

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՆԱՀԻՏ ԳԵՎՈՐԳԻ ԳՈՒԼՅԱՆ

**ԿՅԱՆՔԻ ԱՊԱՀՈՎԱԳՐՈՒԹՅԱՆ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ**

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2019

ՀՏԳ 519.2:368(07)
ԳՄԴ 22.17+65.271g7
Գ 954

*Հրապարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի
գիտական խորհուրդը:*

Գրախոսներ՝

ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի
ակտուարական մաթեմատիկայի և ռիսկերի կառավարման
ամբիոնի դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ. **Ռ. Ն. Զիթյան**
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի
ակտուարական մաթեմատիկայի և ռիսկերի կառավարման
ամբիոնի դասախոս **Ե. Ա. Գևորգյան**

Գուլյան Ա. Գ.

Գ 954 Կյանքի ապահովագրության մաթեմատիկա: Ուսումնամեթո-
դական ձեռնարկ/ Գուլյան Ա. Գ.: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2019, 86
էջ:

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկը ներառում է «Կյանքի ապահովագրության մաթեմատիկա» առարկայի մաս կազմող «Ակտուարական մաթեմատիկայի հիմունքներ» և «Կենսաթոշակներ և կյանքի ապահովագրության ակտուարական հաշիվ» դասընթացների դասախոսությունների և գործնական պարապմունքների անցկացման համընդհանուր նյութեր՝ դասախոսությունների թեմատիկ պլան, ստուգիչ հարցեր՝ իրենց պատասխաններով, թեմատիկ խնդիրների լուծումներ, ակտուարական մաթեմատիկայում հաճախ կիրառվող բանաձևեր, հարցաշարեր, ակտուարական նշանակումների միջազգային համակարգը և ուսումնառության համար անհրաժեշտ գրականության ցանկ:

Սույն ձեռնարկը նախատեսված է «Կյանքի ապահովագրության մաթեմատիկա» առարկայի դասախոսություններ և գործնական պարապմունքներ վարող դասախոսների և ակտուարական մաթեմատիկա մասնագիտացմամբ սովորող ուսանողների համար:

ՀՏԳ 519.2:368(07)
ԳՄԴ 22.17+65.271g7

ISBN 978-5-8084-2372-5

© ԵՊՀ հրատ., 2019
© Գուլյան Ա. Գ., 2019

Քովանդակություն

Նախաբան	5
Առարկայի նպատակը և ուսումնական խնդիրը	8
Դասախոսությունների և գործնական պարապմունքների անցկացման մեթոդական ցուցումներ	10
Ակտուարական նշանակումների միջազգային համակարգը	13
Դասախոսությունների և գործնական պարապմունքների թեմատիկ քովանդակությունը	18
<i>Մոդուլ 1: Ակտուարական մաթեմատիկայի հիմունքներ</i>	18
<i>Մոդուլ 2: Կենսաթոշակների և կյանքի ապահովագրության ակտուարական հաշիվ</i>	38
Ստուգիչ հարցերի պատասխաններ	58
Քննական հարցաշարեր	69
<i>Մոդուլ 1</i>	69
<i>Մոդուլ 2</i>	70
Հավելված 1: Մահացության անալիտիկ օրենքներ	74
Հավելված 2: Հաճախ կիրառվող բանաձևեր	76
<i>Մուտարկման մեթոդներ</i>	76
<i>Հավելյալճարի սահմանման մեթոդներ</i>	77
<i>Պահուսուրների հաշվարկման անդրադարձ բանաձևեր</i>	78
<i>Կյանքի (մնացորդային) տևողության բաշխման բնութագրիչները</i>	78
<i>Մահացության աղյուսակի տարրերը</i>	79
<i>Կոմուտացիոն (պարզեցնող) ֆունկցիաներ</i>	79
<i>Ապահովագրության ակտուարական բերված արժեք</i>	80
Գրականության ցանկ	85

Նախաբան

Ապահովագրությունը կարելի է դիտարկել որպես հանրային հարաբերությունների տնտեսության ամենահին ուղղություններից մեկը: Դեռևս Հին Հռոմում կազմավորվում էին կոլեգիաներ, որոնց գործունեության մեջ էր մտնում կոլեգիայի անդամի մահվան դեպքում նրա ընտանիքին որոշակի հատուցում տրամադրելը: Իսկ հատուցումների ֆոնդը գոյանում էր խմբի անդամներից անդամավճարների հավաքագրման միջոցով: Այժմ այդ գործառույթն իրականացվում է կյանքի ապահովագրությամբ զբաղվող ապահովագրական ընկերությունների միջոցով: Ապահովագրական ընկերությունների դերը զարգացող և զարգացած երկրներում հետզհետե մեծանում է, քանի որ դրանք կազմում են ֆինանսական համակարգի մի մասը, և հատկապես կյանքի ապահովագրությամբ զբաղվող ընկերությունները կարող են նպաստել ներդրումների խթանմանը երկարաժամկետ հատվածում: Այս ուսումնամեթոդական աշխատանքում քննարկվում են կյանքի ապահովագրության այն տեսակները, որոնք հիմք են հանդիսանում էլ ավելի բարդ մոդելների կառուցման համար:

Ի տարբերություն գույքի ապահովագրության՝ կյանքի ապահովագրության դեպքում հատուցումը միշտ տրվում է ֆինանսական տեսքով այն ապահովագրված անձին, որն ունեցել է աշխատունակության երկարաժամկետ կորուստ, կամ ապահովագրված անձի հարազատներին՝ նրա մահվան դեպքում: Կյանքի ապահովագրության սակագների հաշվարկն ունի հետևյալ առանձնահատկությունները.

- հաշվարկներն իրականացվում են ժողովրդագրական վիճակագրության հիման վրա,
- որպես գործիքակազմ ծառայում է հավանականությունների տեսությունը,
- կիրառվում են ֆինանսական հոսքերի հաշվարկման երկարաժամկետ մեթոդներ,
- նետոո դրույքները բաղկացած են մի քանի բաղադրիչներից, որոնցից յուրաքանչյուրը նախատեսված է ապահովագրական պատահարի տեղի ունենալու տարբեր պատճառների համար:

Սույն աշխատանքում քննարկվում են ապահովագրավճարի որոշման հիմնական մոտեցումները՝ հաշվի առնելով զուտ և համախառն ապահովագրավճարների ֆիզիկական բնույթը:

Կյանքի ապահովագրության մաթեմատիկական կողմը հիմնված է հավանականությունների տեսության վրա, որտեղ որպես պատահական մեծություն ի հայտ է գալիս ապահովագրված անձի կյանքի տևողությունը: Կյանքի տևողության բաշխման որոշման առաջին քայլերից է եղել մահացության աղյուսակների կառուցումը: Դեռևս 17-րդ դարում ժողովրդագրական վիճակագրության օգնությամբ կառուցվել են առաջին մահացության աղյուսակները: Դրանց ժամանակակից տարբերակների գործնական կիրառությունը շատ մեծ է մաս այսօր, և զուգահեռաբար օգտագործվում են ինչպես մահացության սովորական աղյուսակները, այնպես էլ ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակները, որոնց անդրադարձ է կատարվել այս աշխատանքում: Սակայն մահացության աղյուսակների թերություններից գլխավորը՝ միջանկյալ տարիքներում մահվան հավանականության որոշումը, լուծելի է միայն որոշ ենթադրությունների դեպքում, որոնցից առավել տարածված 3 մոտեցումները ներկայացված են այս աշխատանքում: Նշված թերությունը շրջանցելու նպատակով 18-19-րդ դարերում Դե Մուավրը, Մեյքեմը, Հոմպերցը և այլ գիտնականներ տվել են մահվան հավանականության գնահատման անալիտիկ տեսքեր, որոնց վերաբերյալ հիմնական մեծությունները ներկայացված են Հավելված 1-ում: Լավագույն անալիտիկ տեսքի փնտրտուքը մինչ այժմ էլ շարունակվում է, սակայն գտնել մի ընդհանրական ֆունկցիա, որը բոլոր տարիքներում ճիշտ կգնահատի մահվան հավանականությունը, հնարավոր չէ: Այդ անհնարինությունն օրեցօր խորանում է մարդկային բանականության զարգացմանը զուգընթաց, քանի որ տարբեր տարիքներում ի հայտ են գալիս մահվան տարբեր պատճառներ, որոնց քանակը հետզհետե ավելանում է բարձր տեխնոլոգիաների առաջընթացին զուգահեռ: Արդյունքում այդ բոլոր հայտնի և անհայտ գործոնները մեկ ֆունկցիայի մեջ ներառելը գործնականում անհնար է դառնում: Իսկ այս խոչընդոտը հաղթահարելու համար տարիքային սանդղակի վրա կիրառվում է մահվան հավանականության կտոր առ կտոր գնահատումը տարբեր ֆունկցիաների միջոցով:

Ձեռնարկում անդրադարձ է կատարվել նաև մահացության այն աղյուսակներին և ֆունկցիաներին, որոնք նկարագրում են կյանքի տևողությունը մահվան մի քանի պատճառի դեպքում:

Կուտակային կենսաթոշակային համակարգի զարգացմանը գուրդնթաց աճում է նաև կյանքի ապահովագրական մաթեմատիկայի հմտություններով օժտված մասնագետների պահանջարկը: Ֆինանսական հոսքերի վերաբերյալ հաշվարկներն այս ոլորտում հիմնված են ոչ թե որևէ բիզնեսի ընդլայնման կամ ապագա զարգացման վրա, որը կարելի է կանխատեսել զոհե կարճաժամկետ հատվածի համար, այլ կյանքի տևողության վրա, որի կանխատեսման քայլի երկարությանը կարող է հասնել 40-50 տարվա, իսկ կյանքի ապահովագրության դեպքում այն կարող է հասնել և անցնել 100 տարին:

Ակտուարական մաթեմատիկան, լինելով մաթեմատիկայի կիրառական ուղղություններից մեկը, 1898 թվականից ի վեր ունի ընդունված նշանակումների իր յուրօրինակ համակարգը, որը, չնայած իր առաջին հայացքից բարդ տեսք ունեցող սիմվոլների, հասկանալի է այս գիտությամբ զբաղվող յուրաքանչյուր անձի աշխարհի ցանկացած կետում: Սույն ձեռնարկում հնարավորինս հակիրճ ներկայացված է այդ նշանակումների համակարգի հիմնական մասը, որն ուսանողներին հնարավորություն կտա հասկանալու մասնագիտական հոդվածներում և գրքերում ներկայացված նյութը:

Առարկայի նպատակը և ուսումնական խնդիրը

«Կյանքի ապահովագրության մաթեմատիկա» առարկայի նպատակը ապագա մասնագետների մոտ ապահովագրության մաթեմատիկական կողմի տեսական և կիրառական գիտելիքների ձևավորումն է, որն անհրաժեշտ է նրանց՝ ապահովագրական ընկերություններում, ինչպես նաև կենսաթոշակային պետական և ոչ պետական հիմնադրամներում որպես ակտուար աշխատելու համար:

Ուսումնառության ընթացքում պետք է լուծվեն հետևյալ խնդիրները՝

- ակտուարական մաթեմատիկայի հիմունքների ուսումնասիրություն,
- ապահովագրական դեպքի տեղի ունենալու հավանականության գնահատման մեթոդների ուսումնասիրություն հավանականությունների տեսության միջոցով,
- ապահովագրական սակագների կառուցման տեսական և կիրառական հմտությունների ձեռքբերում,
- ֆինանսական համարժեքության սկզբունքի ձևավորման և դրա խախտման խնդիրների ուսումնասիրում:

Առարկայի ամբողջական դասավանդումը նպատակահարմար է իրականացնել իրար հաջորդող մի քանի մոդուլների (դասընթացների) միջոցով՝ ուսումնառության երկրորդ տարվանից սկսած: Սույն ուսումնամեթոդական ձեռնարկը ներառում է այդ մոդուլներից առաջին երկուսը՝

Մոդուլ 1 – Ակտուարական մաթեմատիկայի հիմունքներ,

Մոդուլ 2 – Կենսաթոշակների և կյանքի ապահովագրության ակտուարական հաշիվ:

Նշված դասընթացները նախատեսված են բակալավրի ծրագրի համար, և դրանց դասավանդումն ապահովում է համապատասխան գիտելիքների ձևավորման նվազագույն մակարդակը: Առավել խորը գիտելիքների ձևավորման համար անհրաժեշտ է առարկայի դասավանդումը շարունակել ինչպես բակալավրի ծրագրում, այնպես էլ մագիստրոսական ծրագրում:

Ուսումնառության ավարտին ուսանողը կունենա.

Գիտելիք՝

- կյանքի ապահովագրության տեսակների վերաբերյալ,
- կյանքի անուիտետների տեսակների վերաբերյալ,
- ապահովագրավճարների հաշվարկման մոդելների վերաբերյալ,
- ապահովագրական պահուստների հաշվարկման մեթոդների վերաբերյալ,
- կուտակային կենսաթոշակային համակարգի մոդելավորման վերաբերյալ:

Կարողություն՝

- տարբերելու կյանքի ապահովագրության տեսակները և կատարելու ապահովագրավճարի հաշվարկ՝ ըստ տեսակների,
- հաշվարկելու կյանքի ապահովագրության միանվագ և անուիտետային վճարները,
- հաշվարկելու ապահովագրական պահուստները հեռանկարային և հետահայաց եղանակներով,
- մոդելավորելու սահմանված հատուցումներով կենսաթոշակային պլան:

Հմրություն՝

- ակտուարական հաշվարկներ իրականացնելու կյանքի ապահովագրական ընկերությունների համար՝ հիմնավորելով ապահովագրական սակագները և ապահովագրավճարները,
- կատարելու ակտուարական պարտավորությունների վերահաշվարկներ՝ կյանքի ապահովագրության պայմանագրի վաղաժամկետ դադարեցման դեպքում,
- լուծելու կանխատեսումային բնույթի խնդիրներ ֆինանսական կազմակերպություններում,
- վերլուծելու ապահովագրական ոլորտին վերաբերող տարբեր որոշումների հետևանքները՝ տալով դրանց քանակական արդյունքները:

Դասախոսությունների և գործնական պարապմունքների անցկացման մեթոդական ցուցումներ

Առարկայի մոդուլները պարտադիր կերպով պետք է պարունակեն ինչպես դասախոսություններ, այնպես էլ գործնական պարապմունքներ: Դասախոսությունները նպաստում են թեմաների տեսական, ասիմպտոտիկ եղանակով խնդիրների լուծման, իսկ գործնական պարապմունքները՝ ինչպես տեսական նյութի ամրապնդմանը, այնպես էլ ներկայացվող մոդելների առավել պատկերավոր և շոշափելի ընկալմանը: Առարկայի առաջին մոդուլի յուրացման համար ուսանողից պահանջվում է մաթեմատիկական անալիզի և հավանականությունների տեսության իմացություն, իսկ երկրորդ մոդուլի համար անհրաժեշտ են գիտելիքներ նաև ֆինանսական մաթեմատիկայից:

Մոդուլ 1-ի յուրաքանչյուր թեմայի դասախոսությունների ընթացքում հարցումների միջոցով նպատակահարմար է իրականացնել ուսանողների մնացորդային գիտելիքների ստուգում հարակից առարկաներից և նախատեսել ու տրամադրել որոշակի ժամանակ՝ այդ առարկաներից տվյալ թեմայի համար անհրաժեշտ նյութը հակիրճ ներկայացնելու համար: Մոդուլ 2-ի դասախոսություններն առավել արդյունավետ կլինեն, եթե ուսանողները նախապես կրկնեն մոդուլ 1-ի հիմնական գաղափարները և դրանք կապող ֆունկցիաները, իսկ ֆինանսական մաթեմատիկայից՝ տոկոսադրույքի տեսության թեման:

Գործնական պարապմունքների ժամանակ զուտ տեսական բնույթի խնդիրների լուծումը նպաստում է տեսական նյութի ամրապնդմանը, իսկ թվային խնդիրների լուծումը թույլ է տալիս ուսանողին պատկերացնել տվյալ իրավիճակը գործնականում և պատրաստ լինել ապագայում ակտուարի աշխատանքում ի հայտ եկող մմանատիպ խնդիրներին լուծում տալուն:

Դասախոսությունները և գործնական պարապմունքներն առավել արդյունավետ անցկացնելու համար ստորև որպես օրինակ բերված է մոդուլ 1-ի համար 60, իսկ մոդուլ 2-ի համար՝ 75 ակադեմիական ժամ տևողությամբ ծանրաբեռնվածության թեմատիկ բաշխումը՝ ըստ դասախոսությունների և գործնական պարապմունքների համար հատկացվող ժամաքանակների:

Թեմայի անվանումը	Ժամաքանակ	
	Գասախոսություն	Գործնական
Մոդուլ 1: Աղյուսարական մաթեմատիկայի հիմունքներ	30	30
Թեմա 1: Կյանքի տնտեսությունը որպես պատահական մեծություն		
1.1. Գոյատևման ֆունկցիա, մահացության կոր	2	2
1.2. Մահացության ինտենսիվություն	1	1
1.3. Մահացության անալիտիկ օրենքները	2	2
Թեմա 2: Կյանքի մնացորդային տնտեսություն		
2.1. Կյանքի մնացորդային տնտեսության բաշխումը	2	2
2.2. Կյանքի մնացորդային տնտեսության հիմնական բնութագրիչները	2	2
Թեմա 3: Կյանքի կյուրացված տնտեսություն		
3.1. Կյանքի կյուրացված տնտեսության բաշխումը և հիմնական բնութագրիչները	2	2
3.2. Մոտարկման մեթոդներ կոտորակային տարիքների համար	4	4
Թեմա 4: Մահացության աղյուսակներ	2	2
Թեմա 5: Կյանքի կարճաժամկետ ապահովագրության մոդելներ		
5.1. Անհատական և գումարյալ հայտի մեծության գնահատում	2	2
5.2. Սնանկացման հավանականության մոտարկում	3	3
5.3. Ապահովագրավճարի նշանակման սկզբունքները	2	2
Թեմա 6: Կարգավիճակի կորուստ մի քանի պատճառով		
6.1. Մի քանի պատճառով կարգավիճակի կորստի համատեղ և մարգինալ բաշխումները	3	3
6.2. Մի քանի պատճառով կարգավիճակի կորստի աղյուսակները	1	1
Ընթացիկ քննություններ, դասընթացի ծրագրով նախատեսված գիտելիքների ստուգման այլ ձևեր	2	2

Թեմայի անվանումը	Ժամաքանակ	
	Գրասխոտություն	Գործնական
Մոդուլ 2: Կենսաթոշակների և կյանքի ապահովագրության սկիզբնառական հաշիվ	45	30
Թեմա 7: Կյանքի ապահովագրության մոդելներ		
7.1. Մահվան պահին հատուցվող (անընդհատ) կյանքի ապահովագրության մոդելներ	6	4
7.2. Մահվան տարվա վերջում հատուցվող (դիսկրետ) կյանքի ապահովագրության մոդելներ	6	4
7.3. Կապը կյանքի ապահովագրության անընդհատ և դիսկրետ մոդելների միջև	2	2
Թեմա 8: Պայմանական (կյանքի) անուիտետներ		
8.1. Սկզբնաժամկետ կյանքի անուիտետներ	4	2
8.2. Տարվա ընթացքում m անգամ վճարվող կյանքի անուիտետներ	2	2
8.3. Անընդհատ հաշվարկվող կյանքի անուիտետներ	3	2
8.4. Փոփոխվող վճարով կյանքի անուիտետներ	3	1
8.5. Ճշգրտող վճարով կյանքի անուիտետներ	2	1
Թեմա 9: Զույր և համախառն ապահովագրավճարներ		
9.1. Ֆինանսական պարտավորությունների համարժեքության սկզբունքը	2	2

9.2. Ապահովագրավճարի սահմանման քվանտիլի մեթոդը	2	1
9.3. Ապահովագրավճարի սահմանումը բեռնվածության միջոցով	2	1
Թեմա 10: Կյանքի ապահովագրության (մաթեմատիկական) պահուսպներ		
10.1. Պահուստների հաշվարկման սկզբունքները և դրանց համարժեքությունը	4	2
10.2. Պահուստների հաշվարկման անդրադարձ բանաձևեր	2	2
10.3. Անընդհատորեն հաշվարկվող պահուստներ	2	2
Ընթացիկ քննություններ, դասընթացի ծրագրով նախատեսված գիտելիքների ստուգման այլ ձևեր	3	2

Ակտուարական նշանակումների միջազգային համակարգը

Ակտուարների միջազգային համագումարը 1898 թ. հաստատեց ակտուարական նշանակումների միջազգային համակարգը [1], որը նպատակ ուներ ապահովելու նշանակումների ընթերցելիությունը բազմազան ակտուարական գրականության մեջ՝ անգլերեն և այլ լեզուներով: Ակտուարական նշանակումների համակարգը բավական ծավալուն է, ուստի ստորև ներկայացված է ակտուարական նշանակումների այն հիմնական մասը, որն անհրաժեշտ է նշված 2 մոդուլների ուսումնասիրության համար:

1. **Ակտուարական ֆունկցիան** ներկայացվում է որոշակի տառով, որը տարբեր կոդներից համալրվում է իրեն նախորդող և հաջորդող ինդեքսներով ու ցուցիչներով: Այս հիմնական նշանն արտահայտում է ակտուարական ֆունկցիայի ընդհանուր բնույթը: Ստորև ներկայացված են դասընթացներում կիրառվող հիմնական մեծությունները.

l -ը ողջ մարդկանց միջին քանակն է,
 d -ն մահացածների միջին քանակն է,
 p -ն ողջ մնալու հավանականությունն է,
 q -ն մահանալու հավանականությունն է,
 μ -ն մահվան ինտենսիվությունն է,
 E -ն մաքուր լրակեցության ներկա արժեքն է,
 A -ն ապահովագրության ակտուարական ներկա արժեքն է,
 a -ն անուիտետի ներկա արժեքն է,
 s -ը անուիտետի կուտակված արժեքն է,
 P -ն տարեկան զուտ ապահովագրավճարն է,
 V -ն պահուստի մեծությունն է:

Այս նշանները համապատասխան ինդեքսներով և ցուցիչներով համարելուց հետո ստացված մեծությունը միանշանակորեն ցույց է տալիս ֆունկցիայի կոնկրետ բնույթը:

2. **Հաջորդող ինդեքսը** (ներքևի աջ անկյունում) ցույց է տալիս այն տարիքը, որում ուսումնասիրվում է ֆունկցիան, օրինակ μ_x -ը ցույց է տալիս x տարեկան անձանց մահվան ինտենսիվությունը:

ա. Եթե տարիք ցույց տվող մեծությունը հաջորդող ինդեքսում գտնվում է «քառակուսի» փակագծերի մեջ՝ $[x]$, ապա այն ցույց է տալիս, որ անձը տվյալ տարիքում ներառվել է ռիսկի ընտրությամբ խմբում, օրինակ՝ $d_{[x]}$ -ը ցույց է տալիս այն անձանց քանակը, որոնք x տարեկանում ներառվել են ռիսկի ընտրությամբ խմբում և մահացել են x -ից $x + 1$ տարիքների միջև:

բ. Հաջորդող ինդեքսում նշված փակագծերից դուրս գումարվող մեծությունը ցույց է տալիս այն ժամանակահատվածը, որն արդեն անցել է ռիսկի ընտրությամբ խմբում ներառվելուց հետո, օրինակ՝ $l_{[x]+t}$ -ն ցույց է տալիս $x + t$ տարեկան այն անձանց միջին քանակը, որոնք t տարի առաջ ընդգրկվել են ռիսկի ընտրությամբ խմբում, իսկ $l_{[x+t]}$ -ն ցույց է տալիս այն անձանց միջին քանակը, որոնք $x + t$ տարեկան են և հենց այդ տարիքում են ընկել ռիսկի ընտրությամբ խմբի:

գ. Հաջորդող ինդեքսում տարիքի կողքին կարող է լինել $:\overline{n}$ նշանը, որը ցույց է տալիս այն ժամանակահատվածը, որում պետք է

տեղի ունենա որոշակի իրադարձություն, օրինակ՝ $a_{x:n}$ -ը արտահայտում է անուիտետ, որը կնքվել է x տարեկան անձի հետ և վճարվելու է առավելագույնը n տարի:

դ. Հաջորդող ինդեքսի տարրերից որևէ մեկի վերևում հայտնված բնական թիվը թիվը ցույց է տալիս այդ իրադարձությունների տեղի ունենալու հաջորդականությունը, որի դեպքում կտրվի համապատասխան հատուցումը: Օրինակ՝ $A_{x:n}^1$ -ը ներկայացնում է կյանքի n տարվա ժամկետային ապահովագրությունը, այսինքն, եթե դիտարկում ենք որպես 2 իրադարձություն անձի կյանքի տևողությունը, որն արտահայտվում է x -ով, և պայմանագրի ժամկետի տևողությունը, որն արտահայտվում է n տառի միջոցով, ապա $\frac{1}{x:n}$ գրելով՝ մատնանշում ենք, որ անձի կյանքը առաջինը պետք է ավարտվի, որպեսզի տրվի հատուցում: Իսկ $A_{x:n}^1$ սիմվոլը ներկայացնում է n տարվա մաքուր լրակեցությունը, այսինքն՝ նախ պետք է պայմանագրի ժամկետը ավարտվի (կամ, որ նույնն է, անձը չմահանա մինչև պայմանագրի ավարտը): Մեկ այլ օրինակում՝ a_{xyz}^2 , x -ի գլխավերևում գրված 2 թիվը նշանակում է, որ անուիտետը կվճարվի մինչև այն ժամանակ, երբ x տարիքի անձը մահանա x , y , և z տարիքի անձանցից մահվան հերթականությամբ երկրորդը:

3. **Նախորդող ինդեքսը** (ներքևի ձախ անկյունում) ցույց է տալիս ուսումնասիրության սկզբից անցած ժամանակահատվածը, օրինակ՝ ${}_tV$ -ն ցույց է տալիս, որ պահուստը հաշվարկված է ապահովագրական պայմագրի կնքումից t ժամանակահատված անց:

Եթե նախորդող ինդեքսում դրվում է ուղղահայաց գծիկ, այն ցույց է տալիս հետաձգման ժամանակահատվածը՝ ${}_nA_x$ -ը, և այն, որ պայմանագիրը կնքվել է x տարեկան անձի հետ, սակայն հատուցումը կտրվի, եթե մահը տեղի ունենա առնվազն n տարի հետո:

4. **Հաջորդող ցուցիչը** (վերևի աջ անկյունում) ցույց է տալիս իրադարձության հաճախականությունը, և այն միշտ դրվում է փակագծերում, օրինակ՝ $a_x^{(m)}$ -ը անուիտետ է, որը վճարվում է տարվա ընթացքում m անգամ: Իսկ եթե այն դրվում է մահացության աղյուսակի տարրերի հետ, ապա ցույց է տալիս մահվան պատճառը,

և շատ հաճախ շփոթմունք չառաջացնելու նպատակով նշված մեծությունների հետ կիրառելիս փակագծերը բաց են թողնվում, օրինակ՝ d_x^k -ն կամ $d_x^{(k)}$ -ն ցույց են տալիս այն անձանց քանակը, որոնք մահացել են x -ից $x + 1$ տարիքային միջակայքում մահացության k -րդ պատճառից:

5. Նախորդող ցուցիչը չունի համընդհանուր կիրառություն, սակայն որոշ մեծությունների հետ ունի հստակ նշանակություն:

ա. Նախորդող ցուցիչը պահուստի հետ կիրառելիս ցույց է տալիս ապահովագրավճարների վճարման ժամանակահատվածը տարիներով, օրինակ՝ ${}^m_tV({}_n|a_x)$ ցույց է տալիս ժամանակի t պահին այն պայմանագրի պահուստի մեծությունը, որի համար ապահովադիրը m տարի վճարելու է ապահովագրավճար, իսկ պայմանագրի կնքումից n տարի անց սկսելու է ստանալ անուիտետային վճարներ (սովորաբար նման դեպքերում $m < n$):

բ. Նախորդող ցուցիչը կյանքի ապահովագրության ակտուարական ներկա արժեքի հետ կիրառելիս ցույց է տալիս հաշվարկներում տոկոսադրույքի ինտենսիվության պատկերությունը, օրինակ՝ ${}^2\bar{A}_x$ -ը իմաստով նույն $\bar{A}_x$ -ն, միայն թե հաշվարկներում տոկոսադրույքի δ ինտենսիվության փոխարեն կիրառված է 2δ մեծությունը: Սա հատկապես կիրառվում է դիսպերսիայի թեորեմում:

6. Նախորդող I և D տառերը մատնանշում են վճարումների համապատասխանաբար աճող և նվազող բնույթը՝ թվաբանական պրոգրեսիայով, օրինակ՝ $(Ia)_x$ -ը ցմահ անուիտետային վճարումներ են, որտեղ յուրաքանչյուր հաջորդ վճարումը մեծ է նախորդից 1 միավորով, իսկ $(DA)_{x:\overline{n}|}$ -ը կյանքի n տարվա ժամկետային ապահովագրություն է, որտեղ որքան ուշ է գրանցվում մահը, այնքան ավելի փոքր գումար է հատուցվում (հատուցման ենթակա գումարը յուրաքանչյուր տարի նվազում է 1 միավորով):

7. Գլխավերևի հորիզոնական գծիկը վկայում է այն մասին, որ ուսումնասիրվում է համապատասխան ֆունկցիայի «անընդհատ» տարբերակը, օրինակ՝ $\bar{A}_x$ -ն արտահայտում է x տարեկան անձի հետ կնքած կյանքի ցմահ ապահովագրության այն պայմանագիրը, որի հատուցումը տրվելու է ապահովագրված անձի մահվան պահին: Հատկանշական է տարբերել $(I\bar{A})$ և $(\bar{I}\bar{A})$ սիմվոլները: Դրանցից

առաջինը ցույց է տալիս, որ վճարումները տարեկան 1 միավորով աճում են, և հատուցումը տրվում է մահվան պահին, իսկ երկրորդը ցույց է տալիս, որ վճարումներն աճում են անընդհատորեն՝ տարեկան 1 միավոր ինտենսիվությամբ, և հատուցումը տրվում է մահվան պահին:

8. **Գլխավերևի կետիկները** կիրառվում են անուիտետների հետ՝ տարբերելու համար սկզբնաժամկետ և վերջնաժամկետ անուիտետները, օրինակ՝ $\ddot{a}_x^{(m)}$ -ը նշանակում է, որ անուիտետային վճարները կատարվում են տարվա ընթացքում m անգամ՝ յուրաքանչյուր միջակայքի սկզբում:

9. **Գլխավերևի օղակը** ցույց է տալիս մեծության ամբողջականությունը, այսինքն՝ այն հաշվարկված է դիտարկվող ողջ ընթացքի համար, օրինակ՝ $\overset{\circ}{e}_x$ -ն x տարեկան անձի կյանքի միջին տևողությունն է, իսկ $\overset{\circ}{a}_x$ -ն այն անուիտետն է, ըստ որի՝ վճարում է կատարվում նաև այն միջանկյալ ժամանակահատվածի համար, որն ընկած է անձի մահվան պահի և անուիտետի վերջին վճարման միջև:

Գասախոսությունների և գործնական պարապմունքների թեմատիկ բովանդակությունը

Մոդուլ 1: Ակտուարական մաթեմատիկայի հիմունքներ

Թեմա 1. Կյանքի տևողությունը որպես պատահական մեծություն

Թեմայի նպատակն է ներկայացնել կյանքի տևողությունը որպես պատահական մեծություն: Հավանականային բաշխման ֆունկցիայի օգնությամբ սահմանվում է նորածնի կյանքի սպասվելիք T տևողության համար *գոյարևման* $s(x)$ *ֆունկցիան*, ներկայացվում են դրա հատկությունները և վիճակագրական իմաստը: Ուսումնասիրվում է նաև համապատասխան խտության $f(x) = -s'(x)$ ֆունկցիան, որն ակտուարական մաթեմատիկայում անվանում են *մահացության կոր*: Նշված երկու մեծությունների միջոցով սահմանվում է *մահացության ինտենսիվությունը* $\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)}$, և քննարկվում են դրա հատկությունները: Ներկայացվում են նաև կյանքի տևողության այլ մակրոբնութագրիչներ, մասնավորապես դուրս են բերվում բանաձևեր միջինի՝ $e_0 = \int_0^\infty s(x)dx$, դիսպերսիայի և մեդիանի համար: Թեմայի շրջանակներում քննարկվում են նաև մահացության անալիտիկ օրենքները, որոնցից Հավելված 1-ում նկարագրված են Դե Մուավրի, Հոմպերջի, Մեյքհենի, Վեյբուլի և Էրլանգի մոդելները (տե՛ս [2], [3]):

Ստուգիչ հարցեր

1. Ի՞նչ հատկություններ ունի գոյատևման ֆունկցիան:
2. Ի՞նչ վիճակագրական իմաստ ունի գոյատևման ֆունկցիան:
3. Արտահայտե՛լ գոյատևման ֆունկցիան խտության ֆունկցիայի միջոցով:
4. Ո՞րն է մահացության ինտենսիվության հավանականային իմաստը:
5. Ի՞նչ հատկություններ ունի մահացության ինտենսիվությունը:
6. Արտահայտե՛լ գոյատևման ֆունկցիան մահացության ինտենսիվության միջոցով:

Առաջադրանքի օրինակ

1.1. Յո՛ւյց տալ, որ $s(x) = e^{-x^2}$ ֆունկցիան $x \in [0, +\infty)$ միջակայքում կարող է հանդիսանալ գոյատևման ֆունկցիա: Դո՛ւրս բերել համապատասխան $f(x)$ մահացության կորը, μ_x մահացության ինտենսիվությունը և e_0 կյանքի միջին տևողությունը:

Լուծում

Ակնհայտ է, որ $s(0) = 1$; $s(+\infty) = 0$ և ֆունկցիան անընդհատ է: Մնում է ցույց տալ որ տրված ֆունկցիան $x \in [0, +\infty)$ միջակայքում նվազող է (ոչ խիստ): Քանի որ $s'(x) = -2xe^{-x^2} \leq 0$, ապա ստացվում է, որ իսկապես տրված ֆունկցիան կարող է հանդիսանալ գոյատևման ֆունկցիա: Մահացության կորը՝ $f(x) = -s'(x) = 2xe^{-x^2}$, մահացության ինտենսիվությունը կլինի՝ $\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = 2x$: Կյանքի միջին տևողությունը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$e_0 = \int_0^{\infty} xf(x)dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx:$$

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում և կիրառելով Գամմա ֆունկցիայի հատկությունները (տե՛ս Հավելված 2)՝ կստացվի $e_0 = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \approx 0.89$

1.2. Հաշվել e_0 կյանքի միջին տևողությունը, եթե մահացության ինտենսիվությունն ընդունում է հետևյալ արժեքները՝

$$\mu_t = \begin{cases} 0.001, & t \in [0, 5) \\ 0.004, & t \in [5, 70) : \\ 0.2, & t \in [70, +\infty) \end{cases}$$

Լուծում

Այս դեպքում կարող ենք օգտվել կյանքի միջին տևողության համար ստացված հետևյալ բանաձևից.

$$e_0 = \int_0^{\infty} s(x)dx$$

Սակայն անհրաժեշտ է նախ գտնել զոյատևման ֆունկցիայի համար արտահայտություն: Գիտենք, որ

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right):$$

Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

երբ $x \in [0, 5)$,

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x 0.001 dt\right) = e^{-0.001x},$$

երբ $x \in [5, 70)$,

$$\begin{aligned} s(x) &= \exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right) = \exp\left(-\int_0^5 0.001 dt - \int_5^x 0.004 dt\right) \\ &= e^{0.015-0.004x}. \end{aligned}$$

Նմանատիպ տրոհմամբ էլ կստացվի, որ երբ $x \in [70, +\infty)$

$$\begin{aligned} s(x) &= \exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^5 0.001 dt - \int_5^{70} 0.004 dt - \int_{70}^x 0.2 dt\right) \\ &= e^{13.735-0.2x}. \end{aligned}$$

Կյանքի միջին տևողության համար կունենանք.

$$\begin{aligned} e_0^{\circ} &= \int_0^{\infty} s(x) dx = \int_0^5 e^{-0.001x} dx + \int_5^{70} e^{0.015-0.004x} dx \\ &\quad + \int_{70}^{+\infty} e^{13.735-0.2x} dx \approx 65.78: \end{aligned}$$

1.3. Յո՛ւյց տալ, որ մահացության Դե Մուավրի օրենքի ներքո ${}_n|q_x$ հավանականությունը կախված չէ n -ից:

Լուծում

Դե Մուավրի օրենքի դեպքում $s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}$, որտեղ ω -ն սահմանային տարիքն է (տե՛ս Հավելված 1 և առաջադրանքի օրինակ 2.1-ը):

Իսկ ${}_n|q_x$ հավանականությունը կարելի է արտահայտել հետևյալ կերպ.

$${}_n|q_x = \frac{s(x+n) - s(x+n+1)}{s(x)}:$$

Տեղադրենք համապատասխան արտահայտությունները.

$${}_n|q_x = \frac{1 - \frac{x+n}{\omega} - 1 + \frac{x+n+1}{\omega}}{1 - \frac{x}{\omega}} = \frac{1}{\omega - x}:$$

Իսկապես ստացվեց, որ Դե Մուավրի անալիտիկ օրենքի դեպքում ${}_n|q_x$ -ը կախված չէ n -ից:

Թեմա 2: Կյանքի մնացորդային տևողություն

Որոշակի տարիքի հասած անձի կյանքի մնացորդային տևողությունն (T_x) էականորեն տարբերվում է նորածնի կյանքի տևողությունից (T): Այս թեմայի նպատակն է այդ տարբերությունների հստակեցումը, ինչպես նաև որոշակի x տարիքի համար կյանքի տևողության բնութագրիչների դուրսբերումը: Մասնավորապես, դուրս են բերվում բանաձևեր՝ կյանքի մնացորդային տևողության բաշխման՝ $F_x(t) = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$, գոյատևման՝ $s_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$, և խտության՝ $f_x(t) = \frac{f(x+t)}{s(x)}$ ֆունկցիաների, մահացության ինտենսիվության՝ $\mu_x(t) = \mu_{x+t}$, կյանքի միջին մնացորդային տևողության՝ $e_x^\circ = \frac{1}{s(x)} \int_x^\infty s(u) du$ և կյանքի մասնակի միջին մնացորդային տևողության՝ $e_{x:\overline{n}|}^\circ = \frac{1}{s(x)} \int_x^{x+n} s(u) du$ համար (տե՛ս [2], [3]), ինչպես նաև նկարագրվում է միջազգային ակտուարական նշանակումների համակարգը՝ տարրական մակարդակով: Մասնավորապես ներկայացվում են սույն ձեռնարկի համապատասխան թեմայի տակ նշված 1-ին կետի տարրական ֆունկցիաները, 2.ա. և 2.բ. կետերը, 3-րդ և 9-րդ կետերը:

Ստուգիչ հարցեր

1. Ինչպե՞ս է արտահայտվում կյանքի մնացորդային տևողությունը (T_x) կյանքի տևողությամբ (T):
2. Ի՞նչ հատկություն ունի T_x մեծության հետ կապված մահացության ինտենսիվությունը:
3. Որո՞նք են կյանքի մնացորդային տևողության հիմնական բնութագրիչները:
4. Ո՞րն է կյանքի միջին մնացորդային տևողության և կյանքի մասնակի միջին մնացորդային տևողության տարբերությունը:

Առաջադրանքի օրինակ

2.1. Տրված է $f(x) = \frac{1}{\omega}, x \in [0; \omega]$ մահացության կորը: Դո՛ւրս բերել արտահայտություններ $f_x(t)$, $s_x(t)$ և $\mu_x(t)$ ֆունկցիաների համար և հաշվել $\mu_{10}(t)$, e_{20}° և $e_{30:\overline{50}|}^{\circ}$ մեծությունները $\omega = 100$ սահմանային տարիքի դեպքում:

Լուծում

Նախ և առաջ նկատենք, որ տրված օրենքը Գե Մուավրի օրենքն է և դուրս բերենք արտահայտություն $s(x)$ գոյատևման ֆունկցիայի համար՝ ուշադրություն դարձնելով $x \in [0; \omega]$ պայմանի վրա¹.

$$s(x) = \int_x^{\infty} f(t)dt = \int_x^{\omega} \frac{1}{\omega} dt = 1 - \frac{x}{\omega}:$$

Հաշվենք

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{s(x)} = \frac{1}{\omega - x}:$$

Որոշակի x տարիքի հասած անձի համար գոյատևման ֆունկցիան կլինի.

¹ Ինտեգրալի վերին սահմանում ∞ -ը փոխարինվում է ω -ով:

$$s_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{1 - \frac{x+t}{\omega}}{1 - \frac{x}{\omega}} = \frac{\omega - x - t}{\omega - x};$$

Իսկ մահացության ինտենսիվությունը՝

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{s_x(t)} = \frac{1}{\omega - x - t};$$

Այժմ կարելի է հաշվել պահանջվող մեծությունները.

$$\begin{aligned} \mu_{10}(t) &= \frac{1}{90 - t} \\ e_{20}^{\circ} &= \int_0^{\infty} s_x(t) dt = \int_0^{\omega-x} \left(1 - \frac{t}{\omega-x}\right) dx = (\omega-x) - \frac{t^2}{2(\omega-x)} \Big|_0^{\omega-x} \\ &= \frac{\omega-x}{2} = 40: \end{aligned}$$

Այստեղ հարկավոր է ուշադրություն դարձնել ինտեգրալի վերին սահմանին: t -ն ցույց է տալիս, թե քանի տարի է հնարավոր ապրել x տարիքից հետո: Քանի որ անձն արդեն հասել է x տարիքին, իսկ սահմանային տարիքը ω -ն է, ապա մա «կարող է» ապրել առավելագույնը ևս $(\omega - x)$ տարի:

$$e_{30:\overline{50}|}^{\circ} = \int_0^{50} s_x(t) dt = 50 - \frac{t^2}{140} \Big|_0^{50} = 32.14:$$

Հարկ է նշել, որ հաշվարկի արդյունքում պետք է ստացվի $e_{x:\overline{n}|}^{\circ} < n$:

Թեմա 3: Կյանքի կտրացված տևողություն

Թեմայի նպատակն է ուսումնասիրել կյանքի կտրացված տևողությունը՝ $K_x = [T_x]$: Այս պատահական մեծության համար դուրս են բերվում համապատասխան հավանականային բնութագրիչները՝ արտահայտված կյանքի մնացորդային տևողության բնութագրիչներով, օրինակ՝ բաշխման համար ունենք՝

$$P(K_x = k) = P(k \leq T_x < k + 1),$$

իսկ մաթ. սպասման համար՝ $e_x = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k)$: Թեմայի շրջանակներում քննարկվում են նաև կոտորակային տարիքներում կյանքի տևողության բնութագրիչների մոտարկման մեթոդները (տե՛ս Հավելված 2), որոնք են.

«Մահերի հավասարաչափ բաշխման»՝

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1),$$

«Հաստատուն մահացության ինտենսիվության»՝

$$s(n+t) = s(n)p_n^t, \text{ և}$$

«Հիպերբոլիկ» (կամ «Բալդուչիի ենթադրության»)՝

$$\frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)}$$

մոդելները (տե՛ս [2], [3]):

Ստուգիչ հարցեր

1. Ինչպե՞ս է արտահայտվում կյանքի կտրացված տևողությունը (K_x) կյանքի մնացորդային տևողությամբ (T_x):
2. Ի՞նչ հատկությամբ է օժտված տարվա ընթացքում մահանալու հավանականությունը «Մահերի հավասարաչափ բաշխման» մոդելի դեպքում:
3. Նկարագրել «Հաստատուն մահացության ինտենսիվության» մոդելը:
4. Ի՞նչ ենթադրություն է կատարվում «Հիպերբոլիկ» մոդելում:

Առաջադրանքի օրինակ

3.1. Հայտնի է, որ.

$$e_{40} = 45, e_{41} = 44.7, e_{42} = 44:$$

Գտնել հավանականությունը, որ 40 տարեկան անձը կապրի ևս 2 տարի:

Լուծում

Նախ նկատենք, որ

$$e_x = EK_x = \sum_{n=1}^{\infty} n p_x:$$

Սակայն $n p_x = p_x \cdot n-1 p_{x+1}$:

Այսպիսով՝

$$\begin{aligned} e_x &= p_x \sum_{n=1}^{\infty} n-1 p_{x+1} = p_x \sum_{n=0}^{\infty} n p_{x+1} = p_x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n p_{x+1} \right) \\ &= p_x (1 + e_{x+1}): \end{aligned}$$

Մեր նպատակն է հաշվել ${}_2 p_{40}$ -ը, որը կարելի է արտահայտել ${}_2 p_{40} = p_{40} \cdot p_{41}$:

e_x -ի համար ստացված անդրադարձ բանաձևից կունենանք, որ

$$\begin{aligned} p_{40} &= \frac{e_{40}}{1 + e_{41}} = \frac{45}{45.7}, \\ p_{41} &= \frac{e_{41}}{1 + e_{42}} = \frac{44.7}{45}: \end{aligned}$$

Արդյունքում՝

$${}_2 p_{40} = \frac{44.7}{45.7} \approx 0.978:$$

3.2. Հայտնի է, որ $l_{40} = 7746$, իսկ $l_{41} = 7681$: Հաշվել $\mu_{40.25}$ -ը հետևյալ ենթադրությունների համար՝

ա. տարվա ընթացքում մահերի հավասարաչափ բաշխում,

բ. հաստատուն մահացության ինտենսիվություն,

գ. բալրուչի ինթադրություն,

դ. կյանքի սպասվելիք տևողությունը ենթարկվում է $l_x = 1000\sqrt{100 - x}$ օրենքին:

Լուծում

Ստորև ներկայացված բոլոր բանաձևերում $n \in N$, $0 \leq t \leq 1$:

ա. Տարվա ընթացքում մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում գոյատևման ֆունկցիայի համար ունենք.

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1):$$

Այստեղից կարելի է գտնել խտության ֆունկցիան և հաշվել համապատասխան $\mu_{40.25}$ արժեքը՝ վերցնելով $n = 40$, $t = 0.25$ քվերը: Սակայն կարելի է կիրառել հետևյալ բանաձևը (տե՛ս Հավելված 2).

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{1-tq_n},$$

որտեղ $q_n = \frac{l_n - l_{n+1}}{l_n}$:

Այսպիսով՝

$$\mu_{40.25} = \frac{1 - \frac{l_{41}}{l_{40}}}{1 - 0.25 \left(1 - \frac{l_{41}}{l_{40}}\right)} = 0.00841:$$

բ. Հաստատուն մահացության ինտենսիվության դեպքում հայտնի է, որ

$$s(n+t) = s(n)p_n^t:$$

Գտնենք խտության ֆունկցիան՝

$$f(n+t) = -s'(n+t) = -s(n)p_n^t \ln p_n:$$

Որտեղից էլ

$$\mu_{n+t} = -\ln p_n$$

Այսպիսով՝

$$\mu_{40.25} = -\ln p_{40} = -\ln \frac{l_{41}}{l_{40}} = 0.00843:$$

գ. Բալրուշիի ենթադրությունն է՝

$$\frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)},$$

որի դեպքում ստացվում է (տե՛ս Հավելված 2).

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{p_n + tq_n}$$

Իսկ թվային արտահայտությամբ՝

$$\mu_{40.25} = \frac{1 - \frac{l_{41}}{l_{40}}}{\frac{l_{41}}{l_{40}} + 0.25 \left(1 - \frac{l_{41}}{l_{40}}\right)} = 0.00844:$$

դ. Տրված ֆունկցիայի դեպքում մահացության ինտենսիվությունը կարելի է ստանալ հետևյալ տեսքով.

$$\mu_x = -\frac{(l_x)'}{l_x} = \frac{\frac{500}{\sqrt{100-x}}}{1000\sqrt{100-x}} = \frac{1}{2\sqrt{100-x}}:$$

Եվ տեղադրելով $x = 40.25$ ՝ կստանանք 0.00837 արդյունքը:

Թեմա 4: Մահացության աղյուսակներ

Կյանքի տևողության հետ կապված վիճակագրական տվյալներն ամփոփվում են ակտուարական մաթեմատիկայի ամենակիրառելի գործիքներից մեկում, որն ունի «մահացության աղյուսակներ» անվանումը: Այս թեմայի շրջանակներում ներկայացվում են սովորական մահացության աղյուսակի տարրերը՝ l_x , d_x , p_x , q_x , և դրանց միջև առկա կապերը: Ներկայացվում են նաև «ռիսկի ընտրությամբ» աղյուսակները և «սահմանափակ ժամկետով» ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակները: Թվային օրինակների վրա քննարկվում են այս 3 տիպի աղյուսակների միջև տարբերությունները և դրանցից յուրաքանչյուրի առանձնահատկությունները (տե՛ս [2], [3], [4]):

Ստուգիչ հարցեր

1. Որտե՞ղ և ինչպե՞ս են կիրառվում մահացության աղյուսակները:
2. Ո՞րն է ռիսկի ընտրությամբ և սովորական կյանքի աղյուսակների տարբերությունը:
3. Ինչպե՞ս են հաշվարկի մեջ մասնակցում սահմանափակ ժամկետով ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակների տարրերը ժամկետի ավարտից հետո:

Առաջադրանքի օրինակ

4.1. Ստորև բերված է 2 տարվա սահմանափակ ժամկետով ռիսկի ընտրությամբ կյանքի աղյուսակը

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
70	70625	69954	68839	72
71	69137	68402	67252	73
72	67575	66770	65578	74

Ենթադրելով, որ կոտորակային տարիքների համար կիրառվում է մահերի հավասարաչափ բաշխման մոտարկումը, հաշվել՝ $0.8q_{[70]+0.3}^{\text{Լ}}:$

Լուծում

Արտահայտենք $0.8q_{[70]+0.3}^{\text{Լ}}$ -ն աղյուսակում տրված մեծությումների միջոցով՝

$$0.8q_{[70]+0.3} = 1 - \frac{l_{[70]+1.1}}{l_{[70]+0.3}};$$

Կոտորակային տարիքների համար կիրառելով մահերի հավասարաչափ բաշխման մոդելը (տե՛ս Հավելված 2)՝ կարող ենք գրել.

$$l_{[70]+1.1} = 0.9l_{[70]+1} + 0.1l_{72} = 69843:$$

Այս արտահայտության երկրորդ գումարելին կլինեն $0.1l_{[70]+2}$, սակայն աղյուսակը 2 տարվա սահմանափակ ժամկետ ունի, ուստի պետք է գրել $0.1l_{72}$:

Իսկ հայտարարում ունենք

$$l_{[70]+0.3} = 0.7l_{[70]} + 0.3l_{[70]+1} = 70424:$$

Այսպիսով՝ $0.8q_{[70]+0.3} = 0.00825$:

Թեմա 5: Կյանքի կարճաժամկետ ապահովագրության մոդելներ

Այս թեմայի նպատակն է ուսանողին ծանոթացնել կյանքի ապահովագրության այն մոդելների հետ, որոնցում հաշվի չի առնվում ներդրումային եկամտաբերությունը, այսինքն՝ կյանքի ապահովագրության պայմանագիրը գործում է առավելագույնը մեկ տարի: Թեմայի շրջանակներում մախ, և առաջ քննարկվում են անհատական հայտերը և պարզագույն դեպքում դուրս է բերվում բանաձև զուտ ապահովագրավճարի մեծության համար: Վերլուծությունն ընդլայնվում է միևնույն տիպի ապահովագրական պայմանագրերից կազմված պայուսակի վրա, և դուրս է բերվում գումարյալ հայտի բաշխումը: Վերջինս կարելի է կատարել ինչպես փաթույթների, այնպես էլ ծնորդ ֆունկցիայի օգնությամբ: Գումարյալ հայտի միջոցով գնահատվում է սնանկացման հավանականությունը, և թեման ամփոփվում է ապահովագրավճարի նշանակման սկզբունքների քննարկմամբ, որը ներառում է հավելավճարի սահմանումը և անհատական հավելավճարի հաշվարկման հետևյալ մեթոդների ներկայացումը՝

Սպասվող վնասի կամ զուտ ապահովագրավճարի համամասնությամբ՝ $l_i = k \cdot E\xi_i$:

Դիսպերսիայի համամասնությամբ՝ $l_i = k \cdot Var\xi_i$:

Միջին քառակուսային շեղման համամասնությամբ՝

$$l_i = k \cdot \sqrt{Var\xi_i} \text{ (տե՛ս [2])}$$

Ստուգիչ հարցեր

1. Ինչպե՞ս է հաշվարկվում զուտ ապահովագրավճարը անհատական հայտերի մոդելում:
2. Ինչպիսի՞ եմքադրություններ են դրվում գումարյալ հայտի մոդելի հիմքում:
3. Ի՞նչ է սնանկացումը, և ինչպե՞ս է մոտարկվում սնանկացման հավանականությունը:
4. Ինչո՞ւ որպես ապահովագրավճար չի ընդունվում զուտ ապահովագրավճարը:
5. Ի՞նչ է հավելավճարը:
6. Ինչպե՞ս է որոշվում հարաբերական հավելավճարը դիտարկվող մեթոդներում:
7. Ինչպե՞ս է որոշվում ապահովագրավճարը դիտարկվող մեթոդներում:

Առաջադրանքի օրինակ

5.1. Ապահովագրական պայուսակը կազմված է կյանքի ապահովագրության 3 միանման պայմանագրերից: Ապահովագրական գումարը կախված է մահվան պատճառից: Եթե մահը տեղի է ունեցել դժբախտ պատահարից, ապա հատուցվում է 400,000\$, իսկ այլ պատճառներից մահվան դեպքում՝ 100,000\$: Հայտնի է նաև, որ ապահովագրված յուրաքանչյուր անձի կյանքի տևողությունն անկախ է մյուսներից, և մեկ տարվա ընթացքում դժբախտ պատահարից մահվան հավանականությունը 0.1 է, իսկ այլ պատճառներից մահվան հավանականությունը՝ 0.3: Գտնե՛լ գումարյալ հատուցման բաշխումը:

Լուծում

Մեթոդ I

Հաշվարկներին առավել պարզ տեսք հաղորդելու նպատակով որպես գումարի միավոր դիտարկենք 100,000\$:

Նշանակենք X_1, X_2, X_3 -ով պայմանագրերի անհատական հատուցումները: Այդ պատահական մեծություններն անկախ են ըստ համախմբության, և դրանցից յուրաքանչյուրն ունի հետևյալ բաշխումը՝

X_i	0	1	4
$p(n)$	0.6	0.3	0.1

$X_1 + X_2$ պատահական մեծության համար կունենանք հետևյալ բաշխումը՝

$X_i + X_j$ ($i \neq j$)	0	1	2	4	5	8
$p(n)$	0.36	0.36	0.09	0.12	0.06	0.01

Օրինակ՝ 0.12 հավանականությունը ստացվել է այն տրամաբանությամբ, որ $X_1 + X_2$ մեծությունը կարող է ընդունել 4 արժեքն այն դեպքում, երբ $X_1 = 4$ և $X_2 = 0$, կամ երբ $X_1 = 0$ և $X_2 = 4$: Այլ կերպ ասած՝

$$P(X_1 + X_2 = 4) = P(X_1 = 4) \cdot P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 4) = 2 \cdot 0.1 \cdot 0.6 = 0.12:$$

Իսկ օրինակ 8 արժեքը $X_1 + X_2$ մեծությունը կընդունի այն և միայն այն դեպքում, երբ երկու պատահական մեծություններն էլ ընդունեն 4 արժեքը, այսինքն՝

$$P(X_1 + X_2 = 8) = P(X_1 = 4) \cdot P(X_2 = 4) = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01:$$

Շարունակելով հաշվարկները և ավելացնելով 3-րդ պատահական մեծությունը՝ գումարյալ հատուցման $S = X_1 + X_2 + X_3$ -ի համար կստացվի հետևյալ բաշխումը՝

S	0	1	2	3	4	5	6	8	9	12
$p(n)$	0.216	0.324	0.162	0.027	0.108	0.108	0.027	0.018	0.009	0.001

Մեթոդ II

Հայտնի է, որ պատահական մեծության ծնորդ ֆունկցիայի և բաշխման ֆունկցիայի միջև գոյություն ունի միարժեք կապ. ծնորդ ֆունկցիայով միարժեքորեն որոշվում է բաշխման ֆունկցիան և

հակառակը: Այսպիսով՝ 5.1 խնդիրը կարելի է լուծել մաս ծնորդ ֆունկցիայի օգնությամբ:

Յուրաքանչյուր X_i պատահական մեծություն ունի միևնույն ծնորդ ֆունկցիան՝

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = \varphi_3(z) = Ez^{X_i} = 0.6 \cdot z^0 + 0.3 \cdot z^1 + 0.1 \cdot z^4 \\ = 0.1(6 + 3z + z^4):$$

Գումարյալ հատուցման ծնորդ ֆունկցիան կլինի՝

$$Ez^S = Ez^{X_1+X_2+X_3} = \varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \cdot \varphi_3(z) = 0.1^3(6 + 3z + z^4)^3 = \\ = 0.1^3(216 + 324z + 162z^2 + 27z^3 + 108z^4 + 108z^5 + 27z^6 + 18z^8 \\ + 9z^9 + z^{12}):$$

z -ի յուրաքանչյուր աստիճանի դիմաց կանգնած գործակիցը ցույց է տալիս համապատասխան արժեքի հավանականությունը, որը համընկնում է առաջին եղանակում ստացված աղյուսակի հետ:

5.2. Ապահովագրական ընկերությունում 7000 անձ կնքել է կյանքի ապահովագրության պայմանագիր՝ մեկ տարի տևողությամբ և հետևյալ պայմաններով.

- ապահովագրական ընկերությունը վճարում է 100,000\$, եթե տվյալ տարվա ընթացքում անձը մահանա դժբախտ պատահարի արդյունքում,

- ապահովագրական ընկերությունը վճարում է 20,000\$, եթե տվյալ տարվա ընթացքում անձը մահանա այլ (բնական) պատճառներով,

- ապահովագրական ընկերությունը ոչինչ չի վճարում, եթե անձը ողջ մնա մինչև տարվա վերջ:

Հայտնի է, որ այդ անձանց դժբախտ պատահարից մահանալու հավանականությունը մոտակա մեկ տարվա ընթացքում հավասար է 0.0008, իսկ այլ (բնական) պատճառներով մահանալու հավանականությունը կախված է տարիքից: Դրա համար ապահովադիրներին բաժանել են 2 տարիքային խմբի. առաջին խմբում ներառված են $N_1 = 2000$ անձինք, որոնցից յուրաքանչյուրի՝ այլ (բնական) պատ-

ճառներից մահվան հավանականությունը 0.006 է, իսկ երկրորդ խմբում ներառված են $N_2 = 5000$ անձինք՝ 0.002 մահվան հավանականությամբ: Գտնել ապահովագրավճարի չափը, որը բավարար կլինի, որ 95% հավանականությամբ ապահովագրական ընկերությունը չսնանկանա: Խնդրի լուծումը բերել անհատական բեռնվածության երեք մեթոդների համար:

Լուծում

Որպես գումարի միավոր դիտարկենք 20,000\$: Այդ դեպքում առաջին խմբում անհատական վնասի մեծությունը կընդունի 0, 1 և 5 արժեքները՝ համապատասխանաբար 0.9932, 0.006 և 0.0008 հավանականություններով: Երկրորդ խմբում անհատական վնասի մեծությունը նույնպես կընդունի նույն 0, 1 և 5 արժեքները, սակայն համապատասխանաբար 0.9972, 0.002 և 0.0008 հավանականություններով:

Այսպիսով՝ անհատական վնասների միջին արժեքը և դիսպերսիան յուրաքանչյուր խմբի համար կստացվի՝

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \cdot 0.006 + 5 \cdot 0.0008 = 0.01, \\ \sigma_1^2 &= 1^2 \cdot 0.006 + 5^2 \cdot 0.0008 - m_1^2 = 0.0259, \\ m_2 &= 1 \cdot 0.004 + 5 \cdot 0.0008 = 0.006, \\ \sigma_2^2 &= 1^2 \cdot 0.004 + 5^2 \cdot 0.0008 - m_2^2 \approx 0.022: \end{aligned}$$

Գումարյալ վնասի մեծության միջինը և դիսպերսիան կհաշվենք հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} ES &= N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 2000 \cdot 0.01 + 5000 \cdot 0.006 = 50, \\ VarS &= N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2 \approx 2000 \cdot 0.0259 + 5000 \cdot 0.022 = 161.62: \end{aligned}$$

95% չսնանկացման հավանականություն ապահովելու համար ընկերության կապիտալը պետք է լինի՝ $u = ES + l$, որտեղ l հավելավճարը որոշվում է հետևյալ բանաձևով (տե՛ս Հավելված 2՝)

$$l = x_{95\%} \cdot \sqrt{VarS} \approx 1.645 \cdot \sqrt{161.62} \approx 20.91:$$

Այժմ դիտարկենք անհատական բեռնվածության մեթոդները:

1. Ձուտ ապահովագրավճարի համամասնության դեպքում անհատական հավելավճարը՝ $l_i = k \cdot E\xi_i$, որտեղ $\sum l_i = l$, $\sum E\xi_i = ES$, իսկ $k = x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{ES}$, որն այս դեպքում համընկնում է հարաբերական հավելավճարի՝ $\theta_i = \frac{l_i}{E\xi_i}$ հետ: Այսպիսով՝

$$\theta_i = k = \frac{l}{ES} = \frac{21.5413}{60} \approx 41.8\%:$$

Հաշվի առնելով դրամային միավորը՝ ապահովագրավճարի չափն առաջին խմբի անդամների համար կկազմի՝

$$p_1 = m_1(1 + k) * 20,000 \approx 284$,$$

իսկ երկրորդ խմբի անդամների համար՝

$$p_2 = m_2(1 + k) * 20,000 \approx 170$:$$

Եթե ապահովագրական ընկերությունը որոշի գանձել միևնույն ապահովագրավճարը բոլոր ապահովադիրներից, ապա պետք է հաշվարկը կատարել ըստ կշիռների՝

$$p = \frac{N_1}{N} p_1 + \frac{N_2}{N} p_2 \approx 202,6$:$$

2. Դիսպերսիայի համամասնությամբ տրոհելու դեպքում համամասնության գործակիցը՝ k -ն, որոշվում է

$$k = \frac{l}{VarS} \approx 12.94\%:$$

Եվ այս դեպքում առաջին և երկրորդ խմբի անդամների համար անհատական հավելավճարները համապատասխանաբար կազմում են.

$$l_1 = k \cdot \sigma_1^2 \approx 0.00335,$$

$$l_2 = k \cdot \sigma_2^2 \approx 0.00285:$$

Իսկ դրամային միավորը կիրառելով՝ ապահովագրավճարները համապատասխանաբար կստացվեն.

$$p_1 = (m_1 + l_1) * 20,000 \approx 267$,$$

$$p_2 = (m_2 + l_2) * 20,000 \approx 177$:$$

Միևնույն ապահովագրավճարի գանձման պարագայում՝

$$p \approx 202.7:$$

Հարաբերական հավելավճարներն էլ, ըստ խմբերի, կկազմեն համապատասխանաբար՝

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 33.5\%, \theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 47.5\%:$$

3. Եթե հավելավճարը տրոհենք միջին քառակուսային շեղման համամասնությամբ, ապա համամասնության գործակիցը կստացվի՝

$$k = \frac{l}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2} \approx 0.0197:$$

Ուստի անհատական հավելավճարները, ըստ խմբերի, կլինեն.

$$l_1 = k \cdot \sigma_1 \approx 0.00317,$$

$$l_2 = k \cdot \sigma_2 \approx 0.00292:$$

Իսկ հարաբերական հավելավճարները՝

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 31.7\%, \theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 48.7\%$$

Եվ ի վերջո ապահովագրավճարները կկազմեն՝

$$p_1 = (m_1 + l_1) \cdot 20,000 \approx 263$,$$

$$p_2 = (m_2 + l_2) \cdot 20,000 \approx 178$,$$

$$p \approx 202.3:$$

Թեմա 6: Կարգավիճակի կորուստ մի քանի պատճառով

Այս թեմայի շրջանակներում մեկնաբանվում է կարգավիճակի գաղափարը տարբեր իրավիճակներում: Անհատի համար ուսումնասիրվում են հետևյալ երկու պատահական մեծությունները՝ մինչև տվյալ կարգավիճակի կորուստն ընկած ժամանակահատվածը (T) և այդ կարգավիճակի կորստի պատճառները (J): Ուսումնասիրվում են ինչպես այս երկու պատահական մեծությունների համատեղ հավանականային խտության ֆունկցիան և պայմանական բաշխումները, այնպես էլ դրանցից յուրաքանչյուրի բաշխումն առանձին (մարզինալ բաշխումները): Կառուցվում են տարբեր պատճառներով կարգավիճակի կորստի աղյուսակները, և արտածվում է թեմայի կարևորագույն արդյունքներից մեկը. կարգավիճակի կորստի ընդհանուր ինտենսիվությունը տարբեր պատճառներով կարգավիճակի կորստի ինտենսիվությունների հանրագումարն է (տե՛ս [1], [3]):

Ստուգիչ հարցեր

1. Ինչպե՞ս է արտահայտվում տարբեր պատճառներով կարգավիճակի կորստի մարզինալ բաշխումը $f_j(j)$ համատեղ խտության ֆունկցիայի՝ $f_{T,j}(t, j)$ միջոցով:

2. Ինչպե՞ս է արտահայտվում մինչև կարգավիճակի կորուստն ընկած ժամանակի մարգինալ խտության ֆունկցիան՝ $f_T(t)$ համատեղ խտության ֆունկցիայի $f_{T,J}(t, j)$ միջոցով:
3. Որո՞նք են այն հիմնական մեծությունները, որոնց միջոցով կարելի է արտահայտել համատեղ խտության, պայմանական բաշխման և մարգինալ բաշխման ֆունկցիաները:
4. Որո՞նք են մի քանի պատճառով կարգավիճակի կորստի աղյուսակի տարրերը, և ինչպե՞ս են դրանք հաշվարկվում:

Առաջադրանքի օրինակ

6.1. Երկու պատճառով կարգավիճակի կորստի մոդելում տրված են կարգավիճակի կորստի ինտենսիվությունները՝

$$\mu_x^{(1)}(t) = \frac{1}{100 - (x + t)}, \mu_x^{(2)}(t) = \frac{2}{100 - (x + t)}, t < 100 - x:$$

Հաշվել հետևյալ մեծությունները 50 տարեկան անձի համար.

ա) $f_{T,J}(t, j)$, բ) $f_T(t)$, գ) $f_J(j)$, դ) $f_{J|T}(j|T)$,

ե) $E(T)$:

Լուծում

Նախ հաշվենք կարգավիճակի կորստի ընդհանուր ինտենսիվությունը՝

$$\mu_{50}^{(\tau)}(s) = \mu_{50}^{(1)}(s) + \mu_{50}^{(2)}(s) = \frac{3}{50 - s},$$

այդ դեպքում գոյատևման ֆունկցիան կլինի՝

$${}_t p_{50}^{(\tau)} = \exp\left(-\int_0^t \frac{3}{50 - s} ds\right) = \left(\frac{50 - t}{50}\right)^3:$$

Ունենալով վերը նշված ֆունկցիաները՝ կարող ենք հաշվել պահանջվող մեծությունները:

ա) Քանի որ

$$f_{T,J}(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t),$$

ապա համատեղ խտության ֆունկցիայի համար կստացվի՝

$$f_{T,j}(t,j) = \begin{cases} \frac{(50-t)^2}{125,000}, j=1 \\ \frac{(50-t)^2}{62,500}, j=2 \end{cases} :$$

բ) Մինչև կարգավիճակի կորուստն ընկած ժամանակի մարզինալ խտության ֆունկցիան՝

$$f_T(t) = {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(t) = \sum_j f_{T,j}(t,j) = \frac{3}{125,000} (50-t)^2:$$

գ) Տարբեր պատճառներով կարգավիճակի կորստի մարզինալ բաշխումը՝

$$f_j(j) = {}_\infty q_x^{(j)} = \int_0^\infty f_{T,j}(s,j) ds,$$

որն այս դեպքում ևս ընդունում է երկու արժեք՝

$$f_j(j) = \begin{cases} \frac{1}{3}, j=1 \\ \frac{2}{3}, j=2 \end{cases}$$

դ) Պայմանական բաշխման համար տեղի ունի՝

$$f_{j|T}(j|T) = \frac{\mu_x^{(j)}(t)}{\mu_x^{(\tau)}(t)}:$$

Տեղադրելով համապատասխան մեծությունները՝ կստացվի՝

$$f_{j|T}(1|T) = \frac{3}{(50-t)^2},$$

$$f_{j|T}(2|T) = \frac{6}{(50-t)^2}:$$

ե) $E(T)$ հաշվելու համար բավական է օգտվել բ) կետից և մաթ. սպասման սահմանումից՝

$$E(T) = \int_0^\infty t f_T(t) dt = 12.5:$$

6.2. Տվյալ 2 պատճառով մահացության անհատական աղյուսակները սահմանված են հետևյալ կերպ՝ $l'_x^{(1)} = a - x$ և $l'_x^{(2)} = ce^{-x}$:

Կազմել արտահայտություններ $l_x^{(T)}, d_x^{(1)}$ և $d_x^{(2)}$ -ի համար երկու պատճառով մահացության աղյուսակում՝ ենթադրելով, որ $l_0^{(T)} = a$:

Լուծում

Հայտնի է, որ $l_x^{(T)} = k \cdot l_x'^{(1)} \cdot l_x'^{(2)} \cdot \dots \cdot l_x'^{(m)}$, որտեղ k -ն հաստատուն է, իսկ m -ը՝ մահվան պատճառների քանակը: Այս խնդրում $m = 2$, ուստի՝

$$l_x^{(T)} = k \cdot l_x'^{(1)} \cdot l_x'^{(2)} = k(a - x) \cdot ce^{-x}:$$

Սակայն մեզ հայտնի է, որ $l_0^{(T)} = a$, որտեղից կստացվի $k = \frac{1}{c}$ արժեքը, և արդյունքում $l_x^{(T)}$ -ի համար կունենանք՝

$$l_x^{(T)} = e^{-x}(a - x):$$

$d_x^{(1)}$ և $d_x^{(2)}$ -ը գտնելու համար կօգտվենք $d_x^{(i)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(T)} \cdot \mu_{x+t}^{(i)} dt$ բանաձևից, որտեղ $\mu_{x+t}^{(i)}$ -ն i -րդ պատճառից մահվան ինտենսիվությունն է, որը կարելի է հաշվել $\mu_{x+t}^{(i)} = -\frac{D(l_{x+t}^{(i)})}{l_{x+t}^{(i)}}$ բանաձևից: Արդյունքում ստացվում է.

$$\mu_{x+t}^{(1)} = \frac{1}{a - x - t},$$

$$\mu_{x+t}^{(2)} = 1:$$

Իսկ $d_x^{(1)}$ և $d_x^{(2)}$ -ի համար հաշվարկները բերված են ստորև.

$$d_x^{(1)} = \int_0^1 e^{-(x+t)}(a - x - t) \cdot \frac{1}{a - x - t} dt = e^{-x}(1 - e^{-1}),$$

$$d_x^{(2)} = \int_0^1 e^{-(x+t)}(a - x - t) dt:$$

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում և մասերով ինտեգրում՝ կստանանք՝

$$d_x^{(2)} = \int_x^{x+1} e^{-u}(a - u) du = (a - 1)(e^{-x} - e^{-(x+1)}) + (x + 1)e^{-(x+1)} - xe^{-x} = e^{-x}((a - 1 - x)(1 - e^{-1}) + e^{-1}):$$

Մոդուլ 2: Կենսաթոշակների և կյանքի ապահովագրության ակտուարական հաշիվ

Թեմա 7: Կյանքի ապահովագրության մոդելներ

Թեմայի շրջանակներում նկարագրվում են կյանքի ապահովագրության ինչպես անընդհատ, այնպես էլ դիսկրետ տեսակների մաթեմատիկական մոդելները: Ներկայացվում են բերված արժեքի դիսպերսիայի թեորեմը և միջազգային ակտուարական նշանակումների համակարգի այն կետերը, որոնք դուրս են մնացել մոդուլ 1-ի 2-րդ թեմայի քննարկման ժամանակ: Մահվան պահին վճարվող և մահվան տարվա վերջում վճարվող հետևյալ մոդելների համար՝ կյանքի ցմահ, լրակեցության, ժամկետային, խառը, հետաձգված, հետաձգված ժամկետային, ինչպես նաև ցմահ աճող, աճող ժամկետային, ցմահ աճող-հետաձգված, աճող-հետաձգված ժամկետային և նվազող հատուցումներով ապահովագրություններում դուրս են բերվում բանաձևեր սպասվող հատուցումների ակտուարական բերված արժեքների և դիսպերսիաների համար: Վերջնական բանաձևերը ներկայացվում են երեք հիմնական տեսքերով՝ կյանքի տևողության բաշխման բնութագրիչների, մահացության աղյուսակի տարրերի և կոմուտացիոն ֆունկցիաների միջոցով: Արտածվում է կապ կյանքի անընդհատ և դիսկրետ համապատասխան տեսակների ակտուարական բերված արժեքների միջև մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում: Ապահովագրության միևնույն մոդելում ներկայացվում և մեկնաբանվում են ակտուարական բերված արժեքների համար անդորարժ բանաձևեր (տե՛ս [1], [2], [3]):

Ստուգիչ հարցեր

1. Նկարագրել կյանքի ապահովագրության մաթեմատիկական մոդելը:
2. Մեկնաբանել կոմուտացիոն ֆունկցիաների ֆիզիկական իմաստը:
3. Ո՞րն է ակտուարական կուտակման և ֆինանսական կուտակման տարբերությունը:
4. Ի՞նչ է ակտուարական բերված արժեքը կյանքի ապահովագրությունում:

Առաջադրանքի օրինակներ

7.1. Կյանքի ապահովագրության պայմանագրով նախատեսված է 100 միավոր հատուցում մահվան պահին, եթե մահը տեղի ունենա առաջին 10 տարիների ընթացքում և 50 միավոր հատուցում մահվան պահին, եթե մահը տեղի ունենա 10 տարի հետո: Հայտնի է, որ

$$\mu_{x+t} = \begin{cases} 0.01, & t \leq 10 \\ 0.02, & t > 10 \end{cases}$$

Ինչպես նաև

$$\delta_t = \begin{cases} 0.05, & t \leq 10 \\ 0.04, & t > 10 \end{cases}$$

Դիցուք Z -ը այն պատահական մեծությունն է, որը նկարագրում է հատուցման ներկա արժեքը: Հաշվել՝ այդ մեծության ակտուարական ներկա արժեքը և վարիացիան:

Լուծում

Նկարագրված ապահովագրական պայմանագիրը կարելի է պայմանականորեն բաժանել երկու մասի. Z_1 -ով նշանակենք մահվան պահին 1 միավոր հատուցմամբ 10 տարվա ժամկետային ապահովագրության ներկա արժեքը, իսկ Z_2 -ով՝ մահվան պահին 1 միավոր հատուցմամբ 10 տարով հետաձգված ցմախ ապահովագրության ներկա արժեքը: Այս նշանակումներով կստացվի, որ

$$Z = 100Z_1 + 50Z_2:$$

Ակտուարական նշանակումների համաձայն՝ Z_1 -ի և Z_2 -ի ակտուարական ներկա արժեքները համապատասխանաբար կնշանակենք $\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1$ և ${}_{10|}\bar{A}_x$.

$$E(Z_1) = \bar{A}_{x:\overline{10}|}^1 = \int_0^{10} f_x(t) v^t dt,$$

որտեղ $f_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$, սակայն քանի որ μ ինտենսիվությունը նշված միջակայքում հաստատուն է, ապա կունենանք $f_x(t) = e^{-\mu t} \cdot \mu$: Իսկ ֆինանսական մաթեմատիկայից հայտնի է, որ դիսկոնտավորման գործակիցը կարելի է արտահայտել տոկոսադրույքի ինտենսիվությամբ՝ $v^t = e^{-\delta t}$: Այս ամենը տեղադրելով՝ կստանանք.

$$E(Z_1) = \bar{A}_{x:10|}^{-1} = \frac{0.01}{0.01 + 0.05} (1 - e^{-10 \cdot (0.01 + 0.05)}) = \frac{1 - e^{-0.6}}{6}:$$

Քայլերի մնացածով հաջորդականությամբ կարող ենք ստանալ մահ $_{10|}\bar{A}_x$ -ը՝ հաշվի առնելով, որ $t > 10$ դեպքում

$$t p_x = {}_{10}p_x \cdot {}_{t-10}p_{x+10} = e^{-0.01 \cdot 10} \cdot {}_{t-10}p_{x+10},$$

իսկ $v^t = v^{10+(t-10)} = e^{-0.05 \cdot 10} \cdot e^{-(t-10)\delta_t}$, ինչպես մահ կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ $u = t - 10$ կստացվի.

$$\begin{aligned} E(Z_2) &= {}_{10|}\bar{A}_x = \int_{10}^{+\infty} f_x(t) v^t dt = e^{-0.6} \int_0^{+\infty} 0.02 \cdot {}_u p_{x+10} \cdot e^{-0.04u} du \\ &= e^{-0.6} \frac{0.02}{0.02 + 0.04} = \frac{e^{-0.6}}{3}: \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$E(Z) = 100E(Z_1) + 50E(Z_2) = 100 \cdot \frac{1 - e^{-0.6}}{6} + 50 \cdot \frac{e^{-0.6}}{3} = \frac{50}{3}:$$

Վարիացիան՝ $Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = {}^2\bar{A} - \bar{A}^2$ հաշվելու համար անհրաժեշտ է կիրառել վարիացիայի թեորեմը, որտեղ ասվում է, որ միավոր հատուցում վճարելու դեպքում ներկա արժեքի երկրորդ կարգի մոմենտը՝ ${}^2\bar{A}$ հաշվելու համար պետք է առաջին կարգի մոմենտում տոկոսադրույքի ինտենսիվության δ մեծության փոխարեն վերցնել դրա կրկնապատիկը՝ 2δ : Սա տալիս է հետևյալ արդյունքը՝

$$E(Z_1^2) = {}^2\bar{A}_{x:10|}^{-1} = \frac{0.01}{0.01 + 2 \cdot 0.05} (1 - e^{-10 \cdot (0.01 + 2 \cdot 0.05)}) = \frac{1 - e^{-1.1}}{11},$$

$$E(Z_2^2) = {}_{10|}^2\bar{A}_x = e^{-10 \cdot (0.01 + 2 \cdot 0.05)} \frac{0.02}{0.02 + 2 \cdot 0.04} = \frac{e^{-1.1}}{5},$$

որտեղից՝

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= E(100Z_1 + 50Z_2)^2 = 100^2 E(Z_1^2) + 50^2 E(Z_2^2) \\ &= \frac{10,000}{11} + e^{-1.1} \left(500 - \frac{10,000}{11} \right) \approx 772.9: \end{aligned}$$

Նկատենք, որ $E(Z_1 Z_2) = 0$, քանի որ այդ երկու պատահական մեծությունները չեն կարող միաժամանակ հանդես գալ:

$$\text{Այսպիսով } \text{Var}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 772.9 - \left(\frac{50}{3}\right)^2 \approx 495.1:$$

Գիտողություն

Նման դեպքերում՝

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(100Z_1 + 50Z_2) \neq 100^2\text{Var}(Z_1) + 50^2\text{Var}(Z_2),$$

քանի որ Z_1 և Z_2 պատահական մեծություններն անկախ չեն: Հետաձգված պայմանագրով հատուցում կտրվի այն և միայն այն դեպքում, երբ ժամկետային պայմանագրով հատուցում չի տրվել, այսինքն՝ ստացվում է, որ Z_2 մեծությունը պայմանական մեծություն է և կախված է Z_1 -ից:

7.2. Լապտեր արտադրող ընկերությունը խնդրում է Ձեզ ապահովագրել իր արտադրանքը փչանալու դեպքերից: Տրված է, որ լապտերի փչանալու μ ինտենսիվությունը հաստատուն է և հավասար է 0.04-ի, նոր լապտերի գինը \$200 է, լապտերի գինը 4 տարիների ընթացքում հավասարաչափ նվազում է և հավասարվում 0-ի: Ապահովագրությունը պետք է լապտերի փչանալու պահին վերադարձնի մնացորդային գինը: Ենթադրելով, որ տոկոսադրույքի ինտենսիվությունը հաստատուն է՝ $\delta=0.06$, գտնել լապտերի ապահովագրության ակտուարական ներկա արժեքը:

Լուծում

Անհրաժեշտ է օգտվել անընդհատորեն նվազող հատուցմամբ ապահովագրության ակտուարական ներկա արժեքի՝ $(\overline{DA})_{x:\overline{n}|}^1$ -ի որոշակի ձևափոխված տարբերակից, և քանի որ այդ ձևափոխության համար չի կիրառվում հատուկ նշանակում, ապա այն պարզապես կնշանակենք APV (actuarial present value).

$$APV = \int_0^4 (200 - 50t) f_x(t) v^t dt,$$

որտեղ կարող ենք գրել, որ $f_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$, սակայն քանի որ μ ինտենսիվությունն այս դեպքում հաստատուն է, ապա կունենանք $f_x(t) = e^{-\mu t} \cdot \mu$: Իսկ ֆինանսական մաթեմատիկայից հայտնի է, որ դիսկոնտավորման գործակիցը կարելի է արտահայտել տոկոսադրույքի ինտենսիվությամբ՝ $v = e^{-\delta}$: Այս ամենը տեղադրելով՝ կստանանք.

$$\begin{aligned}
 APV &= \int_0^4 (200 - 50t)e^{-\mu t} \cdot \mu \cdot e^{-\delta t} dt \\
 &= 200 \cdot \mu \int_0^4 e^{-(\mu+\delta)t} dt - 50 \cdot \mu \int_0^4 t e^{-(\mu+\delta)t} dt:
 \end{aligned}$$

Առաջին ինտեգրալի համար կստանանք.

$$\frac{200 \cdot \mu}{\mu + \delta} (1 - e^{-4 \cdot (\mu + \delta)}) \approx 26.37:$$

Իսկ երկրորդ ինտեգրալի հաշվարկը կկատարենք մասերով ինտեգրման միջոցով, և կստացվի՝

$$\frac{50 \cdot \mu}{\mu + \delta} \left(4e^{-4 \cdot (\mu + \delta)} + \frac{1}{\mu + \delta} (e^{-4 \cdot (\mu + \delta)} - 1) \right) \approx -12.34:$$

Եվ այսպես, պահանջվող մեծությունն է՝ $APV \approx 14.03$:

7.3. Որոշել 40 տարեկան անձին վաճառված ցմահ ապահովագրության ակտուարական ներկա արժեքը, եթե 1,000,000 հատուցումը տրվում է մահվան տարվա վերջում, և հայտնի է, որ $l_x = 1,000 \left(1 - \frac{x}{110} \right)$ և $i = 13\%$:

Լուծում

Ցմահ ապահովագրության ակտուարական ներկա արժեքը հաշվարկվում է

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}:$$

բանաձևով, սակայն մահացության տրված օրենքից պարզ երևում է, որ գոյություն ունի սահմանային տարիք՝ $\omega = 110$: ${}_k p_x$ ֆունկցիան 0-ի է հավասարվում $k = \omega - x$ կետում, ուստի ցմահ ապահովագրության ակտուարական ներկա արժեքի բանաձևում գումարը պետք է սահմանափակել $k = \omega - x - 1$ արժեքով: Այսպիսով՝ խնդրի շրջանակներում անհրաժեշտ է հաշվել

$$1,000,000 A_{40} = 1,000,000 \sum_{k=0}^{69} {}_k p_{40} \cdot q_{40+k} \cdot v^{k+1},$$

որտեղ ${}_k p_{40} \cdot q_{40+k} = \frac{l_{40+k} - l_{40+k+1}}{l_{40}} = \frac{1}{60}$: Տեղադրենք և կիրառենք երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևը.

$$1,000,000 A_{40} = \frac{100,000}{60} \sum_{k=0}^{69} v^{k+1} = \frac{1,000,000 v \cdot (1 - v^{70})}{60 \cdot (1 - v)}$$

$$\approx 128,180:$$

Պիտոդություն: Շատ դեպքերում ուսանողները հաշվի չեն առնում մահացության օրենքից բխող սահմանափակումը և հաշվում են անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը՝ $\frac{1,000,000v}{60(1-v)} \approx 128,205$: Տվյալ խնդրի շրջանակներում տարբերությունը շատ մեծ չէ, սակայն այս արդյունքը, ըստ էության, սխալ է: Որքան փոքր է սահմանային տարիքը, այնքան ավելի մեծ է դառնում ճիշտ և սխալ արդյունքների տարբերությունը:

7.4. Յույց տալ, որ հաստատուն մահացության ինտենսիվության ենթադրության դեպքում տեղի ունի՝

$$\bar{A}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot \mu_{x+k} \cdot \frac{i + q_{x+k}}{\delta + \mu_{x+k}}:$$

Լուծում

Նախ և առաջ հիշենք, որ հաստատուն մահացության դեպքում $\mu_{x+k} = -\ln p_{x+k}$, իսկ $f(n+t) = -s(n)p_n^t$, $0 < t < 1, n \in N$:

Մահվան պահին վճարվող կյանքի ցմահ ապահովագրության ակտուարական ներկա արժեքը կլինի՝

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= \int_0^{\infty} v^t f_x(t) dt = \int_0^{\infty} v^t \frac{f(x+t)}{s(x)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 v^{k+u} \left(-\frac{s(x+k)p_{x+k}^u \ln p_{x+k}}{s(x)} \right) du: \end{aligned}$$

Ինտեգրալից դուրս հանելով միայն k -ից կախված մեծությունները և կիրառելով $v = e^{-\delta}$, ${}_k p_x = \frac{s(x+k)}{s(x)}$ և հաստատուն մահացության ինտենսիվության դեպքում $p_{x+k} = e^{-\mu_{x+k}}$ բանաձևերը՝ կունենանք.

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \mu_{x+k} \left(\int_0^1 e^{-(\delta + \mu_{x+k})u} du \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \mu_{x+k} \left(\frac{1 - e^{-(\delta + \mu_{x+k})}}{\delta + \mu_{x+k}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \mu_{x+k} \left(\frac{1 - \frac{p_{x+k}}{1+i}}{\delta + \mu_{x+k}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x \mu_{x+k} \frac{i + q_{x+k}}{\delta + \mu_{x+k}} :
\end{aligned}$$

Գիտողություն: Դասախոսությունների ընթացքում դուրս է բերվում կապ կյանքի ապահովագրության անընդհատ և դիսկրետ տեսակների ակտուարական ներկա արժեքների միջև մահերի հավասարաչափ բաշխման դեպքում, սակայն ուսանողներն ունակ են լուծելու այս խնդիրը, քանի որ մոդուլ 1-ում նրանք մանրամասն ուսումնասիրում են նաև հաստատուն մահացության ինտենսիվության մեթոդը:

Թեմա 8: Պայմանական (կյանքի) անուիտետներ

Անհրաժեշտ է հստակորեն ներկայացնել ոչ պայմանական կամ, այլ կերպ ասած, ֆինանսական անուիտետների և պայմանական կամ, ինչպես առավել հայտնի է, կյանքի անուիտետների տարբերությունը և բերել որոշ օրինակներ: Այս թեմայի նպատակն է ուսանողին ծանոթացնել կյանքի անուիտետների տեսակների հետ, որոնք կարելի է պայմանականորեն բաժանել երկու խմբի՝ հաստատուն վճարով և փոփոխվող վճարով անուիտետներ: Արտածվում են բանաձևեր սկզբնաժամկետ անուիտետների հետևյալ տեսակների՝ ցմահ, ժամկետային, հետաձգված, տարվա ընթացքում մի քանի անգամ վճարվող, անընդհատորեն հաշվարկվող և ճշգրտող վճարով անուիտետների ակտուարական բերված արժեքների և դիսպերսիաների համար: Փոփոխվող վճարով անուիտետներից քննարկվում են աճող վճարով ցմահ, ժամկետային, հետաձգված և անընդհատ տեսակները, ինչպես նաև նվազող վճարով սկզբնաժամկետ անուիտետները: Բանաձևերի արտածումն իրականացվում է գումարյալ վճարի և ըն-

թացիկ վճարի եղանակներով: Վերջնական բանաձևերը ներկայացվում են չորս հիմնական տեսքերով՝ կյանքի ապահովագրության ակտուարական բերված արժեքի, կյանքի տևողության բաշխման բնութագրիչների, մահացության աղյուսակի տարրերի, կոմուտացիոն ֆունկցիաների միջոցով (տե՛ս [1], [2], [3]): Վերջնաժամկետ անուիտետների քննարկումը նպատակահարմար է իրականացնել գործնական պարապմունքների ընթացքում (տե՛ս [4]): Կենսաթոշակային հիմնադրամի օրինակով դուրս են բերվում ակտուարական դիսկոնտի և ակտուարական կուտակման բանաձևերը, և տարվում է համեմատական՝ համապատասխանորեն ֆինանսական դիսկոնտավորման գործակցի և ֆինանսական կուտակման հետ (տե՛ս [2], [5]):

Ստուգիչ հարցեր

1. Ո՞րն է ակտուարական բերված արժեքը կյանքի անուիտետի համար:
2. Որո՞նք են կյանքի անուիտետների ակտուարական բերված արժեքի հաշվարկման մեթոդները:
3. Թվարկե՛լ անուիտետների տեսակներն ըստ վճարման պահի:
4. Թվարկե՛լ անուիտետների տեսակներն ըստ վճարման պարբերականության:
5. Թվարկե՛լ անուիտետների տեսակներն ըստ վճարվող գումարի մեծության:

Առաջադրանքի օրինակ

8.1. Որոշե՛լ 30 տարեկան անձին վաճառված տարեկան 5000\$ վճարմամբ սկզբնաժամկետ կյանքի անուիտետի ակտուարական ներկա արժեքը, եթե $p_x = 0.96$ բոլոր x -երի համար, իսկ $i = 9\%$:

Լուծում

Ինչպես հայտնի է, սկզբնաժամկետ ցմահ անուիտետի ակտուարական ներկա արժեքը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևով՝

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_x \cdot v^t:$$

Ինդքի տվյալներից հետևում է, որ² ${}_t p_x = p_x^t$: Տեղադրելով սա և կիրառելով անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևը՝ ցանկացած տարիքի համար կստացվի.

$$\ddot{a}_{30} = \sum_{t=0}^{\infty} (p_x \cdot v)^t = \frac{1}{1 - p_x \cdot v} \approx 8.3846:$$

Հաշվի առնելով տարեկան վճարի մեծությունը՝ պահանջվող գումարը կլինի՝ $5000\ddot{a}_{30} = 41,923$:

8.2. Անձը, որը 45 տարեկան է, ներկա պահին տարեկան վատակում է 25,000\$: Աշխատավարձերի ինդեքսացիայի արդյունքում յուրաքանչյուր տարի նրա եկամուտն աճում է 7%-ով, իսկ 65 տարեկանը լրանալիս նա կանցնի կենսաթոշակի՝ տարեկան ստանալով իր վերջին աշխատավարձի 50%-ի չափով կենսաթոշակ: Կենսաթոշակները վճարվում են յուրաքանչյուր ամսվա վերջին: Ենթադրվում է, որ անձը կապրի ևս 20 տարի և կանցնի կենսաթոշակի: Հաշվել նրա կենսաթոշակի ակտուարական ներկա արժեքը (45 տարեկանում), եթե հայտնի է, որ $N_{65} = 700$, $D_{65} = 82$, իսկ $i = 8\%$:

Լուծում

Աշխատավարձերի ինդեքսացիայի արդյունքում 20 տարի հետո նրա աշխատավարձը կկազմի $W = 25000 \cdot (1.07)^{20}$, իսկ ամսական կենսաթոշակի չափը՝ $P = \frac{W}{2 \cdot 12}$: Այս կենսաթոշակների ակտուարական ներկա արժեքը 65 տարեկանում կլինի՝

$$B = 12P \cdot a_{65}^{(12)} = \frac{W}{2} \cdot \left(\frac{N_{65} - D_{65}}{D_{65}} + \frac{11}{24} \right):$$

Իսկ 45 տարեկանում ակտուարական արժեքը կլինի $B \cdot {}_{20}E_{45}$, սակայն խնդրում ենթադրում է, որ անձը կապրի մինչև 65 տարեկան, ուստի ${}_{20}E_{45} = {}_{20}p_{45} \cdot v^{20}$ -ի առաջին արտադրիչը կվերաժվի 1-ի, և արդյունքում պատասխանը կլինի՝

$$\begin{aligned} APV &= B \cdot v^{20} = \frac{25000 \cdot (1.07)^{20}}{2} \cdot \left(\frac{N_{65} - D_{65}}{D_{65}} + \frac{11}{24} \right) \cdot v^{20} \\ &\approx 82,970.66: \end{aligned}$$

² Ընդհանուր դեպքում ${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \dots \cdot p_{x+t-1}$, սակայն այս խնդրի պարագայում ցանկացած $k = 1, 2, \dots$ -ի համար $p_{x+k} = p_x$, հետևաբար ${}_t p_x = \underbrace{p_x \cdot p_x \cdot \dots \cdot p_x}_t = p_x^t$:

8.3. Հաշվել x տարեկան անձին անընդհատորեն վճարվող տարեկան 1 միավոր արժեքով անուիտետի ակտուարական ներկա արժեքը, եթե $\delta = 0.05$, իսկ $\mu_x = \begin{cases} 0.02, & 0 \leq t < 10 \\ 0.03, & t \geq 10 \end{cases}$:

Լուծում

Նախ և առաջ գտնենք կյանքի մնացորդային տևողության բաշխումը.

$$P(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+u} du\right) = \begin{cases} e^{-0.02t}, & 0 \leq t < 10 \\ e^{0.1-0.03t}, & t \geq 10 \end{cases}:$$

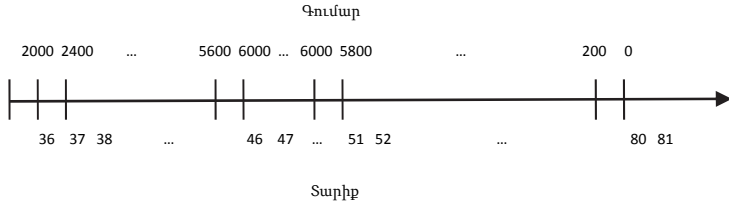
Այսպիսով՝ պահանջվող $\bar{a}_x$ մեծության համար կստացվի.

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \int_0^{\infty} v^t P(T_x > t) dt \\ &= \int_0^{10} e^{-0.05t} \cdot e^{-0.02t} dt + \int_{10}^{\infty} e^{-0.05t} \cdot e^{0.1-0.03t} dt = \\ &= \frac{1 - e^{-0.7}}{0.07} + e^{0.1} \frac{e^{-0.8}}{0.08} \approx 13.4: \end{aligned}$$

8.4. Անձը, որը 36 տարեկան է, գնում է փոփոխվող վճարով կյանքի վերջնաժամկետ անուիտետ: Առաջին վճարի մեծությունը 2000\$ է, իսկ այնուհետև այն աճում է տարեկան 400\$-ով՝ առավելագույնը 10 տարի: Արդյունքում ստացված վճարման մեծությունը 5 տարի մնում է հաստատուն, որից հետո սկսում է նվազել տարեկան 200\$-ով՝ մինչև 0-ի հասնելը: Նկարագրված անուիտետային փաթեթի ակտուարական ներկա արժեքն արտահայտել կոմուտացիոն ֆունկցիաների միջոցով:

Լուծում

Նկարագրված անուիտետային փաթեթը կարելի է պատկերել հետևյալ կերպ.



Պահանջվող մեծությունը կարելի է ստանալ տարբեր եղանակներով՝ մի քանի անուիտետային ներկա արժեքների գումարի տեսքով: Ստորև ներկայացված է այդ տարբերակներից մեկը: Առաջին 10 վճարումները կարելի է ներկայացնել 2000\$ վճարով 10 տարվա ժամկետային վերջնաժամկետ անուիտետի և մեկ տարի հետաձգված ու 9-ամյա ժամկետով 400\$-ով աճող վերջնաժամկետ անուիտետի գումարի տեսքով, հաջորդ 5 վճարները՝ 10 տարի հետաձգված 5 տարի ժամկետով 6000\$ վճարմամբ ժամկետային վերջնաժամկետ անուիտետով: Իսկ դրանից հետո վճարումները կներկայացվեն 15 տարով հետաձգված 29 տարի ժամկետով 200\$-ով նվազող վերջնաժամկետ անուիտետով: Այսպիսով՝ ստացվում է հետևյալ արտահայտությունը.

$$APV = 2000 \cdot a_{36:\overline{10}|} + 400 \cdot {}_1|(Ia)_{36:\overline{9}|} + 6000 \cdot {}_{10}|a_{36:\overline{5}|} + 200 \cdot {}_{15}|(Da)_{36:\overline{29}|}.$$

Բանաձևում մասնակցող անուիտետներն արտահայտվում են կոմուտացիոն ֆունկցիաներով հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} a_{36:\overline{10}|} &= \frac{N_{37} - N_{47}}{D_{36}}, \\ {}_1|(Ia)_{36:\overline{9}|} &= \frac{S_{38} - S_{47} - 9 \cdot N_{47}}{D_{36}}, \\ {}_{10}|a_{36:\overline{5}|} &= \frac{N_{47} - N_{52}}{D_{36}}, \\ {}_{15}|(Da)_{36:\overline{29}|} &= \frac{(30 \cdot a_{51:\overline{29}|} - (Ia)_{51:\overline{29}|}) \cdot {}_{15}E_{36}}{D_{36}} \\ &= \frac{30 \cdot (N_{52} - N_{81}) - (S_{52} - S_{81} - 29 \cdot N_{81})}{D_{36}}. \end{aligned}$$

Այսպիսով՝ ստացվում է՝

$$APV = \frac{2000N_{37} + 400N_{47} + 400(S_{38} - S_{47}) - 200(N_{81} + S_{52} - S_{81})}{D_{36}}.$$

8.5. 50 տարեկան անձը գնում է ամսական k վճարով սկզբնաժամկետ անուիտետ, որի առաջին 60 վճարումները երաշխավորված են (սա նշանակում է, որ այս վճարումները պարտադիր կերպով կկատարվեն և կախված չեն անձի ողջ լինելու հանգամանքից): Դրանից հետո վճարումները կիրականացվեն այնքան ժամանակ, քանի դեռ անձը ողջ է: Այս փաթեթը գնելու համար անձը վճարում է 50,000\$: Հայտնի է, որ

$$i = 0.07, D_{50} = 5,200, D_{55} = 4,100, N_{55} = 60,000:$$

Որոշել k -ն:

Լուծում

Ամսական k վճարով սկզբնաժամկետ երաշխավորված անուիտետի ներկա արժեքն է՝ $12 \cdot k \cdot \ddot{a}_{\overline{5}|}^{(12)}$, իսկ մնացած պայմանական վճարները ամսական k վճարով 5 տարով հետաձգված սկզբնաժամկետ կյանքի անուիտետ են, որի ակտուարական ներկա արժեքն է՝ $12 \cdot k \cdot {}_5| \ddot{a}_{50}^{(12)}$: Հաշվի առնելով այս փաթեթի համար գնման պահին վճարված 50,000\$-ը՝ պետք է k -ի նկատմամբ լուծել հետևյալ հավասարումը՝

$$50,000 = 12 \cdot k \cdot \ddot{a}_{\overline{5}|}^{(12)} + 12 \cdot k \cdot {}_5| \ddot{a}_{50}^{(12)},$$

որտեղից ստացվում է՝

$$k = \frac{50,000}{12 \cdot \left(\ddot{a}_{\overline{5}|}^{(12)} + {}_5| \ddot{a}_{50}^{(12)} \right)} = \frac{50,000}{12 \cdot \left(\frac{1 - v^5}{d^{(12)}} + \left(\frac{N_{55}}{D_{50}} - \frac{11}{24} \cdot \frac{D_{55}}{D_{50}} \right) \right)} \approx 270\$:$$

Թեմա 9: Զուտ և համախառն ապահովագրավճարներ

Այս թեմայի քննարկումն սկսվում է ապահովագրական ընկերության ծախսերի բեռնվածության տարրերի ներկայացմամբ և ֆինանսական պարտավորությունների համարժեքության սահմանմամբ՝ տարանջատելով զուտ ապահովագրավճարի և համախառն ապահովագրավճարի դեպքերը: Կենտրոնական սահմանային թեորեմի վրա հիմնված Գաուսյան մոտարկման միջոցով որոշվում է այն ապահովագրավճարի չափը, որն ընկերությանը կապահովի տրված α հավանականությամբ չսնանկանալու հնարավորություն: Այս մոդելը կիրառվում է զուտ և համախառն ապահովագրավճարների, ինչ-

պես նաև հավելավճարով (բեռնվածություն) սահմանված ապահովագրավճարի համար (տե՛ս [6]):

Ստուգիչ հարցեր

1. Որո՞նք են գործառնական ծախսերի հիմնական բաղադրիչները, և ե՞րբ են դրանք հանդես գալիս:
2. Ինչպե՞ս է սահմանվում զուտ կորստի ֆունկցիան:
3. Ինչպե՞ս է սահմանվում համախառն կորստի ֆունկցիան:
4. Ո՞րն է ֆինանսական պարտավորությունների համարժեքության սկզբունքը, և ե՞րբ է խախտվում այդ համարժեքությունը:
5. Ինչպե՞ս է արտահայտվում ապահովագրավճարի սահմանման քվանտիլի մեթոդը:

Առաջադրանքի օրինակ

9.1. Դիտարկենք 20 տարվա խառն ապահովագրության պայմանագիր, որի համար ապահովադիրը նույն ժամկետում կատարում է սկզբնաժամկետ վճարումներ: Պայմանագիրը վաճառվել է 35 տարեկան անձին: 100,000\$ հատուցման զումարը վճարվելու է մահվան տարվա վերջում: Ապահովագրողը կատարում է հետևյալ ծախսերը. նախնական ծախսերը կազմում են հատուցման մեծության 3%-ը և առաջին ապահովագրավճարի՝ 20%-ը, իսկ հավաքագրման ծախսերը կազմում են երկրորդ և յուրաքանչյուր հաջորդ վճարման 3%-ը:

Հայտնի է, որ $l_x = 100,000 \left(1 - \frac{x}{115}\right)$, իսկ տարեկան էֆֆեկտիվ տոկոսադրույքը՝ $i = 7\%$:

ա) Կազմել արտահայտություն համախառն կորստի մեծության համար:

բ) Հաշվել տարեկան համախառն ապահովագրավճարը:

գ) Հաշվել համախառն կորստի մեծության ստանդարտ շեղումը:

դ) Հաշվել հավանականությունը, որ պայմանագիրը կլինի շահեկան:

Լուծում

ա) Նշանակենք P -ով տարեկան համախառն ապահովագրավճարի մեծությունը: Այդ դեպքում համախառն կորստի մեծությունը կարտահայտվի հետևյալ կերպ.

$$L_0^g = 100,000 v^{\min(K_{35}+1;20)} + 3,000 + 0.17P - 0.97P \ddot{a}_{\overline{\min(K_{35}+1;20)|}}:$$

բ) Տարեկան համախառն ապահովագրավճարը $EL_0^g = 0$ հավասարման լուծումն է՝

$$EL_0^g = 100,000 A_{35:\overline{20}|} + 3,000 + 0.17P - 0.97P \ddot{a}_{35:\overline{20}|}:$$

Նախ հաշվենք $A_{35:\overline{20}|}$ -ը:

$$\begin{aligned} A_{35:\overline{20}|} &= \sum_{t=1}^{20} {}_t p_{35} \cdot q_{35} \cdot v^t + {}_{20} E_{35} \\ &= \sum_{t=1}^{20} \frac{l_{35+t} - l_{35+t+1}}{l_{35}} \cdot v^t + {}_t p_{35} \cdot v^{20} \\ &= \frac{1}{80} \sum_{t=1}^{20} v^t + \frac{l_{55}}{l_{35}} \cdot v^{20} = v \cdot \frac{1 - v^{20}}{80(1 - v)} + 0.75 \cdot v^{20} \\ &\approx 0.3262: \end{aligned}$$

Օգտվելով $\ddot{a}_{x:\overline{t}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{t}|}}{d}$ բանաձևից՝ կստանանք, որ $\ddot{a}_{35:\overline{20}|} \approx 10.2989$:

Այսպիսով՝

$$P = 3627.71$$

գ) Ստանդարտ շեղումը գտնելու համար նախ հաշվենք վարիացիան: Նպատակահարմար է L_0^g -ն արտահայտել հետևյալ կերպ.

$$L_0^g = \left(100,000 + \frac{0.97P}{d}\right) v^{\min(K_{35}+1;20)} + 3,000 + 0.17P - \frac{0.97P}{d},$$

որտեղից կստանանք.

$$Var(L_0^g) = \left(100,000 + \frac{0.97P}{d}\right)^2 \left({}^2A_{35:\overline{20}|} - (A_{35:\overline{20}|})^2\right):$$

${}^2A_{35:\overline{20}|}$ -ն, ըստ սահմանման, նույն $A_{35:\overline{20}|}$ -ն է՝ հաշվարկված $2\delta \approx 0.1353$ տոկոսադրույքի ինտենսիվությամբ, որին համապատասխանում է $v_1 = e^{-2\delta} \approx 0.8734$: Այսպիսով՝ ${}^2A_{35:\overline{20}|} =$

$$v_1 \cdot \frac{1 - v_1^{20}}{80(1 - v_1)} + 0.75 \cdot v_1^{20} \approx 0.1306, \text{ հետևաբար}$$

$$Var(L_0^g) \approx 572 \cdot 10^6:$$

$$\text{Իսկ } \sigma = \sqrt{\text{Var}(L_0^g)} \approx 23,916:$$

դ) Փնտրվող հավանականությունն է՝

$$\begin{aligned} P(L_0^g < 0) &= P\left(v^{\min(K_{35}+1; 20)} < \frac{\frac{0.97P}{d} - 3,000 - 0.17P}{100,000 + \frac{0.97P}{d}}\right) \\ &= P\left(\min(K_{35} + 1; 20) > \frac{1}{\delta} \cdot \ln(3.0652)\right) \\ &= P(K_{35} + 1 > 16.55): \end{aligned}$$

Սա նշանակում է, որ պայմանագիրը շահեկան կլինի այն և միայն այն դեպքում, երբ անձը ապրի ևս 15 տարի և պայմանագրի 16-րդ տարվա սկզբին կատարի հերթական վճարումը, այսինքն՝

$$P(L_0^g < 0) = {}_{16}p_{35} = \frac{l_{51}}{l_{35}} = 0.8:$$

9.2. Ապահովագրական ընկերությունը 30 տարեկան անձանց վաճառում է կյանքի ցմահ ապահովագրության պայմանագրեր: 100,000\$ հատուցումը տրվում է մահվան տարվա վերջում, որի համար պայմանագրի գործողության ողջ ընթացքում ապահովադիրը պետք է յուրաքանչյուր տարվա սկզբին վճարի P ապահովագրավճար: Նախնական ծախսերը կազմում են առաջին ապահովագրավճարի 15%-ը, իսկ ընթացիկ ծախսերի համար օգտագործվում է յուրաքանչյուր ապահովագրավճարի 4%-ը (ներառյալ առաջին ապահովագրավճարը): Հայտնի է, որ $A_{30} = 0.0787$, ${}^2A_{30} = 0.012$, իսկ տարեկան տոկոսադրույքը՝ $i = 5\%$:

ա) Հաշվել ապահովագրավճարի չափը՝ կիրառելով ֆինանսական պարտավորությունների համարժեքության սկզբունքը:

բ) Ենթադրելով, որ պայմանագրերի պայուսակում կան 10,000 միանման պայմանագրեր, հաշվել ապահովագրավճարի չափը՝ կիրառելով քվանտիլի մեթոդը այնպես, որ պայուսակում կորստի ֆունկցիայի բացասական լինելու հավանականությունը կազմի 95%:

Լուծում

ա) Ֆինանսական պարտավորությունների համարժեքության սկզբունքը կլինի՝

$$P\ddot{a}_{30} = 100,000A_{30} + 0.15P + 0.04P\ddot{a}_{30},$$

որտեղ $\ddot{a}_{30} = \frac{1-A_{30}}{d} = 19.3473$:

Այստեղից ստացվում է համարժեքության ապահովագրավճարը՝

$$P = \frac{100,000A_{30}}{0.96 \cdot \ddot{a}_{30} - 0.15} \approx 427.174\$:$$

բ) i -րդ պայմանագրի ապագա կորստի մեծությունը կլինի՝

$$L_{0,i} = 100,000v^{K_{30}+1} + 0.15P - 0.96P\ddot{a}_{\overline{K_{30}+1}|},$$

որի մաթ. սպասումը կլինի՝

$$EL_{0,i} = 100,000A_{30} + 0.15P - 0.96P\ddot{a}_{30} = 7870 - 18.4234P:$$

Իսկ վարիացիան գտնելու համար $L_{0,i}$ -ն արտահայտենք հետևյալ կերպ.

$$L_{0,i} = \left(100,000 + \frac{0.96P}{d}\right)v^{K_{30}+1} + 0.15P - \frac{0.96P}{d},$$

որտեղից

$$\begin{aligned} Var(L_{0,i}) &= \left(100,000 + \frac{0.96P}{d}\right)^2 ({}^2A_{30} - (A_{30})^2) \\ &= (100,000 + 20.16P)^2 \cdot 0.0058: \end{aligned}$$

Ամբողջ պայուսակի ապագա կորստի մեծությունը կլինի

$$L = \sum_{i=1}^{10,000} L_{0,i},$$

որի համար մաթ. սպասումը և վարիացիան համապատասխանաբար կստացվեն.

$$EL = 10,000(7870 - 18.4234P),$$

$$Var(L) = 10,000(100,000 + 20.16P)^2 \cdot 0.0058:$$

L -ի բաշխման նկատմամբ կիրառելով Գաուսյան մոտարկումը՝ կստացվի՝

$$P(L < 0) = P\left(\frac{L-EL}{\sqrt{Var(L)}} < -\frac{EL}{\sqrt{Var(L)}}\right) \approx \Phi\left(-\frac{EL}{\sqrt{Var(L)}}\right),$$

որտեղ $\Phi(x)$ -ը ստանդարտ նորմալ բաշխման ֆունկցիան է:

Մեր նպատակն է ապահովագրավճարը սահմանել այնպես, որ $P(L < 0) = 0.95$:

Այսպիսով՝ պետք է լուծել հետևյալ հավասարումը՝

$$\Phi\left(-\frac{10,000(7870 - 18.4234P)}{\sqrt{10,000(100,000 + 20.16P)^2 \cdot 0.0058}}\right) = 0.95:$$

Ստանդարտ նորմալ բաշխման համար $\Phi(1.64) = 0.95$, հետևաբար P -ի նկատմամբ լուծելով ստորև գրված հավասարումը՝

$$-\frac{10,000(7870 - 18.4234P)}{100(100,000 + 20.16P)\sqrt{0.0058}} = 1.64,$$

արդյունքում կստացվի $P \approx 434.55\$$:

Գիտողություն: Նկատենք, որ այստեղ ապահովագրավճարի արժեքը կախված է պայմանագրերի $n = 10,000$ քանակից: Եթե պայմանագրերի քանակը՝ $n \rightarrow \infty$, ապա կստանանք նույն համարժեքության ապահովագրավճարը՝ 427.174\$:

Թեմա 10: Կյանքի ապահովագրության (մաթեմատիկական) պահուստներ

Այս թեմայի շրջանակում ուսանողին հակիրճ ներկայացվում են երկարաժամկետ ապահովագրության ոլորտում պահուստների դերը և նպատակը, ինչպես նաև տարվում է համեմատական ոչ կյանքի ապահովագրության պահուստների տեսակների հետ, որոնք ուսանողին ծանոթ են «Ապահովագրական գործ» առարկայից: Մաթեմատիկական տեսանկյունից ներկայացվում են կյանքի ապահովագրության մոդելներում պահուստների հաշվարկման հետահայաց (retrospective) ու հեռանկարային (prospective) եղանակները, և ցույց է տրվում դրանց համարժեքությունը: Մեթոդների ընդհանուր նկարագիրը տալուց հետո նպատակահարմար է բերել մի քանի տեսական (ոչ թվային) օրինակներ: Կյանքի ապահովագրության որևէ մոդելի վրա զուտ և համախառն պահուստների համար դուրս են բերվում 3 հիմնական անդրադարձ բանաձևերը, և տրվում է դրանց մեկնաբանությունը (տե՛ս սույն թեմայի 3-րդ ստուգիչ հարցի պատասխանը և Հավելված 2): Թեմայի ավարտին քննարկվում է պահուստների հաշվարկը միջանկյալ պահերին, ինչն էլ ընդհանրացնելով՝ հանգում ենք անընդհատորեն հաշվարկվող պահուստներին (տե՛ս [6]):

Ստուգիչ հարցեր

1. Ի՞նչ է կյանքի ապահովագրության պահուստը, և ե՞րբ է այն հաշվարկվում:
2. Որո՞նք են կյանքի ապահովագրության պահուստի հաշվարկման մեթոդները:
3. Մեկնաբանել պահուստների 3 հիմնական անդրադարձ բաժնեները կյանքի ապահովագրության որևէ մոդելի համար:

Առաջադրանքի օրինակ

10.1. Կյանքի ցմահ ապահովագրության պայմանագիրը վաճառվում է 40 տարեկան անձին: Ըստ պայմանագրի՝ առաջին 10 տարիների ընթացքում մահվան դեպքում մահվան տարվա վերջում կհատուցվի 50,000, իսկ դրանից հետո՝ 100,000: Հայտնի են հետևյալ մեծությունները՝ $M_{40} = 740, M_{45} = 675, M_{50} = 580, M_{55} = 475, N_{40} = 59,000, N_{45} = 42,000, N_{55} = 27,000, D_{45} = 1,700, D_{55} = 1,150$:

ա) Որոշել այս պայմանագրի զուտ տարեկան ապահովագրավճարը:

բ) Որոշել պահուստի մեծությունը 45 տարեկանում:

գ) Որոշել պահուստի մեծությունը 55 տարեկանում:

դ) Նախորդ կետի համար որոշել անձին տրվելիք ապագա հատուցման այն մասնաբաժինը, որը գոյանալու է նրա ապագա ապահովագրավճարներից:

Լուծում

ա) Տարեկան ապահովագրավճարի մեծությունը նշանակենք P -ով: Այս պայմանագրի համար պարտավորությունների համարժեքության հավասարումը կլինի՝

$$P \cdot \ddot{a}_{40} = 50,000 \cdot A_{40:\overline{10}|}^1 + 100,000 \cdot {}_{10|}A_{40}:$$

Կոմուտացիոն ֆունկցիաների միջոցով արտահայտված՝

$$\ddot{a}_{40} = \frac{N_{40}}{D_{40}}, A_{40:\overline{10}|}^1 = \frac{M_{40} - M_{50}}{D_{40}}, {}_{10|}A_{40} = \frac{M_{50}}{D_{40}}:$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունները համարժեքության հավասարման մեջ և կատարելով նման անդամների միացում՝ կստացվի

$$P = 50,000 \cdot \frac{M_{40} + M_{50}}{N_{40}} \approx 1,118.64:$$

բ) Այս դեպքում նպատակահարմար է պահուստի մեծությունը հաշվել հետահայաց մեթոդի օգնությամբ (ինչն^{ու}): Պայմանագրի կնքումից 5 տարի անց ապահովադրի կատարած վճարումների կուտակված արժեքը կլինի՝ $P \cdot \dot{s}_{40:\overline{5}|}$, իսկ այդ նույն պահին ապահովագրության կուտակված արժեքը կլինի՝ $50,000 \cdot \frac{A_{40:\overline{5}|}^1}{{}_5E_{40}}$: Այսպիսով՝ անհրաժեշտ պահուստի մեծությունն է՝

$$\begin{aligned} {}_5V_{40} &= P \cdot \dot{s}_{40:\overline{5}|} - 50,000 \cdot \frac{A_{40:\overline{5}|}^1}{{}_5E_{40}} \\ &= \frac{P \cdot (N_{40} - N_{45}) - 50,000 \cdot (M_{40} - M_{45})}{D_{45}} \approx 9,275: \end{aligned}$$

գ) Այս դեպքում պահուստի մեծությունն առավել դյուրին կհաշվարկվի հեռանկարային մեթոդով (ինչն^{ու}): Ընկերության պարտավորությունների ակտուարական ներկա արժեքը կլինի՝ $100,000 \cdot A_{55}$, իսկ ապահովադրի կողմից վճարվելիք ապահովագրավճարների ակտուարական ներկա արժեքը՝ $P \cdot \ddot{a}_{55}$: Եվ այսպես, ընկերությունը պայմանագրի կնքումից հետո պետք է ձևավորի

$$\begin{aligned} {}_{15}V_{40} &= 100,000 \cdot A_{55} - P \cdot \ddot{a}_{55} = \frac{100,000 \cdot M_{55} - P \cdot N_{55}}{D_{55}} \\ &\approx 15,040.63: \end{aligned}$$

դ) 55 տարեկանում ապասվող հատուցման այն մասնաբաժինը, որը գոյանալու է ապագա ապահովագրավճարներից, ներկայացնում է հետևյալ հարաբերությունը՝

$$\frac{P \cdot \ddot{a}_{55}}{100,000 \cdot A_{55}} \approx 0,63586:$$

10.2. Դիտարկվում է 50 տարեկան անձին վաճառվող 20 տարվա խառն ապահովագրության պայմանագիր: Տարեկան ապահովագրավճարները կազմում են 23,500\$ և վճարվում են ապահովադրի կողմից պայմանագրի գործողության ողջ ընթացքում: 700,000\$ ապահովագրական հատուցումը կվճարվի, եթե անձը ողջ լինի 70 տարեկանում: Մինչև 70 տարեկան դառնալը մահվան դեպքում հատուցումը կտրվի մահվան տարվա վերջում՝ մահվան տարվա սկզբում

հաշվարկված պահուստի մեծության չափով: Հայտնի է, որ $i = 3.5\%$, պայմանագիրը չի նախատեսում ծախսեր, իսկ մահացության համար կիրառվում է հետևյալ աղյուսակը՝

x	p_x
65	0.99409
66	0.99338
67	0.99259
68	0.9917
69	0.99071

Հաշվել ${}_{15}V$ -ը:

Լուծում

Պահուստների հաշվարկման անդրադարձ բանաձևն (տե՛ս Հավելված 2) այս խնդրի համար կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$({}_tV + P) \cdot (1 + i) = q_{x+t} \cdot S_{t+1} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V,$$

որտեղ $P = 23,500$, իսկ $S_{t+1} = {}_tV$:

Պայմանագրի վերջին տարվա համար մահվան դեպքում հատուցումը կկազմի ${}_{19}V$, իսկ ողջ մնալու դեպքում կհատուցվի 700,000\$, ուստի ստացված բանաձևում տեղադրելով $t = 19$ և մեզ հայտնի մեծությունները՝ կստանանք՝

$$({}_{19}V + 23,500) \cdot 1.035 = q_{69} \cdot {}_{19}V + 700,000 p_{69}.$$

Այս հավասարման լուծումը կտա մեզ ${}_{19}V$ -ի արժեքը, որը կիրառելով $t = 18$ -ի համար մմանատիպ բանաձևում՝ կստանանք ${}_{18}V$ -ը: Կրկնելով նույն գործողությունները՝ ի վերջո կհաշվենք ${}_{15}V$ -ի արժեքը՝

$$\begin{aligned} {}_{19}V &= \frac{(700,000p_{69} - 1.035P)}{(1.035 - q_{69})} = 652,401, \\ {}_{18}V &= \frac{({}_{19}V \cdot p_{68} - 1.035P)}{(1.035 - q_{68})} = 606,471, \\ {}_{17}V &= \frac{({}_{18}V \cdot p_{67} - 1.035P)}{(1.035 - q_{67})} = 562,145, \\ {}_{16}V &= \frac{({}_{17}V \cdot p_{66} - 1.035P)}{(1.035 - q_{66})} = 519,362, \end{aligned}$$

$${}_{15}V = \frac{({}_{16}V \cdot p_{65} - 1.035P)}{(1.035 - q_{65})} = 478,063:$$

10.3. Մահվան պահին 100,000\$ հատուցմամբ կյանքի ցմահ ապահովագրության պայմանագիրը վաճառվում է 60 տարեկան անձին, որի դիմաց վճարվում է ամբողջատոբեն հաշվարկվող ապահովագրավճար: Հայտնի է, որ $\bar{a}_{60} = 23$, $\bar{a}_{65} = 19$, $\delta = 0.03$: Որոշել պահուստի մեծությունը պայմանագրի կնքման պահից 5 տարի անց:

Լուծում

Անհրաժեշտ պահուստը նպատակահարմար է հաշվել հեռակարային մեթոդով.

$${}_5\bar{V}(\bar{A}_{60}) = 100,000\bar{A}_{65} - P \cdot \bar{a}_{65}$$

Տարեկան ապահովագրավճարի P մեծությունը կորոշվի պայմանագրի կնքման պահին պարտավորությունների համարժեքության սկզբունքով՝ $P \cdot \bar{a}_{60} = 100,000 \cdot \bar{A}_{60}$: Այստեղ կկիրառենք նաև $\bar{A}_x = 1 - \delta \cdot \bar{a}_x$ բանաձևը և տեղադրելով պահուստի բանաձևում՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} {}_5\bar{V}(\bar{A}_{60}) &= 100,000(1 - \delta \cdot \bar{a}_{65}) - 100,000 \frac{1 - \delta \cdot \bar{a}_{60}}{\bar{a}_{60}} \cdot \bar{a}_{65} \\ &\approx 17,391\$: \end{aligned}$$

Մտուզիչ հարցերի պատասխաններ

Թեմա 1

1. Գոյատևման ֆունկցիայի հատկություններն են՝

ա) $s(x)$ -ը նվազող է (ոչ խիստ),

բ) $s(0) = 1$,

գ) $s(+\infty) = 0$ ($s(\omega) = 0$, որտեղ ω -ն սահմանային տարիքն է,

դ) $s(x)$ -ն աջից անընդհատ է:

2. $s(x)$ գոյատևման ֆունկցիան ցույց է տալիս հավանականությունը, որ նորածինը ողջ կլինի x տարեկան հասակում:

3. Գոյատևման ֆունկցիան կարտահայտվի մահացության կորի միջոցով այսպես.

$$s(x) = 1 - F(x) = 1 - \int_0^x f(t)dt = \int_x^{+\infty} f(t)dt$$

4. Փոքր t -ի դեպքում $\mu_x \cdot t$ -ն ցույց է տալիս հավանականությունը, որ x տարիքի հասած անձը կմահանա $(x, x + t)$ միջակայքում:

5. Մահացության ինտենսիվության հատկություններն են՝

ա) $\mu_x \geq 0$,

բ) $\int_0^\infty \mu_u du = +\infty$:

6. Գոյատևման ֆունկցիան մահացության ինտենսիվության միջոցով արտահայտվում է հետևյալ կերպ՝

$$s(x) = \exp \left\{ - \int_0^x \mu_u du \right\}:$$

Թեմա 2

1. Կյանքի մնացորդային տևողությունը պատահական մեծություն է, որը ցույց է տալիս այն տարիների քանակը, որն անձը կապրի x տարեկանից հետո՝

$$T_x = T - x:$$

2. Կյանքի մնացորդային տևողության մահացության ինտենսիվությունն արտահայտվում է կյանքի տևողության մահացության ինտենսիվությամբ այս կերպ.

$$\mu_x(t) = \mu_{x+t},$$

որը նշանակում է, որ x տարեկան անձի համար t տարի հետո մահվան ինտենսիվությունը նույնն է, ինչ նորածնի համար $x + t$ տարեկանում մահացության ինտենսիվությունը:

3. Կյանքի մնացորդային տևողության հիմնական բնութագրիչներն են $s_x(t)$, $f_x(t)$, $\mu_x(t)$ և այլն, սակայն առավել շատ կիրառվում են հետևյալ մեծությունները՝

$t p_x$ – հավանականությունը, որ x տարեկան անձը կապրի ևս t տարի,

$t q_x$ – հավանականությունը, որ x տարեկան անձը կմահանա մոտակա t տարիների ընթացքում,

$t | n q_x$ – հավանականությունը, որ x տարեկան անձը կապրի ևս t տարի և կմահանա դրանից հետո n տարիների ընթացքում:

$\overset{\circ}{e}_x - x$ տարեկան անձի համար կյանքի միջին մնացորդային տևողությունն է:

4. Կյանքի միջին մնացորդային տևողությունը $\overset{\circ}{e}_x$, ցույց է տալիս այն միջին ժամանակահատվածը, որը անձը կապրի x տարիքից հետո, իսկ կյանքի մասնակի միջին մնացորդային տևողությունը $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$, ցույց է տալիս այն միջին ժամանակահատվածը, որը անձը կապրի $(x, x + n)$ տարիքային միջակայքում:

Թեմա 3

1. Կյանքի կլորացված տևողությունը կյանքի մնացորդային տևողության ամբողջ մասն է՝ $K_x = [T_x]$:

2. «Մահերի հավասարաչափ բաշխման» մոդելում $s(x)$ ֆունկցիան $n \leq x \leq n + 1$ միջակայքում մոտարկվում է հավասարաչափ ֆունկցիայով: Արդյունքում ստացվում է, որ տարվա ընթացքում մահվան հավանականությունը համամասնական է դիտարկվող ժամանակահատվածին՝ ${}_tq_x = t \cdot q_x, 0 < t < 1$:

3. «Հաստատուն մահացության ինտենսիվության» մոդելում ենթադրվում է, որ $\mu_x = \mu_n, n < x < n + 1$: Արդյունքում ստացվում է, որ ${}_tp_x = p_x^t$:

4. «Հիպերբոլիկ» մոդելում կոտորակային տարիքներում հավասարաչափ ֆունկցիայով է մոտարկվում $\frac{1}{s(x)}$ մեծությունը, որտեղ $n \leq x \leq n + 1$:

Թեմա 4

1. Մահացության աղյուսակներն իրենց կիրառությունն ունեն տնտեսության, ժողովրդագրության, կենսաթոշակային, ապահովագրական և այլ ոլորտներում: Դրանց միջոցով կատարվում են կանխատեսումներ ապագա ֆինանսական հոսքերի առավել արդյունավետ կառավարման նպատակով:

2. Ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակները նախատեսված են այն անձանց համար, որոնք տարբերվում են տվյալ տարիքի հասարա-

կուրյան այլ անդամներից իրենց առողջությամբ, առավել ռիսկային մասնագիտությամբ կամ այլ գործոններով: Ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակներում մահվան հավանականությունը կարող է լինել ինչպես ավելի մեծ, քան սովորական աղյուսակներում, այնպես էլ ավելի փոքր:

3. Սահմանափակ ժամկետով ռիսկի ընտրությամբ աղյուսակներում n ժամկետի ավարտից հետո աղյուսակների տարրերը $[x] + n$ տարիքի անձի համար համընկնում են սովորական աղյուսակում $x + n$ տարեկան անձի համար կիրառվող համապատասխան տարրի հետ:

Թեմա 5

1. Անհատական հայտի մոդելում զուտ ապահովագրավճարը հաշվարկվում է որպես սպասվելիք կորստի միջին արժեք:

2. Գումարյալ հայտի մոդելում ենթադրվում է, որ.

ա) դիտարկվող պայմանագրերը միանման են,

բ) բոլոր ռիսկերն իրարից անկախ են:

3. Սնանկացումն այն իրադարձությունն է, երբ գումարյալ հայտի մեծությունն ավելի մեծ է, քան տվյալ պահին ընկերության կապիտալն է: Սնանկացման հավանականությունը մոտարկվում է՝ համաձայն կենտրոնական սահմանային թեորեմի՝ ստանդարտ նորմալ բաշխման միջոցով.

$$P(S \leq u) \approx \Phi\left(\frac{u - ES}{\sqrt{VarS}}\right):$$

4. Կարելի է ցույց տալ, որ եթե որպես ապահովագրավճար վերցվի զուտ ապահովագրավճարը, ապա սնանկացման հավանականությունը կլինի 0.5, իսկ դա բիզնեսի համար անընդունելի է:

5. Հավելավճարն այն գումարն է, որը թույլ է տալիս մեծացնել ընկերության կապիտալը (հավաքագրվող ապահովագրավճարը) և կարգավորել սնանկության հավանականությունը:

6. Սպասվող վնասի համամասնության մոդելում՝

$$\theta_i = \frac{l_i}{EX_i}:$$

Դիսպերսիայի համամասնության մոդելում՝

$$\theta_i = \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}} \cdot \frac{Var\xi_i}{E\xi_i};$$

Միջին քառակաուսային շեղման համամասնության մոդելում`

$$\theta_i = x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{Var\xi_i}} \cdot \frac{\sqrt{Var\xi_i}}{E\xi_i};$$

7. Սպասվող վնասի համամասնության մոդելում`

$$p_i = E\xi_i \left(1 + x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{ES} \right);$$

Դիսպերսիայի համամասնության մոդելում`

$$p_i = E\xi_i + \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}} \cdot Var\xi_i;$$

Միջին քառակաուսային շեղման համամասնության մոդելում`

$$p_i = E\xi_i + x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{Var\xi_i}} \cdot \sqrt{Var\xi_i};$$

Թեմա 6

1. Որևէ j պատճառից ապագայում պատահական պահին կարգավիճակի կորստի հավանականությունը $f_j(j)$ -ն համատեղ խտության $f_{T,j}(t, j)$ ֆունկցիայով արտահայտվում է այսպես`

$$f_j(j) = \int_0^\infty f_{T,j}(t, j) dt, j = 1, 2, \dots, m$$

2. Մինչև կարգավիճակի կորուստն ընկած ժամանակի մարզինալ խտության ֆունկցիան՝ $f_T(t)$, կարելի է որոշել համատեղ խտության ֆունկցիայի՝ $f_{T,j}(t, j)$ միջոցով հետևյալ կերպ.

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^m f_{T,j}(t, j), t \geq 0:$$

3. Համատեղ խտության, պայմանական բաշխման և մարզինալ բաշխման ֆունկցիաները կարելի է ներկայացնել ստորև նշված մեծությունների միջոցով.

ա) մինչև ժամանակի t պահը բոլոր պատճառներով կարգավիճակի պահպանման ${}_t p_x^{(\tau)}$ հավանականությամբ,

բ) ժամանակի որևէ պահին հենց j պատճառով կարգավիճակի կորստի ${}_x q_x^{(j)}$ հավանականությամբ,

գ) j պատճառով կարգավիճակի կորստի $\mu_x^{(j)}(t)$ ինտենսիվությունը,

դ) բոլոր պատճառներով կարգավիճակի կորստի $\mu_x^{(\tau)}(t)$ ինտենսիվությամբ:

Համատեղ խտության ֆունկցիան՝

$$f_{T,j}(t,j) = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_x^{(j)}(t):$$

Պայմանական բաշխման ֆունկցիան՝

$$f_{j|T}(j|T) = \frac{\mu_x^{(j)}(t)}{\mu_x^{(\tau)}(t)}:$$

Մարգինալ բաշխման ֆունկցիաները՝

$$f_j(j) = {}_x q_x^{(j)},$$

$$f_T(t) = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_x^{(\tau)}(t):$$

4. Մի քանի պատճառով կարգավիճակի կորստի աղյուսակի տարրերը նման են մահացության աղյուսակի տարրերին թե՛ իրենց գրելաձևով և թե՛ իրենց իմաստով:

$l_a^{(\tau)}$ -ը ցույց է տալիս a տարիքում կարգավիճակ ստացած անձանց միջին քանակը (այն կարելի է համեմատել l_0 նորածնիների քանակի հետ):

$l_x^{(\tau)}$ -ն ցույց է տալիս կարգավիճակ ունեցող x տարեկան անձանց միջին քանակը և հաշվարկվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$l_x^{(\tau)} = l_a^{(\tau)} \cdot {}_{x-a} p_a^{(\tau)}:$$

$q_x^{(j)}$ -ն ցույց է տալիս հավանականությունը, որ x տարեկան անձը մոտակա մեկ տարվա ընթացքում j պատճառով կկորցնի կարգավիճակը:

$d_x^{(j)}$ -ն ցույց է տալիս x տարիքում j պատճառով կարգավիճակը կորցրած անձանց միջին քանակը, և այն կարելի է հաշվել այսպես.

$$d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} \cdot q_x^{(j)}:$$

Թեմա 7

1. Կյանքի ապահովագրության մաթեմատիկական մոդելում մեր նպատակն է տվյալ ապահովագրության տեսակի համար հաշվել Z բերված արժեքը: Այն ունի հետևյալ ընդհանուր տեսքը՝

$$Z = b_{T_x} \cdot v^{\tau(T_x)},$$

որտեղ b_{T_x} -ը ցույց է տալիս կայնքի ապահովագրության պայմանագրի համաձայն հատուցման մեծությունը, երբ T_x պահին տեղի է ունեցել ապահովագրական դեպք, $\tau(T_x)$ -ը ցույց է տալիս հատուցման վճարման պահը, իսկ v -ն դիսկոնտի գործակիցն է:

2. Կոմուտացիոն ֆունկցիաները, բացի բանաձևերի պարզ գրելաձև ապահովելուց, ունեն նաև ֆիզիկական իմաստ:

$D_x = l_x v^x$ -ը ցույց է տալիս l_0 նորածինների խմբից x տարիքի հասած անձանց վճարվող 1 միավոր գումարների հանրագումարի ակտուարական ներկա արժեքը:

$N_x = \sum_{m=x}^{\infty} D_m$ -ը ցույց է տալիս l_0 նորածինների խմբից x և ավելի տարիքի հասած անձանց վճարվող 1 միավոր գումարների հանրագումարի ակտուարական ներկա արժեքը:

$C_x = d_x v^{x+1}$ -ը ցույց է տալիս l_0 նորածինների խմբից x տարիքում մահացած անձանց մահվան տարվա վերջում վճարվող 1 միավոր գումարների հանրագումարի ակտուարական ներկա արժեքը:

$M_x = \sum_{m=x}^{\infty} C_m$ -ը ցույց է տալիս l_0 նորածինների խմբից x և ավելի տարիքներում մահացած անձանց մահվան տարվա վերջում վճարվող 1 միավոր գումարների հանրագումարի ակտուարական ներկա արժեքը:

3. Ժամանակի 0 պահին ներդրված 1 միավոր գումարը ֆինանսական կուտակման դեպքում ժամանակի t պահին կբերի $(1+i)^t$ եկամուտ, իսկ ակտուարական կուտակման դեպքում x տարիքում ներդրված գումարը t ժամանակահատված անց կբերի $\frac{l_x}{l_{x+t}} (1+i)^t$ եկամուտ, եթե իհարկե անձը ողջ լինի $x+t$ տարիքում: Այսինքն՝ ստացվում է, որ ակտուարական կուտակումն ավելի մեծ է, քան ֆինանսական կուտակումը, քանի որ $l_x > l_{x+t}$:

4. Կյանքի ապահովագրության մեջ ակտուարական բերված արժեքը ցույց է տալիս սպասվող հատուցումների միջին մեծությունը, որը կազմում է գուտ ապահովագրավճարի հիմնական մասը:

Թեմա 8

1. Կյանքի անուիտետի ակտուարական ներկա արժեքը ընկերության սպասվող ֆինանսական հոսքերի միջին մեծությունն է, որը կազմում է անուիտետի գնման գնի գուտ արժեքը:

2. Կյանքի անուիտետների հաշվարկման երկու եղանակները համարժեք են միմյանց: Այդ մեթոդներն են.

ա) գումարյալ վճարի եղանակ – հաշվարկը կատարվում է կյանքի ապահովագրության ակտուարական բերված արժեքի միջոցով,

բ) ընթացիկ վճարի եղանակ – հաշվարկը կատարվում է կյանքի անուիտետի յուրաքանչյուր վճարի դիսկոնտավորման միջոցով:

3. Ըստ վճարման պահի՝ անուիտետները լինում են.

ա) սկզբնաժամկետ – վճարումը կատարվում է ժամանակի միավորի սկզբում,

բ) վերջնաժամկետ – վճարումը կատարվում է ժամանակի միավորի վերջում:

4. Ըստ վճարման պարբերականության՝ անուիտետները բաժանվում են՝

ա) տարվա ընթացքում մեկ անգամ վճարվող – 1 միավոր գումարի վճարումը կատարվում է տարվա ընթացքում միայն մեկ անգամ՝ ժամանակի սկզբում կամ վերջում,

բ) տարվա ընթացքում m անգամ վճարվող – վճարումը կատարվում է տարվա ընթացքում m անգամ՝ հաշվարկային ժամանակահատվածի սկզբում կամ վերջում, իսկ յուրաքանչյուր վճարման մեծությունը կազմում է $\frac{1}{m}$ միավոր գումար,

գ) անընդհատորեն հաշվարկվող – տարվա ընթացքում վճարումը հաշվարկվում է 1 միավոր ինտենսիվությամբ:

5. Ըստ վճարման մեծության՝ անուիտետները լինում են՝

ա) հաստատուն վճարով – սահմանված վճարի մեծությունը չի փոխվում պայմանագրի գործողության ողջ ընթացքում,

բ) աճող վճարով – անուիտետի վճարման մեծությունը տարեց-տարի աճում է թվաբանական պրոգրեսիայով,

գ) նվազող վճարով – անուիտետի վճարման մեծությունը յուրա-քանչյուր տարի նվազում է 1 միավորով:

Թեմա 9

1. Գործառնական ծախսն ունի երեք հիմնական բաղադրիչներ.

ա) Նախնական կամ ռիսկի ստանձնման ծախսեր, որոնք ներառում են պայմանագրի կնքմանն առնչվող ծախսերը: Այս ծախսի գերակշիռ մասը կազմում են ապահովագրական գործա-կալին տրվող միջնորդավճարը, նաև ապահովադիրների առողջու-թյան նախնական բուժզննման ծախսերը:

բ) Ընթացիկ ծախսեր, որոնք կյանքի ապահովագրության մեջ արտահայտվում են հերթական ապահովագրավճարի որոշակի տո-կոսադրույքի տեսքով: Այս ծախսերն ընկերությունը կատարում է ապահովագրական ընկերության նորմալ գործունեությունն ապահո-վելու համար (կոմունալ վճարներ, աշխատավարձերի վճարում, հարկեր, վարձավճարներ և այլն):

գ) Պայմանագրի մարման ծախսեր, որոնք ներառում են ապա-հովագրական դեպքին առնչվող այնպիսի ծախսեր, ինչպիսիք են փորձագիտական վճարները, դատական ծախսերը և այլն, սակայն այս ծախսատեսակի մեջ չի հաշվարկվում բուն ապահովագրական հատուցումը:

2. Ջուտ կորստի ֆունկցիան սահմանվում է որպես հա-տուցումների ներկա արժեքի և զուտ ապահովագրավճարների ներ-կա արժեքի տարբերություն՝

$$L_0^n = Z - a:$$

3. Համախառն կորստի ֆունկցիան սահմանվում է որպես հա-տուցումների ու ծախսերի ներկա արժեքի և համախառն ապահովա-գրավճարների ներկա արժեքի տարբերություն՝

$$L_0^g = Z + e - a:$$

4. Ֆինանսական պարտավորությունների համարժեքության սկզբունքի դրույթն այն է, որ ապահովագրական պայմանագիր կնքե-լիս տվյալ ռիսկի դիմաց տրվող ապահովագրական հատուցումը և այդ ռիսկը ստանձնելու համար ստացվելիք ապահովագրավճար-

ները պետք է իրենց ներկա արժեքի իմաստով հավասար լինեն միմյանց: Համարժեքությունը խախտվում է պայմանագրի ուժի մեջ մտնելուց անմիջապես հետո (առաջին ապահովագրավճարի վճարումից հետո):

5. Քվանտիլի մեթոդը հիմնված է կենտրոնական սահմանային թեորեմի վրա և արտահայտվում է հետևյալ կերպ.

$$P(L_0 < 0) = \alpha,$$

$$P\left(\frac{L_0 - EL_0}{\sqrt{VarL_0}} < \frac{-EL_0}{\sqrt{VarL_0}}\right) \approx \Phi\left(\frac{-EL_0}{\sqrt{VarL_0}}\right) = \alpha:$$

Թեմա 10

1. Կյանքի ապահովագրության պահուստը այն գումարն է, որն անհրաժեշտ է տվյալ պահին ֆինանսական պարտավորությունների խախտված համարժեքությունը վերականգնելու համար:

2. Կյանքի ապահովագրության պահուստները հաշվարկվում են՝

ա) հեռանկարային (prospective) – հաշվարկն իրականացվում է ապագա հատուցումների և ստացվելիք ապահովագրավճարների ներկա արժեքների միջոցով,

բ) հետահայաց (retrospective) – հաշվարկն իրականացվում է ստացված ապահովագրավճարների և ապահովագրության կուտակված արժեքների միջոցով:

3. Դիտարկենք մահվան տարվա վերջում հատուցվող կյանքի ցմահ ապահովագրության պայմանագիր, որի համար կատարվում են սկզբնաժամկետ ցմահ անուիտետային վճարներ:

Հեռանկարային մեթոդով հաշվարկված պահուստը ժամանակի t պահին կլինի.

$${}_tV = A_{x+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t}:$$

Կիրառելով ապահովագրության և անուիտետների համար անդրադարձ բանաձևերը՝ որոշ ձևափոխություններ կատարելուց հետո կստանանք պահուստների առաջին անդրադարձ բանաձևը՝

$${}_tV + P = v \cdot q_{x+t} + v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V:$$

Սա նշանակում է, որ ժամանակի t պահին ունեցած պահուստին ավելացնելով հերթական ապահովագրավճարը՝ ստացված գումարը պետք է բավարարի կյանքի մեկ տարվա ապահովագրություն իրա-

կանացնելու և $t + 1$ -րդ տարվա պահուստի բերված արժեքն ապահովելու համար:

Ստացված բանաձևի երկու կողմը բազմապատկելով $l_{x+t} \cdot (1 + i)$ -ով՝ կստանանք պահուստների երկրորդ անդրադարձ բանաձևը՝

$$l_{x+t} \cdot ({}_tV + P) \cdot (1 + i) = d_{x+t} + l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V:$$

Այս բանաձևը ցույց է տալիս, որ նորածինների սկզբնական l_0 անձանցից $x + t$ տարիքի հասած յուրաքանչյուր անձից հավաքագրված ապահովագրավճարը և նրանց ապահովագրության t -րդ տարվա պահուստը միասին ևս մեկ տարի i տոկոսադրույքով աշխատելուց հետո կբավարարի $x + t$ տարիքում մահացող d_{x+t} քանակով անձանց 1-ական միավոր հատուցելու համար, ինչպես նաև ողջ մնացած l_{x+t+1} քանակով անձանց՝ հերթական տարվա պահուստը ձևավորելու համար:

Որոշ ձևափոխություններից հետո կարող ենք ստանալ պահուստների երրորդ անդրադարձ բանաձևը՝

$$l_{x+t} \cdot ({}_tV + P) \cdot (1 + i) = l_{x+t} \cdot {}_{t+1}V + d_{x+t} \cdot (1 - {}_{t+1}V),$$

որտեղ $(1 - {}_{t+1}V)$ մեծությունը կոչվում է ռիսկի տակ գտնվող գումար, որը ցույց է տալիս հատուցման մեծության և տվյալ պահին ձևավորված պահուստի տարբերությունը, այսինքն՝ այն ռիսկը, որը տվյալ պահին ապահովագրական ընկերությունը պետք է կրի:

Այս անդրադարձ բանաձևն արտահայտում է հետևյալ իմաստը. նորածինների սկզբնական l_0 անձանցից $x + t$ տարիքի հասած յուրաքանչյուր անձից հավաքագրված ապահովագրավճարը և նրանց ապահովագրության t -րդ տարվա պահուստը միասին ևս մեկ տարի i տոկոսադրույքով աշխատելուց հետո պետք է բավարարեն այդ բոլոր l_{x+t} անձանց $t + 1$ -րդ տարվա պահուստի ձևավորման և սպասվող d_{x+t} մահերի համար ռիսկի տակ գտնվող գումարն ապահովելուն:

Քննական հարցաշարեր

Մոդուլ 1

1. Գոյատևման ֆունկցիան, նրա հատկությունները և վիճակագրական իմաստը

2. Մահացության կորը, նրա հատկությունները և կապը գոյատևման ֆունկցիայի հետ

3. Մահացության ինտենսիվության սահմանումը և հատկությունները

4. Կյանքի տևողության մակրոբնութագրիչները՝ միջինը, վարիացիան և մեդիանը

5. Մահացության անալիտիկ օրենքները. Դե Մուավրի, Հոմպերցի և Մեյքհեմի օրենքներում գոյատևման ֆունկցիան, մահացության կորը և մահացության ինտենսիվությունը

6. Կյանքի մնացորդային տևողության բաշխման բնութագրիչները և դրանց դուրսբերումը Դե Մուավրի օրենքի համար

7. Կյանքի մնացորդային տևողության բաշխման բնութագրիչները և դրանց դուրսբերումը Մեյքհեմի օրենքի համար

8. Կյանքի մնացորդային տևողության բաշխման բնութագրիչները և դրանց դուրսբերումը Էրլանգյան բաշխման համար

9. Կյանքի մնացորդային տևողության հիմնական բնութագրիչները՝ tq_x , tp_x , $t|uq_x$ և դրանց ֆիզիկական իմաստը

10. Կյանքի մնացորդային տևողության միջինը, վարիացիան, մեդիանը և միջին մասնակի մնացորդային տևողությունը

11. Կյանքի կտրացված տևողության բաշխումը և հիմնական բնութագրիչները՝ միջինը, վարիացիան և միջինի անդրադարձ բանաձևը

12. Մոտարկման մեթոդներ կոտորակային տարիքների համար: Մահերի հավասարաչափ բաշխում

13. Մոտարկման մեթոդներ կոտորակային տարիքների համար: Հաստատուն մահացության ինտենսիվություն

14. Մոտարկման մեթոդներ կոտորակային տարիքների համար: Բալլուշի եմթադրություն

15. Մահվան պահի ինտեգրալ բնութագրիչի դուրսբերումը մահերի հավասարաչափ բաշխման դեպքում

16. Մահվան պահի ինտեգրալ բնութագրիչի դուրսբերումը հաստատուն մահացության ինտենսիվության դեպքում

17. Մահվան պահի ինտեգրալ բնութագրիչի դուրսբերումը Բալ-դուչիի ենթադրության դեպքում

18. Անհատական հայտի մեծության բաշխման բնութագրիչների գնահատումը կյանքի կարճաժամկետ ապահովագրության մոդելում

19. Սնանկացման հավանականության մոտարկումը կյանքի կարճաժամկետ ապահովագրության մոդելում

20. Ապահովագրավճարների նշանակման սկզբունքները: k-րդ պայմանագրի հավելավճարի որոշումը միջինի համամասնությամբ

21. Ապահովագրավճարների նշանակման սկզբունքները: k-րդ պայմանագրի հավելավճարի որոշումը վարիացիայի համամասնությամբ

22. Ապահովագրավճարների նշանակման սկզբունքները: k-րդ պայմանագրի հավելավճարի որոշումը միջին քառակուսային շեղման համամասնությամբ

23. Կյանքի տևողության և մահվան պատճառի համատեղ բաշխման ֆունկցիան

24. Մեկ պատճառով կարգավիճակի կորստի աղյուսակի տարրերը

25. Մի քանի պատճառով կարգավիճակի կորստի տարիքային գործակիցները

26. Մի քանի պատճառով կարգավիճակի կորուստը հաստատուն մահացության ինտենսիվության ենթադրության դեպքում

27. Մի քանի պատճառով կարգավիճակի կորուստը մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում

28. Մի քանի պատճառով կարգավիճակի կորստի աղյուսակներ կազմելու սկզբունքները

Մոդուլ 2

1. Կյանքի անընդհատ ապահովագրության տեսակների նկարագրությունը b_t և $\tau(t)$ մեծությունների միջոցով

2. Կյանքի դիսկրետ ապահովագրության տեսակների նկարագրությունը b_t և $\tau(t)$ մեծությունների միջոցով

3. Բերված արժեքի դիսպերսիայի թեորեմը
4. Կյանքի ո-տարվա մաքուր կուտակային ապահովագրություն
5. Կյանքի ցմահ ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը անընդհատ ապահովագրության մոդելում
6. Կյանքի ո-տարվա ժամկետային ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը անընդհատ ապահովագրության մոդելում
7. Կյանքի ո-տարվա խառն ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը անընդհատ ապահովագրության մոդելում
8. Կյանքի ո-տարվա հետաձգված ցմահ ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը անընդհատ ապահովագրության մոդելում
9. Կյանքի ո-տարվա հետաձգված ո-տարվա ժամկետային ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը անընդհատ ապահովագրության մոդելում
10. Աճող հատուցումներով կյանքի ցմահ ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը անընդհատ ապահովագրության մոդելում
11. Աճող հատուցումներով կյանքի ո-տարվա ժամկետային ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը անընդհատ ապահովագրության մոդելում
12. Նվազող հատուցումներով կյանքի ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը անընդհատ ապահովագրության մոդելում
13. Կյանքի ցմահ ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը դիսկրետ ապահովագրության մոդելում
14. Կյանքի ո-տարվա ժամկետային ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը դիսկրետ ապահովագրության մոդելում
15. Կյանքի ո-տարվա խառն ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը դիսկրետ ապահովագրության մոդելում

16. Կյանքի ռ-տարով հետաձգված ցմահ ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը դիսկրետ ապահովագրության մոդելում

17. Կյանքի ռ-տարով հետաձգված ո-տարվա ժամկետային ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը դիսկրետ ապահովագրության մոդելում

18. Աճող հատուցումներով կյանքի ցմահ ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը դիսկրետ ապահովագրության մոդելում

19. Աճող հատուցումներով կյանքի ո-տարվա ժամկետային ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը դիսկրետ ապահովագրության մոդելում

20. Նվազող հատուցումներով կյանքի ապահովագրության միանվագ նետոտ-ապահովագրավճարի դուրսբերումը դիսկրետ ապահովագրության մոդելում

21. Կապը անընդհատ և դիսկրետ հաստատուն հատուցումներով ապահովագրության տեսակների միջև

22. Կապը անընդհատ և դիսկրետ աճող հատուցումներով ապահովագրության տեսակների միջև

23. Անդրադարձ (ռեկուրենտ) բանաձևերի դուրսբերումը կյանքի ապահովագրության անընդհատ տեսակների համար

24. Սկզբնաժամկետ ցմահ անուիտետի ակտուարական բերված արժեքի բանաձևի արտաձումը`

ա) գումարյալ վճարի եղանակով,

բ) ընթացիկ վճարի եղանակով:

25. Սկզբնաժամկետ ո-տարվա ժամկետային անուիտետի ակտուարական բերված արժեքի բանաձևի արտաձումը`

ա) գումարյալ վճարի եղանակով,

բ) ընթացիկ վճարի եղանակով:

26. Սկզբնաժամկետ ռ-տարով հետաձգված անուիտետի ակտուարական բերված արժեքի բանաձևի արտաձումը`

ա) գումարյալ վճարի եղանակով,

բ) ընթացիկ վճարի եղանակով:

27. Ակտուարական դիսկոնտավորման գործակցի և ակտուարական կուտակման գործակցի կապը կենսաթոշակային հիմնադրամի օրինակով

28. Ժամանակի n պահին ակտուարական կուտակման բանաձևի արտածումը կյանքի անուիտետի համար

29. Տարվա ընթացքում m անգամ վճարվող անուիտետներ: $\ddot{a}_x$ և $\ddot{a}_x^{(m)}$ մեծությունների միջև կապը տարվա ընթացքում մահերի հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում

30. Տարվա ընթացքում m անգամ վճարվող անուիտետներ: $\ddot{a}_x$ և $\ddot{a}_x^{(m)}$ մեծությունների միջև կապը տարվա ընթացքում D_x մեծության հավասարաչափ բաշխման ենթադրության դեպքում

31. Աճող վճարով կյանքի սկզբնաժամկետ ցմահ անուիտետի ակտուարական բերված արժեքի դուրսբերումը

32. Աճող վճարով n -տարվա ժամկետային սկզբնաժամկետ անուիտետի ակտուարական բերված արժեքի դուրսբերումը

33. Նվազող վճարով կյանքի սկզբնաժամկետ անուիտետի ակտուարական բերված արժեքի դուրսբերումը

34. Անընդհատ աճող կյանքի ցմահ անուիտետի ակտուարական բերված արժեքի դուրսբերումը

35. Ճշգրտող վճարով սկզբնաժամկետ անուիտետներ

36. Ճշգրտող վճարով վերջնաժամկետ անուիտետներ

37. Ֆինանսական պարտավորությունների համարժեքության սկզբունքը: Չուտ և համախառն ապահովագրավճարներ: Ապահովագրավճարի սահմանման քվանտիլի մեթոդը

38. Ֆինանսական պարտավորությունների համարժեքության սկզբունքը: Չուտ և համախառն ապահովագրավճարներ: Ապահովագրավճարի սահմանումը բեռնվածության միջոցով

39. Պահուստների հաշվարկման հեռանկարային (prospective, перспективный) մեթոդը (բերել 3 օրինակ)

40. Պահուստների հաշվարկման հետահայաց (retrospective) մեթոդը (բերել 3 օրինակ)

41. Պահուստների հաշվարկման հեռանկարային և հետահայաց մեթոդների նկարագրությունը և դրանց համարժեքությունը (ապացույցը բերել ապահովագրության որևէ տեսակի համար)

Մահացության անալիտիկ օրենքներ*Դե Մուավրի օրենք (1729թ.)*

Ենթադրվում է, որ կյանքի տևողությունը հավասարաչափ է բաշխված $(0, \omega)$ միջակայքում, որտեղ ω -ն կոչվում է սահմանային տարիք: Այս մոդելում կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, F(x) = \frac{x}{\omega}, s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \mu_x = \frac{1}{\omega - x},$$

$$e_x = \frac{\omega - x}{2}, 0 < x < \omega:$$

Հոմպերցի օրենք (1825թ.)

Այս մոդելում ենթադրվում է, որ մահացության ինտենսիվությունը տարիքից կախված է էքսպոնենտական օրենքով: Կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\mu_x = Be^{ax}, s(x) = \exp\left(-B \frac{e^{ax} - 1}{a}\right),$$

$$f(x) = B \cdot \exp\left(ax - B \frac{e^{ax} - 1}{a}\right), B > 0, a > 0:$$

Մեյքհեմի առաջին օրենք (1860թ.)

Ի տարբերություն Հոմպերցի օրենքի՝ Մեյքհեմի մոդելում մահացության ինտենսիվությունն ունի նաև ազատ անդամ, որը նախատեսված է դժբախտ պատահարներից մահացությունը նկարագրելու համար, կամ, այլ կերպ ասած, այդ բաղադրիչը բնութագրում է այն բոլոր մահերը, որոնք տեղի են ունեցել՝ անկախ տարիքային գործոնից: Մոդելում կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\mu_x = A + Be^{ax}, s(x) = \exp\left(-Ax - B \frac{e^{ax} - 1}{a}\right),$$

$$f(x) = (A + Be^{ax}) \cdot \exp\left(-Ax - B \frac{e^{ax} - 1}{a}\right), A, B, a > 0:$$

Մեյքհեմի երկրորդ օրենք (1860թ.)

Մեյքհեմի երկրորդ օրենքում ավելանում է ևս մեկ բաղադրիչ, որը ներառում է մահացության այն երևույթները, որոնք ուղիղ համեմատական են տարիքին: Այս դեպքում

$$\begin{aligned}\mu_x &= A + Hx + Be^{ax}, s(x) = \exp\left(-Ax - \frac{Hx^2}{2} - B \frac{e^{ax} - 1}{a}\right), \\ f(x) &= (A + Hx + Be^{ax}) \cdot \exp\left(-Ax - \frac{Hx^2}{2} - B \frac{e^{ax} - 1}{a}\right), \\ &A, H, B, a > 0:\end{aligned}$$

Վեյբուլի օրենք (1939թ.)

Այս մոդելում մահացության ինտենսիվությունը նկարագրվում է պարզապես ցուցչային օրենքով, սակայն փորձը ցույց է տվել, որ իրական մահացությունը նշված օրենքներից ամենալավ բնութագրում է հենց այս օրենքը: Փոքր տարիքներում (մինչև 1 տարեկան) այն հակում ունի նվազելու, իսկ մեծ տարիքներում (70-80-ից հետո)՝ ավելի կտրուկ աճելու: Կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\mu_x = kx^n, s(x) = \exp\left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right), f(x) = kx^n \exp\left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right):$$

Էրլանգի օրենք

Այս օրենքն առավել հայտնի է որպես երկրորդ կարգի Էրլանգյան բաշխում և Գամմա բաշխումների դասի մասնակի դեպք է: Գամմա բաշխումների առավել լայն դասի ֆունկցիաների կիրառմամբ կարելի է հասնել կյանքի տևողության ավելի լավ մոտարկման: Կյանքի տևողության բնութագրիչներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}}, s(x) = \frac{x+a}{a} e^{-\frac{x}{a}}, \mu_x = \frac{x}{a(x+a)}, e_0 = 2a:$$

Հաճախ կիրառվող բանաձևեր

Այս բաժնում ներկայացված են այն հիմնական բանաձևերը, որոնք անհրաժեշտ են խնդիրների լուծման համար: Ակտուարական բանաձևերի և աղյուսակների մեծ ծավալ է պարունակվում Մեծ Բրիտանիայի ակտուարների ինստիտուտի [7] գրքում:

Գամմա ֆունկցիա

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0:$$

Այն ունի հետևյալ հատկությունները՝

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1),$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}:$$

Մոդարկման մեթոդներ

Բոլոր մոդելներում ենթադրվում է, որ $n \in N$, իսկ $t \in (0, 1)$:

1. «Մահերի հավասարաչափ բաշխում»

$$s(n+t) = (1-t)s(n) + ts(n+1)$$

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{1-tq_n}$$

$${}_tq_n = tq_n$$

$${}_t|uq_n = uq_n$$

$$a(x) = \frac{1}{2}:$$

2. «Հաստատուն մահացության ինտենսիվության»

$$s(n+t) = s(n)p_n^t,$$

$$\mu_{n+t} = -\ln p_n,$$

$$a(x) = \frac{1}{2} - \frac{q_x}{12} + o(q_x):$$

3. «Հիպերբոլիկ» (կամ «Բալլուշիի ենթադրության»)

$$\frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)}:$$

$$s(n+t) = \frac{s(n+1)}{p_n + tq_n}$$

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{p_n + tq_n}$$

$$_{1-t}q_{n+t} = (1-t)q_n$$

$$a(x) = \frac{1}{2} - \frac{q_x}{6} + o(q_x):$$

Հավելավճարի սահմանման մեթոդներ

Անհատական հավելավճարի սահմանման մեթոդները բազմազան են, դրանց քանակը մոտ է մեկ տասնյակին, սակայն այստեղ ներկայացված են դրանցից առավել հաճախ օգտագործվող տարբերակները: Ընդհանուր հավելավճարի համար α հավանականությամբ չսնանկանալու դեպքում ստացվում է $l = x_\alpha \cdot \sqrt{VarS}$, որտեղ x_α -ն ստանդարտ նորմալ բաշխման α քվանտիլն է: Ընդհանուր հավելավճարը պետք է տրոհել ապահովագրված անձանց միջև և ստանալ անհատական հավելավճարի մեծությունը:

l_i -ն անվանում ենք ռիսկային հավելում:

$\theta_i = \frac{l_i}{E\xi_i}$ -ն անվանում ենք հարաբերական ռիսկային հավելում:

k -ն կոչվում է համեմատականության գործակից:

1. Սպասվող վնասի կամ զուտ ապահովագրավճարի համամասնությամբ

$$l_i = k \cdot E\xi_i,$$

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{ES},$$

$$\theta_i = k:$$

2. Դիսպերսիայի համամասնությամբ

$$l_i = k \cdot Var\xi_i,$$

$$k = \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}},$$

$$\theta_i = \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}} \cdot \frac{Var\xi_i}{E\xi_i}:$$

3. Միջին քառակուսային շեղման համամասնությամբ

$$l_i = k \cdot \sqrt{\text{Var}\xi_i},$$

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{\text{Var}S}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{\text{Var}\xi_i}},$$

$$\theta_i = x_\alpha \frac{\sqrt{\text{Var}S}}{\sum_{j=1}^N \sqrt{\text{Var}\xi_i}} \cdot \frac{\sqrt{\text{Var}\xi_i}}{E\xi_i}.$$

Պահուստների հաշվարկման անդրադարձ բանաձևեր

Հաշվի առնելով ապահովագրական պայմանագրերի ինչպես հատուցումների, այնպես էլ ապահովագրավճարների կատարման բազմազանությունը՝ ստորև ներկայացված են միայն մեկ մասնավոր պայմանագրի դեպքում պահուստների հաշվարկման անդրադարձ բանաձևերը, իսկ մյուսները կարելի է ստանալ՝ համապատասխան փոփոխություն կատարելով ապահովագրավճարների հաճախականության և քանակի, ինչպես նաև տրամադրվող հատուցման մեծության համար: Դիտարկենք մահվան տարվա վերջում հատուցվող կյանքի ցմահ ապահովագրության պայմանագիր, որի համար կատարվում են սկզբնաժամկետ ցմահ անուիտետային վճարներ: Այդ դեպքում ժամանակի t և $t + 1$ պահերի համար պահուստների մեծությունների միջև տեղի ունեն հետևյալ կապերը՝

1. ${}_tV + P = v \cdot q_{x+t} + v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V,$
2. $l_{x+t} \cdot ({}_tV + P) \cdot (1 + i) = d_{x+t} + l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V,$
3. $l_{x+t} \cdot ({}_tV + P) \cdot (1 + i) = l_{x+t} \cdot {}_{t+1}V + d_{x+t} \cdot (1 - {}_{t+1}V):$

Կյանքի (մնացորդային) փոհողության բաշխման բնութագրիչները

$$s(x) = P(T > x) = 1 - F(x), f(x) = -s'(x), \mu_x = \frac{f(x)}{s(x)},$$

$$\overset{\circ}{e}_0 = \int_0^{\infty} s(x) dx$$

$$s(x) = \int_x^{\infty} f(t) dt = \exp \left(- \int_0^x \mu_u du \right)$$

$$s_x(t) = P(T_x > t) = 1 - F_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)},$$

$$f_x(t) = -s'_x(t) = \frac{f(x+t)}{s(x)}$$

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{s_x(t)} = \mu_{x+t}, \overset{\circ}{e}_x = \int_0^{\infty} s_x(t) dt = \frac{1}{s(x)} \int_x^{\infty} s(u) du$$

$$s_x(t) = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_u du\right) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+u} du\right)$$

Մահացույթյան աղյուսակի փաթեթեր

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0}, {}_t p_x = s_x(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}, {}_t q_x = 1 - {}_t p_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Կոմուտացիոն (պարզեցնող) ֆունկցիաներ

$$D_x = v^x l_x, N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}, S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}, \overline{N}_x = \int_x^{\infty} D_t dt, \overline{S}_x = \int_x^{\infty} \overline{N}_t dt$$

$$C_x = v^{x+1} d_x, M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}, R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t},$$

$$\overline{M}_x = \int_x^{\infty} D_t \mu_t dt, \overline{R}_x = \int_x^{\infty} \overline{M}_t dt$$

$$M_x = D_x - dN_x, \overline{M}_x = D_x - \delta \overline{N}_x$$

Ապահովագրության ակտուարական բերված արժեք

$${}_tE_x = A_{x:\overline{n}|}^1 = {}_tp_x v^t = \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

Մահվան պահին վճարվող մեծություններ

$$\overline{A}_x = E e^{-\delta T_x} = \int_0^{\infty} v^t f_x(t) dt = \int_0^{\infty} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot v^t dt = 1 - \delta \frac{\overline{N}_x}{D_x} = \frac{\overline{M}_x}{D_x}$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= E(e^{-\delta T_x}; T_x \leq n) = \int_0^n v^t f_x(t) dt = \int_0^n {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot v^t dt \\ &= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

$${}_m\overline{A}_x = \int_m^{\infty} v^t f_x(t) dt = \int_m^{\infty} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot v^t dt = \frac{\overline{M}_{x+m}}{D_x}$$

$${}_m\overline{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_m^{m+n} v^t f_x(t) dt = \int_m^{m+n} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot v^t dt = \frac{\overline{M}_{x+m} - \overline{M}_{x+m+n}}{D_x}$$

$$\begin{aligned} (\overline{IA})_x &= E(T_x v^{T_x}) = \int_0^{\infty} t v^t f_x(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot v^t dt \\ &= \int_0^{\infty} {}_u\overline{A}_x du = \frac{\overline{R}_x}{D_x} \end{aligned}$$

$$(\overline{IA})_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot v^t dt = \int_0^n {}_u\overline{A}_x du = \frac{\overline{R}_x - \overline{R}_{x+n} - n \cdot \overline{M}_{x+n}}{D_x}$$

$${}_m(\overline{IA})_x = \int_m^{\infty} t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot v^t dt = \int_m^{\infty} {}_u\overline{A}_x du = \frac{\overline{R}_{x+m}}{D_x}$$

$$(\overline{DA})_{x:\overline{n}|}^1 + (\overline{IA})_{x:\overline{n}|}^1 = (n+1) \overline{A}_{x:\overline{n}|}^1$$

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1, \overline{A}_x = \overline{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_n\overline{A}_x, {}_m\overline{A}_x = \overline{A}_{x+m} \cdot {}_tE_x$$

Մահվան տարվա վերջում վճարվող մեծություններ

$$A_x = E e^{-\delta(K_x+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K_x = k) = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_x \cdot q_{x+t} v^{t+1} = \frac{M_x}{D_x}$$

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^1 &= E(e^{-\delta(K_x+1)}; T_x \leq n) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(K_x = k) \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot q_{x+t} v^{t+1} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

$${}_m|A_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} P(K_x = k) = \sum_{t=m}^{\infty} {}_t p_x \cdot q_{x+t} v^{t+1} = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$$\begin{aligned} {}_m|A_{x:\overline{n}|}^1 &= \sum_{k=m}^{m+n} v^{k+1} P(K_x = k) = \sum_{t=m}^{m+n} {}_t p_x \cdot q_{x+t} v^{t+1} \\ &= \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (IA)_x &= E\left((K_x + 1)v^{(K_x+1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v^{k+1} P(K_x = k) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t} v^{t+1} = \sum_{m=0}^{\infty} {}_m|A_x = \frac{R_x}{D_x} \\ (IA)_{x:\overline{n}|}^1 &= \sum_{t=0}^n (t+1) \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t} v^{t+1} = \sum_{t=0}^n {}_t|A_x \\ &= \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

$${}_m|(IA)_x = \sum_{t=m}^{\infty} (t+1) \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t} v^{t+1} = \sum_{t=m}^{\infty} {}_t|A_x = \frac{R_{x+m}}{D_x}$$

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^1 + (IA)_{x:\overline{n}|}^1 = (n+1)A_{x:\overline{n}|}^1$$

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1, A_x = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_n|A_x, {}_m|A_x = A_{x+m} \cdot {}_t E_x$$

Կապը անընդհատ և դիսկրետ տեսակների միջև

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x, \quad \bar{A}_{x:\overline{n}}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}}^1, \quad \bar{A}_{x:\overline{n}} = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}} + \frac{\delta - i}{\delta} A_{x:\overline{n}}^1,$$

$${}_m|\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} {}_m|A_x$$

$$(\overline{IA})_x = \frac{i}{\delta} (IA)_x - \frac{i\delta + \delta - i}{\delta^2} A_x$$

Անդրադարձ բանաձևեր

$$A_x = vq_x + vp_x \cdot A_{x+1} \quad \bar{A}_x = \frac{d}{\delta} q_x + vp_x \cdot \bar{A}_{x+1}$$

$$A_{x:\overline{n}}^1 = vq_x + vp_x \cdot A_{x+1:\overline{n-1}}^1 \quad \bar{A}_{x:\overline{n}}^1 = \frac{d}{\delta} q_x + vp_x \cdot \bar{A}_{x+1:\overline{n-1}}^1$$

$$A_{x:\overline{n}} = vq_x + vp_x \cdot A_{x+1:\overline{n-1}} \quad \bar{A}_{x:\overline{n}} = \frac{d}{\delta} q_x + vp_x \cdot \bar{A}_{x+1:\overline{n-1}}$$

$${}_m|A_x = vp_x \cdot {}_{m-1}|A_{x+1} \quad {}_m|\bar{A}_x = vp_x \cdot {}_{m-1}|\bar{A}_{x+1}$$

Սկզբնաժամկետ անուիտետներ

$$\ddot{a}_x = 1 - \frac{A_x}{d} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k P(T_x > k) = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_x \cdot v^t = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}} = 1 - \frac{A_{x:\overline{n}}}{d} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot v^t = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \frac{A_{x:\overline{m}} - A_x}{d} = \sum_{t=m}^{\infty} {}_t p_x \cdot v^t = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

$${}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}} = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_t p_x \cdot v^t = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \cdot {}_t p_x \cdot v^t = \sum_{m=0}^{\infty} {}_m|\ddot{a}_x = \frac{S_x}{D_x}$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \cdot {}_t p_x \cdot v^t = \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}$$

$${}_m|(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) \cdot {}_{m+t} p_x \cdot v^{m+t}$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} + (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = (n+1)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \quad (D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n \ddot{a}_{x:\overline{t}|}$$

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + {}_n|\ddot{a}_x, {}_m|\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x+m} \cdot {}_tE_x$$

Վերջնաժամկետ անուիտետներ

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(T_x > k) = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x \cdot v^t = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n {}_t p_x \cdot v^t = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$${}_m|a_x = \sum_{t=m+1}^{\infty} {}_t p_x \cdot v^t = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

$${}_m|a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=m+1}^{m+n} {}_t p_x \cdot v^t = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot {}_t p_x \cdot v^t = \sum_{m=0}^{\infty} {}_m|a_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n t \cdot {}_t p_x \cdot v^t = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}{D_x}$$

$${}_m|(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot {}_{m+t}p_x \cdot v^{m+t}$$

$$(Da)_{x:\overline{n}|} + (Ia)_{x:\overline{n}|} = (n+1)a_{x:\overline{n}|}, \quad (Da)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n a_{x:\overline{t}|}$$

$$a_x = a_{x:\overline{n}|} + {}_n|a_x, {}_m|a_x = a_{x+m} \cdot {}_mE_x$$

Սկզբնաժամկետ և վերջնաժամկետ անուիտետների կապը և անդրադարձ բանաձևեր

$$\ddot{a}_x = a_x + 1, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} + 1 - {}_tE_x, {}_m|\ddot{a}_x = {}_m|a_x + {}_mE_x$$

$$a_x = v p_x \cdot \ddot{a}_{x+1}, \ddot{a}_x = 1 + v p_x \cdot \ddot{a}_{x+1}, a_{x:\overline{n+m}|} = a_{x:\overline{m}|} + {}_mE_x \cdot a_{x+m:\overline{n}|}$$

$$a_x = (a_{x+1} + 1) v p_x, a_{x:\overline{n}|} = (a_{x+1:\overline{n-1}|} + 1) v p_x,$$

$${}_m|a_x = {}_{m-1}|a_{x+1} \cdot v p_x:$$

Տարվա ընթացքում m անգամ վճարվող և անընդհատ անուի-
տեաներ

$$\begin{aligned}
 a_x^{(m)} &= a_x + \frac{m-1}{2m} \ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \\
 a_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= a_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m} (1 - {}_nE_x) \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} (1 - {}_nE_x) \\
 {}_n|a_x^{(m)} &= {}_n|a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot {}_nE_x {}_n|\ddot{a}_x^{(m)} = {}_n|\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \cdot {}_nE_x \\
 \bar{a}_x &= \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt = \frac{\bar{N}_x}{D_x} \approx a_x + \frac{1}{2}, \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_t p_x dt = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x} \\
 &\approx a_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{2} (1 - {}_nE_x) \\
 {}_m|\bar{a}_x &= \int_m^\infty v^t {}_t p_x dt = \frac{\bar{N}_{x+m}}{D_x} \approx {}_m|a_x + \frac{1}{2} {}_mE_x, \bar{a}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{1}{2} (a_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x:\overline{n}|}) \\
 (\bar{Ia})_x &= \int_0^\infty t \cdot v^t {}_t p_x dt = \frac{\bar{S}_x}{D_x}, \\
 (\bar{Ia})_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n t \cdot v^t {}_t p_x dt = \frac{\bar{S}_x - \bar{S}_{x+n} - n \cdot \bar{N}_{x+n}}{D_x}
 \end{aligned}$$

Առաջարկվող գրականության ցանկ

- [1] **Jordan C. W. Jr.**, *Life Contingencies*. Chicago, Illinois: The Society of Actuaries, 1975.
- [2] **Фалин Г. И.**, *Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем*. изд.3-е. Москва: Анкил, 2007. ISBN 978-5-86476-235-6.
- [3] **Бауэрс Н. и др.**, *Актuariальная Математика*. Москва, 2001.
- [4] **Parmenter M. M.**, *Theory of Interest and Life CIntingencies with Pension Applications*. ACTEX Publications, 1999. ISBN 1-56698-333-9.
- [5] **Norberg N.**, *Basic Life Insurance Mathematics*. 2002.
- [6] **Dickson D. C. M., Hardy M. R. and Waters H. R.**, *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, 2009.
- [7] *"Formulae and Tables for Examinations"*. UK: The Faculty of Actuaries and The Institute of Actuaries, 2002. ISBN 0 901066 57 5.
- [8] **Anderson A. W.**, *Pension Mathematics for Actuaries*. 2nd edition. Winsted, Connecticut: ACTEX Publications, 1992.
- [9] **Гербер Х.**, *Математика страхования жизни*. Москва, 1995.
- [10] **Фалин Г. И. и Фалин А. И.**, *Актuariальная математика в задачах*. Москва: Физматлит, 2003. ISBN 5-9221-0451-9.
- [11] **Weishaus Abraham**, *Study Manual for SOA Exam MLC Life Contingencies*. Tenth Edition. USA: A.S.M., 2010.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՆԱՀԻՏ ԳԵՎՈՐԳԻ ԳՈՒԼՅԱՆ

**ԿՅԱՆՔԻ ԱՊԱՀՈՎԱԳՐՈՒԹՅԱՆ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ**

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. խմբագրումը՝ Մ. Հովհաննիսյանի

Տպագրված է «Time to Print» օպերատիվ տպագրությունների սրահում:
ք. Երևան, Խանջյան 15/55

Ստորագրված է տպագրության՝ 02.07.2019:
Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 5.375:
Տպաքանակը՝ 150:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.am