УДК 501
ББК 22.1
П 34

Писаревский Б. М., Харин В. Т. **Беседы о математике и математиках.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 208 с. — ISBN 5-9221-0418-7.

Книга посвящена роли математики в познании человеком окружающего мира. На примере творческих биографий трёх выдающихся российских математиков XX века — А. Н. Колмогорова, С. Л. Соболева и А. Н. Тихонова — популярно рассказано о достижениях современной математики.

Для студентов, изучающих курс высшей математики, учителей и преподавателей математики.

Учебное издание

ПИСАРЕВСКИЙ Борис Меерович
ХАРИН Виталий Тимофеевич

БЕСЕДЫ О МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИКАХ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Компьютерный набор *Б.М. Писаревского*
Компьютерная верстка: *В.В. Худяков*
Оформление переплета *А.Ю. Алехиной*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 14.08.03. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13. Уч.-изд. л. 13.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс: (8172) 72-60-72
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv

ISBN 5-9221-0418-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДЛЯ КОГО И ДЛЯ ЧЕГО НАПИСАНА ЭТА КНИГА

Книга адресована тем, кто не убегал с уроков математики в школе, кто хоть немного знаком с высшей математикой и не возражает против более интимного знакомства.

Это не учебник и не научная монография, но здесь можно встретить обсуждение достаточно глубоких математических вопросов — как самых современных, так и восходящих к основам теории познания.

Авторы старались вести свободные беседы с читателем на темы, для которых в курсах математики обычно не хватает времени. Мы хотели показать, что профессия математика не лишена романтики. Что человеку, бóльшую часть времени погружённому в мир «сухих» формул, нужны и смелость, и фантазия, и чувство прекрасного, не говоря уже о чувстве юмора. Обсуждается роль математики в жизни людей, её связь с различными областями знания. Читатель получит представление о том:

- чем занимается математика и почему на этот счёт существует множество разных мнений;
- как исторически сформировались основные понятия и приложения математики;
- какие задачи приходится решать математикам в содружестве с физиками, геофизиками, химиками, метеорологами, инженерами, медиками, языковедами;
- что нужно, чтобы стать великим математиком, и чем отличаются великие математики от остальных людей.

Много внимания в книге уделено личностям трёх выдающихся математиков двадцатого века — действительных членов Академии наук СССР А. Н. Колмогорова, С. Л. Соболева, А. Н. Тихонова: биографии этих людей, черты их характеров, увлечения, личные впечатления о них коллег, учеников, авторов этой книги и, конечно, знакомство с их творческими достижениями. Читатель увидит, как в жизни представителей сугубо «кабинетной» науки преломилась история страны, великие и трагические моменты в судьбе поколения ровесников двадцатого века.

Авторы считают необходимым отметить глубокое впечатление, которое произвели на них встречи и беседы с С. Л. Соболевым и А. Д. Соболевой, А. Н. Тихоновым и Н. В. Тихоновой, В. А. Ильиным. Без этих встреч книга не была бы написана.

Б. М. Писаревский, В. Т. Харин

* * *

Виталий Тимофеевич Харин не увидит этой книги — его не стало летом 2002 года. Это был яркий и разнообразно талантливый человек, учёный, педагог. Его всегда будут помнить друзья, коллеги, ученики.

Б. М. Писаревский

Беседа первая
ЕДИНАЯ СИМФОНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО

ЗЕМЛЯ ИМЕЕТ ФОРМУ ГЕОИДА

Возьмём быка за рога и сразу поставим главный вопрос, который интересует нас в этой главе: что такое математика?

Мы понимаем, что этот вопрос ставился многократно и что существует много достойных книг с таким или похожим названием. Но, во-первых, с течением времени даже специалисты несколько видоизменяли своё мнение по поводу ответа на этот вопрос, и, во-вторых, это меняющееся мнение излагалось, может быть, недостаточно демократично для того, чтобы его поняли те, кому этого хочется и кто имеет для этого достаточные основания.

Казалось бы, чего проще? Ведь математику изучают все школьники и все студенты, даже юристы, религиоведы и художники, если судить по нынешним официальным программам российских вузов. Применяют математику все люди без исключения, хотя бы потому, что все считают. Считают яблоки, калории, электроны, количество нераскрытых преступлений, прочность конструкций, рекордные секунды и деньги (деньги, безусловно, считают все).

И, тем не менее, попробуем выяснить, что об этом думают люди. Простейший и самый «модный» способ — произвести «социологический» эксперимент, выйдя на улицу и задавая наш вопрос первым встречным. Дорогой читатель, раз вы взяли в руки книгу с таким названием, вы понимаете, что может получиться из этого эксперимента. Вряд ли стоит публиковать все ответы. И всё же мы провели подобный опрос. Лучшим из приличных ответов оказался следующий: «Спросите что-нибудь полегче. Давайте я скажу, что такое физика, химия, экономика, история или другие науки».

Лауреат прав — действительно легче. Предмет каждой из упомянутых наук можно охарактеризовать в нескольких словах, не слишком отклоняясь от истины: физика — общие свойства материи; химия — состав и превращения веществ на молекулярном уровне; экономика — это, как ни крути, способы разбогатеть, желательно законным путём; история — представление историков о том, как люди жили раньше.

Любая из перечисленных наук смотрит на жизнь природы или человеческого общества со своей, вполне определённой и понятной точки зрения, собирает и осмысливает факты, пытается выявить закономерности, имеющиеся в её области, и даёт рецепты использования полученных данных в интересах человечества. Во всяком случае, человеку хочется думать, что это происходит в его интересах, хотя время от времени у него и возникают сомнения. Какую же область реальности изучает математика? С какой стороны смотрит на мир она?

Произведём второй эксперимент: обратимся к мнению тех, кто пишет на интересующую нас тему. Попробуем полистать книги в поисках краткого и чёткого определения математики. Встретятся, например, такие варианты: «математика — наука о числах и фигурах, т. е. о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира» или «математика — совокупность наук, изучающих количество и порядок». Эти определения, отвечая на один вопрос, ставят множество новых. В частности, какие именно области знания следует относить к математике? Ведь даже в географии измеряются и сравниваются такие количества, как длины рек, высоты гор, скорости ветров и глубины океанов. А уж о пространственных формах и говорить не приходится. Историки постоянно имеют дело и с количеством, и с упорядоченностью событий во времени и пространстве. Однако никому не приходит в голову относить эти науки к математическим. Можно возразить, что математика имеет дело с количеством и порядком «в чистом виде», а не применительно к чему-либо. Но тогда, как быть, скажем, с теорией вероятностей, которая использует эти понятия лишь применительно к изучению случайных явлений, но, как известно, представляет собой сугубо математическую науку? Наконец, прежде чем определять математику с помощью понятий «количество» и «порядок», следовало бы определить самим эти понятия.

Встречаются и другие краткие определения математики, имеющие скорее образный, а иногда и шутливый характер, но, тем не менее, вносящие в «портрет» математики значительно более интересные штрихи, чем определения, приведённые выше. Вот, например: «математика — это язык науки»; «математика — это то, что написано в книгах по математике»; «математика есть единая симфония бесконечного» (Д. Гильберт); «со времён греков говорить «математика» — значит говорить «доказательство» (Н. Бурбаки).

Мы надеемся, что, прочтя ещё несколько страниц, читатель сможет по достоинству оценить остроумие двух первых высказываний и разделить с нами восхищение красотой третьего и точностью последнего.

Под впечатлением от этого последнего высказывания поставим ещё один, третий эксперимент. Обратимся к древности, к происхождению самого термина «математика». Если названия других наук, как правило, отражают специфику их предмета («география» означает, в переводе с греческого, «описание Земли»; «физика» происходит от слова «природа»; «экономика» — это «управление домом, хозяйством»), то «математика» берёт начало от греческого *mathema* — познание, наука. Вот так — просто и солидно: познание вообще, наука вообще, без указания объекта изучения. Что же имели в виду древние мудрецы, давшие этой науке столь гордое название? Похоже, они полагали, что ей всё равно, что изучать, и отводили ей некую универсальную роль в познании различных аспектов реальности. С одной стороны, против такой постановки вопроса трудно возразить по уже упоминавшейся причине — не зря же математику изучают все школьники и студенты. Однако хотелось бы понять, в чём именно состоит универсальность математики и действительно ли математика так всемогуща, как полагали древние греки.

Итак, мы убедились, что нелегко найти короткое и ясное определение математики. Тем не менее оно существует. И незачем рыться в книгах, лучше прямо потребовать его у математиков-профессионалов. Чтобы психологически подготовиться к восприятию этого определения, напомним поучительную шутку о том, что отвечают географы, когда у них спрашивают, какую форму имеет Земля.

Античные географы считали Землю плоской. Позднее на основании достижений астрономии и открытий великих авантюристов эпохи Магеллана географы заключили, что Земля — это шар. С развитием наук это мнение уточнялось: нет, Земля не шар, это скорее эллипсоид; впрочем, пожалуй, этот эллипсоид несколько сжат в одной половине — нечто вроде груши. В наше время географов уже не устраивают в качестве модели Земли ни шар, ни эллипсоид, ни груша. На основании новейших измерений они торжественно заявляют: Земля имеет форму геоида. Но что такое геоид? В энциклопедических словарях можно прочитать, что геоид — это тело, имеющее форму Земли!

Конечно, перестав шутить, мы понимаем, что географы — люди серьёзные. Просто их объект исследования сложен для краткого объяснения. Поэтому они предпочитают обозначать его кратким термином, глубокий и простой смысл которого они сами прекрасно понимают.

Вот теперь обратитесь к профессионалу-математику, а лучше к двум сразу (так будет интереснее), и спросите: «Что изучает математика?» Скорее всего профессионалы сначала критически вас осмотрят (стоит ли тратить время), а затем вдруг начнут спорить между собой. Помимо уже встречавшихся нам фраз о математике, вы услышите массу звучных терминов, таких, как «системы структур», «метаматематика», «теоретико-множественный язык», «интуиционизм» и др. Через некоторое время математики успокоятся, ибо спорили они для собственного удовольствия. Да, поверьте нам, истинные математики всегда предпочтут беседе о женщинах и даже об автомобилях, деньгах или садовых участках лишнюю минуту общения со своей общей «любовницей и повелительницей». Если же говорить точно, то математики работают по специальности непрерывно, даже когда окружающие об этом не подозревают. Один наш знакомый, молодой доктор наук, рассказывал: «Сижу я дома на диване, а тёща ходит и ворчит, что вот, дескать, зачем женился, — взвалил всё на молодую жену, а сам целый день на диване, даже в магазин лень сходить. Глупая женщина, не видит, что ли, что я работаю?» Но что ещё более интересно, математики иногда работают, не подозревая об этом сами. Впрочем, читатель, по-видимому, знаком с этим явлением работы подсознания и даже поправит нас, сказав, что это касается не только математиков, но и всякого, кто постоянно нацелен на решение определённой задачи. Именно напряжённая работа подсознания приводит к неожиданным озарениям.

Так вот, успокоившись, профессионалы дружно сообщат вам: «Математика изучает свойства математических структур, или, если вам так больше нравится, математических моделей». Ну вот, наконец, мы и получили краткое определение. Но, что касается понятности, то единственный выход в этой ситуации — напомнить математикам историю с геоидом. Тогда они вздохнут, посмотрят на часы, попросят сварить кофе и, устроившись поудобнее в креслах, расскажут примерно следующее.

НЕТ НА СВЕТЕ СОВЕРШЕНСТВА

Математика родилась в древней Греции от двух «родителей» — логики и геометрии. Поэтому её суть невозможно понять, не разобравшись в природе родителей, что само по себе требует времени и сосредоточенности. Начнём с логики. Её имя происходит от греческого *logos* — разум, слово. Как сказано в Библии, «вначале было Слово».

Не будем обсуждать сейчас, кто именно — бог, инопланетяне или Чарлз Дарвин (точнее, открытая им эволюция) — наделили человека сознанием. Мы вернёмся к этому вопросу позже. Кстати, может оказаться, что это — три псевдонима одного автора. Так или иначе, человек пользуется драгоценным даром для того, чтобы понять мир, в котором он живёт. Речь идёт о понимании, позволяющем жить в мире и преобразовывать его для своих нужд. Основная схема использования человеком своего разума очень проста, она давно описана философами. Но мы напомним здесь самую суть этой схемы, чтобы отметить «печку», от которой будем «танцевать» дальше.

На основании жизненного опыта индивидуальный разум каждого человека и коллективный разум человечества способны создавать понятия, обобщающие свойства реальных однотипных объектов или явлений, и модели, отражающие связи между понятиями. Простейшие примеры понятий: жизнь, смерть, пища, дом, мать, огонь, земля, бог; более сложные понятия: причина, правда, связь, число, точка, прямая линия. (Мы не исключаем того, что наша оценка относительной сложности этих понятий субъективна.) Модели связей: огонь — тепло; враг — смерть; друг — правда; точка лежит на прямой.

Создав модель, человек начинает действовать в соответствии с ней, желая добиться определённого результата. И регулярно наряду с успехами терпит неудачи, ибо качество моделей всегда несовершенно. Вдруг оказывается, что огонь — это не только тепло, но и ожог, боль; что друг — это не всегда правда, но изредка и предательство, ложь.

Любая подобная неудача — это следствие недостаточного познания мира и в то же время импульс, данный природой, чтобы подсказать человеку, как надо уточнить его модель мира. Вся история человечества и вся жизнь каждого человека усеяны такими ошибками, досадными и плодотворными одновременно. Воистину, не имея возможности ошибаться, не научишься.

Можно привести массу примеров на эту тему. Нам хочется рассказать лишь один смешной реальный эпизод.

Маленькая девочка часто с интересом наблюдала, как мама укладывает свои волосы, пользуясь металлическими заколками. Однажды она попросила разрешения участвовать в этом процессе, взяла заколку и с маху всадила её двумя концами в мамину голову. От боли сначала закричала мама, затем дочка, награждённая парой хороших шлепков. В чём дело? Оказывается, девочка была искренне уверена, что заколки соединяют не волосы с волосами (действительно, это сложно поначалу), а волосы с головой. С этого дня её модель реального мира улучшилась.

В ходе развития цивилизации, которое с интересующей нас точки зрения можно трактовать как непрерывный процесс моделирования и проверки качества моделей на практике, человек создавал и своё понимание того, как функционирует его собственное мышление. Некоторые простые аспекты этого процесса ему удалось свести в модель, называемую ныне *классической* или *формальной логикой*. Она сформировалась в Греции к IV веку до н. э. и впервые была изложена Аристотелем в книге «Органон» (*organon* по-гречески означает «орудие»). Логика стала орудием научного познания.

Одно из основных исходных понятий логики — истинное утверждение, или, как говорят сами логики, *высказывание*. Оно возникло как осознание той схемы использования разума, которую мы описали и которую коротко выражают словами: практика — критерий истины. Всякое конкретное высказывание несёт в себе некую информацию, т. е. некую основу для деятельности. Если услышавший высказывание человек может совершать на этой основе некоторые действия и всякий раз получать тот результат, который он ожидал в связи с полученной информацией, высказывание следует считать *истинным*. В случае, когда информация не оправдывается, надо говорить о *ложном высказывании*. Широко применяемая разведчиками и игроками методика дезинформирования противника (у игроков — блеф) иллюстрирует именно эту исходную суть понятий истинности и ложности — успех или неудача действий, совершаемых на основе информации.

Параллельно сформировались понятия причины и следствия: про некоторые высказывания A и B можно говорить, что из A следует B. Это значит, что во всех случаях, когда A истинно, B тоже истинно. Если же A ложно, то об истинности B ничего нельзя сказать. Последняя фраза не менее важна для понимания причинной связи между A и B, чем предыдущая.

Возьмём пример: «если загробная жизнь не существует» (высказывание A), то «человеку не придётся на том свете отвечать за свои грехи» (высказывание B). Это бесспорная истина. Что же практически из неё вытекает для человека? Ровным счётом ничего, поскольку ему ничего не известно об истинности A. Хорошо бы проверить эту истинность, ибо риск катастрофической ошибки огромен (либо будешь наказан, либо всю жизнь будешь мучиться праведником).

Существенно то, что в рассуждениях об истинности и причинности можно полностью отвлечься от содержательности высказываний, т. е. от того, что именно высказывается. И в этой ситуации, когда важен лишь сам факт истинности или ложности высказывания, можно сформулировать *адекватные* (соответствующие реальности) модели связей между высказываниями. Например: *всякое высказывание A либо истинно, либо ложно, третьего варианта не существует* (принцип исключённого третьего — *tertium non datur*). Первый вариант означает, что отрицание A, т. е. высказывание «A ложно», само ложно; второй, — что оно истинно. Ещё одна моделирующая связь: *если из A следует B, и A истинно, то B тоже истинно* (правило *modus ponens*). И ещё: *если из A следует B, а из B следует C, то из A следует C.*

Казалось бы, в предыдущем абзаце выписаны тривиальные, само собой разумеющиеся вещи. Однако, осознание этих «тривиальностей», их формулировка в общем виде — это начало модели, приближённо описывающей, как человек мыслит, как из истинности некоторых утверждений он делает вывод об истинности других. Важно, что речь идёт о «как мыслит», а не «о чём мыслит». Именно поэтому мы говорим о модели процесса мышления, а не о модели каких-либо других проявлений бытия.

Модель мышления, основанная на описанных понятиях истинности и причинности, и называется *классической* или *формальной логикой*. Это великое достижение человеческого разума на пути самопознания играет огромную роль в жизни людей, позволяя добывать новые знания из уже имеющихся чисто умозрительным путём, путём логических рассуждений, не требующих длительного накопления наблюдений или организации дорогостоящих экспериментов.

Конечно, умозрительный, логический процесс познания должён базироваться на уже имеющихся истинах, полученных с помощью наблюдений и экспериментов. Но от этого его значение не уменьшается. Без мыслительной, логической обработки эмпирически накопленного багажа прогресс познания невозможен. Поэтому так благодарно человечество своим великим теоретикам, своим ньютонам и эйнштейнам, максвеллам и лобачевским, колмогоровым и винерам.

Подчёркивая величие логики, надо, с другой стороны, не слишком уж увлекаться комплиментами в её адрес. Самое время вспомнить беседу Лиса с Маленьким Принцем из знаменитого романа Сент-Экзюпери. Лис очень обрадовался, узнав, что на планете Маленького Принца нет охотников. Но, услышав, что куры там тоже отсутствуют, печально заключил: «Нет на свете совершенства». Да, к сожалению (а может быть, и к счастью, иначе, во что бы превратился наш мир?), область применения такой удобной модели, как классическая логика, ограничена. И эта ограниченность заложена в самых её основах. Далеко не всякое высказывание можно считать истинным или ложным. Например, потому, что оно может вовсе не иметь смысла для того, кто его рассматривает. Так, для нас с вами бессмысленны высказывания «Лошади впадают в Каспийское море», «Волга кушает овёс», если нам их сообщат без дополнительной информации (а вдруг это шифровки?). Но, главное, истинность многих высказываний сильно зависит от того, кто её оценивает — продавец или покупатель («это мясо свежее»), муж или жена («очень приятный мужчина»), студент или преподаватель («$\lg(a+b) = \lg a + \lg b$»). Не зря бытуют выражения «женская логика», «классовая логика» и т. д.

Уж таким создан человек, что в нём противоборствуют два начала: материальное, животное, дьявольское (в зависимости от того, какой способ выражения мы выбираем — философский, биологический или религиозный) и духовное, человеческое, божественное. Трудно говорить, какое из них хорошее, а какое плохое. Судя по развитию истории, до сих пор оба они необходимы: первое — для того, чтобы человек жил, второе — чтобы он жил человеком. Сторонники духовности, человечности полагают, что за этим началом будущее: сумев побороть трудности материального плана (еда, жильё), человек сумеет реализовать свою общественную, коммунистическую, божественную сущность равенства и братства. Их противники считают, что всё это красиво, но нереально, и делают ставку на биологическую суть человека, понимая равенство лишь как равенство шансов. «Равенство — понятие абиологическое. В природе равенства нет. Равенство придумано человеком, это одно из величайших заблуждений, породивших уйму страданий. Если бы было равенство, не было бы на Земле развития...» (В. Д. Дудинцев). Похоже, что пока сторонники второй точки зрения имеют больше аргументов. Однако та часть природы человека, что сосредоточена в головах людей типа Кампанеллы, Сен-Симона и Чернышевского, в евангелистской проповеди христианства, в идеях коммунизма, не даёт человечеству вернуться полностью в лоно биологии.

Похоже, что в двойственности, а точнее — в противоречивости человеческой природы отражается общий принцип противоречивости нашего мира: не существует света без тьмы, верха без низа, отрицательных электронов без положительных протонов, богатства без бедности, мира без войны, ума без глупости, здоровья без болезней, мужчин без женщин, продавцов без покупателей, свободы без насилия. Короче, чтобы существовала некая сущность, требуется наличие противоположной сущности.

Мы несколько увлеклись. Вернёмся к нашим «баранам». Применительно к логике можно сказать, что в сложных вопросах социального и психологического порядка формальную логику следует применять крайне осторожно, если вообще это возможно. Ибо на оценку истинности высказываний сильно влияют социальные и психологические интересы людей — носителей различных сущностей. И только в тех областях, где истина убедительна для всех, формальная логика оказывается мощным орудием прогресса.

Например, для большого класса явлений естественно-научного или технологического характера она действительно является очень ценной и плодотворной моделью процесса мышления. Мало кому придёт в голову сомневаться в истинности высказываний «отношение длины окружности к диаметру не зависит от величины диаметра и примерно равно 3,14» или «при вращении замкнутого проводника в магнитном поле в нём возникает электрический ток».

Редким примером проникновения логики в международные отношения является всеобщее осознание следующей истины: ядерная война — смерть человечества, победить в такой войне нельзя. Отсюда логически следует необходимость всепланетного сотрудничества.

РОЖДЕНИЕ БОЖЕСТВА

Обратимся теперь к другому источнику происхождения математики. Геометрия — наука о свойствах пространства, в котором мы живём, в котором существует всё, что наверняка существует. В её основе лежат жизненно важные для существования человека и для возможности осуществления его производственной деятельности понятия, которые формируются на основе ощущений и представлений о «положении», «перемещении», «расстоянии», «направлении», «форме», «размерах» и т. д. На заре развития цивилизации геометрия вовсе не являлась такой стройной и строгой наукой, какой мы её знаем. Как всякая юная наука, она была в значительной степени экспериментальной — собранием эмпирически найденных приёмов для измерения тех или иных величин, связанных с пространственным расположением тел (длин, площадей, углов, объёмов и т. д.). Геометрия имела очень предметный характер. Это хорошо видно, если проследить за происхождением геометрических терминов. Переводя их с древних языков, мы получаем такие примеры: геометрия — землемерие; сфера — мяч; центр — заострённая палка; точка — след укола, тычка; конус — сосновая шишка; линия — от слова «лён», ибо изо льна делались нити; куб — игральная кость. Древнеегипетских геометров греки называли «натягивателями верёвки». Геродот связывал возникновение геометрии с необходимостью после каждого разлива Нила справедливо распределять поля между их владельцами.

Накопление эмпирического материала в геометрии и его осмысливание приводили к выделению первичных геометрических понятий, таких, как «точка», «линия», «поверхность», «тело», «прямая», «плоскость», «движение», «принадлежность» (например, точка может принадлежать данной прямой, а прямая — данной плоскости) и т. д. Первозданная непосредственность этих понятий привела к некоторым психологическим трудностям при осознании их места в системе геометрической науки. Дело в том, что этим понятиям нельзя дать определений, которые выражали бы их через более простые понятия, так как они сами и есть наиболее простые, происходящие непосредственно из опыта, абстракции. Их можно только пояснить, указав, из каких реальных объектов они произошли в результате обобщения определённых свойств этих объектов. Например, можно сказать, что точка — это возведённая в абсолют совокупность двух противоречивых свойств очень маленьких предметов: занимать ничтожно малое, в пределе нулевое место в пространстве и, с другой стороны, служить «кирпичиками», из которых складываются все фигуры и тела, всё пространство. А если эти понятия нельзя строго определить, то как же можно с ними строго логически оперировать, какие истины можно по поводу них высказать?

Эти сомнения, по-видимому, одолевали самогó родоначальника геометрии как теоретической системы — великого Евклида. Вводя, скажем, понятие линии, он говорил, что это длина без ширины и толщины. Как понимать такое утверждение? Если это определение, то оно некорректно, ибо сводит определяемое понятие (линия) к другим, также требующим определения (длина, ширина, толщина). Может быть, это пояснение того типа, о котором только что говорилось, включающее интуицию для лучшего «чувствования» смысла понятия? Но тогда нельзя положить его в основу строгих рассуждений.

Трудности, связанные с невозможностью строгого определения первичных геометрических абстракций, были преодолены следующим образом. Надо вернуться к реальным прообразам этих абстракций и посмотреть, как связаны они друг с другом в природе. Из таких наблюдений возникают очевидные, т. е. понятные, привычные, имеющие место всегда связи между соответствующими первичными абстракциями. Например, пусть имеются две различные точки в пространстве, т. е., с интуитивной точки зрения, два настолько маленьких, насколько можно себе представить, отдельных участка пространства. Попробуем проводить через обе точки одновременно прямые линии, т. е., опять же с интуитивной точки зрения, очень длинные, очень тонкие туго натянутые нити. Возможно ли это? Житейский опыт отвечает утвердительно. Сколько таких прямых может быть, если точки заданы? Интуиция говорит, что, если прямые и могут отличаться друг от друга, то очень мало и тем меньше, чем «меньше точки» и «тоньше прямые». Когда «точки уменьшаются до предела и прямая утоньшается до предела», то, «конечно же», прямая будет единственной. Поскольку в основу наших рассуждений мы хотели положить именно такие предельные конструкции, приходим к выводу: через две различные точки можно провести прямую, причём только одну. Так или примерно так возникли знаменитые *аксиомы* евклидовой геометрии, т. е. утверждения, связывающие первичные геометрические понятия и считающиеся со времён Евклида бесспорными истинами, уже не подлежащими какому-либо рассудочному обоснованию. С определённым трудом, как мы видели выше, было осознано, что правильно подсмотренные у природы аксиомы и служат строгим определением первичных понятий. Никакого другого определения им не требуется.

Именно на этом этапе и произошло слияние логики и геометрии, которое можно считать рождением математического метода в науке. Система аксиом геометрии, сформулированная в знаменитых «Началах» Евклида, стала той системой истинных высказываний, исходя из которой стало возможным получать новые истинные высказывания (теоремы) уже чисто логически, без всякой ссылки на опыт и наглядность. Совокупность выведенных из аксиом теорем составила теорию, которая называется *евклидовой геометрией* и по сей день изучается школьниками всего мира.

Таким образом, евклидова геометрия явилась исторически первым и классическим (т. е. образцовым) примером применения *математического метода познания.* В наше время, говоря «математика», мы должны иметь в виду, прежде всего, эту её сторону, эту ипостась — ипостась метода.

Отталкиваясь от примера евклидовой геометрии, резюмируем сущность метода в его идеальной форме следующим образом.

1. Строится *математическая модель* того объекта или круга явлений, который интересует исследователя. Это значит, прежде всего, что даются *названия* всем исходным понятиям модели и, далее, что формулируются некоторые высказывания по поводу связей между исходными понятиями, и эти высказывания объявляются истинными. Они называются *аксиомами* модели.

Для самого метода абсолютно не важно, какой реальный смысл вкладывается в исходные понятия и аксиомы математической модели, хотя это, разумеется, имеет первостепенную важность для исследователя, желающего с помощью модели исследовать свойства чего-то реального.

2. На базе системы аксиом строится *теория* модели. Она представляет собой цепь *теорем*, т. е. высказываний, истинность которых выводится (*доказывается*) с помощью правил классической логики из аксиом или из аксиом и ранее доказанных теорем. Отметим здесь же, что некоторые теоремы принято называть *леммами* (если они имеют вспомогательное, техническое значение) или *следствиями* (если их вывод из некоторой теоремы очень прост, очевиден). По ходу развития теории встречаются *определения* новых терминов и символов, сокращающих запись рассуждений и результатов.

Конечно, приведённое описание математического метода очень сжато и схематично. Оно требует комментариев, которые мы сейчас и сделаем, основываясь на материале той же евклидовой геометрии.

ДОКАЗАТЬ ЭТОГО НЕЛЬЗЯ, НО Я САМ ВИДЕЛ

Система аксиом евклидовой геометрии содержит в себе всю информацию о евклидовой модели того, что мы называем пространством. Однако эта информация представлена в том виде, в котором она получена на стадии формирования модели, т. е. на стадии наблюдений, экспериментов и их осмысливания. Эта форма информации, вообще-то, не приспособлена и неудобна для применения в практических целях (т. е. для измерения площадей земельных участков, объёмов сосудов, строительства зданий, кораблей и т. д.). Даже если выучить наизусть все аксиомы Евклида, это не даст знания формулы объёма конуса или выражения длины гипотенузы прямоугольного треугольника через длины его катетов. Хотя справедливость этих теорем уже заключена в аксиомах, как корни, ствол, цветы и плоды дерева — в его семени. Мышление человека, направляемое логическими правилами, — это то питательное начало, которое позволяет аксиоматическому семени истины развернуться в ветвистое и плодоносящее дерево теории.

Из этих рассуждений вытекает глубокий вывод: что посеешь, то и пожнёшь. Математическая теория не создаёт информации, — она перерабатывает ту, которая заложена в аксиомах. Видимо, эту сторону дела имел в виду Гегель, говоря: «Математика — наука точная, потому что она — наука тощая». И если система аксиом неточно, или противоречиво, или неполно описывает основные свойства моделируемого объекта, то на эти недостатки обречена и соответствующая теория. Когда это обнаруживается в результате сравнения выводов теории с моделируемой реальностью, наступает пора переосмысления и исправления системы аксиом (вспомним девочку с заколкой).

В геометрии подобная кризисная ситуация возникла в своё время в связи с так называемым пятым постулатом Евклида. Многим казалось неестественным включать в список аксиом утверждение о существовании единственной прямой, параллельной данной прямой и проходящей через точку вне её. Думалось, что этот недостаточно интуитивно ясный факт можно вывести из остальных аксиом как теорему. Но многочисленные попытки построить соответствующее доказательство не привели к успеху.

Более того, случилось совсем неожиданное: удалось доказать, что предположение о существовании двух параллельных данной прямой пересекающихся прямых, проходящих через точку вне данной прямой, никак не противоречит всем остальным аксиомам геометрии. Тем самым это предположение вместе с остальными аксиомами Евклида можно рассматривать как систему аксиом новой теории, новой геометрии. Из-за странности вида аксиомы о параллельных было не очень ясно, какое отношение эта теория имеет к реальности. Но чисто формально ничто не мешало построить новую, «неевклидову» геометрию, и она действительно была создана (Лобачевский, Гаусс, Больяи). Н.И. Лобачевский осторожно назвал её «воображаемой». Выводы новой геометрии в самом деле выглядели парадоксально, резко противоречили привычным геометрическим представлениям. Например, сумма углов треугольника оказалась меньше 180°.

И всё же, если поразмыслить, то никаких парадоксов нет. Ведь евклидова прямая — это «бесконечно длинный» объект. По ней можно удалиться на любое, сколь угодно большое расстояние. С другой стороны, аксиомы Евклида рождены из наблюдений за ограниченными участками пространства. Никто никогда не ходил в бесконечность, не видел натянутых нитей или лучей света бесконечной и даже очень большой длины. Включение в аксиоматику свойств, не наблюдаемых в конечных участках пространства, могло быть только произвольным. В этом смысле евклидова и неевклидова геометрии имеют равные права на существование, и обе не противоречат земной «очевидности». Совершенно естественно поэтому, что в ограниченных масштабах порядка земных расстояний выводы обеих геометрий оказались действительно совпадающими с большой точностью: если сумма углов треугольника и меньше 180°, то на пренебрежимо малую для треугольников «земного» масштаба величину. В целом оказалось, что геометрия Н. И. Лобачевского имеет более общий характер: геометрия Евклида является её предельным случаем для малых участков пространства.

История пятого постулата вдохновила известного французского карикатуриста Жана Эффеля на смешной и глубокий сюжет: он нарисовал Господа Бога, который даёт урок геометрии юному Адаму. Бог стоит перед доской, на доске изображены два отрезка параллельных прямых, и Бог объясняет: «Вот две параллельные прямые. Они пересекаются только в бесконечности. Доказать этого нельзя, но я сам видел».

Парадоксы возникали всякий раз, когда бесконечность вторгалась в недостаточно чётко аксиоматизированные математические теории. В начальный период развития теории множеств многие математики были шокированы тем, что прямая и любой её отрезок, даже очень маленький, имеют одну и ту же мощность, т. е. одно и то же количество точек. Это противоречило здравому смыслу, т. е. привычному представлению о том, что малая часть множества должна содержать намного меньше элементов, чем всё множество. Лишь постепенно всем стало понятно, что привычка связана с тем, что ранее сравнивались лишь количества элементов в конечных множествах (элементы которых можно пересчитать по принципу «раз, два, три и т. д.» за конечное время). Для бесконечных множеств свойства количества их элементов (свойства мощности множества) «неожиданно» оказались иными. Несколько позже мы ещё вернёмся к этому вопросу и поясним понятия мощности, конечности и бесконечности множества.

РАССУЖДЕНИЕ О МЕТОДЕ

Понимание математики как метода позволяет объяснить многие часто отмечаемые её особенности. Вспомним замечание об универсальности математики в связи с гордым названием, которое дали ей греки. Да, действительно в любой области знаний, где можно говорить об объективной истине в смысле классической логики, о причинах и следствиях, где исходную информацию можно изложить в виде ряда основных принципов — аксиом, можно применять математический метод и рассчитывать на успех в получении новых результатов. На этом пути получены колоссальные результаты в самых различных областях естествознания и техники.

Но уникальность математики определяется не только её трактовкой как метода, который можно применять к изучению самых различных объектов. Дело ещё и в том, что первые применения этого метода относились к изучению моделей тех аспектов бытия, которые принципиально важны для существования и развития каждого человека и всего рода человеческого. Достаточно сказать, что все мы живём и действуем в пространстве и вынуждены знать основы его устройства, чтобы передвигаться, производить, строить. А эти основы даются математической моделью пространства, т. е. всё той же геометрией. Далее, человек не может существовать, не считая, т. е. не используя такую математическую модель, как арифметика, изучающую простейшие представления о количестве — натуральные числа. Вот и выходит, что математикой пользуется каждый человек, т. е. она универсальна и в этом смысле — не как метод, а как некоторые его приложения.

Всякая вещь противоречива. Те же особенности математического метода, которые обусловливают многообразие его применений, обеспечивают и его ограниченность. Этот метод трудно применить, как уже говорилось, ко многим социальным явлениям, не допускающим однозначного определения истинности суждений. Сложности возникают и там, где ещё не выработаны главные понятия, исходные принципы — аксиомы. А ведь жизнь природы и общества очень сложна и многообразна. Человеческому сознанию не под силу разобраться в ней до конца и выделить суть всех вещей. Пока ещё люди, похоже, не поняли самого главного — кто они, откуда и зачем существуют. Драма людского разума состоит в том, что человек (в отличие от животного) уже в состоянии поставить эти вопросы, но ещё (в отличие от кого?) не в состоянии на них ответить.

Люди не могут спокойно жить без этих ответов. И они мучительно ищут их (во всяком случае те люди, которые очень сильно отличаются от животных), напрягая все возможности своего разума. И ничего «существенного» найти не могут: так пока и нет понятных людям с их мыслительными и эмоциональными возможностями исходных принципов, аксиом человеческого бытия.

Одни говорят — Бог. А он — что? Где и когда возник? Каковы его владения и что за ними? Ведь опыт человечества не содержит ничего, позволяющего утверждать, что мир бесконечен в пространстве и во времени, или, наоборот, что он конечен в пространстве и во времени. Как уже говорилось, никто никогда «не ходил» в бесконечность. Ресурсы нашего разума позволяют либо не согласиться с существованием Бога, либо согласиться при условии, что он создал нас, снабдив ограниченными умственными возможностями, более высокими, чем у животных, но и только. Зачем он так сделал? Зачем он дал нам вопросы и спрятал ответы? Для «согласных» с Богом — это одно из неизбежных *таинств* или одна из неизбежных *догм*, т. е. *непознанных и непознаваемых* элементов реальности типа возникновения и природы самого божества.

Кто не признаёт Бога, тот говорит «эволюция материи» или «природы», «высший разум» или ещё что-нибудь в этом роде, но те же вопросы остаются без ответов. Остаётся и неприятный осадок от того, что мы не понимаем чего-то, что, по-видимому, понимает кто-то.

Людям некогда впадать в излишнее отчаяние от этой драмы. Волей-неволей они вынуждены рассматривать природу и себя как некую систему, программа и цели которой им пока не ясны, но заставляют их жить и развиваться. Чтобы заниматься этим спокойно, не отвлекаясь на тревожные мысли о смысле бытия, они создают себе модели этого смысла, хотя иногда и без достаточных эмпирических оснований. Можно вспомнить отважные попытки некоторых великих людей (например, Декарта и Спинозы), применить в такой сфере, как философия, метод математического моделирования. Насколько Б. Спиноза был привержен математическому методу, следует из его слов: «По единодушному признанию всех, кто в отношении своих знаний хочет стоять выше толпы, математический метод, при помощи которого из определений, постулатов и аксиом выводятся следствия, при исследовании и передаче знаний есть лучший и надёжный путь для нахождения и обобщения истины». И, тем не менее, любопытно выглядит теория, в которой среди аксиом фигурируют выражения типа «вещи, которые мы познаём очень ясно и отчётливо, суть истинные», а среди теорем — утверждение «Бог существует». Не правда ли, по убедительности теорема стоит аксиомы?

После этой фразы подумалось: с какой лёгкостью мы обычно критикуем взгляды корифеев прошлого! Вот сейчас Декарта и Спинозу, чуть раньше — Евклида, который сам боялся придуманного им аксиоматического определения исходных понятий геометрии. А ведь очутись мы на их месте, получило бы человечество сотую долю той пользы, которую дали они?

Мысли Декарта и Спинозы заслуживают того, чтобы к ним вернуться. Надо представить себе их эпоху, пропитанную духом религиозного мировоззрения никак не в меньшей степени, чем духом науки и прагматизма. Если мы в наше время яростно создаём математические модели эволюции микромира, вселенной и принятия решений в неопределённой ситуации, то почему бы им не пытаться создать математическую теорию религии? Конечно, в их и в наше время это делается на различных уровнях логической строгости, но и тогда, и теперь — это уровень времени.

Философия так же, как и геометрия в доевклидовы времена, теория вероятностей лет сто пятьдесят назад, биология в наши дни, — всё это науки, недостаточно развитые для того, чтобы сформулировать свои основные принципы в виде системы общепризнанных аксиом и прогрессировать далее чисто логически. Вспомним в этой связи К. Маркса, писавшего, что «наука только тогда достигает совершенства, когда ей удаётся пользоваться математикой». А если она ещё не достигла этого совершенства (это уже не К. Маркс, это мы), то её концепции в значительной степени держатся на вере. Кто верит в Бога, кто — в победу коммунизма в одной стране, кто — в творческие силы человека. Один наш знакомый, доктор геологии, рассказывал: «Я защитил диссертацию по геологии докембрия, потому что в совете по защитам большинство было сторонниками той концепции, которой я придерживался». На вопрос, при чём здесь концепция, ведь есть же истина, он отвечал, что докембрий — это очень древняя эпоха, про неё никто ничего толком не знает, поэтому побеждает точка зрения, в которую верит большинство членов данного совета.

Не только сфера применимости математики объясняется её трактовкой как метода познания. Пресловутая строгость и неопровержимость математических выводов — это естественное следствие строгости логических понятий об истинности и доказательстве. Тем же фактором обусловлена и возможность систематического применения глубоко разработанной символики в записи математических текстов. Без неё эти тексты были бы плохо обозримы и трудно реализуемы. Чтобы убедиться в этом, достаточно попробовать выразить обычными словами формулу для решения квадратного уравнения. Чисто количественный процесс уменьшения объёма текстов с помощью математической символики имеет следствием качественное увеличение возможности изложения. Но такой формализованный язык невозможно ввести там, где понятия недостаточно точно определены. Может быть, теперь фраза «математика — это язык науки» станет более ясной.

Даже известная «непознаваемость» математики для некоторых людей, которым математика «не даётся», становится понятной. Ведь применение математического метода требует чёткой формулировки исходных положений, систематического и терпеливого прослеживания всех логических этапов рассуждения, их обоснованности. Пренебрежение хотя бы одним из них может привести к панической «невозможности понять». Черты характера, необходимые для успешных занятий математикой, плохо развиваются в условиях логически безалаберной жизненной текучки, ибо молодой человек регулярно видит примеры алогичного поведения людей. Жизнь слишком часто предоставляет соблазн достичь цели, диктуемой не логической необходимостью, а эмоциями «дьявольского» происхождения (богатство вместо достатка, лень вместо труда, выгода за счёт ближнего, властность вместо разумного правления и т. д.). Подобные цели достигаются не доказательным путём, а с помощью силы или обмана. Рефлексы таких целей и методов сидят глубоко в крови людей с доисторических времён. Нужен определённый уровень культуры, т. е. духовности, т. е. потребности жить вместе с обществом, а не вопреки или за счёт него, чтобы уважать общечеловеческую истину, логику. Получается, что природа математических склонностей имеет гуманитарный оттенок. И не следует обвинять математику в дегуманизации современного общества. То же касается всех точных наук. Винить надо недостаточную культуру общества в целом, «отставшую» от естественно-научного прогресса.

Из сказанного следует, что математическая одарённость или просто способность успешно изучать математику сильно зависит от воспитания в семье, в школе. Например, хороший учитель математики в средней школе — это просто везение, это почти необходимое и достаточное условие того, что его ученики смогут спокойно учиться точным наукам во втузе или университете.

Мы видим, что в определённом смысле математика — дело непростое. Но, с другой стороны, великая простота математики состоит в том, что любой её вывод неизбежно и однозначно следует из имеющихся посылок. Какая наука, не использующая математический метод, может похвастать такой ясностью. «А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит», — считал М.В. Ломоносов.

Пора бы закончить этот раздел, но не даёт покоя то самое неприятное ощущение от нашей «недостаточности» в понимании мироздания, о которой мы говорили недавно. Ну ладно, многие принципиальные вещи не познаны. Но будут ли они познаны, познаваемы ли они? Конечно же, на этот счёт есть противоположные мнения. *Ignoramus et ignorabimus* (не знаем и знать не будем — *лат.*), — с давних пор говорят пессимисты. Нет вещей непознаваемых, есть вещи непознанные, — спорят с ними оптимисты. Ни то, ни другое не противоречит опыту человечества: пессимисты исходят из того, что за всю свою историю люди ничуть не продвинулись качественно в решении многих коренных вопросов; оптимисты же говорят, что знания человека по любому поводу только возрастают со временем, и нет оснований считать, что этот процесс прекратится. В конечном счёте убеждения и тех, и других держатся на вере (вспомним диссертацию о докембрии). Однако хочется быть оптимистами. Этого хотелось и великому поэту Н. Гумилёву, что подтверждается его замечательным стихотворением «Шестое чувство»:

Прекрасно в нас влюблённое вино
И добрый хлеб, что в печь для нас садится,
И женщина, которою дано,
Сперва измучившись, нам насладиться.

Но что нам делать с розовой зарёй
Над холодеющими небесами,
Где тишина и неземной покой,
Что делать нам с бессмертными стихами?

Ни съесть, ни выпить, ни поцеловать,
Мгновение бежит неудержимо,
И мы ломаем руки, но опять
Осуждены идти всё мимо, мимо.

Как мальчик, игры позабыв свои,
Следит порой за девичьим купаньем
И, ничего не зная о любви,
Всё ж мучится таинственным желаньем;

Как некогда в разросшихся хвощах
Ревела от сознания бессилья
Тварь скользкая, почуя на плечах
Ещё не появившиеся крылья —

Так, век за веком — скоро ли, Господь? —
Под скальпелем природы и искусства,
Кричит наш дух, изнемогает плоть,
Рождая орган для шестого чувства.

ПЕРВЫЕ ПОБЕДЫ

До сих пор мы рассуждали о математическом методе, опираясь в основном на единственный пример его использования — евклидову геометрию. Перейдём к обсуждению других фундаментальных математических моделей.

Не менее древней, чем геометрия, является арифметика. Это наука, придающая строгий математический смысл простейшему понятию о количестве — ответу на вопрос «сколько», т. е. натуральному числу. При этом число выступает как то общее, что имеется у двух множеств, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие. Выгода, получаемая в результате развития арифметики, колоссальна. Если говорить учёным языком, её можно описать так: при сравнении количества элементов во множествах, при определении количества элементов во множествах, получаемых из других множеств их объединением или делением на части, становится возможным манипулировать не с самими множествами, а с представляющими их числами — считать и вычислять. Говоря наглядно, торговцу баранами не надо гонять везде с собой свои стада, достаточно иметь карандаш и бумагу, а ещё лучше — японский калькулятор.

В настоящее время арифметика натуральных чисел выглядит как математическая модель со своей системой аксиом и теорией. Однако она оформилась в таком виде довольно поздно — в конце XIX века. В это время выяснилась необходимость аксиоматизации всех наук, развивающихся на логической базе. До аксиоматизации арифметика излагалась в значительной мере на интуитивном уровне строгости. Её основные принципы пояснялись предметно, на палочках и картинках — примерно так, как это делается и поныне в детских садах и начальных классах школ. Это было естественно и всем понятно. Применение понятий «число», «больше», «сложить», «считать» не вызывало сложностей, ибо ассоциировалось с постоянно употребляемыми в жизни процессами и вещами. Трудности появились позже, когда начали считать и сравнивать количество элементов в «очень больших», бесконечных, как мы теперь скажем, множествах (прямая, плоскость, их части). Мы описывали выше суть этих сложностей, когда говорили о парадоксе с количеством элементов в бесконечном множестве и его части. Пришлось выяснять, что именно понимается под количеством, числом, т. е. выписывать явно аксиомы множества натуральных чисел и других, связанных с ним математических моделей.

Раз уж мы заговорили об интуитивном, т. е. основанном на «здравом смысле», на понятных из опыта, но явно не формулируемых принципах развития теории, то заметим следующее. Интуитивный способ отнюдь не следует отвергать, несмотря на расхваливаемые нами преимущества строго аксиоматического подхода. Он бывает весьма полезен при преподавании науки, уже развитой ранее на аксиоматической основе, особенно, если преподавание ведётся для потребителей изучаемой модели, а не для специалистов по самому математическому методу. Есть уверенность, что всё получится «как надо», парадоксы не возникнут, и незачем нагромождать излишние логические строгости, теряя дорогое время. Конечно, скажем ещё раз, это верно для тех областей знания, где исходные понятия и принципы фактически уже знакомы учащимся «на предметном уровне» из их личного опыта, обладают высокой степенью наглядности. Например, в старших классах средней школы и в начале курса высшей математики в техническом вузе нужно сообщать учащимся довольно много сведений о свойствах множеств (множество, элемент, включение, операции над множествами, функция, обратная и сложная функция и т. д.). Это отнюдь не означает, что надо выписывать аксиомы теории множеств и выводить из них все следствия примерно так, как это делается в первой книге трактата Н. Бурбаки. Такой подход занял бы слишком много времени, и всё равно многое осталось бы непонятным: зачем доказывать очевидные вещи? Вместо этого надо начать с того, что «множество — это совокупность, набор каких-либо объектов, называемых его элементами», хотя с логической точки зрения это «определение» не выдерживает критики. Оно ничем не лучше евклидового «линия есть длина без ширины и толщины». Но это понятное пояснение. Оно заставляет мозг отождествлять абстрактное понятие с конкретными породившими его ситуациями. И этого вполне достаточно, когда обучают не математиков-профессионалов, а инженеров. Тем более, что преподавателю ясно — на этом пути он не натолкнётся на противоречия. Это заранее гарантировано строгими логическими исследованиями поколений профессионалов.

В других же случаях необходим именно аксиоматический метод изложения. Скажем, современный инженер должен свободно владеть линейной алгеброй. Её же невозможно изложить без выписывания аксиом линейного, а затем евклидова пространства и корректного построения на их основе теории. Ведь векторные свойства n-мерных наборов чисел, матриц, непрерывных или дифференцируемых функций абсолютно непривычны дебютанту.

Мы коснулись довольно тонкой проблемы методики преподавания математики. На наш взгляд, главная трудность здесь состоит именно в отыскании оптимального сочетания дедуктивного и индуктивного подходов (т. е. подхода от общего к частному и от частного к общему). Количество математических знаний, которые должен освоить будущий математик и даже физик или инженер, огромно. Тем не менее можно обучить студента достаточно быстро, если действовать чисто дедуктивным методом, выводя все необходимые факты из нескольких весьма общих концепций. Такой метод часто «соблазняет» молодых преподавателей. Но чисто дедуктивное представление вещей может произвести впечатление божественного откровения. Когда студенту говорят, что действительные числа — это множество, удовлетворяющее следующим четырнадцати аксиомам (и выписывают аксиомы поля, порядка и аксиому о верхней грани), у него возникает мысль о выборе карьеры. Как можно придумать настолько вычурное определение такой, вроде бы, понятной вещи, как число? — удивляется он. Короче, дедуктивный метод преподавания даёт знание фактов без понимания того, как к ним можно прийти. Злоупотребление дедукцией быстро формирует схоласта, но не исследователя.

Если, напротив, использовать чисто индуктивный метод, к чему расположены многие педагоги старой школы, то не хватит времени, чтобы изложить студенту все необходимые сведения. Кроме того, студент не сможет понимать современные математические работы. Индуктивный метод предполагает объяснение рождения всех математических понятий из реальности, интуиции. Он долог, но учит находить математические истины, доказывать новые теоремы, а не только излагать доказательства известных, т. е. он формирует активного исследователя. Фактически индуктивное преподавание математики, физики или другой науки — это, в значительной степени, преподавание истории этой науки.

Каждый преподаватель с годами находит свою собственную комбинацию двух подходов.

Вернёмся к исторической линии нашего рассказа. Долгое время математика отождествлялась не с методом, а с двумя первыми победами этого метода — геометрией и арифметикой, причём даже больше с геометрией, в которой сущность математики была, как мы уже говорили, выражена полнее (не зря математиков примерно до XVII века назвали *геометрами*, даже если они занимались не геометрией).

Но уже в середине того же века начали возникать математические теории алгебраического направления. Их источник — изучение операций над всё более абстрактными числами, появившимися в математике. После натуральных (т. е., по-русски, естественных) чисел были изобретены дроби или рациональные числа (от латинского *rationalis* — принадлежащий рассудку, а не природе), затем иррациональные (непостижимые рассудком) и, наконец, мнимые и комплексные числа. Как выразился известный немецкий математик Л. Кронекер: «Целые числа сотворил Господь, всё остальное — дело людских рук». Сами названия этих чисел говорят о том, что их природа, их отношение к реальности было поначалу не очень ясно самим изобретателям. Вводились новые числа из довольно абстрактных соображений. Например, целью введения иррациональных чисел было желание извлечь корень из любого положительного числа. Зачем? Да затем, что геометрам очень удобно характеризовать размер каждого отрезка числом — его длиной. И когда обнаружилось, что существуют отрезки, несоизмеримые с единицей длины, это удобство исчезло. Стало невозможно решать многие геометрические задачи числовыми методами. Указанная цель была достигнута довольно сложным образом: иррациональное число поначалу выглядело как «предельное значение» a последовательности a_n рациональных чисел (его приближений), не являющееся само рациональным числом. А чем являющееся? Действительно, непостижимо!

Однако, присмотревшись к этой ситуации, учёные поняли, что с таким числом a и не нужно связывать никакого другого понятия, кроме самой последовательности a_n, его определяющей. Сразу стало легче, понятие числа обобщилось: действительные числа — это некоторые бесконечные последовательности рациональных чисел. А именно такие, члены которых с ростом номера n всё меньше (сколь угодно мало) отличаются друг от друга. Понадобилось ещё ввести арифметические операции и порядок (отношения равенства и неравенства) на множестве всех действительных чисел и изучить их свойства. Работа оказалась значительно абстрактнее, чем изучение наглядных операций над натуральными числами (палочки) или рациональными (деление отрезков на равные части). Ведь требовалось, чтобы в частном случае рациональных чисел вводимые операции над числами в новом смысле не противоречили уже определённым.

Комплексные числа были введены, например, для того, чтобы каждое квадратное уравнение, даже такое, как $x^2 + 1 = 0$, имело решение. Зачем? Почему? А просто так, потому что это красиво: каждое уравнение второй степени имеет два решения, уравнение n-й степени — n решений. Других, более практических резонов не было. Для реализации своей идеи математики, похоже, рассуждали так: нужно, чтобы существовало «нечто», назовём его i, такое, что $i^2 = -1$. Среди действительных чисел такого чуда нет. Что же это? Давайте не будем думать о том, что́ это, а просто добавим этот символ i ко множеству действительных чисел (этот принцип «глаза боятся, а руки делают» весьма распространён среди первооткрывателей, выше уже были тому примеры). Посмотрим, что получится, если допустить, что i может участвовать в арифметических операциях наравне с действительными числами по принятым для них правилам. Тогда должны существовать и «мнимые» числа вида bi (b действительное), и «комплексные» числа вида $a + bi$ (a, b действительны). Для комплексных чисел была построена теория арифметических операций, приводившая к ряду очень красивых результатов. Но как осмыслить, связать с привычными образами эти числа — долгое время оставалось загадкой. Двести лет (с конца XVI века до конца XVIII века) ушло на понимание следующего: так же, как действительные числа можно отождествлять с точками числовой оси, комплексные числа можно считать точками плоскости, на которой имеется декартова система координат. При этом координаты точки $a + bi$ — это a и b. Ещё сто лет понадобилось для осознания того, что это геометрическое представление полезно, но вовсе не обязательно. Можно рассматривать комплексное число просто как удобное обозначение упорядоченной пары a, b действительных чисел. Операции над комплексными числами при этом выглядят как некие специальные операции над парами действительных чисел, удовлетворяющие соответствующим аксиомам.

Так, постепенно математики приобретали опыт построения теорий, в которых основным объектом исследования являются операции, подчинённые определённым законам. Природа элементов, над которыми производятся операции, и элементов — результатов операций не имеет значения для такой теории, важны лишь свойства операций. Подобные математические модели называются *алгебрами*. В наше время существует масса различных алгебр, приспособленных к изучению операций над числами, функциями, множествами, векторами, матрицами, геометрическими преобразованиями, высказываниями, цифровыми кодами, позициями шахматных партий и других игр и т. д. Существенно, что независимость некоторых алгебр от природы элементов, участвующих в операциях, отнюдь не означает, что они изучают абстрактные схемы, не связанные с реальностью (как это было вначале с комплексными числами). Наоборот, законы операций могут реализоваться для объектов самой различной природы, совсем внешне не похожих друг на друга. Например, аксиомам линейной алгебры (линейного пространства) подчиняются некоторые операции над числами, векторами, матрицами, непрерывными или дифференцируемыми функциями, решениями линейных алгебраических или дифференциальных уравнений и т. д. Так алгебраический формализм оборачивается самой что ни на есть «предметностью».

Некоторое представление о силе алгебраических методов можно получить, вспомнив элементарную школьную алгебру, позволяющую так эффективно решать «в общем виде» самые разнообразные задачи арифметического, геометрического и физического происхождения при помощи формул сокращённого умножения, решения квадратных и других уравнений, суммирования прогрессий.

КТО ГЛАВНЕЕ: ФИЗИКИ ИЛИ МАТЕМАТИКИ?

В XVII веке внимание естествоиспытателей, начиная с И. Ньютона и Г. В. Лейбница, привлекает моделирование фундаментального свойства тел и событий примыкать друг к другу вплотную, соприкасаться. Этот аспект бытия волновал и древних, но теперь он стал особенно актуальным в связи с потребностями развивающейся механики, т. е. учения о перемещении тел в пространстве со временем под действием сил.

Заглянем чуть глубже в суть моделируемых вещей. Как бы точно ни умели мы с нашими часами измерять то, что мы называем временем, какие бы малые мили- и микросекунды мы ни научились фиксировать, ничто в природе не позволяет нам заключить, что не существуют более короткие интервалы времени. Поэтому в нашем сознании время, как и прямая линия, — это вещь непрерывная. А математической моделью времени при выбранной единице и начале отсчёта служит хорошо знакомое нам множество действительных чисел.

Аналогична ситуация с пространством, которое можно мельчить беспредельно (в нашем представлении), получая всё меньшие его порции, в которых ещё может что-нибудь существовать. И мы моделируем его как множество всех троек действительных чисел (x, y, z) с помощью, скажем, декартовой системы координат.

Таким образом, мы моделируем пространство и время с помощью наших представлений об их непрерывности.

В основе такого подхода, как уже упоминалось в связи с введением иррациональных чисел, лежит понятие предела числовой последовательности для модели времени, предела последовательности точек в трёхмерном пространстве для модели пространства. К каждому моменту времени можно сколь угодно близко подойти по другим моментам времени, к каждой точке пространства — по другим точкам пространства.

Математические модели, в основе которых лежит понятие непрерывности, бесконечной близости, предела, называют *топологическими* (от греческого *topos* — место). Множество действительных чисел, множество точек трёхмерного пространства или плоскости с обычным евклидовым понятием расстояния между точками — это простейшие топологические модели (точнее, тополого-алгебраические, поскольку структура этих множеств основана не только на понятии предела, но и на свойствах арифметических операций). Но эти модели, если говорить об их связях с реальностью — модели либо времени отдельно, либо пространства отдельно. Механика — простейшая наука о связях этих двух структур, она изучает изменения положения тел в пространстве, происходящие с течением времени. Когда-то механики, подобно геометрам в доевклидову эпоху, мучительно и вдохновенно расшифровывали язык природы, ставили эксперименты, проводили и копили астрономические наблюдения, изобретали наклонную плоскость и рычаг — искали основные принципы, аксиомы своей науки. Пришло время, яблоко упало, появились скрижали с начертанными на них тремя законами пророка, которого звали Исаак Ньютон. Вместе с аксиомами Евклида, определяющими свойства пространства и времени по отдельности, они составили основу для чисто логического развития теории движений тел под действием сил — систему аксиом ньютоновской механики. Собственно механика закончилась, началась математика.

Эта короткая и, может быть, слишком категоричная на вид фраза описывает длительный исторический период и труд целой плеяды крупных исследователей. О каждом из них трудно сказать, кто он: математик, разрабатывающий новую математическую модель, или механик, нашедший мечту Архимеда — точку опоры в своей науке и старающийся с её помощью перевернуть

Землю. Уже Ньютон был такой двуединой личностью (на самом деле даже многоединой — вспомним его работы по оптике и другим разделам физики). Его вклад в математическую сторону дела — создание основ дифференциального и интегрального исчисления — возник как способ точной формулировки основных понятий и аксиом механики, способ развития теории этой модели. Чего бы стоила вся механика, основанная, в частности, на понятиях мгновенной скорости и мгновенного ускорения, если бы в ней не было точного определения этих понятий? Но такие определения могут быть сформулированы только с помощью понятий первой и второй производных векторной функции числового аргумента. Собственно, эти понятия и представляют собой математические модели интуитивных понятий скорости и ускорения.

Возникшее, можно сказать, из механики дифференциальное исчисление начало вести самостоятельную жизнь как математическая модель нового типа, изучающая непрерывное изменение одних величин в зависимости от непрерывного изменения других, не обязательно от времени. К этому типу моделей относятся дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных), дифференциальная геометрия и т. д.

И. Ньютон — это 1687 год (формулировка законов механики и основ дифференциального и интегрального исчисления в «Математических началах натуральной философии»). Спустя историческое мгновение, а точнее, через сто лет, Ж. Л. Лагранж впервые предпринял попытку изложить механику как чисто математическую науку («Аналитическая механика», 1788 год). Предваряя свой курс, Ж. Л. Лагранж писал: «Те, кто любит Анализ, с удовольствием увидят, как Механика становится одной из его новых ветвей».

Работа Ж. Л. Лагранжа касалась, правда, лишь механики точки или конечной системы точек и была выполнена на уровне математической строгости его времени. Но затем явился О. Коши (первая половина XIX века). Придав строгий вид теории пределов и сильно продвинув дифференциальное и интегральное исчисления, в частности, для функций комплексного переменного, он стал великим математиком. Заодно он стал великим механиком и даже физиком. Не только потому, что любой прогресс в этих исчислениях есть прогресс в механике. О. Коши создал математические модели распределения деформаций и напряжений в сплошной среде, без чего немыслимо изучение механики и физики жидкостей, газов, плазмы, деформируемых твёрдых тел.

Можно говорить о многих других выдающихся «математизаторах» механики. Так или иначе, сейчас любой математик считает механику разделом своей науки. Во многих учебных курсах даже механика сплошной среды излагается как математическая теория со своей аксиоматикой. Типичным примером является известный труд К. Трусделла «Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред» (1972 год).

В качестве любопытного штриха отметим, что физико-математические факультеты Московского и Санкт-Петербургского университетов давно переименованы в механико-математические, физика же выделена в отдельные факультеты.

Тем не менее сказанное о механике можно повторить о некоторых областях физики. Результаты развития математического аппарата, моделирующего взаимосвязь непрерывности времени и пространства, с одной стороны, накопление частных результатов в электродинамике, термодинамике — с другой, позволили этим частям физики чётко сформулировать свои основополагающие принципы (свои системы аксиом) и развиваться далее как чисто математические науки. Например, аксиомы классической электродинамики получаются, если к системе аксиом механики добавить уравнения Максвелла, определяющие совместную эволюцию электромагнитного поля и вещества.

Итак, империя математики (т. е. список побед математического метода познания) непрерывно расширялась. Поэтому непрерывно менялся и обогащался второй смысл слова «математика» — совокупность наук, развиваемых математическим методом. Мы называем его вторым, потому что первым и основным смыслом этого слова считаем, как следует из всего нашего рассказа, сам математический метод. Но, пожалуй, понимание математики как совокупности определённых наук является традиционным и для большинства людей единственным. Одна из целей нашей беседы — поколебать эту традицию и показать, что понимание математики как метода более органично и соответствует существу дела. Уже были приведены доводы в защиту такой точки зрения. Ещё один — относительность, переменность во времени той совокупности наук, которую объединяют термином «математика» в его втором смысле. Когда-то в эту совокупность входила одна геометрия, затем к ней добавились арифметика, алгебра, исчисление бесконечно малых (дифференциальное и интегральное исчисление), классическая механика и т. д. Сейчас мы продолжим обсуждение некоторых составляющих этого «и т. д.» Ещё раз обратим внимание на фундаментальность, универсальную для человеческой деятельности значимость тех сторон бытия, которые моделируются исторически первыми применениями математики: пространство, время, зависимость, операции, непрерывность, движение, изменение. Конечно, науки, описывающие такие вещи, останутся первостепенно важными навсегда. Отсюда и устойчивость взгляда на математику как на совокупность этих наук.

Заметим, что описанная выше двойственность понятия «математика» отражена уже в её написании на различных языках. Скажем, по-русски и по-немецки (*die Mathematik*) — это существительное женского рода единственного числа. По-английски это *mathematics* — множественное число. Но самый интересный вариант мы находим во французском языке, где имеются два термина: *la mathématique* (опять же женский род, единственное число) и *les mathématiques* (множественное число). Последний термин всегда применяется, если речь идёт о математических науках, которые изучаются в школе и вузах, разрабатываются учёными-математиками, напротив него в толковых словарях написано *cour.*, что означает «общеупотребительный термин». Напротив первого термина стоит пояснение *vx* ou *didact.*, т. е. «архаизм или слово, предназначенное для применения в учёных текстах». Похоже, именно этот термин является прямым наследником гордого греческого *mathema* — знание, наука, логически развиваемая теория (добавим мы после всего, что написано выше). Остальные, более новые термины говорят о том, что второй смысл понятия «математика» — совокупность определённых наук — с течением времени значительно более распространился в широких слоях общества.

ЧТО НАША ЖИЗНЬ? — ИГРА

Начиная с XVII века начала интенсивно развиваться и в XX веке превратилась в аксиоматизированную математическую науку теория вероятностей. Вместе с ней в математику, для которой характерны непререкаемость и однозначность выводов, вошли такие «странные» понятия, как «случайность», «шанс», «вероятность». Конечно, этот парадокс, как и положено всякому парадоксу, есть противоречие кажущееся. Его решение состоит в том, что теория вероятностей изучает не просто случайные, а *массовые* случайные явления. Другими словами, предполагается, что объект исследования этой теории — *испытание*, условия которого можно идентично воспроизвести очень большое (в идеале — бесконечное) число раз, но результаты которого всякий раз непредсказуемы однозначно (бросание монеты или кости, срок службы прибора из серии одинаковых приборов, положение и скорость молекулы из данной порции вещества —

примеры таких испытаний). Экспериментально обнаруженный закон, лежащий в основе теории такого явления, говорит, что доля случаев, в которых испытание приводит к одному и тому же конкретному результату, при большом числе повторений испытания, близка к вполне определённому числу — *вероятности* этого результата. Вероятности различных исходов одного и того же испытания также связаны между собой определёнными объективными закономерностями (например, вероятность того, что реализуется один из двух возможных несовместимых исходов, равна сумме вероятностей этих исходов). На такой «экспериментальной базе» уже можно строить аксиоматику теории вероятностей, что и было сделано в XX веке в значительной степени трудами А. Н. Колмогорова (1933 год).

К нашему времени теория вероятностей стала богато развитой и разветвлённой теорией, сыгравшей, в частности, важнейшую роль для описания определённых типов физических явлений (молекулярная физика, квантовая механика, теория турбулентности).

Если пытаться весьма кратко и поэтому упрощённо описать характер выводов этой теории, то можно сказать так: на основе знания вероятностей некоторых событий, которые могут наступить в результате данного испытания, теория вероятностей позволяет вычислять вероятности других событий, которые могут наступить в результате того же испытания или серии испытаний. Например, из того, что вероятность выпадения любого числа очков от 1 до 6 при бросании игральной кости равна $1/6$, она даёт возможность найти вероятность таких событий, как: выпадание чётного (или нечётного) числа очков; выпадание числа, большего числа 3; выпадание числа очков 6 хотя бы один раз в n бросаниях и т. д. Но откуда брать начальную информацию о вероятностях событий — об этом собственно теория вероятностей молчит. Она не в состоянии сама по себе, без привлечения определённых интуитивный предположений о шансах появления тех или иных событий и проверки надёжности этих предположений на практике, решить этот вопрос. О том, каков характер этих предположений, мы поговорим позже, в беседе, посвящённой А. Н. Колмогорову. Сейчас же — несколько слов о проверке их надёжности.

Проверкой занимается специальная наука — *математическая статистика*, наводящая мост между теорией вероятностей и данными наблюдений за реализациями испытаний. Пусть требуется проверить, верны ли предполагаемые значения вероятностей некоторых событий, связанных с данным испытанием. Для этого математическая статистика должна располагать экспериментальными данными об исходах достаточно большого количества испытаний, т. е. *статистической выборкой.* Далее, с помощью аппарата теории вероятностей вычисляется вероятность появления именно такой серии данных исходя из гипотетических вероятностей интересующих нас событий. Если вычисленная вероятность оказывается большой (близкой к единице), есть основания считать гипотетические вероятности *правдоподобными*, поскольку именно из них чисто логически вытекает большая вероятность того, что наблюдается на практике. В противном случае исходные предполагаемые вероятности отвергаются, и надо выдвигать по поводу них новые предположения. В случае принятия гипотезы об исходных вероятностях заодно получается оценка риска ошибки, связанной с решением об их принятии (она даётся значением разницы между единицей и вычисленной вероятностью появления выборки). Мы видим, таким образом, что вместе с теорией вероятностей математическая статистика служит основой принятия решений в неопределённой ситуации, где неопределённость вызвана случайностью.

Даже в том случае, когда исходные данные для теории вероятностей абсолютно надёжно обоснованы, любой её вывод имеет практическое значение лишь при достаточно многих повторениях одного и того же испытания, ибо при этом имеются хорошие шансы получить примерно то количество реализаций интересующего нас исхода, которое соответствует его теоретической вероятности. Но всегда — примерно. Иначе говоря, принимая решение на основе теории, мы опять-таки находимся в условиях неопределённости и рискуем ошибиться. Неопределённость связана со случайной природой явления, по поводу исходов которого должно приниматься решение. Хороший пример такой ситуации приведён в известной книге Я. И. Перельмана «Живая математика». В столовой дома отдыха молодой математик очаровывает дам, рассказывая им о теории вероятностей: «Ставлю свой велосипед против рубля, что среди первых ста прохожих, которых мы увидим из окна столовой, не все будут мужчины. Это противоречило бы теории вероятностей». Услышавший разговор старый математик вмешался: «Скорее всего, вы правы. Но вы переоцениваете теорию вероятностей. Пожалуй, рублём против велосипеда я рискну». Когда компания подошла к окну, послышалась военная музыка — мимо окон маршировал батальон солдат. Мораль: если бы молодой математик проделывал свой эксперимент многократно, он был бы абсолютно прав и вскоре компенсировал бы рублями очень маловероятную потерю велосипеда, но в одном единственном испытании может случиться непоправимое. Вспомним, что хорошие страховые компании время от времени тоже вынуждены выплачивать страховки, но они хорошо просчитывают вероятности, что позволяет им окупать расходы страховыми взносами.

Однако неопределённость может быть вызвана не только случайностью. Возьмём, к примеру, игру в шахматы. Она легко описывается как математическая модель. Аксиомами модели служат правила игры, декретирующие определённые соотношения между её основными понятиями (белые, чёрные, доска, поле, ход, взятие, шах, мат, конец игры, король, ферзь, пешка и т. д.). Теория модели занимается, например, поисками теорем следующего типа: в данной позиции определённая стратегия, т. е. алгоритм игры, указывающий, как выбрать ход при любом ответе противника на предыдущий, ведёт к выигрышу или ничьей. Поскольку в каждой позиции имеется конечный выбор ходов и любая партия может, по правилам, продолжаться конечное число ходов, то достаточно перебрать конечное число вариантов развития игры и выбрать наилучший, т. е. «в принципе» никакой неопределённости нет. Однако, перефразируя тургеневского Базарова, заметим, что, кроме принципов, есть обстоятельства. Для шахмат главное обстоятельство состоит в том, что количество вариантов перебора превосходит возможности любой современной вычислительной системы. Поэтому люди до сих пор играют в шахматы. Эта практическая невозможность полного перебора и порождает неопределённость при принятии игроком решения о ходе в каждой достаточно сложной позиции. Подобные игры, где неопределённость выбора стратегии вызвана слишком большим количеством вариантов, называются *комбинаторными*. Ещё одним примером комбинаторной игры можно в известном смысле считать задачу об определении движений всех микрочастиц, составляющих некоторое тело, по их начальным положениям и скоростям. Происхождение же этой задачи явно не игровое, а физическое.

Однако вспомним, что в 2000 году Гарри Каспаров уже проиграл одной из новейших компьютерных шахматных программ. Не следует ли отсюда, что компьютерные возможности перебора вариантов, запоминания типичных ситуаций, партий, позиционных и комбинационных принципов значительно возросли?

Наконец, причиной неопределённости в выборе решения, выборе стратегии может оказаться недостаток информации о поведении противника (вражеского полководца, экономического конкурента, природы, если открытие её законов рассматривать как игру с ней), о его способе выбора стратегии. Игры, в которых этот источник неопределённости имеет место, называют *стратегическими.* Мы забыли сказать, что игры, в которых источник неопределённости — случайность, называются *азартными* (от французского *hasard* — случай). Любопытно, что в русском языке слово «азарт» имеет совсем другой смысл.

Во многих играх все три источника неопределённости при выборе линии поведения могут присутствовать одновременно.

Почему мы вдруг заговорили об играх? Дело в том, что в XX веке в математику влился поток моделей, объединяемых как раз под названием «теория игр». Не очень серьёзное по своему происхождению понятие игры оказалось очень удобным при моделировании процессов, связанных с принятием решений в неопределённой ситуации. Проблема такого выбора, конечно же, важна не только при игре в покер, шахматы или кости. Гораздо серьёзнее то, что она имеет решающее значение для таких очень волнующих людей «игр», как война и получение прибыли в сложной рыночной конъюнктуре. Надо думать, что эти социальные заказы повлияли на интенсивное развитие математической теории игр значительно сильнее, чем сравнительно невинное желание некоторых кавалеров избавиться от карточных долгов. Основополагающая для теории игр монография Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна так и называется: «Теория игр и экономическое поведение» (1953 г.). Правда, не следует очень уж смеяться над карточными и другими азартными играми, ведь это колыбель, из которой выросла теория вероятностей. Кроме того, многие обычные игры, в которые играют люди на досуге, до сих пор являются отличным пробным камнем, испытанным полигоном, на котором проверяются выводы теории игр.

Рождение и развитие теории вероятностей, математической статистики, теории игр и принятия решений знаменуют собой новый этап экспансии математического метода. На этот раз он охватил сферы, казалось бы, навечно недоступные для его логики и рационализма — сферы случая, неопределённости, хаоса, риска, обнаруживая и в них незыблемые объективные истины. «Высшее назначение математики — находить порядок в хаосе, который нас окружает» — это утверждение Н. Винера приобрело и буквальный смысл.

Успешное применение математических моделей нового типа породило определённую философию. Коротко её можно выразить словами пушкинского Германна: «Что наша жизнь? — Игра». Этой философии не откажешь в серьёзности и последовательности. Любой вид деятельности и саму жизнь человека можно мыслить как непрерывную цепь ситуаций, в которых требуется всё время выбирать линию поведения, стратегию в условиях неопределённости. При этом нужно следовать правилам игры, например уважать уголовный кодекс. Точнее, учитывать риск, связанный с выбором стратегии, противоречащей ему.

Развитие математики — это тоже великая игра со множеством версий, правила игры — это правила формальной логики плюс аксиомы, определяющие ту или иную версию. Цель игры — обнаружение истин, которые неявно заключены в правилах, но требуют определённых усилий для их извлечения на свет божий, затем сравнение этих истин с истинами природы: угадали или нет? Известный американский популяризатор математики Мартин Гарднер пишет в своей недавней книге: «Подобно другим естественным наукам, математика представляет собой игру, в которую мы играем с окружающим миром, с Вселенной. Самые лучшие математики и самые хорошие преподаватели — это, очевидно, люди, которые прекрасно разбираются в её правилах, а также получают удовольствие от самого процесса игры».

В этом месте нашего рассказа естественно заметить, что влияние математики на философию далеко не исчерпывается примером «игровой» философии. Достаточно вспомнить эпоху механического детерминизма, вышедшего из математического факта существования и единственности решения дифференциального уравнения движения точки с заданными начальными положением и скоростью. Можно писать целые трактаты по связи математики и философии, да, впрочем, они уже написаны. Иначе и быть не может, так как математика — один из важнейших методов решения основного вопроса философии в его гносеологической постановке: познаваем ли мир?

ОБРАЩЕНИЕ К ОСНОВАМ ПРИВОДИТ К ЯСНОСТИ СУЩЕСТВА ДЕЛА

На пути обзора основных достижений математического метода, нам, конечно, не обойтись без разговора о функциональном анализе. Это порождение математической мысли XX века довольно трудно поддаётся чёткому определению. Но, поскольку мы ведём популярную беседу, а не пишем статью в математический журнал, позволим себе такую формулировку: функциональный анализ — это результат постоянного стремления математиков к предельному обобщению математических понятий, к высшей степени абстракции.

Суть такого стремления можно понять на примере эволюции одной из важнейших концепций математики — понятия близости, лежащего в основе моделирования топологических свойств. В евклидовой геометрии близкими к данной точке A, естественно, считаются точки, удалённые от неё на малые расстояния. *Расстоянием* же между двумя точками называют длину соединяющего их отрезка прямой. Шарик заданного радиуса ε с центром в точке A, или, как говорят математики, *ε-окрестность* точки A, задаёт определённую степень близости к его центру. Эта степень и характеризуется числом ε. Если надо выразить тот факт, что A «вплотную» примыкает к некоторому множеству E, не принадлежа ему (иначе говоря, что точка A *бесконечно близка* к этому множеству), то говорят: в любой ε-окрестности точки A имеются точки множества E.

Расстояние $\rho(A, B)$ между двумя точками A и B можно записать аналитически. Для этого следует ввести в пространстве декартову систему координат x_1, x_2, x_3, и тогда расстояние примет вид

$$\rho(A, B) =$$
$$= \left\{[x_1(A) - x_1(B)]^2 + [x_2(A) - x_2(B)]^2 + [x_3(A) - x_3(B)]^2\right\}^{1/2}.$$

На этом евклидовом понятии расстояния и соответствующем понятии близости построена вся классическая теория пределов, непрерывных и дифференцируемых функций — как одной, так и двух, трёх и т. д. числовых переменных.

Однако есть задачи, в которых естественное евклидово расстояние оказывается совсем не естественным. Например, бесполезно измерять расстояние от Москвы до Нью-Йорка по прямой, ибо такая прямая проходит внутри земного шара. Лучше измерять его по дуге большого круга, соединяющей эти города на поверхности Земли. Да и в этом случае результат может оказаться непрактичным. С точки зрения экономистов «Аэрофлота» или «Пан-Америкен» кратчайшее расстояние следует измерять с учётом наличия мест для возможных промежуточных посадок самолёта, и оно может оказаться не кратчайшим геометрически. Если учесть ветры и другие условия полёта, то измерять расстояние надо вообще не в километрах, а в тоннах керосина и даже сразу в рублях или долларах. При этом расстояние от Москвы до Нью-Йорка может оказаться не таким, как от Нью-Йорка до Москвы. Если для полицейского вертолёта расстояние между двумя точками в разных местах города можно измерить евклидовым способом — по прямой, то для пешехода это не так (дома мешают), не говоря уж об автомобилисте, который вынужден учитывать запрещённые повороты и улицы с односторонним движением. Интересно, что и для автомобилиста $\rho(A, B)$ может не совпадать с $\rho(B, A)$.

Другие сложности возникают при измерении расстояний между точками многомерного пространства. Например, при построении методов приближённого решения системы уравнений с n числовыми неизвестными возникает необходимость оценить ошибку, т. е. степень близости приближённого и точного решений. Для этого надо вводить расстояние между *n-мерными точками* — упорядоченными наборами вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящими каждый из n чисел. Геометрической наглядности здесь нет, так как речь идёт не о точках обычного пространства. Можно, тем не менее, попытаться ввести расстояние по аналогии с аналитическим выражением евклидова расстояния в трёхмерном пространстве:

$$\rho(A, B) = \left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i(A) - x_i(B))^2\right\}^{1/2}. \tag{1.1}$$

Но чем хуже такое определение расстояния:

$$\rho(A, B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i(A) - x_i(B)| \tag{1.2}$$

(максимальная из разностей координат) или такое:

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |x_i(A) - x_i(B)|\ ? \tag{1.3}$$

Действительно, чем хуже? Если мы выберем из этих вариантов наиболее удобный с точки зрения техники вычислений, то будет ли он пригоден в принципе, сможет ли дать нам то, что мы хотим получить от использования понятия расстояния?

Подобные вопросы возникают и при оценке близости бесконечномерных точек. Если мы приближённо решаем не систему алгебраических уравнений, а, скажем, дифференциальное уравнение, то приближённым решением будет не конечный набор чисел, а функция $y = f(x)$, определённая на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Надо оценивать её отклонение от точного решения $y = g(x)$, т. е. вводить расстояние между функциями. Но каждая функция задаётся бесконечным набором чисел — её значений y для всех x из области определения. Всё тот же метод аналогий подсказывает нам, что вместо (1.1)–(1.3) можно попытаться вводить расстояния

$$\rho(f,g) = \left\{ \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \right\}^{1/2}, \tag{1.4}$$

$$\rho(f,g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|, \tag{1.5}$$

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx. \tag{1.6}$$

Идея перехода к бесконечномерным пространствам, точки которых — это функции, является одной из основных идей, породивших функциональный анализ. Применение этой идеи позволило, прежде всего, обрести новый (геометрический) взгляд на разнородные аналитические проблемы, связанные с изучением соотношений между функциями, главным образом при сравнении их близости друг с другом. Слово «анализ» означает, что новая наука ставила себе в основном топологические цели. Геометрическая терминология и интуиция, метод аналогий (т. е. попытки перенести на пространства функций геометрические соотношения обычного трёхмерного евклидова пространства) оказались плодотворными.

Одним из первых достижений на этом пути оказалось создание модели метрического пространства. Был поставлен вопрос: что же можно считать расстоянием, какие свойства этого понятия позволяют построить теорию пределов и непрерывных функций по классическим образцам?

Анализ евклидова расстояния дал ответ: число $\rho(A, B)$ — расстояние между элементами (точками) A и B множества M должно удовлетворять следующим условиям. Во-первых, быть неотрицательным, причём обращаться в нуль тогда и только тогда, когда $A = B$; во-вторых, не зависеть от порядка, в котором рассматриваются A и B,

$$\rho(A, B) = \rho(B, A);$$

в-третьих, обладать «свойством треугольника»

$$\rho(A, B) \leqslant \rho(A, C) + \rho(C, B).$$

Это всё. Все остальные существенные свойства евклидова расстояния являются следствиями этих трёх. С другой стороны, в этих трёх свойствах нет никаких упоминаний об определении расстояния в евклидовом пространстве. Поэтому естественна идея вводить на любом множестве, независимо от природы его элементов (точки «на самом деле», функции, линии и т. д.), расстояние каким угодно удобным образом, лишь бы выполнялись три упомянутых условия. Всякое множество с так введённым расстоянием назвали *метрическим пространством*, а сами эти условия — *аксиомами метрического пространства*. Общая теория метрических пространств позволила выделить те свойства его элементов, которые обусловлены только наличием расстояния и ничем иным.

Какая выгода от этого? Приведём мнение известного математика профессора Г. Е. Шилова: «Обращение к основам приводит к ясности существа дела, освобождая математика от учёта конкретной индивидуальности объекта, а понимание существа дела позволяет немедленно включить в рассмотрение новые объекты с иной индивидуальностью, но с тем же глубинным устройством.

Так, было известно доказательство Пикара существования и единственности решения дифференциального уравнения, основанное на методе последовательных приближений искомой функции на отрезке другими функциями, получающимися по определённым правилам. А затем был сформулирован (Банахом и другими) «метод неподвижной точки», которым была доказана та же теорема. Он обнаружил существенную часть в доказательстве Пикара: наличие сжимающего оператора в некотором метрическом пространстве. Исходные объекты — будь то числовые функции на отрезке или дифференциальные уравнения — оказались несущественными. В результате «метод неподвижной точки» не только сделал более прозрачным, «геометрическим» доказательство теоремы Пикара, но и дал возможность, развивая заложенную в нём идею, доказывать множество теорем существования, где речь шла даже не о функциях на отрезке и не о дифференциальных уравнениях».

Приведённые выше аксиомы метрического пространства кажутся нам вполне естественными. Во всяком случае, трудно предположить, что объект, наделённый таким расстоянием, может обладать странными свойствами. Когда герой романа Я. Гашека бравый солдат Швейк попал в сумасшедший дом, он встретился там с профессором, доказывавшим, что внутри земного шара имеется другой шар, значительно больше наружного. Профессора поделом упрятали в понравившееся Швейку учреждение. Трехмерное пространство, в котором мы живём, является одновременно и метрическим, и линейным. В нём подобное расположение шаров невозможно. Если же отказаться от линейности, то совсем просто построить пример метрического пространства, в котором шар большего радиуса вполне может лежать строго внутри шара меньшего радиуса. Выигрывая в общности, мы теряем в геометрической наглядности.

Итак, метрическое пространство — это наиболее общая математическая модель, основанная на идее расстояния. Но вспомним, что для воплощения понятий близости, соприкосновения расстояние играет в общем-то вспомогательную роль. Точка A неотделима от множества E, если в любой её окрестности есть точки из E. А расстояние нужно, чтобы определить окрестности точки. Но нельзя ли обойтись без расстояния в определении окрестностей?

Для иллюстрации этого вопроса перейдём с математического языка на «человеческий»: разве чтобы указать множество людей, близких в некотором смысле человеку A, нужно уметь характеризовать числами расстояние от A до других людей? Вовсе нет. Например, родственники A — это множество людей, близких ему, это некоторая окрестность A. Люди его профессии — это тоже окрестность A, они ему близки, но в ином смысле. Люди его возраста — аналогично. Таким образом, можно указать большую совокупность окрестностей A, определяя их качественно, без всякого расстояния. После этого уже можно решать задачу: отделим ли A от некоторого множества E людей, ну, скажем, от множества футболистов или множества курильщиков, или множества верующих и т. д. Для этого надо выяснить, каждая ли окрестность A содержит элементы из E, отличные от самого A.

Конечно, этот пример вульгарен. Но он наглядно поясняет идею очередного обобщения понятия близости, соприкосновения. Она состоит в непосредственном указании тех частей пространства, которые считаются окрестностями своих точек, без всякого использования расстояния. Реализация этой идеи приводит к определению *топологического пространства.* Аксиомы его совсем просты. Они получаются в результате выделения того минимального набора свойств, которыми должны обладать окрестности в метрическом пространстве, чтобы, во-первых, эти свойства формулировались без привлечения слова «расстояние» и, во-вторых, осталось в силе максимально возможное количество теорем метрического пространства. Эти аксиомы таковы: любое множество T есть топологическое пространство, если можно указать семейство его частей, содержащее само T, пустое множество, объединение любой совокупности своих элементов и пересечение любой конечной совокупности их. Множества этого семейства и являются по определению окрестностями своих точек.

В топологическом пространстве, как и в метрическом, можно построить теорию пределов и непрерывных функций. Правда, эта теория оказывается беднее теоремами, чем соответствующая метрическая теория, но она обладает и некоторыми достоинствами. Например, она выясняет, что в природе близости определяется свойствами окрестностей, а что — специальным способом их введения с помощью расстояния. Пользу от подобного «разделения сфер влияния» мы поняли из слов Г.Е. Шилова. Кроме того, она позволяет рассматривать предельные переходы и непрерывность в тех пространствах, которые нельзя сделать метрическими. Это можно сделать, в частности, в пространствах так называемых обобщённых функций, играющих большую роль в современной математической физике (см. беседу о С.Л. Соболеве).

ОБОБЩЕНИЕ ЧУДА

Мы видели только что, как идея близости и непрерывности доводится до своей «голой сущности». Функциональный анализ проделывает аналогичную процедуру предельного обобщения и с другой универсальной идеей математики — идеей линейности.

В чём она состоит и почему она универсальна? Множество обычных векторов (например, отрезков со стрелками, изображающих силы, приложенные к некоторой точке) линейно. Это значит, что векторы можно умножать на числа и складывать по правилу параллелограмма, снова получая векторы. Это удобно, потому что можно ввести базисные векторы и раскладывать по ним любой вектор, заменяя после этого операции над векторами операциями над числами — координатами векторов. Оказывается (утверждают математики, поработав сотни лет), что похожими свойствами обладают, помимо множества векторов-отрезков, и многие другие множества самой различной природы. Мы уже упоминали их ранее: непрерывные или дифференцируемые на отрезке функции; решения линейной однородной системы уравнений, алгебраических или дифференциальных и т. д. Отсюда возникла обобщённая конструкция — линейное (или векторное) пространство, т. е. множество элементов любой природы, которые можно умножать на числа и складывать между собой, пользуясь теми же правилами действий, что и для обычных векторов-отрезков.

Это и есть доведение до предела идеи линейности; и понятие линейного пространства вместе с понятием топологического пространства является одной из двух вершин абстракции функционального анализа. Выгода от использования общей теории линейных пространств особенно хорошо обнаруживается, когда они рассматриваются не сами по себе, а как база для изучения функций с областью определения и значениями в линейных пространствах. Уже такая простая до тривиальности функция, как прямая пропорциональность между числами $y = ax$, превращается после её надлежащего обобщения на линейные пространства в мощнейшее орудие исследования самых различных математических объектов. Если считать x произвольным элементом линейного пространства X, а y — принадлежащим линейному пространству Y, то эта функция, вообще говоря, имеет иной смысл: умножая x на число a, мы получим элемент из X, а не из Y. Чтобы обобщить прямую пропорциональность нужным образом, надо «уцепиться» за то её свойство, которое обычно остаётся в тени при исследовании элементарных функций — свойство линейности (опять линейность — это второй смысл термина):

$$a(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(ax_1) + \beta(ax_2),$$

где α, β — произвольные числа, x_1, x_2 — произвольные значения аргумента. Таким образом, мы приходим к понятию *линейного оператора*, действующего из линейного пространства X в линейное пространство Y: это функция $A(x)$, определённая на X, со значениями в Y такая, что

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$$

при любых x_1, x_2 из X и любых числах α, β.

Линейный оператор — этот высокий родственник скромной прямой пропорциональности оказывается, в отличие от неё, исключительно ёмким понятием, одним из центральных объектов изучения функционального анализа. Известный труд Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца «Линейные операторы» состоит из трёх томов объёмом в совокупности около 2600 страниц, причём очень насыщенных. Линейными операторами являются такие популярные в математике операции, как преобразования обычного геометрического пространства (повороты, подобия и их комбинации), сопоставление элементам линейных пространств их координат в некотором базисе, преобразования Фурье и Лапласа, дифференцирование, интегрирование, суммирование рядов, интерпретация элементов одного векторного пространства как элементов другого (вложения) и многие другие. Без понятия линейного оператора нельзя сформулировать математически даже основные положения таких физических теорий, как механика сплошных сред, квантовая механика. Такова степень обобщения при переходе от множества чисел к линейному пространству и от прямой пропорциональности к линейному оператору.

Конечно, надо сказать, что изучение только линейных свойств множеств и функций так же, как и изучение только свойств топологического пространства, приводит к относительно скудным, бедным теоремами теориям. Их значение, как уже говорилось, состоит в том, чтобы понять, какие математические факты обязаны своим существованием топологии, какие — линейности. Главный же интерес, с точки зрения приложений функционального анализа к более конкретным моделям, возникает при рассмотрении множеств, наделённых одновременно и структурой линейного пространства, и топологической структурой, а иногда и дополнительными свойствами алгебраического или иного характера. Именно на этом пути возникают такие плодотворные абстрактные конструкции, как линейное топологическое пространство, нормированное пространство, нормированная алгебра и т. д. С их помощью получены богатые результаты в области приложений функционального анализа к математической физике, к построению приближённых методов решения алгебраических, дифференциальных, интегральных и прочих уравнений.

Хочется особенно выделить возможность распространения на функции в абстрактных пространствах идей дифференциального и интегрального исчисления. Ведь дифференциальное исчисление — это великое чудо. Чудо проявляется не в том, что всякая более-менее произвольная функция $y = f(x)$, где x и y — числа, локально (т. е. в малой окрестности точки $x = x_0$) описывается прямо пропорциональной зависимостью

$$y - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0),$$

хотя это уже нечто. Чудо скорее в том, что из этого факта локальной линейности можно получить выводы о глобальных свойствах существенно нелинейной функции $f(x)$. Например, дать способы нахождения максимума и минимума $f(x)$ во всей области её определения. Если же x и y — комплексные переменные, то наличие производной $f'(x)$ в каждой точке области определения функции оказывается настолько сильным свойством, что изменение $f(x)$ в какой угодно малой окрестности одной-единственной точки приводит к её изменению во всей области. «Мы можем, таким образом, сравнить аналитическую функцию с организмом, отличительной особенностью которого является как раз то, что воздействие на любую его часть вызывает солидарную реакцию всего целого». (Г. Пойя, Г. Сегё).

Функциональный анализ, пользуясь одним из мощных средств своего арсенала — теорией нормированных пространств, смог обобщить подобные чудеса на случай, когда x и y не числа, а тоже функции (или матрицы, линии, операторы). Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах — это вещь настолько же эстетичная, насколько и практичная. Достаточно упомянуть вариационное исчисление — способы минимизации функционала, т. е. числовой функции от функции. Значение этого математического аппарата, говоря философски, связано с тем, что природа — известный эконом. Она реализует из многих возможностей движения, эволюции ту, на которой достигается минимум определённого количества: энергии, действия, времени. Правда, далеко не во всех случаях люди поняли, что именно экономит природа. Может быть, иногда она работает по принципу наименьшего интеллекта или наибольшей вредности. Это ещё предстоит выяснить. Однако эмпирический закон бутерброда (бутерброд всегда падает маслом вниз), законы Паркинсона, исторический опыт показывают, что подготовительная работа к подобным открытиям идёт.

Во всяком случае уже сейчас ясно, что следует экономить человеку, предприятию, государству, чтобы быть богатым. Надо экономить деньги. Совершенно напрасно в своё время Л. И. Брежневу ставили в упрёк его знаменитую фразу: «Экономика должна быть экономной». Это же абсолютно содержательно и верно! Видимо, наши соотечественники были недовольны тем, что этот принцип не применялся его автором в управлении страной. Сейчас люди опять недовольны тем, что этот принцип применяется в управлении страной, поскольку он требует уплаты налогов и устранения многочисленных «халяв» (простите за сленг).

РАЙ НУЖНО ЗАСЛУЖИТЬ

Мы кратко охарактеризовали возможности предельного обобщения концепций близости и линейности, т. е. то, чем занимается функциональный анализ в узком смысле этого термина. Но можно продвигаться и дальше по пути обобщения. Если избавить множество от линейной, топологической или алгебраической структуры, то останется только чистая идея множества как совокупности его элементов. Это, наверное, самая абстрактная из математических абстракций. Казалось бы, какую теорию можно построить на таком бедном основании? Оказывается, можно, да ещё какую! Именно о ней Д. Гильберт говорил: «Никто не сможет нас изгнать из рая, созданного для нас Кантором». (Георг Кантор — один из создателей теории множеств). Дело в том, что в понятие множества входят и бесконечные множества, элементы которых нельзя «пересчитать» за конечное число шагов, добавляя по одному к предыдущим. Благодаря этому обстоятельству идея множества оказывается богатой весьма непростыми и неочевидными, а главное — очень общими, выводами.

Так, в теории множеств формируется самое общее понятие соотношений между математическими объектами, рассматриваемыми как элементы одного или нескольких множеств. Выделяются и исследуются основные типы соотношений, постоянно встречающихся в математике. Чтобы понять, какова природа получаемых при этом результатов, разберём конкретный пример — так называемое соотношение эквивалентности.

Известно, что математикам часто приходится вводить понятие равенства между некоторыми элементами данного множества. Например, рассмотрим множество векторов-отрезков трёхмерного пространства. Какие два вектора можно считать равными? Это зависит от формулировки задачи. Когда векторы изображают сдвиг пространства на определённое расстояние в определённом направлении, то совершенно не важно, какую точку пространства мы считаем началом вектора. Поэтому векторы считаются равными, если они имеют одну и ту же длину и одинаковое направление (*свободные векторы*). Когда векторы моделируют силы, действующие на абсолютно твёрдое тело, для их равенства необходимо вдобавок к предыдущему условию, чтобы они лежали на одной и той же прямой, в противном случае соответствующие силы будут оказывать различные воздействия на тело (*скользящие векторы*). Если же векторы изображают силы, действующие на деформируемое тело, то для их равенства необходимо ещё и совпадение точек приложения (*связанные векторы*). В каждом из этих случаев имеется свой несущественный признак различия между векторами-отрезками (точка приложения в первом случае; её положение на прямой, несущей вектор, — во втором; этот признак вовсе отсутствует — в третьем). Векторы-отрезки, различающиеся по такому принципу, можно считать равными между собой, не отличать их друг от друга с точки зрения изучаемой задачи, считать различными символами для обозначения одного и того же объекта: сдвига пространства; силы, действующей на твёрдое тело; силы, действующей на деформируемое тело. Новые полученные после такого отождествления объекты предстают как классы эквивалентных между собой элементов исходного множества векторов-отрезков.

Возникает вопрос: какими свойствами должно обладать соотношение $x \sim y$ между двумя элементами x и y множества X, чтобы эти элементы можно было отождествить подобно тому, как это было сделано в предыдущих примерах (другими словами — чтобы можно было разбить X на непересекающиеся классы эквивалентных друг другу элементов)? Теория множеств говорит, что для этого достаточно трёх свойств: рефлексивности (для любого $x \in X \quad x \sim x$), симметрии (если $x \sim y$, то $y \sim x$), транзитивности (если $x \sim y$, $y \sim z$, то $x \sim z$). Эта теорема позволяет автоматически решать вопрос о возможности избавления от ненужного, загромождающего суть дела обилия несущественно различающихся объектов во многих конкретных задачах.

Например, при вычислении интеграла можно заменять подынтегральную функцию любой другой, которая отличается от исходной только на множестве меры нуль: эти функции оказываются эквивалентными с точки зрения теории интегрирования.

Пример попроще, но важный: вводя рациональные числа как отношения целых чисел, мы получаем множество всевозможных дробей; однако некоторые различные дроби вида $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ оказываются одинаковыми, равными как числа. Рациональное число определяется как класс эквивалентных дробей, при этом соотношение эквивалентности $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$ задаётся условием $mq = np$. На этом основана возможность сокращения дробей и приведения их к общему знаменателю.

Мы остановились для наглядности лишь на одном типе соотношений, изучаемых теорией множеств. Исключительно важную роль играют так называемые *соотношения порядка*, позволяющие вводить ту или иную иерархию элементов множества (неравенства между действительными числами; включение частей множества друг в друга; иерархия элементов структур управления и т. д.). Наконец, теория множеств выделяет тип соотношений $y = f(x)$ между элементом x множества X и элементом y множества Y такой, что для любого $x \in X$ существует единственный элемент $y \in Y$, обладающий свойством $y = f(x)$. Тем самым формулируется общее определение функции с областью определения X и значениями в Y. Трудно преувеличить значение этого понятия для математики.

Изучение функций, осуществляющих взаимно однозначное сопоставление элементов одного множества элементам другого, приводит к самому общему понятию количества объектов, а именно к понятию мощности множества.

Два множества называются *равномощными*, если имеется функция, реализующая взаимно однозначное соответствие между их элементами. Равномощность $X \sim Y$ оказывается соотношением эквивалентности на «множестве всех множеств». Тем самым можно рассматривать природу множества и его элементов как несущественный признак и разбивать все мыслимые множества на классы равномощных. После этого от каждого множества остаётся единственная сущность — его принадлежность к определённому классу, т. е. его *мощность*, т. е. «количество» элементов в нём. Если рассматривать только конечные множества, то их мощности — это фактически наши старые знакомые — натуральные числа. Если же не делать такого ограничения, то на сцену выступают новые понятия — мощности бесконечных множеств или *трансфинитные числа*. Становится возможным ранжировать множества по возрастанию их мощностей: конечные, счётные (например, множество всех натуральных чисел), континуумы (например, множество всех точек числовой прямой) и т. д. Наибольшей мощности не существует: одна из теорем теории множеств утверждает, что мощность множества $P(A)$ всех частей множества A больше, чем мощность A.

В итоге теория множеств образует наиболее абстрактную базу всей современной математики. Любая математическая модель трактуется как некоторая теоретико-множественная структура: одно или несколько множеств, между элементами которых с помощью аксиом модели заданы определённые соотношения. Можно понять, почему любители кратких формулировок говорят иногда: «Математика — это теория множеств». Можно теперь увидеть смысл и во встретившемся нам в начале беседы определении математики как науки, изучающей количество и порядок.

Основополагающую роль теории множеств, которая является удобной «сценой» для разыгрывания всех математических «пьес», и имел в виду Д. Гильберт, когда говорил о канторовском рае. Но почему же он вёл речь об изгнании математиков из этого рая? Чего он опасался? Дело в том, что теория множеств создалась не вдруг. Как всякая теория она должна держаться на своих аксиомах. Создание системы аксиом оказалось очень трудным делом. Ведь бесконечные множества — это чистый продукт разума. Мы уже говорили о том, что никто из людей не был в бесконечности, не видел реальных бесконечных множеств в природе. Но каждый из нас представляет бесконечность (хотя бы в виде множества натуральных чисел или беспредельности пространства, или времени). Поэтому аксиоматика теории множеств должна быть до некоторой степени произвольной. Лучшее, что от неё следует ожидать в случае удачи, — чтобы из аксиом можно было логически вывести, не встречая противоречий, всё то, что навыводили математики до сих пор и что оправдалось удобством и практической приложимостью их результатов. Именно такую цель ставили перед собой создатели аксиоматики теории множеств. При этом, конечно, они надеялись, что ещё не открытые следствия аксиом теории множеств также не будут противоречивыми.

На пути реализации такого плана встретились настолько серьёзные неудачи, что одно время речь шла о кризисе теории множеств. Некоторые её понятия, например, «множество всех множеств», всё-таки оказывались противоречивыми. Они не могли существовать, не нарушая принципов логики. Если U — множество всех множеств, то множество $P(U)$ его частей, с одной стороны, имеет бóльшую мощность, чем само U. Но, с другой стороны, $P(U)$ есть часть U и поэтому не более мощно, чем U.

Парадоксы, подобные этому, а их оказалось много, произвели на математический мир ошеломляющее впечатление. Интуиция математиков, покоившаяся на простых и, казалось, незыблемых принципах логики, завела их в тупик. Вдруг обесценились оптимистические заявления великих предшественников: «…вещи, которые мы познаём очень ясно и очень отчётливо, суть истинные» (Р. Декарт); «Нужно было бы иметь совершенно неправильный ум, чтобы дурно рассуждать о принципах столь значительных, что почти невозможно, чтобы они ускользали» (Б. Паскаль).

Но постепенно математики оправились от шока, появились различные планы «спасения» теории множеств, устранения парадоксов путём модификации аксиоматики или пересмотра основ логики. Сформировалась новая математическая наука — *математическая логика*, или *метаматематика*. Её основной целью и была ревизия логических правил и способов их употребления в математике.

Метаматематика исходит из того, что всякую математическую теорию следует рассматривать как некий формализованный (т. е. с очень жёсткими правилами, не допускающими никаких вольностей) язык. Это значит, во-первых, что должны быть определены символы (буквы, знаки), которые можно использовать в языке. Конечные последовательности таких символов образуют всевозможные выражения языка. Некоторые выражения могут не иметь смысла в языке (как «лошади впадают в Каспийское море»). Другие, называемые *формулами теории*, понимаются как осмысленные выражения и могут быть истинными и ложными.

Во-вторых, выделяются некоторые формулы теории, которые с самого начала объявляются истинными — это *аксиомы теории*. В-третьих, задаётся конечный набор соотношений между формулами, называемых *правилами вывода*. Проще говоря, фиксируются допустимые для данной теории логические правила.

Пользуясь аппаратом метаматематики, можно контролировать «допустимую меру полёта фантазии» при создании новой теории. Если какое-либо понятие, приводившее к парадоксу, всё же представляется нужным для теории, то надо так переформулировать его аксиоматическое или логическое определение, чтобы нужные свойства остались, но парадокс оказался невыразимым или ложным в языке теории. Основной способ, которым это было достигнуто в теории множеств, состоял в следующем. Все «прежние» множества были разбиты на два типа: множества и классы, не являющиеся множествами. К последним были отнесены некоторые «слишком большие» совокупности объектов, например, «множество всех множеств». Им было аксиоматически запрещено являться частями других совокупностей. После этого обычные способы вывода парадоксов стали приводить не к противоречию, а только лишь к тому, что некоторые совокупности не являются множествами.

Итак, титаническими стараниями многих выдающихся математиков необходимая реконструкция аксиоматики теории множеств была реализована в начале XX века. Парадоксы исчезли, классические результаты математики остались, «райский комфорт» в математическом мире был восстановлен. Правда, на горизонте смутно маячат новые неприятности, но все дружно надеются, что до них дело не дойдёт. Дело в том, что великий логик современности К. Гёдель имел неосторожность доказать теорему, смысл которой примерно таков: арифметика или более общая теория, содержащая арифметику как часть, либо противоречива, либо неполна. Первое означает: среди формул этой теории имеется утверждение, истинное и ложное одновременно. Второе: среди формул теории есть такая, что доказательство её истинности не существует так же, как и доказательство её ложности. Когда предсказание Гёделя реализуется, придётся снова заняться уточнением основ математики. Но процедура пересмотра основ уже привычна, и не только для математиков, но и для учёных всех специальностей. Поэтому вряд ли стоит драматизировать ситуацию, тем более, что речь идёт о математике, а не о социальных науках.

ГАЛЛЮЦИНАЦИЯ ПОД УТРО

Мы можем согласиться с тем, что ставший, с лёгкой руки Н. Бурбаки, модным в наше время термин «архитектура математики» вполне оправдан. Только что мы ненадолго спускались на уровень фундамента величественного дворца математических наук, на уровень максимальной абстракции. В этом «подземелье» мощные колонны первичных логических и теоретико-множественных теорий опираются на грунт научного и производственного опыта людей, на свойства человеческого разума. Только что мы были свидетелями капитального ремонта в этом огромном подвале. Грунт оказался неоднородным, и пришлось выбирать самые надёжные его участки для поддержания опор новой конструкции.

Поднимемся теперь из подземелья и взглянем на дворец со стороны. Архитектура его причудлива и запутанна, но одна особенность резко бросается в глаза. Первый этаж состоит из двух огромных блоков, у входа в которые можно прочитать название «топология», «алгебра». На втором этаже видно уже несколько кубов поменьше, соединённых переходами и с блоками первого этажа, и между собой. Читаем некоторые таблички: «линейная алгебра», «теория групп», «функциональный анализ», «дифференциальные уравнения». Каждый следующий этаж содержит всё большее количество всё меньших блоков. Растёт и усложняется система переходов из блока в блок. Все перечисленные в нашей беседе названия математических наук, а также многие другие встречаются на табличках. Фантастическая измельчающаяся конструкция уходит вверх и теряется в небесах, не охватываемая взглядом.

Во всех блоках работают люди. Одни всё время сидят в своём блоке, другие не находят покоя, постоянно передвигаются по горизонтали и по вертикали. Немногие с особенно сосредоточенным и упрямым взглядом время от времени спускаются в подземелье и внимательно осматривают несущую колонну, — нет ли на ней трещинки? Чем выше этаж, тем реже спускаются работающие на нём люди далеко вниз. Создаётся впечатление, что их вовсе не интересует, на чём держится вся махина. Так оно и есть. Обитатели самых верхних этажей — прикладники. Они решают конкретные задачи естественнонаучного или производственного происхождения. Для этого им не нужна строгая теория множеств и метаматематика, вполне хватает тех полуинтуитивных представлений о логике и множествах, которыми пользовались много десятилетий назад.

Хотя есть и исключения (математика ведь щедра на сюрпризы). Выяснилось, что в подвал с верхних этажей часто спускаются специалисты по кибернетике, системам управления, экспертным системам, системам искусственного интеллекта. Алгоритм логического вывода составляет сердцевину их науки.

Ну и, конечно, в царство метаматематики регулярно спускаются те, кто имеет дело с компьютерами. Дело в том, что лет сорок назад во дворец начали завозить компьютеры. С тех пор этот процесс не прекращается. Он даже стал двусторонним: всё чаще старые компьютеры вывозят и выбрасывают, а новые, более совершённые, устанавливают. И чем выше этаж, тем больше на нём компьютеров, тем чаще их меняют. Люди, проектирующие компьютеры, также работают во дворце, где-то на средних этажах. Их математический аппарат — формализованные языки общения с машиной. Поэтому и они наведываются в подвалы метаматематики.

Мощные компьютеры сильно расширили возможности решения задач, связанных с большими объёмами вычислений, в частности игровых задач с комбинаторной неопределённостью. Поэтому значительно возрос интерес к так называемой конечной математике, т. е. к теориям, имеющим дело с конечными, хотя и большими множествами. В связи с этим на верхних этажах дворца стали появляться новые блоки под названием «системный анализ», «оптимальное планирование», «линейное программирование», «теория автоматов». Отдельные обитатели соответствующих этажей даже объединяют подобные, безусловно, важные ветви математики общим «новым» термином «математическое моделирование». Конечно, они ведь не спускаются вниз или спускались туда очень давно. Поэтому и забыли, что этот термин можно написать на главных воротах дворца, ибо «математика» и «математическое моделирование» — синонимы. А первой математической моделью была евклидова модель пространства.

Вот так или примерно так закончат свой рассказ двое профессионалов, которых попросили объяснить, что такое математика. Кофе будет давно выпит, а за окнами начнёт светать. Вы будете хотеть спать, а они будут чувствовать себя опустошёнными и неудовлетворёнными. Они ведь знают, что коллеги сочтут рассказ слишком упрощённым, а любители — слишком сложным. Но ничего не поделаешь — так всегда бывает в научно-популярной литературе.

И мы с Вами заканчиваем эту беседу о математике, но не расстаёмся. Нам хочется подробнее поговорить о людях, работающих во дворце. Они заслуживают уважения не только потому, что мы тоже из их числа, а потому, что в математике задерживаются только добросовестные и трудолюбивые люди. Другие ищут себе работу полегче. Но среди великого множества математиков есть свои титаны, свои звёзды. Они освещают путь собратьям далеко вперёд. Их работы являются основным двигателем прогресса и в самой математической науке, и в её приложениях. Конечно, интересно знать, как складывается судьба таких людей, как они работают, что ими движет.

Мы расскажем о трёх знаменитых российских математиках нашего времени — академиках, Героях труда. Каждый из них знаменует собой эпоху в своей науке. Знакомство с ними позволит нам узнать новое и о тех направлениях математики, в которых они прославили своё имя.

Беседа вторая

А. Н. КОЛМОГОРОВ. ЛИЦО МАТЕМАТИКИ XX ВЕКА

ЛУЧШЕ БОЛЬШЕ, ДА ЛУЧШЕ

«Колмогоров–Пуанкаре–Гаусс–Эйлер–Ньютон: всего пять таких жизней отделяют нас от истоков нашей науки». Эти великолепные слова принадлежат одному из учеников Андрея Николаевича Колмогорова — академику В. И. Арнольду. Они выражают общепризнанное мнение о том, что А. Н. Колмогоров относится к числу исключительных фигур в истории математики. У подъезда одного из корпусов Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова установлена бронзовая доска со словами «В этом доме с 1953 г. по 1987 г. жил великий учёный России, математик, профессор Московского университета, академик Андрей Николаевич Колмогоров».

Что же это значит? Какими делами, какими свойствами личности определяется столь высокий авторитет в науке?

Начнём с того, что бросается в глаза сразу, хотя бы при знакомстве со списком трудов А. Н. Колмогорова. Подобно великим, имена которых стоят рядом с его именем в приведённой цитате, Андрей Николаевич был универсалом в математике. В ней он умел всё. А надо сказать, что математику XX века обладать этим качеством очень непросто. Уже в начале XIX века из-за обилия богатых «провинций», на которые разделилась огромная математическая империя, типичной для математиков стала специализация исследований в определённой области. Стало возможным создать себе крупнейшее научное имя, почти не выходя за пределы этой области. Так выросли геóметр Н. И. Лобачевский, алгебраист А. Кели, создатель теории множеств Г. Кантор и многие другие. В наше время эта тенденция усилилась. Сейчас даже стало «хорошим тоном» говорить, что представители различных ветвей математики зачастую просто не понимают друг друга. И тем не менее: «Необыкновенная широта творческих интересов А. Н. Колмогорова, огромный диапазон и разнообразие тех областей математики, в которых он работал в различные периоды своей жизни, выделяют Андрея Николаевича среди математиков не только нашей страны, но и всего мира, и можно прямо сказать, что в отношении этого свойства своего дарования он не имеет себе равных среди математиков своего времени» (академик П.С. Александров).

Попробуем просто перечислить те области математики, в которых работал А.Н. Колмогоров. Тригонометрические и ортогональные ряды, теория меры и интеграла, математическая логика, теория приближений, геометрия, топология, функциональный анализ, дифференциальные уравнения и динамические системы. Теория вероятностей, математическая статистика, теория информации, история математики. Если же говорить о прикладных исследованиях, то надо добавить к этому списку работы по механике, биологии, геологии, теории стрельбы, теории стихосложения, кристаллизации металлов, теории автоматов.

И это ещё не всё. А.Н. Колмогоров широко известен как выдающийся педагог, воспитавший блестящую плеяду советских математиков нескольких поколений. Среди них только академики составляют импозантную компанию более чем из десятка человек. Много сил отдал Андрей Николаевич делу развития математического образования в школе, написанию учебников, воспитанию юных математических дарований.

Такой диапазон интересов, конечно, впечатляет. Но невольно возникает мысль: можно ли заниматься всем этим одинаково серьёзно и глубоко, не противоречит ли такое разнообразие некоему закону сохранения, выраженному пословицей «лучше меньше, да лучше»? Но А.Н. Колмогоров был словно специально избран судьбой, чтобы опровергнуть этот закон и работать по принципу «лучше больше да лучше». О качестве его работ можно сказать коротко: все его научные результаты первоклассны, большинство из них открывают новые направления и создают фундаментальные обобщающие теории. В приветствии А.Н. Колмогорову в связи с его 75-летием Отделение математики АН СССР, Московское математическое общество и журнал «Успехи математических наук» выразились ещё короче и определённее: «Ваши фундаментальные исследования определили лицо многих областей математики XX века».

Конечно, работать на таком высочайшем уровне под силу только человеку, в котором сочетаются математическое дарование огромной силы, недюжинное здоровье, фантастическое трудолюбие и целеустремлённость.

В своё время в брошюре для школьников «О профессии математика» А.Н. Колмогоров анализировал понятие математической одарённости. К элементам таковой он относил алгоритмические способности (нахождение удачных, нестандартных путей преобразования сложных выражений, решения уравнений), геометрическую интуицию, а также искусство «последовательного логического рассуждения», особенно умение логически мыслить в задачах с новой, нестандартной постановкой. Для развлечения читателя приведём по одной задаче А. Н. Колмогорова на каждый из трёх отмеченных элементов.

1. Разложить на множители выражение $x^{10} + x^5 + 1$.

2. Представить себе без чертежа, какой вид имеет пересечение поверхности куба с плоскостью, проходящей через центр куба и перпендикулярной одной из его диагоналей.

3. Сколько раз в сутки стрелки часов перпендикулярны друг другу?

Конечно, с возрастом при постоянной математической тренировке ума накапливаются знания, приходит математическая интуиция, шлифуется техника. Но суть дела остаётся прежней. Надо думать, что упомянутые признаки математического таланта сыграли определяющую роль и при доказательстве А. Н. Колмогоровым замечательного результата, полученного им в возрасте более 50 лет: произвольную непрерывную функцию, определённую на n-мерном кубе, можно представить в виде конечной суммы суперпозиций непрерывных функций от одной переменной. Сам Андрей Николаевич считал это доказательство технически самым трудным из всех полученных им математических результатов.

Вообще, его очень привлекало спортивное начало в математике: находить и решать задачи, которые поставлены давно, но ещё никем не решены. Может быть, это определялось особенностью его характера, о которой рассказал А. М. Абрамов: «Однажды Андрей Николаевич заметил, что, по его мнению, каждый человек, начиная с определённого момента, продолжает оставаться в том возрасте, для которого наиболее характерно свойственное этому человеку мироощущение. На прямой вопрос: «А вам сколько лет, Андрей Николаевич?» он ответил: «Четырнадцать».

МАТЕМАТИКА И МУЗЫКА

Но, конечно, математический талант А. Н. Колмогорова не измерить обычными мерками, не разложить на составляющие, даже пользуясь его собственной классификацией. Тут нужен некий «трансфинитный» подход, выход в новое измерение, ибо требуется оценить явление далеко не обычного масштаба. Нам трудно дать подобную оценку. Но знакомство с работами А.Н. Колмогорова, с воспоминаниями его учеников, статьями и речами о нём, немногие личные впечатления об этом человеке позволяют нам отметить две особенности его творческой натуры.

Андрей Николаевич — один из людей, остро воспринимающих целостность мира, взаимодействие всех его материальных и духовных проявлений, которое следует понять или, хотя бы почувствовать. В этом он, наверное, сродни Альберту Эйнштейну. Не зря же оба они так любили музыку, лучше других искусств выражающую мечту о красоте как гармонии частей целого. Различие, может быть, состоит в следующем. Эйнштейн, помогая обуревающим его мыслям своей скрипкой, искал в теории относительности главную «мелодию», к которой сводятся все тайны мироздания. Колмогорова же больше привлекала полифоничность мира, значительность каждого его проявления — научного, технического, спортивного — в общем ансамбле логики и эстетики бытия. Если вспомнить ещё раз фразу Гильберта: «Математика есть единая симфония бесконечного», то эйнштейновское начало в ней, пожалуй, выражено словом «единая», а колмогоровское — словом «симфония». Казалось бы, постоянные размышления над многообразными математическими проблемами должны были полностью занимать всё время и всю мощность колмогоровского интеллекта. Но нет, — его внутренний мир был огромным «оркестром», возможностей и «инструментов» которого хватало и на многие вещи, далёкие от науки.

Профессор В.М. Тихомиров свидетельствует: «Однажды А. Н. сказал мне: «Вы не должны иметь обо мне представление как о человеке, который знает только математику; я принадлежу к тем людям, кто имеет собственное мнение более или менее по любому вопросу». Я знал всегда, что А. Н. — математик исключительной широты, но не мог и подозревать, в какой мере безграничным является его кругозор в философии, экономике, политике, географии, в вопросах, связанных с искусством и литературой. Он был при этом очень самобытен: почти всегда непредсказуем. В частности, в своих пристрастиях. Как-то зашла речь о крупнейших писателях XX века. Я задумался и стал перебирать наиболее «престижные» тогда (в середине пятидесятых) имена — Горький, Шолохов, Фолкнер, Роллан, Хемингуэй, Ремарк... Андрей Николаевич без колебаний вершинами мировой литературы нашего века назвал творчество А. Франса и Т. Манна. А когда речь зашла о поэзии, А. Н. также непредсказуемо для меня выделил 24-летнего тогда Евтушенко».

И второе. Безграничной была вера Андрея Николаевича в разум и творческие возможности человека. К каждому, с кем ему приходилось встречаться, он *a priori* относился с теми же высокими моральными и интеллектуальными требованиями, что и к самому себе. Точнее, он ничего не требовал, а просто общался с человеком как с равным. Конечно, во многих случаях это не соответствовало фактическому положению дел. И Андрей Николаевич не мог этого не видеть. Поэтому трудно согласиться с высказываемым иногда мнением, что он переоценивал своих собеседников. Это было бы явным упрощением. Скорее он считал, что следует не опускать мысль до уровня разжёванной и легко усваиваемой «духовной пищи», а заставлять человека проделывать серьёзную умственную работу и подниматься до уровня мысли.

Воспользуемся снова музыкальной аналогией: трудно воспитывать глубокие чувства, исполняя произведения Моцарта, Шумана, Баха, Бетховена (это любимые композиторы А. Н. Колмогорова) лишь в переработке для джаза или рока. Хотя это часто делается в наши дни.

Работа по осваиванию колмогоровской мысли была действительно очень непростой и доступной не всем. Если мы говорим о вере Андрея Николаевича в творческие возможности человека, то это не значит, что речь идёт о каждом конкретном человеке, речь идёт о талантливых представителях рода *homo sapiens*. Именно на них ориентировался А. Н. Колмогоров, подбирая себе сотрудников, которые могли бы развивать его многочисленные идеи. Ставя задачи своим ученикам, он часто «создавал такие ситуации, которые были сопряжены с потрясениями». (А. Н. Ширяев). Он совершенно не интересовался, насколько ученик усвоил суть сказанного ему, хватит ли у него трудоспособности и практических возможностей выполнить заданное в назначенный срок. «От других известных мне профессоров Андрея Николаевича отличало полное уважение к личности студента, от которого он всегда ожидал услышать что-то новое и неожиданное». (В. И. Арнольд).

Он как бы прикидывал задачу «на себя». Такой метод оказался довольно эффективным. Действительно талантливый, честолюбивый и трудолюбивый человек начинал верить в свои силы (раз в них верит Андрей Николаевич), работал как одержимый, чувствовал, что его «потолок» значительно выше, чем он мог предположить, и становился известным математиком. Тот, кому не хватало этих качеств, отходил в сторону. А. Н. Колмогоров как-то сказал, шутя, будущему профессору В. А. Успенскому:

«В крайнем случае, если из вас ничего не выйдет, будете делать нам грамотные рефераты».

Педагогический метод А. Н. Колмогорова, как и всякий педагогический метод, заслуживающий этого названия, держится на старой истине: основой обучения и развития творческих способностей является интенсивная самостоятельная работа ученика; роль учителя при этом — помочь ему, предложить такую систему, такую организацию совместной работы ученика и учителя, которая оптимальна для достижения результата. В каком смысле оптимальна — это зависит и от ученика, и от учителя. Случай, когда первый талантлив, честолюбив и работящ, а второй — гениален, это и есть случай применимости метода А. Н. Колмогорова. Конечно, он неприменим, если ученик не обладает хотя бы одним из перечисленных качеств. Может быть, именно это и привело к неудаче педагогической реформы преподавания математики в средней школе, предпринятой под руководством А. Н. Колмогорова в 70-е годы XX века. Средний учитель и средний ученик средней школы (а именно на них была рассчитана новая программа) отнюдь не рвались к постижению основ современной математики и не обладали математической одарённостью. Не говоря уже об излишней любви к самостоятельной работе. А всё это подразумевалось в предложенной программе. К сожалению, чудесные статьи и лекции Андрея Николаевича, обращённые к школьникам и учителям, нашли отклик только у той части, которая действительно была одержима математикой. Ещё раз процитируем В. А. Успенского: «...сам Колмогоров всегда предполагал у собеседника или слушателя наличие интеллекта, равного колмогоровскому. Разумеется, это было следствием уважительного отношения к другому, следствием того «дворянского чувства равенства со всеми живущими», о котором писал Пастернак.»

Стоило А. Н. Колмогорову организовать собственную физико-математическую школу-интернат для одарённых детей, как всё стало на свои места. Сейчас насчитывается несколько сотен кандидатов и докторов наук из числа её выпускников, а сама школа-интернат носит имя А. Н. Колмогорова.

Не следует порицать общество в целом за то, что оно не любит классическую музыку — уж так оно создано. Но несомненно и то, что восприятие серьёзной музыки и напряжённая мыслительная работа математика — чем-то близкие вещи. А. Н. Колмогоров говорил: «По-видимому, между математическим творчеством и настоящим интересом к музыке имеются какие-то глубокие связи. Но выяснить и объяснить эти связи мне представляется довольно трудным. Замечу, впрочем, что мой друг Павел Сергеевич Александров рассказывал, что у него каждое направление математической мысли, тема для творческих размышлений, связывались с тем или иным конкретным музыкальным произведением».

ЛУЗИТАНИЯ

Андрей Николаевич Колмогоров родился 25 апреля 1903 года. Отец его, Николай Матвеевич Катаев, был агрономом, сыном священника и погиб на фронте в 1919 году. Мать, Мария Яковлевна Колмогорова — дочь угличского уездного предводителя дворянства, умерла при рождении сына. Воспитанием мальчика занялась её сестра Вера Яковлевна. Она заменила Андрею Николаевичу мать, и он относился к ней как к матери до самой смерти Веры Яковлевны в 1950 году в возрасте 87 лет. Эта женщина сумела передать племяннику свои высокие гражданские идеалы, воспитала в нём ответственность и самостоятельность, нетерпимость к безделью и плохо выполненной работе. Раннее детство А. Н. Колмогорова прошло в селе Туношне под Ярославлем в усадьбе родителей матери.

Был ли он вундеркиндом? Да, как это следует из воспоминаний самого Андрея Николаевича: «Радость математического открытия я познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность

$$1 = 1^2,$$
$$1 + 3 = 2^2,$$
$$1 + 3 + 5 = 3^2,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

и так далее.

В нашем доме под Ярославлем мои тётушки устроили маленькую школу, в которой занимались с десятком детей раннего возраста по новейшим рецептам педагогики того времени. В школе издавался журнал «Весенние ласточки». В нём моё открытие было опубликовано. Там же я публиковал придуманные мною арифметические задачи».

После переезда в Москву в возрасте семи лет А. Н. Колмогоров поступает в частную гимназию. Андрей Николаевич говорил, что учиться в этом заведении было интересно. В нём господствовали либеральные взгляды, велось совместное обучение мальчиков и девочек по программе мужских гимназий, поэтому гимназия постоянно находилась под угрозой закрытия. Легко понять, почему отличные успехи на экзаменах рассматривались учениками как дело чести.

Чем ближе к окончанию школы, тем труднее становилась жизнь в Москве. Надо было зарабатывать. Сочетать работу с учёбой могли лишь самые настойчивые. В 1919–1920 годах Андрей Николаевич работает на постройке железной дороги Казань–Екатеринбург и одновременно занимается самостоятельно, готовясь сдать экзамены за среднюю школу экстерном. Это ему удаётся — в 1920 году он получает аттестат об окончании школы.

Андрей Колмогоров. Детство

Встал вопрос о выборе жизненного пути. Увлечение математикой соперничает с другими интересами А.Н. Колмогорова. В то время на него производила большое впечатление своей научной значимостью известная книга К.А. Тимирязева «Жизнь растений». Чуть позже юноша сильно увлёкся историей и социологией. «Первым научным докладом, который я сделал в семнадцатилетнем возрасте в Московском университете, стал доклад в семинаре профессора С.В. Бахрушина о новгородском землевладении. В докладе этом, впрочем, использовались (при анализе писцовых книг XV–XVI веков) некоторые приёмы математической теории», — вспоминал Андрей Николаевич. «Будь работа Андрея Николаевича издана вскоре после её написания, наши знания сегодня были бы много полнее и, главное, много точнее... История потеряла гениального исследователя, математика навсегда приобрела его», — считает известный историк и археолог академик В.Л. Янин. Кроме того, юношу интересовала и техника: «Техника тогда воспринималась как что-то более серьёзное и необходимое, чем чистая наука». Интересно, какой смысл вкладывает Андрей Николаевич в слово «тогда»? Надо ли думать, что теперь это не так? А если не так, то потому, что значение фундаментальной науки теперь всем ясно, или потому, что техника скомпрометировала себя некоторыми антигуманистическими достижениями? К сожалению, мы не можем ответить на этот вопрос.

В результате он поступил одновременно и на физико-математическое отделение Московского университета, и на металлургический факультет Института тонкой химической технологии им. Д. И. Менделеева. «Но скоро интерес к математике перевесил сомнения в актуальности профессии математика. К тому же, сдав в первые же месяцы экзамены за первый курс, я, как студент второго курса, получил право на 16 килограммов хлеба и 1 килограмм масла в месяц, что, по представлениям того времени, обозначало уже полное материальное благополучие. Одежда у меня была, а туфли на деревянной подошве я изготовил себе сам». Нынешним абитуриентам и студентам будет интересен следующий фрагмент воспоминаний А. Н. Колмогорова: «Я поступил в Московский университет с довольно большими знаниями по математике... Многие вопросы я изучал по энциклопедии Брокгауза и Ефрона, восстанавливая самостоятельно то, что в этих статьях написано слишком кратко».

Андрей Колмогоров. Юность

На первом курсе университета А. Н. Колмогоров слушает лекции Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного и А. К. Власова по проективной геометрии. Николай Николаевич Лузин был виднейшим представителем московской математической школы того времени, известным и своими первоклассными работами в области теории функций и теории множеств, и новым подходом к работе с научной молодёжью. А. Н. Колмогоров так характеризует стиль его работы: «Существенным в этом подходе было вполне индивидуальное личное руководство, а также умение придавать избранной тематике особую значимость. Н. Н. Лузин настойчиво внедрял следующий метод работы (он сам работал таким образом и приучал к этому своих учеников): берясь за какую-либо проблему, надлежит смотреть на неё с различных точек зрения. Надо пытаться доказывать проблему и одновременно опровергать её. Если доказательство не выходит, надо переходить к опровержению гипотезы, к построению противоречащего примера. Если не получается построение, надо снова вернуться к доказательству. И пока не получится результат, нельзя покидать данную область. В теории функций действительного переменного такая установка двойного видения (поиск доказательства — поиск опровержения), такой подход к делу естественно привёл к культивированию чрезвычайно высокой техники построения примеров (или, как теперь принято говорить, контрпримеров). В этом направлении школа Н.Н. Лузина двадцатых годов была им поставлена на уровень, превосходящий все другие научные центры мира».

Говорят, в те годы один представитель ленинградской школы, тяготевшей к прикладным аспектам математики, на своих лекциях выражался примерно так: «Эта теорема справедлива во всех случаях жизни, если не считать примеров, специально придуманных московской математической школой».

Однажды студенту Колмогорову удалось показать, что некоторое утверждение, которое Н.Н. Лузин на лекции решил использовать для доказательства интегральной теоремы Коши, ошибочно. Было решено, что Колмогоров доложит опровергающий пример на студенческом математическом кружке. Чёткое изложение конструкции примера требовало достаточно серьёзной математической техники. Консультировать докладчика стал Павел Самуилович Урысон.

Первокурсник Колмогоров сделался известным в Лузитании — так называли своё сообщество математики, работавшие под руководством Н.Н. Лузина. В следующем учебном году Андрей Николаевич посещал лекции Н.Н. Лузина и П.С. Александрова уже на правах «своего», получив № 16 в иерархии «лузитанцев».

А.Н. Колмогоров очень тепло отзывается в своих воспоминаниях о П.С. Урысоне, одно время непосредственно руководившем его научной работой: «Московская математика того времени была богата яркими и талантливыми индивидуальностями. Но Павел Самуилович и на этом фоне выделялся универсальностью интересов в соединении с целеустремлённостью в выборе предмета собственных занятий, отчётливостью постановки задач..., ясной оценкой своих и чужих достижений в соединении с доброжелательством в применении к достижениям самым маленьким». (Обратим внимание на то, какие качества А.Н. Колмогоров считает ценными для учёного.)

В 1921 году Андрей Николаевич начинает заниматься в семинаре Н.Н. Лузина по тригонометрическим рядам, в группе, которой руководил В.В. Степанов. Кратко поясним суть проблем, изучавшихся на нём. С одной стороны, речь идёт о практически важной и понятной задаче разложения произвольной периодической функции на простые гармонические колебания, т. е. в ряд Фурье. Такой ряд очень легко написать для любой функции из очень широкого класса (требуется только интегрируемость по Лебегу на интервале длиной в период). Надо лишь вычислить интегралы — коэффициенты Фурье разлагаемой функции. Но затем возникает целый клубок проблем: оказывается, ряд Фурье может находиться в очень сложных отношениях с функцией, для которой он написан. Какова природа множества, на котором ряд сходится, сходится ли он к «своей» функции или к чему-либо ещё, что можно сказать о скорости сходимости? Для функций простой природы, которыми может ограничиться обычная инженерная практика, эти вопросы были давно решены. Но математиков интересует исчерпывающий анализ, ибо их эстетика, их психологический комфорт — это полная ясность. В теории тригонометрических рядов имелись трудные и давно стоящие задачи, без решения которых математики не могли спать спокойно.

Первый сильный результат А. Н. Колмогорова — решение поставленной Н. Н. Лузиным задачи о выяснении того, насколько медленно могут убывать коэффициенты ряда Фурье. Решение оказалось таким: как угодно медленно. После этого Н. Н. Лузин торжественно присвоил А. Н. Колмогорову звание своего ученика и начал заниматься с ним индивидуально. Вскоре, летом того же 1922 года, А. Н. Колмогоров выполнил работу, которая сделала его всемирно известным математиком в 19 лет. Он построил пример интегрируемой по Лебегу функции, ряд Фурье которой расходился почти всюду. Впечатление, произведённое этой работой на математиков, хорошо иллюстрируется воспоминанием В. И. Арнольда, которому выдающийся французский математик М. Фреше говорил в 1965 году: «О, Колмогоров! Это тот замечательный молодой человек, который построил почти всюду расходящийся ряд Фурье!». Этот знаменитый пример заложил основы нового большого направления в теории тригонометрических рядов. Всего же А. Н. Колмогоровым опубликовано около десяти работ по тригонометрическим и ортогональным рядам, каждая из них оказалась началом больших исследований, продолжающихся и ныне другими математиками. Сам Андрей Николаевич так говорил о своих работах по этой тематике.

«Всё направление моей работы по тригонометрическим и ортогональным рядам выросло из занятий в семинаре В. В. Степанова. С точки зрения преодоления трудностей, по-видимому, первое место принадлежит работе, где построен всюду расходящийся ряд Фурье–Лебега. Довольно долго я работал надвое, стараясь поочерёдно то построить пример, то доказать его невозможность. Последним этапом была неделя непрерывных размышлений, закончившаяся возникшей внезапно конструкцией. Немного позднее без больших усилий возник аналитический вариант первоначальной чисто геометрической идеи, что позволило усилить первоначальный результат и построить ряд, расходящийся всюду».

Лекции П.С. Александрова привлекли внимание А.Н. Колмогорова к проблемам так называемой дескриптивной теории множеств. И всё в том же 1922 году он проводит большое исследование по теории операций над множествами. Эта теория возникла вначале во Франции в трудах Э. Бореля, Р. Бэра, А. Лебега и других исследователей. В общих чертах она ставила перед собой задачу описания сложных множеств точек числовой прямой как результатов операций над множествами более простой структуры. И здесь работа А.Н. Колмогорова характеризуется трудностью задачи, наличием нового подхода, возможностями дальнейшего развития основной идеи. Исследование это стало исходным пунктом общей теории операций над множествами, которой занимались впоследствии многие учёные, в том числе Л.В. Канторович и А.А. Ляпунов.

И снова проза жизни. Стипендии не хватало. Параллельно с учёбой в университете Андрей Николаевич в течение трёх лет работал учителем математики и физики в средней школе. Этому делу он отдавался с энтузиазмом, одновременно с преподаванием выполнял функции секретаря школьного совета, воспитателя в интернате, вёл биологический кружок. Видимо, возбуждённый Тимирязевым интерес к биологии в нём не угас. В университете ходил только на специальные курсы и семинары.

Всё это никак не означало уменьшения интенсивности его математических раздумий. Разнообразие и зрелость, даже не зрелость, а фундаментальность работ Колмогорова-студента поражают. В 1925 году, в котором он окончил университет, вышли его первые публикации по теории меры и интеграла, математической логике, получившие широкую известность в математическом мире.

Непосредственно после окончания Московского университета, с которым он уже не расстанется до конца жизни, А.Н. Колмогоров становится аспирантом Н.Н. Лузина. В этом же, 1925 году, происходит знаменательное событие — Андрей Николаевич начинает серьёзно заниматься теорией вероятностей, которую он сам считал своей основной научной специальностью.

НАУКА «НА КОСТЯХ»

В теории вероятностей А. Н. Колмогоров сделал исключительно много, получив важные результаты в различных областях этой обширной в наше время науки. Но для каждого, кто хоть немного с ней знаком, имя Колмогорова связывается прежде всего с созданием аксиоматики теории вероятностей. Только после выхода в свет его монографии «Основные понятия теории вероятностей» (в 1933 году на немецком языке, в 1936 году на русском) стало возможно говорить о теории вероятностей как о математической науке в современном смысле слова, основанной на системе аксиом.

А. Н. Колмогоров. Молодой учёный

«Конечная цель, — считал К. Вейерштрасс, — которую нужно всегда иметь в виду, состоит в том, чтобы достичь правильной точки зрения на фундамент науки...». В теории вероятностей это удалось А. Н. Колмогорову. Успех аксиоматики А. Н. Колмогорова, считает известный математик Б. В. Гнеденко, «объясняется рядом обстоятельств, среди которых упомянем лишь следующие: она соответствовала общему духу математики того времени, тесно связала теорию вероятностей с метрической теорией функций и тем самым открыла перед ней богатейший арсенал хорошо разработанных методов исследования, позволила охватить единой простой схемой не только классические главы теории вероятностей, но и вновь возникшие её понятия и проблемы».

История, точнее, предыстория, теории вероятностей как математической науки длинна и богата идеями, личностями и событиями.

Сама исходная идея о решающей роли случая в системе природы, о случайности как «технологии» создания мира принадлежит, конечно, античным мыслителям-материалистам. Вот, например, стихи Лукреция:

Ибо начала вещей во множестве многоразлично
От бесконечных времён постоянным толчкам подвергаясь,
Тяжестью также своей гнетомые, носятся вечно,
Всячески между собой сочетаясь и всё испытуя,

Что только могут они породить из своих столкновений.
И удивляться нельзя, что они в положенья такие
Между собою пришли и в такое движение, которым
Держится нынешний мир в постоянном своём обновленье.

Но от этой философской идеи до попыток представить свойства случайности в форме, позволяющей изучать её математически, — «дистанция огромного размера». Вполне естественно для природы человека, что продвижение на этом пути было стимулировано не только любознательностью, но и стремлением к обогащению. Азартные игры в кости, в карты и т. д. — вот основной источник задач, которые привели к первым вариантам определения вероятности, к разработке методов вычисления вероятностей. Это произошло на рубеже Средневековья и Ренессанса. Уже Лука Пачиоли (1445–1514 годы) решал вероятностную задачу, правда, ошибался. Но Д. Кардано и Г. Галилей, которые тоже занимались некоторыми специальными вероятностными задачами, уже делали это лучше.

Но сегодня все согласны, что развитие теории вероятностей как самостоятельной науки начинается в 1654 году знаменитой перепиской Б. Паскаля и П. Ферма. Поводом для неё послужили два вопроса, заданных Паскалю его другом — кавалером де Мере. Имя этого аристократа навечно вошло в историю науки, что также подтверждает тезис о роли случайности в развитии. Первый вопрос, который решил, впрочем, и сам кавалер: сколько раз надо бросать две игральные кости, чтобы вероятность хотя бы однажды выбросить две шестёрки была больше половины? Второй вопрос оказался выше возможностей кавалера. Суть его такова. Два игрока играют в азартную игру, состоящую из последовательно разыгрываемых партий. Шансы на выигрыш в каждой партии одинаковы. В начале игры партнёры делают одинаковые взносы. Ставку выигрывает тот, кто первым наберёт n выигрышных партий (n фиксировано заранее). Как разделить ставку по справедливости, если игра прервана в момент, когда один игрок выиграл a, а другой b партий?

Паскаль и Ферма нашли ответы на эти вопросы, но дело, конечно, не в этом. А в том, что по ходу переписки вырабатывалась математическая концепция вероятности. И хотя само слово «вероятность» при этом даже не употреблялось, но фактически использовалось то определение вероятности, которое ныне называется классическим.

Напомним (или поясним) сущность проблемы определения вероятности. Речь идёт о том, чтобы приписать каждому событию, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания, число — его вероятность. Это число должно характеризовать шансы события реализоваться при проведении испытания. Например, в связи с первым вопросом де Мере, рассмотрим испытание — бросание двух игральных костей. Одно из случайных событий, которые могут произойти в результате этого испытания — выпадение двух шестёрок. Обозначим это событие буквой A. Как оценить шансы наступления этого события числом? Подход, использованный Паскалем и Ферма, основан на двух обстоятельствах. Во-первых, все возможные результаты испытания можно разбить на так называемые *элементарные исходы*, т. е. такие события, что при каждой реализации испытания происходит одно и только одно из них. Во-вторых, шансы появления каждого элементарного исхода одинаковы. В самом деле, одна из двух бросаемых костей (назовём её первой) с равными основаниями может дать любое количество очков от единицы до шести. Мы говорим «с равными основаниями», полагая, что это «честная» кость — абсолютно правильный геометрически и однородный по плотности куб. То же самое можно повторить и по поводу второй бросаемой кости. Важно, что число очков, выпавшее на каждой кости, никак не зависит от числа очков, выпавшего на другой. Таким образом, в качестве элементарного исхода можно рассматривать пару чисел $(\alpha,\ \beta)$, где α — число очков, выпавшее на перовой кости, β — на второй кости. При этом $1 \leqslant \alpha \leqslant 6$, $1 \leqslant \beta \leqslant 6$. Ясно, что в результате каждого бросания двух костей реализуется одна и только одна из таких пар и что у каждой пары имеются одинаковые шансы реализоваться (элементарные исходы равновероятны). Всего имеется 36 таких исходов. Скольким из них соответствует наступление интересующего нас события A — выпадения двух шестёрок? Очевидно, одному-единственному: (6, 6). Будем называть *вероятностью* A отношение числа благоприятных для него исходов k к общему числу m элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{k}{m} = \frac{1}{36}.$$

Рассмотрим при том же испытании другое случайное событие B — сумма очков, выпавших при бросании двух костей, чётна. Действуя по тому же принципу, считаем благоприятные для события B исходы: $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$, $\ldots$, $(6, 2)$, $(6, 4)$, $(6, 6)$ — всего, как легко видеть, 18 исходов. Итак, $k = 18$, и

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Пусть теперь C — выпадение числа очков, меньшего 13. Очевидно, для C все исходы благоприятны — это достоверное событие. Имеем

$$P(C) = \frac{36}{36} = 1.$$

Наконец, пусть событие D заключается в том, что брошенные кости не упали на игорный стол, а повисли в воздухе. Ясно, что при этом $k = 0$ (D — невозможное событие), и

$$P(D) = \frac{0}{36} = 0.$$

Точно так же невозможным событием является, например, выпадение отрицательной суммы очков.

Определение вероятности события как отношения числа благоприятных элементарных исходов к числу всех элементарных исходов — это и есть *классическое определение вероятности.* Оно оказалось вполне удовлетворительным во всех тех случаях, когда можно было говорить о конечном наборе элементарных исходов и быть уверенным в их равновероятности. Развиваемая на основе этого определения теория достигла значительного прогресса. Х. Гюйгенс «О расчётах в азартных играх» (1658 год), А. де Муавр «Об измерении случайности, или о вероятности результатов в азартных играх» (1711 год), Я. Бернулли «Искусство догадок» (1713 год), и, наконец, П. С. Лаплас «Аналитическая теория вероятностей» (1812 год) — вот основные его этапы. Именно в работе Я. Бернулли впервые было сформулировано классическое определение вероятности.

Однако классическое определение вероятности было очень узким для науки о законах случая. Слишком обременительными оказались ограничения, при которых оно имело смысл. Какова вероятность того, что «нечестная» кость (например, сделанная в виде неправильного шестигранника) даст при одном бросании шесть очков? Или какова вероятность того, что человек, родившийся в Европе в XX веке, проживёт до 70 лет? Или что пароход, вышедший из Лондона в Нью-Йорк, благополучно доберётся до цели? В первом случае элементарные исходы не равновероятны. В остальных даже непонятно, как представить себе систему элементарных исходов.

Одним из главных путей выхода из подобных затруднений явился так называемый *статистический подход к пониманию вероятности*. Он радикально отличается от классического и исходит из предположения, что испытание, в котором может появиться случайное событие A, можно идентично воспроизвести любое число раз (хотя бы теоретически). Если имеется серия из m таких идентичных испытаний и событие происходит в k испытаниях серии то число k/m называется *относительной частотой события* A в этой серии. Огромный опыт наблюдения массовых случайных явлений (обработка статистических данных) показал, что справедлив закон устойчивости относительных частот: при больших m частота k/m события A очень слабо зависит от конкретной серии и тем слабее, чем больше m. Отсюда совсем недалеко до гипотезы о том, что существует число $P(A)$, к которому приближаются относительные частоты события A и приближаются тем теснее, чем длиннее серия испытаний. Это число и называется *вероятностью* A. Разумеется, точно определить это число невозможно (в отличие от классической вероятности), всегда можно сказать лишь, что $P(A) \approx k/m$. Ведь нельзя же реализовать серию испытаний бесконечной длины. Но это уже другой вопрос. Главное — уверенность в том, что $P(A)$ существует.

Оказалось, что в тех случаях, когда вероятность можно определить и классическим путём, классическое и статистическое определения согласуются с высокой степенью точности.

Принципиально важным было ещё одно обстоятельство. И классическое, и статистическое определения вероятности позволяют легко установить две важные теоремы.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность наступления в результате испытания хотя бы одного из двух *несовместных* событий равна сумме вероятностей этих событий (несовместные события — это те, которые не могут произойти одновременно):

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность одновременного наступления двух независимых событий есть произведение вероятностей этих событий (события независимы, если реализация одного из них не оказывает никакого влияния на вероятность реализации другого):

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Эти теоремы вместе с вытекающими из обоих определений неравенством $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для любого случайного события A составили основу математического аппарата, с помощью которого можно вычислять вероятности одних событий, зная вероятности других, но, не зная точно, что такое вероятность. А. Реньи пишет о математиках XVII–XVIII веков — создателях теории вероятностей: «В значительной мере они не ощущали потребности в формальном определении вероятности, поскольку считали вероятность основным понятием, значение которого очевидно и не требует определения. Настоящую задачу они усматривали в том, чтобы в конкретных вопросах вычислить вероятности событий, которые представляют для них интерес. Принимая во внимание уровень развития математики того времени, этому не приходится удивляться: ведь и понятия числа, функции, предела равным образом не были выяснены в современном смысле этого слова, но тогда в этом и не ощущали потребности».

Читатель, возможно, помнит из нашей первой беседы, что развитие математической теории на интуитивном уровне, без аккуратной аксиоматизации, чревато парадоксами. Не обошли парадоксы и теорию вероятностей. И, как обычно, при их появлении в дело вмешалась бесконечность. А именно, речь идёт о задачах, где число всех элементарных исходов бесконечно и даже «очень бесконечно»: если изображать исходы точками плоскости (прямой, пространства), они заполнят сплошным образом некоторую область D. Попытки обобщить классическое определение вероятности на подобные случаи привели к так называемому *геометрическому определению вероятности*: считая все исходы равновероятными (вероятности нуль, разумеется), «естественно» приписать событию A в качестве вероятности отношение площади, занятой благоприятными для A исходами, к площади всей области D (в случае прямой или пространства вместо площади надо рассматривать длину или объём соответственно):

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(D)}.$$

Казалось бы, всё получилось и даже красиво. Но дело в том, что сам процесс сопоставления точек плоскости элементарным исходам испытания неоднозначен: в качестве координат точки можно рассматривать различные числовые характеристики исхода, да и трактовать их можно как декартовы, полярные или другие координаты точки. Поэтому в некоторых задачах возникали разные значения вероятности одного и того же события. Снятие этих противоречий требовало глубокого проникновения в суть задачи, чёткой формулировки условий испытания и анализа смысла равновероятности. Большим мастером конструирования подобных парадоксов геометрической вероятности был Ж. Бертран. Читатель найдёт его задачи в любом достаточно подробном учебнике по теории вероятностей.

С середины XIX века развитие теории вероятностей связано в значительной мере с именами русских учёных — П. Л. Чебышёва и его учеников А. А. Маркова и А. М. Ляпунова. Во все современные курсы теории вероятностей входят закон больших чисел Чебышёва, цепи Маркова, предельная теорема Ляпунова.

Теория вероятностей необычайно долго, вплоть до 30-х годов XX века, оставалась в стороне от общего процесса перевода математических наук на рельсы аксиоматической формализации. Остались парадоксы геометрических вероятностей и явная интуитивность статистического определения вероятности. Споры о логическом несовершенстве классического определения (понятие вероятности определяется через понятие равновероятности: не порочный ли это круг?), споры о субъективности философского толкования вероятности как меры уверенности исследователя — всё это продолжалось. Поэтому ещё в начале нашего века многие считали теорию вероятностей «не совсем математикой», а чем-то, расположенным ближе к физике или философии. Да, в общем-то, если подходить с современными мерками, так оно и было. Тот факт, что в XIX веке К. Гаусс, П. С. Лаплас, С. Д. Пуассон, П. Л. Чебышёв, А. А. Марков, А. Пуанкаре и другие смогли много сделать в теории вероятностей, открыв в ней целый ряд новых направлений, предполагает высокую естественно-научную эрудицию этих исследователей, их способность проникать в физическую суть рассматриваемых явлений.

Фанатик и идеолог аксиоматического метода Д. Гильберт отмечал необходимость формализации теории вероятностей. В своём знаменитом докладе на Международном конгрессе математиков в Париже (1900 год), где были сформулированы важнейшие проблемы математики, оставленные XIX веком в наследство XX веку, он даже отнёс теорию вероятностей к физическим наукам: «С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь — теория вероятностей и механика».

ВАЖЕН ПОСЛЕДНИЙ ШАГ

Попытки решения этой задачи были предприняты С. Н. Бернштейном в 1917 году и Р. фон Мизесом в 1919 году. Первый из них исходил из качественного сравнения случайных событий по их большей или меньшей вероятности, второй — из статистического подхода к понятию вероятности. Но лишь в 1933 году А. Н. Колмогорову удалось решить задачу до конца.

Заслуга А. Н. Колмогорова состоит не только в том, что он внёс, выражаясь его собственными словами, «полную ясность в формальное строение теории вероятностей», но и в том, что для этого не понадобилось конструировать какую-либо новую систему формальных (аксиоматически определяемых) понятий, как это пытались сделать его предшественники.

Андрей Николаевич сумел использовать для аксиоматизации теории вероятности уже готовый мощный инструмент — так называемую *теорию меры*. Идея такого использования принадлежит не ему. Её высказывал Э. Борель в 1909 году и начинал развивать А. Ломницкий в 1923 году. Это оказалось трудным делом. Но мы уже знаем А. Н. Колмогорова именно как специалиста по трудным проблемам. Первый вариант его аксиоматики теории вероятностей был опубликован в 1929 году («Общая теория меры и исчисление вероятностей»), окончательный результат появился в 1933 году в виде уже упоминавшейся классической монографии.

Как разделить, что в колмогоровской аксиоматике колмогоровское, а что — его предшественников? И как разделить, что в специальной теории относительности эйнштейновское, а что принадлежит В. Фогту, Г. А. Лоренцу и А. Пуанкаре. Ведь В. Фогт ещё в 1887 году доказал, что в пространстве-времени существует преобразование координат, при котором уравнения Максвелла остаются инвариантными. Но он не сумел разобраться в физике своих математических конструкций. Г. А. Лоренц, чьё имя носит это преобразование, не захотел отказаться от эфира и абсолютного времени. А. Пуанкаре, ближайший предшественник А. Эйнштейна, говорил о специальном принципе относительности, неявно пользовался четырёхмерным пространством-временем, высказывался против понятия эфира. Но лишь А. Эйнштейн явно и сознательно положил эти концепции в основу математической теории.

«Перечитывая сегодня работы, заложившие основы теории относительности, пробираясь через дебри рассуждений и математических формул, начинаешь отчётливо представлять себе, как кирпичик за кирпичиком выстраивалось здание науки, и проникаешься глубоким уважением к его создателям.

Открывая же работу А. Эйнштейна 1905 года, облегчённо вздыхаешь: проливаемый ею свет выводит уставшего и заблудившегося путника на новые чудесные просторы великой Природы», — считает Э. Шмутцер, специалист по истории физики.

В значительной степени эти слова можно отнести и к колмогоровской теории вероятностей. Многочисленные классические, статистические, геометрические построения, философские осмысления, азартные игры и демографические наблюдения — вся эта огромная пирамида, на склонах которой видны ступени лестниц предшественников, — вдруг оказалась внизу. Теперь она называлась «интуитивные предпосылки теории вероятностей». А сама математическая (теперь уже с полным правом) теория вероятностей сложилась как совокупность логических следствий из нескольких аксиом теории меры.

Так уж бывает в моменты кризисов, и не только в науке, что находится один человек, которому удаётся осмыслить все накопившиеся противоречия и парадоксы, все попытки предшественников их преодолеть; удаётся сделать последний шаг — шаг от количества к качеству — и предложить новую, казалось бы, неожиданно простую точку зрения на знакомые вещи. Для такого шага нужны глубина мысли, смелость и удача. Когда он уже сделан, коллеги с изумлением вопрошают себя: «Почему мы этого не сделали? Ведь это же так просто и естественно!»

Поясним содержание аксиом теории меры и теории вероятностей.

Основой построения теории меры является, прежде всего, некоторое множество X, природа его элементов несущественна. Если говорить о теории вероятностей, то X называется *множеством элементарных исходов испытания*. Далее, должно быть задано некоторое семейство F частей этого множества, которое является σ-алгеброй. Это значит, что:

а) само X входит в F;

б) пустое множество $\varnothing$ входит в F;

в) дополнение любого множества, входящего в F, до X входит в F;

г) объединение и пересечение множеств из F также входят в F, даже если объединяются или пересекаются счётное количество множеств.

На языке теории вероятностей множества семейства F называются *событиями*. Само множество X — *достоверное* *событие*, $\varnothing$ — *невозможное событие.* Наконец, на семействе F должна быть задана неотрицательная σ-аддитивная функция множества μ, называемая *мерой.* Это значит: для любого $A \in \in F$ $\mu(a) \geqslant 0$; если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — конечная или счётная совокупность множеств из F, попарно не пересекающихся, а A — их объединение, то

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) + \ldots$$

В теории вероятностей добавляется условие нормировки $\mu(X) = 1$, и $\mu(A)$ называется *вероятностью события* A.

Вот, собственно, и вся аксиоматика. Теория меры возникла в результате исследования и обобщения таких понятий, как длина, площадь, объём, масса и т. д., суть которых в том, что множествам сопоставляются числа, измеряющие их размеры или количества содержащихся в них какого-либо числового признака. Этот признак должен обладать свойством аддитивности — складываться при сложении (объединении) непересекающихся множеств. На основании опыта интуитивной теории вероятностей вероятность события оказалась такого рода признаком, если толковать событие как подмножество множества X элементарных исходов.

Видимо, требуют дополнительного пояснения две вещи. Во-первых, почему мера сопоставляется не всем частям множества X, а только элементам некоторой σ-алгебры F? Ответ прост: не существует удовлетворительного способа определения площади плоского множества таким образом, чтобы каждое множество плоскости имело площадь (было измеримым). Поэтому надо рассматривать только те множества, которые имеют площадь. С другой стороны, удаётся так определить понятие площади, что простейшие операции над измеримыми множествами (дополнение, объединение, пересечение) дают снова измеримые множества, т. е., как говорят, *семейство измеримых множеств образует алгебру.* Это важно для формального развития теории площадей. Сказанное о площадях верно и для многих других практически важных мер. В том числе и для вероятности, которую в конкретных случаях часто приходится задавать с помощью мер типа площади.

Во-вторых, зачем нужно, чтобы множество F было σ-алгеброй, т. е. зачем рассматривать объединения и пересечения элементов из F в счётном, а не только конечном количестве? Это удобнее с технической точки зрения. Во многих областях математики, как мы знаем, вводятся бесконечные множества и процедуры (суммирование рядов, дифференцирование, интегрирование и т. д.). Это не необходимо для правильного отражения реальности в математических моделях, но зачастую удобно, т. е. технически проще. Как говорит А. Н. Колмогоров, «большая простота обращения с дифференциалами и производными по сравнению с конечными приращениями и их отношениями общеизвестна». Надо только, чтобы постулируемые свойства бесконечности не приводили к противоречиям логического характера и не противоречили нашей интуиции.

«Поставив теорию вероятностей на теоретико-множественную основу, точнее, на фундамент теории множеств и теории мер, Колмогоров одним махом дал не только логически удовлетворительное обоснование теории вероятностей, но и включил её в кровеносную систему современной математики, позволив тем самым использовать развитые её ветви для нужд теории вероятностей. По простоте и естественности, а также упомянутым преимуществам теория Колмогорова быстро стала общепринятой и служит твёрдой основой для построения теории вероятностей на протяжении последних 30 лет», — писал в 1969 году известный математик А. Реньи.

ЗАКОНЫ МЕНДЕЛЯ И ПРОГНОЗ ПОГОДЫ

Сложность математического аппарата не позволяет сколько-нибудь подробно рассказать о содержании других работ Андрея Николаевича по теории вероятностей и таким близким к ней разделам математики, как математическая статистика и теория случайных процессов. Количество этих работ велико, и все они насыщены глубокими идеями, оказавшими влияние на дальнейшее развитие науки. Приведём авторитетное свидетельство Н. Винера, взятое из его книги «Я — математик»: «Когда я писал свою первую работу по теории прогнозирования, я не предполагал, что некоторые из основных математических идей этой статьи были уже опубликованы до меня. Но вскоре я обнаружил, что незадолго до Второй мировой войны советский математик А. Н. Колмогоров напечатал в «Докладах» Французской академии небольшую, но очень важную заметку, посвящённую этой же теме... Тем не менее все идеи по этому поводу, которые мне казались действительно глубокими, появились в заметке А. Н. Колмогорова до того, как я опубликовал свою статью, хотя я узнал об этом только через некоторое время».

Развитые А. Н. Колмогоровым методы сыграли важную роль в решении самых разнообразных прикладных задач. Исследования прикладного характера были выполнены и самим Андреем Николаевичем, они относились к математической геологии, теории стрельбы, гидро- и аэромеханике, генетике. На одной из этих работ мы остановимся подробнее. Она называется «О новом подтверждении законов Менделя» и опубликована в 1940 году.

Грегор Мендель, монах и преподаватель математики, скрещивал в монастырском саду города Брно различные виды гороха. Данные о результатах своих опытов он опубликовал в 1865 году в местном журнале. Лишь в 1900 году эти результаты стали общеизвестными и легли в основу новой науки — генетики — как законы Менделя. Кратко и упрощённо поясним суть одного из этих законов.

Наследование признаков зависит от специальных носителей, позднее названных *генами*. Все клетки живого организма, кроме половых (*гамет*), несут одинаковый набор из пары генов. Каждый ген пары может находиться в одной из форм (*аллелей*) — A или a. В соответствии с этим организм может иметь один из трёх *генотипов*: AA, aa или Aa (*гибрид*). Предполагается, что аллель A является *доминантной*, аллель a — *рецессивной*. Это означает, что особи генотипа Aa имеют те же наблюдаемые признаки (у Менделя — цвет семян гороха или их форма), что и особи генотипа AA; влияние гена a проявляется лишь у особей генотипа aa.

Гаметы содержат только по одному гену каждой пары. Поэтому особи AA или aa производят гаметы только одного вида, а особи Aa — в равном количестве гаметы A и a. Новый организм развивается из двух родительских гамет, от них он получает свои гены. Если считать, что каждый родительский ген передаётся с вероятностью $1/2$, а передача признаков в различных поколениях происходит независимо, то при скрещивании гибридов Aa и Aa генотипы AA, Aa и aa появляются с вероятностями соответственно $1/4$, $1/2$ и $1/4$. Поскольку признак A является доминантным, доля его в достаточно обширном потомстве второго поколения гибридов должна составлять $3/4$, а признака a — $1/4$. Именно к такому выводу на основании своих опытов пришёл Г. Мендель.

Преследования генетики и генетиков в нашей стране начались в 1930-х годах. Роковую роль в этом сыграл журнал «Яровизация», создателем и главным редактором которого был Т. Д. Лысенко. В 1937 году на страницах журнала говорилось о превращении генетики «в служанку ведомства Геббельса», о «троцкистских агентах международного фашизма», ищущих любые лазейки, чтобы пробраться в советскую науку. В 1938 году Т. Д. Лысенко, ставший фаворитом Сталина, был избран (фактически назначен) Президентом ВАСХНИЛ. Три его предшественника на этом посту, в том числе всемирно известный биолог и генетик Н. И. Вавилов, были репрессированы.

В 1939 году журнал «Яровизация» поместил статью Н. И. Ермолаевой, одной из сотрудниц Т. Д. Лысенко. Она рассадила томаты второго поколения по ящикам, причём каждый ящик засевался семенами, взятыми из плодов одного растения первого поколения. Исследуемыми признаками служили окраска цветка и пазухи листа и окраска семядолей — первых листов зародышей. Когда были взяты данные по отдельным семействам (ящикам), выяснилось, что частоты проявлений доминантного признака у гибридов второго поколения довольно сильно колеблются, не совпадая в точности с 3/4. Отсюда был сделан вывод, что законы Менделя не выполняются.

Разобраться в результатах Н. И. Ермолаевой А. Н. Колмогорова попросил А. С. Серебровский, организатор и первый заведующий кафедрой генетики МГУ, академик ВАСХНИЛ. Андрей Николаевич применил к анализу данных статьи аппарат математической статистики. В соответствии с правилами этой науки он сформулировал две гипотезы. Одна из них, названная *гипотезой независимости*, выдвигается сторонниками менделевской и моргановской генетики, её суть изложена выше. Другая, или, как говорят в математической статистике, *альтернативная гипотеза*, поддерживалась школой Т. Д. Лысенко. Она состояла в том, что селективное оплодотворение и неравная жизнеспособность играют всюду столь решающую роль, что «рассмотрения, опирающиеся на гипотезу независимости, для биологии бесплодны».

Далее в работе А. Н. Колмогорова было доказано, что менделевская теория предсказывает большую, чем наблюдалось в экспериментах, близость частоты доминантного признака лишь в числе наблюдений, превышающем 12000. При фактическом числе семейств порядка сотен совпадение с этой теорией следует признать очень хорошим.

Затем для анализа результатов экспериментов использовался метод, предложенный А. Н. Колмогоровым в статье «Об эмпирическом определении закона распределения» (1933 год). Сейчас в математической статистике этот метод общепризнан и называется *критерием Колмогорова*. Полученное хорошее совпадение эмпирической и теоретической кривых, подтверждённое численными оценками, приводит к следующему выводу: материал работы Н. И. Ермолаевой, вопреки её собственному мнению, «оказывается блестящим новым подтверждением законов Менделя». Борющегося «со случайностью в науке» Т. Д. Лысенко Андрей Николаевич считал честно заблуждающимся невеждой-недоучкой.

Понятно, что публикация подобного вывода в те годы требовала от автора подлинной гражданской смелости. Андрею Николаевичу всегда было присуще обострённое чувство личной ответственности за судьбу науки в стране. В 60-е годы он стал одним из активнейших участников битвы за кибернетику. «Я, во всяком случае, жил, всегда руководствуясь тем тезисом, что истина — главное, что наш долг — находить и отстаивать её, независимо от того, приятна она или неприятна» (А. Н. Колмогоров).

Вероятностные законы регулируют ход самых разных процессов в природе. Наверное, поэтому, а ещё и потому, что академик любил трудные задачи, его внимание привлекла турбулентность — явление, наблюдаемое при течении жидкостей и газов, часто встречающееся и в природе, и в технических устройствах. Оно заключается в том, что для течения характерны беспорядочные пульсации скорости, давления и других гидродинамических величин. Эти пульсации можно наблюдать на улице современного города сразу после сильного дождя или во время интенсивного таяния снега, когда устремляющиеся к водостокам ручьи покрыты тонкой радужной плёнкой бензина.

Турбулентность в атмосфере хорошо видна на картинах распределения облаков, показываемых по телевидению метеорологами в конце сводки новостей. Можно сказать, что турбулентность — естественное состояние жидкости, движущейся в больших объёмах и с большими скоростями, поэтому её изучение особенно важно для океанологии и метеорологии.

Андрей Николаевич писал: «Интерес к изучению турбулентных потоков жидкостей и газов возник у меня в конце 30-х годов. Мне сразу стало ясно, что основным математическим аппаратом исследований должна стать теория случайных функций многих переменных (случайных полей), которая в то время только зарождалась. Кроме того, мне стало ясно, что трудно надеяться на создание замкнутой в себе чистой теории. За отсутствием такой теории придётся опираться на гипотезы, получаемые из обработки экспериментальных данных. Важно было и получить талантливых сотрудников, способных работать в таком смешанном плане, сочетая разработку теории с экспериментом».

Талантливых сотрудников, как, впрочем, и в любые другие годы, Андрей Николаевич нашёл среди своих учеников. Ими были А. М. Обухов, М. Д. Миллионщиков, А. С. Монин, А. Я. Яглом; все они впоследствии стали крупными учёными.

Основные работы А.Н. Колмогорова по теории турбулентности, опубликованные в начале 1941 года, имели не формально-математический, а отчётливо физический характер. В их основе лежало глубокое проникновение в самую суть сложных нелинейных процессов, подлинная физическая интуиция. Обнаруженные А. Н. Колмогоровым законы в дальнейшем многократно сопоставлялись с данными измерений, полученными в лабораторных условиях, атмосфере, океане. Они всегда оказывались выполненными с высокой степенью точности. В 60-х годах Андрей Николаевич вернулся к этой тематике и получил ряд новых результатов.

Надо сказать, что теория турбулентного движения ещё далека от своего завершения. Известный специалист в области гидро- и аэромеханики Теодор фон Карман в 1961 году говорил, что когда он, наконец, предстанет перед Создателем, то первое, о чем он попросит, будет раскрытие тайны турбулентности. Во всём мире на фундаментальные исследования турбулентности затрачиваются огромные усилия. С помощью современных компьютеров стало возможным прямое численное моделирование турбулентности. И всё же общепринятой теории пока нет, о природе турбулентности существуют различные, и даже противоположные точки зрения. Тайна остаётся нераскрытой.

Построенная А. Н. Колмогоровым теория нашла приложения, на ней, например, основаны многие современные методы расчёта распространения в турбулентной среде (атмосфере или океане) света, звука, радиоволн.

РАЗМЫШЛЕНИЕ ОБ ИНФОРМАЦИИ И ИНФОРМАЦИЯ К РАЗМЫШЛЕНИЮ

Существует множество определений понятия «информация». От самых общих возвышенно-философских типа «информация есть отражение реального мира» или «информация есть всеобщее свойство материи и мера организации систем» до сугубо практических «информация есть сведения, являющиеся объектом сбора, преобразования, хранения и передачи». Так или иначе, теория информации имеет дело с отображениями предметов или явлений в виде символов, образов. Символы могут быть самыми разнообразными, такими, например, как последовательность электромагнитных импульсов, поступающая со спутника связи, устная и письменная речь, телевизионное изображение, генетический код, записывающий наследуемые свойства в биологических клетках. Создание оптимальной системы символов, отражающих свойства объектов (кодирование), получение сведений об объектах по свойствам символов (декодирование) — вот типичные задачи теории информации.

Сейчас теорию информации считают одним из разделов кибернетики. Во введении к первому изданию книги «Кибернетика», вышедшему в свет в 1948 году, Норберт Винер пишет: «...нам пришлось разработать статистическую теорию количества информации. В этой теории за единицу количества информации принимается количество информации, передаваемое при одном выборе между равновероятными альтернативами. Такая идея возникла почти одновременно у нескольких авторов, в том числе у статистика Р. А. Фишера, у доктора К. Шеннона из Белловских телефонных лабораторий и у автора настоящей книги. При этом Р. А. Фишер исходил из классической статистической теории, К. Шеннон — из проблемы кодирования информации, автор настоящей книги — из проблемы сообщения и шумов в электрических фильтрах. Следует, однако, отметить, что некоторые мои изыскания в этом направлении связаны с более ранней работой А. Н. Колмогорова в России, хотя значительная часть моей работы была сделана до того, как я обратился к трудам русской школы».


А. Н. Колмогоров. 50-е годы

Глубокие работы американского учёного Клода Шеннона были опубликованы также в 1948 году. С помощью методов теории вероятностей К. Шеннон искал оптимальные пути кодирования и декодирования информации в целях её передачи и хранения. Вполне естественно, что первые публикации К. Шеннона, написанные на уровне «физической строгости», привлекли внимание А. Н. Колмогорова. В предисловии к русскому переводу этих работ он писал: «Значение работ Шеннона для чистой математики не сразу было достаточно оценено. Мне вспоминается, что ещё на международном съезде математиков в Амстердаме (1954 г.) мои американские коллеги, специалисты по теории вероятностей, считали мой интерес к работам

Шеннона несколько преувеличенным, так как это более техника, чем математика. Сейчас такие мнения вряд ли нуждаются в опровержении. Правда, строгое математическое «обоснование» своих идей Шеннон в сколько-нибудь трудных случаях предоставил своим продолжателям. Однако, его математическая интуиция изумительно точна...».

Строительство дома обычно начинается с сооружения фундамента. При строительстве здания науки фундамент обычно появляется довольно поздно. О фундаменте дворца математики мы говорили в первой беседе. Для технических наук роль фундамента играют отдельные разделы фундаментальных (обратим внимание на сходство терминов) наук, таких, как математика, физика, химия, биология.

Создателями прочного математического фундамента теории информации стали А.Н. Колмогоров и его ученики И.М. Гельфанд и А.М. Яглом. Их работы определили высокий стандарт уровня математической строгости, которого с тех пор неизменно придерживаются и математики, и инженеры, занимающиеся теорией информации. Этот же стандарт выдержан и в более поздних, также весьма содержательных работах К. Шеннона.

Первой важной задачей новой теории было нахождение количественной меры информации, т. е. численной оценки «информативности» сообщения. Когда можно считать, что сообщение не несёт никакой информации? Очевидно, тогда, когда сообщаемые сведения нам и так известны. Например: «В этом году после зимы наступит весна». Если же интересующее нас явление может реализоваться различными способами (имеется неопределённость), то всякое сообщение, исключающее некоторые способы и тем самым уменьшающее неопределённость, содержит ненулевую информацию.

Разрабатывая эту идею, т. е. характеризуя неопределённость источников сообщений, К. Шеннон воспользовался термином «энтропия». Этот термин был введён в науку одним из основателей термодинамики немецким физиком Р. Клаузиусом (1865 г.). Понятие энтропии сыграло принципиальную роль в строгом построении статистической физики. Один из её авторов, Л. Больцман, считавший, что «для практики нет ничего лучшего, чем хорошая теория», доказал в 1877 году, что энтропия является «мерой неопределённости» состояния газа.

Первые шаги к введению понятия энтропии в теорию информации были сделаны в 1928 году американским инженером-связистом Р. Хартли. Он предложил характеризовать неопределённость опыта с k различными исходами количеством информации $I = \log_2 k$. При этом результат опыта с двумя возможными исходами содержит единичную информацию в 1 бит. От работ Р. Хартли берёт начало комбинаторное направление в теории информации, игнорирующее возможное различие в характере исходов. Понятно, что возможности этого направления ограничены. Разве одинакова информация, содержащаяся в двух следующих сообщениях: «монета упала гербом вверх» и «на Луне обнаружена жизнь»? В первом случае два исхода представляются равновозможными. Во втором — отнюдь нет. Почему же оба сообщения должны нести одинаковую информацию в 1 бит?

Основы вероятностного направления теории информации, учитывающего этот «нюанс», были, как уже отмечалось, заложены К. Шенноном. Он заметил, что в случае k равновероятных исходов, имеющих вероятность $p = 1/k$, количество информации по Хартли есть $I = \log_2 k = -\log_2 p_i$. Пусть теперь имеется N возможных исходов опыта, из которых k различных, причём i-й исход, имеющий вероятность p_i, повторяется n_i раз и содержит количество информации $I_i = -\log_2 p_i$, $i = 1,2,\ldots,k$. Тогда среднее количество информации, содержащееся в одном опыте, есть

$$I_{\text{ср}} = \frac{n_1 I_1 + n_2 I_2 + \ldots + n_k I_k}{N} = \\ = \frac{n_1}{N}(-\log_2 p_1) + \frac{n_2}{N}(-\log_2 p_2) + \ldots + \frac{n_k}{N}(-\log_2 p_k).$$

Заменяя частоты исходов n_i/N их вероятностями p_i, К. Шеннон приходит к своему определению энтропии

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i. \tag{2.1}$$

Понятие энтропии позволяло решить много важных задач, относящихся к передаче и хранению дискретных сообщений. Однако все попытки перенести его на случай непрерывных сигналов оказались безуспешными. «Далее я настаиваю на той идее, что основным понятием, допускающим обобщение на совершенно произвольные непрерывные сообщения и сигналы, является не непосредственно понятие энтропии, а понятие количества информации $I(\xi, \eta)$ в случайном объекте ξ относительно объекта η». Эта фраза из доклада А. Н. Колмогорова «Теория передачи информации» на заседании АН СССР в 1956 году и следующие за ней формальные математические построения определили новый подход к вероятностному направлению в теории информации.

В начале 1960-х годов Андрей Николаевич решил реконструировать фундамент теории информации. Об этом периоде своей работы он писал так: «...занятия совсем общими полуфилософскими размышлениями у меня самого заняли больше времени и энергии, чем, может быть, кажется издали. В такой выработке совсем общих взглядов итог усилий заключается не в формулировке точно фиксированных «результатов», а в общей перестройке собственного сознания и размещения всего в надлежащей перспективе. Поэтому потом оказывается, что как бы и ничего не открыл «нового», а потратил много сил и времени». Академик лукавит. Он открыл всего-навсего новое направление в теории информации. С появлением в 1965 году статьи А. Н. Колмогорова «Три подхода к определению понятия количества информации» родилась алгоритмическая теория информации, в основе которой лежало понятие колмогоровской сложности конечного объекта. Продолжая исследования, Андрей Николаевич приходит к следующему решительному выводу: «Теория информации должна предшествовать теории вероятностей, а не опираться на неё». Строгое построение теории вероятностей на базе теории информации — дело будущего.

В 1960 году Андрей Николаевич организовал при кафедре теории вероятностей МГУ статистическую лабораторию. Одним из направлений стало применение математических методов в языкознании. Анализ большого числа текстов показывает, что в русском языке частоты появления различных букв колеблются от 0,002 для «ф» до 0,090 для «о». Приравняв эти частоты вероятностям, можно по формуле (2.1) приближённо вычислить энтропию, приходящуюся на одну букву русского текста: $H = 4{,}35$ бит (при этом учитывается и пробел между словами). Результат этот весьма неточен, так как последовательные буквы русского текста отнюдь не независимы друг от друга: после гласной, как правило, идёт согласная, а после «ш» никак не могут появиться ни «ы», ни «я». Созданная А. Н. Колмогоровым методика позволила молодым сотрудникам лаборатории получить уточнённые данные.

Изучая сложность прозаических и поэтических литературных текстов, Андрей Николаевич пришёл к выводу о необходимости разложения энтропии языка H в сумму слагаемых: $H = h_1 + h_2$. Здесь h_1 — степень гибкости в выражении одной и той же мысли разными способами, h_2 — информационная ёмкость языка, т. е. количество разных мыслей, которые могут быть изложены текстом одной и той же длины. Важно, что обе эти величины поддаются достаточно точному измерению. Соотношение между h_1 и h_2 позволило формально, с точки зрения теории информации, проанализировать различия между прозой и поэзией. Всё глубже погружаясь в поэзию, академик вычислял вероятность того, что пара наугад взятых слов рифмуется, предлагал количественные оценки сложности рифм, определял затраты энтропии на строку поэмы «Евгений Онегин».

«Стих только тогда убедителен, когда проверен математической (или музыкальной, что то же) формулой. Проверять буду не я», — писала Марина Цветаева.

ЭЛЕМЕНТЫ НЕОЖИДАННОСТИ

Каждое из крупных направлений математической науки имеет свой математический аппарат. Когда понятия, идеи и методы, возникшие внутри одного направления, удаётся применить для развития другого, наука существенно продвигается вперёд. До XVII века алгебра и геометрия существовали более-менее независимо. Идеи Декарта и Ферма, считавших, что вместо линий и поверхностей можно исследовать их уравнения, привели к появлению аналитической геометрии. В наши дни алгебраическая геометрия — бурно развивающаяся область математики, получившая к тому же важные применения в теоретической физике (теория струн в физике элементарных частиц). Отметим также новый взгляд на теорию дифференциальных уравнений, появившийся после того, как Пуанкаре использовал для её развития методы геометрии и топологии.

Высказывание А. Н. Колмогорова о том, что во всяком крупном открытии имеются элементы неожиданности, и этим крупное открытие отличается от постепенно накапливаемых результатов текущей научной работы, неоднократно подтверждалось его собственным опытом. В 50-х годах он обнаружил неожиданные связи теории информации с, казалось бы, далёкими от неё областями математики — теорией приближений и теорией динамических систем.

В работах А. Н. Колмогорова по теории приближений были использованы идеи комбинаторного направления теории информации. «Вообще мне представляется важной задача освобождения всюду, где это возможно, от излишних вероятностных допущений», — писал он в комментарии к сборнику своих трудов. Для множеств в метрических пространствах Андреем Николаевичем были введены понятия ε-энтропии и ε-ёмкости.

Для класса функций K его *ε-энтропия* $H_\varepsilon(K)$ есть количество информации, необходимое для выделения из K с точностью ε какой-нибудь индивидуальной функции, а *ε-ёмкость* $C_\varepsilon(K)$ есть количество информации, которое может быть закодировано элементами из K при условии, что надёжно различимы элементы K, расположенные друг от друга на расстоянии, не меньшем ε.

Подход, основанный на этих понятиях, позволил выработать общий взгляд на важную в теории численных методов проблему составления таблиц значений функций. Именно эти исследования побудили А. Н. Колмогорова заняться проблемой, имеющей несчастливый порядковый номер 13 в знаменитом списке проблем Гильберта. Суть проблемы состояла в том, что для некоторой непрерывной функции трёх переменных надо было доказать невозможность её представления в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных. Полученное А. Н. Колмогоровым и сформулированное в начале данной беседы утверждение (его высшее «спортивное» достижение) опровергло гипотезу Гильберта.

Первоначально под динамической системой понималась любая механическая система с конечным числом степеней свободы. Позже этот термин стали трактовать шире — любая система обыкновенных дифференциальных уравнений. Одной из самых знаменитых в теории динамических систем является задача об эволюции орбит трёх небесных тел, сформулированная ещё Ньютоном, но в общем виде не решённая до сих пор. Близкими задачами Андрей Николаевич занимался в 1953–1954 годах. Ему удалось решить задачу, которую Пуанкаре назвал «основной проблемой динамики». Работы А. Н. Колмогорова и его ученика В. И. Арнольда по этим вопросам были отмечены Ленинской премией.

Комментируя свою статью «Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега» (для неспециалистов название выглядит прямо-таки устрашающе — понятно только первое слово), Андрей Николаевич отмечает, что эта работа «содержит некоторые применения математического аппарата теории информации к теории динамических систем. Введённое в этой работе понятие «количество информации» не получает какого-либо реального истолкования».

«Современное понимание связи между неустойчивостью и статистикой возникло после привлечения идей и методов из теории информации. Принципиально важную роль здесь сыграла работа А. Н. Колмогорова 1958 года, где такая связь с теорией информации была обнаружена впервые», — пишет об упомянутой выше статье Я. Г. Синай — один из многочисленных учеников А. Н. Колмогорова. На связи между неустойчивостью и статистикой остановимся несколько подробнее.

В теории вероятностей каждому случайному событию приписывается определённая вероятность. Трудно представить себе, что где-то имеется некий «случайный механизм» типа рулетки, который и определяет значения вероятностей. Последние обычно считаются следствием анализа статистических данных. Против применения вероятностных законов в квантовой механике резко восстали многие физики, считавшие, что статистический характер законов — следствие неполноты знаний и в конце концов им на смену придут законы детерминированные. «Я могу ещё, если на то пошло, понять, что Господь Бог мог сотворить мир, в котором нет законов природы. Короче говоря, хаос», — писал А. Эйнштейн. — «Но то, что должны быть статистические законы с вполне определёнными решениями, например законы, вынуждающие Господа Бога бросать кости в каждом отдельном случае, я считаю в высшей степени неудовлетворительным». Великий физик не мог смириться с тем, что вероятностные законы достаточно точно определяют ход таких процессов или явлений, для которых нет видимого «случайного механизма». Помимо квантовой теории подобные законы используются, например, для описания турбулентности, хотя движение жидкости или газа описывается детерминированной системой дифференциальных уравнений в частных производных.

Неустойчивые динамические системы характеризуются тем, что малое изменение начальных данных приводит к нарастающим со временем различиям траекторий движения. Разнообразие различных типов траекторий за время $[0, T]$ с ростом T растёт экспоненциально. Показатель экспоненты есть характеристика динамической системы, родственная энтропии в теории информации. Современные исследования показывают, что чем неустойчивее движение, тем сильнее проявляются в нём статистические закономерности.

Как это понять? В своё время П. С. Лаплас утверждал, что по заданным начальным данным можно абсолютно точно рассчитать состояние динамической системы в любой момент времени. Но выясняется, что практически это не всегда возможно. Если система неустойчива, а начальные данные заданы с некоторой погрешностью, пусть даже очень малой, то о состоянии системы через достаточно большое время нельзя сказать абсолютно ничего достоверного. Это состояние можно оценивать только вероятностными методами. Границы царств порядка и хаоса, прежде казавшиеся незыблемыми, стали расплываться.

МАТЕМАТИКА И ПОЭЗИЯ

В 1983 году в связи с приближающимся 80-летием Андрея Николаевича сотрудник журнала «Квант» взял у него интервью. Он задал, в частности, такой вопрос: «Лингвисты и литературоведы обратили внимание на Ваши публикации по стиховедению. Что Вы можете сказать об этом — менее обычном — сочетании: математика и поэзия?» Ответ выглядел так: «Мне хотелось бы разделить этот вопрос на два, так как моё увлечение поэзией имеет такой же непроизвольный, стихийный характер, как и у людей, не занимающихся теоретическим исследованием стиха. Любимые мои поэты — это Тютчев, Пушкин, Блок. Что касается моих научных работ по метрике и ритмике русского стиха, то они действительно обратили на себя внимание специалистов-литературоведов, но всё-таки это довольно специальная область исследования, интересоваться которой совершенно не обязательно всякому».

А. Н. Колмогоров. 70-е годы

Всякому не обязательно, а нам интересно. Интересно, что может сделать математик в стиховедении, которое в нашем дилетантском представлении ассоциируется, с одной стороны, с проходимыми в школе ямбами и хореями, а с другой — с туманными понятиями типа «поэтический образ» или «лирический герой».

При статистической лаборатории А. Н. Колмогоров организовал семинар. Его участниками стали математики, филологи, литературоведы. Семинар занялся изучением русской поэзии. «Стиховедение вместе со всеми филологическими дисциплинами переживает сейчас закономерный этап устремления к более точным и объективным методам исследований, опирающимся лишь на факты, непосредственно данные в изучаемом материале», — писал Андрей Николаевич. Не эмоции, а факты, не субъективная оценка, а объективный, насколько это возможно, анализ поэтических произведений — такую задачу ставила перед собой группа А. Н. Колмогорова. Исходная позиция состояла в том, что в произведениях поэзии имеются количественные закономерности, которые могут быть восприняты и в отрыве от содержания. Математический аппарат для изучения этих закономерностей включал в себя теорию вероятностей, математическую статистику, теорию информации. На первом заседании семинара его участникам в качестве домашнего задания были предложены две задачи А. Н. Колмогорова: дать формальные определения понятий «падеж» и «ямб».

В журналах «Вопросы языкознания», «Вопросы литературы», книгах, посвящённых теории стиха, Андрей Николаевич опубликовал около десятка работ. Типичные названия: «К основам русской классической метрики», «Ритмика поэм Маяковского», «О дольнике русской поэзии: Статистическая характеристика дольника Маяковского, Багрицкого, Ахматовой». Чтобы понять хотя бы суть этих работ, необходим небольшой экскурс в теорию стиха.

В чём отличие поэзии от прозы? Специалисты считают, что принципиальных отличий два. Во-первых, проза есть сплошная речь, а поэзия делится на сопоставимые между собой единицы — стихи (так называется и каждая строчка стихотворения). По мнению А. Н. Колмогорова, более важно второе отличие: стих обладает внутренней мерой (метром), а проза ею не обладает.

Второй признак Андрей Николаевич определяет так: «Под метром я понимаю закономерность ритма, обладающую достаточной определённостью, чтобы вызывать: а) ожидание её подтверждения в следующих стихах; б) специфическое переживание «перебоя» при её нарушениях».

В основе ритмичности русской классической поэзии лежит чередование единообразных стоп — сочетаний из сильных и слабых слогов (мест). Сильные слоги, как правило, ударны, слабые — безударны. Вспомним начало «Евгения Онегина»: «Мой дядя самых честных правил...» Формально первый слог — ударный, по существу — слабый; читая стих, мы его никак не выделяем. «Евгений Онегин» написан *ямбом* — метром, в котором сильные места приходятся на чётные слоги. Число стоп в строке — четыре. В другой четырёхстопной строке А. С. Пушкина «Буря мглою небо кроет...» сильные места приходятся на нечётные слоги; такой метр называется *хореем*. Ямб и хорей — двудольные метры; стопа состоит из одного сильного и одного слабого слогов. В классической русской поэзии использовались также трёхдольные метры, в которых ритм задаёт стопа из одного сильного и двух слабых слогов. В зависимости от того, какое место в сочетании занимает сильный слог, они подразделяются на *дактиль*, *амфибрахий* и *анапест*. Пример — снова из А. С. Пушкина: «Подымем стаканы, содвинем их разом...» (четырёхстопный амфибрахий).

Идеальное соблюдение метра в достаточно большом произведении встречается редко. Сильный слог то пропускается и заменяется двумя слабыми (вторая строка из «Евгения Онегина»: «Когда не в шутку занемог...»), то возникает не там, где ему положено («Швед, русский, колет, рубит, режет...» — снова А. С. Пушкин, но на сей раз «Полтава»).

«Вольности» в классической метрике допускались всё чаще, поэты XX века отходили от ритмических схем своих предшественников. А. Н. Колмогоров пишет об этом так: «Поиски новых ритмов не помешали культивированию классической метрики со всеми тонкостями и даже расширению её возможностей, но не путём отказа от строгого счёта слогов и точного подчинения расположения ударений требованиям метра, а путём обращения к таким ритмическим вариантам, которые требуют для своего восприятия в качестве подчинённых метру более изощрённого внимания».

Сравним два отрывка, в которых языком поэзии говорится о море. Первый взят из стихотворения, написанного в 1865 году Ф. Н. Тютчевым (любимым поэтом Андрея Николаевича):

На бесконечном, на вольном просторе
Блеск и движение, грохот и гром...
Тусклым сияньем облитое море,
Как хорошо ты в безлюдье ночном!

Число слогов в строках — 10–11, всюду сильными являются 1-е, 4-е, 7-е и 10-е места; мы без труда узнаём традиционный *дактиль*.

Второй отрывок представляет собой начало главы «Морской мятеж» из поэмы Б. Пастернака «Девятьсот пятый год», написанной в 1925–1926 годах:

Приедается всё,
Лишь тебе не дано примелькаться.
Дни проходят,
И годы проходят,
И тысячи, тысячи лет.
В белой рьяности волн,
Прячась
В белую пряность акаций,
Может, ты-то их,
Море,
И сводишь, и сводишь на нет.

На первый взгляд, никакой системы ни в числе слогов, ни в расположении сильных мест нет. Как считал Андрей Николаевич, изучавший ритмику этой поэмы в одной из работ, поэма «выделяется обилием безударных сильных слогов и дополнительных ударений на слабых слогах, что придаёт её ритму характер, очень далёкий от обычных представлений о плавности трёхсложных размеров». Академику потребовалось, выражаясь его собственным языком, «изощрённое внимание», чтобы, проанализировав все 336 стихов поэмы, сделать вывод, что «законы классической метрики в поэме соблюдены безукоризненно», метр поэмы — пятистопный анапест.

Первая попытка объяснить особенности русских классических метров на основании исследования статистических закономерностей была предпринята Н. Г. Чернышевским. Взяв небольшой отрывок из прозы А. С. Пушкина, он определил, что одно ударение приходится в среднем на три слога (современные данные — на 2,68). Этим Н. Г. Чернышевский объяснял распространённость двудольных и трёхдольных метров.

Статистические закономерности в произведениях поэзии изучал видный представитель символизма в поэзии начала XX века Андрей Белый. К этому же направлению принадлежали А. А. Блок, К. Д. Бальмонт, В. Я. Брюсов. Последний писал: «Математику как олицетворение рассудочности обычно противопоставляют поэзии, постигающей мир иными, не рассудочными средствами». Андрей Белый математику и поэзию не противопоставлял. Возможно, сказывалась наследственность — его отец был профессором математики Московского университета. В своих стиховедческих работах, посвящённых несовпадениям метра и ритма, А. Белый использовал огромный статистический материал. Он формулировал правила и пытался следовать им в своих поэтических опытах. Математические ошибки А. Белого исправил профессиональный математик Б.В. Томашевский, ставший впоследствии одним из крупнейших русских филологов XX века. В работе Б.В. Томашевского о пушкинских ямбах, изданной в 20-е годы, впервые в стиховедении был использован аппарат теории вероятностей.

К началу 60-х годов теория стиха сильно отстала от обновления поэзии. Профессор М.Л. Гаспаров, один из участников семинара А.Н. Колмогорова, характеризует это отставание так: «О метрике и ритмике Пушкина спорили с точными цифрами в руках. О метрике и ритмике Блока и Маяковского — с помощью словесных и подчас расплывчатых суждений». Андрею Николаевичу удалось построить убедительные модели наиболее сложных ритмических структур русской поэзии XX века.

В результате кропотливого анализа А.Н. Колмогоров установил, что большинство произведений В.В. Маяковского написаны метром, в котором количество сильных мест в строке фиксировано (обычно 3–4), а количество слабых мест между ними и до первого сильного колеблется в пределах 1–2 слогов. Академику не требовалось придумывать новое название. Ещё В.Я. Брюсов ввёл термин «дольник» для обозначения этого метра, возникшего в переводах из германской поэзии. Но конкретным содержанием термин наполнился именно в работах Андрея Николаевича.

«Дольником в широком смысле можно назвать любой стих, который воспринимается в соотнесении со схемой, предусматривающей в каждом стихе определённое число долей, т.е. групп слогов, объединённых одним ударением», — таково определение дольника по А.Н. Колмогорову. Приведём и авторский комментарий к этому определению. Он интересен потому, что показывает, как академик понимал связь между теорией и практикой стихосложения: «Это общее определение сделано несколько расплывчатым, так как оно должно охватить различные направления развития дольника как живого явления поэтической практики, которое исходит не из заданных извне законов, а приходит к разграничению законных и незаконных вариантов ритма путём проб и вслушивания в звучание стиха».

Дольником написаны, например, хрестоматийные «Стихи о советском паспорте» В.В. Маяковского:

По длинному фронту
купе
и кают

чиновник
учтивый
движется.
Сдают паспорта,
и я
сдаю
Мою пурпурную книжицу.

В работе, посвящённой ритмическому анализу «Стихов», А. Н. Колмогоров объясняет и расположение строчек «лесенкой». Дело в том, что поэт выделяет в отдельную «ступеньку», в частности, те обычные безударные слова (местоимения, предлоги, вспомогательные глаголы), которые в данном случае должны произноситься с самостоятельным ударением. В первой строке «Стихов»:

Я волком бы
выгрыз
бюрократизм...

«я» безударное, в приведённом выше отрывке — ударное.

Анализируя стихотворения и поэмы В. В. Маяковского, А. Н. Колмогоров приходит к выводу: «Системы ритмической организации стиха у Маяковского имеют устойчивые характеристики, не меняющиеся заметно при переходе от произведения к произведению и лишь медленно эволюционирующие со временем». Для доказательства этого утверждения он использовал богатый арсенал методов математической статистики и теории информации.

Работы А. Н. Колмогорова, посвящённые исследованию ритмики и метрики произведений В. А. Жуковского, А. С. Пушкина, А. А. Блока, А. А. Ахматовой, В. В. Маяковского, М. И. Цветаевой, Б. Л. Пастернака, Э. Г. Багрицкого, современной теорией стиха признаются классическими. И всё-таки остаётся неясным, почему удостоенный всех почестей и наград академик занялся таким необычным, новым для себя делом. Сам Андрей Николаевич писал, что вовсе не ставил цели помогать поэтам писать стихи. По-видимому, ему было просто интересно погрузиться в сферу, традиционно недоступную точным наукам. Интересно ещё и потому, что он всегда любил и поэзию, и трудные задачи.

УНИВЕРСИТЕТ В КОМАРОВКЕ

Словарь русского языка определяет дружбу как близкие отношения, основанные на взаимном доверии, привязанности, общности интересов. «Избери себе друга, ты не можешь быть счастлив один: счастье есть дело двоих», — советовал Пифагор. Многолетняя дружба двух выдающихся математиков — Павла Сергеевича Александрова и Андрея Николаевича Колмогорова — дала счастье каждому из них и обогатила математику в целом.

В 1981 году П.С. Александров писал: «Моя дружба с А.Н. Колмогоровым занимает в моей жизни совершенно исключительное, неповторимое место; эта дружба перешагнула в 1979 году через своё пятидесятилетие, и за весь полувековой период не только не дала никакой трещины, но не сопровождалась даже никакой ссорой, не было у нас за всё это время и какого бы то ни было взаимного непонимания по вопросам, сколько-нибудь важным для нашей жизни и миросозерцания; даже тогда, когда наши взгляды на какой-нибудь из этих вопросов были различны, мы относились к этим взглядам друг друга с полным пониманием и сочувствием».

Павел Сергеевич умер в 1983 году. В статье, посвящённой воспоминаниям о нём, Андрей Николаевич счёл необходимым сделать ответное признание: «Наверное, математиком я стал бы и самостоятельно, но мои человеческие качества сложились в значительной мере под влиянием Павла Сергеевича. Он действительно был изумительнейший человек по богатству и широте взглядов не только у нас, но и во всём мире... Для меня эти пятьдесят три года нашей тесной и неразрывной дружбы явились основой того, что вся моя жизнь в целом оказалась преисполненной счастья, а основой моего благополучия явилась непрестанная заботливость со стороны Павла Сергеевича».

Будущие патриархи математики познакомились в 1920 году. Спустя два года студент Колмогоров по совету П.С. Урысона отправился к П.С. Александрову, чтобы проконсультироваться по вопросам дескриптивной теории множеств. Консультант был на семь лет старше студента и уже занимал достаточно высокое положение в иерархии Лузитании. Разница в возрасте и положении ещё сказывалась, и часто, встречаясь на концертах в консерватории, они лишь здоровались, но в беседу не вступали. Тем не менее именно Павел Сергеевич настоял на том, чтобы выпускник аспирантуры А.Н. Колмогоров был оставлен для работы в МГУ.

Дружба началась летом 1929 года, когда Андрей Николаевич, имевший к тому времени опыт лодочных походов, стал организатором путешествия по Волге от Ярославля до Самары. Вторым участником похода длиной 1300 км стал один из школьных друзей А.Н. Колмогорова. «Мне до сих пор не совсем ясно, как я решился предложить быть третьим компаньоном Павлу Сергеевичу. Однако он согласился сразу», — писал Андрей Николаевич.

Из похода они вернулись с готовым решением поселиться вместе. Сначала снимали комнаты и мансарды в Подмосковье, затем жили на даче в Клязьме у брата П.С. Александрова и, наконец, в 1935 году приобрели у наследников великого реформатора сцены К.С. Станиславского старинный помещичий дом в деревне Комаровка близ станции Болшево.

С тех пор маленькая Комаровка стала столь же значительным математическим центром страны, как и крупнейшие университетские города. Значительность проявлялась не только в том, что отныне именно в Комаровке П.С. Александров и А.Н. Колмогоров вели свои научные поиски, получали результаты, писали статьи и книги. Важно и то, что Комаровка стала как бы филиалом механико-математического факультета. От старинного здания МГУ на Манежной площади (позднее — от высотного здания на Ленинских горах) сюда пролегла незримая тропа. По ней в обе стороны двигались ученики: туда — волнуясь в ожидании встречи с требовательными руководителями, обратно — вооружённые оттисками статей, бумажками с пометками академиков, которые потом приходилось разгадывать, как ребусы; и, что самое главное, — вооружённые идеями. Идеи в Комаровке раздавались с необыкновенной щедростью.

Ученик А.Н. Колмогорова профессор В.А. Успенский вспоминает: «Когда А.Н. индуцировал у своего ученика некоторый результат, который на самом деле был им почти подсказан, он создавал такую обстановку, будто бы ученик додумался до этого сам, и предлагал писать статью в журнал о результате. Вот такая психологическая поддержка своего младшего партнёра — очень существенный момент его деятельности. Происходило ли это инстинктивно или он это обдумывал, я не знаю».

В Комаровку приезжали и выдающиеся зарубежные математики — Адамар, Фреше, Банах, Хопф, Куратовский и другие.

Если сравнивать дом академиков в Комаровке с университетом, то надо сказать, что вторым по важности из «проходимых» там предметов была физкультура. Мы не можем отказать себе в удовольствии привести большую цитату из воспоминаний Андрея Николаевича: «Как правило, из семи дней недели мы проводили четыре дня в Комаровке, один из которых полностью посвящался физкультурному отдыху — лыжам, гребле, большим пешеходным экскурсиям (протяжённость длительных лыжных походов была в среднем около тридцати и доходила до 50 километров; в солнечные мартовские дни мы проводили на лыжах в одних трусах до четырёх часов подряд). В остальные дни обязательной была утренняя зарядка, дополнявшаяся зимой ещё бегом на лыжах до 10 км. Мы никогда не были моржами, купающимися круглый год ежедневно: мы купались по произволу, когда захочется. Особенно мы любили плавать в только что вскрывшихся реках, ещё посреди сугробов по берегам. Утренняя пробежка на расстояние около километра при не слишком больших морозах делалась в одних трусах и босиком. Заплывы в ледяной воде я делал только очень маленькие, а Павел Сергеевич — значительно более длинные. Но зато бегал на лыжах в раздетом виде на значительно большие расстояния — я.

Одним из любимых способов организации лыжных пробегов был такой. Мы приглашали математическую молодёжь, скажем, в Калистово, и оттуда начинали двигаться в направлении Комаровки. Некоторые, не добравшись до Комаровки, садились в автобус и уезжали домой. Добравшимся предлагался душ, по желанию — валяние в снегу и затем — обед. В период расцвета комаровского дома число гостей за обеденным столом после лыжного бега достигало 15 человек.

Примерный распорядок дня в Комаровке был такой. Завтрак в 8–9 часов. Умственная работа — с 9 до 2. Второй завтрак — около 2. Лыжный пробег или пешеходная прогулка — с 3 до 5. В период наиболее строгой организованности — предобеденный сон в течение 40 минут. Обед — в 5–6 часов. Потом — чтение, музыка, беседы на научные и общие темы. В самом конце — короткая вечерняя прогулка, особенно — в лунные зимние ночи. Сон в 10–11 часов.

Весь этот распорядок нарушался в двух случаях: а) когда научные поиски становились азартными и требовали неограниченного времени и б) в солнечные мартовские дни, когда лыжные прогулки делались единственным занятием».

Летние отпуска обычно посвящались путешествиям на байдарках или лодках, походам в горы. «Во всех этих занятиях я ценю не только их пользу для здоровья, но и ту радость общения с природой, которую они приносят», — рассказывал Андрей Николаевич журналисту. В возрасте свыше 75 лет он жаловался, что уже не может позволить себе купаться в зимней речке и вынужден ограничиваться купанием в снегу, а знающий человек хорошо понимает разницу между этими процедурами. Прогрессировавшая глаукома к тому времени почти лишила его зрения, но он всё равно ходил на лыжах, надеть их и застегнуть крепления ему помогали ученики.

Многочисленные ученики Павла Сергеевича и Андрея Николаевича продолжают физкультурные традиции Комаровки. Участники семинара В. И. Арнольда много лет продолжали удивлять жителей Подмосковья лыжными походами в плавках и купанием в прорубях.

Мы заканчиваем беседу об А. Н. Колмогорове и очень надеемся, что читатель разделит наше восхищение и удивление перед одной из крупнейших фигур математики XX века, перед человеком и цельным, и необычайно разносторонним.

Есть много больших математиков, добившихся замечательных результатов в тех областях науки, которыми они занимались. Но есть немногие из них, кто в математике умеет всё, кто видит всю математику целиком, со всеми её связями с другими видами человеческой деятельности. К числу этих немногих принадлежит Андрей Николаевич Колмогоров. Наверное, поэтому его имя стоит первым в списке, с которого начиналась эта беседа.

Беседа третья

С. Л. СОБОЛЕВ. НОВЫЙ ПОДХОД К ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ФАКЕЛ, КОТОРЫЙ НУЖНО ЗАЖЕЧЬ

В этой главе мы побеседуем о той области математики, которая называется *математической физикой.* Чтобы почувствовать, чем занимается и как работает математик, специализирующийся по этой науке, используем уже освоенный нами приём — познакомимся с учёным, внёсшим принципиальный вклад в математическую физику XX века, академиком Сергеем Львовичем Соболевым.

С. Л. Соболев. 1952 год

Одному из авторов довелось в студенческие годы слушать лекции профессора С. Л. Соболева по уравнениям математической физики в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Вспоминается первое впечатление. Конечно, мы — студенты третьего курса — были наслышаны о С. Л. Соболеве. Ещё бы — член-корреспондент Академии наук СССР в 24 года, академик в 30 лет, трижды лауреат Сталинской премии, Герой Социалистического Труда, член многих иностранных академий — всё это нам было известно, но мы ещё ни разу его не видели. И вот в аудиторию стремительно вошёл моложавый, крепко сбитый человек. Светлый вихор надо лбом, смеющиеся глаза, упрямо выпяченная нижняя губа. И абсолютная неспособность оставаться неподвижным. Даже когда он, вроде бы, стоял на месте, нас не покидало впечатление движения, порыва — до того рвалось из него то, что он хотел нам сообщить. Чувствовалось, что чтение лекций доставляет ему даже не удовольствие, а наслаждение, ведь речь шла о Математике. «Я буду говорить об одной из самых древних наук, которая нам, её работникам, кажется вечно юной. Она переживала за свою историю и восторги замечательных открытий, и революции, и периоды спокойной систематической работы. Её считают и царицей всех наук, и их служанкой. Для её последователей это всегда богиня, лик которой спрятан под покрывалом, и счастлив тот, кто удостоился увидеть какие-нибудь новые чёрточки её лица или разгадать какую-нибудь из её загадок», — так вдохновенно описывал он дело своей жизни и предмет своей любви. И началась гонка по уравнениям математической физики. Сейчас наш опыт позволяет утверждать, что уложить подобный курс в один семестр — это задача, решения которой не существует. Либо придётся выбросить массу важного материала, чтобы толком объяснить хоть что-то, либо дело сведётся к обзору задач и методов без какой-либо глубины. Да это и понятно. Для исследования задач математической физики требуется не только понимание физического существа задач, но и достаточно глубокие знания по функциональному анализу, теории меры и интеграла Лебега, дифференциальным уравнениям, теории функций комплексного переменного. Студентам трудно свободно оперировать всем этим материалом, хотя соответствующие курсы в объёме «прожиточного минимума» мы к тому времени и прослушали. Добавим ещё, что исследование каждой задачи математической физики требует много времени, громоздких записей и формул. Так вот, профессора С. Л. Соболева всё это ничуть не смущало. С помощью инструмента, который в наше время принято называть динамизмом, с помощью глубокой уверенности в том, что можно сделать всё — надо лишь как следует хотеть, — он продирался вместе с нами через джунгли новых для нас понятий и приёмов. Говорил, писал и жестикулировал одновременно. Его энергия заражала нас, и мы тоже быстро писали и даже необычно быстро думали, сами, удивляясь этому. Видимо, его знания передавались нам не только традиционными путями, но и посредством каких-то, ещё не открытых волн энергии. Наверное, это так. Не зря Сергей Львович любил говорить, что «студент — это не сосуд, который надо заполнить, а факел, который нужно зажечь».

Так или иначе, С. Л. Соболев решил эту задачу, не имеющую решения, и вложил в нас фундамент своей науки. Ведь основным направлением деятельности академика как раз и были поиски решения задач, не имеющих решения в традиционном смысле слова, но важных для науки и техники. Его работы носили революционный характер, так как были связаны с качественно новым взглядом на привычные вещи, взглядом, высвобождающим новые творческие возможности развития науки. Ясно, что именно такие подходы, обеспечивающие качественный прорыв в развитии, особенно ценны. Человечество давно поняло это, создав мифы о гордиевом узле и колумбовом яйце.

РАЗДЕЛЕНИЕ ТРУДА

Чтобы понять, какими задачами занимался академик, поговорим немного о математической физике. Можно сказать, что это одна из областей математики, самых близких к инженерной деятельности человека. В самом деле, очень важны и многочисленны технологические проблемы, связанные с движением тех видов вещества, которые принято называть телами: твёрдых тел, жидкостей, газов, плазмы. Для инженера такие проблемы возникают при изучении прочности конструкций, расчёте движения летательных аппаратов в атмосфере или кораблей в воде, фильтрации нефти в пласте, тепловой изоляции и т. д. Не менее важное значение имеют задачи, связанные с эволюцией такой формы материи, как поле, например электромагнитное. Они важны, в частности, для технологии различных видов телесвязи. Что общего между всеми этими задачами?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо с инженерного уровня описания задачи перейти на физико-математический уровень. Ведь прежде чем инженер получит метод расчёта конкретного устройства, требуется большая работа физиков и математиков.

Под *полем* обычно понимается функция, непрерывно изменяющаяся в пространстве и времени по определённым физическим законам. Её значения могут иметь самую различную природу: быть числами (поле температуры), векторами (поле скорости или силы), тензорами или матрицами (поле напряжений или деформаций в теле) и т. д.

Главное — речь идёт о функциях нескольких числовых переменных (пространственных координат и времени), которые могут непрерывно изменяться в некоторой области. Иначе говоря, главное — это сплошность рассматриваемого объекта, в отличие от дискретности, присущей системам изолированных объектов.

Дело физиков — экспериментаторов и теоретиков — найти законы, регулирующие изменения, происходящие в поле под влиянием силовых или энергетических воздействий. Затем они должны придать этим законам математическую формулировку, т. е. предложить математическую модель изучаемого процесса. На этой стадии в дело вступают математики. Их цель — проанализировать математическую модель и прежде всего установить её логическую непротиворечивость, т. е. доказать, что математическая задача имеет решение. Математики должны также выяснить, является ли решение единственным. Наконец, им надо придумать методы нахождения точного или приближённого решения задачи. Только после этого наступает время инженера.

Конечно, описанная схема разделения труда довольно условна. На практике функции инженера и физика, физика и математика, а то и все три функции могут соединиться в лице одного и того же исследователя. Это бывает в двух случаях: когда исследователь обладает универсальными знаниями и талантами или когда научная работа плохо организована. Тем не менее инженерный, физический и математический подходы к задаче довольно чётко различаются.

Для инженера главное — получить конкретный результат в виде действующего устройства. Если устройство делает всё, что ему положено, то никаких других обоснований применённого метода инженеру не нужно.

В своё время английский инженер-электрик О. Хевисайд придумал так называемое символическое исчисление для расчёта электрических цепей. Оно не имело никакого математического обоснования, но обычно приводило к правильным результатам. Отвечая на упрёки в необоснованности своего метода, О. Хевисайд говорил, что он не станет отказываться от вкусного обеда только потому, что не полностью понимает, как происходит процесс пищеварения. Справедливости ради нужно сказать, что метод Хевисайда иногда приводил к ошибочным результатам, причём заранее было не ясно, в каких именно случаях это произойдёт. Позднее проанализированный и усовершенствованный математиками метод О. Хевисайда стал широко известным и эффективным и ныне носит название *операционное исчисление.*

Что касается физика, то для него важнее всего правильно понять и объяснить физическую суть процесса. Привлекаемые для этого математические средства он воспринимает как язык, на котором выражаются физические законы. Если эти законы настолько новы, что для них в языке нет слов, он придумывает новые термины, не очень заботясь о грамматике и стиле. Известный физик П. Дирак, занимаясь квантовой теорией, «изобрёл» свою знаменитую дельта-функцию. Так он назвал «функцию», которая равна нулю во всех точках числовой прямой, кроме начала координат, где она равна бесконечности; требовалось также, чтобы интеграл от этой функции по всей числовой оси был равен единице. Для математиков дельта-функция была чудовищем с противоречивыми свойствами, химерой. Не может функция, равная нулю везде, кроме одной точки, иметь интеграл, не равный нулю. И потом, что это за значение для «порядочной» функции — бесконечность?

Но физики работали с этим чудовищем абсолютно спокойно. Даже слишком спокойно, поскольку, применяя к действиям с дельта-функцией формальные правила операций над обычными функциями, можно получить неправильные выводы. Им вполне хватало понимания того, какое физическое содержание вкладывается в понятие дельта-функции. Это содержание можно описать примерно так. Физики привыкли задавать распределение физических величин по пространству с помощью удобного понятия плотности. В частности, им хотелось описать распределение массы следующего вида: в одной точке прямой (плоскости, пространства) сосредоточена масса величины единица, во всех остальных точках массы нет вовсе. Ясно, что, подсчитав плотность такого распределения массы, мы получим бесконечную плотность в одной точке и нулевую во всех остальных. При этом интеграл плотности по всему пространству, т. е. суммарная масса, равен единице. Мы видим, что действительно дельта-функция — это не функция, это объект нового типа, представляющий собой некоторый способ описания распределения физической величины по пространству. Позднее математики нашли путь для широкого обобщения понятия дельта-функции, создав *теорию обобщённых функций* или *распределений*; второе название напоминает о физическом происхождении нового математического понятия.

Как мы уже замечали, для математики главное — логическая непротиворечивость и строгость введения понятий и развития теории. Многие инженеры и физики имеют обыкновение подшучивать над пристрастием математиков к доказательству теорем существования и единственности решения. Они считают это излишним «наукообразием», предпочитая заниматься непосредственным построением решений задачи. Наша профессия обязывает нас привести здесь доводы в защиту математиков. Конечно, хорошо, если удастся, как в задачниках для школьников и студентов, построить точное решение задачи, это, в частности, будет и доказательством его существования. А если не удастся? Тот, кто не имеет информации о существовании решения, рискует оказаться в положении средневековых алхимиков, истративших огромное количество времени и сил на поиски философского камня, который так и не найден. А ведь многим из них казалось, что они уже почти нашли его, что он совсем близко, рядом. Сколько труда положили учёные на попытки вывести пятый постулат Евклида из других аксиом его геометрии, на решение задач о квадратуре круга или трисекции угла, пока не было доказано, что решения этих задач не существует!

Нам могут возразить, что существование решения правильно сформулированной задачи физического происхождения, обычно, очевидно. Но в этой кажущейся очевидности и заключено всё коварство природы. Очевидность — категория скорее психологическая, чем научная. В предыдущих примерах существование решения также было «очевидно» для тех, кто их решал. Точно так же для древних греков было «очевидно» существование кентавров. Доказательство существования решения говорит о том, что математическая модель реально существующего процесса непротиворечива и в этом смысле составлена корректно.

Вопрос о единственности решения не менее важен. Если решение математической задачи, моделирующей некий однозначно протекающий физический процесс, не единственно; это значит, что в модели учтены не все факторы, влияющие на природу процесса. Известная шутка о том, что наилучшее средство от насморка — это гильотина, довольно грубо поясняет, какого рода неприятности могут возникнуть при постановке задачи с неоднозначным решением.

«Часто от представителей других наук приходится слышать, что существование решения и его единственность не вызывают вопроса, так как изучается реальное явление, которое и представляет решение задачи, и если изучаемое явление детерминировано, то другого решения задачи быть не может. Однако такое утверждение основано на смешении представлений о реальном явлении и математической модели. Математическая модель описывает лишь модель явления, и для модели, отражающей лишь некоторые черты объекта, существование решения или его единственность может не иметь места», — пишет академик А. Н. Тихонов. Ему будет посвящена следующая беседа, где мы подробнее поговорим о корректной постановке математических задач.

НУЖНЫ ЛИ ДВОЙНЫЕ РАМЫ

Мы слишком отвлеклись на полемику с теми, кто недооценивает серьёзность требований математиков к вопросам существования и единственности решения. Обратимся и к другим особенностям задач математической физики. Мы уже знаем, что каждая такая задача состоит в определении того или иного поля — функции многих переменных. Из каких условий следует определять это поле?

Одним из таких условий является уравнение или система уравнений, которым должно удовлетворять поле в той области изменения пространственных переменных и в том интервале времени, которые определяются конкретной задачей. Как правило, такие уравнения оказываются уравнениями в частных производных. Поэтому термины *уравнения математической физики* и *уравнения в частных производных* — это почти синонимы, просто в первом из них сделан некоторый акцент на физическое происхождение рассматриваемых математических объектов. Уравнение в частных производных возникает как математическая запись физического закона (например, закона сохранения массы, импульса, энергии и т. д.), применённого к малой окрестности любой точки внутри области, занятой полем, и к любому малому интервалу времени. При этом существенно используется непрерывность пространства и времени, а также дифференцируемость полей, т. е. непрерывность изменения самих полей, скоростей и ускорений их изменения при переходе от точки пространства и момента времени к соседним точкам и моментам.

Рассмотрим, например, так называемую «струну», т. е. очень тонкое гибкое упругое тело, которое в натянутом состоянии занимает отрезок $0 \leqslant x \leqslant l$ оси x. Если вывести струну из положения равновесия, отклонив её от прямолинейного положения и отпустив в момент времени $t = 0$ или резко ударив по ней в этот же момент, то она начнёт колебаться около этого положения. Пусть $u(x, t)$ означает отклонение точки струны x от положения равновесия в момент t. Применив к малому участку струны в районе точки x и в окрестности момента t закон сохранения импульса (второй закон Ньютона), получим следующее уравнение колебаний струны:

$$u_{tt}(x, t) = a^2(x)u_{xx}(x, t) + f(x, t), \tag{3.1}$$

где $a^2(x)$ — заданная функция, которая определяется физическими свойствами струны — распределением массы вдоль неё и её упругостью; $f(x, t)$ учитывает постоянно действующие на струну в поперечном направлении силы, например собственную тяжесть струны; каждый нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Уравнение колебаний струны — это один из простейших, но в то же время и важнейших примеров уравнений в частных производных математической физики. Оно описывает упругие колебания не только струны. Если вместо струны рассматривать упругий стержень, т. е. не гибкое тело и не обязательно очень тонкое, а вместо поперечных отклонений от положения равновесия говорить о продольных колебаниях частиц стержня под действием сил, направленных вдоль него, получится в точности то же самое уравнение. Это объясняется физической тождественностью процессов: в обоих случаях речь идёт о взаимодействии сил упругости, возвращающих выведенное из равновесия тело обратно, и сил инерции, заставляющих тело «проскакивать» это положение.

С точки зрения единства математического описания внешне различных физических процессов ещё более интересный пример представляет собой уравнение

$$u_t(x,t) = a^2(x)u_{xx}(x,t) + f(x,t). \tag{3.2}$$

Оно описывает распространение тепла в стержне с помощью механизма теплопроводности, диффузию малой примеси в веществе, изменение давления при фильтрации жидкости в пористой среде. В зависимости от задачи его называют *уравнением теплопроводности*, *диффузии* или *пьезопроводности* (от греческого *piezein* — давить). В данном случае физическое единство процессов состоит в том, что всякий раз речь идёт о переносе физического качества (энергии, массы, импульса) путём хаотического и лишь в среднем упорядоченного взаимодействия соседних микрочастиц тела. Действительно прав был Ньютон, говоря: «Природа не богата на причины».

Итак, искомое поле должно удовлетворять некоторому уравнению в частных производных. Однако таким уравнением поле однозначно не определяется. Говоря физически, закон взаимодействия значений поля в соседних участках пространства и интервалах времени ещё не определяет конкретного физического процесса изменения поля. Например, для однозначного выяснения вопроса о том, как меняется температура в квартире, мало знать, что тепло передаётся путём теплопроводности. Надо ещё выяснить, какая температура была в квартире в начале интересующего нас периода времени, каковы условия теплообмена внутренности квартиры с её «внешностью»: холодно за окнами или жарко, открыты они или нет, из чего сделаны стены. Говоря математически, надо добавить к уравнению краевые условия, т. е. условия на границе пространственной области, в которой рассматривается искомое поле, а также условия в начальный момент времени, если поле зависит от времени. При этом краевые условия надо формулировать так, чтобы они не оказались противоречивыми и тем самым исключающими существование решения задачи, с одной стороны, и чтобы их не было слишком мало для однозначности решения — с другой. Это уже знакомые нам вопросы существования и единственности решения.

Говорят, что с известным физиком Э. Ферми случилась такая история. В его квартире было холодно, и жена предложила вставить вторые рамы. Поскольку Э. Ферми был человеком науки, он решил сначала теоретически рассчитать, какой эффект дадут эти рамы. Расчёты показали, что эффект незначителен. Жена не прислушалась к этим доводам и всё-таки вставила рамы. В квартире стало заметно теплее. Э. Ферми удивился, вернулся к расчётам и обнаружил ошибку.

Как добиться выполнения поставленных требований и откуда брать краевые условия? Брать их следует из физических закономерностей, но применённых не к внутренним участкам области определения поля, а к поверхностям контакта этой области и её внешности. Например, колебание струны — это типичная задача об эволюции чисто механической системы. Физикам известно, что для знания процесса такой эволюции необходимо задание начального положения и начальных скоростей всех элементов системы. Отсюда вытекают стандартные начальные условия для уравнения колебаний струны (3.1):

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \tag{3.3}$$

где $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — заданные функции. Если же говорить об уравнении теплопроводности (3.2), то для него постановка двух таких независимых условий приведёт к отсутствию решения. На этот раз рассматривается процесс не механической, а молекулярно-кинетической природы. В таких случаях надо ограничиться одним начальным условием $u(x,0) = \varphi_0(x)$.

Нередко в физических задачах оказывается естественным предположение о бесконечной длине колеблющейся струны или теплопроводного стержня. В этом случае условия на границе уже не требуются, процесс определяется только начальными условиями, и мы получаем так называемую *задачу Коши*.

Что касается граничных условий для струны или стержня конечных размеров, то для каждого из двух обсуждаемых уравнений они имеют математически одинаковую структуру, хотя физически различное происхождение: это либо задание значения поля на границе (известны отклонения струны от положения равновесия на её концах, известна температура внешней среды на концах стержня) либо задание значений производной поля u_x

на концах (это сила натяжения струны, поток тепла — в задаче о теплопроводности в стержне), либо, наконец, задание на границе некоторой комбинации значений самого поля и его производной. Последний вариант возникает, когда условия силового или энергетического взаимодействия рассматриваемого поля с окружающей средой достаточно сложны.

Если физики ошибутся в постановке дополнительных условий, то математики рано или поздно их поправят, выяснив, что при данных условиях задача не имеет решения или имеет не одно решение.

Совокупность уравнения в частных производных и надлежащим образом выбранных краевых условий называется *краевой задачей* и составляет основной объект изучения математика — специалиста по математической физике. Мы пояснили это понятие на самых простых примерах. Набор краевых задач, которые ставит современная наука перед исследователем, исключительно широк и разнообразен, задачи эти сложны. Достаточно привести в качестве примеров задачи, связанные с системой уравнений Навье–Стокса в механике вязкой жидкости, Максвелла — в электродинамике, Шрёдингера — в квантовой механике, Эйнштейна — в общей теории относительности. Практически все достижения в этих областях науки связаны с разработкой новых методов решения краевых задач. «Дифференциальное уравнение в частных производных вошло в теоретическую физику в качестве служанки, но постепенно стало госпожой», — писал А. Эйнштейн. При этом многое в решении прикладных краевых задач всё ещё остаётся неясным. Неточность метеорологических прогнозов в значительной степени обусловлена сложностью уравнений Навье–Стокса, так что по-прежнему справедлив полезный совет Козьмы Пруткова: «Даже летом, отправляясь в вояж, бери с собой что-либо тёплое, ибо можешь ли ты знать, что случится в атмосфере».

ПЕРЕСТРОЙКА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Теперь мы достаточно образованы, чтобы попытаться обсудить вопрос о том, какие же проблемы и каким способом решил математик, с которым мы познакомились в начале беседы, академик С. Л. Соболев. Для этого вернёмся к выписанному выше уравнению струны (3.1), которое должно решаться с начальными условиями (3.3). Предположим, что концы струны, находящиеся в точках $x = 0$ и $x = l$, закреплены, так что граничные условия имеют вид $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Традиционно и естественно под решением такой краевой задачи понималась функция $u(x,t)$, определённая внутри и на границах области $0 \leqslant x \leqslant l, t > 0$, непрерывная в этой области вместе с границей и имеющая внутри области непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Кроме того, заданные функции $a^2(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ также предполагались непрерывными. Совершенно понятно, зачем нужна непрерывность самого поля и его первых производных внутри области: иначе просто не будут существовать вторые производные, входящие в уравнение (3.1), т. е. нельзя будет даже осуществить подстановку поля в него, чтобы проверить, удовлетворяется ли уравнение. Но зачем требовать непрерывности вторых производных? Не достаточно ли их существования? Точно так же, зачем требовать непрерывность заданных функций $a^2(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $f(x,t)$?

Оказывается, эти требования вытекают из способа вывода дифференциального уравнения колебаний струны. Оно получается применением закона сохранения импульса к произвольному участку $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ струны и произвольному интервалу времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. В результате возникает некоторое интегральное соотношение, содержащее функцию $u(x,t)$ и её производные первого порядка под знаком интеграла. Затем, чтобы вместо интегрального соотношения получить значительно более удобное для анализа классическими методами дифференциальное уравнение, интегралы преобразуются с помощью интегрирования по частям, и соотношение приводится к виду

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[u_{tt}(x,t) - a^2(x)u_{xx}(x,t) - f(x,t)\right] = 0. \tag{3.4}$$

На этом этапе требуется, чтобы выражение в квадратных скобках было, если и не непрерывным, то во всяком случае интегрируемым. Наконец, наступает последний этап. Пользуясь произвольностью интервалов интегрирования $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, можно сделать вывод о тождественном обращении в нуль подынтегральной функции. Для этого заключения и требуется предположение о непрерывности подынтегральной функции, т. е. вторых частных производных поля $u(x,t)$, а также функций $a^2(x)$, $f(x,t)$.

Итак, в классической постановке исходные данные рассматриваемой краевой задачи должны быть непрерывными, а решение её — дважды непрерывно дифференцируемым. Однако такое описание физического процесса колебаний струны обладает существенным неудобством. Во многих случаях указанные ограничения на данные задачи не выполняются, но сам процесс благополучно происходит, что фиксируется экспериментально. Описать же его с помощью классической постановки краевой задачи мы не в состоянии, так как решение задачи просто не существует в классе функций с непрерывными вторыми частными производными.

Пусть, например, струна составлена из двух кусков разной плотности, т. е. коэффициент $a^2(x)$ в уравнении (3.1) представляет собой разрывную кусочно постоянную функцию. Можно показать, что в этом случае дважды непрерывно дифференцируемого решения уравнения (3.1) не существует. Другой вариант отсутствия классического решения краевой задачи получаем в случае, когда коэффициент постоянен, но в начальном положении струна имеет форму ломаной, в вершинах которой функция $\varphi_0(x)$ недифференцируема. Аналогичная ситуация возникает при разрывной начальной скорости $\varphi_1(x)$; физически это соответствует удару в начальный момент времени по небольшому участку струны.

Таким образом, многие практически важные задачи математической физики не могут быть решены в классической постановке. Это привело математиков начала XX века к необходимости как-то изменить само понятие решения, приблизив его к физической реальности. Определённые шаги в этом направлении делали один из учителей С. Л. Соболева ленинградский профессор Н. М. Гюнтер, в США К. О. Фридрихс, во Франции Ж. Лере и другие математики. Однако определённо можно сказать, что систематическая «перестройка» математической физики, освободившая её от тесных рамок классических постановок задач и давшая мощный импульс развитию науки, началась с опубликованных в 30-х годах XX века работ молодого советского математика С. Л. Соболева.

Попытаемся по возможности проще, без особой общности и строгости, описать идею, использованную С. Л. Соболевым при введении нового понятия решения краевой задачи. При этом будем ориентироваться на знакомую нам краевую задачу для уравнения колебаний струны. Вспомним, что физически естественная часть вывода уравнения струны кончается там, где получается интегральное соотношение (3.4) для поля $u(x,t)$. Далее уже используется искусственное, математически удобное предположение о непрерывности подынтегральной функции. Как уйти от него? Перепишем соотношение (3.4) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[u_{tt}(x,t) - a^2(x)u_{xx}(x,t) - f(x,t)\right] V(x,t) = 0, \quad (3.5)$$

где $V(x,t)$ — характеристическая функция (индикатор) множества $S = \{x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$, т. е. функция, равная единице на этом множестве и нулю вне него.

Немного фантазии сначала и математической техники потом, и можно показать эквивалентность двух утверждений: «написанное равенство верно для любого множества S» и «оно верно для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции $V(x,t)$». Под финитной понимается функция, тождественно равная нулю вне множества конечных размеров. Второе утверждение значительно удобнее для наших целей, чем первое. Теперь проведём в полученном соотношении интегрирование по частям в сторону понижения порядка производных поля $u(x,t)$ и найдём

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \left[V_{tt}(x,t) - \left(a^2(x)V(x,t)\right)_{xx} - f(x,t)\right] dx\, dt = 0.$$

Итак, соотношение выполняется для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции $V(x,t)$. В такую формулировку физического закона колебания струны уже не входят никакие производные искомого поля $u(x,t)$. Функция $u(x,t)$, удовлетворяющая этому интегральному тождеству относительно $V(x,t)$, и называется *обобщённым решением* той краевой задачи для уравнения колебаний струны, которую мы рассматриваем.

Преимущества такого определения очевидны. Ему может удовлетворить функция, вовсе не имеющая производных, и даже функция, не определённая в некоторых точках. Тем самым класс функций, среди которых ищется решение краевой задачи, сильно расширяется. И это не противоречит физическому пониманию задачи, которое в конечном счёте определяется возможностями и нуждами физических измерений. Ведь понятие поля — это тоже математическая абстракция. Реально в эксперименте или технологическом устройстве фиксируются и имеют смысл не значения поля в отдельной точке пространства и в отдельный момент времени, а интегральные, осреднённые характеристики: массы, количества энергии или работы, расходы. Другими словами, реальный смысл имеют не сами поля, а определяемые ими функционалы, или, проще, интегралы их произведений на различные функции. А для интегралов, как известно, дифференцируемость и даже существование всюду подынтегральной функции не важны.

На первый взгляд, определение обобщённого решения имеет и недостатки. Вместо классически элегантного дифференциального уравнения возникает явно «менее красивый» набор интегральных соотношений с откуда-то взявшимися непривычными финитными функциями произвольного вида. Неясно, какими способами находить конкретное обобщённое решение. На это можно ответить, что мы лишь показали на примере, каким способом вводится новое понятие обобщённого решения. Конечно, новые, совсем не похожие на традиционные определения требуют разработки новой теории, нового математического аппарата, новых методов решения конкретных задач.

ДИТЯ ВЫРОСЛО ТАЛАНТЛИВЫМ

Вернёмся к уже цитированному нами в начале главы докладу С. Л. Соболева о математике: «Нашу науку можно сравнить с растущим деревом, ветки и веточки которого — это отдельные области и теоремы (кстати сказать, существует даже математическое абстрактное понятие «дерево» для описания аналогичных структур). Бывает, что две или больше ветвей математики срастаются друг с другом. Тогда от них берут начало побеги, для которых родительскими служат не одна, а две или больше математических дисциплин». Новый побег — теория обобщённых функций — оказался детищем исключительно плодотворного союза двух областей математики — уравнений математической физики и функционального анализа. «Дитя» выросло настолько талантливым, что каждый из «родителей» охотно приписывает его достижения себе. Во всяком случае, раздел «Обобщённые функции» включается во все современные руководства и по уравнениям математической физики, и по функциональному анализу.

В функциональном анализе функции тех или иных классов рассматриваются как точки функциональных пространств, а числовые функции, определённые на этих пространствах, называются *функционалами.* В пионерских работах С. Л. Соболева, опубликованных в 1935–1936 годах, и была впервые предложена новая замечательная концепция — решение дифференциального уравнения в частных производных надо рассматривать как *обобщённую функцию* (функционал). Созданное С. Л. Соболевым понятие обобщённой функции вызвало к жизни новые методы, позволившие решить ряд давно стоявших проблем математической физики, придать окончательную форму многим ранее полученным результатам, поставить и решить ряд новых задач. Новый аппарат и связанные с ним понятия и методы, особенно бурно развивавшиеся в 50-х годах XX века в работах Лорана Шварца и его школы, изменили в короткий срок облик многих разделов математической физики.

Уравнение колебаний струны (3.1) было выведено Даламбером в 1747 году. Он же получил общее решение, содержащее две произвольные функции. Подобрав эти функции так, чтобы удовлетворялись начальные условия, Эйлер, выражаясь современным языком, решил задачу Коши. Отметим, что этот результат Эйлера почему-то называют решением Даламбера. Между выдающимися математиками возник спор, какие функции можно считать решением уравнения. Фактически спор шёл о том, что такое функция. Эйлер считал, что функция может зависеть от переменной так, как ордината точки, лежащей на «начертанной свободным движением руки» кривой, от её абсциссы. Даламбер не соглашался, полагая, что функция должна задаваться аналитическим выражением. Чуть позже в спор вмешался Д. Бернулли, утверждавший, что всегда можно подобрать тригонометрический ряд, удовлетворяющий и уравнению, и начальным и краевым условиям в случае ограниченной струны.

Общее определение функции как соответствия принадлежит Н.И. Лобачевскому (1834 год). Вопрос об условии представимости числовых функций тригонометрическими рядами рассматривали впоследствии Фурье, Дирихле, другие математики XIX века. Попытки построить строгую теорию тригонометрических рядов во многом стимулировали развитие современной теории меры, теории множеств, теории функций. Под сильным влиянием этих разделов математики формировался функциональный анализ.

Методы функционального анализа были использованы С.Л. Соболевым для того, чтобы ввести новые понятия обобщённой функции и обобщённого решения уравнения (3.1). В полном соответствии с принципами диалектики, математика вернулась к тем же понятиям и уравнениям, но на качественно новом уровне. Виток спирали развития занял около 200 лет. Будет ли ещё один виток?

Идеи теории обобщённых функций распространились и на другие разделы математики — обыкновенные дифференциальные уравнения, теорию представлений групп, теорию случайных процессов, вариационное исчисление и даже на теорию чисел.

Они используются в механике, теоретической физике, ряде инженерных дисциплин. Уже много лет теория обобщённых функций входит в программы университетов и технических вузов, хотя всего полвека назад обобщённые функции воспринимались с таким же недоверием, как комплексные числа в эпоху Возрождения. «В настоящее время теория обобщённых функций далеко продвинута вперёд, имеет многочисленные применения в физике и математике и прочно вошла в обиход математика, физика и инженера», — пишет известный математик академик В.С. Владимиров.

Вклад С.Л. Соболева в качественное преобразование математической физики XX века не ограничился введением в науку понятий обобщённого решения краевой задачи и обобщённой функции как функционала. Им были заложены основы теории, построенной на этих понятиях. Сами по себе постановки краевых задач в тот момент не требовали подобной теории. Но фантазия математика, живущего в своём абстрактном мире, идёт дальше, чем модели реальных явлений. Мир современных математических представлений и объектов широк — шире, чем это нужно в практических целях. Впрочем, дадим слово самому академику:

«Законы развития математики определяются двумя главными факторами.

С одной стороны, это требования жизни, запросы техники, запросы со стороны других наук, с другой стороны — внутренние причины, заключённые в ней самой.

Если Ньютон создавал своё учение о флюксиях и флюентах, т. е. дифференциальное и интегральное исчисление, исходя из задач практики, из желания понять законы движения, в частности законы движения небесных тел, то Лейбниц пришёл к той же теории, стремясь дополнить и превратить в стройное целое ряд отрывочных идей, оставшихся не до конца доработанными его замечательными предшественниками, такими, например, как Пьер Ферма.

Есть и ещё примеры тому, как внутренние законы развития математической науки, подчас действующие без всяких внешних поводов или влияний, вызывали к жизни грандиозные по своему значению ветви математической науки».

Одним из примеров и может служить упомянутая выше теория обобщённых функций как функционалов. Дело в том, что сами функционалы естественным образом классифицируются, образуя определённые нормированные пространства, они-то и стали для С.Л. Соболева объектом изучения. В результате было установлено, что различные пространства обобщённых функций связаны между собой внешне простыми, но отнюдь не тривиальными связями. Теоремы, выражающие эти связи, называют *теоремами вложения Соболева.* Сами упомянутые пространства в мировой математической литературе называют *пространствами Соболева* либо соболевскими пространствами. «Соболевские пространства служат в настоящее время основным инструментом в теории дифференциальных уравнений с частными производными», — отмечают английские математики В. Хатсон и Дж. Пим, авторы монографии «Приложения функционального анализа и теории операторов», изданной в 1980 году. Из фамилий математиков делают прилагательные в редких случаях, в этом смысле С. Л. Соболев стоит в одном ряду с основателями функционального анализа Д. Гильбертом и С. Банахом.

Новаторские идеи, смело введённые в науку академиком С. Л. Соболевым, бурно развились и совершенствовались. В этом плане, как уже говорилось, много сделала французская математическая школа, возглавляемая Лораном Шварцем. При знакомстве с историей развития новых концепций математической физики чётко просматриваются национальные черты двух математических школ — российской и французской. Это, с одной стороны, стремление к революционной ревизии основ науки (вспомним Н. И. Лобачевского и А. Н. Колмогорова), с другой — блестящее мастерство математической формализации, безупречность дедуктивных построений (Ж. Л. Лагранж, О. Коши, Н. Бурбаки).

Мы больше не будем в этой беседе писать формулы и пытаться перекладывать на общечеловеческий язык то, что излагается мудрёным языком современной математики и потому может быть понято до конца только посвящёнными. «То, что я понял, прекрасно, из этого я заключаю, что остальное, чего я не понял, тоже прекрасно», — так Сократ комментировал труды Гераклита. Будем надеяться, что читатель последует примеру Сократа, и обратимся к другой стороне дела. Спросим себя: как может выглядеть, с чисто человеческой стороны, личность математика, всю жизнь напряжённо размышляющего об абстрактных понятиях, далёких от того, что волнует большинство окружающих его людей? Если мы попробуем поближе познакомиться с Сергеем Львовичем Соболевым, нас ждут некоторые неожиданности.

«МНЕ БЫЛО ВСЁ ИНТЕРЕСНО...»

Всем известен миф о мальчике-вундеркинде, будущем знаменитом математике, лет в десять-двенадцать освоившем премудрости высшей математики и поражающем этим окружающих.

Вспомним, например, Гаусса или Винера. Но жизнь не всегда похожа на миф, раннего интереса к математике Серёжа Соболев не проявлял. «Мне было восемь лет, когда мой отец, Лев Александрович, решил заняться со мной арифметикой, купив учебник Сахарова», — вспоминал Сергей Львович. Учебник был пройден за неделю.

Серёжа Соболев. 1911 год

Лев Александрович за участие в революционных выступлениях был исключён из Петербургского университета и отправлен в солдаты. Позже, сдав экстерном экзамены за юридический факультет, он стал присяжным поверенным. Человек высокой культуры, он писал и издавал стихи, его относили к последователям поэта-символиста Д.К. Бальмонта. С Натальей Георгиевной, матерью Сергея Львовича, он познакомился в Саратове. Студентка Бестужевских курсов и член большевистской фракции РСДРП, она была в 1901 году выслана в Саратов за участие в студенческой демонстрации. После революции Наталья Георгиевна окончила медицинский институт, работала на эпидемиях холеры, принимала участие в первых опытах по определению канцерогенных свойств веществ в Ленинградском медицинском институте. Наталья Георгиевна рано потеряла мужа, на её плечи легли все заботы о воспитании детей.

1919 год, разгар Гражданской войны. Спасаясь от голода, семья переезжает в Харьков, на родину матери. Будущему академику приходится пасти трёх коз, главных кормилиц семьи. Спускаясь в окружающие дом овраги, он прихватывает с собой школьные учебники. Двоюродный брат, который был на четыре года старше, уже занимался математикой. «Я его непрерывно интервьюировал: что такое квадратные уравнения, что такое прогрессия, — рассказывает Сергей Львович. — А кончилось всё тем, что брат начал приносить мне задачи, и я их решал. Для меня это — первое чувство удовлетворения от математики, к которому примешивалось немного мальчишеского честолюбия».

Один год подготовительных курсов Харьковского вечернего рабочего техникума, возвращение семьи в Петроград в 1923 году. И последний класс школы в Петрограде, которую он закончил с отличием. «Мне было всё интересно: математика, физика, химия, медицина, литература, — вспоминал Сергей Львович, — но учительница сказала, что я должен обязательно поступить на математический факультет». «Это твоя дорога, перестань думать о другом», — говорила она».

Однако он не перестал. И продолжал разрушать другое ходячее представление: математик всецело углублён в свои формулы и может себе позволить разве лишь какое-нибудь хобби в свободные минуты. В пятнадцать лет он начал профессиональное музыкальное образование, поступив в Первую государственную художественную студию по классу фортепьяно. И лишь через год, продолжая учёбу в студии, стал студентом физико-математического факультета Ленинградского государственного университета.

Жизнь студента Соболева была необычайно насыщенной. Математик Соболев слушал в университете лекции профессоров Н. М. Гюнтера, В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца и пытался во всём услышанном разобраться досконально. Уже на втором курсе он обратил на себя внимание педагогов. После лекции профессора Н. М. Гюнтера по уравнениям с частными производными первого порядка он подошёл к лектору с вопросом. Изложенная на лекции теорема, про которую говорилось, что она доказана профессором Салтыковым, вызывала сомнения у студента Соболева. Узнав, где всё это опубликовано, юноша не только нашёл ошибки в доказательствах, но и построил примеры, противоречащие утверждениям автора. Первая печатная работа С. Л. Соболева «Замечания по поводу работ Н. М. Салтыкова...» появилась в «Докладах Академии наук СССР» в 1929 году. Её пожелтевший оттиск с трогательным посвящением близким и сейчас хранится в семейном архиве.

А музыкант Соболев должен был торопиться в студию, где ждали клавиры концертов Римского-Корсакова, Глазунова, Шопена. Была и сугубо личная причина спешить в студию: именно там произошло знакомство с будущей женой. На вечер они часто брали стоячие билеты в филармонию, — невозможно было пропустить концерты, на которых звучала волшебная музыка Бетховена, Мусоргского, Бородина, Скрябина.

Но и этого было мало, чтобы утолить духовную жажду студента Соболева. Он читал массу книг по философии, политэкономии, биологии, медицине, увлекался поэзией Блока, Ахматовой, Маяковского и сам писал стихи. Его интересовали и изобразительное искусство, и фотография, и шахматы. Другом и партнёром за шахматной доской был талантливый химик Б. А. Никитин,

Сергей Соболев. Новая программа. 1924 год

работавший впоследствии в Радиевом институте и рано ушедший из жизни из-за тяжёлой лучевой болезни. Тесные дружеские отношения на всю жизнь связали С. Л. Соболева с однокурсником С. А. Христиановичем, ставшим позднее крупным специалистом в области механики, академиком, Героем Социалистического Труда. Друзья часто собирались у Соболевых в небольшой мансарде под самой крышей многоэтажного дома. Говорили о жизни, о математике, о музыке.

Между тем, Сергей Соболев уже сделал свой выбор. Его по-прежнему волновали новые звучания Шостаковича и Стравинского, но гораздо больше занимали проблемы аналитических решений системы дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, принимающих заданные значения на координатных осях. Это была тема его дипломной работы, опубликованной в 1930 году в «Докладах Французской академии наук». Художественную студию он успешно закончил, но даже не пришёл получать диплом, ведь дело его жизни определилось.

Конечно, математика победила. Но и в недрах этой науки интересы и темы работ С. Л. Соболева весьма разнообразны. Правда, одна черта их объединяет: все его работы направлены на решение важных прикладных задач. Может быть, в этом «виноват» Ленинградский университет. Для ленинградской математической школы очень характерна связь рассматриваемых математических проблем с принципиальными вопросами естествознания и техники.

МЕДНЫЕ ТРУБЫ

После окончания университета — три года работы в теоретическом отделе Сейсмологического института АН СССР под руководством В. И. Смирнова. Основное направление исследований — распространение волн в упругих неоднородных средах, на языке математики это задача Коши для гиперболических уравнений. Учитель и ученик работали на равных: и идеи и исполнение — всё вместе (учителю было тогда 42 года, а ученик был вдвое моложе). К тому времени С. Л. Соболевым было опубликовано более 30 работ, результаты одной из них докладывались в 1930 году на Первом Всесоюзном математическом съезде в Харькове. Присутствующий на съезде известный французский математик Ж. Адамар, решавший в своё время аналогичную задачу по-другому, пишет С. Л. Соболеву после съезда: «Я буду очень счастлив, молодой коллега, если Вы будете держать меня в курсе дальнейших Ваших работ, чрезвычайно меня заинтересовавших».

В 1932 году Сергей Львович переходит в отдел дифференциальных уравнений Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР. В это время идёт напряжённая работа над статическими задачами теории упругости, краевыми задачами для эллиптических уравнений, теорией обобщённых функций и обобщённых решений дифференциальных уравнений, над теоремами вложения. Сделаны три блестящих доклада на Втором Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде, название одного из них — «Обобщённые решения волнового уравнения».

Научные достижения С. Л. Соболева получили признание. В 1933 году его избирают членом-корреспондентом АН СССР. Стремительный взлёт 1935–1936 годов, когда молодой учёный ввёл в науку обобщённые функции и предложил новую концепцию решения дифференциальных уравнений, породил неслыханную для теоретика популярность. В 1937 году его избирают депутатом Верховного Совета РСФСР первого созыва и депутатом Московского городского Совета. Газеты писали о нём много и восторженно, называли выдающимся математиком, предсказывали большое будущее. Восторгались журналисты в центральных газетах, музыковеды в своих специальных изданиях. Восторгались и коллеги: статья П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, опубликованная в июне 1938 года в газете «Московский университет», называлась «Яркий талант». Самый молодой академик (выборы происходили в 1939 году) стал национальной гордостью. «Мы будем такими полярниками, как Папанин, такими лётчиками, как Чкалов, такими математиками, как Соболев, такими шахтёрами, как Стаханов, такими поэтами, как Маяковский», — говорилось в приветствии пионеров Москвы XVIII съезду ВКП (б), состоявшемуся в 1939 году.

Много лет спустя в беседе с журналистами Сергей Львович довольно скептически оценивал шумиху, поднятую вокруг его имени. «Я считаю, что мне просто повезло, — говорил он. —

Академики С. А. Чаплыгин, С. Л. Соболев, А. Н. Крылов

Тогда ведь было принято начинать хвалить какого-нибудь одного человека. Так и меня хвалили безудержно. Мне это неприятно, я всё-таки считаю, что сам человек — лучший судья своих работ. Что касается моих работ, то тогда никто ещё не мог разобраться, что из этого вырастет, выбран в академию я был в кредит». О мнении профессионалов Сергей Львович отзывался так: «Они не специалисты, П. С. Александров тогда занимался топологией, А. Н. Колмогоров — теорией вероятностей, в узкой области уравнений математической физики ни один, ни другой непосредственно не работали». Позволим себе не согласиться с мнением академика. Такие выдающиеся математики, как П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, и не будучи узкими специалистами, вполне могли предвидеть тот революционный переворот, который под влиянием работ С. Л. Соболева произойдёт в математической физике через 10–15 лет.

Все последующие годы послужили доказательством того, что одно из самых трудных испытаний — испытание успехом — оказалось по плечу молодому академику и никак не отразилось на его характере. «Переоценить себя я бы никогда не хотел. Мне казалось, самое страшное — это почить на лаврах, думать о себе как об известном человеке. Гораздо важнее, да и приятнее то, что удалось решить какую-ту задачу, поставить правильно какую-то научную проблему и с ней справиться», — говорил Сергей Львович. Таких проблем ему ещё предстояло ставить и решать великое множество.

НА ВОЙНЕ КАК НА ВОЙНЕ

Война. Руководство страны понимало, что интеллектуальную элиту нужно сохранить любой ценой. И уже через месяц после начала войны издаётся приказ об эвакуации из Москвы институтов Академии наук СССР. На молодого академика С. Л. Соболева возложены обязанности директора Математического института имени В. А. Стеклова. Организовав эвакуацию сотрудников и их семей в Казань, сам Сергей Львович остался в Москве. Ему приходилось дежурить на крышах в бригадах противовоздушной обороны, тушить пожары, заниматься отправкой в Казань богатейшей институтской библиотеки. В октябре 1941 года, когда немецко-фашистские войска стояли у ворот Москвы, Государственный Комитет Обороны (ГКО) обратил внимание на то, что не все крупные учёные эвакуировались. Последовал строгий приказ немедленно покинуть Москву академикам П. Л. Капице, Н. Н. Семёнову, С. Л. Соболеву, члену-корреспонденту АН СССР А. И. Алиханову. Напомним, что впоследствии выдающийся физик П. Л. Капица и один из основоположников химической физики Н. Н. Семёнов стали дважды Героями Социалистического

Труда, Нобелевскими лауреатами, а А.И. Алиханов — академиком, Героем Социалистического Труда, крупнейшим специалистом в области ядерной физики и космических лучей.

В Казани Сергей Львович провёл два года. В сложных условиях эвакуации он как директор института много сделал для организации исследований, нужных фронту. С участием Сергея Львовича решались задачи по расчёту артиллерийской стрельбы, бомбометания.

В докладе о работе Академии наук СССР в годы войны академик П.Л. Капица отмечал: «Основанное только на теоретических предпосылках улучшение формы снаряда без дополнительной затраты пороха и увеличения прочности ствола орудия позволило увеличить дальность стрельбы примерно на 10 %».

Приходилось решать и сложные житейские проблемы, выгружать с барж дрова, организовывать быт сотрудников. Характерный штрих — семье не хватало тёплой одежды. Найденный выход из положения был типично соболевским. Сначала сам Сергей Львович научился вязать и связал себе свитер, затем научил этому ремеслу детей.

В 1945 году правительство США собрало ведущих физиков-атомщиков, среди них были Э. Лоуренс, Р. Оппенгеймер, Э. Ферми. Обсуждался один вопрос: когда Советский Союз сможет сделать атомную бомбу? Физики были единодушны в ответе: не раньше, чем через 10 лет. Свой прогноз составило и ЦРУ: через 15–20 лет. Но уже в сентябре 1949 года президент Г. Трумэн сообщил физикам и экспертам: «У нас есть доказательства, что недавно в СССР произведён атомный взрыв». Президент был прав.

К 1943 году, когда Математический институт возвратился в Москву, физики убедили И.В. Сталина в том, что в США и Германии ведутся исследования по созданию атомного оружия. Приказом председателя ГКО СССР организуется так называемая лаборатория № 2, впоследствии переименованная в Институт атомной энергии. Директором лаборатории назначен академик И.В. Курчатов, главным (первым) заместителем директора и председателем Учёного Совета — академик С.Л. Соболев. С этого момента фамилия С.Л. Соболева надолго исчезла со страниц газет. В обстановке глубочайшей секретности велись интенсивные работы по созданию атомного щита страны. Сергей Львович работал вместе с известным физиком академиком И.К. Кикоиным и занимался расчётом сложных систем получения кондиционного ядерного горючего. Прежде чем сформулировать математическую постановку задач, требовалось детально разобраться в физических процессах, которые до этого никогда не изучались.

Сложнейшие задачи математической физики надо было «довести до числа», результаты — до воплощения в металле. Специальные бригады занимались только счётом, инструментами служили логарифмические линейки и арифмометры. Сергей Львович придумывал специальные методы счёта и контроля результатов. Всё это было делом государственной важности, и сотрудники лаборатории остро ощущали личную ответственность за его судьбу. В этот период (до 1952 года) Сергей Львович месяцами не бывал дома, уезжал в далёкие и длительные командировки. В Москве часто работал по ночам, дети видели его только по воскресеньям. Если и выдавались свободные вечера, то, уходя из дома, он должен был сообщить, где его можно будет найти. Случалось, что посыльный вызывал его из театра во время спектакля. «Тогда было такое ощущение, — вспоминал Сергей Львович, — что если не выйдет наша работа, то неизвестно, что станет со страной. Но у всех у нас была уверенность, что выйдет, обязательно выйдет». Вышло. В декабре 1946 года атомный реактор заработал. Менее чем через год после пуска реактора правительство заявило о том, что секрета атомной бомбы уже не существует. В стране началось строительство промышленных атомных реакторов. В разработке технологии выделения из урана плутония — важнейшего атомного взрывчатого материала — важную роль сыграл Б. А. Никитин, друг юности С. Л. Соболева.

29 августа 1949 года на Семипалатинском полигоне была успешно испытана первая советская атомная бомба. Учёные и специалисты, стоявшие во главе атомного проекта, были отмечены различными наградами. В 2003 году исполнилось 100 лет со дня рождения И. В. Курчатова. В книге, посвящённой этому юбилею, был впервые опубликован следующий документ.

Благодарственное письмо Л. П. Берия, учёных и специалистов И. В. Сталину за высокую оценку работы в области производства атомной энергии и создания атомного оружия

18 ноября 1949 г.

Дорогой Иосиф Виссарионович!

Горячо благодарим Вас за высокую оценку нашей работы, которой Партия, Правительство и лично Вы удостоили нас.

Только повседневное внимание, забота и помощь, которые Вы оказывали нам на протяжении этих 4 с лишним лет кропотливой работы, позволили успешно решить поставленную Вами задачу организации производства атомной энергии и создания атомного оружия.

Обещаем Вам, дорогой товарищ Сталин, что мы с ещё большей энергией и самоотверженностью будем работать над дальнейшим развитием порученного нам дела и отдадим все свои силы и знания на то, чтобы с честью оправдать Ваше доверие.

	Л. Берия
Академик	И. Курчатов
Чл.-кор. АН СССР	Ю. Харитон
	Б. Ванников
Академик	А. Бочвар
Чл.-кор. АН СССР	А. Виноградов
	А. Завенягин
Профессор, доктор технических наук	Н. Доллежаль
	М. Первухин
Директор комбината № 817	Б. Музруков
Главный инженер комбината	Е. Славский
Нач. завода № 2 комбината № 817	Б. Громов
Чл.-кор. АН СССР	Б. Никитин
	В. Махнев
Академик	И. Черняев
Научный руководитель завода № 1	В. Фурсов
Академик	С. Соболев
Чл.-кор. АН СССР	А. Александров
Чл.-кор. АН СССР	Я. Зельдович
Нач. Конструкторского бюро	П. Зернов
Профессор, доктор	К. Щелкин
Конструктор	Н. Духов
Конструктор	В. Алфёров
Академик	А. Фрумкин
Академик	Н. Семёнов
Академик	Л. Ландау
Кандидат физико-математических наук	М. Садовский
Академик	И. Петровский
Чл.-кор. АН СССР	А. Тихонов
Директор завода № 12	А. Каллистов
Главный инженер завода № 12	Ю. Голованов
Директор института	В. Шевченко

Письмо подписано теми, кто руководил работой над атомным проектом. Должности и звания тех, кого И.В. Сталин знал и назначил на соответствующие должности лично, не расшифрованы. Это руководитель Специального комитета заместитель председателя Совета Народных Комиссаров СССР Л.П. Берия, члены Специального комитета нарком боеприпасов Б.Л. Ванников, заместитель наркома внутренних дел А.П. Завенягин, заместитель председателя Совета Народных Комиссаров СССР М.Г. Первухин и секретарь Специального комитета В.А. Махнев.

Остальные подписавшие письмо — учёные, конструкторы, организаторы производства. Математиков здесь трое — С.Л. Соболев, И.Г. Петровский, будущий ректор МГУ им. М.В. Ломоносова и А. Н. Тихонов, о котором пойдёт речь в следующей беседе. Там же мы расскажем и о некоторых выдающихся физиках — авторах этого письма.

Работы, проведённые лабораторией, обеспечили безопасность страны. А личный вклад академика С. Л. Соболева был отмечен двумя Государственными премиями и званием Героя Социалистического Труда. Формулировка указа от 8 января 1952 года о награждении — «за исключительные заслуги перед государством по выполнению специального задания Советского правительства».

С работой в лаборатории был связан следующий любопытный эпизод. Как-то в закрытый изнутри кабинет, где работал Сергей Львович, постучали. Попытка открыть дверь не удалась, сломался замок. По тем суровым временам и нравам нежелание или невозможность открыть дверь могли быть истолкованы по-всякому. Поэтому Сергей Львович ногой выбивает дверь, она открывается, но нога повреждена. Врачи накладывают гипс и предписывают постельный режим. В течение шести недель Сергей Львович находится дома, у него впервые появляется возможность свести воедино результаты 15-летней работы, разбросанные по статьям и конспектам лекций. Так в 1950 году появилась книга «Некоторые применения функционального анализа в математической физике», переведённая позднее на многие языки и сыгравшая важную роль в «перестройке» теории дифференциальных уравнений с частными производными.

ДВАЖДЫ ДВА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В начале 50-х годов появились первые советские электронно-вычислительные машины. Наибольшей известностью пользовалась машина БЭСМ, в 1952 году она была самой быстродействующей в мире, выполняя 8 тыс. операций в секунду. С новой техникой С. Л. Соболев познакомился в Институте атомной энергии. Он сразу оценил перспективы её использования, понял, что новой технике требуется принципиально новый математический аппарат. Вводить в машины старые методы вычислений было неразумно, нужна была качественно новая вычислительная математика. «Работая в Институте атомной энергии, я приобрёл вкус к вычислительной математике, осознал её исключительные возможности. Поэтому я с удовольствием принял предложение И. Г. Петровского возглавить первую в стране кафедру вычислительной математики Московского университета», — рассказывал Сергей Львович.

Кафедрой вычислительной математики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова С.Л. Соболев руководил с 1952 года по 1959 год. Кафедрой был обеспечен выпуск первых высококвалифицированных специалистов, выполнен ряд крупных научных исследований. На вычислительную математику переключились и собственные научные интересы Сергея Львовича. Основу вычислительной математики составляют методы приближения, понимаемые в самом широком смысле. Разработанный С.Л. Соболевым новый подход состоял в систематическом использовании понятий и теорем функционального анализа. Строгое изучение любых приближений возможно лишь в конкретном функциональном пространстве, только при таком подходе могут быть найдены и скорость сходимости итерационного процесса, и оценка погрешности счёта. Принципиально важным был и цикл работ С.Л. Соболева, посвящённый обоснованиям правильности вычислительного алгоритма.

В 1948 году название статьи ленинградского математика Л.В. Канторовича «Функциональный анализ и прикладная математика» воспринималось как парадоксальное. С трудом верилось, что столь абстрактная ветвь математики может иметь какой-нибудь выход на прикладные задачи. Но уже в 1964 году известный немецкий математик Л. Коллатц в книге «Функциональный анализ и вычислительная математика» пишет: «Сегодня трудно сказать, относится ли, например, функциональный анализ к так называемой чистой математике или к так называемой прикладной». Тому, что функциональный анализ стал языком современной теории численных методов, математика в значительной мере обязана трудам С.Л. Соболева. Сам Сергей Львович говорил, что теорию вычислений сейчас также невозможно представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин.

Когда узнаёшь, какими вопросами Сергей Львович занимался одновременно, всюду получая первоклассные результаты, поневоле закрадывается сомнение: было в его, соболевских, сутках 24 часа или больше? Несмотря на чрезвычайную занятость в Институте атомной энергии, он читает лекции в Московском и Ленинградском университетах, руководит аспирантами. С 1943 года по 1958 год С.Л. Соболев совместно с И.Г. Петровским и А.Н. Тихоновым ведёт семинар по уравнениям с частными производными. На этом семинаре воспитывалось новое поколение специалистов по математической физике, его заседания были праздниками для молодых математиков. В 1947 году он издаёт учебник «Уравнения математической физики».

В это же время С. Л. Соболев продолжает заниматься задачами о распространении волн различной природы. Особенно трудными были задачи о колебаниях во вращающейся жидкости. Математическая модель этого процесса — уравнения в частных производных, не разрешённые относительно старшей производной по времени (сейчас их называют уравнениями типа Соболева). Эти исследования положили начало новым большим разделам функционального анализа и математической физики, их интенсивно продолжали ученики — советские и зарубежные математики. Как всегда, работы С. Л. Соболева были нацелены в будущее. Со временем теория получила и новые приложения: помимо расчёта колебаний жидкости внутри летательных аппаратов, это динамика атмосферы и океана, математические модели охраны окружающей среды. В 1986 году Сергею Львовичу совместно с учениками и сотрудниками за многолетний цикл работ «Математические исследования по качественной теории вращающейся жидкости» была присуждена Государственная премия СССР.

ЧАЕПИТИЕ В МОЗЖИНКЕ

Вскоре после войны в подмосковной деревне Мозжинка близ Звенигорода создаётся академический дачный посёлок. Однокурсники и друзья С. Л. Соболев и С. А. Христианович оказываются соседями. По субботам они встречаются у самовара, идёт обсуждение личных проблем и проблем, стоящих перед страной. В одной из таких бесед — дело было осенью 1956 года — разговор зашёл о Сибири. Пресса того времени много писала о необходимости освоения и форсированного развития Сибири и Дальнего Востока. Были приняты решения партии и правительства, разворачивалось строительство новых городов и заводов. Газеты часто цитировали М. В. Ломоносова: «Российское могущество прирастать будет Сибирью».

Академикам было ясно, что развивать в Сибири надо не только промышленность, но и науку. Особенно беспокоило положение с математикой: на 30 млн советских людей, живущих восточнее Урала, приходился один профессор математики — в Томске. На очередное чаепитие был приглашён ещё один сосед — выдающийся математик и механик академик М. А. Лаврентьев. Ещё много раз они встречались втроём, прежде чем созрело решение обратиться в Президиум Академии наук и правительство с планом создания научных центров на востоке страны. Первоначально предполагалось, что исследования будут вестись только по точным наукам — математике, механике, физике.

Но запротестовала Ариадна Дмитриевна Соболева, супруга Сергея Львовича. У неё, кандидата медицинских наук, в таком случае не было бы возможности для научной работы. Коллеги-академики, с которыми встречались и советовались авторы

С. Л. Соболев. Строительство Академгородка. 1960 год

проекта, также высказали свои пожелания. Окончательный вариант предусматривал создание институтов: математики с вычислительным центром, теоретической и прикладной механики, гидродинамики, ядерной физики, автоматики и электрометрии, геологии и геофизики, цитологии и генетики, экспериментальной биологии и медицины, экономики. Позже к ним добавились четыре химических института.

Надо было выбрать место для будущего центра сибирской науки. Вариантов было несколько. Побывав на местах и взвесив все «за» и «против», академики остановились на пригороде Новосибирска. В 1957 году было принято официальное решение о создании Сибирского отделения Академии наук СССР, началось строительство Академгородка. «По нашему замыслу должен был строиться городок, в котором можно было бы обмениваться мыслями не только в своей узкой области, иначе заглохнешь, но и с учёными различных специальностей. Для математики (и для математиков) вновь открылись широкие возможности практического применения. Ну а самое главное — это новое дело. Как в науке, так и в жизни для меня это всегда было особенно привлекательным», — вспоминал Сергей Львович.

Назначенный директором Института математики, он в 1958 году переезжает в Новосибирск. Вслед за Сергеем Львовичем в Новосибирск приехали математики из всех университетских и научных центров страны. В МГУ до сих пор помнят выступления заведующего кафедрой вычислительной математики профессора С. Л. Соболева. Стремительно подходил он к трибуне, и в зал неслись вдохновенные слова о призвании учёного, о могуществе научных идей, о необходимости развивать науку в Сибири. Для многих веским аргументом при принятии решения о переезде в Новосибирск был личный пример С. Л. Соболева, его необыкновенный авторитет, привлекательность его личности. В работе по организации института большую помощь Сергею Львовичу оказал его заместитель, известный алгебраист, член-корреспондент АН СССР А. И. Ширшов. За короткое время Институт математики становится одним из крупнейших математических центров мирового уровня.

Возглавляя Институт математики, С. Л. Соболев заботился о том, чтобы в нём были представлены все важнейшие направления современной математики. Он хотел, чтобы эти направления возглавлялись людьми яркими, талантливыми. «Даже дюжина старательных посредственностей не заменит одного яркого таланта», — считал он. Исследованиями в области геометрии руководил академик А. Д. Александров, в области алгебры и математической логики — академик А. И. Мальцев.

На должность руководителя отдела вычислительной математики Сергей Львович пригласил молодого математика Г. И. Марчука. Сказалась близость научных интересов — Гурий Иванович Марчук, заведующий математическим отделом физико-энергетического института в Обнинске, занимался численными расчётами ядерных реакторов, получил за эти работы Ленинскую премию. В 1964 году Г. И. Марчук возглавил Вычислительный центр — самостоятельный институт, спустя несколько лет стал академиком, а затем и президентом Академии наук СССР.

«ОКОВЫ ТЯЖКИЕ ПАДУТ...»

Сам Сергей Львович никогда не занимался математической экономикой, но хорошо понимал перспективность и важность для страны этого раздела математики. Отдел математической экономики возглавил известный математик Леонид Витальевич Канторович, приглашённый Сергеем Львовичем из Ленинграда.

С. Л. Соболев и Л. В. Канторович были знакомы со студенческих лет. Они вместе, хотя и на разных курсах, учились в Ленинградском университете. Вместе участвовали в работе кружка по теории функций, которым руководил Г. М. Фихтенгольц. Вдвоём они были основными слушателями спецкурса Н. М. Гюнтера по интегралу Стилтьеса. В один день они сделали свои первые доклады на заседании Ленинградского физико-математического общества. Студент Соболев рассказывал об ошибках профессора Н. И. Салтыкова, студент Канторович — о полученных им новых результатах по теории множеств.

В 1938 году к Леониду Витальевичу, к тому времени известному специалисту по функциональному анализу, обратились за консультацией сотрудники Ленинградского фанерного треста. Речь шла о том, как можно рационально распределить пять видов работ по станкам восьми типов. Л. В. Канторович не только решил эту конкретную задачу, но и разработал общие принципы оптимального производственного планирования. Об этих исследованиях он доложил в 1939 году в Ленинградском государственном университете и Ленинградском институте инженеров промышленного строительства. Дополненная стенограмма этих докладов «Математические методы организации и планирования производства», изданная отдельной брошюрой, была первой в стране крупной работой по математической экономике. Впоследствии из этой работы вырос целый раздел современной математики — линейное программирование.

«Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов» — название другой работы математика Л. В. Канторовича, написанной в 1942 году, но изданной только через 17 лет.

Эти работы были отправлены в Госплан СССР вместе с рекомендациями, подписанными академиком А. Н. Колмогоровым и депутатом Верховного Совета РСФСР академиком С. Л. Соболевым. Однако ни авторитет, ни титулы подписавших рекомендации не смогли преодолеть «математикобоязнь» руководящих чиновников. Работы поддержки не получили, так продолжалось до конца 50-х годов XX века.

После образования отдела Л. В. Канторовича в Институте математики экономико-математическими методами стали активно заниматься не только математики, но и экономисты в Институте экономики. Исследования в столь широких масштабах велись в стране впервые. Содружество математиков и экономистов позволило сделать крупный вклад в создание систем перспективного планирования. Были найдены общие принципы и решены конкретные планово-экономические задачи. Заслуги Л.В. Канторовича были признаны сначала внутри страны — он стал академиком и лауреатом Ленинской премии, а затем и во всём мире — в 1975 году ему была присуждена Нобелевская премия по экономике.

Л. В. Канторович

Важную роль сыграл С. Л. Соболев в становлении исследований по кибернетике. Книга Н. Винера «Кибернетика» появилась в 1948 году, кибернетика в ней определялась как наука об управлении и связи в живых организмах, машинах, обществе. К сожалению, в те годы право судить о перспективах развития науки у нас в стране нередко предоставлялось не специалистам, а тем, кто подменял подлинные научные исследования раз и навсегда установленными положениями. На основе скороспелых выводов, а порой и из личных побуждений они могли одним направлениям науки дать свидетельство о благонадёжности, другим — приклеить ярлык «реакционных» или «буржуазных». Так было с генетикой, так произошло и с кибернетикой. На кибернетику буквально набросились некоторые философы. Толком не разобравшись в её сути, они называли кибернетику не иначе, как «идеалистической лженаукой». Работы по кибернетике замалчивались, её практические достижения игнорировались. Тем, кто понимал важность кибернетики и хотел ею заниматься, грозила участь генетиков, разгромленных на сессии ВАСХНИЛ 1948 года.

Первым официальным выступлением в поддержку кибернетики была статья «Основные черты кибернетики», опубликованная в 1955 году журналом «Вопросы философии». Соавторами С. Л. Соболева были А. И. Китов и А. А. Ляпунов. «К сожалению, многие, выступавшие против кибернетики как «сплошной мистификации», не имели о ней достаточного представления», — говорилось в статье. Далее подробно объяснялось, в чём состоят основные идеи кибернетики и почему они не противоречат марксистской философии. Однако этого было мало, чтобы победить околонаучных оппонентов, профессионалов борьбы «за советскую науку против её идейных противников». В 1957 году С. Л. Соболев и А. А. Ляпунов выпускают книгу «Кибернетика и естествознание». Кибернетика становится отчасти разрешённой, в Институте математики организуется отдел кибернетики, во главе исследований — член-корреспондент АН СССР А. А. Ляпунов.

Книга Д. А. Гранина «Зубр» посвящена одному из основоположников генетики Н. В. Тимофееву-Ресовскому, одно из «действующих лиц» — Академгородок. О А. А. Ляпунове в книге говорится: «Этот добрейший человек проявил в битве за кибернетику беспощадность, неслыханную твёрдость и изворотливость». Усилиями таких энтузиастов новой науки, как С. Л. Соболев и А. А. Ляпунов, битва была выиграна. Кибернетика заняла достойное место в ряду других наук.

«В СССР кибернетика стала развиваться бурными темпами лишь после того, как выдающиеся математики А. Н. Колмогоров, С. Л. Соболев, А. Я. Хинчин и другие заинтересовались её проблемами», — утверждается в «Очерках по истории кибернетики».

Надо сказать, что Сергей Львович не раз выступал в защиту учёных от мракобеснических поползновений, имевших место в конце 40-х — начале 50-х годов. Такие выступления в то время требовали большой научной и гражданской смелости. В июле 1954 года, когда до «оттепели» было ещё далеко, С. Л. Соболев опубликовал в «Правде» статью «О научной критике, новаторстве и догматизме». В статье даётся уничтожающий отзыв о руководстве физического факультета МГУ за то, что, «подвергая критике путаное идеалистическое мировоззрение Эйнштейна, некоторые учёные не хотели или не могли видеть то рациональное, что содержится в его конкретных физических исследованиях. Более того, делались безуспешные попытки опровергнуть физическое содержание теории относительности».

Выступая против антинаучных попыток оторвать фундаментальные направления в математике от приложений, С. Л. Соболев писал: «Мы должны всё более приближать наши научные исследования к потребностям строительства коммунистического общества. Однако это не должно вести к узкому практицизму. Путь дальнейшего поступательного развития советской науки пролегает через решения принципиальных больших теоретических вопросов науки, через новые поисковые работы, новые и новые открытия».

Много внимания в статье уделено положению в биологии. «Признавая на словах необходимость научной критики, иные маститые учёные считают себя непогрешимыми и на деле стараются подавить всё, что не укладывается в их схемы». С. Л. Соболев хорошо знал, каким образом была подавлена генетика. Чуть ниже маститые учёные, чьи методы работы характеризуются как аракчеевские, названы поимённо — это физиолог академик К. М. Быков и биолог и агроном академик Т. Д. Лысенко. Кстати, Т. Д. Лысенко был избран в Академию наук в один год с С. Л. Соболевым, в газетах 1939 года их портреты можно видеть рядом. Продолжая обличать тех, кто придаёт критике извращённую, догматическую форму, С. Л. Соболев указывает, что стандартные для биологии ярлыки «вейсманистский», «мальтузианский», «антипавловский» заменяют некоторым биологам научную аргументацию.

В статье делается вывод о том, что «догматизм в науке, вышедший из тиши кабинетов на арену жизни, может принести серьёзный вред интересам государства». Обратим внимание ещё на одну фразу из статьи: «Советским учёным чужд культ личности, ибо известно, что самые выдающиеся учёные были всегда сынами своего времени и вовсе не все их взгляды сохраняют своё значение на вечные времена». То, что советским людям чужд культ личности, было сказано на XX съезде КПСС до съезда оставалось долгих два года.

ГЛАВА СИБИРСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Но вернёмся в Академгородок. В течение четверти века С. Л. Соболев возглавлял Институт математики. Он, однако, протестовал, когда его называли главой сибирской математической школы, и утверждал, что в Институте сложилось несколько независимых научных школ. Таков был объективный итог его мягкого, не авторитарного руководства институтом. Сбылись надежды С. Л. Соболева об обмене идеями между математиками и представителями других наук. Об экономико-математических методах и кибернетике мы уже говорили. Необычайно плодотворным оказалось взаимодействие математики и химии. Рождение новой науки — математической химии — произошло благодаря тесному содружеству Института математики, Вычислительного центра и Института катализа. Математическое моделирование химических процессов и работы реакторов помогло химии расчленить сложный процесс на более простые, для каждого элементарного процесса были построены свои уравнения, свои математические модели. Используя методы теории оптимального управления, математики научились определять параметры оптимального хода химического процесса, увеличивать производительность реакторов. Математические методы использовались для решения геологических задач (об этом подробнее рассказывается в следующей главе), была построена математическая теория взрыва, специалисты научились с помощью ЭВМ предсказывать паводок в речных руслах, велись интенсивные исследования в области математической лингвистики.

А. Д. Соболева и С. Л. Соболев. 1975 год

Самого Сергея Львовича занимала в это время задача о приближённом интегрировании функций — одна из основных, первостепенных задач вычислительной математики. Для одномерного случая она изучалась ещё классиками — Эйлером, Гауссом, Чебышёвым; полученные ими формулы называют *квадратурными.* Поискам наилучших кубатурных формул для вычисления многомерных интегралов С. Л. Соболев посвятил более 15 лет. При всей внешней простоте задача оказалась сложной, требующей привлечения разнообразного математического аппарата. С одной стороны, пришлось вернуться к классическим работам: потребовались новые, ещё не известные свойства многочленов Эйлера. С другой стороны, пришлось использовать современные методы теории уравнений с частными производными, обобщённые функции, теоремы вложения. Проблема оптимизации кубатурных формул формулировалась на языке функционального анализа и свелась к нахождению минимума нормы функционала погрешности на некотором пространстве функций. В 1974 году вышла монография С. Л. Соболева «Введение в теорию кубатурных формул», резюмировавшая его исследования в этой области и послужившая основой многих работ его учеников.

Ученики всегда занимали важное место в жизни академика С. Л. Соболева. В их число входят не только аспиранты, защищавшие диссертации под его руководством. Учениками Сергея Львовича считают себя и многие из тех, кто слушал его лекции, спецкурсы, участвовал в работе руководимых С. Л. Соболевым семинаров, работал под его руководством, испытал на себе влияние его научных идей. Мы уже делились впечатлениями о лекциях Сергея Львовича. Превосходный педагог, он всегда видел свой долг в том, «чтобы не упустить первые порывы любознательности, чтобы заронить в юную душу искорку интереса, которая, исподволь разгораясь, может превратиться в пламя научного творчества».

В 1951 году группа учёных (в их числе был и С. А. Христианович) предложила организовать высшее учебное заведение нового типа, в котором органически сочетались бы обучение и научная работа. Естественно, что С. Л. Соболев не мог оставаться в стороне, он помогал решать организационные вопросы, составлял и обсуждал программы. Он читал лекции первым студентам Московского физико-технического института.

В Академгородке забота о воспитании молодых математиков стала одной из главных. Тут же, рядом с институтами, в 1959 году создаётся Новосибирский государственный университет. Первую лекцию по математике студентам университета читает академик С. Л. Соболев. В университете он организует и возглавляет кафедру дифференциальных уравнений, читает общие и специальные курсы. Опыт работы Физтеха помог, студенты Новосибирского университета с первых курсов активно включаются в работу институтов Академгородка. Когда-то М. В. Ломоносов мечтал о такой постановке образования, при которой «...университет — друг, более того — единокровный брат Академии наук, который составляет с ней единую плоть и будет за одно с ней трудиться на пользу отечества». Новосибирский университет, руководимый известным математиком академиком И. Н. Векуа, действительно оказался единокровным братом Сибирского отделения Академии наук СССР. Лучшие сотрудники институтов стали одновременно преподавателями университета. Тысячи выпускников университета пополнили институты, составили целые кафедры в вузах и молодых университетах Сибири и Дальнего Востока.

Новая организация учёбы требовала и новых методов подбора студентов. Одарённых и увлечённых математикой школьников надо было искать повсюду. На вступительном экзамене трудно понять, действительно ли абитуриент имеет настоящий интерес и способности к математике или же его просто хорошо подготовили. Ведь возможности проявить талант есть не у всех. Академику С. Л. Соболеву очень хотелось, чтобы ни один талант не зачах. В одной из статей он писал: «Рассказывают, жил в одном из захолустных губернских городов царской России одинокий и нищий старик. Незадолго до смерти он показал местному учителю математики потрёпанную тетрадь. Полистали её сведущие люди и ахнули: дифференциальное исчисление. Полуграмотный нищий, сам того не подозревая, через 250 лет повторил великое открытие Ньютона и Лейбница. Ирония судьбы? Пожалуй, так. Конечно, жаль, что человек ломился в открытую дверь, второй раз открывая Америку. Но это ещё полбеды. Беда в том, что не подметили в нём «искры божьей», не дали развернуться незаурядным математическим способностям».

При активном участии С. Л. Соболева организуется Всесибирская школьная олимпиада, объявляется набор в физико-математическую школу при Новосибирском государственном университете. Выпускники школы, нередко уроженцы далёких таёжных сёл, становятся студентами, а затем и научными сотрудниками. В том, что Сибирь давно уже перестала быть математической целиной, решающая роль, несомненно, принадлежит Сергею Львовичу Соболеву.

К ЧЕМУ ПРИВОДИТ УПРЯМСТВО

В 1984 году С. Л. Соболев возвратился в Москву, в Математический институт имени В. А. Стеклова. Снова, как и 50 лет назад, местом его работы стал отдел дифференциальных уравнений. Почётный доктор многих зарубежных университетов и член иностранных академий, он участвовал в работе международных конференций, выступал с докладами. Он продолжал трудиться, свидетельство тому — Государственная премия 1986 года. Он был счастлив, и сам объяснял это так: «И радость творчества, и источник сил найдут для себя в царстве математики все, кто будет строить её здание. Путь в науку не лёгок, но прекрасен. Тому, кто его прошёл, открывается многое — радость творчества, радость познания. Счастье в том, чтобы дело твоей жизни было нужно людям. И нужно всегда».

Сколько разных научных проблем, сколько направлений творчества, и в каждом — первоклассные результаты, теоретические и прикладные! Где источник, причина такой творческой активности?

Ну, конечно, природный талант — необходимое условие творческого успеха. Но этим всё не объяснишь. Безусловно, решающую роль сыграло довольно редкое сочетание свойств человеческого характера: необычайное любопытство к миру, жажда знаний любой природы, неприятие покоя и рутины, абсолютная уверенность в разрешимости какой угодно проблемы и обычное (точнее, необычное) человеческое упрямство.

Мать С. Л. Соболева, Наталия Георгиевна, вспоминала, как она с детьми проводила лето 1916 года на берегу моря в Финляндии, будучи студенткой медицинского института. Там же отдыхал и профессор Догель, которому она должна была осенью сдавать экзамен по гистологии. Профессору не раз приходилось наблюдать сеансы «укрощения» сына студентки Соболевой: до такой степени Серёжа был своенравным, настойчивым и упор-

Детей ещё четверо. 1941 год

ным в своих желаниях. На экзамене Догель без единого вопроса поставил Соболевой высшую отметку, заметив: «Если вы управляетесь с таким сыном, вы, конечно, отлично справились с моим предметом». Эта способность страстно хотеть осталась у Сергея Львовича на всю жизнь.

Если перечислить ещё и общественные занятия С. Л. Соболева — депутата, члена многих комитетов и редколлегий, активиста международных организаций, — то у читателя сформируется глубокое убеждение в том, что на личную жизнь, на семью у него времени просто не оставалось. И снова сюрприз! У Сергея Львовича и его жены Ариадны Дмитриевны Соболевой было семь детей, четырнадцать внуков, двадцать правнуков. Воспитание детей в этой большой и дружной семье — это высокий культ, и глава семьи был одним из самых активных его жрецов.

Дочери вспоминают, что Сергей Львович никогда не оказывал на них давления, примером служил сам образ жизни отца. При всей своей занятости он ходил с детьми в туристические походы, учил их плавать и бегать на лыжах, прививал интерес к науке, природе, жизни. Маленьким он читал книги, сочинял для них стихи и сказки, учил играть в шахматы. А ещё вырезал из дерева ложки и забавные фигурки. Но, видимо, главное — передавал детям, да и не только детям, свой оптимизм, жизнерадостность, увлечённость и доброжелательность к людям.

Беседа четвертая

А. Н. ТИХОНОВ. КОРРЕКТНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

ПРАВИЛА ХОРОШЕГО ТОНА В МАТЕМАТИКЕ

В литературном русском языке слово «корректный» (от латинского *correctus*) означает вежливый, тактичный, учтивый. Математики применяют этот же термин в двух случаях. Во-первых, слово «корректный» в математическом тексте часто заменяет «правильный, верный», именно в этом смысле оно использовано в названии данной главы. Во-вторых, с появлением в 1932 году статьи известного французского математика Ж. Адамара сочетание «корректная задача» стало означать в математической физике задачу с «вежливым, тактичным» поведением. Чтобы понять, почему задача может вести себя «невежливо», обратимся к простому примеру: рассмотрим систему двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x + 10y = 11, \\ 10x + 101y = 111. \end{cases}$$

Её единственное решение легко найти: $x = 1$, $y = 1$. Слегка изменим правую часть первого уравнения:

$$\begin{cases} x + 10y = 11{,}1, \\ 10x + 101y = 111. \end{cases}$$

Теперь решение выглядит так: $x = 11{,}1$, $y = 0$. Таким образом, небольшое изменение исходных данных задачи привело к резкому изменению её решения. Системы линейных уравнений с подобным «невежливым» поведением математики называют *плохо обусловленными*. Заметим, что такая система может описывать некоторый реальный объект, в этом случае коэффициенты и правые части системы являются прямыми результатами измерений или вычислены по таким результатам и, следовательно, известны нам с некоторой погрешностью. Естественно, возникает вопрос: какую практическую ценность может иметь решение подобной системы? И естественный первый ответ — никакую.

Классический пример Адамара показал, что не только системы линейных алгебраических уравнений, но и многие сложные задачи математической физики могут вести себя «невежливо». Такие задачи казались математическими чудовищами, монстрами, их надо было всемерно избегать. Для того чтобы выделить класс задач, с которыми можно было спокойно иметь дело с пользой для практики, было введено понятие корректно поставленной задачи.

Исследование всякой количественной задачи обычно заключается в нахождении «решения» z по известным «исходным данным» u, так что $z = R(u)$. Понятие «исходные данные» для задачи математической физики может включать в себя функции и константы, входящие в уравнение, а также в начальные и граничные условия. В общем случае «исходные данные» u можно рассматривать как элемент некоторого метрического пространства U с метрикой ρ_U. Точно так же «решение» z, объединяющее в себе всё то, что нужно найти в задаче, понимается как элемент другого метрического пространства Z с метрикой ρ_Z.

Задачу определения z по u называют *корректно поставленной* на паре пространств (Z, U), если:

1) для всякого $u \in U$ существует решение $z \in Z$;

2) это решение определяется однозначно;

3) задача устойчива на пространствах (Z, U), т. е. при малом изменении u в пространстве U мало меняется z в пространстве Z.

Условия 1) и 2) характеризуют математическую определённость задачи. Выполнение условия устойчивости связывается с возможностью нахождения решения по приближённым исходным данным. Естественно, что задачи, не удовлетворяющие условиям 1)–3), назвали *некорректными*.

Хорошим примером некорректной задачи может служить задача дифференцирования функции, известной приближённо. Будем рассматривать «исходные данные» и «решение» как элементы пространства $C[a,\ b]$ непрерывных функций с метрикой

$$\rho_C\,(x_1,\ x_2) = \max_{t\in[a,\, b]} |x_1(t) - x_2(t)|\,.$$

Пусть $u_1(t)$ непрерывно дифференцируема и $z_1 = du_1/dt$. Положим $u_2(t) = u_1(t) + A\sin\omega t,\ \ z_2 = du_2/dt$. Тогда

$$\rho_C\,(u_1,\ u_2) = \max|A\sin\omega t| \leqslant |A|\,.$$

Даже если $A \neq 0$ очень мало, величина

$$\rho_C(z_1,\ z_2) = \max|A\omega\cos\omega t| = |A|\cdot|\omega|$$

может быть сделана сколь угодно большой за счёт выбора $|\omega|$.

В естественнонаучных и технических приложениях часто возникают так называемые обратные задачи. Под *обратной* будем понимать задачу определения интересующих нас количественных характеристик явления по результатам измерений их косвенных проявлений. Сложность подобных задач состоит в том, что очень разные причины могут приводить к очень близким эффектам, т. е. иметь близкие «косвенные проявления». Иначе говоря, обратная задача, как правило, некорректна. Возьмём простой, быть может, даже вульгарный пример. Какой диагноз должен поставить врач, если известны следующие симптомы: головная боль и тошнота? Солнечный удар, сотрясение мозга, угар, алкогольное или пищевое отравление, переутомление? Типичная обратная задача, вариантов множество, врачу нужна дополнительная информация.

Общее описание обратной задачи в математической форме выглядит так. Интересующий исследователя объект $z \in Z$ должен быть найден по его «косвенному проявлению» $u \in U$ из уравнения вида $Az = u$. Здесь A — отображение пространства Z в пространство U (оператор, ставящий в соответствие объекту z его проявление u). Величина u, как правило, точно не известна. Измеряя u, мы находим его приближённое значение u^*. И здесь могут возникнуть два осложнения. Во-первых, даже если u и u^* очень близки, u^* может не войти во множество значений оператора A на пространстве Z, т. е. уравнение $Az = u^*$ может не иметь решений. Во-вторых, если такое решение z^* найдётся, оно может сильно отличаться от искомого элемента z. Это значит, что задача $Az = u$ неустойчива.

Скажем то же самое несколько иными словами. Решить уравнение $Az = u$ означает получить выражение $z = R(u)$, где R — оператор, обратный A. Его область определения — это множество значений оператора A, его множество значений — пространство Z. Описанные выше неприятности можно выразить так: область $D(R)$ определения оператора R уже, чем пространство U, или сам оператор R *неограничен*. Последнее означает, что из сходимости последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ элементов из $D(R)$ к элементу $u \in D(R)$ в пространстве U не вытекает сходимость последовательности $z_1 = R(u_1)$, $z_2 = R(u_2)$, $\ldots$, $z_n = R(u_n)$, $\ldots$ к $z = R(u)$ в пространстве Z.

Типичным классом некорректных задач математической физики являются задачи, сводящиеся к уравнению $Az = u$ вида

$$\int_a^b A(s,\, t) z(t)\, dt = u(s), \tag{4.1}$$

где $A(s,\, t)$, $u(s)$ — заданные функции, а $z(t)$ надо определить. Это так называемые линейные интегральные уравнения 1-го рода.

Рассмотрим совсем простой пример:

$$\int_{-1}^{1} s^2\, t^2 z(t)\, dt = \frac{2}{3}\, s^2. \tag{4.2}$$

Функция $z(t) \equiv 1$ этому уравнению удовлетворяет. Ему удовлетворяет и $z(t) = 1 + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — любая определённая на $[-1,\, 1]$ непрерывная нечётная функция. Таким образом, уравнение (4.2) имеет бесконечно много решений. Изменим его правую часть:

$$\int_{-1}^{1} s^2\, t^2 z(t)\, dt = \frac{2}{3}\, s^2 + \delta \cos \omega s.$$

Как бы мало ни было δ, теперь уравнение решений не имеет: при $s = 0$ его левая часть обращается в нуль, а правая равна $\delta > 0$.

Кстати, приведённую выше задачу о нахождении производной функции также можно представить в форме (4.1), если положить

$$A(s,\, t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s \geqslant t, \\ 0 & \text{при} \quad s < t, \end{cases}$$

что даёт

$$\int_a^s z(t)\, dt = u(s).$$

ТРУДНЫЕ ВОПРОСЫ

В общий класс обратных задач входят и обратные задачи математической физики. Для того чтобы понять, как они ставятся, вернёмся немного назад. Постановка прямой задачи математической физики содержит уравнение и краевые условия. В исходные данные входит, в частности, некоторый набор функций. Часть из них — это коэффициенты самого уравнения, остальные входят в граничные и начальные условия. Предположим, что некоторые из этих функций не известны, а вместо них имеется дополнительная информация о решении прямой задачи. Определение неизвестных функций и составляет предмет теории обратных задач математической физики.

Чаще всего в обратных задачах требуется определить переменные коэффициенты дифференциального уравнения. Само уравнение, как уже говорилось, является математической моделью реального процесса. Коэффициенты уравнения определяются свойствами среды, в которой протекает процесс.

Напомним постановку задачи Коши для уравнения колебаний струны. Рассматривается бесконечная струна из материала с известной плотностью и упругими свойствами, тем самым определён коэффициент $a^2(x)$ в исходном уравнении

$$u_{tt}(x,\, t) = a^2(x)u_{xx}(x,\, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Заданы начальные отклонения $\varphi_0(x)$ и начальные скорости $\varphi_1(x)$ точек струны. Требуется найти зависимость $u(x,\, t)$ смещений точек струны от координаты и времени. При некоторых условиях, наложенных на функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $a^2(x)$, решение задачи Коши в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций существует, единственно и устойчиво. Таким образом, прямая задача корректна.

Пусть теперь переменная по длине плотность струны нам не известна, тем самым мы не знаем коэффициента $a^2(x)$. Мы хотим определить этот коэффициент по результатам измерения смещений различных точек струны в различные моменты времени. Это обратная задача со всеми вытекающими отсюда последствиями. Если бы мы могли точно измерить исходные данные $u(x_i,\, t_j)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то существование распределения плотности, вызывающей такие смещения, сомнения бы не вызывало. Реально в нашем распоряжении имеются приближённые значения $u^*(x_i,\, t_j)$; вполне возможно, что они не соответствуют никакому разумному определению плотности. И в том, и в другом случае остаётся неясным вопрос о единственности и устойчивости решения обратной задачи.

Рассмотренный пример является, разумеется, модельным. Никому не придёт в голову измерять плотность струны таким странным способом. Тем не менее, обратные задачи на определение характеристик вещества, в котором протекают физикохимические процессы, вполне естественно возникают во многих областях науки. Система уравнений теории упругости, которая лежит в основе сейсмологии, содержит обычно три параметра — плотность среды и так называемые коэффициенты Ламе. В систему уравнений Максвелла, описывающую электромагнитное поле, входят коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости и коэффициент электропроводности. В реальной среде эти параметры и коэффициенты являются функциями координат, а измерить их непосредственно часто невозможно. Возникающие обратные задачи, как правило, некорректны.

Таким образом, у математиков уже давно возникли следующие вопросы:

— что понимать под приближённым решением обратной задачи?

— как определить приближённое решение, чтобы оно оказалось устойчивым к малым изменениям исходных данных?

— каков практический алгоритм построения приближённых решений в конкретных задачах?

Исчерпывающих ответов на эти вопросы не было, и вплоть до 60-х годов XX века высшие авторитеты мировой математической физики вслед за Адамаром утверждали, что корректность задачи выражает её физическую определённость и является принципиальным условием для возможности математического моделирования реальных ситуаций. На некорректные задачи смотрели как на досадное недоразумение, а на попытки их решения было наложено математическое вето. Дадим слово авторам последнего.

С. Л. Соболев: «Решение задачи, некорректно поставленной, в большинстве случаев не имеет практической ценности» («Уравнения математической физики», 1947 год).

И. Г. Петровский: «Из предыдущего видно, что для физика (мы всюду понимаем слово «физику» в самом широком смысле) представляют интерес решения задачи Коши только для таких уравнений, для которых эта задача поставлена корректно.

Приведённые выше соображения о корректности постановки задачи Коши показывают, что и другие краевые задачи для уравнений с частными производными представляют интерес для естествознания только в том случае, если имеет место, в некотором смысле, непрерывная зависимость решения от краевых условий, корректность постановки задачи» («Лекции по уравнениям с частными производными», 1953 год).

Р. Курант (США): «Третье требование, особенно тонкое, необходимо, если мы хотим, чтобы математическая задача описывала действительно наблюдаемые физические явления. В действительности данные задачи нельзя считать строго фиксированными; сам процесс измерения вводит малые ошибки. Например, пространственные или временные координаты всегда задаются в некоторых пределах точности. Поэтому считать, что математическая задача правильно описывает физическое явление, можно только в случае, когда изменение данных задачи в достаточно малых пределах приводит к произвольно малому изменению решения» («Уравнения с частными производными», 1962 год).

Одним из «авторов» вето был и выдающийся советский математик Андрей Николаевич Тихонов. В учебнике по уравнениям математической физики, выпущенном в 1951 году, А. Н. Тихонов и его ученик А. А. Самарский утверждали, что тратить время на некорректно поставленные задачи нецелесообразно. Потребовалось немногим более 10 лет, чтобы благодаря работам А. Н. Тихонова мировая математическая наука столь же решительно отказалась от прежней точки зрения.

«Вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки; это даёт им право смотреть в грядущее спокойно», — пишет «знаменитый француз» Н. Бурбаки.

К середине 60-х годов, когда наука обогатилась его публикациями по некорректным задачам, А. Н. Тихонов был уже всемирно известным математиком, Героем Социалистического труда, автором многих фундаментальных работ. Читателя, возможно, заинтересует, как добиваются подобных успехов. Едва ли можно найти общий ответ: путь в науку у каждого свой. Своим он был и у академика А. Н. Тихонова.

ТОПОЛОГИЯ И ЖИЗНЬ

Родители Андрея Николаевича жили в городе Гжатске Смоленской губернии (ныне этот город носит имя первого в мире космонавта Ю. А. Гагарина). Образования они не имели, семья была бедной. Разруха и голод первых послереволюционных лет заставили их перебраться на Украину. Там Андрей поступил в школу, но учился он недолго. Последовал переезд в Москву, и в 1919 году тринадцатилетний мальчик начал работать конторщиком на Белорусско-Балтийской железной дороге. Порядку, который он навёл в конторских бумагах, завидовали даже взрослые коллеги. Андрей Николаевич утверждает, что тот детский опыт впоследствии помог ему, когда через много лет пришлось продумывать вопросы построения автоматизированных систем управления.

Образование Андрей продолжал на вечерних курсах, здесь-то и возник интерес к математике. Непосредственным поводом был урок, на котором учитель сформулировал теорему о том, что через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность. А. Тихонов искренне удивился, что здесь надо что-то доказывать. «Дайте мел, я проведу...», — обратился он к учителю. Учитель дал не только мел, но и линейку с циркулем, построение было успешно выполнено, а на земле появился ещё один математик. Первое озарение — теорема отличается от задачи тем, что определяет достаточно общий математический закон, — навсегда врезалось в память. В этом случае проявилось одно из важных достоинств математики по сравнению с другими науками — возможность испытать чувство открытия в любом возрасте. Школьник или студент, повторяющий при доказательстве теорем или решении задач путь великих предшественников, может испытать ничуть не меньшее волнение, чем первооткрыватели.

Андрей Тихонов. 1910 год

Цель была поставлена, и Андрей Тихонов начал самостоятельно готовиться к вступительным экзаменам на физико-математический факультет Московского университета. Ему мог бы помочь старший брат, но обращаться за помощью было не в характере Андрея, он хотел всё постигать сам. Успешно выдержав экзамены, он в неполных шестнадцать лет поступил на математическое отделение факультета. Обязательных курсов не хватало для того, чтобы утолить жажду знаний, и Андрей начинает слушать лекции Н. Н. Лузина по теории функций. Эти лекции пользовались на физмате огромной популярностью, и когда Николай Николаевич Лузин объявил о начале работы научного семинара, желающих участвовать в нём оказалось много. По традиции тех лет заседания семинара происходили на квартире руководителя, размеры комнаты естественно ограничивали число участников, и первокурсник Андрей Тихонов с досадой обнаружил, что его нет в списке.

Научную работу А.Н. Тихонов начал в девятнадцатилетнем возрасте, и начал поистине блестящим образом, получив несколько замечательных результатов, принёсших ему мировую славу. Произошло это так: внимание Андрея, студента 2-го курса, привлекло объявление о начале специального курса по топологии, лектором был Павел Сергеевич Александров (впоследствии академик, глава советской топологической школы). Первые же лекции удивили. Павел Сергеевич, возрастом ненамного превосходивший своих слушателей, то яростно писал на доске формулы, то, жестикулируя, объяснял их смысл, при этом касался своего костюма и оставлял на нём густые меловые пятна, то вдруг останавливался посреди доказательства, поднимал кого-либо из слушателей и просил подсказки, что делать дальше. Конспектировать такие лекции было нелегко, приходилось, взяв свои записи и записи друзей, дома составлять окончательный вариант. Стремление точно сформулировать результат и аккуратно провести доказательство вырабатывало математическое мышление. Неоднократно второкурсник «помогал» лектору, когда тот обращался к аудитории. Поэтому когда П.С. Александров сообщил о начале работы семинара по топологии, Андрей Тихонов стал одним из активнейших участников.

Личные контакты с П.С. Александровым были прерваны уже в начале 3-го курса: Павел Сергеевич уехал в длительную командировку в город Гёттинген, тогдашнюю математическую Мекку. Однако студенческий топологический кружок продолжал работу, тесная дружба связывала А.Н. Тихонова с членами кружка В.В. Немыцким, А.Н. Черкасовым (впоследствии профессора МГУ), Н.Б. Веденисовым (погиб в Великой Отечественной войне). Шла оживлённая переписка с Гёттингеном: Павел Сергеевич, уезжая, просил информировать его обо всём. И вот, студент 4-го курса А.Н. Тихонов сообщает в письме руководителю о полученных результатах. В те годы математических журналов в нашей стране было мало, выходили они редко, поэтому первые результаты были опубликованы в 1925 году в немецком журнале «Mathematische Annalen». Продолжая напряжённую работу, А.Н. Тихонов вскоре пришёл к своему определению топологического, или, как теперь принято говорить во всём мире, *тихоновского произведения* топологических пространств. Избранный способ определения казался не только неожиданным, но и парадоксальным, даже учитель поначалу встретил новое определение с большим недоверием.

Студенческие, а затем и аспирантские годы были для А. Н. Тихонова временем, когда он интенсивно познавал не только тонкости математики, но и окружающую жизнь во всём её разнообразии. Прочитаны многие тома классической литературы: дома у друзей сохранились комплекты приложений к дореволюционному журналу «Нива». Многие часы проведены в Третьяковской галерее и Московском музее изобразительных

Топологический кружок. 1926 год. Сидит В. В. Степанов. Стоят слева направо: В. В. Немыцкий, Н. Б. Веденисов, А. Н. Черкасов, Ю. А. Рожанская, А. Н. Тихонов

искусств имени А. С. Пушкина. С тех пор в каком бы городе ни был А. Н. Тихонов, он непременно посещал картинную галерею, исторический музей. В 1988 году в Ташкенте проходила конференция по уравнениям с частными производными, А. Н. Тихонов был одним из её участников. Городской музей в это время оказался почему-то закрытым. Андрей Николаевич приложил много усилий для того, чтобы музей на время открыли и дали возможность ему и другим математикам осмотреть экспозицию.

Сотрудник советского консульства в Нью-Йорке, сопровождавший Андрея Николаевича и его супругу при посещении Метрополитен-музея, никак не ожидал, что ему придётся потратить столько времени. Гости долго не могли отойти от шедевров Рафаэля и Тициана, портретов и пейзажей английских мастеров, наивно-непосредственных полотен примитивистов.

Дома у А. Н. Тихонова — небольшая, тщательно подобранная коллекция картин. Он особенно выделял небольшое полотно Б. М. Кустодиева из серии «Ярмарки», изображающее зимний праздник, пейзаж В. К. Бялыницкого-Бирули и натюрморт М. Сарьяна. Две последние картины подарены Андрею Николаевичу его учениками-математиками, которых он научил любить изобразительное искусство. Сильнейшее впечатление на А. Н. Тихонова произвело знакомство с древнерусской архитектурой и церковной живописью. В памяти надолго остались древние храмы Новгорода, фрески и иконы и с их психологическим напряжением, мажорной красочностью, лаконизмом силуэтов.

Молодые математики с искренним интересом познавали свою страну в многочисленных походах. Если на пути перехода возникали горы, — осваивались альпинистские навыки. Так, например, был совершён пеший переход из Теберды (Ставрополье) через Большой Кавказский хребет и озеро Рица к Черноморскому побережью Кавказа. Одним из спутников А. Н. Тихонова был В. В. Немыцкий. По-видимому, друзья и коллеги по топологическому кружку были первыми альпинистами, которым удалось подняться на одну из вершин Кавказа. С тех пор на карте появился пик Немыцкого и Тихонова. Современные альпинистские сайты называют его *пиком Тихонова* и сообщают, что пик высотой 4670 м относится к северному массиву Кавказских гор. Перевал Немыцкого нашёлся на Катунском хребте Горного Алтая.

Вместе с А. Н. Колмогоровым и В. В. Немыцким были пройдены сотни километров по северным районам. Мельчайшие подробности этого похода Андрей Николаевич с удовольствием вспоминал и в последние годы жизни.

Поход начался от старинного русского города Вологды, ровесника Москвы. Отсюда по реке Сухоне туристы лодкой спустились к Северной Двине, затем пароходами добрались до верховьев реки Вычегды. Далее пеший переход привёл к берегам Печоры. К верховьям Печоры лодку пришлось тянуть верёвками против течения. Водораздел преодолели, поднявшись на одну из вершин Северного Урала, спуск из Европы в Азию привёл к реке Северной Сосьве, левому притоку Малой Оби. В одном из посёлков, стоящих на реке, случайно встретились с буксиром, тянувшим баржу. На барже проплыли последние 500 километров до города Берёзово, известного как место ссылки А. Д. Меншикова, сподвижника Петра I.

Поход был тяжёлым испытанием: дорог, как правило, не было, приходилось идти по болотам, часто по колено в воде, не раз форсировать быстрые и холодные северные речки. В таких походах крепли не только мускулы, но и характеры. Физическая закалка и целеустремлённость, огромная работоспособность и неприхотливость к жизненным благам сыграли важную роль в работе и жизни каждого из его участников.

Топология — один из наиболее абстрактных разделов математики, поэтому на простом языке невозможно объяснить суть теоремы, доказанной студентом А.Н. Тихоновым в дипломной работе и утверждающей, что тихоновское произведение любого числа бикомпактных пространств бикомпактно. Но статистика неопровержимо свидетельствует, что среди топологических теорем именно эта занимает первое место по числу ссылок на неё в мировой общематематической литературе. Теорема оказалась важной не только для топологии, но и для некоторых разделов функционального анализа, а также для целой области прикладной математики — динамического программирования. «Весьма правдоподобно, что это вообще самая важная теорема общей топологии», — утверждает Дж. Келли, автор известного учебника.

Но всеобщее признание наступило значительно позже, а в момент появления публикаций их значение, помимо автора и его руководителя, поняли лишь трое. Правда, эти трое были звёздами первой величины на европейском математическом небосклоне: М. Фреше, Л. Брауэр, Э. Хопф. И всё же аспирант МГУ А.Н. Тихонов чувствовал себя неудовлетворённым. К тому же на аспирантском семинаре по философии объяснялось, что корни всех математических задач лежат в реальной жизни, что «если у общества появляется техническая потребность, то она продвигает науку вперёд больше, чем десяток университетов» (Ф. Энгельс). Поэтому, окончив аспирантуру (учёных степеней и диссертаций для их получения в то время не было), А.Н. Тихонов наряду с преподаванием в МГУ начинает работать в Геофизическом институте, где впервые сталкивается с практическими задачами. С тех пор математическое творчество А.Н. Тихонова приобретает ярко выраженный прикладной характер. «В последнее время, — писал Андрей Николаевич в 1986 году, — знакомясь со мною, некоторые учёные спрашивают: «Вы тот самый Тихонов, который разработал один из разделов топологии?» Им трудно поверить в это, поскольку уже давно моя научная работа в основном связана с прикладными исследованиями».

МАТЕМАТИК, ГЕОФИЗИК, ХИМИК

Первые работы нового сотрудника Геофизического института, подчинённого Центральному институту прогнозов, были связаны с задачей определения исторического климата Земли. Интерес к этому вопросу возник так. Андрею Николаевичу было предложено отправиться в Ленинград для участия в конференции по мерзлотоведению. Стиль научных докладов резко отличался от того, к которому А. Н. Тихонов привык за годы общения с математиками, но суть проблемы была понятна. Речь шла о том, откуда произошла вечная мерзлота (ею покрыта значительная часть территории России), в какой мере её появление связано с ледниковыми периодами в истории Земли.

Изменение температуры однородной среды во времени и пространстве описывается уравнением теплопроводности, одним из основных уравнений математической физики. Задача Коши для этого уравнения состоит в том, что требуется найти распределение температуры в пространстве в моменты времени $t > 0$ при условии, что это распределение в момент времени $t = 0$ задано. Новая постановка задачи была необычной, обратной: по заданному распределению температуры по глубине Земли в момент времени $t = t_0$ надо было найти её распределение в предшествующие моменты $t < t_0$. Чтобы вникнуть в эту задачу, Андрей Николаевич решил для начала разобраться с классической постановкой, идущей от Фурье, Пуассона, Коши. Выводы оказались неожиданными: известное распределение температур при $t = 0$ отнюдь не гарантирует единственного решения, требуются дополнительные предположения о характере решения. Затем пришло время обратной задачи, были сформулированы условия существования и единственности её решения, получены конкретные формулы.

Результаты позволили установить, что вечная мерзлота действительно досталась нам в наследство от ледниковых периодов. Однако воссоздать достоверно исторический климат Земли не удалось, имеющиеся в небольшом числе данные долговременных измерений температуры по глубине скважин были неточными. На показаниях термометров сильно сказывалась наружная температура на поверхности Земли. Переведём этот разговор на язык начала главы: надо было решать обратную задачу с сильно искажёнными исходными данными.

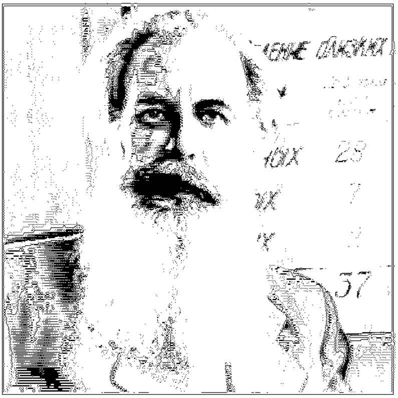
Опубликованные в 1935 году, эти работы А. Н. Тихонова ещё долго вызывали интерес у математиков, их результаты уточняли, обобщали, но сам автор понимал, что их геофизическая отдача не слишком велика. Исходная модель была усложнена, учёт таких факторов, как радиоактивный распад и излучение тепла в окружающую среду привёл к новым математическим постановкам — уравнение теплопроводности приходилось решать с нелинейными граничными условиями. Получить точное решение нелинейных задач математической физики удаётся крайне редко, алгоритм построения приближённого решения всегда индивидуален. На сей раз задача была сведена к нелинейному интегральному уравнению, решение искалось методом последовательных приближений.

Идеи, появившиеся в работе над задачами теплопроводности, были обобщены в докторской диссертации, защищённой в 1936 году. Развитая здесь математическая теория выходила далеко за рамки исходных задач и в то же время служила базой для новых прикладных исследований. Уже в 1939 году разработанные А. Н. Тихоновым методы были использованы для изучения свойств поверхности Луны.

Вся дальнейшая творческая биография А. Н. Тихонова складывается из подобных звеньев: сначала составляются и анализируются математические модели конкретных явлений, что даёт ощутимые на практике результаты. Затем следуют формальные математические обобщения, вроде бы не имеющие непосредственного отношения к реальной жизни. Но проходит совсем немного времени и выясняется, что именно эти обобщения позарез необходимы для решения новых прикладных задач.

В 1936 году Андрей Николаевич становится профессором МГУ, а через год меняет место своей второй работы. В Москве создаётся Институт теоретической геофизики АН СССР. Инициатор создания и его директор — академик Отто Юльевич Шмидт, легендарная фигура в советской науке. Он начинал как математик, много занимался теорией групп, был признанным руководителем московской алгебраической школы. В начале 20-х годов, ещё при жизни В. И. Ленина, он был назначен членом коллегии наркомата финансов. Математики крайне редко занимали подобные посты. Ещё одно исключение — Лаплас, министр внутренних дел при Наполеоне, считавшем, что «процветание и совершенство математики тесно связаны с благополучием государства».

Занятий математикой О. Ю. Шмидт не прервал, продолжая руководить семинаром по общей алгебре, а на заседании Московского математического общества рассказал о дифференциальном уравнении денежной эмиссии. На открытии Первого Всесоюзного математического съезда в городе Харькове он сделал доклад «Роль математики в строительстве социализма». Человек высочайшей культуры, он был председателем Государственного учёного совета при Наркомпросе (прообраза будущего ВАКа), членом художественного совета театра им. Е. Б. Вахтангова, главным редактором первого издания Большой советской энциклопедии. В 30-х годах О. Ю. Шмидт — один из крупнейших исследователей Арктики. Он возглавляет несколько экспедиций по Северному морскому пути, в том числе и знаменитое плавание на «Челюскине», руководит высадкой и спасением полярников дрейфующей станции «Северный полюс-1», становится одним из первых Героев Советского Союза. Академик О. Ю. Шмидт хорошо понимал значение математических методов в прикладных исследованиях. Одним из первых он пригласил работать в новом институте молодого профессора А. Н. Тихонова, математика, которого к тому времени уже можно было считать и геофизиком.



О. Ю. Шмидт

В возрасте 33 лет А. Н. Тихонов был уже признанным авторитетом в математическом мире, автором более ста научных работ. В 1939 году он становится членом-корреспондентом Академии наук СССР.

В предвоенные годы А. Н. Тихоновым был выполнен цикл работ, связанный с расчётом динамики химических процессов. В форме, удобной для практического использования, было найдено решение задачи о сорбции газа. Задача эта ставилась следующим образом: через трубку, заполненную поглощающим веществом (сорбентом), пропускается газовоздушная смесь. Требуется определить зависимость от времени и координаты количества газа, поглощаемого единицей объёма сорбента, и концентрации газа, находящегося в порах сорбента. В общем случае приходится решать нелинейную систему уравнений с частными производными, для чего А. Н. Тихоновым был разработан своеобразный способ сопряжения численных и асимптотических методов. «Для научного творчества А. Н. Тихонова характерно стремление дать исчерпывающее решение изучаемой им проблемы, довести её решение до числа», — пишет академик А. А. Самарский. В пору, когда до появления ЭВМ было ещё далеко, «доведение до числа» решения подобной задачи требовало, конечно, большой изобретательности.

Постановка задачи была связана с созданием новых систем противогазов, в ту пору надо было считаться с возможностью химической войны. В наши дни исследования по математической теории химических процессов составляют теоретическую базу расчёта очистных сооружений. Значение работ А. Н. Тихонова за 50 лет, прошедшие с момента их выполнения, только возросло, так как проблемы охраны окружающей среды резко обострились.

ЧТО УМЕЕТ ГЕОФИЗИКА?

Вскоре после начала Великой Отечественной войны Институт теоретической геофизики вместе с другими учреждениями Академии наук СССР был эвакуирован в город Казань. На середину октября 1941 года в Москве было назначено заседание Отделения математики Академии, посвящённое задачам помощи фронту. Группа математиков, в которую входил и А. Н. Тихонов, приехала в Москву. Прямо на вокзале представитель ГКО сообщил, что из-за тяжёлого положения на фронте под Москвой все заседания отменяются, надо немедленно уезжать. Возвращаться пришлось в необычном поезде — паровоз тянул вагоны метро.

Из Казани основные подразделения Института были переброшены в Уфу. Один из товарных вагонов с оборудованием сопровождали А. Н. Тихонов и Е. Е. Карус (позднее член-корреспондент АН СССР, профессор МГУ). Андрей Николаевич вспоминает, что на одной из станций впервые за несколько дней удалось отоварить карточки в столовой. Все полученные 16 обедов были съедены за один раз.

Институт разворачивал работы на территории Башкирии. От теоретических вопросов надо было срочно переходить к сугубо практическим. Огромная территория между Волгой и Уралом была, по мнению геологов, перспективной на нефть. Часть эксплуатируемых нефтяных месторождений страны оказалась на территории, занятой фашистами, поэтому быстрое обнаружение новых месторождений стало важнейшей стратегической задачей. А. Н. Тихонов в составе одной из экспедиций института непосредственно включился в полевые работы геофизиков. Чтобы понять, с какими задачами ему пришлось столкнуться, расскажем немного о том, чем занимаются геофизики.

Геофизика — комплекс наук, исследующих внутреннее строение Земли, её физические свойства. Геофизические исследования дали возможность «увидеть сквозь Землю» месторождения полезных ископаемых, фиксировать сдвиги в земной коре, контролировать проведение ядерных испытаний. Непосредственно проникнуть в толщу Земли оказалось необычайно сложным делом. Вблизи города Заполярного в Мурманской области находится самая глубокая в мире Кольская скважина, но и она достигла ничтожной по сравнению с радиусом Земли глубины 13 километров. Что лежит дальше, собственными глазами не видел никто и никогда.

Надо сказать, что бурение глубоких скважин ради научных исследований обходится довольно дорого, а получение из скважины информации — дело, далеко не простое. Специалисты считают, что создание надёжного канала передачи информации с глубины 10 км на поверхность — задача, технически намного более сложная, чем создание такого же канала от Земли до Луны. Поэтому разведочные геофизики стараются большую часть данных получить на поверхности Земли или совсем близко от неё. Для этого приходится изучать гравитационное, тепловое и электромагнитное поля Земли естественного происхождения, а также искусственно возбуждать поля в земной коре. Сопоставление информации, полученной в скважинах и на поверхности, — главная тенденция современной геофизики.

Одним из эффективных методов поиска полезных ископаемых является сейсморазведка: в земной толще, с помощью взрывов или специальных вибраторов возбуждаются упругие колебания, а приборы фиксируют прохождение и отражение волн сжатия или сдвига. Другой часто применяемый и значительно более дешёвый способ исследования — электроразведка — основан на том, что различные слагающие Землю породы имеют разную проводимость и диэлектрическую проницаемость и поразному влияют на прохождение электромагнитных волн. Для того чтобы понять, как будет себя вести та или иная волна, наткнувшись, например, на нефтеносный пласт, нужно иметь математическую модель. Параметры модели обычно определяют экспериментально, изучая образцы пород, взятые из скважин.

Сложность и практическая важность изучаемых процессов всегда привлекали математиков в геофизику (напомним о работе С. Л. Соболева в Сейсмологическом институте), и в наши дни геофизика продолжает оставаться одним из главных потребителей достижений математики. Быстро нашли своё место в геофизических исследованиях такие относительно недавние изобретения математиков, как регрессионный и корреляционный анализ, теория нечётких множеств и кластерный анализ, методы планирования эксперимента, сплайн-интерполяция. На помощь математикам и геофизикам пришли вычислительные машины, геофизики с гордостью утверждают, что сегодня в мире около 20 % общего объёма машинного времени тратится на их задачи. Новые математические модели, новые измерительные приборы и современные компьютеры позволили увеличить надёжность геофизических прогнозов.

Но многое в геофизике остаётся неясным и сегодня. Учёные знали, что вся территория Армении является сейсмически активной, что блоки земной коры под ней смещаются по разрывам. Но предсказать катастрофическое землетрясение 1988 года они не смогли. Эксперты не умеют уверенно прогнозировать землетрясения ни по одному из трёх главных признаков: когда? где именно? какой силы? Только после войны землетрясения во всём мире унесли около 600 тыс. человеческих жизней, причинили колоссальные разрушения. Такова страшная плата человечества за несовершенство науки.

ПЕРВАЯ ЛАСТОЧКА

Но вернёмся в небольшой башкирский городок Ишимбай, где базируется экспедиция Института теоретической геофизики. А. Н. Тихонов включён в состав группы, занимающейся электрическим зондированием. В строгом соответствии с инструкцией, разработанной в 20-х годах французской фирмой «Шлюмберже», в землю вводятся два питающих электрода, между ними — два измерительных. На питающие электроды от батареи подаётся постоянный ток, потенциометр регистрирует разность потенциалов на измерительных электродах. По мере увеличения расстояния между питающими электродами электрическое поле всё глубже проникает в землю. Показания прибора лишь качественно отражают изменение удельного электрического сопротивления по глубине, для количественного определения этого параметра, а следовательно, и типа породы, нужна расшифровка.

Занимаясь рутинной процедурой расшифровки, Андрей Николаевич не раз ловил себя на мысли, что не понимает, почему вообще можно доверять всем этим результатам. Ведь в теории электроразведки было множество слабых мест: во-первых, все расчёты основаны на простейшей, одномерной модели, в соответствии с которой сопротивление меняется только по глубине; во-вторых, никак не учитывается влияние естественного электромагнитного поля Земли; в-третьих, точность всех измерений низка. И, что самое главное, задача нахождения распределения сопротивления по глубине по известным измерениям поля на поверхности является обратной, заведомо некорректной. Не было никаких оснований больше доверять ни данным гравиметрии, ни рекомендациям сейсморазведки и там приходилось иметь дело с обратными задачами и сомнительными исходными данными.

«Задачи, стоящие перед экспедицией, с позиции чистого математика я должен был бы расценить как неразрешимые, поскольку данные геологоразведчиков искажены неизбежными погрешностями. Ведь невозможно же восстановить точный облик предмета по его немногим размытым теням. Данные геологоразведчиков — это тоже тени. По ним, как считалось тогда в классической математике, нельзя восстановить контуры нефтеносной структуры», — так, спустя много лет, объясняет Андрей Николаевич суть своих сомнений и обратных задач. И тут же замечает, что для его товарищей запреты классической математики никакого значения не имели: «А между тем, мои коллеги по экспедиции, нефтяники, находили нефть и притом довольно эффективно. Не вдаваясь в математические тонкости, они пользовались методом подбора теоретических кривых, наиболее соответствующих экспериментальным данным. При этом они интуитивно использовали дополнительную информацию о конфигурации типичных нефтеносных структур, благодаря практическому опыту».

Здесь-то и появилось первое еретическое сомнение в справедливости табу, наложенного Адамаром на некорректные задачи: если их умеют «решать» нефтяники, то, возможно, и математики научатся? Надо попробовать. Время для работы над чисто математическими проблемами пришлось отрывать от сна, а ход рассуждений был примерно следующим. Для решения своих задач нефтяники используют практический опыт — дополнительную информацию, которой нет в исходных данных. Последовал перевод на язык математики: решение обратной задачи $Az = u$ надо искать не во всём пространстве Z, а внутри некоторого множества $M \subset Z$. Осталось выяснить, каким условиям должно удовлетворять множество M, чтобы исходная некорректно поставленная задача стала на M устойчивой. Условия были найдены, и в конце 1943 года в «Докладах Академии наук СССР» появилась статья «Об устойчивости обратных задач», в которой был изложен так называемый метод подбора.

В 1949 году А.Н. Тихоновым была доказана теорема единственности, означающая, что обратная задача электрического зондирования на постоянном токе может иметь только одно решение. Тем самым было дано теоретическое обоснование практического метода подбора при интерпретации электроразведочных данных. Метод подбора используют для решения обратных задач в тех случаях, когда распределение геоэлектрических величин можно описать небольшим конечным числом параметров с ограниченными пределами изменения, этим условием и определяется множество M. В этом случае обратная задача устойчива, она успешно решается или вручную, с помощью стандартного набора теоретических кривых, или автоматически, с использованием ЭВМ.

Чтобы пояснить метод подбора, вернёмся к рассмотренной выше обратной задаче о колебаниях струны. Сама физическая постановка задачи подсказывает, что решение — функция $a^2(x)$ — далеко не произвольно. Несомненно, эта функция должна быть положительной, ограниченной сверху и снизу некоторыми константами. Значения этих констант можно указать, зная набор материалов, из которых могла быть сделана струна. Кроме того, естественно предположить, что плотность струны изменяется непрерывно. Тем самым указано множество M, которому должна принадлежать функция $a^2(x)$. Под *решением* понимается такая функция $a^2(x) \in M$, что рассчитанные для неё теоретические исходные данные u будут отличаться от измеренных u^* не более чем на δ. Через δ здесь обозначена погрешность измерения исходных данных.

Сам автор метода понимал, что в конкретных задачах выделить множество M с требуемыми свойствами далеко не просто, что метод не подходит для задач, где нарушены первые два условия корректности. Статья была лишь первой ласточкой, предвещавшей весну. Впоследствии из этой публикации выросло целое направление в исследовании некорректных задач. А за задачами, в которых возможно указать множество M, закрепилось название *корректные по Тихонову*.

«Корни всякого открытия лежат далеко в глубине, и, как волны, бьющие с разбегу на берег, много раз плещется человеческая мысль около приготовляемого открытия, пока придёт девятый вал», — это образное сравнение принадлежит замечательному учёному и мыслителю В.И. Вернадскому. На некорректные задачи девятый вал обрушился через 20 лет.

НЕМНОГО УВИДЕТЬ — МНОГОЕ ПОНЯТЬ

В конце 40-х годов XX века, когда начались разведочные работы на территории Западной Сибири, геофизики столкнулись со странной проблемой. Данные глубинного электрического зондирования оказались нестабильными: стоило, спустя некоторое время, повторить измерения на той же площади, и результат мог оказаться на 50–100 % отличающимся от первоначального. Оснований не доверять отработанной методике, вроде бы, не было, прежде она всегда обеспечивала стабильные результаты. «Особенностью живого ума является то, что ему нужно немного увидеть и услышать для того, чтобы он мог долго размышлять и многое понять», — писал Джордано Бруно. Гипотеза приглашённого для консультаций А. Н. Тихонова состояла в том, что на результатах измерений сказывается естественное электромагнитное поле Земли (геофизики называют его *магнитотеллурическим*). Проверка гипотезы требовала создания математической модели этого поля. Началась напряжённая работа.

Вскоре такая модель появилась: вертикально падающая электромагнитная волна, описываемая уравнениями Максвелла, возбуждает горизонтальные слои Земли с различной проводимостью. Первые результаты были опубликованы в 1950 году, их обобщение в 1953 году предложил французский исследователь Л. Каньяр. С тех пор в терминологию и практику геофизики вошла модель Тихонова–Каньяра. «Достоинством этой модели является, с одной стороны, её необыкновенная простота, с другой — возможность адекватного описания реальных геофизических процессов», — утверждает современный учебник по геофизике.

А. Н. Тихонов. 50-е годы

Теперь появился теоретический фундамент для того, чтобы вернуться к вопросу о зондировании на постоянном токе. По инструкции после подключения батареи к питающим электродам следовало выждать несколько секунд, пока в цепи пройдут переходные процессы, и лишь затем начинать измерения. Решение, предложенное А. Н. Тихоновым на основе теоретических расчётов, вновь было неожиданным, парадоксальным. Оказывается, не надо ждать установления тока в цепи, переходный процесс несёт гораздо больше информации, чем установившийся. Выяснились и причины трудностей геофизиков в Западной Сибири: метод «Шлюмберже», дававший хорошие результаты при глубинах залегания нефтеносных структур до 500 м, не может быть перенесён на глубины от 1 км до 3 км. Метод становления, заключающийся в изучении неустановившегося поля при импульсном изменении тока в питающей установке, стал одним из основных методов зондирования.

Наблюдения за магнитотеллурическим полем Земли велись давно, отсутствие математической модели не позволяло сопоставить данные электрических и магнитных измерений. «Магнитные вариации и электрические земные токи, наблюдаемые на поверхности Земли, должны быть подчинены определённым соотношениям, поскольку они представляют различные проявления естественного электромагнитного поля Земли», — так начинается статья А. Н. Тихонова «Об определении электрических характеристик глубоких слоёв земной коры», вышедшая в 1950 году. Благодаря этой и другим работам А. Н. Тихонова, в распоряжении геофизиков появился метод магнитотеллурического зондирования, позволивший заглянуть далеко в глубь Земли. Отличительная особенность метода — отсутствие генератора тока, главная задача состоит в проведении синхронной регистрации компонент электрического и магнитного полей на поверхности Земли. Метод позволил по результатам измерений найти глубину высокопроводящего слоя, содержащего расплавы пород. Для различных регионов мира она меняется от 10 км до 100 км.

В 1988 году в курортном комплексе «Дагомыс» близ Сочи состоялся Международный симпозиум по методам магнитотеллурического зондирования. Геофизики из многих стран мира рассказывали о своих работах в этой области. Андрей Николаевич Тихонов присутствовал на симпозиуме. Он и удивился, и порадовался за своих коллег: новые разработки в области теории, и новая аппаратура позволили им получить интересные и неожиданные данные о внутреннем строении Земли.

Продолжая исследования, А. Н. Тихонов в начале 1950-х годов обосновал возможность зондирования на переменном токе. По ряду технических причин такой метод сулил известные преимущества, однако возможность интерпретировать результаты измерения появилась после решения А. Н. Тихоновым сложнейшей задачи об определении электромагнитного поля, создаваемого расположенным на поверхности Земли проводом при пропускании через него переменного тока. Решение содержало и алгоритм численного решения, и асимптотические формулы для разложения несобственных интегралов, содержащих бесселевы функции. Эти разработки способствовали техническому перевооружению электроразведки.

Создание и развитие электромагнитных методов изучения внутреннего строения Земли неразрывно связано с именем академика А. Н. Тихонова. Студент-геофизик технического вуза может и не знать математика А. Н. Тихонова. Но ему хорошо известен выдающийся геофизик А. Н. Тихонов, исследования которого стали теоретической основой новых методов электроразведки.

А математика А. Н. Тихонова по-прежнему волновала проблема обратных задач, неустойчивости, некорректности. Задача расчёта электромагнитного поля в слоистой среде была прямой, а все задачи зондирования — обратными. И если метод подбора оказался достаточно эффективным в обратной задаче зондирования на постоянном токе, то для обратной задачи магнитотеллурического зондирования он уже не годился.

Удивительно разнообразие научных интересов А. Н. Тихонова. Наряду с основополагающими работами в области геофизики, он в послевоенные годы занимался многими другими исследованиями. В частности, им был выполнен цикл работ по обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим малый параметр при старшей производной. Задачи такого рода встречались в теории нелинейных колебаний, химической кинетике, теории автоматического регулирования. Много позже такие задачи возникали в связи с расчётом полупроводниковых приборов, движения искусственных спутников Земли.

В 1948 году появилась статья А. Н. Тихонова «О зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра». Из этой работы выросла теория сингулярных возмущений — целый раздел современной науки о дифференциальных уравнениях, как обыкновенных, так и в частных производных. Параметры, которые можно считать малыми, входят во многие уравнения математической физики как коэффициенты при старших производных. Примерами могут служить уравнения Навье-Стокса с малой вязкостью, уравнения квантовой механики с малой безразмерной постоянной Планка. Обнаруженные А. Н. Тихоновым условия предельного перехода по малому параметру были существенно обобщены его учениками и другими математиками. Методы теории возмущений (их ещё называют *асимптотическими*) оказались эффективным способом решения дифференциальных уравнений. Отметим, что в развитии другой важной ветви этого направления основные заслуги принадлежат советским математикам Н. Н. Боголюбову и Ю. А. Митропольскому.

ГЛАВНЫЙ ТЕОРЕТИК КОСМОНАВТИКИ

В 1963 году из Математического института имени В.А. Стеклова выделяется Институт прикладной математики. Новым научным подразделением Академии наук СССР руководит академик Мстислав Всеволодович Келдыш. До начала 60-х годов XX века его знали в основном коллеги. В 60–70-х годах его узнали все: будучи Президентом Академии наук СССР, он находился в президиумах важных собраний и съездов, выступал на них.

М. В. Келдыш

Он вёл также привлекавшие всеобщее внимание пресс-конференции в актовом зале МГУ. На них рассказывалось о замечательных достижениях советской науки и техники: о фотографировании обратной стороны Луны, первом выходе человека в открытый космос, посадке спускаемых аппаратов на Луну и Венеру.

С началом эры исследования космоса и особенно после полёта Ю.А. Гагарина в газетах и репортажах с Байконура стал упоминаться Главный теоретик космонавтики. Только из некролога (М.В. Келдыш умер в 1978 году) стало общеизвестно, что он и был Главным теоретиком. Начиная с 1947 года, он активно занимался теорией движения ракет и космических кораблей.

После окончания механико-математического факультета МГУ М.В. Келдыш за 15 лет, предшествовавших работам на космические темы, успел многое сделать и в механике, и в математике. Работая в Центральном аэрогидродинамическом институте им. Н.Е. Жуковского, он занимался теорией крыла и винта самолёта. Им была создана математическая модель флаттера — колебаний элементов конструкции самолёта, препятствующих развитию скоростной авиации. Он исследовал также явление шимми — самовозбуждение колебаний переднего колеса трёхколесного шасси. И в том, и в другом случае построенная М.В. Келдышем теория легла в основу методов конструирования. Новым самолётам эти некогда грозные явления стали не страшны. Из трофейных архивов стало известно, что у немцев в 1935–1943 годах было 146 серьёзных аварий и катастроф с опытными самолётами из-за флаттера, а у советских самолётостроителей таких случаев не было.

Математические исследования М.В. Келдыша относились к различным областям математики — теории функций действительной и комплексной переменной, функциональному анализу, уравнениям математической физики. Отметим, в частности, его работы по теории потенциала. Эта теория имеет дело с уравнением Лапласа — третьим из основных уравнений математической физики. В отличие от первых двух — волнового и уравнения теплопроводности — в уравнение Лапласа время не входит, искомая функция зависит только от пространственных переменных. Этому уравнению удовлетворяет, например, стационарное, т. е. не зависящее от времени распределение температуры в теле, а также потенциал стационарного электростатического поля.

Совсем простое по форме, уравнение Лапласа таит в себе огромные богатства замечательных свойств. Оно имеет самые разнообразные приложения, ему посвящены сотни математиче-

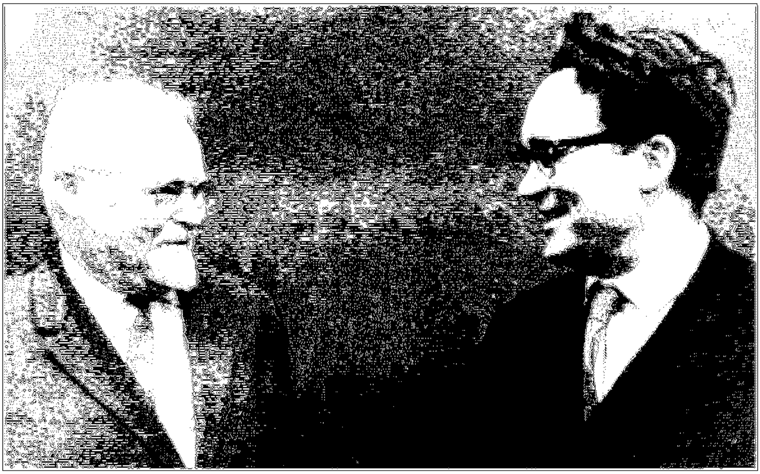
П. С. Александров, А. Н. Тихонов, М. В. Келдыш

ских статей, о нём написаны многие книги, и, несмотря на это, остаётся ещё много связанных с ним трудных, нерешённых проблем. Так называемая задача Дирихле состоит в нахождении решения уравнения Лапласа, которое принимало бы на границе области заданные значения. В работах М. В. Келдыша изучался вопрос о том, как меняется решение задачи Дирихле при изменении границы области, какие свойства решения связаны с формой границы. Этими задачами занимался, а затем интересно и популярно рассказал о них в книге «Я — математик» Норберт Винер. М. В. Келдышу удалось получить значительно более общие результаты.

УЧИТЕЛЬ И УЧЕНИК

Превосходный организатор, М. В. Келдыш привлёк к работе в Институте прикладной математики многих опытных и молодых специалистов. Его заместителем (с 1979 года — директором института) стал Андрей Николаевич Тихонов.

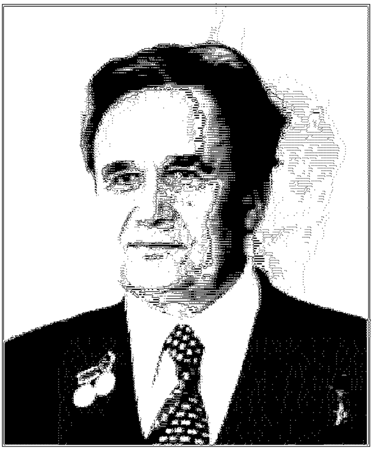
Один из отделов возглавил Александр Андреевич Самарский. Поступив на физический факультет МГУ в 1936 году, Александр Андреевич вскоре начал работать в научном семинаре А. Н. Тихонова. Но в июле 1941 года ушёл добровольцем на фронт, был тяжело ранен во время декабрьского наступления под Москвой и девять месяцев провёл в госпиталях Москвы, Горького и Красноярска. Из госпиталя он вышел на костылях и до конца



А. Н. Тихонов и А. А. Самарский

1943 года работал учителем математики в школе на золотом прииске. Когда МГУ вернулся из эвакуации, А. А. Самарского вызвали в Москву для завершения учёбы. За дипломную работу, выполненную под руководством А.Н. Тихонова, выпускнику университета комиссия хотела сразу присудить кандидатскую степень, но руководитель возразил: «Если мы дадим ему степень, то как иногородний он обязан будет уехать из Москвы. А аспирантура даст ему возможность ещё три года быть в университете». К окончанию аспирантуры у Александра Андреевича было около 20 опубликованных работ.

Совместная работа А.Н. Тихонова и А.А. Самарского обогатила математику многими глубокими исследованиями. Так, в 50-х годах А.Н. Тихонов и А.А. Самарский получили важные результаты, относящиеся к электродинамике. Объектом изучения были волноводы — полые металлические трубы, служащие для передачи высокочастотной энергии. Волноводы появились в физике и радиотехнике как замена обычных двухпроводных линий. Электромагнитное поле было полностью сосредоточено внутри волновода, уменьшались потери, возрастала передаваемая мощность. Расчёт возбуждения волноводов сводился к краевой задаче для системы уравнений Максвелла. Хотя уравнения были хорошо знакомы по задачам электроразведки, постановка задачи была принципиально иной, потребовались новые методы решения. Идеи, развитые при решении этой прикладной задачи, определили в дальнейшем новый подход к чисто теоретическим проблемам.



А. А. Самарский

Характерно, что и здесь Андрей Николаевич столкнулся с обратными задачами. Обратной была задача проектирования — создания электродинамических устройств (например, антенн), возбуждающих электромагнитные колебания с заданными характеристиками. Такие задачи в простейшей постановке ставились и даже решались, но результаты на практике почти не использовались. Дело в том, что разнообразные реальные требования к проектируемой антенне не укладывались в математическую модель, поддающуюся анализу известными методами.

Фундаментальные исследования в области теоретических проблем вычислительной математики были выполнены А.Н. Тихоновым и А. А. Самарским в 1950–1960-х годах. На сей раз изучались разностные схемы, с помощью которых приближённо решаются краевые задачи для уравнений математической физики. Дело в том, что найти точное решение прикладной задачи, описываемой уравнениями в частных производных, удаётся редко. Но и в этом случае оно обычно бывает не слишком удобным для анализа. Решение задачи о колебаниях отрезка струны записывается в виде функционального ряда. Чтобы с требуемой точностью определить форму струны и, скажем, нарисовать графики, требуется исследовать ряд. Часть его членов придётся отбросить, так что результаты всё равно будут приближёнными. Получить аналитическое решение линейных уравнений, содержащих переменные коэффициенты, или нелинейных краевых задач удаётся только в исключительных случаях.

Но практику чисто математические трудности не интересовали, она подбрасывала новые, всё более сложные задачи. Именно под влиянием чисто прикладных областей механики и физики развивались приближённые методы решения краевых задач. Более того, многие из них были первоначально придуманы вовсе не профессиональными математиками. В 1908 году швейцарский инженер В. Ритц, занимаясь задачами теории упругости, нашёл новый способ приближённого решения класса краевых задач. Близкие идеи использовал и английский физик Дж. Рэлей в книге «Теория звука». Через несколько лет другой метод был разработан русскими инженерами И. Г. Бубновым и Б. Г. Галёркиным.

Специалисты по механике, сопротивлению материалов, кораблестроению, они занимались расчётом равновесия упругих стержней и пластин. Впоследствии математики и механики — среди них академики Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, М. В. Келдыш, Г. И. Петров — занялись обоснованием этих методов, исправили неточности авторов, получили далёкие обобщения. Но наиболее важное, с точки зрения практики, обобщение предложили снова инженеры. В конце 60-х годов, руководствуясь чисто физическими соображениями, они разработали так называемый *метод конечных элементов*. То, что новое изобретение представляет собой по существу видоизменение метода Рэлея–Ритца, выяснилось позже, на долю математиков осталось обоснование и дальнейшее развитие. Так уж получилось, что в развитии вариационных методов математической физики (этим названием объединяются все перечисленные выше методы) математики обычно следовали за инженерами.

Первый численный метод решения дифференциальных уравнений принадлежит великому Эйлеру. Резкий качественный скачок в развитии этой науки был связан с появлением быстродействующих ЭВМ. Универсальным методом приближённого решения дифференциальных уравнений математической физики стал метод конечных разностей (метод сеток).

Суть метода состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов (например, x и t) заменяется дискретным конечным множеством точек (узлов), называемых *сеткой*. Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определённые в узлах сетки и называемые *сеточными функциями*. Производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются разностными отношениями. В итоге исходное дифференциальное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений. Начальные и граничные условия также заменяются разностными условиями для сеточной функции. Полученную таким образом разностную краевую задачу называют *разностной схемой*.

Метод будет эффективным лишь при условии, что разностная схема разрешима и её решение при увеличении числа узлов сетки приближается к точному решению исходной задачи. Доказательство этого факта, наряду с построением эффективного алгоритма решения разностной краевой задачи, требует использования самых современных методов функционального анализа и вычислительной математики. Однако для многих важных классов задач математической физики само существование решения остаётся неясным. Математики решают и такие задачи, при этом используются полуэмпирические соображения, численные эксперименты на задачах, для которых известно точное решение, просто интуиция.

Целью теории разностных схем является отыскание семейства схем, пригодных для решения возможно более широкого класса задач. Из этого семейства надо выделить лучшие схемы. Качество определяется экономичностью в смысле объёма вычислений, скоростью приближения к точному решению. Распространённое мнение о могуществе ЭВМ последних поколений может создать впечатление, что разработка новых методов и схем нужна только самим математикам. В действительности одновременно с совершенствованием вычислительной техники происходит и усложнение решаемых задач. Современная математическая физика имеет дело в основном с процессами и явлениями, описываемыми нелинейными уравнениями, содержащими несколько пространственных переменных. Численное моделирование в этом случае нередко сводится к решению систем линейных уравнений, содержащих 10^5–10^6 неизвестных. Методами, известными 30 лет назад, даже с учётом быстродействия нынешних компьютеров такие задачи в принципе не могли быть решены. Именно практика диктует необходимость дальнейшего развития теории численных методов.

Многие реальные процессы моделируются дифференциальными уравнениями с разрывными коэффициентами. Примерами могут служить движение границ фазовых переходов, диффузия нейтронов, распределение температуры в реакторе, состоящем из зон с различными физическими свойствами. Для каждой подобной задачи приходилось изобретать свой алгоритм численного решения, учитывающий характер разрывов. Работами А.Н. Тихонова и А.А. Самарского в вычислительную математику было введено понятие однородных разностных схем. Вычисления во всех узлах сетки можно было вести по одним и тем же формулам, независимо от того, будут коэффициенты уравнения непрерывными или разрывными.

В предыдущей беседе говорилось, что дифференциальные уравнения математической физики обычно являются следствиями интегральных законов сохранения. Разностные схемы также должны выражать законы сохранения на сетке. Эта идея привела А.Н. Тихонова и А.А. Самарского к разработке теории консервативных разностных схем. На основе новых численных методов были созданы удобные и экономичные алгоритмы. Ученики А.А. Самарского существенно развили понятия однородности и консервативности, расширили области применения этих схем, решили много важных практических задач.

В конце 1960-х годов А.Н. Тихонов и А.А. Самарский сделали открытие в физике. Их соавтором была вычислительная машина. Так называемый Т-слой в плазме был обнаружен чисто математически, при расчёте на ЭВМ процесса расширения плазменного столба в магнитном поле. Численное решение сложнейших уравнений свидетельствовало, что в отдельных зонах, слоях столба сосредотачиваются электрические токи, поддерживающие более высокую температуру. Математическое моделирование в сочетании с вычислительной техникой давало физикам качественно новые методы исследования. Специалист в области физики атомного ядра и элементарных частиц, лауреат Нобелевской премии Ю. Вигнер (США) даже написал статью, которая называлась «Непостижимая эффективность математики в естественных науках».

В 1970-х годах группа сотрудников Физического института им. П.Н. Лебедева АН СССР, возглавляемая лауреатом Нобелевской премии академиком Н.Г. Басовым, изучала механизм возбуждения термоядерной реакции при помощи лазера. Математическим моделированием процесса в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша занимались А. Н. Тихонов и А. А. Самарский.

Творческому содружеству А. Н. Тихонова и А. А. Самарского математики и физики обязаны уникальным учебником «Уравнения математической физики». При всей его математической

Н. Г. Басов и А. Н. Тихонов

строгости это, пожалуй, наиболее физический из известных учебников по математической физике. «Мы стремились подчинить выбор и изложение материала характеристике типичных физических процессов...», — говорится в авторском предисловии.

Изучение каждого типа уравнений начинается с простейших физических задач. Затем следует перевод на язык математики, даётся строгая математическая постановка задачи, находится её формальное решение. Чисто математическая часть на этом кончается, но искушённые в решении прикладных задач авторы непременно останавливаются на физической интерпретации полученных результатов. Большой интерес представляют приложения к главам, в которых изложенные методы применяются для решения достаточно сложных задач физики и техники. Часть этого материала основана на собственных исследованиях авторов. Из учебника читатель узнает, как ставятся и решаются задачи в электроразведке и теории волноводов, каким образом радиоволны распространяются над поверхностью земли, а радиоактивный распад влияет на температуру земной коры, как рассчитывается скин-эффект в проводниках и движется граница раздела фаз при замерзании воды.

Учебник выдержал пять изданий и переведён на многие иностранные языки. По нему учились и продолжают учиться математической физике все те, кому эта наука нужна как метод исследования.

«ЗА ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАСЛУГИ...»

Интерес А.Н. Тихонова к теории разностных схем связан с периодом его жизни, о котором ничего не говорится в юбилейных публикациях.

Ещё в 1942 году группа американских физиков-теоретиков начала изучать вопрос о возможности создания бомбы, основанной на термоядерной реакции. Расчёты показали, что для начала этой реакции, превращающей водород в гелий, требуется огромная температура. Создать её могла только атомная бомба, являющаяся для водородной, или супербомбы, как называли её американцы, как бы запалом. Атомные бомбардировки Хиросимы и Нагасаки в 1945 году привели часть учёных к мысли отказаться от создания ещё более разрушительного оружия. Но группа физиков, возглавляемая Э. Теллером, продолжала исследования. В 1947 году сведения о работе над супербомбой попали в печать, некоторые публикации содержали угрозы Советскому Союзу.

Встревоженное правительство Советского Союза обратилось к И.В. Курчатову, недавно запустившему первый урановый реактор. Руководитель советских атомщиков посоветовал начать работу и привлечь к ней и учёных старшего поколения, стоящих пока в стороне от оборонных задач, и новое, молодое поколение физиков, математиков, инженеров.

В группу, занимавшуюся исследованиями термоядерных реакций, вошли уже имевшие большой опыт работы над атомной бомбой сотрудники Института химической физики АН СССР, члены-корреспонденты АН СССР Я.Б. Зельдович и Ю.Б. Харитон. В предвоенные годы они первыми в нашей стране провели теоретическое исследование цепной реакции деления урана. В работу включился академик Л.Д. Ландау, заведующий теоретическим отделом Института физических проблем АН СССР. К тому времени Л.Д. Ландау был известен во всём мире как автор глубоких работ в самых разных областях физики, в том числе и ядерной. За работы в области теории конденсированных сред (жидкого гелия) в 1962 году он был удостоен Нобелевской премии. Математическим моделированием исследуемых процессов занимались сотрудники Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР И. Е. Тамм и А. Д. Сахаров.

Заведующий теоретическим отделом Института член-корреспондент АН СССР Игорь Евгеньевич Тамм был в то время признанным авторитетом в ядерной физике. В 1934 году он

Л. Д. Ландау

И. Е. Тамм

и Д. Д. Иваненко построили одну из первых теорий ядерных сил. Спустя год японский физик Х. Юкава, исходя из этой теории, предсказал существование мезона. В 1937 году И. Е. Тамм вместе с И. М. Франком создали теорию излучения, обнаруженного тремя годами ранее аспирантом С. И. Вавилова П. А. Черенковым. С тех пор эффект Черенкова широко используется физиками всего мира в счётчиках заряженных частиц. За открытие и объяснение этого эффекта П. А. Черенкову, И. М. Франку и И. Е. Тамму в 1958 году была присуждена Нобелевская премия.

Андрей Дмитриевич Сахаров поступил на физический факультет МГУ в 1938 году. Когда началась война, многие его товарищи по учёбе были призваны в Военно-воздушную академию, но его не пропустила медицинская комиссия. Вместе с университетом он был эвакуирован в Ашхабад, где закончил учёбу и был направлен на патронный завод в Ульяновск. В 1943–1944 годах сделал самостоятельно несколько научных работ и послал их в Физический институт Игорю Евгеньевичу Тамму. В 1945 году он стал аспирантом И. Е. Тамма, в 1947 году защитил диссертацию, а с 1948 года приступил к работе в специальной группе, занимавшейся разработкой термоядерного оружия. За работы по расчёту термоядерных реакций в 1953 году он стал академиком, Героем Социалистического Труда. Этой же награды Андрей Дмитриевич был удостоен ещё дважды — в 1956 году и 1962 году. С конца 1960-х годов А. Д. Сахаров возглавлял группу учёных, выступавших против реабилитации сталинизма, подавления интеллектуальных свобод, преследования инакомыслящих. За эти выступления он был отлучён от коллег и учеников, выслан из Москвы. Манифесты А. Д. Сахарова получили широкую известность на Западе, его деятельность по защите прав человека была в 1975 году отмечена Нобелевской премией мира. В 1986 году А. Д. Сахаров вернулся в Москву, возобновил нормальную научную работу, был избран членом президиума Академии наук СССР, народным депутатом СССР.

А. Д. Сахаров

И. Е. Тамм и А. Д. Сахаров стали основными заказчиками для отдела А. Н. Тихонова. Руководителям советской военной промышленности член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов был известен как автор метода расчёта фильтров для противогазов. Физики знали его как математика, умеющего довести до конкретных результатов решение самой сложной прикладной задачи. Вызванному в Кремль А. Н. Тихонову было поручено возглавить выполнение всех расчётов, связанных с созданием водородной бомбы.

Отдел А. Н. Тихонова, насчитывавший около 60 человек, размещался сначала на Пятницкой улице, а затем переехал на улицу Кирова в здание с не вызывающей интереса вывеской. Большинство в отделе составляли женщины-вычислители, многие из них прежде работали с Андреем Николаевичем в Институте теоретической геофизики АН СССР. Орудиями счёта служили трофейные электромеханические машины «Мерседес». Внешне эти машины напоминали пишущие, выполнение арифметических операций сопровождалось лязгом кареток.

Среди немногочисленных научных сотрудников отдела выделялись двое — А. А. Самарский и Н. Н. Яненко. Александр Андреевич Самарский, о чьей совместной работе с А. Н. Тихоновым уже рассказывалось, защитил в 1948 году диссертацию по задачам, связанным с уравнением Лапласа, и приступил к работе в отделе.

Николай Николаевич Яненко учился в Томском университете. В Томск во время войны эвакуировалась часть преподавателей МГУ, среди которых был известный специалист в области дифференциальной геометрии профессор П. К. Рашевский. Под его руководством Н. Н. Яненко делал дипломную работу. Сразу после окончания университета Николай Николаевич был призван в армию и прошёл фронтовыми дорогами от Ленинграда до Кёнигсберга. После демобилизации он поступил в аспирантуру механико-математического факультета МГУ к П. К. Рашевскому, с которым переписывался все военные годы. В отдел А. Н. Тихонова он был направлен в 1948 году после защиты диссертации.

В жизни А. А. Самарского и Н. Н. Яненко было много общего. Оба они воевали, вместе делили тяготы голодного и неустроенного послевоенного быта в аспирантском общежитии на Стромынке. Общим для них был и интерес к задачам математической физики и вычислительной математики, возникший во многом под влиянием работы в отделе А. Н. Тихонова. Докторская диссертация Н. Н. Яненко ещё продолжала начатые ранее исследования по многомерной дифференциальной геометрии, но после её защиты в 1954 году Николай Николаевич полностью переключился на новые задачи. А. Н. Тихонова он считал своим вторым учителем. Работы А. А. Самарского и Н. Н. Яненко по расчёту термоядерных реакций были отмечены Государственными премиями СССР, впоследствии оба они стали крупнейшими специалистами по вычислительной математике, академиками, Героями Социалистического Труда.

Н. Н. Яненко

Работа в отделе была поставлена таким образом, что каждый знал лишь то, что ему необходимо было знать. Сам Андрей Николаевич мог лишь догадываться о том, какой процесс описывают составленные физиками уравнения. От отдела требовалось надёжное и по возможности быстрое решение этих уравнений.

Вычислительной математики как науки в то время ещё не существовало, практически каждый шаг был шагом в неизвестность. Появившийся опыт расчётов уранового реактора и атомной бомбы был не слишком полезен. Там приходилось решать обыкновенные дифференциальные уравнения, а здесь — с частными производными. В самом начале работы Л. Д. Ландау в разговоре с А. Н. Тихоновым выражал сомнение в принципиальной возможности численного решения подобных задач. Своим подчинённым Андрей Николаевич об этом разговоре не сказал. Они не знали, что ежедневно решают задачи, которые до них не решал никто. Один из научных сотрудников отдела В. Я. Гольдин пишет об этом так: «Иногда наши результаты называли героическими, но мы не знали, что герои; и это наше незнание спасало нас». Андрею Николаевичу и его сотрудникам приходилось не только придумывать численные методы, но и беспокоиться о том, чтобы их можно было реализовать весьма скромными средствами и за короткое время.

Физик Р. Юнг в книге «Ярче тысячи солнц» описывает историю появления атомного оружия. Он отмечает, что для американцев путь к супербомбе оказался блокированным «почти непреодолимой горой, а именно, горой цифр». На начальном этапе справиться с этой горой помогала первая в мире электронно-вычислительная машина ЭНИАК. Вскоре усилиями выдающегося математика Джона фон Неймана была создана и передана атомщикам новая, более совершённая машина.

Отдел А. Н. Тихонова вычислительной техникой такого класса не располагал. Тем острее стояли вопросы разработки экономичных, с точки зрения числа операций, алгоритмов счёта. Именно в это время появились многие идеи, которые позже были изложены в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского по теории разностных схем.

Много хлопот причиняла математикам неустойчивость — явление, часто возникающее при решении разностных краевых задач. Малые изменения в исходных данных задачи должны приводить к малым изменения решения. Только схемы, удовлетворяющие этому требованию, можно применять в реальных вычислениях, в противном случае на результатах счёта сильно скажутся ошибки округлений чисел. Если разностная схема моделирует уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными или систему таких уравнений, то её устойчивость определяется (в основном) величинами шагов сетки по каждой из переменных. В наши дни для наиболее употребительных разностных схем вопрос о соотношении между шагами, гарантирующем устойчивость, решён теоретически. Если же используется новая схема и нет уверенности в её устойчивости, то пользуются следующим приёмом: одну и ту же задачу решают несколько раз, уменьшая шаги сетки. Если результаты не «плывут», то считается, что устойчивость достигнута. Естественно, что объём вычислений резко возрастает. Для современного компьютера это, быть может, и не страшно, но в отделе А. Н. Тихонова были только «Мерседесы».

Важным был вопрос о контроле результатов счёта. Задание на счёт выдавалось сразу двум исполнителям, в процессе работы они не имели права общаться между собой. Сами задания проходили тройной контроль. А. А. Самарский вспоминает, что если он писал задание, то Н. Н. Яненко и В. Я. Гольдин его проверяли, в следующий раз роли менялись. По решению математиков была установлена символическая такса за ошибки, деньги вносили в общий фонд. Обязанность контроля итоговых результатов лежала на руководителе отдела.

Работа отдела была хорошо организована, быстро, но без излишней спешки и нервозности каждый делал порученное ему дело. Андрей Николаевич успевал в эти годы и руководить отделом, и читать лекции, и вести семинары в МГУ, и продолжать фундаментальные исследования в области геофизики и теории дифференциальных уравнений с малыми параметрами, и работать над учебником «Уравнения математической физики». Образ его жизни в это время ничем не отличался от привычного.

1 ноября 1952 года на атолле Эниветок американцам удалось осуществить термоядерную реакцию. Взорванное устройство имело огромный вес и габариты, превышающие размеры дома. Работа над бомбой «нормальных размеров» продолжалась, когда 8 августа 1953 года в советской печати появилось сообщение о том, что «Соединённые Штаты не обладают монополией на производство водородной бомбы».

Утром 12 августа 1953 года на командном пункте полигона в Средней Азии, отдалённом от места взрыва на многие десятки километров, собрались члены правительства, военные, учёные. Был среди них и Андрей Николаевич Тихонов. Испытания прошли успешно. В расчётах отдела А. Н. Тихонова ошибок не было. Исключительные заслуги А. Н. Тихонова перед государством при выполнении этого задания правительства были отмечены Государственной премией СССР и званием Героя Социалистического Труда.

Американским специалистам удалось создать бомбу, пригодную для военных целей, к марту 1954 года.

В последние годы много говорят и пишут о том, что важную роль в работе над советским атомным проектом сыграли шпионские сведения. В связи с этим в 2001 году журналист спросил у Александра Андреевича Самарского: «У вас была информация от американцев?» Академик ответил: «Я даже не подозревал о существовании шпионов в этой области. Ко мне ни разу и ни от кого — а я на первом этапе много общался с Таммом, Сахаровым и Зельдовичем — не поступало ни единой информации, ни единой цифры или идеи! Подчёркиваю — ни разу! И сразу же добавляю: к счастью, потому что это позволило идти своим путём и, в конце концов, опередить американцев».

ДЕВЯТЫЙ ВАЛ

Сама жизнь постоянно сталкивала Андрея Николаевича Тихонова с обратными, некорректными задачами. Прошло около 20 лет с тех пор, как он придумал метод подбора, видоизменявший исходную задачу, делавший её устойчивой. За это время вышли десятки статей, книги, посвящённые задачам, корректным по Тихонову. Разработанные методы в основном устраивали геофизиков. Но самого А. Н. Тихонова они не устраивали. Он был уверен, что, накладывая запрет на решение некорректных задач, Адамар ошибался. Но прав был великий Гёте, утверждавший, что «гораздо легче найти ошибку, нежели истину». Поиски истины требовали напряжённой работы, каждый шаг давался с большим трудом. Он понял, что надо изменить привычные формулировки, исходные данные любой задачи должны быть известны вместе с числовым параметром δ — их точностью. Ему была ясна основная идея: некорректную задачу надо регуляризовать — заменить семейством зависящих от параметра корректных задач. Он уже догадывался, каков будет финал, и мог повторить слова Гаусса: «Мои результаты давно известны, я только не знаю, как я к ним приду». В 1963 году он, наконец, нашёл путь к своим результатам. Первая статья называлась «О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации». В течение следующих трёх лет вышло более 20 публикаций А. Н. Тихонова по этим вопросам. В 1966 году цикл работ А. Н. Тихонова по некорректным задачам был отмечен Ленинской премией, а сам Андрей Николаевич стал действительным членом Академии наук СССР.

Некоторые итоги исследований в области теории и практических применений нового метода подвела монография «Методы решения некорректных задач», написанная А. Н. Тихоновым и его учеником В. Я. Арсениным в 1974 году.

Далеко не всегда решение научной проблемы, долгое время не поддававшейся усилиям учёных, требует абсолютно новых идей и аппарата. Долгожданный эффект могут принести и старые, испытанные средства, если удастся взглянуть на них с новой, неожиданной точки зрения. Сам Андрей Николаевич отмечает, что зависящие от параметра регуляризующие операторы применялись в математике со времён Ньютона.

Мы уже рассматривали задачу о дифференцировании функции, известной приближённо. В пространстве непрерывных функций $C[a,\, b]$ эта задача некорректна. Для решения той же задачи рассмотрим семейство операторов

$$R(u,\, \alpha) = \frac{u(t+\alpha) - u(t)}{\alpha}.$$

Пусть функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема и δ — точность исходных данных, т. е. в нашем распоряжении имеется приближённое значение исходной функции $u_\delta(t) = u(t) + \nu(t)$ и при всех $t \in [a,\, b]$ выполнено неравенство $|\nu(t)| \leqslant \delta$. Тогда

$$R(u_\delta,\, \alpha) = \frac{u(t+\alpha) - u(t)}{\alpha} + \frac{\nu(t+\alpha) - \nu(t)}{\alpha}.$$

При $\alpha \to 0$ первое слагаемое стремится к производной du/dt, второе слагаемое при всех t и $t+\alpha$ из рассматриваемого отрезка не превосходит $2\delta/\alpha$. Если взять, например, $\alpha = \sqrt{\delta}$, то при $\delta \to 0$ будет

$$R(u_\delta,\, \alpha) \to \frac{du}{dt}.$$

Таким образом, при замене производной разностным отношением приращения аргумента должны быть не слишком малыми по сравнению с погрешностью значений функции. Эту давно известную математикам идею Андрей Николаевич называет интуитивной регуляризацией.

Рассмотренный пример совсем прост и нагляден. Созданная А. Н. Тихоновым общая теория регуляризации некорректных (в частности, обратных задач) использует сложный аппарат функционального анализа. Применительно к обратным задачам $Az = u$ она выглядит примерно так. Пусть δ — точность исходных данных u, т. е. известно их приближённое значение u_δ, погрешность которого не превосходит δ. Рассматривается семейство A_α регуляризующих операторов такое, что при $\alpha \to 0$ A_α переходит в A. Разнообразные методы построения этого семейства, обеспечивающие при каждом значении параметра α корректность задачи $A_\alpha z = u_\delta$, составляет основу теории. Решение последней задачи z_α при достаточно малом α, выбираемом в соответствии с величиной δ, и является приближённым решением исходной обратной задачи.

Создание А. Н. Тихоновым методов устойчивого решения широкого класса некорректных задач считается одним из наиболее ярких достижений современной математики. Появилось новое направление, значительно расширившее возможности применения математических моделей в науке и технике. Конечно, идеи А. Н. Тихонова были развиты и его учениками, и другими математиками. По некорректным задачам проводятся симпозиумы, издаются специальные журналы, монографии. Над ними продолжают работать математики во всём мире.

Общепринятым критерием оценки работы учёного считается число ссылок на его публикации в научной литературе. Ежегодные мировые индексы цитирования, издаваемые в США и Англии, стабильно содержат около 200 ссылок в год на работы А. Н. Тихонова. «В научном творчестве должны действовать отдельные личности, в своей жизни или в данный момент времени возвышающиеся среди среднего уровня. И эти выдающиеся люди не могут быть заменены в большинстве открытий коллективной работой многих», — писал В. И. Вернадский.

Метод регуляризации был использован А. Н. Тихоновым для решения вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода, задач математического программирования, оптимального управления, устойчивого суммирования рядов Фурье и многих других. По сути дела он представлял собой эффективный вычислительный алгоритм, наилучшим образом приспособленный для реализации на ЭВМ. Барьер, разделявший прикладные и некорректные задачи, исчез. Этим сразу же воспользовались представители самых различных областей науки и техники.

Андрей Николаевич сотрудничал с механиками, астрофизиками, геофизиками, химиками, инженерами, экономистами, медиками. Приведём несколько названий совместных работ: «Математическое моделирование при решении задач обработки и интерпретации экспериментальных физических данных», «Некоторые задачи оптимизации технологических процессов в металлургии», «Методы регуляризации в задачах изучения структуры вещества», «Математические модели электродинамики излучающих систем», «О методах математической обработки рентгеновских изображений», «Определение оптимальных сроков производства». Мы расскажем лишь о некоторых направлениях, наиболее доступных для популярного изложения.

КАК ПОСТАВИТЬ ДИАГНОЗ

Слово «диагностика» происходит от греческого *diagnostikos*, означающего «способный распознать». В медицине так называется раздел, изучающий признаки болезней, методы их распознавания и постановки диагноза — определения существа болезни. В технике под диагностикой понимается установление и изучение признаков, характеризующих состояние машин, приборов, технических систем, для предсказания возможных отклонений, предотвращения поломок, аварий. Иногда этот же термин используется и в более широком смысле. Диагностика плазмы, например, включает в себя методы её исследования и измерения характеристик.

Проведение физических измерений — лишь начальный этап всякой диагностики. Определяющим является следующий этап — интерпретация. По косвенной информации врач должен высказать суждение о состоянии внутренних органов человека, инженер — об износе деталей, находящихся глубоко внутри работающего устройства, физик — об электронной плотности и температуре плазмы, не поддающихся непосредственному измерению. Во всех этих случаях мы имеем обратные задачи, причём объём исходных данных может быть достаточно большим, а методы обработки косвенной информации — сложными.

Вычислительной диагностикой называют совокупность методов и средств, предназначенных для исследования объектов по имеющейся косвенной информации с помощью вычислительной техники. Это новое направление порождено компьютеризацией науки, промышленности, медицины. С помощью методов вычислительной диагностики проводится контроль труднодоступных узлов реактивных двигателей и турбин, элементов ядерного реактора. Компьютер в сочетании с электронным микроскопом стал основным инструментом в исследовании биологических структур и кристаллических решёток. Соединение компьютера и современных измерительных приборов дало возможность получить новые данные в физике плазмы, астрофизике, геофизике.

Проблемы изучения плотности электронов на сферической поверхности вокруг Солнца или структуры биологических молекул мало волнуют людей, далёких от науки. Но каждому человеку приходится иметь дело с врачами и в большей или меньшей степени полагаться на результаты медицинской диагностики. В создании современных средств медицинской диагностики Андрей Николаевич Тихонов принял самое непосредственное участие.

В 1895 году директор Физического института при Вюрцбургском университете В. Рентген обнаружил новый вид излучения, исходящего от катодной трубки. В предварительном сообщении об открытии он упомянул, что лучи дают возможность получать изображение скелета человека. Вскоре появился первый в мире рентгеновский снимок, на нём была запечатлена рука госпожи Рентген с чётко выделяющимся золотым кольцом. Современники и особенно медики были в восторге от всепроницающих лучей. Рентгеновский аппарат означал революцию в медицинской диагностике, так как давал врачу больше информации о невидимом, чем другие средства. «За открытие лучей, носящих его имя», — говорилось в решении Шведской академии наук 1901 года о присуждении В. Рентгену первой в истории Нобелевской премии по физике. Любопытно, что лучи эти он открыл случайно. Впрочем, «на случай при великих открытиях наталкиваются лишь те, кто его заслуживает», — веком раньше писал Ж. Лагранж.

Непосвящённому на рентгеновском снимке отчётливо видны только кости. Понятно, что специалист легко различит их повреждение, перелом. Как же рентгенологи узнают об опухоли мозга или процессе в лёгком? Основной принцип рентгенодиагностики состоит в том, что рентгеновские лучи, проходя через ткани различной плотности, по-разному ослабевают. Коэффициенты поглощения нормальных и патологических тканей отличаются, тени различных участков внутреннего органа, фиксируемые на снимке, выглядят темнее или светлее. Но беда в том, что теневые изображения различных органов накладываются друг на друга. Кроме того, рентгеновские изображения, как правило, слишком тёмные: нельзя использовать большие дозы излучения, а чувствительность плёнки мала. Поэтому восстановление трёхмерной картины по одной или нескольким (пациента поворачивают) двумерным проекциям — скорее не наука, а искусство, степень владения им и отличает опытного рентгенолога.

Недостатки рентгенодиагностики были очевидны с самого начала. Так возникла идея *томографии* (описания сечений): надо получать снимки, на которых одна фиксированная плоскость воспроизводилась бы чётко, а все остальные были бы размазаны. Такие рентгеновские аппараты придумали в 1930-х годах, но по-прежнему слишком многое зависело от искусства расшифровки. Выход из создавшегося положения состоял в том, чтобы резко увеличить число используемых проекций. Через плоский слой исследуемого органа надо в большом числе направлений пропускать малые дозы излучения. Но человеческий мозг уже не может справиться с огромным объёмом поступающей информации. Нужен компьютер. Соединение в одну установку рентгеновского аппарата и компьютера было второй революцией в медицинской диагностике. Компьютерный томограф впервые появился в клинике в 1971 году. Создателями компьютерной томографии были физик из Кейптауна А. Кормак (сейчас он работает в США) и английский инженер Г. Хаунсфилд. В 1979 году они стали лауреатами Нобелевской премии по медицине.

Принцип действия рентгеновского компьютерного томографа состоит в следующем. Рентгеновская трубка и жёстко связанный с ней детектор движутся вокруг пациента, оставаясь в одной плоскости. Трубка движется не только поступательно, но и поворачивается, число её положений составляет сотни тысяч. Излучение пронизывает исследуемый орган по всем возможным направлениям. При каждом угле поворота узкий пучок рентгеновских квантов после прохождения через тело попадает в детектор. Детектор измеряет интенсивность прошедшего излучения, электронная схема усиливает сигналы детектора и направляет их в вычислительный комплекс. ЭВМ последовательно восстанавливает вид плоских сечений. Численная информация, преобразованная в распределение яркости, предстаёт в виде изображений на экране. Благодаря томографу объект исследования можно как бы повернуть на 90° и увидеть сверху.

Основными параметрами томографа являются скорость получения изображения и разрешающая способность, т. е. «умение» различать близкие значения коэффициента поглощения. Чтобы увеличить эти параметры, используются специальные процессоры, многие источники и детекторы одновременно, другие технические решения. Но одна из главных ролей принадлежит математическому обеспечению.

Коэффициент поглощения излучения в плоском сечении есть функция двух переменных $f(x, y)$. Величина поглощения на каждом луче, пересекающем исследуемую плоскую область, может быть выражена интегралом по этому лучу. Возникает задача, относящаяся к так называемой интегральной геометрии:

восстановить заданную в области функцию $f(x, y)$, если известны её интегралы по всем прямым, пересекающим область. Задача эта была решена австрийским математиком И. Радоном в 1917 году. Преобразование Радона ставит в соответствие каждой функции её интеграл по прямой. Обратное преобразование также задаётся интегралом (вспомним прямое и обратное преобразования Лапласа или Фурье). Кстати, преобразования Радона и Фурье оказываются тесно связанными между собой.

Прошло около 40 лет, прежде чем результаты Радона нашли практическое применение. Преобразование Радона потребовалось для исследования сверхвысокочастотного излучения Солнца. Когда пришла эра компьютерной томографии, формула обращения Радона была «переоткрыта» А. Кормаком заново. Именно обратное преобразование Радона лежит в основе решения задачи восстановления функции $f(x, y)$.

Первый компьютерный томограф был привезён в нашу страну из ФРГ. Министерство электротехнической промышленности СССР собрало группу специалистов, которой было поручено разобраться в принципах действия компьютерных рентгеновских томографов, дать предложения по организации их производства в нашей стране. Сотрудникам Института прикладной математики, возглавляемого А.Н. Тихоновым, предстояло разобраться в вопросах математического обеспечения. Для начала были изучены сопроводительные материалы, рекламные проспекты, затем математики осмотрели установку в действии. Впечатление было двойственным. С одной стороны, поражала возможность видеть на экране живой мозг. С другой — чувствительность томографа оказалась ниже ожидаемой. Пытаясь улучшить изображение, представитель фирмы постоянно что-то подкручивал, налаживал, но обещанной в рекламных проспектах чёткости добиться не мог.

Из доступных публикаций следовало, что алгоритм построения томограмм основан на использовании обратного преобразования Радона. Но это преобразование не при всяких реальных исходных данных имеет смысл и неустойчиво к их малым изменениям. Это лишь одна из некорректных задач в математической теории компьютерной томографии. Другие некорректные постановки порождены самой задачей интерпретации зависящих от времени данных. Каждый из этапов — работа детекторов, регистрирующих интенсивность прошедшего излучения, преобразование сигналов детекторов, создание изображения на экране — может быть формализован следующим образом.

На вход устройства поступает сигнал $z(t)$, сигнал на выходе $u(t)$ связан с входным сигналом соотношением

$$\int_0^t K(t-\tau)z(\tau)d\tau = u(t).$$

Так называемая аппаратурная функция $K(t-\tau)$ представляет собой реакцию устройства на воздействие δ-функцией, принимающей бесконечное значение при $t=\tau$. На практике для получения этой функции на вход подают высокий и короткий прямоугольный импульс. Задача интерпретации показаний прибора, т. е. определения формы поступившего сигнала, сводится к решению линейного интегрального уравнения первого рода. Задача эта, как уже отмечалось выше, некорректна, а исходные данные $u(t)$ содержат случайные погрешности.

Для получения устойчивых результатов в зарубежных компьютерных томографах использовались различные методы сглаживания, являющиеся по существу интуитивной регуляризацией. Характер методов мог быть весьма различным, но в любом случае сохранялся фирмой, производящей томографы, в строгом секрете. Алгоритм сглаживания не позволял улучшить приближение к точному решению, этим, видимо, и объяснялась недостаточная чёткость изображения. К тому же любое изменение конструкции томографа означало необходимость серьёзных изменений и в математическом обеспечении.

Теоретики и конструкторы первого советского рентгеновского компьютерного томографа СРТ-1000, предназначенного для исследований головного мозга, поставили перед собой задачу создать более совершённую установку, чем имеющиеся к тому времени образцы. Работой руководили академик А. Н. Тихонов и профессор И. Б. Рубашов. В основу математического обеспечения была положена специально разработанная форма метода регуляризации. Принцип локальной регуляризации использовал дополнительную информацию как количественного, так и качественного типа, и в конечном счёте обеспечивал более высокую разрешающую способность. Специализированные вычислительные устройства и комплексы программ позволили довести время получения томограммы до 5–30 с.

При создании современных ЭВМ затраты на разработку их математического обеспечения в 2–3 раза превышают расходы на конструирование. С компьютерными томографами дело обстоит так же. Разработанные А. Н. Тихоновым и его учениками общие принципы позволяют производить различные модификации компьютерных томографов, не меняя при этом существа математического обеспечения.

Когда начиналась работа над созданием отечественных компьютерных томографов, фирма «Дженерал Электрик» предложила купить у неё пакет программ, оценив его более чем в 6 млн долларов. Наши математики предпочли пойти своим путём. На основе метода регуляризации А. Н. Тихонова им удалось создать менее «шумящие» алгоритмы, более «быстрые» программы, которыми заинтересовались западные фирмы.

С 1981 года томограф СРТ-1000 действует в Институте неврологии Академии медицинских наук СССР. До появления томографа для того, чтобы как-то увидеть, что происходит в мозге больного человека, в черепе делалось отверстие. Через него с помощью иглы в желудочки мозга вводилось контрастное вещество. «Окрашенные» желудочки можно было различить на обычном рентгеновском снимке. Если удавалось увидеть изменения в их положении, то на основании этого судили о новообразовании в мозге, самих новообразований врачи не видели. Компьютерный томограф избавил тысячи людей от мучительных и недостоверных процедур. С 1983 года аппараты такого типа выпускаются серийно, они установлены во многих ведущих клиниках страны.

То же самое математическое обеспечение было использовано при разработке томографа для исследования человеческого тела, его первый экземпляр был передан в 1983 году Всесоюзному онкологическому научному центру. Интересно, что созданию этого компьютерного томографа во многом помог другой компьютер: на стадии проектирования технические решения отдельных комплексов, узлов, систем управления выбирались путём численных экспериментов.

Принцип вычислительной томографии оказался настолько плодотворным, что начались разработки томографов, использующих другие виды излучения. Естественно, что менялись и математические постановки задач. Весьма перспективным казалось применение ультразвука, так как он абсолютно безвреден. В отличие от рентгеновского ультразвуковой томограф восстанавливает не коэффициент поглощения, а скорость распространения ультразвука, связанную с биологическими свойствами тканей. Ещё одно, более принципиальное отличие состоит в том, что рентгеновское излучение распространяется в объекте по прямой, а ультразвуковой луч — по сложным траекториям, подвергаясь отражениям и дифракции. Формализовать такой процесс сложно. По оценкам А. Н. Тихонова и его коллег, известные математические модели ультразвуковой томографии достаточно хорошо описывают процессы только в однородных мягких тканях. Ультразвуковые томографы внедрены в клиническую практику, они предназначены для исследования молочной железы, когда рентгеновским излучением даже в самых малых дозах пользоваться нельзя.

Революцию, но уже в компьютерной томографии, представляло создание томографа, основанного на явлении ядерно-магнитного резонанса (ЯМР). ЯМР-томография основана на взаимодействии переменных во времени магнитных полей с ядрами некоторых атомов (например, водорода) в мягких биологических тканях. Если облучать объект электромагнитным полем определённой частоты, то вдоль линии L постоянной магнитной напряжённости возникают условия ЯМР. Когда облучение ведётся в импульсном режиме, вещество будет то поглощать энергию, то излучать её. Информацию об объекте несёт излучённая энергия; формально она выражается интегралом вдоль линии L. Задачи интерпретации здесь, разумеется, некорректны, но имеют, по сравнению с рентгеновскими, свою специфику.

В статье «О решении проблемы восстановления изображения в ЯМР-томографе», опубликованной в 1982 году, А. Н. Тихонов и его коллеги сформулировали основные положения теории ЯМР-томографии, на базе которых был создан пакет программ. С 1983 года ЯМР-томографами пользуются нейрохирурги, онкологи, кардиологи.

Интенсивные исследования в области теории и практики компьютерной томографии, как в медицине, так и в других областях науки и техники, ведутся во всём мире. Вышедшая в 1987 году книга сотрудников Института прикладной математики А. Н. Тихонова, В. Я. Арсенина и А. А. Тимонова «Математические задачи компьютерной томографии» не только подводит итог проведённых исследований, но и намечает подходы к созданию математического обеспечения для принципиально новых компьютерных томографов.

ИНТУИЦИЯ И АНТЕННЫ

Важным результатом научных исследований является создание, синтез новых устройств, приборов. Объекта пока не существует, есть только его математическая модель. Требования к прибору — это «исходные данные» u характеристики прибора формализуются неизвестным «решением» z, связь между u и z задаётся условием $Az = u$. Таким образом, задача проектирования или синтеза является обратной и, возможно, некорректной.

Общего метода решения таких задач не было, поэтому обычно пользовались следующим приёмом: руководствуясь опытом, задавали z и выясняли, какое при этом получится u. Если «исходные данные» оказывались далеки от желаемых, пытались что-то изменить в z.

Мы уже упоминали о задаче проектирования антенн. Основной характеристикой излучающей антенны является так называемая диаграмма направленности, описывающая распределение энергии излучения в пространстве в зависимости от угла. Для того чтобы синтезировать антенну с заданной диаграммой, надо решить интегральное уравнение первого рода. В середине 1960-х годов эта задача привлекла внимание физиков. В работе академиков П.Л. Капицы, В.А. Фока и Л.А. Вайнштейна такое решение было получено в виде ряда Фурье. Практическое использование этих результатов предполагало замену ряда суммой нескольких первых гармоник. Но суммирование рядов Фурье в случае, когда коэффициенты известны приближённо, представляет собой некорректную задачу.

Устойчивый к малым изменениям коэффициентов метод суммирования рядов Фурье, основанный на идее регуляризации, был предложен А.Н. Тихоновым в 1964 году. Спустя пять лет появилась статья А.Н. Тихонова и его ученика В.И. Дмитриева «О методах решения обратной задачи теории антенн». Физики обратили внимание на статью, их самолюбие было задето. Андрей Николаевич получил приглашение выступить с докладом на знаменитом «капичнике» — семинаре, которым руководил П.Л. Капица, лауреат Нобелевской премии, директор Института физических проблем АН СССР. Докладчик рассказал, как в рамках построенной математической теории удалось не только получить устойчивое решение интегрального уравнения, но и учесть диктуемые практикой дополнительные требования к диаграмме направленности. При-

П.Л. Капица

знавая важность полученных автором доклада результатов, академик В. А. Фок, крупный специалист в области электродинамики и квантовой механики, заявил, что хороший физик должен интуитивно чувствовать, сколько гармоник заменяют сумму ряда. «Интуиция хороша для решения отдельной задачи, но когда речь идёт о создании алгоритма решения класса задач, нужна гарантированная устойчивость», — ответил А. Н. Тихонов. Когда бурный семинар закончился, Пётр Леонидович Капица пригласил Андрея Николаевича к себе в кабинет, и они долго говорили о том, в каких ещё физических задачах может оказаться полезной идея регуляризации.

Исследования по созданию методов проектирования оптимальных антенных систем различного назначения продолжались. Как всегда, Андрей Николаевич привлёк к работе группу своих учеников. Значение этих исследований выходило за рамки и первоначальных прикладных задач, и электродинамики. По сути дела руководимый А. Н. Тихоновым коллектив разработал принципиально новый подход к решению задач математического проектирования сложных физических систем. В 1976 году эти работы были отмечены Государственной премией СССР.

ПРОНИКНУТЬ В ТАЙНЫ ПРИРОДЫ

Рассказывая об обратных задачах и диагностике, мы уже коснулись проблемы интерпретации и обработки результатов наблюдений. Установки для проведения современных экспериментальных исследований в физике, химии, биологии, технике нередко являются сложными, дорогостоящими. А результаты этих исследований должны быть надёжными, практически достоверными. Из получаемых экспериментальных данных надо извлекать максимум информации, не выходя за пределы точности, определяемой сутью процесса. При этом эффекты, лежащие, что называется, на поверхности, науке, как правило, известны. Охота идёт за «редкими», «слабыми» эффектами, отдельные эксперименты приходится повторять многократно. Объём информации, требующий переработки, может составлять десятки и сотни тысяч осциллограмм, снимков, показателей других приборов. Естественно, что столь ответственная и трудоёмкая работа может быть выполнена только с помощью ЭВМ.

Для широкого класса экспериментальных исследований выделяют три этапа обработки наблюдений. На первом этапе происходит снятие информации с регистрирующей аппаратуры, перевод её в числовой код и засылка в ЭВМ. На полезные информативные сигналы накладываются погрешности, шумы приборов. Второй этап состоит в первичной обработке: числовые данные могут быть подвергнуты нормировке, статистической обработке. Результатами второго этапа являются исходные данные u. Третий, наиболее сложный этап состоит в интерпретации результатов наблюдений u, т. е. в нахождении модели объекта z из соотношения $Az = u$.

Поскольку исходные данные u известны с некоторой погрешностью, основной проблемой автоматизации обработки наблюдений является создание математических методов решения обратных задач, устойчивых по отношению к ошибкам наблюдений. Главную роль здесь играют разработанные А. Н. Тихоновым методы регуляризации. В математической теории компьютерной томографии эти методы применялись для решения интегральных уравнений первого рода. Решение систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при обработке результатов наблюдений, также требует регуляризации. А. Н. Тихонов поясняет это следующим простым примером. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + 7y = 5, \\ \sqrt{2}\,x + \sqrt{98}\,y = \sqrt{50}\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

Внимательный читатель сразу заметит, что второе уравнение получается из первого умножением на $\sqrt{2}$, система имеет бесконечно много решений. Компьютер ничего не заметит, он приближённо извлечёт корни и начнёт решать. Если ограничиться точностью до одного знака после запятой, то можно обойтись и без компьютера, решение системы

$$\begin{cases} x + 7y = 5, \\ 1{,}4\,x + 9{,}9\,y = 7{,}1 \end{cases}$$

имеет вид $x = -2$, $y = 1$. При точности в 100, 300 и 500 десятичных знаков компьютер выводит следующие результаты:

$$x^{(100)} = 0, \quad \ldots, \quad x^{(200)} = 1{,}6, \quad \ldots, \quad x^{(500)} = 5, \quad \ldots$$

Неточность в исходных данных задачи — коэффициентах системы и правых частях — становится всё меньше, а с решением происходит что-то странное. Можно, конечно, сослаться на странность исходной системы, имеющей бесконечно много решений. Но, во-первых, имея систему из большого числа уравнений, мы заранее не знаем, сколько у неё решений. А, во-вторых, математики умеют находить единственное решение любой системы линейных алгебраических уравнений. Делается это с помощью метода наименьших квадратов (МНК), возникшего как раз в связи с необходимостью обработки результатов наблюдений.

В конце XVIII — начале XIX века Лежандр и Гаусс занимались восстановлением траекторий комет по наблюдениям, сделанным в различные моменты времени. Предстояло найти величины $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Каждое измерение давало линейное соотношение между ними вида

$$a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \ldots + a_{in}z_n = u_i,$$

причём коэффициенты a_{ik} и u_i определялись из наблюдений с неизбежными систематическими и случайными ошибками. Здравый смысл подсказывает, что для более точного определения $z_1, z_2, \ldots, z_n$ надо иметь побольше наблюдений. В итоге получается переопределённая система, число неизвестных в ней n, а число уравнений $m > n$. В традиционном смысле эта система неразрешима. Идея Лежандра (1806 год) и Гаусса (1809 год) состояла в том, чтобы определить решение z^* по методу наименьших квадратов как такое, которое минимизирует сумму квадратов отклонений всех измерений:

$$\sum_{i=1}^{m} (a_{i1}z_1^* + a_{i2}z_2^* + \ldots + a_{in}z_n^* - u_i)^2 = \min_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \sum_{i=1}^{m} (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \ldots + a_{in}z_n - u_i)^2. \quad (4.4)$$

Условие (4.4) сводится к системе линейных уравнений относительно $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Эта система заведомо разрешима, так что обобщённое решение $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*$ в смысле МНК всегда существует. Однако возможно, что такое решение не единственно. В этом случае, считает А. Н. Тихонов, надо определить *нормальное* решение в смысле МНК. В простейшем варианте нормальное решение выделяется из всех решений по МНК тем, что ближе всего лежит к началу координат. Любая система линейных уравнений имеет и притом единственное нормальное решение по МНК: если исходная система имеет единственное решение, то МНК даёт именно его.

Для системы (4.3) правая часть соотношения (4.4) имеет вид

$$\min_{x,y}\left[(x + 7y - 5)^2 + \left(\sqrt{2}\,x + \sqrt{98}\,y - \sqrt{50}\right)^2\right] = \min_{x,y} 3\,(x + 7y - 5)^2.$$

Ясно, что минимум, равный нулю, достигается при всех x и y, лежащих на прямой $x + 7y - 5 = 0$. Ближайшая к началу координат точка этой прямой $x^* = 0{,}1$, $y^* = 0{,}7$ и определяет нормальное решение. Все системы, получившиеся из (4.3) при замене корней их десятичными приближениями, имели единственное решение, совпадающее с нормальным решением по МНК. Следовательно, нормальное решение, находимое традиционными методами, также может быть неустойчивым.

Таким образом, эти методы не могут быть положены в основу автоматизированной обработки наблюдений на ЭВМ. Снова проявляется общий закон: для получения устойчивого решения обратной задачи нужна информация о точности исходных данных. В данной задаче информация складывается из двух параметров — точности задания матрицы системы μ и точности правых частей δ. Разработанный А. Н. Тихоновым регуляризованный метод наименьших квадратов (РМНК) представляет собой алгоритм получения устойчивого решения. Применённый к системе (4.3) этот алгоритм даёт следующие результаты:

при $\delta = \mu = 10^{-1}$ $\quad x = 0{,}0968, \ \ y = 0{,}6964;$

при $\delta = \mu = 10^{-4}$ $\quad x = 0{,}09998, \ \ y = 0{,}69998.$

Явно видна сходимость к нормальному решению.

Глубокое философское и математическое значение имеет результат А. Н. Тихонова, полученный им в 1986 году. Андрей Николаевич доказал, что знание величин μ и δ не только достаточно, но и необходимо для построения устойчивого решения системы линейных алгебраических уравнений. Иначе говоря, не существует никакого понятия устойчивого обобщения решения такой системы, основанного только на информации о её матрице.

Мы коснулись лишь некоторых аспектов задачи автоматизированной обработки результатов наблюдений. А. Н. Тихоновым и его сотрудниками был создан целый программный комплекс, состоящий из многих пакетов программ. Особенность комплекса — в его многоцелевом назначении, управляющая программа для различных задач остаётся одной и той же. Во всех программах интерпретации основное внимание уделено получению устойчивых результатов. В комплекс входит и программа «квазиреального эксперимента», позволяющая оценивать точность полученных результатов в зависимости от уровня шумов.

Первая в мире система сплошной обработки наблюдений, базирующаяся на разработанном комплексе, была реализована в одной из лабораторий Института ядерной физики МГУ. Установка, предназначенная для проведения фотоядерных экспериментов, включала в себя бетатрон — один из видов ускорителей элементарных частиц. Поток гамма-квантов, генерируемых бетатроном, бомбардировал образцы исследуемого вещества. При этом могут происходить ядерные реакции с захватом гамма-квантов и выделение нейтронов, протонов или других частиц. Появление частиц связано с энергетическими характеристиками потока излучения, математически эта связь выражается интегральным уравнением первого рода. Эксперимент многократно повторялся, объём перерабатываемой информации имел порядок 10^7 чисел. Управление бетатроном и вся обработка результатов велись на ЭВМ. В комнату, где размещался бетатрон, сотрудники лаборатории заходили лишь для того, чтобы что-то изменить в условиях эксперимента. Многократные «квазиреальные эксперименты» гарантировали высокую точность результатов.

Система оправдала надежды физиков. На ней впервые был обнаружен тонкий эффект «двойного взаимодействия», когда при реакции выделяется не один, а два нейтрона. В результате этих работ в Институте ядерной физики МГУ создано отделение Мирового банка данных по фотоядерным взаимодействиям.

Другая совместная работа была проведена Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша и Институтом атомной энергии им. И.В. Курчатова. Экспериментально исследовался всплеск плазмы, возникающей при взаимодействии лазерного луча с пластинкой фольги. С помощью специальной камеры и различных фильтров плазменная корона фотографировалась в рентгеновских лучах. Снимки представляют косвенное проявление недоступных прямому измерению температуры и плотности внутри короны. Они являются исходными данными в задаче диагностики плазмы. Математические методы решения этой задачи во многом похожи на применяемые в рентгеновской компьютерной томографии. Система обработки результатов наблюдений не только обеспечила устойчивое решение задач диагностики, но и позволила оптимальным образом выбрать фильтры. «Квазиреальные эксперименты» состояли в том, что по реальным распределениям температуры и плотности плазмы были найдены теоретические значения интенсивности излучения, проходящего через различные фильтры. На полученные значения были наложены реальные шумы, затем была решена обратная задача. Полный цикл обработки дал хорошее согласие исходных и расчётных данных.

Работы А.Н. Тихонова и его учеников были высоко оценены такими известными физиками, как академики А.П. Александров, Н.Г. Басов, Е.П. Велихов, Я.Б. Зельдович. Методы автоматизированной обработки наблюдений помогают им глубже проникнуть в тайны природы.

«Пифагор за изобретение одного геометрического правила Зевесу принёс на жертву сто волов. Но ежели бы за найденные в нынешние времена от остроумных математиков правила по суеверной его ревности поступать, то бы едва в целом свете столько рогатого скота сыскалось», — писал более двух веков назад М.В. Ломоносов. Несмотря на увеличение поголовья, вывод остаётся справедливым и в наши дни.

ЧЕЛОВЕК ОДЕРЖИМЫЙ

2500 лет назад древнегреческий философ Анаксагор утверждал, что «разум правит миром». Он считал, что целью жизни человека является теоретическое познание и происходящая отсюда свобода. Мы не знаем, как выглядело это утверждение на языке оригинала. Возможно, что теоретическое познание — это перевод греческого *mathema*. В этом случае, согласно Анаксагору, цель жизни состоит в занятиях математикой.

Андрей Николаевич Тихонов пришёл к такому выводу ещё в молодости. Слова знаменитого французского математика и механика С. Пуассона: «В жизни нет ничего лучшего, чем изучать и преподавать математику», могли бы стать девизом А.Н. Тихонова. В выполнении этой программы Андрею Николаевичу удалось достичь многого. Получены результаты, принёсшие мировую славу, завоёвано признание и высокое положение в науке, создана большая и сильная научная школа. Конечно, для этого потребовалось то, что называют особым складом ума, математическими способностями, талантом. Но не менее, а возможно, и более важную роль сыграли целеустремлённость и работоспособность. А.Н. Тихонов был человеком одержимым, работа поглощала его целиком. И в молодые годы, и в конце жизни необходимость оторваться от разложенных на письменном столе бумаг или закончить обсуждение научных проблем с учениками он воспринимал как неизбежность, отрывающую его от основного дела — математики. Может, в этой формуле «человек одержимый» и содержится суть ответа на вопрос, как добиться успехов в математике?

Впрочем, точнее будет сказать, что Андрей Николаевич поклонялся двум божествам. Одно из них — Математика, другое — Семья, и трудно определить, какое из них важнее.

Со своей будущей женой Андрей Николаевич познакомился в Теберде. Наталья Васильевна, выпускница МГУ, филолог по образованию, отдыхала там в санатории. Весь санаторий знал, что в палатке на берегу Бадукского озера живут бритые московские математики (в ту пору борода считалась почти необходимым признаком принадлежности к учёному миру), которые купаются в ледяной воде и что-то строчат на пишущей машинке. Это были П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, В. В. Немыцкий и А. Н. Тихонов. Следующая встреча произошла только через год, на турбазе в Хибинах. Затем последовали частые свидания в Москве. В свадебное путешествие Наталья Васильевна и Андрей Николаевич отправились на русский север, к Кирилло-Белозёрскому монастырю.

У Тихоновых было четверо детей. Андрей Николаевич, несмотря на занятость, много занимался с детьми, развивая в них интерес к математике и изобразительному искусству, истории и литературе, туризму и альпинизму. Человек неприхотливый и равнодушный к материальным благам, он боялся, что достаток в семье может избаловать детей. Им всегда покупалась самая обычная одежда, билеты в театр или консерваторию брались подальше, повыше, подешевле. Все, кто знал семью Тихоновых, отмечали, что родители сумели передать детям скромность, трудолюбие, доброту и подлинную внутреннюю культуру. Потом, когда пришло время, Наталья Васильевна и Андрей Николаевич помогали воспитывать одиннадцать внуков. И маленькие, и большие любили приходить к дедушке. Как-то один из авторов беседовал с А. Н. Тихоновым в его кабинете. В поисках нужной бумаги Андрей Николаевич достал из укромного места ключ от ящика письменного стола и, предупреждая вопрос, с улыбкой пояснил, что у него в домашнем кабинете часто бывают малолетние бандиты.

С детьми и внуками Андрей Николаевич неоднократно «проходил» школьный курс математики. Естественно, что он не мог не выразить своего отношения к изменениям, которым программа этого курса подверглась в середине 1970-х годов. Он стал инициатором документа, известного как «письмо десяти академиков». Подписанное такими математиками, как Н. Н. Боголюбов, И. М. Виноградов, М. В. Келдыш, А. Н. Тихонов, оно призывало отказаться от недостаточно продуманных экспериментов в столь важном для всей страны деле, как школьное образование. Отделение математики АН СССР согласилось с авторами письма и создало несколько групп, которым на конкурсной основе было поручено продумать основные концепции школьного курса математики и подготовить новые учебники. Одну из групп возглавил А.Н. Тихонов. В неё вошли ближайшие ученики. Группа разделилась на две части, одни занялись алгеброй, другие — геометрией. Формально Андрей Николаевич не считался автором этих учебников, но в их создание он вложил весь свой опыт. На конкурсе учебник по геометрии, представленный группой А.Н. Тихонова, занял первое место, высокую оценку получил и учебник по алгебре.

Для математика такие понятия, как отдых или отпуск, имеют довольно условный характер. Далеко не всегда работа мысли считается с будильником и календарём. В молодости Андрей Николаевич предпочитал проводить свободные дни в походах, спутниками его всегда были коллеги, математики. В беседах у туристического костра нередко рождались идеи, из которых потом строились новые теории. В последние годы жизни Андрею Николаевичу стало трудно ходить в походы. Он перестал использовать положенные ему длительные отпуска и отказывался от путёвок в санатории. Проведя на даче две-три недели, он начинал скучать по работе, ученикам и в конце концов уезжал в Москву. Отдых, перерыв в работе для Андрея Николаевича состоял в том, чтобы побыть с внуками или, взяв новые тома Н.М. Карамзина, С.М. Соловьёва, публикации, посвящённые тысячелетию крещения Руси, погрузиться в далёкую историю. Коллеги и ученики знали, что с 21 до 22 А.Н. Тихонову звонить не стоит, он смотрит «Новости». Впрочем, у Натальи Васильевны не было уверенности, что при этом он полностью переключался на последние известия. Ей казалось, что и у телевизора Андрей Николаевич продолжал думать о математике.

А. Н. Тихонов. 1986 год

Мы уже много раз говорили об учениках Андрея Николаевича. Работая в МГУ, А.Н. Тихонов в разные годы возглавлял кафедры высшей математики физического факультета, вычислительной математики механико-математического факультета. Ему пришлось преодолеть много ведомственных барьеров, чтобы добиться открытия в МГУ ещё одного факультета — вычислительной математики и кибернетики (ВМиК). С 1970 года А.Н. Тихонов был деканом этого факультета. Его лекции слушали тысячи студентов. Среди тех, кто вошёл в науку под его непосредственным руководством, — сотни кандидатов и десятки докторов наук. Если учесть «научных внуков» — учеников академиков РАН А. А. Самарского, В. А. Ильина, В. П. Маслова, члена-корреспондента РАН Д. П. Костомарова, профессоров А. Б. Васильеву, Б. Л. Рождественского, А.М. Денисова, А.Г. Свешникова, В.И. Дмитриева и многих других, — то каждое из упомянутых чисел возрастает на порядок. Тихоновская школа во многом определяет развитие прикладной математики в нашей стране.

Совмещение должностей декана факультета ВМиК и директора Института прикладной математики им. М.В. Келдыша — дело хлопотное. Административные вопросы отнимали у А.Н. Тихонова много времени. Известный советский математик академик Л.С. Понтрягин как-то спросил у Андрея Николаевича, зачем ему это нужно. Декан и директор ответил, что таким образом ему без всяких согласований удаётся сразу погрузить студентов в атмосферу серьёзной научной работы, привлечь к преподаванию лучших научных сотрудников, пополнять институт наиболее талантливыми выпускниками факультета. Как говорится, цель оправдывает средства.

По отношению к своим ученикам Андрей Николаевич был одновременно и добрым и беспощадно требовательным. Он умел заранее определить «потолок» каждого из них и заставлял максимально выкладываться до тех пор, пока этот «потолок» не будет достигнут. Ученики знали, что Андрея Николаевича устраивали только исчерпывающие результаты. Если в теореме фигурируют предположения a), b), c), то он требовал непременно выяснить, определяются ли они существом дела или порождены методом доказательства.

Владимир Александрович Ильин поступил в МГУ в послевоенном 1945 году. У восьми человек из этого набора А.Н. Тихонов стал научным руководителем. Андрей Николаевич считал, что за все годы его преподавания это была лучшая, наиболее активная группа его учеников.

Владимир Александрович вспоминает, что руководитель не только учил студентов математике. Он рассказывал об истории и импрессионизме, гулял по Москве и ходил вместе с ними в походы. Как-то студент В. А. Ильин пропустил семинар руководителя. На следующем занятии Андрей Николаевич поинтересовался причиной. Студент, заранее не побеспокоившийся о благовидном предлоге, честно сказал, что был на катке. Руководитель посоветовал найти возможность сочетать два нужных дела. Владимиру Александровичу показалось, что после этого случая Андрей Николаевич почему-то стал относиться к нему лучше. Во всяком случае, защиту дипломных работ он и двое его товарищей отмечали на квартире у Тихоновых.

Академик В. А. Ильин — автор нескольких учебников, изданных в многотомной серии «Курс высшей математики и математической физики». Главный редактор серии А. Н. Тихонов привлёк к её созданию своих лучших учеников. Сам Андрей Николаевич стал автором трёх учебников серии. Помимо уже упоминавшегося курса «Уравнений математической физики», это «Дифференциальные уравнения» и «Теория функций комплексной переменной». Адресованная студентам специальностей «Прикладная математика» и «Физика» серия насыщена примерами, помогающими научиться применять математические методы для исследования разнообразных реальных процессов и явлений.

«Математика — наука молодых. Иначе и быть не может. Занятия математикой — это такая гимнастика ума, для которой нужны вся гибкость и вся выносливость молодости», — считал Н. Винер. Всей своей деятельностью последних лет Андрей Николаевич Тихонов опровергал это утверждение.

ПЕРСОНАЛИИ

Адамар Ж. (1865–1963) — французский математик, иностранный почётный член АН СССР.

Александров П. С. (1896–1982) — советский математик, академик, основатель научной школы по топологии.

Алиханов А. И. (1904–1970) — советский физик, академик, руководил созданием первого в СССР тяжеловодородного ядерного реактора.

Банах С. (1892–1945) — польский математик, один из создателей функционального анализа.

Басов Н. Г. (1922–2001) — советский физик, академик, один из основоположников квантовой электроники, лауреат Нобелевской премии.

Бернулли Д. (1700–1782) — швейцарский математик и механик, почётный член Петербургской академии наук.

Бернулли Я. (1654–1705) — швейцарский математик, известный трудами в области исчисления бесконечно малых и теории вероятностей.

Бернштейн С. Н. (1880–1968) — советский математик, академик.

Бертран Ж. (1822–1890) — французский математик, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Боголюбов Н. Н. (1909–1992) — советский математик и физик-теоретик, основатель научных школ по нелинейной механике и теоретической физике.

Больцман Л. (1844–1906) — австрийский физик, один из основателей статистической физики.

Больяи Я. (1802–1860) — венгерский математик, один из основоположников неевклидовой геометрии.

Борель Э. (1871–1936) — французский математик, иностранный член-корреспондент АН СССР.

Брауэр Л. (1881–1966) — нидерландский математик, известный трудами по топологии.

Брежнев Л. И. (1906–1982) — с 1966 г. Генеральный секретарь ЦК КПСС, с 1977 г. председатель Президиума Верховного Совета СССР.

Брюсов В. Я. (1873–1924) — русский и советский поэт, основоположник символизма.

Бубнов И.Г. (1872–1919) — русский инженер, заложивший основы строительной механики корабля.

Бурбаки Н. — псевдоним группы французских математиков, предпринявших в середине XX века попытку сугубо формального изложения всех разделов математики.

Бэр Р. (1874–1932) — французский математик.

Вавилов Н.И. (1887–1943) — советский биолог, академик, основоположник учения о биологических основах селекции.

Вавилов С.И. (1891–1951) — советский физик, академик, основатель научной школы физической оптики.

Вайнштейн Л.А. (1920–1989) — советский радиофизик, член-корреспондент АН СССР.

Вейерштрасс К. (1815–1897) — немецкий математик, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Векуа И.Н. (1907–1977) — советский математик и механик, академик.

Вернадский В.И. (1863–1945) — советский учёный, академик, основатель геохимии и радиогеологии, автор трудов по философии естествознания и науковедению.

Винер Н. (1894–1964) — американский математик, один из основоположников кибернетики.

Галёркин Б.Г. (1871–1945) — советский учёный и инженер, академик, автор трудов по строительной механике и теории упругости.

Галилей Г. (1564–1642) — итальянский учёный, один из основоположников современного естествознания.

Гарднер М. (род. в 1914 г.) — американский журналист, писатель, популяризатор математики.

Гаусс К. (1777–1855) — выдающийся немецкий математик, физик, астроном, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Гашек Я. (1883–1923) — чешский писатель-сатирик, автор романа «Похождения бравого солдата Швейка во время мировой войны».

Гегель Г. (1770–1831) — немецкий философ.

Гёдель К. (1906–1978) — логик и математик, родился в Австро-Венгрии, с 1940 г. жил в США.

Гильберт Д. (1862–1943) — выдающийся немецкий математик, иностранный почётный член АН СССР.

Гюйгенс Х. (1629–1695) — нидерландский учёный, автор трудов по математике, механике, физике.

Гюнтер Н.М. (1871–1941) — советский математик, член-корреспондент АН СССР.

Даламбер Ж. (1717–1783) — французский математик, физик, философ, энциклопедист, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Декарт Р. (1596–1660) — французский математик, физик, философ, физиолог.

Дирак П. (1902–1984) — французский физик, один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии.

Дирихле П. (1805–1859) — немецкий математик, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

Дудинцев В.Д. (род. в 1918 г.) — советский писатель.

Евклид — греческий математик, живший в III веке до н. э., автор труда «Начала», оказавшего огромное влияние на развитие математики.

Зельдович Я.Б. (1914–1987) — советский физик-теоретик, академик, один из основателей научной школы по теории горения и детонации.

Кампанелла Т. (1568–1639) — итальянский философ и поэт.

Кантор Г. (1845–1918) — немецкий математик, разработавший основы теории множеств.

Канторович Л.В. (1912–1986) — советский математик и экономист, академик, лауреат Нобелевской премии.

Каньяр Л. (1900–1971) — французский геофизик.

Капица П.Л. (1894–1984) — советский физик, академик, лауреат Нобелевской премии.

Кардано Д. (1501–1576) — итальянский математик, философ, врач.

фон Карман Т. (1881–1963) — механик, родился в г. Будапеште, жил в Германии и США.

Кели А. (1821–1895) — английский математик, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

Кикоин И.К. (1908–1984) — советский физик, академик.

Клаузиус Р. (1822–1888) — немецкий физик, один из основателей термодинамики, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

Коши О. (1789–1857) — французский математик, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Кронекер Л. (1823–1891) — немецкий математик, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

Крылов А.Н. (1863–1945) — советский математик, механик, кораблестроитель, академик.

Курант Р. (1888–1972) — математик, родился в Германии, с 1934 г. жил в США, иностранный член АН СССР.

Курчатов И.В. (1902–1960) — советский физик, академик, организатор и руководитель работ по атомной науке и технике.

Лаврентьев М.А. (1907–1980) — советский математик, механик, академик, первый председатель Сибирского отделения АН СССР.

Лагранж Ж. (1736–1813) — французский математик, механик, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Ландау Л.Д. (1908–1968) — советский физик, академик, лауреат Нобелевской премии.

Лаплас П. (1749–1827) — французский математик, механик, физик, астроном, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Лебег А. (1875–1941) — французский математик, один из создателей теории функций действительной переменной, иностранный член-корреспондент АН СССР.

Лежандр А. (1752–1833) — французский математик.

Лейбниц Г. (1646–1716) — выдающийся немецкий учёный, математик, физик, языковед, философ, один из создателей дифференциального и интегрального исчислений.

Лере Ж. (1906–1998) — французский математик, иностранный член АН СССР.

Лобачевский Н.И. (1792–1856) — выдающийся русский математик, создатель неевклидовой геометрии.

Ломницкий А. (1881–1941) — польский математик, работавший в г. Львове.

Лоренц Х. (1853–1928) — нидерландский физик, лауреат Нобелевской премии, иностранный почётный член АН СССР.

Лоуренс Э. (1901–1958) — американский физик, создатель первого циклотрона, иностранный почётный член АН СССР, лауреат Нобелевской премии.

Лузин Н.Н. (1853–1950) — советский математик, основатель научной школы.

Лукреций — римский поэт и философ-материалист, I век до н. э.

Лысенко Т.Д. (1898–1976) — советский биолог и агроном, академик.

Ляпунов А.А. (1911–1973) — советский математик, член-корреспондент АН СССР.

Келдыш М.В. (1911–1978) — советский математик и механик, академик, Президент АН СССР.

Коллатц Л. (1910–1990) — немецкий математик.

Максвелл Д. (1831–1879) — английский физик, создатель классической электродинамики.

Марков А.А. (1856–1922) — русский математик, академик.

Маркс К. (1818–1883) — экономист, философ, основоположник научного коммунизма.

Мендель Г. (1822–1884) — австрийский естествоиспытатель, основоположник учения о наследственности.

фон Мизес Р. (1883–1973) — математик и механик, родился в Австро-Венгрии, жил в Германии и США.

Митропольский Ю. А. (род. в 1917 г.) — советский математик и механик, академик.

Муавр А. (1687–1754) — английский математик.

Семёнов Н. Н. (1896–1986) — советский учёный, академик, один из основателей химической физики, лауреат Нобелевской премии.

Навье А. (1785–1836) — французский учёный, инженер.

фон Нейман Д. (1903–1957) — математик, родился в г. Будапеште, жил в США, внёс большой вклад в создание первых ЭВМ.

Никитин Б. А. (1906–1952) — советский радиохимик, член-корреспондент АН СССР.

Ньютон И. (1643–1727) — выдающийся английский математик, механик, физик, астроном, создатель классической механики, один из создателей дифференциального и интегрального исчислений.

Хевисайд О. (1850–1925) — английский физик, инженер.

Оппенгеймер Р. (1904–1967) — американский физик, руководил созданием американской атомной бомбы.

Паскаль Б. (1623–1662) — французский математик, физик, философ, писатель.

Пачиоли Л. (около 1445 — позже 1509) — итальянский математик.

Перельман Я. И. (1882–1942) — советский популяризатор науки, учёный, педагог, литератор.

Петров Г. И. (1912–1987) — советский механик, академик.

Петровский И. Г. (1901–1973) — советский математик, академик, ректор МГУ им. М. В. Ломоносова в 1951–1973 гг.

Пикар Э. (1856–1951) — французский математик, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

Полиа Г. (1887–1985) — математик, родился в Австро-Венгрии, жил в Германии и США.

Понтрягин Л. С. (1908–1988) — советский математик, академик, создатель научной школы по теории оптимальных процессов.

Пуанкаре Ж. (1854–1912) — французский математик, физик, философ, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

Пуассон С. (1781–1840) — французский математик, механик, физик, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Радон И. (1887–1956) — австрийский математик.

Рентген В. (1845–1923) — немецкий физик, лауреат Нобелевской премии.

Реньи А. (1921–1970) — венгерский математик.

Ритц В. (1878–1909) — швейцарский механик и физик.

Рэлей Д. (1842–1919) — английский физик, один из основоположников теории колебаний, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук.

Сахаров А.Д. (1921–1989) — советский физик, академик.

Сегё Г. (1895–1985) — математик, родился в Австро-Венгрии, жил в Германии и США.

Сен-Симон К. (1760–1825) — французский мыслитель, социалист-утопист.

Сент-Экзюпери А. (1900–1944) — французский писатель, автор аллегорической сказки «Маленький принц».

Серебровский А.С. (1892–1948) — советский биолог, член-корреспондент АН СССР, один из основоположников генетики в СССР.

Смирнов В.И. (1887–1974) — советский математик, академик.

Спиноза Б. (1632–1677) — нидерландский философ.

Стокс Д. (1819–1903) — английский физик и математик.

Тамм И.Е. (1895–1961) — советский физик, академик, основатель научной школы, лауреат Нобелевской премии.

Теллер Э. (род. в 1908 г.) — физик, родился в Венгрии, работал в Германии, США, участник создания американской атомной и водородной бомб.

Томашевский Б.В. (1890–1957) — советский литературовед, текстолог.

Урысон П.С. (1898–1922) — советский математик, прочитавший первый в стране курс топологии.

Ферма П. (1601–1665) — французский математик и физик.

Ферми Э. (1901–1954) — итальянский физик, с 1938 г. жил в США, основатель научных школ, построил первый ядерный реактор, лауреат Нобелевской премии, иностранный член-корреспондент АН СССР.

Фихтенгольц Г.М. (1888–1959) — советский математик, автор известного курса математического анализа.

Фишер Р. (1890–1962) — английский математик, один из основоположников математической статистики.

Фогт В. (1860–1940) — немецкий физик.

Фок В.А. (1898–1974) — советский физик-теоретик, академик.

Франк И.М. (1908–1990) — советский физик, академик, лауреат Нобелевской премии.

Фреше М. (1878–1973) — французский математик.

Фридрихс К. (1901–1982) — математик, родился в Германии, жил в США.

Фурье Ж. (1768–1830) — французский математик и физик, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Харитон Ю. Б. (1904–1996) — советский физик, академик, главный конструктор советского ядерного оружия.

Хартли Р. (1888–1970) — американский инженер, один из основоположников теории информации.

Хинчин А. Я. (1894–1959) — советский математик, член-корреспондент АН СССР.

Хопф Э. (1902–1983) — математик, внёсший значительный вклад в топологию, родился в Австрии, жил в Германии и США.

Христианович С. А. (1908–2000) — советский механик, академик.

Чаплыгин С. А. (1869–1942) — академик, один из основоположников аэродинамики.

Чебышёв П. Л. (1821–1894) — выдающийся русский математик, академик, создатель научной школы.

Черенков П. А. (1904–1990) — советский физик, академик, лауреат Нобелевской премии.

Чернышевский Н. Г. (1828–1889) — русский учёный, писатель, критик, революционер.

Шварц Л. (род. в 1915 г.) — французский математик.

Шеннон К. (1916–2001) — американский математик и инженер, один из создателей математической теории информации.

Шилов Г. Е. (1917–1975) — советский математик.

Шмидт О. Ю. (1891–1956) — советский учёный и государственный деятель, академик.

Шмутцер Э. (1930–2001) — немецкий физик.

Шрёдингер Э. (1887–1961) — австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии, иностранный почётный член АН СССР.

Эйлер Л. (1707–1783) — выдающийся математик, механик, физик, астроном, по происхождению швейцарец, много лет работал в России, иностранный почётный член Петербургской академии наук.

Эйнштейн А. (1879–1955) — выдающийся физик-теоретик, один из основателей современной физики, родился в Германии, жил в Швейцарии и США, лауреат Нобелевской премии, иностранный почётный член АН СССР.

Эффель Ж. (1908–1982) — французский график и карикатурист.

Юкава Х. (1907–1981) — японский физик, лауреат Нобелевской премии, иностранный член АН СССР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н. Колмогоров в воспоминаниях учеников // Квант. — 1988. — № 11–12.
2. *Александров П.С.* Несколько слов об А.Н. Колмогорове // УМН. — 1983. — Т. 38, вып. 4.
3. *Александров П.С.* Основные топологические открытия А.Н. Тихонова // УМН. — 1976. — Т. 31, вып. 6.
4. *Боголюбов Н.Н.*, *Гнеденко Б.В.*, *Соболев С.Л.* Андрей Николаевич Колмогоров // УМН. — 1983. — Т. 38, вып. 4.
5. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — М.: Мир, 1965.
6. *Бухштабер В.М.*, *Гиндикин С.Г.* От принципа Кавальери к томографу // Природа. — 1983. — № 6.
7. *Винер Н.* Я — математик. — М.: Наука, 1967.
8. *Винер Н.* Кибернетика или управление и связь в животном и машине. — М.: Сов. радио, 1968.
9. *Гаспаров М.Л.* Современный русский стих. — М.: Наука, 1974
10. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. — М.: Физматгиз, 1961.
11. *Губарев В.* Академик Александр Самарский: «портрет первой атомной и других бомб» // Литературная газета. — 2001. — № 10.
12. *Дмитриев В.И.*, *Ильинский А.С.*, *Свешников А.Г.* Развитие математических методов исследования прямых и обратных задач электродинамики // УМН. — 1976. — Т. 31, вып. 6.
13. *Дмитриев В.И.*, *Свешников А.Г.* Работы А.Н. Тихонова по математической физике // УМН. — 1967. — Т 22, вып. 2.
14. И.В. Курчатов в воспоминаниях и документах. — М.: ИздАТ, 2003.
15. *Ибрагимова З.М.* Учёный и время. — Новосибирск: Новосиб. кн. изд-во, 1986.
16. *Колмогоров А.Н.* Воспоминания о П.С. Александрове // УМН. — 1986. — Т. 41, вып. 6.
17. *Колмогоров А.Н.* Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985.
18. *Колмогоров А.Н.* Математика — наука и профессия. — М.: Наука, 1988. (Библиотечка «Квант», вып. 64).
19. *Колмогоров А.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986.
20. *Колмогоров А.Н.* Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987.
21. *Колмогоров А.Н.*, *Олейник О.А.* С.Л. Соболев и современная математика // Математика в школе. — 1984. — № 1.

22. *Колмогоров А. Н., Олейник О. А.* Сергей Львович Соболев // Математика в школе. — 1978. — № 6.
23. Колмогоров в воспоминаниях. — М.: Наука, 1993.
24. Колмогоров. Книга 1. Истина — благо. — М.: Физматлит, 2003.
25. Колмогоров. Книга 2. Этих строк бегущих тесьма... — М.: Физматлит, 2003.
26. Колмогоров. Книга 3. Звуков сердца тихое эхо... — М.: Физматлит, 2003.
27. *Лаврентьев М. А.* Прирастать будет Сибирью. — М.: Молодая гвардия, 1980.
28. Мысль, вооружённая рифмами. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.
29. Наши земляки. — Новосибирск: Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1981.
30. Николай Николаевич Яненко. Очерки. Статьи. Воспоминания. — Новосибирск: Наука, 1988.
31. Проблемы Гильберта. — М.: Наука, 1969.
32. *Реньи А.* Письма о вероятности. — М.: Мир, 1970.
33. *Решетняк Ю. Г., Кутателадзе С. С., Маслеппикова В. Н., Успенский С. В.* Сергей Львович Соболев // Сиб. мат. ж. — 1988. — Т. 29, № 5.
34. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.
35. *Рубашов И. Б.* Компьютерная томография // Вестник АН СССР. — 1985. — № 4.
36. *Самарский А. А.* Работы А. Н. Тихонова по вычислительной математике // УМН. — 1967. — Т. 22, вып. 2.
37. *Синай Я. Г.* Случайность неслучайного // Природа. — 1981. — № 3.
38. *Стройк Д. Я.* Краткий курс истории математики. — М.: Наука, 1984.
39. *Тихонов А. Н.* О методах автоматизации обработки наблюдений // Вестник АН СССР. — 1983. — № 1.
40. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Рубашов И. Б., Тимонов А. А.* Первый советский компьютерный томограф // Природа. — 1984. — № 4.
41. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии. — М.: Наука, 1987.
42. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
43. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
44. *Шмутцер Э.* Теория относительности. Современное представление. — М.: Мир, 1981.
45. *Юнг Р.* Ярче тысячи солнц. — М.: Государственное изд-во литературы в области атомной науки и техники, 1961.
46. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973.