-D(t)Q'(t)N_0^{-1}(t)Q(t)],\ \alpha(T, T)=I. \qquad (2.21)$$

Сравнение соотношений (2.21), (2.20) с формулой Коши показывает, что выражение (2.20) есть представление решения $m(t)$ при $t=T$ уравнения

$$\mathrm{d}m(t)=A(t)m(t)\mathrm{d}t+D(t)Q'(t)N_0^{-1}(t)\,[\mathrm{d}y(t)-Q(t)m(t)\,\mathrm{d}t],$$
$$m(0)=0. \qquad (2.22)$$

Уравнения (2.18), (2.22) для матрицы ковариации $D(t)$ и вектора оптимальной оценки $m(t)$ представляют собой *уравнения фильтра Калмана*.

При выводе уравнения (2.22) предполагалось, что $m(0)=0$. Покажем, что при произвольном значении $Mx(0)=m_0$ формулы оптимального фильтра сохраняют прежнюю форму (2.18), (2.22) с той лишь разницей, что начальное условие для уравнения (2.22) примет вид $m(0)=m_0$. Произведем в (2.1) замену переменных $x(t)=Z(t, 0)x_1(t)$, где матрица $Z(t, s)$ определяется соотношениями

$$\frac{\partial Z(t, s)}{\mathrm{d}t}=A(t)Z(t, s),\ \frac{\partial Z(t, s)}{\mathrm{d}s}=-Z(t, s)A(s),\ Z(t, t)=I. \qquad (2.23)$$

Тогда получим

$$\mathrm{d}x_1(t)=Z^{-1}(t, 0)\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t),\ x_1(0)=x_0,$$
$$\mathrm{d}y(t)=Q(t)Z(t, 0)x_1(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_0(t)\ \mathrm{d}\xi_0(t),\ y(0)=0.$$

Далее, полагая $x_2(t)=x_1(t)-m_0$, находим

$$\mathrm{d}x_2(t)=Z^{-1}(t, 0)\sigma(t)\,\mathrm{d}\xi(t),\ x_2(0)=x_0-m_0, \qquad (2.24)$$

$$d\left[y(t)-\int_0^t Q(s)Z(s,0)m_0\,ds\right]=Q(t)Z(t,0)x_2(t)\,dt+\sigma_0(t)\,d\xi_0(t).$$

Наконец, обозначим наблюдаемую величину через $y_2(t)$, имеем

$$y_2(t)=y(t)-\int_0^t Q(s)Z(s,0)m_0 ds,$$

$$dy_2(t)=Q(t)Z(t,0)x_2(t)\,dt+\sigma_0(t)\,d\xi_0(t). \tag{2.25}$$

Задача фильтрации (2.25), (2.24) относится уже к типу задач (2.1), (2.2), изученных выше. Матрица ковариации $D_2(t)$ условного распределения $x_2(t)$ при условии, что на отрезке $[0, t]$ измерен вектор $y_2(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$, описывается уравнением вида (2.18). С учетом (2.25), (2.24) имеем

$$\dot{D}_2=-D_2Z'(t,0)Q'(t)N_0^{-1}(t)Q(t)Z(t,0)D_2,\ D_2(0)=D_0. \tag{2.26}$$

Так как $D(t)=Z(t,0)D_2(t)Z'(t,0)$, то, дифференцируя обе части этого равенства по t и учитывая равенства (2.26) и (2.23), заключаем, что матрица $D(t)$ удовлетворяет соотношениям (2.18). В самом деле,

$$\dot{D}=AD+DA'+Z(t,0)\dot{D}_2Z'(t,0)=AD+DA'-$$
$$-DQ'N_0^{-1}QD,\ D(0)=D_0.$$

Уравнение для оптимальной оценки $m_2(t)$ вектора $x_2(t)$ по результатам наблюдений $y_2(s)$ $(0\leqslant s\leqslant t)$ в силу (2.22) имеет вид

$$dm_2(t)=D_2Z'(t,0)Q'N_0^{-1}[dy_2(t)-QZ(t,0)m_2\,dt],\ m_2(0)=0.$$

На основании определения функции $x_2(t)$ справедливы выражения

$$m_2(t)=Z(t,0)^{-1}m(t)-m_0,\ m(t)=Z(t,0)[m_2(t)+m_0].$$

Значит,

$$dm(t)=Z(t,0)dm_2(t)+AZ(t,0)(m_2(t)+m_0)\,dt=$$
$$=Am\,dt+Z(t,0)D_2Z'(t,0)Q'N_0^{-1}(dy_1-QZ(t,0)m_2(t)\,dt).$$

Отсюда окончательно вытекает, что

$$dm(t)=A(t)m(t)\,dt+DQ'N_0^{-1}(dy(t)-Q(t)m(t)\,dt),$$
$$m(0)=m_2(0)+m_0=m_0. \tag{2.27}$$

Тем самым справедливость уравнений фильтра Калмана (2.18), (2.27) установлена.

5. Устойчивость фильтра. При ряде дополнительных ограничений можно доказать устойчивость оптимального фильтра (2.27) относительно возмущений начальных условий m_0. Приведем некоторые из таких ограничений. Обозначим, как и выше, через $Z(t, s)$ матрицу, удовлетворяющую соотношениям (2.23). Предположим, что найдутся такие положительные постоянные τ, C_1, C_2, при которых для всех $t \geqslant \tau$ справедливы неравенства

$$C_1 I \leqslant \omega_1(t) = \int_{t-\tau}^{t} Z'(s, t) Q'(s) (\sigma_0(s)\sigma_0'(s))^{-1} Q(s) Z(s, t)\, ds \leqslant C_2 I,$$

$$C_1 I \leqslant \omega_2(t) = \int_{t-\tau}^{t} Z(t, s)\sigma(s)\sigma'(s)Z'(t, s)\, ds \leqslant C_2 I. \qquad (2.28)$$

Тогда тривиальное решение однородного уравнения (2.27), т. е. уравнения

$$\dot{m}(t) = [A(t) - D(t)Q'(t)N_0^{-1}(t)Q(t)]m(t),\ t \geqslant 0,\ m(0) = m_0, \qquad (2.29)$$

устойчиво относительно возмущений начальных условий. Для доказательства заметим, что при выполнении требований (2.28) для решения $D(t)$ системы (2.18) справедливы оценки

$$[\omega_2^{-1}(t) + \omega_1(t)]^{-1} \leqslant D(t) \leqslant \omega_1^{-1}(t) + \omega_2(t),\ t \geqslant \tau. \qquad (2.30)$$

Рассмотрим теперь функцию Ляпунова

$$V(t, m) = m'D^{-1}(t)m.$$

На основании (2.28), (2.30) функция V определенно положительная и допускает бесконечно малый высший предел. Вычислим производную функции V вдоль траекторий системы (2.29). Имеем

$$\dot{V}(t, m(t)) = \dot{m}'(t)D^{-1}(t)m(t) + m'(t)D^{-1}(t)\dot{m}(t) - m'(t)D^{-1}(t)D(t)D^{-1}(t)m(t).$$

Заменяя здесь производную $\dot{m}$ правой частью (2.29), а производную $\dot{D}(t)$ — правой частью (2.18), получаем

$$\begin{aligned}\dot{V} &= m'(A - DQ'N_0^{-1}Q)'D^{-1}m + m'D^{-1}(A - DQ'N_0^{-1}Q)m - \\ &- m'D^{-1}(AD + DA' - DQ'N_0^{-1}QD + N_1)D^{-1}m = \\ &= -m'Q'N_0^{-1}Qm - m'D^{-1}N_1D^{-1}m. \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Правая часть (2.31) во всяком случае неположительна. Поэтому в силу теоремы 2.1 гл. I линейная система (2.29) устойчива. Можно наложить дальнейшие ограничения на матрицы $Q'N_0^{-1}Q$ или N_1 исходной задачи фильтрации (2.1), (2.2), например считать одну из

них положительно определенной. Тогда производная $\dot{V}$ в силу (2.31) будет определенно отрицательной, а система (2.29) на основании теоремы 2.3 гл. I равномерно асимптотически устойчивой.

Замечание. В случае постоянных матриц A, σ, Q, и σ_0 в уравнениях (2.1), (2.2) необходимым и достаточным условием справедливости неравенств (2.28) является полнота (т. е. равенство n) ранга матриц

$$(\sigma, A\sigma, ..., A^{n-1}\sigma), (Q', A'Q', ..., (A')^{n-1}Q'). \tag{2.32}$$

6. Фильтрация при постоянных коэффициентах. При рассмотрении задачи фильтрации одна из основных трудностей связана с необходимостью решения матричного уравнения Риккати (2.18) для матрицы ковариации $D(t)$. В ряде случаев может быть определено приближенное решение этого уравнения. Приведем* один из таких способов для систем (2.1), (2.2) с постоянными матрицами A, σ, Q и σ_0, считая, что матрицы (2.32) имеют полный ранг n. Тогда решение $D(t)$ задачи (2.18) сходится при $t\to\infty$ к единственному положительно определенному решению $\bar{D}$ алгебраического уравнения

$$A\bar{D}+\bar{D}A'-\bar{D}Q'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}Q\bar{D}+\sigma\sigma'=0. \tag{2.33}$$

Иными словами, $D(t)$ при достаточно больших t можно приближенно заменить на $\bar{D}$. Алгоритм определения $\bar{D}$ состоит из следующих шагов:

1^0. Определяют скалярный полином $b(\lambda)$ степени n с нулями, имеющими отрицательные действительные части, из уравнения

$$\det(\lambda I-A_1)=(-1)^n b(\lambda)b(-\lambda),$$

где I — единичная матрица размера $2n\times 2n$, а матрица A_1 имеет вид

$$A_1=\begin{pmatrix} -A' & Q'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}Q \\ \sigma\sigma' & A \end{pmatrix}.$$

При этом сначала бывает удобно найти корни $\lambda_1, ..., \lambda_n$ уравнения $\det(\lambda I-A_1)=0$, имеющие отрицательные действительные части, а затем представить полином $b(\lambda)$ в виде $b(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)...(\lambda-\lambda_n)$.

2^0. Представляют матрицу $b(A_1)$ в виде блочной матрицы

$$b(A_1)=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

где b_i — квадратные матрицы размера $n\times n$.

---

*Bucy R. S., Joseph P. D. Filtering for stohastic processes with applications to guidance. Interscience Publishers, N — W, 1968.

3^0. Искомое решение $\bar{D}$ уравнения (2.33) имеет вид

$$\bar{D}=b_4b_2^{-1}=b_3b_1^{-1}.$$

Отметим еще, что все собственные значения матрицы $A-\bar{D}Q(\sigma_0\sigma_0')^{-1}Q$ лежат в левой полуплоскости. Следовательно, фильтр (2.27), полученный в результате замены в (2.27) матрицы $D(t)$ на $\bar{D}$, является равномерно асимптотически устойчивым при постоянных A, Q, σ и σ_0 и полноте рангов матриц (2.32).

Проиллюстрируем изложенный алгоритм определения $\bar{D}$ на примере.

Пример 2.1. Рассмотрим движение материальной точки под действием случайных возмущений

$$\dot{x}_1=x_2,\ \mathrm{d}x_2=\sqrt{2}\,\mathrm{d}\xi_1(t).$$

Наблюдению доступна координата

$$\mathrm{d}y(t)=x_1(t)\,\mathrm{d}t+\sqrt{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\xi_2(t).$$

Через ξ_1, ξ_2 обозначены взаимно независимые стандартные винеровские процессы. Здесь

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \sigma=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ Q=(1,\ 0),\ \sigma_0=\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\det(\lambda I-A_1)=\lambda^4+4.$$

Корни λ_1 и λ_2 уравнения $\det(\lambda I-A_1)=0$, имеющие отрицательную действительную часть, таковы: $\lambda_1=-1+i$, $\lambda_2=-1-i$. Следовательно,

$$b(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2+2\lambda+2.$$

Поэтому матрица $b(A_1)$ имеет вид

$$b(A_1)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 2\\ -2 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ -2 & 4 & 0 & 2\end{pmatrix}=A_1^2+2A_1+2I,$$

где I — единичная матрица.

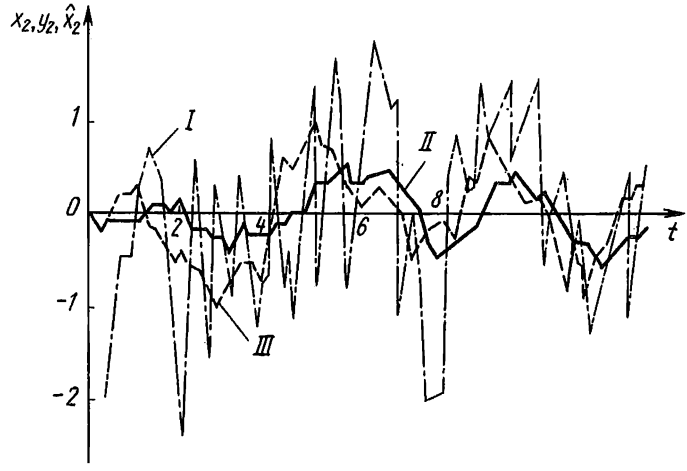


Рис. 2.1. Иллюстрация работы фильтра Калмана—Бьюси: *I* — измеренное состояние координаты $y(t)$; *II* — оценка $\hat{x}_2(t)$ значения фазовой координаты; *III* — истинное значение координаты $x_2(t)$

Значит, блоки b_i матрицы $b(A_1)$ имеют вид

$$b_1=\begin{pmatrix}2&0\\-2&2\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}4&2\\-2&0\end{pmatrix},\ b_3=\begin{pmatrix}0&2\\-2&4\end{pmatrix},\ b_4=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, единственное положительно определенное решение $\bar{D}$ уравнения вида (2.33) в рассматриваемом случае есть

$$\bar{D}=b_4b_2^{-1}=b_3b_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

На рис. 2.1 приведена иллюстрация работы фильтра Калмана — Бьюси для системы $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=-4x_1-0{,}8x_2+2\dot{\xi}_1(t)$, $y=x_2+\xi_2(t)$ (см. [5] к четвертой части).

7. Фильтрация при вырожденной помехе в канале наблюдения. При выводе уравнений (2.18), (2.27) оптимального фильтра существенно использовалось предположение о невырожденности шумов в канале наблюдения, т. е. о невырожденности матрицы $\sigma_0\sigma_0'$. Вместе с тем возможны случаи, когда помеха при измерении некоторых координат системы или их комбинаций отсутствует. В этих случаях некоторые функции состояния системы могут быть измерены точно. Возможны различные подходы к исследованию задач фильтрации с вырожденным шумом. При первом из них одна часть координат оценивается точно, а для оценки остальных используется фильтр Калмана пониженной размерности [11]. При другом подходе исходная задача аппроксимируется

приближенной, в которой в уравнениях наблюдения добавляется невырожденный шум малой интенсивности. Изложим более подробно первый подход на примере задачи оптимального оценивания состояния $x(t) \in R_n$ системы вида (2.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = x_0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

с постоянной матрицей A. Гауссовский вектор x_0 имеет нулевое математическое ожидание и матрицу ковариации D_0. Наблюдается вектор $y \in R_m$, удовлетворяющий уравнению (2.2) с постоянными матрицами Q и σ_0 такими, что

$$dy(t) = Qx(t)\,dt + \sigma_0\,d\xi_0(t),\ y(0) = 0.$$

Матрица Q имеет размер $m \times n$, а матрица σ_0 — размер $m \times m$. Обозначим через $k(\sigma_0)$ ранг матрицы σ_0. Пусть $k(\sigma_0) = r$, где целое число $r \in [0, m]$. Приведем матрицу σ_0 с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому виду*:

$$\alpha_1 \sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Здесь α_1 — невырожденная действительная матрица размера $m \times m$, соответствующая указанным элементарным преобразованиям; σ_1 — матрица размера $r \times m$ и ранга r; 0 — нулевая матрица размера $(m-r) \times m$. Пусть, далее,

$$\alpha_1 Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

где Q_1 и Q_2 — матрицы размера $r \times n$ и $(m-r) \times n$, представляющие собой соответственно первые r и последние $m-r$ строк матрицы $\alpha_1 Q$. Рассмотрим матрицу $K(Q_2)$ размера $n \times (m-r)n$, имеющую вид

$$K(Q_2) = (Q_2', A'Q_2', \ldots, (A')^{m-1}Q_2'). \tag{2.36}$$

Положим

$$\alpha_1 y = (y_1, y_2). \tag{2.37}$$

Тогда

$$dy_1(t) = Q_1 x(t)\,dt + \sigma_1\,d\xi_0(t),\ \dot{y}_2(t) = Q_2 x(t).$$

Далее в зависимости от ранга матрицы $K(Q_2)$ возможны два случая. Если ранг $k(Q_2) = n$, то все координаты системы $x(t)$ восстанавливаются точно по известным значениям вектора $y_2(t)$, которые определяются через исходные наблюдения с помощью фор-

*Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. — М.: Наука, 1965.

мулы (2.37). Пусть теперь ранг матрицы $K(Q_2)$ равен n_1, где $n_1<n$. Обозначим через λ невырожденную матрицу, первые n_1 столбцов которой совпадают с какими-либо линейно независимыми столбцами матрицы $K(Q_2)$, а остальные $n-n_1$ столбцов матрицы λ выбраны произвольно с тем лишь условием, чтобы $k(\lambda)=n$. Тогда (см. гл. VI)

$$\lambda' A(\lambda^{-1})' = B = \begin{pmatrix} B_1 & O_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}, \quad Q_2(\lambda^{-1}) = (Q_3, Q_2). \tag{2.38}$$

Здесь матрицы B_1, B_2, B_3 имеют соответственно размеры $n_1 \times n_1$, $(n-n_1)\times n_1$, $(n-n_1)\times(n-n_1)$; матрица Q_3 — размер $(m-r)\times n_1$; нулевые матрицы O_1 и O_2 — размеры $n_1 \times (n-n_1)$ и $(m-r)\times(n-n_1)$. При этом ранг матрицы $L=(Q_3', B_1'Q_3', \ldots, (B_1')^{n_1}(Q_3'))$ — полный, т. е. $k(L)=n_1$. Положим $z=\lambda' x$. Тогда

$$\dot z(t) = \lambda' \dot x(t) = Bz(t),$$
$$\mathrm{d}y_1(t) = Q_1(\lambda^{-1})' z(t)\,\mathrm{d}t + \sigma_1\,\mathrm{d}\xi_0(t),\ \dot y_2(t) = Q_2(\lambda^{-1})' z(t). \tag{2.39}$$

Запишем вектор $z(t)$ в виде $z=(z_1, z_2)$, где $z_1 \in R_{n_1}$ и $z_2 \in R_{n-n_1}$. Для компоненты z_2 справедливы соотношения

$$\dot z_2(t) = B_2 z_1(t) + B_3 z_2(t),$$
$$\mathrm{d}y_1(t) = (Q_5 z_1(t) + Q_4 z_2(t))\,\mathrm{d}t + \sigma_1\,\mathrm{d}\xi_0(t). \tag{2.40}$$

Здесь матрицы Q_5 и Q_4 состоят соответственно из первых n_1 и последних $n-n_1$ столбцов матрицы $Q(\lambda^{-1})'$. В уравнениях (2.39) вектор $z_1(t)$ можно считать известной функцией времени. Действительно, вследствие полноты ранга матрицы L вектор $z_1(0)$ восстанавливается точно по известным значениям $y_2(s)$ на сколь угодно малом интервале $0\leqslant s\leqslant\varepsilon$ ($\varepsilon>0$), а для значений $t>0$ функция $z_1(t)$ в силу (2.38), (2.39) определяется как решение уравнения $\dot z_1(t) = B_1 z_1(t)$. Кроме того, вектор $y_2(t)$ не несет никакой информации о процессе $z_2(t)$. Таким образом, вся информация о $z_2(t)$ содержится в измерениях $y_1(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$, связанных с исходными измерениями $y(s)$ формулой (2.37). Обозначим

$$V = Q_4'(\sigma_1\sigma_1')^{-1}Q_4,$$
$$m_1(t) = Mz_2(t)/y_{1t},\ D_1(t) = M[z_2(t)-m_1(t)][z_2(t)-m_1(t)]'/y_{1t}.$$

Так как матрица $\sigma_1\sigma_1'$ невырождена (ее ранг по построению равен r), то m_1 и D_1 удовлетворяют уравнениям фильтра Калмана вида (2.18), (2.27). В рассматриваемом случае (2.40) получаем

$$\mathrm{d}m_1(t) = B_3 m_1(t) + B_2 z_1(t))\,\mathrm{d}t + D_1(t)Q_4'(\sigma_1\sigma_1')^{-1}[\mathrm{d}y_1(t) - Q_5 z_1(t)\,\mathrm{d}t - Q_4 m_1(t)\,\mathrm{d}t],\ m_1(0)=0,$$
$$\dot D_1 = B_3 D_1 + D_1 B_3' - D_1 V D_1,\ D_1(0) = (\lambda' D_0 \lambda). \tag{2.41}$$

Здесь через $(\lambda' D_0 \lambda)$ обозначена матрица размера $(n-n_1)\times(n-n_1)$, элементы которой стоят на пересечении последних $n-n_1$ строк и столбцов матрицы $\lambda' D_0 \lambda$.

Обозначим через D_2 матрицу размера $n\times n$, у которой первые n_1 строк и столбцов нулевые, а правый нижний угол занимает D_1, т. е.

$$D_2(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & D_1(t)\end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Из такого определения следует, что D_2 есть матрица условного распределения $z(t)$ при условии y_t.

Так как при линейном невырожденном преобразовании случайных величин их оценки преобразуются с той же самой матрицей преобразования, то, полагая $m(t)=Mx(t)/y_t$, $D(t)=M[x(t)-m(t)][x(t)-m(t)]'/y_t$, окончательно имеем

$$m(t)=(\lambda^{-1})'\begin{pmatrix}z_1(t)\\ m_1(t)\end{pmatrix},\ D(t)=(\lambda^{-1})'D_2(t)\lambda^{-1}. \tag{2.43}$$

Итак, установленный алгоритм построения оптимальной оценки $m(t)$ вектора $x(t)$ состоит из следующих этапов:

1^0. Приводят матрицы σ и Q элементарными преобразованиями к виду (2.34), (2.35) и определяют ранг матрицы (2.36).

2^0. Если ранг $k(K(Q_2))=n$, то $x(t)$ восстанавливается точно.

3^0. Если $k(K(Q_2))<n$, то наилучшая оценка выражается формулами (2.41) — (2.43), в которых функция $z_1(t)$ восстанавливается точно по известным значениям $y_2(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$, с помощью процедуры, описанной в гл. VI.

8. Оптимальная экстраполяция. *Задача оптимальной экстраполяции* состоит в построении наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки будущего состояния $x(\tau)$ системы (2.1) по результатам наблюдений (2.2), проведенным на отрезке $0\leqslant s\leqslant T$, где $T\leqslant\tau$. Покажем, что построение оптимальной оценки $m(\tau)=Mx(\tau)/y_T$ и матрицы ковариации $D(\tau)=M[x(\tau)-m(\tau)][x(\tau)-m(\tau)]'/y_T$ может быть осуществлено с помощью вспомогательной задачи фильтрации. Введем функцию $Q_1(t)=Q(t)$ при $0\leqslant t\leqslant T$ и $Q(t)=0$ при $t>T$. Обозначим через $\gamma(t)$ такой процесс, что $\gamma(t)=y(t)$ при $0\leqslant t\leqslant T$ и $d\gamma(t)=\sigma_0(t)\,d\xi_0(t)$ при $T<t\leqslant\tau$. Иными словами, $d\gamma(t)=Q_1(t)x(t)\,dt+\sigma_0(t)\,d\xi_0(t)$, $0\leqslant t\leqslant\tau$. Вследствие независимости $\xi(t)$, $\xi_0(t)$ и x_0 имеем $m(\tau)=m_1(\tau)$, $D(\tau)=D_1(\tau)$, где

$$m_1(\tau)=Mx(\tau)/\gamma_\tau,\ D_1(\tau)=M[x(\tau)-m_1(\tau)][x(\tau)-m_1(\tau)]'/\gamma_\tau.$$

Из определения величин $m_1(\tau)$ и $D_1(\tau)$ вытекает, что они удовлетворяют уравнениям (2.18), (2.27), в которых $Q(t)$ заменено на $Q_1(t)$.

Следовательно, для вычисления матрицы $D(\tau)$ необходимо решить уравнения

$$\dot{D}(t)=A(t)D(t)+D(t)A'(t)-D(t)Q'(t)N_0^{-1}(t)Q(t)D(t)+ \\ +N_1(t),\ D(0)=D_0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.44}$$

$$\dot{D}(t)=A(t)D(t)+D(t)A'(t)+N_1(t),\ T\leqslant t\leqslant\tau. \tag{2.45}$$

Оптимальная оценка экстраполяции $m(\tau)$ определяется из уравнений

$$\mathrm{d}m(t)=A(t)m(t)\,\mathrm{d}t+DQ'N_0^{-1}(\mathrm{d}y(t)-Q(t)m(t)\,\mathrm{d}t), \tag{2.46}$$

$$0\leqslant t\leqslant T,\ m(0)=m_0,\ \dot{m}(t)=A(t)m(t),\ T\leqslant t\leqslant\tau. \tag{2.47}$$

При вычислении матрицы $D(\tau)$ сначала решается нелинейное уравнение Риккати (2.44) на отрезке $[0, T]$, а затем линейное уравнение (2.45) на отрезке $[T, \tau]$ с начальным условием $D(T)$, полученным на предыдущем шаге. Аналогично и при вычислении оценки $m(\tau)$ сначала решается стохастическое уравнение (2.46) и определяется $m(T)$, а затем детерминированное уравнение (2.47) на отрезке $[\tau, T]$ с начальным условием $m(T)$.

9. Оптимальная интерполяция. *Задача оптимальной интерполяции* состоит в построении наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки предшествующего состояния вектора $x(\tau)$ по результатам наблюдений (2.2), проведенным на отрезке $[0, T]$, причем $T\geqslant\tau$. Покажем, как задача интерполяции сводится к линейно-квадратичной задаче управления, и сформулируем соответствующий результат.

Обозначим через $m(\tau, T)$ наилучшую оценку, а через $D(\tau, T)$ — соответствующую матрицу ковариации, т. е.

$$m(\tau, T)=Mx(\tau)/y_T,$$

$$D(\tau, T)=M[x(\tau)-m(\tau, T)][x(\tau)-m(\tau, T)]'/y_T. \tag{2.48}$$

Оптимальная оценка интерполяции $m(\tau, T)$ является линейным функционалом результатов наблюдений, т. е.

$$m(\tau, T)=\int_0^T u'(t, \tau, T)\,\mathrm{d}y(t). \tag{2.49}$$

Ядро u оценки (2.49) представляет собой оптимальное управление линейной детерминированной системой

$$\dot{\alpha}(t)=-A'(t)\alpha(t)+Q'(t)u-\delta(t-\tau),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ \alpha(T)=0 \tag{2.50}$$

с квадратичным критерием качества (2.7). Двойственность задач интерполяции (2.48) и управления (2.50), (2.7) устанавливается с помощью тех же рассуждений, что и в п. 2. Используя теперь решение двойственной задачи управления (2.50), (2.7), приведенное в § 3, получаем следующие формулы для функций (2.48):

$$m(\tau, T)=m(T)-\int_{\tau}^{T}[A(s)m(s, T)+\sigma(s)\sigma'(s)D^{-1}(s)(m(s,T)- -m(s))]\,ds, \tag{2.51}$$

$$D(\tau, T)=D(T)-\int_{\tau}^{T}[(A(s)+\sigma_0(s)\sigma'_0(s)D^{-1}(s))D(s, T)+ +D(s, T)(A(s)+\sigma_0(s)\sigma'_0(s)D^{-1}(s))-\sigma(s)\sigma'(s)]\,ds.$$

В выражениях (2.51) положено

$$m(T)=M_x(T)/y_T,\ D(T)=M[x(T)-m(T)][x(T)-m(T)]'/y_T.$$

Иными словами, функции $m(t)$ и $D(t)$ представляют собой решение задачи фильтрации, изложенной выше, и описываются соответственно уравнениями (2.27), (2.18).

10. Некоторые соотношения нелинейной фильтрации. При выводе фильтра Калмана (2.18), (2.27) существенно использовалась линейность правых частей уравнений (2.1), (2.2) по координатам. В общем случае столь же простых соотношений для решения задачи фильтрации получить не удается. Рассмотрим подробнее задачу фильтрации для системы

$$dx(t)=f(t, x(t))\,dt+\sigma(t, x(t))\,d\xi(t),\ t\geqslant 0,\ x\in R_n.$$

Уравнения наблюдений имеют вид

$$dy(t)=Q(t, x(t))\,dt+\sigma_1(t)\,d\xi_1(t),\ y\in R_m.$$

Случайные возмущения $\xi(t)$ и $\xi_1(t)$ представляют собой взаимно независимые стандартные винеровские процессы. Предполагается, что матрица $\sigma_1\sigma_1'$ невырождена. Функции $f(t, x)$ и $Q(t, x)$ непрерывны, причем $f(t, x)$ непрерывно дифференцируема по x, а $Q(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x. Обозначим через $P(t, x)$ условную плотность вероятностей случайной величины $x(t)$ при условии, что на отрезке $[0, t]$ измерена реализация $y(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$. Тогда функция $P(t, x)$ удовлетворяет следующему соотношению*:

*Стратонович Р. Л. Условные процессы Маркова // Теория вероятностей и ее применения, 1960. Т. 5, вып. 2.

$$P(\tau, x)-P(t, x)=\int_t^\tau\Big[-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(f_i(s, x)P(s, x))+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i, j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}((\sigma(s, x)\sigma'(s, x))_{ij}P(s, x))\Big]\mathrm{d}s+$$

$$+\int_t^\tau P(s, x)(Q(s, x)-\bar{Q}(s))'(\sigma_1(s)\sigma_1'(s))^{-1}(\mathrm{d}y(s)-\bar{Q}(s)\,\mathrm{d}s). \quad (2.52)$$

Здесь $\tau\geqslant t$, через f_i обозначена i-я компонента вектора f, а через $(\sigma\sigma')_{ij}$ обозначен ij-й элемент матрицы $\sigma\sigma'$ и положено $\bar{Q}(t)=\int_{R_n}Q(t, x)P(t, x)\,\mathrm{d}x$. Иными словами, $\bar{Q}(t)$ представляет собой условное математическое ожидание вектора $Q(t, x(t))$ при заданных результатах измерения $y(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$.

Поскольку построение точного решения уравнения (2.52) затруднительно, были предложены различные способы решения задачи фильтрации в конкретных случаях.

Приведем здесь один из них, связанный с фильтрацией условно-гауссовских процессов, т. е. процессов, описываемых стохастическими уравнениями Ито, которые линейны по фазовым координатам $x(t)\in R_n$, но могут быть нелинейны по наблюдениям $y(t)\in R_m$. Указанные уравнения имеют вид

$$\mathrm{d}x(t)=A(t, y_t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t, y_t)\,\mathrm{d}\xi(t),\ x(0)=x_0;$$
$$\mathrm{d}y(t)=Q(t, y_t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_0(t, y_t)\,\mathrm{d}\xi_0(t),\ y(0)=y_0.$$

В этих уравнениях y_t означает при каждом t совокупность всех измерений $y_t=y(t+\theta)$, $-t\leqslant\theta\leqslant 0$, функционалы A, σ, Q, σ_0 в каждый момент времени t зависят от измерений y_t, винеровские процессы ξ, ξ_0 и гауссовский вектор x_0 взаимно независимы. Математическое ожидание m_0 и матрица ковариации D_0 вектора x_0 заданы. Отметим, что условное распределение вероятностей $x(t)$ при условии y_t является гауссовским. Обозначим через $m(t)$ оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку вектора $x(t)$ по результатам наблюдений y_t, а через $D(t)$ — соответствующую матрицу ковариации условного распределения. Тогда уравнения для $m(t)$ и $D(t)$ имеют вид [7]

$$\mathrm{d}m(t)=A(t, y_t)m(t)+D(t)Q'(t, y_t)\times$$
$$\times(\sigma_0(t, y_t)\sigma_0'(t, y_t))^{-1}[\mathrm{d}y(t)-Q(t, y_t)m(t)],\ m(0)=m_0, \quad (2.53)$$

$$\dot{D}(t)=A(t, y_t)D(t)+D(t)A'(t, y_t)+\sigma(t, y_t)\sigma'(t, y_t)-$$
$$-D(t)Q'(t, y_t)(\sigma_0(t, y_t)\sigma_0'(t, y_t)^{-1}Q(t, y_t), D(0)=D_0. \quad (2.54)$$

Если матрицы A, σ, Q и σ_0 не зависят от результатов наблюдений, то уравнения (2.53), (2.54) переходят в уравнения (2.27), (2.18) фильтра Калмана.

§ 3. ДИСКРЕТНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

Рассмотрим задачу фильтрации дискретных процессов. Предположим, что эволюция системы с фазовым вектором $x(t_k)$ и наблюдениями $y(t_k)$ описывается уравнениями

$$x(t_{k+1})=A_k x(t_k)+\xi(t_k),\ k=0, 1, 2,\ldots,\ (t_k<t_{k+1}),\ x\in R^n, \quad (3.1)$$

$$y(t_{k+1})=Q_k x(t_k)+\eta(t_k),\ y\in R^m. \quad (3.2)$$

Случайные возмущения $\xi(t_k)\in R^n$ и $\eta(t_k)\in R^m$ предполагаются гауссовыми с нулевыми средними и с матрицами ковариаций G_k (размера $n\times n$) и Σ_k (размера $m\times m$), причем матрицы Σ_k считаются положительно определенными. Априорное распределение начального вектора $x(t_0-0)$ в момент непосредственно предшествующий первому наблюдению также предполагается известным и оно имеет среднее значение m_0 и матрицу ковариаций $D_0>0$. Случайные векторы $x(t_0-0)$, $\xi(t_k)$, $\eta(t_k)$ предполагаются независимыми для всех моментов времени k.

Дискретная система (3.1), (3.2) может использоваться либо для моделирования дискретного во времени процесса наблюдений, либо как разностная аппроксимация непрерывного процесса наблюдений.

При сделанных предположениях условная вероятность распределения вектора $x(t_k)$ при известных наблюдениях $y(t_k)$ будет нормальной, т. е. может быть описана с помощью условных средних $m(t_k)$ и матрицы ковариаций $D(t_k)$. Можно показать, что эти характеристики меняются в соответствии с уравнением (3.1) и должны быть пересчитаны после каждого наблюдения $y(t_k)$. Соответствующие уравнения вводятся ниже.

Обозначим $m(t_k-0)$ и $D(t_k-0)$ значения этих функций в момент непосредственно предшествующий k-му наблюдению $y(t_k)$, а $m(t_k+0)$ и $D(t_k+0)$ значения этих же функций в момент непосредственно следующий за k-ым наблюдением. Из (3.1) следует, что

$$m(t_{k+1}-0)=A_k m(t_k+0), \quad (3.3)$$

$$D(t_{k+1}-0)=A_k D(t_k+0)A_k'+G_k. \quad (3.4)$$

По теореме о нормальной корреляции получаем следующие *уравнения фильтрации*

$$m(t_k+0)=m(t_k-0)+D(t_k+0)Q_k'\Sigma_k^{-1}[y_k-Q_k m(t_k-0)], \quad (3.5)$$

$$m(t_0-0)=m_0,$$

$$D(t_k+0)=D(t_k-0)[I_n+Q_k'\Sigma_k^{-1}Q_k D(t_k-0)]^{-1}, \quad (3.6)$$

$$D(t_0-0)=D_0.$$

Уравнения (3.3) — (3.6) совместно описывают эволюцию оптимальной оценки $m(t_k)$ и матрицы ковариации $D(t_k)$, которые следуют из уравнений эволюции системы (3.1) и учитывают наблюдения (3.2) переменных состояния.

При использовании уравнений фильтрации (3.5), (3.6) необходимо вычислять обратную матрицу размера $n\times n$ на каждом шаге. Это требует n^3 арифметических операций. Такое количество операций требует большого времени вычислений, особенно для больших n.

Для $n>m$ предпочтительно использовать другие эквивалентные уравнения фильтрации, которые используют обращение матриц размера $m\times m$ на каждом шаге:

$$m(t_k+0)=m(t_k-0)+R(t_k+0)[y(t_k)-Q_k m(t_k-0)], \quad (3.7)$$

$$m(t_k-0)=m_0,$$

$$R(t_k+0)=D(t_k-0)Q_k'[Q_k D(t_k-0)Q_k'+\Sigma_k]^{-1},$$

$$D(t_k+0)=[I_m-R(t_k+0)Q_k]D(t_k-0), \quad (3.8)$$

$$D(t_0-0)=D_0.$$

Здесь I_m — единичная матрица размера $m\times m$.

Докажем эквивалентность уравнений (3.5) — (3.6) и (3.7) — (3.9). Пусть $R(t_k+0)=D(t_k+0)Q_k'\Sigma_k^{-1}$. Тогда уравнение (3.7) следует сразу же из уравнения (3.5) и

$$R(t_k+0)=D(t_k-0)[I_n+Q_k'\Sigma_k^{-1}Q_k D(t_k-0)]^{-1}Q_k'\Sigma_k^{-1}=$$

$$=D(t_k-0)[(Q_k'\Sigma_k^{-1})^{-1}+Q_k D(t_k-0)]^{-1}.$$

Этим (3.8) установлено. Далее, из уравнения (3.6) следует, что

$$D(t_k+0)[D^{-1}(t_k-0)+Q_k'\Sigma_k^{-1}Q_k]=I,$$

$$D(t_k+0)D^{-1}(t_k-0)+R(t_k+0)Q_k=I.$$

Таким образом, уравнение (3.9) установлено.

Окончательно, получено два множества уравнений, описывающих дискретный фильтр Калмана. Первые уравнения (3.5), (3.6) используются тогда, когда $n<m$ и второе множество уравнений (3.7), (3.8) для $n>m$.

Основные результаты и формулы главы XI

Линейное оценивание:
оценка $m(\tau)$ — наилучшая в среднеквадратическом смысле, если

$$M\|x(\tau)-m(\tau)\|^2=\min_F M\|x(\tau)-F(y_T)\|^2;$$

выражение для $m(\tau)$:

$$m(\tau)=Mx(\tau)/y_T.$$

Уравнение Винера — Хопфа:

$$R_{xy}(T+s_1)=\int_0^\infty \gamma(\tau)R_{yy}(s_1-\tau)\,d\tau,\ s_1\geqslant 0;$$

решение уравнения Винера — Хопфа

$$\gamma(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\frac{b_0(T,\ i\omega)}{h(i\omega)}\,d\omega,$$

$$R_{yy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|h(i\omega)|^2\,e^{-i\omega t}d\omega,$$

$$b_0(T,\ z)=\int_0^\infty b(T+s)\,e^{-zs}ds,\ Rez\geqslant 0.$$

Фильтр Калмана:

$$dx(t)=A(t)x(t)\,dt+\sigma(t)\,d\xi(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x(0)=x_0$$
$$dy(t)=Q(t)x(t)\,dt+\sigma_0(t)\,d\xi_0(t),\ y(0)=0;$$

уравнения фильтра:

$$dm(t)=A(t)m(t)\,dt+DQ'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}[dy(t)-Q(t)m(t)\,dt],\ m(0)=m_0;$$
$$\dot D(t)=A(t)D(t)+D(t)A'(t)-D(t)Q'(t)(\sigma\sigma_0)^{-1}Q(t)D(t)+$$
$$+\sigma(t)\sigma'(t),\ t\geqslant 0,\ D(0)=D_0,$$

где

$$m(t)=Mx(t)/y_t,\ D(t)=M(x(t)-m(t))(x(t)-y(t))'/y_t,$$

фильтр Калмана устойчив, если

$$C_1 I\leqslant\int_{t-\tau}^{t} Z'(s,\ t)Q'(s)(\sigma_0(s)\sigma_0'(s))^{-1}Q(s)Z(s,\ t)\,ds\leqslant C_2 I;$$

$$C_1 I \leqslant \int_{t-\tau}^{t} Z(t, s)\sigma(s)\sigma'(s)Z'(t, s)\,\mathrm{d}s \leqslant C_2 I;$$

необходимые и достаточные условия устойчивости стационарного фильтра Калмана:

$$\operatorname{rank}(\sigma, A\sigma, \ldots, A^{n-1}\sigma) = n,$$
$$\operatorname{rank}(Q', A'Q', \ldots, (A')^{n-1}Q') = n.$$

Нелинейная фильтрация. Для уравнений, линейных по фазовым координатам $x(t)$ и нелинейных по наблюдениям $y(t)$, оптимальная в среднеквадратическом оценка $m(t)$ вектора $x(t)$ по результатам наблюдений y_t и матрица ковариации $D(t)$ условного распределения вероятностей удовлетворяют соотношениям

$$\mathrm{d}m(t) = A(t, y_t)m(t) + D(t)Q'(t, y_t)(\sigma_0(t, y_t)\sigma_0'(t, y_t))^{-1} \times$$
$$\times [\mathrm{d}y(t) - Q(t, y_t)m(t)],\ m(0) = m_0;$$

$$\dot{D}(t) = A(t, y_t)D(t) + D(t)A'(t, y_t) + \sigma(t, y_t)\sigma'(t, y_t) -$$
$$- D(t)Q'(t, y_t)(\sigma_0(t, y_t)\sigma_0'(t, y_t))^{-1}Q(t, y_t)D(t),\ D(0) = D_0.$$

ГЛАВА XII

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НАБЛЮДЕНИЯ

В этой главе рассмотрены задачи управления процессом наблюдения при различных предположениях о матрицах состава измерений и интенсивности помех. Описан общий способ построения оптимальных законов наблюдения и исследован их вид в конкретных ситуациях.

§ 1. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА НАБЛЮДЕНИЯ

1. Постановка задачи. Основные соотношения. В гл. XI при рассмотрении задач оптимального оценивания состояния $x(t)$ системы (2.1) по результатам измерений (2.2) предполагалось, что матрица состава измерений $Q(t)$ и их точности $\sigma_0(t)$ заданы и фиксированы. Однако в ряде реальных ситуаций в процессе измерений можно варьировать как комбинации наблюдаемых координат системы, так и точность их измерений. Это приводит к различным задачам управления процессом наблюдения (иначе называемым *задачами оптимизации процесса наблюдения*). Такие задачи стали особенно актуальными в последнее время в связи с разработкой и совершенствованием датчиков систем управления, а также широким внедрением ЭВМ, что привело к совершенствованию функционирования систем управления и одновременно к их удорожанию. Усложнение используемых измерительных приборов и алгоритмов обработки наблюдений приводит также к существенному запаздыванию при применении результатов измерений. Общая схема управления наблюдением изображена на рис. 1.1.

В задачах оптимизации процесса наблюдения обычно требуется оптимизировать точность определения фазовых координат системы

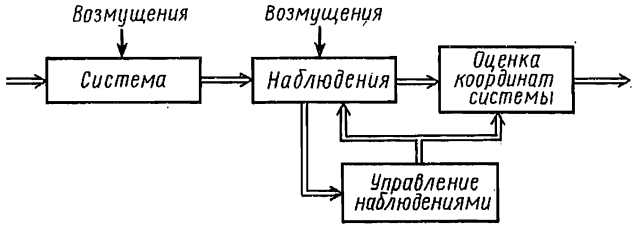


Рис. 1.1. Схема управления наблюдениями

при тех или иных ограничениях на стоимость проведения наблюдений или их длительность. Конкретизируем сказанное для случая, когда движение системы и процесс наблюдения описываются уравнениями вида (2.1), (2.2) гл. XI:

$$dx(t)=A(t)x(t)\,dt+\sigma(t)\,d\xi(t),\ t\geqslant 0,\ x(0)=x_0. \tag{1.1}$$

$$dy(t)=Q(t)x(t)\,dt+\sigma_0(t)\,d\xi_0(t),\ t\geqslant 0,\ y(0)=0. \tag{1.2}$$

Здесь $x\in R_n$, $y\in R_m$; через ξ и ξ_0 обозначены винеровские стандартные процессы, x_0 — гауссовский вектор; $Mx_0=m_0$, $Dx_0=D_0$. Случайные векторы x_0, ξ и ξ_0 взаимно независимы. При этом точность определения координат характеризуется матрицей $D(t)$, а управление наблюдением — матрицей $u=Q'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}Q$, которые связаны уравнением фильтра Калмана (2.18) гл. XI:

$$\dot{D}(t)=A(t)D(t)+D(t)A'(t)-D(t)u(t)D(t)+\sigma(t)\sigma'(t),$$
$$t\geqslant 0,\ D(0)=D_0,\ u=Q'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}Q. \tag{1.3}$$

Весьма часто наблюдения проводятся с целью оптимизировать точность определения величины $q'x(T)$, где q — заданный вектор из R_n. Если, например, i-я компонента вектора q равна единице, а все остальные равны нулю, то $q'x(T)=x_i(T)$ и задача сводится к оптимизации точности определения $x_i(T)$. При этом указанная точность может быть охарактеризована дисперсией величины $q'x(T)$. Таким образом, критерий качества J в задачах оптимизации процесса наблюдения можно задать в форме

$$J=q'D(T)q. \tag{1.4}$$

Управление $u(t)$ наблюдениями также может быть подчинено ряду ограничений. Приведем в качестве иллюстрации некоторые из них, имеющие вид

$$u(t)\in U(t),\ J_i=\int_0^T F_i(t,\,u(t))\ dt\leqslant C_i. \tag{1.5}$$

Здесь $U(t)$ — заданное множество матриц, определяемое возможностями управления наблюдениями, F_i — заданные скалярные функции, а C_i — заданные постоянные. С помощью функционалов типа J_i могут быть учтены имеющие место в задаче ограничения на стоимость проведения измерений или их длительность. Соотношения (1.3) — (1.5) показывают, что задачи оптимизации процесса наблюдения являются обычными задачами оптимального управления детерминированными системами (1.3) для матрицы ковариации $D(t)$. Отмеченная аналогия позволяет также сформулировать и ряд иных постановок задач управления наблюдениями.

Можно, например, ставить задачи, в которых минимизируется один из функционалов J_i и выполнено ограничение $J\leqslant c_0$, что соответствует ситуациям, в которых требуется минимизировать стоимость или длительность наблюдений и обеспечить точность определения величины $q'x(T)$ не ниже заданной. Другой класс задач возникает, если наблюдения носят импульсный характер, т. е. про-

изводятся в дискретные моменты времени t_i. В этом случае можно формально записать

$$u(t)=\sum_{i=1}^{r} u_i\delta(t-t_i),$$

где r — суммарное число измерений, $\delta(t)$ — дельта-функция. Матрицы u_i, моменты наблюдений t_i и их число r являются варьируемыми параметрами и подлежат определению. Кроме того, *импульсные законы наблюдения* представляют интерес еще и потому, что они возникают как оптимальные, если критерий качества рассматриваемой задачи эквивалентен суммарному числу измерений на отрезке $[0, T]$

Замечание. В случае импульсных законов наблюдения необходимо уточнить смысл уравнения (1.3) для матрицы ковариации $D(t)$. Такое уточнение можно сделать, если заметить, что уравнение для обратной матрицы D^{-1} остается справедливым и в этом случае. Это уравнение записывается в виде

$$\dot{D}^{-1}(t)=-D^{-1}(t)A(t)-A'(t)D^{-1}(t)+$$
$$+u(t)-D^{-1}(t)\sigma(t)\sigma'(t)D^{-1}(t),\ D(0)=D_0^{-1}.$$

При этом в случае импульсных законов наблюдения в моменты времени t_i измеряются случайные величины $y(t_i)$, описываемые уравнением

$$y(t_i)=Q(t_i)x(t_i)+\sigma_0(t_i)\xi_i,$$

где ξ_i — последовательность взаимно независимых гауссовских векторов с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей ковариации.

Приведем еще уравнения для оптимальной оценки $m(t)$ и матрицы ковариации $D(t)$ при наблюдениях $y(t_i)$ в дискретные моменты t_i $(0=t_0<t_1<t_2...)$ за системой (1.1). В моменты измерений t_i функции $m(t)$ и $D(t)$ определяются формулами

$$m(t_i+0)=m(t_i)+D(t_i+0)Q'(t_i)(\sigma_0(t_i)\sigma_0'(t_i))^{-1}[y_i-Q(t_i)m(t_i)],$$
$$D(t_i+0)=[D(t_i)^{-1}+Q'(t_i)(\sigma_0(t_i)\sigma_0'(t_i))^{-1}Q(t_i)]^{-1}.$$

В промежутках между измерениями (т. е. при $t_i<t\leqslant t_{i+1}$) уравнения для $m(t)$ и $D(t)$ имеют вид

$$\dot{m}(t)=A(t)m(t),\ \dot{D}(t)=A(t)D(t)+D(t)A'(t)+\sigma(t)\sigma'(t),$$

а начальные условия — вид

$$\lim_{t\to t_i+0} m(t)=m(t_i+0),\ \lim_{t\to t_i+0} D(t)=D(t_i+0),\ m(0)=m_0,\ D(0)=D_0.$$

Вследствие отмеченной выше эквивалентности задач оптимизации процесса наблюдения задачам оптимального управления детер-

минированными системами для построения оптимальных законов наблюдения можно использовать методы, изложенные в гл. V — VII, и, в частности, принцип максимума. Приведем соотношения принципа максимума для задачи (1.1) — (1.3) при $\sigma=0$, в которой требуется, чтобы

$$\int_0^T F_1(t, u(t))\,dt \to \inf_{u\in U},\ J=q'D(T)q=c_1. \tag{1.6}$$

Управление $u(t)$ в уравнении (1.3) содержит в качестве множителя квадратичную функцию фазовых координат $D(t)$, что может привести к некоторым осложнениям при вычислениях. Поэтому целесообразно сделать замену переменных, положив $\alpha(t)=D^{-1}(t)$. Тогда в уравнении для α коэффициент при управлении $u(t)$ есть единичная матрица, поскольку в силу (1.3) и условия $\sigma=0$ имеем

$$\dot\alpha(t)=-A'(t)\alpha(t)-\alpha(t)A(t)+u(t),\ \alpha(0)=D_0^{-1}. \tag{1.7}$$

В соответствии с принципом максимума (см. гл. V) введем скалярую функцию

$$H=\sum_{i,k=1}^{n}\psi_{ik}(-A'\alpha-\alpha A+u)_{ik}+\psi_0F_1(t, u), \tag{1.8}$$

где ψ_0 — постоянная, а ψ_{ik} — элементы симметричной матрицы сопряженных переменных $\psi(t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\dot\psi(t)=A(t)\psi(t)+\psi(t)A'(t),\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{1.9}$$

В момент времени $t=T$ матрица $\psi(T)$ удовлетворяет граничному условию (условию трансверсальности)

$$\psi(T)=\lambda\frac{\partial J}{\partial\alpha},$$

где λ — некоторая постоянная. Записанное покомпонентно условие трансверсальности имеет вид

$$\psi_{ik}(T)=\lambda\frac{\partial J}{\alpha_{ik}}=\lambda q'\left[\frac{\partial D}{\partial\alpha_{ik}}\right]q.$$

Но $\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{ik}}=-D\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial\alpha_{ik}}\right)D$, $\dfrac{\partial D_{il}}{\partial\alpha_{ik}}=-D_{il}D_{kj}$. Поэтому окончательно условие трансверсальности можно представить в форме

$$\psi_{ik}(T)=-\sum_{j,l=1}^{n}\lambda D_{ij}(T)D_{kl}(T)q_jq_l=-\lambda(D(T)q)_i(D(T)q)_k=$$
$$=-\lambda(\alpha^{-1}(T)q)_i(\alpha^{-1}(T)q)_k. \tag{1.10}$$

Оптимальное управление $u(t)$ определяется с помощью условия максимальности гамильтониана H по u:

$$\left[\sum_{i,\,k=1}^{n}\psi_{ik}u_{ik}+\psi_0 f_1(t,\,u)\right]\to\max_{u},\ u\in U,\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{1.11}$$

Формулы (1.6) — (1.11) и образуют замкнутую систему соотношений принципа максимума. Они зависят от n^2+2 постоянных (n^2 элементов матрицы $\psi(T)$ и постоянных λ и ψ_0). Но функция H определена с точностью до постоянного множителя, поэтому одну из n^2+2 постоянных можно выбрать произвольной. Обычно можно положить $\psi_0=-1$. Тогда для определения остальных n^2+1 постоянных остается n^2+1 условий (1.6), (1.10).

Двойственной к рассмотренной является задача

$$J=q'D(T)q\to\inf_{u\in U},\ \int_0^T F_1(t,\,u(t))\,\mathrm{d}t=C_0, \tag{1.12}$$

$$q_i'D(T)q_i=C_i,\ i=1,\ \ldots,\ r;\ r\leqslant n, \tag{1.13}$$

где C_j, $j=0,\ \ldots,\ r$ — заданные постоянные, q и q_i — заданные векторы из R_n. Запишем для этой задачи соотношения принципа максимума. Функция H сохраняет прежний вид (1.8), а условие принципа максимума — вид (1.11), где ψ_0 — неизвестная постоянная.

Аналогично (1.10), условие трансверсальности имеет вид

$$\psi_{ik}(T)=-\sum_{j=1}^{r}\lambda_j[\alpha^{-1}(T)q_j]_i[\alpha^{-1}(T)q_j]_k+(D(T)q)_i(D(T)q)_k. \tag{1.14}$$

Теперь для определения n^2+r+1 постоянных $\psi(T)$, λ_j и ψ_0 имеется n^2+r+1 условий (1.12) — (1.14).

2. Построение оптимальных законов наблюдения, минимизирующих конечную дисперсию. Пусть уравнения движения системы (1.1) и наблюдения (1.2) — скалярные и имеют вид

$$\dot{x}(t)=ax(t),\ T\geqslant t\geqslant 0,\ x(0)=x_0,\ \mathrm{d}y(t)=Q(t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_0\,\mathrm{d}\xi_0(t).$$

Здесь a и $\sigma_0\neq 0$ — заданные постоянные, x_0 — гауссовская случайная величина.

Управление наблюдениями $y(t)$ осуществляется благодаря выбору скалярной измеримой функции $Q(t)$, которая при каждом t может быть равна либо нулю, либо единице, причем суммарное время наблюдений T_0 ($0\leqslant T_0\leqslant T$) задано. Вследствие независимости случайных величин x_0 и $\xi_0(t)$ равенство $Q(t)=0$ в некоторый момент времени означает, что в этот момент времени наблюдения не производятся. Ограничение на суммарную длительность процесса наблюдения эквивалентно изопериметрическому условию

$$\int_0^T Q(t)\,dt = T_0,\ 0 \leqslant T_0 \leqslant T. \tag{1.15}$$

Цель управления наблюдением — выбрать такую функцию $Q(t)$, удовлетворяющую перечисленным условиям, чтобы минимизировать дисперсию $D(T)$. Ясно, что поставленная задача является частным случаем общей постановки задачи управления наблюдениями, описанной в п. 1. При этом множество в (1.5) состоит из двух точек (0 и σ_0^{-1}), функция F_1 в (1.12) такова, что $F_1(t, 0)=0$ и $F_1(t, \sigma_0^{-1})=1$, наконец, $q=1$. Уравнение (1.9) для сопряженной переменной примет вид $\dot{\psi}(t)=2a\psi(t)$. Дисперсия $D(t)$ в силу (1.3) удовлетворяет равенствам $\dot{D}(t)=2aD-D^2u(t)$, $D(0)=D_0>0$. Условие трансверсальности (1.14) дает $\psi(T)=D^2(T)$. Уравнение (1.7) для функции $\alpha(t)=D^{-1}(t)$ записывается в форме

$$\dot{\alpha}(t)=-2a\alpha(t)+u(t),\ \alpha(0)=D_0,\ u(t)=\sigma_0^{-2}Q^2(t)=\sigma_0^{-2}Q(t).$$

Гамильтониан H вследствие (1.8) имеет вид

$$H=\psi(-2a\alpha(t)+u)+\psi_0 Q(t)=-2a\alpha(t)\psi(t)+u(\psi(t)+\sigma_0^2\psi_0).$$

Из принципа максимума (1.11) вытекает, что

$$u(t)=\sigma_0^{-2} \text{ при } \varphi(t)>0,\ u(t)=0 \text{ при } \varphi(t)<0, \tag{1.16}$$

где положено $\varphi(t)=\psi(t)+\sigma_0^2\psi_0$.

Из уравнения и граничного условия для $\psi(t)$ следует, что $\psi(t)=D^2(T)\exp[2a(t-T)]$. Так как $D(T)>0$, то $\psi(t)$ монотонно возрастает при $a>0$ и монотонно убывает при $a<0$.

Отсюда и из (1.16) вытекает, что если $a>0$, то $u(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant t_0$ и $u(t)=\sigma_0^{-2}$ при $t_0<t\leqslant T$; если же $a<0$, то $u(t)=\sigma_0^{-2}$ при $0\leqslant t\leqslant t_0$ и $u(t)=0$ при $t_0<t\leqslant T$. Здесь через t_0 обозначен единственный момент переключения управления $u(t)$, равный единственному корню монотонной функции $\psi(t)+\sigma_0^2\psi_0$ при $a\neq 0$. При этом постоянная ψ_0 выбирается так, чтобы удовлетворялось изопериметрическое ограничение (1.15). Следовательно, $t_0=T-T_0$ при $a>0$ и $t_0=T_0$ при $a<0$. Если, наконец, $a=0$, то критерий качества $D(T)$ не зависит от конкретного вида функции $Q(T)$, удовлетворяющей условию (1.15), и для любой из них равен $D(T)=(D_0^{-1}+\sigma_0^{-2}T_0)^{-1}$. Выпишем еще выражения для минимального значения $D(T)$ при $a\neq 0$ и оптимальном законе наблюдения. Имеем

$$D(T)=e^{2aT}\left[D_0^{-1}+\frac{1}{2}\sigma_0^{-2}a^{-1}e^{2aT}(1-e^{-2aT_0})\right]^{-1},\ a>0,$$

$$D(T)=e^{2aT}\left[D_0^{-1}+\frac{1}{2}\sigma_0^{-2}a^{-1}(e^{2aT_0}-1)\right]^{-1},\ a<0.$$

Полученное решение допускает наглядную интерпретацию. При $a>0$ энергия сигнала x возрастает с ростом времени t и поэтому наблюдения выгодно производить в конце. Если же $a<0$, то энергия сигнала, напротив, убывает с ростом t и наблюдения целесообразно проводить вначале.

3. Пример управления наблюдением с интегральным критерием. В предыдущем примере управление наблюдением преследовало цель возможно более точного определения состояния системы $x(T)$ в конце процесса. Однако если указанная цель преследуется на всем интервале движения, то возникают *задачи оптимизации процесса наблюдения с интегральным критерием качества.* Рассмотрим одну из них. Пусть движение системы и процесс наблюдения описываются скалярными уравнениями вида (1.1), (1.2):

$$\begin{gathered} \mathrm{d}x(t)=ax(t)\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}\xi(t),\ t\in[0,\ T],\ x(0)=x_0, \\ \mathrm{d}y(t)=Q(t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_0\,\mathrm{d}\xi_0(t),\ y(0)=0. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Здесь σ — постоянная, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в п. 2. В частности, управление $Q(t)$ наблюдением принимает два значения (либо нуль, либо единица) и удовлетворяет условию (1.15). Требуется с помощью выбора управления $Q(t)$ минимизировать критерий качества

$$J=\gamma D(T)+\int_0^T D(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $\gamma\geqslant 0$ — заданная постоянная. Положим $\alpha(t)=D^{-1}(t)$. Тогда в силу (1.3), (1.17) имеем

$$\dot{\alpha}(t)=-2a\alpha(t)-\sigma^2\alpha^2(t)+u(t),\ \alpha(0)=D_0^{-1},\ t\geqslant 0, \tag{1.18}$$

где $u(t)=\sigma_0^{-2}Q(t)$. Сопряженная переменная $\psi(t)$ при $t\in[0,\ T]$ определяется равенствами

$$\dot{\psi}(t)=2\psi(t)(a+\sigma^2\alpha(t))-\alpha^{-2}(t),\ \alpha(T)=\gamma\alpha^{-2}(T). \tag{1.19}$$

Используя формулу Коши, заключаем, что решение задачи (1.19) допускает представление

$$\psi(t)=\gamma\alpha^{-2}(T)\exp\left[2\int_T^t(a+\sigma^2\alpha(s))\,\mathrm{d}s\right]+$$

$$+\int_t^T\exp\left[2\int_s^t(a+\sigma^2\alpha(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right]\alpha^{-2}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Отсюда и из оценки $\alpha(t)>0$ следует, что $\psi(t)>0$ при $0\leqslant t<T$. Продифференцировав обе части равенства (1.19) по t, получим

$$\dot{\psi}(t)=2\dot{\psi}(t)(a+\sigma^2\alpha(t))+2\dot{\alpha}(t)(\alpha^{-3}(t)+\sigma^2\psi(t)). \qquad (1.20)$$

Гамильтониан H в рассматриваемой задаче имеет тот же вид, что и в примере п. 2, т. е. $H=-2a\alpha(t)\psi(t)+u(\psi(t)+\sigma_0^2\psi_0)$. Поэтому с учетом принципа максимума оптимальное управление по-прежнему определяется формулами (1.16). Пусть (t_1, t_2) — внутренний интервал отрезка $[0, T]$, на котором оптимальное управление $u(t)$ равно нулю. Тогда на основании (1.16) справедливы соотношения $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=0$, $\varphi(t)<0$ при $0<t_1<t<t_2<T$, где функция $\varphi(t)=\psi(t)+\sigma_0^2\psi_0$. Таким образом, сопряженная переменная $\psi(t)$ имеет локальный минимум в некоторой точке $t_0(t_1<t_0<t_2)$. Значит, в этой точке $\dot{\psi}(t_0)=0$, $\ddot{\psi}(t_0)\geqslant 0$. Кроме того, в точке t_0 справедливы неравенства $\alpha(t_0)>0$, $\psi(t_0)>0$. Следовательно, в силу равенства (1.20) имеем $\dot{\alpha}(t_0)\geqslant 0$.

Подобным же образом устанавливается, что если $u(t)=\sigma_0^{-2}$ на внутреннем интервале (t_1, t_2), $0<t_1<t_2<T$, то существует такая точка $t_0\in(t_1, t_2)$, в которой $\dot{\alpha}(t_0)\leqslant 0$. В силу теоремы о существовании и единственности решения уравнения (1.18) функция $\alpha(t)$ монотонна как на интервалах, где $u(t)=0$, так и на интервалах, где $u(t)=\sigma_0^{-2}$. Поэтому $\dot{\alpha}(t)\leqslant 0$ для всех точек $t\in(t_1t_2)$, если $u(t)=\sigma_0^{-2}$ и $0<t_1<t<t_2<T$. Аналогично, $\dot{\alpha}(t)\geqslant 0$ для всех точек $t\in(t_1, t_2)$, если $u(t)=0$ и $0<t_1<t<t_2<T$. На границе двух интервалов, где функция $\varphi(t)$ меняет знак, управление $u(t)$ имеет скачок. Поэтому решение $\alpha(t)$ уравнения (1.18) непрерывно, а его производная $\dot{\alpha}(t)$ имеет скачок, причем в силу (1.18) производная $\dot{\alpha}(t)$ со стороны интервала наблюдения (на котором $u(t)=\sigma_0^{-2}$) больше на σ_0^{-2}. Следовательно, внутренний интервал, где $\dot{\alpha}(t)\leqslant 0$, не может примыкать к внутреннему интервалу, где $\dot{\alpha}(t)\geqslant 0$.

Таким образом, если существует внутренний интервал (t_1, t_2), $0<t_1<t_2<T$, где управление $u(t)$ постоянно, то этот интервал — единственный. При этом если $\dot{\alpha}(t)\leqslant 0$ при $t\in(t_1, t_2)$, $0<t_1<t_2<T$, то в граничных интервалах $[0, t_1)$ и $(t_2, T]$ имеем $u(t)=0$, $\dot{\alpha}(t)<0$. Аналогично, если $\dot{\alpha}(t)\geqslant 0$ при $t\in(t_1, t_2)$, $0<t_1<t_2<T$, то $\dot{\alpha}(t)>0$ и $u(t)=\sigma_0^{-2}$ при $t\in[0, t_1)$ и $t\in(t_2, T]$. В результате возможны три различных случая: 1^0) имеется один внутренний интервал, на котором $u(t)=\sigma_0^{-2}$; 2^0) имеется один внутренний интервал, на котором $u(t)=0$; 3^0) таких интервалов вообще нет. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1^0. Пусть $u(t)=\sigma_0^{-2}$ при $0<t_1<t<t_1+T_0<T$. Тогда $\dot{\alpha}(t)\leqslant 0$ при $t\in(t_1, t_1+T_0)$, а вне сегмента $[t_1, t_1+T_0]$ имеем $u(t)=0$, $\dot{\alpha}(t)<0$. Из этих соотношений и уравнения (1.18) при $t=0$ следует, что должно быть $2aD_0+\sigma^2>0$.

2^0. Пусть $u(t)=0$ при $0<t_1<t<t_1+T_0+T$. Тогда $\dot{\alpha}(t)\geqslant 0$ при $t\in(t_1, t_1+T_0)$. Поэтому в силу уравнения (1.18) справедлива оценка

$2a+\sigma^2\alpha(t_1)\leqslant 0$. Кроме того, $\dot{\alpha}(t)>0$ вне интервала (t_1, t_1+T_0), т. е. $\alpha(t_1)>\alpha(0)=D_0^{-1}$. В результате получаем, что в рассматриваемом случае $2aD_0+\sigma^2<0$.

3^0. Случай отсутствия внутренних на $[0, T]$ интервалов постоянства управления $u(t)$ можно интерпретировать как предельный либо к случаю 1^0, либо к случаю 2^0. При этом если $2aD_0+\sigma^2=0$, то внутренних интервалов постоянства $u(t)$ быть не может.

Проведенный анализ позволяет констатировать справедливость следующих утверждений:

если $a\geqslant 0$ или $a<0$, но $0<D_0\leqslant -(2a)^{-1}\sigma^2$, то существует такой момент времени t_1, $t_1\leqslant T-T_0$, что оптимальный закон наблюдения $Q_0(t)=1$ при $t\in(t_1, t_1+T_0)$ и $Q_0(t)=0$ при остальных $t\notin(t_1, t_1+T_0)$;

если $a<0$ и $D_0>-(2a)^{-1}\sigma^2$, то существует такое $s_0\leqslant T_0$, что $Q_0(t)=1$ при $0\leqslant t\leqslant s_0$ и при $T-T_0+s_0<t\leqslant T$; функция $Q_0(t)=0$ при $t\in(s_0, T-T_0+s_0)$.

4. Оптимальные импульсные законы наблюдения. Изучим задачу об оптимизации процесса наблюдения за системой вида (1.1) при $\sigma=0$:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t),\ x(0)=x_0,\ 0\leqslant t\leqslant T_0. \tag{1.21}$$

Уравнения непрерывных наблюдений (1.2) представимы в форме

$$\mathrm{d}y(t)=h(t)Q(t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_0(t)\,\mathrm{d}\xi_0(t),\ y(0)=0, \tag{1.22}$$

а наблюдения в дискретные моменты $t_i\in[0,T]$ описываются уравнением

$$y(t_i)=\sqrt{\mu_i}\,Q(t_i)\,x(t_i)+\sigma_0(t_i)\,\xi_0(t_i),\quad y\in R_m.$$

Матрица $Q(t)$ и функция $h(t)$ заданы и непрерывны. Управление наблюдением осуществляется благодаря выбору скалярной функции $\gamma(t)$, удовлетворяющей ограничению

$$\int_0^T \gamma(t)\,\mathrm{d}t\leqslant N,\ \gamma(t)=h^2(t)+\sum_i \mu_i\,\delta(t-t_i), \tag{1.23}$$

где N — заданная постоянная. Цель управления — минимизировать критерий качества (1.4). Функция $\gamma(t)$ характеризует плотность наблюдений. Таким образом, неравенство (1.23) представляет собой ограничение на суммарное «число» измерений. Обозначим через $Z(t, s)$ матрицу Коши системы (1.21), удовлетворяющую соотношениям (1.8) гл. IV.

Рассмотрим матрицы H и $h(s, t)$ следующего вида:

$$H=\int_0^T h(s, T)\,\mathrm{d}s,\ h(s, t)=Z'(s, t)Q'(s)(\sigma_0(s)\sigma_0'(s))^{-1}Q(s)Z(s, t).$$

Поставленную задачу будем называть задачей I.

Теорема 1.1. *Пусть коэффициенты уравнений* (1.21), (1.22) *удовлетворяют сформулированным требованиям, а также общим ограничениям из п.* 1 *и матрица* $H>0$ *(т. е. положительно определена). Тогда оптимальный закон наблюдений* $\gamma(t)$, *разрешающий задачу* 1, *имеет вид*

$$\gamma(t)=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\delta(t-t_i),\ 0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_m\leqslant T, \tag{1.24}$$

где μ_i — *положительные постоянные, целое число* $m\leqslant 0{,}5n(n+1)$ *и* $\mu_1+\ldots+\mu_m=N$.

□ Доказательство теоремы 1.1 разобьем на четыре этапа.

1^0. Обозначим через V множество неубывающих функций $v(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ с ограниченной вариацией на $[0,\ T]$ таких, что $v(0)=0$, $v(T)\leqslant N$. Норма $\|u\|$ произвольной функции $u(t)$ с ограниченной вариацией на $[0,\ T]$ определяется равенством $\|u\|=\int_0^T|\mathrm{d}u(t)|$, где интеграл в правой части понимается в смысле Лебега — Стильтвеса. Отметим, что для функции $v(t)\in V$ ее норма $\|v\|=v(T)\leqslant N$. Зададим матрицу $r(t,\ v)$ следующим образом:

$$r(t,\ v)=Z'(0,\ t)D_0^{-1}Z(0,\ t)+\int_0^t h(s,\ t)\,\mathrm{d}v(s). \tag{1.25}$$

Назовем задачей II задачу определения функции $v\in V$, минимизирующей функционал $q'r(T,\ v)^{-1}q$. Цель первого этапа доказательства состоит в обосновании существования управления $v(t)\in V$, разрешающего задачу II. Пусть $v_i(t)\in V$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ — минимизирующая последовательность функций, для которой

$$\lim_{i\to\infty}q'r(T,\ v_i)^{-1}q=\inf_{v\in V}q'r^{-1}(T,\ v)q=\lambda.$$

Из определения множества функций V следует, что все $v_i(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ и их нормы равномерно ограничены величиной N. Значит, в силу второй теоремы Хелли [3] существует подпоследовательность последовательности $v_i(t)$, которая сходится в каждой точке отрезка $[0,\ T]$ к функции $v_0(t)$. Отсюда, в частности, вытекает, что $v_0(T)\leqslant N$. Для сокращения записи будем считать, что и сама последовательность $v_i(t)$ сходится поточечно к $v_0(t)$. Тогда на основании первой теоремы Хелли [3] последовательность $v_i(t)$ сходится слабо к $v_0(t)$. Проверим, что управление $v_0(t)$ разрешает задачу II.

Из монотонности $v_i(t)$ следует, что для любых двух точек t_1 и t_2 $(0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T)$ имеет место неравенство

$$v_0(t_2)-v_0(t_1)\geqslant v_0(t_2)-v_i(t_2)+v_i(t_1)-v_0(t_1).$$

Из этого неравенства и поточечной сходимости v_i к v_0 вытекает, что функция $v_0(t)$ не убывает и ее норма $\|v_0\|=v_0(T)\leqslant N$, т. е. $v_0\in V$. Для доказательства оптимальности v_0 покажем, что $\lambda=q'r^{-1}(T, v_0)q$. Заметим, что на основании непрерывности матрицы $h(t, T)$ и слабой сходимости v_i к v_0 справедливо равенство

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^T h(t, T)\,dv_i(t)=\int_0^T h(t, T)\,dv_0(t).$$

Отсюда и из формулы (1.25), в которой положено $v=v_i$ и $v=v_0$, вытекает, что $r(t, v_i)\to r(t, v_0)$ при $i\to\infty$. Значит, с учетом определения числа λ имеем

$$\lambda=q'r^{-1}(t, v_0)q.$$

2^0. Докажем теперь, что $\|v_0\|=N$. Предположим противное, т. е. что $\|v_0\|<N$. Покажем, что это предположение противоречит оптимальности v_0 в задаче II. Для этого установим существование такого управления $v_1\in V$, что $q'r(T, v_1)q<q'r(T, v_0)q$. Положим

$$v_1(t)=v_0(t)+\varepsilon t,\ \varepsilon=T^{-1}(N-\|v_0\|)\geqslant 0.$$

Ясно, что $v_1\in V$, поскольку $\|v_1\|=\|v_0\|+\varepsilon T=N$. На основании соотношения (1.25) матрица $r(t, v_1)$ положительно определена. Поэтому

$$q'r(T, v_1)^{-1}q=\max_{x\in R_n}[2x'q-x'r(T, v_1)x]. \tag{1.26}$$

Подставим сюда вместо $r(T, v_1)$ правую часть формулы (1.25) при $t=T$ и $v_1=v_0+\varepsilon t$. Так как матрица H положительно определена, то

$$q'r(T, v_1)^{-1}q=\max_{x\in rR_n}[2x'q-x'r(T, v_0)x-\varepsilon x'Hx]<$$

$$<\max_{x\in R_n}[2x'q-x'r(T, v_0)x]=q'r(T, v_0)^{-1}q.$$

Равенство $\|v_0\|=N$ установлено.

3^0. Рассмотрим вспомогательную задачу III, состоящую в определении скалярной функции $\omega(t)$, $\omega(0)=0$ с ограниченной вариацией и минимальной нормой $\|\omega\|$, для которой

$$r(0, \omega)=r(0),\ r(T, \omega)=r(T, v_0). \tag{1.27}$$

Отметим, что в задаче III оптимальная функция $\omega(t)$ ищется среди всех функций с ограниченной вариацией на $[0, T]$, в то время как в задачах I и II оптимальное управление ищется только в классе монотонных функций. Допустимое управление в задаче III существует, поскольку таковым является, например, v_0. Действительно, по построению v_0 имеем $\|v_0\|=N<\infty$, $r(0, v_0)=D_0^{-1}=r(0)$, а спра-

ведливость граничного условия (1.27) на правом конце очевидна. Из существования допустимого управления v_0 с помощью построения минимизирующей последовательности и перехода к пределу (подобно этапу 1^0 доказательства) устанавливается существование оптимального управления $\omega_0(t)$ в задаче III, причем так как $\|v_0\|=N$, то $\|\omega_0\|\leqslant N$. Покажем сначала, что $\omega_0(t)$ — неубывающая функция. Предположим, что это не так. Введем функции $\omega_{01}(t)$ и $\omega_{02}(t)$:

$$2\omega_{01}(t)=\int_0^t|\mathrm{d}\omega_0(s)|+\omega_0(t),\ 2\omega_{02}(t)=\int_0^t|\mathrm{d}\omega_0(s)|-\omega_0(t).$$

Ясно, что $\omega_{01}(0)=\omega_{02}(0)=0$, $\omega_0(t)=\omega_{01}(t)-\omega_{02}(t)$ и функции ω_{0l} не убывают. В силу сделанного предположения функция $\omega_{02}(t)$ имеет точки роста на $[0, T]$, т. е. $\|\omega_{02}\|>0$. Значит, $\|\omega_{01}\|<N$. Используя соотношения (1.25), (1.26) и неубывание $\omega_{02}(t)$, заключаем, что

$$\lambda=q'r^{-1}(T, v_0)q=q'r^{-1}(T, \omega_0)q=$$

$$=\max_{y\in R_n}\left[2y'q-y'z'(0, T)r(0)z(0, T)y-y'\int_0^T h(s, T)\,\mathrm{d}\omega_0(s)y\right]\geqslant$$

$$\geqslant\max_{y\in R_n}\left[2y'g-y'z'(0, T)r(0)z(0, T)y-y'\int_0^T h(s, T)\,\mathrm{d}\omega_{01}(s)y\right]=$$

$$=q'r^{-1}(T, \omega_{01})q.$$

Отсюда видно, что неубывающая функция $\omega_{01}\in V$ разрешает задачу II, причем $\|\omega_{01}\|<N$. Поэтому, дословно повторяя доказательство этапа 2^0 (с заменой v_0 на ω_{01}), убеждаемся в существовании такого управления $v_1\in V$, $\|v_1\|=N$, что $q'r^{-1}(T, v_1)q<q'r^{-1}(T, \omega_{01})q\leqslant q'r^{-1}(T, v_0)q$. Однако последнее неравенство противоречит оптимальности v_0 в задаче II. Значит, $\omega_0(t)$ — неубывающая функция. Аналогично обосновывается и то, что в классе V решение задачи III может реализовывать только функция с нормой N. Следовательно, в силу допустимости управления $v_0(t)$ в задаче III оно является и оптимальным в этой задаче.

4^0. На основании результатов этапов 1^0 и 2^0 решение задачи II реализует неубывающая функция с нормой N. Далее, в силу результата этапа 3^0 решение задачи II эквивалентно решению задачи III, которая обычным образом сводится к проблеме моментов. Указанная проблема в рассматриваемом случае заключается в определении функции $v(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$, имеющей минимальную норму $\|v\|$ и удовлетворяющей уравнению

$$r(T, v_0) - z'(0, T)D_0^{-1}z(0, T) = \int_0^T h(s, T)\,dv(s).$$

Решение сформулированной проблемы моментов* (а следовательно, и задачи II) реализует кусочно-постоянная функция $v_0(t)$ с числом скачков, не превосходящих $n(n+1)/2$. На основании результата этапа 2^0 функция $v_0(t)$ монотонно не убывает и $\|v_0\| = v_0(T) = N$. Выясним, наконец, связь задач I и II. Матрица $D^{-1}(T)$ с учетом (1.7) допускает представление

$$D^{-1}(T) = z'(0, T)D_0^{-1}z(0, T) + \int_0^T h(s, T)\gamma(s)\,ds. \qquad (1.28)$$

Заметим, что любой неотрицательной функции $\gamma(t)$, удовлетворяющей оценке (1.23), соответствует следующая функция $v(t)$ с ограниченной вариацией:

$$v(t) = \int_0^t \gamma(s)\,ds,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ v(0) = 0,\ \|v\| = v(T) \leqslant N. \qquad (1.29)$$

При этом для функций $v(t)$, представимых в виде (1.29), уравнение (1.25) совпадает с уравнением (1.28) для матрицы $D^{-1}(T)$. Обозначим через V_1 множество всех функций $v(t)$, которые можно получить с помощью формулы (1.25) при различных $\gamma(s) \geqslant 0$, удовлетворяющих неравенству (1.23). Так как $V_1 \subset V$, то, сравнивая (1.28) с (1.25), заключаем, что

$$\lim_{v \in V} q'r(T, v)q \leqslant \inf_{v \in V_1} q'D(T)q. \qquad (1.30)$$

При этом строгое равенство в (1.30) (а вместе с ним и равенство минимальных значений критериев качества в задачах I и II) может иметь место тогда и только тогда, когда оптимальному управлению $v_0(t)$ в задаче II можно поставить в соответствие функцию $\gamma(t)$ с помощью формулы (1.29). Указанное соответствие между $v(t)$ и $\gamma(t)$ выполняется, например, для кусочно-постоянных функций $v(t)$. Следовательно, из доказанного вида оптимально управления $v_0(t)$ в задаче II вытекает, что оптимальная функция $\gamma(t)$ в задаче I определяется выражением (1.24). ■

Замечание. Доказанная теорема позволяет свести вопрос о построении оптимального закона наблюдения к минимизации скалярной функции конечного числа переменных μ_i и t_i, где $i = 1, \ldots, m$, $2m \leqslant n(n+1)$, удовлетворяющих ограничениям теоремы 1.1. Для этого достаточно определить $D(T)$ из уравнения (1.28) при $\gamma(t)$ вида (1.24).

*Neustadt W. L. Optimization, a moment problem and nonlinear programing. J. Soc. Industr. and Appl. Math., A2, N 1, 1964.

Поясним сказанное подробнее на примерах.

Пусть (1.21), (1.22) — скалярные уравнения с постоянными коэффициентами и $\sigma=0$, т. е.

$$\dot{x}(t)=ax(t),\ \mathrm{d}y(t)=h(t)x(t)\,\mathrm{d}x+\sigma_0\,\mathrm{d}\xi_0(t),\ y(0)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

Требуется выбрать функцию $h(t)$, удовлетворяющую ограничению (1.23), так, чтобы минимизировать дисперсию $D(T)$ точки. Требуется минимизировать дисперсию $\mathrm{d}_{22}(T)$ скорости $x_2(t)$ в конце процесса наблюдения. В соответствии с теоремой 1.1, все требования которой выполнены, оптимальный закон наблюдения $\gamma(t)=N\delta(t-t_1)$, т. е. все измерения проводятся в один момент времени t_1. Для определения этого момента найдем значение критерия качества $D(T)$ при управлении $\gamma(t)=N\delta(t-t_1)$. Уравнение для $D^{-1}(t)$ имеет вид

$$\dot{D}^{-1}(t)=\gamma(t)\sigma_0^{-2}-2aD^{-1}(t)=N\delta(t-t_1)\sigma_0^{-2}-2aD^{-1}(t),$$
$$D^{-1}(0)=D_0^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$D(t_1)=D_0\mathrm{e}^{2at_1},\ D(t_1+0)=[N+D^{-1}(t_1)]^{-1},$$
$$D(T)=D(t_1+0)\mathrm{e}^{2a(T-t_1)}=D_0\mathrm{e}^{2aT}[1+N\sigma_0^2D_0\mathrm{e}^{2at_1}]^{-1}.$$

Значит, критерий качества $D(T)$ достигает минимума по $t_1\in[0,T]$ при $t_1=T$, если $a>0$, и при $t_1=0$, если $a<0$. Следовательно, все наблюдения при $a>0$должны быть произведены в конце процесса, а при $a<0$ — в начале. Если же $a=0$, то выбор момента проведения наблюдений не влияет на величину критерия качества $D(T)$.

5. Импульсный закон наблюдения за материальной точкой. Установим оптимальный закон наблюдения за материальной точкой, совершающей свободное движение по прямой. Наблюдению доступна координата $x_1(t)$ токи. Требуется минимизировать дисперсию $\mathrm{d}_{22}(T)$ скорости $x_2(t)$ в конце процесса. Запишем уравнения движения

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\ \dot{x}_2(t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{1.31}$$

Матрица ковариации D_0 априорного распределения вероятностей вектора $(x_1(0))$ — диагональная с известными элементами $\mathrm{d}_{11}(0)$ и $\mathrm{d}_{22}(0)$ на главной диагонали.

Уравнение наблюдения имеет вид (1.2):

$$\mathrm{d}y(t)=h(t)x_1(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_0\,\mathrm{d}\xi_0(t),\ y(0)=0, \tag{1.32}$$
$$y(t_i)=\sqrt{\mu_i}x_1(t_i)+\sigma_0(t_i)\xi_0(t_i),$$

где постоянная $\sigma_0\neq 0$.

Управление наблюдения осуществляется выбором скалярной функции $h(t)$, удовлетворяющей ограничениям (1.23). Отметим, что уравнения (1.31), (1.32) получаются из общих уравнений (1.21), (1.22), если в последних положить

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ Q=(1\quad 0).$$

Проверим сначала выполнение требования $H>0$ теоремы 1.1. Матрица $Z(s, t)$ имеет вид

$$Z(s, t)=\exp[A(s-t)]=\begin{pmatrix}1 & s-t\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

Кроме того,

$$Q'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}Q=\sigma_0^{-2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Следовательно,

$$h(s, T)=Z'(s, T)Q'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}QZ(s, T)=\sigma_0^{-2}\begin{pmatrix}1 & s-T\\ s-T & (s-T)^2\end{pmatrix},$$

и

$$H=\int_0^T h(s, T)\mathrm{d}s=\sigma_0^{-2}\begin{pmatrix}T & -T^2/2\\ -T^2/2 & T^2/3\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица H положительно определена. На основании теоремы 1.1 оптимальный закон наблюдения $\gamma(t)$ определяется выражением

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_i\delta(t-t_1),\ 0\leqslant t_i\leqslant T,\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=N,\ \mu_i\geqslant 0, \tag{1.35}$$

где моменты измерений t_i и их интенсивности μ_i подлежат определению. Для этого найдем выражение критерия качества $\mathrm{d}_{22}(T)$ в зависимости от μ_i и t_i.

Запишем уравнение для матрицы $D^{-1}(t)$:

$$\dot{D}^{-1}=-A'D^{-1}-D^{-1}A+\gamma(t)u,\ D^{-1}(0)=D_0^{-1},\ u=Q'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}Q.$$

Решение этого уравнения выражается формулой

$$D^{-1}(T)=\mathrm{e}^{-A'T}D_0^{-1}\mathrm{e}^{-AT}+\int_0^T\mathrm{e}^{-A'(T-t)}\gamma(t)u\,\mathrm{e}^{-A(T-t)}\mathrm{d}t=$$

$$=\mathrm{e}^{-A'T}\left[D_0^{-1}+\int_0^T\mathrm{e}^{A't}\gamma(t)u\,\mathrm{e}^{At}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-AT}.$$

Используя соотношения (1.33) — (1.35), убеждаемся в справедливости выражения

$$D^{-1}(T)+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{11}(0)^{-1}+N\sigma_0^{-2} & \sigma_0^{-2}\delta_1\\ \sigma_0^{-2}\delta_1 & d_{11}^{-1}(0)+\gamma_0^{-2}\delta_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ T & 1\end{pmatrix}.$$

$$\delta_1=\mu_1t_1+\mu_2t_2+\mu_3t_3,\ \delta_2=\mu_1t_1^2+\mu_2t_2^2+\mu_3t_3^2.$$

Отсюда следует, что критерий качества $d_{22}(T)$ имеет вид

$$d_{22}(T)=[d_{11}^{-1}(0)+N\sigma_0^{-2}][(d_{11}^{-1}(0)+N\sigma_0^{-2})(d_{22}^{-1}(0)+\sigma_0^{-2}\delta_2-\sigma_0^{-4}\delta_1^2=]^{-1}.$$

Значит, минимизация по μ_i и t_i выражения для $d_{22}(T)$ эквивалентна максимизации по этим переменным функции

$$\begin{gathered}(d_{11}^{-1}(0)+\sigma_0^{-2})\sigma_0^{-2}\delta_2-\sigma_0^{-4}\delta_1^2\to\max,\\ \mu_i\geqslant 0,\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=N,\ 0\leqslant t_i\leqslant T.\end{gathered}\tag{1.36}$$

Заметим, что функция (1.36) удовлетворяет неравенству

$$(d_{11}^{-1}(0)+\sigma_0^{-2}N)\sigma_0^{-2}\delta_2-\sigma_0^4\delta_1^2\geqslant d_{11}^{-1}(0)\sigma_0^{-2}\delta_2\geqslant 0.\tag{1.37}$$

Но при любых фиксированных μ_i функция (1.36) представляет собой квадратичную форму переменных t_i, и притом положительно определенную в силу (1.37). Поэтому максимум функции (1.36) по перетрехмерного $t_i\in[0, t]$ может достигаться только в одной из вершин трехмерного куба $0\leqslant t_i\leqslant T$, $i=1, 2, 3$. Таким образом, оптимальный закон наблюдений должен иметь вид $\gamma(t)=\mu_1\delta(t)+\mu_2\delta(t-T)$, причем $\mu_2>0$, поскольку при $\mu_2=0$ все наблюдения проводятся в начале процесса, а это соответствует точке нулевого минимума функции (1.36). Подставляя указанную оптимальную функцию $\gamma(t)$ в (1.36), получаем, что μ_2 есть точка максимума функции

$$(d_{11}^{-1}(0)+N\sigma_0^{-2})\mu_2-\mu_2^2\sigma_0^{-2},\ 0\leqslant\mu_2\leqslant N.$$

Следовательно, приравнивая нулю производную этой функции по μ_2, заключаем, что

$$\mu_2=\min[N,\ (d_0^{-1}(0)\sigma_0^2+N)/2].$$

Минимальное значение дисперсии $d_{22}(T)$ скорости при этом значении μ_2 составляет

$$\begin{gathered}d_{22}(T)=[d_{11}^{-1}(0)+N\sigma_0^{-2}][(d_{11}^{-1}(0)+N\sigma_0^{-2})\times\\ \times(d_{22}^{-1}(0)+\sigma_0^{-2}\mu_2T^2)-\sigma_0^{-4}\mu_2^2T^2].\end{gathered}$$

6. Оптимальное управление помехой в канале наблюдений. Опишем постановки задач, связанных с оптимальным управлением шумом в наблюдениях с целью максимально затруднить измерение координат системы. Предполагается, что движение системы и процесс наблюдения описываются соотношениями (1.1), (1.2).

Управляющая сторона имеет возможность варьировать матрицу $\sigma_0(t)$, определяющую интенсивность помех в канале наблюдений, для того чтобы максимизировать те или иные функционалы от

$D(t)$. Матрица ковариации $D(t)$ удовлетворяет уравнению (1.3), в котором управление $u(t)$ зависит от выбора $\sigma_0(t)$.

Ясно, что возможны постановки задач оптимального управления помехой в измерениях, отличающиеся от постановок задач оптимизации процесса наблюдения только тем, что критерий качества в них должен быть максимизирован. Можно, например, ставить задачи о максимизации функционала (1.4) на траекториях системы (1.3) при ограничениях (1.5).

Другая постановка задачи получается, если требуется минимизировать один из функционалов J_i типа (1.5) при ограничениях $q_i'D(T)q_i \geqslant C_i$, где $C_i > 0$ — заданные постоянные, а q_i — заданные векторы из R_n. Смысл этих ограничений состоит в том, чтобы не допустить определения «противником» линейных комбинаций $q'x(T)$ фазовых координат системы с точностью, большей некоторых критических значений C_i.

Подобно задачам оптимизации процесса наблюдения, задачи оптимизации помех являются обычными задачами оптимального управления детерминированной системой (1.3) для матрицы ковариации. Поэтому для построения оптимальных законов управления помехой могут быть использованы методы, рассмотренные в гл. IV — VII. Поясним сказанное на примерах.

1°. *Скалярное наблюдение в скалярной системе.* Рассмотрим случай скалярных уравнений движения и наблюдения вида (1.1), (1.2):

$$\mathrm{d}x(t) = ax(t) + \sigma\,\mathrm{d}\xi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x(0) = x_0,$$
$$\mathrm{d}y(t) = x(t) + \sigma_0(t)\,\mathrm{d}\xi(t),\ y(0) = 0.$$

Здесь a и σ — заданные постоянные, x_0 — гауссовская величина с дисперсией $D_0 > 0$. Управление шумом в наблюдениях осуществляется с помощью выбора функции $\sigma_0(t)$. Предполагается, что эта функция в каждый момент времени t может принимать одно из двух значений $\sqrt{\sigma_2}$ или $\sqrt{\sigma_1}$, причем $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$, кроме того,

$$\int_0^T f(\sigma_0(t))\,\mathrm{d}t = T_0,\ 0 \leqslant T_0 \leqslant T,\ f(\sqrt{\sigma_1}) = 0,$$
$$f(\sqrt{\sigma_2}) = 1. \tag{1.38}$$

Задача состоит в выборе функции $\sigma_0(t)$, удовлетворяющей сформулированным ограничениям, которая максимизирует дисперсию $D(T)$ состояния системы $x(T)$ в конце процесса. Вследствие (1.3) дисперсия $D(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\dot{D}(t) = 2aD(t) - u(t)D^2(t) + \sigma^2,\ D(0) = D_0,\ u(t) = \sigma_0^{-2}(t).$$

Как и выше, для того чтобы представить коэффициент при управлении $u(t)$ в виде, не зависящем от $D(t)$, произведем замену переменных $\alpha(t) = D^{-1}(t)$. Получим

$$\dot{\alpha}(t) = -2a\alpha(t) + u(t) - \sigma^2\alpha^2(t),\ \alpha(0) = D_0^{-1},\ u(t) = \sigma_0^{-2}(t). \tag{1.39}$$

Для построения оптимального управления $u_0(t)$, минимизирующего $\alpha(T)$ при ограничениях (1.38), запишем соотношения принципа максимума. Сопряженная переменная $\psi(t)$ есть решение задачи

$$\dot{\psi}(t)=2\psi(t)(a+\sigma^2\alpha(t)),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ \psi(T)=-1. \qquad (1.40)$$

Оптимальное управление $u_0(t)$ определяется из условия максимума гамильтониана H по u:

$$H=\psi(t)(-2a\alpha(t)+u-\sigma^2\alpha^2(t))+\psi_0 f(u^{-1/2})\to\max_u,$$

где ψ_0 — некоторая постоянная.

Отсюда и из (1.38) вытекает, что

$$u_0(t)=\sigma_1^{-1} \text{ при } \psi(t)+C>0,\ u_0(t)=\sigma_2^{-1} \text{ при } \psi(t)+C<0. \qquad (1.41)$$

Здесь постоянная C выбирается так, чтобы управление удовлетворяло изопериметрическому ограничению (1.38). Проанализируем полученное выражение для оптимального управления. Из соотношений (1.40) видно, что $\psi(t)<0$, $0\leqslant t\leqslant T$. Поэтому при $a>0$ и при $a=0$, $\sigma^2>0$ производная сопряженной переменной $\dot{\psi}(t)<0$. Следовательно, в указанных случаях (т. е. либо при $a>0$, либо при $a=0$, $\sigma^2>0$) на основании (1.41) имеем

$$u_0(t)=\sigma_1^{-1},\ 0\leqslant t\leqslant T-T_0,\ u_0(t)=\sigma_2^{-1},\ T-T_0<t\leqslant T.$$

Иными словами, в указанных случаях бóльшую интенсивность помехи в наблюдениях выгоднее создавать на интервале времени длины T_0, примыкающем к концу процесса. Если $a=0$, $\sigma=0$, то $D(T)$ при любом управлении $\sigma_0(t)$ помехой, удовлетворяющем ограничениям (1.38), выражается формулой

$$D(T)=[D_0^{-1}+\sigma_2^{-1}T_0+\sigma_1^{-1}(T-T_0)]^{-1}.$$

Если $a=0$, $\sigma=0$, то $\dot{\psi}(t)>0$, поэтому $u_0(t)=\sigma_2^{-1}$ при $0\leqslant t\leqslant T_0$ и $u_0(t)=\sigma_1^{-1}$ при $T_0<t\leqslant T$.

Остается изучить случай $a<0$, $\sigma^2>0$, в котором $\ddot{\psi}(t)=2\psi(t)[(a+\sigma^2\alpha(t))^2+a^2+\sigma^2 u]<0$, $0\leqslant t\leqslant T$. Значит, $\psi(t)$ — вогнутая функция, т. е. в силу (1.40) существует такой момент времени $\tau\in[0, T_0]$, что

$$u_0(t)=\sigma_2^{-1},\ 0\leqslant t\leqslant\tau,\ T+\tau-T_0<t\leqslant T,$$

$$u_0(t)=\sigma_1^{-1},\ \tau<t\leqslant T+\tau-T_0.$$

Для определения момента τ найдем функцию, характеризующую зависимость $\alpha(T)$ от τ, а затем вычислим минимум этой функции по τ. Проинтегрировав уравнение (1.39) последовательно на каждом из интервалов постоянства управления $u_0(t)$, получим

$$\alpha(T)=\sigma^{-2}[(\beta-a)-2\Delta^{-1}\beta(\lambda^2\gamma C_1(\lambda_1^2-1)+\lambda(\gamma^2-\lambda_1^2))], \qquad (1.42)$$

где положено

$$\beta=\sqrt{a^2+\sigma^2\sigma_2^{-1}}>0,\ \lambda=e^{2\beta\tau}\in[1,\ e^{2\beta T_0}], \tag{1.43}$$

$$\gamma=(\beta-\sqrt{a^2+\sigma^2\sigma_1^{-2}})\ (\beta+\sqrt{a^2+\sigma^2\sigma_1^{-2}})^{-1},\ \lambda_1=e^{a_1(T-T_0)},$$

$$a_1=-\sqrt{a^2+\sigma^2\sigma_1^{-1}}<0,$$

$$C_1=(\beta+a+\sigma^2D_0^{-1})\ (\beta-a-\sigma^2D_0^{-1})^{-1},$$

$$\Delta=\lambda^2\gamma C_1\ (\lambda_1^2-1)+\lambda\ [\gamma^2-\lambda_1^2+C_1e^{2\beta T_0}\ (\gamma^2\lambda_1^2-1)]-\gamma e^{2\beta T_0}\ (\lambda_1^2-1).$$

Для введенных величин справедливы следующие неравенства:

$$-1<\gamma<0,\ 0<\lambda_1<1,\ |(\lambda_1+\gamma)\ (\lambda_1\gamma+1)^{-1}|\leqslant 1,$$

$$(\lambda_1-\gamma)\ (1-\lambda_1\gamma)\leqslant 1. \tag{1.44}$$

Дальнейшее исследование проведем отдельно для случаев $\alpha_2=\beta-a-\sigma^2D_0^{-1}\neq 0$ и $\alpha_2=0$. Пусть сначала $\alpha_2\neq 0$. В установленном выражении (1.42) для $\alpha\ (T)$ от выбора τ зависит только параметр λ. При рассмотрении зависимости $\alpha\ (T)$ от λ удобно обозначить $\alpha\ (T)=J\ (\lambda)$. Найдем точки $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$, где $J\ (\lambda)=\alpha\ (T)$ как функция λ достигает своих локального максимума и минимума.

Для этого вычислим производную $dJ\ (\lambda)/d\lambda$. Из (1.42) следует, что

$$dJ\ (\lambda)/d\lambda=-2\beta\sigma^{-2}\Delta^{-2}e^{2\beta T_0}\gamma\ (\lambda_1^2-1)\times$$

$$\times[\lambda^2C_1\ (\gamma^2\lambda_1^2-1)-2\lambda C_1\gamma\ (\lambda_1^2-1)-(\gamma^2-\lambda_1^2)].$$

Приравняем теперь эту производную нулю и найдем участки ее знакопостоянства, не учитывая пока ограничение $\lambda\in[1,\ \exp\ (2\beta T_0)]$. В результате получим, что всегда $\lambda_{\max}<\lambda_{\min}$ и $\partial J\ (T)/\partial\lambda>0$ при $\lambda<\lambda_{\max}$ и $\lambda>\lambda_{\min}$, а для $\lambda_{\max}<\lambda<\lambda_{\min}$ производная $\partial J\ (T)/\partial\lambda<0$, причем $\lambda_{\max}=(\lambda_1-\gamma)\ [C_1\ (\gamma\lambda_1-1)]^{-1}$, если $C_1>0$; $\lambda_{\min}=(\lambda_1+\gamma)\ [C_1\ (\lambda_1\gamma+1)]^{-1}$, если $C_1>0$; $\lambda_{\max}=(\lambda_1+\gamma)\ [C_1\ (\lambda_1\gamma+1)]^{-1}$, если $C_1<0$; $\lambda_{\min}=(\lambda_1-\gamma)\ [C_1\ (\lambda_1\gamma-1)]^{-1}$, если $C_1<0$.

Полученные соотношения позволяют установить то значение $\lambda\in[1,\ \exp\ (2\beta T_0)]$, где функция $\alpha\ (T)$ принимает свое минимальное значение. С учетом (1.44) заключаем, что при $a<0$, $\sigma\neq 0$, $\alpha_2\neq 0$ справедливы следующие выражения для длительности τ первого интервала активной помехи:

$$\tau=\begin{cases}0 & \text{при } \lambda_{\min}\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } 1<\lambda_{\min}<e^{2\beta T_0} \text{ и } J\ (1)<J\ (\lambda_{\min}),\\ [\ln\lambda_{\min}]/2\beta & \text{при } 1<\lambda_{\min}\leqslant e^{2\beta T_0} \text{ и } J\ (1)>J\ (\lambda_{\min}),\\ T_0 & \text{при } \lambda_{\min}>e^{2\beta T_0} \text{ и } \lambda_{\max}\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } \lambda_{\min}>e^{2\beta T_0},\ \lambda_{\max}>1 \text{ и } J\ (1)\leqslant J\ (e^{2\beta T_0}),\\ T_0 & \text{при } \lambda_{\min}>e^{2\beta T_0},\ \lambda_{\max}>1 \text{ и } J\ (1)>J\ (e^{2\beta T_0}).\end{cases}$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha_2=0$. В этом случае производная $dJ(\lambda)/d\lambda$ имеет вид

$$\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda}=-\frac{2\beta}{\sigma^2}\frac{e^{2\beta T_0}\gamma(\lambda_1^2-1)\lambda^2(\gamma^2\lambda_1^2-1)}{[\lambda^2\gamma(\lambda_1^2-1)+\lambda e^{2\beta T_0}(\gamma^2\lambda_1^2-1)]^2}.$$

Значит, с учетом оценок (1.44) для величин (1.43) производная $dJ(\lambda)/d\lambda>0$, т. е. $J(\lambda)$ монотонно возрастает. Поэтому при $\alpha_2=0$, $a<0$, $\sigma\neq 0$ момент $\tau=0$. Тем самым зависимость оптимального управления $u_0(t)$ от параметров задачи полностью установлена.

2^0. *Управление помехой при наблюдении за материальной точкой.* Рассмотрим свободное движение точки по прямой, уравнения движения которой имеют вид (1.31). Наблюдению доступна функция $y(t)$, описываемая соотношениями типа (1.2):

$$dy(t)=(q_1x_1(t)+q_2x_2(t))\,dy+\sigma_0(t)\,d\xi_0(t),\ y(0)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

Здесь x_1 — координата точки, x_2 — ее скорость, q_i — заданные постоянные. Управление помехой осуществляется выбором функции $\sigma_0(t)$, удовлетворяющей тем же ограничениям (1.38), что и в примере 1.5. Требуется выбрать такую функцию $\sigma_0(t)$, которая максимизирует критерий качества

$$\beta_1 d_{11}(T)+\beta_2 d_{22}(T)\to\max, \tag{1.45}$$

где $\beta_1\geqslant 0$, $\beta_2>0$ — заданные постоянные, а $d_{ii}(T)$ — диагональные элементы матрицы ковариации $D(T)$. Запишем уравнения для элементов $\alpha_{ij}(t)$ матрицы $\alpha(t)=D^{-1}(t)$. В силу (1.3) имеем

$$\begin{aligned}&\dot\alpha_{11}(t)=q_1^2\sigma_0^{-2}(t),\ \dot\alpha_{12}(t)=\dot\alpha_{21}=q_1q_2\sigma_0^{-2}(t)-\alpha_{11}(t),\\&\dot\alpha_{22}(t)=-2\alpha_{12}(t)+q_2^2\sigma_0^{-2}(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ \alpha(0)=D_0^{-1}.\end{aligned} \tag{1.46}$$

Из этих уравнений следует, что при $q_1=0$ значение критерия качества (1.45) не зависит от конкретного вида функции $\sigma_0(t)$, удовлетворяющей ограничениям (1.38). Поэтому ниже изучается лишь случай $q_1\neq 0$. В силу соотношений принципа максимума (1.7)—(1.9), (1.11) и условия трансверсальности (выраженного равенством (1.14), взятым с противоположным знаком) заключаем, что оптимальный закон $u_0(y)$ управления помехой имеет следующий вид:

$$u_0(t)=\sigma_1, \text{ если } q_1^2\psi_1(t)+q_1q_2\psi_2(t)+C>0;$$
$$u_0(t)=\sigma_2, \text{ если } q_1^2\psi_1(t)+q_1q_2\psi_2(t)+C<0.$$

Здесь постоянная C подбирается так, чтобы удовлетворялось условие трансверсальности (1.38), а сопряженные переменные $\psi_i(t)$ описываются уравнениями вида (1.9):

$$\dot{\psi}_1(t)=\psi_2(t)\ \dot{\psi}_2(t)=2\psi_3(t),\ \dot{\psi}_3(t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$\psi_3(T)=-[\beta_1\alpha_{12}^2(T)+\beta_2\alpha_{11}^2(T)]\,[\alpha_{11}(T)\alpha_{22}(T)-\alpha_{11}^2(T)]^{-2}<0.$$

Отсюда следует, что сопряженная переменная $\psi_3(t)$ постоянна и отрицательна. Значит,

$$\frac{d^2}{dt^2}(q_1^2\psi_1(t)+q_1q_2\psi_2(t))=2q_1^2\psi_3(t)<0.$$

Поэтому существует такая точка $\tau\in[0,\ T]$, что оптимальный закон помех $u_0(t)=\sigma_0^{-2}(t)$ задается равенствами

$$u_0(t)=\sigma_2^{-1},\ 0\leqslant t\leqslant\tau,\ T+\tau-T_0<t\leqslant T,$$
$$u_0(t)=\sigma_1^{-1},\ \tau<t\leqslant T+\tau-T_0.$$

Таким образом, имеется не более двух интервалов активной помехи, примыкающих к началу ($t=0$) и концу ($t=T$) процесса. Если проинтегрировать уравнения (1.46) при оптимальном законе помех и затем вычислить критерий качества (1.45), то он окажется функцией одной переменной τ. Максимизация этой функции по τ и определит интервалы активной помехи.

§ 2. ОПТИМАЛЬНОЕ СОЧЕТАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ

Задачи оптимального сочетания управления и наблюдения состоят в одновременном управлении движением системы и процессом наблюдения за ней с целью минимизации некоторых критериев качества (рис. 2.1). Постановка этих задач, а также уравнения метода динамического программирования были приведены в § 2 гл. IX. В данном параграфе рассмотрим некоторые конкретные задачи.

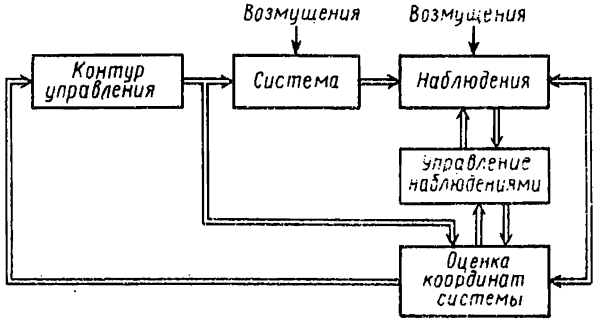


Рис. 2.1. Схема оптимального сочетания управления системой и процесса наблюдения

1. Линейно-квадратичная задача. Рассмотрим линейную управляемую систему вида (3.13) гл. IX:

$$dx(t)=[A(t)x(t)+B(t)u+f(t)]\,dt+\sigma(t)\,d\xi(t), \qquad (2.1)$$
$$0\leqslant t\leqslant T,\ x\in R_n,\ x(0)=x_0.$$

Наблюдаемая величина $y(t)\in R_l$ описывается соотношениями (3.14) гл. IX:

$$dy(t)=Q(t)x(t)\,dt+\sigma_0(t)\,d\xi_0(t),\ y(0)=0,\ y\in R_l. \qquad (2.2)$$

Минимизируемый функционал имеет вид

$$F_1(u)=M\left[x'(T)N_2x(T)+\int_0^T (x'(t)N_1(t)x(t)+u'N_0(t)u)\,dt\right]. \qquad (2.3)$$

Все обозначения в формулах (2.1)—(2.3) имеют тот же смысл, что и в выражениях (3.13), (3.14), (3.2) гл. IX. В частности, x_0 — гауссовский вектор с заданным математическим ожиданием m_0 и матрицей ковариации D_0; ξ и ξ_0 — стандартные винеровские процессы; x_0, ξ и ξ_0 взаимно независимы.

Управление системой (2.1) выбирается в виде функционала $u(t, y_t)$, зависящего от времени t и результатов измерений $y_t=y(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$. Управление наблюдениями (2.2) осуществляется благодаря выбору матриц состава измерений $Q(t)$ и их точности $\sigma_0(t)$, удовлетворяющих ограничению

$$w(t)\in W(t),\ w(t)=Q'(t)(\sigma_0(t)\sigma_0'(t))^{-1}Q(t), \qquad (2.4)$$

где $W(t)$ — заданное множество матриц.

Таким образом, управление наблюдением ищется в классе функций, зависящих только от времени t, т. е. в классе программных управлений. Вообще говоря, представляет интерес также и построение С-управления наблюдениями в виде, зависящем от результатов измерений, т. е. построение матриц Q и σ_0 в виде $Q=Q(t, y_t)$, $\sigma_0=\sigma_0(t, y_t)$. Расширение возможностей управления может привести к уменьшению оптимального значения критерия качества (2.3). Однако в рассматриваемом случае этого не происходит, минимальное значение функционала (2.3) одно и то же как в классе П-управлений наблюдением, так и в классе С-управлений*. Поэтому ниже рассматриваются лишь управления наблюдениями вида (2.4). В силу результатов § 3 гл. IX для любого фиксированного закона наблюдения оптимальное С-управление $u_0(t, y_t)$ может быть построено в явном аналитическом виде:

$$u_0(t, y_t)=-N_0^{-1}(t)B'(t)P(t)m(t). \qquad (2.5)$$

---

*Григорьев Ф. Н., Кузнецов Н. А., Серебровский А. П. Управление наблюдениями в автоматических системах. — М.: Наука, 1986.

Здесь $m(t)$ — оптимальная в среднеквадратичном смысле оценка, определяемая результатами наблюдений y_t с помощью соотношений (2.16), а положительно-определенная матрица $P(t)$ удовлетворяет уравнениям вида (3.10) гл. IX:

$$\dot{P}(t) = -A'(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)N_0^{-1}(t)B'(t)P(t) - N_1(t),$$
$$P(T) = N_2. \tag{2.6}$$

Соответствующее управлению (2.5) значение критерия качества (2.3) имеет вид

$$J_1 = m_0' P(0) m_0 + \mathrm{Tr}[N_2 D(T)] +$$
$$+ \int_0^T \mathrm{Tr}\,[D(t)w(t)D(t)P(t) + N_1(t)D(t)]\,dt. \tag{2.7}$$

Здесь $D(t)$ — матрица ковариации условного распределения вероятностей $x(t)$ при условии $y(t)$, для которой справедливы соотношения (3.24) гл. IX:

$$\dot{D}(t) = A(t)D(t) + D(t)A'(t) - D(t)w(t)D(t) + \sigma(t)\sigma'(t), \tag{2.8}$$
$$D(0) = D_0.$$

Таким образом, оптимальный закон наблюдения определяется из условия минимума по $w(t) \in W(t)$ функционала (2.7). Преобразуем его. В силу (2.8) имеем

$$\int_0^T [A(t)D(t) + D(t)A'(t) - \dot{D}(t) + \sigma(t)\sigma'(t)]P(t)\,dt =$$
$$= \int_0^T D(t)w(t)D(t)P(t)\,dt.$$

Далее, интегрируя по частям, получим

$$-\int_0^T \dot{D}(t)P(t)\,dt = -D(T)P(T) + D(0)P(0) + \int_0^T D(t)\dot{P}(t)\,dt =$$
$$= -D(T)N_2 + D_0P(0) + \int_0^T D(t)\dot{P}(t)\,dt.$$

Из последних двух равенств вытекает соотношение

$$\int_0^T D(t)\,w(t)\,D(t)\,P(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T [A(t)\,D(t)+D(t)\,A'(t)+$$

$$+\sigma(t)\,\sigma'(t)]\,P(t)\,\mathrm{d}t-D(T)\,N_2+D_0P(0)+\int_0^T D(t)\,\dot{P}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Отсюда и из равенства $\mathrm{Tr}[A_1A_2]=\mathrm{Tr}[A_2A_1]$, справедливого для любых квадратных матриц одинаковой размерности, следует, что функционал (2.7) определяется выражением

$$J_1=m'_0P(0)\,m_0+\mathrm{Tr}[D_0P(0)]+\int_0^T \mathrm{Tr}\,[D(t)\,\dot{P}(t)+$$

$$+N_1(t)\,D(t)+(A(t)\,D(t)+D(t)\,A'(t)+\sigma(t)\,\sigma'(t))\,P(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Заменим здесь производную $\dot{P}(t)$ правой частью (2.6). Тогда для J_1 получим выражение

$$J_1=m'_0P(0)\,m_0+\mathrm{Tr}\,[D_0P(0)]+\int_0^T \mathrm{Tr}\,[(\sigma(t)\,\sigma'(t)+$$

$$+D(t)\,P(t)\,B(t)\,N_0^{-1}(t)\,B'(t))\,P(t)]\,\mathrm{d}t. \qquad (2.9)$$

В этом выражении выбор закона наблюдения влияет на последнее слагаемое, представляющее собой линейный функционал от матрицы ковариации $D(t)$. Отметим, что при выводе формулы (2.9) конкретный вид ограничений на закон наблюдения не используется. Существенно было лишь то, что он выбирается в виде программы (т. е. в виде функции только времени) и не зависит от результатов измерений. Поэтому на допустимые законы измерений наблюдения можно накладывать различные ограничения подобно тому, как это имело место в § 1 при рассмотрении задач оптимизации процесса наблюдения.

2. Детерминированная скалярная система. Предположим, что (2.1) и (2.2) — скалярные уравнения движения и наблюдения:

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+b(t)u,\ x(0)=x_0,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$\mathrm{d}y(t)=Q(t)x(t)\,\mathrm{d}t+\sigma_0\,\mathrm{d}\xi_0(t),\ y(0)=0.$$

Здесь постоянная $\sigma\neq 0$, измеримые ограниченные функции $a(t)$ и $b(t)$ заданы.

За критерий качества примем квадратичный критерий вида (2.3):

$$M\left[x^2(T)+\int_0^T u^2 N_0(t)\,dt\right], \tag{2.10}$$

где $N_0(t)$ — положительная измеримая ограниченная функция.

Функционал (2.10) минимизируется по управлениям $u=u(t, y_t)$ и законам измерений, определяемым скалярной измеримой функцией $Q(t)$, равной в любой момент времени либо нулю, либо единице и удовлетворяющей изопериметрическому ограничению на длительность процесса наблюдения:

$$\int_0^T Q(t)\,dt=T_0,\ 0<T_0<T. \tag{2.11}$$

Установим выражения для оптимального управления в предположении, что функция $b(t)$ почти всюду отлична от нуля, функции $a(t)$, $b(t)$, $N_0(t)$ дифференцируемы и справедливы неравенства $\dot{a}(t)\leqslant 0$, $\dot{N}_0(t)\leqslant 0$, $b(t)\dot{b}(t)\geqslant 0$, $N_0(t)>0$.

В силу (3.22) гл. IX оптимальное управление u_0 имеет вид

$$u_0=-N_0^{-1}(t)P(t)b(t)m(t).$$

Здесь коэффициент $P(t)$ с учетом (2.6) удовлетворяет уравнению Бернулли

$$\dot{P}(t)=-2a(t)P(t)+P^2(t)b^2(t)N_0^{-1}(t),\ P(T)=1.$$

Для решения этого уравнения произведем замену переменных $\gamma(t)=P^{-1}(t)$. Тогда для $\gamma(t)$ справедливо линейное уравнение

$$\dot{\gamma}(t)=2a(t)\gamma(t)-b^2(t)N_0^{-1}(t),\ \gamma(T)=1.$$

Решение этого уравнения выражается формулой Коши (1.7) гл. IV, в соответствии с которой

$$P(t)=\left[Z(t, T)+\int_t^T Z(t, s)b^2(s)\cdot N_0^{-1}(s)\,ds\right]^{-1}$$

$$Z(t, s)=\exp\left[2\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right].$$

Уравнения для оптимальной оценки $m(t)$ и дисперсии $D(t)$ в силу (2.22) гл. X, а также (2.8) имеют вид

$$\dot{m}=am+bu+DQ\sigma_0^{-2}(\dot{y}-Qm),\ m(0)=m_0,$$
$$\dot{D}=2aD-D^2Q\sigma_0^{-2},\ D(0)=D_0. \qquad (2.12)$$

С учетом выражения (2.9) оптимальный закон наблюдений $Q_0(t)$ определяется из условия минимума по $Q(t)$ функционала

$$\int_0^T P^2(t)\cdot b^2(t)\cdot N_0^{-1}(t)\cdot D(t)\,dt$$

при ограничениях (2.11) на траекториях системы (2.12). Используя принцип максимума, можно доказать, что оптимальный закон наблюдений $Q_0(t)$ определяется единственным параметром t_1 и имеет вид

$$Q_0(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant T_1\\ 1, & t_1<t\leqslant t_1+T_0,\\ 0, & t_1+T_0<t.\end{cases}$$

Иными словами, оптимальный закон $Q_0(t)$ содержит только один интервал наблюдений. При этом по сравнению со случаем неуправляемого движения (т. е. со случаем $b(t)\equiv 0$) происходит, вообще говоря, смещение интервала наблюдения.

3. Стохастическая скалярная система. Пусть управляемое движение $x(t)$ исследуемого объекта описывается на отрезке $[0, T]$ скалярным уравнением

$$dx(t)=[ax(t)+bu]\,dt+\sigma\,d\xi,\ x(0)=x_0. \qquad (2.13)$$

Доступная измерению одномерная величина $y(t)$ задается соотношениями

$$dy(t)=Q(t)x(t)\,dt+\sigma_0\,d\xi_0(t),\ t\geqslant 0,\ y(0)=0. \qquad (2.14)$$

Здесь величины a, b, σ, $\sigma_0\neq 0$ — некоторые заданные постоянные; $Q(t)$ — детерминированная кусочно-непрерывная функция. Случайная величина x_0, независимая от стандартных винеровских процессов $\xi(t)$, $\xi_0(t)$, имеет гауссовское распределение с параметрами $m_0=Mx_0$, $D_0=M(x_0-m_0)>0$. Будем также считать, что $b\neq 0$, поскольку вопрос об оптимизации процесса наблюдения для случая $b=0$, соответствующего неуправляемому движению $x(t)$, исследовался ранее.

Обозначим через H множество детерминированных функций $Q(t)$, равных в любой момент времени t либо нулю, либо единице, таких, что

$$\int_0^T Q(t)\,dt=T_0,\ T_0<T. \qquad (2.15)$$

Требуется выбрать управление u в виде функционала, зависящего от t и от измеренной на отрезке $0 \leqslant s \leqslant t$ реализации $y(s)$, а также функцию $Q(t) \in H$, чтобы минимизировать критерий качества вида (1.3):

$$M\left(\alpha x^2(T)+\int_0^T u^2 \mathrm{d}t\right), \tag{2.16}$$

где постоянная $\alpha > 0$.

Обозначим через $m(t)$ и $D(t)$ соответственно условные математическое ожидание и дисперсию процесса $x(t)$ при условии, что измерена реализация $y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Тогда из формулы (2.8) следует, что функция $D(t)$ определяется соотношениями

$$\begin{gathered} \dot{D}(t)=2aD(t)-D^2(t)V(t)+\sigma^2, \\ D(0)=D_0>0, \quad V(t)=Q(t)\sigma_0^{-2}. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Оптимальное управление в силу (2.5) имеет вид

$$u_0(t)=-bg(t)m(t), \tag{2.18}$$

где положительная функция $g(t)$ удовлетворяет следующим уравнениям, получающимся из (2.6):

$$\dot{g}(t)=-2ag(t)+b^2g^2(t), \quad t \geqslant 0, \quad g(T)=\alpha. \tag{2.19}$$

Наконец, оптимальный закон наблюдения $Q_0(t)$ с учетом (2.9) определяется из условия минимума функционала

$$\int_0^T g^2(t)z^{-1}(t)\mathrm{d}t. \tag{2.20}$$

Здесь функция $z(t)=D^{-1}(t)$ в силу (2.17) удовлетворяет уравнениям

$$\dot{z}(t)=-2az(t)+V(t)-\sigma^2z^2(t), \quad t \geqslant 0, \quad z(0)=D_0^{-1}. \tag{2.21}$$

Построение оптимального закона наблюдения проведем в несколько этапов в зависимости от исходных значений параметров задачи.

1^0. *Пусть коэффициенты уравнений* (2.13), (2.14) *удовлетворяют сформулированным требованиям и* $a \geqslant 0$. *Тогда найдется такое число* $t_1 \leqslant T-T_0$, *что оптимальный закон наблюдения имеет вид*

$$\begin{gathered} Q_0=1 \text{ при } t \in (t_1, t_1+T_0], \\ Q_0=0 \text{ при } t \overline{\in} (t_1, t_1+T_0]. \end{gathered} \tag{2.22}$$

□ Используя принцип максимума Понтрягина, можно показать, что

$$Q_0(t)=1, \text{ если } \psi(t)+C>0, \quad Q_0(t)=0, \text{ если } \psi(t)+C<0, \tag{2.23}$$

где постоянная C подбирается так, чтобы удовлетворялось условие (2.15), а сопряженная переменная $\psi(t)$ задается соотношениями

$$\dot{\psi}(t)=2\psi(t)(a+z(t)\sigma^2)-g^2(t)z^{-2}(t),\ \psi(T)=0. \qquad (2.24)$$

Используя (2.23), (2.24), покажем теперь, что существует только один интервал наблюдения. Предположим противное, т. е. предположим, что существует несколько не примыкающих друг к другу интервалов на отрезке $[0, T]$, где функция $Q_0(t)$, заданная соотношениями (2.23), равна 1. Обозначим i-й из этих интервалов наблюдения через $(t_i, s_i]$. Исследуем поведение решения $\psi(t)$ задачи (1.12) на отрезке $[s_i, t_{i+1}]$. Покажем, что функция $\psi(t)$ монотонно убывает на этом отрезке. Для этого прежде всего заметим, что так как $Q_0(t)=1$ на интервале $t_i<t\leqslant s_i$ и $Q_0(t)=0$ при $s_i<t\leqslant t_{i+1}$, то в силу (2.23) имеем

$$r(s_i)=\dot{\psi}(s_i)\leqslant 0. \qquad (2.25)$$

Далее найдем уравнение, которому удовлетворяет производная $\dot{\psi}(t)=r(t)$ при $t\in(s_i, t_{i+1}]$. Дифференцируя по t обе части равенства (2.24), с учетом (2.19), (2.21) и того, что $Q_0(t)=0$ для $s_i<t\leqslant t_{i+1}$, получаем

$$\dot{r}(t)-2r(t)(a+z(t)\sigma^2)=r_1(t). \qquad (2.26)$$

Здесь выражение для функции $r_1(t)$ имеет вид

$$r_1(t)=2\psi(t)\dot{z}(t)\sigma^2-2z^{-2}(t)g^2(t)[b^2g(t)+\sigma^2z(t)].$$

Последнее слагаемое в правой части этого равенства отрицательно вследствие того, что функции $g(t)$ и $z(t)$, как было отмечено выше, положительны. Кроме того, на основании (2.24) сопряженная переменная $\psi(t)\geqslant 0$ при всех $0\leqslant t\leqslant T$, а в силу (2.21) и условий утверждения 1^0 производная $\dot{z}(t)\leqslant 0$ для $s_i<t\leqslant t_{i+1}$. Таким образом, при всех $s_i<t\leqslant t_{i+1}$ функция $r_1(t)<0$. Отсюда и из (2.25), (2.26) вытекает, что $r(t)$ при $s_i<t\leqslant t_{i+1}$ отрицательна. Тем самым установлено, что $\psi(t)$ на отрезке $[s_i, t_{i+1}]$ монотонно убывает, а это в силу (2.23) противоречит сделанному выше предположению о том, что $Q_0(t)\neq 0$ при $t_{i+j}<t\leqslant s_{i+j}$ $(j=0, 1)$ и $Q_0(t)=0$ при $s_i<t\leqslant t_{i+1}$. Из полученного противоречия вытекает справедливость соотношений (2.22). ■

Пусть коэффициенты уравнений (2.13), (2.14) удовлетворяют сформулированным требованиям и постоянная $a<0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

2^0. *Если* $0<D_0\leqslant -\frac{3}{4}\frac{\sigma^2}{a}$, *то выполняются соотношения* (2.22), *т. е. найдется такой момент времени* $t_1\leqslant T-T_0$, *что оптимальный закон наблюдения* $Q_0(t)=1$ *при* $t_1<t\leqslant t_1+T_0$ *и* $Q_0(t)=0$ *при* $t\in(t_1, t_1+T_0]$.

3^0. *Если* $-\frac{3}{4}\frac{\sigma^2}{a} < D_0$, *то найдутся два таких неотрицательных числа* $s_1 \leqslant T_0$ *и* $t_2 \leqslant T - T_0$, *что оптимальный закон наблюдения* $Q_0(t) = 1$ *при* $0 \leqslant t \leqslant s_1$ *и при* $t_2 < t \leqslant t_2 + T_0 - s_1$, *а для остальных значений* t *функция* $Q_0(t) = 0$.

□ Дадим обоснование утверждения 2^0. Рассмотрим решение $z_0(t)$ уравнения (2.21) при $V = 0$ и $z_0(0) = D_0^{-1}$. В силу (2.21) ясно, что

$$z_0(t) \leqslant z(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.27}$$

Покажем теперь, что

$$z(t) \geqslant -\frac{4}{3} a\sigma^{-2}. \tag{2.28}$$

На основании (2.27) достаточно показать, что неравенству (2.28) удовлетворяет функция $z_0(t)$. Однако из (2.21) вытекает, что при $z_0(0) \in (0, -2a\sigma^{-2})$ производная $\dot{z}_0(0) > 0$, а при $z_0 > -2a\sigma^{-2}$ справедлива оценка $\dot{z}_0(0) < 0$. Кроме того, на основании (2.21) имеем

$$\ddot{z}_0(t) = -2\dot{z}_0(t)(a + \sigma^2 z_0(t)).$$

Таким образом, для значений $z_0(0) \in (0, -2a\sigma^{-2})$ функция $z_0(t)$ монотонно возрастает, а при $z_0(0) \geqslant -2a\sigma^{-2}$ решение $z_0(t)$ монотонно не возрастает, причем и в том и в другом случае

$$\lim_{t \to \infty} z_0(t) = -2a\sigma^{-2}.$$

Значит, в силу начального условия $z_0(0) \geqslant -4a(3\sigma^2)^{-1}$ оценка (2.28) установлена.

Дальнейшее доказательство утверждения 2^0 подобно доказательству утверждения 1^0. А именно: предположим, что существует несколько не примыкающих друг к другу интервалов наблюдения $(t_i, s_i]$, и изучим поведение сопряженной переменной $\psi(t)$ на отрезке $s_i < t \leqslant t_{i+1}$. Из (2.21), (2.24), (2.26), подставляя в (2.26) вместо функции ψ ее выражение через $\dot{\psi}$, заданное уравнением (2.24), получаем, что функция $r(t) = \dot{\psi}(t)$ удовлетворяет равенству

$$g^2(t) z^{-2}(t)(a + z(t)\sigma^2)^{-1}[\gamma(t) + z^{-1}(t) V_0(t)(3z(t)\sigma^2 - 2a)] =$$
$$= \dot{r}(t) - r(t)[2a + 2z(t)\sigma^2 - \dot{z}(t)\sigma^2(a + z(t)\sigma^2)^{-1}], \quad V_0 = h_0\sigma_0^{-2}, \tag{2.29}$$

где

$$\gamma(t) = -z(t)\sigma^2(4a + 3z(t)\sigma^2) - 2g(t) b^2(a + z(t)\sigma^2). \tag{2.30}$$

Но в силу (2.28) при всех $t \geqslant 0$ функция $\gamma(t) < 0$. Отсюда из (2.25), (2.29), учитывая справедливое при $s_i < t \leqslant t_{i+1}$ тождество $V_0(t) \equiv 0$, заключаем, что $\psi(t)$ монотонно убывает на интервале $[s_i, t_{i+1}]$.

Далее, рассуждая, как и при доказательстве утверждения 1^0, убеждаемся в справедливости заключения утверждения 2^0.

Докажем теперь утверждение 3^0. Обозначим через $\tau_0 \in [0, T]$ первую точку, для которой $\dot{\psi}(\tau_0) \geqslant 0$. Если такой точки на отрезке $[0, T]$ не существует, т. е. если $\dot{\psi}(t) < 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$, то утверждение 3^0 уже доказано, так как в этом случае в силу монотонного убывания $\psi(t)$ оптимальный закон наблюдения $Q_0 = 1$ при $0 \leqslant t \leqslant T_0$ и $Q_0 = 0$ для $T_0 < t \leqslant T$.

Итак, пусть такая точка $\tau_0 \in [0, T]$ существует. Тогда вследствие (2.23) при $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$ может существовать не более одного интервала наблюдения. Изучим теперь поведение $\psi(t)$ при $\tau_0 \leqslant t \leqslant T$. Из неотрицательности $\dot{\psi}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и (2.24) следует

$$z(\tau_0) > -a\sigma^{-2}. \tag{2.31}$$

Обозначим через $z_0(t, t_0)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, решение уравнения (2.21) при $V = 0$ с начальным условием $z_0(t_0, t_0) = z(t_0)$. Подобно (2.27) имеем $z(t) \geqslant z_0(t, t_0)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и, кроме того, аналогично (2.28) выводится, что $z_0(t, \tau_0) > -a\sigma^{-2}$, $t \geqslant \tau_0$. Отсюда и из (2.31) вытекает, что

$$z(t) > -a\sigma^{-2}, \quad \tau_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.32}$$

Рассмотрим теперь функцию $\gamma(t)$, входящую в формулу (2.29). От точки $t = 0$ до момента первого достижения решением $z(t)$ уравнения (2.21) значения $z(t) = -a\sigma^{-2}$ имеем $\gamma(t) > 0$. От момента первого достижения функцией $z(t)$ значения $z(t) = -a\sigma^{-2}$ до момента первого достижения уровня $z(t) = -4a(3\sigma^2)^{-1}$ функция $\gamma(t)$ монотонно убывает, поскольку в указанном интервале времени

$$\dot{\gamma}(t) = -\dot{z}\sigma^2(4a + 6z\sigma^2) - 2\dot{g}b^2(a + \sigma^2 z) - 2b^2\sigma^2 g\dot{z} < 0.$$

При выводе этого неравенства использовалось то, что производная $\dot{g} > 0$ при $a < 0$ в силу (2.19) и производная $\dot{z} > 0$ в силу (2.21), если $z(t) < -2a\sigma^{-2}$.

Наконец, для тех значений t, где $z(t) \geqslant -4a(3\sigma^2)^{-1}$, имеем $\gamma(t) < 0$. Далее, аналогично выводу (2.32) убеждаемся, что если при некотором t_0 функция $z(t_0) = -2a\sigma^2$, то $z(t) \geqslant -2a\sigma^{-2}$ для $t \geqslant t_0$. Отсюда из неравенства $\dot{z}(t) > 0$, справедливого для тех точек t, для которых $z(t) < -2a\sigma^{-2}$, и из приведенных выше свойств функции $\gamma(t)$ следует, что функция $\gamma(t)$ может либо иметь один и только один корень τ_1 на отрезке $[0, T]$, либо вообще не иметь корней на отрезке $[0, T]$, причем

$$\gamma(t) > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \quad \gamma(t) < 0, \quad \tau_1 < t \leqslant T. \tag{2.33}$$

Рассмотрим последовательно различные варианты, для которых выполняются соотношения (2.33).

Пусть сначала при всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$\gamma(t) < 0. \tag{2.34}$$

Тогда, используя рассуждения этапа 2^0, можно показать, что существует не более двух интервалов наблюдения. Действительно, пусть (t_0, s_0) — первый интервал наблюдения, начало которого $t_0 < s_0$. Если бы такого интервала наблюдения не существовало, то в силу оценки $\psi(t) < 0$, $0 \leqslant t < \tau_0$ и (2.23) вообще имелся бы только один интервал наблюдений, примыкающий к нулю. Покажем, что для точек $t > s_0$ наблюдений не имеется. В самом деле, если бы имелся интервал наблюдений (t_1, s_1), где $t_1 > s_0$, то $\psi(s_0) \leqslant 0$. Отсюда, из (2.34) и соотношения (2.29) при $V = 0$ заключаем, подобно рассмотрению этапа 2^0, что $\psi(t)$ монотонно убывает при $s_0 < t < t_1$. Однако в силу (2.23) это противоречит тому факту, что (t_1, s_1) — интервал наблюдений.

Пусть теперь

$$\gamma(t) > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.35}$$

Покажем, что в этом случае не может существовать внутренних интервалов наблюдения. Действительно, если найдется интервал наблюдения (t_0, s_0) такой, что $t_0 > \tau_0$, то в силу (2.23) имеем

$$r(t_0) = \dot{\psi}(t_0) > 0.$$

Отсюда, из (2.35) и (2.29) вытекает неравенство $r(t) > 0$, $t_0 < t$. Значит, $\psi(t)$ монотонно возрастает при $t_0 < t$. Следовательно, в силу (2.23) интервал наблюдения (t_0, s_0) не может быть внутренним. Кроме того, на $[0, \tau_0]$ может существовать лишь один интервал наблюдений, примыкающий к нулю. Итак, при выполнении условия (2.35) не может быть внутренних интервалов наблюдения, т. е. могут быть лишь два интервала наблюдения, примыкающие к точкам 0 и T.

Остается лишь проанализировать возможность, когда $\gamma(t)$ меняет знак на $[0, T]$, т. е. выполнены соотношения (2.33). Пусть сначала $\tau_0 \geqslant \tau_1$. Рассмотрение этого случая проводится в точности так же, как и случая (2.34). Повторяя соответствующие рассуждения, получаем, что в этом случае утверждение 3^0 имеет место.

Рассмотрим, наконец, случай $\tau_0 < \tau_1$. Изучим поведение сопряженной переменной $\psi(t)$ при $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$. На основании формул (2.24), (2.31) имеем

$$\dot{\psi}(\tau_0) \geqslant \frac{1}{2} g^2(\tau_0) z^{-2}(\tau_0) (a + z(\tau_0)\sigma^2)^{-1}.$$

Отсюда и из (2.24) следует, что если $t \geqslant \tau_0$, то

$$\dot{\psi}(t) \geqslant [2a + 2z(t)\sigma^2] \left[\frac{1}{2} g^2(\tau_0) z^{-2}(\tau_0) (a + z(\tau_0)\sigma^2)^{-1} \mu(\tau_0) - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau_0}^{t} g^2(s) z^{-2}(s) \mu(s)\, ds \right] - g^2(t) b^2 z^{-2}(t), \tag{2.36}$$

где

$$\mu(s)=\exp\left[\int_s^t (2a+2z(s_1)\sigma^2)\,\mathrm{d}s_1\right].$$

Обозначим

$$h=-2(a+z(t)\sigma^2)\int_{\tau_0}^{t} g^2(s)z^{-2}(s)\mu(s)\,\mathrm{d}s.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$h=(a+z(t)\sigma^2)\int_{\tau_0}^{t} g^2(s)z^{-2}(s)(a+z(s)\sigma^2)^{-1}\,\mathrm{d}_s\mu(s)=$$

$$=g^2(t)z^{-2}(t)-(a+z(t)\sigma^2)g^2(\tau_0)z^{-2}(\tau_0)(a+z(\tau_0)\sigma^2)^{-1}\mu(\tau_0)-$$

$$-(z(t)\sigma^2+a)\int_{\tau_0}^{t}\mu(s)\,\mathrm{d}_s[g^2(s)z^{-2}(s)(a+z(s)\sigma^2)^{-1}],\ t\geqslant\tau_0.$$

Отсюда и из (2.19), (2.21), (2.31), (2.36) при $t\geqslant\tau_0$ вытекает оценка

$$\dot{\psi}(t)\geqslant -b^2(a+z(t)\sigma^2)\int_{\tau_0}^{t}\mu(s)\,\mathrm{d}_s[g^2(s)z^{-2}(s)(a+z(s)\sigma^2)^{-1}]\geqslant$$

$$\geqslant b^2(a+z(t)\sigma^2)\int_{\tau_0}^{t}\mu(s)(a+z(s)\sigma^2)^{-2}g^2(s)z^{-2}(s)\gamma(s)\,\mathrm{d}s. \qquad (2.37)$$

На основании (2.28), (2.30) и определения τ_1 неравенство (2.23) означает, что функция $\psi(t)$ монотонно возрастает на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$. Но для $0\leqslant t\leqslant\tau_0$ функция $\psi(t)$ монотонно убывает. Поэтому при $0\leqslant t\leqslant\tau_1$ может существовать не более двух интервалов наблюдения. Далее, используя рассуждения этапа 1^0 и второе из неравенств (2.33), получаем, что если точка τ_1 принадлежит интервалу наблюдения, то этот интервал наблюдения является последним; если же в момент τ_2 наблюдение не производится, то это означает, что до момента τ_2 может существовать лишь один интервал наблюдения и после указанного момента также может существовать не более

одного интервала наблюдения. Значит, и в том и в другом случае существует не более двух интервалов наблюдения, причем первый из них начинается от нуля. Тем самым утверждение 3^0 установлено. ■

В утверждениях 1^0 и 2^0 вопрос о нахождении оптимального закона наблюдения сводится к задаче нахождения минимума скалярной функции одного параметра t_1. Для этого следует решить уравнение (2.21) при $V(t)=Q_0(t)$ и подставить это решение, а также решение уравнения (2.19) в интеграл (2.22), который после указанной подстановки становится скалярной функцией одной переменной t_1. Аналогично в условиях утверждения 3^0 оптимальное наблюдение ищется с помощью минимизации функции двух переменных s_1, t_2. При этом оптимальное управление для любого закона наблюдения определяется равенством (3.6) гл. VIII.

Отметим, что при $b^2\alpha=2a$ решение задачи (2.19) постоянно и равно α. Поэтому задача сводится к минимизации интеграла $\int_0^T D(s)\,\mathrm{d}s$. Значит, в этом случае доказываемое утверждение следует из результата п. 3 § 1.

Основные результаты и формулы главы XII

Наблюдаемая система:

$$\mathrm{d}x(t)=A(t)x(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}\xi(t),\ t\geqslant 0,\ x(0)=x_0,$$
$$\mathrm{d}y(t)=Q(t)x(t)\mathrm{d}t+\sigma_0(t)\mathrm{d}\xi_0(t),\ t\geqslant 0,\ y(0)=0;$$

управление наблюдением

$$u=Q'(\sigma_0\sigma_0')^{-1}Q;$$

критерий точности наблюдения

$$J(u)=q'x(T)\to\inf_u,$$

$$J(u)=q'D(T)q\to\inf_u;$$

импульсные законы наблюдения:

$$\gamma(t)=h^2(t)+\sum_{i=1}^{r}\mu_i\delta(t-t_i).$$

Оптимизация процесса наблюдения эквивалентна оптимальному управлению в специальной детерминированной системе.

Упражнения к третьей части

В упр. 1—8 через ξ или ξ_i обозначены независимые гауссовские стандартные белые шумы.

1. Рассматриваются колебания флюгера под действием случайных порывов ветра. Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=\sigma\dot{\xi},\ t>0,\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=0,$$

где $a_1>0$, $a_2>0$, σ — заданные постоянные. Найти матрицу ковариации процесса $(x(t), \dot{x}(t))$.

2. Рассматривается двухкамерная модель «поглощения лекарства и метаболизма», описанная в упр. 8 ко второй части. Уравнения этой модели имеют вид

$$\dot{x}_1(t)=-\alpha_1x_1+u(t),\ \dot{x}_2(t)=\alpha_1x_1-\alpha_2x_2,\ t\geqslant 0.$$

В начальный момент $t=0$ вектор $(x_1(0), x_2(0))$ имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации D_0. Наблюдаемая величина $y(t)=x_2(t)+\sigma\xi(t)$.

При заданных σ и П-управлении $u(t)$ найти матрицу ковариации $D(t)$ ошибки оценивания вектора (x_1, x_2) и определить ее предельные значения при $t\to\infty$.

3. Найти функцию Беллмана и оптимальное С-управление $u=u(t, x(t))$ в линейно-квадратичной задаче

$$\ddot{x}(t)+k_1\dot{x}(t)+k_2x(t)=bu+\sigma\dot{\xi},\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

$$J(u)=M\left[\alpha x^2(T)+\int_0^T u^2\,dt\right]\to\inf,$$

где b, σ, $T>0$, $k_1>0$, $k_2>0$, $\alpha>0$ — заданные постоянные.

4. Решить упр. 3 в предположении, что оптимальное управление строится в виде функционала $u=u(t, y)$, где $y(t)=\dot{x}(t)+\sigma_1\xi_1$.

5. Решить упр. 3 в предположении, что оптимальное П-управление ищется в классе функций времени $u(t)$. Сравнить значения функций Беллмана в упр. 3—5.

6. Найти оптимальное управление и функцию Беллмана для следующих скалярных систем на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$:

а) $\dot{x}(t)=1+u+\dot{\xi}$, $M\int_0^T(x^2(t)+u^2)\,dt\to\inf$;

б) $\dot{x}=u(1+\dot{\xi})$, $Mx^2(T)\to\inf$.

7. Дана скалярная система

$$\dot{x}(t)+ax(t)=(b+\sigma\dot{\xi})u$$

с критерием качества

$$J(u)=M\int_0^\infty(\alpha x^2(t)+u^2)\,dt\to\inf.$$

Показать, что условие стабилизуемости имеет вид $-2\sigma^2 a < b^2$. Найти при этом условии оптимальное управление и функцию Беллмана.

8. Упрощенные уравнения дрейфа гироскопа имеют вид

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_3(t),\ \dot{x}_2(t) = 0,$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{1}{\tau} x_3(t) + \sigma \sqrt{\frac{1}{\tau}}\,\xi,\ x_1(0) = 0,\ t > 0,$$

где x_1 — угол дрейфа, x_2 — постоянный дрейф, x_3 — случайный дрейф. Априорное распределение случайного вектора $(x_2(0), x_3(0))$ — гауссовское с известными параметрами. Пусть угол дрейфа $x_1(t)$ измеряется точно. Найти решение уравнений фильтра Калмана для оценок неизвестных $x_2(t)$ и $x_3(t)$.

9. Рассмотрим задачу о максимизации среднего времени достижения границы области на примере управляемой скалярной системы

$$\dot{x}(t) = u + \xi(t),\ x(0) \in [-1, 1],\ |u| \leqslant 1.$$

Обозначим через $\tau_x(u)$ момент первого достижения системой границ отрезка $[-1, 1]$ при управлении u и начальном условии $x(0) = x \in [-1, 1]$, а через $V(x)$ — соответствующую функцию Беллмана $V(x) = \sup\limits_{u,\ |u| \leqslant 1} M\tau_x(u)$. Уравнение Беллмана имеет вид

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} + \sup_{u,\ |u| \leqslant 1} u \frac{dV(x)}{dx} = -1,\quad V(-1) = V(1) = 0.$$

Проверить, что симметричная функция

$$V(x) = V(-x) = x - 1 + e - e^x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

удовлетворяет уравнению Беллмана, а оптимальное управление $u_0(x)$ имеет вид $u_0(x) = -\operatorname{sign} x$.

10. Рассмотрим скалярную линейную управляемую систему

$$dx(t) = bu\,dt + \sigma d\xi(t),\quad t \geqslant 0,\ x(0) = x_0,$$

с квадратичным критерием качества

$$J = M \int_0^T (gx^2(t) + u^2)\,dt \to \min_u.$$

Постоянные $g \geqslant 0$, b и σ — заданы.

Показать, что

1) оптимальное управление u_0 определяется, как

$$u_0 = -bP(t)x,$$

где

$$P(t) = g(1 - e^{-2\beta(T-t)})[\beta + \beta e^{-2\beta(T-t)}]^{-1},$$

$$\beta = \sqrt{gb^2};$$

2) функция Беллмана $V(t, x)$ равняется

$$V(t, x)=P(t)x^2+\sigma^2\int_t^T P(s)\,ds.$$

11. Используя формулу Ито, записать выражения для стохастических дифференциалов процессов $x(t)$, если

а) $x(t)=\xi^2(t)$;

б) $x(t)=2+3t+4e^{\xi(t)}$;

в) $x(t)=2\xi_1^2(t)+3\xi_2^2(t)$;

г) $x(t)=(\xi_1(t)+2\xi_2(t)+3\xi_3(t), 4\xi_1^2(t)-\xi_2(t)\xi_3(t))$.

Здесь $\xi(t)$ — одномерный, $\{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ — двумерный, $\{\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\}$ — трехмерный винеровские процессы, $(,)$ — символ скалярного произведения.

12. С помощью формулы Ито доказать, что

$$\int_0^t \xi^2(s)\,d\xi(s)=\frac{1}{3}\xi^3(t)-\int_0^t \xi(s)\,ds.$$

13. Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — стохастические интегралы в R_1. Доказать, что

$$d(X(t)Y(t))=X(t)\,dY(t)+Y(t)\,dX(t)+dY(t)\,dY(t).$$

Вывести отсюда следующую формулу интегрирования по частям

$$\int_0^t X(s)\,dY(s)=X(t)\,Y(t)-X(0)\,Y(0)-\int_0^t Y(s)\,dX(s)-\int_0^t dX(s)\,dY(s).$$

14. Пусть $\xi(t)\in R_1$ стандартный винеровский процесс, $\xi(0)=0$. Положим

$$m_k(t)=M\xi^k(t);\ k=0, 1, 2,...$$

С помощью формулы Ито доказать, что

$$m_k(t)=\frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t m_{k-2}(s)\,ds;\ k\geqslant 2.$$

Вывести отсюда соотношение

$$M\xi^4(t)=3t^2$$

и найти $M\xi^6(t)$.

15. Положим

$$x(t)=e^{at+b\xi(t)},$$

где a, b — некоторые постоянные.

Доказать, что

$$dx(t)=\left(a+\frac{1}{2}b^2\right)x(t)\,dt+bx(x)\,d\xi(t).$$

16. Пусть $\xi(t)$ — одномерный винеровский процесс ($\xi(0)=0$). Показать, что решения следующих стохастических дифференциальных уравнений задаются указанными формулами:

1) $dx(t)=\frac{1}{2}x(t)\,dt+x(t)\,d\xi(t)$,

$$x(t)=e^{\xi(t)},$$

2) $dx(t)=-\frac{1}{1+t}x(t)\,dt+\frac{1}{1+t}d\xi(t)$, $x(0)=0$,

$$x(t)=\frac{\xi(t)}{1+t}.$$

17. Показать, что двумерный вектор $(x_1(t), x_2(t))=(t, e^t\xi(t))$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x_2\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}0\\e^{x_1}\end{pmatrix}d\xi(t).$$

18. Решить следующее стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}1&0\\0&x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\xi_1(t)\\d\xi_2(t)\end{pmatrix}.$$

19. Найти решение стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t)=x(t)\,dt+d\xi(t).$$

(Указание: умножить обе части уравнения на «интегрирующий множитель» e^{-t} и сравнить с $d(e^{-1}\xi(t))$).

20. Решить стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t)=-x(t)\,dt+e^{-t}d\xi(t).$$

21. Доказать, что если скалярная система описывается уравнением

$$dx(t)=0\ \ (Mx(0)=0,\ Mx^2(0)=a^2),$$

а процесс наблюдения $y(t)$ задается как

$$dy(t)=Q(t)x(t)\,dt+d\xi(t),\ \ (y(0)=0),$$

то ошибка оценивания $D(t)=M(x(t)-m(t))^2$ вычисляется по формуле

$$D(t)=\frac{1}{\frac{1}{D(0)}+\int\limits_0^t Q^2(s)\,ds},$$

при этом оптимальная оценка $m(t)$ (фильтр Калмана — Бьюси) удовлетворяет соотношению

$$dm(t)=Q(t)D(t)(dy(t)-Q(t)m(t)\,dt).$$

22. Рассмотрим одномерную задачу фильрации вида

$$dx(t)=A(t)x(t),$$

$$dy(t)=Q(t)x(t)\,dt+\sigma(t)\,d\xi(t).$$

Пусть $D(t)=M(x(t)-m(t))^2$ и $D(0)>0$.

Показать, что $R(t)=\dfrac{1}{D(t)}$ удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению

$$R'(t)=-2A(t)R(t)+\frac{Q^2(t)}{\sigma^2(t)},\ \left(R(0)=\frac{1}{D(0)}\right).$$

23. Предположим, что рост популяции описывается уравнением

$$dx(t)=rx(t)\,dt,$$

причем $Mx(0)=b>0$, $M(x(0)-b)^2=a^2$, а процесс наблюдения удовлетворяет соотношению

$$dy(t)=x(t)\,dt+pd\xi(t),$$

(r, p — некоторые константы).

Показать, что оптимальный фильтр $m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dm(t)=\left(r-\frac{D(t)}{p^2}\right)m(t)\,dt+\frac{D(t)}{p^2}\,dy(t),\ (m(0)=Mx(0)=b).$$

При этом ошибка оценивания $D(t)$ находится по формуле

$$D(t)=\frac{2rp^2}{1+Ke^{-2rt}},$$

где $K=\dfrac{2rp^2}{a^2}-1$.

24. Найти производящие операторы диффузионных процессов, определяемых следующими стохастическими дифференциальными уравнениями Ито

а) $dx(t)=-ax(t)\,dt+bd\xi(t)$, ($a$, b — некоторые постоянные, $\xi(t)\in R$);

б) $dy(t)=\begin{pmatrix} dt \\ dx(t)\end{pmatrix}$, где $x(t)$ определяется в а).

25. Найти производящие операторы двумерных диффузионных процессов, определяемых стохастическими уравнениями

а) $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x_2\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix} 0 \\ e^{x_1}\end{pmatrix}d\xi(t)$;

б) $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\xi_1(t) \\ d\xi_2(t)\end{pmatrix}$.

26. Пусть $x(t)=(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, где

$$dx_k(t)=r_kx_k(t)\,dt+x_k(t)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{kj}d\xi_j(t);\ (k=1, 2, \ldots, n).$$

Здесь $(\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t))$ — n-мерный винеровский процесс.

Написать выражение для производящего оператора диффузионного процесса, определяемого указанным уравнением.

27. Написать стохастическое дифференциальное уравнение для диффузионного процесса, производящий оператор которого действует по формуле:

$$Lf(x)=f'(x)+f''(x),\ f\in C^2(R).$$

28. То же задание, что и в задаче 27, если

$$Lf(t, x)=\frac{\partial f}{\partial t}+bx\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 t};\ (f\in C^1([0,\infty))\times C^2(R^2),$$

где b, σ — некоторые постоянные.

29. То же, что и в задаче 27, если

$$Lf(x_1, x_2)=2x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}+\ln(1+x_1^2+x_2^2)\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{1}{2}(1+x_1^2)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1^2}+x_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2^2};$$

$(f\in C^2(R^2))$.

30. Пусть

$$x(t)=x_x(t)=xe^{ct+\alpha\xi(t)}.$$

Доказать непосредственно, что $x(t)$ — марковский процесс. Написать стохастическое дифференциальное уравнение, решению которого соответствует указанный процесс и найти выражение для его производящего оператора.

31. Рассмотрим последовательность скалярных случайных величин x_i с равномерно ограниченными вторыми моментами, которая сходится в среднем квадратическом при $i\to\infty$ к случайной величине x_∞.

Доказать, что

$$Mx_i\to Mx_\infty,\ Mx_i^2\to Mx_\infty^2.$$

32. Пусть уравнение движения системы не содержит случайных возмущений, а именно

$$\dot{x}(t)=ax(t),\ Mx(0)=0,\ Mx^2(0)=D_0>0.$$

Пусть, кроме того, наблюдаемый процесс описывается уравнением:

$$dy(t)=x(t)\,dt+\sigma_0\,d\xi_0(t),\ y(0)=0,$$

(a, σ_0 — заданные константы).

Показать, что

$$D(t)=\left[D_0^{-1}Z(t, 0)+\sigma_0^{-2}\int_0^t Z(t, s)\,ds\right]^{-1}$$

$$Z(t, s)=\exp(2a(s-t)).$$

33. Рассмотрим управляемую систему:

$$dx(t)=(f(x(t)+u))\,dt+\sigma d\xi(t).$$

Здесь $x\in R^n$, $x'f(t)=0$, σ — заданная величина, $\xi(t)\in R^n$, $u\in R^n$, причем на управление u налагается ограничение: $u'u\leqslant b^2$.

Требуется выбрать u так, чтобы среднее время достижения множества $x'x\leqslant r$ было минимальным. Доказать, что оптимальное управление u_0 в этой задаче представляется формулой

$$u_0=\begin{cases}0 & \text{, если } x'x\leqslant r\\ -bx(x'x)^{-\frac{1}{2}} & \text{, если } x'x>r.\end{cases}$$

Найти соответствующее среднее время достижения множества $x'x\leqslant r$ (функцию Беллмана). Заметим, что при $n=3$ задача о твердом теле, обсуждаемая в главе X, служит примером такой системы.

34. Рассмотрим двумерную модель

$$\dot{x}_1(t)=\alpha x_1+u(t),\ \dot{x}_2(t)=\alpha_1 x_1-\alpha_2 x_2,\ t\geqslant 0.$$

В начальный момент времени $t=0$ вектор $(x_1(0), x_2(0))$ распределен нормально с нулевым средним и ковариационной матрицей D_0.

Наблюдаемый процесс есть

$$y(t)=x_2(t)+\sigma\xi(t).$$

Для заданных σ и программного управления $u(t)$ найти ковариационную матрицу $D(t)$ ошибки оценивания вектора (x_1, x_2) и определить предел $D(t)$ при $t\to\infty$.

35. Решить задачу 3 в предположении, что оптимальное управление ищется в виде функционала $u=u(t, y(t))$, где

$$dy(t)=\dot{x}(t)\,dt+\sigma_1 d\xi_1(t).$$

36. Решить задачу 3 в предположении, что оптимальное управление ищется в виде программного управления $u=u(t)$.

Сравнить функции Беллмана в задачах 33, 35, 36.

37. Найти функцию Беллмана и оптимальное управление в линейно-квадратической задаче

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$dx_2(t)=-x_2(t)\,dt+bu\,(bdt+\sigma d\xi(t)),$$

$$M\int_{t_0}^{T}(\alpha_1 x_1^2(t)+\alpha_2 x_2^2(t)+u^2)\,dt\to\min,$$

где b, σ, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$ — заданные постоянные, t_0, T — заданные моменты времени.

38. Найти функцию Беллмана и оптимальное управление с критерием качества из задачи 37 для следующих систем:

а) $\dot{x}_1(t)=x_1(t)+x_2(t)$, $dx_2(t)=u(bdt+\sigma d\xi(t))$;

б) $\dot{x}_1(t)=u$, $dx_2(t)=-x_1(t)\,dt+\sigma x_2(t)\,d\xi(t)$;

в) $\dot{x}_1(t)=u$, $dx_2(t)=-x_2(t)(bdt+\sigma d\xi(t))$;

г) $dx_1(t)=udt+\sigma d\xi(t)$, $\dot{x}_2(t)=u$.

39. Рассмотрим гауссовский параметр Θ со средним 0 и дисперсией D_0. Процесс наблюдения $y(t)$ описывается уравнением

$$dy(t)=\Theta dt+d\xi_0(t),\ t\geqslant 0,\ y(0)=0.$$

Вычислить $D(t)=M\{(\Theta-m(T))^2/y_T\}$, где $m(T)=M\{\Theta/y_T\}$ и символом y_T, как и ранее, обозначается совокупность наблюдений $y(t)$ для $0\leqslant t\leqslant T$.

Показать, что $D(t)=D_0[1+D_0(T)]^{-1}$.

40. Рассмотрим материальную точку в прямолинейном движении, описываемом уравнением $\ddot{x}(t)=0$, $t\geqslant 0$. Случайный начальный вектор $(x(0), \dot{x}(o))'$ имеет нормальное распределение сос средним $m(0)=M(x(0), \dot{x}(o))'$ и ковариационной матрицей $D(0)$. Вычислить $m(t)$ и $D(t)$ для $t>0$, если

(1) отсутствуют наблюдения за состоянием системы;

(2) имеются наблюдения при наличии шума координаты $x(t)$, описываемые уравнением:

$$dy(t)=x(t)\,dt+\sigma_0 d\xi_0(t),\ t>0,\ y(0)=0;$$

(3) имеются наблюдения скорости вида

$$dy(t)=\dot{x}(t)\,dt+\sigma_0 d\xi_0(t),\ t>0,\ y(0)=0;$$

(4) имеются наблюдения при наличии шума и координаты и скорости, описываемые уравнением:

$$dy(t)=(\alpha_1 x(t)+\alpha_2 \dot{x}(t))\,dt+\sigma_0 d\xi_0(t),\quad t>0,\ y(0)=0;$$

Здесь α_1, α_2 и $\sigma_0\neq 0$ — заданные постоянные.

Сравнить ковариационные матрицы $D(t)$ для различных типов наблюдений.

41. Как и в упражнении 40 исследовать аналогичные задачи (1) — (4) при условии, что уравнение движения имеет вид $\ddot{x}+kx=0$, $t\geqslant 0$, где k — некоторая постоянная.

42. Предположим, что $x(t)=x$ — гауссовская случайная величина со средним 0 и дисперсией D_0, т. е. выполняется уравнение

$$dx(t)=0,\quad t\geqslant 0,\ x(0)=x_0=x.$$

Наблюдаемый процесс $y(t)$ является скалярным и описывается уравнением

$$dy(t)=Qx(t)\,dt+\sigma_0 d\xi_0(t),\quad y(0)=y_0,$$

где Q и σ_0 — некоторые константы.

Найти фильтр Калмана и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $m(t)$ и ошибки оценивания $D(t)$.

43. Предположим, что $x(t)=x$ — гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией D_0, т. е. удовлетворяет уравнению

$$dx(t)=0,\quad t\geqslant 0,\ x(0)=x_0=x.$$

Процесс наблюдения $y(t)$ является двумерным и имеет вид

$$\begin{pmatrix} dy_1(t)\\ dy_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\end{pmatrix}x(t)\,dt+\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\xi_1(t)\\ d\xi_2(t)\end{pmatrix},$$

где q_i, $\sigma_i (i=1, 2)$ — заданные постоянные.

Найти фильтр Калмана и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $m(t)$ и ошибки оценивания $D(t)$.

44. Предположим, что $x(t)$ — двумерный гауссовский процесс, удовлетворяющий системе уравнений:

$$dx_1(t)=x_2\,dt,\quad t\geqslant 0,\ x_1(0)=0,$$
$$dx_2(t)=-ax_2\,dt+\sigma d\xi_2(t),\quad a>0,\ x_2(0)=0.$$

Процесс наблюдения $y(t)$ определяется уравнением

$$dy(t)=Qx_1(t)\,dt+\sigma_0 d\xi_0(t),\quad y(0)=y_0,$$

где Q, σ_0 — некоторые константы.

Определить фильтр Калмана и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $m(t)$ и ковариационной матрицы ошибок $D(t)$.

45. Предположим, что $x(t)$ — двумерный гауссовский процесс, удовлетворяющий уравнениям

$$dx_1(t)=x_2\,dt,\quad t\geqslant 0,\ x_1(0)=0,$$
$$dx_2(t)=-ax_2\,dt+\sigma d\xi_2(t),\quad a>0,\ x_2(0)=0.$$

Наблюдаемый процесс $y(t)$ описывается как

$$dy(t)=Qx_2(t)\,dt+\sigma_0 d\xi_0(t),\quad y(0)=y_0,$$

где Q и σ_0 — данные постоянные.

Определить фильтр Калмана и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $m(t)$ и ковариационной матрицы ошибок $D(t)$.

46. Предположим, что $x(t)$ — двумерный гауссовский процесс, удовлетворяющий уравнениям

$$dx_1(t) = -a_1 x_1\,dt + \sigma d\xi_1(t), \quad t \geqslant 0,\ a_1 > 0,\ x_1(0) = 0.$$
$$dx_2(t) = -a_2 x_2\,dt + dx_1, \quad a_2 > 0,\ x_2(0) = 0.$$

Процесс наблюдения представлен в виде

$$dy(t) = Qx_2(t)\,dt + \sigma_0\,d\xi_0(t), \quad y(0) = y_0,$$

где Q и σ_0 — заданные постоянные.

Определить фильтр Калмана и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $m(t)$ и ковариационной матрицы ошибок $D(t)$.

47. Предположим, что $x(t)$ — двумерный гауссовский процесс, удовлетворяющий уравнениям

$$dx_1 = x_2\,dt, \quad t \geqslant 0,\ x_1(0) = 0,$$
$$dx_2(t) = -ax_2\,dt + \sigma d\xi_2(t), \quad a > 0,\ x_2(0) = 0.$$

Процесс наблюдения представлен в виде

$$dy(t) = (Q_0 + Qx_1)\cos w_0 t\,dt + \sigma_0\,d\xi_0(t), \quad y(0) = y_0,$$

где Q_0, Q, σ_0 — некоторые постоянные.

Определить квазилинейный фильтр и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $x^*(t)$ и ковариационной матрицы ошибок $D(t)$.

48. Пусть двумерный гауссовский процесс $x(t)$ описывается уравнениями

$$dx_1 = x_2\,dt, \quad t \geqslant 0,\ x_1(0) = 0,$$
$$dx_2(t) = -ax_2\,dt + \sigma d\xi_2(t), \quad a > 0,\ x_2(0) = 0,$$

а наблюдаемый процесс $y(t)$ представлен в виде

$$dy(t) = (Q_0 + Qx_2)\cos w_0 t\,dt + \sigma_0\,d\xi_0(t), \quad y(0) = y_0.$$

Постоянные Q_0, Q, σ_0 — заданы.

Определить квазилинейный фильтр и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $x^*(t)$ и ковариационной матрицы ошибок $D(t)$.

49. Предположим, что $x(t)$ — двумерный гауссовский процесс, удовлетворяющий уравнениям

$$dx_1 = -a_1 x_1\,dt + \sigma d\xi_1(t), \quad t \geqslant 0,\ a_1 > 0,\ x_1(0) = 0,$$
$$dx_2(t) = -a_2 x_2\,dt + dx_1, \quad a_2 > 0,\ x_2(0) = 0.$$

Наблюдаемый процесс $y(t)$ описывается при этом уравнением:

$$dy(t) = (Q_0 + Qx_2)\cos w_0 t\,dt + \sigma_0\,d\xi_0(t), \quad y(0) = y_0.$$

Здесь Q_0, Q и σ_0 — заданные постоянные.

Определить квазилинейный фильтр и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $x^*(t)$ и ковариационной матрицы ошибок $D(t)$.

50. То же задание, что и в задаче 49, если $x(t)$ — двумерный гауссовский процесс, удовлетворяющий уравнениям

$$dx_1 = x_2\,dt, \quad t \geqslant 0,\ x_1(0) = 0,$$
$$dx_2(x) = -ax_2\,dt + \sigma d\xi_2(t),\ a > 0,\ x_2(0) = 0,$$

а процесс наблюдений $y(t)$ описывается как

$$dy(t) = Q\cos(w_0 t + x_2)\,dt + \sigma_0\,d\xi_0(t), \quad y(0) = y_0,$$

где Q, σ_0 —некоторые постоянные.

51. Та же задача, что и в упражнении 49 для двумерного гауссовского процесса $x(t)$, удовлетворяющего уравнениям

$$dx_1 = -a_1 x_1 dx + \sigma d\xi_1(t), \quad t \geqslant 0,\ a_1 > 0,\ x_1(0) = 0,$$
$$dx_2(t) = -a_2 x_2\, dt + dx_1, \quad a_2 > 0,\ x_2(0) = 0,$$

при условии, что наблюдаемый процесс представлен как

$$dy(t) = Q\cos(w_0 t + x_2)\, dt + \sigma_0\, d\xi_0(t), \quad y(0) = y_0,$$

где Q, σ_0 — заданные постоянные.

52. Предположим, что $x(t)$ скалярный гауссовский процесс, удовлетворяющий уравнению

$$dx = -ax dt + \sigma d\xi(t), \quad t \geqslant 0,\ a > 0,\ x(0) = 0,$$

а наблюдаемый процесс $y(t)$ является двумерным и описывается как

$$\begin{pmatrix} dy_1(t) \\ dy_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} x(t)\, dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_1(t) \\ d\xi_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = 0,$$

где q_i, $\sigma_i (i = 1, 2)$ постоянные.

Определить фильтр Калмана и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $m(t)$ и дисперсии ошибки оценивания $D(t)$.

53. То же задание, что и в задаче 52, если $x(t)$ — двумерный гауссовский процесс, удовлетворяющий уравнениям

$$dx_1 = -a_1 x_1 dt + \sigma_1 d\xi_1(t), \quad t \geqslant 0,\ a_1 > 0,\ x_1(0) = 0,$$
$$dx_2(t) = -a_2 x_1\, dt + \sigma_1 d\xi_2(t), \quad a_2 > 0,\ x_2(0) = 0,$$

а процесс наблюдения $y(t)$ также является двумерным и описывается как

$$\begin{pmatrix} dy_1(t) \\ dy_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} x(t)\, dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} d\xi_0(t), \quad y(0) = 0,$$

здесь σ_i, q_i — постоянные, $\sigma_i > 0 (i = 1, 2)$.

54. Предположим, что $x(t)$ — двумерный гауссовский процесс, удовлетворяющий уравнениям

$$dx_1 = -a_1 x_1 dt + \sigma_1 d\xi_1(t), \quad t \geqslant 0,\ a_1 > 0,\ x_1(0) = 0,$$
$$dx_2(t) = -a_2 x_1\, dt + \sigma_1 d\xi_2(t), \quad a_2 > 0,\ x_2(0) = 0,$$

Пусть наблюдаемый процесс $y(t)$ описывается уравнением

$$dy(t) = (Q_0 + x_1)\cos(w_0 t + x_2)\, dt + \sigma_0\, d\xi_0(t), \quad y(0) = y_0,$$

где Q_0 и σ_0 — постоянные.

Определить квазилинейный фильтр и решить уравнения фильтрации для оптимальной оценки $x^*(t)$ и ковариационной матрицы ошибок $D(t)$.

55. Пусть движение системы описывается скалярным уравнением

$$\dot{x}(t) = k(t)\, u, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x(0) = x_0,$$

а наблюдаемый процесс представлен в виде

$$dy(t) = Q(u)\, x(t)\, dt + \sigma(t)\, d\xi_0(t).$$

Здесь $k(t)$ и $\sigma(t)$ — заданные непрерывные положительные функции, управление u в каждый момент времени конструируется как функция наблюдений $y(s)$ на интервале $0 \leqslant s \leqslant t$. Предполагается, что $u \in U$, где множество U состоит из трех точек:

$U=(-1, 0, 1)$, а функция $Q(u)$ определяется соотношениями: $Q(0)=1$, $Q(1)=Q(-1)=0$.

Определить управление u движением системы x и процесс наблюдений y так, чтобы $M\{x^2(T)/y_T\}$ было минимальным.

56. Предположим, что скалярный процесс $x(t)$ и наблюдение за ним описываются уравнениями

$$dx(t)=ax(t)\,dt+d\xi(t), \quad t>0, \; x(0)=x_0,$$
$$dy(t)=x(t)\,dt+d\xi_0(t),$$

где x_0 — гауссовская случайная величина с $Mx_0=m_0$ и $M(x(0)-m_0)^2=D_0$.

Показать, что ошибка оценивания равна

$$D(t)=(\beta+a)+2\beta\left[\frac{D_0+\beta-a}{D_0-\beta-a}\,e^{2\beta t}-1\right]^{-1}$$

где $\beta=\sqrt{1+a^2}$.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

РАСЧЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ГЛАВА XIII
ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

В этой главе рассматриваются некоторые методы численного исследования линейных стационарных систем. Излагаются методы определения устойчивости замкнутых управляемых систем, методы построения функций Ляпунова и стабилизирующих управлений, методы численного исследования управляемости и наблюдаемости стационарных систем, методы решения стационарной задачи оптимальной стабилизации. Изложенные методы опираются на вычислительные методы линейной алгебры.

§ 1. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Для линейных управляемых систем вида

$$\dot{x}(t)=A_1x(t)+B_1u(t),\ x\in R_n,\ u\in R_m \tag{1.1}$$

закон управления часто выбирается в виде линейного закона $u=-Kx$. Такой закон называют *пропорциональным регулятором* (П-*регулятором*). Замкнутая П-регулятором система (1.1) имеет вид

$$\dot{x}(t)=(A_1-B_1K)x=Ax. \tag{1.2}$$

Одним из основных требований к выбору П-регулятора является требование устойчивости замкнутой системы (1.2).

Изучение устойчивости линейной стационарной системы (1.2) сводится к изучению расположения собственных значений (собственных чисел матриц A или к применению критерия Рауса — Гурвица (см. § 5 гл. I)).

Отыскание всех собственных значений (спектра) несимметричной, вообще говоря, матрицы A является самой сложной задачей вычислительной линейной алгебры. Эту задачу часто называют *полной проблемой собственных значений*. Для решения указанной проблемы разработаны две группы методов: *точные и итерационные*.

1. Точные методы решения полной проблемы собственных значений. Нахождение собственных значений квадратной матрицы A с помощью точных методов проводится в два этапа:

1) раскрытие характеристического (векового) уравнения

$$\det |A-\lambda I|=0, \tag{1.3}$$

т. е. нахождение полинома

$$p(\lambda)=(-1)^n[\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-\ldots-p_n]=0, \tag{1.4}$$

все корни которого являются собственными значениями матрицы A;

2) отыскание всех корней алгебраического уравнения (1.4).

Для раскрытия определителя (1.3) используются методы Леверрье, А. Н. Крылова, Данилевского, Фадеева и др. [4; 6; 19].

Метод Крылова основан на использовании теоремы Гамильтона — Кэли, согласно которой всякая матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению (1.4). Иначе говоря, всегда

$$A^n-p_1A^{n-1}-p_2A^{n-2}-\ldots-p_nI=0. \tag{1.5}$$

Возьмем произвольный вектор $y^0\in R_n$ $(y^0\neq 0)$ и умножим на него равенство (1.5):

$$A^ny^0-p_1A^{n-1}y^0-\ldots-p_ny^0=0. \tag{1.6}$$

Обозначив $y^k=A^ky^0=Ay^{k-1}$, запишем равенство (1.6) в виде

$$y^n-p_1y^{n-1}-\ldots-p_ny^0=0. \tag{1.7}$$

Соотношение (1.7) является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных p_1, ..., p_n. Решая эту систему каким-либо методом (например, методом исключения Гаусса [6; 7; 9; 13]), находим выражение для характеристического уравнения (1.4). Далее необходимо решить алгебраическое уравнение (1.4) (например, методом парабол [9; 14], методом Берстоу [4; 11] или другими методами [3; 9; 17]).

При использовании метода Крылова могут встретиться особые случаи, когда векторы y^n, y^{n-1}, ..., y^0 оказываются линейно зависимыми и система (1.7) не имеет единственного решения. В этих случаях метод Крылова также можно применить, но алгоритм усложняется. Проще всего взять другой начальный вектор y^0 и повторить вычисления. Если после нескольких таких попыток результат не будет получен, то лучше использовать какой-либо другой метод.

Пример 1.1. Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0{,}01\\ 0 & -0{,}99\end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Собственные значения этой треугольной матрицы, очевидно, равны $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-0{,}99$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2+1{,}99\lambda+0{,}99=0, \text{ т. е. } p_1=-1{,}99;\ p_2=-0{,}99.$$

Будем искать собственные значения матрицы A методом Крылова. Возьмем $(y^0)'=(1,1)$ и вычислим $(y^1)'=(-0{,}99;\ -0{,}99)$, $(y^2)'=$ $=(0{,}9801;\ 0{,}9801)$. При этом система (1.7) имеет вид

$$-0{,}99p_1+p_2=0{,}9801,$$
$$-0{,}99p_1+p_2=0{,}9801$$

и, очевидно, является вырожденной. Дальнейшее применение метода Крылова в этом случае невозможно. Однако, взяв $(y^0)'=$ $=(0;\ 1)$, найдем $(y^1)'=(0{,}01;\ -0{,}99)$, $(y^2)'=(0{,}0199;\ 0{,}9801)$. Система (1.7) принимает вид

$$0{,}01p_1=-0{,}0199,$$
$$-0{,}99p_1+p_2=0{,}9801.$$

Решение этой системы $p_1=-1{,}99$, $p_2=-0{,}99$ в точности совпадает с коэффициентами характеристического уравнения.

Метод Леверрье основан на использовании известных из алгебры формул Ньютона (обобщающих формулы Виета на произвольные многочлены), согласно которым коэффициенты p_i многочлена (1.3) и его корни λ_i связаны соотношениями

$$p_1=s_1,\ p_2=\frac{1}{2}(s_2-p_1s_1),\ \ldots,\ p_n=\frac{1}{n}(s_n-p_1s_{n-1}-p_{n-1}s_1), \qquad (1.9)$$
$$s_l=\lambda_1^l+\lambda_2^l+\ldots+\lambda_n^l.$$

Кроме того, известно, что

$$s_1=\lambda_1+\ldots+\lambda_n=\operatorname{Tr}A,$$
$$s_2=\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2=\operatorname{Tr}A^2$$

$$s_n=\lambda_1^n+\ldots+\lambda_n^n=\operatorname{Tr}A^n.$$

Таким образом, для раскрытия характеристического уравнения методом Леверрье требуется вычислить степени A^2, ..., A^n матрицы A, найти их следы и затем определить коэффициенты по формулам (1.9).

Метод Леверрье более трудоемок, чем метод Крылова, так как определение степеней A^2, ..., A^n требует порядка n^4 операций. В то же время он нечувствителен к расположению спектра (собственных чисел) матрицы A.

Все точные методы весьма экономичны, для определения с их помощью собственных значений матрицы до 10-го порядка требуется примерно 10^3-10^4 операций умножения и деления. На ЭВМ средней производительности нахождение всех собственных чисел матрицы 10-го порядка требует 15—30 с, что вполне приемлемо для большинства применений.

В [11] приведена программа BASMAT, позволяющая для заданной матрицы A порядка $n\leqslant 10$ находить ее характеристический многочлен, все собственные числа λ_i и переходную матрицу $\exp(At)$ системы. В указанной программе используется метод Леверрье для раскрытия характеристического уравнения и метод Берстоу для отыскания корней алгебраического уравнения.

К сожалению, *все точные методы не являются в достаточной мере устойчивыми к погрешностям вычислений* (как говорят, *не являются численно устойчивыми*). *Малые погрешности вычислений могут привести к большим погрешностям в результате.* Проиллюстрируем это примерами.

Пример 1.2. Для матрицы (1.8) возьмем $(y^0)'=(1;\ 0{,}99)$. Тогда система (1.7) примет вид

$$\begin{aligned} -0{,}9901p_1+p_2&=0{,}980299,\\ -0{,}9801p_1+0{,}99p_2&=0{,}970299. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Предположим, что в результате округлений промежуточных и окончательных результатов вместо системы (1.10) получилась система

$$\begin{aligned} -0{,}99p_1+p_2&=0{,}9800,\\ -0{,}98p_1+0{,}99p_2&=0{,}9702. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Погрешности в коэффициентах системы (1.11) по сравнению с системой (1.10) не превышают 0,03%. Система (1.10) имеет решение $p_1=-1{,}99$, $p_2=-0{,}99$, а система (1.11) — решение $p_1=0$, $p_2=0{,}98$. Таким образом, при решении этих систем получается погрешность порядка 200%. Этот очень неприятный результат объясняется тем, что матрица системы (1.10) *плохо обусловлена* (подробнее об обусловленности матриц см. [3; 6; 7; 9; 13]). Если продолжить отыскание собственных значений в этом примере, то получим характеристическое уравнение $\lambda^2-0{,}98=0$ и собственные значения $\lambda_{1,\,2}\approx\pm 0{,}99$. Итак, из-за незначительных (порядка 0,03%) погрешностей, допущенных при округлении коэффициентов, получается неверный вывод, что устойчивая (и, более того, достаточно хорошо устойчивая) матрица (1.8) является неустойчивой.

Можно было бы предположить, что указанная неустойчивость связана с необходимостью решать систему линейных алгебраических уравнений. Однако во всех точных методах имеется второй этап — решение алгебраического уравнения. Как показывает приведенный ниже пример, эта задача также численно неустойчива.

Пример 1.3. Рассмотрим многочлен

$$p(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-19)(\lambda-20)=\lambda^{20}-210\lambda^{19}+... . \quad (1.12)$$

Предположим, что лишь один из коэффициентов этого многочлена определен неверно, а именно вместо коэффициента $p_1=210$ при λ^{19} получено $\tilde{p}_1=210+2^{-23}$. Дж. Уилкинсон [17] весьма тщательно, с 90 двоичными разрядами, вычислил корни уравнения

$$p(\lambda)+2^{-23}\lambda^{19}=0.$$

При этом десять корней стали комплексными с достаточно большой мнимой частью, например корни $\lambda_{16}=16$, $\lambda_{17}=17$ перешли в корни $\lambda_{16,\,17}\approx 16{,}731\pm 2{,}813i$, а ошибка в действительном корне $\lambda_{20}=20$ достигла почти 5% и $\lambda_{20}=20{,}847...$ Важно отметить, что такие значения $\tilde{\lambda}_i$ явились не результатом ошибок вычислений, а вызваны действительной высокой чувствительностью корней алгебраического многочлена $p(\lambda)$ к изменению его коэффициентов.

2. Итерационные методы. При размерностях $n>10$ использование точных методов, как правило, не дает удовлетворительных результатов и необходимо применять итерационные методы.

Первый итерационный метод решения полной проблемы собственных значений для симметричных (или эрмитовых) матриц был предложен К. Якоби в 1846 г., раньше, чем были созданы точные методы. Однако из-за большой трудоемкости (на порядок большей, чем у точных методов) *метод Якоби* не применялся до тех пор, пока в вычислительной практике не начали широко использоваться ЭВМ. Использование ЭВМ привело к пересмотру понятий о трудоемкости, выдвинув на первый план требование численной устойчивости, надежности вычислений. Второе рождение метода Якоби и его широкое применение началось с 1960 г. Оказалось, что метод вращений Якоби обладает хорошей численной устойчивостью и с его помощью можно успешно определять все собственные значения симметричных матриц до порядка 50—100. При этом требуется выполнить около $30n^3$ арифметических операций.

Идея метода Якоби заключается в том, чтобы с помощью ортогональных подобных преобразований (вращений) привести исходную матрицу A к почти треугольному виду, когда внедиагональные элементы имеют порядок $O(\varepsilon)$. При этом собственные значения практически совпадают с диагональными элементами, т. е. $\lambda_i=a_{ii}+O(\varepsilon^2)$.

Однако для системы вида (1.2) нет оснований ограничиться только случаем симметричных матриц A, поэтому метод Якоби не может считаться универсальным методом исследования устойчивости систем (1.2). Подробнее о методе Якоби см. в [3; 4; 6; 19].

Численно устойчивый метод решения полной проблемы собственных значений для несимметричных матриц, называемый QR-

алгоритмом, был предложен В. Н. Кублановской в 1960 г. и независимо от нее Дж. Френсисом в 1961 г. В основе QR-алгоритма, так же как и метода Якоби, лежит использование ортогональных преобразований. Преимущество ортогональных преобразований заключается в том, что они не увеличивают нормы ошибок вычислений.

Опишем QR-алгоритм несколько подробнее. Пусть дана вещественная матрица A с элементами a_{ij}, т. е. $A=(a_{ij})$, $i, j=1, \ldots, n$. Основная идея QR-алгоритма состоит в том, чтобы для матрицы A найти такое подобное ортогональное преобразование $U'AU=S$, при котором S примет так называемую форму Шура. Говорят, что матрица S имеет *форму Шура,* если она является блочно-треугольной матрицей вида

$$S=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12}\ldots S_{1n} \\ 0 & S_{22}\ldots S_{2n} \\ & \\ 0\ldots\ldots 0 & S_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом диагональные матрицы S_{ii} должны иметь размер 1 или 2. Спектр матрицы S (а значит, и подобной ей матрицы A) совпадает с объединением спектров матриц S_{ii}. Если матрица S_{ii} имеет размер 1, т. е. $S_{ii}=(s^i_{11})$, то ее собственное значение есть $\lambda_i=s^i_{11}$. Если же матрица S_{jj} имеет размер 2, т. е.

$$S_{jj}=\begin{pmatrix} s^j_{11} & s^j_{12} \\ s^j_{21} & s^j_{22} \end{pmatrix},$$

то ее собственные значения находятся из квадратного уравнения

$$\lambda^2-\lambda\,(s^j_{11}+s^j_{22})-(s^j_{21}s^j_{12}-s^j_{11}s^j_{22})=0.$$

В этом случае собственные значения могут оказаться комплексными.

Процесс преобразования матрицы A к форме Шура S проводят в несколько этапов. Сначала строят разложение матрицы A вида

$$A=QR, \tag{1.13}$$

где Q — ортогональная матрица (т. е. $Q'=Q^{-1}$), а R — верхняя треугольная матрица. Такое разложение может быть построено различными способами. В одном из них ортогональная матрица Q строится как произведение $n-1$ элементарных отражений H_i. В качестве H_1 берут матрицу

$$H_1=E-2\beta^2uu',\quad 2\beta^2=\frac{1}{\gamma\,(\gamma-a_{11})},$$

$$u=(a_{11}-\gamma,\ a_{21},\ \ldots,\ a_{n1})',\quad \gamma=(a^2_{11}+a^2_{21}+\ldots+a^2_{n1})^{1/2}$$

Непосредственно проверяется, что

$$H_1 = H_1' = H_1^{-1},\ H_1 a = \gamma e_1,$$

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{n1} \end{pmatrix},\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, H_1 — ортогональная матрица, и, кроме того, в матрице $A_1 = H_1 A$ поддиагональные элементы 1-го столбца равны нулю. Далее находят матрицу $A_2 = H_2 A_1$, где H_2 имеет вид

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{pmatrix},$$

а $\hat{H}_2$ — такая же, как и H_1, матрица отражений, но $(n-1)$-го порядка. При этом в матрице A_2 поддиагональные элементы уже двух первых столбцов являются нулями. Продолжая этот процесс, строят матрицы

$$A_3 = H_3 A_2,\ \ldots,\ A_{n-1} = H_{n-1} A_{n-2} = H_{n-1} \ldots H_2 H_1 A = R. \qquad (1.14)$$

Здесь R — верхняя треугольная матрица. Из равенств (1.14) и ортогональности матриц H_i следует, что

$$A = H_1 H_2 \ldots H_{n-1} R = QR,\ Q = H_1 H_2 \ldots H_{n-1}.$$

Искомое разложение (1.13) матрицы A построено.

На втором этапе строят последовательность матриц $A^{(k)}$ по формулам

$$A^{(1)} = RQ,\ A^{(1)} = Q_1 R_1,\ A^{(2)} = R_1 Q_1,$$

Матрицы $A^{(k)}$ ортогонально подобны A, поскольку, например,

$$QA^{(1)}Q^{-1} = QRQQ^{-1} = QR = A.$$

Можно доказать, что *последовательность $A^{(k)}$ сходится по форме к некоторой матрице Шура S*. Точные определения и доказательство можно найти в [8].

Для обеспечения конечности этого процесса поступают следующим образом. Задают некоторое малое число ε и, как только какой-либо поддиагональный элемент $A^{(k)}$ становится меньше ε, заменяют его нулем. С таким изменением процесс приведения к форме Шура становится конечным и $A^{(l)} = S$ для некоторого l. При

этом ортогональная матрица U, приводящая A к форме S, определяется соотношением

$$U=Q\leftrightarrow Q_1Q_2\cdots Q_{l-1}.$$

В описанном виде QR-алгоритм имеет невысокую скорость сходимости. Для ускорения сходимости в QR-алгоритм вводят сдвиги. Более подробно о QR-алгоритмах и правилах выбора сдвигов см. в [6; 18].

В [18] приведены программы, реализующие метод вращений Якоби для симметричных матриц, QR-алгоритм и QL-алгоритм, а также QR-алгоритм со сдвигом.

Пример 1.4. Пусть матрица A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} -10 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & -9 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -7 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -3 & -12 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & 1 & -15 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения вычислены с помощью QR-алгоритма в [18] на ЭВМ с 39 двоичными разрядами для мантиссы. При этом после 8 итераций получены собственные значения $\lambda_1=-1{,}65526620775$; $\lambda_2=-6{,}99483783064$; $\lambda_3=-9{,}36555492016$; $\lambda_4=-15{,}8089207645$; $\lambda_5=-19{,}1754202773$. Таким образом, матрица A устойчива. Погрешность в определении собственных значений имеет порядок $40\cdot 10^{-11}$.

3. Критерий Рауса — Гурвица. В ряде случаев для описания линейных динамических систем используют передаточные функции вида $W(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$, где $N(p)$, $D(p)$ — многочлены. Для устойчивости системы с передаточной функцией $W(p)$ необходимо и достаточно, чтобы корни многочлена $D(p)$ лежали в левой полуплоскости. Это можно проверить с помощью критерия Рауса — Гурвица (см. § 5 гл. I).

В [5] приведены две программы GURV и RAUS, позволяющие определить, лежат в левой полуплоскости или нет корни многочлена $D(p)$. Там же приведена программа, реализующая критерий Михайлова, а также программа определения области устойчивости в пространстве параметров для линейных систем.

4. Метод Зубова функционального преобразования матриц. Определение устойчивости матрицы A сводится либо к нахождению всех собственных значений, либо к раскрытию характеристического уравнения и применению критерия Рауса — Гурвица. Эти методы весьма трудоемки и не всегда численно устойчивы.

В 1959 г. В. И. Зубов предложил метод определения устойчивости, не связанный с собственными значениями. Идею *метода Зубова* можно описать следующим образом. Пусть все собственные значения матрицы A расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости λ. Произведем отображение плоскости λ в плоскость ρ по формулам

$$\rho=\frac{\lambda+1}{\lambda-1},\quad \lambda=\frac{\rho+1}{\rho-1}. \tag{1.15}$$

Дробно-линейное преобразование (1.15) переводит левую полуплоскость плоскости λ во внутренность единичного круга с центром в начале координат комплексной плоскости ρ, а правую полуплоскость — во внешность единичного круга. При этом мнимая ось переходит в единичную окружность. Подставляя λ из (1.15) в уравнение $\det|A-\lambda I|=0$, получим, что ρ является корнем уравнения

$$\det\left|A-\frac{\rho+1}{\rho-1}I\right|=\det|\rho A-A-\rho I-I|=$$
$$=\det|-A-I-\rho(I-A)|=0. \tag{1.16}$$

Умножая уравнение (1.16) на $\det|(I-A)^{-1}|\neq 0$, заключаем, что ρ есть собственное значение матрицы B:

$$\det|B-\rho I|=0,\quad B=(-A-I)(I-A)^{-1}.$$

Матрица B может быть также записана следующим образом:

$$B=(-A-I+I-I)(I-A)^{-1}=I-2(I-A)^{-1}. \tag{1.17}$$

Матрица B соответствует матрице A при функциональном преобразовании (1.15). Далее, известно [1; 3; 4], что для матрицы B, все собственные значения которой лежат внутри единичного круга, выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty}B^k=0. \tag{1.18}$$

Теперь можно описать алгоритм определения устойчивости с помощью метода Зубова.

1^0. Строят матрицу B по формуле (1.17). Если $(I-A)^{-1}$ не существует, то одно из собственных значений $I-A$ равно 0, и, значит, одно из собственных значений матрицы A равно 1, т. е. матрица A неустойчива.

2^0. Вычисляют $B^2=B\cdot B$, $B^4=B^2\cdot B^2$, $B^8=B^4\cdot B^4$ и т. д. Если для какой-либо нормы $\|B^{2^k}\|\to 0$, $k\to\infty$, то матрица A устойчива. В противном случае матрица A неустойчива, т. е. ее собственные значения не лежат внутри левой полуплоскости.

Таким образом, вычисления сводятся к нахождению $(I-A)^{-1}$ и степеней B^{2^k} Каждая из этих операций требует n^3 умножений

и делений [6; 13]. Чем ближе к мнимой оси расположены собственные значения матрицы A, тем медленнее сходимость к нулю матриц B^l. Если имеется хотя бы одно собственное значение A на мнимой оси, то $\|B^l\|$ ограничены. Если же хотя бы одно собственное значение A лежит в правой полуплоскости, то $\|B^l\| \to \infty$, $l \to \infty$.

Метод функционального преобразования матриц можно применить также для определения принадлежности всех собственных значений матрицы A некоторому многоугольнику в комплексной плоскости [1].

§ 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

1. Предварительные замечания. В § 7 гл. I было установлено, что для устойчивой линейной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in R_n \tag{2.1}$$

всегда существует функция Ляпунова вида

$$V = x'Px \tag{2.2}$$

такая, что положительно определенная симметричная матрица P удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$A'P + PA = C, \tag{2.3}$$

где C — произвольная наперед заданная отрицательно определенная симметричная матрица. Аналогично, для дискретной системы $x_{k+1} = Bx_k$, $x_k \in R_n$ также существует квадратичная функция Ляпунова вида (2.2), но матрица P удовлетворяет уравнению

$$P - B'PB = C_1, \tag{2.4}$$

где C_1 также произвольная отрицательно определенная матрица. Будем называть уравнение (2.3) *непрерывным уравнением Ляпунова*, а (2.4) — *дискретным уравнением Ляпунова*. В настоящем параграфе рассмотрим методы численного решения этих уравнений. Построение функции Ляпунова для линейных систем часто весьма полезно и при исследовании близких нелинейных систем.

Матрица P как симметричная матрица имеет $\frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ различных элементов. Поэтому, хотя уравнение (2.3) и можно непосредственно свести к системе линейных алгебраических уравнений, порядок этой системы окажется высоким и равным $\frac{n^2}{2}$. Для ее решения самым экономичным методом — методом Гаусса — потребуется примерно $\frac{1}{3}\left(\frac{n^2}{2}\right)^3 \approx 0{,}04n^6$ операций умножения и деления. Такое

количество операций уже при $n=20$ становится весьма большим ($\approx 2{,}5 \cdot 10^6$). Нахождение функции Ляпунова указанным прямым методом при $n=20$ требует использования достаточно мощной ЭВМ, а при $n=100$ вообще невозможно ни на какой ЭВМ. Это заставляет искать другие более экономичные методы и применять различные итерационные процедуры решения уравнений (2.3) и (2.4).

2. Метод рядов. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение уравнения (2.4) можно записать в виде ряда:

$$P = C_1 + B'C_1B + (B')^2 C_1 B^2 + \dots . \qquad (2.5)$$

Можно показать, что если матрица B устойчива (т. е. все ее собственные значения лежат внутри единичного круга; см. § 10 гл. I), то ряд (2.5) сходится. Непосредственно вычислять частичные суммы ряда (2.5) не очень экономично. Более эффективным оказывается следующий метод. Обозначим через $P_{\nu(k)}$ сумму $2^k - 1$ членов ряда (2.5):

$$P_{\nu(k)} = \sum_{i=1}^{\nu(k)} (B')^{i-1} C_1 B^{i-1}, \quad \nu(k) = 2^k.$$

Тогда можно проверить, что для $P_{\nu(k)}$ справедлива следующая рекуррентная формула:

$$P_{\nu(k+1)} = P_{\nu(k)} + (B')^{\nu(k)} P_{\nu(k)} B^{\nu(k)}, \quad P_{\nu(0)} = C_1, \quad B^{\nu(k+1)} = [B^{\nu(k)}]^2. \qquad (2.6)$$

Каждый шаг вычислений по формулам (2.6) требует выполнения трех умножений матриц. Для этого требуется не более $3n^3$ умножений. Метод рядов сходится достаточно быстро, поскольку $k=6$ соответствует сумме $2^6 = 64$ членов ряда (2.5), а $k=10$ — сумме 1024 членов ряда. Поэтому можно считать, что трудоемкость решения дискретного уравнения Ляпунова имеет порядок $20n^3 \div 30n^3$ умножений. Это значительно меньше, чем при прямом решении уравнения Ляпунова, требующем $0{,}04n^6$ умножений. В литературе* описано успешное применение метода рядов для решения уравнения Ляпунова при $n=143$.

Подпрограмма SUM, реализующая указанный алгоритм, включена в систему ORACLS, используемую в Управлении по аэрокосмическим исследованиям США (NASA) для расчетов линейных управляемых систем [22].

---

*Ларин В. Б. Методы решения алгебраических уравнений Риккати // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2.

С помощью метода рядов можно решать также и непрерывное уравнение Ляпунова (2.3). Нетрудно проверить, что уравнение (2.3) совпадает с уравнением (2.4), в котором

$$B=(\beta I+A)\,(\beta I-A)^{-1},\quad C_1=-2\beta\,(\beta I-A')^{-1}C\,(\beta I-A)^{-1},\quad (2.7)$$

где $\beta>0$ — некоторое специально выбираемое число. Для того чтобы убедиться в этом, запишем уравнение (2.4) с коэффициентами вида (2.7) и умножим его слева на $\beta I-A'$, а справа на $\beta I-A$. Приводя затем подобные члены, получим уравнение (2.3). Число β в преобразовании (2.7) выбирают одним из двух способов. Первый из них связан с нахождением собственных значений матрицы A

$$\lambda_j(A)=a_j+ib_j,\ i^2=-1,\ |\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda_n|,$$

и число β определяют с помощью соотношений

$$\beta^2=\begin{cases}\gamma=\dfrac{a_1\,(a_n^2+b_n^2)-a_n\,(a_1^2+b_1^2)}{a_n-a_1}, & \text{если } a_n-a_1\neq 0 \text{ и } \gamma>0,\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_j^2+b_j^2)^{1/2}, & \text{если } a_n=a_1 \text{ или } \gamma\leqslant 0.\end{cases}\quad (2.8)$$

При втором способе выбора числа β полагают

$$\beta=2\,\|A\|_1=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{jk}|. \quad (2.9)$$

Таким образом, для решения непрерывного уравнения Ляпунова (2.3) сначала строят матрицы B и C_1 по формулам (2.7), где β определяется формулами (2.8) или (2.9), а затем вычисляют члены последовательности (2.6). Такой метод решения уравнения Ляпунова и подпрограмма BILIN описаны в [22].

Метод рядов можно применить также и для решения более общих уравнений

$$X=AXC+B,\quad AX+XC=B,$$

где A, B и C — матрицы, имеющие соответственно размеры $n\times n$, $n\times m$ и $m\times m$ [8; 22].

Недостатком метода рядов является то, что он применим только в случае устойчивой матрицы B. Если матрица B неустойчива (т. е. имеется хотя бы одно собственное значение матрицы B, лежащее на границе или вне единичного круга), то ряд (2.5) может расходиться и метод рядов не дает никакого решения.

3. Метод матричной сигнум-функции. Для любой невырожденной матрицы A, не имеющей чисто мнимых собственных значений, определим последовательность X_k по формулам

$$X_{k+1}=\frac{1}{2}(X_k+X_k^{-1}),\quad X_0=A,\quad k=0,1,2,\ldots. \tag{2.10}$$

Последовательность X_k сходится, а ее предел, обозначаемый $\operatorname{sgn} A$, называют *сигнум-функцией от матрицы* A. А. А. Абрамовым [8] установлено, что матрица $B=\operatorname{sgn} A$ обладает следующим замечательным свойством, которое приведем без доказательства.

Обозначим через L_+ и L_- инвариантные подпространства из R_n, соответствующие собственным значениям матрицы A с положительной и с отрицательной вещественной частью. При этом R_n есть прямая сумма L_+ и L_-, т. е. $R_n=L_+\oplus L_-$. Справедливы следующие равенства:

$$Bx=\begin{cases} x, & x\in L_+,\\ -x, & x\in L_-. \end{cases} \tag{2.11}$$

Если же матрица A устойчива, то из (2.11) следует, что

$$\operatorname{sgn} A=-I. \tag{2.12}$$

Равенство (2.12) является основным соотношением некоторого метода решения непрерывного уравнения Ляпунова

$$A'P+PA=C. \tag{2.13}$$

Умножив уравнение (2.13) слева на $(A')^{-1}$ и справа на A^{-1}, имеем

$$PA^{-1}+(A')^{-1}P=(A')^{-1}CA^{-1}. \tag{2.14}$$

Из (2.13) и (2.14) следует, что матрица P удовлетворяет также уравнению

$$\frac{1}{2}(A'+(A')^{-1})P+P\frac{1}{2}(A+A^{-1})=\frac{1}{2}(C+(A')^{-1}CA^{-1}).$$

Аналогично проверяется, что P есть решение также и уравнений

$$A'_{k+1}P+PA_{k+1}=C_{k+1}, \tag{2.15}$$

где

$$A_{k+1}=\frac{1}{2}(A_k+A_k^{-1}),\quad A_0=A,\quad k=0,1,2,$$

$$C_{k+1}=\frac{1}{2}(C_k+(A'_k)^{-1}C_kA_k^{-1}),\quad C_0=C,\quad k=0,1,2,\ldots$$

Так как матрица A устойчива, то, переходя к пределу в (2.15) и учитывая (2.12), получим

$$P=-\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} C_k. \tag{2.16}$$

Следовательно, в качестве приближенного значения для P можно взять $P=-\frac{1}{2}C_l$, где номер l достаточно велик. При этом если исходная матрица $C=C_0$ — отрицательно-определенная, то матрица P является положительно-определенной. Один шаг этого метода требует обращения матрицы A_k и двух умножений матриц для нахождения выражения $(A'_k)^{-1}C_kA_k^{-1}$, т. е. около $3n^3$ операций умножения. Если считать, что метод сходится за 6—10 шагов, то общая трудоемкость метода имеет порядок $20n^3 \div 30n^3$ умножений. Однако скорость сходимости метода зависит от близости спектра устойчивой матрицы A к мнимой оси. Чем ближе спектр к мнимой оси, тем медленнее, вообще говоря, сходимость метода.

4. Использование QR-алгоритма. В последнее время для решения уравнения Ляпунова (2.13) предложено несколько методов, основанных на QR-алгоритме [8]. Изложим один из них, который будем называть *алгоритмом* BS*. Сначала с помощью QR-алгоритма матрицу A приводят к форме Шура S, где $S=U'AU$. Умножим теперь равенство (2.13) слева на U', а справа на U, и между матрицами A' и P, а также P и A запишем произведение $UU'=E$. Тогда получим уравнение

$$U'A'UU'PU+U'PUU'AU=U'CU.$$

Полагая $Y=U'PU$, $D=U'CU$, придем к эквивалентному (2.13) уравнению

$$S'Y+YS=D. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) нетрудно решить непосредственно, учитывая блочно-треугольную форму матрицы S. Запишем матрицы Y и D в блочном виде, согласованном с матрицей S.

Пусть, например, матрица S^1 размера 4×4 имеет следующую блочную структуру:

$$S^1=\begin{pmatrix} S^1_{11} & & S^1_{12} & S^1_{13} \\ 0 & & S^1_{22} & S^1_{23} \\ 0 & & & \\ 0 & 0\quad 0 & & S^1_{33} \end{pmatrix}, \quad S^1=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица Y^1 имеет вид

*Bartels R. H., Stewart G. M. Solution of the Matrix Equation AX+XB=C, — Comm. ACM (1972) v. 15, p. 820 — 826.

$$Y^1=\begin{pmatrix} Y^1_{11} & Y^1_{12} & Y^1_{13} \\ Y^1_{21} & Y^1_{22} & Y^1_{23} \\ Y^1_{31} & Y^1_{32} & Y^1_{33} \end{pmatrix}, \quad Y^1=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Если же матрица S^2 имеет блочную структуру вида

$$S^2=\begin{pmatrix} S^2_{11} & S^2_{12} & S^2_{13} \\ 0 & S^2_{22} & S^2_{23} \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & S^2_{33} \end{pmatrix}, \quad S^2=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

то ей соответствует матрица Y^2 вида

$$Y^2=\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Структуры матриц D^1 и D^2 аналогичны структурам матриц Y^1 и Y^2.

Запишем уравнения (2.17) по блокам и выпишем уравнения для отдельных блоков. Так как в матрице D не может быть блоков размером больше чем 2×2, то система (2.17) распадается на совокупность линейных уравнений 1, 2 или 4-го порядка. Например, уравнения, соответствующие блокам D^1_{11}, D^1_{12} и D^1_{22}, являются соответственно уравнениями 1, 2 и 4-го порядка. Нетрудно записать формулы для этой совокупности уравнений и затем последовательно ее решить. В результате решения находим промежуточную матрицу Y, а матрицу P вычислим затем по формуле

$$P=UYU'.$$

Итак, алгоритм BS сводится к следующим этапам.

1^0. Приводят матрицу A к форме Шура S: $S=U'AU$.

2^0. Вычисляют матрицу $D=U'CU$.

3^0. Решают уравнение (2.17).

4^0. Вычисляют матрицу $P=UYU'$.

Алгоритм BS можно применить для любых матриц A и C, а не только для устойчивых матриц A и симметричных матриц C. Этот алгоритм, как и все алгоритмы, основанные на ортогональных преобразованиях, обладает высокой численной устойчивостью. Его трудоемкость оценивается в $25n^3$ умножений и не зависит от расположения спектра матрицы A. Для реализации алгоритма BS

необходима память в $3n^2$ машинных слов. Все это позволяет считать алгоритм BS одним из наилучших методов решения уравнения Ляпунова (2.13).

В [8] приведена программа алгоритма BS на языке ФОРТРАН. Подпрограмма BASTWAR, реализующая этот же метод, включена в систему ORACLS [22].

5. Построение стабилизирующих управлений. В ряде задач требуется найти управление вида

$$u(t) = -Fx(t), \tag{2.18}$$

при котором замкнутая таким управлением система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu, \quad x \in R_n, \quad u \in R_m, \tag{2.19}$$

была бы асимптотически устойчивой. Это последнее требование эквивалентно условиям

$$\operatorname{Re} \lambda_j (A - BF) < 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Управление (2.18), при котором выполняются условия (2.20), называют *стабилизирующим управлением*.

Построение стабилизирующего управления сводится к решению некоторого уравнения Ляпунова [20].

Пусть A и B — матрицы, имеющие соответственно размеры $n \times n$ и $n \times m$. Прежде всего построим матрицу

$$\tilde{A} = -(A + \beta I_n)$$

так, чтобы $\operatorname{Re} \lambda_j (\tilde{A}) < 0$. Для этого достаточно взять

$$\beta = s \left[\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\operatorname{Re} \lambda_j (A)| + 0{,}001 \right], \quad s > 1,$$

или определить β по формуле (2.9).

Далее рассмотрим уравнение Ляпунова

$$\tilde{A}Z + Z\tilde{A}' = -2BB' \tag{2.21}$$

и найдем его решение Z с помощью одного из методов, изложенных ранее.

Если система (2.19) полностью управляема, то матрица Z невырождена и тогда в качестве F можно взять матрицу

$$F = -B'Z^{-1}. \tag{2.22}$$

При этом

$$\operatorname{Re} \lambda_j (A - BF) = -\beta, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.23}$$

Система (2.12) может быть стабилизируема даже если пара (A, B) не полностью управляема (см. [13] ко второй части). В этом

случае решение Z уравнения Ляпунова (2.21) является вырожденной матрицей и в качестве F следует взять матрицу

$$F=-B'Z^{+}, \tag{2.24}$$

где Z^{+} — псевдообратная к Z матрица. Матрица Z^{+} называется *псевдообратной* к матрице Z, если выполнены следующие равенства:

$$ZZ^{+}Z=Z,\ Z^{+}ZZ^{+}=Z^{+},\ (ZZ^{+})'=ZZ^{+},\ (Z^{+}Z)'=Z^{+}Z. \tag{2.25}$$

При этом не обязательно $ZZ^{+}=I$.

Таким образом, для построения стабилизирующего управления (2.18) необходимо построить матрицу A, решить уравнение Ляпунова (2.21), найти обратную Z^{-1} или псевдообратную Z^{+} матрицу и вычислить матрицу обратных связей F по формуле (2.24).

Способ численного псевдообращения предложен в [18]. Он основан на *сингулярном разложении* матрицы

$$Z=U\Sigma V',\ U'U=V'V=I_n,\ \Sigma=\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n). \tag{2.26}$$

Диагональные элементы матрицы Σ совпадают с неотрицательными значениями квадратных корней из собственных значений матрицы $Z'Z$. Числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ называются *сингулярными числами* матрицы Z. Если сингулярное разложение (2.26) матрицы Z найдено, то псевдообразная матрица Z^{+} определяется формулами

$$Z^{+}=V\Sigma^{+}U',\ \Sigma^{+}=\operatorname{diag}(\sigma_1^{+}, \ldots, \sigma_n^{+}), \tag{2.27}$$

$$\sigma_i^{+}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma_i}, & \sigma_i>0,\\ 0, & \sigma_i=0.\end{cases}$$

В [18] под названием *алгоритм 1.10* приведен алгоритм, реализующий псевдообращение матриц. Под именем CSTAB в [22] приведен описанный выше метод нахождения стабилизирующего управления.

6. Вычисление матрицы ковариаций. Рассмотрим систему стохастических уравнений вида

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+G\eta(t), \tag{2.28}$$

где A — матрица размера $n\times n$; G — матрица размера $n\times m$; $\eta(t)$ — m-мерный белый шум с матрицей интенсивностей Q, имеющей размер $m\times m$. Пусть матрица A асимптотически устойчива, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_j(A)<0$, $j=1, \ldots, n$. Тогда матрица ковариаций W установившегося состояния системы является пределом матриц дисперсий:

$$W=\lim_{t\to\infty} D(t),\ D(t)=R(t, t),$$

где $R(t, s)$ — корреляционная матрица решения $x(t)$. Матрица W удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$AW+WA'=GQG'. \tag{2.29}$$

Матрица W из уравнения Ляпунова (2.29) может быть найдена любым из описанных выше методов.

§ 3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Согласно теореме 2.1 гл. VI, система (1.1) управляема, если ранг матрицы управляемости

$$K=(B, AB, ..., A^{n-1}B) \tag{3.1}$$

(где A и B — матрицы размера соответственно $n\times n$ и $n\times m$) равен порядку системы n. Таким образом, необходимо определить ранг матрицы K, имеющей размер $n\times nm$.

Попытки использовать непосредственно определение ранга матрицы как наибольшего числа линейно независимых столбцов матрицы K не приводят к хорошему численному алгоритму. В самом деле, при этом надо взять произвольные n столбцов матрицы K и для каждой полученной матрицы K_j вычислить ее определитель. Если найдется хотя бы одна матрица K_j с определителем, не равным нулю, то система полностью управляема, в противном случае — не управляема. Такой путь слишком трудоемок, поскольку существует

$$C_{nm}^{n}=\frac{nm\,(nm-1)...(n\,(m-1)+1)}{n!}$$

различных матриц K. Вычисление каждого определителя требует около $\frac{1}{3}n^3$ арифметических действий. Количество вычислений всех определителей очень велико. Так, например, при $n=10$, $m=5$ вычисление по такой схеме потребовало бы около $0{,}3\cdot 10^5$ умножений и делений. Можно предложить более экономичные способы определения ранга, требующие меньшего числа вычислений различных определителей. Однако во всех случаях путь, связанный с вычислением определителей, является весьма трудоемким. Кроме того, вычисление определителей недостаточно численно устойчиво.

Более удобной как с точки зрения трудоемкости, так и численной устойчивости является *метод вычисления ранга, основанный на сингулярном разложении матрицы K.*

С помощью алгоритма 1.10 из [18] матрицу K можно представить в виде

$$K=U\Sigma V'.$$

Здесь U — матрица размера $n\times n$, составленная из n ортонормированных собственных векторов матрицы KK^+; V — матрица размера

$(nl)\times(nl)$, составленная из nl ортонормированных собственных векторов матрицы K^+K. Матрицы U и V ортогональны, т. е. $U'U=I_n$, $V'V=I_{nl}$. Матрица Σ размера $n\times nl$ имеет вид $\Sigma=(S,\ 0)$ и $S=\operatorname{diag}(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n)$ — диагональная матрица размера $n\times n$, на диагонали которой находятся сингулярные числа матрицы K.

Если ранг матрицы K равен r, то только r сингулярных чисел отличны от нуля, а остальные $n-r$ чисел равны нулю. Это утверждение лежит в основе определения ранга матрицы K. Таким образом, определение ранга матрицы K включает следующие шаги:

1^0. С двойной точностью вычисляют произведение KK'.

2^0. С помощью QR-алгоритма проводят диагонализацию матрицы KK'.

3^0. Определяют число ненулевых диагональных элементов, которое совпадает с рангом матрицы K.

Пример 3.1 [18]. Рассмотрим матрицу K размера 8×5:

$$K=\begin{pmatrix} 22 & 10 & 2 & 3 & 7 \\ 14 & 7 & 10 & 0 & 8 \\ -1 & 13 & -1 & -11 & 3 \\ -3 & -2 & 13 & -2 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & -2 & 4 \\ 9 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Известно, что сингулярные числа этой матрицы таковы: $\sigma_1=\sqrt{1248}=35,32704346\ldots$, $\sigma_2=20$, $\sigma_3=\sqrt{384}=19,59591704\ldots$, $\sigma_4=\sigma_5=0$. При нахождении сингулярных чисел QR-алгоритм продолжался до тех пор, пока внедиагональные элементы не стали меньше чем $46{,}4\cdot 10^{-8}$. Это потребовало шести итераций QR-алгоритма. При этом были получены следующие значения для диагональных элементов $\tilde{\sigma}$: $\tilde{\sigma}_1=0{,}96\cdot 10^{-7}$; $\tilde{\sigma}_2=19{,}595916$; $\tilde{\sigma}_3=19{,}999999$; $\tilde{\sigma}_4=-1{,}97\cdot 10^{-7}$; $\tilde{\sigma}_5=35{,}327038$. Максимальная ошибка в определении $\tilde{\sigma}$ не превосходит $51{,}8\cdot 10^{-7}$. В пределах точности вычислений $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ можно считать равными нулю. Поэтому ранг матрицы K равен 3.

§ 4. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Рассмотрим стационарную ЛК-задачу на бесконечном интервале, имеющую вид

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu,\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ x(0)=x_0, \tag{4.1}$$

с критерием качества

$$J(u)=\int_0^\infty [x'(s)N_2x(s)+u'(s)N_3u(s)]\,ds,\ N_3>0,\ N_2>0. \tag{4.2}$$

Как показано в § 3 гл. VII, оптимальное стабилизирующее управление в задаче (4.1), (4.2) определяется формулой

$$u(x) = -N_3^{-1} B'Px = -Fx. \tag{4.3}$$

Матрица $P > 0$ в формуле (4.3) удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$A'P + PA + N_2 - PBN_3^{-1} B'P = 0. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4), как известно, называется *алгебраическим уравнением Риккати.*

Заметим, что П-регулятор (4.3) достаточно просто реализуется на практике, поскольку матрица усиления F в этом регуляторе постоянна. Этим объясняется широкое распространение законов вида (4.3) в технических приложениях.

Построение С-управления (4.3) в стационарной задаче оптимальной стабилизации (4.1), (4.2) сводится к решению алгебраического уравнения Риккати (4.4). Изложим кратко некоторые методы решения уравнения (4.4), тесно связанные с матричными вычислениями.

1. Сведение к последовательности уравнений Ляпунова. Этот метод является одной из разновидностей методов Ньютона решения нелинейных уравнений с помощью последовательного решения линейных задач.

Он реализуется следующим образом. Сначала находится (выбирается) матрица L_0 так, чтобы спектр матрицы $(A + BL_0)$ лежал в левой полуплоскости. Матрица L_0 может быть построена, например, методом, изложенным в п. 5 § 2. Далее решается последовательность уравнений Ляпунова, имеющая вид

$$(A' + L_j'B')\,P_j + P_j\,(A + BL_j) + N_2 - L_j N_3 L_j = 0, \tag{4.5}$$

$$L_{j+1} = -N_3^{-1} B'P_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.6}$$

Можно показать, что:

а) все матрицы $(A + BL_j)$ устойчивы, если матрица $(A + BL_0)$ устойчива;

б) $P_{j+1} \leqslant P_j$, т. е. матрица $(P_j - P_{j+1})$ положительно знакопостоянна;

в) $\lim\limits_{j \to \infty} P_j = P$.

Скорость сходимости метода (4.5), (4.6), как и для любого метода Ньютона, асимптотически квадратичная. Однако скорость сходимости начальных итераций существенно зависит от расположения спектра матриц $(A + BL_j)$. Чем ближе к мнимой оси подходят спектры устойчивых матриц $(A + BL_j)$, тем хуже сходимость. Более подробно об этом методе см. статью В. Б. Ларина, указанную на с. 479.

2. Использование QR-алгоритма. Этот метод основан на тесной связи матричного уравнения Риккати (4.4) размерности n и некоторого линейного уравнения порядка $2n$. Рассмотрим уравнение порядка $2n$, имеющее вид

$$\begin{pmatrix} -A & BN_3^{-1}B' \\ N_2 & A' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Здесь U_1 и U_2 — матрицы размера $n\times n$.

Если матрицы U_1 и U_2 являются решением линейной системы (4.7), причем матрица U_1 невырождена, то матрица

$$P=U_2U_1^{-1} \tag{4.8}$$

является решением уравнения Риккати (4.4). Чтобы доказать это, запишем равенство (4.7) в виде двух уравнений:

$$-AU_1+BN_3^{-1}B'U_2=U_1, \tag{4.9}$$

$$N_2U_1+A'U_2=U_2. \tag{4.10}$$

Умножив уравнения (4.9) и (4.10) на U_1^{-1} справа, получим

$$-A+BN_3^{-1}B'U_2U_1^{-1}=I_n, \tag{4.11}$$

$$N_2+A'U_2U_1^{-1}=U_2U_1^{-1}. \tag{4.12}$$

Теперь уравнение (4.11) умножим слева на матрицу $U_2U_1^{-1}$ Имеем

$$-U_2U_1^{-1}A+U_2U_1^{-1}BN_3^{-1}B'U_2U_1^{-1}=U_2U_1^{-1}. \tag{4.13}$$

Наконец, вычитая из уравнения (4.12) уравнение (4.13), найдем, что матрица $U_2U_1^{-1}$ удовлетворяет уравнению

$$A'U_2U_1^{-1}+U_2U_1^{-1}A+N_2-U_2U_1^{-1}BN_3^{-1}B'U_2U_1^{-1}=0. \tag{4.14}$$

Обозначив матрицу $U_2U_1^{-1}$ через P, видим, что уравнение (4.14) совпадает с уравнением Риккати (4.4), что и требовалось показать.

Уравнение (4.7) удобно решать с помощью QR-алгоритма, который был рассмотрен в п. 2, § 1. Для этого нужно выполнить следующие операции.

1^0. Находят матрицу N_3^{-1} и строят матрицу

$$M=\begin{pmatrix} -A & BN_3^{-1}B' \\ N_2 & A' \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

2^0. С помощью QR-алгоритма приводят матрицу M к верхней форме Шура, т. е. к виду

$$S=W'MW, \tag{4.16}$$

где W — ортогональная матрица, а S — верхняя блочно-треугольная матрица.

3^0. Переупорядочивают форму Шура (4.16) так, чтобы первыми n элементами главной диагонали новой формы S_1 служили собственные значения $\lambda_i(M)$ такие, что $\operatorname{Re}\lambda_i(M)>0$, $i=1, \ldots, n$. Такое упорядочивание можно сделать с помощью некоторой ортогональной матрицы V:

$$S_1 = V'SV.$$

4^0. Находят матрицу $U=WV$ и выделяют ее блоки U_{ij} ($i, j=1, 2$) размера $n\times n$:

$$U=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

5^0. Определяют матрицу P по формуле

$$P = U_{21}U_{11}^{-1}.$$

Для этого надо решить, например с помощью метода Гаусса, матричное уравнение

$$U_{11}'P = U_{21}'. \tag{4.17}$$

На основе вышеизложенного можно утверждать, что построенная таким образом матрица P есть решение уравнения Риккати (4.4).

Для применения QR-алгоритма к матрице M требуется $8n^2$ машинных слов оперативной памяти и примерно $80n^3$ операций умножения. Обращение матриц N_3 и U_{11} при использовании метода Гаусса требует порядка n^3 умножений для каждой матрицы.

Несмотря на такие высокие требования к оперативной памяти и большую трудоемкость, использование QR-алгоритма является, по-видимому, наилучшим способом решения алгебраического уравнения Риккати. Как QR-алгоритм, так и метод Гаусса являются численно устойчивыми методами. Применение и свойства изложенного в этом пункте метода не зависят от расположения спектра матрицы M, тогда как при сведении к последовательности уравнений Ляпунова такая зависимость имеется. Более аккуратный подсчет [8] показывает, что метод, основанный на сведении к последовательности уравнений Ляпунова, может конкурировать с методом, использующим QR-алгоритм, только если решается 7—8 уравнений Ляпунова. Отметим, что в [8] приведена процедура решения матричного уравнения Риккати (4.4), основанная на QR-алгоритме.

Пример 4.1. Рассмотрим задачу оптимальной стабилизации для системы вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \tag{4.18}$$

$$J(u) = \int_0^\infty [x_1^2(s) + 2x_2^2(s) + u^2(s)]\,ds \to \inf.$$

Матрицы, входящие в соотношения (4.1), (4.2), для задачи (4.18) имеют вид

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}', \quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \quad N_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \quad N_3=(1). \tag{4.19}$$

Нетрудно установить, что

$$BN_3^{-1}B'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Для решения алгебраического уравнения Риккати (4.4) с матрицами (4.19), (4.20) применим QR-алгоритм. Для этого построим матрицу M размера 4×4, имеющую вид

$$M=\begin{pmatrix}-A & -BN_3^{-1}B'\\ N_2 & A'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

С помощью QR-алгоритма находим, что матрица

$$U=\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}1\sqrt{5} & -0{,}3\sqrt{5} & 0{,}5\\ -0{,}5 & -0{,}1\sqrt{5} & -0{,}3\sqrt{5} & -0{,}5\\ 0{,}5 & -0{,}3\sqrt{5} & 0{,}1\sqrt{5} & -0{,}5\\ -0{,}5 & -0{,}3\sqrt{5} & 0{,}1\sqrt{5} & 0{,}5\end{pmatrix} \tag{4.22}$$

приводит матрицу (4.21) к верхней форме Шура:

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0{,}5\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Операции 3^0 и 4^0 алгоритма здесь выполнять не требуется, так как первые n элементов главной диагонали матрицы (4.23) уже являются положительными числами. Уравнение (4.17) с учетом (4.22) в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}5\\ -0{,}1\sqrt{5} & -0{,}1\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}5\\ -0{,}3\sqrt{5} & -0{,}3\sqrt{5}\end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Решением уравнения (4.24) является матрица

$$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Теперь по формуле (4.3) находим оптимальное стабилизирующее управление

$$u(x)=-N_3^{-1}B'Px=x_1+2x_2.$$

3. Управление самолетом «Боинг-747» при посадке*. Линеаризованная модель движения тяжелого самолета «Боинг-747» в конфигурации, используемой при посадке, без применения системы автоматического повышения устойчивости имеет вид

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathrm{v}}\\ \dot{r}\\ \dot{p}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}089 & -2{,}19 & 0{,}328 & 0{,}319\\ 0{,}076 & -0{,}217 & -0{,}166 & 0\\ -0{,}602 & 0{,}327 & -0{,}975 & 0\\ 0 & 0{,}150 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{v}\\ r\\ p\\ \theta\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0 & 0{,}0327\\ 0{,}0264 & -0{,}151\\ 0{,}227 & 0{,}0636\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta a\\ \delta r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}089\\ -0{,}076\\ 0{,}602\\ 0\end{pmatrix}(\mathrm{v}w), \qquad (4.25)$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2{,}21 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi\\ x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{v}\\ r\end{pmatrix}. \qquad (4.26)$$

Здесь приняты следующие обозначения для фазовых переменных: v — скорость бокового скольжения; r — угловая скорость рыскания; p — угловая скорость крена; θ — угол крена; ψ — угол рыскания; x — боковое смещение.

Вектор фазовых переменных обозначим через y; $y'=(\mathrm{v}, r, p, \theta, \psi, x)$. Управлениями в системе (4.25) являются: δa — угол отклонения элеронов; δr — угол отклонения руля направления. Возмущением в системе (4.25) является ветер: vw — скорость ветра. Уравнения (4.25), (4.26) записаны в безразмерных величинах. В качестве единицы для углов принято 0,01 рад, а для скоростей — 0,305 м/с.

Задача состоит в определении С-управления вида

$$\begin{pmatrix}\delta a\\ \delta r\end{pmatrix}=Fy, \qquad (4.27)$$

которое обеспечивает выполнение координированных разворотов самолету «Боинг-747» в посадочной конфигурации.

---

*Брайсон А. Е. Новые идеи по теории управления // Аэрокосмическая техника. 1986. №8.

Для решения этой задачи используются методы сведения ее к задаче оптимальной стабилизации. Критерий качества возьмем в виде

$$J=\int_0^\infty (k_1|y|^2+k_2z^2+\delta a^2+\delta r^2)\,\mathrm{d}t, \tag{4.28}$$

где через z обозначена удельная боковая сила; $z=-0{,}089\mathrm{v}+0{,}0327\delta r$. Веса $k_1=1$ и $k_2=100$ были выбраны так, чтобы отклонение элеронов руля направления на единицу ($=0{,}01$ рад) приводило к боковому смещению на 0,305 м (или к боковому ускорению 0,0305 м/с^2).

Используя описанный выше метод, найдем управление вида (4.27):

$$\begin{pmatrix}\delta a\\ \delta r\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}-1{,}947 & -3{,}59 & -1{,}421 & -1{,}672 & -7{,}29 & -0{,}859\\ 1{,}263 & 6{,}42 & 0{,}799 & 1{,}424 & 6{,}08 & 0{,}487\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{v}\\ r\\ p\\ \theta\\ \psi\\ \varphi\end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

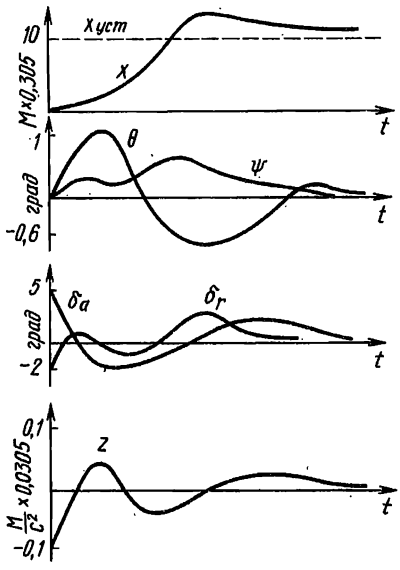


Рис. 4.1. Переходные процессы в системе управления самолета «Боинг-747» при выполнении S-образного маневра

Достоинством такого подхода к построению управления является хорошая согласованность движений по различным каналам. Подобной согласованности не удается получить при традиционном построении раздельных регуляторов по каналам тангажа, крена и рыскания. В качестве иллюстрации на рис. 4.1 приведена рассчитанная по модели (4.25), (4.28), (4.29) реакция самолета «Боинг-747» в посадочной конфигурации на команду управления, которая должна привести к боковому отклонению 3,05. Это так называемый боковой маневр перед посадкой, или S-образный маневр. Из рис. 4.1 видно, в частности, что управление рулями направления и элеронами является хорошо скоординированным и приводит к переходным процессам по углам крена и рыскания, а также по удельной боковой силе без большого перерегулирования.

Основные результаты и формулы главы XIII

Точные методы решения полной проблемы собственных значений не являются численно устойчивыми и применимы при $n \leqslant 10$.

Итерационные методы: метод Якоби и QR-алгоритм.

QR-алгоритм: $A = QR$, $_k Q' = Q^{-1}$, R — верхняя треугольная матрица, $A^1 = RQ$, $A^1 = Q_1 R_1$, $A^2 = R_1 Q_1$, ..., $A \to S$ — матрица Шура.

Метод Зубова функционального преобразования матриц:

$$B = (-A-I)(I-A)^{-1} = I - 2(I-A)^{-1}.$$

Если $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$, то матрица A устойчива.

Метод рядов решения дискретного уравнения Ляпунова $P - B'PB = C_1$. Решение имеет вид

$$P = \lim_{k\to\infty} P_{\nu(k)}, \text{ где } \nu(k) = 2^k,$$

$$P_{\nu(0)} = C_1, \; P_{\nu(k+1)} = P_{\nu(k)} + (B')^{\nu(k)} P_{\nu(k)} B^{\nu(k)},$$

$$B^{\nu(k+1)} = [B^{\nu(k)}]^2.$$

Метод матричной сигнум-функции. Решение P уравнения Ляпунова $A'P + PA = C$ имеет вид

$$P = -\frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} C_k,$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{2}(C_k + (A_k')^{-1} C_k A_k^{-1}), \; C_0 = C,$$

$$A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + A_k^{-1}), \; A_0 = A.$$

Решение алгебраического уравнения Риккати

$$A'P + PA + N_2 - PBN_3^{-1}B'P = 0$$

есть $P = \lim\limits_{j\to\infty} P_j$, где P_j — решения уравнений Ляпунова

$$(A' + L_j' B')P_j + P_j(A + BL_j) + N_2 - L_j N_3 L_j = 0,$$

$$L_{j+1} = N_3^{-1} B' P_j, \; \operatorname{Re} \lambda_j (A + BL_0) < 0.$$

QR-алгоритм для решения алгебраического уравнения Риккати требует примерно $80n^3$ умножений.

ГЛАВА XIV

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЩИХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

В этой главе рассматриваются следующие вопросы: анализ переходных процессов, в том числе для жестких систем, методы численного расчета управлений в нелинейных задачах.

§ 1. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ. МЕТОДЫ РУНГЕ—КУТТА

1. Понятие о численных методах исследования систем. При изучении управляемых систем возникают различные задачи, из которых только некоторая часть может быть решена аналитически. Бóльшая же часть вопросов, особенно для нелинейных систем, может быть исследована только с помощью численных расчетов, проводимых на ЭВМ. К таким вопросам относятся задача определения выхода системы при заданном входе и заданных помехах, задача нахождения максимального отклонения выхода от некоторого номинального режима при определенном типе входных сигналов и помех, моделирование некоторых стохастических характеристик систем и т. д.

Все эти задачи для объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, сводятся к численному решению одной задачи Коши или некоторого набора таких задач. В данном параграфе будут кратко изложены одношаговые методы численного решения задачи Коши. Эти методы представляют интерес не только сами по себе, но часто входят как один из элементов в более сложные методы, например в методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений, составляя, таким образом, одну из основ любого исследования управляемых систем.

Среди приближенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений различают приближенные аналитические, графические и численные методы. При использовании численных методов решение получается в виде некоторой таблицы. Кратко изложим некоторые из этих методов.

2. Одношаговые методы. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\dot{x}(t)=f(t, x),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0. \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)\in R_n$; t_0 и x_0 — заданные начальные значения; $f(t, x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|f(t, x)-f(t, y)|\leqslant L|x-y|$$

для всех x, y и t из некоторой области D. Не оговаривая в дальнейшем каждый раз это особо, будем предполагать, что функция $f(t, x)$ такова, что решение $x(t)$ задачи (1.1) существует и единствен-

но на всем рассматриваемом интервале $[t_0, T]$ и имеет необходимое количество производных.

На отрезке $[t_0, T]$ выделим точки $t_0, t_1, \ldots, t_N = T$. Совокупность точек $t_0, \ldots, t_N$ называется *сеткой*, а точки t_k — ее *узлами*. Величина $h_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 0, \ldots, N-1)$ называется *шагом* сетки в точке t_k. Если все $h_k = h = (T - t_0)/N$, то сетка называется *равномерной*, в противном случае — *неравномерной*. При использовании численных методов значения решения $x(t)$ определяют только в узлах сетки t_k.

В настоящее время известно большое количество (порядка нескольких сотен) различных численных методов решения задачи Коши (1.1). Среди них можно выделить несколько классов методов: одношаговые, многошаговые, предсказания и коррекции, гибридные и др.

Одношаговые методы описываются следующей формулой:

$$x_{n+1} = x_n + h_n \Phi_f(t_n, x_n, h_n), \quad x_0 = x(t_0). \tag{1.2}$$

В зависимости от вида функции Φ получают разные методы. Обозначим через $\bar{x}(t_{n+1})$ точное решение задачи (1.1) с начальным условием $\bar{x}(t_n) = x_n$.

Величина $x_{n+1} - \bar{x}(t_{n+1})$ называется *локальной погрешностью* метода (2.1). Если $x_{n+1} - \bar{x}(t_{n+1}) = O(h_n^{s+1})$, то говорят, что метод (2.1) имеет *s-й порядок аппроксимации.*

Простейшим одношаговым методом является *метод Эйлера:*

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(t_n, x_n), \quad x_0 = x(t_0). \tag{1.3}$$

Разложим точное решение $\bar{x}(t_{n+1})$ в ряд Тейлора:

$$\bar{x}(t_{n+1}) = \bar{x}(t_n) + h_n \bar{x}'(t_n) + \frac{h_n^2}{2} \bar{x}''(t_n + \theta h_n), \quad 0 < \theta < 1.$$

Заменяя $\bar{x}'(t_n)$ согласно уравнению (1.1) на $f(x_n, t_n)$, видим, что в области, где $|\bar{x}''(t)| \leqslant M$, выполняется соотношение

$$x_{n+1} - \bar{x}(t_{n+1}) = \frac{h_n^2}{2} \bar{x}''(t_n + \theta h_n) = O(h_n^2).$$

Таким образом, метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации.

Более локально точными методами являются методы, описываемые формулами

$$x_{n+1} = x_n + h_n (\omega_1 K_1(f) + \ldots + \omega_p K_p(f)), \quad K_1(f) = f(t_n, x_n), \tag{1.4}$$

$$K_i(f) = f\left(t_n + \alpha_i h_n, \; x_n + h_n \sum_{q=1}^{i-1} \beta_{iq} K_q(f)\right).$$

Одна из первых используемых на практике формул вида (1.4) (так называемая *стандартная формула Рунге—Кутта*) была построена независимо К. Рунге и В. Кутта в начале XX в. Поэтому методы вида (1.4) принято называть *методами типа Рунге—Кутта.*

Число p называют *степенью формулы* (1.4). Для вывода формул типа Рунге—Кутта можно использовать следующий прием. Значения $\bar{x}(t_{n+1})$ и x_{n+1} разлагают в ряды Тейлора и коэффициенты ω_i, α_i и β_{iq} в формуле (1.4) подбирают так, чтобы тождественно совпадало по h_n и f максимально возможное количество членов разложений.

Выведем формулу (1.4) второй степени. Имеем

$$\bar{x}(t_{n+1})=\bar{x}(t_n)+h_n\bar{x}'(t_n)+\frac{h_n^2}{2}\bar{x}''(t_n)+O(h_n^3)=$$

$$=x_n+h_nf(t_n, x_n)+\frac{h_n^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}f\right]+O(h_n^3). \qquad (1.5)$$

Здесь производные $\partial f/dt$ и $\partial f/\partial x$ вычисляются в точке (t_n, x_n). С другой стороны,

$$x_{n+1}=x_n+h_n[\omega_1f(t_n, x_n)+\omega_2f(t_n+\alpha h_n, x_n+h_n\beta f)]=$$

$$=x_n+h_n\left\{\omega_1f+\omega_2\left[f+\frac{\partial f}{\partial t}\alpha h_n+\frac{\partial f}{\partial x}h_n\beta f\right]\right\}+O(h_n^3). \qquad (1.6)$$

Сравнивая (1.5) и (1.6), для определения ω_1, ω_2, α и β получаем систему уравнений

$$\omega_1+\omega_2=1,\ \alpha\omega_2=1/2,\ \beta\omega_2=1/2. \qquad (1.7)$$

Система (1.7) имеет несколько решений, например: 1) $\omega_1=0$, $\omega_2=1$, $\alpha=\beta=1/2$; 2) $\omega_1=\omega_2=1/2$, $\alpha=\beta=1$. Этим решениям соответствуют две *формулы типа Рунге—Кутта второй степени*:

$$x_{n+1}=x_n+h_nK_2,\ K_1=f(t_n, x_n), \qquad (1.8)$$

$$K_2=f\left(t_n+\frac{h_n}{2},\ x_n+\frac{h_n}{2}K_1\right),$$

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h_n}{2}(K_1+K_2),\ K_1=f(t_n, x_n),$$

$$K_2=f(t_n+h_n,\ x_n+h_nK_1). \qquad (1.9)$$

Обе формулы (1.8) и (1.9) имеют одну и ту же вторую степень, а также один и тот же второй порядок аппроксимации, но полной тождественности результатов при использовании этих формул нет.

Аналогично могут быть выведены формулы типа Рунге—Кутта третьей, четвертой и более высоких степеней. Отметим, что каждый раз можно получить несколько формул одной степени и одного порядка аппроксимации. Например, известны три формулы четвертой степени и четвертого порядка. В табл. 1.1 приведены коэффициенты этих трех формул.

В настоящее время известны также формулы типа Рунге—Кутта и более высоких порядков — 6, 8, 12-го. Одна из последних опубликованных формул такого типа имеет 15-й порядок.

Отметим, что все формулы (1.4) порядка выше четырех имеют следующую особенность. Степень этих формул всегда больше их порядка. Так, формула Хутья имеет 6-й порядок и 8-ю степень, формула Куртиса — 7-й порядок и 9-ю степень и т. д. В связи с этим в практике вычислений наиболее широко используют формулы типа Рунге—Кутта от 1-го до 4-го порядков, а среди них — формулу Эйлера (1.3) и стандартную формулу Рунге—Кутта.

3. Оценка погрешностей одношаговых методов для общей задачи (1.1). Знание локальной погрешности не дает еще возможности судить о погрешности приближенного решения на всем интервале интегрирования $[t_0, T]$. Вообще говоря, небольшие локальные погрешности могут накапливаться и давать значительную общую (или глобальную) погрешность. Поясним сказанное на примере.

Пример 1.1. Пусть задача

$$\dot{x}(t)=x(t),\ x(0)=1 \tag{1.10}$$

решается методом Эйлера с постоянным шагом h:

$$x_{n+1}=x_n+h\dot{x}(t_n)=x_n+hx_n=(1+h)x_n. \tag{1.11}$$

В точке $t_n=nh$ имеем

$$\bar{x}(t_n)=e^{nh},\ x_n=(1+h)^n=[(1+h)^{1/h}]^{nh}.$$

Из курса математического анализа известно, что

$$(1+h)^{1/h}\to e \text{ при } h\to 0,\ (1+h)^{1/h}<e \text{ при } h>0. \tag{1.12}$$

Если точка $t=t_*$ фиксирована и $h\to 0$, то на основании (1.12) имеем

$$x_{n(h)}\to x(t_*),\ n(h)h=t_*,\ h\to 0.$$

Иначе говоря, в любой фиксированной точке t_* (и на любом конечном отрезке $[t_0, t_*]$) решение, полученное методом Эйлера, сходится к точному решению уравнения (1.10). Аналогично можно доказать, что и для произвольной системы (1.1) справедливо такое же утверждение.

Таблица 1.1

Коэффициент / Название формулы	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	α_2	α_3	α_4	β_{21}	β_{31}	β_{32}	β_{41}	β_{42}	β_{43}
Стандартная формула Рунге—Кутта	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1
Формула «3/8»	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	−1	1
Формула Гилла	$\frac{1}{6}$	$\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{3}$	$\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

Пусть теперь шаг h фиксирован, но $n\to\infty$. Тогда

$$\bar{x}(t_n)-x_n=e^{nh}-a^{nh}=e^{nh}\left[1-\left(\frac{a}{e}\right)^{nh}\right].$$

Здесь $a=(1+h)^{1/h}<e$, поэтому при достаточно большом h имеем

$$\bar{x}(t_n)-x_n\geqslant\frac{1}{2}e^{nh}.$$

Таким образом, для задачи (1.10) глобальная погрешность метода Эйлера экспоненциально возрастает с ростом n, причем показатель экспоненты такой же, как и у самого решения.

Иначе говоря, решать уравнение (1.10) и более общее уравнение (1.1) на больших интервалах с фиксированным шагом h методом Эйлера нельзя, поскольку погрешность при этом может достичь 50% и более.

При реальных вычислениях результат существенно зависит от вычислительных погрешностей, связанных в основном с погрешностями округлений.

Пример 1.2. Рассмотрим снова задачу (1.10). Будем учитывать влияние вычислительных погрешностей, предполагая, что вычисления ведутся не по формуле (1.11), а по формуле вида

$$\tilde{x}_{n+1}=(1+h)\tilde{x}_n+\delta_n. \tag{1.13}$$

Здесь δ_n — величина погрешностей округлений на n-м шаге. Точное значение δ_n неизвестно, но можно предположить, что для всех n выполняется неравенство

$$|\delta_n|\leqslant\delta,\ n=0,\ 1,\ \ldots\ . \tag{1.14}$$

Значения $\tilde{x}_n$, полученные с помощью метода Эйлера при учете вычислительных погрешностей, определяются выражением

$$\tilde{x}_n=(1+h)^n+[\delta_{n-1}+(1+h)\delta_{n-2}+\ldots+(1+h)^{n-1}\delta_0].$$

Отсюда следует, что

$$|\bar{x}(t_n)-\tilde{x}_n|\leqslant|\bar{x}(t_n)-(1+h)^n|+|\delta_{n-1}+\ldots+(1+h)^{n-1}\delta_0|\leqslant$$

$$\leqslant e^{t_n}q(h)+\delta[1+(1+h)+\ldots+(1+h)^{n-1}]\leqslant e^{t_n}q(h)+$$

$$+\delta\frac{(1+h)^n-1}{h}\leqslant e^{t_n}\left[q(h)+\frac{\delta}{h}\right],$$

где $q(h)=1-(1+h)^n e^{-nh}$ Так как

$$q(h)=q(0)+hq'(\theta h)=h[-n(1+\theta h)^{n-1}e^{-n\theta h}+(1+\theta h)^n ne^{-n\theta h}],$$

то $|q(h)| \leqslant Ch$ ($C=\text{const}$) для всех $h>0$. Окончательно получаем

$$|\bar{x}(t_n)-\tilde{x}_n| \leqslant e^{t_n}\left[Ch+\frac{\delta}{h}\right]. \tag{1.15}$$

Проанализируем полученный результат. Прежде всего в отличие от случая точных вычислений при учете погрешностей округления значения $\tilde{x}_n$ не стремятся к $\bar{x}(t_n)$ при $h\to 0$, так как $\delta/h\to\infty$ при $h\to 0$. Таким образом, при реальных вычислениях решение $\tilde{x}_n$ не сходится к точному значению $\bar{x}(t_n)$ задачи (1.10).

Далее существует некоторый оптимальный шаг $h_{\text{опт}}$, при котором погрешность $|\bar{x}(t_n)-\tilde{x}_n|$ является минимальной. Точное значение $h_{\text{опт}}$ определить очень трудно, но $h_{\text{опт}} \approx C^{1/2}\delta^{-1/2}$.

Аналогичная оценка имеет место и для общей задачи (1.1) и общего одношагового метода (1.2). Точнее, *для общего одношагового метода порядка p, имеющего вид*

$$\tilde{x}_{n+1}=\tilde{x}_n+h_n\Phi_f(\tilde{x}_n, t_n, h_n)+\delta_n, \tag{1.16}$$

и для решения $\bar{x}(t_n)$ *задачи* (1.1) *справедлива оценка*

$$|\bar{x}(t_n)-\tilde{x}_n| \leqslant C\left[Mh^p+\frac{\delta}{h}\right]e^{L(t_n-t_0)}, \tag{1.17}$$

где C, M, L — некоторые постоянные, определяемые функциями f и Φ_f.

Доказательство справедливости оценки (1.17) можно найти в [2; 3; 14; 16].

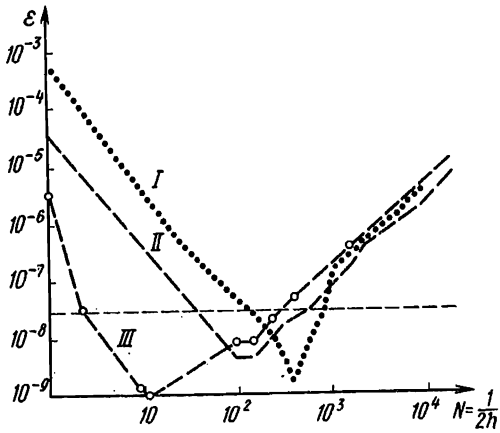


Рис. 1.1. Полная погрешность решения уравнения (1.18) методом Рунге—Кутта: *I* — формула 3-й степени; *II* — формула 4-й степени; *III* — формула Хутья 6-й степени

Пример 1.3 [3]. Приведем числовой пример, иллюстрирующий изложенные результаты. Для задачи

$$\dot{x}(t)=t(t+2)x^3(t)+(t+3)x^2(t),\ x(0,5)=-1{,}6 \tag{1.18}$$

будем искать решение в точке $t=1$ по формулам Рунге—Кутта 3, 4 и 6-й степени с различным шагом. Точное решение задачи (1.18) известно: $x(t)=-2t^{-1}(t+2)^{-1}$, $x(1)=-2/3$. Это позволяет определять полную погрешность $\varepsilon=|\bar{x}(1)-\tilde{x}_n|$. Рис. 1.1 иллюстрирует результаты расчетов, причем по осям ис-

пользованы логарифмические масштабы. Из рис. 1.1 видно, что для каждого метода существует оптимальный шаг: для метода 3-й степени он соответствует числу делений $N^3_{\text{опт}} \approx 250$, для метода 4-й степени $N^4_{\text{опт}} \approx 100$, а для метода 6-й степени $N^6_{\text{опт}} \approx 50$. Кроме того, для того чтобы общая погрешность решения составляла $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-8}$, необходимо отрезок интегрирования для этих формул разбить на $N^6_\varepsilon = 20$, $N^4_\varepsilon \approx 65$, $N^3_\varepsilon = 200$ частей. Количество вычислений Q правой части уравнения (1.18), необходимое для получения точности ε, таково: $Q^6_\varepsilon = 20 \cdot 8 = 160$, $Q^4_\varepsilon = 65 \cdot 4 = 260$, $Q^3_\varepsilon = 200 \cdot 3 = 600$.

Таким образом, для уравнения (1.18) наиболее экономичным является метод Рунге—Кутта 6-го порядка. Однако для других уравнений оптимальным может оказаться метод другого порядка. В настоящее время неизвестен способ, который позволял бы определить для заданного уравнения оптимальный метод решения. Только проделав расчеты по различным способам и сравнив полученные результаты, можно с уверенностью утверждать, что какой-то метод лучше другого. Но если такое предварительное исследование не проведено хотя бы на близких задачах, то, как правило, используют метод Рунге—Кутта 4-го порядка.

4. Оценка погрешностей решения для устойчивых уравнений. Оценка (1.17) в общем случае не может быть улучшена и погрешность решения может возрастать экспоненциально с ростом интервала интегрирования. Это подтверждается рассмотренным выше примером 1.1, в котором получена оценка погрешности снизу.

Однако для более узких классов уравнений удается получить оценку, в которой нет экспоненциального роста.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t),\ x(0) = 1,\ \lambda > 0. \tag{1.19}$$

В отличие от уравнения (1.10) решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (1.19) является асимптотически устойчивым. Точное решение (1.19) есть $\bar{x}(t) = \exp(-\lambda t)$, $\bar{x}(t) \to 0$, $t \to \infty$. Будем решать уравнение (1.19) методом Эйлера и сразу учтем вычислительные погрешности. Аналогично (1.13) получим

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_{n+1} = (1 - \lambda h)\,\tilde{x}_n + \delta_n, \\ &\tilde{x}_{n+1} = (1 - \lambda h)^{n+1} + [\delta_n + (1 - h)\,\delta_{n-1} + \ldots + (1 - h)^n \delta_0]. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Если $0 < h < 2\lambda^{-1}$, то первый член суммы в (1.20) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такой шаг h и уровень вычислительных погрешностей δ, что

$$|\bar{x}(t_n) - \tilde{x}_n| \leqslant \varepsilon,\ n = 0, 1,$$

В самом деле, используя формулу для бесконечной геометрической прогрессии, имеем

$$|\bar{x}(t_n)-\tilde{x}_n|\leqslant|\bar{x}(t_n)-(1-\lambda h)^n|+\delta\,[1+\ldots+(1-\lambda h)^n+\ldots]\leqslant$$

$$\leqslant|\bar{x}(t_n)-(1-\lambda h)^n|+\frac{\delta}{\lambda h}.$$

В силу сказанного выше на любом конечном интервале $0\leqslant n\leqslant N$ благодаря выбору малого h_0 можно добиться, чтобы $|\bar{x}(t_n)-$ $-(1-\lambda h)^n|\leqslant\varepsilon/2$. Взяв N настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $|\bar{x}(t_N)|\leqslant\varepsilon/4$, $(1-\lambda h)^N\leqslant\varepsilon/4$, заключаем, что равномерно для всех n $(0\leqslant n\leqslant\infty)$ при $h\leqslant h_0$ имеет место неравенство

$$|\bar{x}(t_n)-(1-\lambda h)^n|\leqslant\varepsilon/2,\ n=0,\ 1,$$

Выберем δ так, чтобы $\delta/(\lambda h)\leqslant\varepsilon/2$; тогда окончательно получим

$$|\bar{x}(t_n)-\tilde{x}_n|\leqslant\varepsilon,\ h\leqslant h_0;\ 2\delta\leqslant\varepsilon\lambda h,\ n=0,\ 1,\ \ldots \qquad (1.21)$$

Оценка (1.21) может быть обобщена на более широкий класс систем. А именно: справедливо следующее утверждение. *Пусть* $f(t,\ 0)\equiv 0$ *и тривиальное решение уравнения* (1.1) *устойчиво при постоянно действующих возмущениях* (см. определение 1.8 в § 1 гл. I). *Пусть, далее, для решения задачи* (1.1) *используется общая одношаговая формула* (1.16). *Тогда для всякого* $\varepsilon>0$ *можно указать* h_0 *и* $\delta>0$ *такие, что при всех n выполняется неравенство*

$$|\tilde{x}_n|\leqslant\varepsilon,\ n=0,\ 1,\ \ldots, \qquad (1.22)$$

если $|\tilde{x}_0|\leqslant\delta$, $h\leqslant h_0$, $|\delta_n|\leqslant\delta h$.

Доказательство справедливости оценки (1.22) можно найти в [2; 3; 14; 16].

Оценка (1.22) позволяет надеяться, что при удачном выборе шага интегрирования и не слишком больших вычислительных погрешностях решение методом Рунге—Кутта может быть найдено с высокой точностью равномерно по всем n, если только исходное уравнение было устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

5. Стандартные программы. Для анализа переходных процессов удобно использовать стандартные программы. Наиболее широкое распространение получили стандартные программы с автоматическим выбором шага.

Программы методов Рунге—Кутта с автоматическим выбором шага строятся на основании одного из трех подходов: а) принципа Рунге апостериорной оценки точности; б) использования контрольных членов; в) применения вложенных методов.

Принцип Рунге основан на сравнении результатов, полученных при интегрировании с шагом h и $h/2$. Он дает весьма надежную оценку точности вычислений на каждом шаге, но требует слишком

много вычислений. Например, для метода 4-го порядка правую часть приходится вычислять 11 раз. Вследствие этого в настоящее время в стандартных программах этот принцип почти не используется.

При *использовании контрольных членов* стараются оценить локальную погрешность по вычисленным уже величинам $K_1, K_2, \ldots, K_p$. Например, для стандартной формулы Рунге—Кутта можно взять контрольный член в виде

$$\Delta = K_1 - K_2 - K_3 + K_4 \tag{1.23}$$

(явные выражения для K_i можно найти в табл. 1.1). Далее необходимо задать требуемую точность вычислений ε и начальный шаг h_0. Автоматический выбор шага производят следующим образом. С шагом h_0 вычисляют K_1, K_2, K_3, K_4 и Δ по формуле (1.23). Если $\Delta > \varepsilon$, то полагают $h_0 = \frac{h_0}{2}$ и повторяют вычисления сначала. Если $\frac{1}{32}\varepsilon \leqslant \Delta \leqslant \varepsilon$, то считают, что значение x_1 найдено с точностью ε, и переходят к нахождению x_2, причем берут $h_1 = h_0$. Если же $\Delta < \frac{1}{32}\varepsilon$, то полагают $h_1 = 2h_0$. Можно показать, что шаг стабилизируется к значению h_*, которое обеспечивает устойчивость метода.

В последние годы широкое применение находят стандартные программы, основанные на *вложенных методах*. Одна из наиболее удачных программ такого рода использует *формулу Рунге—Кутта—Фельдберга* [21]. Коэффициенты указанной формулы 6-й степени и 5-го порядка приведены в табл. 1.2. Вычисления проводят следующим образом.

Таблица 1.2

α_i	β_{ij}	ω_i	ω_{i*}
0		$\frac{16}{35}$	$\frac{25}{216}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$ $\frac{9}{32}$	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{1408}{2565}$
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$ $-\frac{7200}{2197}$ $\frac{7296}{2197}$	$\frac{28561}{56430}$	$\frac{2197}{4104}$
1	$\frac{439}{216}$ -8 $\frac{3680}{513}$ $-\frac{845}{4104}$	$-\frac{9}{50}$	$-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$ 2 $-\frac{3544}{2565}$ $\frac{1859}{4104}$ $-\frac{11}{40}$	$\frac{2}{55}$	0

Сначала вычисляют величину

$$x_{n+1}=x_n+\sum_{i=1}^{6}\omega_i K_i.$$

Затем находят оценку локальной точности:

$$\Delta_{n+1}=\sum_{i=1}^{6}(\omega_i-\omega_i^*)\,K_i. \tag{1.24}$$

Формула (1.24) заменяет контрольный член в формулах Рунге—Кутта. Величину Δ_{n+1} сравнивают с заданной точностью ε и шаг либо уменьшают (но не более чем в 10 раз), либо увеличивают (но не более чем в 5 раз). Если на предыдущем шаге было уменьшение, то увеличение на следующем шаге не допускается. Стандартная процедура RKF45, реализующая этот метод на ФОРТРАНе, приведена в [21].

§ 2. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ. МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ

1. Общие определения. В предыдущем параграфе были рассмотрены одношаговые методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Наряду с одношаговыми методами часто используются *многошаговые* (или *разностные*) *методы*. Основы теории многошаговых методов излагаются в настоящем параграфе.

Для численного решения задачи Коши

$$\dot{x}\,(t)=f\,(t,\,x),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x\,(t_0)=x_0 \tag{2.1}$$

на отрезке $[t_0,\,T]$ введем равномерную сетку с шагом

$$t_i=t_0+ih,\ i=0,\,1,\,\ldots,\,N,\ N=(T-t_0)/h. \tag{2.2}$$

Обозначим $x_i=x\,(t_i)$, $f_i=f\,(t_i,\,x_i)$. Соотношение

$$\sum_{p=0}^{k}\alpha_p x_{i+p}=h\sum_{p=0}^{k}\beta_p f\,(t_{i+p},\,x_{i+p}) \tag{2.3}$$

назовем *общей многошаговой формулой k-го порядка* (или *k-шаговой формулой*). Здесь α_p и β_p — некоторые заданные числа, $\alpha_k\neq 0$, $|\alpha_0|+|\beta_0|\neq 0$. Задание конкретного набора коэффициентов α_p, β_p определяет некоторую конкретную многошаговую формулу. Часто формулы вида (2.3) называют *разностными*. Формула (2.3) есть некоторое линейное соотношение между x_i и f_i, поэтому (2.3) называют также *линейным многошаговым методом*.

Чтобы с помощью k-шагового метода (2.3) можно было определять последовательность значений x_i, необходимо сначала вычислить k начальных значений вида

$$x_0 = x_{0,\,0},\ x_1 = x_{1,\,0},\ \ldots,\ x_{k-1} = x_{k-1,0}. \tag{2.4}$$

Если при $\alpha_k \neq 0$ коэффициент $\beta_k = 0$, то формулу (2.3) называют *явной* (или *экстраполяционной*). Если же $\beta_k \neq 0$, то формула (2.3) называется *неявной* (или *интерполяционной*). Для того чтобы формула (2.3) локально аппроксимировала решение задачи (2.1), необходимо, чтобы числа α_p и β_p удовлетворяли определенным соотношениям. Раскладывая решение задачи (2.1) в ряд Тейлора до степени l, получим

$$\bar{x}(t) = q_l(t) + O((t-t_0)^{l+1}). \tag{2.5}$$

Здесь $q_l(t)$ — некоторый многочлен степени l. Потребуем теперь, чтобы для любого многочлена $r(t)$ степени, не превосходящей l, выполнялись тождества

$$\sum_{p=0}^{k} \alpha_p r(t+ph) = \sum_{p=0}^{k} \beta_p r'(t+ph). \tag{2.6}$$

Подставляя в (2.6) вместо $r(t)$ степени $1, t, \ldots, t^l$, заключаем, что должны выполняться условия

$$\sum_{p=0}^{k} \alpha_p = 0,\ \sum_{p=0}^{k} p\alpha_p = \sum_{p=0}^{k} \beta_p,$$

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{p^s \alpha_p}{s!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{p^{s-1} \beta_p}{(s-1)!},\ s = 2, \ldots, l. \tag{2.7}$$

Ясно, что выполнение соотношений (2.7) автоматически обеспечивает выполнение тождеств (2.6). Учитывая равенство (2.5), получаем, что локальная погрешность, вызванная заменой дифференциального уравнения (2.1) разностным соотношением (2.3), при выполнении условий (2.7) имеет порядок h^{l+1}, т. е.

$$\bar{x}(t_k) - x_k = O(h^{l+1}).$$

Поэтому говорят, что многошаговая формула (2.3) имеет степень l, если ее коэффициенты α_p, β_p удовлетворяют соотношениям (2.7) до $s = l$ включительно.

2. Конкретные многошаговые формулы. Не приводя вывода, выпишем несколько многошаговых формул, часто используемых в практике вычислений.

Явные формулы Адамса можно записать в следующем виде:

$$x_{k+1}=x_k+h\left(f_k+\frac{1}{2}\Delta f_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 f_{k-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}\Delta^3 f_{k-3}+\frac{251}{720}\Delta^4 f_{k-4}+\frac{95}{288}\Delta^5 f_{k-5}+\frac{19087}{60480}\Delta^6 f_{k-6}+\ldots\right). \qquad (2.8)$$

В формуле (2.8) использованы стандартные обозначения для конечных разностей:

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i,$$
$$\Delta^2 f_i=\Delta f_{i+1}-\Delta f_i=f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i,$$
$$\Delta^3 f_i=\Delta^2 f_{i+1}-\Delta^2 f_i=f_{i+3}-3f_{i+2}+3f_{i+1}-f_i,$$

Неявные формулы Адамса имеют вид

$$x_{k+1}=x_k+h\left(f_{k+1}-\frac{1}{2}\Delta f_k-\frac{1}{12}\Delta^2 f_{k-1}-\frac{1}{24}\Delta^3 f_{k-2}-\right.$$
$$\left.-\frac{19}{720}\Delta^4 f_{k-3}-\frac{3}{160}\Delta^5 f_{k-4}-\frac{863}{60480}\Delta^6 f_{k-6}-\ldots\right). \qquad (2.9)$$

Обрывая формулу (2.8) или (2.9) на каком-либо члене, получим расчетную формулу определенного порядка. Например, ограничиваясь в формуле (2.8) членами до $\Delta^2 f_{k-2}$ включительно, получим

$$x_{k+3}=x_{k+2}+h\left(f_{k+2}+\frac{1}{2}\Delta f_{k+1}+\frac{5}{12}\Delta^2 f_k\right)=$$
$$=x_{k+2}+h\left[f_{k+2}+\frac{1}{2}(f_{k+2}-f_{k+1})+\frac{5}{12}(f_{k+2}-2f_{k+1}+f_k)\right]=$$
$$=x_{k+2}+h\left[\frac{23}{12}f_{k+2}-\frac{4}{3}f_{k+1}+\frac{5}{12}f_k\right]. \qquad (2.10)$$

Видно, что формула (2.10) есть формула третьего порядка, в которой

$$\alpha_3=1,\ \alpha_2=-1,\ \alpha_1=\alpha_0=0,\ \beta_3=0,\ \beta_2=\frac{23}{12},\ \beta_1=-\frac{4}{3},\ \beta_0=\frac{5}{12}.$$

Легко проверить, что для этих коэффициентов

$$\sum_{p=0}^{3}\alpha_p=0,\ \sum_{p=0}^{3}p\alpha_p=\sum_{p=0}^{3}\beta_p,\ \sum_{p=0}^{3}\frac{p^2\alpha_p}{2!}=\sum_{p=0}^{3}p\beta_p. \qquad (2.11)$$

Поэтому формула (2.10) имеет вторую степень. Аналогично, для неявной формулы (2.9) третьего порядка получим

$$x_{k+3}=x_{k+2}+h\left[f_{k+3}-\frac{1}{2}\,\Delta f_{k+1}-\frac{1}{12}\,\Delta^2 f_{k+1}-\frac{1}{24}\,\Delta^3 f_{k+1}\right]=$$

$$=x_{k+2}+h\left[f_{k+3}-\frac{1}{2}\,(f_{k+3}-f_{k+2})-\frac{1}{12}\,(f_{k+3}-2f_{k+2}+f_{k+1})-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{24}\,(f_{k+3}-3f_{k+2}+3f_{k+1}-f_k)\right]=$$

$$=x_{k+2}+h\left[-\frac{9}{24}f_{k+3}+\frac{19}{24}f_{k+2}-\frac{5}{24}f_{k+1}+\frac{1}{24}f_k\right], \qquad (2.12)$$

причем

$$\alpha_2=-1,\ \alpha_3=1,\ \alpha_1=\alpha_0=0,\ \beta_3=-9/24,\ \beta_2=19/24,\ \beta_1=-5/24,$$
$$\beta_0=1/24.$$

Поскольку для коэффициентов формулы (2.12) кроме соотношений (2.11) выполняется также равенство

$$\sum_{p=0}^{3}\frac{p^3\alpha_p}{3!}=\sum_{p=0}^{3}\frac{p^2\beta_p}{2!},$$

формула (2.12) имеет третью степень. Для всех остальных формул также при одинаковом порядке неявная формула Адамса имеет степень на единицу больше, чем явная.

Для численного интегрирования задачи

$$\ddot{x}\,(t)=f\,(t,\,x),\ x\,(t_0)=x_0,\ \dot{x}\,(t_0)=x_1 \qquad (2.13)$$

используют *формулы Штермера:*

явную

$$x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}=$$

$$=h^2\left(f_k+\frac{1}{12}\,\Delta^2 f_{k-2}+\frac{1}{12}\,\Delta^3 f_{k-3}+\frac{19}{240}\,\Delta^4 f_{k-4}+\frac{3}{40}\,\Delta^5 f_{k-5}+\ldots\right), \qquad (2.14)$$

неявную

$$x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}=$$

$$=h^2\left(f_k+\frac{1}{12}\,\Delta^2 f_{k-1}-\frac{1}{240}\,\Delta^4 f_{k-3}-\frac{1}{240}\,\Delta^5 f_{k-4}-\ldots\right). \qquad (2.15)$$

Так как

$$\Delta^2 f_{k-1}=\Delta f_k-\Delta f_{k-1}=f_{k+1}-2f_k+f_{k-1},$$
$$\Delta^4 f_{k-3}=f_{k+1}-4f_k-6f_{k-1}-4f_{k-2}+f_{k-3},$$

то формула (2.15) является некоторым нелинейным уравнением относительно x_{k+1}, которое входит явно в левую часть и неявно в правую часть в значения функции $f_{k+1}=f(t_{k+1}, x_{k+1})$. Формулы Штермера удобнее для использования, чем способ сведения задачи (2.13) к задаче Коши для системы двух уравнений первого порядка.

Для решения задачи (2.1) часто принимают также *методы прогноза и коррекции.* Из них наиболее употребительны *формулы Милна:*

формула прогноза по Милну

$$x_i^{\text{прогн}}=x_{i-4}+\frac{4h}{3}(2f_{i-3}-f_{i-2}+2f_{i-1}),\ f_i^{\text{прогн}}=f(t_i, x_i^{\text{progn}}); \quad (2.16)$$

формула коррекции по Милну

$$x_i^{\text{кор}}=x_{i-2}+\frac{h}{3}(f_{i-2}+4f_{i-1}+f_i^{\text{прогн}}); \quad (2.17)$$

контрольная формула Милна

$$\varepsilon_i^{\text{кор}}=|x_i^{\text{кор}}-\bar{x}(t_i)|\cong\frac{1}{29}|x_i^{\text{кор}}-x_i^{\text{прогн}}|.$$

3. Организация вычислений по многошаговым формулам. Вычисление решения по многошаговым формулам (2.3) проводят следующим образом. Прежде всего находят начальный отрезок, т. е. значения $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Начальный отрезок нельзя найти, применяя сразу многошаговую формулу (2.3). Для его отыскания проще всего применить какой-либо одношаговый метод, например метод Рунге—Кутта 4-й степени. Известны и другие приемы отыскания начального отрезка, например метод Крылова, подробно описанный в [4].

Далее можно непосредственно применять формулу (2.3) для отыскания последующих значений $x_k, x_{k+1}, \ldots$. При этом существенно различаются случаи использования явных и неявных формул. Явные формулы определяют некоторые рекуррентные соотношения, по которым последовательно вычисляют значения x_k, x_{k+1}, Пусть, например, используется явная формула Адамса (2.8):

$$x_{k+3}=x_{k+2}+h\left(f_{k+2}+\frac{1}{2}\Delta f_{k+1}+\frac{5}{12}\Delta^2 f_k\right). \quad (2.18)$$

Начальный отрезок для этой формулы состоит из точек x_0, x_1, x_2. Предположим, что он вычислен каким-либо образом. Ход дальнейших вычислений иллюстрируется табл. 2.1.

Таблица 2.1

t_i	x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
t_0	x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$
t_1	x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$
t_2	x_2	f_2	Δf_2	
t_3	x_3	f_3		
t_4	x_4			

Прежде всего вычисляют f_0, f_1, f_2, а затем разности, расположенные в табл. 2.1 выше ломаной. После этого по формуле (2.18) можно найти x_3, а затем вычислить f_3 и разности Δf_2 и $\Delta^2 f_1$. Это позволяет найти x_4 и т. д. Отметим важную особенность явных формул Адамса. Независимо от порядка формулы нахождение каждого последующего значения x_{i+1} требует вычисления только одного нового значения функции f_i.

Неявная формула вида (2.9) для каждого значения x_{i+p} является нелинейным алгебраическим уравнением, которое можно записать следующим образом:

$$x_{i+p}=\frac{h\beta_p}{\alpha_p} f(t_{i+p}, x_{i+p})+\varphi_p, \quad \beta_p \neq 0. \tag{2.19}$$

Здесь φ — известная функция от $t_i, \ldots, t_{i+p-1}, x_i, \ldots, x_{i+p-1}$ и h. Для нахождения x_{i+p} из уравнения (2.19) можно применить метод итераций. Задают x_{i+p} и определяют последовательно x^1_{i+p}, x^2_{i+p}, по формуле

$$x^k_{i+p}=\frac{h\beta_p}{\alpha_p} f(t_{i+p}, x^{k-1}_{i+p})+\varphi_p.$$

Как только разность $|x^k_{i+p}-x^{k-1}_{i+p}|$ станет меньше некоторого наперед заданного числа, процесс итераций останавливают. Можно доказать, что при достаточно малом шаге h (точнее, при $h \leqslant \left|\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right| \frac{1}{L}$, где L — постоянная Липшица для функции $f(t, x)$ по переменной x) метод итераций сходится при любом выборе x^0_{i+p}. Однако количество итераций зависит от близости x^0_{i+p} к точному корню уравнения (2.19). Каждый шаг итераций требует одного вычисления правой части $f(t, x)$. Хотя неявные методы имеют бо́льшую локальную точность по сравнению с явными, нахождение каждого значения x_{i+p} более трудоемко. Поэтому заранее нельзя утверждать, что использование неявных формул предпочтительнее по сравнению с явными, так же как нельзя утверждать и обратное. Для одних

уравнений лучше применить явную формулу, для других — неявную. Вопрос о выборе формулы для численного решения задачи (2.1) окончательного решения до сих пор не получил.

Сравним теперь многошаговые формулы с одношаговыми формулами Рунге—Кутта. Прежде всего многошаговые формулы требуют особой процедуры для определения начального отрезка, что затрудняет изменение шага в процессе счета. Далее, если взять явную формулу Адамса 4-й степени и формулу Рунге—Кутта той же степени, то постоянная в оценке локальной погрешности у формулы Адамса почти в 1000 раз больше, чем у формулы Рунге—Кутта. Это означает, что шаг вычислений по формуле Адамса при одинаковой точности должен быть взят в $\sqrt[4]{1000} \approx 5{,}7$ раза меньше, чем при использовании формулы Рунге—Кутта. Таким образом, несмотря на то что шаг формулы Адамса требует одного вычисления $f(t, x)$, а шаг формулы Рунге—Кутта — четырех вычислений $f(t, x)$, метод Рунге—Кутта является менее трудоемким. Возможность автоматически менять шаг в методе Рунге—Кутта приводит к тому, что этот метод наиболее широко применяют на практике.

Отметим, что в последние годы опубликовано несколько хороших программ с переменным шагом и переменным порядком, основанных на методе Адамса [16].

4. Оценка погрешности. При использовании многошаговых методов важно уметь оценить получаемую погрешность на большом количестве шагов, а не только локально, на одном шаге. Оказывается, что не все многошаговые методы являются численно устойчивыми.

Пример 2.1. Для решения задачи

$$\dot{x}(t) = -x, \; x(0) = 1, \tag{2.20}$$

применим формулу второго порядка

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 3x_n = h\,[3f(t_{n+1}, x_{n+1}) + f(t_n, x_n)]. \tag{2.21}$$

Коэффициенты формулы (2.21) удовлетворяют соотношениям $1+2-3=0$, $2\cdot 1+2=3+1$, которые для этой формулы совпадают со следующими общими соотношениями:

$$\sum_{p=0}^{2} \alpha_p = 0, \quad \sum_{p=0}^{2} p\alpha_p = \sum_{p=0}^{2} \beta_p. \tag{2.22}$$

Из соотношений (2.22) вытекает, что формула (2.21) имеет 2-ю степень и 2-й порядок.

Возьмем шаг $h = 0{,}1$; $x_0 = 1$, $x_1 = e^{-0{,}1} \approx 0{,}905$. Формула (2.21) для уравнения (2.20) при $h = 0{,}1$ имеет вид

$$x_{n+2} = -2{,}3x_{n+1} + 3{,}1x_n, \; n \geqslant 2, \; x_0 = 1, \; x_1 = 0{,}905.$$

Значения x_n, вычисленные с пятью десятичными знаками, приведены в табл. 2.2. Из таблицы видно, что решение x_n возрастает при $n\to\infty$, в то время как для точного решения $\bar{x}(t)$ задачи (2.20)

Таблица 2.2

n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	1,00000	4	2,09685	8	144,17409
1	0,90484	5	−3,39187	9	−466,16637
2	1,01887	6	14,30656	10	1519,12234
3	0,46159	7	−43,40837		

имеем $\bar{x}(t)=e^{-t}\to 0$, $t\to\infty$. Таким образом, формула (2.21) непригодна для численного решения задачи (2.20).

Причина *численной неустойчивости* некоторых (но, конечно, не всех) многошаговых формул заключается в том, что порядки дифференциального и аппроксимирующего его разностного уравнений могут отличаться. При этом у разностного уравнения могут возникнуть дополнительные решения, которые приводят к существенному отличию решений уравнения (2.1) и (2.3).

Особенно важно исследовать, как ведут себя решения, полученные по многошаговой формуле (2.3) при малых h. Из непрерывной зависимости решений (2.3) от h следует, что при малых h решения уравнения (2.3) близки к решениям уравнения

$$\sum_{p=0}^{k}\alpha_p x_{i+p}=0. \tag{2.23}$$

Если тривиальное решение уравнения (2.23) устойчиво по Ляпунову, то дополнительные решения у уравнения (2.3) отсутствуют. Это приводит к следующему определению.

Определение 2.1. Многошаговая формула (2.3) называется *численно устойчивой (устойчивой по Дальквисту)*, если тривиальное решение уравнения (2.23) устойчиво по Ляпунову.

Напомним, что для устойчивости по Ляпунову уравнения (2.23) необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения

$$\sum_{p=0}^{k}\alpha_p\lambda^p=0 \tag{2.24}$$

лежали внутри единичного круга и на окружности $|\lambda|=1$ не было кратных корней (см. § 10 гл. I). Поэтому можно дать следующее определение, эквивалентное предыдущему.

Определение 2.2. Многошаговая формула (2.3) называется *численно устойчивой (устойчивой по Дальквисту)*, если все λ_i корни λ_i уравнения (2.24) удовлетворяют условию $|\lambda|\leqslant 1$, причем на окружности $|\lambda|=1$ нет кратных корней.

Приведем без доказательства следующее утверждение*.
Пусть реальные вычисления проводятся по формуле

$$\sum_{p=0}^{k} \alpha_p \tilde{x}_{i+p} = h \sum_{p=0}^{k} \beta_p f(t_{i+p}, \tilde{x}_{i+p}) + \delta_i, \quad i \geqslant k, \tag{2.25}$$

$$\tilde{x}_0 = x_{0,0} + \theta_0, \ \ldots, \ \tilde{x}_{k-1} = x_{k-1,0} + \theta_{k-1}.$$

Здесь δ_i — некоторые числа, характеризующие погрешности вычислений. Будем считать, что

$$|\delta_i| \leqslant \delta, \ i = k, k+1, k+2, \ldots . \tag{2.26}$$

Теорема 2.1 (Г. Дальквист). *Пусть многошаговая формула* (2.3) *имеет степень l и устойчива по Дальквисту. Тогда при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ выполнено неравенство*

$$|\bar{x}(t_i) - \tilde{x}_i| \leqslant e^{C_1 T} \left\{ C_2 h^l + C_3 \frac{\delta}{h} + C_4 \max_{0 \leqslant i \leqslant k-1} |\theta_i| \right\}, \tag{2.27}$$

где C_i — некоторые постоянные, зависящие от постоянных Липшица функций $f(t, x)$, $f'_x(t, x)$.

В оценке (2.27) первый член характеризует погрешность метода, второй — вычислительные погрешности, третий — погрешность, обусловленную неточным определением начальных условий (2.4). С ростом интервала $[t_0, t_0 + T]$ погрешность растет, вообще говоря, экспоненциально. В целом оценка (2.27) имеет тот же характер, что и оценка (1.17). Таким образом, многошаговые устойчивые по Дальквисту формулы аналогичны с точки зрения погрешностей одношаговым формулам.

Для получения оценки погрешности на бесконечно большом интервале изменения t необходимо усилить требования к формуле (2.3).

Определение 2.3. Многошаговая формула (2.3) называется *сильно устойчивой по Дальквисту*, если все корни λ_i уравнения (2.24), за исключением корня $\lambda_1 = 1$, удовлетворяют условию $|\lambda_i| < 1$.

Заметим, что в силу первого из равенств (2.7) уравнение (2.24) всегда имеет корень $\lambda_1 = 1$.

Пусть $f(t, 0) \equiv 0$ и тривиальное решение уравнения (2.1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях (см. § 1 гл. I).

Теорема 2.2. *Пусть для решения задачи* (2.1), *у которой тривиальное решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях, применяется сильно устойчивый по Дальквисту метод* (2.3). *Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся $h > 0$ и $\delta > 0$ такие, что любое решение*

*Близкие результаты были получены на год раньше Дальквиста в работе: С. М. Лозинский. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия вузов, серия "Математика", № 5, 1958.

$\tilde{x}_n$ разностного уравнения (2.25) *удовлетворяет неравенству* $|\tilde{x}_n|<\varepsilon$, $n=0, 1, 2, \ldots$, *если* $|\tilde{x}_i|<h\delta$, $i=0, 1, \ldots, k-1$.

5. Формулы Бутчера. Наряду с одношаговыми и многошаговыми применяются также методы, объединяющие достоинства обеих этих групп. В *формулах Бутчера* так же, как в многошаговых методах, для вычисления каждого последующего значения x_n используют несколько предыдущих значений $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$, и в то же время, как в методах Рунге—Кутта, на каждом шаге несколько раз вычисляют значения правой части. Приведем в качестве примера двухшаговую формулу Бутчера, в которой на каждом шаге производится три вычисления правой части:

$$x_{n-\frac{1}{2}}=x_{n-2}+\frac{h}{8}(9f_{n-1}+3f_{n-2}),$$

$$x_n^1=\frac{1}{5}(28x_{n-1}-23x_{n-2})+\frac{h}{15}(32f_{n-\frac{1}{2}}-60f_{n-1}-26f_{n-2}),$$

$$x_n=\frac{1}{31}(32x_{n-1}-x_{n-2})+\frac{h}{93}(64f_{n-\frac{1}{2}}+15f_n^1+12f_{n-1}-f_{n-2}),\ f_i^k=f(t_i, x_i^k). \tag{2.28}$$

Локальная погрешность формулы (2.28) равна $O(h^6)$. В [23] описаны другие подобные формулы и установлены их свойства.

§ 3. «ЖЕСТКИЕ» СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

При рассмотрении различных конкретных технических, физических, биологических систем можно заметить так называемое явление «жесткости». Это явление, образно говоря, состоит в том, что для описания процесса на интервале наблюдения надо использовать функции двух типов: на некоторых малых отрезках — быстро меняющиеся функции с большими производными (быстрые движения), а на остальной части — функции с малыми производными (медленные движения). Особые сложности при изучении таких систем возникают, если моменты начала быстрых движений заранее не известны. Явления жесткости особенно характерны для развитых динамических систем, описываемых системами дифференциальных уравнений высокого порядка.

Один из первых примеров такого рода систем был изучен А. Н. Тихоновым и его учениками В. П. Масловым, А. Б. Васильевой и др. Предметом их изучения были *системы с малым параметром при старших производных*, иначе называемые *сингулярно возмущенными системами*. Такие системы описываются уравнениями вида

$$\mu\dot{y}(t)=f(t, y, z),\ y\in R_m,\ z\in R_l,$$
$$\dot{z}(t)=g(t, y, z),\ y(t_0)=y_0,\ z(t_0)=z_0. \qquad (3.1)$$

Здесь $\mu>0$ — некоторое малое число (малый параметр).

Пример 3.1. Пусть

$$\mu\dot{x}(t)=-ax(t),\ x(0)=1. \qquad (3.2)$$

Тогда

$$x(t, \mu)=e^{-\frac{a}{\mu}t}$$

При $a>0$ и достаточно малом $\mu>0$ решение $x(t, \mu)$ имеет вид, изображенный на рис. 3.1. Из этого рисунка видно, что весь интервал времени $[0, \infty)$ можно разбить на два участка. Участок I от $t=0$ до $t=O(\mu)$, где решение быстро меняется от 1 до 0 и производная есть $O\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Это участок так называемого *погранслоя*. На участке II при t, меняющемся от $O(\mu)$ до ∞, решение практически постоянно и равно нулю. Этот участок называют *регулярной частью* решения.

Часто в системе не удается выделить явно члены с малыми параметрами, однако решение также имеет участки быстрых и медленных движений. Это особенно характерно для систем дифференциальных уравнений. Такова, например, линейная стационарная система

$$\dot{x}(t)=Ax(t),\ x\in R_n, \qquad (3.3)$$

у которой собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A сильно отличаются по величине, т. е.

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1\ll\mathrm{Re}\,\lambda_n<0. \qquad (3.4)$$

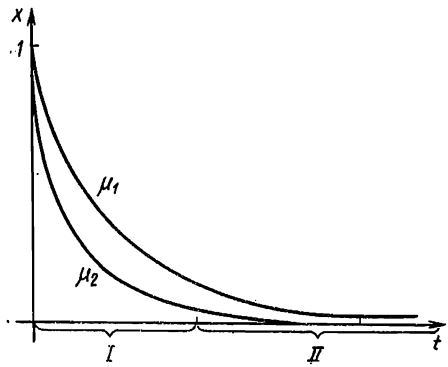


Рис. 3.1. Решения $x(t, \mu)$ задачи (3.2) при $\mu_1>\mu_2$: I — область погранслоя; II — область регулярного решения

В этом случае компонента решения, соответствующая собственному значению λ_1, будет сказываться на решении только при t, близких к начальному значению $t=0$. При больших значениях t основное значение для решения системы (3.3) имеет компонента, соответствующая собственному значению λ_n. Численное решение систем (3.3) при выполнении условия (3.4) обычными методами затруднительно, что подтверждает следующий пример.

Пример 3.2 [21]. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t)=998x(t)+1998y(t),$$
$$\dot{y}(t)=-999x(t)-1999y(t),\quad x(0)=y(0)=1. \tag{3.5}$$

Решение задачи (3.5) имеет вид

$$x(t)=4\exp(-t)-3\exp(-1000t),$$
$$y(t)=-2\exp(-t)+3\exp(-1000t). \tag{3.6}$$

На рис. 3.2 приведен вид решений $x(t)$ и $y(t)$. При $t>0{,}01$ практически имеем $x(t)\approx 4\exp(-t)$, $y(t)\approx -2\exp(-t)$. Будем решать задачу (3.5) методом Эйлера с шагом h, используя формулы

$$x_{n+1}=x_n+h\,(998x_n+1998y_n),$$
$$y_{n+1}=y_n+h\,(-999x_n-1999y_n),$$
$$x_n=x(nh),\quad y_n=y(nh),$$
$$x_0=1,\quad y_0=1.$$

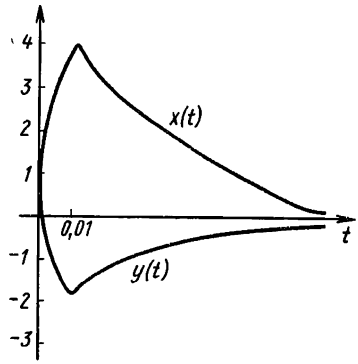


Рис. 3.2. Вид решения «жесткой» системы (3.5)

Взяв шаг $h=0{,}01$, получим результаты, представленные в табл. 3.1. Сопоставляя эти результаты с точными решениями (3.6), видим, что полученные результаты совершенно неудовлетворительны. Лучшие результаты получатся, если взять $h=0{,}001$. Однако при этом резко возрастает трудоемкость вычислений (см. табл. 3.2).

Рассмотрим более подробно встретившиеся при решении системы (3.5) трудности. Применим метод Эйлера с шагом h к решению уравнения

$$\dot{x}(t)=-\lambda x(t),\quad x(0)=1,\quad \lambda>0. \tag{3.7}$$

Таблица 3.1

Шаг $h=0{,}01$		
t	$x_n=x(t)$	$y_n=y(t)$
0,05	$1{,}771508\cdot 10^{5}$	$-1{,}771489\cdot 10^{5}$
0,10	$-1{,}046035\cdot 10^{5}$	$1{,}046035\cdot 10^{5}$
0,15	$6{,}176733\cdot 10^{14}$	$-6{,}176733\cdot 10^{14}$
0,20	$-3{,}647299\cdot 10^{19}$	$3{,}647299\cdot 10^{19}$
0,25	$2{,}153693\cdot 10^{24}$	$-2{,}153693\cdot 10^{24}$
0,30	$-1{,}271734\cdot 10^{29}$	$1{,}271734\cdot 10^{29}$
0,35	$7{,}509466\cdot 10^{33}$	$-7{,}509466\cdot 10^{33}$
0,40	$-4{,}434264\cdot 10^{38}$	$4{,}434264\cdot 10^{38}$
0,45	$2{,}618389\cdot 10^{43}$	$-2{,}618389\cdot 10^{43}$
0,50	$-1{,}546132\cdot 10^{48}$	$1{,}546132\cdot 10^{48}$

Таблица 3.2

Шаг $h=0{,}001$				
t	$x_n=x(t)$	$y_n=y(t)$	$x_{\text{точн}}(t)$	$y_{\text{точн}}(t)$
0,05	3,804822	−1,902411	3,804917	−1,902458
0,10	3,619168	−1,809584	3,619349	−1,809674
0,15	3,442573	−1,721286	3,442831	−1,721415
0,20	3,274595	−1,637297	3,274923	−1,637461
0,25	3,114813	−1,557406	3,115203	−1,557601
0,30	2,962828	−1,481414	2,936272	−1,481636
0,35	2,818258	−1,409129	2,818752	−1,409376
0,40	2,680743	−1,340371	2,681280	−1,340640
0,45	2,549938	−1,274969	2,550512	−1,275256
0,50	2,425515	−1,212757	2,426122	−1,213061

Решение уравнения (3.7) имеет вид

$$\bar{x}(t)=\exp(-\lambda t),\ x(t)\to 0,\ t\to\infty.$$

Используя метод Эйлера, получим

$$x_{n+1}=x_n-h\lambda x_n=(1-h\lambda)x_n. \tag{3.8}$$

Последовательность (3.8) стремится к нулю, если $|1-h\lambda|<1$. Значит, для стремления x_n к нулю шаг h должен выбираться из условия

$$0<h<2/\lambda. \tag{3.9}$$

Условие (3.9) называется *условием устойчивости метода Эйлера* для уравнения (3.7).

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{x}(t)=\Lambda x(t),\ x\in R_n. \tag{3.10}$$

Матрица Λ является диагональной, ее диагональ образуют числа $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$. Аналогично предыдущему легко видеть, что метод Эйлера с шагом h для системы (3.10) устойчив, если $|1-h\lambda_i|<2$, $i=1, \ldots, n$, т. е. если шаг h удовлетворяет условию

$$0<h<2\lambda_{\max}^{-1},\ \lambda_{\max}=\max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

Интервал интегрирования T для системы (3.10) определяется величиной $\lambda_{\min}=\min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ и обычно равен $T=(5\div 10)\lambda_{\min}^{-1}$.

Пусть в системе (3.10) собственные значения λ_i сильно отличаются по величине, например $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}=10^4\div 10^5$. Тогда при интегрировании на отрезке $T=10\lambda_{\min}^{-1}$ с шагом $h=\lambda_{\max}^{-1}$ необходимо сделать $T/h\cong 10^5\div 10^6$ шагов. Такое количество вычислений выполнить затруднительно даже при использовании ЭВМ. Взять больший шаг нельзя, так как при этом нарушается условие устойчивости и решение, найденное методом Эйлера, сильно отличается от точного решения.

Таким образом, *можно считать, что система* (3.3) *является жесткой, если*

$$\frac{\max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i(A)}{\min\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i(A)} \approx 10^4 \div 10^5. \tag{3.11}$$

Условие (3.11) нельзя считать формальным определением жесткой системы даже для систем вида (3.3), но смысл жесткости это условие поясняет.

Более приемлемые числовые результаты получаются при использовании неявных формул, например неявной формулы Эйлера. Для системы

$$\dot{x}(t)=f(t, x),\ x\in R_n,\ x(0)=x_0$$

неявная формула Эйлера имеет вид

$$x_{n+1}=x_n+hf(t_{n+1}, x_{n+1}),\ x_0=x_0. \tag{3.12}$$

Пример 3.3. Рассмотрим снова систему (3.7) и решим ее, используя неявную формулу Эйлера с шагом h. Вместо формулы (3.8) получим

$$x_{n+1}=x_n-h\lambda x_{n+1},\ x_{n+1}=\frac{1}{1+h\lambda}\,x_n. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что для всякого $h>0$ выполняется условие

$$x_n\to 0 \text{ при } n\to\infty. \tag{3.14}$$

На основании этого можно дать следующее определение.

Определение 3.1. Численный метод называется *A-устойчивым*, если его применение к уравнению (3.7) дает последовательность x_n, удовлетворяющую условию (3.14).

Используя это определение, полученные выше результаты можно сформулировать так: явный метод Эйлера не является A-устойчивым, а неявный метод Эйлера является A-устойчивым.

Обобщая эти результаты, Г. Дальквист доказал*, что:

а) никакой явный многошаговый метод не является A-устойчивым;

б) явные методы типа Рунге—Кутта также не A-устойчивы;

в) неявные многошаговые методы степени, большей 2, не A-устойчивы.

В связи с этим для интегрирования жестких систем предпочтительнее использование *неявных методов типа Рунге—Кутта.* Приведем некоторые частные случаи этих формул, полученные Дж. Кэшем в 1975 г.:

---

*Ракитский Ю.В., Устинов С. Н., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. — М.: Наука. 1979.

$$n=2:\quad x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}(\eta_1+\eta_2),$$

$$\eta_1=f(t_{n+1},\ x_{n+1}),\ \eta_2=f(t_n,\ x_{n+1}-h\eta_1);$$

$$n=3:\quad x_{n+1}=x_n+\frac{h}{4}(\eta_1+3\eta_3),$$

$$\eta_1=f(t_{n+1},\ x_{n+1}),\ \eta_2=f\left(t_{n+1}-\frac{h}{3},\ x_{n+1}-\frac{h\eta_1}{3}\right),$$

$$\eta_3=f\left(t_{n+1}-\frac{2h}{3},\ x_{n+1}-\frac{2h\eta_2}{3}\right);$$

$$n=4:\quad x_{n+1}=x_n+\frac{h}{6}(\eta_1+2\eta_2+2\eta_3+\eta_4),$$

$$\eta_1=f(t_{n+1},\ x_{n+1}),\ \eta_2=f\left(t_{n+1}-\frac{h}{2},\ x_{n+1}-\frac{h\eta_1}{2}\right),$$

$$\eta_3=f\left(t_{n+1}-\frac{h}{2},\ x_{n+1}-\frac{h\eta_2}{2}\right),\ \eta_4=f(t_n,\ x_{n+1}-h\eta_3).$$

Кроме этих формул для решения жестких систем используют и некоторые другие формулы [10; 14; 15; 16].

При использовании неявных формул необходимо на каждом шаге решать систему алгебраических уравнений относительно x_{n+1}. Это не простая задача, даже в случае линейной системы (3.3). В самом деле, если для решения системы (3.3) применить формулу Кэша четвертой степени, то относительно x_{n+1} получим уравнение вида

$$\left(I-hA+\frac{h^2A^2}{2!}-\frac{h^3A^3}{3!}+\frac{h^4A^4}{4!}\right)x_{n+1}=x_n. \tag{3.15}$$

Пусть матрица A имеет действительные собственные значения $-\lambda_1<\ldots<-\lambda_n<0$ такие, что число обусловленности матрицы A есть

$$\operatorname{cond}(A)=\lambda_1/\lambda_n\approx 10^4$$

Тогда можно подсчитать, что число обусловленности матрицы системы (3.15) равно

$$\operatorname{cond}\left(I-hA+\frac{h^2A^2}{2}-\frac{h^3A^3}{3!}+\frac{h^4A^4}{4!}\right)\approx 10^8-10^{12}$$

Решать системы линейных алгебраических уравнений (3.15) с таким числом обусловленности на ЭВМ затруднительно из-за сильного влияния на решение погрешностей округления (подробнее о числах

обусловленности и влияния погрешностей округлений см. в [3; 6; 9; 13; 21]).

В связи с этой трудностью разработаны другие методы решения жестких систем.

Например, для системы (3.3) может быть использован следующий метод. Известно [3; 16], что решение системы (3.3) можно записать в виде

$$\bar{x}(t)=\exp(At)\,x_0.$$

Здесь $\exp(At)$ — матричная экспонента, которая может быть разложена в ряд:

$$\exp(At)=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\ldots. \tag{3.16}$$

Пусть требуется найти решение $\bar{x}(t)$ системы (3.3) в момент $t=T$. Возьмем N так, чтобы $T=2^Nh$, где h — достаточно малое число. При малом h ряд (3.16) сходится довольно быстро и для определения $\exp(Ah)$ можно взять небольшое число членов в формуле (3.16). Предположим, что $B_0=\exp(Ah)$ вычислено с помощью ряда (3.16) с необходимой точностью. Далее вычисления можно произвести рекуррентно по формулам

$$\begin{aligned}
&B_1=\exp(2Ah)=\exp(Ah)\exp(Ah)=B_0^2,\\
&B_2=\exp(4Ah)=\exp(2Ah)\exp(2Ah)=B_1^2,\\
&B_3=\exp(2^3Ah)=B_2^2,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.17)\\
&B_N=\exp(2^NAh)=B_{N-1}^2.
\end{aligned}$$

Вычисления по формулам (3.17) не слишком трудоемки. Так, например, при $h=0{,}01$, $n=10$ для решения на отрезке $T=2^{10}h\approx 10$ потребуется выполнить порядка $10n^3$, т. е. 10^4 арифметических операций умножения и сложения. Это количество вычислений не слишком велико и не зависит от свойств матрицы A.

Известны также другие методы решения жестких систем. Одна из наиболее успешных программ решения жестких систем разработана К. Гиром. В *методе Гира* используются формулы предсказания и коррекции переменного порядка и с переменным шагом*.

В результате проведения тестирования различных жестких систем сделан вывод о том, что программа DIFSUB оказалась слабо чувствительной к степени жесткости системы и является в настоящее время наиболее эффективной для решения жестких и нежестких

*Текст программы DIFSUB, реализующей метод Гира, см., например: Гольдберг С. И., Захаров А. Ю., Филиппов С. С. О некоторых численных методах решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Институт прикладной математики АН СССР, 1976, препринт № 12.

систем обыкновенных дифференциальных уравнений с точки зрения минимизации вычислительных затрат при заданной точности решения.

§ 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Одной из наиболее изученных и часто встречающихся в приложениях является линейно-квадратичная задача (ЛК-задача). Пусть система описывается линейным уравнением вида

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x(t)\in R_n,\ u\in R_m \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$x(t_0)=x_0. \tag{4.2}$$

Требуется выбрать С-управление $u=u(t, x)$, не стесненное никакими условиями, так, чтобы минимизировать квадратичный функционал

$$J(u)=x'(T)N_1x(T)+\int_{t_0}^{T}[x'(t)N_2(t)x(t)+u'(t)N_3(t)u(t)]\,dt. \tag{4.3}$$

$$N_1\geqslant 0,\ N_2(t)\geqslant 0,\ N_3(t)>0.$$

Эта задача подробно изучалась в § 2 гл. IV; соответствующие обозначения и некоторые результаты используются в настоящем параграфе.

Особый случай представляют задачи стабилизации (или задачи на бесконечном интервале), когда $T=\infty$.

В настоящем параграфе будут рассмотрены следующие вопросы:

а) построение оптимального С-управления в задаче (4.1)—(4.3);

б) численное построение фильтра Калмана;

в) задача стабилизации и методы решения алгебраического уравнения Риккати.

1. Построение оптимального С-управления для нестационарных систем. В § 2 гл. IV было показано, что решение задачи (4.1)—(4.3) можно представить в виде

$$u(t, x)=-N_3^{-1}(t)B'(t)P(t)x, \tag{4.4}$$

где матрица $P(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению типа Риккати

$$\dot{P}(t)+A'(t)P(t)+P(t)A(t)+N_2(t)-PBN_3^{-1}B'P=0, \tag{4.5}$$

$$t_0\leqslant t\leqslant T,\ P(T)=N_1.$$

Известно, что для заданных измеримых и ограниченных матриц $A(t)$ и $B(t)$ и равномерно на $[0, T]$ положительно-определенной

матрицы $N_3(t)$ уравнение (4.5) имеет единственное решение $P(t)$, причем матрица $P(t)$ ограничена и положительно определена, т. е. $P(t)>0$.

Эти результаты приводят к следующему алгоритму решения задачи (4.1)—(4.3). Сначала каким-либо численным методом (например, методом Эйлера, Рунге—Кутта или Адамса) интегрируют уравнение (4.5) в направлении от значения $t=T$ к значению $t=0$ (в «обратном времени»). Затем находят С-управление по формуле (4.4). Преимуществом этого метода является то, что матрицу усиления

$$F(t)=-N_3^{-1}(t)B'(t)P(t)$$

вычисляют один раз, но применяют в течение всего процесса управления. Недостатком метода является необходимость выбора достаточно малого шага интегрирования уравнения (4.5) для получения удовлетворительного по точности результата. Частично этот недостаток уменьшается, если использовать методы интегрирования с автоматическим выбором шага из § 1. Далее, учитывая, что матрица $P(t)$ должна быть симметричной, можно интегрировать не все n^2 уравнений первого порядка, образующие систему (4.5), а достаточно взять только $n(n+1)/2$ уравнений для верхней треугольной части матрицы $P(t)$. Это почти вдвое сокращает машинное время и автоматически приводит к симметричной матрице $P(t)$.

2. Стационарная линейно-квадратичная задача на конечном интервале. В случае стационарной ЛК-задачи (4.1)—(4.3), в которой матрицы $A(t)$, $B(t)$, $N_2(t)$ и $N_3(t)$ постоянны, неудобно решать нелинейное уравнение (4.5) для определения матрицы $P(t)$. Удобнее перейти к линейной системе порядка $2n$, как это было сделано в § 2 гл. IV и § 4 гл. XIII. Вектор, составленный из фазовых переменных $x(t)$ и сопряженных переменных $\varphi(t)$, удовлетворяет линейному уравнению

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\varphi}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & -BN_3^{-1}B'\\ -N_2 & -A'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ \varphi(t)\end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

При этом решение $P(t)$ уравнения Риккати (4.5) можно выразить следующей рекуррентной формулой:

$$P(t_{i+1})=[G_{21}(t_{i+1}, t_i)+G_{22}(t_{i+1}, t_i)P(t_i)]\times$$
$$\times[G_{11}(t_{i+1}, t_i)+G_{12}(t_{i+1}, t_i)P(t_i)]^{-1}, \tag{4.7}$$

$$t_{i+1}-t_i=h=\text{const},\ P(T)=N_1.$$

Здесь $G_{ij}(t_{i+1}, t_i)$, $(i, j=1, 2)$ представляют собой блоки размера $n \times n$ фундаментальной матрицы $G(t, t_0)$ уравнения (4.6):

$$G(t_{i+1}, t_i)=G(t_{i+1}-t_i)=e^{-Zh},\ Z=\begin{pmatrix} A & -BN_3^{-1}B' \\ -N_2 & -A' \end{pmatrix}.$$

Матрицы $G_{ij}(t_{i+1}, t_i)$ можно вычислить один раз и затем пользоваться только рекуррентным соотношением (4.7). Для вычисления $G(t_{i+1}, t_i)$ разложим в ряд матричную экспоненту $\exp(-Zh)$:

$$G(t_{i+1}, t_i)=I-Zh+\frac{Z^2h^2}{2!}-\frac{Z^3h^3}{3!}+\dots . \tag{4.8}$$

При малых h ряд (4.8) быстро сходится. Если вещественные части собственных значений $\lambda(Z)$ матрицы Z сильно отличаются по величине, то для сходимости ряда (4.8) необходимо брать весьма малые h. В этом случае система (4.6) оказывается жесткой и лучшие результаты получаются при использовании метода вычисления матричной экспоненты, описанного в § 3.

Рассмотрим теперь метод диагонализации решения (4.6), не использующий рекуррентных вычислений. Воспользуемся тем, что матрица

$$Z=\begin{pmatrix} A & -BN_3^{-1}B' \\ -N_2 & -A' \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

системы (4.6) обладает следующим замечательным свойством. Если пара (A, B) управляема (или даже только стабилизируема), то всякому собственному значению $\lambda(Z)$ матрицы отвечает собственное значение $-\lambda(Z)$ этой же матрицы Z. При этом матрица Z не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью. В этом случае матрицу Z можно записать в следующем виде:

$$Z=W\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}W^{-1}. \tag{4.10}$$

Здесь Λ — диагональная матрица размера $n \times n$, диагональ которой образуют собственные значения $\lambda(Z)$ такие, что $\operatorname{Re}\lambda(Z)>0$; матрица $-\Lambda$ содержит такие собственные значения $\lambda(Z)$, что $\operatorname{Re}\lambda(Z)\leqslant 0$; матрица W размера $2n \times 2n$ состоит из собственных векторов матрицы Z. Найдя матрицы Λ и W_{ij}, например, с помощью QR-алгоритма, можно записать фундаментальную матрицу $G(s)$ в виде

$$\begin{aligned} G(s)&=e^{-\Lambda s}Se^{-\Lambda s}, \\ S&=-(W_{21}-P(T)W_{11})^{-1}(W_{22}-P_1(T)W_{12}). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Матрица $e^{-\Lambda s}$ является диагональной матрицей, у которой диагональ образуют функции $\exp(-\lambda_i(Z)s)$. При этом решение $P(t)$ уравнения Риккати (4.5) выражается формулой

$$P(t)=[W_{22}+W_{21}G(T-t)]\,[W_{12}+W_{11}G(T-t)]^{-1}. \qquad (4.12)$$

Здесь t может быть любым, и поэтому формула (4.12) в отличие от (4.7) не требует рекуррентных вычислений. Для управляемой пары (A, B) показано, что решение уравнения Риккати (4.5) стремится к установившемуся значению $\hat{P}$ при $t\to-\infty$, т. е. $\hat{P}=\lim\limits_{t\to-\infty} P(t)$. Вследствие этого при вычислениях по формулам (4.7) или (4.12) необходимо ввести правило остановки, выполнение которого гарантирует, что решение $P(t)$ стабилизировалось около значения $\hat{P}$.

Таким образом, для случая стационарной ЛК-задачи вычисление матрицы усиления $F(t)=-N_3^{-1}B'P(t)$ сводится к определению собственных значений и собственных векторов матрицы Z и далее к использованию формул (4.7) или (4.12). Такой метод реализован в процедуре CNTREG, включенной в систему ORACLS.

Пример 4.1 [22]. Рассмотрим стационарную ЛК-задачу

$$\dot{x}(t)=Ax+Bu,\ x\in R_4,\ u\in R_2,$$

$$J(u)=\frac{1}{2}x'(20)x(20)+\int_0^{20}[x'(s)x(s)+100u'(s)u(s)]\,ds$$

с матрицами вида

$$A=\begin{pmatrix} -2{,}60 & 0{,}25 & -38{,}0 & 0{,}0 \\ -0{,}075 & -0{,}27 & 4{,}40 & 0{,}0 \\ 0{,}078 & -0{,}99 & -0{,}23 & 0{,}052 \\ 1{,}0 & 0{,}078 & 0{,}0 & 0{,}0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 17 & 7{,}0 \\ 0{,}82 & -3{,}2 \\ 0{,}0 & 0{,}046 \\ 0{,}0 & 0{,}0 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения Риккати (4.5) было найдено по формуле (4.7) при $0\leqslant t\leqslant 20$. В табл. 4.1 приведены матрицы W_{ij} и S. В табл. 4.2 даны значения матрицы $P(t)$ при t, меняющемся от 20 до 0, с шагом 2. В табл. 4.3 приведены значения матрицы усиления $F(t)$ при тех же значениях t и том же шаге. Из табл. 4.2 и 4.3 видно, что при $t=6$ решение $P(t)$ стабилизировалось к значению $\hat{P}$, так же как и $F(t)$.

Таблица 4.1

	Численные значения матриц размера 4×4			
1	2	3	4	5
	−1.7233188E—01	5.0257395E—02	2.6582832E—02	−6.2618218E—02
W_{11}	−3.3791761E—02	−1.6344167E—02	9.5183892E—02	−6.9930617E—03
	7.7409397E—03	1.7516130E—06	−8.0834088E—03	3.3935252E—04
	−2.7082403E—01	1.4511446E—02	−1.4186503E—02	−2.2200507E—02
	9.5507170E—02	2.2377640E—02	−2.4483836E—02	1.0441627E—01
W_{12}	7.9262267E—01	3.3965417E—01	−7.8633601E—03	3.4982534E—01
	3.2205187E—01	1.7435213E—01	9.2129547E—01	9.2853245E—01
	3.9327414E—01	−1.4120636E—02	4.7159165E—03	−9.1676080E—03
	−2.4733021E—01	−1.6423055E—01	−8.5528327E—02	6.2134586E—01
W_{21}	4.3326566E—03	1.2843065E—02	3.5983643E—02	3.0404804E—02
	7.5286043E—03	1.7745854E—02	−4.9824656E—03	−2.6988189E—03
	3.8230750E—01	4.5465498E—02	−4.8131275E—02	−2.1922162E—01
	7.2558584E—02	−4.4315091E—02	−1.5780566E—02	8.4269310E—02
W_{22}	5.3390433E—01	−7.4606776E—03	3.2328081E—01	2.3749670E—01
	−4.3207089E—01	8.7411594E—01	−2.9506394E—01	−7.0239243E—01
	5.5697883E—01	−1.2681699E—02	−3.8062689E—02	−8.9888548E—02
	−6.9197483E—01	8.8040174E—02	−7.0617792E—03	−1.0579571E—01
S	5.3014743E—01	1.1451662E—01	−4.2235758E—01	−1.6582063E+00
	1.0292420E+00	−6.8625132E—01	8.0290849E—01	−1.3835163E—01
	−4.1882228E—01	−2.9967598E—01	−4.0340142E—01	1.2407188E+00

Таблица 4.2

Время, с	Матрица $P(t)$ размера 4×4			
1	2	3	4	5
20	5.0000000E−01	0.	0.	0.
	0.	5.0000000E−01	0.	0.
	0.	0.	5.0000000E−01	0.
	0.	0.	0.	5.0000000E−01
18	2.2480611E−01	3.6054050E−01	−1.4217206E+00	3.2023881E−01
	3.6054050E−01	1.0744607E+01	−8.8655022E+00	1.5409135E+00
	−1.4217206E+00	−8.8655022E+00	4.5683890E+01	−2.6235118E+00
	3.2023881E−01	1.5409135E+00	−2.6235118E+00	1.5641109E+00
16	2.3819322E−01	4.0985673E−01	−1.5275098E+00	3.6636522E−01
	4.0985673E−01	1.0991594E+01	−9.0079421E+00	1.7136851E+00
	−1.5275098E+00	−9.0079421+00	4.9256328E+01	−2.8811826E+00
	3.6636522E−01	1.7136851E+00	−2.9811826E+00	1.7228142E+00

Продолжение табл. 4.2

1	2	3	4	5
14	2.3924330E−01	4.1302539E−01	−1.5297598E+00	3.6980853E−01
	4.1302539E−01	1.1028965E+01	−9.0076508E+00	1.7278448E+00
	−1.5297598E+00	−9.0076508E+00	4.9271952E+01	−2.9877059E+00
	3.6980853E−01	1.7278448E+00	−2.9877059E+00	1.7346173E+00
12	2.3930520E−01	4.1337855E−01	−1.5297546E+00	3.7003289E−01
	4.1337855E−01	1.1032206E+01	−9.0096823E+00	1.7293204E+00
	−1.5297546E+00	−9.0096823E+00	4.9275911E+01	−2.9880218E+00
	3.7003289E−01	1.7293204E+00	−2.9880218E+00	1.7354617E+00
10	2.3930917E−01	4.1341056E−01	−1.5297727E+00	3.7004881E−01
	4.1341056E−01	1.1032469E+01	−9.0098261E+00	1.7294493E+00
	−1.5297727E+00	−9.0098261E+00	4.9276275E+01	−2.9880973E+00
	3.7004881E−01	1.7294493E+00	−2.9880973E+00	1.7355256E+00
8	2.3930948E−01	4.1341291E−01	−1.5297749E+00	3.7005005E−01
	4.1341291E−01	1.1032489E+01	−9.0098419E+00	1.7294590E+00
	−1.5297749E+00	−9.0098419E+00	4.9276293E+01	−2.9881061E+00
	3.7005005E−01	1.7294590E+00	−2.9881061E+00	1.7355306E+00
6	2.3930951E−01	4.1341309E−01	−1.5297751E+00	3.7005015E−01
	4.1341309E−01	1.1032491E+01	−9.0098433E+00	1.7294597E+00
	−1.5297751E+00	−9.0098433E+00	4.9276294E+01	−2.9881068E+00
	3.7005015E−01	1.7294597E+00	−2.9881068E+00	1.7355310E+00
4	2.3930951E−01	4.1341310E−01	−1.5297751E+00	3.7005015E−01
	4.1341310E−01	1.1032491E+01	−9.0098434E+00	1.7294597E+00
	−1.5297751E+00	−9.0098434E+00	4.9276294E+01	−2.9881068E+00
	3.7005015E−01	1.7294597E+00	−2.9881068E+00	1.7355310E+00

Таблица 4.3

Время, с	Матрица усиления размера 2×4			
1	2	3	4	5
20	−8.50000000E−02	−4.2000000E−02	0.	0.
	−3.5000000E−02	1.6000000E−02	2.3000000E−04	0.
18	4.1173471E−02	1.4939767E−01	−3.1438962E−01	6.7076089E−02
	3.5451406E−03	−3.2266773E−01	−2.0519022E−01	−2.8099331E−02
16	4.3853673E−02	1.5980672E−01	−3.3354180E−01	7.6334306E−02
	2.8554559E−03	−3.2718471E−01	2.0398637E−01	−3.0563703E−02
14	4.4058169E−02	1.6065183E−01	−3.3392190E−01	7.7035778E−02
	2.8265289E−03	−3.2815862E−01	2.0382674E−01	−3.0778783E−02
12	4.4071588E−02	1.6073844E−01	−3.3393768E−01	7.7086018E−02
	2.8195631E−03	−3.2823855E−01	2.0389393E−01	−3.0810439E−02
10	4.4072525E−02	1.6074604E−01	−3.3394193E−01	7.7089781E−02
	2.8188087E−03	−3.2824478E−01	2.0389743E−01	−3.0813714E−02
8	4.4072598E−02	1.6074661E−01	−3.3394244E−01	7.7090072E−02
	2.8187540E−03	−3.2824528E−01	2.0389779E−01	−3.0813714E−02

Продолжение табл. 4.3

1	2	3	4	5
6	4.4072604E−02 2.8187502E−03	1.6074665E−01 −3.2824531E−01	−3.3394248E−01 2.0389783E−01	7.7090094E−02 −3.0813729E−02
4	4.4072604E−02 2.8187499E−03	1.6074665E−01 −3.2824531E−01	−3.3394248E−01 2.0389783E−01	7.7090096E−02 −3.0813730E−02

Техническая реализация закона управления с переменной матрицей усиления $F(t)$ весьма затруднительна. Поэтому обычно на практике используют регуляторы с постоянными матрицами усиления F. Такие законы управления встречаются при рассмотрении ЛК-задачи на бесконечном интервале.

3. Задачи оптимальной стабилизации и методы решения алгебраического уравнения Риккати. В случае стационарной ЛК-задачи на бесконечном интервале времени или задачи оптимальной стабилизации вида

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu,\ x(0)=x_0,$$

$$J(u)=\int_0^\infty [x'(s)N_2x(s)+u'(s)N_3u(s)]\,ds \tag{4.13}$$

оптимальное управление определяется формулой

$$u(x)=-N_3^{-1}B'\hat{P}x=-Fx. \tag{4.14}$$

Пропорциональный регулятор (4.14) достаточно просто реализовать технически, поскольку матрица усиления F в этом регуляторе постоянна. Матрица $\hat{P}$ в формуле (4.14) удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$A'\hat{P}+\hat{P}A+N_2-\hat{P}BN_3^{-1}B'\hat{P}=0. \tag{4.15}$$

Таким образом, построение С-управления в задаче оптимальной стабилизации сводится к решению алгебраического уравнения Риккати (4.15).

Изложим кратко метод установления для решения уравнения (4.15). В предыдущем пункте было отмечено, что

$$\hat{P}=\lim_{t\to-\infty} P(t). \tag{4.16}$$

Здесь $P(t)$ есть решение дифференциального уравнения Риккати (4.5). Соотношение (4.16) лежит в основе метода установления, алгоритм которого описывается следующим образом. Задают неко-

торую постоянную матрицу $N_1>0$ и далее решают уравнение (4.5) в «обратном времени». Когда полученная при этом матрица $P(t)$ перестает изменяться, то это установившееся значение принимают за $\hat{P}$. Как показывает пример 4.1, процесс установления происходит достаточно быстро.

Другой вариант метода установления основан на формуле (4.12). Заметим, что для управляемой пары (A, B) матрица $-\Lambda$ имеет на диагонали числа $\lambda(Z)$ такие, что $\operatorname{Re}\lambda(Z)<0$. Поэтому матрица $G(T-t)\to 0$ при $t\to\infty$ и из (4.12) вытекает формула

$$\hat{P}=W_{22}W_{12}^{-1}. \tag{4.17}$$

Другие методы решения задачи стабилизации были изложены в § 4 гл. XIII, где приведен пример решения такой задачи.

Основные результаты и формулы главы XIV

Одношаговые методы:

$$x_{n+1}=x_n+h_n\Phi_f(t_n, x_n, h_n);$$

метод Эйлера $x_{n+1}=x_n+hf(t_n, x_n)$;

формулы типа Рунге—Кутта второй степени

$$x_{n+1}=x_n+h_nK_2,\ K_1=f(t_n, x_n),\ K_2=f\left(t_n+\frac{h_n}{2},\ x_n+\frac{h_n}{2}K_1\right);$$

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h_n}{2}(K_1+K_2),\ K_1=f(t_n, x_n),\ K_2=f(t_n+h_n, x_n+h_nK_1);$$

стандартная формула Рунге—Кутта четвертой степени

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h_n}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$$

$$K_1=f(t_n, x_n),\ K_2=f\left(t_n+\frac{h_n}{2},\ x_n+\frac{h_n}{2}K_1\right),$$

$$K_3=f\left(t_n+\frac{h_n}{2},\ x_n+\frac{h_n}{2}K_2\right),\ K_4=f(t_n+h_n, x_n+h_nK_3);$$

оценка погрешности общего одношагового метода

$$|x(t_n)-\tilde{x}_n|\leqslant C\left[Mh^P+\frac{\delta}{h}\right]e^{L(t_n-t_0)}$$

Общая k-шаговая формула:

$$\sum_{p=0}^{k}\alpha_px_{i+p}=h\sum_{p=0}^{k}\beta_pf(t_{i+p}, x_{i+p});$$

общая многошаговая формула имеет степень l, если

$$\sum_{p=0}^{k} \alpha_p = 0; \quad \sum_{p=0}^{k} p\alpha_p = \sum_{x=0}^{k} \beta_p;$$

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{p^s \alpha_p}{s!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{p^{s-1} \beta_p}{(s-1)!}, \quad s=2, \ldots, l;$$

явные формулы Адамса

$$x_{k+1} = x_k + h\left(f_k + \frac{1}{2}\Delta f_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{k-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{251}{720}\Delta^4 f_{k-4} + \frac{95}{288}\Delta^5 f_{k-5} + \frac{19087}{60\,480}\Delta^6 f_{k-6} + \ldots\right);$$

неявные формулы Адамса

$$x_{k+1} = x_k + h\left(f_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta f_k - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{k-2} - \right.$$

$$\left. - \frac{19}{720}\Delta^4 f_{k-3} - \frac{3}{160}\Delta^5 f_{k-4} - \frac{863}{60\,480}\Delta^6 f_{k-5} - \ldots\right);$$

формулы Милна

$$x_i^{\text{прочн}} = x_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}),$$

$$x_i^{\text{кор}} = x_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} + 4f_{i-1} + f_i^{\text{прочн}});$$

$$\varepsilon_i^{\text{кор}} = |x_i^{\text{кор}} - \bar{x}(t_i)| \cong \frac{1}{29}|x_i^{\text{кор}} - x_i^{\text{прочн}}|;$$

оценка точности устойчивой по Далькквисту многошаговой формулы

$$|\bar{x}(t_i) - \tilde{x}_i| \leqslant e^{C_1 T}\left\{C_2 h^l + C_3\frac{\delta}{h} + C_4 \max_{0 \leqslant i \leqslant k-1} |\Theta_i|\right\};$$

оценка точности сильно устойчивой по Далькквисту многошаговой формулы при решении устойчивой при постоянно действующих возмущениях системы: для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся $h > 0$ и $\delta > 0$ такие, что $|x_n| < \varepsilon$, $n = 0, 1, \ldots, k, \ldots$, если $|\tilde{x}_i| < h\delta$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Для **жестких систем** предпочтительно использование неявных методов типа Рунге—Кутта или метода Гира.

ГЛАВА XV

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Приведены методы сведения задач оптимального управления к задаче нелинейного программирования, к краевой задаче. Описаны методы решения краевых задач — метод Ньютона, сведение к задаче Коши, метод переноса краевых условий, метод Абрамова. Для общих задач оптимального управления изложены методы Шатровского и Федоренко.

§1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим для определенности следующую задачу оптимального управления. Пусть объект описывается нелинейной системой

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)=f(t, x, u),\ x\in R_n,\ u\in U\subset R_m,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ &x(0)=x_0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Требуется найти П-управление $u=u(t)$ или же С-управление $u=u(t, x)$, которое минимизировало бы функционал

$$J(u)=\varphi(x(T))+\int_0^T F_0(t, x(t), u(t, x(t)))\,dt, \tag{1.2}$$

где φ и F_0 — некоторые заданные ограниченные снизу функции. На фазовые переменные x также могут быть наложены ограничения, например вида

$$G(x(t), u(t))\leqslant 0,\ t\in[0, T]. \tag{1.3}$$

Здесь G: $R_n\times R_m\to R_1$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Ограничения могут иметь и более общий вид. Задача (1.1)—(1.3) охватывает многие важные для приложений случаи.

В этой главе кратко изложим некоторые способы численного отыскания оптимального управления в нелинейной задаче (1.1)—(1.3).

В настоящее время не разработано единого универсального метода решения этой задачи, что в основном объясняется трудностью решения задач оптимального управления.

Численное решение задач оптимального управления осложняется целым рядом разнообразных причин. Перечислим только основные из них, к которым можно отнести следующие:

большая размерность решаемых задач;
наличие недифференцируемых функционалов качества типа

$$\max_t F(x(t)), \quad \max_t F(x(t), u(t)), \quad \int_0^T |F_0(x(t), u(t))|\,dt;$$

наличие сложных ограничений на управление;
наличие фазовых ограничений;
возможность появления многих экстремумов.

В связи с большим разнообразием постановок задач оптимального управления и указанными трудностями в их решении имеется много различных методов численного решения. Достаточно условно эти методы можно разделить на следующие группы.

1°. *Сведение задачи оптимального управления к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений с последующим решением полученной краевой задачи каким-либо численным методом.* Специфика оптимального управления в основном проявляется в способах сведения к краевой задаче, которые основываются либо на классическом вариационном исчислении, либо на принципе максимума. Хотя для решения краевой задачи можно применять любой из известных методов, важность решения различных задач оптимального управления привела к созданию новых методов решения краевых задач, таких, как, например, метод Абрамова.

2°. *Методы последовательного улучшения управлений или методы вариации в пространстве управлений.* К наиболее известным из этих методов относится метод Шатровского, изложенный ниже.

3°. *Методы, идейно близкие к принципу динамического программирования Беллмана, или методы вариации в пространстве фазовых переменных.* Один такой метод рассмотрен в § 3 гл. VII.

Более подробно в настоящем пособии эти методы излагаться не будут. Описание их можно найти в [12].

4°. *Сведение к задаче оптимизации функции конечного числа переменных при наличии ограничений на переменные.*

В основе большинства методов численного решения лежат два основных приема: конечномерная аппроксимация задач оптимального управления; линеаризация исходной непрерывной или аппроксимирующей конечномерной задачи. Однако в зависимости от специфики выполнения аппроксимации и линеаризации получаются разные методы.

§ 2. СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим кратко способы сведения задачи оптимального управления (1.1)—(1.3) к задаче нелинейного программирования. Для этого разобьем отрезок $[0, T]$ на N частей точками

$$t_j = jh, \quad h = T/N \quad (j = 0, \ldots, N). \tag{2.1}$$

Далее будем считать, что на каждом отрезке $[t_j, t_{j+1})$ управление $u(t)$ постоянно:

$$u(t)=u_j,\ t\in[t_j, t_{j+1}),\ u_j\in U.$$

Для управления u_0 из уравнения (1.1) найдем $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant t_1$ и проверим выполнение ограничений (1.3). Если ограничения (1.3) выполнены, то вычислим значения интеграла $\int_0^{t_1} F_0(s, x(s), u(s, x(s)))\,ds$. Если же ограничения (1.3) не выполняются, то вместо управления u_0 возьмем другое допустимое управление и повторим ту же процедуру. Затем перейдем к отрезку $[t_1, t_2]$ и т. д. Таким образом, для некоторого набора управлений $(u_0, u_1, ..., u_{N-1})$ можно вычислить значение функционала качества $J(u)=J(u_0, u_1, ..., u_{N-1})$. Далее для отыскания оптимального управления нужно решить задачу нелинейного программирования, имеющую вид

$$J(u_0, u_1, ..., u_{N-1})\to\inf,\ u_i\in U,\ G[x(t), u(t)]\leqslant 0,\ t\in[0, T]. \quad (2.2)$$

Решив задачу (2.2), получим приближенное оптимальное управление.

Для нахождения более точного приближения к оптимальному управлению нужно увеличить число N. При $N\to\infty$ можно ожидать сходимости полученных таким образом приближенных управлений к оптимальному управлению. Доказательство этого факта не просто, в особенности если учесть, что оптимальное управление $u_0(t)$ может быть разрывной функцией, причем точки разрыва $u_0(t)$ могут не совпадать с точками деления t_j отрезка $[0, T]$, имеющим вид (2.1). Некоторые сведения об этом можно найти, например, в [12; 23 ко второй части].

Практическая реализация указанного метода весьма сложна, что связано с большой размерностью задачи (2.2). В самом деле, число переменных в задаче (2.2) равно mN и при больших N оказывается весьма большим. Отыскание минимума функции большого числа переменных является численно очень сложной задачей, для которой разработано большое число методов [3; 9; 12].

Хотя метод сведения к задаче нелинейного программирования иногда употребляется на практике, нет оснований признать его удобным универсальным способом решения всех задач оптимального управления. В связи с этим разработано значительное число других методов, часть из которых будет изложена ниже.

§ 3. СВЕДЕНИЕ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим этот метод на примере решения задачи Майера. В ней требуется найти П-управление $u(t)\in U$, для которого функционал

$$J(u)=\varphi(x(T))\to\inf_{u\in U} \tag{3.1}$$

принимает наименьшее значение на траекториях системы (1.1).

1. Краевая задача принципа максимума. В гл. V показано, что оптимальное управление и оптимальная траектория являются решением следующей задачи:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{\text{опт}}(t)=f(t, x_{\text{опт}}, u_{\text{опт}}),\ x_{\text{опт}}(0)=x_0,\\
&\dot{\psi}(t)=-H_x(t, x_{\text{опт}}(t), u_{\text{опт}}(t), \psi(t)),\ \psi(T)=-\varphi_x(x(T)),\\
&H(t, x_{\text{опт}}(t), u_{\text{опт}}(t), \psi(t))=\max_{u\in U} H(t, x_{\text{опт}}(t), u, \psi(t)),\\
&H(t, x, u, \psi)=\psi'(t)f(t, x, u).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из условия максимума в принципе можно определить оптимальное управление:

$$u_{\text{опт}}=u_{\text{опт}}(t, x, \psi). \tag{3.3}$$

Подставляя выражение (3.3) в первые два уравнения системы (3.2), получим нелинейную краевую задачу, замкнутую относительно переменных $x(t)$ и $\psi(t)$:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{\text{опт}}(t)=f(t, x_{\text{опт}}, u_{\text{опт}}(t, x_{\text{опт}}, \psi))=f_1(t, x_{\text{опт}}, \psi),\\
&\dot{\psi}(t)=-H_x(t, x_{\text{опт}}, u_{\text{опт}}(t, x_{\text{опт}}, \psi))=f_2(t, x_{\text{опт}}, \psi),\\
&x_{\text{опт}}(0)=x_0,\ \psi(T)=-\varphi_x(x_{\text{опт}}(T)).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Краевое условие при $t=T$ можно переписать в виде

$$\varphi(T)+\varphi_x(x_{\text{опт}}(T))=\Phi(\psi(T), x_{\text{опт}}(T))=0. \tag{3.5}$$

Решив эту краевую задачу, определим оптимальное управление с помощью формулы (3.3). Таким образом, нахождение оптимального управления сведено к решению нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Метод Ньютона решения краевой задачи. Наиболее распространенным методом решения нелинейных краевых задач является *метод Ньютона.* Схема этого метода заключается в следующем. Зададим произвольным образом начальное условие $\psi(0)=z$ и решим задачу Коши для уравнений (3.4) с начальным условием

$$x_0(0)=x_0,\ \psi(0)=z. \tag{3.6}$$

В результате получим значения $\psi(T, z)$ и $x(T, z)$. Подставив эти значения в уравнение (3.5), запишем его в виде

$$\Phi(\psi(T, z), x(T, z))=\Phi_1(z)=0. \tag{3.7}$$

Таким образом, решение краевой задачи (3.4) сводится к нахождению такого начального условия z, которое является решением уравнения (3.7).

Для решения уравнения (3.7) можно применить процедуру Ньютона, для чего зададим некоторое начальное значение z_0 и определим последующие приближения z_k по формулам

$$z_k = z_{k-1} - [\Phi_{1z}(z_{k-1})]^{-1} \Phi_1(z_{k-1}). \tag{3.8}$$

Здесь Φ_{1z} — матрица производных функции $\Phi_1(z)$ по вектору z.

При численной реализации метода Ньютона возникают значительные трудности. Укажем некоторые из них.

1^0. Метод Ньютона применим только тогда, когда функция $\Phi_1(z)$ является дифференцируемой. Это можно гарантировать лишь в случае дифференцируемости правых частей краевой задачи (3.4).

2^0. Выбор начального приближения z_0 связан в основном с тем, что сходимость приближений (3.8) можно гарантировать только при достаточной близости z_0 к корню уравнения (3.7). Расширить область сходимости можно, если метод Ньютона (3.8) заменить модифицированным методом вида

$$z_k = z_{k-1} - \alpha_k [\Phi_{1z}(z_{k-1})]^{-1} \Phi_1(z_{k-1}), \tag{3.9}$$

где параметр α_k выбирается специальным образом.

3^0. Возможная неединственность решения краевой задачи (3.4).

4^0. Вычисление матрицы производных Φ_{1z} в основном выполняется с помощью численного дифференцирования функции $\Phi_1(z)$. Вычисление каждого значения $\Phi_1(z)$ требует решения задачи Коши (3.4), (3.6). При этом для нахождения $(n \times n)$-матрицы $\Phi_{1z}(z)$ потребуется решить не менее чем n^2 задач Коши. При использовании современных ЭВМ это вполне осуществимо, хотя и требует определенных затрат машинного времени.

Итак, хотя метод Ньютона и является весьма удобным, но сопровождается большими трудностями в реализации.

3. Пример сведения задачи оптимального управления к краевой задаче. Пусть требуется найти управление движением математического маятника с гидродинамическим трением в оси подвеса. Управляющий вращающий момент должен быть выбран так, чтобы угловое движение маятника $x(t)$ возможно более точно отслеживало заданную гладкую функцию $w(t)$, совпадая с ней в заданный конечный момент времени $t = T$.

Математически эта задача сводится к следующей:

уравнения движения маятника

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2 x = u, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{3.10}$$

краевые условия

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0,$$
$$x(T) = w(T), \quad \dot{x}(T) = \dot{w}(T); \tag{3.11}$$

функционал качества

$$J(u)=\int_0^T [x(t)-w(t)]^2\,dt\to\min_u; \tag{3.12}$$

ограничение на управление $|u(t)|\leqslant 1$.

Сведем эту задачу к задаче Майера для системы первого порядка. Обозначим

$$x_1(t)=x(t),\ x_2(t)=\dot{x}(t),\ x_3(t)=\int_0^t [x(s)-w(s)]^2\,ds=$$

$$=\int_0^t [x_1(s)-w(s)]^2\,ds.$$

Тогда задача (3.10)—(3.12) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1=x_2,\\
&\dot{x}_2=-\beta x_2-\omega^2 x_1+u,\\
&\dot{x}_3=(x_1(t)-w(t))^2,\\
&x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=0,\ x_1(T)=w(T),\ x_2(T)=\dot{w}(T),\\
&x_3(T)\to\min_u.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Функция Гамильтона для задачи (3.13) имеет вид

$$H=\psi_1 x_2+\psi_2(-\beta x_2-\omega^2 x_1+u)+\psi_3(x_1-w)^2. \tag{3.14}$$

Для вспомогательных переменных ψ_1, ψ_2, ψ_3 получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi}_1=\omega^2\psi_2-2(x_1-w)\psi_3,\\
&\dot{\psi}_2=-\psi_1+\beta\psi_2,\\
&\dot{\psi}_3=0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Найдем теперь вид оптимального управления $u_{\text{опт}}(t, x, \psi)$ из условия максимума $H(u_{\text{опт}})=\max\limits_{|u|\leqslant 1} H(x_{\text{опт}}, u, \psi)$. Из вида гамильтониана (3.14) находим, что

$$u_{\text{опт}}(t, x, \psi)=\operatorname{sign}\psi_2(t). \tag{3.16}$$

Задача (3.13) имеет пять краевых условий. Для полной постановки краевой задачи необходимо еще одно краевое условие. Оно может быть получено из условий трансверсальности и имеет вид $\psi_3(T)=-1$.

Теперь можно записать искомую краевую задачу в замкнутом виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\
&\dot{x}_2(t)=-\beta x_2(t)-\omega^2 x_1(t)+\operatorname{sign}\psi_2(t),\\
&\dot{x}_3(t)=(x_1(t)-w(t))^2,\\
&\dot{\psi}_1(t)=-2(x_1(t)-w(t))\psi_3(t)+\omega^2\psi_2(t),\\
&\dot{\psi}_2(t)=-\psi_1(t)+\beta\psi_2(t),\\
&\dot{\psi}_3(t)=0,\\
&x_1(0)=0,\ x_2(0)=0,\ x_3(0)=0,\\
&x_1(T)=w(T),\ x_2(T)=\dot{w}(T),\ \psi_3(t)=-1.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Таким образом, задача оптимального управления линейной системой второго порядка с квадратичным критерием при ограничениях на управление свелась к нелинейной краевой задаче 6-го порядка. Однако одну переменную из задачи (3.17) нетрудно исключить, поскольку $\psi_3(t)\equiv -1$. Тогда получится краевая задача 5-го порядка с тремя краевыми условиями на одном конце и двумя — на другом. При этом правая часть является недифференцируемой.

Подобная ситуация возникает и в большом количестве других оптимальных задач. Для решения таких задач нельзя применить метод Ньютона, а других удобных общих методов пока не разработано. В связи с этим метод сведения к краевой задаче нельзя считать универсальным методом решения задач оптимального управления.

Однако имеется один важный частный случай, когда метод сведения к краевой задаче является достаточно удобным и хорошо разработанным. Рассмотрению этого случая посвящен следующий параграф.

§ 4. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

1. Сведение задачи оптимального управления к линейной краевой задаче. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Пусть требуется перевести линейную систему

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ x\in R_n,\ u\in R_m,\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{4.1}$$

из заданного начального состояния

$$x(0)=x_0 \tag{4.2}$$

в заданное конечное состояние

$$x(T)=x_1 \tag{4.3}$$

так, чтобы минимизировать квадратичный функционал

$$J(u)=\int_0^T [x'(t)N_2(t)x(t)+u'(t)N_3(t)u(t)]\,dt\to\min_u. \qquad (4.4)$$

При этом на управление u не накладывается никаких ограничений. Отметим, что задача (4.1)—(4.4) отличается от обычной линейно-квадратичной задачи оптимального управления наличием граничного условия (4.3) и для нее в явном виде записать оптимальное управление, вообще говоря, затруднительно.

Используя принцип максимума, задачу оптимального управления (4.1)—(4.4) можно свести к следующей краевой задаче:

$$\dot{x}=Ax+\frac{1}{2}BN_3^{-1}(t)B'\psi,\ \dot{\psi}=-A'\psi+2N_2(t)x,\ x(0)=x_0,\ x(T)=x_1. \qquad (4.5)$$

Таким образом, решение линейных краевых задач представляет большой интерес и для отыскания оптимального управления.

Важность разработки специальных методов решения линейных краевых задач определяется не только возможностью решения с их помощью задачи (4.1)—(4.4). Кроме того, на основе решения линейных краевых задач можно разработать некоторые итерационные методы решения более общих задач оптимального управления.

2. Сведение линейной краевой задачи к задаче Коши. Изложим теперь некоторые общие методы решения линейных краевых задач. Основная идея всех методов решения этих задач состоит в сведении их к решению некоторого набора задач Коши. Однако эту идею нельзя осуществить непосредственно.

Рассмотрим, например, следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}&\ddot{x}-p(t)x=f(t),\\ &l_1[x]=\dot{x}(a)-\alpha_0 x(a)=\alpha_1,\ l_2[x]=\dot{x}(b)-\beta_0 x(b)=\beta_1.\end{aligned} \qquad (4.6)$$

Известно, что задача (4.6) с непрерывной правой частью имеет единственное решение при условии

$$p(t)\geqslant p_0>0. \qquad (4.7)$$

Применим метод сведения задачи (4.6) к двум задачам Коши. Будем искать решение этой задачи в виде

$$x(t)=Cu(t)+v(t),\ C=\text{const}. \qquad (4.8)$$

Потребуем, чтобы функции $u(t)$ и $v(t)$ являлись решением следующих задач Коши:

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)-p(t)u(t)=0,\\ u(a)=1,\ \dot{u}(a)=\alpha_0,\end{cases} \qquad (4.9)$$

$$\begin{aligned}&\ddot{\mathrm{v}}(t)-p(t)\,\mathrm{v}(t)=f(t),\\&\mathrm{v}(a)=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0},\ \dot{\mathrm{v}}(a)=0 \text{ при } \alpha_0\neq 0,\\&\mathrm{v}(a)=0,\ \dot{\mathrm{v}}(a)=\alpha_1 \text{ при } \alpha_0=0.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Легко проверить, что при таком определении функций $u(t)$ и $\mathrm{v}(t)$ для любой константы C функция $x(t)$ вида (4.8) удовлетворяет соотношениям

$$\ddot{x}-p(t)x=f(t),\ l_1[x]=\alpha_1.$$

Второе краевое условие, вообще говоря, не будет выполнено. Добьемся выполнения второго краевого условия благодаря выбору константы C. Так как должно иметь место равенство

$$l_2[x]=C\dot{u}(b)+\dot{\mathrm{v}}(b)-\beta_0[Cu(b)+\mathrm{v}(b)]=\beta_1,$$

то находим, что

$$C=\frac{\beta_1-\dot{\mathrm{v}}(b)+\beta_0\mathrm{v}(b)}{\dot{u}(b)-\beta_0 u(b)}.\tag{4.11}$$

Если $\dot{u}(b)-\beta_0 u(b)\neq 0$, то формула (4.11) однозначно определяет константу C, для которой функция $x(t)$ вида (4.8) является решением краевой задачи (4.6). При таком методе решение краевой задачи сводится к решению двух задач Коши, т. е. к достаточно простой процедуре.

Однако этот метод нельзя реализовать на практике, поскольку он *не является численно устойчивым*. В самом деле, решение $u(t)$ можно оценить следующим образом (см. [14] из первой части): $u(t)\geqslant u_1(t)$, где

$$\ddot{u}_1=p_0u_1,\ \dot{u}_1(a)=1,\ u_1(a)=\alpha_0>0.\tag{4.12}$$

Из (4.12) получаем, что

$$u(t)\geqslant u_1(t)=C_1\exp(\sqrt{p_0}t)+C_2\exp(-\sqrt{p_0}t),$$

где константы C_1 и C_2 определяются из краевых условий. Таким образом, решение $u(t)$ является быстро растущим (или неустойчивым). В этом случае, как показано в [9], вычислительные погрешности также растут по экспоненте.

В [2] приведен следующий числовой пример. Краевая задача

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}([1+t]\dot{x})-\gamma x(t)=\pi\cos\pi t-[\gamma+\pi^2(1+t)]\sin\pi t,\\&x(0)=x(1)=0\end{aligned}\tag{4.13}$$

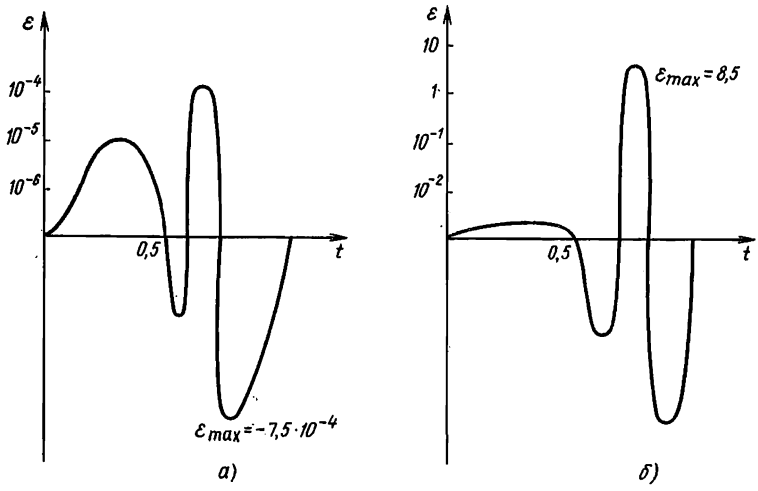


Рис. 4.1. Общая погрешность решения задачи (4.13): а) при $\gamma=100$; б) при $\gamma=500$

при любом $\gamma>0$ имеет решение $x(t)=\sin \pi t$. Однако численное решение согласно изложенному выше методу при использовании формулы Рунге—Кутта 4-го порядка с шагом $h=0{,}025$ приводит к следующим результатам, приведенным на рис. 4.1 и 4.2.

На рис. 4.1 показана зависимость общей погрешности ε численного решения задачи (4.13) при $\gamma=100$, а на рис. 4.2 — при $\gamma=500$. Из этих рисунков видно, что результат при $\gamma=100$ можно считать вполне удовлетворительным. При $\gamma=500$ результат катастрофический, погрешность решения достигает 1000% и более.

Для борьбы с численной неустойчивостью при сведении к задачам Коши разработаны специальные методы: метод прогонки для решения задач 2-го порядка и ряда других; метод переноса краевых условий для общих линейных краевых задач.

3. Метод переноса краевых условий. Этот метод рассмотрим на примере линейной краевой задачи вида

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+f(t), \quad x\in R_n, \ f\in R_n, \\ (l_s, \ x(t_s))=\alpha_s, \quad l_s\in R_n, \ s=1, \ \ldots, \ n.\end{cases} \tag{4.14}$$

В задаче (4.14) точки t_s заданы и могут совпадать или быть различными, векторы l_s также заданы. Отметим, что в виде соотношения

$$(l_s, \ x(t_s))=\alpha_s \tag{4.15}$$

может быть записано любое линейное краевое условие для уравнения (4.14). Для этого надо только лишь соответствующим образом подобрать вектор l_s.

Идея метода переноса состоит в том, чтобы свести все краевые условия в одну точку t_1, затем найти из них $x(t_1)$ и далее решить задачу Коши.

Перенос краевых условий осуществляется по следующей схеме. Пусть мы хотим перенести условие (4.15) из точки t_s в точку t_1. Для этого подберем две функции $l(t)$ и $\alpha(t)$, которые для любого решения $x(t)$ уравнения

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+f(t) \tag{4.16}$$

удовлетворяли бы условиям

$$(l(t), x(t))=\alpha(t),\ l(t_s)=l_s,\ \alpha(t_s)=\alpha_s. \tag{4.17}$$

Соотношение (4.17) можно рассматривать как аналитическое продолжение равенства (4.15) с точки t_s на отрезок $[t_s, t_1]$.

Дифференцируя соотношение (4.17) и учитывая уравнение (4.14), получим

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l(t), x(t))=(\dot{l}(t), x)+(l(t), \dot{x})=(\dot{l}(t), x)+(l(t), Ax)+\\ +(l(t), f(t))=(\dot{l}(t), x)+(A'l(t), x)+(l(t), f)=\dot{\alpha}(t).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Равенство (4.18) будет выполнено тождественно по $x(t)$, если потребовать, чтобы

$$\dot{l}(t)=-A'(t)l,\ l(t_s)=l_s \tag{4.19}$$

и, кроме того, должно быть

$$\dot{\alpha}(t)=(l(t), f(t)),\ \alpha(t_s)=\alpha_s. \tag{4.20}$$

Решив задачу Коши (4.19), найдем функцию $l(t)$ на отрезке $[t_s, t_1]$. Затем определим $\alpha(t_1)$ с помощью квадратуры в виде

$$\alpha(t_1)=\alpha_s+\int_{t_s}^{t_1}(l(s), f(s))\,\mathrm{d}s. \tag{4.21}$$

Используя найденные значения $l(t_1)$ и $\alpha(t_1)$, получим соотношение

$$(l(t_1), x(t_1))=\alpha(t_1). \tag{4.22}$$

Равенство (4.22) означает, что краевое условие (4.14) перенесено из точки t_s в точку t_1.

Отметим, что функции $l_s(t)$ и $\alpha_s(t)$ определяются, конечно, не однозначно. Описанный способ является лишь одним из возможных.

Аналогично переносятся в точку t_1 и все остальные краевые условия. Таким образом, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $x(t_1)$, имеющую вид

$$\begin{aligned}&(l_1, x(t_1))=\alpha_1,\\&(l_2(t_1), x(t_1))=\alpha_2(t_1),\\&\qquad\qquad\qquad

Поскольку

$$\dot{g}_s(t)=\dot{m}_s(t)\,l_s(t)+m_s(t)\,\dot{l}_s(t)=-m_s(t)\,A'(t)\,l_s(t)+$$
$$+\dot{m}_s(t)\,\frac{g_s(t)}{m_s(t)}=-A'(t)\,g_s(t)+\frac{\dot{m}_s}{m_s}\,g_s(t),$$

отношение $\dot{m}_s/m_s$ определим исходя из равенства (4.25). Дифференцируя, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_s,\,g_s)=2(g_s,\,\dot{g}_s)=2\left(g_s,\,-A'(t)\,g_s+\frac{\dot{m}_s}{m_s}\,g_s\right)=0,$$

откуда

$$\frac{\dot{m}_s}{m_s}=\frac{(g_s,\,A'g_s)}{(g_s,\,g_s)}.$$

Таким образом, окончательно для определения $g_s(t)$ получаем задачу

$$\begin{aligned}&\dot{g}_s(t)=-A'(t)\,g_s+\frac{(g_s,\,A'g_s)}{(g_s,\,g_s)}\,g_s,\\&g_s(t_s)=l_s.\end{aligned}\qquad(4.27)$$

Дифференцируя равенство $\alpha_s(t)=(g_s(t),\,x(t))$, получим

$$\dot{\alpha}_s=(\dot{g}_s,\,x)+(g_s,\,\dot{x}_s)=\left(-A'g_s+\frac{(g_s,\,Ag_s)}{(g_s,\,g_s)}\,g_s,\,x\right)+$$
$$+(g_s,\,Ax+f)=\frac{(g_s,\,Ag_s)}{(g_s,\,g_s)}\,(g_s,\,x)+(g_s,\,f).$$

Значит, функция $\alpha_s(t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}&\dot{\alpha}_s=\frac{(g_s,\,Ag_s)}{(g_s,\,g_s)}\,\alpha_s+(g_s,\,f),\\&\alpha_s(t_s)=\alpha_s^l.\end{aligned}\qquad(4.28)$$

Итак, для решения краевой задачи (4.14) по методу Абрамова надо решить от 2 до $n-1$ нелинейных задач Коши для определения вектор-функций $g_s(t)$ и столько же линейных скалярных уравнений (4.20) для определения функций $\alpha_s(t)$.

Все эти задачи являются численно устойчивыми, поскольку нормы функций $g_s(t)$ не растут. Если же, кроме того, краевые условия перенесены так, что и полученная при этом задача (4.24) также устойчива, то весь процесс решения краевой задачи окажется численно устойчивым.

Следовательно, при правильном применении метода Абрамова решение линейной краевой задачи численно устойчиво. Поэтому можно считать, что для линейных краевых задач существует эффективный численный метод решения. Для других типов краевых задач, в частности для нелинейных задач или задач с нелинейными краевыми условиями, подобных эффективных методов в настоящее время не создано.

На основании изложенного метода можно создать некоторые итерационные методы решения более общих задач оптимального управления [12; 21].

§ 5. МЕТОД ШАТРОВСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЙ

Изложим этот метод для задачи Майера:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=f(t, x, u),\ x\in R_n,\ u\in U\subset R_m,\ t_0\leqslant t\leqslant T,\\ x(0)=x_0,\\ J(u)=\varphi(x(T))\to\min.\end{gathered}\tag{5.1}$$

Здесь T фиксировано, U — некоторое выпуклое множество, φ — ограниченная снизу непрерывная функция.

К задаче вида (5.1) сводится, например, задача о выводе спутника в заданную фазовую точку z в заданный момент T. В качестве функционала J можно в этом случае взять сумму квадратов отклонений:

$$J(u)=\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i(T))^2.$$

Для решения задачи (5.1) Л. И. Шатровский* предложил метод постепенного улучшения управлений, который можно описать следующим способом.

Сначала выберем некоторое допустимое управление $\bar{u}(t)$ и определим соответствующую ему траекторию $\bar{x}(t)$. При этом можно найти значение функционала

$$J(\bar{u})=\varphi(\bar{x}(T)).\tag{5.2}$$

Выбор начального приближения выполним на основании опыта или дополнительной информации. От успеха выбора начального приближения существенно зависит скорость сходимости алгоритма.

Далее поставим задачу определения таких добавок $v(t)\in R_m$ к управлению $u(t)$, которые уменьшили бы функционал (5.2). Ис-

*Шатровский Л. И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ, 1962, №2.

комые улучшенные значения управления и траектории обозначим так:

$$u_1(t)=\bar{u}(t)+\mathrm{v}(t),\ x_1(t)=\bar{x}(t)+y(t). \tag{5.3}$$

Подставим выражения (5.3) в уравнения движения (5.1) и линеаризуем эти уравнения в окрестности точки $(\bar{x}, \bar{u})$:

$$\dot{x}(t)=f(t, \bar{x}+y, \bar{u}+\mathrm{v})=f(t, \bar{x}, \bar{u})+\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{(\bar{x}, \bar{u})} y+\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|_{(\bar{x}, \bar{u})} \mathrm{v}. \tag{5.4}$$

Здесь символы $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{(\bar{x}, \bar{u})}$ и $\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|_{(\bar{x}, \bar{u})}$ обозначают матрицы частных производных f по x_i $(i=1, \ldots, n)$ и f по u_l $(l=1, \ldots, m)$, вычисленные в точке $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$. Обозначим

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{(\bar{x}, \bar{u})}=A(t),\ \left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|_{(\bar{x}, \bar{u})}=B(t). \tag{5.5}$$

Заметим, что при известных $\bar{u}(t)$ и $\bar{x}(t)$ матрицы A и B можно определить как некоторые известные функции времени и при этом $A(t)$ и $B(t)$ не будут зависеть от $\mathrm{v}(t)$ и $y(t)$. Так как $\dot{x}_1(t)=\dot{\bar{x}}(t)+\dot{y}(t)$ и $\dot{\bar{x}}(t)=f(t, \bar{x}, \bar{u})$, то из (5.4), используя обозначения (5.5), получаем

$$\dot{y}(t)=A(t)y(t)+B(t)\mathrm{v}(t). \tag{5.6}$$

Вычислим значение функционала $J(u)$:

$$J(u)=J(\bar{x}+\dot{y})=J(\bar{x})+(\operatorname{grad}\varphi(\bar{x}), y)+\ldots .$$

Главная линейная часть δJ приращения функционала J имеет вид

$$\delta J=(\operatorname{grad}\varphi(\bar{x}), y)=(C, y). \tag{5.7}$$

Величина $\operatorname{grad}\varphi(\bar{x})=C$ известна и может быть найдена, поскольку известны значения $\bar{x}$ и $\bar{u}$.

Таким образом, задача улучшения управления $\bar{u}(t)$ в линейном приближении сводится к следующей задаче: найти управление $\mathrm{v}(t)$, которое минимизировало бы линейный функционал

$$\delta J=(C, y) \tag{5.8}$$

на решениях линейной системы

$$\dot{y}(t)=A(t)y(t)+B(t)\mathrm{v}(t),\ y(0)=0. \tag{5.9}$$

Для решения задачи (5.8)—(5.9) удобно воспользоваться *методом сопряженных уравнений*. Введем вектор $p(t)$, который является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{p}(t)=-A'(t)p(t),\ p(T)=-C=-\operatorname{grad}\varphi(\bar{x}). \tag{5.10}$$

Имеет место формула

$$\delta J = -(C, y(T)) = -(p(T), y(T)). \tag{5.11}$$

Выражение (5.11) можно вычислить иначе. Для этого найдем производную скалярного произведения $(p(t), y(t))$:

$$\frac{d}{dt}(p(t), y(t)) = (\dot{p}, y) + (p, \dot{y}) = (-A'p, y) + (p, Ay + B\mathrm{v}) =$$
$$= (p, -Ay + Ay + B\mathrm{v}) = (p, B\mathrm{v}). \tag{5.12}$$

Так как в начальный момент $t=0$, $(p(0), y(0))=0$, то, интегрируя (5.12), получим

$$\delta J = -(p(T), y(T)) = -\int_0^T \frac{d}{dt}(p(t), y(t))\,dt = -\int_0^T (p(t), B\mathrm{v}(t))\,dt. \tag{5.13}$$

Если теперь при каждом t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ выбрать $\mathrm{v}(t)$ так, чтобы $(p(t), B\mathrm{v}(t)) > 0$, то $\delta J < 0$ и такая поправка к управлению дает в линейном приближении уменьшение функционала $J(u)$. В качестве $\mathrm{v}(t)$ можно взять вектор $\mathrm{v}(t) = kB'(t)p(t)$, где $k > 0$ — некоторый скаляр. При этом, используя свойства скалярного произведения, получим

$$(p(t), B(t)\mathrm{v}(t)) = k(p(t), B(t)B'(t)p(t)) =$$
$$= k(B'(t)p(t), B'(t)p(t) > 0.$$

Подберем теперь число k так, чтобы

$$u_1(t) = \bar{u}(t) + \mathrm{v}(t) = \bar{u}(t) + kB'(t)p(t) \in U. \tag{5.14}$$

Если $\bar{u}(t)$ не лежит на границе области U, то в силу выпуклости области U при всех достаточно малых k можно получить, что $u_1(t) \in U$. Если же $\bar{u}(t)$ лежит на границе области U, то также можно выбрать малые $k > 0$ такими, чтобы $u_1(t) \in U$. В том случае, когда таких $k > 0$ не находится, можно доказать, что $\bar{u}(t)$ является оптимальным управлением.

Итак, алгоритм этого метода состоит из следующих шагов.

1^0. Выбирают некоторое начальное допустимое управление $\bar{u}(t) \in U$ и вычисляют соответствующую ему траекторию $\bar{x}(t)$. Если решение $\bar{x}(t)$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях, то его нахождение, например методом Рунге—Кутта, может быть осуществлено с высокой точностью.

2^0. Вычисляют матрицы $A(t) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{(\bar{x}, \bar{u})}$, $B(t) = \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\|_{(\bar{x}, \bar{u})}$ и вектор $C = (\operatorname{grad} \varphi)\,|_{(\bar{x}, \bar{u})}$.

3^0. Решают в обратном времени от T к 0 задачу Коши:

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p, \quad p(T) = -C.$$

Так как эта задача решается в обратном времени, то для устойчивых матриц $A(t)$ отыскание $p(t)$ осуществляется с высокой точностью.

4^0. Подбирают k так, чтобы

$$u_1(t)=\bar{u}(t)+kB'(t)p(t)\in U. \tag{5.15}$$

Для этого полагают $k=k_0>0$ и проверяют условие (5.15). Если оно выполнено, то $u_1(t)$ найдено. В противном случае полагают $k=\frac{1}{2}k_0$ и процесс повторяют.

5^0. Решают задачу Коши

$$\dot{y}(t)=A(t)y(t)+B(t)\mathrm{v}(t),\ y(0)=0 \tag{5.16}$$

с найденной в п. 4^0 поправкой к управлению $\mathrm{v}(t)=kB'(t)p(t)$.

6^0. Находят $x_1(t)$ из уравнения (5.3) и проверяют условие

$$J(u_1)=\varphi(x_1(T))<\varphi(\bar{x}(T))=J(u_0). \tag{5.17}$$

Если условие (5.17) выполнено, то управление $u_1(t)$, определяемое формулой (5.15), дает уменьшение функционала $J(u)$. В противном случае полагают $u_1(t)=\bar{u}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{v}(t)$ и снова проверяют условие (5.17). Если же оно снова не выполнено, то берут $u_1(t)=\bar{u}(t)+\frac{1}{4}\mathrm{v}(t)$ и так до тех пор, пока условие (5.17) не будет выполнено.

7^0. Значение функционала $J(u_1)$ сравнивают с некоторым заранее заданным значением $J_{\text{доп}}$. Если

$$J(u_1)\leqslant J_{\text{доп}}, \tag{5.18}$$

то процесс заканчивают, причем $u_1(t)$ есть такое допустимое управление, при котором функционал J принимает значение, меньшее заранее заданного. При невыполнении условия (5.18) найденное управление $\bar{u}_1(t)$ берут в качестве нового начального управления $\bar{u}(t)$ и процесс улучшения повторяют сначала.

Метод Шатровского просто алгоритмизируется, и созданы программы, реализующие этот метод.

Отметим, что при использовании этого метода получается не оптимальное, а достаточно хорошее допустимое управление. Далее управление получают в виде некоторого программного управления, а не в виде С-управления.

Изложенный метод можно использовать для систем, в которых нужно одновременно оптимизировать некоторые параметры и управление, а также для систем с запаздыванием.

§ 6. МЕТОД ФЕДОРЕНКО СВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Как и в большинстве других изложенных выше методов, в методе, предложенном Р. П. Федоренко, также используются две основные процедуры: конечномерная аппроксимация исходной задачи и линеаризации. Однако получающаяся при этом на каждом шаге итерационного процесса задача является задачей линейного программирования.

Для простоты изложим метод Федоренко применительно к задаче (5.1)

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)=f(t, x, u),\ x\in R_n,\ u\in U\subset R_m,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ &x(0)=x_0,\\ &J(u)=\varphi(x(T))\to\min_u. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Однако потребуем дополнительно, чтобы траектория задачи (6.1) удовлетворяла ограничениям вида

$$\int_0^T F_i(t, x(t), u(t))\,dt=0\ (\leqslant 0),\ i=1, \ldots, r. \tag{6.2}$$

Как и в § 5, возьмем допустимое начальное (опорное) управление $\bar{u}$ и определим соответствующую ему опорную траекторию $\bar{x}$. Далее будем искать поправку к управлению $v(t)\in R_m$, которая уменьшала бы значение функционала J, т. е. $J(\bar{u}+v)\leqslant J(\bar{u})$. Как и в § 5, получим, что $v(t)$ должно быть выбрано так, чтобы

$$\delta J=-\int_0^T (B'(t)p(t), v(t))\,dt\to\min_v,\ (\bar{u}(t)+v(t))\in U. \tag{6.3}$$

Выясним теперь, как меняются условия (6.2) при переходе от $\bar{u}(t)$ к $\bar{u}(t)+v(t)$. Имеем

$$\int_0^T F_i(t, \bar{x}+y, \bar{u}+v)\,dt=\int_0^T F_i(t, \bar{x}, \bar{u})\,dt+$$

$$+\int_0^T (F_{ix}(t, \bar{x}, \bar{u}), y(t))\,dt+\int_0^T (F_{iu}(t, \bar{x}, \bar{u}), v(t))\,dt+0(\|v\|^2),\ i=1, \ldots, r.$$

Здесь $y(t)$ — решение задачи (5.16), а $F_{ix} \in R_n$ и $F_{iu} \in R_m$ — векторы производных скалярных функций F_i по x и u соответственно. Обозначив

$$F_{ix}(t, \bar{x}, \bar{u}) = a_i(t),\ F_{iu}(t, \bar{x}, \bar{u}) = b_i(t),\ \int_0^T F_i(t, \bar{x}, \bar{u})\,dt = f_i,$$

получим в линейном приближении равенство

$$\int_0^T F_i(t, \bar{x}+y, \bar{u}+v)\,dt = f_i + \int_0^T (a_i(t), y(t))\,dt + \int_0^T (b_i(t), v(t))\,dt. \quad (6.4)$$

Преобразуем теперь слагаемое $\int_0^T (a_i(t), y(t))\,dt$. Определим функцию $z(t)$ как решение задачи

$$\dot{z}_i(t) + A'(t) z_i(t) = a_i(t),\ z_i(T) = 0. \quad (6.5)$$

Так как

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(z_i(t), y(t))\,dt = (z_i(t), y(t))\Big|_0^T = 0,$$

то

$$0 = \int_0^T [(\dot{z}_i, y) + (z_i, \dot{y})]\,dt =$$

$$= \int_0^T [(-A'z_i + a_i, y) + (z_i, Ay + Bv)]\,dt = \int_0^T [(a_i, y) + (z_i, Bv)]\,dt.$$

Отсюда получаем

$$\int_0^T (a_i, y)\,dt = -\int_0^T (z_i, Bv)\,dt = -\int_0^T (B'z_i, v)\,dt. \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (6.4), находим, что в линейном приближении

$$\int_0^T F_i(t, \bar{x}+y, \bar{u}+\mathrm{v})\,\mathrm{d}t = f_i + \int_0^T (b_i(t) - B'(t) z_i(t), \mathrm{v}(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= f_i + \int_0^T (w_i(t), \mathrm{v}(t))\,\mathrm{d}t. \tag{6.7}$$

Здесь через $w_i(t)$ обозначена функция $w_i(t) = b_i(t) - B'(t) z_i(t)$.

Таким образом, в линейном приближении для нахождения поправки $\mathrm{v}(t)$ для допустимого начального управления $\bar{u}(t)$ приходим к задаче

$$\begin{gathered} -\int_0^T (B'(t) p(t), \mathrm{v}(t))\,\mathrm{d}t \to \min_{\mathrm{v}}, \\ f_i + \int_0^T (w_i(t), \mathrm{v}(t))\,\mathrm{d}t = 0\ (\leqslant 0),\ (\bar{u}(t) + \mathrm{v}(t)) \in U. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Сведем задачу (6.8) к задаче линейного программирования. Для этого разобьем отрезок $[0, T]$ на N частей точками $t_i = (T/N) i$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Далее в качестве начального управления $\bar{u}(t)$ можно взять следующее:

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_i = \mathrm{const} \in U,\ t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Поправку $\mathrm{v}(t)$ также возьмем в виде

$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_i = \mathrm{const},\ t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

При этом каждое v_i ищем в виде разложения:

$$\mathrm{v}_i = \sum_{j=1}^{K} s_{ij} e^j,\ s_{ij}^- \leqslant s_{ij} \leqslant s_{ij}^+. \tag{6.9}$$

Здесь e^j — набор векторов в R_m, а K — некоторое число, которое может быть меньше или больше m. Числа s_{ij}^-, s_{ij}^+ подберем так, чтобы $(\bar{u}(t) + \mathrm{v}(t)) \in U$. Подбор чисел s_{ij}^- и s_{ij}^+, а также векторов e^j выполняется несложно. Подставляя выражение (6.9) в соотношение (6.8), получим

$$-\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=0}^{N-1} s_{ij}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (B'(t)p(t), e^j)\,dt \to \min_{s_{ij}},$$

$$f_l+\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=0}^{N-1} s_{ij}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (w_l(t), e^j)\,dt = 0\ (\leqslant 0), \tag{6.10}$$

$$s_{ij}^- \leqslant s_{ij} \leqslant s_{ij}^+.$$

Задачу (6.10) можно переписать таким образом:

$$\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=0}^{N-1} (h_{ij}, s_{ij}) \to \min_{s_{ij}},$$

$$f_l+\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=0}^{N-1} (w_{lij}, s_{ij}) = 0\ (\leqslant 0), \tag{6.11}$$

$$s_{ij}^- \leqslant s_{ij} \leqslant s_{ij}^+,\ i=0, 1, ..., N-1,\ j=1, ..., K,\ l=1, ..., K.$$

Здесь использованы обозначения

$$h_{ij} = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} (B'(t)p(t),\ e^j)\,dt,$$

$$w_{lij} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (w_l(t), e^j)\,dt.$$

Следовательно, задача построения улучшения управления v (t) сводится к задаче линейного программирования (6.11), в которой искомыми являются переменные s_{ij}. Размерность задачи (6.11) равна NK, а количество ограничений равно $2NK+k$. Ввиду наличия такого большого числа ограничений, в особенности ограничений типа неравенств, решать задачу (6.11) с помощью стандартной процедуры симплекс-метода неудобно. Р. П. Федоренко разработал специальную итерационную процедуру решения задач линейного программирования, специально ориентированную на задачи типа (6.11).

Итак, для решения задача оптимального управления методом Федоренко нужно на каждом шаге итерационного процесса запи-

сать и решить задачу линейного программирования (6.11), построить поправку управления $v(t)$ и поправку траектории $y(t)$, а затем перейти к следующему шагу итераций, в котором $\bar{u}(t)$ и $\bar{x}(t)$ заменяются на $\bar{u}(t)+v(t)$ и $\bar{x}(t)+y(t)$.

Более подробно с методом Федоренко и с вычислительными особенностями его реализации можно познакомиться в [20].

Основные результаты и формулы главы XV

Сведение к задаче нелинейного программирования задач оптимального управления приводит к задачам высокой размерности, решение которых затруднительно.

Сведение к краевой задаче производится на основе классического вариационного исчисления или принципа максимума Понтрягина.

Метод переноса краевых условий для многоточечной краевой задачи

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+f(t),\ x\in R_n,$$
$$(l_s,\ x(t_s))=\alpha_s,\ l_s\in R_n,\ s=1,\ \ldots,\ n$$

описывается уравнениями

$$\dot{l}_s(t)=-A'(t)l_s(t),\ l_s(t_s)=l_s,$$
$$\dot{\alpha}_s(t)=(l_s(t),f(t)),\ \alpha_s(t_s)=\alpha_s.$$

Метод Абрамова описывается уравнениями

$$\dot{g}_s(t)=-A'(t)g_s(t)+\frac{(g_s(t),\ A'(t)g_s(t))}{(g_s(t),\ g_s(t))}g_s(t),\ g_s(t_s)=l_s.$$

Метод Шатровского для задачи

$$\dot{x}(t)=f(t,x,u),\ x(0)=x_0,\ J(u)=\varphi(x(T))\to\min_{u\in U}$$

описывается такой последовательностью действий:

а) $A(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(\bar{x},\ \bar{u})}$, $B(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(\bar{x},\ \bar{u})}$, $C=(\operatorname{grad}\varphi)\,|_{(\bar{x},\ \bar{u})}$,

б) $\dot{p}(t)=-A'(t)p(t),\ p(T)=-C,$

в) $u_1(t)=(\bar{u}(t)+kB'(t)p(t))\in U,$

г) $\dot{y}(t)=A(t)y(t)+kB(t)B'(t)p(t),\ y(0)=0.$

д) $x_1(t)=\bar{x}(t)+y(t).$

Метод Федоренко сводит нахождение оптимального управления к решению задачи линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=0}^{N-1} s_{ij}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (B'(t)p(t),\ \overset{j}{e})\,dt\to\min_{s_{ij}},$$

$$f_l+\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=0}^{N-1} s_{ij}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (w_l(t),\ \overset{j}{e})\,dt=0\ (\leqslant 0),\ s_{ij}^{-}\leqslant s_{ij}\leqslant s_{ij}^{+}.$$

Упражнения к четвертой части

Предлагаемые ниже задачи рассчитаны на то, что при их решении будет использоваться вычислительная техника. Тип ЭВМ и используемые стандартные программы могут быть различными, и их выбор определяется имеющимися возможностями. Трудоемкость решения задач весьма велика, и поэтому они могут предлагаться в качестве курсовых и дипломных работ. Описанные в задачах модели близки к реально используемым в практике, цифровые данные совпадают с данными, используемыми в реальных приложениях.

1. Исследовать на устойчивость матрицу $A(p)$, зависящую от скалярного параметра p, который изменяется от 0,5 до 1.

Матрица $A(p)$ имеет вид

$$A(p)=\begin{pmatrix} 0 & 850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -850 & -120 & -4100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33 & 0 & -33 & 0 & -700 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1600 & -450 & -110 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 & 0 & -1 & 0 & -900 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a(8.6) & a(8.7) & a(8.8) \end{pmatrix},$$

где

$$a(8.6)=\frac{12}{2{,}48-1{,}48p};\ a(8.7)=\frac{1{,}1.0{,}8065p^2\,(1{,}5-p)}{1-0{,}5968p};\ a(8.8)=\frac{22.0{,}8065p^2\,(1{,}5-p)}{1-0{,}5968p}.$$

а) Выбрав какое-либо значение параметра p, исследовать устойчивость полученной матрицы.

б) Исследовать устойчивость всего семейства матриц $A(p)$, используя теорему Харитонова (см. теорему 5.5 из гл. I).

2. Исследовать численно влияние малых неконтролируемых возмущающих моментов $M_l(t)$ $(l=1, 2, 3)$ на поведение осесимметричного космического аппарата. Уравнения движения КА имеют вид (см. с. 218)

$$\dot{x}_1=\frac{A-C}{A}x_2x_3+\frac{M_1(t)}{A},\ \dot{x}_2=\frac{C-A}{A}x_1x_3+\frac{M_2(t)}{A},\ \dot{x}_3=\frac{M_3(t)}{C},\ A>C.$$

Промоделировать различные виды возмущений, в том числе и случайные.

3. *Модель Марчука в иммунологии**. Для описания процесса развития вирусных заболеваний Г. И. Марчук предложил следующую модель:

---

*Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. — М.: Наука, 1980.

$$\dot{V}(t)=(h_1-h_2F(t))\,V(t),$$
$$\dot{C}(t)=\xi(m)\,h_3F(t-\tau)\,V(t-\tau)-h_4(C(t)-1),$$
$$\dot{F}(t)=h_5(C(t)-F(t))-h_6F(t)\,V(t),$$
$$\dot{m}(t)=h_7V(t)-h_8m(t),\quad t\geqslant 0,$$
$$V(t)=0,\ t<0,\ V(0)=10^{-6},\ C(0)=1,\ m(0)=0,$$
$$F(t)=1,\ t\leqslant 0.$$

Здесь $V(t)$ — количество вирусов определенного типа в организме; $F(t)$ — количество антител; $C(t)$ — количество плазматических клеток; $m(t)$ — некоторая характеристика ослабления организма в процессе болезни; τ — запаздывание, связанное с тем, что реакция организма на попадание вируса происходит не мгновенно. Функция $\xi(m)$ имеет вид

$$\xi(m)=\begin{cases}1, & 0\leqslant m\leqslant 0{,}1;\\ (1-m)\dfrac{10}{9}, & 0{,}1\leqslant m\leqslant 1.\end{cases}$$

Эта модель позволяет, изменяя коэффициенты h_1, ..., h_8, моделировать любые состояния организма: устойчивое здоровье, неустойчивое здоровье, острое заболевание, хроническое заболевание и т. д. Численно промоделировать различные характеры течения болезни, выбирая разные значения параметров h_1, ..., h_8. В качестве примера взять значения $\tau=0{,}5$, $h_1=2$, $h_2=0{,}8$, $h_3=10^4$, $h_4=0{,}5$, $h_5=0{,}17$, $h_6=8$, $h_8=0{,}12$. Значение h_7 взять равным 10, 100 и 300.

Дать интерпретацию полученных результатов.

4. *Линейная задача быстродействия для системы третьего порядка* [20, с. 227—233]. Управляемая система описывается уравнениями $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=x_3$, $\dot{x}_3=u$, $|u|\leqslant 1$, $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=0$. Требуется найти управление $u(t)$, минимизирующее время T перевода системы в конечное состояние $x_1(T)=1$, $x_2(T)=0$, $x_3(T)=0$.

Записать краевую задачу принципа максимума и решить ее.

5. Найти решения следующих краевых задач:

а) $\ddot{x}(t)=x(t)+10x^3(t)+t^2$, $x(0)=x(1)=0$;
б) $\ddot{x}(t)=x(t)+x^2(t)$, $x(0)=0$, $x(1)=2$;
в) $\ddot{x}(t)=tx^3(t)$, $x(0)=0$, $x(1)=1$.

6. Найти оптимальное управление движением двухзвенного манипулятора (см. с. 234), уравнения движения которого имеют вид

$$(I_1+m_2L^2)\ddot{\varphi}_1=u_1-u_2,\ I_2\ddot{\varphi}_2=u_2,\ I_1=50,\ m_2=3,\ L=6,\ I_2=30.$$

Критерий качества взять в виде

$$J(u)=\int_0^{\infty}(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2+u_1^2+10u_2^2)\,dt.$$

7. Для системы управления манипулятора, найденной в предыдущей задаче, определить, является ли замкнутая система устойчивой, и найти собственные значения замкнутой системы.

8. *Задача о вертикальном подъеме ракеты-зонда* [20, с. 233 — 238]. Движение ракеты-зонда описывается уравнениями

$$\dot{x}_1=-u,\ \dot{x}_2=x_3,\ \dot{x}_3=-g+\frac{1}{x_1(t)}\left[Vu-Ce^{-\gamma x_3(t)}x_3^2(t)\right],$$
$$0\leqslant t\leqslant T=100,\ 0\leqslant u(t)\leqslant 0{,}04,\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=x_3(0)=0.$$

Здесь $x_1(t)$ — переменная масса ракеты; $x_2(t)$ — высота подъема; $x_3(t)$ — вертикальная скорость ракеты, V — постоянная реактивная тяга; g, C, γ — некоторые постоянные, характеризующие силу тяготения, аэродинамическое сопротивление и убывание плотности воздуха с высотой. Числовые значения постоянных таковы: $g=0{,}01$, $V=2{,}0$, $C=0{,}05$, $\gamma=0{,}01$.

Найти управление $u(t)$, которое обеспечивало бы максимальную высоту подъема $x_2(T)$ при сохранении заданного запаса горючего $x_1(T)$, т. е. $x_2(T)\to\max$, $x_1(T)=0{,}2$.

9. *Летательный аппарат* (ЛА), рассматриваемый как твердое тело, может быть описан следующим образом:

$$\dot{x}=Ax+bu,\ x\in R_3,\ u\in R_1,\ y=C'x,\ y\in R_1,\ e=y-y_m.$$

Здесь приняты следующие обозначения: u — управление рулями высоты, рад; y — вертикальное ускорение, м/с^2 (a_z на рис. У.1); x_1 — скорость тангажа, рад/с (q на рис. У.1), x_2 — угол атаки, рад ($\Delta\alpha$ на рис. У.1); x_3 — угол руля высоты, рад ($\Delta\eta$ на рис. У.1); y_m — желательное вертикальное ускорение; e — разность между выходом y и y_m.

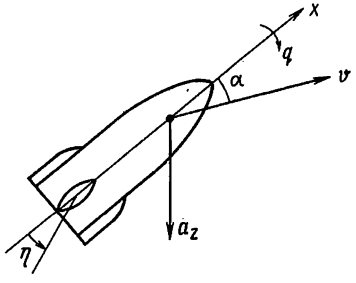


Рис. У.1. Летательный аппарат и его параметры

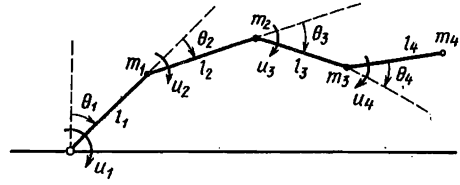


Рис. У.2. Каскад из четырех перевернутых маятников

Требуется найти управление вида $u=u(x_1)$, которое удовлетворяло бы следующим требованиям;

а) перерегулирование по выходу y не должно превышать 10%, а ошибка в установившемся режиме не должна превышать 15%;

б) угол руля высоты x_3 должен быть ограничен 1/3 рад; $|x_3|\leqslant 1/3$, а скорость его изменения $\dot{x}_3$ не должна превышать 100 рад/с; $|\dot{x}_3|\leqslant 100$ рад/с.

Требования а) и б) должны выполняться для 10 заданных условий полета, которые зависят от числа Маха, высоты полета и массы ЛА.

Матрица A и векторы b и c имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -190 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 190 \end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Различным условиям полета соответствуют следующие значения a_{ij} и c_i, которые приведены в табл. У.1.

10. Для каждого из 10 режимов полета ЛА проверить управляемость и наблюдаемость системы управления из предыдущей задачи.

Таблица У.1

Высота	0 (м)				
Число Маха	0,8		1,6		2,5
a_{11}	−0,327	−0,391	−0,698	−0,738	−0,886
a_{12}	−63,94	−130,29	−619,27	−651,57	−1068,85
a_{22}	−1,0	−1,42	−2,27	−2,75	−3,38
a_{13}	−155,96	−186,5	−552,9	−604,18	−1004,39
a_{23}	−0,237	−0,337	−0,429	−0,532	−0,582
c_1	0,326	0,35	0,65	0,66	0,79
c_2	−208,5	−272,38	−651,11	−813,64	−1926,45
c_3	90,93	75,06	283,44	250,5	402,96

Продолжение табл. У.1

Высота	1200 (м)				
Число Маха	2,0		3,0		4,0
a_{11}	−1,364	−0,333	−0,337	−0,369	−0,402
a_{12}	−92,82	−163,24	−224,03	−253,71	−277,2
a_{22}	−4,68	−0,666	−0,663	−0,80	−0,884
a_{13}	−128,46	−153,32	−228,72	−249,87	−419,35
a_{23}	−0,087	−0,124	−0,112	−0,135	−0,166
c_1	1,36	0,298	0,319	0,33	0,36
c_2	−184,26	−247,75	−375,75	−500,59	−796,18
c_3	76,43	63,77	117,4	103,76	178,59

11. *Стабилизация системы из перевернутых маятников.* Рассмотрим систему из четырех перевернутых маятников, изображенную на рис. У.2. Линейная модель такой системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i,\ y_i = C_i x_i,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Входные переменные $y_i = \theta_i$ — углы отклонения в узлах, управления u_i — моменты в узлах каскада. Требуется построить управления, которые стабилизировали бы углы θ_i около положения равновесия $\theta_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Исследовать влияние неизмеряемых возмущений на такую систему. Для случая, когда все массы $m_i = 1$ кг и все длины $l_i = 1$ м, числовые значения матриц A_i, B_i и C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) приведены ниже (здесь через g обозначено ускорение силы тяжести, равное $g = 9{,}8$ м/с^2):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ C_1 = (1, 0),$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g & 0 & 3g & 0 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3g & -2g & -3{,}6\text{E}{-}16 & 0 & 0 & 0 \\ -3g & 4g & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_3=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -16 & 6 \\ -14 & 29 & -21 \\ 4 & -16 & 24 \end{pmatrix},$$

$$C_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4g & 3g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4g & 6g & 2g & 3{,}63\text{E}16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4{,}35\text{E}15 & 3g & 4g & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2g & 2g & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 42 & 66 & 24 & 1{,}54\text{E}15 \\ 60 & 124 & 88 & 24 \\ 18 & 74 & 116 & 84 \\ 8{,}5\text{E}15 & 16 & 64 & 96 \end{pmatrix}$$

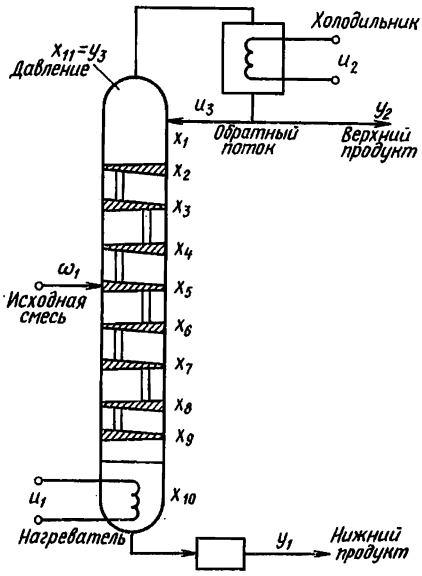


Рис. У.3. Бинарная дистилляционная колонна с переменным давлением

$$C_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{E}-i=10^{1}.$$

12. Проверить управляемость системы из четырех перевернутых маятников, описанную в предыдущей задаче.

13. *Бинарная дистилляционная колонна* с 8 камерами изображена на рис. У.3. Линеаризованная модель этой системы имеет три входа и три выхода и одно возмущающее воздействие:

$$xAxBuFw_1,\ yCx,$$

$$x\ R_{11},\ y\ R_3,\ u\ R_3,\quad w_1\ R_1.$$

Здесь x_1 — концентрация легкой фракции в холодильнике; x_2 — концентрация легкой фракции в камере № 2; ...; x_9 — концентрация легкой фракции в камере № 9; x_{10} — концентрация легкой фракции в нагревателе; x_{11} — давление; y_1 — концентрация легкой фракции в нижнем продукте; y_2 — концентрация легкой фракции в верхнем продукте; y_3 — давление; u_1 — температура нагревателя; u_2 — температура холодильника; u_3 — управляемый обратный поток; w_1 — изменение концентрации исходной смеси.

Требуется найти закон управления для регулирования изменения трех выходов y_1, y_2 и y_3, возникающих в результате действия неконтролируемого возмущения w_1, w_1 (t)1, t0. Цель управления состоит в том, чтобы как можно быстрее свести к нулю изменения y_1, y_2 и y_3. При этом на управления наложены ограничения u_1 (t)2,5, u_2 (t)2,5, u_3 (t)0,30, t0.

Матрицы A, B, C и F имеют следующий вид:

$$A=10^{-3}\begin{pmatrix}-14&4{,}3&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\9{,}5&-13{,}8&4{,}6&0&0&0&0&0&0&0&0{,}5\\0&9{,}5&-14{,}1&6{,}3&0&0&0&0&0&0&0{,}2\\0&0&9{,}5&-15{,}8&11&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&9{,}5&-31{,}2&15&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&20{,}2&-35{,}2&22&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&20{,}2&-42{,}2&28&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&20{,}2&-48{,}2&37&0&0{,}2\\0&0&0&0&0&0&0&20{,}2&-57{,}2&42&0{,}5\\0&0&0&0&0&0&0&0&20{,}2&-48{,}3&0{,}5\\25{,}5&0&0&0&0&0&0&0&0&25{,}5&-18{,}5\end{pmatrix}$$

$$B=10^{-6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -40 & 2500 \\ 2 & -20 & 5000 \\ 1 & -10 & 5000 \\ 0 & 0 & 5000 \\ 0 & 0 & 5000 \\ -5 & 10 & 5000 \\ -10 & 30 & 3000 \\ -40 & 5 & 2500 \\ -20 & 2 & 2500 \\ 460 & 460 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

14. Проверить управляемость и наблюдаемость системы управления из предыдущей задачи.

15. *Управление боковым движением автобуса.* Задача состоит в построении закона автоматического управления боковым движением автобуса под действием некоторых неопределенных факторов.

Линеаризованная модель бокового движения автобуса описывается уравнениями

$$\dot{x}=A(q_1, q_2)x+bu,\ x\in R_s,\ u\in R_1,\ y=c'x,\ y\in R_1.$$

Переменные в модели имеют следующий смысл (рис. У.4): $x_1=\alpha$ — угол скольжения в центре масс автобуса; $x_2=\dot{\varepsilon}$ — скорость сноса; $x_3=d$ — отклонение центра масс автобуса от направления движения; $x_4=\varepsilon$ — угол сноса; $x_5=\beta$ — угол поворота передних колес; $u=\beta$ — усилие на гидравлическом приводе поворота передних колес; y — отклонение переднего датчика автобуса от направления движения; $q_1=1/v$ — величина, обратная скорости движения автобуса; $q_2=\mu/m$ — отношение коэффициента трения к массе автобуса.

Матрицы A, b и c имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} \\ 1/q_1 & 0 & 0 & 1/q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ l_s \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11}=-2q_1q_2(\delta_F+\delta_R),\ a_{12}=-1-2q_1^2q_2(\delta_Fl_F-\delta_Rl_R),$$
$$a_{21}=-2q_2(\delta_Fl_F-\delta_Rl_R)/C,\ a_{22}=-2q_1q_2(\delta_Fl_F^2+\delta_Rl_R^2)/C,$$
$$a_{15}=2q_1q_2\delta_F,\ a_{25}=2q_2\delta_Fl_F/C.$$

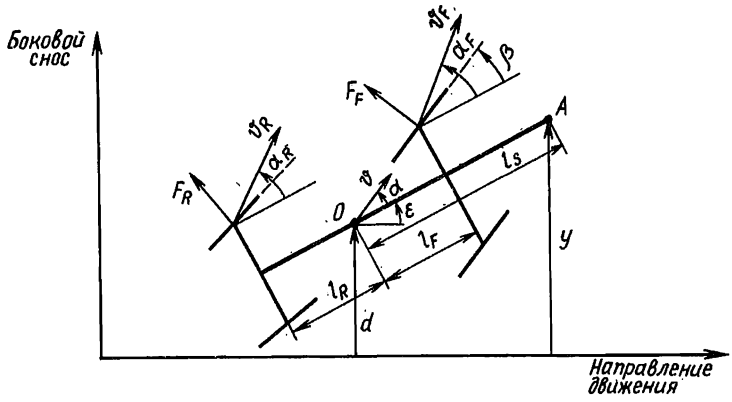


Рис. У.4. Схема бокового движения автобуса; O — центр масс автобуса, A — место закрепления переднего датчика

Параметры автобуса таковы: $l_s=6{,}12$ м — расстояние от переднего датчика до центра масс, $l_F=3{,}67$ м — расстояние от переднего вала до центра масс; $l_R=1{,}93$ м — расстояние от заднего вала до центра масс; $\delta_F=99$ кН/рад — коэффициент боковой силы сноса, действующей на передние колеса; $\delta_R=235$ кН/рад — коэффициент боковой силы сноса, действующей на задние колеса; $C=\theta/m=10{,}86$ м^2; θ — момент инерции автобуса по отношению к вертикальной оси, проходящей через центр масс; m — масса автобуса.

Часть параметров автобуса не определена и в зависимости от условий движения может изменяться в следующих пределах: 0,5 (при мокрой дороге) $\leqslant\mu\leqslant 1$ (при сухой дороге); 9,55 т$\leqslant m\leqslant$16 т; 1 м/с$\leqslant$v$\leqslant$20 м/с.

Требуется построить закон управления, который минимизировал бы (в некотором смысле) рассогласование $\varepsilon(t)$ между движением $y(t)$ и заданным движением $y_{\text{ref}}(t)$, $\varepsilon(t)=y(t)-y_{\text{ref}}(t)$.

Движение $y_{\text{ref}}(t)$ определяется из уравнения $\ddot{y}_{\text{ref}}=\text{v}w_{\text{ref}}$.

При этом условия комфортности для пассажиров автобуса и технические требования приводят к следующим ограничениям:

$$|w|\leqslant 7{,}5 \text{ рад/с},$$

$$\ddot{y}=\text{v}w,\ |\text{v}\,(w-w_{\text{ref}})|\leqslant 4 \text{ м/с}^2,\ |\beta|\leqslant 40^\circ,$$

$$|\dot{\beta}|\leqslant 23 \text{ град/с}.$$

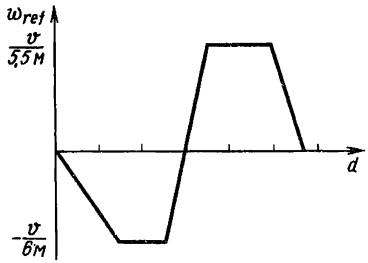


Рис. У.5. Требуемая угловая скорость ω_{ref} движения автобуса при заездах на стоянку, d — длина пути (в метрах)

Качество закона управления необходимо проверить в трех типичных ситуациях:

а) переход от начального состояния $x_1(0)=x_2(0)=x_4(0)=x_5(0)=0$, $x_3(0)=0{,}15$ к нулевому конечному состоянию. Это соответствует начальному параллельному сдвигу в 15 см от направления движения;

б) переход от прямолинейного движения на поворот с постоянным радиусом 400 м;

в) заезд на узкую стоянку. Этому движению соответствует график w_{ref}, приведенный на рис. У.5.

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ*

1. Введение. В странах с рыночной экономикой в начале семидесятых годов XX века произошло резкое повышение интереса к углубленному изучению *финансовых рынков* и, в частности, *рынка ценных бумаг*. Связано это было с несколькими событиями, среди которых наиболее значительными явились следующие: отказ от фиксированного обменного курса валют, отказ от фиксированной цены в долларах на золото, всемирный нефтяной кризис (возникший в связи с созданием Организации стран производителей и экспортеров нефти (OPEC), упадок активности в реализации акций и др. Рынок быстро среагировал на новые возможности для инвесторов, получивших свободу и простор для трейдинга, принятия решений и т. п., что привело к возникновению высокой *волатильности* (изменчивости) в поведении цен, процентных ставок, обменных курсов, индексов и т. д. Как следствие, резко возрос *риск* оперирования на соответствующих финансовых рынках, ставших «высокостохастическими», «высокохаотическими», что выдвинуло на первый план вопросы рационального поведения (с преследованием целей не только «выиграть, но и много не проиграть»), вопросы оценивания и редуцирования возможного риска в условиях неопределенности движения цен, процентных ставок.

Понятно, что решение этих вопросов потребовало и углубленного (макро- и микро-) анализа *стохастики, статистики и динамики* рыночных показателей, и построения адекватных *математических моделей* их эволюции, и создания новых *финансовых инструментов*, призванных решить «защитные» задачи от возможного риска.

В этом отношении весьма замечательным является 1973 г. Во-первых, была создана первая организованная биржа CBOE (Chicago Board Options Exchange) по заключению контрактов с опционами — одними из основных финансовых инструментов, относящихся к производным ценным бумагам. Во-вторых, вышли в свет две работы:

*Изложение этого параграфа следует, в основном, статье: А. Н. Ширяев. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики. Теория вероятностей и ее применения. Т. 39. Вып. 1, 1994. С. 5 — 22.

Ф. Блэк, М. Шоулс. *Расчеты опционов и обязательства корпораций* (F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, V. 81, N 3, 1973, 637 — 659), Р. Мертон. *Теория рациональных расчетов опционов* (R. Merton. Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, № 4, 1973. P. 141 — 183).

Эти работы совершили, можно сказать без преувеличения, *революцию* в методологии финансовых расчетов. Пожалуй трудно указать другие теоретические публикации в экономико-финансовой литературе, которые бы с такой быстротой нашли применение в практике финансовых расчетов и стали к тому же источником многочисленных исследований как более сложных опционов, так и других видов производных ценных бумаг. О значимости этих работ свидетельствует факт присуждения в 1997 г. Нобелевской премии по экономике Р. Мертону и М. Шоулсу (Ф. Блэк скончался 30 августа 1995 года от рака горла).

Приведем некоторые данные о том, как инвесторы реагировали на CBOE на открывшиеся новые, более динамичные возможности для трейдинга. В день открытия (26 апреля 1973 года) было заключено 911 контрактов на опционы колл. Через год в день заключалось более 20 тысяч контрактов. Три года спустя — 100 тысяч в день. В 1987 г. их заключалось 700 тысяч в день.

Общее годовое число заключенных контрактов на опционы составило: в 1974 г. — 5.7 млн. контрактов, в 1994 г. — 184 млн. контрактов.

На другой бирже, NYSE (New York Stock Exchange), в 1987 г. в дневном обороте заключалось 1.9 млн. контрактов. Если учесть, что каждый единичный контракт — это сделка на куплю или продажу 100 акций, то, следовательно, в дневном обороте в 1987 г. было задействовано: на CBOE — 70 млн. акций, на NYSE —190 млн. акций.

В 1995 г. на NYSE цифра 190 млн. возросла до 340 млн. акций (2600 компаний). Такой огромный объем заключенных контрактов и задействованных акций большого числа компаний неминуемо привел к «стохастичности», «случайности» в движении цен, вызываемых множеством разнообразных причин: разными интересами участников рынка, различной степенью реакции на изменение цен, различной интерпретацией получаемой информации и т. д.

Все это неизбежно привело к необходимости построения моделей (в том числе и математических), описывающих динамику и стохастику состояний финансовых рынков (акций, обменных курсов,...) с учетом разных факторов — времени, неопределенности, психологии поведения трейдеров и т. п.

2. Концепция эффективного рынка. Одна из классических теорий функционирования финансовых рынков — это так называемая теория *эффективных рынков*. Эффективность означает, что рынок

рационально реагирует на обновление информации, подразумевая под этим, что на таком рынке:

1) *мгновенно* производится коррекция цен, которые устанавливаются так, что оказываются в состоянии равновесия, становятся справедливыми, не оставляя места участникам рынка для арбитражных возможностей, т. е. получения прибыли за счет разницы в ценах;

2) участники рынка *однородно* интерпретируют поступающую информацию, при этом мгновенно корректируют свои решения при обновлении информации;

3) участники рынка *однородны* в своих целевых установках, их действия носят «коллективно-рациональный характер».

Хотя заложенные в понятии эффективности предположения являются a priori довольно-таки упрощенными, тем не менее на первых этапах построения теории функционирования рынка они получили достаточно широкое распространение и привели к появлению ряда *вероятностных* моделей, призванных описывать динамику финансовых показателей.

Одной из них является модель *случайного блуждания*, которая исходит из того, что если S_{n-1} — цена (обменный курс, индекс) в момент времени $(n-1)$ (скажем, «сегодня»), то значение S_n в момент n («завтра») равно S_{n-1} плюс некоторая величина X_n, которая определяется «новой» информацией:

$$S_n = S_{n-1} + X_n, \tag{1.1}$$

что приводит к тому, что

$$S_n = S_1 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \tag{1.2}$$

Сама идея изменения цен только под влиянием «новой» информации приводит к тому, что величины X_1, X_2, ... должны быть (в вероятностном смысле) *независимыми* между собой. В соответствии с общепринятой терминологией это означает, что последовательность $S = (S_n)_{n \geqslant 0}$, описывающая состояние цен, есть *случайное блуждание*. Простейшее предположение относительно (вероятностных) свойств величин $X_n (= \Delta S_n = S_n - S_{n-1})$ состоит в том, что их среднее значение равно нулю, означающее формально, что математическое ожидание

$$M x_n = 0. \tag{1.3}$$

Предположение независимости величин x_1, x_2, ... можно несколько ослабить, считая их зависимыми (что, конечно, более реалистично), но такими, что при каждых «прошлых» значениях S_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} равносильно: S_0, S_1, S_2, ... S_{n-1}) *условное* среднее величины X_n равно нулю. Формально, это записывают, обобщая свойство (1.3) в виде

$$M(X_n | S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}) = 0 \tag{1.4}$$

или (поскольку $X_n = S_n - S_{n-1}$) — в виде

$$M(S_n | S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}) = S_{n-1}, \tag{1.5}$$

прочитывая, скажем, (1.5) следующим образом: условное математическое ожидание значения цены S_n («завтра») при заданных S_0, S_1, S_2, ..., S_{n-1} есть значение цены S_{n-1} в момент времени $n-1$, т. е. «сегодня». По-другому можно сказать также, что *прогноз* значения цены S_n на «завтра» (при заданных ее значениях S_0, S_1, S_2, ..., S_{n-2} в «прошлом» и значении S_{n-1} «сегодня») определяется лишь только состоянием цены на «сегодня», т. е. значением S_{n-1}. Свойство (1.5) часто интерпретируют как свойство «справедливости» в том смысле, что не отдается предпочтения движению цен ни «вверх» ни «вниз».

В теории вероятностей такие последовательности принято называть *мартингалами* и использовать для них вместо (1.5) несколько более компактную запись

$$M(S_n | F_{n-1}) = S_{n-1}, \tag{1.6}$$

понимая под F_{n-1} «информацию», содержащуюся в S_0, S_1, S_2, S_{n-1}.

Чтобы дать некоторое представление о том, *как* возникают при анализе цен *мартингалы*, приведем следующие элементарные рассуждения. Пусть S_n — цена акции в момент времени n, $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ — ее изменение (купили «сегодня» по цене S_{n-1}, продали «завтра» по цене S_n; ΔS_n — «доход», который может быть, конечно, отрицательным, т. е. быть на самом деле убытком). Обозначим

$$\rho_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} \tag{1.7}$$

— *относительное* изменение цен, называемое также *процентной ставкой*.

Предположим, что рынок функционирует так, что относительно F_n «информации»

$$M(\rho_n | F_{n-1}) = r, \tag{1.8}$$

где r — некоторая константа, являющаяся процентной ставкой банковского счета $B = (B_n)_{n \geqslant 0}$:

$$B_n = B_{n-1}(1 + r). \tag{1.9}$$

Тогда из (1.7) видим, что

$$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n) \tag{1.10}$$

и с учетом (1.9) находим, что

$$\frac{S_n}{B_n} = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \frac{1 + \rho_n}{1 + r}. \tag{1.11}$$

Отсюда

$$M\left(\frac{S_n}{B_n}\middle|F_{n-1}\right)=\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}M\left(\frac{1+\rho_n}{1+r}\middle|F_{n-1}\right). \tag{1.12}$$

В силу (1.8)

$$M\left(\frac{1+\rho_n}{1+r}\middle|F_{n-1}\right)=1$$

и, следовательно, дисконтируемые (банковским счетом) величины $\frac{S}{B}=\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 0}$ образуют *мартингал*. (Заметим, что если $r=0$, $B_0=1$, то $B_n=1$ и мартингал будут образовывать сами величины $S=(S_n)_{n\geqslant 0}$.)

Отметим, что условия «эффективности» рынка были сформулированы лишь на описательном уровне, при этом « мартингальность» движения цен на таком рынке не выводилась формально-логически, а просто постулировалась с последующим объяснением и интерпретацией этого свойства. На самом деле, то, что «справедливо» устроенный рынок есть мартингал, допускает безупречное математическое толкование, если отправляться от той гипотезы, что такой («честный», «рациональный») рынок — это рынок, на котором отсутствуют *арбитражные возможности*. Иначе говоря, это такой рынок, на котором невозможен безрисковый доход. Это понятие будет описано в следующем параграфе и оно будет основным для всего последующего изложения.

Сейчас же остановимся на сравнительно новой концепции *фрактального рынка*. Эта концепция не заменяет ни концепцию эффективности, ни концепцию безарбитражности. Более того, они взаимно дополняют друг друга, раскрывая все многообразие и сложность такого объекта, как «финансовый рынок». Истоки концепции фрактальности идут из результатов статистического анализа цен $S=(S_n)_{n\geqslant 0}$ и их разнообразных характеристик, а также из того обстоятельства, что на рынке всегда присутствуют инвесторы с разными интересами и возможностями. Причем это последнее обстоятельство является скорее положительным фактором, а не недостатком, как это может показаться на первый взгляд. Суть дела здесь состоит в том, что именно *диверсификационные* (diversity — разнообразие, различие) свойства рынка обеспечивают его *ликвидность* (liquid — легко реализуемый), т. е. возможность быстрого превращения активов в средство платежа (например, в деньги), необходимую для стабильности рынка. Так если, например, «долгосрочные» инвесторы «выходили» из игры на рынке (как это, скажем, было во время известного финансового краха 19 октября 1987, когда «долгосрочные» инвесторы пытались провести распродажу активов и стать «краткосрочными»), то рынок становился неликвидным и, в результате, неустойчивым. Все это говорит о том, что для

устойчивости рынка на нем должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными «горизонтами», должна иметь место «неоднородность», «дробность» или, как еще говорят, «фрактальность» интересов участников рынка.

Подобно тому, как выше, на описательном уровне, давалось понятие эффективного рынка, так и сейчас остановимся на отличительных особенностях рынка с *фрактальной* структурой:

1) в каждый момент времени на таком рынке цены корректируются инвесторами в зависимости от той информации, которая существенна для их *инвестиционного горизонта*, реакция инвесторов на получаемую информацию может быть и не мгновенной, а осуществляться лишь после соответствующего ее подкрепления;

2) в случае коротких временных горизонтов определяющую роль играет *техническая информация* и *технический анализ*, а при увеличении длины временного горизонта доминирующую роль начинает играть *фундаментальная* информация;

3) цены «складываются» в результате взаимодействия «краткосрочных» и «долгосрочных» инвесторов;

4) *высокочастотная* составляющая в ценах определяется действиями «краткосрочных» инвесторов; низкочастотные, гладкие составляющие отражают активность «долгосрочных» инвесторов;

5) рынок начинает терять *ликвидность, устойчивость*, когда на нем исчезают инвесторы с разными инвестиционными горизонтами, т. е. теряется его *фрактальность*.

3. Концепция арбитража и полноты. Рассмотрим так называемый (B, S)-рынок, состоящий из $d+1$ актива: *банковского счета* $B=(B_n)_{n\geqslant 0}$ и *акций* (рисковых активов) $S=(S_n^1,\ldots, S_n^d)_{n\geqslant 0}$. Если положить $r_n=\dfrac{\Delta B_n}{B_{n-1}}\left(=\dfrac{B_n}{B_{n-1}}-1\right)$, $p_n^i=\dfrac{\Delta S_n^i}{S_{n-1}^i}\left(=\dfrac{S_n^i}{S_{n-1}^i}-1\right)$, то можем записать, что

$$B_n=B_0\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(1+r_k), \tag{1.13}$$

или

$$B_n=B_{n-1}(1+r_n), \tag{1.14}$$

и

$$S_n^i=S_0^i\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(1+\rho_k^i), \tag{1.15}$$

или

$$S_n^i=S_{n-1}^i(1+\rho_k^i). \tag{1.16}$$

Из (1.13) — (1.16) видим, что рассматриваемые представления составлены по принципу «простых процентов». Чтобы несколько упростить дальнейшие обозначения будем предполагать, что имеется всего лишь одна акция ($d=1$). В этом предположении будем

обозначать $S_n^1=S_n$, $\rho_n^1=\rho_n$, так что (B, S)-рынок описывается следующим образом:

$$B_n=B_{n-1}(1+r_n),\ B_0>0,\quad S_n=S_{n-1}(1+\rho_n),\ S_0>0.$$

Между банковским счетом а акцией есть *принципиальная разница*: значение процентных ставок r_n («завтра») уже известно «сегодня» (формально, r_n являются F_{n-1} -измеримыми, то есть определяются информацией, имеющейся на рынке вплоть до «сегодняшнего» дня); в то же время значение процентной ставки ρ_n «сегодня» (т. е. в момент $n-1$) неизвестно и станет известной *только* «завтра» (в момент n), когда станет ясной ситуация на рынке на этот момент.

Предположим, что процентная ставка $r_n=r$, где r — некоторая константа, а величины $\rho_1, \rho_2, \ldots$ представляют последовательность независимых (в вероятностном смысле) величин, каждая из которых принимает два значения b и a: $\rho_n=\begin{cases}b\\a\end{cases}$, где $b>a$. Будем считать $r\geqslant 0$ и $-1<a<r<b$. Тогда условие $a>-1$ обеспечит *положительность* цен S_n, что, конечно, естественно по самому смыслу понятия «цена» акции. В рассматриваемом случае модель (B, S)-рынка называется *моделью Кокса — Росса — Рубинштейна*. Ее специфическая особенность в том, что она имеет простую биномиальную структуру. Несмотря на очевидную простоту этой модели, на ее примере можно проллюстрировать многие положения и технику расчетов различных финансовых инструментов. В частности, эту модель мы используем при рассмотрении опционов.

Для формулирования понятий «арбитраж» и «отсутствие арбитража» надо ввести понятие *портфеля* $\pi=(\beta, \gamma)$ *ценных бумаг* и его капитала X^π. В момент времени n («завтра») капитал X^π складывается из двух составляющих: $X_n^\pi=\beta_n B_n+\gamma_n S_n$, где $\beta_n B_n$ — количество средств на банковском счете и $\gamma_n S_n$ — средства в акциях. Величины β_n и γ_n выбираются на основе информации вплоть до настоящего момента $(n-1)$, т. е. должны быть F_{n-1}-измеримыми ($\beta_n=\beta_n(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$; $\gamma_n=\gamma_n(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$). Совокупность $\pi=(\beta, \gamma)$ с $\beta=(\beta_n)_{n\geqslant 0}$, $\gamma=(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ определяет, как говорят, портфель ценных бумаг (константы β_0 и γ_0 определяют величину начального капитала $X_0^\pi=\beta_0 B_0+\gamma_0 S_0$). Выберем некоторый момент времени N по отношению к которому и будет вводиться понятие арбитража. Говорят, что портфель (стратегия) π является *самофинансируемым*, если приращение капитала определяется лишь *изменениями состояний банковского счета и изменениями цен акций*: $\Delta X_n^\pi=\beta_n\Delta B_n+\gamma_n\Delta S_n$.

Таким образом, для самофинансируемых стратегий π

$$X_n^\pi=X_0^\pi+\sum_{k=1}^{n}\beta_k\Delta B_k+\gamma_k\Delta S_k. \tag{1.17}$$

Определение 1. Будем говорить, что самофинансируемая стратегия π реализует *арбитражную возможность (в момент N)*, если

при нулевом начальном капитале $X_0^\pi = 0$ ее капитал $X_n^\pi \geqslant 0$ и (с положительной вероятностью) $X_N^\pi > 0$. Если таких стратегий нет (если $X_0^\pi = 0$, $X_n^\pi \geqslant 0$, то непременно $X_N^\pi = 0$ с вероятностью единица), то говорят, что рассматриваемый рынок является *безарбитражным*, или что на рынке отсутствуют *арбитражные возможности*.

С наглядной точки зрения это означает, что на безарбитражном рынке наряду с положительным «выигрышем» ($X_N^\pi > 0$) необходимым образом должны быть и «проигрышные» ситуации ($X_N^\pi < 0$). Следующее определение также относится к одному из ключевых понятий.

Определение 2. Пусть f_N — некоторое (случайное, определяемое ценами $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$) платежное поручение. Говорят, что f_N *достижимо, или воспроизводимо,* если найдется такая самофинансируемая стратегия π, что $X_N^\pi = f_N$. Если это свойство выполнено для любого ограниченного платежного поручения f_N, то соответствующий рынок называется *полным*.

Оба введенных понятия (*отсутствие арбитража и полнота*) являются теми начальными понятиями, с которыми связаны *фундаментальные* результаты финансовой математики, наиболее важными из которых являются следующие два («*первая и вторая фундаментальные теоремы*»), перебрасывающие «мост» между этими *экономическими* понятиями и *математическими* средствами их изучения.

Первая фундаментальная теорема утверждает, что для того, чтобы рынок был безарбитражным необходимо и достаточно, чтобы нашлись «веса» $Z_n = Z_n(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$, $0 < Z_n < \infty$, $M(Z_n) = 1$, для которых последовательность «дисконтированных и перераспределенных» цен $\left(\frac{S_n}{B_n} Z_n\right)_{n \leqslant N}$ образует *мартингал*.

Несколько более изящная формулировка получается, если ввести (по исходным вероятностям $P(dw)$) новые вероятностные меры $\tilde{P} = \tilde{P}(dw)$ с $\tilde{P}(dw) = Z_N P(dw)$. Тогда свойство мартингальности последовательности $\left(\frac{S_n}{B_n} Z_n\right)_{n \leqslant N}$ может быть переформулировано как то, что относительно меры $\tilde{P}$ последовательность «дисконтированных» цен $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n \leqslant N}$ является мартингалом. (Такие меры $\tilde{P}$ принято называть мартингальными или риск-нейтральными). Считая для простоты $B_n = 1$ первой фундаментальной теореме можно придать такую формулировку: *для того, чтобы рынок был безарбитражным необходимо и достаточно, чтобы нашлась хотя бы одна мартингальная мера.*

Вторая фундаментальная теорема утверждает, что на безарбитражном рынке имеет место свойство *полноты* в том и только случае, когда мартингальная мера является *единственной*.

Пример 1.1 Пусть в модели Кокса — Росса — Рубинштейна вероятности

$$P(\rho_n=b)=p,\ P(\rho_n=a)=q\ (=1-p),$$

причем, $0<p<1$. Эта модель является и безарбитражной и полной, причем (относительно единственной мартингальной меры $\tilde{P}$)

$$\tilde{P}(\rho_n=b)=\frac{r-a}{b-a},\ \tilde{P}(\rho_n=a)=\frac{b-r}{b-a}. \tag{1.18}$$

(Интересно отметить, что эти значения *не зависят* от значения p).

Свойство рынка быть безарбитражным отражает представление о «справедливо», «честно» устроенном рынке. Довольно-таки понятно, что эти представления могут рассматриваться лишь только как некоторое приближение на пути понимания того, как на самом деле функционируют рынки. Естественно, что в финансовой математике рассматриваются и арбитражные рынки (таковыми являются, например, многие рынки с «фрактальной» структурой). Отметим также, что свойство полноты является скорее исключением, нежели правилом. (Полезно, между прочим, отметить, что о полноте можно говорить и без всякого предположения о безарбитражности).

Таким образом, первая и вторая фундаментальная теорема относятся, можно сказать, к «простым» моделям. В этой связи, однако, полезно привести следующее высказывание Ф. Блэка на эту тему: «В простоте есть и своя сила. Люди принимают... простую модель, поскольку они могут легко понять заложенные в ней предположения. Эта модель хороша как первое приближение, и если Вы видите «дыры» в сделанных допущениях, то Вы можете эту модель усовершенствовать, заменяя ее более изощренной.» (F. Black. The holes in Black-Scholes, RISK-magazin, March, 1988).

4. Хеджирование. При определении понятия *полноты* требовалось, чтобы каждое ограниченное платежное поручение $f_N=f_N(S_0, \ldots, S_N)$ было бы воспроизводимым, т. е. чтобы нашлась стратегия π такая, что

$$X_N^\pi=f_N. \tag{1.19}$$

На самом деле это требование *точной* воспроизводимости является слишком сильным, и к тому же, как это было отмечено выше, выполняется лишь в очень простых моделях. Менее ограничительным и вполне удовлетворительным во многих случаях является предположение, что найдется стратегия π, для которой гарантированным образом

$$X_N^\pi \geqslant f_N. \tag{1.20}$$

Такие стратегии принято называть *хеджами* (hedge — забор) и обращение к ним имеет простой наглядный смысл: если Вы обязаны выплатить в момент N величину $f_N=f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$, то Вы должны организовать свой портфель π так, чтобы было выполнено свойство (1.20), т. е. так, что Вы будете в состоянии выплатить величину f_N.

Одна из главных проблем финансовой математики и финансовой инженерии состоит в том, чтобы выявить условия (на модель), при которых хеджирование осуществимо и, если это так, то определить тот *начальный* капитал x, который это хеджирование делает возможным.

Объясним, как решаются поставленные вопросы, считая для простоты, что рассматриваемый (B, S)-рынок таков, что $B_n \equiv 1$. С этой целью обратимся к первой фундаментальной теореме. Если рассматриваемый рынок является безарбитражным, то *существует* целое *семейство* $\Pi(P)$ мартингальных мер $\tilde{P}$ (в случае полных рынков такая мера является *единственной*).

Предположим, что π есть хеджирующая стратегия, т. е. выполнено свойство (1.20). Тогда в силу (1.17)

$$f_N \leqslant X_N^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^N \gamma_k \Delta S_k. \tag{1.21}$$

Если $\tilde{P}$ — некоторая мартингальная мера и (для простоты) $|\gamma_n| \leqslant C$, где C — константа, то из (1.21) находим, что

$$\tilde{M} \sum_{k=1}^N \gamma_k \Delta S_k = 0.$$

(здесь $\tilde{M}$ означает усреднение по мере $\tilde{P}$) и поэтому из (1.21) $\tilde{M} f_N \leqslant X_0^\pi$. В силу произвольности меры $\tilde{P}$ видим, что $\sup\limits_{\tilde{P} \in \Pi(P)} \tilde{M} f_N \leqslant X_0^\pi$. Это свойство означает, что начальный капитал X_0^π всякой хеджирующей стратегии π должен быть заведомо не меньше, нежели величина $C_N = \sup\limits_{\tilde{P} \in \Pi(P)} \tilde{M} f_N$.

Замечательный результат финансовой математики состоит в том, что C_N есть в точности тот минимальный начальный капитал, который дает возможность построения хеджирующей стратегии. В том случае, когда безарбитражный рынок полон, мартингальная мера является *единственной* и, следовательно, для построения хеджирующей стратегии достаточен (и необходим) капитал $x = \tilde{M} f_N$.

5. Производные ценные бумаги. Расчеты в опционах. Целесообразно, прежде всего, напомнить, что *финансовый рынок* — это совокуп-

ность денежных и валютных рынков, рынков ценных (благородных) металлов, рынков ценных бумаг.

На финансовом *рынке ценных бумаг*, представляющем для нас основной интерес, принято различать: *основные* (первичные) ценные бумаги и *производные* (вторичные) ценные бумаги. К числу *основных ценных бумаг* относят:

банковский счет, облигации, акции.

К *производным ценным бумагам*:

опционы, контракты, варранты, свопы, комбинации, спрэды, сочетания и др.

Отметим, что весьма часто *финансовая инженерия* определяется именно как оперирование с *производными* ценными бумагами (и с целью увеличения капитала, и с целью уменьшения риска, обусловленного неопределенностью будущего состояния рынка).

Остановимся подробнее на опционах и применениях сформулированных выше результатов для расчета рациональной их стоимости и хеджирующих стратегий. *Опцион* (option — выбор) — это ценная бумага (контракт), выпускаемая фирмами, корпорациями, банками и другими финансовыми институтами и дающая покупателю право купить или продать определенную ценность (например, акцию, облигацию, валюту, ...) в установленный период или момент времени на заранее оговоренных условиях.

Полезно отметить, что в отличии от опционов, дающих *право* на покупку или продажу, *фьючерс* или *фьючерсный контракт* (futures — заблаговременный, будущий контракт) — это *соглашение-обязательство* купить или продать определенную ценность (например, зерно, золото, валюту) в определенный момент в будущем по (фьючерсной) цене, оговариваемой в момент заключения соглашения.

Опционы обычно делятся на два класса — опционы *европейского* и *американского типа*. В случае опционов европейского типа его покупатель имеет право купить или продать некоторую ценность в заранее *фиксированный* момент, скажем, N. Если же покупателю предоставляется также *право выбора* и момента, скажем, $\tau(\leqslant N)$, исполнения опциона, то говорят, что это — опцион американского типа. Каждый опцион европейского типа характеризуется моментом исполнения N и функцией выплаты f_N.

Для *стандартного опциона-колл* (т. е. опциона покупателя)

$$f_N=(S_N-K)^+ \ (=\max(0,\ S_N-K)).$$

Для *стандартного опциона-пут* (т. е. опциона продавца)

$$f_N=(K-S_N)^+ \ (=\max(0,\ K-S_N)).$$

Опцион-колл покупается тогда, когда вы рассчитываете на повышение цен. Если окажется, что $S_N>K$, то по условиям контракта, вы имеете право *купить* рассматриваемый актив по льготной цене K. А значит, купив по этой цене и сразу же продав по (рыночной) цене S_N, вы будете иметь доход, равный S_N-K. Если же $S_N<K$, то

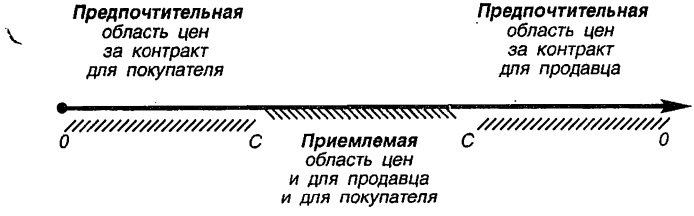
пользоваться предоставленным вам правом покупки по цене K бессмысленно (так как можно купить и по более низкой цене S_N) и, следовательно, ваш доход равен нулю.

Однако, конечно, за покупку опциона вы должны заплатить некоторую премию эмитенту (продавцу) опциона. И если вы заплатили эту премию в размере C_N, то в первом рассмотренном случае ($S_N > K$) ваш чистый доход будет равен $(S_N - K) - C_N$. Во втором же случае ($S_N \leqslant K$) ваш доход равен $-C_N$, т. е. на самом деле вы потеряли выплаченную эмитенту премию.

Кардинальный вопрос теории опционов состоит в определении величины C_N «справедливой» цены опциона и хеджирующей стратегии эмитента. Под *ценой (премией)* C_N принято понимать ту *минимальную* (начальную) стоимость, которая дает возможность эмитенту выполнить контрактные условия. Так определенная цена C_T действительно может рассматриваться как «справедливая»: отклонение от нее даст, как принято говорить *free-lunch (бесплатный ленч)* или продавцу или покупателю. Если назначаемая премия есть $x < C_N$, то продавец имеет free-lunch $x - C_N$ (он ведь может выполнить контрактное условие с начальным капиталом C_N). Если же премия $x < C_N$, то величину $C_N - x$ можно рассматривать как free-lunch покупателя (он купил контракт по более дешевой цене, а продавцу для выполнения контрактного условия надо иметь начальную цену C_N и, следовательно, он должен добавить до необходимого начального капитала величину $C_N - x$).

В случае безарбитражных рынков финансовая математика приводит к следующему качественному заключению: существуют две константы C_* и C^*, называемые нижней и верхней ценами соответственно, такие, что $C_* < C^*$ и если значение премии C_N лежит в интервале $[C_*, C^*]$, то ни продавец, ни покупатель не имеют *безрискового* дохода (не имеют free-lunch'а).

Интервал $[0, C_*)$ можно рассматривать как область *предпочтительных* (т. е. низких) цен за контракт для покупателя, интервал же (C^*, ∞) естественно назвать областью *предпочтительных* (т. е. высоких) цен за контракт для продавца. Наглядно сказанное можно проиллюстрировать следующим образом:



Совсем простым является случай *полных* рынков, тогда $C_* = C^* = C_N$, где

$$C_N = \tilde{M} f_N \tag{1.22}$$

есть в точности та *минимальная* начальная цена, которая дает возможность эмитенту опциона воспроизвести (в момент N) платежное поручение f_N (в общем случае безарбитражных рынков и предположения $B_N=1$ «верхняя» цена $C^*=\sup M_\beta f_N$, «нижняя» цена $C_*=\inf M_\beta f_N$, (где sup и inf берутся по классу всех мартингальных мер).

Как говорилось выше, задача теории расчетов не только в определении рациональной стоимости опционов, но и в том, как устроена (оптимальная) хеджирующая стратегия. Теория дает ответ и на этот вопрос. Не приводя здесь соответствующие результаты, остановимся лишь на некоторых примерах, которые иллюстрируют развитую здесь технику расчетов.

Пример 1.2. Пусть $N=1$, $r=0$, $B_0=1$ и $S_1=S_0(1+\rho_1)$, где $\rho_1=\begin{cases}b,\\a,\end{cases}$ $-1<a<0<b$. Иначе говоря, предполагается, что возможно как *повышение* цен ($S_0\uparrow S_1=S_0(1+b)$), так и *понижение* цен ($S_0\downarrow S_1=S_0(1+a)$). Пусть $f_1=(S_1-K)^+$, где $K=S_0$.

В рассматриваемом случае мартингальная мера $\tilde{P}$ существует и относительно нее $\tilde{P}(\rho_1=b)=\tilde{p}$, $\tilde{P}(\rho_1=a)=\tilde{q}$, где (см. (1.18))

$$\tilde{p}=\frac{-a}{b-a},\ \tilde{q}=\frac{b}{b-a}. \tag{1.23}$$

Согласно (1.22) рациональная стоимость

$$C_1=\tilde{M}f_1=\tilde{M}(S_1-K)^+=\tilde{M}(S_1-S_0)^+=S_0\tilde{p}b=S_0\frac{b|a|}{b+|a|}. \tag{1.24}$$

Для оптимального γ_1 общая теория дает такое выражение (в рассматриваемом случае):

$$\gamma_1=\frac{b}{b+|a|}, \tag{1.25}$$

а для β_1 соответствующее значение находится из условия $C_1=\beta_1+\gamma_1 S_0$, т. е

$$\beta_1=C_1-\gamma_1 S_0=S_0\frac{b|a|}{b+|a|}\ (|a|-1). \tag{1.26}$$

Обратимся к **числовым примерам.** Пусть имеется две валюты A и B, причем S_n — стоимость 100 единиц валюты A, измеряемой в единицах валюты B, $n=0,1$. Предположим, что $S_0=150$ (B) (т. е. 100 (A) = 150 (B)) и ожидается, что в момент $n=1$ цена S_1 может стать равной 180 (повышение курса валюты A) или 90 (понижение курса валюты A). Записывая $S_1=S_0(1+\rho_1)$, находим, что ρ_1 принимает два значения $b=\frac{1}{5}$ и $a=-\frac{2}{5}$. Значит

$$\tilde{p}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}=\frac{2}{3},\quad \tilde{q}=\frac{1}{3}$$

и, согласно (1.24) величина премии для стандартного опциона-колл с $f_N=(S_N-K)^+$ и $K=S_0$ будет для $N=1$ равна

$$C_1=150\cdot\frac{\frac{1}{5}\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}=20.$$

По формуле (1.25) имеем $\gamma_1=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{3}$ и по формуле (1.26) $\beta_1=-30$.

Рассмотрим теперь портфель π с $\beta_0=\beta_1=-30$, $\gamma_0=\gamma_1=\frac{1}{3}$. Тогда начальный капитал ($X^{\pi}_0=\beta_0+\gamma_0 S_0$) может быть записан в виде $20=$ $=-30+\frac{1}{3}\cdot 150\,(=\beta_0+\gamma_0 S_0)$. Отрицательность $\beta_0\,(=-30)$ означает, что с банковского счета взято 30 единиц валюты В, которые, разумеется, эмитентом должны быть возвращены обратно (предполагаем для простоты, что процентная ставка банковского счета $r=0$). Итак, у эмитента есть 50 единиц валюты В, которую он (по курсу 100 (А) = 150 (В)) превращает в валюту А, что даст ему $100:3=33.33$ единиц этой валюты.

Рассмотрим теперь момент $n=1$. Если в этот момент произошло повышение курса валюты А, то 33.33 (А) будут равны 60 (В). Этого количества эмитенту достаточно и чтобы вернуть долг (= 30 (В)) и выплатить покупателю (в соответствии с контрактом) величину $S_1-K=S_1-S_0=180-150=30$ (В). Если же произошло понижение курса, то выплачивать покупателю ничего не надо, но необходимо вернуть долг (= 30 (В)). Но 33.33 (А) по новому курсу 100 (А) = $=90$ (В) в точности дадут 30 (В), что эмитент и вернет на банковский счет.

Заметим, что в этом числовом примере эмитент ничего не выигрывает и в случае поднятия валюты А и в случае ее снижения. Однако, не надо забывать, что реальная ситуация более сложная и эмитент назначает, в действительности, более высокую величину премии в качестве, скажем, комиссионных за возможность покупателю «играть на рынке».

Приведем еще один пример.

Пример 1.3. Пусть снова 100 (А) = 600 (В) и возможны два случая:

$$S_0 = 600\,(\text{В}) \to \begin{cases} S_1 = 720\,(\text{В}) \\ S_1 = 400\,(\text{В}). \end{cases}$$

Здесь снова $b = \frac{1}{5}$, $a = -\frac{2}{5}$, $\tilde{p} = \frac{2}{3}$, $\tilde{q} = \frac{1}{3}$. По формуле (1.24) находим, что

$$C_1 = 600 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = 80.$$

Тогда с $\beta_0 = \beta_1 = -120$ и $\gamma_0 = \gamma_1 = \frac{1}{3}$ видим, что $80 = \beta_0 + \gamma_0 S_0 = -120 + \frac{1}{3} \cdot 600$. Тем самым, у эмитента есть 200 единиц валюты А.

Если произошло поднятие А, то 33.33 (А) будут (по курсу 100 (А) = 720 (В)) давать 720 : 3 = 240 единиц валюты В, что в точности равно той сумме, которую эмитент должен вернуть на банковский счет (120 (В)) и по условиям контракта выплатить покупателю (720 − 600 = 120 (В)).

Если же происходит падение курса валюты А, то выплачивать покупателю ничего не надо, но надо вернуть долг (120 (В)). Имеющиеся 33.33 (А) единиц (по курсу 100 (А) = 400 (В)) дадут 400 : 3 = = 133 (В). Вернув на банковский счет 120 (В) единиц эмитент будет в рассматриваемом примере иметь доход в 13 единиц валюты В.

В заключение данного параграфа отметим, что хотя приведенные расчеты носят простой арифметический характер, соответствующие вычисления становятся гораздо более сложными и трудоемкими в случае большого числа этапов N и более сложных моделей, описывающих эволюцию цен. В этом отношении результаты общей теории расчетов опционов, полученные в предположении отсутствия арбитражных возможностей, дают удобные формулы, которые действительно находят свое реальное применение в оперировании с различными опционами.

6. Формула Блэка и Шоулса. Формула, о которой идет речь, появилась в упомянутой в п. 1 работе Ф. Блэка и М. Шоулса, которая вместе с работой Р. Мертона, произвели, как говорилось выше, настоящую революцию в методологии теории расчетов опционов и других ценных бумаг. Эти авторы оперировали с (B, S)-моделью рынка, функционирующей в непрерывном времени. При этом предполагается, что

банковский счет $B = (B_t)$ эволюционирует по формуле $B_t = B_0 e^{rt}$,

а *цена акции* $S = (S_t)$ описывается формулой $S_t = S_0 e^{H_t}$,

где $H_t=\sigma\xi(t)+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t$ и $\xi(t)$ — винеровский процесс (броуновское движение).

Для процесса $S=(S_t)$ можно написать стохастическое дифференциальное уравнение

$$dS_t=S_t(\mu dt+\sigma d\xi(t)), \tag{1.27}$$

которое, переписанное в виде $\frac{dS_t}{S_t}=\mu dt+\sigma d\xi(t)$, весьма напоминает рассмотренные ранее представления $\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}=p_n$, где $p_n=\mu+\sigma\varepsilon_n$, где ε_n — независимые гауссовские величины, $\varepsilon\sim N(0, 1)$.

Рассмотрим (по аналогии со случаем дискретного времени) самофинансируемый портфель $\pi=(\beta, \gamma)$, $\beta=(\beta_t)$, $\gamma=(\gamma_t)$ и соответствующий ему капитал $X_t^\pi=\beta_t B_t+\gamma_t S_t$. Пусть теперь на данном (B, S)-рынке рассматривается стандартный опцион-колл с платежной функцией $f_T=(S_T-K)^+$.

Формула Блэка и Шоулса дает ответ на вопрос о том, какова *рациональная стоимость* C_T такого опциона. Оказалось, что

$$C_T=S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K}+T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right), \tag{1.28}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ — функция распределения стандартного нормального закона.

При этом оптимальный хеджирующий портфель $\pi^*=(\beta^*, \gamma^*)$ определеляется следующим образом:

$$\beta_t^*=-\frac{K}{B_0}e^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-1}}\right), \tag{1.29}$$

$$\gamma_t^*=-\frac{K}{B_0}e^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(T-t)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-1}}\right). \tag{1.30}$$

Интересно отметить, что если $t\uparrow T$ и в окрестности момента T цены $S_t>K$, то

$$\gamma_t^*S_t\to S_T,\ \beta_t^*B_t\to -K. \tag{1.31}$$

Если же в окрестности момент T цены $S_t < K$, то

$$\gamma_t^* S_t \to 0,\ \beta_t^* B_t \to 0. \tag{1.32}$$

Интерпретация этих свойств становится понятной, если учесть, что в первом случае капитал $X_T^{\pi^*}$ должен быть равным $S_T - K$, а во-втором случае, когда выплата покупателю не производится, соответствующее значение $X_T^{\pi^*}$ должно быть равно нулю. Приведенные соотношения (1.30) — (1.32) показывают, что хедж в точности обеспечивает выполнение отмеченных требований.

Приведем несколько простых чисто интуитивных соображений, с помощью которых можно вывести уравнение Блэка — Шоулса и соответствующую формулу (1.28) (См. P. Wilmott, S.Howson, J. Dewinne. «The mathematics of finantial derivatives. A student introduction.» Cambridge university press. 1997). Предположим, мы имеем опцион, величина V(S, t) которого зависит только от S и t. Вначале неважно, является ли этот опцион опционом- «колл» или -«пут». Используя формулу Ито и уравнение (1.27), получим

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\, d\xi(t) + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt. \tag{1.33}$$

Предполагаем при этом, что функция V имеет, по крайней мере, одну производную по t и две по S. Сконструируем теперь портфель, состоящий из одного опциона и некоторого количества Δ «ценности», приобретенной взаймы. Величина такого портфеля есть

$$\Pi = V - \Delta S. \tag{1.34}$$

Изменение $d\Pi$ за время dt есть $d\Pi = dV - \Delta\, dS$ и удовлетворяет соотношению

$$d\Pi = \sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) d\xi(t) + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S\right) dt. \tag{1.35}$$

Положим теперь

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \tag{1.36}$$

и это приводит к тому, что приращение $d\Pi$ записывается полностью детерминированной формулой

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt. \tag{1.37}$$

Требование исключить арбитражную ситуацию можно выразить условием

$$d\Pi = r\Pi dt, \tag{1.38}$$

что вместе с (1.37) дает

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt. \tag{1.39}$$

Наконец, в результате объединения соотношений (1.34) — (1.39) получаем дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{1.40}$$

В случае опциона- «колл» имеем $V(S, t) = C(S, t)$ и решаем это уравнение при условиях $C(0, t) = 0$, $C(S, t) \sim S$ при $S \to \infty$ и $C(S, T) = \max(S - K, 0)$. Следствием всех вышеуказанных рассуждений и является формула (1.28).

§ 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ НОРМЫ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

1. Определение и свойства логарифмической нормы. Чтобы охарактеризовать степень устойчивости нелинейных систем, часто удобно использовать логарифмическую норму матриц Якоби правой части рассматриваемых уравнений.

Сначала напомним несколько свойств логарифмической нормы*. Пусть R_n — действительное линейное пространство вектор-столбцов $x = (x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, с нормой $\|\cdot\|$. В линейном пространстве квадратных матриц $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, определим норму $\|A\|_1$ как

$$\|A\|_1 = \max_{x, \|x\| = 1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Легко видеть, что $\|Ax\| \leqslant \|A\|_1 \|x\|$ для любого вектора $x \in R_n$. Норма матрицы $\|A\|_1$, введенная выше, называется *операторной нормой матрицы* A, подчиненной норме $\|x\|$ вектора x. Она обладает тем свойством, что для любой матрицы A существует вектор x, не равный нулю и такой, что $\|Ax\| = \|A\|_1 \|x\|$. Вдобавок, $\|I\|_1 = 1$, где I — единичная матрица порядка $n \times n$.

Логарифмическая норма (или мера) $\gamma(A)$ матрицы A определяется равенством

---

*С. М. Лозинский. Оценка ошибки при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Известия вузов. Математика, № 5, 1958, с. 52 — 90. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В Теория показателей Ляпунова. — М., Наука, 1966.

$$\gamma(A)=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}[\|I+hA\|_1-1].$$

Логарифмическая норма может принимать отрицательные значения, т. е. это не норма в обычном смысле слова. Обозначим через $\lambda(A)$ — любое собственное значение матрицы A. Тогда верны следующие соотношения:

$$-\|A\|_1\leqslant-\gamma(-A)\leqslant\mathrm{Re}(\lambda(A))\leqslant\gamma(A)\leqslant\|A\|_1;$$
$$\gamma(AC)=C\gamma(A),\quad C\geqslant 0;$$
$$\gamma(A+CI)=\gamma(A)+C,\quad -\infty<C<\infty; \tag{2.1}$$
$$\gamma(CA+(1-C)B)\leqslant C\gamma(A)+(1-C)\gamma(B),\quad 0\leqslant C\leqslant 1;$$

где A и B — произвольные квадратные матрицы $n\times n$, $\mathrm{Re}\lambda$ обозначает действительную часть числа λ и C — некоторая постоянная. В таблице 1.1 даны выражения для некоторых норм вектора $x\in R_n$ вместе с подчиненными операторами и логарифмическими нормами матрицы A.

В табл. 2.1 штрих означает транспонирование, $\rho(A)$ — спектральная норма матрицы A, равная $\rho(A)=(\lambda_{\max}(A'A))^{1/2}$, число $\lambda_{\max}(A'A)$ — максимальное собственное значение матрицы $A'A$, заданные константы $\alpha_1>0$. Спектральная норма $\rho(A)$ равна максимальному сингулярному значению матрицы A.

Таблица 2.1

№	Норма вектора $\|x\|$	Операторная норма матрицы $\|A\|_1$	Логарифмическая норма $\gamma(A)$
1	$\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|$	$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\|a_{ij}\|$	$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(a_{jj}+\sum_{i\neq 1}\|a_{ij}\|\right)$
2	$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|x_i\|$	$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}\|$	$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(a_{ii}+\sum_{i\neq 1}\|a_{ij}\|\right)$
3	$(x'x)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$	$\rho(A)=(\lambda_{\max}(A'A))^{1/2}$	$\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A+A')=\lambda_{\max}\left(\frac{A+A'}{2}\right)$
4	$\sum_{i=1}^{n}\frac{\|x_i\|}{\alpha_i}$	$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\|a_{ij}\|$	$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(a_j a_{jj}+\sum_{i\neq 1}a_i\|a_{ij}\|\right)$
5	$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{\|x_i\|}{\alpha_i}$	$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\|a_{ij}\|$	$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(a_i a_{ii}+\sum_{j\neq 1}a_j\|a_{ij}\|\right)$

Первая из норм в табл. 2.1 называется *октаэдральной*, вторая — *кубической*, и третья — *евклидовой* или *сферической*, так как поверхности уровня формы $\|x\|=1$ для этих норм являются соответственно октаэдром, кубом и сферой.

Далее, рассмотрим скалярную функцию $Q(x, y)$ двух независимых переменных $x \in R_n$ и $y \in R_n$, задаваемую равенством

$$Q(x, y)=\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} [\|x+hy\|-\|x\|]. \tag{2.2}$$

Функция Q может также быть использована для оценки логарифмической нормы матрицы A. Действительно, справедливо соотношение

$$\gamma(A)=\sup_{x, \|x\| \neq 0} \frac{1}{\|x\|} Q(x, Ax), \quad x \in R_n. \tag{2.3}$$

Напомним, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $x(t) \in R_n$ и для любой нормы $\|\cdot\|$ в R_n имеем, учитывая формулу (2.2), что

$$\frac{d^+\|x(t)\|}{dt}=\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} [\|x(t+h)\|-\|x(t)\|]=Q(x(t), \dot{x}(t)). \tag{2.4}$$

2. Устойчивость нелинейных систем. Рассмотрим теперь проблему устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x}(t)=F(t, x(t)), \quad F(t, 0)=0, \quad t \geqslant t_0, \quad x(t_0)=x_0 \tag{2.5}$$

относительно возмущений начальной позиции x_0. Здесь функция $F(t, x)$ — непрерывна относительно всех своих аргументов и непрерывно дифференцируема по x. Обозначим через $f(t, x)$ матрицу Якоби: $f(t, x)=\partial F(t, x)/\partial x$ через D — область $(t \geqslant t_0) \times (\|x\| \leqslant r)$.

Теорема 2.1.* *Предположим, что существуют числа $r>0$, $a>0$ и норма $\|\cdot\|$ в R^n такие, что соответствующая логарифмическая норма $\gamma(f(t, x))$ удовлетворяет соотношению*

$$\sup_{(t, x) \in D} \gamma(f(t, x))=-a<0. \tag{2.6}$$

Тогда нулевое решение системы (2.5) асимптотически устойчиво.

□ Покажем, что при предположениях теоремы 2.1 существует функция Ляпунова V, удовлетворяющая требованиям Замечания 1 в § 2 из части 1 в области D. Возьмем произвольную точку $(t, x) \in D$ и положим $V(t, x)=\|x\|$. Очевидно, что эти функция положительно определена и имеет бесконечно малый верхний предел в смысле определения, данного в § 2, так как все нормы в R_n эквивалентны.

Необходимо напомнить, что две нормы $\|\cdot\|_a$ и $\|\cdot\|_b$ называются эквивалентными, если существуют постоянные $C_1>0$ и $C_2>0$ такие,

---

*Kolmanovskii V. B. Stability of Some Nonlinear Functional Differential Equations. — Nonlinear Differential Equations, (1995), Vol. 2. P. 880 — 892.

что для любого вектора $x \in R_n$ выполняются следующие неравенства: $C_1\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant C_2\|x\|_a$.

Далее, заметим, что для того, чтобы была верна Теорема 2.3 из части 1, достаточно, в силу Замечания 1 к этой теореме, чтобы правая полная производная функции V удовлетворяла неравенству (2.6). Проверим, что правая полная производная $\dot{V}$ отрицательно определена в D. В силу (2.4) и (2.5) имеем

$$\dot{V}(t, x) = Q(x, \dot{x}(t)) = Q(x, F(t, x)). \tag{2.7}$$

Преобразуем правую часть (2.7). Сначала, заметим, что

$$F(t, x) = \left| \int_0^1 f(t, sx)\, ds \right| x. \tag{2.8}$$

Следовательно,

$$Q(x, F(t, x)) = Q\left(x, \left| \int_0^1 f(t, sx)\, ds \right| x\right). \tag{2.9}$$

Однако в силу (2.3) верна следующая оценка:

$$Q\left(x, \left| \int_0^1 f(t, sx)\, ds \right| x\right) \leqslant \gamma\left(\int_0^1 f(t, sx)\, ds\right)\|x\|. \tag{2.10}$$

Из выпуклости логарифмической нормы (см. соотношения (2.1)) следует

$$\gamma\left(\int_0^1 f(t, sx)\, ds\right) \leqslant \int_0^1 \gamma(f(t, sx))\, ds. \tag{2.11}$$

Соотношения (2.9) — (2.11) означают, что $Q(x, F(t,x)) \leqslant$

$$\leqslant \left(\int_0^1 \gamma(f(t, sx))\, ds\right)\|x\|.$$

Поэтому, для любой точки $(t,x) \in D$ имеем $Q(x, F(t, x)) \leqslant -a\|x\|$.

Таким образом, учитывая отношение (2.7), можно записать $\dot{V} \leqslant -a\|x\|$, $(t, x) \in D$. Теорема 2.1 доказана. ■

Замечание. Выбор определенной нормы зависит только от удобства вычисления логарифмической нормы и уровня совместимости между полученными и желаемыми условиями устойчивости.

Пример 2.1. Рассмотрим двумерную линейную систему

$$\dot{x}_1(t) = -11x_1(t) + 10x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t).$$

Матрица Якоби f для этой системы постоянна и равняется

$$f = \begin{pmatrix} -11 & 10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\gamma(f) = -1$ для кубической нормы, $\gamma(f) = 7$ для октаэдральной нормы, и $\gamma(f) = 0{,}211$ для евклидовой нормы. Отсюда следует, что проверка на устойчивость исследуемой системы выполняется с помощью кубической нормы.

Рассмотрим далее систему

$$\dot{x}_1(t) = -11x_1(t) + 2x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = 10x_1(t) - 3x_2(t).$$

В этом случае матрица Якоби f имеет вид

$$f = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\gamma(f) = 7$ для кубической нормы, $\gamma(f) = -1$ для октаэдральной нормы, и $\gamma(f) = 0{,}211$ для евклидовой нормы. Отсюда следует, что проверка на устойчивость исследуемой системы выполняется с помощью октаэдральной нормы.

Наконец, рассмотрим систему

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 3x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -3x_1(t) - 2x_2(t).$$

В этот раз матрица Якоби f имеет форму

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\gamma(f) = 2$ для кубической нормы, $\gamma(f) = 2$ для октаэдральной нормы, $\gamma(f) = -1$ для евклидовой нормы. Отсюда следует, что проверка на устойчивость исследуемой системы выпоняется с помощью евклидовой нормы.

Следствие 2.1. *Предположим, что система (2.5) линейная и имеет вид*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{2.12}$$

Тогда, если $\lambda_{\max}(A(t) + A'(t)) \leqslant -2\sigma < 0$, $t_0 \leqslant t < \infty$, *то система (2.12) асимптотически устойчива.*

Доказательство. В качестве нормы в R_n выберем евклидову норму $\|x\| = (x'x)^{1/2}$. Так как матрица $f = A(t)$ и логарифмическая

норма $\gamma(A)$ определены в табл. 2.1, то из теоремы 2.1 следует, что если $\lambda_{\max}(A(t)+A'(t))\leqslant -2\sigma<0$, $t_0\leqslant t<\infty$, то система (2.12) асимптотически устойчива. Этот результат уже был получен в теореме 6.1 в части 1. □

Следствие 2.2. *Пусть матрица $f(t, x)$ равномерно отрицательно определена в D,* т. е. для любого $y\in R_n$

$$y'f(t, x)y\leqslant -Cy'y, \quad (t, x)\in D, \tag{2.13}$$

где $C>0$ — константа. Тогда система (2.5) асимптотически устойчива.

Доказательство. Действительно, за $\|x\|$ примем евклидову норму в R_n. Из равенства (2.2) следует, что

$$\gamma(f)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(f+f'). \tag{2.14}$$

Однако, так как матрица $(f+f')$ симметрическая, то имеем

$$\lambda_{\max}(f+f')=\max_{y\neq 0} y'(f+f')y\|y\|^{-2}.$$

Таким образом, учитывая отношение (2.13), можно записать

$$\lambda_{\max}(f+f')=2\max_{y\neq 0} y'fy\|y\|^{-2}\leqslant -2C.$$

Отсюда, в силу (2.2), логарифмическая норма $\gamma(f)\leqslant -C$, т. е. условие (2.6) теоремы 2.1 выполнено. ■

Следствие 2.3. *Предположим, что система (2.5) имеет вид*

$$\dot{x}(t)=F_1(t, x(t))x(t), \tag{2.15}$$

где $F_1(t, x(t))$ — матрица $n\times n$ с непрерывными ограниченными элементами, удовлетворяющая требованиям типа (2.б), т. е.

$$\sup_{(t,x)\in D} \gamma(F_1(t, x))=-a<0. \tag{2.16}$$

Тогда нулевое решение системы (2.15) асимптотически устойчиво.

□ Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2.1. Действительно, возьмем $V=\|x\|$. Тогда, в силу (2.3), получим, таким же путем как и в (2.7)

$$\dot{V}=Q(x, \dot{x}(t))=Q(x, F_1(t, x)x)\leqslant \gamma(F_1(t, x))\|x\|\leqslant -a\|x\|.$$

Таким образом, функция $V=\|x\|$ удовлетворяет предположениям теоремы 2.3 из части 1. Следовательно, система (2.15) асимптотически устойчина вский раз, когда выполняется условие (2.16) ■

Пример 2.2. Исслдуем устойчивость нулевого решения двумерной системы

$$\dot{x}(t)=Ax(x) \quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix}-\alpha & \alpha(t,x(t))\\ -\alpha(t,x(t)) & -\alpha\end{pmatrix}, \quad t\geqslant t_0, \quad (2.17)$$

где α — положительная константа, $\alpha(\,,x)$, $t\geqslant t_0$, $x\in R$, непрерывная ограниченная функция. В качестве $\|\cdot\|$ возьмем евклидову норму в R_2. Тогда, принимая во внимание (2.2), логарифмическая норма матрицы A равна — α, т. е. в силу Следствия 1, нулевое решение системы (2.17) асимптотически устойчиво при $\alpha>0$ и любой функции α.

Пример 2.3. Предположим, что система (2.5) имеет вид

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}F_{11}(t,\,x(t)) & F_{12}(t,\,x(t))\\ F_{21}(t,\,x(t)) & F_{22}(t,\,x(t))\end{pmatrix}x(t), \quad x\in R, \quad t\geqslant t_0, \qquad (2.18)$$

где $F_{ij}(t,\,x)$ — непрерывные ограниченные функции. В качестве $\|x\|$ возьмем октаэдральную норму. Тогда условием асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.18) будет существование области D вида $(t\geqslant t_0)\times(\|x\|\leqslant r)$ такой, что

$$\sup_{(t,x)\in D}\max[F_{11}(t,\,x)+|F_{21}(t,\,x)|,\, F_{22}(t,\,x)+|F_{12}(t,\,x)|]<0.$$

Но если взята кубическая норма, выполняется следующее условие устойчивости:

$$\sup_{(t,x)\in D}\max[F_{11}(t,\,x)+|F_{12}(t,\,x)|,\, F_{22}(t,\,x)+|F_{21}(t,\,x)|]<0.$$

Используя 4-ю и 5-ю нормы в табл. 2.1, получаем следующие соответственные условия устойчивости:

$$\sup_{(t,x)\in D}\max[\alpha_1F_{11}(t,\,x)+\alpha_2|F_{21}(t,\,x)|,\, \alpha_2F_{22}(t,\,x)+\alpha_1|F_{12}(t,\,x)|]=-\alpha<0,$$

$$\sup_{(t,x)\in D}\max[\alpha_1F_{11}(t,\,x)+\alpha_2|F_{12}(t,\,x)|,\, \alpha_2F_{22}(t,\,x)+\alpha_1|F_{21}(t,\,x)|]=-\alpha<0,$$

где $\alpha_1>0$ и $\alpha_2>0$ — положительные константы, которые выбираются так, чтобы получить наиболее удобные условия устойчивости.

Пример 2.4. Рассмотрим нелинейную двумерную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-\sin x_1+\cos x_2-1,\\ \dot{x}_2&=\cos x_1-\sin x_2-1.\end{aligned} \qquad (2.19)$$

Матрица Якоби $f(t,\,x)$ для этой системы может быть записана как

$$f(t,\,x)=\begin{pmatrix}-\cos x_1 & -\sin x_2\\ -\sin x_1 & -\cos x_2\end{pmatrix}. \qquad (2.20)$$

Так как для $|x_1|\leqslant\delta<\pi/4$ и $|x_2|\leqslant\delta<\pi/4$ выполняется следующее неравенство:

$$\gamma(f(t,\,x))=\sup_{\substack{|x_1|\leqslant\delta,\\ |x_1|\leqslant\delta}}\max[-\cos x_1+|-\sin x_2|,\,-\cos x_2+|-\sin x_1|]$$

$$\leqslant -\cos\delta + \sin\delta = -a < 0,$$

следовательно, логарифмическая норма матрицы (2.20), подчиненная кубической норме в R_n, удовлетворяет оценке $\gamma(f(t, x)) \leqslant \leqslant -\cos\delta + \sin\delta = -a < 0$. Поэтому при этом условии тривиальное решение системы (2.19) асимптотически устойчиво с областью притяжения $|x_1| \leqslant \delta < \pi/4$, $|x_2| \leqslant \delta < \pi/4$.

Асимптотическая устойчивость системы (2.19) может быть также установлена, используя теорему 7.4 из части 1 об устойчивости в первом приближении, так как в нашем случае система первого приближения имеет вид

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2.$$

Тем не менее, из теоремы 7.4 нельзя получить оценки области притяжения. Таким образом, использование логарифмической нормы иногда делает возможным получить больше информации о системе по сравнению с другими методами.

3. Использование нескольких логарифмических норм.* Приведем еще несколько утверждений об устойчивости, использующие несколько логарифмических норм. Рассмотрим сначала линейное нестационарное уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{2.21}$$

Теорема 2.2. *Пусть найдутся такие наборы логарифмических норм* $\gamma_1(A(t)), \ldots, \gamma_m(A(t))$ *и положительных чисел* $C_1, \ldots, C_m$, *что для всех* $t \geqslant t_0$ *выполняется неравенство*

$$C_1\gamma_1(A(t)) + \ldots + C_m\gamma_m(A(t)) \leqslant -C_{m+1} < 0. \tag{2.22}$$

Тогда тривиальное решение уравнения (2.21) экспоненциально устойчиво. Если для всех $t \leqslant t_0$ *выполняется условие*

$$\int_{t_0}^{t} [C_1\gamma_1(A(t)) + \ldots + C_m\gamma_m(A(t))]\,dt \leqslant C_{m+2}, \tag{2.23}$$

то тривиальное решение уравнения (2.21) устойчиво.

Если наряду с условием (2.23) выполнено условие

$$\int_{t_0}^{\infty} [C_1\gamma_1(A(t)) + \ldots + C_m\gamma_m(A(t))]\,dt = -\infty, \tag{2.24}$$

то тривиальное решение уравнения (2.21) асимптотически устойчиво.

□ Без ограничения общности будем считать, что $C_1 \geqslant 1, \ldots, C_m \geqslant 1$. Рассмотрим функцию

---

*Носов В. Р. Об устойчивости некоторых нестационарных уравнений. — Автоматика и телемеханика, 1997. С 9, 31 — 42.

$$V(x)=\|x\|_1^{C_1}\ldots\|x\|_m^{C_m},\ C_1\geqslant 1,\ \ldots,\ C_m\geqslant 1. \tag{2.25}$$

Функция (2.25) в силу эквивалентности норм в пространстве R_n удовлетворяет оценкам

$$C_{m+4}\|x\|_1^{C_1+\ldots+C_m}\leqslant V_{m+4}\|x\|_1^{C_1+\ldots+C_m},\ C_1\geqslant 1,\ \ldots,\ C_m\geqslant 1. \tag{2.26}$$

Правая производная функции (2.25) в силу уравнения (2.21) удовлетворяет оценке

$$\frac{d^+V(x)}{dt}=C_1\|x\|_1^{C_1-1}\|x\|_2^{C_2}\ldots\|x\|_m^{C_m}\frac{d^+\|x\|_1}{dt}+\ldots+$$
$$+C_m\|x\|_1^{C_1}\|x\|_2^{C_2}\ldots\|x\|_m^{C_m-1}\frac{d^+\|x\|_m}{dt}\leqslant(C_1\gamma_1(A(t))+\ldots+C_m\gamma_m(A(t)))V(x). \tag{2.27}$$

Интегрируя неравенство (2.27), получим

$$V(x(t))\leqslant V(x(t_0))\exp\left\{\int_{t_0}^{t}(C_1\gamma_1(A\ (s))+\ldots+C_m\gamma_m(A(s)))\,ds\right\} \tag{2.28}$$

Из оценки (2.28) и условий (2.22) — (2.24) вытекают утверждения теоремы 2.2 ■

Пример 2.5. Рассмотрим трехмерную систему (2.21) с матрицей $A(t)$ вида

$$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 4\sin t\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & \cos t & -6\end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Для этой матрицы октаэдральная норма равна $\gamma_1(A(t))=-1+|\cos t|$, а кубическая норма $-\gamma_2(A(t))=-3+4|\sin t|$. Это нормы не являются отрицательными, однако

$$3\gamma_1(A(t))+\gamma_2(A(t))=-6+3|\cos t|+4|\sin t|\leqslant -0{,}7<0,$$

поскольку $|\sin t|+|\cos t|\leqslant\sqrt{2}/2$, $|\sin t|\leqslant 1$ при всех t. По теореме 2.2 система (2.21) с такой матрицей $A(t)$ будет экспоненциально устойчива.

Пример 2.5. Изучим вопрос об устойчивости малых колебаний пространственного гирогоризонткомпаса, изображенного на рис. 1.

Уравнения малых колебаний пространственного гирогоризонткомпаса приведены в книге А. Ю. Ишлинского,* где показано, что описываются системой (2.21) с матрицей $A(t)$ вида:

---

*Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 & \Omega(t) \\ -\omega_0 & 0 & \Omega(t) & 0 \\ 0 & -\Omega(t) & 0 & -\omega_0 \\ -\Omega(t) & 0 & \omega_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

В матрице (2.30) ω_0 есть некоторая постоянная, а функция $\Omega(t)$ — достаточно произвольная ограниченная гладкая функция. Это обстоятельство создает значительные трудности при исследовании устойчивости малых колебаний пространственного гирогоризонткомпаса.

Применим теорему 2.2. Поскольку $A(t)+A'(t)=0$, то евклидова логарифмическая норма тождественно равна нулю, т. е. $\gamma_3(A(t))\equiv 0$. Значит выполняется условие (2.23) и поэтому малые колебания пространственного гирогоризонткомпаса устойчивы.

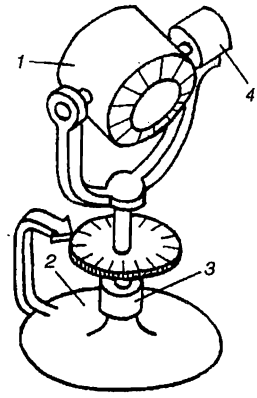


Рис. 1. Гиростабилизатор: *1* — подвес, *2* — горизонтальная платформа, *3* — гироторный привод, *4* — привод платформы

Пример 2.6. Рассмотрим двухмерную систему (2.21) с матрицей $A(t)$ вида

$$A(t)-\begin{pmatrix} -\alpha & \sin t \\ \sin t & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \geqslant 0. \quad (2.31)$$

Для такой матрицы октаэдральная норма равна

$$\gamma_1(A(t))=-\alpha+|\sin t|.$$

Используем теорему 2.2. Поскольку

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t |\sin s|\,ds\right)=\frac{2}{\pi},$$

то при $\alpha>2/\pi$ для матрицы (2.31) выполнены условия (2.23), (2.24), и тривиальное решение является асимптотически устойчивым. При $\alpha=2/\pi$ выполнено только условие (2.23), и тривиальное решение является устойчивым.

4. Устойчивость по первому нестационарному приближению. Установим одну теорему об устойчивости по первому нестационарному приближению. Рассмотрим нелинейное уравнение вида

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+f(t, x), f(t, 0)\equiv 0, x\in R^n, t\geqslant t_0. \quad (2.32)$$

Предположим, что нелинейность $f(t, x)$ удовлетворяет в некотором шаре $S_h^1=\{x\in R^n: \|x\|_1\leqslant h\}$ оценкам

$$|f(t, x)|\leqslant \beta_j\|x\|_j, \quad j=1, 2, ..., m, \quad x\in S_h. \quad (2.33)$$

Теорема 2.3. *Пусть нелинейность $f(t, x)$ удовлетворяет в некотором шаре $S_h^1=\{x\in R^n: \|x\|_1\leqslant h\}$ оценкам (2.33) и пусть найдутся такие наборы логарифмических норм $\gamma_1(A(t))$, ..., $\gamma_m(A(t))$ и положительных чисел C_1, ..., C_m, что для всех $t\geqslant t_0$ выполняется неравенство*

$$C_1\gamma_1(A(t))+\beta_1)+\ldots+C_m(\gamma_m(A(t))+\beta_m)\leqslant -C_{m+1}<0. \qquad (2.34)$$

Тогда тривиальное решение уравнения (2.32) экспоненциально устойчиво. Если для всех $t\geqslant t_0$ и некоторой нормы $\gamma_j(A(t))$ выполняется условие

$$\beta_j+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\gamma_j(A(s))\,ds\leqslant -C_j<0, \qquad (2.35)$$

то тривиальное решение уравнения (2.32) также будет экспоненциально устойчиво.

Доказательство этой теоремы близко к доказательству теоремы 2.2.

Пример 2.6. Рассмотрим нелинейную трехмерную систему вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-3x_1+4(\sin t)\,x_3+\alpha x_1x_2x_3,\quad \alpha\geqslant 0,\\ \dot{x}_2&=-x_2,\\ \dot{x}_3&=(\cos t)\,x_2-6x_3.\end{aligned} \qquad (2.36)$$

Определим, при каких значениях $\alpha>0$ шар $S_1^1=\{x\in R^3: \|x\|_1=|x_1|+|x_2|+|x_3|\leqslant 1\}$ лежит в области притяжения тривиального решения уравнения (2.36).

Матрица $A(t)$ нестационарного первого приближения имеет вид (2.29) и для нее

$$3\gamma_1(A(t))=\gamma_2(A(t))=-6+3|\cos t|+4|\sin t|\leqslant -0{,}7<0.$$

Нелинейность в уравнении (2.36) удовлетворяет оценкам:

$$|f(x_1, x_2, x_3)|\leqslant\alpha|x_1x_2x_3|\leqslant\alpha(|x_1|+|x_2|+x_3|)^3=\alpha\|x\|_1^3\leqslant\alpha\|x\|_1,\ x\in S_1^1,$$

$$|f(x_1, x_2, x_3)|\leqslant\alpha|x_1x_2x_3|\leqslant\alpha(\max_{1\leqslant i\leqslant 3}|x_i|)=$$
$$=\alpha\|x\|_2^3\leqslant\alpha\|x\|_1^2\|x\|_2\leqslant\alpha\|x\|_2,\ x\in S_1^1.$$

Значит при $0<\alpha\leqslant 0{,}15$ будет

$$3\{\gamma_1(A(t))+\alpha\}+\{\gamma_2(A(t))+\alpha\}=$$
$$=3\gamma_1(A(t))+\gamma_2(A(t))+4\alpha\leqslant -0{,}7+0{,}6<0.$$

По теореме 2.3 при $0<\alpha\leqslant 0{,}15$ тривиальное решение уравнения (2.34) будет экспоненциально устойчиво и шар S_1^1 лежит в области его притяжения.

ЛИТЕРАТУРА

К первой части

1. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
2. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. Дуб Дж. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956.
6. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Стохастическая устойчивость и управление. — М.: Изд. МИЭМ, 1983.
7. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость управляемых систем. — М.: Изд. МИЭМ, 1987.
8. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
9. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
10. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
11. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.
12. Матросов В. М. Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова I—IV//Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. Вып. 8; 1968. Т. 4. Вып. 10; 1969. Т. 5. Вып. 7; 1969. Т. 5. Вып. 12.
13. Мешалкин Л. Д. Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Изд-во МГУ, 1963.
14. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965.
15. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. Задачи по теории вероятностей. — М.: Наука, 1986.
16. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987.
17. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980.
18. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1966.
19. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. — М.: Мир, 1985.
20. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
21. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.
22. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. — М.: Гостехиздат, 1955.
23. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.

Ко второй части

1. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. — М.: Наука, 1984.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.

3. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992.
4. Атанс М., Фалб П. Л. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.
6. Брайсон Д., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.
7. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979.
8. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. — Минск: Изд-во БГУ, 1981.
9. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
10. Гирсанов И. В. Лекции по теории экстремальных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1970.
11. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой. — М.: Наука, 1967.
12. Зубов В. И. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
13. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977.
14. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. — М.: Наука, 1973.
15. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
16. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. — Дополнение к книге И. Г. Малкина: Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1965.
17. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
18. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
19. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1975.
20. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
21. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. — М.: Наука, 1969.
22. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
23. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления. — В сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, 1977. Т. 14.

К третьей части

1. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана—Бьюси. — М.: Наука, 1982.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968.
4. Колосов Г. Е. Синтез оптимальных автоматических систем при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1984.
5. Лебедев А. А., Красильщиков М. Н., Малышев В. В. Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1974.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
7. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1973.

8. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
9. Острём К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973.
10. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
11. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1978.

К четвертой части

1. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления/Под ред. А. А. Воронова и И. А. Орурка. — М.: Наука, 1984.
2. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1969.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. — М.: Физматгиз, 1959, ч. 1; 1962, ч. 2.
5. Болнокин В. Е., Чинаев П. И. Анализ и синтез систем автоматического управления на ЭВМ. Алгоритмы и программы. — М.: Радио и связь, 1986.
6. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
7. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980.
8. Икрамов Х. Б. Численное решение матричных уравнений. — М.: Наука, 1984.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
10. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980.
11. Мелса Дж. Л., Джонс Ст. К. Программы в помощь изучающим теорию линейных систем управления. — М.: Машиностроение, 1981.
12. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1975.
13. Носов В. Р. Алгоритмы решения задач линейной алгебры. — М.: Изд. МИЭМ, 1983.
14. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
15. Самарский А. А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1982.
16. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. — М.: Мир, 1979.
17. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970.
18. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. — М.: Машиностроение, 1976.
19. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963.
20. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
21. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.
22. Armstrong E. A. ORACLS: A design system for linear multivariable control. — Marcel Dekker, New-York, Bazel, 1980.
23. Butcher J. S. The numerical analysis of ordinary differential equations; Runge—Kutta and general linear methods. — John Wiley, 1987.

Алгебраическое уравнение Риккати 281 — 283, 299, 488 — 490, 494, 527, 528
Алгоритм BS 482 — 484
Асимптотическая устойчивость 12, 13, 29, 57 — 60, 63, 87 — 89
A-устойчивый метод 518

Билинейная система 108

Вектор состояния 107
Векторная функция Ляпунова 27
Винеровский процесс 71, 72, 98
Вложенные методы 504
Возмущенное решение 9
Второй метод Ляпунова 6, 15 — 20, 61, 62, 89 — 91, 269 — 271, 364 — 368
Выборочная функция случайного процесса 70
Вырожденная функция Ляпунова 57, 66

Гауссовский случайный процесс 71
Гиростат 390
Годограф Михайлова 33
Градиентный метод 64, 65

Двойственные задачи 238, 417
Дискретная система 5
Дискретное уравнение Ляпунова 478
Допустимая совокупность параметров 116
— функция 169
Допустимое управление 269, 292, 344, 364, 381, 395

Жесткая система 514
Жорданова форма матрицы 30

Задача адаптивной стабилизации 290, 291
— асимптотической стабилизации 268
— Больца 109, 129, 135 — 137, 158, 159, 163 — 165, 208, 299, 342
— быстродействия 109, 129
— Годдарда 125
— квазилинейной стабилизации 284 — 290, 300
— Лагранжа 109, 115, 116, 129, 342
— линейного оценивания 410 — 414, 432
— Майера 109, 129, 135 — 137, 158, 161 — 163, 168, 169, 208, 342
— о бинарной дистиляционной колонне 557
— — вертикальном подъеме ракеты-зонда 553, 554
— — движении твердого тела, закрепленного в одной точке 22, 23
— — двухзвенном роботе-манипуляторе 234 — 236
— — максимизации скорости ракеты 157, 158
— — маятнике в среде с вязким трением 26, 27
— — мягкой посадке на Луну 125 — 128
— — наблюдателе в системе стабилизации ЛА 247 — 251
— — плоском переходе КА с одной круговой орбиты на другую 192 — 194
— — повороте вала электродвигателя на максимальный угол 166 — 168
— роботе типа «Циклон» 54 — 56
— — системе АПЧ гетеродинного приемника 35 — 37
— — стабилизации движения робота-манипулятора 274 — 278
— — — системы из перевернутых маятников 555, 556
— об автоматической стабилизации курса корабля 100, 101
— — автопилоте ЛА 554
— — однозвенном роботе-манипуляторе 53, 54
— — оптимальном быстродействии 210 — 222, 380 — 389
— — — режиме снижения мощности ядерного реактора 265, 266
— — — управлении вращением КА 217 — 220
— — — — движением гиростата 389 — 395
— — — — — с регулируемым трением 186 — 191
— — — — намоткой провода 146 — 148, 362, 363

— — — — полетом РА 110, 111
— — — — помехой 449 — 454
— — — — самолетом «Боинг-747» при посадке 492, 493
— — — — электродвигателем 116 — 119
— — оптимизации переходных процессов в ядерном реакторе 122 — 124
— — оптимуме мощности ядерного реактора 119 — 122, 184 — 186
— — управлении боковым движением автобуса 558, 559
— — успокоении материальной точки 213 — 215, 387 — 389, 397 — 399
— — — маятника 215 — 217, 401 — 403
— — — твердого тела 264, 265, 384 — 387, 404, 405
— — устойчивости движения снаряда 20 — 22, 52
— оптимального сочетания управления и наблюдения 342, 348, 349, 454 — 466
— оптимальной стабилизации 268, 269, 527, 528
— — стохастической стабилизации 343, 364
— оптимизации процесса наблюдения 341, 342, 434 — 454
— с изопериметрическими ограничениями 111, 175 — 179
— — произвольным временем окончания процесса управления 168 — 183
— со свободным правым концом и фиксированным временем 130 — 137, 161 — 168
— стохастического быстродействия 343, 408
— управления с вероятностным функционалом 395 — 408
— фильтрации 409, 422 — 428
— Чаплыгина 155, 156
— экспоненциальной стабилизации 268, 271 — 274
Закон дробно-линейного тангенса 158
— Олли 103
— повторного логарифма 72, 98

Игольчатая вариация управления 162
Импульсные законы наблюдения 436, 442 — 449, 466
Инвариантный нуль системы 252
Итерационные методы 469, 473 — 476, 494

Канонический вид линейной нестационарной системы 230, 231
— — — стационарной системы 228 — 230, 257
Квадратичный функционал 110
Квазилинейная система 284
Константа Ляпунова 45
Контрольные члены 504
Корреляционная матрица случайного процесса 71, 98
Критерий качества 108, 128, 292, 342, 377, 378
— Льенара — Шипара 33
— Матросова 26, 65
— Михайлова 34, 66
— наблюдаемости Хаутуса 239
— Рауса — Гурвица 32, 65, 476
— управляемости линейной нестационарной системы 226 — 228, 256
— — — стационарной системы 222 — 224, 256
— — Хаутуса 231, 232, 256
— устойчивости линейной стационарной системы 31, 32
QR-алгоритм 473 — 476, 482 — 484, 489, 490, 494

Лемма Гронуолла — Беллмана 41, 66
— об измеримом выборе 307
Линейная система 108
Линейно-квадратичная задача 137
— — нестационарная 278, 279
— —, общая постановка 137 — 148, 159
— —, оптимальное сочетание управления и наблюдения 455 — 457
— —, решение методом динамического программирования 266, 267
— — стационарная 278, 279, 299
— — стохастическая 353 — 362, 377 — 379
— —, численные методы решения 487 — 490, 521 — 528
Логистическое уравнение 102, 103
Локальная погрешность метода 496
Ляпуновская задача 116

Марковские диффузионные процессы 81 — 83
Марковское управление 340
Матрица Гурвица 32
— линейной многомерной системы 251
— монодромии 43
— состава измерений 236
— управляемости 222
Матричное уравнение Бернулли 140
— — Ляпунова 47 — 50
— — Риккати 139 — 143, 159
Метод Абрамова 541 — 543, 551
— Гира 520
— динамического программирования 258 — 301, 343 — 352

— «замороженных» коэффициентов 39
— Зубова 477, 478, 494
— Крылова 470, 471
— Леверрье 471
— линеаризации 52
— матричной сигнум-функции 481, 482, 494
— множителей Лагранжа 148 — 151
— Ньютона 533, 534
— переноса краевых условий 539 — 541, 551
— последовательных приближений 142, 143, 279, 280, 354, 370 — 377, 405 — 408
— рядов 479, 480, 494
— типа Рунге — Кутта 496, 497, 518, 519
— установления 281, 282
— Шатровского 543 — 546, 551
— штрафных функций 167
— Федоренко 547 — 552
— Эйлера 496, 528
— Якоби 473
Минимизируемый функционал 108, 128, 342, 377
Минимизирующая последовательность управлений 303
Многошаговые методы 505 — 514, 529
Множество управляемости 220 — 222
Модель Кушинга 196
— Лотки — Вольтерра 198, 199
— Мальтуса 195
— Марчука 552, 553
— Моно 200
— Хатчинсона 196
Мультипликатор Флоке 43

Наблюдаемая система 238
Наблюдаемость линейных систем 238, 257
Наблюдатель 243
— полного порядка 243, 244, 257
— пониженного порядка (Люенбергера) 246, 257
Наилучшая в среднеквадратическом смысле оценка 409
Невозмущенное решение 147
Нелинейная фильтрация 430 — 432
Непрерывная система 5
Непрерывное уравнение Ляпунова 478
Неравенство Бажевского 40
— Коши — Буняковского 131
— Чебышева 88
Неустойчивое по Ляпунову решение 11

Область притяжения 13
Обновляющий процесс 349
Обратное уравнение Колмогорова 82, 83
Общая многошаговая формула 505, 528, 529
Ограничения на траекторию 111, 112, 128
— — управление 114, 115, 128, 129, 339 — 342, 377
Одношаговые методы 496 — 505, 528
Оператор сдвига 43
Оптимальная совокупность параметров 116
Оптимально стабилизирующее управление 269
Оптимальный вылов популяции 202
Особое оптимальное управление 312
Оценки погрешностей многошаговых методов 513, 529
— — одношаговых методов 501, 502, 503, 528
— приближений в задаче квазилинейной стабилизации 287, 290, 374, 375, 377, 379

Параметрический резонанс 46
Передаточный нуль системы 254
Погранслой 515
Полная проблема собственных значений 469
Порядок аппроксимации метода 496
Принцип динамического программирования 258, 345, 346
— максимума (Понтрягина) 162
— — для дискретных систем 181 — 183, 209
— — — задачи Больца 164, 208
— — — — Майера 161 — 163, 208
— — — — со свободным правым концом 173, 174, 209
— —, связь с классическим вариационным исчислением 180, 181
— —, — — методом динамического программирования 262 — 264
— Рунге 503, 504
— сравнения Матросова 27, 28, 65
Производная функции Ляпунова в силу уравнения 15, 16
Производящий оператор марковского процесса 82, 83
Процесс броуновского движения 71
Псевдообратная матрица 485
П-регулятор 54, 469
П-управление 112, 340, 358, 359
p-устойчивое решение 87

Равномерная асимптотическая устойчивость 14, 61
— устойчивость 61
— — по вероятности 88
— — — начальному моменту 11
Разностная формула 505

Регулярная часть решения 515
Регулятор прямого действия 113
— температуры 112, 113
Робастная устойчивость 37, 38, 65

Связка интегралов 21
Сигнум-функция от матрицы 481
Сильно устойчивая по Дальквисту многошаговая формула 513, 529
Сингулярно возмущенная задача 119
— — система 514
Сингулярные числа матрицы 485
Система с последействием 5, 13
— — распределенными параметрами 5
Скалярное наблюдение в скалярной системе 450 — 453
Скользящие оптимальные режимы 324 — 331
Слабая устойчивость по вероятности 87
Случайный процесс 70
Стабилизация динамических систем 268 — 278
— квазилинейных систем 283 — 291
— линейных систем 278 — 283, 299, 487 — 493, 527, 528
— стохастических систем 368, 369, 378, 379
Стабилизирующее управление 268, 484
Стационарное уравнение 51
Степень формулы 497, 506, 529
Стохастическая система 5
Стохастический дифференциал 18
— интеграл 74
— — Ито 74, 98
— — Стратоновича 74, 98
Стохастическое дифференциальное уравнение 73, 74
С-управление 112, 260 — 262, 340, 521, 522
Сходимость в среднеквадратическом 74

Теорема Беллмана 42, 66
— Марачкова 18
— Ляпунова вторая 17, 18, 65
— — первая 16, 17, 65
— — об устойчивости по первому приближению 51, 66
— о каноническом виде линейной стационарной системы 228, 229, 257
— — множителях Лагранжа 148, 149
— — связи между функцией и уравнением Беллмана 350, 351
— об асимптотической устойчивости линейной нестационарной системы 40, 41
— — оптимальном импульсном законе наблюдения 442 — 446
— — управляемости линейной нестационарной системы 225, 226, 256
— — устойчивости линейной системы 10
— — — одноконтурной САР 37
— — — периодической системы 44
— Персидского 17
— Румянцева 29, 65
— Стодолы 32
— существования и единственности решения уравнения Ито 81, 82, 99
— Флоке 43, 66
— Харитонова 38
— Четаева 19, 65
Теоремы Барбашина — Красовского 18, 19, 25, 65
— Дальквиста 513, 514
— Матросова 26 — 28, 65
— о вырожденных функциях Ляпунова 58 — 60, 66
— — матричных уравнениях Ляпунова 48 — 50, 66
— — наблюдаемости линейных систем 239, 257
— — необходимых условиях оптимальности 132 — 135, 164, 173
— — существовании стабилизирующего управления в ЛК-задаче 279, 280
— — точках переключения 211 — 213, 256
— об оптимальной стабилизации 269 — 274, 364 — 369
— — устойчивости дискретных систем 62 — 64, 66
— — — стохастических систем 89 — 91
— Хасьминского 89 — 91, 99
Точка переключения управления 211
Точные методы 469 — 473, 494

Управление по принципу обратной связи 112
— помехой при наблюдении за материальной точкой 453, 454
— системой «хищник — жертва» 201 — 208
— численностью народонаселения 203
Управляемая система 222
Управляемость линейных нестационарных систем 225 — 228, 256
— — стационарных систем 222 — 225, 231, 232, 256, 486, 487
Уравнение Беллмана 260, 347, 349, 350, 377, 378, 405, 406
— Ван-дер-Поля 101
— в конечных разностях 61
— Винера — Хопфа 412, 432

— Гудвина 103
— Ито 75, 76, 98
— Колмогорова — Чепмена 346
— Льенара 102
— Матье 45
— первого приближения 50
— с последействием 340
— Стратоновича 75, 98
— Ферхюльста 195
— Эйлера 148, 159
Уравнения Крылова 20, 21
— Мещерского 125
— фильтра Калмана 420, 432
— эволюции системы 107, 128, 339, 377
— Эйлера движения твердого тела 23, 108
Условие Келли 314
— Маиевского — Крылова 22
— максимальности 176
— общности положения 211, 256
Условия дополняющей нежесткости 149, 160, 176
— Куна — Мойера 314
— на подвижные концы 149, 159, 176
— неположительности 149, 160, 176
— стационарности 149, 159
— трансверсальности 148, 159, 176
Устойчивая матрица 32
— по Дальквисту многошаговая формула 512, 529
Устойчивость 6
— в среднеквадратическом 88
— по вероятности 88
— — — движений спутника 95 — 97
— — заданным переменным 63
— — Ляпунову 9 — 11, 57
— — части переменных 28, 29
— при постоянно действующих возмущениях 15
Устойчивый многочлен 32

Фильтр Калмана 247, 417 — 433
Форма Шура матрицы 474
Формула Гилла 499
— Ито 78, 99
— коррекции по Милну 509
— Коши 131
— прогноза по Милну 509
— Рунге — Кутта 497, 528
— Рунге — Кутта — Фельдберга 504
— «3/8» 499
Формулы Адамаса 507, 508, 529
— Бутчера 514
— Милна 509, 529
— типа Рунге — Кутта 497, 498, 528
— Штермера 508
Функция Беллмана 258, 259, 299, 344, 349 — 352, 377, 379
— Ляпунова 15
f-устойчивое решение 58, 60, 61

x-устойчивое решение 29

Четеринг-режим 318
Численно устойчивая многошаговая формула 512

Эволюционная система 5
Экспоненциальная устойчивость 14, 15, 87

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 5

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Глава I. Непрерывные и дискретные детерминированные системы . . 8

§ 1. Основные определения теории устойчивости для непрерывных систем 8

1. Устойчивость (8). 2. Асимптотическая устойчивость (12). 3. Другие понятия устойчивости (14)

§ 2. Второй метод Ляпунова 15
§ 3. Примеры использования метода Ляпунова . . 20

1. Устойчивость движения снаряда (20). 2. Движение твердого тела, закрепленного в одной точке (22)

§ 4. Развитие метода Ляпунова . 24

1. Теорема Барбашина — Красовского (24). 2. Критерий Матросова (26).
3. Принцип сравнения (27). 4. Устойчивость по части переменных (28)

§ 5. Устойчивость линейных стационарных систем . 29

1. Критерий Рауса — Гурвица (29). 2. Частотные критерии устойчивости (33). 3. Система автоматической подстройки частоты гетеродинного приемника (35). 4. Линейные одноконтурные системы автоматического регулирования (37). 5. Робастная устойчивость (37).

§ 6. Устойчивость линейных нестационарных уравнений . 39

1. О методе замороженных коэффициентов (39). 2. Системы с почти постоянной матрицей (41). 3. Линейные системы с периодическими коэффициентами (43). 4. Уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами (44). 5. Параметрический резонанс в технике (46).

§ 7. Функции Ляпунова для линейных стационарных систем и устойчивость по первому приближению 47

1. Матричное уравнение Ляпунова (47). 2. Устойчивость по первому приближению (50). 3. Вращательное движение снаряда (52). 4. Нестационарные уравнения первого приближения (53).

§ 8. Построение систем управления робота-манипулятора на основе метода Ляпунова 53

1. Однозвенный робот-манипулятор (53). 2. Робот типа «Циклон» (54).

§ 9. Применение вырожденных функций Ляпунова . 56
§ 10. Устойчивость дискретных систем . 61

1. Второй метод Ляпунова (61). 2. Линейные стационарные уравнения (62). 3. Устойчивость по первому приближению (63). 4. Устойчивость по заданным переменным (63). 5. Безусловная минимизация функций (64).

Основные результаты и формулы главы I . 65

Глава II. Устойчивость стохастических систем . 67

§ 1. Введение 67
§ 2. Некоторые сведения из теории вероятностей и теории случайных процессов 68

1. Основное вероятностное пространство (68). 2. Случайные величины (68). 3. Случайные процессы (70).

§ 3. Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения 73

1. Стохастические интегралы Ито и Стратоновича (73). 2. Формула Ито (77). 3. Марковские диффузионные процессы (81). 4. Линейные стохастические уравнения (84).

§ 4. Определения стохастической устойчивости . 86
§ 5. Применение второго метода Ляпунова . 89

1. Достаточные условия устойчивости (89). 2. Устойчивость линейных систем в среднеквадратическом (92). 3. Скалярные уравнения n-го порядка (94).

§ 6. Устойчивость по вероятности движений спутника . 95

1. Устойчивость по тангажу симметричного спутника на круговой орбите (95). 2. Устойчивость по углу рыскания спутника на круговой и экваториальной орбитах (97).

Основные результаты и формулы главы II . 97
Упражнения к первой части . 100

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

УПРАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ

Глава III. Описание задач управления 106

§ 1. Введение 106
§ 2. Постановка задач оптимального управления . 107

1. Уравнения эволюции системы (107). 2. Минимизируемый функционал (критерий качества) (108). 3. Ограничения на траекторию (111). 4. Ограничения на управление (112). 5. Совместные ограничения (115).

§ 3. Примеры конкретных технических задач оптимального управления 116

1. Оптимальное управление электродвигателем (116). 2. Оптимизация характеристик ядерных реакторов (119). 3. Оптимальное управление космическими аппаратами (124).

Основные результаты и формулы главы III 128

Глава IV. **Классическое вариационное исчисление в задачах оптимального управления** . 130

§ 1. Задачи со свободным правым концом и фиксированным временем 130

1. Основные предположения (130). 2. Формула Коши (131). 3. Необходимые условия оптимальности (132). 4. Задача Больца (135).

§ 2. Оптимальное управление линейными системами с квадратичным функционалом . 137

1. Необходимые условия оптимальности (137). 2. Построение оптимального управления (138). 3. Матричное уравнение Риккати (139). 4. Скалярный случай (143). 5. Оптимальное управление намоткой провода (146).

§ 3. Необходимые условия оптимальности. Метод множителей Лагранжа . 148

1. Метод множителей Лагранжа (148). 2. Фиксированные начало, конец движения и начальное состояние (151). 3. Фиксированные начало и конец движения, свободные начальное и конечное положения (152). 4. Задачи с фиксированными значениями некоторых переменных состояния в заданные моменты начала и конца движения (152). 5. Задачи с неопределенным моментом окончания движения (154). 6. Задача Чаплыгина (155). 7. Максимизация скорости ракеты в участка выведения ее на прямолинейную траекторию (157).

Основные результаты и формулы главы IV 158

Глава V. **Принцип максимума** . 161

§ 1. Задачи со свободным правым концом и заданным временем . 161

1. Задача Майера (161). 2. Задача Больца (163). 3. О решениях уравнений принципа максимума (165). 4. Поворот вала электродвигателя на максимальный угол (166).

§ 2. Задачи с произвольным временем окончания процесса управления 168

1. Сведение к задаче Майера (168). 2. Необходимые условия оптимальности для линейных по скалярному управлению систем (169). 3. Случай многомерного управления (173). 4. Случай стационарных систем (174). 5. Перевод системы с многообразия на многообразие (174). 6. Задачи управления с изопериметрическими ограничениями (175). 7. Достаточность принципа максимума (179). 8. Связь принципа максимума и классического вариационного исчисления (180). 9. Принцип максимума для дискретных систем (181).

§ 3. Конкретные приложения принципа максимума . 184

1. Оптимальная компоновка ядерного реактора (184). 2. Управление движением с регулируемым трением (186). 3. Задача о плоском переходе космического аппарата с одной круговой орбиты на другую (198).

§ 4. Управление экологическими системами . 194

1. Уравнения, описывающие эволюцию отдельной популяции (195). 2. Сообщества двух видов и более (198). 3. Постановка задач управления экологическими системами (201). 4. Управление по быстродействию системой «хищник — жертва» (203).

Основные результаты и формулы главы V 208

Глава VI. Линейные управляемые системы . 210

§ 1. Задача об оптимальном быстродействии 210

1. Оценка числа точек переключения (210). 2. Успокоение материальной точки (213). 3. Успокоение маятника (215). 4. Управление вращением осесимметричным космическим аппаратом (217). 5. Множество управляемости (220).

§ 2. Управляемость линейных систем . 222

1. Управляемость линейных стационарных систем (222). 2. Управляемость линейных нестационарных систем (225). 3. Канонический вид линейных стационарных систем управления (228). 4. Канонический вид линейных нестационарных систем управления (230). 5. Критерий управляемости Хаутуса (231). 6. Управляемость двухзвенного манипулятора (234).

§ 3. Наблюдение в линейных системах. Наблюдатели . 236

1. Постановка задач наблюдения. Двойственность задач управления и наблюдения. Условия наблюдаемости (236). 2. Об одном способе определения вектора состояния (242). 3. Наблюдатель полного порядка (243). 4. Наблюдатель пониженного порядка (наблюдатель Люенбергера) (244). 5. Наблюдатель пониженного порядка в системе стабилизации летательного аппарата (247).

§ 4. Линейные многомерные стационарные системы управления и их нули 251

Основные результаты и формулы главы VI . 256

Глава VII. Метод динамического программирования. Достаточные условия оптимальности . 258

§ 1. Уравнение Беллмана и его свойства . 258

1. Принцип динамического программирования. Эвристический вывод уравнения Беллмана (258). 2. Построение С-управления с помощью метода динамического программирования (260). 3. Связь метода динамического программирования и принципа максимума (262). 4. Построение С-управления в задаче об успокоении твердого тела (264). 5. Оптимальный режим снижения мощности ядерного реактора (265). 6. Линейно-квадратичная задача (266).

§ 2. Управление на неограниченном интервале времени. Стабилизация динамических систем . 268

1. Постановка задач (268). 2. Второй метод Ляпунова в задаче оптимальной стабилизации (269). 3. Экспоненциальная стабилизация (271). 4. Стабилизация движения робота-манипулятора (274).

§ 3. Стабилизация линейных систем . 278

1. Нестационарные линейно-квадратичные задачи (278). 2. Метод последовательных приближений для определения оптимального управления (279). 3. Стационарная линейно-квадратичная задача (280). 4. Алгебраическое уравнение Риккати (281).

§ 4. Стабилизация квазилинейных систем . 284

1. Квазиоптимальная стабилизация и оценка ее погрешности (284). 2. Адаптивная стабилизация (290).

§ 5. Достаточные условия оптимальности, использующие вспомогательные функции 291

1. Условия оптимальности (291). 2. Достаточные условия существования минимизирующей последовательности (296). 3. Задачи с нефиксированным временем (297).

Основные результаты и формулы главы VII . . 299

Глава VIII. Некоторые дополнительные вопросы теории оптимального управления 302

§ 1. Существование оптимального управления . 302

1. Постановка задачи и основные предположения (302). 2. Основная теорема (303). 3. Анализ условий основной теоремы (308).

§ 2. Особые оптимальные управления . 310

1. Определение и вычисление особых управлений (310). 2. Оптимальность особых управлений (313). 3. Обобщение условий Келли и Коппа — Мойера (316).

§ 3. Четеринг-режимы 318
§ 4. Скользящие оптимальные режимы . 324

Основные результаты и формулы главы VIII . 330
Упражнения ко второй части . 331

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Глава IX. Постановки задач и методы исследования . 338

§ 1. Постановка задач управления стохастическими системами . 338

1. Уравнения системы (339). 2. Ограничения на управление (339). 3. Целевой функционал (критерий качества) (342).

§ 2. Метод динамического программирования . 343

1. Функция Беллмана (344). 2. Уравнение Беллмана (345). 3. Связь между функцией и уравнением Беллмана (349).

§ 3. Линейно-квадратичная задача на конечном интервале времени . 352

1. Линейно-квадратичные задачи при точных измерениях фазовых координат (352). 2. Линейно-квадратичные задачи при неполной информации (355). 3. Оптимальное программное управление в линейно-квадратичных задачах (358). 4. Линейно-квадратичная задача при гауссовских и пуассоновских возмущениях (361). 5. Управление намоткой провода с учетом случайных возмущений (362).

§ 4. Управление на неограниченном интервале времени. Стабилизация управляемых стохастических систем . 363

1. Постановка задачи (363). 2. Применение второго метода Ляпунова к задачам оптимальной стабилизации (364). 3. Стабилизация линейных стохастических систем (368).

§ 5. Приближенные методы построения оптимального управления . 369

1. Описание алгоритма последовательных приближений (370). 2. Оценка нулевого приближения (371). 3. Оценка первого приближения (374). 4. Оценки высших приближений (378).

Основные результаты и формулы главы IX . 377

Глава X. **Оптимальное управление на интервале времени случайной длительности** 380

§ 1. Управление по быстродействию . 380

1. Постановка задачи оптимального быстродействия в динамических системах при случайных возмущениях (380). 2. Существование допустимого управления (381). 3. Алгоритм построения оптимального управления (383). 4. Управление по быстродействию движением твердого тела (384). 5. Численное построение оптимального по быстродействию управления движением материальной точки (387).

§ 2. Управление по быстродействию движением гиростата . 389

1. Постановка задачи (396). 2. Существование допустимого управления (391). 3. Построение оптимального управления (392).

§ 3. Задачи управления с вероятностным функционалом . 395

1. Постановка задачи и способ решения (395). 2. Оптимальное управление движением материальной точки с вероятностным критерием качества (397). 3. Максимизация вероятности пребывания точки в заданной области (399). 4. Управление по вероятности движением математического маятника (401). 5. Управление твердым телом с вероятностным критерием качества (404). 6. Максимизация среднего времени пребывания системы внутри заданной области. Синтез оптимального управления движением твердого тела (405).

Основные результаты и формулы главы X . 408

Глава XI. **Оптимальное оценивание состояния системы** . 409

§ 1. Задачи оценивания при случайных возмущениях . 409

1. Постановка задач оптимального оценивания (409). 2. Линейное оценивание (410). 3. Оптимальное оценивание гауссовских величин (411). 4. Линейное оценивание стационарных процессов (411).

§ 2. Фильтр Калмана 414

1. Постановка задачи (414). 2. Двойственная задача оптимального управления (415). 3. Уравнение для ошибки оценивания (417). 4. Уравнение для оптимальной оценки (419). 5. Устойчивость фильтра (422). 6. Фильтрация при постоянных коэффициентах (423). 7. Фильтрация при вырожденной помехе в канале наблюдения (425). 8. Оптимальная экстраполяция (428). 9. Оптимальная интерполя-

ция (429). 10. Некоторые соотношения нелинейной фильтрации (430).

§ 3. Дискретный фильтр Калмана 432
Основные результаты и формулы главы XI . 434

Глава XII. **Оптимальное управление процессом наблюдения** . 436

§ 1. Оптимизация процесса наблюдения . 436

1. Постановка задачи. Основные соотношения (436). 2. Построение оптимальных законов наблюдения, минимизирующих конечную дисперсию (440). 3. Пример управления наблюдением с интегральным критерием (442). 4. Оптимальные импульсные законы наблюдения (444). 5. Импульсный закон наблюдения за материальной точкой (449). 6. Оптимальное управление помехой в канале наблюдений (451)

§ 2. Оптимальное сочетание управления и наблюдения . 456

1. Линейно-квадратичная задача (457). 2. Детерминированная скалярная система (459). 3. Стохастическая скалярная система (461).

Основные результаты и формулы главы XII . 468
Упражнения к третьей части . 469

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

РАСЧЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Глава XIII. **Линейные стационарные управляемые системы** . 480

§ 1. Устойчивость линейных стационарных систем . 480

1. Точные методы решения полной проблемы собственных значений (481). 2. Итерационные методы (484). 3. Критерий Рауса — Гурвица (487). 4. Метод Зубова функционального преобразования матриц (487).

§ 2. Методы решения уравнения Ляпунова . 489

1. Предварительные замечания (489). 2. Метод рядов (490). 3. Метод матричной сигнум-функции (492). 4. Использование QR-алгоритма (493). 5. Построение стабилизирующих управлений (495). 6. Вычисление матрицы ковариаций (496).

§ 3. Управляемость и наблюдаемость 497
§ 4. Линейно-квадратичная стационарная задача оптимальной стабилизации 498

1. Сведение к последовательности уравнений Ляпунова (499). 2. Использование QR-алгоритма (500). 3. Управление самолетом «Боинг-747» при посадке (503).

Основные результаты и формулы главы XIII . 505

Глава XIV. **Численные методы исследования общих управляемых систем** . 506

§ 1. Анализ переходных процессов. Методы Рунге—Кутта . 506

1. Понятие о численных методах исследования систем (506). 2. Одношаговые методы (506). 3. Оценка погрешностей одношаговых ме-

тодов для общей задачи (1.1) (509). 4. Оценка погрешностей решения для устойчивых уравнений (513). 5. Стандартные программы (514).

§ 2. Анализ переходных процессов. Многошаговые методы . 516

1. Общие определения (516). 2. Конкретные многошаговые формулы (517). 3. Организация вычислений по многошаговым формулам (520). 4. Оценка погрешности (522). 5. Формулы Бутчера (525).

§ 3. «Жесткие» системы уравнений 525
§ 4. Численные методы синтеза в линейно-квадратичной задаче оптимального управления 532

1. Построение оптимального С-управления для нестационарных систем (532). 2. Стационарная линейно-квадратичная задача на конечном интервале (533). 3. Задачи оптимальной стабилизации и методы решения алгебраического уравнения Риккати (538).

Основные результаты и формулы главы XIV 539

Глава XV. **Численные методы решения задач оптимального управления** . 541

§ 1. Общие сведения о методах численного решения задач оптимального управления 541
§ 2. Сведение к задаче нелинейного программирования . 542
§ 3. Сведение к краевой задаче . 543

1. Краевая задача принципа максимума (544). 2. Метод Ньютона решения краевой задачи (544). 3. Пример сведения задачи оптимального управления к краевой задаче (545).

§ 4. Решение линейных краевых задач . 547

1. Сведение задачи оптимального управления к линейной краевой задаче (547). 2. Сведение линейной краевой задачи к задаче Коши (548). 3. Метод переноса краевых условий (550). 4. Метод Абрамова (552).

§ 5. Метод Шатровского последовательного улучшения управлений . 554
§ 6. Метод Федоренко сведения к задаче линейного программирования 558

Основные результаты и формулы главы XV 562
Упражнения к четвертой части . 563
Дополнение к третьему изданию . 571

§ 1. Элементы финансовой математики . 571

1. Введение (571). 2. Концепция эффективного рынка (572). 3. Концепция арбитража и полноты (576). 4. Хеджирование (579). 5. Производные ценные бумаги. Расчеты в опционах (580). 6. Формула Блэка и Шоулса (585).

§ 2. Использование логарифмической нормы в теории устойчивости . 588

1. Определение и свойства логарифмической нормы (588). 2. Устойчивость нелинейных систем (590). 3. Использование нескольких логарифмических норм (595). 4. Устойчивость по первому нестационарному приближению (597)

Литература 599
Предметный указатель . 602

Учебное издание

Афанасьев Валерий Николаевич
Колмановский Владимир Борисович
Носов Валерий Романович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Редактор *А. М. Суходский*
Художественный редактор *Ю. Э. Иванова*
Технический редактор *Л. А. Овчинникова*
Корректор *Г. И. Кострикова*

Лицензия ИД № 06236 от 09.11.01.

Изд. № ВТИ-126. Подп. в печать 16.10.02. Формат $60 \times 88^1/_{16}$. Бум. газетн.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Объем 37,73 усл. печ. л. 37,73 усл. кр.-отт.
35,71 уч.-изд. л. Тираж 4000 экз. Заказ № Б-634.

ФГУП «Издательство «Высшая школа», 127994, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Тел.: (095) 200-04-56
E-mail: info@v-shkola.ru http://www.v-shkola.ru

Отдел реализации: (095) 200-07-69, 200-59-39, факс: (095) 200-03-01
E-mail: sales@v-shkola.ru

Отдел «Книга почтой»: (095) 200-33-36.
E-mail: bookpost@v-shkola.ru

Набрано на персональных компьютерах издательства

Отпечатано в типографии ГУП ПИК «Идел-Пресс», 420066, г. Казань, ул. Декабристов, 2.

615

В издательстве "ВЫСШАЯ ШКОЛА" работает служба

«КНИГА  ПОЧТОЙ»

Если Вы живете далеко от столицы, не огорчайтесь!

Каждый желающий может заказать и получить выпускаемую издательством литературу по почте **в любой точке России и ближнего зарубежья.**

Стоимость пересылки составит **25%** от суммы покупки, **независимо от месторасположения.**

Рассылка книг производится только **по предоплате.**

Для оформления заказа нужно воспользоваться **прайс-листом** издательства **«Высшая школа».**

Прайс-лист можно бесплатно заказать по почте, получить **по факсу**, заказать **по электронной почте** или найти на нашем **сайте в Интернете.**

При поступлении средств на расчетный счет издательства «Высшая школа» на каждого клиента открывается **лицевой счет**, на котором фиксируется движение средств клиента.

Цена заказанного товара может отличаться от указанной в прайс-листе. Отгрузка производится по **цене**, действующей в день регистрации заказа.

✉ **127994, Москва, ул. Неглинная, д. 29/14.**
☎ **(095) 200-33-36**
Факс: (095) 200-06-87, 200-03-01
E-mail: *bookpost@v-shkola.ru*
http://www.v-shkola.ru

ISBN 5-06-004162-X

9 785060 041620