

**С. К. СТАФЕЕВ,  
К. К. БОЯРСКИЙ,  
Г. Л. БАШНИНА**

# **ОСНОВЫ ОПТИКИ**

*Издание второе, исправленное и дополненное*

*Рекомендовано*

*НМС по физике Министерства образования и науки РФ  
в качестве учебного пособия для студентов вузов,  
обучающихся по направлениям «Физика» (510400),  
«Прикладные математика и физика» (511600),  
«Опtotехника» (551900), «Приборостроение» (551500)  
и другим физическим и техническим направлениям подготовки*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2013

ББК 22.34я73

С 78

**Стафеев С. К., Боярский К. К., Башнина Г. Л.**

**С 78** Основы оптики: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 336 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1495-6**

Рассмотрен широкий круг физических явлений, относящихся к различным разделам оптики. Изложены основные принципы математического описания оптических явлений, приведены примеры их практического использования. Дано представление о современных методах управления спектральными и временными параметрами излучения, применении оптических устройств в информационных системах, отражены последние достижения оптики. Приведено большое количество фотографий, полученных в реальных оптических экспериментах.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям «Физика», «Прикладная математика и физика», «Оптехника», «Приборостроение» и другим физическим и техническим направлениям подготовки.

ББК 22.34я73

**Рецензенты:**

*Ю. Г. ЯКУШЕНКОВ* — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой оптико-электронных приборов факультета оптико-информационных систем и технологий МИИГАиК;

*Е. И. БУТИКОВ* — кандидат технических наук, профессор физического факультета СПбГУ.

**Обложка**

*Е. А. ВЛАСОВА*

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.*

*Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2013

© Коллектив авторов, 2013

© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2013

# Краткое оглавление

Предисловие ко второму изданию .....	11
Предисловие к первому изданию .....	12
Введение. Краткий исторический очерк .....	13

## Часть 1. Свет: волны, лучи, энергия

<b>Глава 1.</b> Свет как электромагнитные волны .....	38
<b>Глава 2.</b> Общие свойства лучей .....	50
<b>Глава 3.</b> Прохождение света через сферическую границу сред .....	66
<b>Глава 4.</b> Фотометрия .....	92

## Часть 2. Интерференция и дифракция света

<b>Глава 5.</b> Интерференция и когерентность .....	104
<b>Глава 6.</b> Методы наблюдения интерференционных картин .....	113
<b>Глава 7.</b> Дифракция Френеля .....	132
<b>Глава 8.</b> Дифракция Фраунгофера .....	148
<b>Глава 9.</b> Дифракция на регулярных структурах .....	161

## Часть 3. Взаимодействие света с веществом

<b>Глава 10.</b> Поляризация света .....	186
<b>Глава 11.</b> Отражение и преломление света .....	196
<b>Глава 12.</b> Распространение света в анизотропных средах .....	208
<b>Глава 13.</b> Классическая теория излучения и поглощения .....	226
<b>Глава 14.</b> Классическая теория дисперсии .....	234
<b>Глава 15.</b> Рассеяние света .....	247

## Часть 4. Квантовая и лазерная оптика

<b>Глава 16.</b> Квантовая теория излучения .....	254
<b>Глава 17.</b> Лазеры .....	270
<b>Глава 18.</b> Нелинейная оптика .....	288
Интерактивный музей оптики OPTIMUS .....	311
Литература .....	314
Алфавитный указатель .....	315

# Оглавление

Предисловие ко второму изданию .....	11
Предисловие к первому изданию .....	12
Введение. Краткий исторический очерк .....	13

## Часть 1. Свет: волны, лучи, энергия

<b>Глава 1.</b> Свет как электромагнитные волны .....	38
1.1. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля .....	38
1.2. Волновое уравнение. Скорость электромагнитных волн .....	40
1.3. Плоские и сферические волны .....	42
1.4. Свойства электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга .....	44
1.5. Спектральное представление световых волн .....	47
<b>Глава 2.</b> Общие свойства лучей .....	50
2.1. Уравнение эйконала .....	51
2.2. Законы распространения лучей .....	52
Оптический путь .....	52
Уравнение светового луча в неоднородной среде .....	53
Закон прямолинейного распространения света в однородной среде ...	54
Закон изменения интенсивности .....	54
Закон независимости световых пучков .....	55
Стигматические световые пучки .....	55
2.3. Принцип Ферма .....	56
2.4. Прохождение света через плоскую границу сред .....	58
Отражение света от границы двух однородных сред .....	59
Преломление света на границе двух однородных сред .....	60
<i>Примеры решения задач</i> .....	63
<i>Задачи</i> .....	64
<b>Глава 3.</b> Прохождение света через сферическую границу сред .....	66
3.1. Отражение и преломление на сферической границе .....	66
Правила знаков .....	67
Сферическое зеркало .....	69
Линейные и угловые характеристики изображений .....	70
Центрированная оптическая система .....	72
3.2. Преломление света в линзе. Формула тонкой линзы .....	73
3.3. Идеальные оптические системы .....	78
3.4. Матричное описание оптических систем .....	80
3.5. Глаз как оптическая система .....	84
3.6. Аберрации оптических систем .....	85
<i>Примеры решения задач</i> .....	88
<i>Задачи</i> .....	89
<b>Глава 4.</b> Фотометрия .....	92
4.1. Фотометрические величины .....	92

Поток лучистой (световой) энергии .....	93
Сила света .....	93
Освещенность поверхности .....	94
Яркость источника .....	95
Светимость поверхности .....	96
4.2. Единицы световых величин .....	97
<i>Примеры решения задач</i> .....	99
<i>Задачи</i> .....	101
<b>Часть 2. Интерференция и дифракция света</b>	
<b>Глава 5.</b> Интерференция и когерентность .....	104
5.1. Возникновение интерференции .....	104
5.2. Двухлучевая интерференция .....	105
5.3. Временная и пространственная когерентность, степень когерентности .....	108
<b>Глава 6.</b> Методы наблюдения интерференционных картин .....	113
6.1. Метод деления амплитуды .....	113
Полосы равной толщины .....	113
Кольца Ньютона .....	114
Полосы равного наклона .....	115
Просветление оптики .....	117
6.2. Метод деления волнового фронта .....	117
6.3. Двухлучевые интерферометры. Принципы фурье-спектроскопии ...	120
6.4. Измерение угловых размеров источников. Звездный интерферометр .....	122
6.5. Многолучевая интерференция .....	123
Эталон Фабри — Перо .....	123
Диэлектрические покрытия .....	126
<i>Примеры решения задач</i> .....	127
<i>Задачи</i> .....	129
<b>Глава 7.</b> Дифракция Френеля .....	132
7.1. Принцип Гюйгенса — Френеля .....	132
7.2. Зоны Френеля .....	133
Дифракция на круглом отверстии .....	133
Применение метода векторных диаграмм .....	135
Дифракция на круглом диске Пятно Пуассона .....	137
Поперечные дифракционные распределения от круглого отверстия .....	138
Изменение фазовых соотношений между вторичными волнами. Зонные пластинки .....	139
7.3. Дифракция на прямолинейном крае экрана .....	141
Дифракция на полуплоскости. Зоны Шустера .....	141
Дифракция Френеля на бесконечной щели .....	142
7.4. Скалярная теория дифракции Кирхгофа .....	143
7.5. Границы дифракционных приближений .....	146

<b>Глава 8.</b> Дифракция Фраунгофера .....	148
Особенности дифракции в дальней зоне .....	148
8.1. Дифракция Фраунгофера как пространственное фурье-преобразование .....	149
8.2. Дифракция на прямоугольном отверстии .....	153
8.3. Дифракция на круглой апертуре .....	154
8.4. Дифракционный предел разрешающей способности .....	156
8.5. Основы фурье-оптики .....	159
<b>Глава 9.</b> Дифракция на регулярных структурах .....	161
9.1. Возникновение системы главных и побочных максимумов .....	161
9.2. Спектральные свойства дифракционной решетки .....	165
9.3. Фазовые решетки. Решетки со сложной структурой .....	167
9.4. Дифракция на двумерных структурах .....	170
9.5. Трехмерная решетка. Дифракция рентгеновских лучей .....	172
9.6. Дифракционные принципы голографирования .....	174
<i>Примеры решения задач</i> .....	180
<i>Задачи</i> .....	182
<b>Часть 3. Взаимодействие света с веществом</b>	
<b>Глава 10.</b> Поляризация света .....	186
10.1. Естественный и поляризованный свет .....	186
10.2. Анализ поляризации. Степень поляризации .....	188
10.3. Описание поляризации с помощью параметров Стокса .....	190
<i>Примеры решения задач</i> .....	193
<i>Задачи</i> .....	194
<b>Глава 11.</b> Отражение и преломление света .....	196
11.1. Граничные условия. Формулы Френеля .....	196
11.2. Анализ формул Френеля .....	198
11.3. Полное внутреннее отражение .....	201
11.4. Отражение света от поверхности металлов .....	204
<i>Примеры решения задач</i> .....	206
<i>Задачи</i> .....	207
<b>Глава 12.</b> Распространение света в анизотропных средах .....	208
12.1. Тензор диэлектрической проницаемости анизотропной среды .....	208
12.2. Распространение монохроматической плоской волны в анизотропной среде .....	209
12.3. Двулучепреломление в одноосных кристаллах .....	211
12.4. Анализ хода лучей в кристаллах с помощью построений Гюйгенса .....	213
12.5. Кристаллические поляризационные устройства .....	215
12.6. Интерференция поляризованных лучей .....	217
12.7. Гиротропия или естественная оптическая активность .....	219
12.8. Параметрическая кристаллооптика .....	220

<i>Примеры решения задач</i> .....	223
<i>Задачи</i> .....	224
<b>Глава 13.</b> Классическая теория излучения и поглощения .....	226
13.1. Естественная ширина спектральной линии .....	226
13.2. Механизмы уширения спектральных линий .....	228
13.3. Поглощение света. Закон Бугера .....	232
<b>Глава 14.</b> Классическая теория дисперсии .....	234
14.1. Групповая и фазовая скорости. Дисперсионная зависимость .....	234
14.2. Нормальная и аномальная дисперсия .....	237
14.3. Дисперсия вдали от линий поглощения .....	240
<i>Примеры решения задач</i> .....	243
<i>Задачи</i> .....	245
<b>Глава 15.</b> Рассеяние света .....	247
15.1. Теория рассеяния Рэлея .....	247
15.2. Рассеяние Ми и молекулярное рассеяние .....	250
15.3. Неупругое рассеяние .....	251
<b>Часть 4. Квантовая и лазерная оптика</b>	
<b>Глава 16.</b> Квантовая теория излучения .....	254
16.1. Законы теплового излучения .....	254
16.2. Формула Планка .....	259
16.3. Спонтанное и вынужденное излучение .....	261
16.4. Квантовые эффекты в оптике .....	263
Фотоэффект .....	264
Световое давление .....	265
Эффект Комптона .....	265
<i>Примеры решения задач</i> .....	267
<i>Задачи</i> .....	268
<b>Глава 17.</b> Лазеры .....	270
17.1. Принципы усиления света .....	270
17.2. Основные типы лазеров .....	272
Рубиновый лазер .....	272
Неодимовый лазер .....	273
Гелий-неоновый лазер .....	274
Лазер на углекислом газе .....	275
Ионные лазеры .....	276
Экимерные лазеры .....	277
Лазеры на красителях .....	277
Полупроводниковые лазеры .....	278
Химические лазеры .....	279
17.3. Открытые резонаторы лазеров .....	279
<i>Задачи</i> .....	286
<b>Глава 18.</b> Нелинейная оптика .....	288
18.1. Механизмы оптической нелинейности .....	288

---

18.2. Некогерентные нелинейные эффекты .....	290
18.3. Генерация второй оптической гармоники .....	291
18.4. Параметрическая генерация света .....	295
18.5. Вынужденное рассеяние и обращение волнового фронта .....	296
18.6. Эффекты самовоздействия света .....	300
18.7. Нелинейный резонанс и оптическая бистабильность .....	304
18.8. Принципы нелинейной лазерной спектроскопии .....	307
18.9. Световое давление в лазерных пучках .....	309
Интерактивный музей оптики OPTIMUS .....	311
Литература .....	314
Алфавитный указатель .....	315

## **Предисловие ко второму изданию**

Шесть лет, прошедших со времени первого издания данной монографии показали ее востребованность и популярность не только у студентов нашего Университета информационных технологий, механики и оптики, ставшего Национальным исследовательским, но и у многих «сторонних» читателей. Авторы получили полезные советы и ценные замечания от ряда отечественных специалистов-оптиков и коллег по преподавательскому цеху. И как только сотрудники известного российского научно-образовательного издательства «Лань» предоставили возможность переиздать монографию, мы с радостью согласились.

В настоящем издании сохранена общая структура книги, существенно расширено историческое введение, а также изменены некоторые формулировки, вызывавшие справедливую критику. Устранены обнаруженные за эти годы опечатки и ошибки в формулах. В конце книги авторы посчитали возможным разместить краткое описание открытого в 2009 г. при НИУ ИТМО интерактивного Музея оптики — места, где тысячи школьников уже получили представление о волшебно заманчивом и удивительно красивом мире оптических явлений. Надеемся, что некоторые из них, выбрав путь получения вузовского технического образования, впоследствии, возможно, возьмут в руки и эту книгу.

# Предисловие к первому изданию

Настоящее издание охватывает две учебные дисциплины, традиционно читаемые студентам технических факультетов в рамках базовой естественно-научной подготовки. Первая — «Волновая и квантовая оптика» — является частью расширенного курса общей физики и освещает закономерности, обусловленные волновой природой оптического излучения, а также эффекты, получившие наиболее логичное и законченное описание на основе квантовых представлений. Вторая дисциплина — «Основы оптики» — преподается студентам специальностей и направлений, связанных с оплотехникой, оптоэлектроникой и оптоинформатикой. В ней больше внимания уделяется вопросам формирования оптических изображений, взаимодействия света с веществом, энергетической и информационной составляющим оптического сигнала.

Объединение в одной книге учебного материала по двум базовым дисциплинам преследовало двоякую цель. С одной стороны, требовалось дополнить традиционное общезначимое изложение современной методологией, основанной на интегральных преобразованиях, с другой стороны, следовало связать сугобо технические приложения с фундаментальными теоретическими принципами оптики.

Выбранное авторами название книги — «Основы оптики» — в точности повторяет наименование известного труда М. Борна и Э. Вольфа, давно ставшего настольной книгой оптиков-профессионалов. Не претендуя на такую же глубину изложения и даже на повторение структуры этой монографии, авторы все же сочли возможным использовать такое же название, поскольку ограничились изложением самых основных положений оптической науки, и сделали акцент на рассмотрении физической сути оптических явлений, существенно сократив их математическое описание.

Работа над этим изданием протекала с перерывами почти шесть лет и пришла на время совместной педагогической деятельности авторов на кафедре физики Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики (СПбГУИТМО). За это время были подготовлены печатный и электронный конспекты лекций, методические пособия по решению задач и лабораторному практикуму, изданы четыре брошюры по отдельным разделам курса. Материалы, дополняющие содержание этого издания, доступны в электронном виде по адресу [www.optics.ifmo.ru](http://www.optics.ifmo.ru).

Во время подготовки издания неоценимую методическую помощь и неизменно благожелательную критику авторы получали от профессора Санкт-Петербургского государственного университета Е. И. Бутикова, автора лучшего русскоязычного учебника по оптике. Весьма полезные дискуссии проходили с профессорами кафедры К. Р. Симовским, А. В. Сечкаревым, Н. А. Ярышевым. Отдельную признательность хочется выразить ректору СПбГУИТМО профессору В. Н. Васильеву за поддержку, оказанную на всех этапах работы.

Выходящая в год 100-летия первого в России выпуска специалистов по оптической технике, книга «Основы оптики», как мы надеемся, найдет своего читателя не только среди новых поколений студентов и преподавателей, но и в кругу всех интересующихся оптикой, по праву называемой сегодня наукой XXI века.

# Введение

## Краткий исторический очерк

Вопрос о преемственности знаний, из которых выкристаллизовалась будущая оптика, — древних достижений по астрономии, геометрии и медицине — тесно связан с историей ранних средиземноморских цивилизаций, участие которых в генезисе греческого и римского обществ неоспоримо. К ним относятся крито-микенская культура, финикийская (карфагенская) и этрусская. Для поиска истоков оптического знания наиболее важными являются следующие моменты.

Основные сооружения крито-микенской культуры были ориентированы по сторонам света, вход в парадное помещение, где проходили праздничные пиршества и собрания, был обращен строго на юг. Дворцы Кносса и Феста на многие века стали примером решения проблем освещения в архитектуре. Световые колодцы и оконные проемы, размещенные на разных уровнях, в сочетании с продуманным размещением светильников искусно использовали игру света и тени. Наконец, наиболее существенной представляется техника прямого и обратного визирования наземных объектов и пригоризонтных положений светил. Эти приемы нашли отражение при создании U-образных алтарей и наблюдательных мест с использованием двойных топоров-лабрисов и кольцевых апертур.

Передачу знаний от архаики к античности можно проиллюстрировать и на примере финикийско-карфагенской цивилизации. Вплоть до эпохи войн с Римом сохранилась астрономическая символика божеств пунического пантеона — Баала, Таннит и других, несомненно, связанная с выполнением визирных функций. Гномоны, как визирные устройства ориентации во времени и пространстве, также проникли в античность через культуры этих цивилизаций.

Этрусские зеркала, являющиеся ценнейшими образцами изобразительного искусства, прямо или косвенно способствовали развитию катоптрики — античного учения о законах зеркальных отражений.

Взлет естественно-научного знания в значительной степени объяснялся удачным местоположением Греции на пересечении оживленных морских торговых путей в непосредственной близости от очагов древней культуры Крита, Месопотамии, Финикии и Египта, которые, в свою очередь, имели связь с Индией и Китаем. Огромное значение для становления греческой культуры имело финикийское алфавитное письмо, заимствованное в измененном виде в I в. до н. э.

В начале VI в. до н. э. Древняя Греция породила целую плеяду ярких философов, давших толчок формированию основ античных наук: математики, астрономии, механики, медицины. Их достижения дошли до нас вместе с именами, что позволяет в большинстве случаев исторически строго говорить о приоритете авторов. В этом состоит одно из отличий античного периода от архаики: появляются последовательности персонифицированных учений, возникают научные школы, фиксируются их трансформации. В последующие столетия идеи, заложенные греками в период с VI по IV вв. до н. э., развивались и углублялись. Английский исследователь античности Дж. Бернет отметил, что науку вообще можно понимать как «Размышление о мире по способу греков» [Burnet].

До нас дошли письменные свидетельства о формировании древнегреческими учеными ранних научных мировоззрений. Практически все эти сведения почерпнуты из доксографических сочинений, задачей которых было излагать, классифицировать и

комментировать учения древних. Доксографы, среди которых одним из самых известных был ученик Аристотеля Теофраст, создали уникальные собрания античных учений по различным вопросам от этики и политики до механизмов зрения, природы цвета и метеорологии. В них взгляды предшественников не только излагались, но и подвергались сравнительному анализу. В некотором смысле настоящая монография продолжает доксографическую традицию в отношении античных оптических теорий.

Небывалых вершин достигла греческая математика в теории чисел, развитии геометрии, выводе формул для треугольников, анализе кривых второго порядка и конических сечений, сыгравших важную роль в становлении оптики. Однако новый этап развития античной математики привел не только к доказательности, но и к постепенной утрате интереса к задачам прикладного характера. Наметилась тенденция к возрастающей абстрактности и отвлеченности исследований. Познание разделилось на две сферы: «высокую науку», поглощенную проблемами теоретического, отвлеченного характера, и «низкую», ремесленную, прикладную, узкопрофессиональную науку.

На начальном этапе искусство еще не отделилась от ремесла; художественные и технические работы назывались *техне*, а наука развивалась в границах натурфилософии. Античная школа объединяла те начала, которые теперь по отдельности именуется наукой и искусством. Она положила начало формированию научного сообщества, которое никогда больше не исчезало, а только продолжало развиваться в различных формах. Социальная роль образования в этот период значительно повысилась, о чем свидетельствуют многие изображения школьных уроков. Античная наука сыграла для человечества роль Прометея, принесшего людям огонь подлинного научного знания.

Оптика как самостоятельное учение сформировалось в античности, постепенно развиваясь в рамках разделов геометрии, астрономии и медицины.

Наиболее древней из наук античного квадривиума (четырёх математических дисциплин, сформировавшихся к позднеаримскому периоду, — арифметики, музыки, геометрии, астрономии) и ставшей, наряду с тривиумом (грамматика, риторика, логика) основой университетского образования средних веков была астрономия. В отличие от теоретической астрономии, наблюдательная астрономия оказалась одним из главных источников аккумулирования оптического знания.

Совершенствуя точность методов и средств измерения полярных и азимутальных координат небесных светил, астрономы создали первые оптические инструменты — угломерные жезлы, комбинации визиров и отвесов, безлинзовые диоптры, армиллы, астролябии и квадранты. Эти инструменты лежат у истоков прикладной оптики. С другой стороны, явление атмосферной рефракции (вертикального смещения видимых положений звезд) было замечено еще вавилонскими астрологами, исследовано Гиппархом и особенно тщательно Птолемеем. Результаты наблюдений привели к прогрессу в изучении прохождения света через прозрачные среды, заложившем начало диоптрики. Другой раздел греческой оптики — «метеоры», содержащий описания различных небесных оптических эффектов: комет, падающих звезд, гало, радуги — также имеет астрономические корни. Впоследствии из него выделилась атмосферная оптика.

Другим источником формирования античных оптических знаний явилась геометрия. Исидор Севильский в «Этимологиях» так определял истоки геометрии: *«Говорят, что наука геометрии была впервые изобретена египтянами, потому что во время разливов Нила их владения покрывались илом. Начало деления земли при помощи*

*линий и мер и дало имя этому искусству. Они начали после измерения земли искать размеры и неба: на какое расстояние Луны от Земли и само Солнце от Луны отстоит и насколько мера распространяется вплоть до вершины неба, и таким образом они сами расстояния неба и кругообращение мира вероятным образом разместили по числу стадий. И поскольку эта наука началась с измерения земли, от своего начала она сохранила и название. Ибо геометрия наречена от земли и меры. Искусство этой науки содержит линии, отрезки, величины и фигуры, и в фигурах — размеры и количества» [Севильский].*

Со времен Евклида и вплоть до XVII в. оптику, как раздел *τεχνε*, даже формально относили к научной системе линейной геометрии. Понятия прямых световых и зрительных лучей, зрительных углов, пирамид и конусов опирались на геометрические построения и теоремы о треугольниках, о пересекающихся линиях, круговых секторах и т. п. Учение о формировании солнечных теней и фигурах, описываемых ими при суточном движении Солнца (гномоника), также основывалась на геометрии. Все предложенные в Древней Греции теории зрения и механизмы зрительного восприятия строились на геометрических рассуждениях и аналогиях. В основе катоптрики (раздел античной оптики, посвященный законам отражения от зеркал) лежат геометрические аксиомы и теоремы. Нахождение особых (фокальных) точек зеркальных поверхностей, поиск мест локализации мнимых зеркальных изображений и практическое использование зажигательных зеркал основывалось на изучении кривых второго порядка и конических сечений.

Арифметика (теория чисел) и музыка, называемая антиками гармонией, также имеют непосредственное отношение к истокам оптической науки. Пифагорейская теория мировой гармонии, основанная на золотом сечении, целочисленных пропорциях и кратных отношениях частот (октаве, кварте, квинте и т. п.) относилась не только и не столько к процессу извлечения звука. Космогоническая гармония небесных сфер и античный цветовой хроматизм — совокупность представлений о чистых и смешанных цветах как трансформациях белого света — опирались на открытые греками простые арифметические соотношения. В решении главной проблемы античной оптики — выяснении природы света — не последнюю роль играли греческие теории чисел. Устоявшиеся к раннему средневековью представления о семи музыкальных нотах, семи небесных сферах и видимом спектре из семи основных цветов радуги — все это отголоски тех построений.

Особая роль в развитии оптического знания принадлежит медицине и архитектуре. Прогресс в медицинских исследованиях интересен в связи с развитием древней офтальмологии. Изучение строения глаза касалось не только методов врачевания глазных болезней, но и важнейшей проблемы античной оптики — разгадке механизма зрения. В дальнейшем эти исследования привели к возникновению физиологической оптики.

Наконец, античные достижения в архитектуре связаны с зарождением представлений о перспективе, выяснении особенностей зрительного восприятия сооружаемых храмов и амфитеатров, применении конструктивных приемов (курватуры архитравов, энтазисы колонн и т. п.). Витрувий в энциклопедическом труде «Об архитектуре» писал, что зодчий не может не быть оптиком. Он имел в виду не только грамотное решение вопросов естественного и искусственного освещения, но и учет зрительных позиций наблюдателя, искажений перспективы и кривизны широкоугольных зрительных полей [Витрувий].

Разнородные оптические знания объединились в единое целое не сразу. Потребовалось пройти долгий путь, прежде чем мыслители античности создали первые научные трактаты в этой области. В «Оптике» и «Катоптрике» Евклида, «Катоптрике» Герона и Архимеда, и, наконец, в «Оптике» Клавдия Птолемея, присутствуют и геометрические доказательства, и данные астрономических наблюдений, и медицинские и архитектурные сведения. Эти труды заложили основу оптики, упоминаемой в ряду главных античных *техне* как цельного учения о природе света и механизме зрения.

В мифологическом сознании древних, как в зеркале, отразились объективные оптические явления окружающего мира, что проявилось во многих античных мифах. Это объясняется особой космогонической функцией света и универсальной значимостью зрительного восприятия. По традиционному определению, античная оптика — учение о природе света и механизме зрения. Но эти составляющие были неравными.

В основу метафизических представлений о свете греками был положен принцип божественного: свет есть не только начало космоса, но и главное условие его видимости и познаваемости. Свет физический лишь символизирует образ света божественного, дающего миру возможность бытия и осуществляющего процесс оформления материи. Философское осмысление природы света не поднималось выше констатации его огненной основы и классификации различных световых явлений. Вершиной античных учений была аристотелевская идея об *акцидентальности* света, который актуализирует прозрачность некоторых сред, чтобы через них могли свободно распространяться зрительные лучи. Дальнейшие метафизические рассуждения касались, в основном, аналогий света чувственного с другими его формами (свет трансцендентный, интеллигибельный, свет знаний).

О зрении говорилось и писалось несравненно больше. Сформировалось несколько зрелых теорий визуального восприятия, появились первые физиологические модели глаза. На рубеже V—IV вв. до н. э. в трудах пифагорейцев обнаруживаются начала оптики как части линейной геометрии. Все разделы математической (точнее — геометрической) оптики античности — *прямое видение*, *катоптрика*, *диоптрика* — оперировали понятиями зрительных лучей и зрительных углов. Вопросы локализации отраженных и преломленных образов разрешились только в рамках представлений о прямых лучах-щупальцах, исходящих из глаз.

Благодаря плееды великих античных мыслителей, из области мифологической и сакральной тема *цветового хроматизма* перешла в разряд философских и научных рассуждений. Были высказаны гениальные догадки о структуре света, мировом эфире, минимальных длинах отраженных лучей. Достижением Античности стала систематизация собранных знаний об оптических явлениях природы и представлений о механизмах зрения, что позволило утвердиться оптике как самостоятельной науке.

Согласно античному определению *оптика* — это наука о природе света и механизме зрения. Уже в древности оптика прямо или косвенно была связана с практическими нуждами. Греческие геометры, приступив к исследованию оптических явлений, в том числе атмосферной оптики, обнаружили видную прямолинейность распространения света: подсказкой послужили отбрасываемые предметами тени. Поэтому учение о свете было включено в систему линейной геометрии. Были разработаны геометрические методы построения изображений как плоскими, так и неплоскими зеркалами. Эти исследования греки называли *катоптрикой* — наукой об отражении лучей зеркальными поверхностями. Методика прослеживания луча «за зеркало» для нахождения изображения, впервые серьезно изученная еще во времена Пифагора, широко используется и в современных оптических расчетах.



**Пифагор** родился в 570 г. до н. э. и жил сначала на острове Самос, а в 531 г. до н. э. переселился в Южную Италию, которая впоследствии именовалась Великой Грецией. Еще в молодости Пифагор пришел к убеждению, что все в мире определяется числами или соотношениями чисел.

Что касается его исследований в области оптики, он считал, что объекты становятся видимыми благодаря «выстреливаемым» ими крохотным частицам, попадающим в глаз человека. Потрясающее предвидение Пифагора вспоминали на всех этапах создания *корпускулярной теории*. Зная законы отражения, он развивал геометрические методы построения изображений плоскими и кривыми зеркалами, основанные на прослеживании продолжений отраженных лучей за зеркало.

В 444 г. до н. э. греческий философ Эмпедокл выдвинул теорию, альтернативную идее Пифагора. По Эмпедоклу предметы становятся видимыми благодаря использованию неувядающего шупальца, простирающегося от глаза и захватывающего видимый предмет. Идея о существовании какого-то излучения, выходящего из глаза, стала известной под названием «теории окулярных пучков». Эта теория получила широкое распространение, и хотя ее противником был сам Аристотель, даже в конце средневековья некоторые серьезные ученые предполагали, что такой тип зрения возможен у ночных животных.

Аристотель считал свет проявлением некоей разряженной среды, называемой *пеллуцид* и заполняющей все пространство. По его мнению, через эту среду передается определенного рода воздействие от объекта к глазу. Мысль эта безусловно созвучна высказанной в XIX в. идее распространения света как колебаний разряженного эфира. Аристотель изучал не только законы отражения, но и преломления световых лучей.

Автором первых дошедших до нас греческих работ по оптике был Эвклид. Известна его «Оптика» — трактат по теории перспективы. Законы перспективы выводятся здесь из четырнадцати исходных положений, установленных на основе оптических наблюдений. На закон отражения Эвклид ссылался как на нечто уже известное. Он говорил, что этот закон доказан в его «Катоптрике», которая, увы, не сохранилась.



**Эвклид** создавал свои труды в Александрии в начале III в. до н. э. В своем первом математическом трактате он подвел итог предшествующему развитию древнегреческой математики. Создатель геометрической системы (евклидовой геометрии), на которой затем основывалась вся классическая физика. В трактатах Эвклида «Оптика» и «Катоптрика» изложены результаты его оптических исследований. Его геометрические построения теней и изображений в плоских зеркалах указывают на понимание прямолинейности световых лучей и равенства углов падения и отражения. Он исследовал отражение светового луча системой нескольких плоских зеркал. В своих трудах рассмотрел отражения света от плоских и сферических зеркал, привел теорему о равенстве углов падения и отражения, о симметричности предмета и изображения в плоском зеркале, о положении изображения на одной прямой с предметом в сферических зеркалах и т. п. Все это дает основание считать Эвклида основоположником геометрической оптики.

Вероятно, уже в древности сочинение Эвклида было оттеснено на второй план более объемной «Катоптрикой» Архимеда, содержащей строгое изложение всех достижений греческой геометрической оптики. Сам Архимед был не только теоретиком оптики, но и мастером оптических наблюдений, о чем свидетельствует описанная им методика определения видимого диаметра Солнца, учитывающая размеры человеческого зрачка.

Во II в. до н. э. теория построения изображений кривыми зеркалами достаточно продвинулась вперед, оправдывая предание, по которому Архимед поджег римский флот около Сиракуз, сконцентрировав солнечный свет «зажигательными» вогнутыми зеркалами. Кроме того, древним грекам было известно и зажигательное действие собирающих линз, описанное впервые в V в. до н. э. в комедии Аристофана «Облака». О зажигательном действии стеклянных и хрустальных шаров пишут римляне Плиний и Сенека. Последний указывает на увеличительное действие стеклянной сферы, заполненной водой.

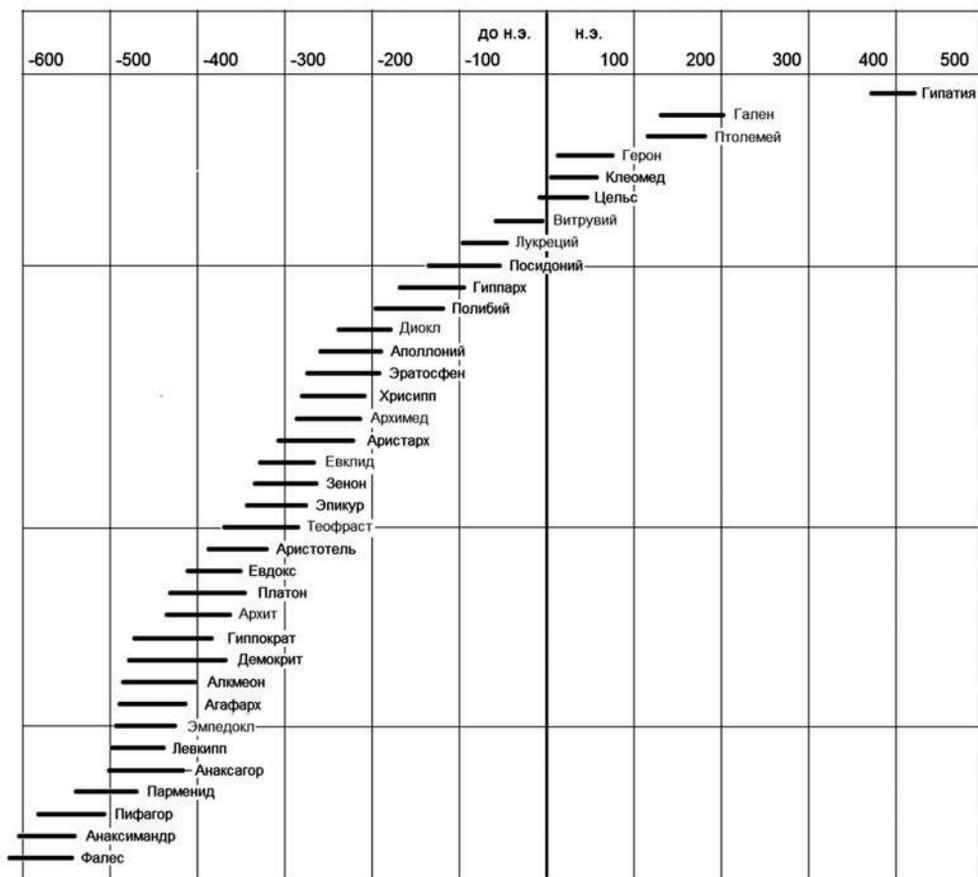
В эпоху поздней античности оптическими исследованиями занимались Герон и Птолемей. Трактат Герона «Катоптрика» содержит обоснование прямолинейности световых лучей бесконечно большой скоростью их распространения. Далее Герон приводит доказательство закона отражения, основанное на предположении, что путь, проходимый светом, должен быть наименьшим из всех возможных (это частный случай принципа, традиционно связываемого с именем Ферма).

Вслед за наукой об отражениях развивалась и греческая *диоптрика* — наука о прохождении света через прозрачные среды и о его преломлениях. Впервые количественными диоптрическими измерениями занимался Птолемей. Он исследовал преломление лучей в воде, наполовину погружая диск с делениями в воду и определяя углы падения и преломления. Полученные по его данным значения показателя преломления воды лежат в диапазоне от 1,25 до 1,34. Птолемей впервые описал явление полного внутреннего отражения.



**Клавдий Птолемей** (II в. н. э.) — великий геометр и астроном из Александрии, автор трактата «Альмагест», который более тысячелетия оставался сводом астрономических знаний. Придал законченный вид геоцентрической теории мироздания (птолемеева система мира), которую со временем заменила гелиоцентрическая система Коперника. Создатель трактата «Оптика» в пяти книгах, где впервые описаны действительно точные диоптрические исследования с целью учета влияния преломления атмосферы на астрономические наблюдения. Птолемей не смог открыть количественный закон, связывающий углы падения и преломления, ошибочно полагая, что для данных двух сред углы преломления изменяются почти пропорционально углам падения. Это предположение, справедливое при малых углах падения, не выполняется для больших углов, поскольку пропорциональность наблюдается не для самих углов, а для их синусов.

Итак, на каждом этапе развития античных наук обнаруживается прогресс в формировании единой системы оптического знания. Периоды ее взлетов и падений обозначают общие историко-научные тенденции всей античной философии. Последовательность греко-римских мыслителей, внесших вклад в становление и развитие оптической науки, иллюстрируется хронологической схемой **плеяды античных оптиков**. Ее изучение позволяет обрисовать общие временные контуры, обозначающие оптику в ее античном понимании.



**VI в. до н. э.** — закладываются основы античной геометрии, в рамках которой появляются первые представления о зрительных лучах. Теоремы о равенствах или подобиях треугольников позволяют формализовать угломерные процедуры, в том числе для задач небесного и земного визирования. Для зрительных лучей сформулирован *закон отражения*. Обобщаются архаичные представления об огненной природе света. Свет и зрение рассматриваются параллельно.

**V в. до н. э.** — впервые с позиций экстрамиссии и интрамиссии последовательно обсуждается механизм зрения, закладываются теоретические основы античной оптики. Доминирующей можно считать теорию зрительных истечений Эмпедокла. Появляется первая физиологическая модель глаза. Геометрия зрительных лучей развита настолько, что зарождается первый прикладной раздел будущей оптики — *скенография*. Представления о природе света детализируются, рассматриваются различные ипостаси огненной стихии.

**Рубеж V–IV вв. до н. э.** можно считать началом античной оптики как науки. В трудах Архита пифагорейское учение о зрительных лучах выделяется в самостоятельную дисциплину из общей системы линейной геометрии. И хотя акустика и оптика уже названы *науками-сестрами*, это мнение многие не разделяют, как, например, Платон.

**IV в. до н. э.** — оптика занимает свое место в аристотелевой структуре античного знания. Ее позиция — между математическими и физическими науками. Аристотель рассматривает свет как условие *актуализации* прозрачности сред для зрительных лучей. Теофрастом впервые проведен критический анализ теорий зрительного восприятия. Объяснены эффекты цветопередачи, свет и цвет рассматриваются совместно. Геометрическую основу обретает раздел *метеоров*, посвященный оптическим явлениям в атмосфере. Появляются описания наблюдений за солнечными затмениями с помощью камеры-обскуры.

**На рубеже IV—III вв. до н. э.** происходит эпохальное для истории оптики событие — появляется многотомный труд Евклида *Оптика*. Дошедший до нас в неполном виде и искаженный двойным переводом трактат до сих пор впечатляет всесторонним рассмотрением оптической тематики. В нем анализируются механизм зрения и строение глаза; законы прямого видения и соответствующие ему иллюзии; приводится последовательное изложение свойств плоских, выпуклых и вогнутых зеркал в разделе *катоптрика*; дается начальное исследование преломления в рамках *диоптрики* — учения о видении через прозрачные среды. Трактат Евклида опирался на формализм исходящих из глаз прямолинейных зрительных лучей, которые понимались как физические реальности. В учениях стоиков и эпикурейцев появляются варианты промежуточных теорий видения.

**III в. до н. э.** — в несохранившихся до нашего времени трудах Архимеда излагаются достижения в области зеркального отражения. Уточнены многие детали сложной катоптрической проблемы — формирования изображений в вогнутых зеркалах. Отголоском этого становится легенда о сожжении в Сиракузах римского флота, а реальным фактом — написание Диоклом специальной математической работы «О зажигательных зеркалах». Новое качество приобретает древнее искусство создания солнечных часов-гномонов, основанное на технике обратного визирования. С этих пор *гномоника* рассматривается как часть оптической науки.

**II в. до н. э.** — начало заката античной оптики, совпадающее с общей деградацией теоретического знания при переходе от греческой цивилизации к римской. Дефицит новых идей частично компенсируется становлением системы «инженерного» образования для высших слоев общества. В результате оптические учения из узкого круга ученых и философов проникают в среду писателей, драматургов, художников, архитекторов и военных. К оптическим достижениям этого времени следует отнести совершенствование безлинзовых астрономических и геодезических визирных инструментов, появление светового телеграфа, разработку методологии *зрительных корректив* в скульптуре и архитектуре.

**I в. до н. э.** — пренебрежение теоретическим знанием в пользу прикладного. Продолжаются систематизация, упрощение и популяризация греческого оптического знания. В появившихся компендиумах «О природе вещей» Лукреция и «Десять книг об архитектуре» Витрувия значительное место занимают прикладные вопросы оптики: зрительные иллюзии и пути их исправления, способы искусственного освещения и зеркальные эффекты.

**Первая половина I в.** — частичное возрождение интереса к научным исследованиям в области оптики. Новые данные о физиологии глаза получены римской медициной. За счет совершенствования методов полировки бронзы, обработки кристаллов и появления прозрачного александрийского стекла систематизируются наблюдения по катоптрике и диоптрике. Появляются трактаты Герона, в которых построены модели упругого отражения и неупругого преломления зрительных лучей и впервые сформулирован принцип их минимальной длины.

**Вторая половина II в.** — последний взлет античной научной мысли. Итогом всех накопленных греками и римлянами оптических знаний становится «Оптика» Клавдия Птолемея, дошедшая до нас без своей последней части. В трактате дана полная классификация типов видения (прямого, отраженного и преломленного) и сделана попытка объяснения бинокулярности зрения. Изложение ведется в рамках представлений о зрительных лучах, которые теряют свою *материальную* природу и становятся математическими абстракциями. Для плоских и выпуклых зеркал предложена методика нахождения отраженных образов на пересечении луча зрения и катета отражения. Теоремы катоптрики существенно расширены для вогнутых зеркал. Способ нахождения точек пересечения лучей и катетов приводит к парадоксальным для античной оптики выводам о формировании в таких зеркалах «действительных» изображений. Птолемей описывает весьма точные опыты по преломлению, опережающие свое время. Основным стимулом для изучения диоптрики являлись поправки на атмосферную рефракцию при астрономических наблюдениях. В трактате Птолемея и в офтальмологических работах Галена констатируется вынужденное упрощение геометрических построений. Деграция научной мысли достигает максимума и история античной оптики фактически заканчивается.

Таковы основные этапы развития античной оптики, которая в свое время была справедливо названа *оптикой зрения*: зрительные углы, определяющие визуальные впечатления, неизменно опирались на глаз как вершину образуемого ими конуса. Объяснение зрительной способности базировалось на взаимодействии зрительных лучей с контурами объекта и границами зрачка. Важнейшим достижением античной оптики *прямого видения* стало понимание того, что картина внешнего мира проецируется зрительными лучами не на плоскость, а на криволинейную поверхность. И хотя греческие мыслители считали, что это была не вогнутая поверхность сетчатки, а выпуклая поверхность зрачка, они верно уловили источник ряда нелинейных оптических искажений. Осознав это, они предложили путь компенсации этих искажений в виде скенографических коррективов в архитектуре, скульптуре и живописи.

Отдельно стоит выделить «Оптику» великого астронома античности Клавдия Птолемея, поскольку на фоне общеизвестных трактатов — «Альмагеста», «Тетрабиблоса» и «Географии» — эта работа незаслуженно забыта. «Опыты» Клавдия Птолемея с бронзовыми зеркалами подтвердили закон отражения для любых зеркальных поверхностей, а его эксперименты по рефракции следует считать исторически первым примером инструментального определения характеристик оптических сред. Это было и первым в истории исследованием, проведенным по истинно научным канонам: с постановкой задачи, разработкой методики измерений, созданием специального экспериментального оборудования и анализом результатов.

«Оптика» Птолемея не имела такого влияния на развитие наук, как его геоцентрическая система, но свою роль сыграла. Птолемей первым поставил учение о свете и зрении на математический фундамент, вводя в него результаты измерений и экспериментов. Именно ему человечество обязано сохранением большей части математических, астрономических и оптических знаний Античности. Через арабских и латинских переводчиков и комментаторов трактаты Птолемея попали на полки библиотек университетов Европы. Птолемея система мира изучалась вплоть до революции Коперника, а точность его опытов по преломлению смогли превзойти лишь Декарт и Снеллиус в XVII в.

Античность была ознаменована становлением *техне*, воплотившимся в появлении мастеров и ремесленников, освоивших обработку различных материалов: металлов и

кристаллов, стекол и смальт. Началось изготовление бытовых изделий — зеркал, посуды, оконных блоков, украшений, а также высокохудожественных и ювелирных произведений прикладного искусства. Прогресс был достигнут в совершенствовании шлифовки и полировки бронзовых и кристаллических поверхностей, окрашивании материалов и изделий, а также в изготовлении стеклянных предметов, особенно после изобретения стеклодувной трубки.

Прикладные аспекты оптики того времени оказались так же далеки от современного понимания, как и ее теоретические проявления. И если история создания первых оптических элементов — бронзовых зеркал и кристаллических линз — а также наблюдения с помощью камеры-обскуры без труда вписываются в традиционную историю оптики, то рассуждения о гномонах, астрольбиях, светильниках и теневом театре в данном контексте могут показаться инородными. Такое впечатление создается, если трактовать оптическое знания Античности с точки зрения классической науки. Но если поставить себя на место древних мыслителей, то все начинает видеться в новом, вернее в «старом свете».

Начала *прикладной оптики* лежат в создании первых, сравнительно сложных (по отношению к Архаике) конструкций для визуальных наблюдений и измерений. Визирные инструменты для астрономии или земных применений создавались в Античности с учетом особенностей механизма зрения. Развивая технику прямого визирования, греки и римляне впервые соединили в своих устройствах трубки-диоптры, кольцевые конструкции и градуированные шкалы. Появившиеся в Античности армиллярные сферы, параллактические линейки, астрольбии и квадранты были оптическими приспособлениями, которые вплоть до XVII в. использовались для пространственной ориентации астрономами и астрологами, строителями и геодезистами, военными и мореплавателями.

Безлинзовая наблюдательная оптика Античности была оптикой глаза и визира. Трансформации зрительных лучей — ее основное содержание, а измерения зрительных углов — главный инструментарий. Любые устройства, которые изменяли или ограничивали видимые глазом картины, и угломерные приспособления попадали в поле зрения античной оптики.

Являясь непосредственным практическим приложением теорий зрительного восприятия, *скенографический раздел* оптики дал импульс к уточнению и развитию теории зрительных лучей и зрительных углов. Античные рецепты нелинейных коррективов (энтазисов, курватур и т. п.) сохранились до наших дней, в первую очередь, благодаря трудам римского архитектора Витрувия. Из них родилось учение о зрительной перспективе, вошедшее составной частью в теорию живописи и в ренессансную оптику. Латинский термин *перспектива* изначально был ничем иным, как дословным переводом греческого названия науки — *оптика*.

Наконец, успехи греческой геометрии позволили разработать теорию стереографической проекции, которая укладывалась в оптическую концепцию *проецирования зрительным конусом*. Проецирование сферической поверхности на плоскость лежало в основе гемисфер, гемициклов и скафисов — самых распространенных конструкций солнечных часов. Стереографическая методология позволила построить проекцию небесной сферы на визирную плоскость астрольбии, которую древние так и называли — планисфера. Не случайно столь глубокой оказывается аналогия между разметкой визирной плоскости солнечных часов, по которой скользила тень гномона, и планировкой греческого театра, в котором действовали уже не лучи солнца, а зрительные лучи из глаз людей. Координаты светил

на хрустальном куполе небес трансформировались в точки на круге астролябии теми же проецирующими лучами, которыми трехмерный мир переносился на плоскость театральной декорации.

Солнечные часы древних были оптическим инструментом, причем в той же степени, в которой маятниковые или пружинные часы позднее стали неотъемлемой частью механики. Развитие теневой гномоники (или хорологии — учения о правилах составления гороскопов) как части оптической науки, начавшись в Античности, не потеряло своей актуальности вплоть до Нового времени. Так, в России офицеры-артиллеристы изучали гномонику в курсах по оптике до конца XIX в.

Таким образом, Античность стала временем становления оптики как самостоятельной науки со своими логикой развития, математическим аппаратом и элементами структурирования. Несовпадение границ и содержательного наполнения античной оптики по сравнению с современной не может быть основанием для ее отрицания или забвения. Она была представлена физическими и метафизическими теориями о свете и зрении, физиологическими моделями глаза, теоремами об особенностях отражений и преломлений, зрелыми экспериментальными исследованиями. Античную оптику отличал широкий спектр практических приложений — от сцениграфии и архитектурных зрительных коррективов до массового создания неплоских зеркал и линзоподобных элементов. Был существенно усовершенствован ряд древних наблюдательных устройств (гномон, визирная трубка) и созданы первые оптические инструменты — диоптры, армиллы, астролябии, квадранты.

После античного периода развития науки о световых явлениях на протяжении почти 900 лет — от Птолемея до Ибн ал-Хайсама — оптические исследования принесли мало нового. Возрождение античного знания и дальнейшее развитие науки начались в арабском мире. Арабы сделали немало в области многих наук, в том числе и в оптике. Считается, что именно они создали линзы, хотя еще император Нерон, по преданию, пользовался обработанным смарагдом (изумрудом) для наблюдения гладиаторских боев.

Средние века вызывают различные оценки историков. Однако нельзя не отметить, что это была эпоха уникальной, удивительно яркой культуры, многие элементы которой вызывают восхищение и по сей день. Это и готические соборы, и замки, и песни трубадуров, и, наконец, рыцарская культура. В средние века возникло большинство современных государств, сформировались современные языки — английский, французский, итальянский и многие другие. Именно тогда был созван первый парламент. Наконец, именно в этот период Европа стала христианской.

Математическая протонаука явилась той общей парадигмой в совокупности конкретных традиций, которая характеризует научные знания средневековья. С другой стороны, этот период характеризуется утверждением метафизики, а сам процесс познания мира трактуется как божественное откровение, ревностно опекаемое религиозным канонам. Первое тысячелетие нашей эры знаменует собой активное формирование собственных теорий и методологий познания основными мировыми монотеистическими религиями. Поскольку, начиная со средневековья, развитием всех научных знаний занималась церковь, и получение новых сведений об окружающем мире воспринималось как божественное откровение. Поэтому и оптику этого периода следует характеризовать как оптику божественного. В основе научных представлений лежал фундаментальный принцип зеркального отражения, объединяющий философские, религиозные, научные и эстетические представления.

В науке этот период связан со становлением физической оптики. Оптика средневековья получила в наследство от античности признание ее как самостоятельной науки со своими логикой развития, простейшим математическим аппаратом и элементами структурирования. Были сформулированы первые физические и метафизические теории о свете и зрении, предложены первые модели зрения, развиты представления об отражении и преломлении света. Практические приложения оптики охватывали круг вопросов от сценографии и архитектуры до создания ряда отражательных зеркал и линзоподобных элементов. Были усовершенствованы древние наблюдательные устройства (гномон, визирная трубка) и созданы первые оптические инструменты — диоптры, армиллы, астролябии и квадранты. Этот период можно характеризовать как накопление информации об оптических явлениях и объектах, их упорядочивание, классификация с целью облегчения анализа для установления эмпирических качественных и количественных связей и соотношений между ними. Эти этапы характеризуют описательный период развития античной оптики.

Оптику средневековья также в полной мере можно отнести к описательному периоду ее развития, однако содержательная часть претерпела существенные изменения. Если оптика античности представляла собой раздел натурфилософии, нашедшей отражение в парадигме Аристотеля и Птолемея, аксиоматике Евклида, приведших к развитию разделов геометрической оптики, то оптика средних веков явилась плодом развития метафизики. В духовной жизни этого периода во взаимоотношениях науки, философии и религии определяющую роль стала играть религия, опирающаяся на принципиально новое христианское мировоззрение.

Период средневековья, отмеченный неразрывной связью оптики с религией, ознаменован созданием первых университетов, учреждением оптических мастерских, в методическом аспекте возрастающей ролью экспериментальных исследований. Самым заметным событием явилось одно из самых замечательных достижений оптики за все время развития человечества — изобретение и широкое распространение очков. Эту веку принято считать зарождением практической оптики. В это же время стали использовать камеру-обскуру.

Фундаментальным понятием оптики является свет. Постигание природы света явилась важнейшим стержнем развития не только науки, но и философии, религии и искусства, а значит и мировоззрения человечества в целом. Здесь уместно привести знаменитую фразу У. Брэгга: *«В слове „свет“ заключена вся физика и тем самым все науки»*. С постижением новых знаний о природе света происходила смена парадигмы мировосприятия на всем процессе эволюции человечества.

В период латинского средневековья францисканский монах Р. Бэкон был активен в весьма распространенных в XIII в. усилиях по возвращению христианства на путь истинный. Он полагал, что «рукотворные дисциплины», в частности оптика, должны обслуживать религию и теологию. В этом выразилась приверженность августианским идеалам науки как служанке религии. Бэкон на примере оптического знания одним из первых подтвердил концепцию полезности натурфилософии для христианской религии. Мнение о несовместимости средневековой науки и религии сильно преувеличено позднейшими философами и историками науки.

Говоря об оптическом знании в период средневековья, следует выделить три основных этапа в его развитии. В раннем средневековье основное внимание ученых было направлено на изучение света, цвета и видения, опиравшихся на знания древних

греков, в частности софистики Евклида, Аристотеля, Птолемея и других авторов. Их понимание оптических явлений было ограничено фрагментарными утверждениями и аргументами, рассеянными среди трактатов, посвященных другим предметам и дополненных скудными источниками энциклопедического характера. Представления о свете больше фигурировали в теологических дискуссиях благодаря своему выдающемуся месту в акте творения, библейским световым метафорам и тесной связи между теологией и метафизикой. Кроме того, свет и зрение были интересными природными феноменами, привлекающими пристальное внимание ученых. В это время практически исчезает греческий термин «оптика», как обозначение языческой науки о природе света и механизме зрения. Остаются лишь метафизические сравнения света божественного и физического, а также гносеологические параллели между внешним зрением глазами и внутренним «прозреванием истины».

В арабо-исламский этап мусульманские ученые внесли наиболее существенный вклад в оптику. Особые достижения в этой области связаны с именем арабского ученого ал-Хайсама. Именно он внес решающие изменения в эту науку, дал законченные формулировки ряда ее законов и сделал много оптических открытий. Альхазен вписал визуальный конус экстремиссионных лучей в интрамиссионную теорию, совместив достоинства обеих теорий и объединив математический и физический подходы к зрению одну теорию. Он также вписал сюда анатомические и физиологические идеи Галена, создав универсальную теорию зрения, отвечавшую всем трем критериям. Но главное достижение исламской оптики заключалось в успешном объединении разобщенных и несовместимых греческих оптических традиций в одну вполне ясную, стройную теорию. Этот этап в развитии оптики средневековья принято считать становлением физической и физиологической оптики, что явилось выдающимся вкладом арабских ученых в науку.

После знакомства с математически строгими трудами арабов христианские мыслители обращают свое внимание на оптическое наследие Евклида, Архимеда и Птолемея, стремясь совместить геометрические рассуждения греков и арабов с собственными изысканиями, базировавшимися на святом Писании религиозной апологетике. В этот момент и рождается как бы новая наука *Перспектива*, а на самом деле преобразившаяся и встроенная в средневековые концепции оптика. Творцами ее считаются Роберт Гроссетест и его ученик Роджер Бэкон, положивших начало целой плеяде перспективистов: Вителло и Пекама. В бэконовской науке перспективы оказались интегрированы математические, физические, метафизические и даже физиологические рассуждения. Эти работы дали основу для дальнейшего развития оптической науки в трудах деятелей эпохи Возрождения, таких как Альберти, Брунеллески и Леонардо да Винчи.

Крупнейшим сочинением по оптике, написанным в Средние века, был трактат «Сокровище оптики» Ибн ал-Хайсама, где он критикует представление о зрительных лучах и исходит из того, что лучи света распространяются от источника света. На основе изучения анатомии глаза ученый рассматривает механизм зрения, зрительное восприятие и обманы зрения. Кроме «Книги оптики», он написал еще целый ряд оптических трактатов, в частности «Книгу о зажигательной сфере», лежащую в основе теории линз, и два трактата о зажигательных параболических зеркалах.

Ибн ал-Хайсам написал «Книгу о форме затмений», содержащую теорию *камеры-обскуры*. Последняя, являясь фактическим предшественником проекционного волшебного фонаря и фотоаппарата, представляла собой ящик с небольшим входным отверстием, на задней стенке которого за счет дифракционных

эффектов формировались действительные уменьшенные перевернутые изображения. Камера-обскура была излюбленным оптическим инструментом средних веков. В долинзовую эпоху ею пользовались не только ученые, но даже художники и владельцы модных салонов.

Большое влияние на средневековые оптические исследования оказал написанный в 1271 г. десяти томный трактат польского физика Вителло «Оптика», в котором описаны многочисленные опыты и наблюдения за природными оптическими явлениями и разработаны важные для художников вопросы перспективы. Являясь в большой степени удачной компиляцией работ Эвклида, Птолемея и Альхазена, трактат начиная с XV в. на долгие годы стал основой университетских оптических курсов.



**Ибн ал-Хайсам** — латинизированное имя **Альхазен** (965–1039). Родился в Басре. Жил и работал в Каире. Благодаря своим выдающимся способностям занимал на родине должность визира, однако любовь к науке побудила его оставить службу и заняться только исследованиями. Ибн ал-Хайсам был выдающимся физиком, математиком, астрономом, врачом и философом-комментатором Аристотеля. Он является автором фундаментального трактата «Сокровище оптики», состоящего из семи книг, из которых три посвящены глазу и зрению. Внес существенные уточнения в закон отражения, проверявшийся им на зеркалах, сделанных из железа. Ибн ал-Хайсам установил, что падающий на поверхность зеркала луч, нормаль к этой поверхности и луч отраженный лежат в одной плоскости. Опроверг теорию окулярных пучков, решил задачу об отражении от выпуклых зеркал. Открыл возможность получения действительных изображений при помощи зеркал и преломляющих сред, описал действие «прозрачных сфер» из стекла и горного хрусталя и шаровых сегментов, названных впоследствии его именем.

К сожалению, фундаментальная работа Вителло более 150 лет практически не была известна, что, конечно, сказалось на темпах развития оптических исследований в Европе. При этом появился значительный разрыв между практикой ремесленников-стеклоделов и теорией университетских профессоров-оптиков. В результате самое важное открытие *физиологической оптики* — возможность коррекции зрения при помощи очков — было сделано в XIII в. не на университетской кафедре, а в стеклодельной мастерской. Оторванностью чистой науки от практики объясняется тот факт, что ученые-оптики даже не рекомендовали ношение очков: «Основная цель зрения — знать правду, линзы для очков дают возможность видеть предметы большими или меньшими, чем они есть в действительности... иной раз перевернутыми, деформированными и ошибочными, следовательно, они не дают возможности видеть действительность».

Среди наиболее известных работ по оптике того времени следует указать на труды Роджера Бэкона, много внимания уделявшего преломлению и отражению в линзах и зеркалах. Он тщательно исследовал и усовершенствовал работу волшебного фонаря (камеры-обскуры), а за изобретение (скорее пропагандирование) очков был заключен в тюрьму, так как считалось, что это творение дьявола.

Однако остановить развитие очкового ремесла было невозможно, и начиная с конца XV в. во многом благодаря трудам Леонардо да Винчи происходит резкий сдвиг оптики в практическую область.

После работ Леонардо долгое время не было сколько-нибудь систематических исследований по оптике. В этой области знаний царил такая путаница, что итальянский математик и физик Мавролик побоялся опубликовать свое оригинальное исследование по оптике. В его первой части были рассмотрены вопросы геометрической оптики, а во второй — преломление света, явление радуги, строение глаза, механизм зрения и принцип действия очков. Полагая, что хрусталик глаза работает как линза, он в то же время не смог признать, что изображение получается перевернутым, и серией ухищрений пытался доказать, что изображение будет прямым.



**Леонардо да Винчи** (1452–1512) — великий итальянский художник, скульптор, мыслитель, сочетавший в себе глубокого теоретика и талантливейшего практика. Он оставил громадный след в развитии всех областей знаний, которыми занимался, в том числе в оптике. В его «Атлантическом кодексе» и других манускриптах были поставлены и решены задачи построения хода лучей в глазе и в камере-обскуре, рассмотрены вопросы перспективы, аккомодации и адаптации глаза, дано научное объяснение действия линз, зеркал и очков. В его трудах встречаются вопросы аберраций (искажений), приведены результаты первых фотометрических исследований по сравнению освещенностей, даваемых несколькими разнесенными свечами. Им была создана уникальная модель человеческого глаза с роговой оболочкой, хрусталиком, зрачком и стекловидным телом. Леонардо описал технологии изготовления линз и зеркал и даже предложил конструкцию станка для шлифовки вогнутых сферических и параболических зеркал.

Следующий шаг был сделан итальянцем Порта, который усовершенствовал камеру-обскуру, добавив собирающую линзу, тем самым выдвинув идею проекционного фонаря. Вскоре он делает попытку построения хода лучей в линзах и даже описывает оптическую систему телескопа, утверждая, что ему первым удалось видеть на большом расстоянии мелкие предметы. Однако никаких доказательств тому не сохранилось.

Первая *зрительная труба* появилась на рубеже XVI и XVII вв. в Голландии, о чем сообщил в 1608 г. очковый дел мастер Липперсгейм. Известие о его изобретении побудило Галилея через год в Падуе построить свой телескоп и тем самым положить начало современной астрономии. Прогресс в развитии всех прикладных оптических исследований в значительной мере связан с его именем.



**Галилео Галилей** (1564–1642) — великий итальянский физик и астроном, один из основателей точного естествознания. В 1581 г. поступил в Пизанский университет, где изучал медицину. Но, увлекшись геометрией и механикой, оставил университет и уехал во Флоренцию, где четыре года самостоятельно изучал математику. Несмотря на то что Галилея нельзя считать создателем первого телескопа, он, несомненно, являлся первым, кто создал этот инструмент на научной основе. Астрономические наблюдения принесли ему большую славу. Уже при дворе герцога Тосканского он продолжает свои исследования, открывая фазы Венеры, пятна на Солнце и его вращение. *Микроскоп* он создал, подбирая соответствующее расстояние между линзами, при котором оказывались увеличенными не удаленные, а близкие предметы. О наблюдении насекомых имеется запись от 1614 г., а в 1624 г. он посылает сконструированный им микроскоп Федерико Чези с описанием наводки на резкость. От долгих прямых наблюдений Солнца (светофильтры придумали только в 1617 г.) Галилей ослеп.

В каком-то смысле все сделанное до него в науке можно считать всего лишь предьсторией современного естествознания. «Звездный вестник» Галилея послужил могучим стимулом к созданию разнообразных конструкций телескопов и других оптических приборов. Путем логических рассуждений он пришел к выводу о необходимости сочетания выпуклой и вогнутой линз для получения некоего эффекта увеличения. Галилей первым понял, что качество изготовления линз для очков и для зрительных труб должно быть совершенно различным, усовершенствовал технологию изготовления линз, что позволило ему создать инструмент, увеличивающий в 32 раза, в то время как все существовавшие до него зрительные трубы давали увеличение лишь в 3–6 раз.

После смерти Галилея его сменил Торричелли, которому суждено было открыть секрет контроля качества обработки линз. В первой половине XVII в. еще не было известно явление интерференции, поэтому результат работы шлифовальщиков целиком зависел от случая. Хотя Торричелли так и не открыл свой секрет и не опубликовал ни одной работы по оптике, полагают, что он заметил *интерференционные кольца*, возникающие во время притирки линзы с поверхностью формы, и использовал их для оценки качества обрабатываемой поверхности. Заметим, что когда умер Торричелли, официальными открывателями «колец Ньютона» Роберту Гуку и Исааку Ньютону было 12 и 5 лет соответственно.

Фундамент современной научной оптики линз заложил выдающийся немецкий астроном Кеплер. Точный закон преломления при нем еще не был известен, и все же он придумал такие системы линз для телескопов, что даже в наши дни кеплеровский окуляр находит применение в оптических приборах. Помимо интенсивных занятий астрономией, он изобретает зрительную трубу, состоящую из двух положительных линз (телескоп Кеплера) с большим полем зрения и промежуточным перевернутым действительным изображением, в плоскости которого можно располагать визирующее устройство. Это превратило телескоп из инструмента наблюдательного в инструмент измерительный.



**Иоганн Кеплер (1571–1630)** — немецкий астроном и оптик, один из творцов небесной механики. Окончил Тюбингенский университет. В 1600 г. переехал в Прагу к датскому астроному Тихо Браге, после смерти которого стал математиком при дворе императора Рудольфа II. Оставил работы в области астрономии, механики, оптики, математики. Его астрономические расчеты и три знаменитых закона стали основой для динамического объяснения, разработанного позднее Ньютоном. В 1604 г. написал «Дополнение к Вителлию», в котором четко описал перевернутое изображение на сетчатке глаза. Здесь же привел формулу, связывающую фокусное расстояние линзы с положениями предмета и его изображения на оптической оси, и ввел ряд новых терминов (сходимость и расходимость пучков, оптическая ось, фокус системы).

Главным трудом Кеплера по оптике стала «Диоптрика», написанная в 1610 г. всего за два месяца под впечатлением открытий Галилея. В ней дано четкое определение и классификация линз, выявлены закономерности в положениях предмета и изображения при одной и двух линзах, обоснована схема своего телескопа. Им были проанализированы сферическая абберрация и дифракционирование объектива, а также рассмотрена схема трехлинзовой трубы с прямым изображением. Кеплер впервые применил камеру-обскуру для наблюдения солнечного

затмения, установив, что форма изображения на стенке камеры не зависит от формы отверстия. В «Диоптрике» Кеплера содержатся начала анализа и синтеза оптических систем, а также все основные понятия геометрической оптики.

В XVII в. произошла поистине революция в оптике: появились телескоп и микроскоп, были изобретены совершенные рецепты варки стекла, резко поднялось мастерство шлифовальщиков и открылась возможность контроля формы обрабатываемых поверхностей. Однако настоящий научный аппарат для расчета оптических систем мог быть создан только на основе точной формулировки закона преломления. Честь его открытия по праву делят голландец Снеллиус и француз Декарт.

Уже со второй половины XVII в. в научный оборот входят понятия аберраций, диафрагм и зрачков. Возникают методы габаритных и энергетических расчетов. Из общего оптического знания начинает выделяться как отдельная наука прикладная оптика.

К середине XVII в. накопились факты и наблюдения, выходящие за рамки геометрической оптики. Впервые высказанная Пифагором, оформилась корпускулярная теория, согласно которой свет есть поток каких-то частиц, испускаемых светящимся телом. С другой стороны, последователи Аристотеля и Декарта рассматривали свет как распространяющееся в пространстве (в среде) действие или движение.

Одним из первых ученых, подтолкнувшим научную мысль к волновой теории, был чешский физик Марци. В 1648 г. в ходе опытов с призмами он открыл эффект разложения белого света на цвета, то есть явление дисперсии. Другим указанием на волновую природу света стало явление, подробно описанное итальянцем Гримальди. Он заметил, что если на пути узкого пучка световых лучей поставить предмет, то на экране, поставленном сзади, не получается резкой тени. Края тени размыты, кроме того, вдоль тени появляются цветные полосы. Открытое явление он назвал *дифракцией*, но объяснить правильно не сумел.

Гримальди занимался важнейшим вопросом того времени: является ли свет субстанцией или свойством. Его вывод совпал с выводом Аристотеля: свет — это свойство распространяющегося светового флюида. Когда свет встречается с препятствием, то оно вызывает волны этого флюида. Гримальди приписал наблюдаемые им явления волновым колебаниям, подобным всем хорошо знакомой ряби на воде или звуковым колебаниям, причем впервые предположил, что различным цветам соответствуют различные длины волн, подобно музыкальным звукам.

Высказанная в античности мысль Герона Александрийского о минимальных длинах световых лучей, распространяющихся из точки в точку, обрела строгую математическую форму во второй половине XVII в. благодаря французу Ферма, оставившему заметный след в оптике. Он установил основной принцип геометрической оптики (*принцип Ферма*) — свет распространяется между двумя точками по наикратчайшему пути. Ферма вывел законы отражения и преломления, исходя из постулата: «Природа действует наиболее легкими и доступными способами».

Вопрос о *скорости света* был актуален и для корпускулярной, и волновой теорий. Впервые скорость света была определена датским астрономом Ремером в 1676 г. До этого времени среди ученых существовало два противоположных мнения. Одни полагали, что скорость света бесконечно велика. Другие же счита-

ли ее хотя и очень большой, но тем не менее конечной. Ремер подтвердил второе мнение. Он правильно связал нерегулярности во времени затмений спутников Юпитера со временем, которое необходимо свету для прохождения по диаметру орбиты Земли вокруг Солнца. Ремер впервые сделал вывод о конечной скорости распространения света и определил ее величину. По его подсчетам, скорость света получилась равной около 225 000 км/с.

Распространение света в природных кристаллах наблюдалось на протяжении многих веков. В отличие от всех жидкостей и аморфного стекла, кристаллы представляют собой анизотропную среду, физические свойства которой неодинаковы в различных направлениях. В 1669 г. датский ученый Бартолиниус обнаружил, что если смотреть на какой-либо предмет через кристалл исландского шпата, то видно не одно, а два изображения, смещенных друг относительно друга. Бартолиниус не только открыл *двулучепреломление*, но и дал его полное описание, положив начало *кристаллооптике*. Затем это явление исследовал Гюйгенс и попытался дать ему объяснение с точки зрения волновой теории света.



**Христиан Гюйгенс (1629–1695)** — голландский физик, механик, математик и астроном. Учился в университетах Лейдена и Бреда. В 1665–1681 гг. жил в Париже, был избран членом Парижской Академии наук, с 1681 г. — снова в Гааге. Физические исследования в области механики, оптики, молекулярной физики. В 1678 г. в мемуарах, представленных в Парижскую Академию наук, разработал волновую теорию света (опубликована в «Трактате о свете» в 1690 г.). Объясняя механизм распространения света, выдвинул известный принцип, названный впоследствии его именем. Изучал также двулучепреломление, с большой точностью измерил геометрические характеристики исландского шпата, в котором наблюдалось это явление, и обнаружил его в кристаллах кварца. Ввел понятие «ось кристалла». Открыл в 1678 г. поляризацию света. Работал над усовершенствованием телескопов и микроскопов, сконструировал использующийся поныне окуляр Гюйгенса.

В ставшем знаменитом «Трактате о свете», вышедшем в 1690 г., Гюйгенс изложил свою волновую теорию света (световые возбуждения являются упругими импульсами в эфире), исследования по кристаллооптике, а также первое описание явления *поляризации* света. Здесь же сформулирован знаменитый *принцип Гюйгенса*, согласно которому каждый элемент волны считается центром вторичных волн и прямолинейное распространение света является следствием огибающей вторичных волн, как в прямом, так и в отраженном свете. Для объяснения двулучепреломления Гюйгенс ввел понятие сфероидных волн, а также математически показал, каким образом волновая теория света объясняет дифракцию и цвета тонких пленок. Однако в XVII в. победил авторитет Ньютона, и волновая теория должна была ожидать своего часа более чем сто лет.

Изучая цвета мыльных пленок и тонких пластинок из слюды, английский физик Гук обнаружил, что эти цвета зависят от толщины пленки или пластинки. Гук полагал, что свет — это колебательные движения, распространяющиеся в эфире. Более того, он прозорливо считал, что эти колебания являются поперечными. Явление *интерференции* света в тонких пленках Гук объяснял тем, что от двух поверхностей тонкой, например мыльной, пленки происходит отражение световых волн, которые, попадая в глаз, производят ощущение различных цветов. Од-

нако он не связывал цвет с частотой колебаний или с длиной волны, поэтому не смог разработать теорию интерференции. Независимо от Гримальди в 1672 г. Гук проделал ряд опытов и описал явление дифракции с точки зрения колебаний эфира. Вообще, оптические дискуссии конца XVII в. проходили под знаком соперничества волновой теории Гука и корпускулярной теории сэра Исаака Ньютона.

Изучая уже известное явление дисперсии, Ньютон пришел к заключению, что белый свет является сложным и представляет собой сумму простых цветных лучей. По Ньютону призма сортирует световые частицы, отклоняя их на разный угол в соответствии с их цветностью. Что касается дифракции, то захождение лучей в область геометрической тени объяснялось притяжением между частицами, из которых состоит экран, и «атомами света».



**Исаак Ньютон** (1643–1727) — выдающийся английский ученый, заложивший основы современного естествознания, президент Лондонского королевского общества с 1703 г. Окончил Кембриджский университет (1665). В 1669–1701 гг. возглавлял в нем кафедру. С 1695 г. — смотритель, с 1699 г. — директор Монетного двора. Работы относятся к механике, оптике, астрономии, математике. Создал огромный труд «Математические начала натуральной философии», изданный в 1687 г. Оптические исследования изложил в «Оптике» (1704). В 1666 г. при помощи трехгранной стеклянной призмы разложил солнечный свет на семь цветов (в спектр), а затем соединил их снова, получив исходный белый свет. Открыл хроматическую аберрацию и, пытаясь ее избежать, сконструировал отражательный телескоп-рефлектор оригинальной системы. Исследовал интерференцию и дифракцию света, изучая цвета тонких пленок, открыл так называемые кольца Ньютона, установил закономерности в их размещении, высказал мысль о периодичности светового процесса. Пытался объяснить двулучепреломление и близко подошел к открытию явления поляризации. Свет считал потоком корпускул, однако на разных этапах рассматривал возможность существования и волновых свойств света, в частности, в 1675 г. предпринял попытку создать компромиссную корпускулярно-волновую теорию света.

Ньютон сделал важный шаг в исследовании интерференции света, изучая темные и светлые кольца, которые видны при освещении монохроматическим светом зазора между линзой и пластинкой. Это так называемые *кольца Ньютона*. Для их объяснения пришлось предположить, что в одних местах световые частицы испытывают «приступы легкого отражения», а в других — «приступы легкого преломления».

Почти весь XVIII в. в оптике доминировала корпускулярная теория Ньютона. Наиболее значительные оптические достижения были связаны с изучением световой энергетики — в качестве самостоятельной науки оформилась *фотометрия*, в первую очередь благодаря работам Бугера и Ламберта. Последний в своем классическом труде 1760 г. фактически установил основные понятия фотометрии (сила света, яркость и освещенность) и ряд фотометрических закономерностей, в частности, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния и прямо пропорциональна синусу угла, образованного лучами света с освещаемой поверхностью. Там же был помещен его закон поглощения света средой, первоначально установленный в 1729 г. Бугером.

В честь Иоганна Ламберга источники света и рассеивающие поверхности, у которых яркость одинакова по всем направлениям (идеально рассеивающие), называли *ламбертовскими*.

К этому времени относятся первые научные исследования по оптике в России. Ломоносов не только создавал отечественные рецепты варки цветных и прозрачных стекол, но также вел активные прикладные работы: разрабатывал конструкции зрительных труб, телескопов, микроскопов, предлагал не имеющие мировых аналогов рефлекторы для морских маяков и т. п. В отличие от большинства ученых-современников, он был последовательным приверженцем волновой теории света.

Значительные успехи в оптике XVIII в. связаны с именем постоянно работавшего в России Эйлера. Помимо собственно оптических достижений (формула для показателя преломления среды, формула двояковыпуклой линзы), его теория функций комплексного переменного стала впоследствии фундаментом математического аппарата волновой оптики. Сторонник теории эфира, Эйлер полагал, что цвет тел зависит от частоты колебаний светового луча, что максимальная длина волны соответствует красным лучам, а минимальная — фиолетовым. Считается, что Эйлер первым записал уравнение плоской гармонической волны.

Начиная с XIX в. взгляды ученых-оптиков постепенно склоняются в пользу волновой теории света. Уже известные кольца Ньютона, цвета тонких пленок и ряд эффектов, говорящих о неаддитивности освещенности от нескольких источников, весьма смутно объяснялись корпускулярной теорией. В первую очередь благодаря работам Юнга появляется теория *интерференции* как явления перераспределения световой энергии в пространстве. При соблюдении некоторых условий (когерентность источников) суммарная интенсивность в данной точке может оказаться вдвое больше суммы интенсивностей от двух одинаковых источников света, причем в соседней точке она может оказаться нулевой. Ставший классическим интерференционный *опыт Юнга* с двумя щелями позволил впервые оценить длину световой волны.



**Томас Юнг (1773–1829)** — английский ученый, один из создателей волновой оптики, член королевского научного общества (1794), в 1802–1829 гг. — его секретарь. Учился в Лондонском, Эдинбургском и Геттингенском университетах, где сначала изучал медицину, но потом увлекся физикой, в частности оптикой и акустикой. В последние годы жизни занимался составлением египетского словаря. Работы относятся к оптике, акустике, механике, математике, астрономии, геофизике, филологии. Юнг впервые объяснил явление аккомодации глаза изменением кривизны хрусталика. В трактате «Опыты и проблемы по звуку и свету» выступил в защиту волновой теории света и предложил принцип суперпозиции волн. В 1801 г. первым объяснил явление интерференции света, ввел сам этот термин. Выполнил первый демонстрационный эксперимент по наблюдению интерференции света, получив два когерентных источника света. Измерил длины волн разных цветов, получив для красного света значение 0,7 мкм, для фиолетового — 0,42 мкм. Высказал мысль, что свет и лучистая теплота отличаются друг от друга только длиной волны, выдвинул идею поперечности световых волн.

Настоящий триумф волновой теории света наступил после серии работ Френеля, в которых дополненные интерференцией вторичных волн положения Гюйгенса (принцип Гюйгенса—Френеля) позволили развить первую феноменологическую теорию дифракции. Метод разбиения волнового фронта вторичных источников на полуволновые зоны (*зоны Френеля*) оказался весьма продуктивным при анализе картин дифракции от щели, круглого отверстия, резкого края и т. п. Академик Пуассон указал, что по Френелю в центре геометрической тени непрозрачного диска должно наблюдаться светлое пятно (*пятно Пуассона*), что казалось абсурдным. Однако вскоре другой академик — Араго — поставил соответствующий опыт, и теория дифракции Френеля полностью подтвердилась.



**Огюст Жан Френель** (1788–1827) — французский физик, член Парижской академии наук и Лондонского королевского общества. Окончил Политехническую школу и Школу мостов и дорог в Париже. Работал инженером по ремонту и строительству дорог в различных департаментах Франции, с 1817 г. — в Политехнической школе. Дополнил известный принцип Гюйгенса, введя представление о когерентности элементарных волн и их интерференции (принцип Гюйгенса—Френеля). Исходя из этого разработал теорию дифракции света. Выполнил классические опыты по интерференции света с *бизеркалами* и *би-призмами*. Исследовал *интерференцию поляризованных лучей*. Открыл в 1823 г. эллиптическую и круговую поляризации света. Установил законы отражения и преломления света на плоской поверхности раздела двух сред (формулы Френеля). Исследовал проблему о влиянии движения Земли на оптические явления. Высказал мысль о частичном увлечении эфира и вывел коэффициент увлечения света движущимися телами. Однако эти его выводы получили свое объяснение лишь в рамках теории относительности.

Поляризационные исследования Френеля доказали поперечность световых волн, формулами Френеля для отраженной и преломленной волн пользуются и сегодня, а изобретенная им плоская линза Френеля является обязательным элементом современных проекционных систем.

Вопрос об ориентации поперечных колебаний эфира впервые исследовал Маллюс, который и ввел понятие *плоскости поляризации*, содержащей световой луч и вектор световых колебаний в состоянии линейной поляризации. Он установил, что при отражении, даже если падающий свет являлся естественным, отраженный луч может стать поляризованным. Кроме того, он открыл закон, по которому изменяется интенсивность линейно поляризованного света при развороте поляризатора (*закон Маллюса*).

Следующий важный шаг в изучении поляризации сделал шотландец Брюстер, который открыл угол полной поляризации при отражении (угол Брюстера) и установил существование, кроме линейной, круговой и эллиптической поляризаций. Подтверждением поляризационных гипотез стало открытие Брюстером двулучепреломления в стекле, подвергнутом одноосному сжатию (*искусственная анизотропия*).

На протяжении веков многие оптические исследования инициировали развитие фундаментальных физических теорий. Яркий пример тому — наука об атомарном строении вещества, по сути появившаяся после открытия *линейчатых спектров*.

Ньютон исследовал спектр Солнца. Другие раскаленные тела дают аналогичные сплошные спектры. Однако известно, что некоторые вещества, будучи нагретыми в пламени, окрашивают его в какой-либо цвет, то есть демонстрируют только часть спектра (медный паяльник нагревается на газовой горелке и делает ее пламя зеленым). В 1802 г. Волластон заметил дискретные черные линии в спектре солнечного света и, таким образом, первым наблюдал то, что мы теперь называем *фраунгоферовыми линиями*.

Открытие линейчатых спектров излучения было сделано, по-видимому, Гершелем в 1822 г. Он вносил соли металлов в пламя и наблюдал с помощью призмы возникающие при этом спектры. Позднее Фраунгофер заметил, что положение желтой линии, испускаемой поваренной солью, совпадает с положением одной из увиденных им темных линий в солнечном спектре.

Помимо формирования начал спектроскопии Волластон и Гершель внесли заметный вклад в расширение диапазона оптических частот для невидимой части спектра: первый исследовал *ультрафиолетовые*, а второй — *инфракрасные* лучи.

Исследования особенностей дифракции на периодических (регулярных) структурах привели к открытию нового способа разложения света на спектральные компоненты. Наряду с призмными диспергирующими устройствами появились, в первую очередь благодаря теоретическим и практическим работам Фраунгофера, приборы с *дифракционными решетками*. Они позволили резко улучшить спектральное разрешение и начать систематическое изучение сплошных и линейчатых спектров.

Измеренное астрономом Ремером значение скорости света было огромным, но только в середине XIX в. появились технические возможности ее измерения в земных условиях. Впервые это удалось сделать Физо в 1849 г. при помощи быстро вращающегося зубчатого колеса. Чуть позже Физо установил влияние скорости движения среды на скорость света в ней, вслед за Френелем положив начало *оптике движущихся сред*.

Однако важно было не только уточнить саму величину скорости света, но и ответить на принципиально важный вопрос о том, где эта скорость больше: в более или менее плотных средах? Корпускулярная теория Ньютона предсказывала, что большему преломлению света в среде должна соответствовать большая скорость. Волновые же представления со времен Гюйгенса строились на обратном соотношении: чем больше показатель преломления среды, тем меньше в ней скорость света. Блестящие опыты Фуко с вращающимися многогранными зеркальными призмами доказали, что в воде скорость света почти на четверть меньше, чем в воздухе. Сторонники волновой теории света торжествовали. Само значение скорости света в воздухе Фуко определил очень точно: оно составило 298 000 км/с.

Представление о световых волнах как поперечных колебаниях эфира, этого «неосоздаваемого флюида», несколько не помогало понять, что именно колеблется в световых волнах. Только в 1845 г. Фарадей впервые решил исследовать связь между светом и каким-либо другим физическим явлением, например магнетизмом. Пропуская поляризованный пучок света через свинцовое стекло, помещен-

ное между полюсами электромагнита, он наблюдал поворот плоскости поляризации на значительный угол. Тем самым он не только положил начало *магнитооптике*, но и убедительно доказал воздействие магнитного поля на световые колебания.

Следующий, поистине великий шаг в понимании природы света был сделан Максвеллом почти через 20 лет, когда составленные благодаря его математическому гению дифференциальные уравнения для напряженностей электрического и магнитного векторов дали в качестве решения *электромагнитные волны*, распространяющиеся в свободном пространстве с конечной скоростью. Последняя в теории Максвелла оказалась комбинацией размерных констант, вычисления которых дали значение, совпавшее с измерениями скорости света в опытах Физо и Фуко.



**Джеймс Клерк Максвелл** (1831–1879) — английский физик, член Эдинбургского и Лондонского королевских обществ. Учился в Эдинбурге и Кембридже. В 1856–1860 гг. — профессор Абердинского университета, в 1860–1865 гг. — Лондонского королевского колледжа, с 1871 г. — первый профессор экспериментальной физики в Кембридже. Работы посвящены электродинамике, молекулярной физике, общей статистике, оптике, механике, теории упругости.

Наиболее весомый вклад Максвелл сделал в молекулярную физику и электродинамику. В кинетической теории газов, одним из основателей которой является, установил статистический закон, описывающий распределение молекул газа по скоростям (распределение Максвелла). Самым большим научным достижением Максвелла является созданная им в 1860-х гг. теория электромагнитного поля, которую он сформулировал в виде системы нескольких уравнений (*уравнения Максвелла*), предсказав новый важный эффект существования в свободном пространстве электромагнитного излучения (электромагнитных волн) и его распространение со скоростью света. Последнее дало ему основание считать свет одним из видов электромагнитного излучения и раскрыть связь между оптическими и электромагнитными явлениями.

Экспериментальное подтверждение теории Максвелла было получено Герцем, который создал генератор электромагнитных колебаний с  $\lambda = 50$  см. Серией блестящих опытов он доказал тождественность их свойств световым колебаниям (отражение, преломление, интерференция, дифракция, поляризация).

Исследования закономерностей расположения спектральных линий различных элементов, а также попытки количественно описать характеристики самих линий (полуширина, форма огибающей, тонкая структура и т. п.) фактически завершили историю традиционной волновой оптики. Электронная теория дисперсии Лоренца стала вершиной достижений классической физики в области излучения. Она смогла объяснить естественную ширину спектральной линии, эффекты ударного и доплеровского уширения, позволила подвести количественные критерии под понятия когерентности и монохроматичности, наконец описать интерференционные и дифракционные явления на языке затухающих волн и волновых цугов.

Однако, начиная с работ Бальмера, Ритца и Англстрема, спектроскопические данные все более указывали на квантовый характер взаимодействия света с веществом. Еще не родилась теория Планка с ее парадоксальной связью энергия–частота, но уже стало ясно, что спектральные серии не укладываются в простые последовательности кратных гармоник. На новом витке развития физики

начинается возврат к корпускулярным идеям. И этот очередной рубеж преодолевается во многом благодаря исследованиям по квантовой оптике и выяснению механизмов взаимодействия света с веществом.

Заканчивая исторический обзор развития оптической науки, хочется подчеркнуть, что сила и актуальность оптики заключается не только в основательном фундаментальном характере оптического знания, но также в динамичном и эффективном проникновении оптики практически во все отрасли современных информационных технологий.

# Часть 1

**Свет:  
волны, лучи,  
энергия**

# ГЛАВА 1 Свет как электромагнитные волны

По современным физическим воззрениям свет представляет собой электромагнитные колебания определенного частотного диапазона. Поэтому математическое описание оптических явлений строится на основе базовых уравнений электромагнетизма — уравнений Максвелла. В рамках электромагнитной теории света его распространение рассматривается как волновой процесс. С помощью волновой теории мы можем решать задачи о распространении света как в однородной среде, так и через любую оптическую систему, то есть через совокупность различных сред, ограниченных теми или иными поверхностями или диафрагмами.

## 1.1. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Теория Максвелла представляет собой феноменологическую теорию электромагнитного поля. Она устанавливает связь между четырьмя основными величинами: напряженностями электрического и магнитного полей ( $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) и индукциями ( $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ ). Электрические и магнитные свойства среды характеризуются тремя величинами: диэлектрической проницаемостью ( $\epsilon$ ), магнитной проницаемостью ( $\mu$ ) и удельной электрической проводимостью ( $\sigma$ ). Обычно предполагается, что эти параметры среды известны из опыта.

Теория Максвелла — макроскопическая теория. В ней рассматриваются поля макроскопических зарядов и токов, то есть таких систем покоящихся или движущихся зарядов, пространственная протяженность которых намного больше размеров атомов и молекул.

В основе теории лежат четыре уравнения, которые могут быть представлены в двух формах: интегральной и дифференциальной. Полная система *уравнений Максвелла в дифференциальной форме* имеет вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

Первое уравнение является обобщением закона электромагнитной индукции. Это уравнение означает, что с переменным магнитным полем связано индуцированное вихревое электрическое поле. Причем это электрическое поле существует, независимо от того, находится в нем проводник или нет. Знак «минус» в правой части уравнения (1.1) означает, что вихревое электрическое поле «стремится скомпенсировать» изменения, вызванные увеличением или уменьшением магнитного поля (правило Ленца).

Из второго уравнения Максвелла вытекает, что вихревое магнитное поле создается, прежде всего, токами ( $\mathbf{j}$  — плотность токов проводимости), но даже в отсутствие тока электрических зарядов индуцированное магнитное поле возникает при наличии переменного электрического поля.

Третье уравнение является обобщением электростатической теоремы Гаусса. Оно означает, что электрическое поле создается зарядами, на которых начинаются и заканчиваются силовые линии поля ( $\rho$  — объемная плотность свободных зарядов).

Наконец, четвертое уравнение выражает факт отсутствия магнитных зарядов. Из него вытекает, что силовые линии магнитного поля замкнуты или уходят на бесконечность.

Величины, входящие в уравнения Максвелла, связаны дополнительными соотношениями (*материальными уравнениями*), которые учитывают реакцию среды на внешнее электромагнитное поле. Для изотропной несегнетоэлектрической и неферромагнитной<sup>1</sup> среды эти уравнения имеют вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.7)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные,  $\sigma$  — удельная проводимость. Первые два материальные уравнения связывают напряженности и индукции электрического и магнитного полей, третье представляет собой закон Ома в дифференциальной форме.

Оптические среды, как правило, немагнитны, то есть для них  $\mu = 1$ . С учетом этого обстоятельства на основании материальных уравнений (1.5) и (1.7) можно провести классификацию возможных типов оптических сред, представив ее в виде табл. 1.1.

Для каждого типа сред уравнения Максвелла принимают специфический вид. Соответственно, для каждого из них существуют специфические решения, учитывающие особенности конкретной оптической среды, в которой распространяется электромагнитное излучение.

<sup>1</sup> Сегнетоэлектрики и ферромагнетики — вещества, обладающие электрическим и магнитным гистерезисом, то есть своеобразной «памятью». Их свойства не определяются полностью условиями в данный момент времени, а зависят от предыстории.

Таблица 1.1. Типы оптических сред

Параметр	Тип среды
$\sigma = 0$	Диэлектрическая
$\sigma \neq 0$	Проводящая
$\epsilon = \text{const}$	Однородная, изотропная
$\epsilon = \epsilon(x, y, z)$	Неоднородная
$\epsilon = \epsilon(\text{направления})$	Анизотропная
$\epsilon = \epsilon(E)$	Нелинейная

Для оптики типичной является ситуация наличия границ раздела сред, то есть поверхностей, на которых значения параметров  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  изменяются скачком. Строго говоря, производные, входящие в уравнения (1.1)–(1.4), в точках, принадлежащих этим поверхностям, не определены. Для анализа процесса распространения оптического излучения через границу сред необходимо пользоваться *граничными условиями для электромагнитного поля*. Они могут быть получены из уравнения Максвелла в предположении, что на границе существует тонкий переходный слой, в пределах которого параметры сред изменяются непрерывно. Если толщину переходного слоя устремить к нулю, можно смоделировать резкое изменение характеристик среды на пути распространения электромагнитного излучения.

Граничные условия связывают тангенциальные ( $\tau$ ) и нормальные ( $n$ ) проекции полевых векторов и в отсутствии на границе сред поверхностных токов и зарядов могут быть записаны так:

$$\begin{cases} E_{2\tau} = E_{1\tau}, \\ H_{2\tau} = H_{1\tau}, \\ D_{2n} = D_{1n}, \\ B_{2n} = B_{1n}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Таким образом, на границе раздела остаются непрерывными тангенциальные составляющие векторов напряженностей и нормальные составляющие векторов индукции электрических и магнитных полей.

При заданных значениях  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  и известных пространственных распределениях  $\mathbf{E}(x, y, z)$  и  $\mathbf{H}(x, y, z)$  в начальный момент времени  $t = 0$  система дифференциальных уравнений Максвелла имеет единственное решение.

## 1.2. Волновое уравнение. Скорость электромагнитных волн

Запишем первые два уравнения Максвелла в дифференциальной форме для однородного и изотропного диэлектрика, не содержащего свободных зарядов.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Продифференцируем второе уравнение по времени ( $t$ ):

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Подставляя  $\partial \mathbf{H} / \partial t$  из первого уравнения, получим:

$$-\frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Используя известное тождество векторного анализа  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$ , а также то, что по третьему уравнению Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , окончательно находим

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.10)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа. Аналогичное уравнение получается и для напряженности магнитного  $\varepsilon_0 \mu_0$  поля  $\mathbf{H}$ .

$$\Delta \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Уравнение (1.10) называется *волновым уравнением*. Из него вытекает факт существования электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}}. \quad (1.11)$$

В вакууме  $\varepsilon = \mu = 1$ , следовательно, скорость электромагнитных волн в вакууме равна  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$  м/с. Этот результат практически совпадает с экспериментально полученным значением для скорости света. В настоящее время для величины скорости света в вакууме принято стандартизованное значение  $c = 299\,792\,456$  м/с.

Отношение скорости света в вакууме к скорости света в веществе называется *показателем преломления*. Из теории Максвелла показатель преломления можно определить с помощью значений диэлектрической и магнитной проницаемости среды:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (1.12)$$

То есть для немагнитных сред  $n = \sqrt{\varepsilon}$ .

В табл. 1.2 приведены экспериментальные и теоретические значения показателей преломления некоторых веществ при нормальных условиях<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Нормальными называются физические условия, определяемые давлением  $P = 101\,325$  Па (нормальная атмосфера) и температурой  $T = 273,15$  К ( $0^\circ\text{C}$ ).

Как видно, равенство  $n$  и  $\sqrt{\epsilon}$  практически выполняется для газов; в меньшей степени для жидких углеводородов; а для воды, спиртов и большинства других твердых и жидких тел наблюдаются значительные отклонения от этого соотношения. Например, у воды диэлектрическая проницаемость равна 81, а показатель преломления — 1,33. Причины подобных расхождений обусловлены сверхвысокой частотой оптических колебаний ( $\sim 10^{14}$  Гц) и подробно обсуждаются в главе 14.

**Таблица 1.2.** Показатели преломления и диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	$n$	$\sqrt{\epsilon}$	Вещество	$n$	$\sqrt{\epsilon}$
Воздух	1,000292	1,000302	Толуол	1,499	1,549
Азот	1,000299	1,000307	Бензол	1,501	1,511
Кислород	1,000270	1,000273	Сероуглерод	1,629	1,626
Водород	1,000139	1,000139	Парафин	1,422	1,405
Углекислота	1,000499	1,000485	Этиловый спирт	1,36	5,1
Окись углерода	1,000335	1,000346	Метиловый спирт	1,34	5,7
Аммиак	1,000385	1,000385	Вода	1,33	9,0

### 1.3. Плоские и сферические волны

Найдем решения волнового уравнения (1.10) для разных случаев распространения волны. Предположим для простоты, что электрическое поле зависит только от одной координаты, например  $z$ , и времени. В этом случае оператор Лапласа сводится к выражению  $\Delta = \partial^2/\partial z^2$  и волновое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.13)$$

Одним из возможных решений этого уравнения является *плоская монохроматическая волна*:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) + \varphi_0 \right). \quad (1.14)$$

Величина  $\mathbf{E}_0$  называется *амплитудой*, а все выражение, стоящее под знаком косинуса, — *фазой* волны. Величина  $\varphi_0$  задает *начальную фазу*.

Распределение напряженности поля в монохроматической плоской волне показано на рис. 1.1. Если в (1.14) зафиксировать  $t$ , то зависимость волновой функции от  $z$  дает как бы моментальную фотографию волны — распределение значений напряженности поля в пространстве. Пусть в момент времени  $t_0$  точка с фазой волны  $\varphi_0$  имеет координату  $z_0$ . В другой момент  $t_0 + \Delta t$  точка с этой фазой

сместится на расстояние  $\Delta z = v \cdot \Delta t$ . Очевидно, что  $\Delta z > 0$ , то есть волна распространяется в положительном направлении оси  $Z$ . Чтобы получить уравнение волны, распространяющейся в отрицательном направлении, достаточно поменять знак в выражении для фазы:  $\omega(t + z/v)$ .

Таким образом, параметр  $v$ , более точно называемый не просто скоростью, а *фазовой скоростью*, определяет скорость перемещения *волнового фронта*, то есть поверхности, на которой колебания происходят с одинаковой фазой. В рассматриваемом случае волновые фронты являются плоскостями, перпендикулярными оси  $Z$ , где  $z = \text{const}$ , чем и объясняется название волны — «плоская».

Поле волны может быть описано и по-другому, например, в виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kz). \quad (1.15)$$

Здесь введено обозначение  $k = \omega/v$ . Параметр  $k$  называется *волновым числом*. Используя справедливое для волн любых типов соотношение  $\lambda \cdot \nu = v$  (где  $\lambda$  — длина волны, а  $\nu$  — частота колебаний), находим, что  $k = 2\pi/\lambda$ . Волновое число измеряется в единицах, обратных длине, как правило, в  $\text{см}^{-1}$ .

С учетом формулы Эйлера  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \text{Re}(e^{i\varphi})$  можно применять также символическую запись уравнения поля в комплексном виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\omega t - kz)). \quad (1.16)$$

При этом надо помнить, что реальное физическое поле описывается вещественной частью выражения (1.16).

Часто бывает необходимо рассмотреть волну, которая распространяется не вдоль оси  $Z$ , а в каком-то произвольном направлении. Пусть это направление задается единичным вектором нормали  $\mathbf{n}$  к волновому фронту (рис. 1.2). Тогда уравнение поверхности постоянной фазы можно записать в виде  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор к некоторой точке волнового фронта. Следовательно, в уравнении плоской волны вместо  $z$  следует записать скалярное произведение  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\omega t - k\mathbf{n}\mathbf{r})) = \mathbf{E}_0 \exp(i(\omega t - k\mathbf{r})), \quad (1.17)$$

где  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  — *волновой вектор*, длина которого равна волновому числу, а направление указывает направление перемещения волнового фронта.

Вторым важным типом волн являются *сферические волны*, волновые фронты которых представляют собой концентрические сферы. Анализ этих волн удобно вести в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , см. рис. 1.3. Сферические волны

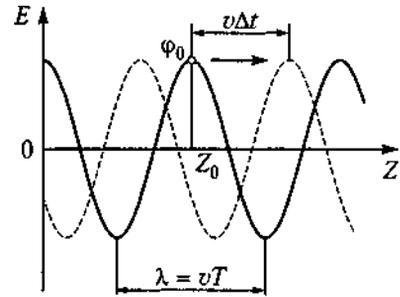


Рис. 1.1. Распространение монохроматической волны

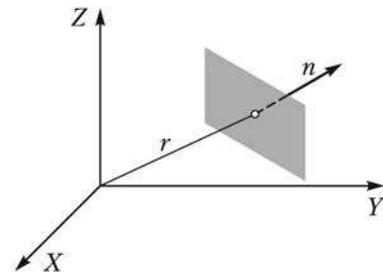


Рис. 1.2. Волновой фронт плоской волны

описываются такими решениями волнового уравнения (1.10), которые зависят только от расстояния  $r$  и не зависят от угловых координат  $\theta$  и  $\varphi$ .

В сферических координатах радиальная часть оператора Лапласа может быть записана:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \mathbf{E}). \quad (1.18)$$

Следовательно, волновое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \mathbf{E}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \mathbf{E}). \quad (1.19)$$

Это уравнение совпадает с (1.13) с точностью до замены  $\mathbf{E}$  на  $(r \mathbf{E})$ . Его решение можно записать в виде, аналогичном (1.14)–(1.16):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \frac{r_0}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (1.20)$$

где  $r_0$  — расстояние, на котором амплитуда равна  $\mathbf{E}_0$ .

Решение (1.20) представляет собой сферическую волну, расходящуюся от источника, находящегося в начале координат. Отметим, что в отличие от плоской волны амплитуда сферической волны убывает с увеличением ее радиуса. Испускать сферическую волну может любой источник, размеры которого малы по сравнению с длиной волны. При этом сам источник может состоять из большого количества элементарных излучателей, например атомов. Такой источник называют *физическим точечным источником*.

В отличие от сферической плоская волна, напротив, не может быть испущена каким-либо реальным источником. Волновой фронт может быть близок к плоскому только на некотором локальном участке, например на фрагменте сферического фронта с очень большим радиусом. Получить плоский, с определенной степенью точности, фронт можно, поместив точечный источник света в фокусе линзы. Однако необходимо помнить, что плоская волна с заданным направлением волнового вектора — это математическая абстракция. Отклонения формы волнового фронта от неограниченной плоскости приводят к различным дифракционным эффектам.

В оптике часто встречаются ситуации, когда волна близка к монохроматической, но сложным образом зависит от пространственных координат, например после прохождения через оптическую систему. В этом случае опишем поле уравнением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t).$$

Подставляя это выражение в волновое уравнение (1.10) и учитывая связь между частотой и волновым числом, найдем, что координатно-зависимая функция  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.21)$$

которое называется *уравнением Гельмгольца*. Это уравнение будет в дальнейшем применяться для анализа пространственных распределений световых полей.

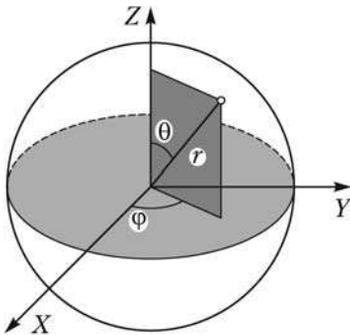


Рис. 1.3. Сферические координаты

## 1.4. Свойства электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга

Подставим выражение для поля плоской монохроматической волны (1.17) в уравнения Максвелла (1.9). Очевидно, дифференцирование по времени сведется просто к умножению  $\mathbf{E}$  на  $(i\omega)$ . Раскрывая скалярное произведение по координатным составляющим  $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ , убеждаемся, что дифференцирование по координате (например, по  $x$ ) приводит к умножению  $\mathbf{E}$  на  $(-ik_x)$ . Применение оператора Гамильтона  $\nabla$  с проекциями  $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  будет соответствовать умножению на вектор  $(-i\mathbf{k})$ . Таким образом, вместо системы дифференциальных уравнений (1.9) получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\mu\mu_0 i\omega\mathbf{H}, \\ -i\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 i\omega\mathbf{E}. \end{cases} \quad (1.22)$$

На основании этой системы можно сделать следующие выводы.

- Поскольку векторное произведение есть вектор, перпендикулярный своим сомножителям, то  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$  и  $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$ , то есть колебания электрического и магнитного полей в волне происходят в направлениях, перпендикулярных направлению распространения. Эти соотношения выражают *поперечность* электромагнитных волн. Кроме того,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ . Таким образом, волновой вектор  $\mathbf{k}$ , векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (именно в таком порядке) образуют *правую ортогональную тройку* векторов.
- Из того, что уравнения (1.22) должны выполняться в любой момент времени и в каждой точке пространства, вытекает, что поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в волне колеблются синфазно (см. рис. 1.4), амплитуды этих колебаний связаны соотношением

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} H_0. \quad (1.23)$$

Рассмотрим теперь энергетические характеристики электромагнитных волн. Предположим, что электромагнитное поле заполняет некоторый объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $\Sigma$  (рис. 1.5). Как известно из курса «Электричество и магнетизм», плотность энергии поля равна

$$\omega = \omega_e + \omega_m = \frac{(\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2)}{2}.$$

Используя преобразования векторного анализа, из уравнений Максвелла можно получить следующее соотношение:

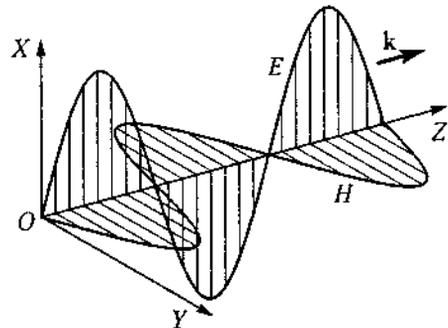


Рис. 1.4. Электрическое и магнитное поля световой волны

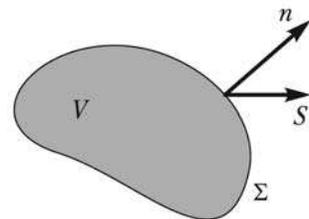


Рис. 1.5. К определению вектора Пойнтинга

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV = - \oint_{\Sigma} S_n d\Sigma - \int_V \mathbf{E} j dV, \quad (1.24)$$

где  $S_n$  — нормальная проекция вектора

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (1.25)$$

называемого *вектором Пойнтинга*.

Физический смысл уравнения (1.24) заключается в следующем. Интеграл в левой части дает изменение полной энергии поля, заключенной в выделенном объеме. Это изменение может происходить за счет двух процессов, представленных двумя слагаемыми правой части. Первое слагаемое описывает утечку энергии через поверхность  $\Sigma$  за счет излучения. Второе — переход электромагнитной энергии в тепловую форму (выделение джоулева тепла при наличии токов проводимости).

Несмотря на то что уравнение (1.24) имеет интегральный вид, вектор Пойнтинга часто интерпретируют как вектор локального *потока энергии*, то есть энергии, протекающей за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению потока. Это допустимо, если размеры площадки велики по сравнению с длиной волны, что в оптическом диапазоне, как правило, справедливо. Иногда вектор  $\mathbf{S}$  называют вектором Умова—Пойнтинга, в честь Н. А. Умова, впервые введшего аналогичный вектор для звуковых волн в 1874 г. — за 20 лет до Дж. Пойнтинга.

Учитывая соотношения (1.22), нетрудно увидеть, что направление переноса энергии, описываемого вектором Пойнтинга  $\mathbf{S}$ , совпадает с направлением перемещения волнового фронта, задаваемым волновым вектором  $\mathbf{k} = \epsilon\epsilon_0 \omega \mathbf{S}$ . Отклонения от этого правила возможны в анизотропных средах (см. главу 12).

Для величины потока энергии из (1.25) и (1.23) получаем:

$$S = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) \cdot H_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (1.26)$$

Таким образом, поток энергии представляет собой величину, колеблющуюся с частотой  $2\omega$ . Так как эта частота для света видимого диапазона чрезвычайно высока ( $\sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ), любой реальный фотоприемник реагирует на усредненное значение потока, причем время усреднения определяется динамическими характеристиками приемника и составляет огромное число периодов световых колебаний. Величина  $I = \langle S \rangle$  называется *интенсивностью* света. Из (1.26) вытекает, что  $I \sim E_0^2$ , следовательно, любой фотоприемник можно рассматривать как *квадратичный детектор*, регистрирующий величину, пропорциональную квадрату амплитуды световой волны. Это свойство фотоприемников чрезвычайно важно при анализе всевозможных интерференционных явлений (см. главу 5).

Отметим, что выражение интенсивности света через квадрат амплитуды электрического, а не магнитного поля имеет глубокий физический смысл. Действительно, действие электрического поля на заряд определяется силой Кулона, а магнитного поля — силой Лоренца. Величины этих сил различаются в  $v/c$  раз, где  $v$  — скорость заряда. Поэтому для нерелятивистских скоростей зарядов величиной, определяющей их взаимодействие с электромагнитной волной, является напряженность именно электрического поля.

## 1.5. Спектральное представление световых волн

Световая волна, испущенная реальным источником, никогда не имеет вид бесконечного гармонического колебания. Однако, как доказывается в математике, любой процесс может быть представлен в виде *суперпозиции* (сложения) гармонических колебаний с должным образом подобранными частотами, амплитудами и фазами. Пример формирования прямоугольного импульса при постепенном увеличении числа монохроматических составляющих показан на рис. 1.6. Кривые ①, ② и ③ получаются при суммировании одной, двух и восьми гармоник с кратными частотами. Соотношение их амплитуд показано на диаграмме справа, а частоты кратны частоте основной гармоники ①. Отметим, что основная доля энергии, переносимой импульсом, приходится на составляющие с низкими частотами, в то время как высокочастотные компоненты отвечают за формирование крутых фронтов импульса.

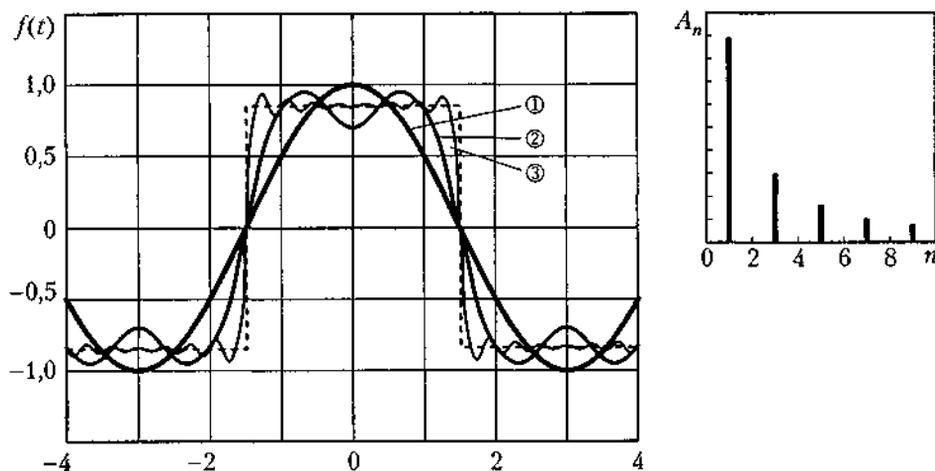


Рис. 1.6. Формирование прямоугольного импульса из гармонических составляющих

С математической точки зрения замена волны сложной формы суммой монохроматических составляющих означает разложение функции в *ряд Фурье* (или *интеграл Фурье* для неперiodических функций):

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{-in\omega_1 t}, \quad E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.27)$$

Величина  $F(\omega)$  представляет собой амплитуду колебания с частотой  $\omega$ , называется *спектром* волны  $E(t)$  и определяется выражением

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.28)$$

Два примера спектрального разложения колебаний показаны на рис. 1.7. Амплитудно-модулированный сигнал вида  $E = E_0 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_0 t)$  (рис. 1.7, а) пред-

ставляет собой колебание с частотой  $\omega_0$ , амплитуда которого изменяется со временем с периодом  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . При  $\omega_1 \ll \omega_0$  спектр такого сигнала состоит из трех компонент, причем частота центральной совпадает с частотой несущей  $\omega_0$ , а две боковые составляющие смещены на величину, равную частоте модуляции  $\omega_1$ . Спектр одиночного импульса (рис. 1.7, б) представляет собой колоколообразную функцию. Длительность импульса  $\Delta t$  и ширина спектра  $\Delta\omega$  связаны соотношением неопределенности:  $\Delta t \cdot \Delta\omega \sim 2\pi$ . Таким образом, изменение амплитуды приводит к нарушению монохроматичности волны.

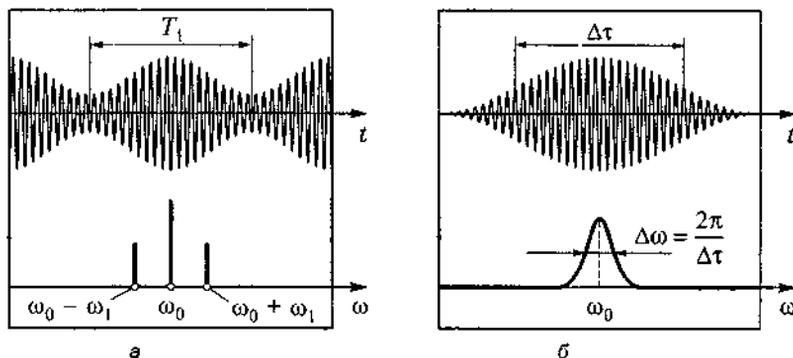


Рис. 1.7. Спектр амплитудно-модулированного колебания (а) и одиночного импульса (б)

В оптике физическое разложение сложного колебания на гармонические составляющие (аналог математического вычисления интеграла Фурье) производится с помощью спектральных приборов. Они позволяют по отдельности регистрировать спектральные компоненты различных длин волны (читай — различных цветов), совокупность которых и составляет исходный свет сложного спектра. Поэтому, несмотря на то что полностью монохроматические волны представляют собой математическую абстракцию, спектральный анализ бывает очень важен. Имея информацию о гармонических составляющих сложного сигнала, можно на основании теоремы Фурье спрогнозировать его изменение.

Несколько забежав вперед, отметим, что кроме временного Фурье-разложения по спектральным компонентам (по частотам или по длинам волн), важную роль в оптике играет пространственное Фурье-преобразование, которое позволяет представить световую волну со сложным волновым фронтом в виде суперпозиции плоских волн различной направленности. По аналогии с частотами, измеряемыми в герцах (то есть в обратных секундах), вводятся пространственные частоты, измеряемые в обратных метрах и определяющие угловые отклонения световых волн от оси системы. Формализм пространственного Фурье-разложения широко используется при описании дифракционных эффектов и в теории формирования оптических изображений.

Но вернемся к особенностям временного (частотного) спектра световых колебаний в рамках классической физики. Электромагнитные волны с разными длинами волн (разными частотами) подразделяются на диапазоны, перечисленные в табл. 1.3. Поскольку для излучения ультрафиолетового (УФ), видимого и инфракрасного (ИК) диапазонов характерны схожие механизмы излучения

и способы регистрации, об этой области спектра часто говорят как о едином оптическом диапазоне.

Внутри видимой части спектра, как это хорошо известно, световые волны классифицируются по цветовому визуальному ощущению, которое производят на глаз человека. Коротковолновое видимое излучение отвечает сине-фиолетовой части спектра, его середина соответствует желто-зеленой палитре, а длинноволновый край формируется оранжево-красными цветами.

**Таблица 1.3.** Шкала электромагнитных волн

Диапазон	Длина волны	Энергия кванта, эВ	Частота, рад/с
γ-лучи	0,001 нм	$10^6$	$2 \cdot 10^{21}$
Рентген	0,1 нм	$10^4$	$2 \cdot 10^{19}$
	1 нм	$10^3$	$2 \cdot 10^{18}$
УФ	12 нм	100	$1,5 \cdot 10^{17}$
	120 нм	10	$1,5 \cdot 10^{16}$
Видимый	380 нм	3,2	$5 \cdot 10^{15}$
	760 нм	1,6	$2,5 \cdot 10^{15}$
ИК	2 мкм	0,6	$10^{15}$
	500 мкм	0,003	$4 \cdot 10^{12}$
Микроволновый	$10^4$ мкм	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{11}$
Радио	Сверхвысокочастотный (СВЧ) $2 \cdot 10^8$ мкм	$6 \cdot 10^{-9}$	$10^7$
	Радиочастотный (РЧ) $3 \cdot 10^{10}$ мкм	$4 \cdot 10^{-11}$	$7 \cdot 10^4$

Для сравнения параметров волнового и корпускулярного описания света в этой же таблице приведены пропорциональные частоте излучения величины энергии световых квантов (фотонов). Именно они определяют процессы взаимодействия света и вещества в рамках квантовой физики.

## ГЛАВА 2 Общие свойства лучей

В очень многих технических областях, имеющих важное практическое значение, например при решении вопросов формирования световых пучков (светотехника), образования изображения (оптотехника), правильные решения можно получить не решая волновых уравнений, а гораздо более простым путем с помощью представлений *геометрической оптики*. Интуитивно понятные и применяемые обычно без дополнительных объяснений методы геометрической оптики основаны на понятии отдельных световых лучей, поведение которых в окружающих средах было установлено экспериментально. Построения с помощью световых лучей достаточно формальны, удобны в использовании и в большом числе случаев вполне адекватно описывают формирование даже самых сложных оптических изображений.

Понятие светового луча используется при анализе реального распространяющегося в однородной среде светового пучка, из которого при помощи одной или нескольких диафрагм с отверстиями выделяется узкий параллельный пучок. Чем меньше диаметр этих отверстий, тем уже выделяемый пучок. Казалось бы, переходя к очень малым отверстиям, можно получить световой луч в виде прямой линии. Однако подобный процесс выделения сколь угодно узкого пучка (луча) путем бесконечного уменьшения отверстия диафрагмы невозможен из-за возникновения явления дифракции (см. раздел 8.4). В связи с этим геометрическая оптика требует некоторого обоснования и определения границ ее применимости.

Неизбежное угловое расширение реального светового пучка с длиной волны  $\lambda$ , пропущенного через диафрагму с диаметром  $D$ , определяется углом дифракции  $\varphi \approx \lambda/D$ . Только в предельном случае, когда  $\lambda \rightarrow 0$ , подобное расширение не имело бы места, и можно было бы говорить о луче как о геометрической линии, направление которой определяет направление распространения световой энергии. Таким образом, световой луч есть абстрактное математическое понятие, а не физический образ, и *геометрическая оптика есть лишь предельный случай волновой оптики*, соответствующий исчезающе малой длине световой волны.

Соотношение  $\varphi \approx \lambda/D$  показывает, что угловое отклонение, нарушающее прямолинейность распространения света в однородной среде, может быть весьма мало, если размеры отверстия или экрана велики по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Поэтому в реальной оптике, где  $\lambda$  — конечная величина порядка долей микро-

метра, отступления от законов геометрической оптики должны быть тем меньше, чем больше размеры диафрагмы.

Таким образом, при использовании законов геометрической (лучевой) оптики нельзя забывать, что они — лишь первое приближение к действительности и что без дифракционных явлений не обходится ни один случай распространения света. Следовательно, необходимо понимать волновой (дифракционный) смысл этих геометрических построений. Из этого ясно, что законы геометрической оптики имеют ограниченное применение, и надо уметь ориентироваться, при каких условиях применение этих законов допустимо и будет находиться в достаточном соответствии с экспериментом. В практической оптике наиболее тонкие вопросы (например, вопрос о разрешающей силе оптических инструментов) решаются только с учетом теории дифракции.

## 2.1. Уравнение эйконала

Рассмотрим монохроматическую световую волну с длиной волны в вакууме  $\lambda_0$ , распространяющуюся в немагнитной ( $\mu = 1$ ) среде с показателем преломления  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Поле этой волны должно удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E} + k_0^2 n^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.1)$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  — волновой вектор, обратный длине волны.

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp(ik_0 L(\mathbf{r})), \quad (2.2)$$

где  $L(\mathbf{r})$  — вещественная скалярная функция координат, имеющая размерность длины и называемая *оптическим путем* или *эйконалом* (от греч. *εικον* — путь). Нетрудно видеть, что равенство  $L = \text{const}$  определяет поверхность постоянной фазы, то есть *геометрический волновой фронт*.

Подставим выражение (2.2) в (2.1) и перейдем к пределу геометрической оптики  $\lambda \rightarrow 0$  ( $k_0 \rightarrow \infty$ ), оставив только слагаемые с  $k_0^2$ . Тогда получаем:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2, \text{ или } (\text{grad } L)^2 = n^2. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называется *уравнением эйконала* и является основным уравнением, описывающим поведение света в приближении геометрической оптики. Отметим, что при его выводе мы пренебрегли многочисленными слагаемыми, получающимися при дифференцировании уравнения волны (2.2). Отсюда следует, что приближение геометрической оптики справедливо, если изменения амплитуды  $\mathbf{E}_0$  на расстоянии порядка длины волны малы по сравнению с самой амплитудой. Это условие, очевидно, нарушается на границе геометрической тени, так как там интенсивность света, а значит, и напряженность поля меняется скачком. Действительно, именно на границе тени особенно ярко проявляют себя дифракционные эффекты, обусловленные волновой природой света. Нельзя также ожидать, что геометрическая оптика даст правильное описание полей вблизи точек, где имеется резкий максимум интенсивности, например в окрестности формируемого линзой оптического изображения точечного источника.

Уравнение эйконала можно также записать в векторной форме. Введем единичный вектор  $\mathbf{s}$ , совпадающий по направлению с вектором  $\text{grad } L$ , тогда

$$\text{grad } L = ns. \quad (2.4)$$

Из векторного анализа известно, что вектор градиента всегда ортогонален к поверхности уровня функции, то есть поверхности, на которой функция постоянна. В данном случае поверхность уровня для эйконала представляет собой

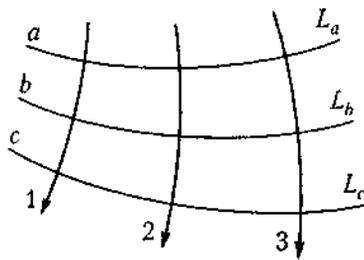


Рис. 2.1. Волновые фронты и световые лучи

волновой фронт, следовательно,  $\mathbf{s}$  — орт нормали к волновому фронту. Исходя из уравнений Максвелла, можно показать, что направление вектора Пойнтинга, определяющего перенос энергии света, совпадает с вектором  $\mathbf{s}$ .

Таким образом, линии вектора  $\mathbf{s}$  (обозначенные на рис. 2.1 цифрами 1, 2, 3) представляют собой *геометрические световые лучи*, а семейство волновых фронтов ( $a, b, c$ ) образует с ними ортогональную (в общем случае криволинейную) сеть.

## 2.2. Законы распространения лучей

Экспериментальным путем был установлен набор понятий и закономерностей, которые легли в основу геометрической оптики и позволяют рассчитывать ход световых пучков в различных оптических средах и системах.

### Оптический путь

Рассмотрим два последовательных близких положения волнового фронта, отстоящих друг от друга на расстояние  $ds$  (рис. 2.2).

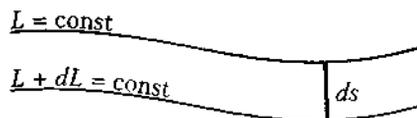


Рис. 2.2. Соседние положения волнового фронта

Из (2.4) следует, что в силу ортогональности отрезка  $ds$  волновым поверхностям  $dL/ds = n$ , то есть

$$ds = \frac{dL}{n}. \quad (2.5)$$

Это означает, что расстояние между соседними волновыми фронтами увеличивается по мере уменьшения показателя преломления. Таким образом, например, на рис. 2.1 показатель преломления среды в левой части рисунка больше, чем в правой. Из сказанного можно сделать вывод, что оптическая длина пути совпадает с геометрической только в вакууме ( $n = 1$ ), во всех других средах  $dL > ds$ .

Учтем, что  $nds = (c/v)ds = cdt$ , где  $dt$  — время прохождения лучом расстояния  $ds$ . Тогда из (2.5) следует, что оптическую длину пути между двумя точками  $P_1$  и  $P_2$ , лежащими на одном луче, можно определить как

$$\int_{P_1}^{P_2} dL = L_2 - L_1 = c \int_{P_1}^{P_2} dt, \quad (2.6)$$

то есть *оптический путь* между двумя точками равен скорости света в вакууме, умноженной на время прохождения лучом расстояния между этими точками.

### Уравнение светового луча в неоднородной среде

Рассмотрим более детально характер искривления лучей в неоднородной среде. Будем рассматривать радиус-вектор  $\mathbf{r}$  некоторой точки, лежащей на луче  $S$ , как функцию длины дуги луча  $s$  (рис. 2.3).

Тогда  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s}$  ( $\mathbf{s}$  – единичный вектор, направленный по касательной к траектории луча) и уравнение эйконала запишется в виде  $n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \text{grad} L$ . Продифференцировав это уравнение по длине дуги  $s$  с учетом того, что  $\text{grad} L = ns$ , получим

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad} n. \quad (2.7)$$

Поскольку вторая производная от радиус-вектора характеризует кривизну луча, из (2.7) следует, что *в неоднородной среде световые лучи изгибаются в сторону увеличения показателя преломления*. Этот вывод согласуется с ходом лучей на рис. 2.1.

Примеров наблюдения криволинейных световых лучей при прохождении светом прозрачных неоднородных сред достаточно много. Искривлением световых лучей в неоднородной среде объясняется, например, появление *миражей*. Нижние миражи (рис. 2.4, а) обусловлены тем, что слои воздуха, прилегающие к нагретой поверхности песка в пустыне, имеют меньшую плотность (а значит, и меньший показатель преломления), в результате возникает изображение удаленных предметов, как при отражении в зеркале.

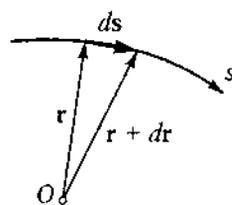
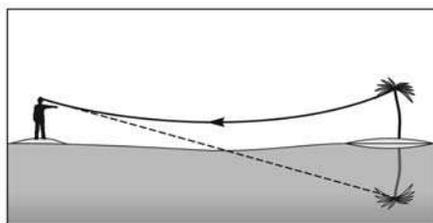
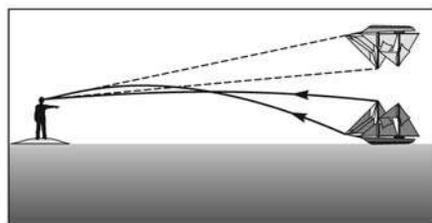


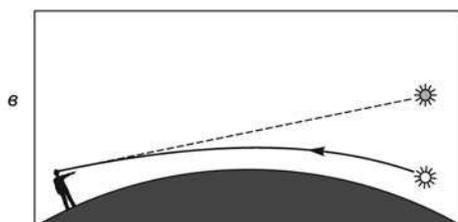
Рис. 2.3. Искривление луча в неоднородной среде



а



б



в

Рис. 2.4. Появление нижнего (а) и верхнего (б) миражей и атмосферная рефракция (в)

К этому же типу оптической иллюзии относится известный всем автомобилистам эффект зеркальных «луж» на нагретом асфальте.

Для возникновения так называемого верхнего миража (рис. 2.4, б) необходимо, чтобы показатель преломления приповерхностного слоя воздуха достаточно быстро уменьшался с высотой, что возможно, когда, например, внизу располагается холодный слой, а над ним находится слой теплого воздуха.

Эффект атмосферной рефракции возникает из-за искривления световых лучей при наклонном прохождении верхних слоев атмосферы (рис. 2.4, в). Благодаря этому Солнце остается видимым еще некоторое время после ухода под горизонт, а видимые положения небесных светил смещаются относительно истинных в сторону зенита.

### Закон прямолинейного распространения света в однородной среде

Из уравнения (2.7) следует, что в однородной среде ( $n = \text{const}$ ,  $\text{grad } n = 0$ ) кривизна лучей равна нулю, то есть свет распространяется прямолинейно. Этот закон может считаться прочно установленным на опыте, его изложение встречается еще за 600 лет до нашей эры в сочинениях Фалеса Милетского. Он имеет глубокий смысл, ибо понятие о прямой линии, по-видимому, возникло из оптических наблюдений.

Геометрическое понятие прямой как линии, представляющей кратчайшее расстояние между двумя точками, издревле трактовалось как понятие о луче, по которому распространяется свет в однородной среде, образуя геометрические тени (рис. 2.5).

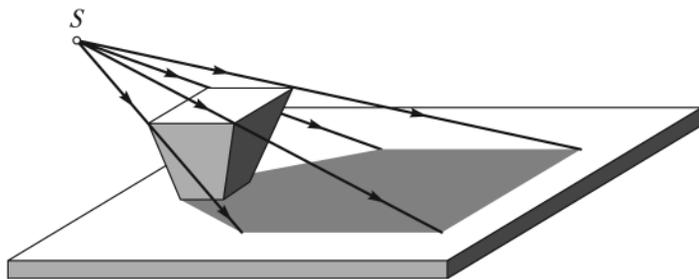


Рис. 2.5. Прямолинейное распространение световых лучей

### Закон изменения интенсивности

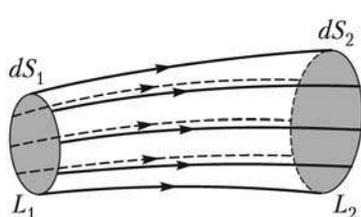


Рис. 2.6. Трубка лучей

Рассмотрим узкую трубку лучей, выходящих из элемента  $dS_1$  волнового фронта  $L_1$  и пусть  $dS_2$  — элемент, который пересекают эти лучи на другом волновом фронте  $L_2$  (рис. 2.6).

Поскольку направление вектора Пойнтинга в каждой точке трубки совпадает с направлением луча, полная энергия, протекающая по трубке, постоянна и не зависит от изменения ее сече-

ния:  $W_1 = W_2$ . Тогда интенсивности  $I_1$  и  $I_2$  в двух сечениях связаны соотношением  $I_1 dS_1 = I_2 dS_2$ , выражающим закон изменения интенсивности в геометрической оптике: *произведение  $I \cdot dS$  остается постоянным вдоль трубки лучей*. В важных частных случаях плоской и сферической волн из этого закона вытекает постоянство интенсивности в первом случае и ее изменение во втором. Легко видеть, что интенсивность сферических волн оказывается обратно пропорциональной квадрату расстояния от источника.

### Закон независимости световых пучков

Закон независимости включает в себя два положения: а) если единый световой поток разбить на отдельные пучки с помощью диафрагм, то действие на экране этих выделенных пучков оказывается независимым от того, действуют ли одновременно другие пучки или они устранены; б) распространение всякого светового пучка в среде совершенно не зависит от того, есть в ней другие пучки света или нет. Закон независимости световых пучков необходимо дополнить утверждением, определяющим совместное действие световых пучков при попадании их на освещаемую поверхность: освещенность экрана, создаваемая несколькими световыми пучками, равна сумме освещенностей, создаваемых каждым пучком в отдельности. Нарушения справедливости этого утверждения имеют место при *интерференции света* или в *нелинейной оптике*.

В первом случае взаимная сфазированность электромагнитных волн приводит к перераспределению интенсивности света во времени и пространстве. Во втором случае интенсивность пучков столь велика, что их совместное действие изменяет свойства среды, и поведение пучков в зоне перекрытия отличается от поведения в других областях.

### Стигматические световые пучки

Исходя из представлений лучевой (геометрической) оптики, каждую светящуюся точку источника света следует рассматривать как вершину расходящегося пучка лучей, называемого *гомоцентрическим*, то есть имеющим общий центр. Если после отражения или преломления света на границах раздела сред такой пучок сохраняет свой гомоцентризм, то вершина преобразованного пучка является *изображением* светящейся точки. При сохранении гомоцентричности каждая точка источника дает одну точку изображения (*сопряженную*). Такие изображения называются точечными или *стигматическими* (рис. 2.7).

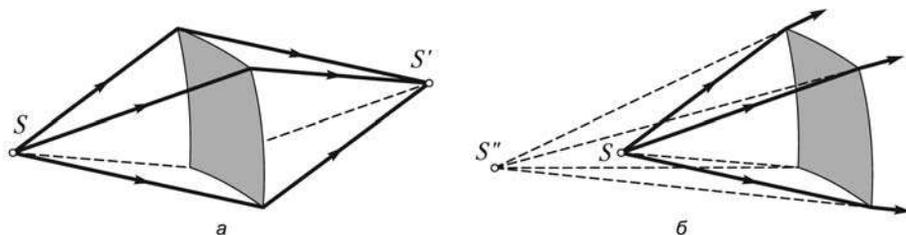


Рис. 2.7. Гомоцентрические пучки, соответствующие действительному ( $S$ ) и мнимому ( $S'$ ) стигматическим изображениям

В силу обратимости световых лучей (см. следующий раздел) изображение можно рассматривать как источник, а источник — как изображение. Поэтому при стигматическом изображении центры пучков называются сопряженными точками той оптической системы, в которой происходит преобразование расходящегося гомоцентрического пучка в сходящийся. Соответственные лучи и пучки также называются сопряженными. Если в результате отражения и преломления пучок перестает быть гомоцентрическим, то стигматичность изображения теряется и точка уже не изображается точкой. Это явление называют *астигматизмом*. Так как в практической оптике обычно ставится задача получения изображений, точно передающих форму источника, то важнейшим вопросом геометрической оптики является выяснение условий сохранения гомоцентричности пучков.

### 2.3. Принцип Ферма

В неоднородных оптических средах путь луча в общем случае не является прямолинейным, поэтому возникает задача определения оптического пути луча. Найдем величину оптического пути между двумя точками  $A$  и  $B$ , лежащими на одном луче (рис. 2.8), путем интегрирования по траектории луча:

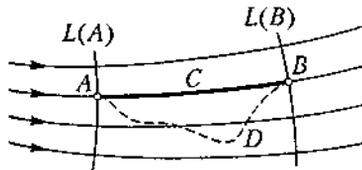


Рис. 2.8. Оптический путь светового луча между двумя точками

$$\int_{AB} ns \cdot dr = \int_{AB} \text{grad } L dr = L(B) - L(A). \quad (2.8)$$

Этот интеграл, равный разности значений эйконала в точках  $B$  и  $A$  и, следовательно, не зависящий от пути интегрирования, называется *интегральным инвариантом Лагранжа*.

Но  $s \cdot dr = dl \cos(\hat{s} dr) \leq dl$ , поэтому  $L(B) - L(A) \leq \int_{AB} n dl$ . Знак равенства имеет ме-

сто только в том случае, когда направления векторов  $s$  и  $dr$  совпадают в каждой точке траектории, то есть когда она представляет собой реальный световой луч ( $ACB$  на рис. 2.8). Для любой другой траектории, соединяющей точки  $A$  и  $B$  (например,  $ADB$ ), оптическая длина пути оказывается больше, чем для реального луча.

Обобщением вышеприведенных рассуждений является *принцип Ферма*: свет распространяется по такой траектории, оптическая длина которой (а значит, и время распространения) имеет экстремальное значение (минимальное, максимальное или стационарное) в некоторой регулярной окрестности светового луча.

Под регулярной окрестностью понимается область, которую можно заполнить световыми лучами так, чтобы через каждую точку проходил единственный луч. В большинстве случаев оптическая длина луча принимает минимальное значение, поэтому этот принцип называют также принципом *наискратчайшего оптического пути*.

В формулировке минимального светового пути этот принцип был выдвинут еще Героном Александрийским в III в. до н. э., а в формулировке минимального времени — Пьером Ферма в XVII в.

Иллюстрация применения принципа Ферма к отражению света от поверхностей различной кривизны показана на рис. 2.9. Нетрудно доказать, что для плоской (рис. 2.9, а) и выпуклой (рис. 2.9, б) поверхностей из всех возможных траекторий  $AKB$ , соединяющих точки  $A$  и  $B$ , таких что точка  $K$  лежит на зеркале, *наименьшую* длину имеет та, для которой угол падения равен углу отражения.

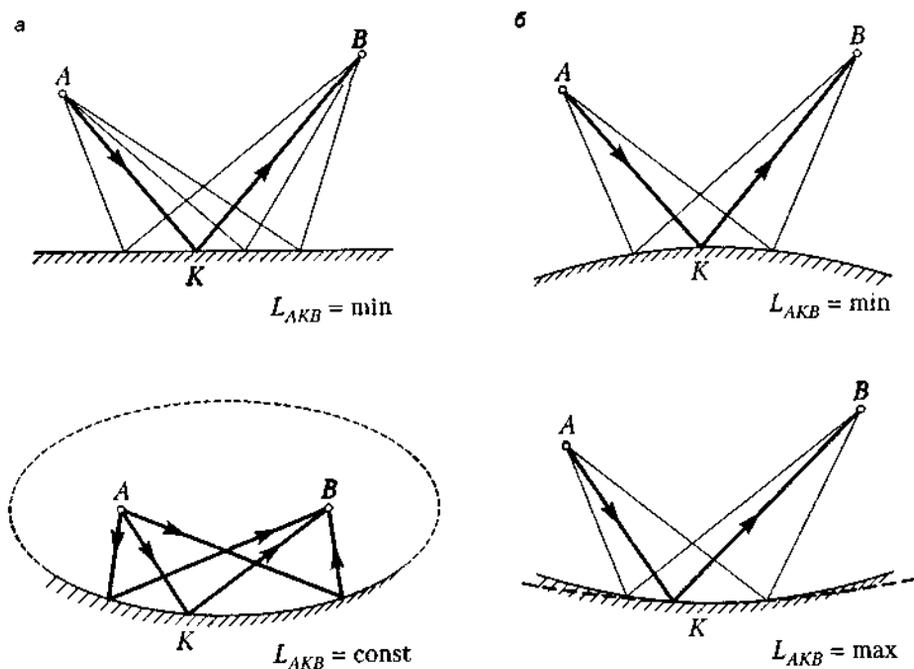


Рис. 2.9. Иллюстрация принципа Ферма отражением от зеркальных поверхностей различной формы

Для эллиптического зеркала, у которого точки  $A$  и  $B$  являются фокусами, сумма длин отрезков  $AK$  и  $KB$  постоянна (рис. 2.9, в). Поэтому оптическая длина траектории  $AKB$  имеет *стационарное* значение, и все реальные лучи, вышедшие из точки  $A$ , попадают в  $B$ . Точка  $B$  является изображением точки  $A$ , то есть фокусы эллиптического зеркала  $A$  и  $B$  есть сопряженные точки. Этот пример иллюстрирует *закон таутохронизма* (одновременности): оптическая длина лучей между двумя сопряженными точками постоянна, лучи, одновременно вышедшие из  $A$ , достигнут точки  $B$  также одновременно.

В случае когда отражение света происходит от вогнутой поверхности с кривизной большей, чем у эллипса, оптическая длина реального луча оказывается не минимальна, а *максимальна* по сравнению с соседними лучами (рис. 2.9, г).

Принцип Ферма может рассматриваться как основополагающий принцип геометрической оптики. Из него, так же как из уравнения эйконала, могут быть получены такие важнейшие следствия, как, например:

- прямолинейное распространение света в однородной среде;
- отражение и преломление на границах раздела;

- траектории распространения световых лучей в неоднородной среде с непрерывно изменяющимся показателем преломления;
- обратимость или взаимность световых лучей, в соответствии с которой их траектории остаются без изменения при изменении направлений распространения на противоположные.

## 2.4. Прохождение света через плоскую границу сред

Предположим, что световой пучок распространяется в среде, показатель преломления которой плавно изменяется, но зависит только от одной координаты:  $n = n(z)$ . Поскольку в плоскости  $XU$  показатель преломления остается постоянным, такие среды называются *плоско-слоистыми*. Исходя из уравнения эйконала, можно показать, что каждый световой луч в этом случае является плоской кривой, а угол  $\theta$ , который луч образует с осью  $OZ$ , удовлетворяет справедливому для любых зависимостей  $n(z)$  соотношению

$$n(z) \cdot \sin \theta(z) = \text{const}. \quad (2.9)$$

Распространение лучей, испущенных точечным источником, помещенным в плоско-слоистую среду, показано на рис. 2.10. Случаю убывания функции  $n(z)$  соответствует рис. 2.10, а, возрастанию — рис. 2.10, б, а наличию минимума показателя преломления — рис. 2.10, в. Если луч распространяется в сторону уменьшения показателя преломления, он может углубиться в среду только на определенное расстояние, дойдя до точки поворота  $z_n$ . Поскольку в точке поворота луча  $\theta = \pi/2$  и  $\sin \theta = 1$ , то  $z_n$  определяется из соотношения  $n(z_n) = n_0 \sin \theta_0$ , где  $n_0$  — показатель преломления в месте расположения источника,  $\theta_0$  — угол выхода луча из источника.

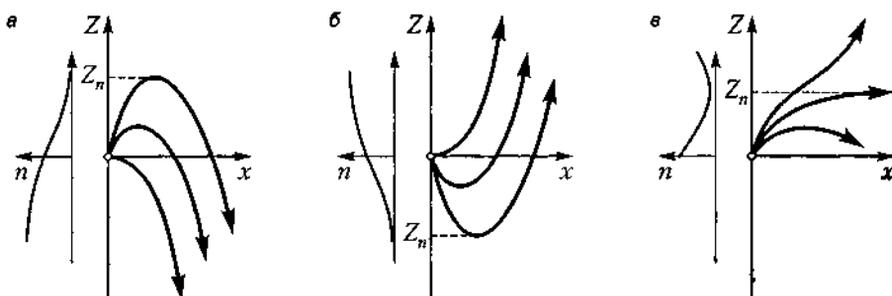


Рис. 2.10. Распространение света в плоско-слоистых средах. На каждом рисунке слева — график показателя преломления, справа — траектории лучей

Частным, но практически наиболее важным случаем плоско-слоистых сред являются две однородные среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  с плоской границей раздела между ними. Взаимное расположение лучей описывается законами отражения и преломления света на границе раздела. Эти законы подробно обсуждаются в главе 11, поэтому здесь приведем только основные формулировки.

## Отражение света от границы двух однородных сред

Как непосредственно вытекает из принципа Ферма и проведенного выше анализа, падающий луч, нормаль к отражающей поверхности и отраженный луч лежат в одной плоскости (*плоскости падения*), которая определяется как плоскость, образованная падающим на границу лучом и нормалью к границе, проведенной в точке падения луча (рис. 2.11).

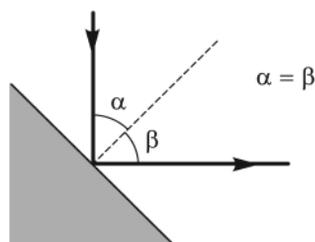


Рис. 2.11. Падающий и зеркально отраженный луч

Углы между лучами и нормалью равны между собой: *угол падения α равен углу отражения β*. Этот закон был установлен уже в очень отдаленную эпоху благодаря использованию полированных металлических поверхностей в качестве зеркал. Построение изображения точечного источника  $S$  в плоском зеркале приведено на рис. 2.12, а. В результате отражения формируется *мнимое стигматическое изображение*  $S'$  источника, то есть изображение, возникающее в точке пересечения *продолжений* отраженных лучей. Расстояние от зеркала до изображения  $b'$  равно расстоянию от источника до зеркала  $b$ .

Построение изображения протяженного объекта показано на рис. 2.12, б. Поскольку изображение объекта строится как совокупность изображений всех его точек, то результат для плоского зеркала очевиден: изображение получается равным, прямым и мнимым. При визуальном восприятии такого изображения правая и левая стороны как бы меняются местами.

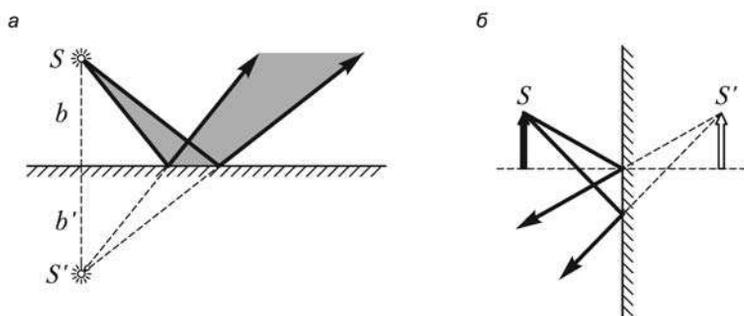


Рис. 2.12. Построение изображений точечного источника (а) и протяженного объекта (б) в плоском зеркале

Построение изображений в скрещенных зеркалах представлено на рис. 2.13. При отражении источника  $S$  в зеркале 1 образуется изображение  $S'$ , которое, в свою очередь, служит источником для изображения  $S''$  в зеркале 2 (рис. 2.14, а). С другой стороны, начиная построение с зеркала 2, получим изображения  $S'''$  и  $S''''$  (рис. 2.13, б). Можно показать, что сам источник  $S$  и все формирующиеся изображения лежат на дуге одной окружности с центром в вершине зеркального угла. Кроме того, из простых геометрических соображений очевидно, что угол  $\delta$  между направлениями лучей до и после отражения от двух зеркал равен удвоенному углу между зеркалами:  $\delta = 2\beta$ .

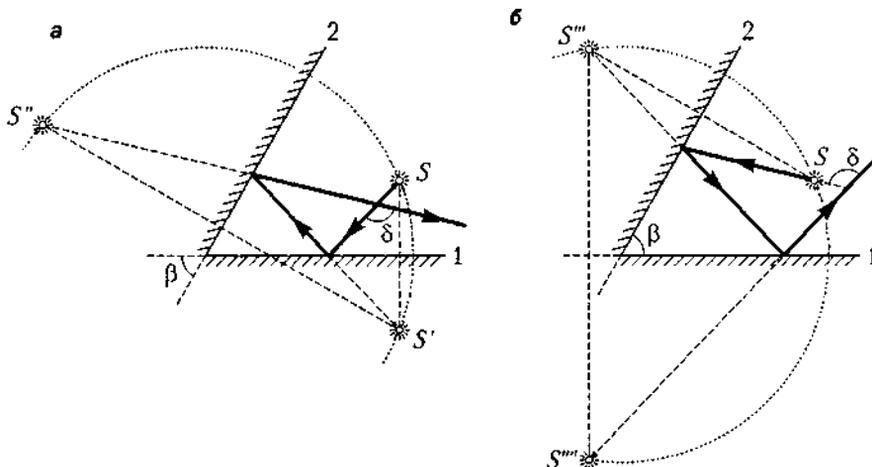


Рис. 2.13. Изображения источника в скрещенных зеркалах

Последнее свойство широко используется для конструирования *угловых отражателей* света (рис. 2.14). Зеркала, образующие прямой угол, возвращают все световые лучи точно в обратном направлении.

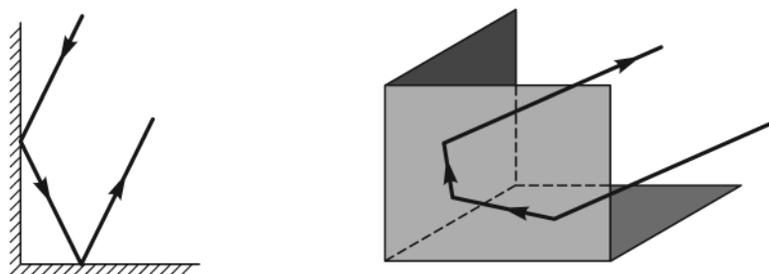


Рис. 2.14. Плоский и объемный угловые отражатели

## Преломление света на границе двух однородных сред

Правильная формулировка закона преломления света принадлежит Снеллиусу и доказывается принципом Ферма. Иллюстрацией этого принципа может служить первая задача в данном разделе. При прохождении через границу двух однородных сред свет испытывает отражение и преломление (рис. 2.15). Согласно *закону Снеллиуса*, преломленный луч лежит в плоскости падения, а синусы углов падения и преломления связаны соотношением

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta, \quad (2.10)$$

которое является частным случаем общего закона (2.9).

Рисунок 2.15 соответствует ситуации, когда показатель преломления первой среды меньше, чем второй ( $n_1 < n_2$ ), а, следовательно, скорость света в первой среде больше ( $v_1 > v_2$ ). При этом преломленный луч как бы «прижимается» к перпендикуляру к границе.

При прохождении луча сквозь плоскопараллельную пластинку направление прошедшего луча света совпадает с направлением падающего, однако луч смещается параллельно самому себе. Расстояние  $x$ , измеренное в направлении, поперечном лучу, носит название смещения луча (рис. 2.16). Оно пропорционально толщине пластинки  $d$ , зависит от ее показателя преломления и в общем случае равно

$$x = d \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta).$$

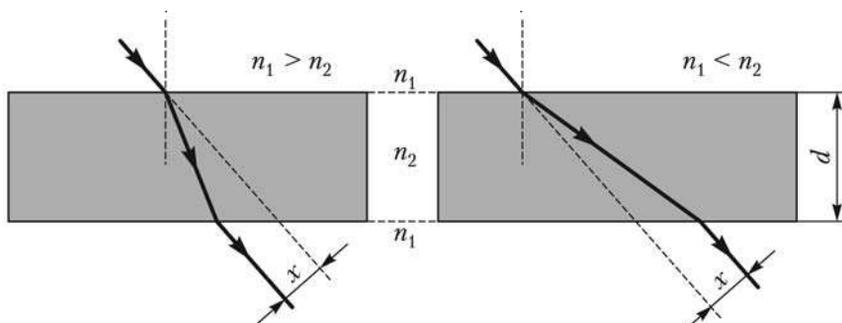


Рис. 2.16. Смещение луча в плоскопараллельной пластинке

Если луч идет из оптически более плотной среды в менее плотную ( $n_2 < n_1$ , рис. 2.17), то при некотором угле падения  $\alpha_0$  оказывается, что  $\sin \beta = (n_1/n_2) \sin \alpha_0 = 1$ , то есть преломленный луч скользит по границе раздела.

При больших углах падения формально вычисленный в соответствии с законом Снеллиуса синус угла преломления начнет превосходить единицу. Соответствующего угла преломления не существует, поэтому преломленный луч не возникает, а свет отражается от границы сред полностью. Это эффект носит название *полного внутреннего отражения* (ПВО). Угол падения, при котором возникает явление ПВО, определяется условием  $\alpha \geq \alpha_0$ , причем

$$\sin \alpha_0 = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}, \quad (2.11)$$

где  $n_{12}$  — относительный показатель преломления. Угол  $\alpha_0$  называется *предельным углом* полного внутреннего отражения. Физическое объяснение этого явления дается в дальнейшем (см. раздел 11.3).

Практически важным случаем является прохождение света через стеклянные призмы различной формы. На рис. 2.18, а представлен ход лучей через треугольную призму с преломляющим углом  $\theta$ . Как видно из условий преломления на обоих гранях призмы, световой луч всегда отклоняется к основанию призмы AC.

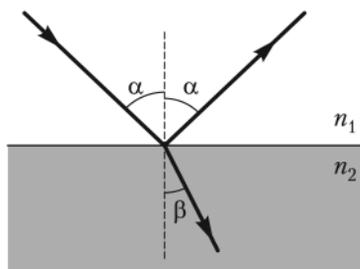


Рис. 2.15. Преломление света на границе двух сред

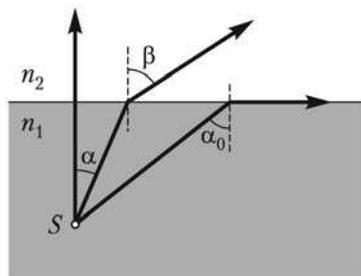


Рис. 2.17. Предельный угол полного внутреннего отражения

Исключением из этого правила является случай, когда окружающая среда обладает показателем преломления большим, чем сама призма (например, воздушная призма в воде).

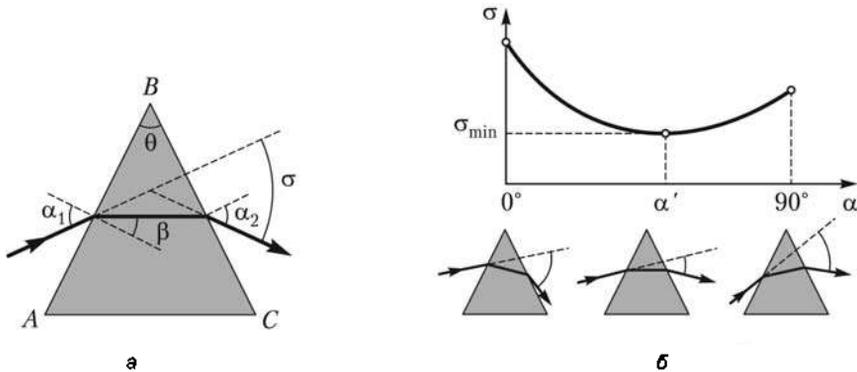


Рис. 2.18. Ход луча через призму (а) и зависимость угла отклонения от угла падения (б)

Зависимость угла отклонения  $\sigma$  от угла падения лучей на призму показана на рис. 2.18, б. Угол отклонения становится минимальным при симметричном ходе лучей ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ), в этом случае зависимость угла минимального отклонения от показателя преломления вещества призмы и преломляющего угла определяется выражением:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sigma_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (2.12)$$

Последнее соотношение обычно применяется для определения показателя преломления по измеренным с помощью гониометра углам  $\theta$  и  $\sigma_{\min}$ .

Если преломляющий угол призмы мал, то такая призма носит специальное название — *клин* (рис. 2.19). В случае прохождения лучей сквозь клин выражение (2.12) преобразуется к виду  $n = \frac{(\theta + \sigma_{\min})}{\theta}$ , и угол отклонения лучей в клине

можно определить как  $\sigma = \theta(n - 1)$ .

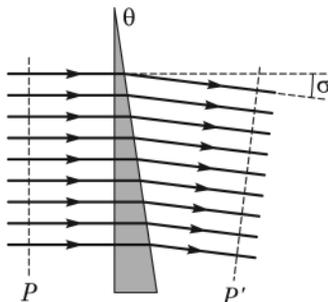


Рис. 2.19. Прохождение лучей через клин

В оптических приборах широко применяются различные типы призм, принцип действия которых основан на явлении полного внутреннего отражения (так называемые, призмы ПВО). Для призмы, сделанных из обычного оптического стекла (средний показатель преломления  $n = 1,5$ ), предельный угол равен  $\arcsin(1/1,5) \approx 42^\circ$ . Это означает, что любая 45-градусная призма полностью отражает свет без нанесения зеркального покрытия. Некоторые варианты призм ПВО показаны на рис. 2.20.

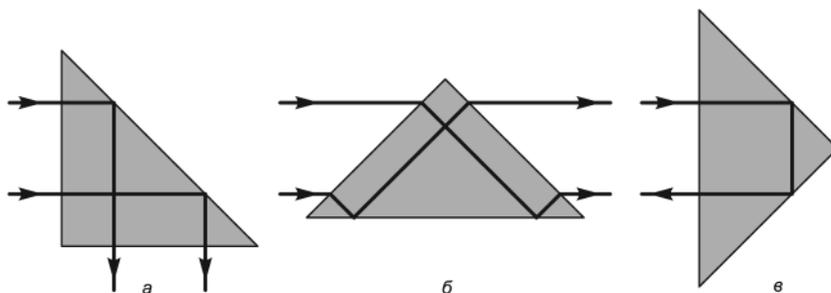


Рис. 2.20. Поворотная (а), оборачивающая (б) и отражающая (в) призмы ПВО

## Примеры решения задач

**Пример 2.1.** Предмет  $S$  установлен перед двумя плоскими зеркалами  $M_1$  и  $M_2$ , расположенными параллельно друг другу. Первое зеркало  $M_1$  — полупрозрачное. Найдите расстояние между изображениями предмета в обоих зеркалах, если расстояние от предмета до первого зеркала  $a = 1,6$  м и расстояние между зеркалами  $b = 1,2$  м.

*Решение*

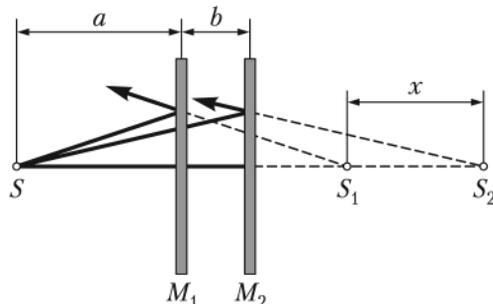
Выполним построение изображений  $S_1$  и  $S_2$  источника  $S$  в обоих зеркалах. Из него следует, что расстояние

$$SS_1 = 2a, \quad SS_2 = 2(a + b).$$

Таким образом,

$$x = SS_2 - SS_1 = 2(a + b) - 2a = 2b,$$

или  $x = 2,4$  м.

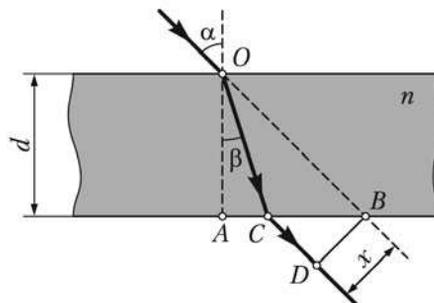


**Пример 2.2.** Угол падения луча на пластинку толщиной  $d = 3,46$  см равен углу полного внутреннего отражения для стекла, из которого изготовлена пластинка. Вычислите смещение луча при прохождении сквозь пластинку, если ее показатель преломления  $n = \sqrt{3}$ .

*Решение*

Угол падения луча на стеклянную пластинку по условию равен предельному углу полного внутреннего отражения для границы стекло–воздух, то есть

$$\alpha = \arcsin \frac{n_2}{n} = \arcsin \frac{1}{n}.$$



Искомое смещение  $x$  равно расстоянию между мысленным продолжением падающего луча за пластинку и реальным лучом. Из треугольника  $BCD$   $x = BD = BC \cdot \cos \alpha$

Из треугольников  $OAC$  и  $OAB$ :  $BC = d \cdot (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$ . Выражая  $\sin \beta$ ,  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$  через  $\sin \alpha$ , так как именно это значение задано в условии, находим:

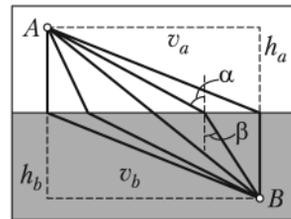
$$x = d \cdot \sin \alpha \cdot \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta} \right) = d \cdot \sin \alpha \cdot \left( 1 - \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

Подставим численные данные:

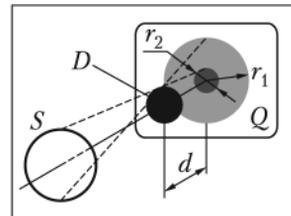
$$x = 3,46 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{\sqrt{1 - 1/3}}{\sqrt{3 - 1/3}} \right) = \frac{3,46 \cdot 10^{-2}}{1,73} (1 - 1/2) = 0,01 \text{ м.}$$

## Задачи

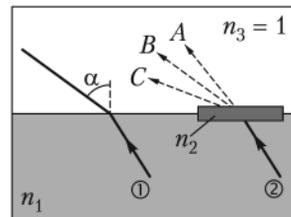
2.1. Всадник должен преодолеть расстояние от пункта  $A$  до пункта  $B$ . Пункт  $A$  расположен в чистом поле, где скорость всадника  $v_a$ . Пункт  $B$  лежит в лесистой местности, где скорость всадника снижается до  $v_b < v_a$ . Предполагая границу лес–поле прямолинейной и считая расстояния  $h_a$  и  $h_b$  равными, определите соотношение между углами  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующими траектории минимального времени.



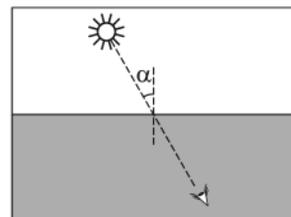
2.2. При освещении непрозрачного диска  $D$  радиусом  $r$  на экране  $Q$ , отстоящем от него на расстоянии  $d$ , получается тень радиусом  $r_1$  и полутень радиусом  $r_2$ . Источник света  $S$  также имеет форму диска, причем прямая, соединяющая центры дисков, перпендикулярна к ним и к плоскости экрана. Определите размер источника света и его расстояние от освещаемого диска.



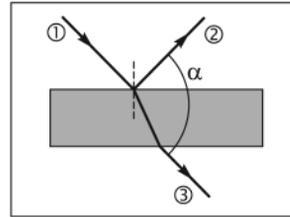
2.3. В воде идут два параллельных луча 1 и 2. Луч 1 выходит в воздух непосредственно, а луч 2 проходит сквозь горизонтальную плоскопараллельную стеклянную пластинку; а) будут ли лучи 1 и 2 параллельны по выходе в воздух? б) выйдет ли в воздух луч 2, если луч 1 испытывает полное внутреннее отражение?



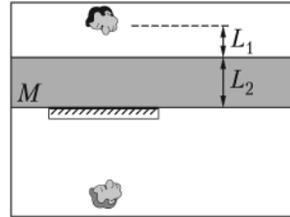
2.4. Пловец, нырнувший с открытыми глазами, видит Солнце из воды на угловом расстоянии  $30^\circ$  от зенита. На какой высоте над горизонтом находится Солнце? Показатель преломления воды  $4/3$ .



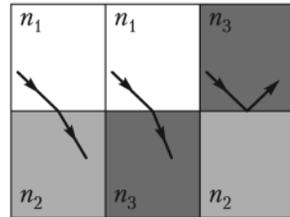
2.5. Луч света падает на плоскопараллельную пластинку под углом  $40^\circ$ . Определите угол между отраженным и прошедшим через пластинку лучами. Пластинка находится в воздухе.



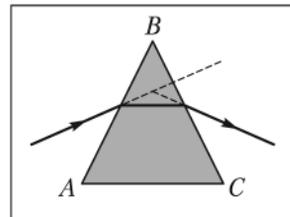
2.6. Человек смотрит вертикально вниз на свое изображение в плоском зеркале, лежащем на дне водоема. Определите кажущееся расстояние от глаза до его изображения в зеркале. Глубина водоема равна 80 см, расстояние от глаза до поверхности воды 50 см. Показатель преломления воды  $4/3$ .



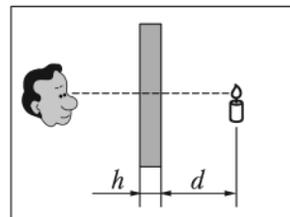
2.7. При переходе из первой среды во вторую угол преломления луча равен  $45^\circ$ , а из первой в третью —  $30^\circ$  (при том же угле падения). Найдите в градусах предельный угол полного внутреннего отражения луча, идущего из третьей среды во вторую.



2.8. Показатель преломления стекла призмы для красных лучей равен 1,483. Преломляющий угол призмы  $60^\circ$ . Определите угол наименьшего отклонения красных лучей призмой.



2.9. Язычок пламени свечи помещен на расстоянии 15 см от плоскопараллельной стеклянной пластинки. Наблюдатель рассматривает его через пластинку, причем луч зрения нормален к ней. Найдите расстояние от изображения пламени до ближайшей к наблюдателю поверхности пластины. Толщина пластины 4,5 см, показатель преломления 1,5.



## ГЛАВА 3 Прохождение света через сферическую границу сред

Сформулированные в предыдущей главе законы распространения света носят общий характер и применимы при решении всех задач геометрической оптики, но в ряде случаев возможны определенные упрощения. Рассмотрим поведение света и построение изображений на неплоских, в частности сферических границах раздела сред.

### 3.1. Отражение и преломление на сферической границе

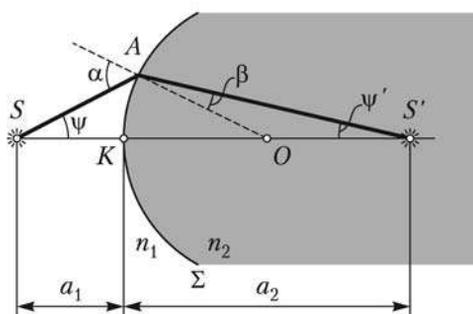


Рис. 3.1. Преломление на сферической границе сред

Пусть свет от точечного источника  $S$  падает на сферическую границу двух сред  $\Sigma$  с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , где  $n_2 > n_1$  (рис. 3.1). Индексация определяет порядок прохождения сред (луч падает на границу из первой среды и проходит во вторую). Ход лучей через эту границу построен по общим законам геометрической оптики. Изображение  $S'$  получено как точка пересечения двух лучей, исходящих из точки предмета  $S$ . Линия  $SS'$ , по которой идет луч, проходящий границу  $\Sigma$  по перпендикуляру, носит название

*главной оптической оси* системы. Точка  $K$  — вершина поверхности  $\Sigma$ , точка  $O$  — центр кривизны этой поверхности.

Уточним условия (или ограничения), при которых рассматривается преломление света на сферической границе:

- пучки *гомоцентрические*;
- изображения *стигматические*;

□ пучки *параксиальные* — это означает, что углы  $\psi$  и  $\psi'$  малы настолько, что отрезки  $SK \cong SA$  и  $AS' \cong KS'$  можно считать равными.

Без этих условий мы не получим четких изображений, будут иметься искажения или *абберации*, речь о которых пойдет далее (в разделе 3.6).

## Правила знаков

При выводе выражения, связывающего положения предмета и его изображения, будем пользоваться следующими правилами. Поставив предмет по одну сторону преломляющей поверхности, выбираем направление хода лучей через систему, например слева направо. Отсчет всех расстояний производится от преломляющей поверхности в сторону окончания отрезка. Если направление отсчета совпадает с направлением хода луча, такой отрезок считается положительным, если наоборот — то отрицательным.

Показатели преломления сред, как правило, считаются положительными. Только если лучи меняют направление распространения после отражения, показателю преломления соответствующей среды приписывается знак «минус».

С учетом изложенного правила, введем обозначения (см. рис. 3.1)  $SK \cong SA = -a_1$ ,  $AS' \cong KS' = a_2$  и  $AO \cong KO = R$ , где  $a_1$  — расстояние от источника до границы сред,  $a_2$  — расстояние от границы сред до изображения источника,  $R$  — радиус кривизны сферической поверхности (границы сред). Записав закон преломления на границе, получим соотношение

$$n_1 \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{R} \right). \quad (3.1)$$

Последнее выражение показывает, что произведение  $n \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right)$  при преломлении остается неизменным. Его называют *инвариантом Аббе*. Для расчетов этот инвариант удобнее записать в виде

$$\frac{n_2}{a_2} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (3.2)$$

Это соотношение называется *формулой сферической преломляющей поверхности*. Она позволяет однозначно определить положение изображения, если известно положение предмета, и наоборот. Правая часть этого равенства не зависит от положения предмета и его изображения, а определяется только свойствами самой оптической системы и носит название *оптическая сила (D)* сферической преломляющей поверхности:

$$D = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (3.3)$$

Пользуясь установленным выше правилом знаков, можно выяснить, какого типа изображения получаются в случае выпуклой ( $R > 0$ ) и вогнутой ( $R < 0$ ) поверхностей. В зависимости от того, будут ли у  $a_1$  и  $a_2$  разные знаки или одинаковые, мы будем иметь случаи, когда изображение располагается с противоположной по отношению к источнику стороны преломляющей поверхности или лежит по одну сторону с ним.

- В первом случае ( $a_2 > 0$ ) точка, именуемая изображением, есть действительно точка пересечения преломленных лучей. Такое изображение называется *действительным* (см. рис. 3.1).
- Во втором случае ( $a_2 < 0$ ), очевидно, преломленные лучи, идущие во второй среде, остаются расходящимися и реально не пересекаются. В этом случае название изображения огносится к той воображаемой точке, которая представляет собой место пересечения предполагаемого продолжения преломленных лучей. Такое изображение называется *мнимым* (см. рис. 2.13 для случая плоской границы).

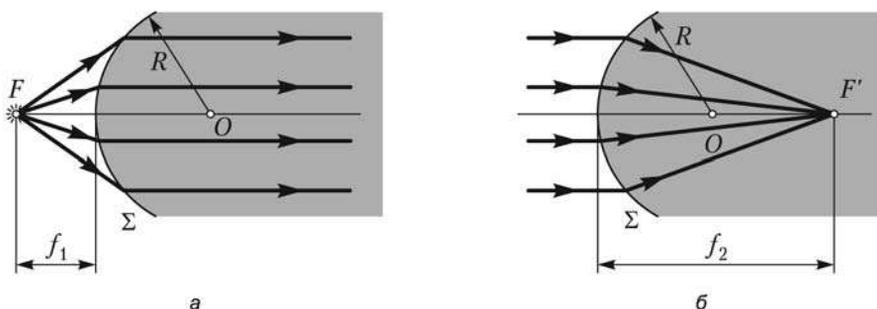


Рис. 3.2. Передний (а) и задний (б) фокусы преломляющей поверхности

Помимо оптической силы сферической преломляющей поверхности данную оптическую систему характеризуют постоянные величины называемые *фокусными расстояниями*. Точкой *переднего фокуса*  $F$  по определению называется точка на оптической оси, в которую надо поместить предмет, чтобы после преломления на сферической преломляющей поверхности изображение находилось на бесконечности (рис. 3.2, а). Расстояние  $f_1$  от поверхности  $\Sigma$  до точки первого фокуса называется *передним фокусным расстоянием* и определяется из выражения (3.2) при условии  $a_2 = \infty$  как

$$f_1 = a_1 = -\frac{n_1 R}{n_2 - n_1} = -\frac{n_1}{D}. \quad (3.4)$$

Точкой *заднего фокуса*  $F'$  по определению называется точка на оптической оси, куда после преломления на сферической преломляющей поверхности соберутся лучи от предмета, находящегося на бесконечности (рис. 3.2, б). Расстояние  $f_2$  от поверхности  $\Sigma$  до точки заднего фокуса называется *задним фокусным расстоянием* и определяется из выражения (3.2) при условии  $a_1 = \infty$ :

$$f_2 = a_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} = \frac{n_2}{D}. \quad (3.5)$$

В данном случае точки фокусов лежат по разные стороны сферической границы раздела и в соответствии с правилом знаков переднее фокусное расстояние отрицательно, а заднее — положительно. Как видно,

$$\frac{f_2}{f_1} = -\frac{n_2}{n_1},$$

то есть соответствующие фокусные расстояния прямо пропорциональны показателям преломления сред, в которых они расположены.

### Сферическое зеркало

Практически важным случаем является отражение света от сферического зеркала. Например: если границу на рис. 3.2 сделать зеркальной (это будет выпуклое сферическое зеркало), то при попадании луча на границу зеркало отражает луч обратно в среду с показателем преломления  $n_1$ . Так как для отраженного луча показатель преломления второй среды  $n_2 = -n_1$ , то выражение (3.3) будет иметь вид:

$$D = \frac{-n_1 - n_1}{R} = -\frac{2n_1}{R}. \quad (3.6)$$

Очевидно, что для сферического зеркала  $f_1 = f_2 = R/2$  — фокусное расстояние сферического зеркала равно половине радиуса кривизны, причем у собирающего (вогнутого) зеркала оно положительно, у рассеивающего (выпуклого) — отрицательно. Напомним, что это справедливо только для сравнительно узких (параксиальных) пучков. В данном случае условие параксиальности означает, что расстояние  $d$  от главной оптической оси до луча должно быть много меньше радиуса кривизны зеркала  $R$  и его фокусного расстояния  $f$  (рис. 3.3)<sup>1</sup>.

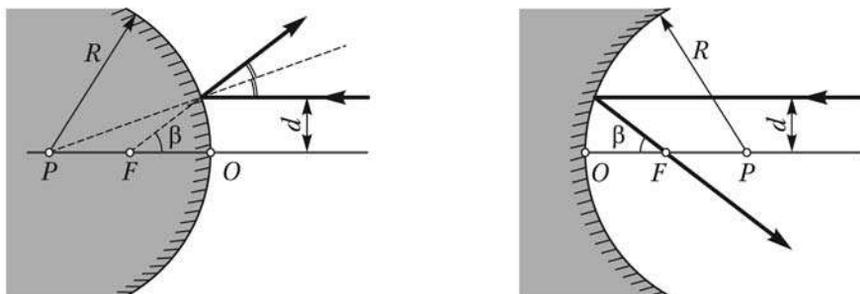


Рис. 3.3. Сферические зеркала: выпуклое (рассеивающее) и вогнутое (собирающее)

Таким образом, случаи выпуклого и вогнутого зеркала отличаются лишь знаком  $R$ . Легко видеть, что фокус вогнутого зеркала — действительный, а фокус выпуклого зеркала — мнимый (см. рис. 3.3).

Примеры построения изображений в сферических зеркалах приведены на рис. 3.4. Во всех случаях использованы те лучи, ход которых легко определить. Для вогнутого зеркала:

- луч, идущий параллельно оптической оси, после отражения проходит через фокус зеркала;

<sup>1</sup> Очень важно не забывать об этом условии, потому что в учебной литературе, в том числе и в этой книге, оптические системы для упрощения рисунка нередко изображают с искажениями, когда диаметр светового пучка сопоставим с фокусным расстоянием. Строго говоря, это неверно, потому что параллельный пучок фокусирует в точку параболическим зеркалом, а не сферическим. Вспомните, как называется антенна для приема спутниковых телепрограмм.

- луч, прошедший через фокус, отражается параллельно оптической оси;
- луч, попавший в вершину зеркала, отражается под тем же углом к оптической оси;
- луч, прошедший через центр кривизны, отражается по тому же пути в обратном направлении.

Аналогично выполняется построение для выпуклого зеркала, но в этом случае через фокус или центр кривизны проходят продолжения лучей.

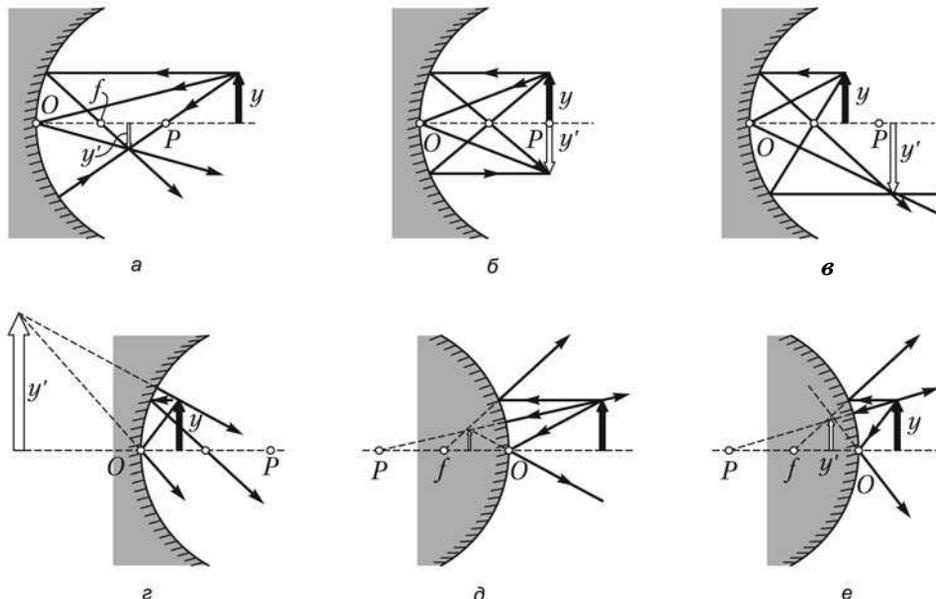


Рис. 3.4. Построение изображения в сферических зеркалах при различных положениях предмета  $y$ : а-г — вогнутое зеркало, д, е — выпуклое

Плоское зеркало может рассматриваться как частный случай сферического зеркала. Плоская поверхность имеет радиус кривизны  $R = \infty$ , ее оптическая сила  $D = 0$ , а по формуле сферической преломляющей поверхности (3.2), учитывая, что  $n_2 \approx -n_1$ , получим  $a_2 = -a_1$ . Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод: изображение предмета в плоском зеркале мнимое, равное и зеркально-симметрично расположенное относительно плоскости зеркала.

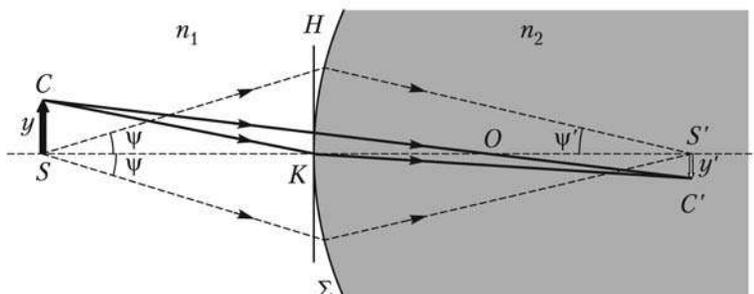
### Линейные и угловые характеристики изображений

Используя свойства парааксиальных гомоцентрических пучков, можно построить изображение небольших протяженных предметов при преломлении на сферической поверхности. Плоскость предмета и плоскость его изображения называются плоскостями, сопряженными в данной оптической системе.

Поставив предмет  $SC$  перпендикулярно главной оптической оси, получим изображение  $S'C'$  (рис. 3.5). Обозначим длину отрезка  $SC$  через  $y$ , отрезка  $S'C'$  —

через  $y'$ . Отношение размера изображения к размеру предмета носит название *линейного* или *поперечного увеличения*:

$$V = \frac{y'}{y} = \frac{S'C'}{SC}. \quad (3.7)$$



**Рис. 3.5.** К определению линейного увеличения. Первый луч без преломления проходит через центр кривизны  $O$ , второй — преломляется в вершине  $K$

Для отрезков, перпендикулярных главной оптической оси, вводится правило знаков, по которому отрезки, идущие вверх от оптической оси, считаются положительными, а идущие вниз — отрицательными. Это означает, что увеличение оптической системы *положительно*, если изображение прямое, и *отрицательно*, если изображение перевернутое.

В параксиальном приближении для точки  $K$  закон преломления можно записать как

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

и увеличение определяется через расстояния от предмета и изображения до вершины преломляющей поверхности ( $a_1$  и  $a_2$ ) и показатели преломления обеих сред:

$$V = \frac{n_1 a_2}{n_2 a_1}. \quad (3.8)$$

Для преломляющей системы показатели преломления  $n_1$  и  $n_2$  всегда положительны, так что знак увеличения определится знаком отношения  $a_2/a_1$ . Для расположения изображения и предмета, соответствующего рис. 3.5, отрезки  $a_1$  и  $a_2$  имеют разные знаки, то есть  $V$  отрицательно, а изображение перевернутое; для мнимых изображений — наоборот.

Сопряженные плоскости называются *главными*, если для них  $V = 1$ , то есть изображение получается прямым и равным по величине объекту. Оптическая система, состоящая из одной сферической преломляющей поверхности, представляет собой вырожденный случай: главные плоскости совпадают между собой и представлены плоскостью  $H$ , касательной к сфере в точке  $K$  (рис. 3.5), то есть  $a_1 = a_2 = 0$ . Соответственно, фокусные расстояния сферической поверхности следует считать расстояниями от этой единственной главной плоскости до фокусов.

Углы  $\psi$  и  $\psi'$  на рис. 3.5 определяют максимальное раскрытие (*апертуру*) пучков, падающих на поверхность  $\Sigma$  — угол  $2\psi$ ; и сопряженных им изображающих пучков — угол  $2\psi'$ . Предельное значение этих углов определяется требованием соблюдения условий параксиальности. При выполнении условий параксиальности без искажения передается изображение не только точки, но и небольшого предмета, расположенного около оси оптической системы. Оправа линзы или иное отверстие, ограничивающее углы  $\psi$  и  $\psi'$ , называется *апертурной диафрагмой*.

Для параксиальных лучей имеет место соотношение

$$yn_1\psi = y'n_2\psi', \quad (3.9)$$

носящее название *теоремы Лагранжа—Гельмгольца*.

При использовании пучков со значительной апертурой получение четких изображений возможно лишь при выполнении условия

$$yn_1 \sin \psi = y'n_2 \sin \psi' \quad (3.10)$$

(*условие синусов Аббе*). Для параксиальных лучей углы  $\psi$  и  $\psi'$  малы, так что условие Аббе переходит в уравнение (3.9).

Оба этих условия налагают ограничение на свободу преобразования световых пучков с помощью оптических систем, связывая апертуру и размер предмета с апертурой и размером изображения. Из него вытекает, что преобразование заданного оптического пучка оптической системой в пучок произвольного строения невозможно. Геометрия преобразованного пучка может быть только такой, какую допускает условие Лагранжа—Гельмгольца.

Это важное принципиальное ограничение приобретает особое значение в вопросах фотометрии и концентрирования лучистой энергии с помощью оптических систем.

## Центрированная оптическая система

Преломление лишь на одной сферической границе двух сред в реальных оптических системах используется сравнительно редко. Большинство оптических приборов содержит, по крайней мере, две преломляющие поверхности. В качестве простейшего оптического прибора можно привести линзу.

Система сферических поверхностей называется *центрированной*, если центры всех поверхностей лежат на одной прямой, которая называется *главной оптической осью* системы (рис. 3.6).

В центрированной оптической системе при любом числе преломлений на границах сред *гомоцентрический параксиальный пучок* остается *гомоцентрическим* и дает *стигматическое* изображение.

Изображение малого отрезка возникает аналогично тому, как это происходит на одной преломляющей поверхности. Также в центрированной системе имеет место наличие двух фокусов и двух фокальных плоскостей, установленное для одной преломляющей поверхности; сохраняет силу теорема Лагранжа—Гельмгольца:

$$y_1 n_1 \psi_1 = y_2 n_2 \psi_2 = y_3 n_3 \psi_3 = \dots \quad (3.11)$$

Для центрированной оптической системы сохраняет смысл и понятие главных плоскостей, то есть таких сопряженных плоскостей, в которых объект и изо-

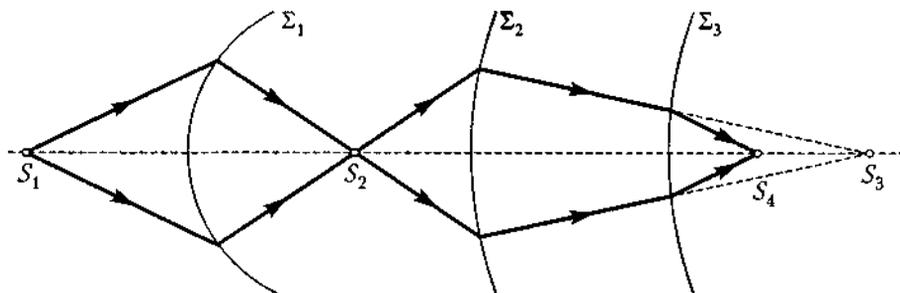


Рис. 3.6. Пример центрированной оптической системы из трех преломляющих поверхностей

бражение имеют одинаковую величину и ориентацию. В то же время если для одной преломляющей сферической поверхности обе главные плоскости сливаются в одну, касающуюся ее вершины, то для центрированной системы эти две плоскости уже не совпадают (см. следующий раздел). Фокусные расстояния системы, так же как в случае одной сферической поверхности, рассчитываются как расстояния от соответствующей главной плоскости до фокуса.

## 3.2. Преломление света в линзе. Формула тонкой линзы

Простейший случай центрированной системы, состоящей всего из двух сферических поверхностей, отделяющих от окружающей среды какой-либо прозрачный, хорошо преломляющий материал, имеет большое значение. Такая система называется *линзой* и играет важную роль во многих оптических приборах.

Линза считается *тонкой*, если расстояние между вершинами сферических поверхностей, ограничивающих ее, мало по сравнению с радиусами кривизны поверхностей. В случае тонкой линзы вершины преломляющих поверхностей можно считать совпадающими в одной точке, которая носит название *оптического центра* линзы. Любой параксимальный луч, проходящий через точку оптического центра, практически не испытывает преломления. Действительно, для таких лучей участки обеих поверхностей линзы можно считать параллельными, так что луч, проходя через них, не меняет направления, но лишь смещается параллельно самому себе (преломление в плоскопараллельной пластинке), а так как толщина линзы можно пренебречь, то смещение это ничтожно и луч практически проходит без преломления. Луч, проходящий через центр, называется *осью* линзы. Та из осей, которая проходит через центры кривизны обеих поверхностей, называется *главной*, остальные — *побочными*.

Выражение, связывающее положение предмета и его изображения в линзе (*формула линзы*), может быть получено, если рассмотреть два последовательных преломления луча на каждой из границ (см. рис. 3.7).

Первая (по ходу луча) преломляющая поверхность дает изображение предмета  $A$  в точке  $C$ , которое, в свою очередь, является предметом для второй по ходу луча поверхности. Окончательное изображение предмета  $A$  в линзе — точка  $B$ .

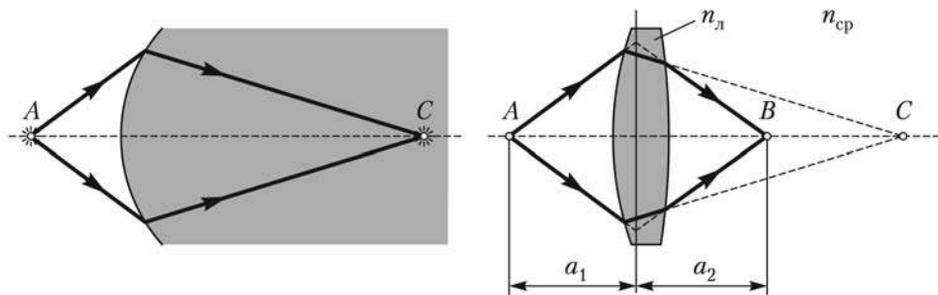


Рис. 3.7. Формирование изображения при преломлении на двух границах раздела

Формула тонкой линзы справедлива при тех же ограничениях, которые мы ввели при преломлении на одной сферической границе сред. Условия: *гомоцентричность* пучков, *стигматичность* изображений, *параксиальность* и *правило знаков*. Главные плоскости тонкой линзы совпадают между собой и проходят перпендикулярно главной оптической оси в оптическом центре, поэтому расстояния до предмета и изображения отсчитываются от оптического центра линзы ( $a_1$  и  $a_2$ ). Показатель преломления материала линзы обозначим  $n_l$ , показатель преломления однородной среды, в которой находится линза, —  $n_{cp}$ .  $R_1$  — радиус кривизны первой по ходу луча сферической преломляющей поверхности,  $R_2$  — радиус второй поверхности (рис. 3.8).

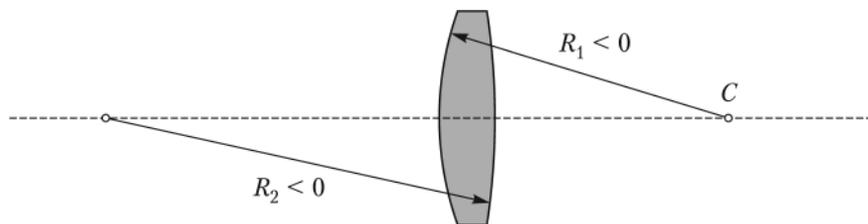


Рис. 3.8. Тонкая линза

В этом случае формула линзы будет иметь вид:

$$\frac{n_{cp}}{a_2} - \frac{n_{cp}}{a_1} = (n_l - n_{cp}) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.12)$$

Формула (3.12) позволяет однозначно определить положение изображения, если задано положение предмета. Правая часть равенства не зависит от положения предмета и его изображения и определяется только свойствами самой оптической системы. Первый множитель  $(n_l - n_{cp})$  определяет физические параметры системы, а второй  $(1/R_1 - 1/R_2)$  — геометрические. По аналогии с формулой сферической преломляющей поверхности правая часть выражения (3.12) названа *оптической силой* тонкой линзы:

$$D = (n_l - n_{cp}) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.13)$$

Легко показать, что оптическая сила тонкой линзы, по сути, есть сумма оптических сил ее поверхностей. Действительно,

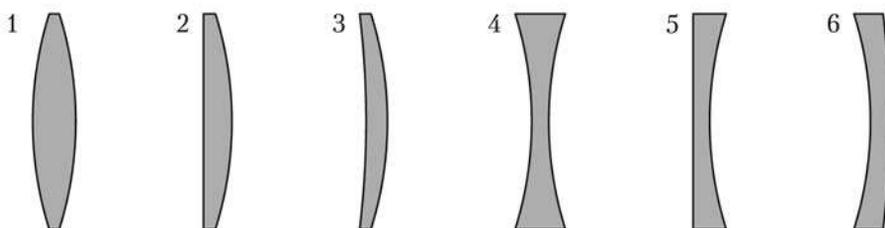
$$D_1 = \frac{(n_s - n_{cp})}{R_1}, \quad D_2 = \frac{(n_{cp} - n_s)}{R_2}, \quad D = D_1 + D_2.$$

Измеряется оптическая сила линзы в *диоптриях* (дптр). 1 диоптрия — это оптическая сила линзы, находящейся в воздухе, имеющей фокусное расстояние в 1 метр.

Линза называется *собирающей (положительной)*, если  $D > 0$ ; *рассеивающей (отрицательной)*, если  $D < 0$ . В случае линзы, представленной на рис. 3.8,  $R_1 > 0$ , а  $R_2 < 0$ ; тогда

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|},$$

и оптическая сила такой линзы  $D > 0$ , если  $n_s > n_{cp}$ . Таким образом, знак оптической силы линзы определяется ее геометрическими параметрами и соотношением показателей преломления сред.



**Рис. 3.9.** Классификационные типы линз: 1 — двояковыпуклая, 2 — плосковыпуклая, 3 — выпукло-вогнутая (положительный мениск), 4 — двояковогнутая, 5 — плосковогнутая, 6 — вогнуто-выпуклая (отрицательный мениск)

На рис. 3.9 представлены линзы различных конфигураций. Если  $n_s > n_{cp}$ , то линзы под номерами 1, 2, 3 являются положительными, а под номерами 4, 5, 6 — отрицательными, если же  $n_s < n_{cp}$ , то наоборот. Видно, что знак оптической силы линзы коррелирует с геометрическим фактором ее относительной осевой толщины: если стеклянная линза тоньше на краях и толще по центру, то она является собирающей (в воздухе или в воде), и наоборот, более тонкая по центру линза в этих же условиях будет рассеивающей.

Рассматривая тонкую линзу, находящуюся в однородной среде, можно ввести величины, определяющие положения точек главных фокусов этой оптической системы, — фокусные расстояния:

$$f_1 = -\frac{n_{cp}}{(n_s - n_{cp})\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = -\frac{n_{cp}}{D}, \quad f_2 = \frac{n_{cp}}{(n_s - n_{cp})\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{n_{cp}}{D}. \quad (3.14)$$

Они получены по аналогии с фокусными расстояниями сферической преломляющей поверхности и, как видно, имеют разные знаки. Таким образом, точки фокусов лежат по разные стороны от линзы (точка первого фокуса — перед линзой, точка второго фокуса — за линзой по ходу луча), но фокусные расстояния

равны по абсолютной величине. Поэтому иногда, используя физический жаргон, говорят о «фокусе» линзы (одном фокусном расстоянии).

Пример построения изображения в тонкой линзе представлен на рис. 3.10. Здесь собирающая (положительная) линза строит действительное, перевернутое и уменьшенное изображение  $y'$  предмета  $y$ . Линейное (поперечное) увеличение, даваемое тонкой линзой, рассчитывается точно так же, как и для одной поверхности:

$$V = \frac{y'}{y} = \frac{a_2}{a_1} \quad (3.15)$$

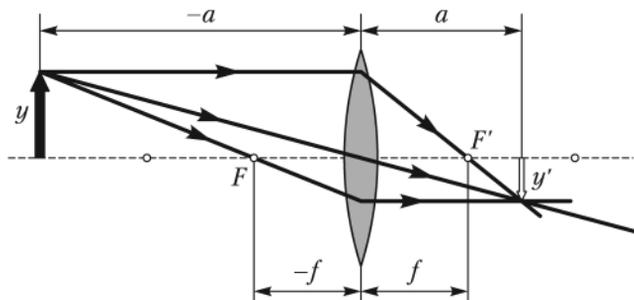


Рис. 3.10. Построение изображения в тонкой положительной линзе

В соответствии с вышесказанным найдем, что для перевернутых действительных изображений увеличение отрицательно, а для прямых мнимых  $V > 0$ . Величина и знак линейного увеличения для одной и той же линзы зависят от расположения предмета.

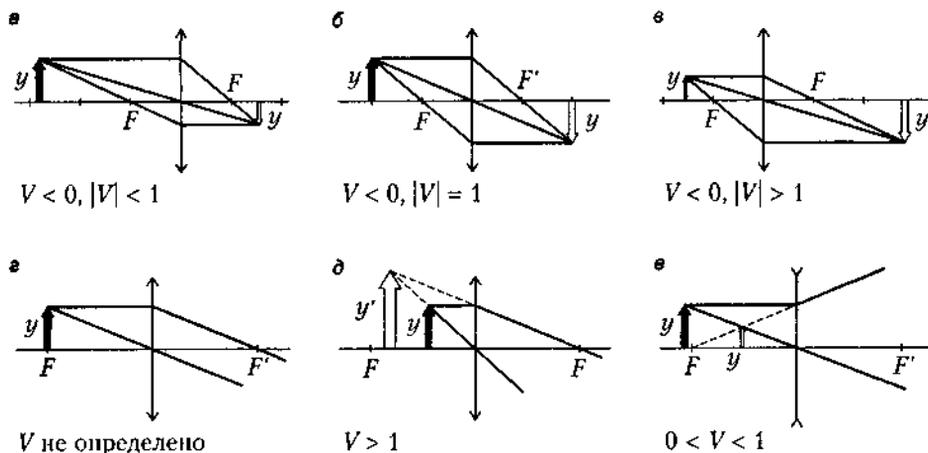


Рис. 3.11. Построение изображений и значения линейных увеличений для положительных (а-д) и отрицательной (е) линз в зависимости от положения предмета

- Если предмет расположен за двойным фокусом собирающей линзы, то его изображение оказывается действительным, перевернутым и уменьшенным (рис. 3.11, а).

- Если предмет находится в точке двойного фокуса, то изображение оказывается по величине равным предмету, оставаясь действительным и перевернутым (рис. 3.11, б). При дальнейшем приближении предмета к линзе изображение постепенно отдалится, увеличиваясь в размерах, а при достижении предметом передней фокальной плоскости — переносится в бесконечность (рис. 3.11, в, з).
- Расположение предмета между фокусом и линзой приводит к формированию мнимого, прямого, увеличенного изображения (случай увеличительного стекла или лупы, рис. 3.11, д).

Отрицательная (рассеивающая) линза характеризуется существенно меньшей вариативностью формируемых изображений: при любом расположении предмета изображение получается мнимым, прямым и уменьшенным (рис. 3.11, е).

Для определения фокусного расстояния оптической системы, состоящей из нескольких сложенных вместе тонких линз, находящихся в однородной среде с показателем преломления  $n$ , можно воспользоваться выражением

$$f_{\text{сист}} = \frac{n}{D_{\text{сист}}}, \quad (3.16)$$

где  $D_{\text{сист}}$  — оптическая сила системы, определяемая суммой (с учетом знаков) оптических сил каждой линзы в отдельности, рассчитанных для той среды, в которой находится система.

На рис. 3.12 изображена система двух линз: собирающей и рассеивающей. Видно, что в данном случае оптическая сила собирающей линзы по модулю больше, чем рассеивающей (ее фокусное расстояние короче). Поэтому при их совмещении друг с другом итоговая оптическая сила оказывается положительной:  $D = D_1 + D_2 > 0$ . Естественно, что оптическая сила такой системы меньше, чем оптическая сила у первой (собирающей) линзы, а фокусное расстояние — больше.

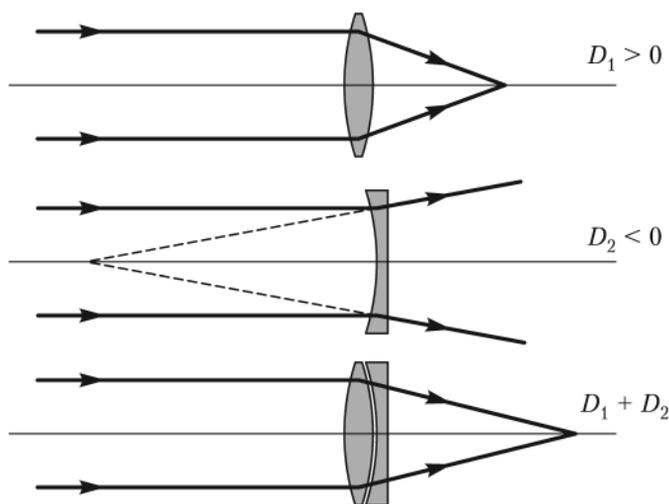


Рис. 3.12. Пример собирающей двухлинзовой системы из положительной и отрицательной линз

Если в многолинзовой системе оптические элементы расположены на некотором расстоянии друг от друга, то оптическая сила такой системы не равна простой сумме оптических сил составляющих ее линз, а зависит еще и от расстояния между линзами  $L$ :  $D = D_1 + D_2 - D_1 D_2 L$  (см. раздел 3.4).

### 3.3. Идеальные оптические системы

Тонкая линза как совокупность двух центрированных поверхностей представляет собой простейшую оптическую систему, дающую довольно несовершенное изображение. В большинстве оптических приборов используются более сложные системы, характеризующиеся наличием большого числа преломляющих поверхностей и не ограниченные требованием близости этих поверхностей (условие тонкой линзы).

В 1841 г. Гаусс сформулировал общую теорию *идеальной оптической системы*, то есть системы, в которой сохраняется *гомоцентричность* пучков и изображение геометрически подобно предмету. Согласно определению Гаусса всякой точке пространства объектов в идеальной системе соответствует точка пространства изображений, и эти точки называются *сопряженными*. Аналогично, каждой прямой и каждой плоскости пространства объектов должны соответствовать сопряженные прямая и плоскость пространства изображений. Иными словами, теория идеальной оптической системы — чисто геометрическая теория, устанавливающая соотношение между точками, линиями, плоскостями.

Из изложенного в параграфе 3.1 следует, что идеальная оптическая система может быть осуществлена с достаточным приближением в виде центрированной оптической системы, если ограничиться областью вблизи оси симметрии, то есть парааксиальными пучками. В теории Гаусса требование тонкости системы отпадает, но по-прежнему предполагается, что лучи парааксиальные. Построение физической системы, которая приближалась бы к идеальной даже при значительно расходящихся пучках, есть задача *прикладной геометрической оптики*.

В идеальной оптической системе линия, соединяющая центры кривизны сферических поверхностей, представляет собой ось симметрии центрированной системы (ось  $OO'$  на рис. 3.13) и по-прежнему называется *главной оптической осью* системы. Теория Гаусса устанавливает ряд так называемых *кардинальных точек* и *плоскостей*, задание которых полностью описывает все свойства оптической системы и позволяет пользоваться ею без построения реального хода лучей в системе.

Рассмотрим луч, входящий в оптическую систему параллельно оптической оси  $OO'$  (см. рис. 3.13). Выйдя из системы, этот луч пройдет через задний фокус  $F_2$ . Точка пересечения падающего и выходящего лучей определяет положение *задней главной плоскости*  $H_2$ . Аналогично, рассматривая луч, идущий через систему справа налево, найдем точку пересечения падающего и выходящего лучей, определяющую положение *передней главной плоскости*  $H_1$ . Любой точке на плоскости  $H_1$  найдется сопряженная точка на плоскости  $H_2$ , то есть плоскости  $H_1$  и  $H_2$  изображаются друг в друге. К тому же, поскольку любой луч пересекает обе главные плоскости на одной и той же высоте, увеличение равно  $+1$ .

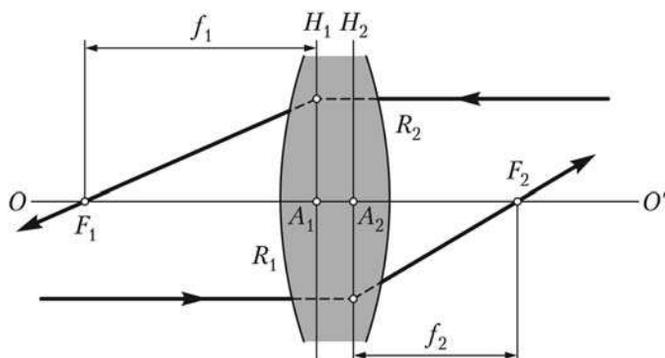


Рис. 3.13. Главные плоскости оптической системы

Точки  $A_1$  и  $A_2$  пересечения главных плоскостей с осью носят название *главных точек системы*. Расстояния от главных точек до фокусов называются *фокусными расстояниями системы* (расстояния  $f_1$  и  $f_2$  на рис. 3.13). Примеры определения фокусных расстояний в *толстой линзе*, частном случае простейшей центрированной оптической системы, показаны на рис. 3.14.

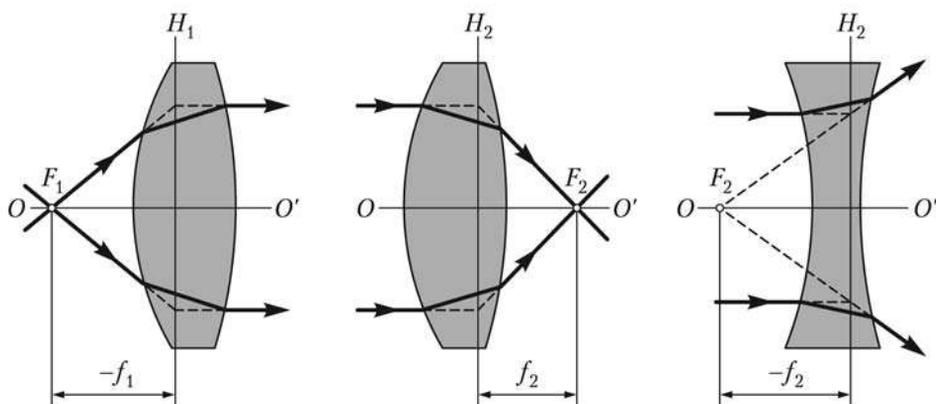


Рис. 3.14. Точки фокусов и фокусные расстояния толстой линзы

Главные плоскости и главные точки могут лежать как внутри, так и вне системы (рис. 3.15), совершенно несимметрично относительно поверхностей, ограничивающих систему, например даже по одну сторону от нее. Поскольку фокусные расстояния центрированной системы отсчитываются от главных плоскостей, расстояния от точек фокусов до реальных поверхностей, ограничивающих систему, могут быть различными (например, линзы-мениски на рис. 3.15, третья и шестая).

Две фокальные плоскости, две главные плоскости и точки их пересечения с главной оптической осью системы носят название *кардинальных плоскостей и точек системы*. Используя свойства этих кардинальных объектов, можно строить изображение предмета в толстой линзе, находящейся в однородной среде, не рас-

считывая прохождение этих лучей внутри линзы. Примеры таких построений приведены на рис. 3.16.

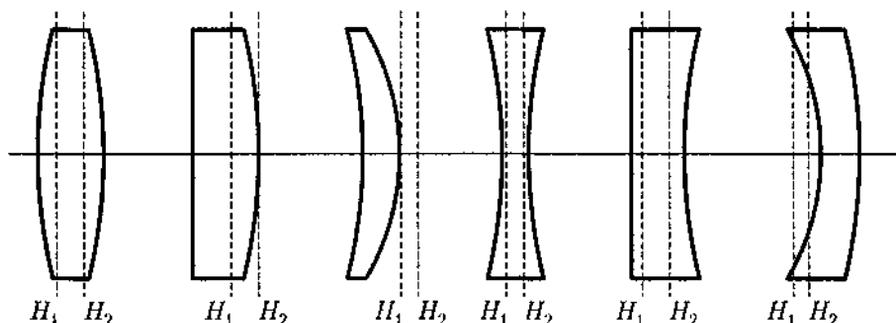


Рис. 3.15. Положение главных плоскостей линз разных типов

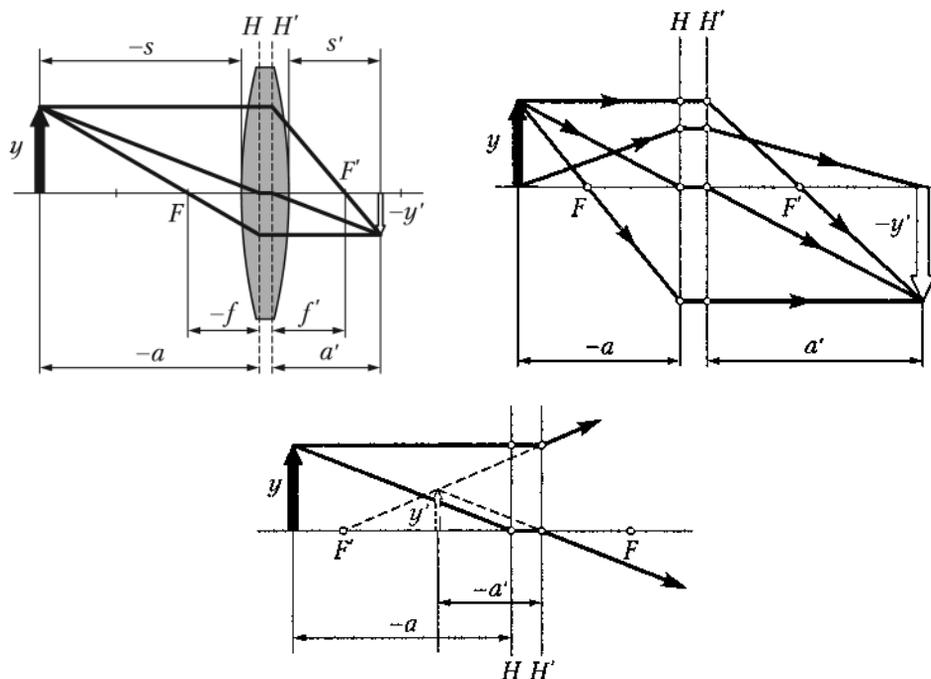


Рис. 3.16. Примеры построения изображений в толстых линзах

### 3.4. Матричное описание оптических систем

Траектория любого луча, проходящего через оптическую систему, представленную набором преломляющих поверхностей, состоит из отрезков прямых линий. В приближении гауссовой оптики каждый *меридиональный* луч, то есть луч, лежащий в одной плоскости с главной оптической осью системы  $Z$ , можно задать

двумя параметрами. Этими параметрами являются: высота  $y$ , на которой этот луч пересекает некоторую заранее выбранную *опорную плоскость* (ОП)  $Z = \text{const}$  и угол  $\psi$  между лучом и оптической осью (рис. 3.17). Для проведения расчетов оказывается удобнее заменить угол  $\psi$  соответствующим ему параметром  $n\psi$ . (Строго говоря, произведением  $n \cdot \sin \psi$ , но, как известно, значение функции  $\sin \psi$  малого угла примерно равно значению самого угла  $\psi$ .)

Для исследования поведения луча при прохождении оптической системы необходимо рассмотреть только два основных процесса.

- *Перемещение* между двумя преломляющими поверхностями через *оптический промежуток*. Луч просто проходит по прямой линии от одной поверхности к другой. Область между поверхностями характеризуется ее толщиной  $l$  и показателем преломления среды  $n$ .
- *Преломление* на сферической границе раздела с радиусом  $R$  между областями с разными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ .

Преобразование параметров  $y$  и  $n\psi$  луча при переходе от одной опорной плоскости к другой в параксиальном приближении линейно и имеет вид:

$$\begin{cases} y_2 = Ay_1 + Bn_1\psi_1, \\ n_2\psi_2 = Cy_1 + Dn_1\psi_1. \end{cases}$$

Это преобразование можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Таким образом, каждому элементу оптической системы можно сопоставить свою матрицу преобразования лучей. Для того чтобы получить общую матрицу преобразования лучей, описывающую оптическую систему в целом, нужно перемножить все матрицы перемещений, преломлений и отражений в порядке, отвечающем последовательности прохождения луча через соответствующие элементы оптической системы.

Очевидно, что при прохождении луча через оптический промежуток угол наклона  $\psi$  остается постоянным, а высота изменяется по закону  $y_2 = y_1 + \text{tg } \psi$  (см. рис. 3.17). Переходя от угла наклона к параметру  $n\psi$  и учитывая, что в параксиальном приближении  $\text{tg } \psi \approx \psi$ , находим, что преобразование параметров луча оптическим промежутком можно описать матрицей

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

где  $L = l/n$  — *приведенная длина* оптического промежутка. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\psi_1 \end{pmatrix}.$$

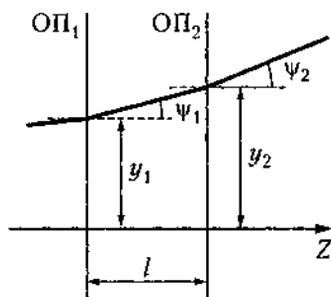


Рис. 3.17. Опорные плоскости и оптический промежуток

Для нахождения матрицы преломления выберем опорные плоскости ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub> в непосредственной близости от преломляющей поверхности по обе ее стороны (рис. 3.18).

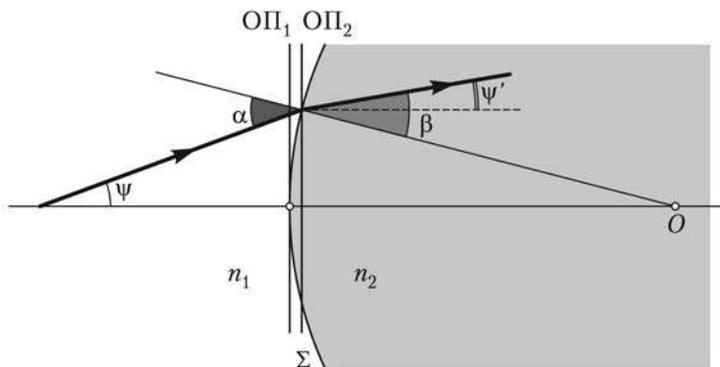


Рис. 3.18. К выводу матрицы преломления

Расстояние между ними в параксиальном приближении пренебрежимо мало, поэтому можно считать, что луч пересекает обе плоскости на одной и той же высоте:  $y_2 = y_1$ . Для параметра  $n\psi$  из несложных геометрических преобразований с учетом закона преломления получаем  $n\psi_2 = n\psi_1 - Dy_1$ , где  $D$  — оптическая сила преломляющей поверхности:

$$D = \frac{(n_2 - n_1)}{R} \text{ (см. формулу 3.3).}$$

Таким образом, матрица преломления имеет вид:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

и соответствующее матричное уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\psi_1 \end{pmatrix}.$$

Правило знаков позволяет распространить формулу (3.19) и на сферические зеркала, заменив  $n_2$  на  $(-n_1)$  и использовав для оптической силы выражение (3.6).

Если произвольная оптическая система состоит из  $N$  элементов (оптических промежутков и преломляющих поверхностей), то каждый из них может быть описан своей матрицей преобразования  $\mathbf{M}_m$ . Обозначив вектор луча

$$\begin{pmatrix} y_m \\ n_m\psi_m \end{pmatrix}$$

на  $m$ -й опорной плоскости, находящейся перед соответствующим элементом, через  $\mathbf{K}_m$ , получим рекуррентное соотношение:  $\mathbf{K}_{m+1} = \mathbf{M}_m \cdot \mathbf{K}_m$ , аналогично  $\mathbf{K}_m = \mathbf{M}_{m-1} \cdot \mathbf{K}_{m-1}$  и т. д. Отсюда находим, что для опорной плоскости ОП <sub>$N+1$</sub> , находящейся на выходе из системы,  $\mathbf{K}_{N+1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{K}_1$ , где  $\mathbf{M}$  — матрица преобразования

системы, представляющая собой произведение всех матриц, взятых в обратном порядке:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_N \cdot \mathbf{M}_{N-1} \cdot \mathbf{M}_{N-2} \cdot \dots \cdot \mathbf{M}_1. \quad (3.20)$$

Так, например, для толстой линзы в воздухе, представляющей собой однородную среду толщиной  $l$  с показателем преломления  $n$ , ограниченную сферическими поверхностями с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ , получаем

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_2 \mathbf{T} \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - D_1 L & L \\ -(D_1 + D_2 - D_1 D_2 L) & 1 - D_2 L \end{pmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, оптическая сила такой линзы не равна сумме оптических сил составляющих ее поверхностей, а определяется как  $D = D_1 + D_2 - D_1 D_2 L$  (см. раздел 3.2). В частном случае тонкой линзы, когда  $L \rightarrow 0$ , матрица  $\mathbf{T}$  вырождается в единичную и общая матрица преобразования  $\mathbf{M}$  имеет такой же вид, как матрица  $\mathbf{R}$  преломления на одной поверхности, но с оптической силой  $D = D_1 + D_2$ .

Отметим, что определители матриц  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{R}$  равны единице:  $AD - BC = 1$ . Следовательно, будет равен единице и определитель матрицы для любой оптической системы. Для того чтобы лучше представить смысл элементов матрицы преобразования  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , рассмотрим случаи, когда один из ее элементов обращается в ноль.

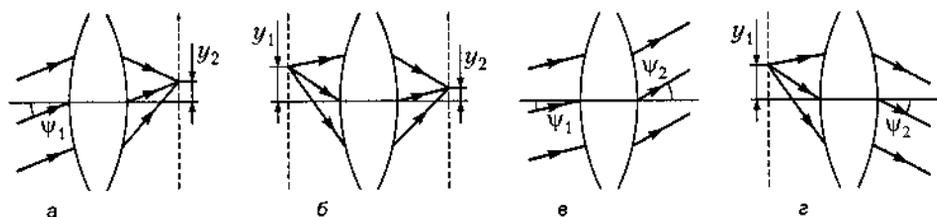


Рис. 3.19. К определению физического смысла матрицы преобразования

1.  $A = 0$ , следовательно  $y_2 = B \cdot n_1 \psi_1$ . Это значит, что все лучи, входящие в систему под одинаковым углом, пройдут через одну и ту же точку на выходной плоскости ОП<sub>2</sub> (рис. 3.19, а). Следовательно, ОП<sub>2</sub> является задней фокальной плоскостью системы.
2.  $B = 0$ , следовательно  $y_2 = A \cdot y_1$ . Все лучи, выходящие из точки  $S$  с координатой  $y_1$  на плоскости ОП<sub>1</sub>, попадут в точку  $P$  с координатой  $y_2$  на плоскости ОП<sub>2</sub> (рис. 3.19, б). Таким образом, точки  $S$  и  $P$  являются объектом и изображением, а плоскости ОП<sub>1</sub> и ОП<sub>2</sub> — сопряженными плоскостями. Величина  $A = y_2 / y_1$  дает коэффициент увеличения системы.
3.  $C = 0$ , тогда  $n_2 \psi_2 = D \cdot n_1 \psi_1$ . В этом случае все лучи, входящие в систему параллельно друг другу под углом  $\psi_1$  к оптической оси, выйдут из системы также параллельным пучком (рис. 3.19, в). Оптическая система, преобразующая параллельный пучок лучей в параллельный, называется *афокальной* или *телескопической*. Величина  $\psi_2 / \psi_1 = n_1 \cdot D / n_2$  представляет собой *угловое увеличение* системы.

4.  $D = 0$ , при этом  $n_2\psi_2 = C \cdot y_1$ . Все лучи, выходящие из точки  $y_1$  входной опорной плоскости, выйдут из системы под одинаковым углом (рис. 3.19, з). Следовательно, ОП<sub>1</sub> – передняя фокальная плоскость системы.
5. Если один из элементов  $A$  или  $D$  равен нулю, то условие  $AD - BC = 1$  требует, чтобы  $BC = -1$ . Аналогично, если в нуль обращается  $B$  или  $C$ , то  $AD = 1$ .

### 3.5. Глаз как оптическая система

Опуская физиологические особенности строения глаза и механизма зрительного восприятия, рассмотрим, как работает человеческий глаз с точки зрения оптики. Оптическая система глаза – хрусталик – представляет собой прозрачное бесцветное тело, напоминающее двояковыпуклую линзу, передняя поверхность которой менее выпуклая, чем задняя. Он состоит из слоев различной плотности, имеющих волокнистое строение. Мышца глаза, рефлекторно напрягаясь или расслабляясь, может изменять кривизну поверхностей хрусталика, главным образом передней. Таким образом, осуществляется *аккомодация*, то есть изменение оптической силы глаза, позволяющее сфокусировать на сетчатке изображение предметов, находящихся на разном расстоянии. Так как деформация хрусталика может производиться только в определенных пределах, для глаза существуют определенные границы, в пределах которых глаз может отчетливо видеть предметы. Эти границы определяют так называемую *область аккомодации* глаза. Наиболее отдаленная граница, которую глаз может отчетливо видеть при ненапряженной мышце, называется *дальней*, а ближайшая граница, которую он способен отчетливо видеть при максимальном напряжении мышцы, – *ближней* точкой ясного видения. В ненапряженном состоянии нормальный глаз аккомодирован на рассматривание бесконечно удаленных предметов, то есть он собирает параллельные лучи в точке сетчатки (рис. 3.20, а). Таким образом, дальняя точка ясного видения для нормального глаза находится в бесконечности. В возрасте до десяти лет ближняя точка нормального глаза лежит на расстоянии 7–8 см от глаза. В среднем, к тридцати годам это расстояние увеличивается примерно до 15 см.

С приближением рассматриваемого предмета к глазу увеличивается *угол зрения*, а с ним и размеры изображения на сетчатке. Это позволяет рассмотреть более мелкие детали. Однако при максимально возможном приближении усиливается напряжение мышцы, деформирующей хрусталик, работа глаза становится утомительной. В случае нормального глаза *оптимальное расстояние* для чтения и письма составляет около 25 см. Это расстояние для нормального глаза и принимается условно за *расстояние наилучшего видения*.

У близорукого глаза (рис. 3.20, б) оба предела наилучшего видения находятся ближе, чем у нормального. Ближний предел дальнорядного глаза расположен дальше, чем у нормального глаза, а его дальний предел всегда отрицателен, то есть дальняя точка ясного видения находится не спереди, а позади глаза (рис. 3.20, в). Такой глаз в ненапряженном состоянии может собирать на сетчатке только сходящиеся пучки лучей. У близорукого глаза в ненапряженном состоянии параллельные лучи сходятся перед, а у дальнорядного – за сетчаткой.

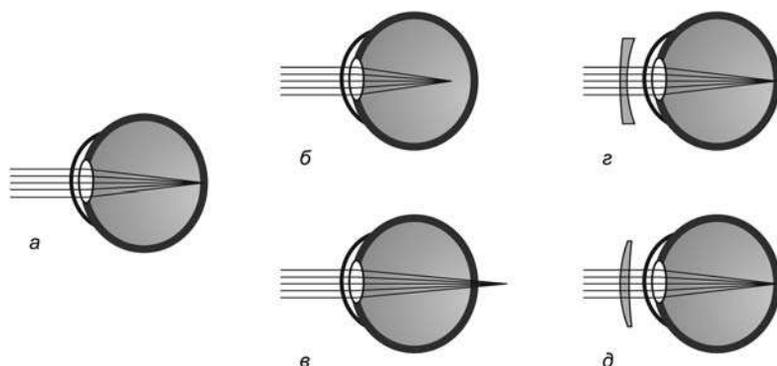


Рис. 3.20. Глаз и коррекция недостатков зрения

Близорукость может быть обусловлена большей, а дальность — меньшей глубиной глаза по сравнению с глубиной нормального глаза. Эти, а также другие недостатки глаза могут возникать из-за неправильных значений кривизны преломляющих поверхностей хрусталика и роговицы, несимметричности этих поверхностей, неправильного положения хрусталика и т. д.

С термином «дальзорукый» ассоциируется ошибочное представление, что дальность якобы дает возможность видеть далекие предметы. Никакими преимуществами перед нормальным глазом дальзорукый не обладает, так как вся область перед глазом, отчетливо видимая дальзоруким глазом, видна и нормальным глазом. Но область между ближними точками ясного видения дальзорукого и нормального глаза недоступна для отчетливого рассматривания дальзоруким глазом. Примерно к 50-ти годам из-за уплотнения хрусталика, теряющего возможность достаточно сжиматься, появляется, так называемая, старческая дальность — ближняя точка наилучшего видения удаляется от глаза на расстояние 50 см. Читать на таком расстоянии уже трудно.

Для того чтобы скорректировать зрение и позволить человеку читать с расстояния наилучшего видения, применяются очки для дальзорукого глаза с *положительными*, то есть собирающими, линзами (рис. 3.20, д), а для близорукого — с *отрицательными*, то есть рассеивающими, линзами (рис. 3.20, г). Положительные линзы приближают, а отрицательные отдаляют ближнюю точку наилучшего видения.

### 3.6. Аберрации оптических систем

В предыдущих разделах описан порядок построения и анализа изображений в идеальных оптических системах. При этом использовался ряд ограничений, например параксиальности пучков, добиться выполнения которых в реальных системах практически невозможно. Поэтому важно упомянуть о погрешностях (*абберациях*), возникающих в реальных оптических системах, исправлением которых занимается прикладная оптика.

*Астигматизм* — преобразование точечного (стигматического) фокуса в две взаимно перпендикулярные фокальные линии *a* и *b* (рис. 3.21).

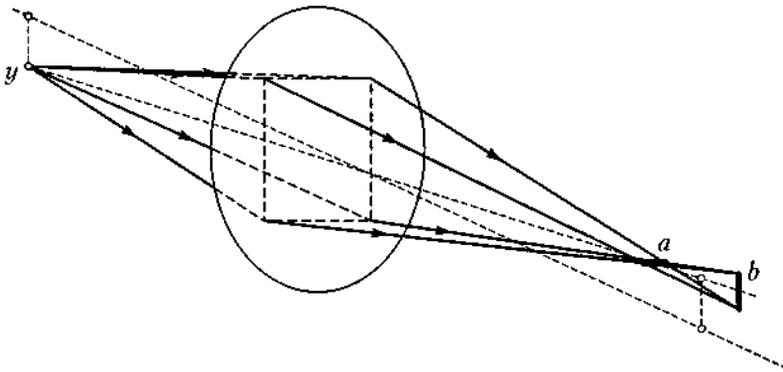


Рис. 3.21. Астигматизм

Астигматизм возникает, если центральный луч светового пучка идет под большим углом к оптической оси системы. При этом лучи, лежащие в *меридиональной* плоскости, то есть плоскости, проходящей через оптическую ось и центральный луч (вертикальная плоскость на рис. 3.21), пересекаются в точках, лежащих на горизонтальной фокальной линии  $a$ . Лучи же, лежащие в перпендикулярной *сагиттальной* или экваториальной плоскости, пересекаются на вертикальной фокальной линии  $b$ . Расстояние между фокальными линиями  $\Delta z$  (астигматическая разность) возрастает по мере увеличения наклона пучка.

Астигматизм может быть обусловлен также нарушением гомоцентричности пучков при преломлении наклонных пучков или связан с асимметрией фокусирующей системы: отклонением от сферы при изготовлении фокусирующей оптики.

Погрешность, носящая название *сферической aberrации*, возникает при нарушениях паракиальности падающих пучков и связана с тем, что сферическая преломляющая поверхность, вообще говоря, не обеспечивает сохранения гомоцентричности пучка.

Продольная сферическая aberrация  $\Delta S = S'S''$  (размытие точечного фокуса) представлена на рис. 3.22. Паракиальные лучи образуют изображение  $S'$ , в то время как лучи, идущие под большими углами к оптической оси и пересекающие линзу вблизи ее краев, преломляются сильнее и формируют изображение  $S''$ .

Величина  $\Delta S$  положительна для рассеивающей линзы и отрицательна для собирающей, что позволяет предложить способ ее устранения. Реальные изображающие системы представляют собой комбинации положительных и отрицательных линз, сделанных из различных сортов стекла, рассчитанные так, чтобы суммарная продольная сферическая aberrация равнялась нулю.

Если в системе компенсирована сферическая aberrация для лучей, исходящих из точечного объекта, расположенного на оптической оси, то она может сохраниться при отображении внеосевых объектов. В этом случае изображение точки принимает характерную форму, напоминающую запятую. Подобная aberrация, приводящая к несохранению гомоцентричности внеосевых пучков, называется *комой* (рис. 3.23).

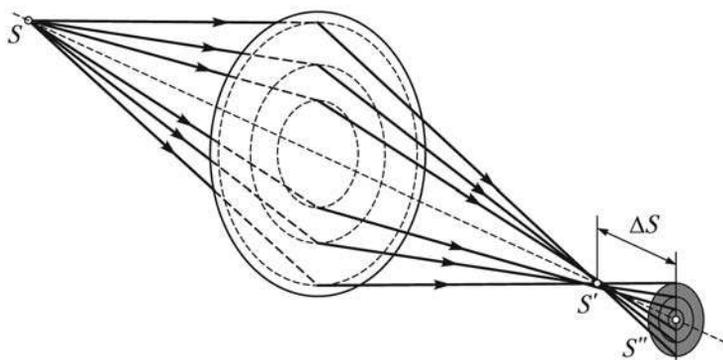


Рис. 3.22. Продольная сферическая аберрация

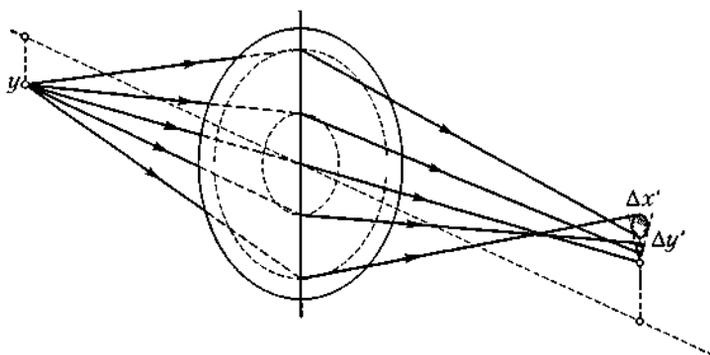


Рис. 3.23. Кома

Кома отсутствует у систем с исправленной сферической аберрацией, если выполняется условие синусов Аббе (см ранее в этой главе), что возможно лишь для пары сопряженных плоскостей, называемых *апланатическими*.

Погрешность оптической системы, при которой увеличение неодинаково по всему полю зрения, носит название *дисторсия* (рис. 3.24). Если линейное увеличение растет от центра к краям, то изображение квадрата приобретает вид «по-

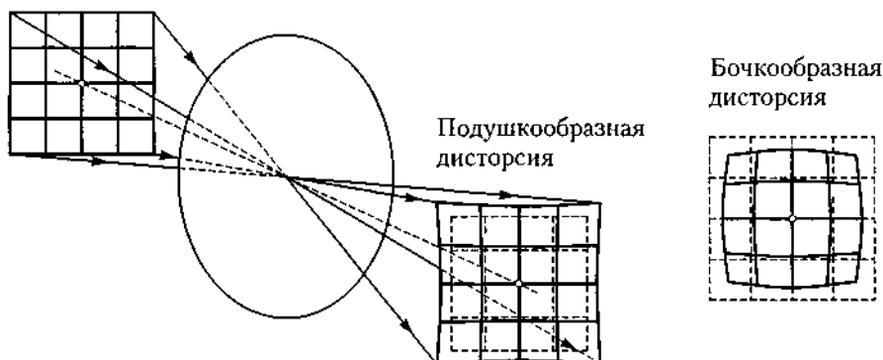


Рис. 3.24. Дисторсия

душки», в противном случае — форму «бочки». В отличие от рассмотренных выше aberrаций, дисторсия приводит не к ухудшению резкости, а к искажениям геометрической формы изображения.

Еще одна важная погрешность оптических систем — *хроматическая aberrация*, природа которой непосредственно связана с зависимостью показателя преломления оптических материалов от длины волны, то есть с дисперсией вещества. Вследствие дисперсии фокусное расстояние зависит от длины волны, что приводит к невозможности получить точечный фокус для монохроматического излучения. Прикладная оптика разработала ряд методов устранения хроматической aberrации и создания ахроматических объективов, в которых используются стекла с различным ходом дисперсионной кривой.

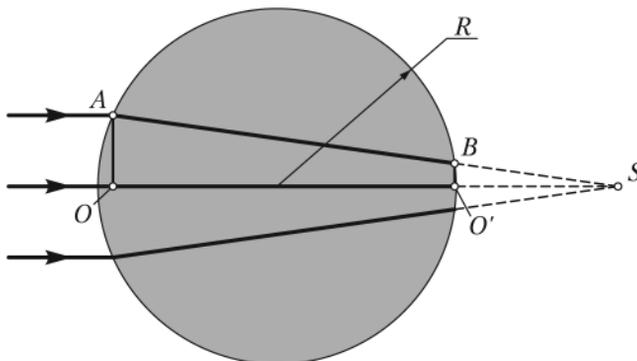
Отметим, что зеркальным оптическим системам, так же как и линзовым, присущи геометрические aberrации (сферическая, астигматизм и т. д.), но они свободны от хроматической aberrации. Это обусловлено тем, что закон отражения света, в отличие от закона преломления, не зависит от показателей преломления сред.

Исправление aberrаций — трудная задача, требующая прецизионных расчетов и предъявляющая высокие требования к технологии изготовления оптических деталей. Обычно исправляют лишь те погрешности, которые мешают решению конкретной оптической задачи.

Если исследователя интересует четкость изображения, сформированного какой-либо оптической системой, и возможность отдельного наблюдения на нем близких частей объекта, требуется определить так называемую *разрешающую силу* оптического инструмента. Это понятие непосредственно связано с волновой природой света и наблюдением явления *дифракции* на краях диафрагм. Оценка разрешающей силы отдельных оптических приборов будет сделана в разделе 8.5.

## Примеры решения задач

**Пример 3.1.** На тонкостенную сферическую колбу, наполненную жидкостью, падает параллельный пучок лучей света, диаметр сечения которого значительно меньше диаметра колбы. На противоположной стороне колбы пучок света освещает кружок, диаметр которого в два раза меньше диаметра падающего на колбу пучка. Каков показатель преломления жидкости в колбе?



*Решение*

Оптическая система в данной задаче представляет собой сферическую преломляющую поверхность, разделяющую две среды: воздух с показателем преломления  $n_1 = 1$  и жидкость с показателем преломления  $n_2$ . Поскольку диаметры сечений пучка даны внутри колбы, вторая поверхность колбы в оптической системе не играет роли. Если бы второй поверхности не было, то изображение бесконечно удаленного источника, дающего параллельный пучок лучей, получилось бы на продолжении лучей в точке  $S$ .

Следовательно,  $OS$  – фокусное расстояние передней преломляющей поверхности. По формуле (3.5)

$$f = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}.$$

Из подобия треугольников  $AOS$  и  $BO'S$  находим

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{f}{f - 2R} = 2,$$

где  $d_1 = 2AO$ ,  $d_2 = 2BO'$  – диаметры входящего и выходящего пучков. Отсюда  $f = 4R$  и  $n_2 = 4/3$ .

**Пример 3.2.** В толстой стеклянной пластине ( $n = 1,5$ ) на расстоянии 3 см от плоской грани имеется воздушная полость в виде двояковыпуклой линзы. Оптическая ось этой системы перпендикулярна к плоской грани пластины. Радиусы кривизны линзы 4 см и 6 см. На каком расстоянии от линзы получится изображение царапины  $S$ , нанесенной на плоской грани пластины? Постройте ход луча.

*Решение*

Образовавшаяся в стекле линза имеет оптическую силу  $D$  меньше нуля (рассеивающая линза).

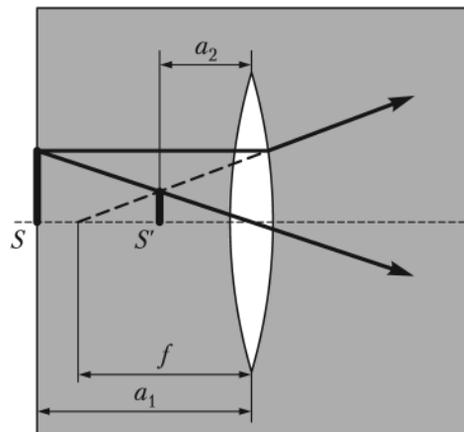
Найдем фокусное расстояние этой линзы:

$$f = \frac{n_{ст}}{D} = \frac{n_{ст}}{n_{в} - n_{ст}} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = -7,2 \text{ см.}$$

Изображение царапины будет находиться на расстоянии  $a_2$  от линзы, причем с учетом правила знаков

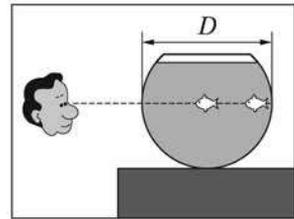
$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{f},$$

откуда  $a_2 = 2,12$  см.

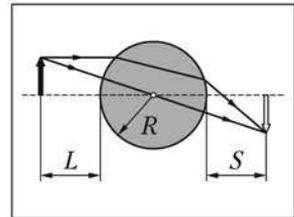
**Задачи**

**3.1.** Стеклянный тонкостенный шаровидный аквариум наполнен водой. Наблюдатель смотрит вдоль диаметра аквариума на рыбку, перемещающуюся вдоль

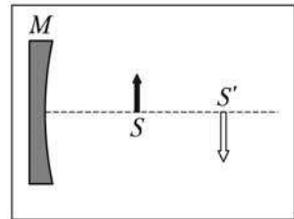
этого же диаметра. Как изменяется положение изображения рыбки, если она от удаленного по отношению к наблюдателю конца диаметра перемещается к ближнему концу? Диаметр аквариума 10 см, длина рыбки много меньше радиуса колбы. Постройте график зависимости расстояния до изображения от расстояния до рыбки.



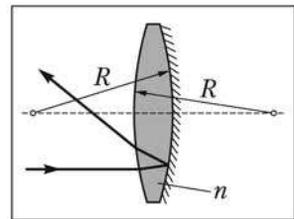
**3.2.** Радиус стеклянного шара ( $n = 1,5$ ) равен  $R = 4$  см. Найдите расстояние  $S$  от центра шара до изображения предмета, который расположен в  $L = 6$  см от поверхности шара.



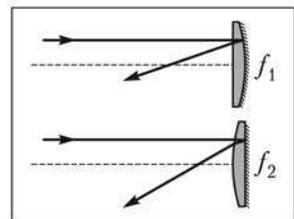
**3.3.** Небольшой светящийся предмет находится на расстоянии 15 см от вершины сферического вогнутого зеркала на главной оптической оси; изображение точки получилось на расстоянии 30 см от зеркала. Определите, на сколько и в каком направлении сместится изображение, если предмет приблизится к зеркалу на 1 см. Постройте ход лучей в обоих случаях.



**3.4.** Определите фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала, которое представляет собой симметричную двояковыпуклую стеклянную линзу с посеребренной одной поверхностью. Радиус кривизны поверхностей линзы равен 30 см.



**3.5.** Две одинаковые плосковыпуклые линзы с показателем преломления  $n$  посеребрены: одна с плоской стороны, другая с выпуклой. Найдите отношение фокусных расстояний  $f_1$  и  $f_2$  полученных сложных зеркал, если свет в обоих случаях падает с непосеребренной стороны.

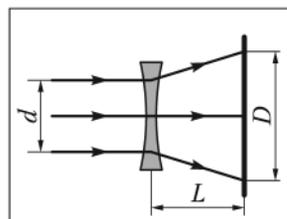


**3.6.** Имеется линза с оптической силой  $+2,5$  дптр. Найдите предельно большое расстояние между предметом и линзой, при котором получается прямое изображение предмета.

**3.7.** Расстояние от лампочки до экрана  $L = 50$  см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение лампы на экране при двух положениях, расстояние между которыми  $d = 10$  см. Найдите фокусное расстояние линзы.

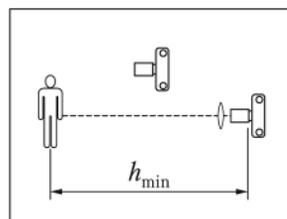
**3.8.** Предмет расположен на расстоянии 50 см от поверхности линзы с оптической силой +2,5 дптр. Найдите минимальное расстояние, на которое следует переместить предмет, чтобы получить изображение, равное по величине первоначальному.

**3.9.** На рассеивающую линзу вдоль главной оптической оси падает параллельный пучок света диаметром 5 см. За линзой на расстоянии 20 см поставлен экран, на котором получается круглое светлое пятно диаметром 150 мм. Определите в сантиметрах главное фокусное расстояние линзы.

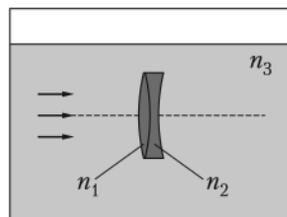


**3.10.** Выпуклый мениск изготовлен из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$ . Радиус кривизны выпуклой поверхности  $R_1 = 22,4$  см, радиус кривизны вогнутой поверхности  $R_2 = 46,2$  см. Как изменится фокусное расстояние этой линзы в воде по сравнению с фокусным расстоянием в воздухе?

**3.11.** Объектив фотоаппарата установили относительно фотопластины на расстоянии, равном фокусному расстоянию объектива. После этого на объектив надели собирающую линзу с оптической силой 5 дптр. На каком расстоянии от этого сложного объектива должен находиться предмет съемки, чтобы получить его резкое изображение на фотопластинке? Фокусное расстояние объектива без линзы-насадки 14 см.



**3.12.** Имеются две тонкие симметричные линзы: одна собирающая с показателем преломления 1,7, другая рассеивающая с показателем преломления 1,51. Обе линзы имеют одинаковый радиус кривизны поверхностей, равный 10 см. Линзы сложили вплотную и погрузили в воду. Каково фокусное расстояние этой системы в воде?



## ГЛАВА 4 Фотометрия

Воздействие света на глаз или какой-либо другой чувствительный приемный элемент состоит, прежде всего, в передаче ему энергии, переносимой световой волной. Поэтому важно составить представление о световой энергетике — *фотометрии*, — которая сводится либо к непосредственному измерению энергии, переносимой световой волной, либо к измерению величин, так или иначе с этой энергией связанных. В измерительной практике используются фотометрические понятия, связанные с особенностями приемников оптического излучения, а также с реализацией эталонов этих физических величин. Чаще всего в качестве приемников излучения используются специальные устройства, реакция которых зависит не только от энергии, переносимой светом, но также от его спектрального состава. Такими *селективными* приемниками являются фотопластинки, фотопленки, фотоэлементы и, что особенно важно, человеческий глаз. Поэтому при световых измерениях необходимо принимать во внимание особенности глаза как приемника, выделяющего определенный, довольно узкий, участок длин волн из всего многообразия электромагнитных колебаний.

### 4.1. Фотометрические величины

Излучающие свет структуры носят название источников света. Источники света делятся по размерам на точечные и протяженные, а по природе — на самосветящиеся и несамосветящиеся.

*Точечный источник* — такой источник, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до освещаемой им поверхности. Источник света можно считать точечным, если линейные размеры источника не превышают  $1/10$  расстояния от него до освещаемой поверхности. В этом смысле для наблюдения на Земле Солнце — точечный источник, так как его видимый угловой размер равен  $0,5^\circ$ , или  $0,01$  рад, что означает, что диаметр Солнца меньше расстояния до Земли примерно в 100 раз. Источник, размеры которого не удовлетворяют указанным условиям, называется *протяженным*. Как правило, действие протяженного источника сводится к действию некоторой совокупности точечных источников, полученной путем разбиения поверхности протяженного источника на элементарные участки.

*Самосветящимися* источниками называются те, в которых излучение происходит за счет переработки другого вида энергии. Большинство окружающих нас предметов не являются самосветящимися в видимой области спектра; они отражают или рассеивают падающие световые потоки. Поэтому в практических целях особенно важна энергетика несамосветящихся источников.

### Поток лучистой (световой) энергии

Количество энергии, переносимой световой волной в единицу времени через площадку  $\Sigma$ , называется *световым потоком*:

$$\Phi = \int_{\Sigma} \langle \mathbf{S}_n \rangle d\Sigma, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{S}$  — вектор Пойнтинга, характеризующий плотность потока энергии (см. раздел 1.4).

Световой поток имеет размерность *мощности*. Он является основой для оценки количества энергии, переносимой светом. Знание потока необходимо при расчете многих оптических устройств. Большинство приемников света (например, фотоэлементы) реагируют непосредственно на световой поток.

### Сила света

Для характеристики пространственно-углового распределения светового потока, испускаемого источником, применяется понятие *силы света*.

Для определения силы света по какому-либо направлению надо выделить вдоль этого направления достаточно малый телесный угол  $d\Omega$  и измерить световой поток  $d\Phi$ , распространяющийся в этом телесном угле. Телесный угол нужно выбирать таким образом, чтобы поток в нем можно было считать равномерным, тогда *сила света источника по определенному направлению численно равна световому потоку, заключенному в единичном телесном угле*:

$$I(\theta, \varphi) = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \quad (4.2)$$

Размерность силы света совпадает с размерностью светового потока (Вт), но в обозначении единицы силы света указывается единица телесного угла — стерадиан (Вт/ср).

Если световой поток испускается точечным источником равномерно по всем направлениям, то  $I = \Phi/4\pi$  есть истинная сила света точечного источника по любому направлению. В случае неравномерного потока величина  $\Phi/4\pi$  представляет собой лишь среднюю силу света и называется *средней сферической силой света*.

Величина полного светового потока характеризует излучающую способность источника, которую невозможно увеличить никакими оптическими системами. Действие любых оптических систем сводится лишь к перераспределению светового потока, например большей концентрации его по некоторым избранным направлениям. Такие системы в оптике называют *коллимирующими*. Наглядным примером коллимирующей системы является прожектор, преобразующий близкое к сферическому излучение лампы в узкий направленный луч.

## Освещенность поверхности

Освещенностью поверхности называется величина, численно равная световому потоку, падающему на единицу поверхности:

$$E = \frac{d\Phi}{d\sigma}. \quad (4.3)$$

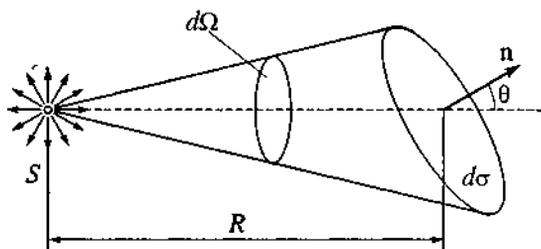


Рис. 4.1. К определению освещенности площадки

Так как лучистая энергия в однородной среде распространяется прямолинейно, то, проведя из точки  $S$  (точечный источник света) совокупность лучей, опирающихся на контур площадки  $d\sigma$ , мы получим конус, ограничивающий часть потока, протекающего через  $d\sigma$  (рис. 4.1).

Если внутри среды поглощения энергии нет, то через любое сечение этого конуса протекает один и тот же поток. Если нормаль  $\mathbf{n}$  к площадке  $d\sigma$  составляет угол  $\theta$  с осью конуса, а расстояние от точки  $S$  до площадки есть  $R$ , то телесный угол  $d\Omega$ , под которым площадка видна из источника, равен

$$d\Omega = \frac{d\sigma \cos \theta}{R^2}. \quad (4.4)$$

Учитывая определение силы света (4.2), получим:

$$E = \frac{I \cos \varphi}{r^2}. \quad (4.5)$$

Таким образом, если на поверхность  $\Sigma$  падает световой поток от точечного источника, то освещенность поверхности убывает пропорционально квадрату расстояния между источником и освещаемой поверхностью (рис. 4.2, а). Из определения (4.3) следует, что в потоке параллельных лучей, если нет поглощения в среде, освещенность поверхности остается неизменной (рис. 4.2, б)

При изучении освещенности, создаваемой протяженными источниками, их поверхность можно разбить на элементарные участки (достаточно малые по

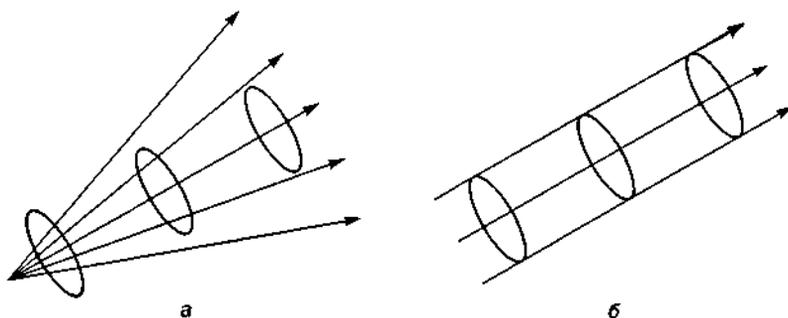


Рис. 4.2. Зависимость освещенности площадки от расстояния до источника для расходящегося (а) и параллельного (б) пучков света

сравнению с расстоянием до освещаемого объекта) и определить освещенность, создаваемую каждым из элементарных точечных источников по закону обратных квадратов.

Затем следует проинтегрировать по всей площади источника с учетом зависимости силы света от направления. Таким образом, для протяженных источников связь освещенности поверхности с расстоянием до источника оказывается более сложной, чем для точечных.

## Яркость источника

Точечные источники света, размерами которых можно пренебречь, играют исключительно важную роль в расчетах оптических систем. Однако большинство реальных источников достаточно велики, чтобы различить их форму при обычных для практики расстояниях. Иными словами, видимые размеры источника лежат в пределах способности глаза или оптического приемника отличить протяженный предмет от точки. По отношению к таким источникам используется понятие *поверхностной яркости* (или просто *яркости*) излучающей и отражающей поверхностей.

Пусть приемник  $K$  поглощает световой поток, излучаемый элементом поверхности  $d\sigma$  в направлении угла  $\theta$  с направлением нормали к излучающей поверхности  $n$ . Тогда этот поток пропорционален видимой поверхности излучателя  $d\sigma \cos \theta$  и величине телесного угла  $d\Omega$  (рис. 4.3).

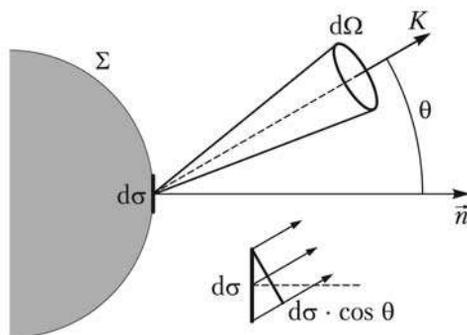


Рис. 4.3. К определению яркости источника

Коэффициент пропорциональности зависит от свойств поверхности и может быть различным для различных направлений углов  $\theta$  относительно нормали. Обозначим этот коэффициент через  $B(\theta)$  и определим световой поток выражением:

$$d\Phi = B(\theta) \cos \theta d\sigma d\Omega \quad (4.6)$$

или

$$B(\theta) = \frac{dI(\theta)}{d\sigma \cos \theta} \quad (4.7)$$

Коэффициент  $B$  называется *яркостью источника* по направлению, определяемому углом  $\theta$ , то есть *яркость источника* — это *поток, посылаемый в данном направлении единицей видимой поверхности в единичном телесном угле*. Подчеркнем, понятие яркости вводится как для самосветящихся, так и для несамосветящихся источников.

Яркость есть величина, зависящая от направления; однако есть источники, для которых сила света элемента поверхности пропорциональна видимой по данному направлению площади этого элемента  $d\sigma \cos \theta$ . Из (4.7) следует, что в этом

случае яркость источника не зависит от направления (то есть можно считать  $B(\theta) = B_0$ ) и

$$I(\theta) = B_0 \sigma \cos \theta, \quad (4.8)$$

где  $\sigma = \int_{\Sigma} d\sigma$  — полная площадь светящейся поверхности.

Такие источники носят название *косинусных излучателей*, подчиняющихся *закону Ламберта*. Строго говоря, указанным свойством обладает только абсолютно черное тело. Матированная поверхность или мутная среда, каждый участок которых рассеивает свет равномерно во все стороны, служат более или менее хорошими подобиями ламбертовского источника. Поверхность Солнца излучает свет по закону, довольно близкому к закону Ламберта.

Если рассмотреть светящийся плоский диск  $\Sigma$  (рис. 4.4) и светящуюся сферу  $\Sigma'$  и предположить, что обе поверхности, подчиняясь закону Ламберта, имеют одинаковую яркость  $B$ , тогда световые потоки, посылаемые соответствующими участками диска и сферы по любому направлению, будут одинаковы, так как видимые поверхности их равны, а яркости по условию не зависят от направления. Таким образом, светящийся диск неотличим от светящейся полусферы, если они являются косинусными излучателями. Например, Солнце или Луна в полнолуние при не очень тщательных наблюдениях кажутся нам плоскими дисками равномерной яркости; это подсказывает, что их можно считать приблизительно ламбертовскими источниками.

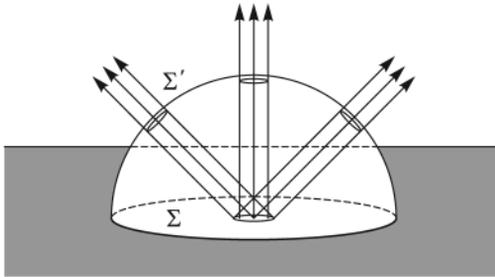


Рис. 4.4. Сравнение плоского и сферического ламбертовских источников

наковую яркость  $B$ , тогда световые потоки, посылаемые соответствующими участками диска и сферы по любому направлению, будут одинаковы, так как видимые поверхности их равны, а яркости по условию не зависят от направления. Таким образом, светящийся диск неотличим от светящейся полусферы, если они являются косинусными излучателями. Например, Солнце или Луна в полнолуние при не очень тщательных наблюдениях кажутся нам плоскими дисками равномерной яркости; это подсказывает, что их можно считать приблизительно ламбертовскими источниками.

приблизительно ламбертовскими источниками.

## Светимость поверхности

Понятие светимости тесно связано с понятием яркости поверхности. *Светимость*  $S$  представляет собой световой поток, посылаемый единицей поверхности наружу по всем направлениям (внутри телесного угла  $2\pi$  — полусферы наблюдателя). То есть  $S = d\Phi'/d\sigma$ , если  $\Phi'$  — полный поток, посылаемый светящейся площадью  $d\sigma$  по всем направлениям.

Для ламбертовского источника светимость и яркость связаны между собой простым соотношением:

$$S = \int_{\Omega} B_0 \cos \theta d\Omega = 2\pi B_0 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi B_0. \quad (4.9)$$

Сравнение определений светимости  $S$  и освещенности  $E$  показывает, что обе эти величины имеют одинаковые размерности ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ) и представляют собой поток, отнесенный к единице поверхности. Светимость характеризует *свечение* поверхности, то есть поток, *исходящий* от единицы поверхности, а освещенность характеризует *освещение* поверхности, то есть поток, *падающий на единицу поверхности*.

Исходящий из самосветящихся источников световой поток является их собственным свойством, а для несамосветящихся он, естественно, зависит от освещенности поверхности и свойств отражающей поверхности.

Для несамосветящихся источников исходящий световой поток всегда меньше падающего светового потока  $\Phi' < \Phi$  и определяется коэффициентом отражения  $r$ , меньшим единицы. В этом случае между освещенностью поверхности и ее светимостью имеет место соотношение

$$S = r(\lambda)E, \quad (4.10)$$

где  $r(\lambda)$  — коэффициент отражения поверхности, зависящий от длины волны падающего света.

Все разнообразие красок мира определяется зависимостью коэффициентов отражения окружающих нас предметов от длины волны падающего на них излучения от Солнца или искусственных источников освещения.

Белыми или серыми мы видим тела или вещества, которые имеют коэффициенты отражения, не зависящие от длины волны падающего излучения и по величине близкие к единице. Если коэффициент отражения тела одинаков для всех длин волн и близок к нулю, такое тело мы воспринимаем как черное.

## 4.2. Единицы световых величин

В светотехнике под термином «свет» обычно подразумевают излучение видимого диапазона с длинами волн в интервале от 380 до 760 нм. Поэтому интерес представляет не просто восприятие энергии излучения, а ее *световое восприятие*. В связи с этим во многих оптических системах необходимо учитывать связь между энергетическими величинами, характеризующими излучение, и величинами, характеризующими ее визуальное восприятие, определяемое свойствами глаза человека.

Таблица 4.1. Спектральная чувствительность глаза

$\lambda$ , нм	$K_\lambda$						
400	0,0004	490	0,208	580	0,870	670	0,032
410	0,0012	500	0,323	590	0,757	680	0,017
420	0,0040	510	0,503	600	0,631	690	0,0082
430	0,0116	520	0,710	610	0,503	700	0,0041
440	0,023	530	0,862	620	0,381	710	0,0021
450	0,038	540	0,954	630	0,265	720	0,00105
460	0,060	550	0,995	640	0,175	730	0,00052
470	0,091	560	0,995	650	0,107	740	0,00025
480	0,139	570	0,952	660	0,061	750	0,00012

Чувствительность глаза к свету различной длины волны можно охарактеризовать *кривой видности*. По оси абсцисс откладывается длина волн излучения  $\lambda$ , а по оси ординат — относительная чувствительность глаза  $K_\lambda$ , то есть величина, обратно пропорциональная мощности монохроматического излучения, дающего одинаковое зрительное ощущение на разных длинах волн. Несмотря на субъективность таких оценок, воспроизводимость их достаточно высока. Кривая видности разных наблюдателей не сильно меняется от одного к другому.

Относительные значения спектральной чувствительности  $K_\lambda$  для так называемого среднего глаза человека приведены в табл. 4.1.

Чувствительность глаза имеет максимум, условно принимаемый за единицу, в зеленой области спектра при  $\lambda = 555$  нм.

Графически усредненная кривая видности в линейном и логарифмическом масштабах показана на рис. 4.6.

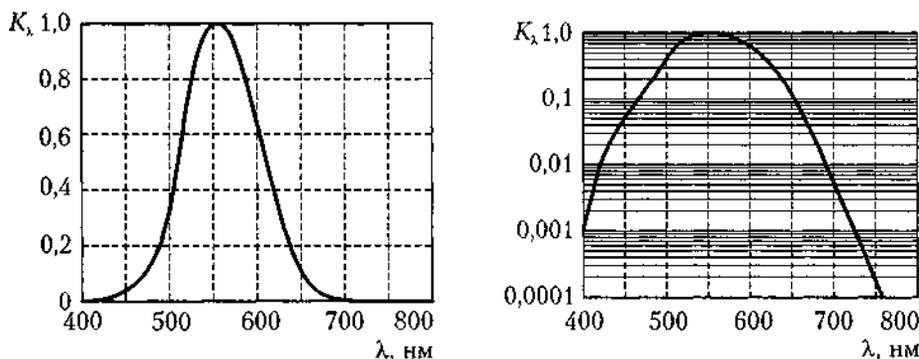


Рис. 4.6. Кривая относительной спектральной чувствительности глаза в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах

Экспериментально установлено, что излучение с длиной волны  $\lambda = 760$  нм (далекая красная область) должно иметь энергетическую мощность в 20 000 раз большую, чем излучение с длиной волны  $\lambda = 555$  нм, чтобы вызвать у человека аналогичное ощущение яркости.

Принимая в качестве приемника световой энергии глаз, Международная комиссия по освещенности (МКО) определила *световой поток как поток лучистой энергии, оцениваемой по зрительному ощущению*.

Для калибровки используемых на практике источников по величине светового потока и другим светотехническим параметрам служит условный световой эталон. В качестве эталонного выбрано излучение абсолютно черного тела при температуре затвердевания платины (2042 К).

Единица *силы света* — *кандела* (кд), равная 1/60 силы света, излучаемого в направлении нормали с площади  $1 \text{ см}^2$  светового эталона.

Единицей *светового потока* является *люмен* (лм) — поток, посылаемый источником света в 1 кд внутри единичного телесного угла в 1 стерадиан (ср).

$$1 \text{ лм} = \frac{1 \text{ кд}}{1 \text{ ср}}.$$

Единица освещенности, люкс (лк), есть освещенность, соответствующая потоку в 1 лм, равномерно распределенному по поверхности в  $1 \text{ м}^2$ .

$$1 \text{ лк} = \frac{1 \text{ лм}}{1 \text{ м}^2}.$$

Таким образом, 1 лк — это освещенность, создаваемая на поверхности шара радиусом в 1 м, в центре которого расположен излучающий равномерно во все стороны источник силой света в 1 кд.

Светимость, так же как и освещенность, выражается в единицах лм/м<sup>2</sup>, но эта величина относится к испускаемому потоку, а не к падающему на поверхность.

Единицей яркости служит яркость излучающей свет площадки, дающей силу света в одну канделу с каждого квадратного метра поверхности в направлении, перпендикулярном к поверхности площадки. Часто эту единицу в литературе называют *нит* (нт).

$$1 \text{ нт} = \frac{1 \text{ кд}}{1 \text{ м}^2}.$$

Имея эталон, дающий определенный световой поток, выраженный в люменах, можно было бы определить этот поток в *ваттах* и установить связь между световыми и энергетическими единицами. Однако вследствие различной чувствительности глаза к свету с разной длиной волны, единый коэффициент пересчета (*механический эквивалент света*) установить невозможно. Для длины волны, соответствующей максимуму чувствительности глаза ( $\lambda = 555 \text{ нм}$ ), он считается равным: 0,00146 Вт/лм. Соответственно, коэффициент видности излучения на длине волны 555 нм равен 683 лм/Вт.

## Примеры решения задач

**Пример 4.1.** На высоте  $h = 7 \text{ м}$  над полом на расстоянии  $l = 3 \text{ м}$  от стены повешена лампочка  $S$  силой света 100 кд. Принимая, что сила света лампочки одинакова во всех направлениях, определите освещенность пола и стены у линии их пересечения.

*Решение*

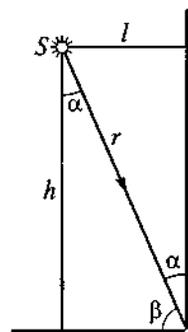
Освещенность, создаваемая точечным источником света на поверхности, определяется выражением

$$E = \frac{I \cos \varphi}{r^2},$$

где  $I$  — сила света точечного источника,  $\varphi$  — угол падения лучей на поверхность,  $r$  — расстояние от источника до точки на поверхности.

Пусть в точке пересечения стены и пола угол падения лучей на пол равен  $\alpha$ , а на стену —  $\beta$ . Расстояние от источника  $S$  до точек стены и пола на линии их пересечения одинаково и равно

$$r = \sqrt{h^2 + l^2}, \text{ кроме того, } \cos \alpha = \frac{h}{r}, \cos \beta = \frac{l}{r}.$$



Отсюда найдем

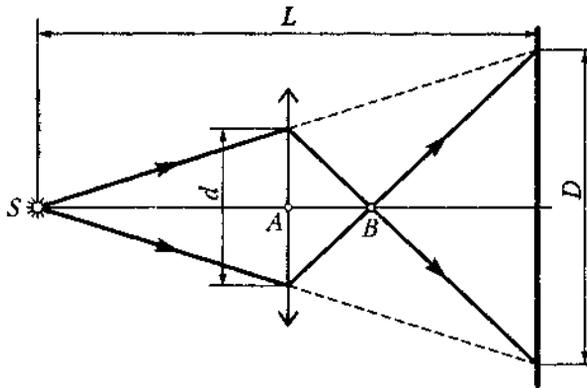
$$E_{\text{пола}} = \frac{Ih}{(\sqrt{h^2 + l^2})^3} = \frac{700}{\sqrt{49 + 9}} = 1,58 \text{ лк},$$

$$E_{\text{стены}} = \frac{Il}{(\sqrt{h^2 + l^2})^3} = \frac{300}{\sqrt{49 + 9}} = 0,68 \text{ лк}.$$

**Пример 4.2.** На расстоянии  $L = 1$  м от небольшого экрана расположен точечный источник света  $S$ . Посередине между источником и экраном в точке  $A$  поместили линзу. Оказалось, что освещенность экрана не изменилась. Определите фокусное расстояние линзы.

*Решение*

По определению освещенность поверхности есть величина, численно равная световому потоку, падающему на единицу поверхности. Следовательно, линзу надо поставить так, чтобы весь поток, попадавший на экран, после прохождения линзы снова попал на экран.



По формуле линзы

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f},$$

где  $a_1 = SA$ ,  $a_2 = AB$  — расстояния от линзы до источника и его изображения. Следовательно,

$$f = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

По условию  $a_1 = L/2$ . Из подобия треугольников заключаем, что отношение освещенных областей на экране и линзе  $D/d = 2$ .

Кроме того,

$$\frac{d}{a_2} = \frac{D}{\frac{L}{2} - a_2},$$

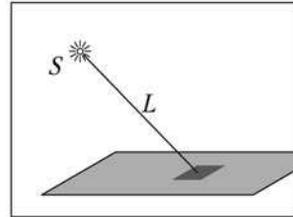
откуда  $a_2 = L/6$ .

Таким образом,

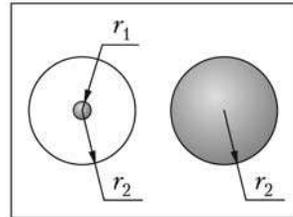
$$f = \frac{L \cdot L}{2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{6}\right)} = \frac{L}{8} = 12,5 \text{ см.}$$

## Задачи

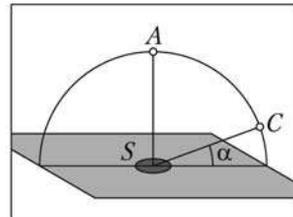
4.1. Лампа  $S$  силой света в 200 кд находится на расстоянии  $L = 2 \text{ м}$  от лежащей на столе книги. Освещенность книги равна 25 лк. Определите, под каким углом падает свет на книгу и на какой высоте подвешена лампа над столом.



4.2. Лампа, в которой светящимся телом служит накаливаемый шарик диаметром 3 мм, дает силу света в 85 кд. Найдите яркость этой лампы, если сферическая колба лампы сделана: 1) из прозрачного стекла; 2) из матового стекла. Диаметр колбы 6 см.

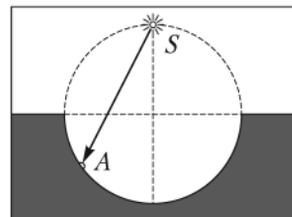


4.3. В основании полусферы радиусом 50 см находится ламбертовский источник света  $S$  в виде плоского диска площадью  $10 \text{ см}^2$  и яркостью 1000 нт. Во сколько раз отличаются освещенности, создаваемые этим источником, в точках  $A$  и  $C$  на полусфере, расположенных на одном меридиане? Точка  $A$  находится над источником по вертикали, а точка  $C$  — по направлению, образующему угол  $30^\circ$  с плоскостью источника.

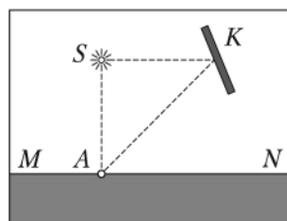


4.4. Светящаяся часть люминесцентной лампы потребляемой мощностью 15 Вт имеет форму цилиндра длиной 42 см и диаметром 2,24 см. Яркость ее  $0,5 \cdot 10^4 \text{ нт}$ . Определите КПД лампы. Средний механический эквивалент света для данной лампы считать равным 0,03 Вт/лм.

4.5. Над полусферой находится точечный источник  $S$  силой света  $I = 50 \text{ кд}$  на высоте, равной диаметру полусферы. Определите освещенность в точке  $A$  поверхности полусферы, в которой лучи падают под углом  $\alpha = 35^\circ$ . Радиус полусферы равен 1 м.



4.6. Точечный источник света  $S$  освещает поверхность  $MN$ . Как изменится освещенность в точке  $A$ , в которой лучи от источника падают нормально, если сбоку от него на таком же расстоянии, как и освещаемая поверхность, поместить зеркало  $K$ , отражающее свет в точку  $A$ ? Коэффициент отражения зеркала примите равным 1.



4.7. На столе лежит книга на расстоянии 1 м от основания перпендикуляра, опущенного из лампы на поверхность стола. Лампа может перемещаться только вверх и вниз. На какой высоте над столом ее следует повесить, чтобы освещенность книги была наибольшей?

4.8. Собирающая линза с фокусным расстоянием  $f_1 = 6$  см расположена на расстоянии  $L = 4f_1 = 24$  см от экрана. На линзу вдоль оптической оси падает параллельный пучок света. Во сколько раз изменится освещенность экрана, если еще одну собирающую линзу с фокусным расстоянием  $f_2 = 12$  см поставить перед первой линзой так, чтобы расстояние между линзами было равно сумме их фокусных расстояний?

4.9. Над центром круглого стола подвешен светильник в виде горизонтального диска площадью  $100 \text{ см}^2$ . Яркость светильника  $1,6 \cdot 10^4$  нт и не зависит от направления. На какой высоте от поверхности стола надо поместить светильник, чтобы освещенность периферийных точек стола была максимальной? Какова будет эта освещенность?

4.10. Освещенность, получаемая при нормальном падении солнечных лучей на поверхность Земли, составляет  $1,0 \cdot 10^5$  лк. Какова освещенность изображения Солнца, даваемого свободной от аберраций линзой диаметром 5 см и фокусным расстоянием 10 см? Угловой диаметр Солнца  $\alpha = 30'$ .

## Часть 2

# **Интерференция и дифракция света**

# ГЛАВА 5 Интерференция и когерентность

*Интерференцией* называют явление возникновения пространственно-неоднородного распределения интенсивности света в области пересечения нескольких пучков, вызванное суперпозицией электромагнитных волн.

При анализе излучения протяженных источников или нескольких точечных необходимо учитывать амплитуды колебаний, вызванных всеми элементарными источниками с их индивидуальными пространственными ( $\Delta k$ ) и временными ( $\Delta \omega$ ) спектрами. При этом распределение суммарной интенсивности света в области суперпозиции меняется от точки к точке, достигая максимума, превышающего сумму интенсивностей пучков, и минимума, который может оказаться равным нулю. Теоретически легче всего получить интерференцию с помощью монохроматического источника, генерирующего излучение одной частоты  $\omega$ . Напротив, источник белого света ( $\Delta \omega \sim \omega$ ) может создать интерференционные полосы только в предельно тонких пленках. Промежуточный случай представляет собой *квазимонохроматический источник*, с малой шириной спектра ( $\Delta \omega \ll \omega$ ).

## 5.1. Возникновение интерференции

Рассмотрим волновое поле, образованное в точке наблюдения  $P$  несколькими протяженными квазимонохроматическими источниками  $S_1, S_2, \dots, S_n$  (рис. 5.1). Важно отметить, что любой физический детектор имеет конечные размеры и конечную разрешающую способность во времени, поэтому он регистрирует не мгновенную величину интенсивности в заданной точке, а среднюю интенсивность в некоторой области пространства за определенный промежуток времени.

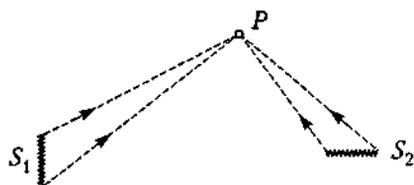


Рис. 5.1. Освещение точки наблюдения двумя источниками

Особенно существенным является временное усреднение, так как постоянная времени даже наиболее быстродействующих детекторов на несколько порядков больше периода световой волны.

По *принципу суперпозиции* суммарная напряженность  $E(P)$  в точке наблюдения складывается из амплитуд полей элемен-

тарных излучателей  $\mathbf{E}_i$  в точке  $P$ , сдвинутых по времени за счет различной длины путей до этой точки:

$$\mathbf{E}(P) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i(t - t_i).$$

Наблюдаемая интенсивность  $I(P)$  есть квадрат модуля усредненной по времени напряженности  $\mathbf{E}(P)$ :

$$I(P) = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n)^2 \rangle = \langle (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^* + \dots + \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_n^*) + 2\text{Re}(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* + \dots) \rangle. \quad (5.1)$$

Нетрудно заметить, что выражение для интенсивности разбивается на две части: *аддитивный член*, являющийся простой суммой интенсивностей источников, и *интерференционный член*, содержащий перекрестные произведения напряженностей полей от различных источников.

Если разность фаз колебаний от разных источников подвержена случайным и некоррелированным флуктуациям, то интерференционный член в результате усреднения обратится в ноль. Такие источники называются *некогерентными*. Два независимых обычных (нелазерных) источника всегда некогерентны, поэтому не возникает интерференции, например, в излучении от двух лампочек. Если корреляция есть, то говорят о *частичной* или *полной когерентности*. В этом случае интенсивность в точке  $P$  может быть больше или меньше суммы интенсивностей излучения всех источников, то есть могут наблюдаться интерференционные эффекты неаддитивного<sup>1</sup> перераспределения световой энергии. Интерференционный член также исчезает при  $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* = 0$ , то есть при  $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2$ . *Ортогонально поляризованные световые волны не интерferируют*. В дальнейшем при анализе интерференции будем полагать, что поляризация волн одинакова, отвлекаясь от векторных свойств светового поля.

## 5.2. Двухлучевая интерференция

Рассмотрим простейший случай интерференции излучения двух точечных монохроматических источников. Эта идеализация позволяет выявить особенности интерференционной картины в условиях *полной пространственно-временной когерентности*, то есть при отсутствии каких-либо случайных возмущений. Пусть источниками являются две щели  $S_1$  и  $S_2$  в непрозрачном экране, освещаемые плоской монохроматической волной — так называемая схема Юнга (рис. 5.2).

Из-за того, что пути  $r_1$  и  $r_2$  от источников до точки наблюдения неодинаковы, поле от источника  $S_2$  запаздывает в точку  $P$  на время

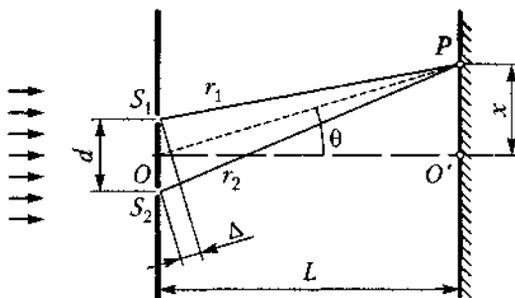


Рис. 5.2. Интерференционная схема Юнга

<sup>1</sup> Когда результирующая интенсивность отличается от простой суммы интенсивностей излучения разных источников.

$\tau = \Delta/c$ , где  $\Delta = |r_2 - r_1|$  — геометрическая разность хода,  $c$  — скорость света. В случае когда световые пучки распространяются в разных средах, под  $\Delta$  следует понимать *оптическую разность хода*:  $\Delta = |n_2 r_2 - n_1 r_1|$ , отличающуюся от геометрической умножением на соответствующие показатели преломления. Комплексная амплитуда электромагнитной волны в точке  $P$  равна:

$$E_{1,2}(P) = E_{1,2} \exp\left(i \frac{2\pi r_{1,2}}{\lambda}\right).$$

Тогда формула (5.1) примет вид:

$$I(P) = \langle E_1 \cdot E_1^* \rangle + \langle E_2 \cdot E_2^* \rangle + 2\text{Re}(\langle E_1(t + \tau) \cdot E_2^*(t) \rangle) = I_1 + I_2 + 2|E_1 \cdot E_2| \cos \delta, \quad (5.2)$$

где  $\delta$  — сдвиг фаз между волнами:  $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$ . В случае источников равной интенсивности  $I_1 = I_2 = I_0$ ,  $E_1 = E_2 = \sqrt{I_0}$ , и в точке наблюдения имеем:

$$I(P) = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (5.3)$$

Таким образом, в зависимости от разности хода от источников до точки наблюдения, интенсивность меняется от 0 в тех точках, для которых  $\Delta = (2m + 1)\lambda/2$  и куда волны приходят в противофазе, до  $4I_0$  в точках, для которых  $\Delta = m\lambda$  (волны приходят в одинаковой фазе). Отношение разности хода к длине волны, равное отношению разности фаз к  $2\pi$ , называют *порядком интерференции* (обычно обозначаемым буквой  $m$ ). Например, в случае равенства начальных фаз источников 1 и 2, по центру картины наблюдается полоса нулевого порядка

Очевидно, что для наблюдения интерференционных полос расстояние между источниками  $d$  должно быть больше длины волны излучения  $\lambda$ . В свою очередь, расстояние от источников до экрана  $L$ , как правило, много больше  $d$ . Кроме того,  $L$  значительно больше  $x$  — расстояния от центра интерференционной картины до точки  $P$  на экране, то есть угол  $\theta$  можно считать малым. В этом случае приближенное выражение для разности хода получается наиболее простым.

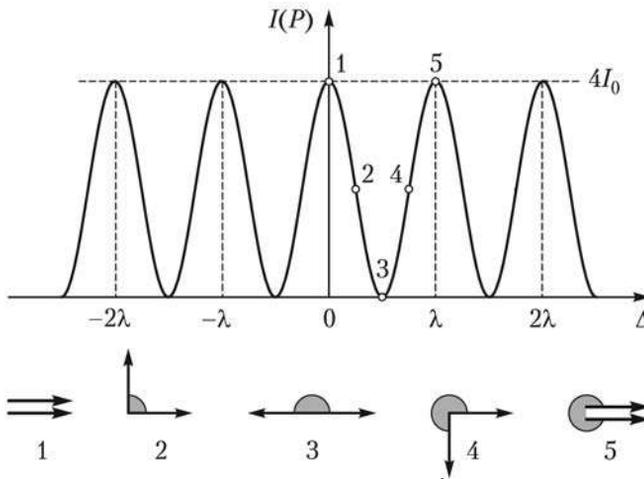


Рис. 5.3. Распределение интенсивности при двухлучевой интерференции. Для выделенных точек на векторных диаграммах указаны значения соответствующих разностей фаз

$\Delta = d \sin \theta = xd/L$ . Соответственно для ширины интерференционной полосы  $\Delta x$  (расстояния между соседними максимумами или минимумами) находим  $\Delta x = \lambda L/d$ . График распределения интенсивности на экране приведен на рис. 5.3. В нижней части рисунка схематически показаны относительные фазы складывающихся волн в разных точках экрана.

В случае разных интенсивностей интерферирующих источников контрастность полос уменьшается: интенсивность минимумов растет, а максимумов падает (рис. 5.4). Для количественной оценки качества интерференционной картины Майкельсоном было введено понятие *видности полос*  $V$ , определяемое через соотношение интенсивностей максимумов и минимумов:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

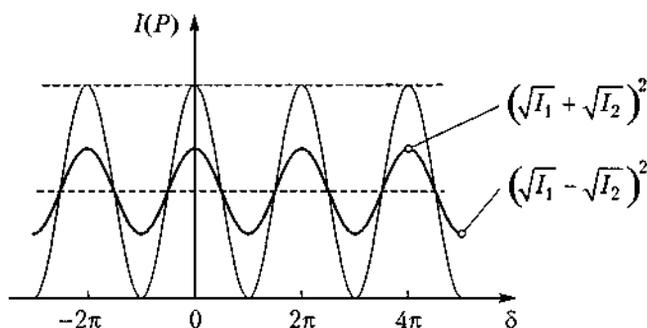


Рис. 5.4. Интерференция в случае источников с неодинаковыми интенсивностями

Если рассматривать двумерную интерференционную картину от двух точечных источников, то интерференционные полосы на экране представляют собой *семейства гипербол*, отвечающих постоянству оптической разности хода. По мере удаления экрана от плоскости источников постепенно в доступной для наблюдения области остается практически прямолинейная система полос, ортогональных линии, соединяющей источники. На рис. 5.5 изображена последовательность удаляющихся экранов  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , охватывающих разные зоны наблюдения.

Период, положение и контрастность интерференционных полос зависят от основных параметров источников излучения: их длины волны (или частоты), начальной фазы, соотношения амплитуд, а также от взаимного расположения источников. Проследим это влияние на модельных экспериментах.

Влияние расстояния между источниками излучения на интерференционную картину продемонстрировано на рис. 5.6. На этом рисунке области чередования темных и светлых участ-

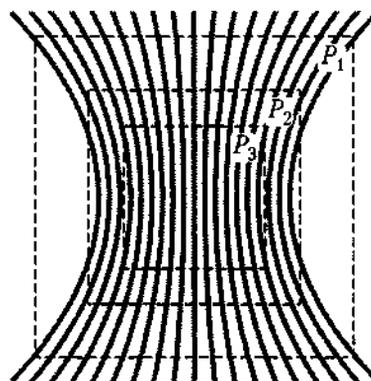
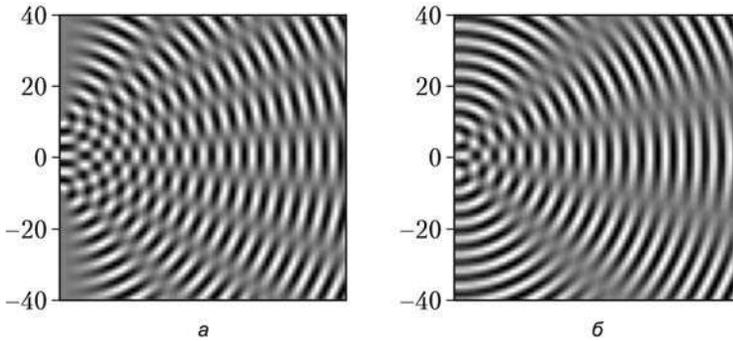


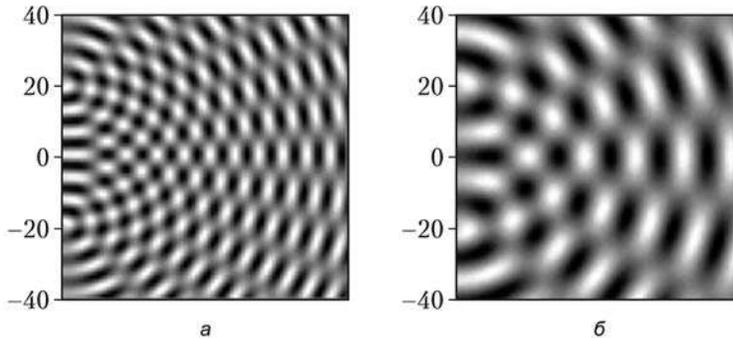
Рис. 5.5. Интерференционные полосы от двух точечных источников

ков (гребней и впадин волн) соответствуют максимумам интерференционной картины, а расходящиеся веером серые полосы — интерференционным минимумам. Как и следует из формулы для ширины интерференционной полосы, при сближении источников (рис. 5.6, б) период интерференционной картины возрастает.



**Рис. 5.6.** Влияние расстояния между источниками на ширину интерференционных полос: в случае (а) расстояние вдвое больше, чем в случае (б)

Изменение длины волны источников моделируется на рис. 5.7. При неизменном расстоянии между ними с увеличением длины волны (рис. 5.7, б) ширина интерференционной полосы возрастает — чтобы набрать прежнюю разность хода, теперь нужно большее расстояние.



**Рис. 5.7.** Влияние длины волны излучения на ширину интерференционных полос: в случае (а) длина волны вдвое меньше, чем в случае (б)

### 5.3. Временная и пространственная когерентность, степень когерентности

Входящая в интерференционный член формулы (5.2) величина  $\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t + \tau)E_2^*(t) \rangle$  называется взаимной *корреляционной функцией* величин  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$ . Математически эта функция представляет собой интеграл свертки двух медленно меняющихся комплексных амплитуд:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E_1(t + \tau) E_2^*(t) dt. \quad (5.4)$$

Если оба источника совпадают, но излучение может попасть в точку наблюдения  $P$  по двум путям неравной длины, то из (5.4) получаем

$$\Gamma_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E_1(t + \tau) E_1^*(t) dt. \quad (5.5)$$

Величина  $\Gamma(\tau) \equiv \Gamma_{11}(\tau)$  называется *автокорреляционной функцией*. Она зависит только от относительного запаздывания  $\tau$  и характеризует *временную когерентность*. Очевидно, что при  $\tau = 0$  автокорреляционная функция дает просто интенсивность соответствующего источника:  $\Gamma_{11}(0) = I_1$ .

С другой стороны, если запаздыванием излучения от двух различных источников можно пренебречь, величина  $\Gamma_{12} \equiv \Gamma_{12}(0)$  зависит только от их положения и характеризует *пространственную когерентность*.

Пронормируем корреляционную функцию, положив

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}}. \quad (5.6)$$

Величина  $\gamma_{12}(\tau)$  называется *комплексной степенью когерентности* световых колебаний и может быть представлена как  $\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| \exp(i\delta)$ , причем  $|\gamma| \leq 1$ . Формула (5.2) принимает вид

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P) \cdot I_2(P)} \cdot |\gamma_{12}(\tau)| \cos \delta. \quad (5.7)$$

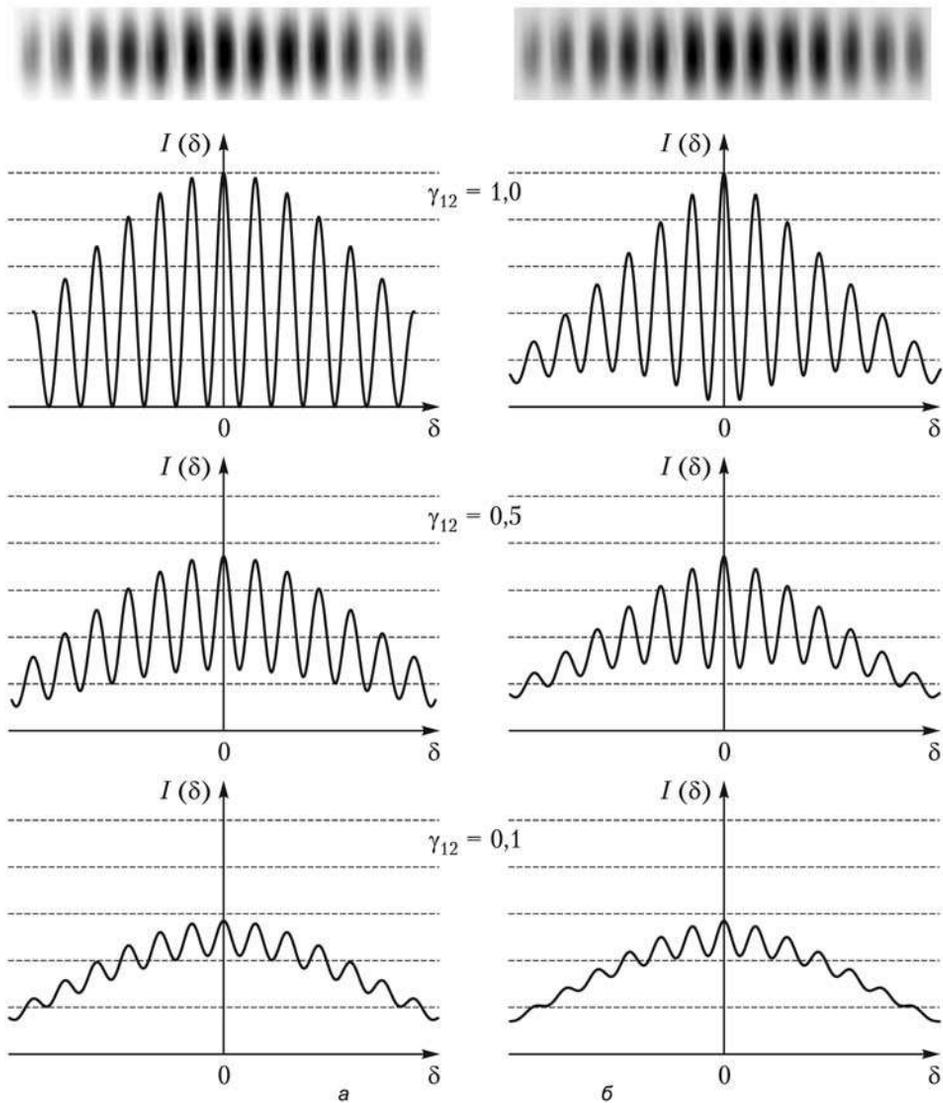
Нетрудно видеть, что видность интерференционных полос в точке  $P$

$$V(P) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1(P) \cdot I_2(P)}}{I_1(P) + I_2(P)} \cdot g_{12}(\tau), \quad (5.8)$$

где  $g_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|$ . Эта формула связывает видность полос с интенсивностями двух пучков и их степенью когерентности. Для пучков с равной интенсивностью  $V(P) \equiv g_{12}(\tau)$ , то есть видность полос равна модулю степени когерентности. Фотография двухлучевой интерференционной картины (изображение дано в негативе, интерференционным максимумам соответствуют темные полосы) и распределения интенсивности при различной степени пространственной когерентности источников  $\gamma_{12}(0)$  показаны на рис. 5.8, а. Общее снижение интенсивности полос к краям картины обусловлено конечным поперечным размером перекрывающихся световых пучков и дифракционными эффектами (см. главу 8).

Из проведенного анализа видно, что условия возникновения интерференционной картины определяются, помимо свойств источников, их взаимным расположением относительно точки наблюдения. Важнейшим параметром двухлучевой интерференционной схемы является *оптическая разность хода*  $\Delta$ . Понять зависимость степени когерентности от разности хода можно, исходя из следующей модели.

Квазимонохроматические источники с шириной спектра  $\Delta\nu$  испускают волновые пучки (импульсы) со средней длительностью  $\tau_k \approx 1/\Delta\nu$  и характерной длиной цуга  $L_k = c\tau_k$  (для вакуума). Величины  $L_k$  и  $\tau_k$  называют *длиной и временем коге-*



**Рис. 5.8.** Двухлучевые интерференционные картины при различной степени пространственной когерентности источников  $\gamma_{12}$ : а — в условиях полной, б — в условиях частичной временной когерентности

реитности; они растут с повышенном монохроматичности источника (сужением его спектра) и характеризуют *временную когерентность*. Если  $L_x$  меньше  $\Delta$ , цуги не перекрываются, когерентности не хватает, интерференция не наблюдается. Если же оптическая разность хода столь мала (или столь велика длина когерентности), что скоррелированные волновые пакеты перекрываются во времени, то с той или иной видностью интерференция наблюдается. Падение видности полос в интерференционной картине с ростом порядка интерференции за счет уменьшения степени временной когерентности представлено на рис. 5.8, б.

Взаимное положение двух волновых цугов по мере увеличения разности хода приведено на рис. 5.9. В нижней части рисунка схематически показано уменьшение корреляционной функции с уменьшением площади перекрытия огибающих.

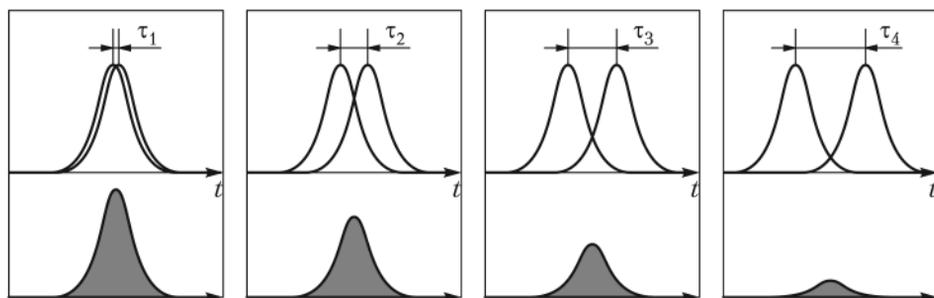


Рис. 5.9. Корреляционная функция частично перекрывающихся цугов волн при различных временах запаздывания

Для анализа *временной когерентности* оценим характерные значения времени и длины когерентности. Из теории излучения известно, что ширина спектральной линии, испускаемой обычными тепловыми источниками, равна по порядку  $\Delta\nu \sim 10^9 \dots 10^{10}$  Гц. Отсюда следует, что  $\tau_k \sim 10^{-9} \dots 10^{-10}$  с, а длина когерентности  $L_k \sim 3 \dots 30$  см. Таким образом, интерференция в оптике, даже при освещении одной выделенной спектральной линией, может наблюдаться лишь при разностях хода, не превышающих нескольких сантиметров.

Если разброс длин волн равен  $\Delta\lambda$ , то, с учетом соотношений  $\nu = c/\lambda$ ,  $|\Delta\nu| = c\Delta\lambda/\lambda^2$  длина когерентности может быть оценена как

$$L_k = \frac{\lambda_{cp}^2}{\Delta\lambda}.$$

При использовании источника белого света, захватывающего весь видимый диапазон,  $\Delta\lambda \sim \lambda$ , и интерференция отсутствует (длина когерентности равна длине волны). Однако при визуальном наблюдении реальный интервал  $\Delta\lambda$  определяется способностью глаза различать цветовые оттенки и составляет  $\sim 10$  нм. Окрашенные интерференционные полосы видны при разностях хода в несколько микрометров.

Полоса излучения лазеров значительно более узкая, она может составлять мегагерцы и даже килогерцы. Следовательно, длина когерентности в случае лазерных источников света может доходить до нескольких километров.

Иная ситуация складывается в радиодиапазоне. Монохроматичность излучения радиогенераторов чрезвычайно велика, и  $\tau_k$  может доходить до десятков и сотен часов, что соответствует  $L_k \sim 10^{11}$  км. Это больше размера Солнечной системы, что означает отсутствие принципиального предела дальности радиointерферометрических измерений.

Для анализа *пространственной когерентности* предположим, что две щели  $A$  и  $B$  освещаются *протяженным* источником шириной  $w$ , с угловым размером  $\phi$  (рис. 5.10). Волны, пришедшие от участков поверхности  $S'$  и  $S''$ , создадут на экране интерференционные картины с центрами в точках  $M'$  и  $M''$ . Отдельные

участки источника света некогерентны друг с другом, поэтому интерференционная картина, наблюдаемая на экране, будет являться наложением картин, создаваемых каждым из участков в отдельности. Интерференция будет различима при условии, что расстояние  $M'M''$  меньше половины ширины полосы, то есть при условии, что интерференционные максимумы, образуемые излучением от одних участков источника, не накладываются на интерференционные минимумы от других участков.

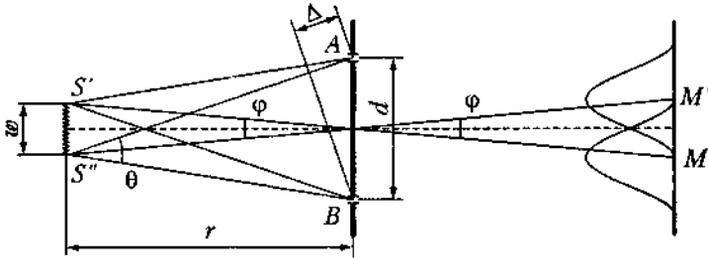


Рис. 5.10. К определению пространственной когерентности

Излучение, испущенное точкой  $S'$  источника, достигает щелей  $A$  и  $B$  с разностью хода

$$\Delta = \frac{w \sin \theta}{2} \approx \frac{wd}{2r}.$$

Интерференция на экране видна при условии  $\Delta < \lambda/2$ , то есть

$$\frac{wd}{\lambda r} < 1. \quad (5.9)$$

Поскольку угловой диаметр источника  $\phi$ , видимый из точек  $A$  и  $B$ , равен  $w/r$ , то условием когерентного освещения этих точек является ограничение  $\phi < \lambda/d$ . С другой стороны, можно утверждать, что излучение источника  $S$  когерентно в конусе с углом при вершине  $\theta \leq \lambda/w$ . Этот угол называется *апертурой интерференции*. Соответственно поперечный размер области когерентности  $d = r\theta = \lambda/\phi$ .

Так, например, Солнце, угловой размер которого около 0,01 рад, когерентно освещает пятно (при  $\lambda = 500$  нм) диаметром порядка 0,05 мм.

## ГЛАВА 6 Методы наблюдения интерференционных картин

Как было показано в предыдущей главе, два независимых источника света всегда некогерентны. Поэтому в оптических исследованиях для получения когерентных источников часто используют изображения одного физического источника излучения. Интерференционные схемы, в которых присутствуют два источника, называются двухлучевыми. Все двухлучевые интерференционные схемы делятся на два больших класса:

- схемы, построенные по методу *деления амплитуды волны*;
- схемы, построенные по методу *деления волнового фронта*.

### 6.1. Метод деления амплитуды

Отличительной особенностью схем первого класса является *амплитудное деление* (с помощью полупрозрачных зеркал, границ раздела, пленок и т. д.) *всего волнового фронта* падающей волны как *единого целого*. В плоскости наблюдения обе разделенные волны перекрываются и, при условии достаточной когерентности, создают интерференционные явления: полосы, цветовые эффекты и т. п.

#### Полосы равной толщины

Если интерференция создается параллельным пучком света в тонком зазоре, то максимумы и минимумы интенсивности «отслеживают» вариации толщины этого зазора, в результате создается в общем случае довольно сложная картина *полос равной толщины*. Форма каждой такой полосы всегда соответствует геометрическому месту точек с одинаковой толщиной зазора или пленки. Например, для плоского клина эти полосы эквидистантны<sup>1</sup> и параллельны ребру клина (рис. 6.1). Когерентными источниками в этой оптической схеме являются два мнимых изображения источника света, образующихся при отражении от двух поверхностей зазора.

---

<sup>1</sup> Расположены на одинаковом расстоянии друг от друга.

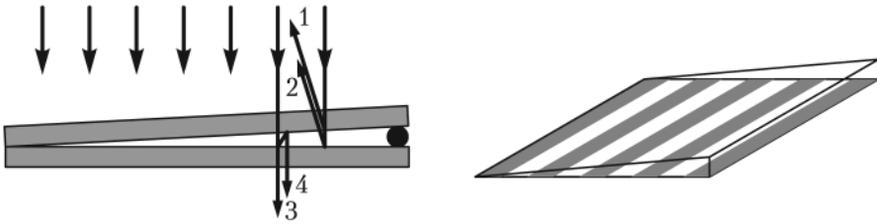


Рис. 6.1. Получение полос равной толщины в воздушном клине. Углы отклонения лучей от нормали сильно преувеличены

Полосы могут наблюдаться как в *отраженном*, так и в *прошедшем* свете, однако в последнем случае видность интерференционной картины существенно ниже. Действительно, если лучи 1 и 2 примерно равны по интенсивности, то луч 3 во много раз сильнее луча 4 (коэффициент отражения от стекла равен примерно 4%), а как следует из формулы (5.8), максимальная видность обеспечивается при равных интенсивностях источников.

Очевидно, что разность хода между интерферирующими лучами равна удвоенной толщине зазора  $d$ . Если зазор заполнен средой с показателем преломления  $n$ , следует использовать оптическую длину пути:  $2dn$ . При расчете положения максимумов и минимумов необходимо учитывать *дополнительный фазовый сдвиг на  $\pi$* , образующийся при *отражении от более плотной среды* (см. главу 11).

## Кольца Ньютона

Классическим примером полос равной толщины являются *кольца Ньютона*, образующиеся в зазоре между сферической линзой и плоскостью (рис. 6.2). Их лучше наблюдать в отраженном свете. В этом случае в центре картины за счет фазового скачка при отражении образуется темное пятно.

Между радиусом кривизны линзы  $R$ , толщиной зазора  $d$  и радиусом ньютоновского кольца  $r$  существует строгое геометрическое соотношение, а именно:

$$R^2 = (R - d)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rd + r^2$$

(при  $d \ll R$ ).

Отсюда

$$d = \frac{r^2}{2R}. \quad (6.1)$$

Если разность хода  $\Delta = 2nd$  равна четному числу полуволн, то (с учетом дополнительного фазового сдвига) в интерференционной картине наблюдается темное кольцо, если нечетному — то светлое. Отсюда находим для радиусов темных колец  $r = \sqrt{R\lambda m}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ),

а для светлых —  $r = \sqrt{R\lambda(m + 1/2)}$ .

Так как толщина зазора  $d$  меняется нелинейно (при малых толщинах мож-

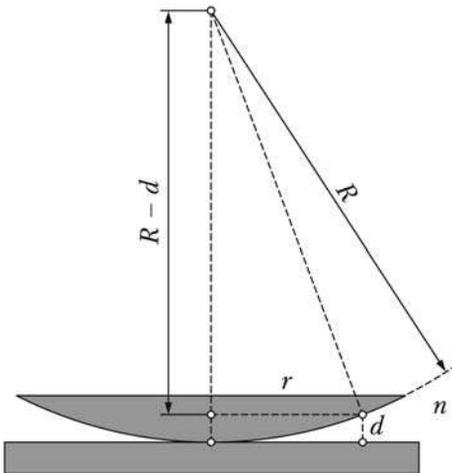


Рис. 6.2. Получение колец Ньютона

но считать функцию  $d$  от поперечной координаты квадратичной), то и система колец постепенно сгущается от центра к периферии (рис. 6.3).

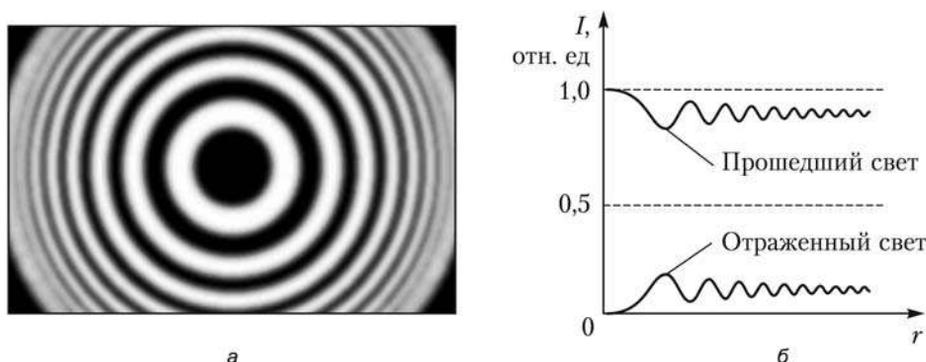


Рис. 6.3. Вид колец Ньютона в отраженном свете (а) и радиальное распределение интенсивности для квазимонохроматического источника (б)

Три–четыре первых ньютоновских кольца можно наблюдать при освещении белым светом, при этом явно выражена их хроматичность (окрашенность), усиливающаяся к краям. Ширина ньютоновских колец увеличивается с ростом длины волны освещающего излучения, а их контрастность, как обычно, возрастает при использовании средств спектральной селекции (светофильтры, дуговые лампы и т. п.).

С ростом порядка интерференции (увеличением номера кольца) в силу конечной когерентности источника света контрастность ньютоновских колец падает. Для источника со спектральным интервалом  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$  интерференционная картина пропадет, если максимум порядка  $m$  для  $\lambda_1$  совпадет с минимумом  $(m + 1)$  порядка для  $\lambda_2$ :

$$2d = m\lambda_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_2.$$

Отсюда находим, что число видимых колец равно

$$m = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\Delta\lambda} = \frac{L_{\text{к}}}{\lambda_{\text{ср}}}, \quad (6.2)$$

где  $\lambda_{\text{ср}} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$  — средняя длина волны,  $L_{\text{к}}$  — длина когерентности. Таким образом, определяя число видимых ньютоновских колец, можно оценить длину когерентности источника.

Заметим, что при отсутствии поглощения в стекле картины колец в отраженном и прошедшем свете являются *дополнительными*, то есть в любой точке зазора сумма их интенсивностей постоянна и равна интенсивности падающей плоской волны.

## Полосы равного наклона

Методом деления амплитуды можно получить еще один тип интерференционной картины — полосы равного наклона. Они наблюдаются при освещении пленок или плоскопараллельных пластинок расходящимся пучком. Отражения от

передней и задней поверхностями пластины формируют два мнимых изображения  $S'$  и  $S''$  источника  $S$  (рис. 6.4). Сферические волны от этих мнимых источников, накладываясь в плоскости экрана, создают систему интерференционных колец, каждое из которых отвечает определенному углу наклона и осью которых является перпендикуляр, опущенный из центра источника на поверхность пластины.

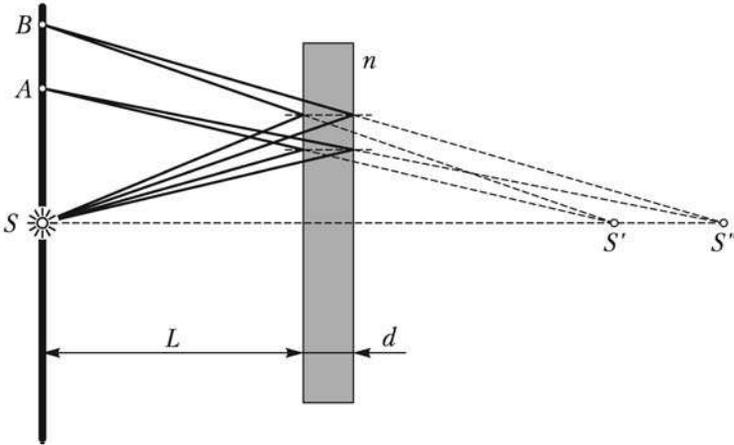


Рис. 6.4. Получение полос равного наклона

Рассмотрим ситуацию, когда оба отраженных луча образуются из одного и того же падающего (рис. 6.5). Разность хода между отраженными лучами при произвольном угле падения для случая тонкой пленки, находящейся в воздухе, равна

$$\Delta = (AB + BC)n - AD + \frac{\lambda}{2} = 2nd \cos \beta + \frac{\lambda}{2}. \quad (6.3)$$

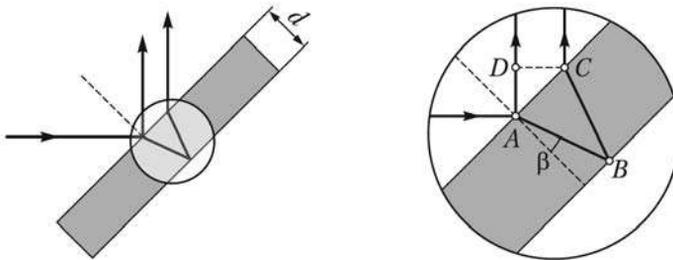


Рис. 6.5. Интерференция лучей, отраженных тонкой пленкой

Таким образом, для всех волн, падающих на пленку под одним и тем же углом, разность хода одинакова. Отраженные лучи при этом параллельны, вследствие чего интерференционная картина локализована в бесконечности и может наблюдаться на экране, помещенном в фокальную плоскость собирающей линзы.

Из формулы (6.3) следует, что при увеличении угла падения света ( $\beta > 0$ ) оптическая разность хода между отраженными лучами не только не увеличивается, но даже уменьшается. Следовательно, номера колец равного наклона, соответствующие порядкам интерференции, будут *убывать* по мере перехода от центра к пе-

риферии. При этом конечная когерентность источника  $S$  может привести к тому, что внешние кольца будут иметь большую видность, чем внутренние. В этом состоит качественное отличие полос равного наклона от полос равной толщины.

При применении в качестве светоделителей плоскопараллельных стеклянных пластин толщиной в единицы или десятки миллиметров требуются лазерные источники света, иначе длина когерентности может оказаться меньше оптической разности хода. Порядки полос в этом случае могут составлять десятки тысяч (для оси системы колец  $m = 2dn/\lambda$ ).

При использовании реальных протяженных источников полосы равной толщины оказываются локализованы на поверхности пленок или зазоров, а полосы равного наклона — на бесконечности. Для случая точечных источников это различие теряется: оба типа полос делокализованы, то есть наблюдаются в любой точке области перекрытия интерферирующих лучков.

## Просветление оптики

Предположим теперь, что тонкая пленка нанесена на поверхность стекла, причем показатели преломления воздуха, пленки и стекла удовлетворяют соотношению  $n_0 < n_1 < n_2$ . Поскольку фазовый сдвиг на  $\pi$  возникает при отражении от оптически более плотной среды, оба интерферирующих луча, отраженных от пленки и от подложки, претерпевают одинаковый скачок фазы и взаимной расфазировки не происходит. При толщине пленки, равной  $d = \lambda/4n_1$ , получается минимум коэффициента отражения:

$$R = \left( \frac{n_0 n_2 - n_1^2}{n_0 n_2 + n_1^2} \right)^2.$$

Нетрудно видеть, что  $R = 0$  при

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2}. \quad (6.4)$$

Это условие имеет простое физическое объяснение. Коэффициент отражения на границе двух сред зависит только от *относительного* показателя преломления (подробнее см. главу 11). На границе воздух–пленка он равен  $n_1/n_0$ , на границе пленка–подложка —  $n_2/n_1$ . Приравнявая эти выражения, получаем условие (6.4).

Эффект уменьшения отражения на границе раздела воздух–стекло называется *просветлением оптики*, он широко применяется для уменьшения потерь света в оптических приборах. Конечно, полное просветление может быть достигнуто лишь для волны одной длины — той, для которой выполнено соотношение  $\lambda = 4dn_1$ .

## 6.2. Метод деления волнового фронта

Применение этого метода предполагает формирование вторичных источников из единого волнового фронта путем выделения различных его частей. Все основные интерференционные схемы, основанные на методе деления волнового фронта, тем или иным способом *сводятся к схеме Юнга* (см. рис. 5.2). Это обусловлено одной и той же задачей формирования вместо одного источника излучения двух, причем на *минимальном расстоянии* друг от друга с целью получения *полос максимальной ширины* в области перекрытия пучков.

*Бипризма Френеля* (рис. 6.6) представляет собой две клиновидные призмы, соединенные основаниями, и формирует два мнимых источника. Преломляющий угол  $\alpha$  обеих половин одинаков и (у бипризмы хорошего качества) чрезвычайно мал и составляет единицы угловых минут. Угол  $\theta$  отклонения луча стеклянным клином с показателем преломления  $n$  и преломляющим углом  $\alpha$  равен  $\theta = (n - 1)\alpha$ . Смещение изображения источника  $SS_1 = L_1 \cdot \text{tg}\theta$ . Тогда в силу малости угла  $\alpha$  расстояние между источниками  $d = S_1S_2 = 2L_1(n - 1)\alpha$ , ширина интерференционной полосы

$$\Delta x = \frac{L_1 + L_2}{d} \lambda = \frac{L_1 + L_2}{2L_1(n - 1)\alpha} \lambda.$$

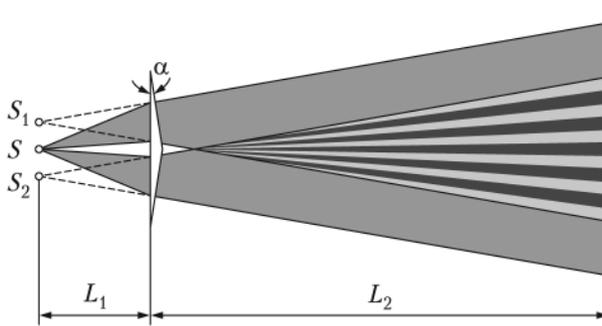


Рис. 6.6. Бипризма Френеля

*Бизеркала Френеля* (рис. 6.7) составляют плоский угол (близкий к  $180^\circ$ ) и позволяют за счет отражения сформировать два мнимых источника. Как и в любой системе плоских зеркал, все три источника находятся на одинаковом расстоянии от ребра плоского угла (на окружности с центром в ребре). Хотя при отражении от зеркала происходит фазовый сдвиг, дополнительный разности фаз не возникает, — ведь сдвигаются фазы обоих пучков. При повороте зеркала на угол  $\alpha$  световой луч смещается на  $2\alpha$ , поэтому  $S_1S_2 = r \cdot \text{tg}2\alpha$ . В силу малости угла  $\alpha$  расстояние между источниками  $d = S_1S_2 = 2r\alpha$ , ширина интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{L + r}{d} \lambda = \frac{L + r}{2r\alpha} \lambda.$$

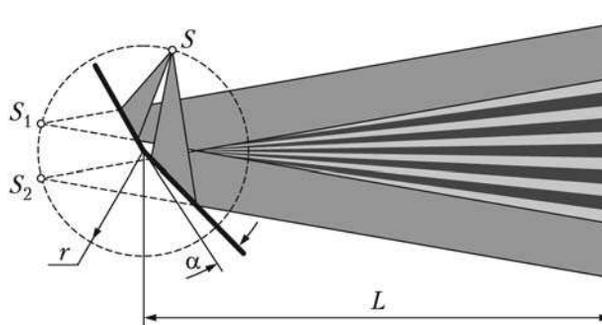


Рис. 6.7. Бизеркала Френеля

*Билинза Бийе* (рис. 6.8) изготавливается из единой линзы путем ее разрезания по диаметру и раздвигания половин на расстояние  $h$  поперек оптической оси. Другой вариант использования — вырезание вдоль диаметра тонкого пояса и склеивание оставшихся половин. В обоих случаях формируются два действительных источника. Расстояние между источниками

$$d = \frac{hf}{a-f}, \text{ поскольку } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

где  $f$  — фокусное расстояние линзы.

Ширина интерференционной полосы:

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d} = \frac{L\lambda(a-f)}{hf}$$

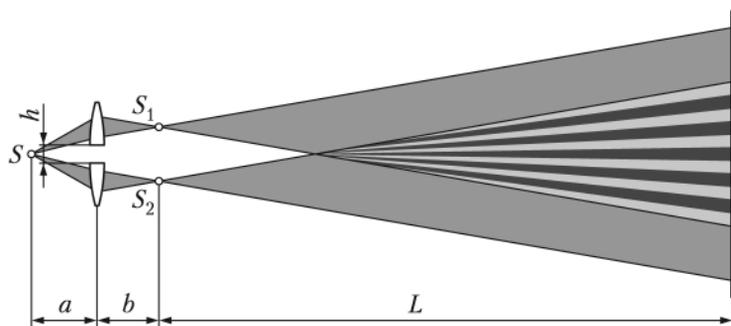


Рис. 6.8. Билинза Бийе

При использовании *зеркала Ллойда* (рис. 6.9) интерферируют пучки от самого источника  $S$  и его мнимого изображения  $S_1$  в плоском зеркале  $M$ , размещаемом как можно ближе к источнику. Поскольку один из пучков (отраженный) претерпевает фазовый сдвиг, то *положения максимумов и минимумов интерференции меняются местами*.

Ширина полосы зависит не только от высоты источника над зеркалом  $h$  ( $S_1S_2 = 2h$ ), но и от угла скольжения  $\alpha$ , так как разность хода составляет  $\Delta = S_1S_2 \cdot \text{tg}\alpha - \lambda/2 \approx 2h\alpha - \lambda/2$ .

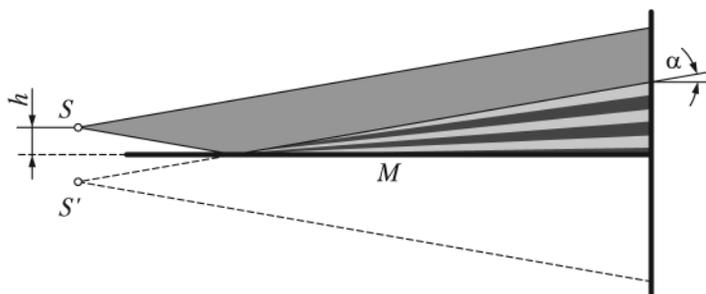


Рис. 6.9. Зеркало Ллойда

### 6.3. Двухлучевые интерферометры. Принципы фурье-спектрологии

Большинство *двухлучевых интерферометров* построены по схеме деления амплитуды. Наиболее известный из них — *интерферометр Майкельсона* (рис. 6.10) с одним 50-процентным светоделителем и двумя зеркалами  $M_1$  и  $M_2$ .

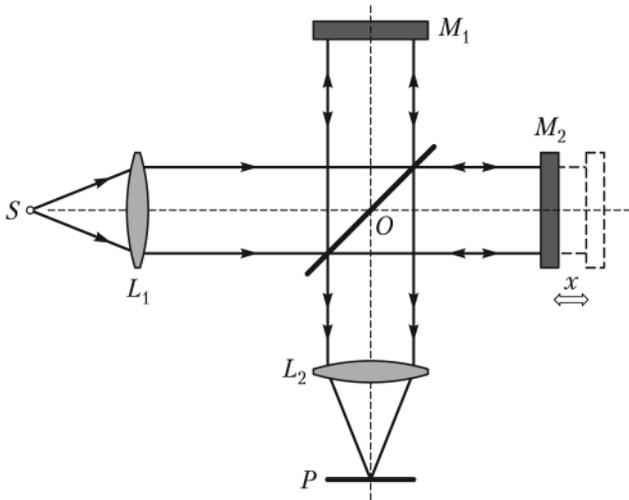


Рис. 6.10. Интерферометр Майкельсона

Разность хода в нем равна удвоенной разности расстояний  $OM_1$  и  $OM_2$ , называемых плечами интерферометра. Сьюстированный равноплечий интерферометр дает равномерную засветку поля зрения в плоскости наблюдения  $P$  (бесконечная полоса нулевого порядка). В случае наклона или отклонения от идеальной плоскости одного из зеркал в поле зрения появляются полосы, ширина которых обратно пропорциональна углу наклона зеркала и прямо пропорциональна фокусному расстоянию объектива  $L_2$ .

Отличительной особенностью интерферометра Майкельсона является возможность изменения разности хода в очень широких пределах. Тем самым становится возможным прямое измерение длины когерентности, как расстояния между зеркалами  $x$ , при котором интерференционная картина пропадает. Более того, как известно, по теореме Винера—Хинчина модуль степени когерентности  $g(\tau)$  и спектральная плотность излучения  $G(\nu)$  связаны *преобразованием Фурье*:

$$g(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{2\pi i \nu \tau} d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) d\nu}. \quad (6.5)$$

Если интерферометр Майкельсона с подвижным зеркалом дополнить блоком, подвергающим сигнал преобразованию Фурье, получим простейший *фурье-*

*спектрометр.* При максимальной разности хода в интерферометре, равной  $\Delta_{\max} = 2x_{\max}$ , разрешение фурье-спектрометра по частоте составит  $\Delta\nu \approx c/\Delta_{\max}$ , а разрешающая сила  $\lambda/\Delta\lambda \approx \Delta_{\max}/\lambda$ . При разности плеч интерферометра 1,5 мм разрешающая сила составляет  $10^4$ , а в интерферометре с возможностью смещения зеркала на 1,5 м достигает  $10^7$ . Это делает фурье-спектрометр мощным инструментом изучения тонкой структуры спектров, например, в составе экологических лабораторий.

Практические применения интерферометров не ограничиваются областью спектрального анализа. Например, для контроля качества изготовления оптических элементов служит интерферометр *Тваймана—Грина* (рис. 6.11, а), собранный на базе той же схемы. В его измерительное плечо помещается проверяемый оптический элемент. В случае проверки призмы второе плечо просто разворачивают, оставляя в нем плоский отражатель. Для контроля линз или многолинзовых объективов зеркало  $M_2$  делают сферическим.

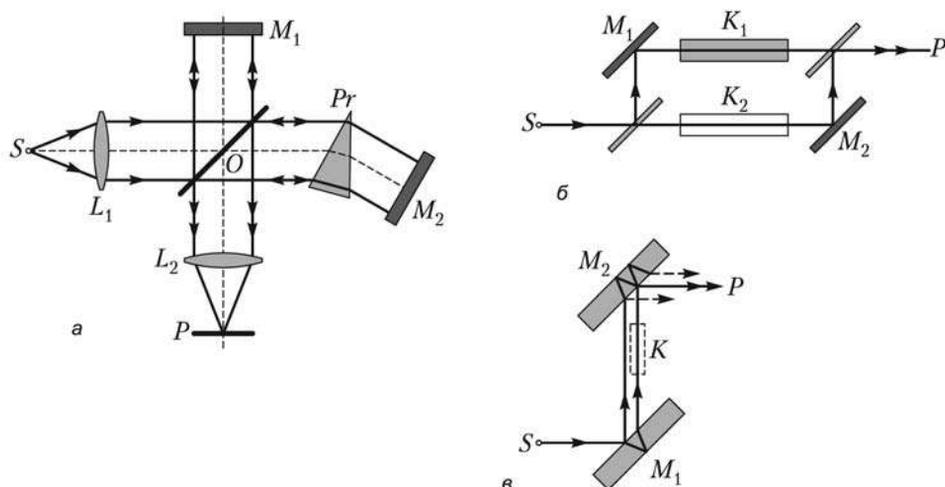


Рис. 6.11. Оптические схемы интерферометров Тваймана—Грина (а), Маха—Цендера (б) и Жамена (в)

Интерферометр *Маха—Цендера* (рис. 6.11, б) предназначен в первую очередь для измерения показателей преломления газов. В плечи интерферометра помещаются кюветы  $K_1$  и  $K_2$ , одна из которых заполнена исследуемым веществом, а другая служит для компенсации разности хода, обусловленной окнами кюветы. При прохождении света через кюветы появляется добавочная разность хода  $\Delta = (n_2 - n_1)L$ , где  $L$  — длина кюветы,  $n_1$  и  $n_2$  — показатели преломления веществ, заполняющих кюветы. Такие устройства для прецизионного измерения показателя преломления называют интерференционными *рефрактометрами*. Они обладают предельно высокой чувствительностью, определяемой отношением длины световой волны  $\lambda$  к длине кюветы  $L$ . Действительно, визуально можно заметить сдвиг интерференционной картины с точностью до  $1/40$  порядка, что при  $L = 10$  см позволяет обнаружить разность показателей преломления  $n_2 - n_1$  порядка  $10^{-7}$ .

Интерферометр Жамена (рис. 6.11, в), состоящий из двух толстых плоскопараллельных пластин, наиболее прост в настройке и регулировке (в оптической терминологии — юстировке). Он также может использоваться для измерения показателей преломления жидкостей и газов. Его недостаток — слишком близкое расположение обоих световых лучей: объектного и реперного, не позволяющее размещать кюветы большого диаметра.

## 6.4. Измерение угловых размеров источников. Звездный интерферометр

Как известно из предыдущей главы (см. рис. 5.10) в случае протяженного источника расфазированность колебаний, приходящих от различных его точек приводит к уменьшению видности интерференционных полос (*конечная пространственная когерентность*). Измеряя видность в низких порядках можно определить модуль степени когерентности  $g_{12}(0)$  и по нему оценить угловой размер удаленного источника. Это особенно важно в астрономических наблюдениях, где невозможно оптическими методами получить изображения звезд в виде дисков.

В *звездном интерферометре Майкельсона* (рис. 6.12), собранном на базе телескопа-рефрактора, перед объективом  $L$  установлена маска с двумя щелями  $S_1$  и  $S_2$ . Свет на эти щели направляется системой зеркал, причем расстояние  $d_m$  между зеркалами  $M_1$  и  $M_2$  может изменяться. За счет этого удастся измерить корреляционную функцию для лучей, расстояние между которыми намного больше, чем диаметр объектива телескопа. Вторая пара неподвижных зеркал  $M_3$  и  $M_4$ , разнесенных на фиксированное расстояние  $d_s$ , обеспечивает постоянство ширины интерференционных полос. В соответствии с анализом, сделанным для схемы Юнга, эта ширина равна  $\Delta x = f\lambda/d_s$ . Таким образом, при изменении расстояния  $d_m$  интерференционная картина сохраняет свою периодичность, что существенно повышает точность измерения видности.

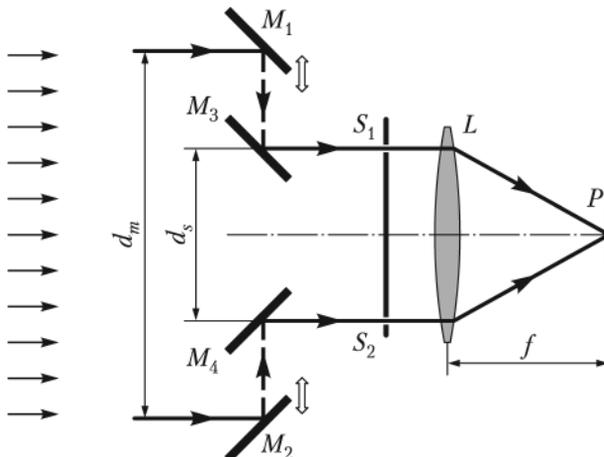


Рис. 6.12. Звездный интерферометр

При увеличении расстояния  $d_m$  видность полос в плоскости  $P$  падает. Определив значение  $d_m$ , при котором  $V(d_m) \rightarrow 0$ , оценивают угловой размер источника  $\varphi$ . В предположении о равномерном распределении интенсивности на источнике видность интерференционной картины определяется как

$$V = \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d_m \varphi\right)}{\frac{\pi}{\lambda} d_m \varphi} \right]^2. \quad (6.6)$$

Эта функция обращается в 0 при  $d_m = \lambda/\varphi$ . Несмотря на высокие требования, предъявляемые к конструкции интерферометра, допускающей перемещение зеркал  $M_1$  и  $M_2$ , с сохранением их ориентации с точностью до долей длины волны, Майкельсону удалось обеспечить  $d_m$  до 6 м, что соответствует угловому разрешению 0,02 угловой секунды. Определив из интерференционных измерений угловой размер и оценив из других соображений (параллакс, смещение Доплера и т. п.) расстояние до звезды, можно получить ее реальный диаметр.

## 6.5. Многолучевая интерференция

### Эталон Фабри—Перо

Интерференция может наблюдаться не только при наложении световых волн от двух источников, но и от нескольких и даже от бесконечного числа источников (*пластинка Льюмера—Герке, эталон Майкельсона* и т. п.). Расчет интенсивности при многолучевой интерференции также проводится на основе универсального принципа суперпозиции. Одним из типов многолучевых интерферометров является *эталон Фабри—Перо*, представляющий собой плоскопараллельную пластинку, на поверхности которой нанесены отражающие покрытия (рис. 6.13).

Обозначим амплитудный коэффициент отражения на одной поверхности через  $r$ , тогда энергетический коэффициент отражения на одной поверхности равен  $R = |r|^2$ , а коэффициент пропускания (в отсутствие поглощения)  $T = 1 - R$ .

Амплитуды прошедших волн равны:

$$E_1 = E_0(1-r)^2; \quad E_2 = E_0 r^2 (1-r)^2 e^{i\delta}; \quad E_3 = E_0 r^4 (1-r)^2 e^{2i\delta}; \quad \dots$$

Результирующая амплитуда представляет собой сумму геометрической прогрессии с комплексным знаменателем  $q = r^2 \exp(i\delta)$ , зависящим от фазового набего  $\delta = 2nd \cos \theta$  между прошедшими лучами:

$$E_T = \frac{E_0(1-r)^2}{1 - r^2 \exp(i\delta)}, \quad (6.7)$$

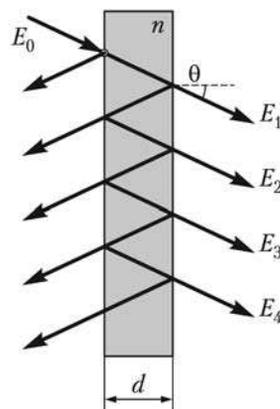


Рис. 6.13. Эталон Фабри—Перо

а коэффициент пропускания эталона

$$T_0 = \frac{E_t E_t^*}{E_0^2} = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \delta/2}. \quad (6.8)$$

Выражение (6.8) носит название *формулы Эйри*. Она остается справедливой и при наличии частичного поглощения на границах раздела, когда  $R + T < 1$ .

Проанализируем формулу Эйри. Так как интенсивность зависит от сдвига фазы  $\delta$ , который, в свою очередь, определяется углом  $\theta$ , под которым световой пучок проходит через эталон (см формулу (6.3)), интерференционные полосы будут иметь вид колец равного наклона. Светлое кольцо, соответствующее максимуму пропускания, будет образовываться при  $\sin \delta/2 = 0$ ,  $\delta = 2m\pi$ . Минимумы интенсивности будут наблюдаться при  $|\sin \delta/2| = 1$ . Нетрудно заметить, что при отсутствии потерь ( $R + T = 1$ )

$$T_{0 \max} = 1; \quad T_{0 \min} = \left( \frac{1-R}{1+R} \right)^2. \quad (6.9)$$

Примечательно, что независимо от  $R$  и  $\delta$  пропускание в максимуме равно 1. Очевидно также, что чем больше коэффициент отражения на поверхности эталона  $R$ , тем меньше интенсивность прошедшего света в минимуме.

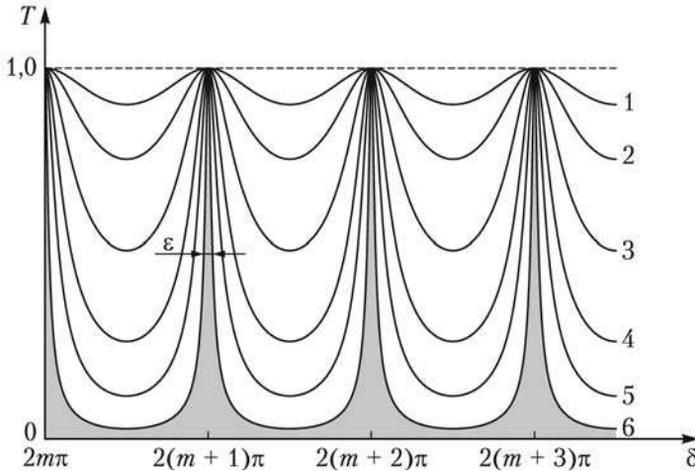


Рис. 6.14. Функция Эйри. Кривые 1–6 соответствуют увеличению коэффициента отражения от 0,04 до 0,90 (см. табл. 6.1)

Зависимость коэффициента пропускания от разности хода, описываемая формулой Эйри, резко отличается от функции вида  $\cos^2 \delta$ , характерной для двухлучевой интерференции, и показана на рис. 6.14. Чем больше  $R$ , тем острее становятся максимумы, разделяемые широкими минимумами, одновременно увеличиваются *видность*

$$V = \frac{T_{0 \max} - T_{0 \min}}{T_{0 \max} + T_{0 \min}} = \frac{2R}{1 + R^2}$$

и резкость картины

$$F = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}.$$

Резкость имеет смысл отношения расстояния между соседними максимумами к их ширине; ближайшее к ней целое число есть примерное число лучей, которое надо учитывать при суммировании. Значения видности и резкости для некоторых значений коэффициента отражения  $R$  приведены в табл. 6.1.

**Таблица 6.1.** Параметры многолучевой интерференционной картины

$R$	0,04	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90
$V$	0,08	0,20	0,47	0,80	0,96	0,99
$F$	0,6	1,1	2,1	4,4	11	30

Практически неограниченное сужение максимумов пропускания при многолучевой интерференции позволяет реализовать на ее основе исключительно точные устройства *спектральной селекции*. Если постоянный фазовый набег  $\delta$  между тысячами интерферирующих лучей выдержан идеально, то малейшее отклонение длины волны в ту или иную сторону может изменить резонансные условия настолько, что максимум пропускания превратится в минимум.

Современная технология оптических покрытий позволяет достичь значений коэффициента отражения  $R$  на уровне 0,999, что дает значение  $F > 3000$ . С другой стороны, применение инваровых<sup>1</sup> оправ дает возможность в широких температурных пределах выдерживать расстояние между отражателями с точностью до сотых долей микрона. Именно такие параметры требуются в эталоне Фабри–Перо.

На примере многолучевых полос поясним важное понятие *разрешающей способности*, вводимое для *наблюдательных* или *спектральных* приборов. Наблюдательная разрешающая способность — это возможность раздельно видеть два близких точечных источника; спектральная разрешающая способность — возможность раздельно наблюдать две соседние спектральные линии.

Существует несколько количественных критериев разрешающей способности, из которых наиболее употребительный — *критерий Рэля*, по которому на пределе разрешения находятся линии или контуры, пересекающие друг друга так, что в центре суммарного контура образуется провал глубиной около 20 % (рис. 6.15).

Критерий Рэля, как и любой другой, носит условный характер. Если интенсивность одной из линий существенно больше другой, то провал в наблюдаемом контуре может отсутствовать даже тогда, когда расстояние между ними значительно больше, чем требует критерий Рэля. С другой стороны, близко расположенные линии могут быть разрешены, если погрешность измерения интенсивности меньше 20 %.

<sup>1</sup> Инвар — сплав никеля с железом, имеющий очень малый коэффициент температурного линейного расширения. Практически не расширяется в интервале температур от -100 до 100 °С.

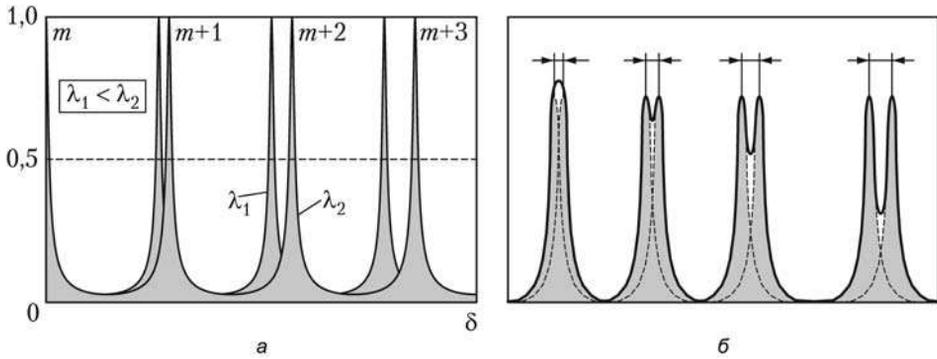


Рис. 6.15. Зависимость разрешения двух близких спектральных линий от порядка интерференции (а) и критерий Рэлея (б)

Разрешающая сила эталона Фабри–Перо может быть оценена как  $\lambda/\Delta\lambda = mF$ , где  $m$  – порядок интерференции,  $F$  – резкость. При толщине эталона в несколько миллиметров разрешающая сила может доходить до сотен тысяч.

Типичная ширина спектральной линии в видимой области спектра  $\Delta\nu \sim \sim 10^{10}$  Гц (см. главу 13), что соответствует  $\Delta\lambda = \lambda^2 \Delta\nu/c \sim 0,008$  нм. Для того чтобы эта ширина могла быть зарегистрирована прибором, последний должен иметь разрешающую силу  $\lambda/\Delta\lambda \sim 60\,000$ . Эта величина достигается и даже перекрывается современными интерференционными и дифракционными спектральными приборами высокого разрешения. Таким образом, классические спектральные приборы достигли фактического предела разрешения. Дальнейшее увеличение разрешающей способности возможно только на основе принципиально новых физических идей, реализуемых, например, в лазерной спектроскопии.

### Диэлектрические покрытия

Интересных эффектов можно достичь, используя многослойные диэлектрические покрытия, состоящие из четвертьволновых ( $nd = \lambda/4$ ) слоев с чередующимися высокими ( $n_1$ ) и низкими ( $n_2$ ) показателями преломления (рис. 6.16), всего  $2N + 1$  слой. Если  $n_1 > n_c$ , то волны, отраженные от всех границ слоев, оказываются сфазированными, и в результате интерференции коэффициент отражения не уменьшается, как при просветлении границы раздела, а увеличивается; получается диэлектрическое зеркало.

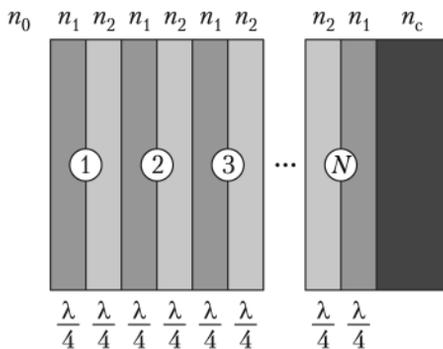


Рис. 6.16. Многослойное четвертьволновое покрытие

ваются сфазированными, и в результате интерференции коэффициент отражения не уменьшается, как при просветлении границы раздела, а увеличивается; получается диэлектрическое зеркало.

Спектральные характеристики таких зеркал, сделанных из нанесенных на стекло ( $n_c = 1,52$ ) слоев ZnS ( $n_1 = 2,3$ ) и  $MgF_2$  ( $n_2 = 1,38$ ), приведены на рис. 6.17. Для пятислойного зеркала ( $N = 2$ ) коэффициент отражения в максимуме достигает 86 %, а для 11-слойного ( $N = 5$ ) – 99,3 %. Такие интерференционные покрытия –

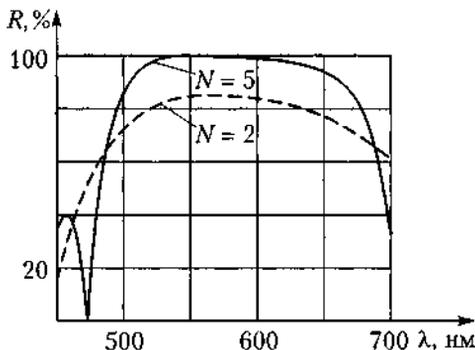


Рис. 6.17. Спектр отражения диэлектрического зеркала

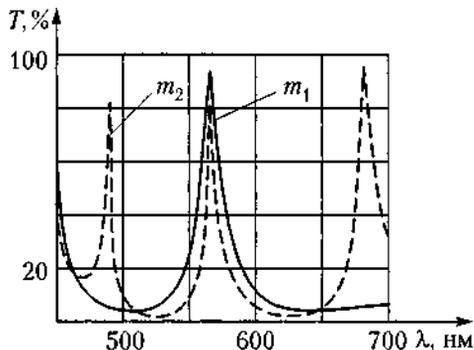


Рис. 6.18. Спектр пропускания интерференционного фильтра

единственный способ получения широко используемых в лазерной технике высокоотражающих зеркал для видимой и ультрафиолетовой частей спектра.

Если оптическую толщину центрального слоя сделать кратной  $m\lambda/2$ , то вместо зеркала получается *интерференционный светофильтр*. У такого фильтра коэффициент отражения высок, а коэффициент пропускания мал для всех длин волн, кроме узкого диапазона. Спектры пропускания 9-слойного фильтра с толщинами центрального слоя  $m_1 = 1$  и  $m_2 = 2$  показаны на рис. 6.18.

## Примеры решения задач

**Пример 6.1.** На экране наблюдается интерференционная картина от двух точечных когерентных источников. На сколько изменится разность хода и разность фаз колебаний в центре картины, если на пути первого луча поместить мыльную пленку толщиной  $d = 1$  мкм? Длина волны  $\lambda = 660$  нм, показатель преломления пленки  $n = 4/3$ .

*Решение*

В отсутствие пленки в центре картины наблюдается интерференционный максимум, так как длины путей от источников одинаковы и разность хода равна нулю. При помещении мыльной пленки первый луч вместо расстояния  $d$  в воздухе проходит это расстояние в среде с показателем преломления  $n$ . Возникающая оптическая разность хода равна  $\Delta = nd - d = d(n - 1) = 0,33$  мкм. Соответствующая разность фаз будет

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 0,33}{0,66} = \pi.$$

Это означает, что волны от обоих источников придут в центр картины в противофазе и светлая полоса в этом месте экрана сменится темной.

**Пример 6.2.** Высота радиомаяка над уровнем моря  $H = 200$  м, расстояние до корабля  $d = 5,5$  км. Определите оптимальную высоту  $h$  мачты корабля для приема сигналов с длиной волны равной 1,5 м.

*Решение*

Несмотря на то что длина волны радионезлучения в тысячи раз больше световой, в данном случае можно воспользоваться анализом явления оптической интерференции, поскольку все расстояния и высоты много больше длины волны. Приемник на мачте корабля принимает сигналы, приходящие от радиомаяка  $S$  напрямую и отраженные от поверхности воды. В этом случае возникает второй когерентный источник  $S'$  как в схеме Ллойда. В этой схеме не может возникнуть нулевой интерференционный максимум (длина пути от источника-отражения всегда больше), поэтому оптимальной является ситуация, когда сигналы приходят с разностью хода  $\Delta = \lambda$ . В схеме Ллойда расстояние между источниками равно  $2H$  и разность хода определяется как

$$\Delta = \frac{2Hh}{d} + \frac{\lambda}{2},$$

где слагаемое  $\lambda/2$  появляется за счет скачка фазы при отражении от оптически более плотной среды (воды). Отсюда находим

$$h = \frac{d\lambda}{4H} = 10,3 \text{ м.}$$

**Пример 6.3.** В проходящем свете при освещении стеклянного клина ( $n = 1,50$ ) излучением с длиной волны 520 нм в некоторой точке наблюдается светлая полоса. При уменьшении длины волны на 20 нм в эту точку перемещается следующая светлая полоса. Найдите толщину клина в этой точке. Падение лучей на клин нормально к поверхности.

*Решение*

В проходящем свете картина интерференции наблюдается на нижней поверхности клина. Учитывая, что стеклянный клин находится в воздухе, падение света нормальное, оптическую разность хода лучей на нижней поверхности можно записать как  $\Delta = 2dn$ . Так как при толщине  $d$  наблюдается интерференционный максимум для  $\lambda_1$ , то на оптической разности хода укладывается целое число длин волн:  $2dn = k\lambda_1$ . При изменении длины волны на  $\lambda_2$  на той же разности хода укладывается на одну длину волны больше:  $2dn = (k + 1)\lambda_2$ . Отсюда находим, что

$$k = \lambda_2/(\lambda_1 - \lambda_2) \text{ и } d = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2n(\lambda_1 - \lambda_2)} = 4,33 \text{ мкм.}$$

**Пример 6.4.** Две плосковыпуклые тонкие стеклянные линзы соприкасаются сферическими поверхностями. Найдите оптическую силу такой системы, если в отраженном свете с длиной волны 600 нм диаметр пятого светлого кольца равен 1,5 мм.

*Решение*

Условие наблюдения  $k$ -го светлого кольца имеет вид:

$$2dn' - \lambda/2 = k\lambda,$$

где  $d$  — толщина зазора в точке наблюдения на расстоянии  $r_k$  от точки касания линз,  $n'$  — показатель преломления среды между линзами, в данном случае  $n' = 1$ .

Толщина зазора может быть представлена как  $d = d_1 + d_2$ , где  $d_1 = \frac{r_k^2}{2R_1}$ ,  $d_2 = \frac{r_k^2}{2R_2}$

(см. формулу (6.1)). Подставляя эти выражения, находим, что радиус  $k$ -го светлого кольца равен

$$r_k^2 = \frac{(2k-1)\lambda}{2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Оптическая сила системы равна сумме оптических сил линз:

$$D = (n-1) \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

Заменяя  $r_k^2 = d_k^2/4$ , находим

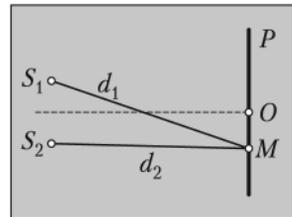
$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{4(2k-1)\lambda}{2d^2}$$

и, следовательно,

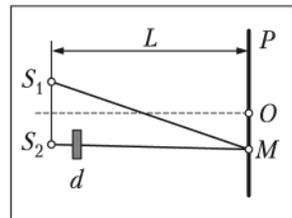
$$D = \frac{2(2k-1)\lambda(n-1)}{d^2} = 2,4 \text{ дптр.}$$

## Задачи

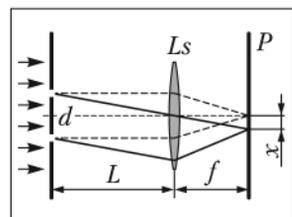
**6.1.** Источник света с длиной волны 400 нм создает в схеме Юнга два когерентных источника  $S_1$  и  $S_2$ , помещенных в бензол ( $n = 1,5$ ). В точку  $M$  на экране луч от первого источника дошел за  $t_1 = 2,0002 \cdot 10^{-10}$  с, а от второго — за  $t_2 = 2,0000 \cdot 10^{-10}$  с. Определите разность фаз колебаний в точке  $M$  и порядок интерференции  $k$ .



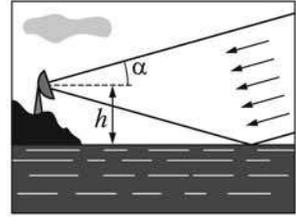
**6.2.** В опыте Юнга расстояние между точечными источниками света  $S_1$  и  $S_2$  равно 1 мм; расстояние от источников до экрана  $L = 1$  м, длина волны 550 нм. Определите расстояние  $OM$  от центрального пятна на экране до 4-го минимума. Найдите толщину стеклянной пластинки  $d$  ( $n = 1,5$ ), которую надо поместить на пути луча от источника  $S_2$ , чтобы нулевой максимум занял место 4-го минимума.



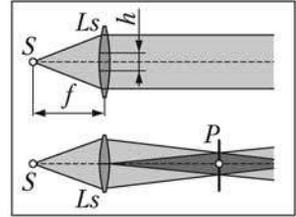
**6.3.** В опыте Юнга интерференционная картина наблюдается на экране  $P$ , помещенном в фокальной плоскости линзы  $Ls$  с фокусным расстоянием  $f = 60$  см. Найдите ширину полосы, если расстояние между щелями  $d = 0,5$  мм, длина волны 600 нм, расстояние до линзы  $L = 80$  см.



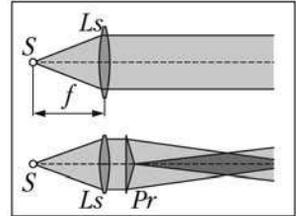
6.4. Радиотелескоп расположен на берегу океана на высоте  $h$ . Восход Солнца, происходящий со скоростью 12 град/ч, сопровождается модуляцией радиоизлучения с периодом 2,5 мин. Длина волны равна 1,5 м. Определите  $h$  (задача является радиочастотным аналогом оптической схемы Ллойда).



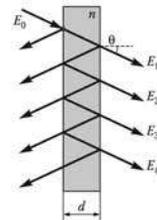
6.5. Из линзы  $L_s$ , в переднем фокусе которой находится точечный источник  $S$ , вырезана центральная часть шириной  $h = 0,6$  мм. Обе половины сдвинуты до соприкосновения. Найдите ширину интерференционных полос на экране  $P$ , если длина волны  $\lambda = 600$  нм, фокусное расстояние линзы равно 50 см.



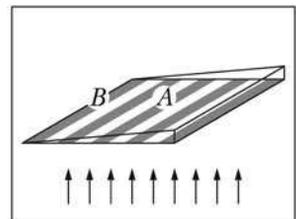
6.6. Преломляющий угол бипризмы равен  $3'26''$ . Между точечным источником монохроматического света ( $\lambda = 500$  нм) и бипризмой помещена линза таким образом, что ширина интерференционной полосы оказалась не зависящей от расстояния экрана до бипризмы. Найдите ширину интерференционной полосы и максимальное число полос, которое может наблюдаться в установке, если оно получается на расстоянии  $l = 5$  м от бипризмы до экрана. Показатель преломления вещества бипризмы  $n = 1,5$ .



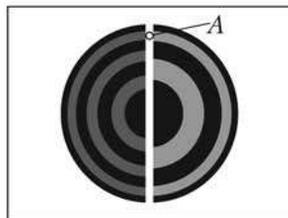
6.7. С поверхности стекла ( $n_2 = 1,62$ ) испаряется водяная пленка ( $n_1 = 1,33$ ). По нормали на стекло падает свет  $\lambda = 0,68$  мкм. Найдите скорость испарения пленки, если промежуток времени между двумя последовательными максимумами отражения равен 15 мин.



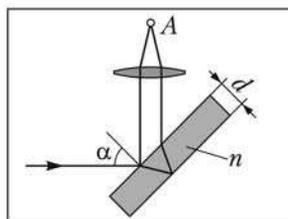
6.8. Между двумя поверхностями образован тонкий клин, заполненный водой ( $n = 1,34$ ) и освещенный монохроматическим излучением с длиной волны 670 нм. Определите в нанометрах разность толщин клина в точках  $A$  и  $B$ .



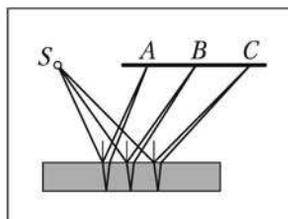
6.9. Картина интерференционных колец Ньютона наблюдается в отраженном свете через два светофильтра — фиолетовый и красный. Определите длины волн пропускания обоих светофильтров, если толщина зазора между линзой и пластиной в точке  $A$  равна  $480 \text{ нм}$ .



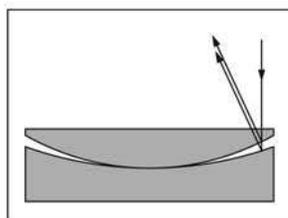
6.10. В точке  $A$  измеряют интенсивность  $I$  монохроматического излучения, отраженного от обеих граней плоскопараллельной пластины. Определите зависимость  $I(d)$  величины сигнала в точке  $A$  при постепенном уменьшении толщины  $d$ . Угол падения  $\alpha$  постоянен и равен  $45^\circ$ .



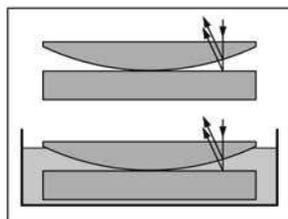
6.11. При освещении тонкой пленки точечным источником  $S$  с тремя длинами волн (фиолетовой, зеленой и красной) на экране в отраженном свете наблюдаются полосы равного наклона. Определите окраску отраженного света в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , если на всем экране присутствуют полосы одного порядка.



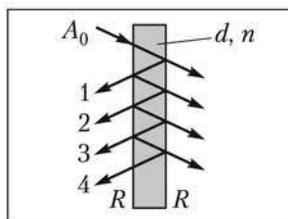
6.12. При наложении плосковыпуклой линзы на эталонную вогнутую поверхность в отраженном свете наблюдаются три светлых интерференционных кольца. Считая  $\lambda = 0,56 \text{ мкм}$  найдите в микронах отклонение поверхности линзы от эталона.



6.13. Кольца Ньютона наблюдаются при интерференции света отраженного от зазора между линзой с  $n = 1,75$  и плоскопараллельной пластинкой с  $n = 1,38$ . Как изменится интерференционная картина, если зазор между пластинкой и линзой заполнить жидкостью с  $n = 1,5$ ?



6.14. На стеклянную непоглощающую пластинку, имеющую отражающие покрытия падает волна с амплитудой  $A_0$  и претерпевает в ней многократные отражения. Найдите амплитуду второго отраженного луча, если амплитудный коэффициент отражения каждой грани равен  $r$ .



## ГЛАВА 7 Дифракция Френеля

Изучение оптических явлений в областях, где происходит концентрация световой энергии (например, в фокусе линзы), а также вблизи геометрической границы света и тени выявило отклонения от законов простой лучевой оптики. Как правило, эти отклонения проявляются в виде пространственных вариаций интенсивности световой волны, прошедшей через те или иные апертуры или вблизи непрозрачных экранов. Если волна монохроматическая, то дифракционные полосы образуются из светлых и темных участков, а в случае белого света эти полосы оказываются окрашенными.

Со времен Франческо Гримальди, который еще в XVII в. первым подробно описал дифракционные эффекты и даже ввел сам термин «дифракция», ее считали редким исключением из строгого свода законов геометрической оптики. Однако анализ волнового уравнения показывает, что независимо от природы распространяющихся колебаний (световые и звуковые, поперечные и продольные) дифракция не только не является чем-то аномальным, но присуща любому волновому процессу изначально.

С учетом этого нужно говорить о том, что геометрическая оптика и прямолинейное распространение света являются *предельным случаем* дифракции, а трудности наблюдения последней связаны с малостью длины световой волны и низкой пространственной и временной когерентностью естественных источников света.

### 7.1. Принцип Гюйгенса—Френеля

Для объяснения большинства дифракционных картин достаточно, не прибегая к интегральным преобразованиям волнового уравнения, применить *принцип Гюйгенса—Френеля*.

Согласно построениям Гюйгенса, каждую точку волнового фронта можно считать центром *вторичного возмущения*, которое вызывает элементарные сферические волны, а волновой фронт в любой более поздний момент времени является огибающей этих волн (рис. 7.1). Френель дополнил этот принцип положениями о *когерентности* вторичных источников и *интерференции* испускаемых ими вторичных волн.

С помощью принципа Гюйгенса удается легко пояснить, например, преломление света на границе раздела двух сред с  $n_1 < n_2$  (рис. 7.2). За время, пока световое

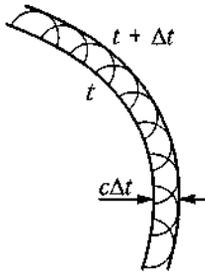


Рис. 7.1. Вторичные волны и перемещение волнового фронта

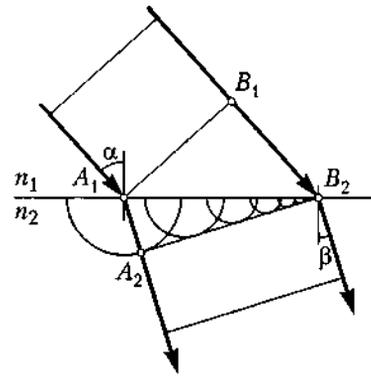


Рис. 7.2. Принцип Гюйгенса и преломление света

возмущение в первой среде проходит путь  $B_1B_2$ , вторичные волны во второй среде успевают пройти меньшее расстояние  $A_1A_2$ , так как скорость света во второй среде меньше. Световые лучи перпендикулярны волновым фронтам. Поскольку  $B_1B_2 = A_1B_2 \cdot \sin \alpha$ , а  $A_1A_2 = A_1B_2 \cdot \sin \beta$ , получаем обычный закон преломления:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Принцип Гюйгенса позволяет также продемонстрировать такое чисто дифракционное явление, как проникновение световых лучей в область геометрической тени у границ непрозрачного экрана  $P$  (рис. 7.3).

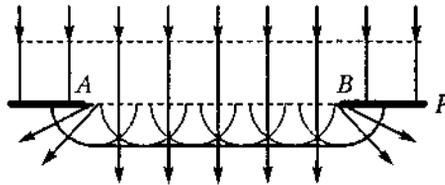


Рис. 7.3. Проникновение световых лучей в область геометрической тени

Ограничение бесконечного плоского фронта исходной волны отверстием  $AB$  приводит к искривлению огибающей вторичных волн, а следовательно, к отклонению от прямолинейного распространения света.

## 7.2. Зоны Френеля

### Дифракция на круглом отверстии

Рассмотрим дифракцию сферической монохроматической волны, расходящейся от точечного источника  $S$  и падающей на непрозрачный экран с круглым отверстием  $AB$  (рис. 7.4). Для простоты анализа предположим, что сам источник  $S$

и точка наблюдения  $P$  расположены на оси отверстия. Определим интенсивность света в центре дифракционной картины.

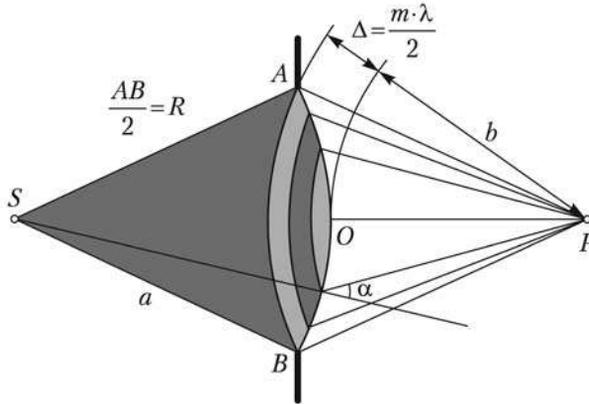


Рис. 7.4. Зоны Френеля

В соответствии с принципом Гюйгенса все точки волнового фронта, заполняющего отверстие  $AB$ , становятся источниками вторичных сферических волн. Поскольку расстояние до точки наблюдения  $P$  определяет фазу пришедшего в эту точку возмущения, имеет смысл выделить те области волнового фронта, вторичные волны из которых оказываются синфазны. С этой целью разобьем заполняющий отверстие волновой фронт  $AOB$  на кольцевые *полуволновые зоны*. Разбиение проведем путем последовательного добавления половины длины волны к радиусу  $b$  опорной сферы с центром в точке  $P$ , до тех пор, пока расстояние  $(b + \Delta)$  не станет равным расстоянию  $AP$  до края отверстия, что и определит число  $m$  открытых для точки  $P$  зон

Если расстояние  $SO = a$ ,  $OP = b$ , а высота сегмента  $h$ , то радиус  $m$ -й зоны  $R_m$  удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} R_m^2 + (a - h)^2 = a^2, \\ R_m^2 + (b + h)^2 = \left(b + \frac{m\lambda}{2}\right)^2. \end{cases} \quad (7.1)$$

Выражая из первого уравнения (7.1)  $h = R_m^2/2a$  и подставляя во второе, получим

$$R_m^2 + \left(b + \frac{R_m^2}{2a}\right)^2 = \left(b + \frac{m\lambda}{2}\right)^2.$$

Если радиус отверстия  $R$  и длина волны  $\lambda$  много меньше расстояний  $a$  и  $b$ , то нетрудно показать, что радиус  $m$ -й зоны  $R_m$  равен

$$R_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}. \quad (7.2)$$

Площадь  $m$ -й зоны  $S = \pi(R_{m+1}^2 - R_m^2)$ . Подставляя радиусы зон из (7.2), получаем

$$S = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Таким образом, площади полуволновых зон (обычно называемых *зонами Френеля*) приблизительно одинаковы. Световое возмущение, создаваемое  $m$ -й зоной в точке наблюдения, определяется напряженностью светового поля исходной волны, площадью зоны и некоторым *коэффициентом наклона*  $K(\alpha)$ , учитывающим зависимость амплитуды вторичных волн от угла  $\alpha$  между нормалью к волновому фронту и направлением на точку наблюдения. Многие практически важные задачи дифракции можно решить, не вычисляя точно вид этого коэффициента, а предположив лишь, что модуль  $K(\alpha)$  максимален в первоначальном направлении распространения света, то есть при  $\alpha = 0$ , и монотонно убывает с ростом  $\alpha$ .

Поскольку разность хода для световых колебаний от соседних зон равна  $\lambda/2$ , то разность фаз  $\delta = \pi$  и волны приходят в точку  $P$  в противофазах. Таким образом, результирующая амплитуда  $A(P)$  равна сумме знакопеременного ряда

$$A(P) = A_0(K_1 - K_2 + K_3 - K_4 + \dots) = A_0 \sum_{j=1}^m K_j (-1)^{j+1}, \quad (7.3)$$

где  $K_j$  — коэффициент наклона для  $j$ -й зоны,  $m$  — номер последней видимой зоны. Для вычисления суммы в равенстве (7.3) перепишем ее в виде

$$\sum_{j=1}^m K_j (-1)^{j+1} = \frac{K_1}{2} + \left( \frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left( \frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \dots + (-1)^{m+1} \frac{K_m}{2}. \quad (7.4)$$

Величина каждого  $K_j$  лишь немного отличается от величин соседних  $K_{j-1}$  и  $K_{j+1}$ , поэтому суммы в скобках в выражении (7.4) близки к нулю, и можно считать, что

$$\sum_{j=1}^m K_j (-1)^{j+1} = \begin{cases} \frac{K_1}{2} + \frac{K_m}{2} & \text{для нечетных } m, \\ \frac{K_1}{2} - \frac{K_m}{2} & \text{для четных } m. \end{cases} \quad (7.5)$$

Таким образом, в центре френелевской дифракционной картины при нечетном  $m$  должен наблюдаться максимум, а при четном  $m$  — минимум интенсивности.

## Применение метода векторных диаграмм

Изобразим амплитуду вторичных волн, пришедших от малого участка волнового фронта, вектором на комплексной плоскости, длина которого пропорциональна амплитуде, а поворот против часовой стрелки отражает фазовый сдвиг по сравнению с волнами, пришедшими от центра отверстия. Проследим за изменением получающихся диаграмм при постепенном увеличении диаметра отверстия в непрозрачном экране.

Случай, когда открыта *одна* полуволновая зона ( $m = 1$ ), показан на рис. 7.5, а. Элементарные векторы сложились в половину окружности, так как разность фаз между центром отверстия и краем зоны равна  $\pi$ . Жирной стрелкой показан результирующий вектор, длину которого находим из формулы (7.3):  $A(P) = A_0 K_1$ .

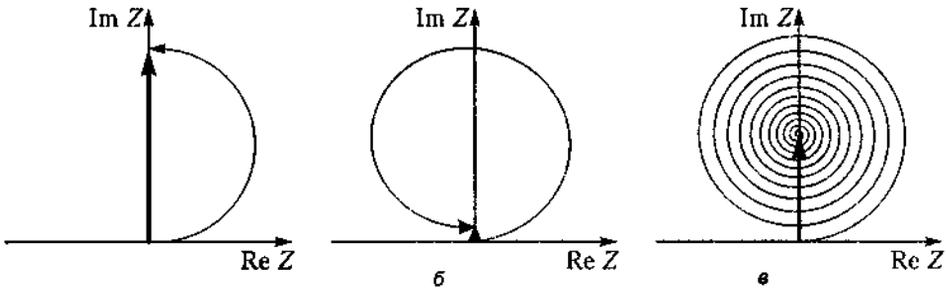


Рис. 7.5. Векторные диаграммы для круглого отверстия, открывающего одну зону (а), две зоны (б) и весь волновой фронт (в)

При дальнейшем увеличении отверстия поле от участков второй зоны Френеля приходит в противофазе с полем от первой зоны, однако длина каждого из элементарных векторов несколько уменьшена из-за снижения коэффициента наклона. Поэтому вместо полной окружности мы получаем виток сужающейся спирали. При *двух открытых зонах* получаем диаграмму, изображенную на рис. 7.5, б;  $A(P) = A_0(K_1 - K_2)$ , амплитуда и интенсивность света очень малы.

Повышение числа открытых зон может быть реализовано двумя способами: расширением отверстия или уменьшением расстояния до точки наблюдения. И в том и в другом случае происходит наращивание спирали с периодической модуляцией результирующей интенсивности. При полностью открытом волновом фронте получаем диаграмму рис. 7.5, в. Из нее следует, что амплитуда поля в точке наблюдения вдвое меньше, чем при одной открытой первой зоне (коэффициент наклона для последней зоны в этом случае равен нулю и  $A(P) = A_0 K_1/2$ ), а интенсивность света — *в четыре раза меньше*, чем только от первой зоны.

Приведенные результаты находятся в противоречии с предсказаниями геометрической оптики, согласно которым освещенность в точке, лежащей на одной линии с источником и центром круглого отверстия, не зависит от диаметра отверстия. С другой стороны, из приведенных расчетов следует, что при отсутствии экрана в результате интерференции взаимно уничтожается действие всех зон, кроме части первой зоны. Из формулы (7.2) получаем, что в оптическом диапазоне при  $a = b = 1$  м радиус первой зоны Френеля  $R_1 \approx 0,5$  мм. Таким образом, физическое действие в точке  $P$  оказывают только лучи, незначительно отклоняющиеся от лучей, описываемых геометрической оптикой.

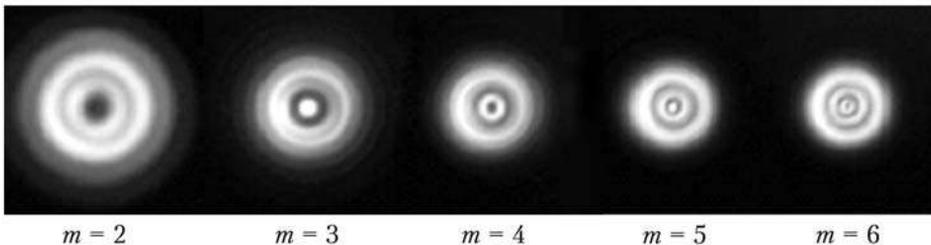


Рис. 7.6. Дифракционные картины от круглого отверстия при освещении лазерным излучением

Фотографии реальных поперечных распределений интенсивности дифракционных картин при постепенном приближении точки наблюдения к экрану с круглым отверстием представлены на рис. 7.6. При этом число открытых френелевских зон возрастает. Соответствующее продольное распределение осевой интенсивности приведено на рис. 7.7.

Интенсивность света на оси отверстия при движении из бесконечности монотонно увеличивается вплоть до расстояния  $x_1$ , соответствующего одной открытой зоне. Затем осевая интенсивность начинает осциллировать в зависимости от четности  $m$ . При больших  $m$  (вблизи от отверстия) эти осцилляции сглаживаются, и значение интенсивности стремится к  $I_0$  — интенсивности падающей волны. Именно в этой области справедливы законы геометрической оптики.

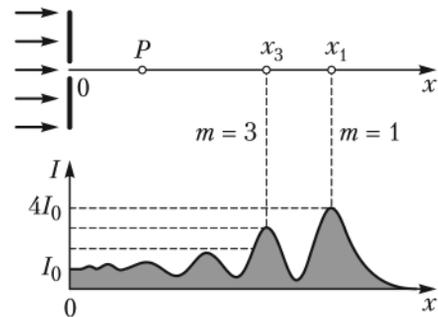


Рис. 7.7. Зависимость интенсивности на оси отверстия от расстояния до точки наблюдения

## Дифракция на круглом диске. Пятно Пуассона

Если на пути световой волны от источника вместо экрана с отверстием расположен круглый непрозрачный диск, то для точки наблюдения оказываются открытыми полуволновые зоны начиная с некоторого  $m_0$ . Легко показать, что такая постановка задачи приводит к парадоксальному выводу: независимо от диаметра диска, расстояний до источника и точки наблюдения и длины волны в центре тени диска должен наблюдаться максимум интенсивности.

Действительно, в соответствии с рис. 7.8, суммарная амплитуда всех открытых зон должна начинаться в точке на спирали, соответствующей числу  $m_0$ , и оканчиваться в центре векторной диаграммы. Если вектор  $A_h$  определяет суммарную амплитуду, даваемую некоторым отверстием, то вектор  $A_d$  есть суммарная амплитуда волны, дифрагировавшей на диске того же диаметра. Сумма векторных амплитуд  $A_h$  и  $A_d$  во всех случаях отверстия и диска одного диаметра всегда равна амплитуде  $A_p$  волны, распространяющейся в отсутствие препятствия. В этом заключается *принцип Бабине* для дифракции на *дополнительных экранах*, прозрачные части одного из которых соответствуют непрозрачным частям другого.

Таким образом, независимо от числа перекрываемых диском полуволновых зон, векторная амплитуда в осевой точке оказывается конечной, монотонно возрастающей по мере уменьшения диаметра диска. Это значит, что в центре его геометрической тени обязательно наблюдается максимум интенсивности: ведь волны от краев идеально круглого диска в его центре всегда синфазны.

Впервые это теоретическое предположение высказал академик Пуассон в 1818 г. при обсуждении мемуара Френеля. Через некоторое время эксперименты

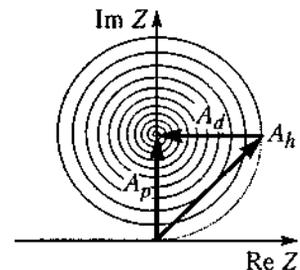


Рис. 7.8. Принцип Бабине и образование пятна

Араго подтвердили наличие *пятна Пуассона* в центре тени диска произвольного диаметра при условии достаточной когерентности освещающей волны.

Фотографии реальных дифракционных распределений интенсивности световой волны за непрозрачными дисками различных диаметров приведены на рис. 7.9. Отчетливо видно центральное пятно, интенсивность которого возрастает при уменьшении диаметра диска.

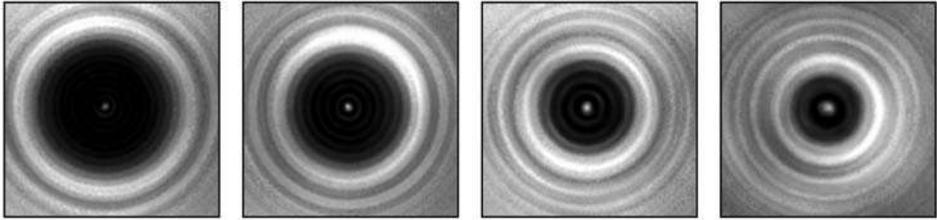


Рис. 7.9. Пятно Пуассона

Отметим, что для дифракционных эффектов возможны и другие адекватные физико-математические объяснения, отличные от принципа Гюйгенса–Френеля. Например, Т. Юнг предложил способ расчета дифракционных картин на основе учета взаимодействия всего двух волн: реальной прямой волны от источника и волны, испущенной краем отверстия или диска. При этом нет необходимости постулировать наличие источников вторичных возмущений по всему волновому фронту. «Краевые» волны хорошо заметны на рис. 7.9 как в виде волновых фронтов, расходящихся наружу, так и сходящихся внутрь и образующих пятно Пуассона.

### Поперечные дифракционные распределения от круглого отверстия

Поперечные распределения интенсивности при дифракции на круглом отверстии можно понять, приняв во внимание особенности построения полуволновых зон для внеосевой точки  $P'$ : в этом случае возникает эксцентриситет (смещение) вершины опорной сферы  $O'$  относительно центра отверстия (рис. 7.10).

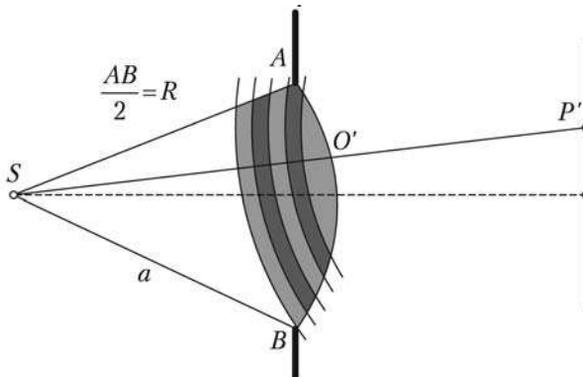
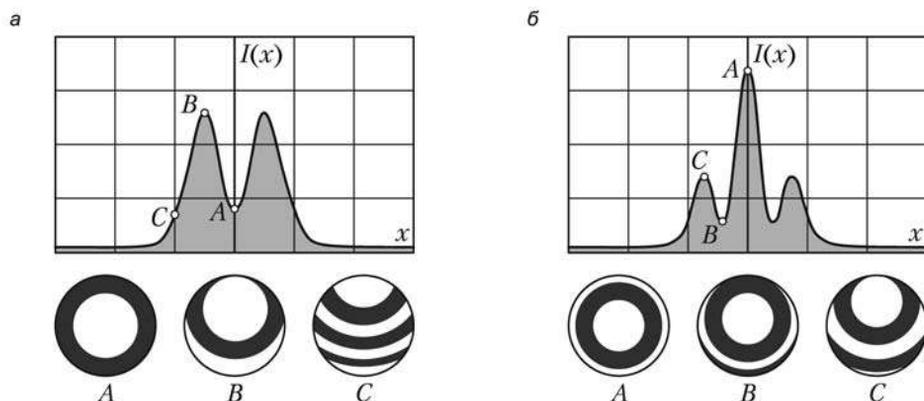


Рис. 7.10. Разбиение фронта на зоны Френеля для внеосевой точки наблюдения

Очевидно, что часть зон оказывается, как и для осевой точки, открытыми, а часть — открываются только частично. В примере на рисунке первая и вторая зоны открыты полностью, а зоны с третьей по пятую частично экранируются верхним краем отверстия. В результате возникает система внеосевых максимумов и минимумов (колец), по которым можно определить полное число открытых френелевских зон  $m$  для данной плоскости.



**Рис. 7.11.** Изменение интенсивности дифракционной картины в поперечном направлении. Отверстие открывает для осевой точки две (а) и три (б) полуволновые зоны

Изменение интенсивности дифракционной картины в поперечном направлении при  $m = 2$  иллюстрируется рис. 7.11, а. Точка А лежит на оси отверстия, открывающего две полуволновые зоны. В этой точке наблюдается *минимум* интенсивности. Точка В расположена на *кольцевом максимуме*, который соответствует поперечному смещению, частично закрывающему вторую и открывающему третью зону. При большем смещении интенсивность падает, так как сверху начинает срезаться первая зона, а снизу появляются четвертая, пятая и так далее (точка С). На рис. 7.11, б эти же рассуждения иллюстрируются для случая  $m = 3$ .

### Изменение фазовых соотношений между вторичными волнами. Зонные пластинки

Из теории дифракции Френеля вытекает возможность управления формой волнового фронта и распределением интенсивности посредством изменения фазовых соотношений между вторичными волнами. Так, например, если все четные (или нечетные) зоны закрыть непрозрачной маской, то, поскольку вторичные волны от этих зон сдвинуты, в точке Р будет наблюдаться многократное усиление света (рис. 7.12, а). По закону сохранения энергии в других точках пространства интенсивность света должна уменьшиться, то есть произойдет фокусировка света в точку Р. Такая маска называется *амплитудной зонной пластинкой*.

Если вместо непрозрачной маски для четных или нечетных зон ввести дополнительный фазовый сдвиг  $\delta = \pi$ , то есть использовать свет всех зон, интенсивность света в фокусе возрастет еще в 4 раза. Искомое фазовое сдвига можно добиться, например, путем размещения в отверстии стеклянной пластины

с кольцевыми ступенями равной высоты  $h$ , как показано на рис. 7.12, б. При показателе преломления стекла  $n$  вносимая ступенькой разность хода составит  $\Delta = h(n - 1)$ . Для  $\Delta = \lambda/2$  высота ступеньки должна быть  $h = \lambda/2(n - 1)$ . В этом случае мы имеем дело с *фазовой зонной пластинкой*.

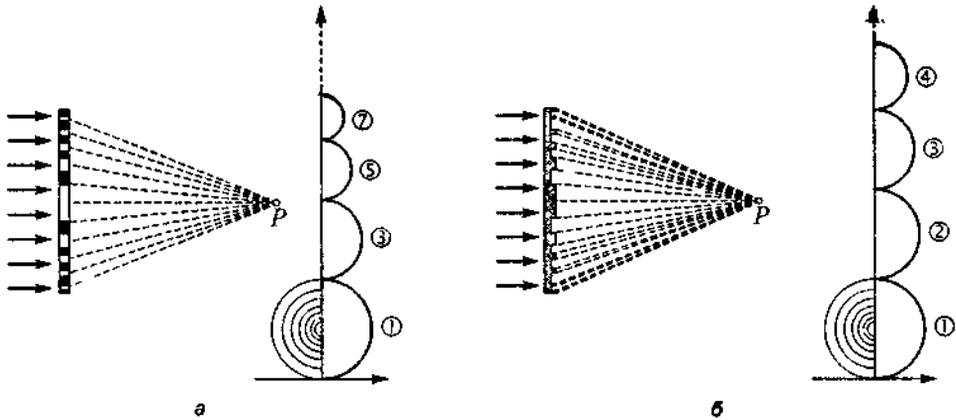


Рис. 7.12. Амплитудная (а) и фазовая (б) зонные пластинки

Главный фокус зонной пластинки образуется в точке, для которой радиус центральной открытой части равен радиусу первой френелевской зоны. Полагая в формуле (7.2)  $a = \infty$  (то есть падающая волна — плоская),  $b = f$ , получаем  $R_1^2 = f/\lambda$ , или

$$f = \frac{R_1^2}{\lambda}. \quad (7.6)$$

В отличие от обычных фокусирующих систем (линз, зеркал), зонная пластинка обладает свойством *полифокальности*. Дело в том, что помимо главного фокуса  $f$  у нее образуются так называемые побочные или кратные фокусы на расстояниях

$$f_k = \frac{f}{2k+1},$$

где  $k$  — целые числа. Например, если мы приблизимся к зонной пластинке на расстояние  $f/3$ , то попадем еще в одну точку фокусировки, хотя и более слабой: открытыми окажутся зоны (1, 2, 3) + (7, 8, 9) + (13, 14, 15) и т. д. В каждой такой триаде волны от нечетных зон по амплитуде почти вдвое превзойдут четную. Более того, зонная пластинка одновременно играет роль собирающей и рассеивающей линзы: в результате дифракции образуются две равные по амплитуде волны — сходящаяся и расходящаяся.

Пример амплитудной зонной пластинки и реальные дифракционные распределения интенсивности в плоскостях, отстоящих от пластинки на различных расстояниях  $L$ , представлены на рис 7.13. Можно заметить наличие кратного фокуса  $f/3$ . Как и в случае дифракции на непрозрачном диске (см. рис 7.9), отчетливо видны две дифрагированные волны: сходящаяся и расходящаяся.

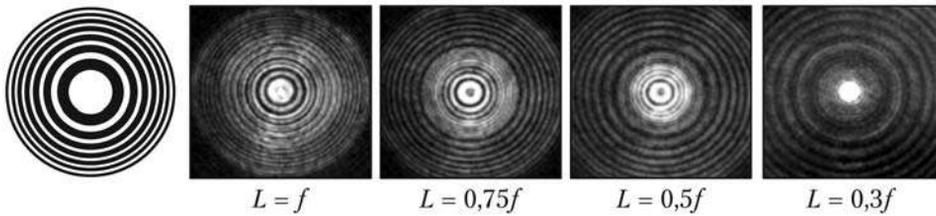


Рис. 7.13. Фокусировка света амплитудной зонной пластинкой

Фокусировки излучения можно добиться, также применяя маски не с равной высотой, а с равной шириной кольцевых поясов. В этом случае, придавая кольцевому поясу нужный профиль, можно заменить выпуклую линзу плоским фокусирующим элементом — *линзой Френеля*. Фактически в пределе речь идет о кусочно-непрерывной аппроксимации сферической поверхности.

## 7.3. Дифракция на прямолинейном крае экрана

### Дифракция на полуплоскости. Зоны Шустера

Результат дифракции Френеля на полубесконечной плоскости (рис. 7.14, а) характеризуется, в первую очередь, *проникновением части энергии световых волн в область геометрической тени* (на рисунке — слева от точки  $P$ ).

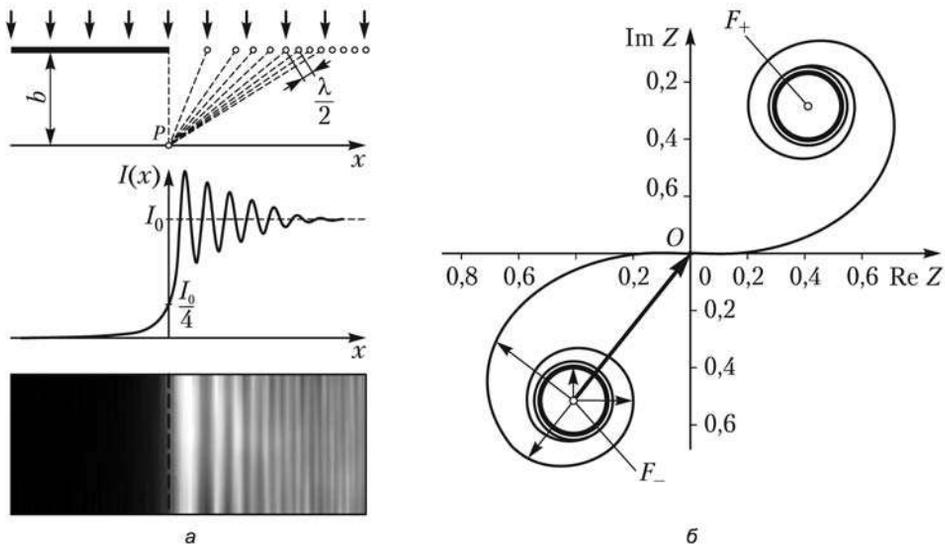


Рис. 7.14. Зоны Шустера (а) и спираль Корню (б) для дифракции на полуплоскости

В освещенной области (справа от точки  $P$ ) образуется *система параллельных краю полос*, период и контраст которых убывают по мере удаления от границы

раздела. Средний уровень, к которому стремятся максимумы и минимумы, соответствует интенсивности  $I_0$  волны в отсутствие полуплоскости.

Указанные особенности можно объяснить, основываясь на разбиении плоского волнового фронта на полуволновые зоны (зоны Шустера, рис. 7.14, а), аналогичные френелевским, но, в отличие от них, постепенно убывающие по площади с ростом  $m$ .

Разбиение на зоны ведется путем последовательного добавления половины длины волны к расстоянию  $b$  от точки наблюдения  $P$  до границы полуплоскости. При этом поперечный размер первых зон имеет порядок  $(b\lambda)^{0,5}$  и быстро убывает по мере увеличения фазового набега  $\delta$ , поэтому амплитуды вторичных волн от зон Шустера убывают быстрее, чем в случае круглого отверстия, а векторная диаграмма на комплексной плоскости для данного случая трансформируется в спираль Корню с двумя фокусами (рис. 7.14, б).

Для точек в области геометрической тени суммарная амплитуда изображается вектором, начинающимся в фокусе  $F_-$  и монотонно возрастающим по мере приближения к точке  $P$ , находящейся на перпендикуляре к линии края. В этой точке амплитуда волны (вектор  $F_-O$ ) вдвое меньше амплитуды падающей волны, которая равна расстоянию  $F_-F_+$ , а интенсивность составляет четверть от  $I_0$ .

Очевидно, что при дальнейшем перемещении в освещенной области должны возникать убывающие по размаху осцилляции интенсивности, так как векторная амплитуда начинает движение по второй ветви спирали Корню, неограниченно приближаясь к амплитуде волны без экрана.

## Дифракция Френеля на бесконечной щели

Задача о дифракции Френеля на щели сводится к предыдущей (дифракции на двух резких краях) с учетом конечного числа  $m$  открытых полуволновых зон Шустера.

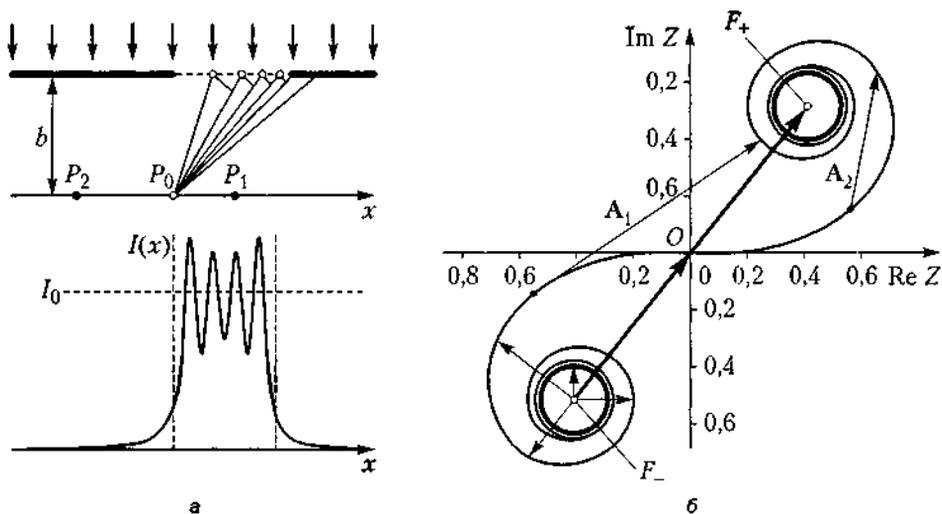


Рис. 7.15. Зоны Шустера (а) и спираль Корню (б) для дифракции на бесконечной щели

В этом случае амплитуда дифрагированной волны в точке наблюдения  $P$  определяется как длина вектора  $A$ , проведенного между двумя точками на спирали Корню, координаты которых зависят от положения точки наблюдения относительно краев щели (см. рис. 7.15,  $a$ ).

Если точка  $P$  находится в пределах ширины щели, то для нее открываются зоны и справа, и слева, поэтому концы вектора  $A$  принадлежат различным ветвям спирали. Для точки  $P$ , лежащей в области геометрической тени, работает только одна ее ветвь.

На рисунке векторы  $A_1$  и  $A_2$  соответствуют комплексным амплитудам вторичных волн в точках  $P_1$  и  $P_2$  из освещенной области и из области геометрической тени.

Напомним, что расстояние  $OF_- = OF_+$  на диаграмме соответствует амплитуде волны в точке на геометрической границе света и тени ( $P_0$ ) для полубесконечной плоскости, а расстояние  $F_-F_+$  — амплитуде падающей волны в отсутствие препятствия.

Как и в случае дифракции Френеля на круглом отверстии, интенсивность за щелью на ее оси симметрии определяется *четностью* числа открытых полуволновых зон: при четном  $m$  в центре картины наблюдается минимум, при нечетном — максимум. При неограниченном расширении щели дифракционные эффекты ослабевают.

Представленное на рис. 7.15 поперечное распределение интенсивности в дифракционной картине за щелью соответствует четырем открытым зонам Шустера. По сути оно является суперпозицией амплитуд двух встречных распределений, аналогичных показанному на рис. 7.14.

Реальные дифракционные распределения интенсивности за вертикальными щелями различной ширины приведены на рис. 7.16. Увеличение числа открытых зон  $m$  соответствует постепенному переходу к приближению геометрической оптики, а его уменьшение — к так называемой *дифракции Фраунгофера* или дифракции в дальней зоне.

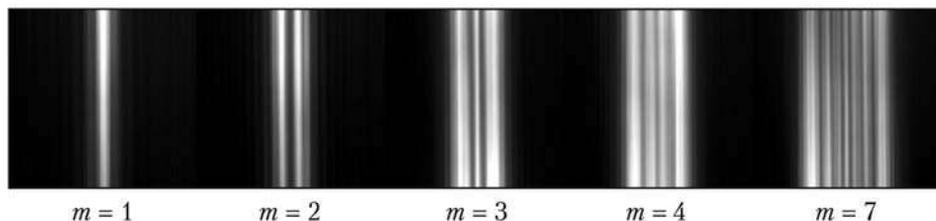


Рис. 7.16. Дифракция Френеля на щелях различной ширины

## 7.4. Скалярная теория дифракции Кирхгофа

Метод Кирхгофа является математическим обобщением принципа Гюйгенса–Френеля и основан на *интегральной теореме Грина*, согласно которой для комплексных функций  $\Phi$  и  $\Psi$ , определенных внутри объема  $V$ , ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ , справедливо соотношение

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S \left( \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS, \quad (7.7)$$

где  $\nabla^2$  — оператор Лапласа,  $\partial/\partial n$  — производная по внешней нормали к поверхности.

Возьмем в качестве  $\Psi$  координатную часть  $E_0$  поля монохроматической волны  $E(x, y, z, t) = E_0(x, y, z) \exp(-i\omega t)$ , а в качестве  $\Phi$  — сферическую волну единичной амплитуды  $\Phi = \exp(ikr)/r$ , где  $r$  — расстояние от точки наблюдения  $P$  до произвольной точки  $(x, y, z)$  (рис. 7.17). Обе функции удовлетворяют волновому уравнению, не зависящему от времени (*уравнению Гельмгольца*, (1.21))

$$\nabla^2 E_0 + k^2 E_0 = 0, \quad \nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число.

Так как функция  $\Phi$  имеет сингулярность при  $r=0$ , исключим точку  $P$  из области интегрирования, окружив ее небольшой сферой радиуса  $\varepsilon$ . Тогда левая часть выражения (7.7) равна нулю и

$$\oint_{S_1+S_2+S_3} \left\{ E_0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E_0}{\partial n} \right\} dS = 0, \quad (7.8)$$

где интегрирование производится по поверхности, состоящей из трех участков:  $S_1$  — поверхность экрана с отверстием,  $S_2$  — сферическая поверхность очень большого радиуса с центром в точке  $P$ ,  $S_3$  — малая сфера радиуса  $\varepsilon$  (см. рис. 7.17).

На участке поверхности  $S_3$   $r = \varepsilon$ ,

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) = \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

функция  $E_0$  непрерывна в точке  $P$ , и в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  интеграл (7.8) по  $S_3$  стремится к  $-4\pi E_0(P)$ . Следовательно,

$$E_0(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2} \left\{ E_0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E_0}{\partial n} \right\} dS. \quad (7.9)$$

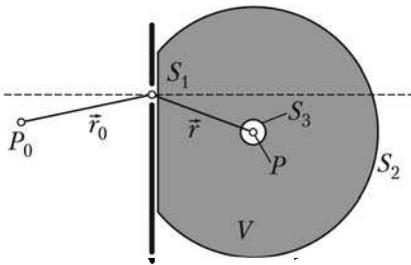


Рис. 7.17. Область интегрирования в теории Кирхгофа

Эта формула называется *интегральной*

*теоремой Кирхгофа*. Она позволяет выразить световое возмущение в произвольной точке  $P$  через значения поля и его производной на замкнутой поверхности, окружающей эту точку.

Дальнейшие преобразования требуют некоторых допущений.

- *Оптическое приближение*:  $kr = 2\pi/\lambda \gg 1$ , точка  $P$  находится от экрана на расстоянии много большем длины волны.
- *Граничные условия Кирхгофа*: для поверхности  $S_1$  на теневой стороне экрана значения функции  $E_0$  и ее производных равны нулю всюду, за исключением отверстий; значения  $E_0$  и ее производных внутри отверстия остаются такими же, какими они были бы, если бы экран отсутствовал.

□ *Условие излучения Зоммерфельда*: на удаленной сфере  $S_2$  значения функции  $E_0$  и ее производных равны нулю.

Сделанные приближения справедливы в большинстве оптических дифракционных задач, однако неприменимы в некоторых практически важных случаях: дифракция радиоволн (большая длина волны), ближнеполюсная оптика (расстояние до экрана порядка  $\lambda$ ). При выполнении этих приближений интеграл (7.9) по замкнутой поверхности сводится к интегралу по отверстию, распределение поля на котором известно.

Проведем поверхность  $S_1$  по участку волнового фронта, заполняющему отверстие (рис. 7.18). Тогда

$$E_0 = A \frac{e^{ikR}}{R}; \quad \frac{\partial E_0}{\partial n} \approx ikA \frac{e^{ikR}}{R};$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \approx -ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos \theta.$$

Учитывая, что  $k = 2\pi/\lambda$ , из (7.9) получим:

$$E_0(P) = -\frac{i}{2\lambda} \frac{Ae^{ikR}}{R} \int_{S_1} \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos \theta) dS. \quad (7.10)$$

В формуле (7.10) множитель  $\frac{Ae^{ikR}}{R}$  задает амплитуду падающей на экран сферической волны, прошедшей расстояние  $R$  от источника; множитель  $\frac{e^{ikr}}{r}$  — амплитуду вторичной гюйгенсовской волны, дошедшей от экрана до точки наблюдения. Остальные сомножители представляют собой коэффициент наклона, фигурирующий в теории Френеля, он, очевидно, равен

$$K(\theta) = -\frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \theta) = \frac{e^{-i\pi/2}}{2\lambda} (1 + \cos \theta). \quad (7.11)$$

Множитель  $e^{-i\pi/2}$  означает, что вторичные волны опережают исходную волну по фазе на  $\pi/2$ . На векторных диаграммах рис. 7.5 и далее следствием этого фазового сдвига является ориентация результирующего вектора светового поля от любого целого числа зон вдоль мнимой оси. Коэффициент  $K(\theta)$  максимален в направлении нормали к волновому фронту (при  $\theta = 0$   $|K| = 2$ ) и минимален в противоположном направлении (при  $\theta = 180^\circ$   $K = 0$ , отсутствие обратной волны). В то же время он равен единице вдоль волнового фронта при  $\theta = \pm 90^\circ$ , что означает ненулевую амплитуду вторичных волн в этом направлении. Как следует из дифракционных формул, переноса энергии вдоль волнового фронта не происходит, потому что возмущения от разных участков волнового фронта гасят друг друга.

Дифракционная формула (7.10) симметрична относительно источника и точки наблюдения. Это означает, что точечный источник, находящийся в  $S$ , производит в  $P$  такое же действие, какое производил бы в  $S$  источник равной интенсивности, помещенный в  $P$ . Этот вывод называют *теоремой обратимости Гельмгольца*.

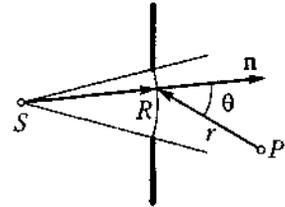


Рис. 7.18. К выводу дифракционной формулы Кирхгофа

## 7.5. Границы дифракционных приближений

Из всего сказанного в этой главе следует, что результат дифракции монохроматического излучения на каком-либо препятствии зависит не от абсолютных его размеров, а от числа  $m$  перекрываемых им полуволновых зон.

При  $m \gg 1$  (порядка нескольких сотен или тысяч открытых зон) дифракционные эффекты незначительны и распределение интенсивности приближенно описывается законами *геометрической оптики* (плоскость 1 на рис. 7.19).

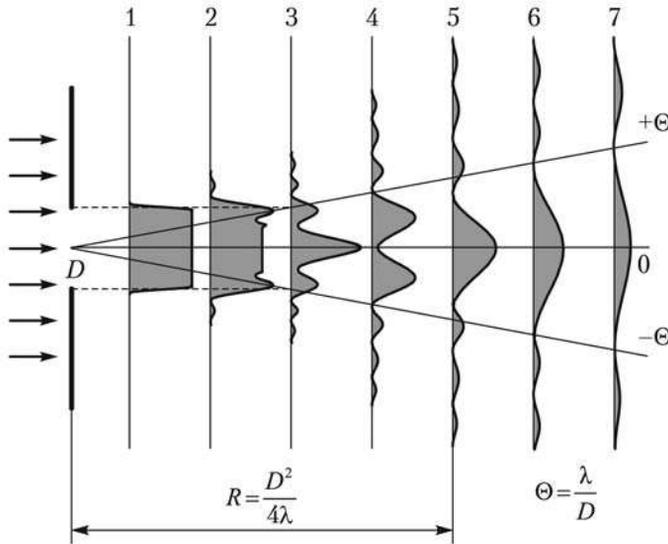


Рис. 7.19. Дифракционные распределения на различных расстояниях от отверстия

Промежуточное условие (когда открыты единицы или десятки зон) соответствует *дифракции Френеля* и приводит к сложному распределению интенсивности, когда в центре картины может наблюдаться и минимум, и максимум (плоскости 2, 3 и 4).

При  $m < 1$  перекрывается малая часть первой зоны и возникает практически важный случай *дифракции Фраунгофера* или *дифракции в дальней зоне* (плоскости 6 и 7). Условной границей между двумя видами дифракции считают *дистанцию Рэлея R*, соответствующую расстоянию, на котором круглое отверстие диаметра  $D$ , освещенное плоской монохроматической волной, открывает для центральной точки наблюдения одну первую зону, то есть

$$R = \frac{D^2}{4\lambda}.$$

Дифракционные распределения в области Фраунгофера имеют идентичный характер, линейно увеличиваясь в поперечном направлении по мере удаления от экрана с отверстием. Угловой размер  $\Theta$  центрального дифракционного максимума в дальней зоне определяется отношением длины световой волны к диаметру отверстия.

Проведем численные оценки: при  $\lambda = 0,5$  мкм для отверстия диаметром 2 мм  $R = 2$  м; для  $D = 20$  мкм дистанция Рэля составляет всего 0,2 мм. С другой стороны, для отверстия диаметром 10 см даже на расстоянии 5 м число открытых полуволновых зон составляет  $m = 1000$ , а дистанция Рэля отодвигается на 5 км! Таким образом, область, где работает приближение геометрической оптики, для отверстия размером в десятки микрон будет сжата до миллиметров, а для сантиметровых отверстий может составлять и сотни метров.

Реальные дифракционные картины от экрана с кольцевым отверстием в поперечных плоскостях, соответствующих рис. 7.19, показаны на рис. 7.20. Первая дает изображение, близкое к геометрической оптике, со второй по четвертую соответствуют дифракции Френеля, пятая — дистанции Рэля, последние две — дифракции Фраунгофера.

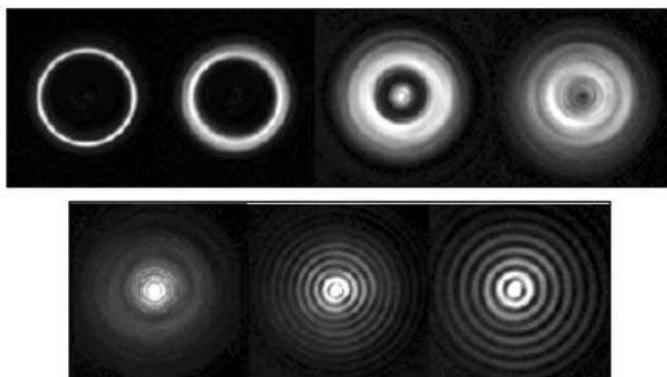


Рис. 7.20. Дифракционные картины за экраном с кольцевым отверстием

## ГЛАВА 8 Дифракция Фраунгофера

### Особенности дифракции в дальней зоне

Если отверстие в экране освещается плоской монохроматической волной, а точка наблюдения  $P$  находится так далеко от экрана, что дуга окружности с центром в точке  $P$  может быть заменена отрезком прямой, то оптическая разность хода  $\Delta$  и фазовый сдвиг  $\delta$  линейно зависят от координаты волнового фронта в пределах размера отверстия  $b$  (рис. 8.1).

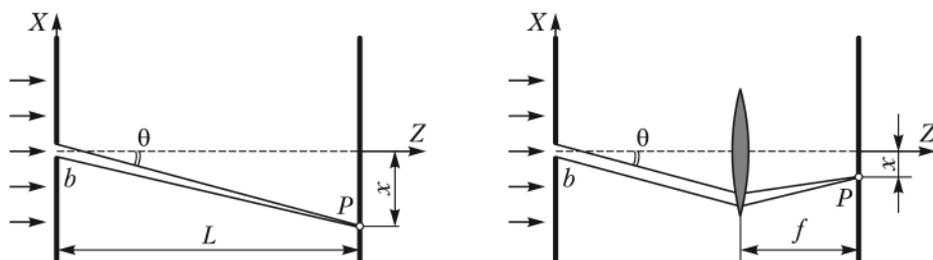


Рис. 8.1. Наблюдение дифракции Фраунгофера

Последний составляет малую часть диаметра первой полуволновой зоны ( $m \ll 1$ ), поэтому для центра картины всегда выполняются условия максимума (все комплексные амплитуды вторичных источников сфазированы и  $\Delta = 0$ ).

Такое приближение соответствует наблюдению *дифракции Фраунгофера* или *дифракции на бесконечности*. Применив собирающую линзу, можно перенести эту картину в заднюю фокальную плоскость. Поскольку положение точки  $P$  в обоих случаях определяется только углом дифракции  $\theta$  ( $x = L \operatorname{tg} \theta$  без линзы, или  $x = f \operatorname{tg} \theta$  с линзой), то говорят еще о *дифракции в параллельных лучах*.

Поперечные распределения интенсивности в области дифракции Фраунгофера много проще френелевских: все они идентичны и отличаются масштабирующим множителем, линейно увеличиваясь по мере удаления точки  $P$  или с ростом фокусного расстояния  $f$ . Многие дифракционные задачи в этом приближении имеют аналитические решения. Углы дифракции  $\theta$  в дальней зоне, как правило, малы (не больше единиц угловых градусов), следовательно, тригонометрические

функции (синусы и тангенсы) углов дифракции могут быть заменены значениями самих углов  $\theta$  в радианах. Тогда характерные расстояния  $x$  на экране наблюдения оказываются прямо пропорциональными углу дифракции.

Таким образом, для выяснения особенностей дифракции Фраунгофера достаточно проанализировать *угловые зависимости* интенсивности дифрагированного излучения для различных отверстий.

## 8.1. Дифракция Фраунгофера как пространственное фурье-преобразование

Пусть волна  $E_0$ , созданная произвольной системой монохроматических источников, распространяется вдоль оси  $OZ$  и достигает плоскости  $z = 0$ , в которой помещен экран с известным амплитудным коэффициентом пропускания  $t(x, y)$ . Непосредственно за экраном поле прошедшей волны равно произведению поля падающей волны на коэффициент пропускания:

$$E_t(x, y) = E_0(x, y) \cdot t(x, y). \quad (8.1)$$

По теореме Фурье функцию  $E_t(x, y)$  можно представить в виде:

$$E_t(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)] du dv. \quad (8.2)$$

Физически это означает, что поле световой волны представляется в виде суперпозиции плоских волн с амплитудами  $F(u, v)$  (*пространственный спектр*), определяемыми *пространственным преобразованием Фурье*:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} E_t(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy. \quad (8.3)$$

Величины  $u = \frac{\cos \alpha}{\lambda}$  и  $v = \frac{\cos \beta}{\lambda}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — углы между волновым вектором и осями  $X$  и  $Y$ , получили название *пространственных* или *угловых частот* по аналогии с обычной частотой  $\nu = 1/T$ . Пространственные частоты определяют число периодов колебания на единицу длины вдоль соответствующей оси (см. рис. 8.2, штриховой линией показана проекция волнового вектора на плоскость  $XY$ ).

С другой стороны, пространственные частоты задают *направление распространения* плоской волны. Направляющие косинусы любого вектора удовлетворяют соотношению

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Отсюда следует, что излучение, дифрагирующее на сравнительно большие углы с осью  $Z$ , содержит высокие пространственные частоты, и, наоборот, при дифракции (или рассеянии) на относительно малые углы с оптической осью говорят о низких пространственных частотах. Волне,

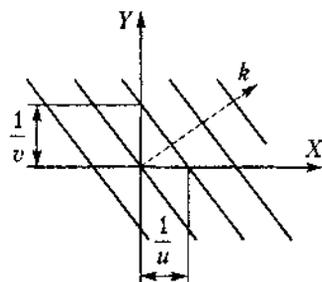


Рис. 8.2. К определению пространственных частот

распространяющейся вдоль оси  $Z$ , соответствует нулевая пространственная частота. Таким образом, для решения задачи дифракции Фраунгофера достаточно найти пространственный спектр поля за экраном.

По известной теореме Фурье-анализа, пространственный спектр  $F(u, v)$  волны  $E_0(x, y)$ , определяемой соотношением (8.1), равен свертке спектров падающей волны  $E_0(x, y)$  и коэффициента пропускания экрана  $t(x, y)$ . Если же  $E_0$  представляет собой плоскую волну, поле которой не зависит от поперечных координат, то *угловой спектр дифрагировавшей волны совпадает с угловым спектром коэффициента пропускания экрана.*

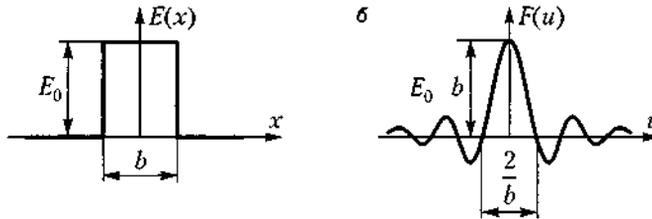


Рис. 8.3. Коэффициент пропускания щели (а) и его угловой спектр (б)

Для бесконечно длинной щели формула (8.3) сводится к одномерному интегралу по поперечной координате  $x$  на экране от  $-b/2$  до  $+b/2$ , а угловая частота  $u$  может быть выражена через синус угла дифракции:

$$u = \frac{\sin \theta}{\lambda}$$

При этом функция пропускания есть *простой импульс с плоской вершиной* (рис. 8.3, а).

Спектр такой функции известен — это функция

$$F(u) = E_0 b \frac{\sin \pi b u}{\pi b u} = E_0 b \frac{\sin \left( \pi b \frac{\sin \theta}{\lambda} \right)}{\pi b \frac{\sin \theta}{\lambda}} \quad (8.4)$$

(рис. 8.3, б), высота которой пропорциональна «площади импульса», а ширина обратно пропорциональна «длительности» импульса, то есть ширине щели  $b$ . Распределение интенсивности пропорционально мощности Фурье-спектра  $F(u)F^*(u)$

$$I = E_0^2 \left[ \frac{\sin(\pi b u)}{\pi b u} \right]^2, \quad (8.5)$$

как показано на рис. 8.4.

Как и следовало ожидать, интенсивность максимальна в центре дифракционной картины при  $\theta = 0$ . Существуют направления, в которых интенсивность обращается в нуль. Соответствующие им углы дифракции находятся из соотношения

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{b}.$$

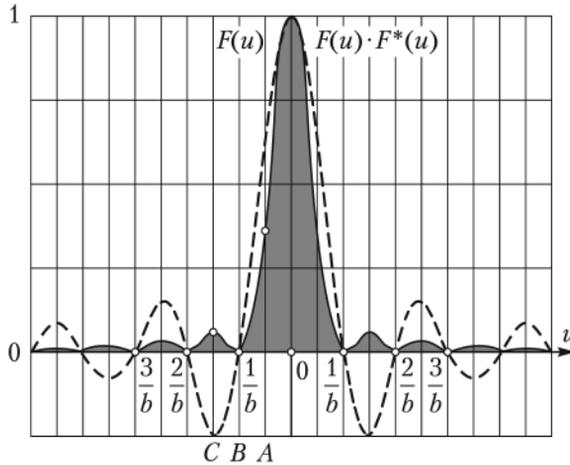


Рис. 8.4. Распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера на щели

Между минимумами находятся побочные максимумы, величины которых, однако, невелики. Отношение интенсивностей центрального и двух первых максимумов равно  $I_0 : I_1 : I_2 = 1000 : 47 : 17$ . Таким образом, можно утверждать, что основной световой поток сконцентрирован в пределах, определяемых значениями  $\sin \theta = \pm \lambda/b$ .

Особенности одномерной дифракции Фраунгофера удобно проиллюстрировать, сравнивая векторные диаграммы для двух гонких щелей, разнесенных на расстояние  $b$  (интерференционный опыт Юнга) (рис. 8.5, а), и для одной сплошной щели шириной  $b$  (рис. 8.5, б). В последнем случае в сложении векторных амплитуд участвуют не только два крайних вектора, соответствующих краям щели, но и все промежуточные вторичные источники, то есть мы имеем своего рода предельный случай многолучевой интерференции при бесконечном (континуальном) числе вторичных волн, испущенных всеми элементами щели.

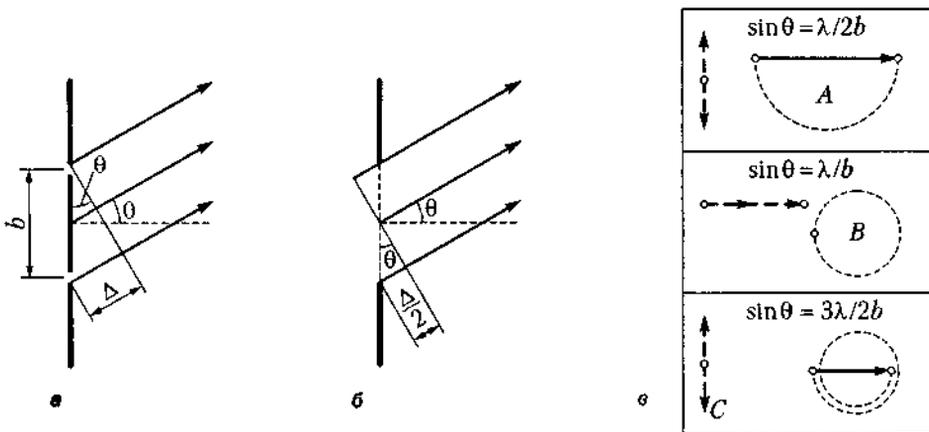


Рис. 8.5. Сравнение векторных диаграмм при двухлучевой интерференции и дифракции на щели

Легко видеть, что угловому положению первого интерференционного минимума отвечает конечная и довольно большая интенсивность дифракции в пределах нулевого порядка (точка *A* на рис. 8.4). Первому же интерференционному максимуму — наоборот, первый минимум дифракционного распределения (точка *B*) и т. д.

Анализ фазовых диаграмм для комплексных амплитуд излучения, дифрагировавшего на узкой щели, позволяет независимым образом получить относительное угловое распределение интенсивности  $I(\theta)/I_0$ .

Отклонение дифрагировавшего луча под углом  $\theta$  приводит к появлению фазового сдвига  $\delta = 2\pi d \sin \theta / \lambda = 2\pi du$ , где  $u = \sin \theta / \lambda$  — пространственная частота. Угол  $\delta$  на фазовой диаграмме опирается на дугу, составленную векторами амплитуд всех элементарных вторичных источников, заполняющих щель. Длина этой дуги пропорциональна амплитуде падающей волны  $E_0$ , а длина хорды, соединяющей концы этой дуги, пропорциональна  $E(\theta)$  (см. рис. 8.5, в, диаграмма *A*). Следовательно,

$$\frac{E(\theta)}{E_0} = \frac{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = \frac{\sin(\pi du)}{\pi du},$$

а отношение интенсивностей

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \left( \frac{\sin(\pi du)}{\pi du} \right)^2,$$

что совпадает с выражением (8.5).

Фотографии дифракции Фраунгофера на вертикальной щели при постепенном ее расширении представлены на рис. 8.6. Видно, что излучение дифрагирует в горизонтальной плоскости, а центральный максимум вдвое шире и много ярче боковых. Поскольку ширина центрального максимума обратно пропорциональна ширине щели, при расширении последней дифракционная картина сжимается. Вертикальный размер картины определяется конечным диаметром исходного пучка.

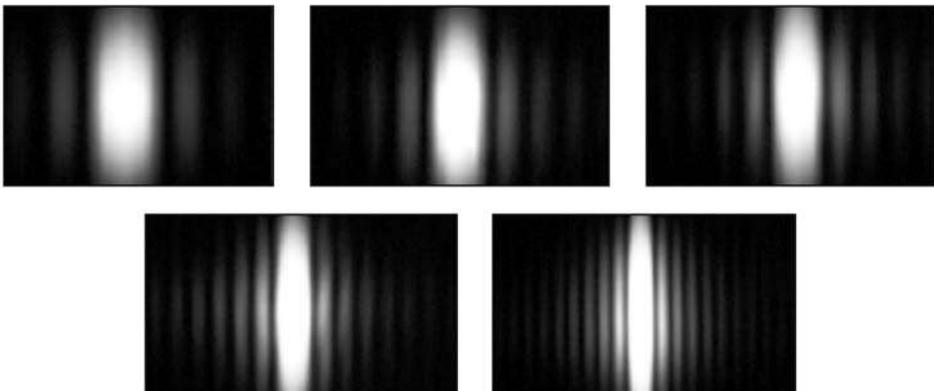


Рис. 8.6. Дифракция Фраунгофера на щелях различной ширины

## 8.2. Дифракция на прямоугольном отверстии

Очевидно, случай дифракции на прямоугольном отверстии является двумерным аналогом предыдущей задачи. Дифракционное распределение в горизонтальной плоскости определяется шириной  $b$ , а в вертикальной – высотой  $a$ .

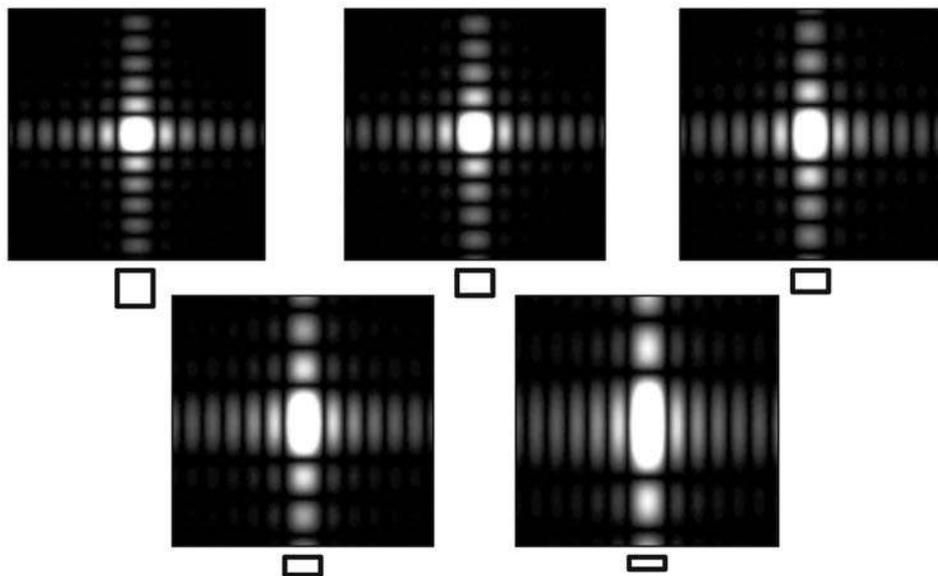


Рис. 8.7. Дифракция на прямоугольных отверстиях

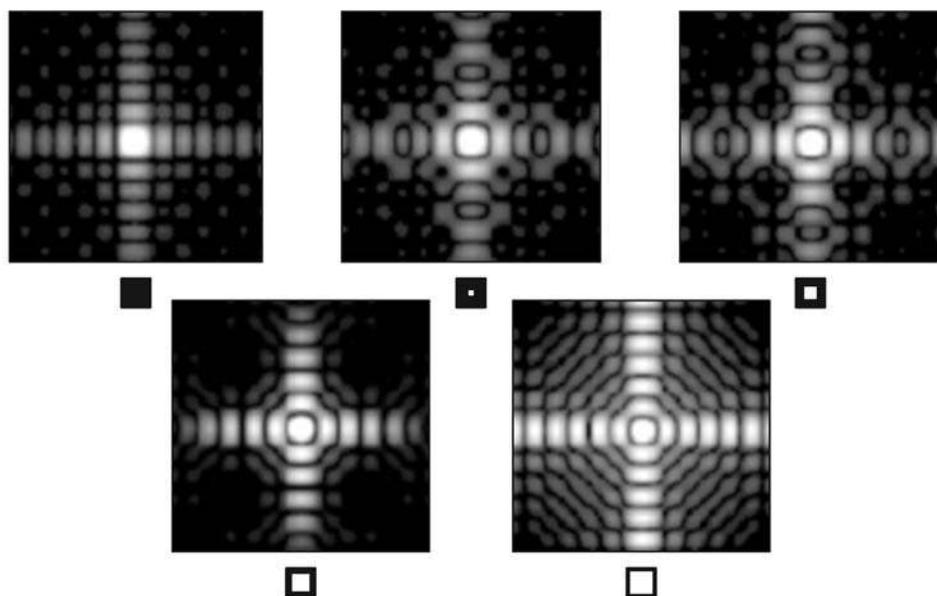


Рис. 8.8. Дифракция на квадратной рамке

Дифракционное распределение в дальней зоне от пяти отверстий при постоянном размере  $b$  и постепенно уменьшающейся высоте  $a$  показаны на рис. 8.7 (слева направо, начиная с квадратного). Видно, что при уменьшении вертикального размера отверстия излучение начинает дифрагировать вверх и вниз на большие углы.

Интересно проследить, что происходит с картиной дифракции Фраунгофера при превращении прозрачного квадратного отверстия в прозрачную квадратную рамку (рис. 8.8, изображения отверстий даны в негативе, прозрачные части показаны черным). По мере уменьшения ширины прозрачных участков центральный максимум сужается, максимумы высших порядков растут, становятся ярче и сближаются. Постепенно распределение вдоль декартовых осей приближается к интерференционным полосам Юнга.

### 8.3. Дифракция на круглой апертуре

Задача о дифракции Фраунгофера на круглом отверстии имеет наибольший практический интерес, поскольку оправы и диафрагмы большинства оптических приборов круглой формы.

Решение этой задачи удобно искать в *цилиндрической системе координат* (рис. 8.9) путем двойного интегрирования по радиальной ( $r$ ) и азимутальной ( $\beta$ ) переменным. В этом случае интеграл Фурье по отверстию может быть выражен через *функции Бесселя*:

$$E(P) = E_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp(-ikr \cdot \sin \theta \cdot \cos \beta) \cdot r dr d\beta = E_0 \cdot 2 \frac{J_1(\xi)}{\xi}, \quad (8.6)$$

где  $\xi = \frac{1}{\lambda} 2\pi R \sin \theta$ . Результатом дифракции является аксиально-симметричная

картина с ярким центральным максимумом (так называемый *диск Эйри*, содержащий 84 % световой энергии), представленная на рис. 8.10 в логарифмическом масштабе. Угловой радиус первого темного кольца определяется равенством

$$\sin \theta_0 = 0.61 \frac{\lambda}{R}$$

и, как и следовало ожидать, обратно пропорционален радиусу отверстия. Кольцевые максимумы убывают по интенсивности еще быстрее, чем в случае отверстия прямоугольной формы.

Важным следствием теоремы Бабине при дифракции Фраунгофера является идентичность дифракционных распределений для дополнительных экранов, например отверстия и диска равных диаметров. Действительно, если коэффициенты пропускания

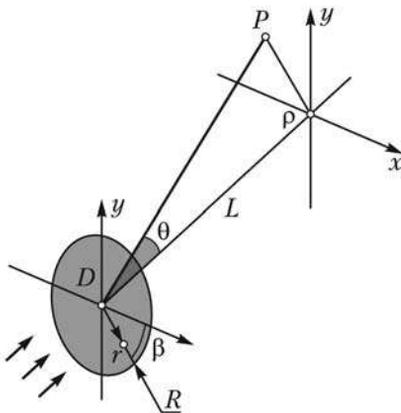


Рис. 8.9. К расчету дифракции на круглом отверстии

двух экранов связаны соотношением  $t_2(x, y) = 1 - t_1(x, y)$ , то для угловых спектров получаем:

$$F_2(u, v) = \iint (1 - t_1(x, y)) \cdot \exp(-ik(ux + vy)) dx dy = \delta(u, v) - F_1(u, v), \quad (8.7)$$

где  $\delta(u, v)$  —  $\delta$ -функция Дирака. С точностью до фазовых множителей пространственные спектры таких экранов совпадают везде, кроме точек, в которые свет падает в отсутствие экранов. Для центрированной оптической системы этим исключением является точка главного фокуса.

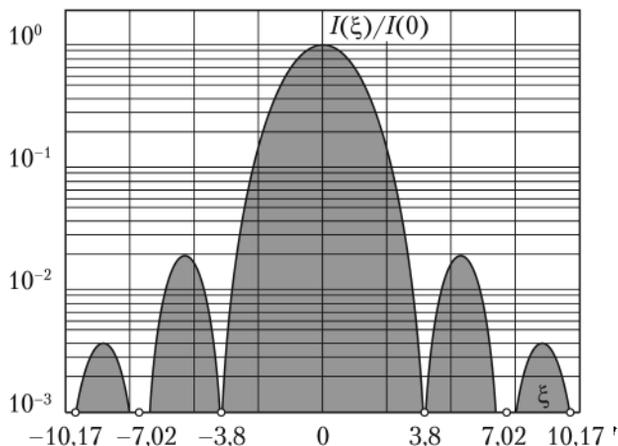


Рис. 8.10. Распределение интенсивности при дифракции на круглом отверстии

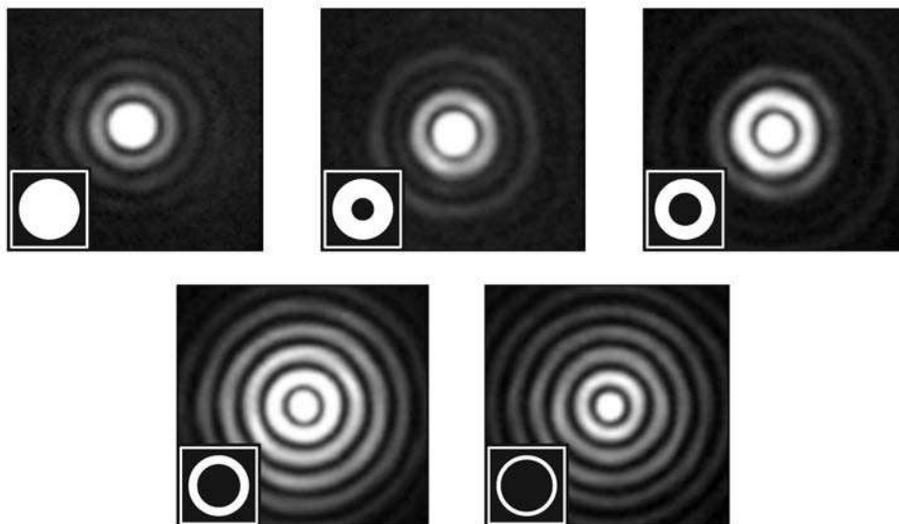


Рис. 8.11. Дифракция на кольцевых отверстиях

Угловое дифракционное распределение, характерное для картины Эйри, может быть трансформировано несколькими способами. Путем размещения в центре

отверстия непрозрачного диска (случай кольцевого зрачка) можно несколько уменьшить диаметр центрального пятна, одновременно многократно увеличив интенсивности кольцевых максимумов (рис. 8.11). В этом случае функция пропускания «обостряется», а в дифракционной картине возрастает доля высоких пространственных частот.

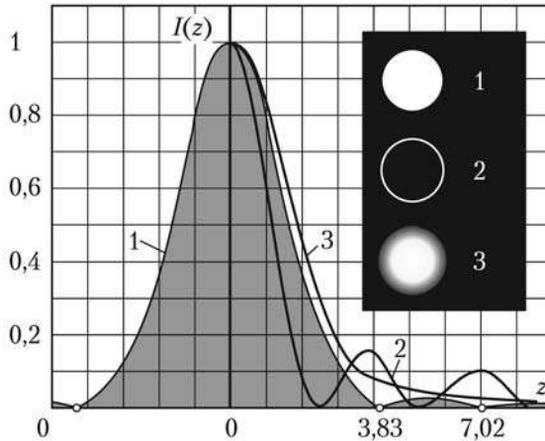


Рис. 8.12. Управление дифракционным распределением с помощью кольцевого фильтра (кривая 2) и аподизации (кривая 3)

Сделав края отверстия менее резкими, можно устранить дифракционные «ореолы», незначительно увеличив ширину центрального максимума (рис. 8.12). Такую операцию называют *аподизацией* зрачка, и в пределе гауссовского распределения пропускания (кривая 3) получают гауссовскую дифракционную картину.

## 8.4. Дифракционный предел разрешающей способности

Явление дифракции принципиально ограничивает возможности раздельного наблюдения двух близких по углу предметов. Действительно, если с помощью объектива строить изображения двух бесконечно удаленных точечных источников, плоские волны от которых приходят под малым углом  $\theta$ , то в задней фокальной плоскости будут наблюдаться результаты дифракции этих волн на оправе объектива, причем чем меньше ее диаметр  $D$ , тем более размыты эти кружки (в оптике их называют *ФРТ* — *функции рассеяния точки*).

В качестве критерия, определяющего возможности раздельного наблюдения двух точек, Рэлей предложил использовать ситуацию, когда *центральный максимум кружка Эйри одной точки совпадает по угловому положению с первым минимумом другой* (рис. 8.13).

Можно показать, что в этом случае угловое расстояние между разрешаемыми точками  $\theta_0$  совпадает с шириной диска Эйри и равно  $1,22\lambda/R$ , а глубина минимума между изображениями точек составляет 26 %.

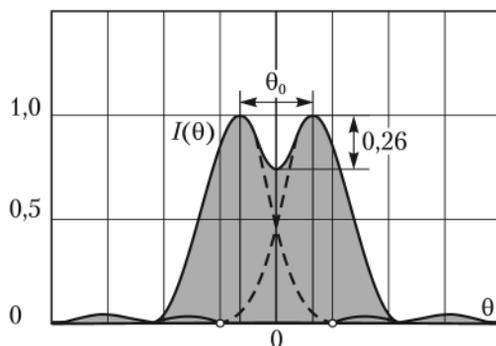


Рис. 8.13. Критерий Рэлея

Величина, обратная минимальному угловому расстоянию  $\theta_0$ , называется разрешающей способностью оптического прибора. Для ее повышения необходимо увеличивать световые диаметры, однако это приводит к росту искажений (*аббераций*) получаемого изображения.

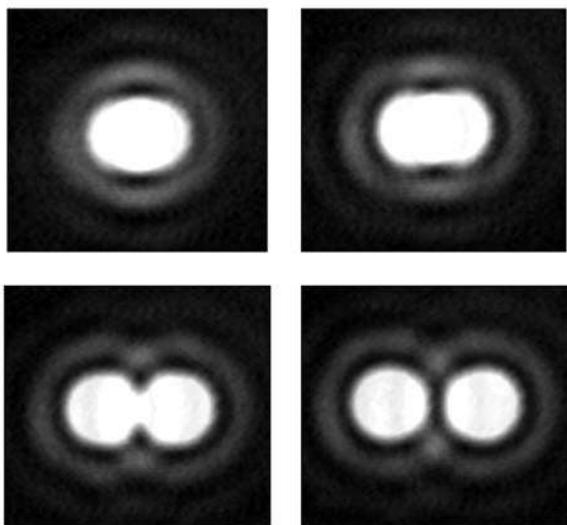


Рис. 8.14. Дифракционные изображения двух близких источников

Фотографии дифракционных изображений двух близких источников приведены на рис. 8.14. На первых двух фотографиях представлены случаи недостаточного разрешения, на двух следующих — искомые точки разрешаются.

Понимание основ дифракционной теории формирования изображения позволило разработать телескопические методы измерения предельно малых угловых размеров удаленных источников, а также микроскопические наблюдения предельно малых объектов, составляющих долю длины световой волны. В обоих случаях говорят о методах *повышения разрешающей способности оптического прибора*, абстрагируясь от аббераций.

Одним из методов является *применение кольцевого зрачка вместо круглого*. Как было показано выше (см. рис. 8.12), при этом уменьшается кружок рассеяния Эйри, который и определяет угловое расстояние между минимально различимыми точками. Диафрагмирование центра светового пучка широко применяется в наблюдательных приборах и приводит к заметному (на 20–25 %) росту разрешающей способности. Побочными эффектами такого метода являются уменьшение освещенности изображения и усиление периферийных дифракционных максимумов.

Разрешающая сила оптических микроскопов, прежде всего, связана с величиной *числовой апертуры*, определяемой как произведение показателя преломления среды  $n$  на синус апертурного угла  $\theta$  (рис. 8.15).

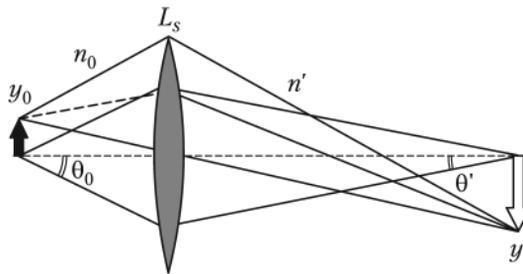


Рис. 8.15. К определению разрешающей силы микроскопа

Условие *инварианта Аббе* (см. формулу 3.10)

$$y_0 n_0 \sin \theta_0 = y' n' \sin \theta'$$

устанавливает обратную пропорциональность размеров изображения и числовой апертуры. Увеличение диаметров объективов и уменьшение их фокусных расстояний дает возможность получить максимальное значение  $\sin \theta = 1$  (при  $\theta = \pi/2$ ). Еще примерно в полтора раза можно повысить разрешающую способность в результате заполнения пространства между предметом и первой линзой *иммерсионной жидкостью*<sup>1</sup> с высоким показателем преломления  $n_0$ . При этом минимально различимый размер  $y_0$  окажется равным  $0,61\lambda/n_0 = 0,4\lambda$ .

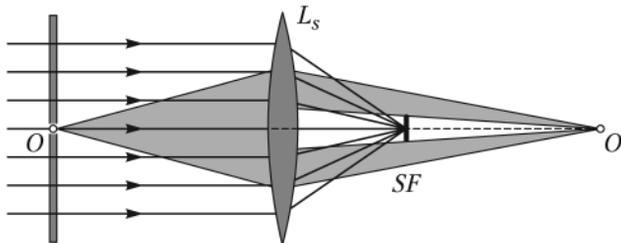


Рис. 8.16. Применение пространственных фильтров

<sup>1</sup> В качестве иммерсионных жидкостей применяют кедровое или минеральное масло (показатель преломления 1,515); монобромнафталин (1,656); йодистый метилен (1,741).

Дифракция света накладывает ограничения на возможность наблюдения более мелких деталей, однако детектировать их наличие можно. Отметим *метод темного поля*, при котором в отсутствие рассеянного или дифрагированного излучения в оптический тракт свет не проходит. Для этого применяются кольцевые осветители или блокирующие пространственные фильтры (непрозрачный фильтр  $SF$  на рис. 8.16).

## 8.5. Основы фурье-оптики

Распределение амплитуд в фокальной плоскости идеальной оптической системы с точностью до несущественных фазовых и масштабирующих множителей является фурье-образом исходного распределения амплитуд.

С этой точки зрения можно говорить о принципах дифракционного образования изображения предмета (рис. 8.17).

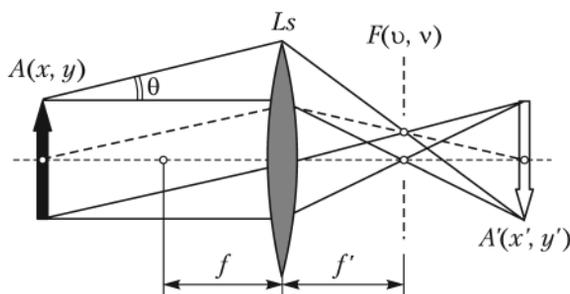


Рис. 8.17. Фурье-преобразование в линзе

Свет, дифрагировавший на объекте  $A$ , разделяется по углам  $\theta$  в соответствии с описанным выше пространственным фурье-преобразованием. Объектив  $L_s$  переносит дифракционное распределение Фраунгофера в заднюю фокальную плоскость, где и наблюдается пространственный спектр  $F(u, v)$ . Формирование изображения  $A'$  может быть описано на языке интерференции волн от вторичных источников, образуемых линзой в фурье-плоскости.

Пусть, например, исследуемый объект  $A$  совершенно прозрачен, но различные его участки имеют неодинаковые и мало отличающиеся от единицы показатели преломления  $n(x)$ . Тогда прошедшая через объект световая волна оказывается промодулированной по фазе:

$$E(x) = E_0 \exp(i\varphi(x)) \approx E_0 (1 + i\varphi(x)). \quad (8.8)$$

Визуально такую модуляцию заметить нельзя, так как интенсивность света  $I \sim |E(x)|^2 = E_0^2$ . В фурье-плоскости постоянная составляющая  $E_0$  формирует центральный дифракционный максимум. Если перекрыть этот максимум фазовой пластинкой (пластинкой Цернике), вносящей дополнительный фазовый сдвиг на  $\pi/2$ , то (учитывая, что  $\exp(i\pi/2) = i$ ) поле в плоскости изображения будет равно  $E(x') = E_0 (i + i\varphi(x'))$ . Соответствующее распределение интенсивности

$$I(x') \approx I_0 (1 + 2\varphi(x')). \quad (8.9)$$

Таким образом, происходит преобразование *фазовой модуляции в амплитудную*. С помощью пластинки Цернике реализуют метод фазового контраста для обнаружения малых фазовых (непоглощающих) объектов.

Размещая в фурье-плоскости различные фазовые или амплитудные маски, можно добиваться заданной трансформации итогового изображения. Результаты компьютерного моделирования пространственной фильтрации представлены на рис. 8.18. Первое изображение сформировано всей апертурой линзы (потеряны только самые мелкие детали); второе получено в результате срезания высоких частот (фильтр-маска НЧ – круглое отверстие в плоскости  $F(u, v)$ , изображение расплывается); наконец, третье, содержащее только контуры, образовано лишь высокими пространственными частотами (фильтр-маска ВЧ – непрозрачный диск на оси системы).

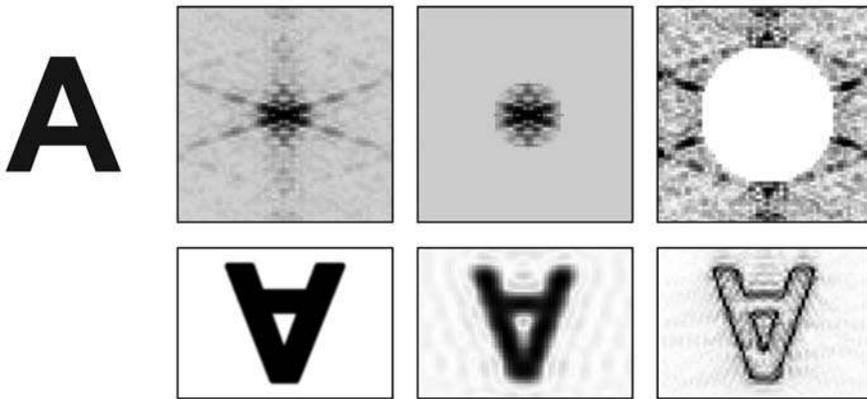


Рис. 8.18. Фильтрация пространственных частот

Фактически вторая и третья операции являются пространственными интегрированием и дифференцированием соответственно. Результаты этих аналоговых преобразований могут быть эквивалентными цифровым операциям над компьютерными изображениями с применением сглаживающих (*blur, median*) и обостряющих (*sharp, trace*) фильтров.

## ГЛАВА 9 Дифракция на регулярных структурах

Важным случаем дифракции Фраунгофера является дифракция на периодических структурах амплитудных или фазовых объектов (отверстий, частиц, упругих колебаний и т. д.). Особенностью этого случая является то, что пучки после дифракции на соседних объектах интерферируют друг с другом. В результате распределение интенсивности становится более сложным и информативным, а это открывает новые практически важные возможности.

Из опыта Юнга для двух параллельных узких щелей было получено, что период эквидистантных интерференционных полос  $\Delta x$  определяется расстоянием между щелями  $d$  и длиной волны  $\lambda$  ( $\Delta x \sim \lambda/d$ ). С другой стороны, в результате дифракции Фраунгофера на одной щели шириной  $b$  образуется максимум нулевого порядка, размер которого пропорционален отношению  $\lambda/b$ . Если рассматривать щели конечной ширины  $b$ , расположенные параллельно друг другу на равных расстояниях  $d$ , то следует ожидать, что огибающая картины дифракции будет определяться размером  $b$ , а интерференционное перераспределение энергии — расстоянием  $d$ . Кроме того, поскольку оба эффекта зависят от длины волны, такая периодическая структура должна обладать хроматическими свойствами.

Именно на этих базовых принципах основано устройство самой известной и практически важной регулярной структуры — *дифракционной решетки*.

### 9.1. Возникновение системы главных и побочных максимумов

Дифракционная решетка — это устройство, осуществляющее периодическую модуляцию падающей световой волны по амплитуде или фазе.

Рассмотрим простейшую одномерную амплитудную решетку — регулярную структуру, состоящую из  $N$  параллельных щелей с шириной каждой щели  $b$  и расстоянием между соседними щелями (периодом решетки)  $d$  (рис. 9.1). При нормальном падении монохроматического света на амплитудную дифракционную решетку оптическая разность хода для волн, испущенных соседними щелями, равна  $\Delta = d \sin \theta$ , а соответствующий фазовый сдвиг

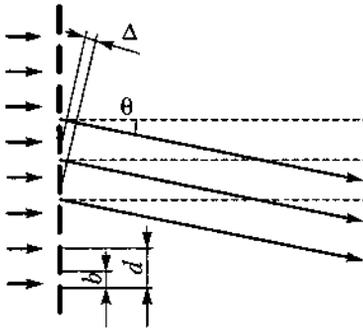


Рис. 9.1. Одномерная амплитудная решетка

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2\pi du,$$

где  $u = \sin \theta / \lambda$  — введенная ранее пространственная частота. Результирующая амплитуда может быть определена как сумма комплексной геометрической прогрессии, в которой знаменателем является чисто фазовый множитель:

$$A_{\Sigma} = A_1 + A_1 \exp(-i\delta) + A_1 \exp(-i2\delta) + A_1 \exp(-i3\delta) + \dots, \quad (9.1)$$

где  $A_1$  — амплитуда поля, прошедшего через одну щель. Просуммировав, получим

$$A_{\Sigma} = A_1 \frac{1 - \exp(-2iN\delta)}{1 - \exp(-i\delta)}. \quad (9.2)$$

Учитывая, что интенсивность пропорциональна квадрату модуля амплитуды, а распределение интенсивности света, дифрагировавшего на одной щели, определяется выражением (8.4), найдем:

$$I_{\Sigma} = I_0 \cdot I_1 \cdot I_N = I_0 \left[ \frac{\sin(\pi bu)}{\pi bu} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(N\pi du)}{\sin(\pi du)} \right]^2, \quad (9.3)$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего света.

Из (9.3) следует, что распределение интенсивности при дифракции на решетке описывается произведением двух функций.  $I_1$  характеризует дифракцию на одной щели, а  $I_N$  — многолучевую интерференцию пучков, исходящих от всех щелей. В отличие от многолучевой интерференции в интерферометре Фабри—Перо, в данном случае все пучки имеют равную интенсивность.

Проанализируем поведение множителя  $I_N$ . Очевидно, что при выполнении условия

$$d \cdot \sin \theta = m\lambda, \quad \text{или} \quad \frac{\sin \theta}{\lambda} = u = \frac{m}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.4)$$

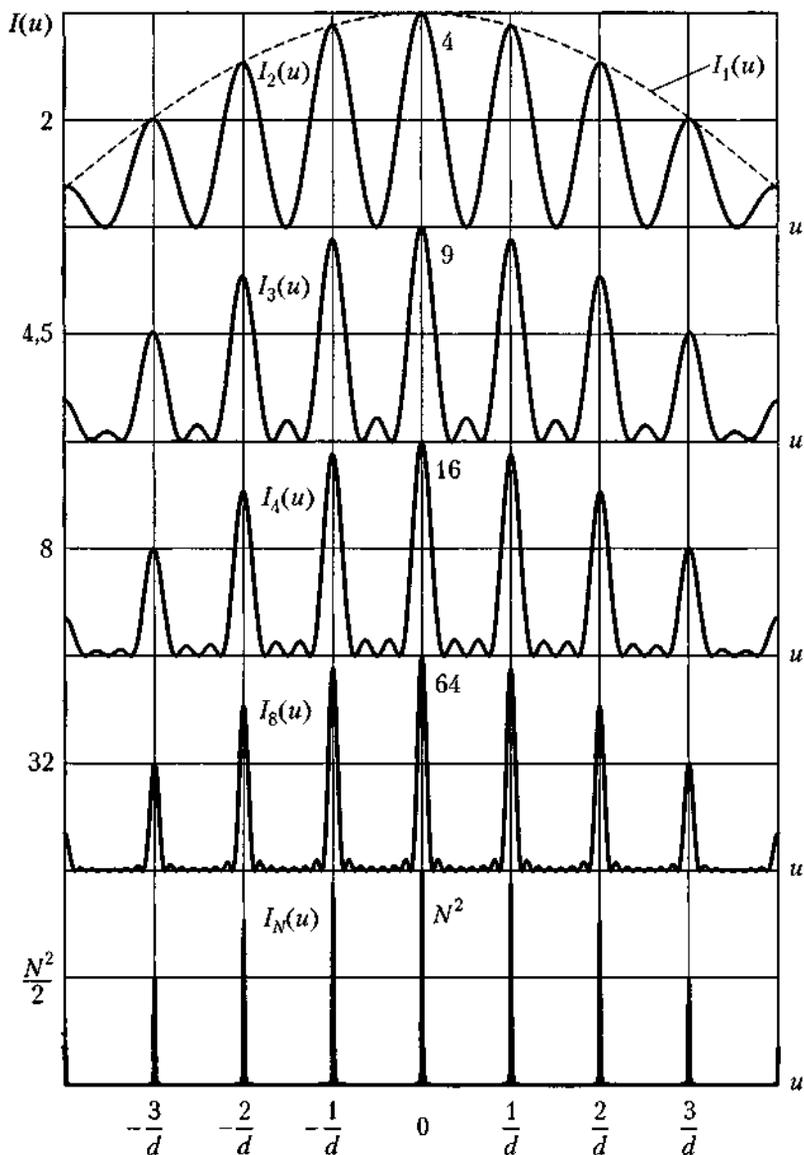
и числитель и знаменатель функции  $I_N$  обращаются в нуль. Известно, что

$$\lim_{\delta \rightarrow m\pi} \left| \frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right| = N,$$

следовательно,

$$I_m = I_0 N^2 d^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi mb}{d}\right)}{(\pi mb)^2} = \frac{N^2}{m^2} \cdot \frac{I_0 d^2}{\pi^2 b^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi mb}{d}\right). \quad (9.5)$$

Таким образом, при выполнении условия (9.4), которое называется условием *главных максимумов*, интенсивность света, дифрагировавшего на системе из  $N$  щелей, возрастает в  $N^2$  раз. Эта квадратичная зависимость есть результат многолучевой интерференции пучков, прошедших через регулярную структуру. Если бы щели располагались хаотически, то интерференционный член был бы равен нулю и суммарная интенсивность была прямо пропорциональна числу щелей.



**Рис. 9.2.** Угловое распределение интенсивности излучения, дифрагировавшего на системе из  $N$  щелей. Число щелей равно (сверху вниз): 2, 3, 4, 8,  $N \gg 10$

Зависимость распределения  $I_N$  от пространственной частоты для некоторых значений  $N$  показана на рис. 9.2. Для соотношения вертикальных масштабов указана интенсивность центрального максимума в относительных единицах. Поскольку пространственная частота  $u$  пропорциональна синусу угла дифракции  $\theta$ , положение максимумов на оси абсцисс определяет их угловое отклонение от первоначального направления распространения света. Видно, что угловые поло-

жения главных максимумов во всех случаях одинаковы (определяются периодом  $d$ ). Одинакова и форма огибающей, которая обусловлена шириной каждой щели  $b$ . Отметим, что при  $N = 2$  распределение интенсивности соответствует двухлучевой интерференционной схеме Юнга, см. рис. 5.3.

Из формулы (9.5) следует, что интенсивность главных максимумов быстро убывает с ростом порядка. С другой стороны, эта интенсивность зависит от соотношения между периодом решетки  $d$  и шириной каждой щели  $b$ . Так, при  $d/b = k$ , где  $k$  — целое число, главные максимумы порядков  $k, 2k$  и т. д. приходится на минимумы дифракции от одной щели, и их интенсивность оказывается равной нулю. Например, при  $k = 2$  (прозрачная и непрозрачная части равны друг другу) спектр решетки содержит только главные максимумы нулевого и нечетных порядков, а четные порядки отсутствуют.

Решетка из  $N$  щелей создает в промежутках между главными максимумами  $(N - 1)$  минимум освещенности и  $(N - 2)$  побочных максимум. Относительная интенсивность дополнительных максимумов резко падает с ростом числа щелей, и в практически важных случаях их наличием можно пренебречь.

Для пояснения причин формирования побочных максимумов обратимся к случаям дифракции на трех и четырех щелях. На рис. 9.3 показаны зависимости интенсивности  $I$  от разности фаз  $\delta$  (или пространственной частоты  $u$ ) для  $N = 3$  (а) и  $N = 4$  (б), между главными максимумами нулевого и  $(-1)$  порядков для случая трех щелей образуются два минимума и один побочный максимум. На рисунке представлены соответствующие фазовые диаграммы. Оба минимума соответствуют такой разности фаз, что три равных амплитудных вектора складываются в правильный треугольник ( $\delta = \pi/3$  и  $\delta = 2\pi/3$ ), в результате векторная сумма равна нулю. Побочный максимум образуется при  $\delta = \pi$ , когда три параллельных вектора складываются «гармошкой»; векторная сумма втрое меньше их суммарной длины, интенсивность этого максимума в  $N^2 = 9$  меньше главного.

В случае дифракции на четырех щелях очевидны три промежуточных минимума ( $\delta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ; векторы складываются в «квадрат» или «гармошкой» ну-

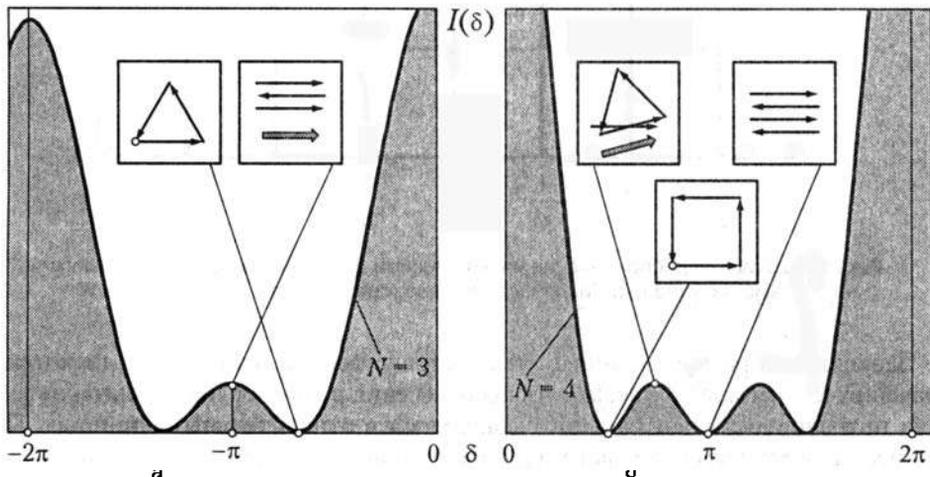


Рис. 9.3. Формирование побочных максимумов для трех (а) и четырех (б) щелей

левой длины). Имеются также два побочных максимума ( $\delta = \pi/3, 2\pi/3$ ), когда векторная сумма трех амплитуд равна нулю, а оставшаяся четвертая определяет результирующую интенсивность в  $N^2 = 16$  раз меньшую, чем интенсивность главного максимума.

На практике важным является вопрос о наклонном падении света на дифракционную решетку под углом  $\theta_0$ . В этом случае падающая волна имеет ненулевую пространственную частоту

$$u_0 = \frac{\sin \theta_0}{\lambda}$$

и в условии главных максимумов войдет разность пространственных частот дифрагированной и падающей волн:

$$d(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda. \quad (9.6)$$

Пространственный спектр дифракционной решетки формируется в полном соответствии с уже упомянутыми принципами фурье-преобразования. Функция пропускания прозрачной щели  $t(x)$  представляет собой прямоугольный импульс единичной высоты и ширины  $b$ . Его фурье-спектр  $F_1(u)$  известен (см. рис. 8.3 и формулу 8.4). Поскольку прибавления следующих щелей на равных расстояниях  $d$  могут рассматриваться как смещения исходной функции на  $d, 2d, 3d$  и т. д., то результирующий спектр будет состоять из суммы спектров всех щелей, домноженных на соответствующие фазовые множители. По теореме о сдвиге, смещение функции на  $d$  приводит к домножению спектра на значение  $\exp(2\pi iud)$ . Для  $N$  щелей результат такого суммирования спектров совпадает с выражением (9.3), если учесть, что наблюдаемое распределение интенсивности пропорционально квадрату фурье-спектра функции пропускания объекта.

## 9.2. Спектральные свойства дифракционной решетки

Практически значимыми являются спектральные свойства решеток, которые позволяют использовать их наряду с преломляющими призмами и уже рассмотренными интерференционными устройствами для спектральной селекции. Дифракционные решетки обладают *диспергирующими свойствами*, разводя лучи, соответствующие различным длинам волн, в различных направлениях. Это связано с угловой зависимостью главных максимумов от длины волны излучения: чем больше длина волны, тем больше угол дифракции, соответствующий данному порядку  $m$  (рис. 9.4).

Спектральные свойства дифракционной решетки характеризуются следующими параметрами.

- *Угловая дисперсия*  $D$  дифракционной решетки определяется как отношение приращения угла дифракции к приращению длины волны. Угловая дисперсия вычисляется дифференцированием условия главных максимумов, ее значение прямо пропорционально порядку спектра  $m$  и обратно пропорционально периоду  $d$ :

$$D = \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}. \quad (9.7)$$

Увеличение дисперсии за счет уменьшения  $d$  имеет свои границы. Действительно, для каждой решетки существует максимальное значение дифракционного порядка (при  $\sin \theta = 1$  целочисленное  $m$  не может быть больше  $m_{\max} = d/\lambda$ ); при  $d < \lambda$  остается только нулевой максимум, дисперсия в котором отсутствует.

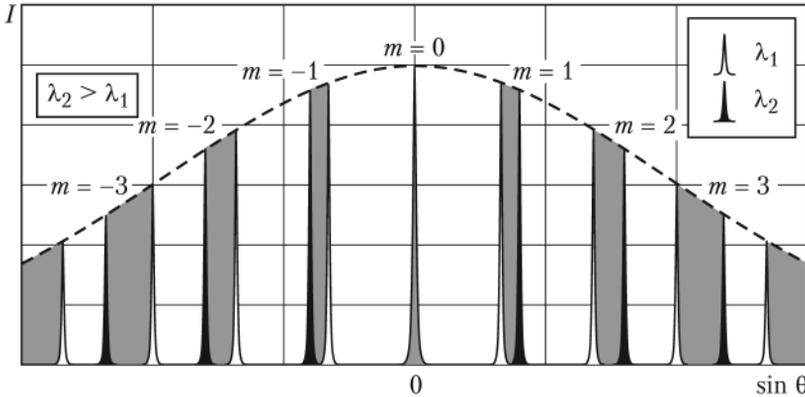


Рис. 9.4. Дифракция на решетке при бихроматическом освещении

- *Разрешающая способность*, то есть отношение длины волны к минимально разрешимому спектральному интервалу  $R = \lambda/\Delta\lambda$ , обусловлена угловой шириной главного максимума и определяет возможность раздельного наблюдения двух близких спектральных линий; возрастает с ростом  $m$  и полного числа штрихов  $N$ . Условие разрешения близких спектральных линий по Рэлею является совпадение главного максимума для длины волны  $\lambda$  и первого нуля интенсивности для длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$ :

$$m\lambda = \left(m - \frac{1}{N}\right)(\lambda + \Delta\lambda),$$

откуда

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN. \quad (9.8)$$

- *Свободная дисперсионная область*  $G$  определяет для каждого порядка спектральный диапазон, свободный от перекрытия спектров. Свободная дисперсионная область сужается с ростом дифракционного порядка  $m$ :  $G = \lambda/m$ . Перекрытие спектров различных порядков при освещении решетки белым светом (вся видимая область) показано на рис. 9.5. Видно, что для света широкого спектрального состава перекрытие начинается уже со 2–3 порядков. Для более узкого спектрального интервала оно может вообще не наступить, если для максимального порядка ( $m_{\max} = d/\lambda$ ) выполнено условие  $\Delta\lambda \leq G_{\min} = \lambda^2/d$ .

Таким образом, повышение разрешающей способности решетки путем ее использования в области высоких порядков сопровождается сужением свободного от перекрытия спектрального диапазона. Именно поэтому, как правило, предпочи-

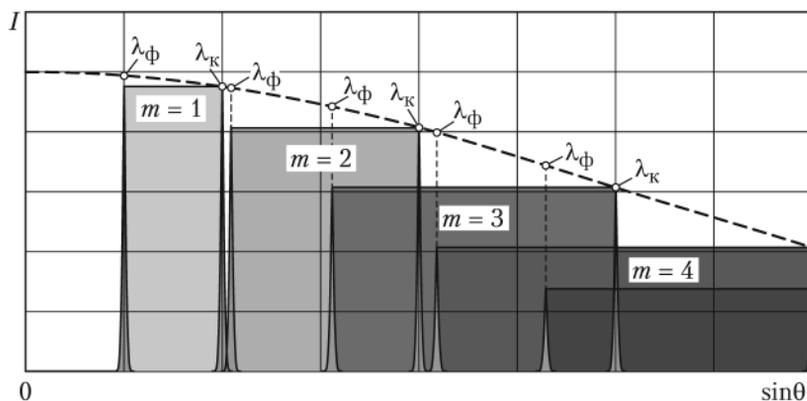


Рис. 9.5. Перекрытие спектров разных порядков при освещении решетки белым светом

тают работать в области низких порядков, но при этом увеличивают линейный размер решетки, добиваясь максимального числа штрихов  $N$ . Например, решетка с 600 штр/мм и рабочей областью 10 см имеет период  $d = 1,7$  мкм, общее число штрихов  $N = 60\,000$  и максимальный порядок в видимом спектре  $m_{\text{max}} = 2$ . Такая решетка может разделить спектральные линии, отстоящие на  $\Delta\lambda = 0,004$  нм. Возможность получать высокую разрешающую силу в низких порядках является существенным преимуществом дифракционных решеток перед интерференционными спектральными приборами (например, интерферометры Фабри—Перо, Майкельсона), в которых рабочие порядки интерференции составляют тысячи или даже десятки тысяч, что ведет к резкому сужению свободной дисперсионной области.

### 9.3. Фазовые решетки. Решетки со сложной структурой

Описанная в предыдущем разделе простая амплитудная дифракционная решетка имеет спектральные характеристики, крайне невыгодные для практических применений. Действительно, свет разбрасывается по многим порядкам, причем основная доля энергии приходится на ахроматический нулевой порядок, а в максимумы высоких порядков, обладающие высокими дисперсией и разрешающей силой, попадает очень мало света.

Улучшить спектральные свойства прибора можно с помощью так называемых *фазовых решеток*, штрихи которых имеют определенный профиль (рис. 9.6).

И прозрачная, и отражательная решетки с профилированным штрихом практически не влияют на амплитуду световой волны, но вносят периодические изменения в ее фазу. В случае отражательной решетки с пилообразным профилем, показанной на рисунке, максимальная интенсивность дифрагированного света наблюдается в направлении зеркального отражения от плоскости штриха ( $m = 1$ ). Когда ширина рабочей грани занимает почти целый период ( $b \approx d$ ) и  $2\sin\alpha = m\lambda/d$ , решетка дает только один главный максимум порядка  $m$ . Угол  $\alpha$  при этом называется *углом блеска*.

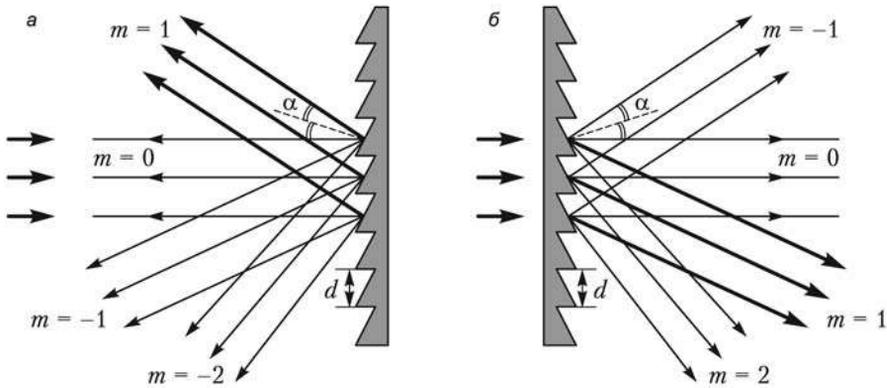


Рис. 9.6. Фазовые дифракционные решетки а — отражающая, б — прозрачная

Для направления максимума энергии в первый порядок прозрачной фазовой решетки необходимо выполнить для угла отклонения  $\theta_0$  одновременно два условия:  $d \sin \theta_0 = \lambda$  и  $\theta_0 = (n - 1)\alpha$ , где  $n$  — показатель преломления материала решетки,  $\alpha$  — угол при вершине микропризм, ее составляющих. Последнее условие соответствует отклонению свега прозрачным клином.

Результат перераспределения энергии между главными максимумами при использовании фазовой решетки показан на рис. 9.7. На нем пунктиром показана огибающая главных максимумов для амплитудной решетки с центром в ахроматичном нулевом порядке. Сплошная линия соответствует смещенной огибающей для фазовой решетки, настроенной на +1 порядок.

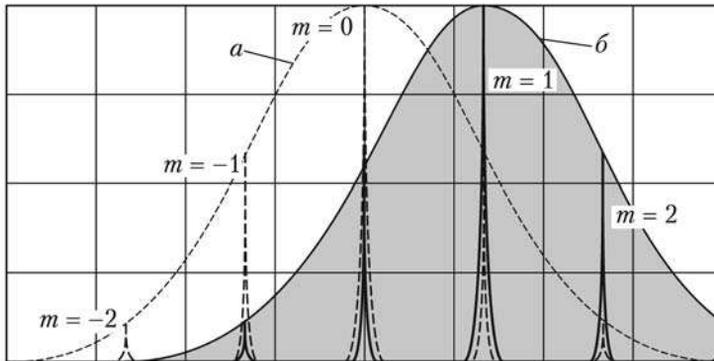


Рис. 9.7. Главные максимумы амплитудной (а) и фазовой (б) решеток

Свойства дифракционных решеток находятся в полном соответствии с представлениями о фраунгоферовой дифракционной картине как фурье-образе исходного объекта. Действительно, в данном случае перед нами экран, периодически модулированный либо по амплитуде, либо по фазе. Как известно, спектр периодического сигнала в отличие от импульсного не является непрерывным. Он дискретен, причем расстояние между гармониками в частотной области обратно пропорционально периоду самого сигнала.

Формируемые решеткой главные максимумы и есть те самые дискретные пространственные частоты, к которым стягивается энергия световой волны, если на ее пути оказывается любая периодическая структура. По законам фурье-оптики огибающая этих максимумов определяется спектром структурного элемента (щели, ступеньки и т. д.).

Управляя функцией пропускания дифракционной решетки, можно трансформировать ее пространственный спектр нужным образом. На рис. 9.8 представлены дифракционные спектры, полученные на фурье-решетках со сложным базисом: штрихами переменной ширины и периодичности, пропадающими штрихами и т. п.

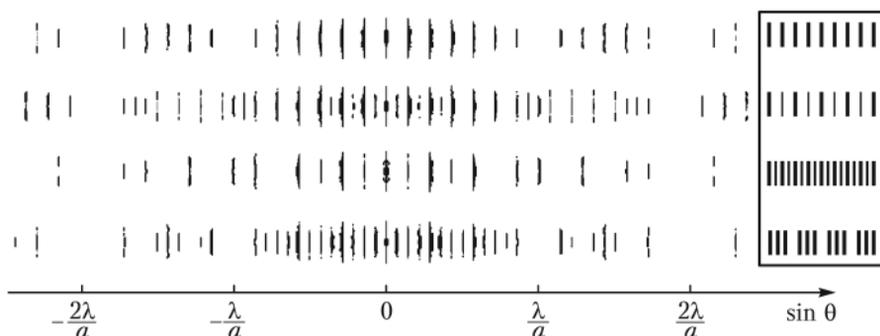


Рис. 9.8. Спектры сложных решеток

Первым показан спектр простой решетки, у которой отношение  $d/b = 7$ . Это видно из того, что в спектре симметрично справа и слева исчезают максимумы седьмого, четырнадцатого и так далее порядков.

Второй показана решетка с тем же основным периодом, но с чередующимися широкими и узкими штрихами. В пределах центральной части спектра угловые положения «старых» главных максимумов сохранились, но между ними появилась система новых максимумов, отвечающих удвоенному периоду решетки. Действительно, функция пропускания такой «решетки с базисом» имеет существенную гармонику с периодом  $2d$ , внутрь которого попадают один узкий и один широкий штрих.

Обратная ситуация реализуется на третьей решетке, в которой, по сравнению с первой, добавлены более узкие штрихи между исходными широкими. В этом случае пространственный спектр дифрагированного излучения становится реже, проявляется доминирующая удвоенная пространственная частота, отвечающая линейному расстоянию  $d/2$ .

Наконец, в четвертой решетке на фоне частых штрихов с периодом  $d/2$  отсутствуют четвертые штрихи. Это приводит к заметному проявлению тех же пространственных гармоник, что и у второй решетки, поскольку  $(d/2) \cdot 4 = 2d$ .

В этих примерах наглядно проявляется основная дифракционная закономерность: чем мельче структура, на которой происходит дифракция света, тем на большие углы он отклоняется.

Не должно смущать параллельное рассмотрение дифракционных решеток двух типов: в виде прозрачных щелей на непрозрачном экране и в виде непрозрачных

штрихов на прозрачной (например, стеклянной) основе. Результаты дифракции на них эквивалентны во всех точках, кроме тех, куда свет попадает, минуя эти препятствия (принцип Бабинне, см. раздел 7.2).

Применительно к амплитудным решеткам это означает разную интенсивность нулевых максимумов и одинаковую всех остальных. На первый взгляд это кажется невозможным, так как огибающие функции зависят не от периода решетки, а от отношения прозрачной и непрозрачной частей. Тем не менее для любых дополнительных решеток с функциями пропускания  $t_1(x)$  и  $t_2(x) = 1 - t_1(x)$  дело обстоит именно так. Пример, рассмотренный на рис. 9.9, поясняет этот результат для двух видов решеток, у которых прозрачные части штриха равны  $1/3$  и  $2/3$ . Легко видеть, что эти решетки дополнительные. Интенсивность нулевого максимума у этих решеток отличается вчетверо (вторая решетка вдвое «прозрачнее»), а вот все остальные максимумы абсолютно одинаковы.

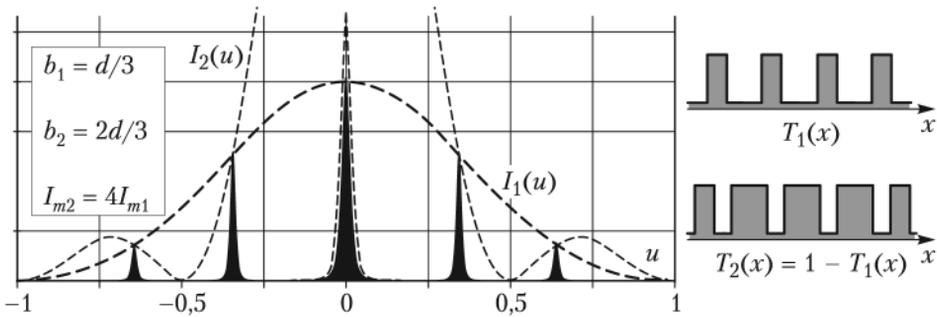


Рис. 9.9. Дифракция на дополнительных решетках

## 9.4. Дифракция на двумерных структурах

Если экран, на котором происходит дифракция, содержит несколько одинаковых элементов (структурных единиц), то результат дифракции зависит от формы каждого элемента, их общего количества и взаимного расположения. В качестве примера на фотографиях рис. 9.10 приведены дифракционные распределения для случаев одинаковых круглых отверстий. Число отверстий  $N$  увеличивается слева направо от 2 до 6, а расположены они, начиная с  $N = 3$ , в вершинах правильных  $N$ -угольников. При  $N = 2$  перед нами классические интерференционные полосы Юнга от двух отверстий, разнесенных по вертикали.

При большом количестве структурных единиц можно выделить два предельных случая: полная хаотичность их расположения на экране (рандомизированная структура) и полная их упорядоченность (периодическая структура). В первом случае фазы волн от отдельных элементов нескоррелированы, их распределения накладываются друг на друга аддитивно, и в результате мы имеем усиленную в  $N$  раз дифракционную картину от одной структурной единицы.

Поскольку координата каждого отверстия в случае дифракции Фраунгофера определяет только фазу волны, пришедшей в точку наблюдения, то для любого расположения элементов справедлива интуитивно понятная теорема растра: *оги-*

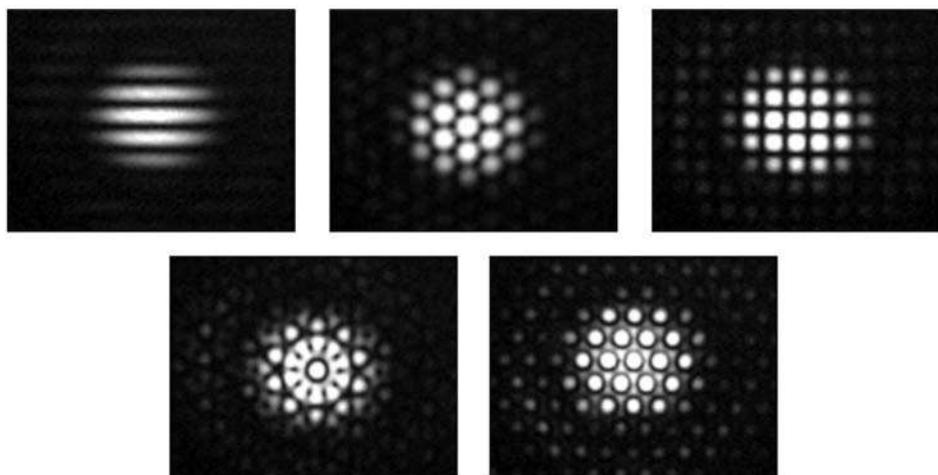


Рис. 9.10. Дифракция на  $N$  отверстиях ( $N = 2, 3, 4, 5, 6$ )

бающая всей дифракционной картины определяется формой структурной единицы растра, а перераспределение энергии внутри этой огибающей диктуется взаимным расположением его элементов. Любая периодичность в таком расположении должна приводить к появлению системы главных максимумов.

Случай двумерной дифракционной решетки принципиально ничем не отличается от одномерного аналога. В двух ортогональных плоскостях образуются системы главных дифракционных максимумов, угловые положения которых определяются соответствующими периодами по осям  $X$  и  $Y$ . Кроме расположенного вдоль осей наиболее яркого креста, по плоскости наблюдаются максимумы меньшей интенсивности, отвечающие перекрестным произведениям фурье-образов обеих решеток. При этом картины дифракции от позитивной и негативной решетки абсолютно одинаковы везде, за исключением центрального максимума нулевого порядка

В истории оптики известен очень красивый и наглядный опыт, связанный с дифракцией когерентного излучения на двумерных решетках (так называемый эксперимент Аббе–Портера, рис. 9.11). По сути, он является примером уже упоминавшейся пространственной фильтрации и имеет самое прямое отношение к современной фурье-оптике и оптическим методам обработки информации.

Если использовать двумерную решетку в качестве предмета  $S$  для построения изображения с помощью оптической системы  $Ls$ , то в плоскости ее фурье-образа  $FT$  (в задней фокальной плоскости линзы) будет наблюдаться описанная выше дифракционная картина, а в сопряженной плоскости — результат обратного пространственного преобразования Фурье, то есть изображение исходной решетки  $S'$ . Разместив в фурье-плоскости маску  $M_1$  в виде вертикальной щели, можно наблюдать исчезновение вертикальных штрихов и сохранение системы горизонтальных линий. Обратный результат получается, если использовать горизонтальную щель (маска  $M_2$ ).

Суть эксперимента заключена в том, что, блокируя в плоскости фурье-образа определенные дифракционные максимумы, мы не даем возможности на этапе

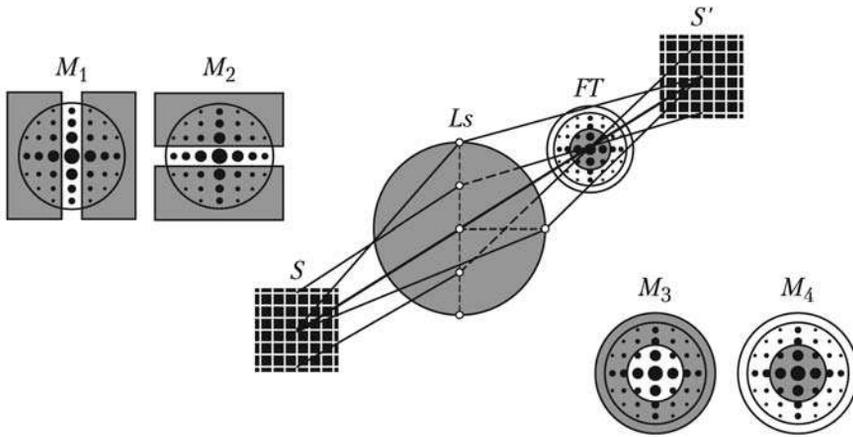


Рис. 9.11. Эксперимент Аббе—Портера

обратного преобразования Фурье восстановить те или иные детали, присутствующие в исходном объекте.

Фильтрующие маски  $M_3$  и  $M_4$  приведут к результатам, аналогичным уже рассмотренным в разделе о принципах фурье-оптики. Прозрачное отверстие  $M_3$  делает изображение менее резким за счет исчезновения высоких частот, а блокирующий диск  $M_4$  может привести к удвоению числа штрихов в изображении решетки. При этом новые штрихи будут расположены на бывших границах черных и белых участков.

## 9.5. Трехмерная решетка. Дифракция рентгеновских лучей

Найдем условия образования дифракционных максимумов от трехмерной периодической структуры с периодами  $d_1, d_2, d_3$  по осям  $X, Y, Z$ . Пусть на нее падает пучок параллельных лучей, образующий с осями  $X, Y, Z$  углы  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ , а дифрагировавший пучок распространяется в направлении, заданном углами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Тогда условия возникновения главных максимумов для каждой из осей координат (условия Лауэ) имеют вид:

$$\begin{cases} d_1(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m_1 \lambda, \\ d_2(\cos \beta - \cos \beta_0) = m_2 \lambda, \\ d_3(\cos \gamma - \cos \gamma_0) = m_3 \lambda. \end{cases} \quad m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (9.9)$$

Углы  $\alpha, \beta, \gamma$  не являются независимыми, поскольку для них выполняется соотношение  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . Таким образом, при заданных  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  и  $\lambda$  углы, определяющие направления максимумов, находится из решения системы *четырёх* уравнений. Если число уравнений превышает число неизвестных, система уравнений оказывается разрешимой только при выполнении определенных условий (равенство нулю определителя системы). Так, если исходная волна рас-

пространялась вдоль оси  $Z$  ( $\cos \alpha_0 = \cos \beta_0 = 0$ ,  $\cos \gamma_0 = 1$ ), должно выполняться равенство

$$\left(\frac{m_1 \lambda}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \lambda}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{d_3 + m_3 \lambda}{d_3}\right)^2 = 1. \quad (9.10)$$

Соотношение (9.10) может рассматриваться как условие, накладываемое на длину волны  $\lambda$ , при выполнении которого существует дифракционный максимум с порядками  $(m_1, m_2, m_3)$ . Таким образом, дифракционная картина в случае трехмерных решеток принципиально отличается от картин, получаемых от одно- и двумерных решеток. При освещении плоской монохроматической волной трехмерная решетка вообще не имеет дифракционных максимумов кроме нулевого порядка если только не выполнено равенство (9.10). При освещении немонохроматическим светом образуется система главных максимумов, каждому из которых соответствует определенная длина волны.

Реальными структурами с трехмерной периодичностью являются кристаллы. Периоды кристаллических решеток (единицы ангстрем) не позволяют наблюдать дифракцию в оптическом диапазоне, однако рентгеновские лучи, длина волны которых имеет те же масштабы, как нельзя лучше подходят для исследования внутренней атомарной структуры веществ. Зарегистрированные в широком телесном угле результаты дифракции рентгеновских лучей на монокристаллах — так называемые *лауэграммы* — используются для расфигурки внутренней симметрии и количественных параметров сложных кристаллических решеток.

В определенных случаях падения лучей в тех или иных кристаллографических направлениях задача дифракции может быть сведена к двумерной. Если представить кристалл в виде набора атомных слоев (рис. 9.12), то интерференционное усиление волн, отразившихся от разных слоев, будет происходить при выполнении условия Вульфа–Брэггов:

$$2d \sin \theta = m\lambda. \quad (9.11)$$

Угол  $\theta$ , который составляют падающие лучи с атомарной плоскостью и который определяет разность хода между волнами, рассеянными соседними плоскостями, называют углом скольжения. Условие Вульфа–Брэггов выводится из любого уравнения системы (9.9). Например, для оси  $Y$  в обозначениях  $d_2 = d$ ,  $m_2 = m$ ,  $\beta_0 = 3\pi/2 - \theta$ ,  $\beta = 3\pi/2 + \theta$  получаем:

$$d \left( \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \theta \right) - \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \theta \right) \right) = 2d \sin \theta = m\lambda.$$

Общая картина дифракции на кристаллических решетках достаточно сложна, что объясняется практически неограниченным числом различно ориентированных семейств атомарных плоскостей.

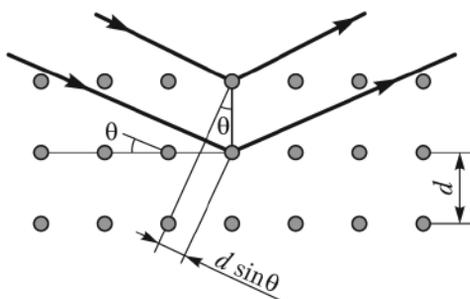


Рис. 9.12. Отражение рентгеновских лучей от атомных слоев в кристалле

Особый случай составляет дифракция на периодической структуре, в которой пространственная модуляция амплитуды или фазы является *гармонической*. Это возможно как в системах с периодически меняющейся прозрачностью (степенью почернения), так и в случаях синусоидального изменения толщины или показателя преломления. Поскольку в объекте присутствует только одна пространственная частота, то падающий свет разбивается всего на три пучка: центральный нулевого порядка (свет, прошедший без дифракции) и два дифракционных максимума плюс/минус первого порядка равной интенсивности.

Характерным примером такого поведения световой волны является дифракция на ультразвуке (рис. 9.13). Образец в виде кристаллического бруска или кюветы с жидкостью устанавливается на пьезокерамическом основании. Переменное напряжение частоты  $\Omega$  преобразуется пьезокерамикой в продольные упругие колебания, передающиеся образцу. В последнем устанавливается стоячая волна с периодом  $d = \pi v / \Omega$ , где  $v$  — скорость ультразвука в кристалле или жидкости

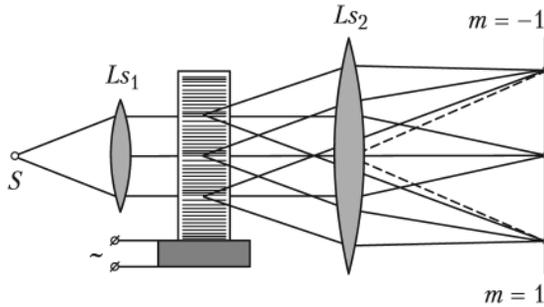


Рис. 9.13. Дифракция на ультразвуке

Колебания модулируют плотность образца и тем самым показатель преломления  $n$ . Для видимого света, распространяющегося перпендикулярно направлению колебаний такой объект является синусоидальной фазовой решеткой с  $n = n_0 + \Delta n \sin kx$ ,  $k = 2\Omega/v$ . В результате дифракции на этой структуре сохраняется нулевой максимум (свет, прошедший без отклонения) и появляются два симметричных боковых максимума. Типичные значения скорости ультразвука — 1000...1500 м/с, поэтому даже на частоте 10 МГц пространственный период составляет 100...150 мкм, что соответствует угловому отклонению боковых максимумов видимого света менее  $0,5^\circ$ .

## 9.6. Дифракционные принципы голографирования

Принципы регистрации трехмерных объемных изображений были сформулированы еще в 1948 г. Д. Габором; однако вплоть до изобретения в 60-х гг. лазерных источников, обладающих требуемой когерентностью, принципы *голографии* не были реализованы на практике.

Основой трехмерного видения является регистрация на светочувствительной пластине не только амплитуды световой волны, рассеянной объектом, но и ее фазы. Информация о пространственном распределении фазы волны теряется при обычном фотографировании, так как степень почернения фотоэмульсии зависит от интенсивности света в данной точке.

Для запоминания «фазового портрета» было предложено освещать фотопластинку наряду с объектным излучением ( $\Sigma$ ), дополнительно интенсивным когерентным фоном (опорной, или реперной волной  $\Sigma_R$ ), заставляя обе волны интерферировать в плоскости регистрации (рис. 9.14).

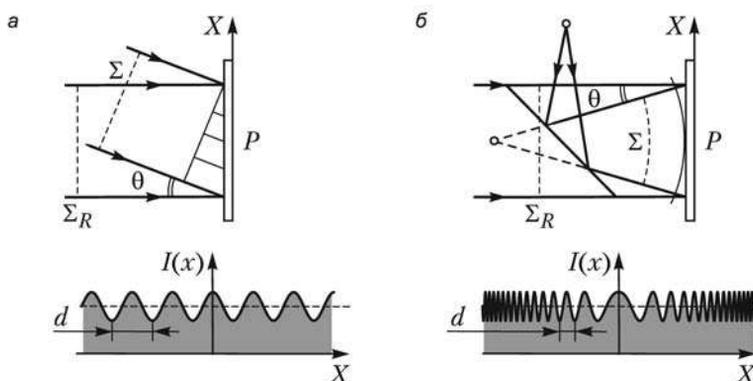


Рис. 9.14. Запись голограммы плоской волны (а) и сферической волны от точечного источника (б)

Простейший случай записи голограммы плоской волны представлен на рис. 9.14, а. Такая голограмма представляет собой систему эквидистантных интерференционных полос, так как угол между пучками  $\theta$  во всех точках голограммы одинаков. Пространственный период полос  $d$  определяется углом  $\theta$  и длиной волны излучения  $\lambda$ :

$$d = \frac{\lambda}{\sin \theta}.$$

На рис. 9.14, б приведен пример записи «фазового портрета» сферической волны. В этом случае по мере удаления от оптической оси период концентрических полос, аналогичных кольцам Ньютона, убывает, поскольку угол  $\theta$  между интерферирующими волнами растет. Такую систему уплотняющихся от центра к краю интерференционных колец принято называть *решеткой Сорэ*. Именно она и является голограммой идеального точечного источника.

Схема наблюдения или, как говорят, восстановления голограммы поясняется на рис. 9.15, а. В данном случае восстанавливается голограмма точки  $S$ .

За счет дифракции на синусоидальной решетке, образуемой интерференционными полосами, возникают три волны. Одна из них соответствует главному максимуму нулевого порядка  $m = 0$  и распространяется в направлении падающей волны. Какой-либо полезной информации эта волна не несет. Направление волны с  $m = 1$  определяется условием  $d \sin \theta = \lambda$ , таким образом, ее направление и все остальные характеристики такие же, как у предметной волны  $\Sigma$  при записи

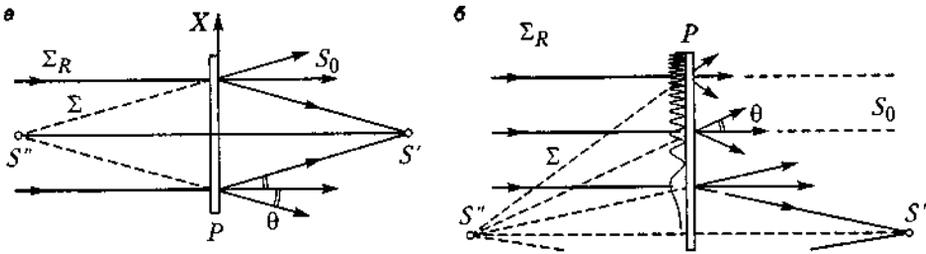


Рис. 9.15. Восстановление голограммы точечного источника (а) и увеличенная схема верхней части (б)

голограммы. Эта волна формирует *мнимое изображение* исходного предмета  $S''$ . Третья волна с  $m = -1$  отличается знаком пространственной частоты и создает *действительное изображение* предмета  $S'$ .

Формирование восстановленных изображений поясняется в укрупненном виде на рис. 9.15, б. Поскольку плотность интерференционных колец возрастает по направлению к краю голограммы, лучи, попадающие на периферийную часть голограммы, отклоняются сильнее. Реальные сходящиеся дифрагированные лучи собираются в точке  $S'$ , а продолжение за голограмму расходящегося пучка формирует мнимое изображение  $S''$ .

Поскольку пучок нулевого порядка и волна, формирующая действительное изображение, зачастую мешают восприятию трехмерного мнимого изображения, было предложено (Лейте и Упатниекс, 1962 г.) когерентный фон в виде плоской опорной волны при записи направлять наклонно к оси объектной волны. Тогда при восстановлении голограммы ненужное излучение быстро покидает область наблюдения объекта (рис. 9.16).

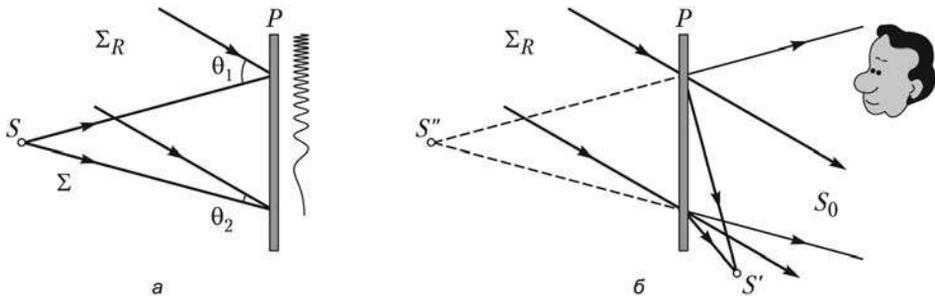


Рис. 9.16. Получение и восстановление голограммы Лейте и Упатниекса при наклонном падении опорного пучка

Указанный прием повышает требования к качеству используемых фотоматериалов, в частности к их *разрешающей способности*: с увеличением угла  $\theta$  уменьшается период интерференционных полос  $d$ , а максимальный размер зерна фотоэмульсии должен быть существенно меньше  $d$ .

Еще одна особенность записи качественных голограмм — требование увеличенной интенсивности опорной волны по сравнению с объектной. Дело в том, что кривая почернения фотоматериалов (зависимость оптической плотности

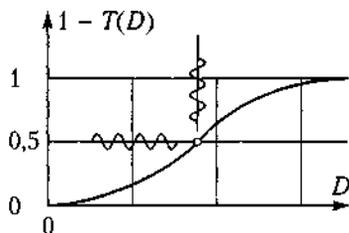


Рис. 9.17. Зависимость степени почернения фотопластинки от экспозиции

( $1 - T$ ) от экспозиционной дозы  $D$ ), во-первых, нелинейна (рис. 9.17) и, во-вторых, даже на линейном участке зависит от общей интенсивности света. При восстановлении голограммы необходима неискаженная информация об амплитуде светового поля, поэтому в отличие от высококонтрастных полос при двухлучевой интерференции, получаемых при равенстве амплитуд источников, синусоидальная пространственная модуляция голограмм должна обеспечиваться полосами малой видности.

При использовании плоской волны в качестве когерентного фона, как правило, различные части голограммы записываются в условиях заметно различающихся углов  $\theta$ . По такой схеме создаются *голограммы Френеля* (рис. 9.18, а), которые предъявляют повышенные требования к разрешающей способности фотоэмульсии. Из рисунка видно, что плоская опорная волна  $\Sigma_R$ , отразившаяся от зеркала  $M$ , попадает на голограмму  $P$  в *широком интервале углов от  $\theta_1$  до  $\theta_2$* , образуемых с объектной волной  $\Sigma$ .

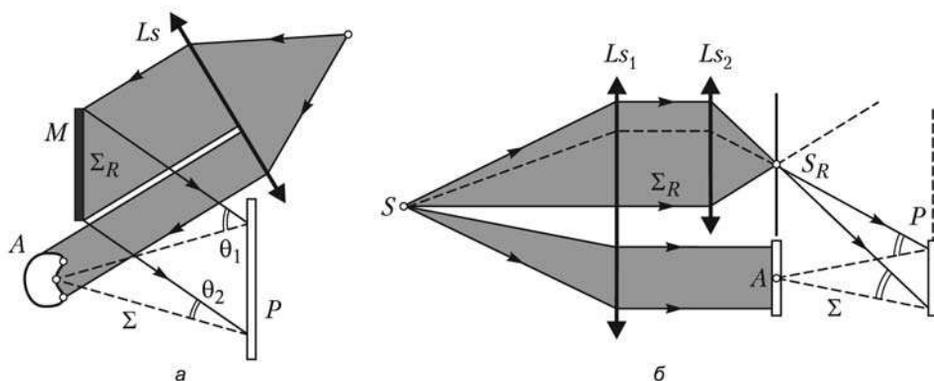


Рис. 9.18. Получение голограмм Френеля (а) и Фурье (б)

Другая возможность — использовать в качестве опорной сферическую волну от точечного источника  $S_R$  — реализуется при записи *голограмм Фурье* (рис. 9.18, б). В этом случае опорная волна формируется дополнительной линзой  $Ls_2$ , собирающей опорный лучок в области точечной диафрагмы  $S_R$ . Интерференция с объектной волной  $\Sigma$  от любой точки объекта  $A$  по всей голограмме создает полосы примерно равного периода, поскольку углы  $\theta$  практически не меняются. Таким

образом, размещая объект и опорный источник на одном расстоянии от фотопластины, можно добиться сравнительно больших пространственных периодов полос.

При изучении голограммы под микроскопом (рис. 9.19) хорошо видны системы интерференционных полос, образующихся при наложении двух когерентных волн: опорной и объектной.

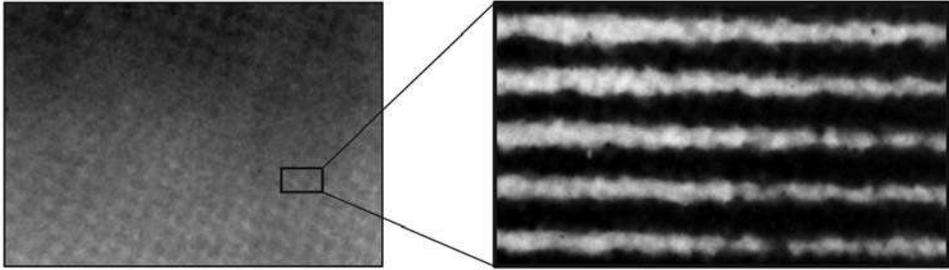


Рис. 9.19. Голограмма под микроскопом

В отличие от обычной фотографии, где информация о какой-либо точке объекта фиксируется на одном определенном участке отпечатка, свет, рассеянный каждой точкой предмета при голографировании, падает на всю поверхность фотопластинки. Поэтому каждый участок голограммы содержит в закодированном виде информацию сразу о всех точках предмета, и восстановить предметную волну можно с помощью небольшого участка голограммы. По мере уменьшения размеров голограммы лишь ухудшается разрешающая способность и сужается поле зрения.

Отметим, что при записи голограммы в монохроматическом свете, увеличивая или уменьшая длину волны освещения при восстановлении изображения, можно изменять его масштаб.

Задача регистрации трехмерного цветного изображения с возможностью восстановления голограммы в белом свете была решена академиком Ю. Н. Денисюком с использованием так называемых толстых, или объемных голограмм, записываемых во встречных пучках при последовательном экспонировании одной

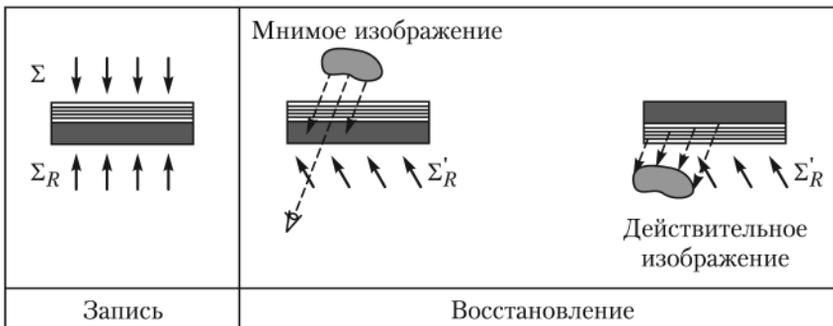
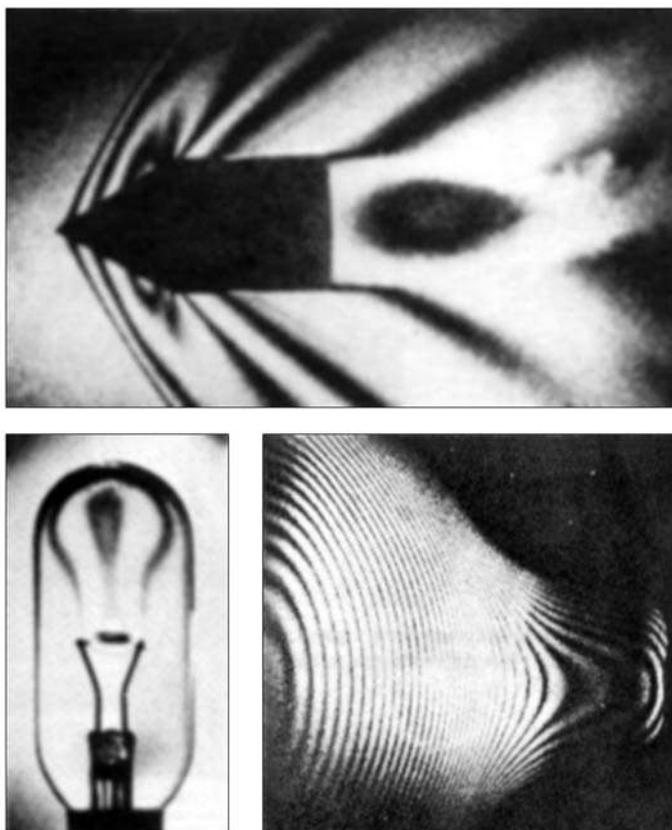


Рис. 9.20. Запись и восстановление объемной голограммы

пластины в трех основных цветах (рис. 9.20). Именно по методу Денисюка в настоящее время создаются все художественные голограммы высокого качества.

Из многочисленных практических применений голографии отметим прежде всего *голографическую интерферометрию*, позволяющую наблюдать интерференцию волн, зарегистрированных в разные моменты времени. Используя один и тот же опорный пучок, на одной фотографии можно дважды последовательно зафиксировать рассеянные предметом волны. Если между экспозициями какие-то части предмета сместились или деформировались, то при восстановлении две одновременно возникающие предметные волны будут иметь определенную разность хода, и изображение предмета будет покрыто системой интерференционных полос, аналогичных обычным полосам равной толщины. По расположению этих полос можно судить об изменениях объекта между экспозициями. При этом изучаемый объект может иметь сложный рельеф и шероховатую поверхность, так как эти факторы одинаково влияют на обе восстанавливаемые предметные волны.

На рис. 9.21 показано, как голографическая интерферометрия позволяет зафиксировать газовые потоки над раскаленной нитью лампы, упругие воздушные



**Рис. 9.21.** Технические применения голографической интерферометрии: модель летящей пули, лампа накаливания, стеклянная колба сложной формы

волны от летящей пули или данные бесконтактного контроля стеклянной колбы электронно-лучевой трубкой.

Трехмерные динамические голограммы уже сейчас используются для реализации 3D-дисплеев, например, для авиационных диспетчеров. Другое перспективное применение голограмм — создание компьютерных запоминающих устройств. Голографическая память сулит прорыв в области оптических информационных систем как по плотности записи, так и по надежности, поскольку информационные единицы не привязаны к конкретным точкам (пикселям) матрицы, точно так же, как информация о данной точке объекта записана на всей голограмме, а не на отдельном участке.

## Примеры решения задач

**Пример 9.1.** На чертеже зон Френеля, сделанном для плоского фронта волны, радиус первой окружности, ограничивающей центральную зону равен 2 см. Радиус последней окружности 14 см. Сколько зон Френеля содержится на чертеже? Зная, что площади всех зон равновелики, определите расстояние между двумя последними окружностями.

*Решение*

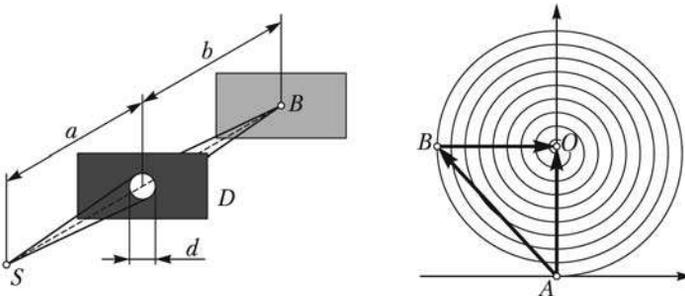
Для плоского волнового фронта радиус  $m$ -й зоны Френеля связан с параметрами оптической системы соотношением  $r_m^2 = mb\lambda$ , где  $m$  — видимое из точки наблюдения число зон Френеля,  $b$  — расстояние до точки наблюдения (см. формулу 7.2). Отсюда находим, что

$$m = \frac{r_m^2}{r_1^2} = 49.$$

Расстояние между двумя последними окружностями (ширина последней изображенной зоны) определится как

$$\Delta r_m = r_m - r_{m-1} = (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})b\lambda = (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})r_1^2 = 0,28 \text{ см.}$$

**Пример 9.2.** Плоская монохроматическая волна с интенсивностью  $I_0$  падает по нормали на круглое отверстие с  $r = 1,2$  мм. Расстояние  $a$  велико, длина волны  $\lambda = 640$  нм. Найдите интенсивность в точке  $B$  при  $b = 1,5$  м.



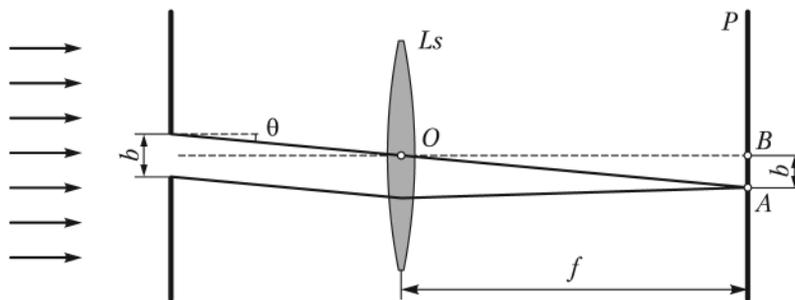
**Решение**

Интенсивность в центре экрана определяется количеством зон Френеля  $m$ , укладывающихся в отверстие:

$$m = \frac{r_m^2}{b\lambda} = 1,5 \text{ (см. предыдущую задачу).}$$

На векторной диаграмме такому отверстию соответствует вектор  $AB$ , длина которого  $L_{AB} = L_{AO} \sqrt{2}$ . Учитывая, что длина вектора определяет амплитуду поля в точке наблюдения, а интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, получаем:  $I = 2I_0$ .

**Пример 9.3.** Узкая щель шириной  $b = 35$  мкм освещается монохроматическим излучением с плоским фронтом. Длина волны  $\lambda = 620$  нм. На экране  $P$ , помещенном в фокальной плоскости линзы  $Ls$ , наблюдается дифракция Фраунгофера с характерным размером  $a$ . Определите величину  $a$ , если расстояние от линзы до экрана  $f = 80$  см.

**Решение**

Лучи, дифрагировавшие на щели, образуют на экране систему дифракционных максимумов и минимумов. Условие минимума имеет вид  $b \sin \theta = m\lambda$ . Из треугольника  $OAB$ , условия первого минимума и условия малости угла дифракции ( $\lambda/b \ll 1$ ) получаем

$$\operatorname{tg} \theta \approx \sin \theta = \frac{a}{f} = \frac{\lambda}{b}, \text{ откуда } a = f \frac{\lambda}{b} = 14,2 \text{ мм.}$$

**Пример 9.4.** Перед объективом фотокамеры установлена дифракционная решетка с периодом  $0,002$  мм. На решетку, нормально к ней, падает пучок белого света. Найдите длину спектра первого порядка, если фокусное расстояние объектива  $f = 21$  см, а пленка чувствительна к лучам с длиной волны от  $400$  до  $680$  нм.

**Решение**

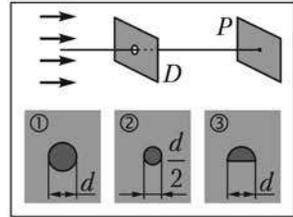
Длина спектра первого порядка может быть определена из выражения  $\Delta l = f \Delta \theta = D f \Delta \lambda$ , где  $D = m / (d \cos \theta)$  — угловая дисперсия, см. формулу (9.7). Из условия главных максимумов в первом порядке:  $\sin \theta = \lambda / d$ , и среднее значение

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2} \approx 0,96$$

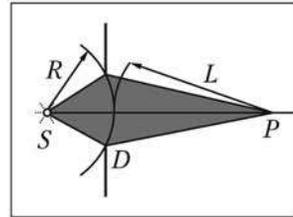
для всех длин волн указанного интервала. Таким образом, можно считать, что дифракционная решетка имеет в данном порядке спектра постоянную дисперсию. Отсюда находим, что  $\Delta l = 30$  мм.

## Задачи

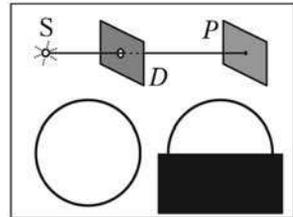
9.1. Плоская монохроматическая волна с интенсивностью  $I$  падает нормально на непрозрачный экран  $D$  с отверстием. Какова интенсивность в точке  $P$ , для которой размер  $d$  соответствует открытию первой зоны Френеля. Ответ дайте для трех различных отверстий.



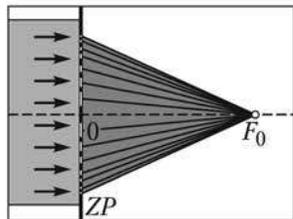
9.2. В точке  $S$  находится источник монохроматического света ( $\lambda = 500$  нм). Дифрагма с отверстием радиусом 1 мм перемещается из точки, отстоящей от  $S$  на 1 м, в точку, отстоящую от  $S$  на 1,75 м. Сколько раз будет наблюдаться затемнение в точке  $P$ , если  $SP = 2$  м?



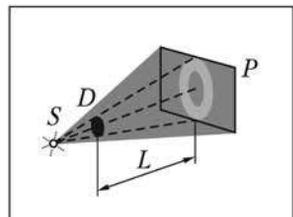
9.3. В точке  $P$  наблюдается дифракция излучения от точечного источника  $S$  на круглом отверстии  $D$ . Открыто 14 первых зон Френеля. Определите, во сколько раз уменьшится интенсивность в точке  $P$ , если половину отверстия закрывают непрозрачным экраном.



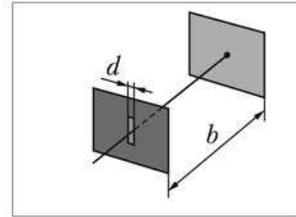
9.4. На амплитудную зонную пластинку падает плоский волновой фронт ( $\lambda = 585$  нм). Максимальная концентрация световой энергии на оси пластинки достигается в точке  $F_0$  на расстоянии 450 мм от нее. Найдите диаметр центральной непрозрачной зоны. Найдите значения 3-х первых дополнительных фокусов.



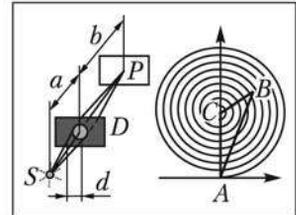
9.5. Диск диаметром 0,5 см с неровностями 10 мкм расположен на расстоянии 1 м от точечного источника  $S$  ( $\lambda = 0,5$  мкм). Считая, что пятно Пуассона видно до тех пор, пока неровности перекрывают зону Френеля не более чем на  $1/4$ , найдите минимальное расстояние ( $l_{\min}$ ) для его наблюдения.



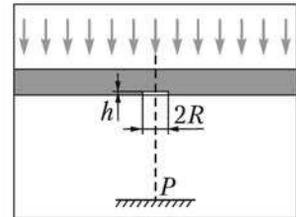
9.6. Плоская волна падает на экран с прямоугольной щелью ширины  $d$ . При этом в точке  $P$  наблюдается самый глубокий минимум. Затем щель расширяют еще на  $0,7$  мм и наблюдают следующий минимум. Найдите число открытых зон  $k_1$  и  $k_2$ , если  $b = 60$  см.



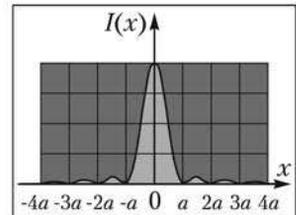
9.7. Свет от источника  $S$  дифрагирует на круглом отверстии  $D$ . Выберите на фазовой диаграмме векторы, соответствующие амплитудам в точке  $P$ , если: а) отверстие открывает почти 7 первых зон; б) вместо экрана с отверстием — диск того же диаметра; в) экрана нет вообще.



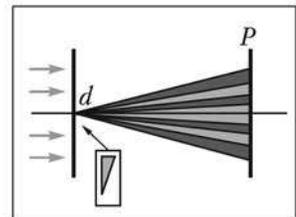
9.8. Плоская световая волна (интенсивности  $I_0$  и длиной волны  $\lambda$ ) падает нормально на стеклянную пластину (показатель преломления  $n$ ) с круглой выемкой глубиной  $h$  и радиусом  $R$ . Для точки  $P$  радиус  $R$  соответствует первой зоне Френеля, а величина  $h$  — максимальной интенсивности. Найдите  $h_{\min}$ .



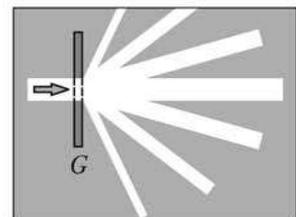
9.9. На рисунке представлен график распределения интенсивности света в случае дифракции Фраунгофера на щели, где  $a$  — характерный размер на экране. Как изменится вид графика, если ширину щели уменьшить в два раза?



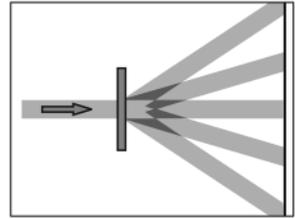
9.10. Плоская монохроматическая волна падает по нормали на щель шириной  $d$ . На экране  $P$  наблюдается дифракционная картина в дальней зоне. Опишите изменения этой картины после перекрытия щели стеклянным клином.



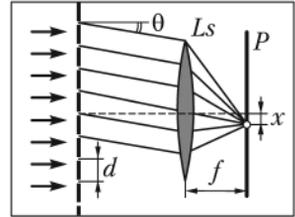
9.11. Как изменится дифракционная картина главных максимумов, если у амплитудной решетки  $G$  с периодом  $6$  мкм увеличить ширину щелей до  $2$  мкм? Исходную ширину щели считать бесконечно малой.



9.12. Дифракционная решетка шириной 25 мм имеет 400 штр/мм. Определите: а) ее разрешающую способность для спектра третьего порядка; б) наименьшую разность длин волн  $\delta\lambda$  двух спектральных линий одинаковой интенсивности вблизи  $\lambda = 0,56$  мкм, которые можно разрешить этой решеткой в максимальном порядке спектра, если свет падает на решетку нормально.



9.13. Какое фокусное расстояние должен иметь объектив  $Ls$  спектрографа с дифракционной решеткой, имеющей ширину заштрихованной части 10 см и полное число штрихов 60 000, чтобы разрешаемые им во втором порядке спектральные линии были видны на фотопластинке не ближе чем на расстоянии 0,2 мм ( $\lambda = 650$  нм)?



# Часть 3

## **Взаимодействие света с веществом**

# ГЛАВА 10 Поляризация света

При рассмотрении в рамках скалярных теорий интерференционных и дифракционных явлений намеренно игнорировался векторный характер электромагнитного поля световых волн. Однако результат взаимодействия света с веществом во многих случаях зависит от ориентации вектора  $\mathbf{E}$ . Поэтому описание этих явлений следует предварить рассмотрением векторных особенностей поперечных световых колебаний.

## 10.1. Естественный и поляризованный свет

*Поляризация* — свойство света, связанное с *поперечностью* электромагнитных волн и описывающее пространственное поведение векторов электрического и магнитного полей. Заметим, что направления электрического и магнитного векторов в волне не являются независимыми.

Из уравнений Максвелла для монохроматических волн (1.22) вытекает, что волновой вектор  $\mathbf{k}$ , векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно ортогональны и составляют правую тройку (см. также рис. 1.4). Это позволяет ограничиться рассмотрением ориентации только вектора электрической напряженности. Именно по этому вектору обычно определяют поляризацию света.

Сначала рассмотрим случай, когда колебания вектора  $\mathbf{E}$  полностью детерминированы. Проекции электрического вектора световой волны, распространяющейся вдоль оси  $OZ$ , могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x), \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y). \end{cases}$$

Исключив из этих уравнений переменную часть фазы  $\omega t - kz$ , получим уравнение, описывающее движение конца вектора  $\mathbf{E}$  в фиксированной плоскости  $XOY$ :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (10.1)$$

где  $\delta = \delta_y - \delta_x$  — разность фаз проекций электрического вектора. В общем случае траектория, задаваемая (10.1), представляет собой эллипс (рис. 10.1). В соответствии с формой описываемой кривой, такая поляризация называется *эллиптиче-*

ской. Степень вытянутости эллипса зависит от соотношения амплитуд проекций и разности фаз  $\delta$ . Так, при  $\delta = m\pi$  уравнение (10.1) переходит в

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} \pm \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 0. \quad (10.2)$$

Это — уравнение отрезка прямой в плоскости  $XOY$ . Колебания вектора  $\mathbf{E}$  при распространении волны происходят в фиксированной плоскости, называемой *плоскостью поляризации*, поэтому такая поляризация волны называется *линейной* или *плоской*. Именно такая волна была изображена на рис. 1.4, плоскостью поляризации является плоскость  $XOZ$ .

Если амплитуды проекций равны  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ , а фазовый сдвиг:

$$\delta = \frac{(2m+1)\pi}{2},$$

из (10.1) получим:

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2, \quad (10.3)$$

то есть уравнение окружности. Такая поляризация называется *круговой* или *циркулярной*.

Несколько примеров эллипсов поляризации при фиксированном отношении  $E_x/E_y$  и изменении  $\delta$  показаны на рис. 10.2. Видно, что описываемые кривые могут отличаться не только формой, но и направлением вращения. В соответствии с этим, эллиптическая или круговая поляризация может быть *правой* или *левой*. Поляризация считается правой, если электрический вектор вращается по часовой стрелке (при наблюдении навстречу волне).

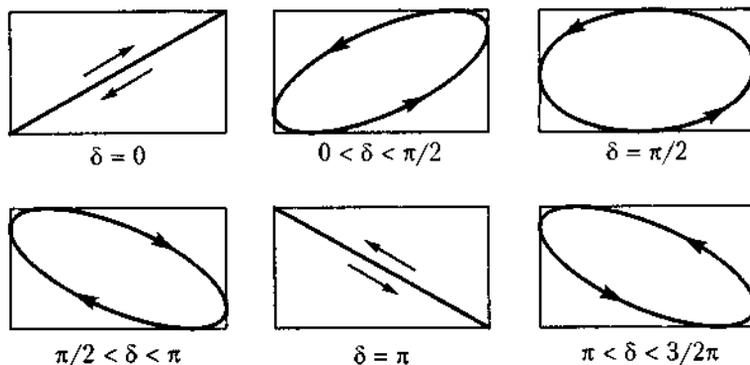


Рис. 10.2. Зависимость вида эллипса поляризации от фазового сдвига

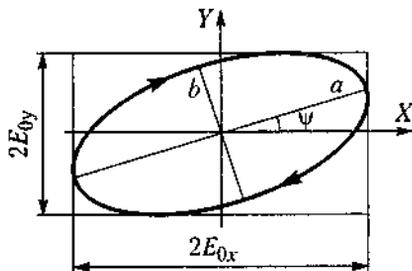


Рис. 10.1. Эллиптическая траектория движения электрического вектора  $a, b$  — полуоси эллипса;  $\psi$  — азимут

Если с помощью какого-либо прибора удалось бы отследить пространственное поведение вектора  $\mathbf{E}$  в световом пучке, испущенном обычным (нелазерным) источником света, то обнаружилось бы, что вместо вращения по эллипсу он хаоти-

чески меняет свою ориентацию (рис. 10.3, а). Такой свет называется *неполяризованным* или *естественным*.

Причина отсутствия поляризации заключается в том, что обычный источник состоит из большого числа независимых друг от друга элементарных излучателей (атомов). Каждый отдельный атом испускает свет со своей поляризацией, но в результате сложения всех колебаний общий характер движения вектора  $\mathbf{E}$  приобретает хаотический характер.

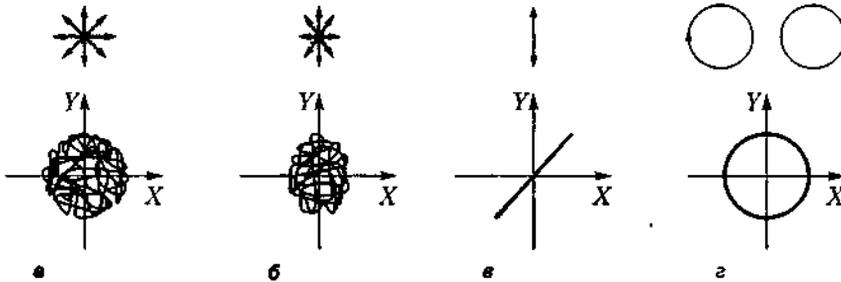


Рис. 10.3. Движение вектора  $\mathbf{E}$  в естественном (а), частично поляризованном (б) и полностью поляризованном (в, г) свете

Возможна ситуация, когда в источнике существует некоторая корреляция между излучателями. Тогда, несмотря на хаотичность движения вектора  $\mathbf{E}$ , вероятности разных ориентаций  $\mathbf{E}$  неодинаковы (рис. 10.3, б). Это — *частично поляризованный свет*. Наконец, если все атомы испускают свет с одинаковой поляризацией, излучение источника в целом будет *полностью поляризованным* (рис. 10.3, в, г). Такая ситуация типична для лазеров, в которых атомы взаимодействуют друг с другом через поле излучения, или для света, пропущенного через специальные устройства — поляризаторы. Линейно, циркулярно или эллиптически поляризованный свет является различными реализациями полностью поляризованного излучения, а частично поляризованный свет может быть представлен как смесь естественной и полностью поляризованной компонент.

## 10.2. Анализ поляризации. Степень поляризации

Для изменения и анализа поляризации света применяются различные устройства: поляризаторы, анализаторы, компенсаторы, фазовые пластинки и т. п. Некоторые типы таких устройств и принципы их работы рассмотрены ниже.

*Поляризаторы* с технической стороны могут быть самых разных типов: кристаллические, пленочные, отражательные и т. д. Независимо от конкретной реализации, поляризатор пропускает свет с определенной ориентацией вектора  $\mathbf{E}$ . Таким образом, прошедший через поляризатор свет всегда линейно поляризован. Если в оптической схеме имеется два последовательно стоящих поляризующих элемента, то первый обычно называется поляризатором, а второй — *анализатором*.

Если падающий на поляризатор или анализатор свет уже линейно поляризован, то дальше пройдет только проекция электрического вектора на направление пропускания поляризатора (рис. 10.4). Следовательно,

$$E_1 = E_0 \cos \varphi \text{ и } I_1 = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (10.4)$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостью поляризации падающей волны и направлением пропускания поляризатора. Соотношение (10.4) называется *законом Малюса (Малю)*.

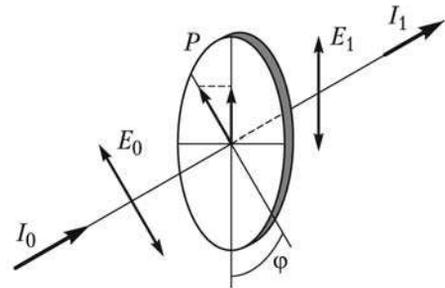


Рис. 10.4. Прохождение линейно поляризованного света через поляризатор

Если падающий свет неполяризован, то в нем присутствуют компоненты с любыми ориентациями вектора  $\mathbf{E}$  (то есть с любыми значениями  $\varphi$ ). Усреднив (10.4) по углам, получим:  $I_1 = 0,5I_0$ . Значит, при любой ориентации поляризатора через него проходит половина интенсивности естественного света.

Из вышесказанного видно, что типы поляризации световых волн отличаются большим разнообразием, поэтому необходимо ввести количественную характеристику — *степень поляризации*. Определение степени поляризации основано на представлении частично поляризованного света как смеси естественной  $I_{\text{ест}}$  и поляризованной  $I_{\text{пол}}$  компонент:

$$P = \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{пол}} + I_{\text{ест}}}. \quad (10.5)$$

Нетрудно заметить, что согласно (10.5) степень поляризации может изменяться в пределах  $0 \leq P \leq 1$ . При этом значение  $P = 1$  соответствует полностью поляризованному свету (с любым типом поляризации), а  $P = 0$  — естественному (неполяризованному) свету. Все промежуточные значения соответствуют частично поляризованному свету.

Определенная по (10.5) величина не дает ответа на вопрос, каков тип поляризации светового пучка. Поэтому на практике часто используется другая характеристика, основанная на анализе изменения интенсивности света, прошедшего через поляризатор, при его повороте вокруг направления светового пучка. В ходе поворота определяют максимальное  $I_{\text{max}}$  и минимальное  $I_{\text{min}}$  значения интенсивностей, которые соответствуют двум взаимно ортогональным ориентациям поляризатора. Затем вычисляют величину  $\Delta$  по формуле:

$$\Delta = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}. \quad (10.6)$$

Определенный таким образом параметр  $\Delta$ , так же как и  $P$ , лежит в пределах  $0 \leq \Delta \leq 1$ . Значение  $\Delta = 1$  соответствует линейно поляризованному свету (при определенном положении поляризатора свет полностью гасится), а значение  $\Delta = 0$  — естественному или циркулярно поляризованному свету (интенсивность прошедшего света не зависит от положения поляризатора). Величина  $\Delta$  представляет, по сути, *степень линейной поляризации*, ее удобно использовать, например, при анализе света, отраженного от границы оптических сред (см. раздел 11.2).

Поскольку и поляризация, и когерентность света непосредственно связаны с фазами электромагнитных волн, встает вопрос о соотношении друг с другом степени поляризации и степени когерентности света.

Хаотическое изменение фазы излучения обычных источников белого света приводит к появлению некогерентного и неполяризованного излучения. С помощью поляризаторов и компенсаторов это излучение может быть сделано линейно, циркулярно или эллиптически поляризованным без изменения его спектрального состава. В результате получается поляризованный, но некогерентный свет.

С другой стороны, монохроматизация белого света, реализуемая изотропными абсорбционными или интерференционными светофильтрами, не влияет на его состояние поляризации — свет может стать квазимонохроматическим, но остаться неполяризованным.

Таким образом, непосредственной связи между степенью поляризации и степенью когерентности нет. Заблуждения на этот счет часто появляются в результате знакомства с предельно когерентным излучением лазерных источников с линейной поляризацией (например, гелий-неонового лазера). Его линейная поляризация определяется не только механизмом вынужденного излучения, но и особенностями конструкции лазера (брюстеровскими окнами в резонаторе, см. раздел 11.2). Если расположить выходные окна перпендикулярно оптической оси лазера, поляризационные свойства излучения оказываются совершенно иными. С другой стороны, короткоимпульсные лазеры могут давать свет полностью поляризованный, но с весьма низкой степенью когерентности.

### 10.3. Описание поляризации с помощью параметров Стокса

Описать состояние поляризации света можно непосредственно параметрами эллипса поляризации, как наиболее общего случая сложения двух ортогональных колебаний с одинаковой частотой. Если разворотом системы координат совместить ее оси с полуосями эллипса (рис. 10.5), то величину  $\operatorname{tg} \chi$  называют *эллиптичностью*, а угол  $\psi$  — *азимутом*. Состояние поляризации часто определяют с помощью так называемого *вектора Стокса*, четыре компонента которого имеют размерность интенсивности и могут быть измерены экспериментально:

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 - I, \\ S_1 &= E_{0x}^2 - E_{0y}^2 = S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi, \\ S_2 &= 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta = S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi, \\ S_3 &= 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta = S_0 \sin 2\chi. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Параметр  $S_0$  пропорционален полной интенсивности светового пучка. В дальнейших примерах будем полагать интенсивность единичной. Параметр  $S_1$  представляет степень преобладания горизонтальной линейной поляризации (вдоль оси  $OX$ ) над вертикальной (вдоль оси  $OY$ ). Для горизонтальной поляризации  $S_1 = 1$ , для вертикальной —  $S_1 = -1$ . Параметр  $S_2$  определяет преобладание линейной поляризации под углом  $45^\circ$  ( $S_2 = 1$ ) над поляризацией под углом  $135^\circ$  ( $S_2 = -1$ ).

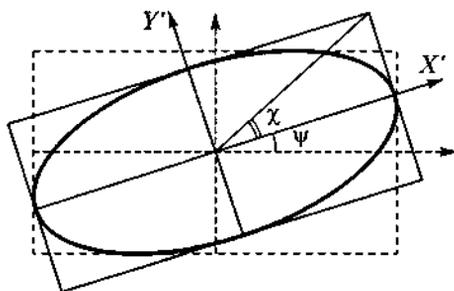


Рис. 10.5. Определение эллиптичности и азимута для эллипса поляризации

Наконец, параметр  $S_3$  позволяет определить направление вращения вектора  $\mathbf{E}$ . Для правого вращения  $S_3 > 0$ , для левого —  $S_3 < 0$ . Значения  $S_3 = \pm 1$  соответствуют циркулярно поляризованному свету.

Параметры  $S_1, S_2, S_3$  можно рассматривать как декартовы координаты точки  $P$  на поверхности сферы радиусом  $S_0$ . При этом  $2\psi$  и  $2\chi$  представляют собой сферические угловые координаты этой точки (рис. 10.6, а). Такая сфера, каждая точка которой представляет определенное состояние поляризации, называется *сферой Пуанкаре*.

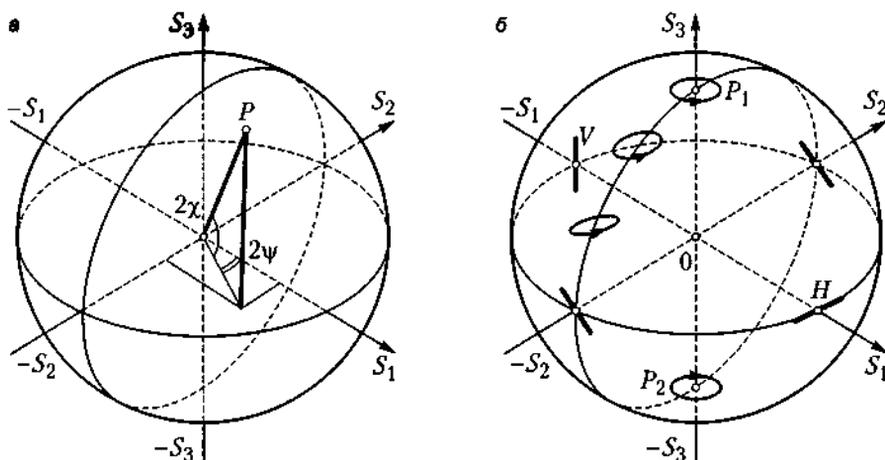


Рис. 10.6. Сфера Пуанкаре. Связь угловых координат с параметрами Стокса (а) и отображение различных состояний поляризации (б)

На полюсах сферы Пуанкаре расположены две циркулярные поляризации, на экваторе — линейные поляризации всех азимутов. Параллели являются линиями равной эллиптичности («широта места» равна  $2\chi$ ), а меридианы — линиями равных азимутов («долгота места» равна  $2\psi$ ) (рис. 10.6, б). Если передвигаться по одному из меридианов от верхнего полюса к нижнему, то в верхнем полушарии мы пройдем последовательно через все более вытянутые эллипсы с правым вращением электрического вектора и на экваторе попадем в точку, характеризующую линейную поляризацию с азимутом, равным азимуту больших полуосей

эллипсов. В нижнем полушарии направление вращения сменится на противоположное.

Описание с помощью параметров Стокса применимо и для частично поляризованного света. В этом случае  $S_0^2 > S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ , все четыре параметра оказываются независимыми, а степень поляризации, совпадающая с определенным (10.5), описывается выражением:

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}. \quad (10.8)$$

Параметры Стокса часто записывают в матричном виде как вектор-столбец из четырех элементов. Некоторые примеры векторов Стокса приведены ниже.

Естественный свет	Линейная поляризация вдоль оси ОХ	Линейная поляризация вдоль оси ОУ	Линейная поляризация под углом 45°	Правая круговая поляризация
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

При прохождении света через различные оптические приборы состояние поляризации может изменяться. Поляризационные характеристики устройства задаются с помощью *матрицы Мюллера*, которая связывает между собой входной и выходной векторы Стокса.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix}, \quad (10.9)$$

где  $a_{ij}$  — 16 безразмерных коэффициентов, зависящих от особенностей конкретного типа устройства. Так, например, поляризатор с пропусканием вдоль оси Х описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, если эту матрицу умножить на вектор Стокса, соответствующий произвольной поляризации, получим вектор линейно поляризованного света:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S_0 + S_1)/2 \\ (S_0 + S_1)/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Еще пример – матрица устройства, превращающего поляризацию света из линейной в круговую – так называемая фазовая пластинка  $\lambda/4$  (см. раздел 12.5) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее действие на свет, линейно поляризованный вдоль  $OX$ , описывается уравнением

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ -S_0 \end{pmatrix},$$

то есть на выходе получается свет, поляризованный по левому кругу.

## Примеры решения задач

**Пример 10.1.** Частично поляризованный свет, состоящий из компонент, поляризованной по кругу (интенсивностью  $I_k$ ) и естественной (интенсивностью  $I_e$ ) проходит через четвертьволновую пластинку и анализатор. При вращении последнего найдено, что интенсивность прошедшего света меняется от  $I_{\max}$  до  $I_{\min}$ , причем  $I_{\max}/I_{\min} = 3$ . Найдите отношение  $I_k/I_e$ .

*Решение*

Четвертьволновая пластинка вносит дополнительную разность фаз  $\pi/2$  между двумя ортогональными составляющими электрического вектора. Поэтому при прохождении пластинки циркулярно поляризованный свет ( $\delta = \pi/2$ ) превращается в линейно поляризованный ( $\delta = \pi$ ) с той же интенсивностью, и наоборот. Естественный свет не претерпевает никаких изменений, так как в нем фазовый сдвиг хаотически изменяется. В соответствии с законом Малюса (10.4) интенсивность прошедшей линейно поляризованной компоненты меняется от  $I_k$  до нуля, а естественной – всегда равна  $I_e/2$ . Таким образом,

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{I_k + I_e/2}{I_e/2} = 3,$$

откуда находим, что  $I_k/I_e = 1$ .

**Пример 10.2.** Световой пучок, вектор Стокса которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

проходит через поляризатор. При какой ориентации поляризатора интенсивность прошедшего через него света будет максимальной?

*Решение*

Определим вначале тип поляризации исходного пучка. Степень поляризации в соответствии с формулой (10.8) равна

$$P = \frac{\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

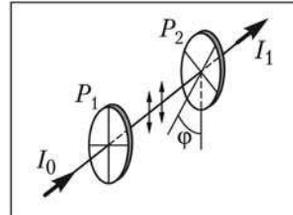
Так как эта величина меньше единицы, то свет частично поляризован и представляет собой смесь естественной и эллиптически поляризованной компонент. Максимальная интенсивность света, прошедшего через поляризатор, получится, если плоскость пропускания поляризатора будет совпадать с большой полуосью эллипса. Ее положение определим с помощью соотношений (10.7):

$$\begin{cases} S_1 = S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi = 1/2, \\ S_2 = S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi = 1/2. \end{cases}$$

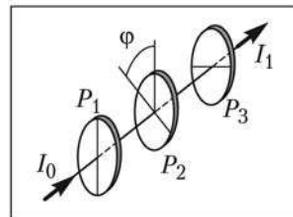
Отсюда  $\operatorname{tg} 2\psi = 1$ ;  $2\psi = \pi/4$ ;  $\psi = \pi/8$ . Следовательно, поляризатор нужно ориентировать под углом  $22,5^\circ$  к оси  $OX$ .

## Задачи

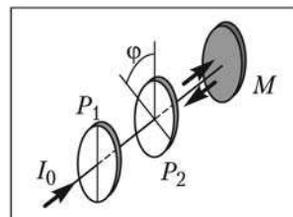
**10.1.** Естественный свет проходит через поляризатор  $P$  и анализатор  $A$ , поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен  $\varphi$ . Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают 8 % падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9 % от интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найдите угол  $\varphi$ .



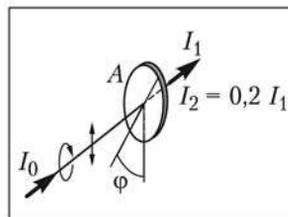
**10.2.** Поляризованный по кругу свет интенсивностью  $I_0$  падает на стопку из трех поляризаторов. Первый и последний из них скрещены, а главная плоскость среднего образует угол  $\varphi$  с главной плоскостью первого. Определите интенсивность на выходе из системы.



**10.3.** Естественный свет проходит через два поляризатора, главные плоскости которых составляют угол  $45^\circ$ . Выйдя из второго поляризатора, свет отражается от зеркала и проходит через оба поляризатора в обратном направлении. Определите отношение интенсивностей света на входе и на выходе этой системы.



**10.4.** Смесь линейно поляризованного и поляризованного по кругу света проходит через анализатор. При повороте анализатора на угол  $\varphi = 30^\circ$  от положения, соответствующего максимальной интенсивности прошедшего через него света, интенсивность уменьшилась на 20 %. Чему равно отношение интенсивностей света поляризованного по кругу и линейно поляризованного?



**10.5.** Степень поляризации частично поляризованного света  $P = 0,25$ . Найдите отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

# ГЛАВА 11 Отражение и преломление света

Классической задачей, для решения которой имеет значение ориентация вектора  $\mathbf{E}$ , является прохождение световой волны через границу раздела двух сред. Это связано с тем, что отражение и преломление различно поляризованных составляющих пучка света (перпендикулярно или параллельно плоскости падения) происходит по-разному. Следовательно, исходно неполяризованный свет после отражения или преломления становится частично поляризованным, если свет падает не по нормали.

## 11.1. Граничные условия. Формулы Френеля

Граничные условия для векторов напряженности и индукции, известные из электростатики, уравнивают на границе раздела тангенциальные компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и нормальные компоненты векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , по сути, выражая отсутствие токов и зарядов вдоль границы и ослабление внешнего электрического поля в  $\epsilon$  раз при попадании в диэлектрик (см. также соотношения 1.8):

$$E_{\parallel}^{(I)} = E_{\parallel}^{(II)}; \quad H_{\parallel}^{(I)} = H_{\parallel}^{(II)}; \quad D_{\perp}^{(I)} = D_{\perp}^{(II)}; \quad B_{\perp}^{(I)} = B_{\perp}^{(II)}. \quad (11.1)$$

При этом поле в первой среде складывается из полей падающей и отраженной волн, а во второй среде — равно полю преломленной волны (см. рис. 11.1).

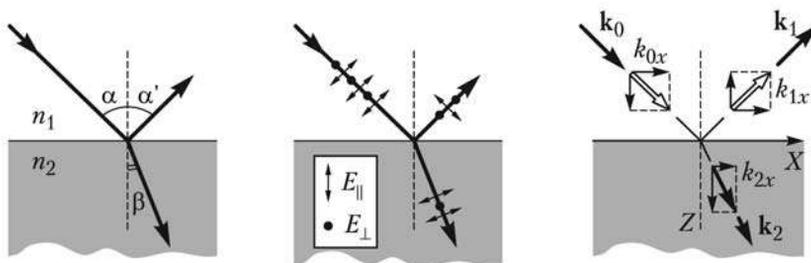


Рис. 11.1. К выводу законов отражения и преломления

Поле в любой из волн может быть записано в виде соотношений типа

$$E_0 = A_0 \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)].$$

Так как граничные условия (11.1) должны выполняться в любой точке границы сред и в любой момент времени, из них можно получить следующие законы отражения и преломления.

1. Частоты всех трех волн одинаковы:  $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2$ .
2. Волновые векторы всех волн лежат в одной плоскости:  $k_{0y} = k_{1y} = k_{2y} = 0$ .
3. Угол падения равен углу отражения:  $\alpha = \alpha'$ .
4. Закон преломления Снеллиуса:  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ . Можно показать, что произведение  $n \cdot \sin \alpha$  остается постоянным при любом законе изменения показателя преломления вдоль оси  $OZ$ , не только ступенчатом на границах раздела, но и непрерывном. Третий и четвертый законы ранее были получены методами геометрической оптики (см. разделы 2.3, 2.4).

На эти законы поляризация волн не влияет. С другой стороны, непрерывность соответствующих компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  приводит к так называемым *формулам Френеля*, позволяющим рассчитать относительные амплитуды и интенсивности отраженной и прошедшей волн для обеих поляризаций. Выражения оказываются существенно различными для параллельной (когда вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения) и перпендикулярной поляризации, естественно совпадая для случая нормального падения ( $\alpha = \beta = 0$ ).

Геометрия полей для параллельной поляризации показана на рис. 11.2, а для перпендикулярной — на рис. 5.2, б. Как было отмечено в разделе 1.4, в электромагнитной волне векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$  образуют правую ортогональную тройку.

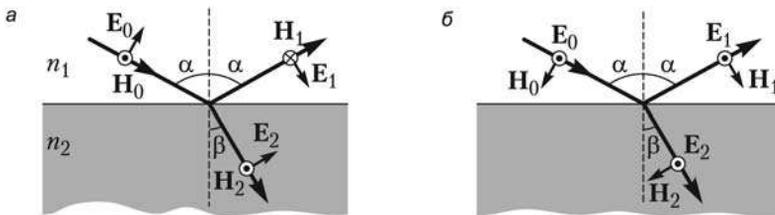


Рис. 11.2. Геометрия полей падающей, отраженной и преломленной волн для параллельной (а) и перпендикулярной (б) поляризации

Поэтому если тангенциальные компоненты векторов  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{E}_1$  падающей и отраженной волн направлены одинаково, то соответствующие проекции магнитных векторов имеют разные знаки. С учетом этого, граничные условия приобретают вид для параллельной поляризации:

$$\begin{cases} E_0 \cos \alpha + E_1 \cos \alpha = E_2 \cos \beta, \\ H_0 - H_1 = H_2, \end{cases} \quad (11.2)$$

и для перпендикулярной поляризации:

$$\begin{cases} E_0 + E_1 = E_2, \\ H_0 \cos \alpha - H_1 \cos \alpha = H_2 \cos \beta. \end{cases} \quad (11.3)$$

Кроме того, в каждой из волн напряженности электрического и магнитного полей связаны соотношениями  $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$ . С учетом этого, из граничных условий (11.2) и (11.3) можно получить выражения для амплитудных коэффициентов отражения и пропускания:

$$r_{\parallel} = \frac{E_{1\parallel}}{E_{0\parallel}} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}; \quad r_{\perp} = \frac{E_{1\perp}}{E_{0\perp}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad (11.4)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{2\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{2\sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}; \quad t_{\perp} = \frac{E_{2\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{2\sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Помимо амплитудных, представляют интерес энергетические коэффициенты отражения  $R$  и пропускания  $T$ , равные отношению потоков энергии соответствующих волн. Так как интенсивность световой волны пропорциональна квадрату напряженности электрического поля, для любой поляризации выполняется равенство  $R = |r|^2$ . Кроме того, справедливо соотношение  $R + T = 1$ , выражающее закон сохранения энергии при отсутствии поглощения на границе сред.

Таким образом,

$$R_{\parallel} = \left( \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \right)^2; \quad R_{\perp} = \left( \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2; \quad (11.5)$$

$$T_{\parallel} = 1 - R_{\parallel}; \quad T_{\perp} = 1 - R_{\perp}.$$

Совокупность формул (11.4), (11.5) и называется формулами Френеля. Особый интерес представляет предельный случай нормального падения света на границу сред ( $\alpha = \beta = 0$ ). При этом исчезает различие между параллельной и перпендикулярной поляризациями и

$$r_0 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \quad t_0 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}; \quad (11.6)$$

$$R_0 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2; \quad T_0 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Вводя относительный показатель преломления  $n_{12} = n_2/n_1$ , можем переписать соотношения (11.6) в виде

$$R_0 = \left( \frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2; \quad T_0 = \frac{4n_{12}}{(n_{12} + 1)^2}.$$

Из (11.6) находим, например, что при нормальном падении света из воздуха ( $n_1 = 1$ ) на стекло ( $n_2 = 1,5$ ) отражается 4 % энергии светового пучка, а проходит 96 %.

## 11.2. Анализ формул Френеля

Рассмотрим сначала энергетические характеристики. Из (11.5) видно, что при  $\alpha + \beta = \pi/2$  коэффициент отражения параллельной компоненты обращается в нуль

( $R_{\parallel} = 0$ ). Угол падения, при котором возникает этот эффект, называется *углом Брюстера*. Из закона Снеллиуса легко найти, что

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{бр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}, \quad (11.7)$$

где  $n_{12}$  — относительный показатель преломления. В то же время для перпендикулярной компоненты  $R_{\perp} \neq 0$ . Поэтому при падении неполяризованного света под углом Брюстера отраженная волна оказывается линейно поляризованной в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, а прошедшая — частично поляризованной с преобладанием параллельной компоненты (рис. 11.3, а) и степенью поляризации

$$\Delta = \frac{(n_{12}^2 - 1)^2}{2(n_{12}^2 + 1)^2 - (n_{12}^2 - 1)^2}$$

(см. пример 11.2). Для перехода воздух–стекло угол Брюстера близок к  $56^\circ$ . Как незримо видеть, геометрия Брюстера соответствует взаимно перпендикулярным направлениям отраженного и преломленного пучков. С микроскопической точки зрения на границе раздела возникает монослой излучающих диполей, ориентированных перпендикулярно преломленной волне (что является прямым следствием граничных условий Максвелла). Как будет показано ниже (см. формулу (13.1) и рис. 13.2), вдоль своей оси диполь не излучает. Поэтому при перпендикулярности преломленного и отраженного пучков коэффициент отражения соответствующей поляризации обращается в нуль.

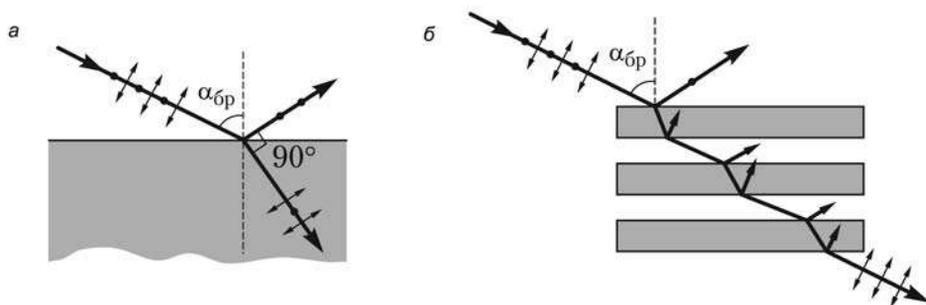


Рис. 11.3. Поляризация света при отражении под углом Брюстера (а) и стопа Столетова (б)

На практике получение линейно поляризованного света за счет отражения под углом Брюстера используется редко из-за низкого коэффициента отражения. Однако возможно построение поляризатора, работающего на пропускание, с использованием *стопы Столетова* (рис. 11.3, б). Стопа Столетова состоит из нескольких плоскопараллельных стеклянных пластинок. При прохождении через нее света под углом Брюстера перпендикулярная компонента практически полностью рассеивается на границах раздела, а прошедший луч оказывается поляризован в плоскости падения. Такие поляризаторы используются в мощных лазерных системах, в которых поляризаторы других типов могут быть разрушены лазерным излучением.

Другим применением эффекта Брюстера является снижение потерь на отражение в лазерах за счет установки оптических элементов под углом Брюстера к оптической оси резонатора.

Вторым важнейшим следствием формул Френеля является существование *полного внутреннего отражения* (ПВО) от оптически менее плотной среды при углах падения больших, чем предельный угол, определяемый из соотношения

$$\sin \alpha_{\text{ПВО}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}. \quad (11.8)$$

Подробно эффект полного внутреннего отражения будет рассмотрен в следующем разделе, сейчас лишь отметим: из формул (11.7) и (11.8) следует, что угол Брюстера всегда меньше предельного угла.

На графиках рис. 11.4, а приведены зависимости коэффициентов отражения при падении света из воздуха на границу со средами с разными показателями преломления:  $n_2' = 1,5$  (сплошные линии) и  $n_2'' = 2,5$  (штриховые линии). На рис. 11.4, б направление прохождения границы раздела обратное: из более плотной среды в воздух.

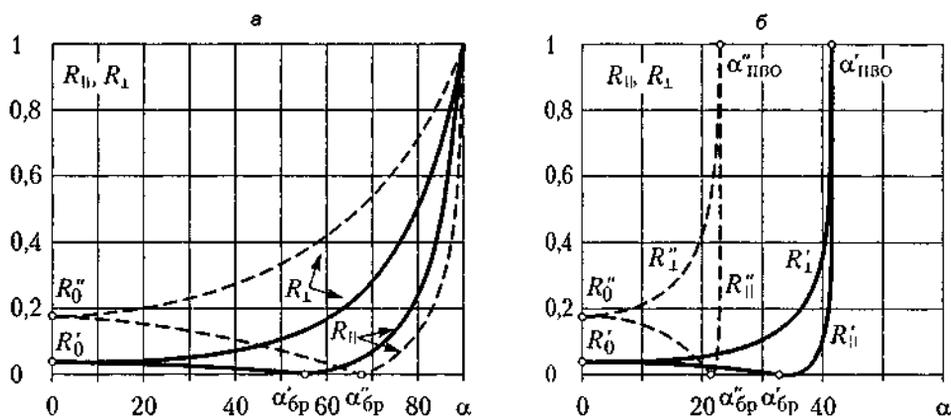


Рис. 11.4. Угловые зависимости коэффициентов отражения от более плотной (а) и менее плотной (б) сред

Видно, что для среды с меньшим показателем преломления  $n_2'$  начальный уровень отражения ниже, угловые зависимости «мягче», а угол Брюстера меньше, чем для  $n_2''$ . Кривая отражения для естественного света, представляющего собой суперпозицию параллельной и перпендикулярной компонент, идет посередине между зависимостями  $R_{\parallel}$  и  $R_{\perp}$ , что подтверждает известный факт: для стекла коэффициент отражения практически постоянен вплоть до углов падения в  $40^\circ$ .

Обратимся теперь к анализу амплитудных коэффициентов (11.4). Нетрудно увидеть, что при любых соотношениях между показателями преломления и при любых углах коэффициенты пропускания  $t$  положительны. Это означает, что преломленная волна всегда всегда софазна падающей.

Коэффициенты отражения  $r$ , напротив, могут быть отрицательны. Поскольку всякую отрицательную величину можно записать как  $r = |r| \cdot \exp(i\pi)$ , отрицательность соответствующего коэффициента можно интерпретировать как сдвиг фазы

на  $\pi$  при отражении. Об этом эффекте часто говорят как о *потере полволны* при отражении.

Из (11.4) следует, что при отражении от оптически более плотной среды ( $n_1 < n_2$ ,  $\alpha > \beta$ )  $r_{\perp} < 0$  при всех углах падения, а  $r_{\parallel} < 0$  при углах падения меньших угла Брюстера. При отражении от оптически менее плотной среды ( $n_1 > n_2$ ,  $\alpha < \beta$ ) отражение софазное за исключением случая падения света с параллельной поляризацией под углом большим угла Брюстера (но меньшим предельного угла). Очевидно, что при нормальном падении на оптически более плотную среду фаза отраженной волны всегда сдвинута на  $\pi$ .

Таким образом, естественно поляризованный свет при прохождении границы раздела двух сред превращается в частично поляризованный, а при отражении под углом Брюстера даже в линейно поляризованный. Линейно поляризованный свет при отражении и преломлении остается линейно поляризованным, но ориентация плоскости поляризации может измениться из-за различия коэффициентов отражения двух компонент.

### 11.3. Полное внутреннее отражение

При падении света на оптически менее плотную среду (например, переход стекло–воздух) угол преломления больше, чем угол падения (рис. 11.5). При угле падения, называемом *предельным углом* и определяемым формулой (11.8)

$$\sin \alpha_{\text{пво}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}, \quad \sin \beta = 1,$$

то есть  $\beta = 90^\circ$ .

Для границы стекло ( $n_1 = 1,5$ ) – воздух  $\alpha_{\text{пво}} \approx 42^\circ$ .

Если  $\alpha > \alpha_{\text{пво}}$ , то формально вычисленный синус угла преломления становится больше 1, что возможно только при комплексных углах. Разумеется, все реальные углы, образуемые световыми лучами с осями координат, остаются вещественными, но меняется физическая сущность происходящих процессов.

При  $\alpha > \alpha_{\text{пво}}$  для угла  $\beta$  имеем:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n_{12}} \gg 1, \quad \cos \beta = \pm \frac{i \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}{n_{12}}.$$

Следовательно, волновой вектор преломленной волны становится комплексным и поле во второй среде может быть записано как

$$E_2 = E_0 \exp\left[-\frac{z}{l}\right] \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{v_2}\right)\right], \quad (11.9)$$

где  $l = \frac{cn_{12}}{\omega} \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}$ ;  $v_2 = \frac{c}{n_1 \sin \alpha}$  – скорость перемещения волнового фронта во второй среде.

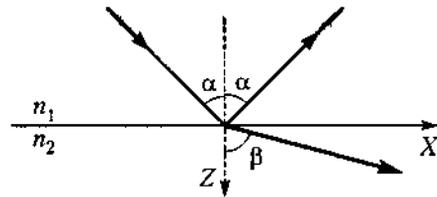


Рис. 11.5. К возникновению полного внутреннего отражения

Соотношение (11.9) означает, что электромагнитное поле во второй среде представляет собой *неоднородную волну*, распространяющуюся параллельно границе раздела, с амплитудой

$$A(z) = E_0 \exp\left[-\frac{z}{l}\right],$$

убывающей по мере удаления от границы. Величина  $l$ , по порядку близкая к длине волны, характеризует эффективную глубину проникновения поля во вторую среду. Таким образом, при полном внутреннем отражении электромагнитное поле во второй среде существует только в тонком приповерхностном слое.

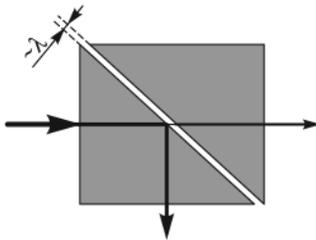


Рис. 11.6. Нарушенное полное внутреннее отражение

Прямым экспериментальным доказательством проникновения волн во вторую среду является эффект *нарушенного полного внутреннего отражения* (НПВО). Если две стеклянные призмы поместить близко друг от друга, как показано на рис. 11.6, то неоднородная преломленная волна попадает во вторую призму и часть светового пучка проходит не отражаясь. Изменяя толщину воздушного зазора, можно менять соотношение интенсивностей отраженной и прошедшей волн, то есть получить модулятор света. Слой воздуха между призмами играет роль потенциального барьера для световых квантов.

Если толщина этого барьера сравнима с длиной волны, то существенная доля световой энергии может проникнуть во вторую среду. Аналогом НПВО является туннельный эффект в квантовой механике. В последнем случае толщина барьера сравнивается с длиной волны де-Бройля для частиц микромира.

Используя формулы Френеля (11.4) и подставляя в них значения  $\sin \beta$  и  $\cos \beta$ , найдем амплитудные коэффициенты отражения при углах падения больших предельного:

$$r_{\parallel} = \frac{n_1^2 \cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}{n_1^2 \cos \alpha - i \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}, \quad r_{\perp} = \frac{\cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}{\cos \alpha - i \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}. \quad (11.10)$$

Коэффициенты отражения становятся комплексными. Причем для любой поляризации  $R = |r|^2 = 1$ . Таким образом, при полном внутреннем отражении вся световая энергия возвращается обратно в первую среду. Этот эффект находит многочисленные применения в оптических устройствах. Примеры призм ПВО: поворачивающей (а), оборачивающей (б), отражающей (в) показаны на рис. 11.7.

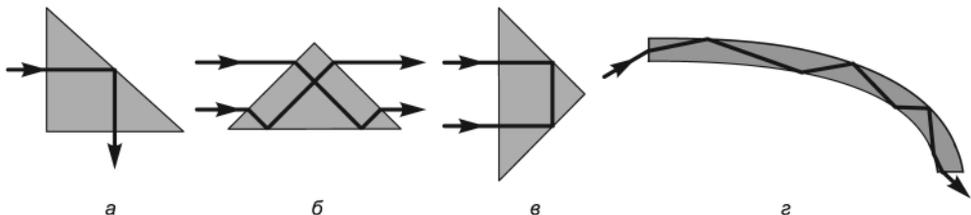


Рис. 11.7. Применения полного внутреннего отражения

Полное отражение используется также в оптических световодах, представляющих собой тонкое стеклянное волокно, по которому свет может распространяться на значительные расстояния (рис. 11.7, *г*) без заметного затухания. Световоды широко применяются в оптических линиях связи, медицине и других областях.

Всякое комплексное число можно записать в показательной форме:  $s = s_1 + is_2 = |s| \exp(i\delta)$ . Тот факт, что коэффициенты отражения (11.10) стали комплексными, означает наличие фазового сдвига между отраженной и падающей волнами. Этот сдвиг не одинаков для двух поляризаций, причем  $\delta_{\parallel} \geq \delta_{\perp}$ . Поэтому в отраженной волне появляется дополнительный фазовый сдвиг  $\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$  между параллельной и перпендикулярной компонентами электрического вектора, определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - n_{12}^2}}{\sin^2 \alpha}. \quad (11.11)$$

Фазовый сдвиг достигает максимума, равного

$$\left( \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)_{\max} = \frac{1 - n_{12}^2}{2n_{12}} \quad (11.12)$$

при угле падения

$$\sin^2 \alpha = \frac{2n_{12}^2}{1 + n_{12}^2}. \quad (11.13)$$

Из формул (11.11)–(11.13) вытекает, что после полного внутреннего отражения состояние поляризации света может измениться. Так, линейно поляризованный свет превращается в поляризованный по эллипсу. Этот эффект используется, в частности, для получения циркулярно поляризованного света. Однако получить необходимый для этого фазовый сдвиг  $\pi/2$  можно, как следует из (11.12), только если показатель преломления первой среды не меньше 2,41. В видимой области такой показатель преломления имеет только алмаз. Френелем было предложено использовать призму (*ромб Френеля*), в которой свет испытывает полное внутреннее отражение дважды (рис. 11.8).

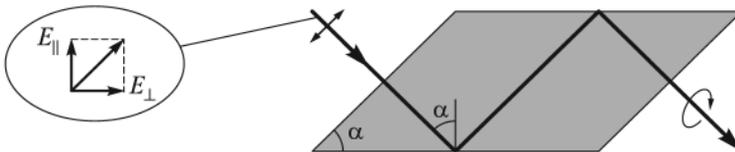


Рис. 11.8. Двойное полное внутреннее отражение в ромбе Френеля

Для стекла с  $n = 1,5$  фазовый сдвиг  $\pi/4$  достигается при углах падения  $48^\circ 37'$  и  $54^\circ 37'$ . Если угол при вершине ромба Френеля равен одному из этих углов, а плоскость поляризации падающего света образует угол  $45^\circ$  или  $135^\circ$  с плоскостью падения, то выходящий свет будет поляризован по правому или левому кругу.

## 11.4. Отражение света от поверхности металлов

Последовательная теория, описывающая распространение электромагнитных волн в проводниках, должна учитывать колебания свободных электронов, плотность которых в металлах весьма высока. Однако основные оптические свойства металлов и других проводящих сред могут быть описаны на основе классической электромагнитной теории.

Все отличие проводников и полупроводников от диэлектриков с точки зрения теории Максвелла заключается в ненулевой величине слагаемого, содержащего плотность тока проводимости в уравнении

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}.$$

Для квазимонохроматических волн операция дифференцирования по времени сводится к умножению на  $i\omega$ . С учетом закона Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , где  $\sigma$  — удельная проводимость среды, получаем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}. \quad (11.14)$$

Вводя комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega}, \quad (11.15)$$

уравнение (11.14) можно формально привести к такому же виду, что и для диэлектриков:  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \mathbf{E}$ .

Из (11.15) видно, что мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости обусловлена проводимостью среды.

Естественно, что комплексным становится и показатель преломления проводящей среды:  $\tilde{n} = n(1 - ik)$ . Мнимая часть показателя преломления описывает *поглощение света* (см. раздел 14.2), поэтому величина  $k$  называется *показателем затухания*.

Глубина проникновения поля в среду (расстояние, на котором интенсивность прошедшей волны падает в  $e$  раз), определяемая уравнением

$$E(z, t) = E_0 \exp[i(\omega t - \tilde{n}kz)] = E_0 \exp[-nkz] \cdot \exp[i(\omega t - nkz)],$$

равна  $\lambda/4\pi k$ . Для большинства металлов в видимой области ( $nk$ ) = 3 ... 5, то есть глубина проникновения составляет доли длины волны. *Даже очень тонкие металлические пленки непрозрачны для света.*

Приравняв вещественные и мнимые части соотношения  $\tilde{n}^2 = \tilde{\epsilon}$ , находим:

$$\left. \begin{aligned} n^2(1 - k^2) &= \epsilon \\ 2n^2 k &= \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \end{aligned} \right\}. \quad (11.16)$$

Отсюда следует, что для идеального проводника ( $\sigma \rightarrow \infty$ )  $n \rightarrow \infty$ ,  $k = 1$ .

Проанализируем теперь поведение волны, отраженной от поверхности металла. Воспользуемся формулами Френеля для нормального падения (11.6), заменив в них  $n$  на  $\tilde{n}$ :

$$R = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{(n-1)^2 + (nk)^2}{(n+1)^2 + (nk)^2} = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2 + (nk)^2}. \quad (11.17)$$

Отсюда видно, что при больших значениях  $n$  коэффициент отражения стремится к 1. Что поверхности металлов являются хорошими зеркалами, всем известно хотя бы на бытовом уровне. Таким образом, несмотря на то, что металлы обладают высоким коэффициентом поглощения, реального поглощения света практически не происходит — электромагнитное поле просто не проникает в проводник.

Для неидеального проводника с показателем преломления  $n \gg 1$  и показателем затухания  $k \approx 1$  из (11.17) с учетом второго уравнения (11.16) находим, что коэффициент отражения отличается от единицы на величину

$$1 - R \approx \frac{2}{n} = 2 \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{\sigma}}. \quad (11.18)$$

Это означает, что потери при отражении растут с ростом частоты, то есть с уменьшением длины волны. Кроме того, с ростом частоты проводимость среды падает. Поэтому металлические зеркала, прекрасно отражающие ИК-излучение, в видимой области отражают значительно хуже, а в УФ-диапазоне коэффициент отражения металлических зеркал не превышает 20–30%. Полупроводники, имеющие меньшую удельную проводимость  $\sigma$ , занимают промежуточное положение, отражая в видимой области больше, чем диэлектрики, но меньше, чем металлы. Единственным способом создания высокоотражающих (на уровне 99%) зеркал для видимой и УФ-областей является использование многослойных интерференционных покрытий.

Вследствие того, что показатель преломления металлов является величиной комплексной, комплексными становятся и амплитудные коэффициенты отражения при наклонном падении света. Так же как в случае полного внутреннего отражения (см. раздел 11.3), возникает дополнительная разность фаз между параллельной и перпендикулярной составляющими электрического вектора, то есть линейно поляризованный свет после отражения превращается в эллиптически поляризованный. Представив комплексный коэффициент отражения в виде  $n = r \exp(i\delta)$ , сравним угловые зависимости параметров

$$\Pi = \frac{\rho_{\perp}}{\rho_{\parallel}} \quad \text{и} \quad \Delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$$

для диэлектрика с  $n = 2$  (рис. 11.9, а) и проводника с  $n = 2$ ,  $k = 1$  (рис. 11.9, б).

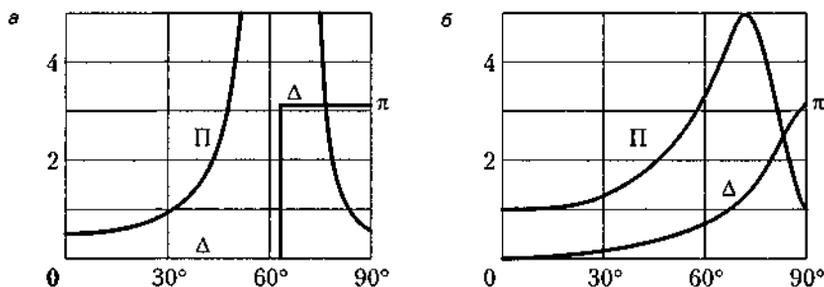


Рис. 11.9. Угловые зависимости амплитудных ( $\Pi$ ) и фазовых ( $\Delta$ ) характеристик при отражении света от диэлектрика (а) и проводника (б)

Как видно, у диэлектриков величина  $\Pi$  неограниченно возрастает в окрестности угла Брюстера ( $\rho_{\parallel} \rightarrow 0$ ), а  $\Delta$  претерпевает скачок ( $\rho_{\parallel}$  меняет знак). Напротив, у проводников отсутствует угол полной поляризации, хотя коэффициент отражения параллельной компоненты всегда больше, чем перпендикулярной. Угол, соответствующий максимуму  $\Pi$ , называют *псевдобрюстеровским*, имея в виду, что коэффициент отражения параллельной составляющей становится при этом угле минимальным (хотя не нулевым). Также нет резкого скачка фазы при угле Брюстера, которая изменяется от 0 до  $\pi$  плавным образом.

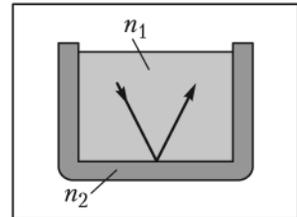
## Примеры решения задач

**Пример 11.1.** Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный сосуд ( $n_2 = 1,5$ ) и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом  $\alpha = 42^\circ 37'$ . Найдите показатель преломления  $n_1$  жидкости. Под каким углом должен падать луч, чтобы наступило полное внутреннее отражение?

*Решение*

Показатель преломления жидкости найдем из закона Брюстера (11.7):  $n_1 = n_2 / \operatorname{tg} \alpha_{\text{бр}} = 1,63$ .

Так как  $n_1 > n_2$ , полное внутреннее отражение возможно. Объединяя выражение для предельного угла ПВО  $\sin \alpha_{\text{ПВО}} = n_2 / n_1$  с законом Брюстера, получаем  $\sin \alpha_{\text{ПВО}} = \operatorname{tg} \alpha_{\text{бр}} = 0,92$ , откуда  $\alpha_{\text{ПВО}} = 66^\circ 55'$ .



**Пример 11.2.** Определить степень поляризации  $\Delta$  света, прошедшего из воздуха ( $n_1 = 1$ ) в стекло ( $n_2 = 1,52$ ) под углом Брюстера. Падающая волна неполяризована.

*Решение*

Пусть в падающей волне интенсивности параллельной и перпендикулярной составляющих равны  $I_0$ . В прошедшей волне интенсивность параллельной компоненты не изменится  $I_{\parallel} = I_0$ , а перпендикулярной уменьшится за счет отражения и станет равной  $I_{\perp} = I_0(1 - R_{\perp})$ .

В соответствии с формулами (10.6) и (11.5) степень поляризации прошедшей волны

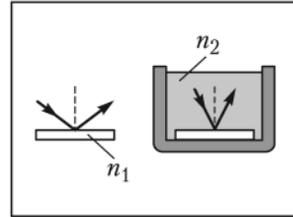
$$\Delta = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}\right)}{1 + \left(1 - \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}\right)}$$

Так как  $\alpha = \alpha_{\text{бр}}$ ,  $\alpha + \beta = \pi/2$ ,  $\sin^2(\alpha + \beta) = 1$ ,  $\sin^2(\alpha - \beta) = \cos^2(2\alpha)$ . Используя определение угла Брюстера (11.7) и выполняя тригонометрические преобразования, получаем

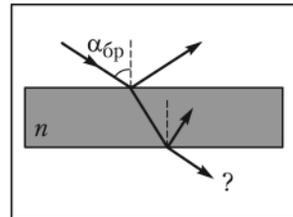
$$\Delta = \frac{(n_2^2 - 1)^2}{2(n_2^2 + 1)^2 - (n_2^2 - 1)^2} = 8,5 \%$$

## Задачи

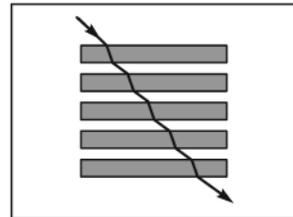
11.1. На стеклянную пластинку ( $n_1 = 1,73$ ) падает луч под углом полной поляризации. Насколько надо изменить угол падения, чтобы сохранить поляризацию отраженного луча, если пластинку поместить в сосуд с жидкостью ( $n_2 = 1,3$ ).



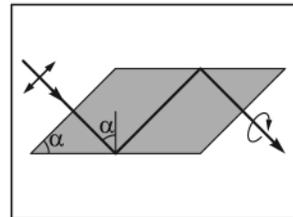
11.2. Найдите угол полной поляризации для света, отраженного от стекла ( $n = 1,483$ ). Найдите степень поляризации лучей, прошедших через пластинку. Лучи падают на пластинку под углом полной поляризации. Падающий свет — естественный. Поглощения в стекле нет.



11.3. Найдите степень поляризации  $\Delta$  света, прошедшего через стопу Столетова, состоящую из 5 стеклянных пластинок с показателем преломления  $n = 1,52$ . Падающий свет — естественный.



11.4. Каким должен быть показатель преломления стекла в ромбе Френеля с углом  $\alpha = 45^\circ$ , чтобы при прохождении через него линейно поляризованный свет превращался в циркулярно поляризованный?



11.5. Показатель преломления германия для длины волны  $\lambda_0 = 0,5$  мкм (в вакууме) равен  $\bar{n} = 3,47 + 1,40i$ . Рассчитайте коэффициент отражения от полированной поверхности германия при нормальном падении.

11.6. По данным предыдущей задачи найдите фазовый сдвиг отраженной от германия волны при нормальном падении.

## ГЛАВА 12    Распространение света в анизотропных средах

Поляризацию световых колебаний особенно важно учитывать при изучении анизотропных сред, например кристаллов. В них показатель преломления и скорость световой волны зависят от выбранного направления, а нормаль к волновому фронту и вектор потока энергии могут быть неколлинеарны. Причиной такого сложного описания является несовпадение по направлению векторов поляризации среды  $\mathbf{P}$  и напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  (см. раздел 14.2) и, как следствие, неколлинеарность векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  (рис. 12.1). Кристалл, в силу своей пространственной упорядоченности (гексагональной, тетрагональной, ромбоэдрической и т. п. решетки) не может реагировать на внешнее воздействие, как изотропная среда: в одних направлениях диполи поляризуются легче, в других — труднее.

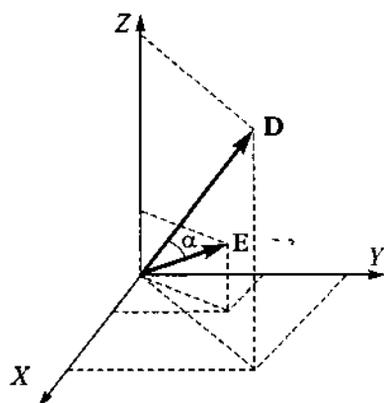


Рис. 12.1. Неколлинеарность векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$

### 12.1. Тензор диэлектрической проницаемости анизотропной среды

В отличие от изотропных диэлектриков, характеризующихся одним значением диэлектрической проницаемости ( $\epsilon$ ), в кристаллах *диэлектрическая проницаемость становится тензором второго ранга* и может быть представлена следующей матрицей:

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

компоненты которой определяют связь между проекциями векторов электрической индукции ( $\mathbf{D}$ ) и напряженности электрического поля ( $\mathbf{E}$ ):

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_0 (\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z), \\ D_y &= \varepsilon_0 (\varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z), \\ D_z &= \varepsilon_0 (\varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z). \end{aligned} \quad (12.1)$$

Значения компонент тензора зависят от выбора системы координат. Можно показать, что соответствующим поворотом осей тензор диэлектрической проницаемости может быть приведен к диагональному виду:

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Оси координат, в которых тензор диэлектрической проницаемости диагонален, называются *главными осями кристалла*. Диагональные значения  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  в этом случае называют *главными значениями* диэлектрической проницаемости, величины  $n_x = \sqrt{\varepsilon_x}$ ,  $n_y = \sqrt{\varepsilon_y}$ ,  $n_z = \sqrt{\varepsilon_z}$  — *главными показателями преломления*, а скорости  $v_x = c/n_x$  и т. д. — *главными скоростями*. Подчеркнем, что  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  не являются проекциями какого-либо вектора, а характеризуют анизотропию оптических свойств кристалла. Главная скорость — это скорость волны, поляризованной вдоль соответствующей главной оси. В дальнейшем будем всегда предполагать, что оси координат совпадают с главными осями, тогда соотношения (12.1) принимают вид

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z. \quad (12.2)$$

Если все три главных значения одинаковы:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ , кристалл с оптической точки зрения эквивалентен изотропному телу. Это свойственно кристаллам с кубической симметрией решетки, например NaCl, используемых для создания оптических элементов ИК-диапазона. Если совпадают два главных значения:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ , кристалл называется *одноосным*. К одноосным кристаллам относятся широко применяемые в оптике кварц и исландский шпат. Наконец, если все три главных значения различны:  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ , кристалл называется *двухосным*. К таким кристаллам относится, например, слюда.

## 12.2. Распространение монохроматической плоской волны в анизотропной среде

Рассмотрим геометрические соотношения между основными векторами в электромагнитной волне. Уравнения (1.22) остаются справедливыми и в анизотропных средах. Введем единичный вектор нормали к волновому фронту  $\mathbf{N} = \mathbf{k}/k = c\mathbf{k}/\omega$ , тогда (1.22) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} c\mathbf{D} &= -n[\mathbf{N} \times \mathbf{H}], \\ c\mu_0\mathbf{H} &= n[\mathbf{N} \times \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Направление переноса энергии в волне определяется вектором Пойнтинга  $\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ . Определим *лучевой вектор* как  $\mathbf{s} = \mathbf{S}/S$ . Из свойств векторного произведения следует, что

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{H}, \mathbf{D} \perp \mathbf{N}, \mathbf{N} \perp \mathbf{H}, \mathbf{s} \perp \mathbf{E}, \mathbf{s} \perp \mathbf{H}, \mathbf{E} \perp \mathbf{H}. \quad (12.4)$$

Поскольку векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в анизотропной среде неколлинеарны, приходим к выводу, что в волне существует две правые ортогональные тройки векторов  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{s})$  и  $(\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{N})$ , повернутые на угол  $\alpha$  относительно общего вектора  $\mathbf{H}$  (рис. 12.2). Таким образом, направление перемещения волнового фронта (вектор  $\mathbf{N}$ ) в кристаллах в общем случае не совпадает с направлением переноса энергии (вектор  $\mathbf{s}$ ). Соответственно различают *фазовую скорость*  $v$  (скорость перемещения фронта) и *лучевую скорость*  $u$  (*скорость переноса энергии*).

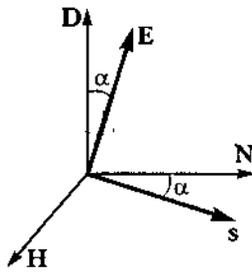


Рис. 12.2. Взаимное расположение векторов поля в анизотропной среде

Соотношение между фазовой и лучевой скоростями можно определить, рассматривая два положения волнового фронта, соответствующие близким моментам времени (рис. 12.3). Из-за анизотропии среды форма волновой поверхности отличается от сферической (более подробно этот вопрос рассматривается в следующем разделе). Направление фазовой скорости совпадает с направлением волновой нормали  $\mathbf{N}$ , а направление лучевой скорости — с лучевым вектором  $\mathbf{s}$ , проведенным от источника  $O$  в точку наблюдения. Из рисунка видно, что фазовая скорость равна проекции лучевой скорости на направление волновой нормали:

$$v = u \cos \alpha. \quad (12.5)$$

Различие фазовой и лучевой скоростей является проявлением анизотропии. Эти скорости отличаются даже для монохроматических волн, а также в отсутствие временной дисперсии, когда  $n \neq n(\lambda)$ .

Исключая из уравнений (12.3) напряженность магнитного поля и учитывая соотношения (12.2), можно получить выражение для скорости волны, распространяющейся в кристалле с главными скоростями  $v_x > v_y > v_z$  в направлении вектора  $\mathbf{N}$  с проекциями  $(N_x, N_y, N_z)$ , называемое *уравнением волновых нормалей Френеля*:

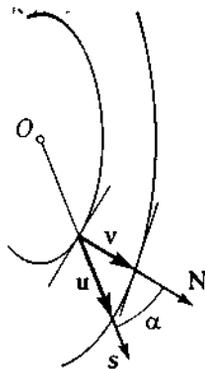


Рис. 12.3. Связь фазовой и лучевой скоростей

$$\frac{N_x^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{N_y^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{N_z^2}{v^2 - v_z^2} = 0. \quad (12.6)$$

Уравнение волновых нормалей может быть преобразовано к биквадратному уравнению относительно фазовой скорости  $v$  и, следовательно, вообще говоря, имеет два решения. Эти решения соответствуют волнам, распространяющимся в одном направлении, но имеющим разные полярizations. Можно показать, что эти полярizations ортогональны друг другу. Таким образом, *в каждом направлении в кристалле могут распространяться две волны с различными фазовыми скоростями  $v'$  и  $v''$  и ортогональными полярizationsми  $\mathbf{D}' \perp \mathbf{D}''$ .*

Каждому вектору  $\mathbf{D}$  соответствует свой вектор  $\mathbf{E}$ , повернутый на угол  $\alpha$ , а каждому вектору  $\mathbf{E}$  — ортогональный ему лучевой вектор  $\mathbf{s}$  (рис. 12.4)

Следовательно, попадая в кристалл, произвольная световая волна распадается на две ортогонально поляризованные волны с разными скоростями и разными направлениями переноса энергии — возникает *двойное лучепреломление*. Следует отметить, что в ряде случаев лучевые векторы этих волн могут совпадать ( $\alpha = 0$ ), например, при распространении волн вдоль любой из главных осей кристалла.

При определенном выборе направления распространения, а именно.

$$N_x^2 = \frac{v_x^2 - v_y^2}{v_x^2 - v_z^2}, \quad N_y^2 = 0, \quad N_z^2 = \frac{v_y^2 - v_z^2}{v_x^2 - v_z^2},$$

два решения уравнения Френеля совпадают, то есть  $v' = v''$ .

Такие направления ( $O'O'$  и  $O''O''$  на рис. 12.5) называются *оптическими осями кристалла*, а сам кристалл называется *двуосным*. Если  $v_x = v_y \neq v_z$ , то обе оптические оси сливаются с осью  $OZ$ . Такой кристалл называется *одноосным*.

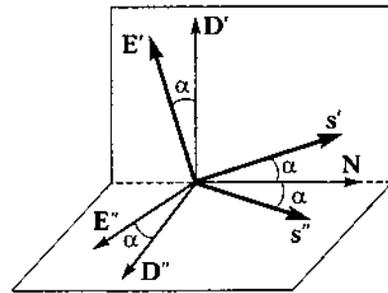


Рис. 12.4. Возникновение двойного лучепреломления

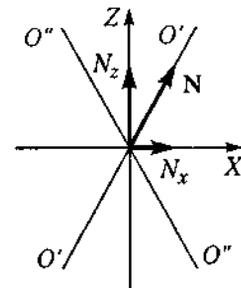


Рис. 12.5. Оптические оси

## 12.3. Двулучепреломление в одноосных кристаллах

Пространственное распределение показателя преломления анизотропной среды можно представить с помощью *эллипсоида волновых нормалей*, полуоси которого равны главным значениям показателя преломления (рис. 12.6).

Построим сечение этого эллипсоида плоскостью, перпендикулярной волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Это сечение представляет собой эллипс, направления осей которого определяют направления векторов  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{D}''$  двух распространяющихся в кристалле волн, а длины полуосей пропорциональны показателям преломления этих волн. Известно, что любой трехосный эллипсоид имеет два центральных круговых сечения. Направления, перпендикулярные этим сечениям, и есть направления оптических осей кристалла.

В одноосном кристалле эллипсоид нормалей превращается в эллипсоид вращения вокруг оси  $OZ$ , его единственное круговое сечение лежит в плоскости  $XOY$ .

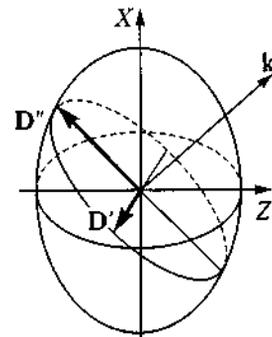


Рис. 12.6. Эллипсоид волновых нормалей

Для одноосных кристаллов принято обозначать главные показатели преломления  $n_z \equiv n_e$ ,  $n_x = n_y \equiv n_o$ <sup>1</sup>.

Если волновой вектор лежит в плоскости  $XOZ$ , то  $\mathbf{D}'$  совпадает с осью  $OY$ , длина полуоси постоянна и равна  $n_o$ . Такая волна называется *обыкновенной*, ее скорость не зависит от направления распространения. Длина второй полуоси эллипса меняется от  $n_o$  до  $n_e$ . Это — *необыкновенная* волна, ее скорость зависит от направления распространения. Плоскость, содержащая оптическую ось  $OZ$  и вектор  $\mathbf{k}$ , называется *главной плоскостью*. Таким образом, вектор поляризации необыкновенной волны лежит в главной плоскости, а вектор поляризации обыкновенной волны — перпендикулярен главной плоскости. Еще раз подчеркнем, что понятия «обыкновенная» и «необыкновенная» волна относятся только к одноосным кристаллам.

На рис. 12.7 представлены эллипсоиды нормалей для двух возможных случаев: *a* — скорость обыкновенного луча меньше скорости необыкновенного ( $n_o > n_e$ , *отрицательный кристалл*) и *б* — скорость обыкновенного луча больше скорости необыкновенного ( $n_o < n_e$ , *положительный кристалл*). В обоих случаях при последовательном изменении направления луча от  $\mathbf{k}_1$  до  $\mathbf{k}_5$  показатель преломления луча с  $Y$ -поляризацией  $n_o$  не изменяется. Показатель преломления необыкновенного луча в первом случае уменьшается от  $n_o$  до  $n_e$ , а во втором — возрастает. Серой заливкой выделены главные плоскости.

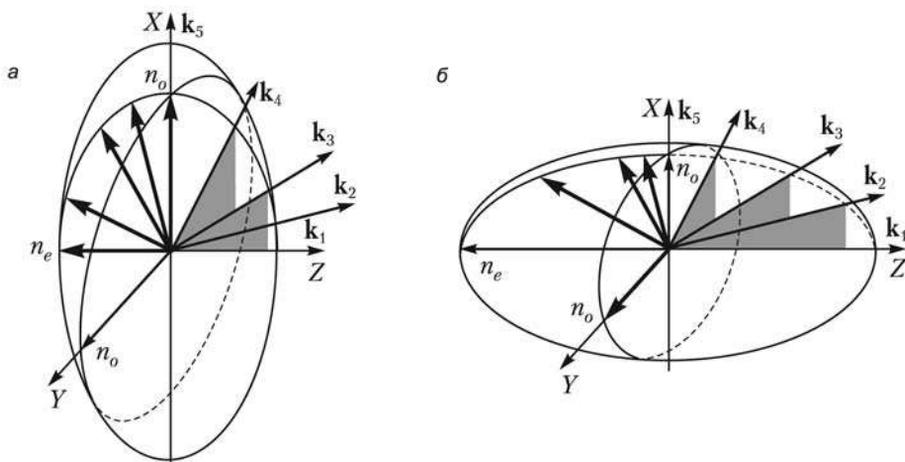


Рис. 12.7. Эллипсоиды нормалей отрицательного (а) и положительного (б) одноосных кристаллов

Найдем зависимость фазовой скорости световой волны в одноосном кристалле от направления распространения. Уравнение волновых нормалей (12.6) при  $v_x = v_y = v_o$ ,  $v_z = v_e$  можно переписать в виде

$$(v^2 - v_o^2) \left( (N_x^2 + N_y^2)(v^2 - v_o^2) + N_z^2(v^2 - v_e^2) \right) = 0. \quad (12.7)$$

<sup>1</sup> В индексах использованы латинские буквы *o* и *e*, соответствующие английским словам ordinary (обыкновенный) и extraordinary (необыкновенный).

Направление нормали удобно задавать углом  $\theta$ , образуемым с оптической осью. Тогда

$$N_x^2 + N_y^2 = \sin^2 \theta, N_z^2 = \cos^2 \theta$$

и решениями уравнения (12.7) являются

$$v'^2 = v_o^2, \quad (12.8)$$

$$v''^2 = v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta.$$

Анализ распространения света в кристаллах и его преломления на границах становится более наглядным при использовании *сечений волновых поверхностей* (рис. 12.8).

Из начала координат откладываются отрезки, длина которых пропорциональна фазовым скоростям  $v'$  и  $v''$  в данном направлении (обратно пропорциональна соответствующим показателям преломления).

Тем самым в плоскости рисунка изображаются «мгновенные» сечения волновых фронтов волн, испущенных точечным источником, помещенным в начало координат. Для обыкновенной волны они сферические, а для необыкновенной — представляют поверхности вращения, описываемые вторым уравнением (12.8).

Направление, в котором эти сечения совпадают (то есть обыкновенная и необыкновенная волны распространяются с одинаковой скоростью  $v_o$ ), и является оптической осью кристалла  $O'O'$ , в данном случае совпадающей с осью  $OZ$ .

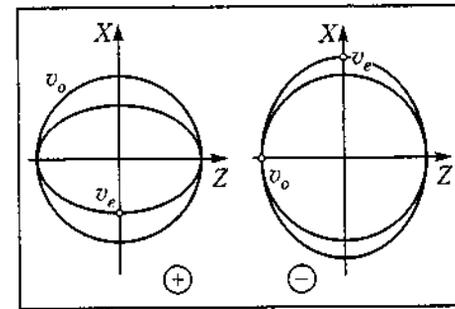
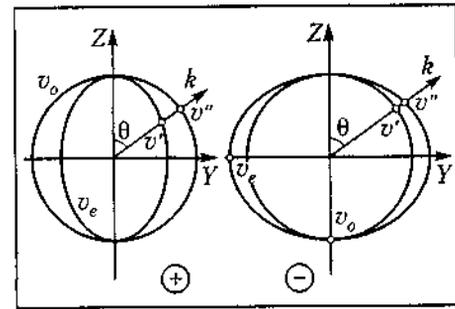
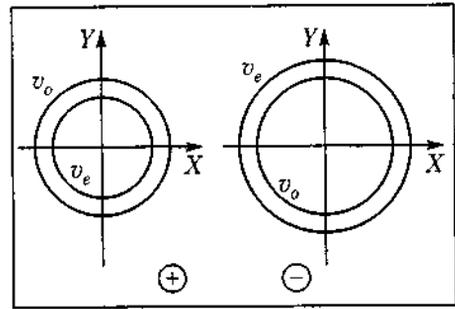


Рис. 12.8. Волновые поверхности обыкновенной и необыкновенной волн

## 12.4. Анализ хода лучей в кристаллах с помощью построений Гюйгенса

Качественно явление двулучепреломления на границах анизотропных сред было объяснено Гюйгенсом с помощью построений, фактически основанных на сечениях волновых поверхностей (рис. 12.9).

Эти построения для изотропной среды объясняют закон Снеллиуса (рис. 12.9, а), а для анизотропной — эффекты двулучепреломления. Каждая точка волнового фронта, достигшая границы раздела, становится источником вторичного возмущения, образуя две волновые поверхности — для обыкновенной и необыкновен-

ной волн. Результирующий волновой фронт строится как огибающая этих волновых поверхностей, а лучи (направления переноса энергии) проходят через точки касания огибающих. Отметим, что направления волновых векторов, перпендикулярных к фронтам, и в анизотропной среде подчиняются закону Снеллиуса, хотя и с разными показателями преломления для обыкновенной и необыкновенной волн. Направления лучей не могут быть определены через закон Снеллиуса, например, необыкновенный луч может не лежать в плоскости падения.

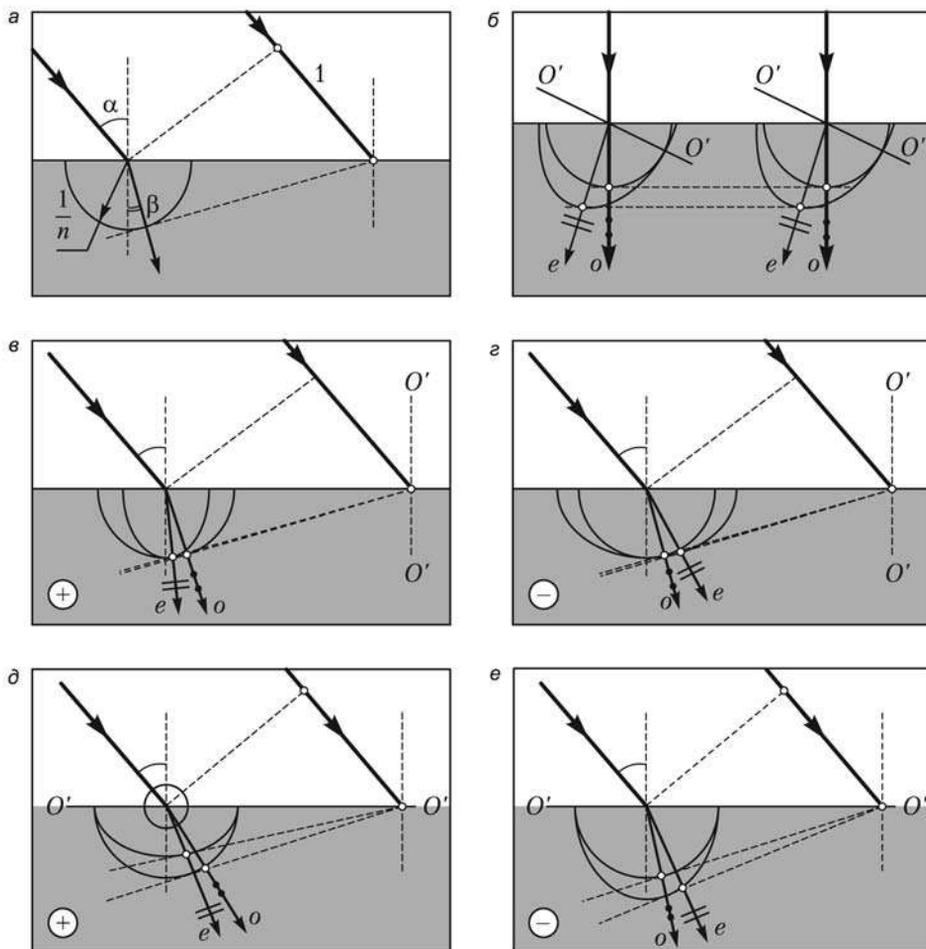


Рис. 12.9. Описание двулучепреломления с помощью построений Гюйгенса

Построения Гюйгенса для падения света на одноосный кристалл с различными ориентациями оптической оси показаны на рис. 12.9, б–е. Там же указаны направления колебаний для обыкновенного и необыкновенного лучей. Во всех представленных случаях плоскость рисунка является главной плоскостью.

На рис. 12.9, в, г оптическая ось  $O'O$  перпендикулярна поверхности для положительного и отрицательного кристаллов; на рис. 12.9, д, е — оптическая ось

лежит в плоскости падения параллельно поверхности. Рисунок 12.9, б иллюстрирует тот факт, что и при нормальном падении света в общем случае происходит отклонение необыкновенного луча. Отметим, что если обыкновенный луч всегда перпендикулярен волновому фронту, то необыкновенный луч может составлять с волновым фронтом угол, отличный от  $90^\circ$ .

Необыкновенный луч демонстрирует возможность несовпадения направления перемещения волнового фронта (*фазовой скорости*) и направления переноса энергии (*лучевой скорости*). Это и есть одна из отличительных особенностей распространения света в анизотропных средах.

## 12.5. Кристаллические поляризационные устройства

Двулучепреломляющие свойства кристаллов используют для получения поляризованного света из неполяризованного. Самый старый кристаллический поляризатор — *призма Николя* или просто *николь* (рис. 12.10) — был изобретен в 1828 г. Он состоит из двух кристаллов *исландского шпата* ( $\text{CaCO}_3$  — отрицательный кристалл с  $n_o = 1,65$  и  $n_e = 1,48$ ), склеенных слоем *канадского бальзама*<sup>1</sup> ( $n = 1,55$ ). Углы склейки подобраны таким образом, что обыкновенный луч претерпевает полное внутреннее отражение и поглощается нижней зачерненной гранью, а необыкновенный, поляризованный в главной плоскости, совпадающей с плоскостью падения, проходит через николь.

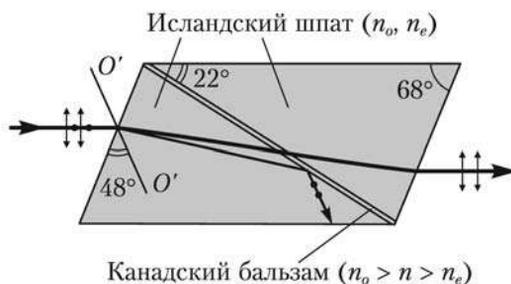


Рис. 12.10. Призма Николя

Таким образом, призма Николя естественный свет превращает в линейно поляризованный, интенсивность его уменьшается вдвое. Система двух николей, как и любых поляризаторов, может пропускать или гасить свет в зависимости от их взаимной ориентации (рис. 12.11).

Существует ряд модификаций *двулучевых поляризационных призм* (рис. 12.12). Как правило, они склеены из двух полупризм из кварца ( $n_o = 1,544$ ,  $n_e = 1,553$ , положительный кристалл) или исландского шпата ( $n_o = 1,65$ ,  $n_e = 1,48$ , отрицательный кристалл), вырезанных вдоль и поперек оптической оси. Эффект разделения поляризованных пучков достигается благодаря *различным условиям пре-*

<sup>1</sup> Канадский бальзам — высокоочищенная смола пихты, используемая в медицине и технике.

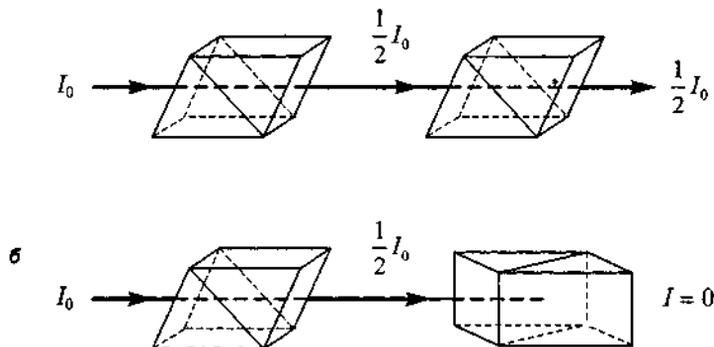


Рис. 12.11. Прохождение естественного света через систему двух николей

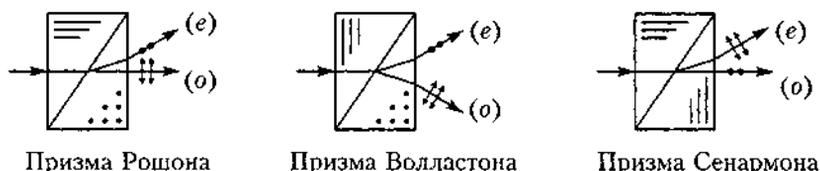


Рис. 12.12. Кристаллические поляризаторы из исландского шпата. Линиями или точками показаны направления оптических осей

ломления на склейке: в зависимости от ориентации оптической оси луч, являющийся обыкновенным в первой половине призмы, может стать необыкновенным во второй, и наоборот.

Если пропустить свет через кристаллическую пластинку в направлении, перпендикулярном оптической оси (рис. 12.13), то оба луча пойдут по одной траектории, но между ними возникнет разность фаз, зависящая от толщины кристаллической пластинки  $d$ :

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_e - n_o).$$

Если эта разность фаз равна  $\delta = (2m + 1)\pi/2$ , то пластинка называется *четвертьволновой* (оптическая разность хода обыкновенной и необыкновенной волн кратна  $\lambda/4$ ).

Четвертьволновая пластинка описывается матрицей Мюллера (см. раздел 10.3) типа

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

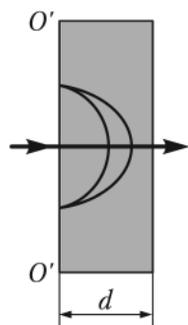


Рис. 12.13  
Фазовая пластинка из отрицательного кристалла. Оптическая ось вертикальна

в зависимости от ориентации оптической оси. В первом случае оптическая ось параллельна оси  $OX$ , во втором — повернута на  $45^\circ$ .

При прохождении через четвертьволновую пластинку линейно поляризованного света с плоскостью поляризации, повернутой на  $45^\circ$  относительно оптической оси, он превращается в свет с круговой поляризацией.

Кристаллическая пластинка, которая вносит разность фаз, равную  $\pi$ , называется *полуволновой*. Тип поляризации света при прохождении через такую пластинку не меняется, однако для круговой или эллиптической поляризации направление вращения меняется на противоположное, а для линейной плоскость поляризации поворачивается (см. следующий раздел).

Две клиновидные пластинки с перпендикулярными оптическими осями могут создавать варьируемую разность фаз

$$\begin{aligned}\delta &= (n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_e d_2) = \\ &= (n_e - n_o)(d_1 - d_2),\end{aligned}$$

регулировка которой производится взаимным перемещением клиньев (рис. 12.14). Устройства, вносящие фиксированную или переменную разность фаз между двумя ортогональными линейными поляризациями и тем самым изменяющие состояние поляризации прошедшего света, называют *компенсаторами*.

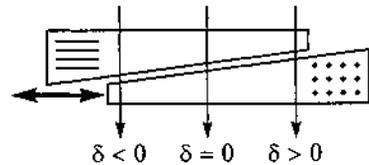


Рис. 12.14. Оптический компенсатор

## 12.6. Интерференция поляризованных лучей

Явления интерференции поляризованных лучей исследовались в классических опытах Френеля и Араго (1816 г.), доказавших поперечность световых колебаний (рис. 12.15). Суть их в зависимости результата интерференции от угла между плоскостями световых колебаний: полосы наиболее контрастны при параллельных плоскостях и исчезают, если волны поляризованы ортогонально. Прошедшее через поляризатор  $P$  излучение точечного источника  $S$  возбуждает вторичные волны в плоскости экрана с отверстиями  $S_1$  и  $S_2$ .

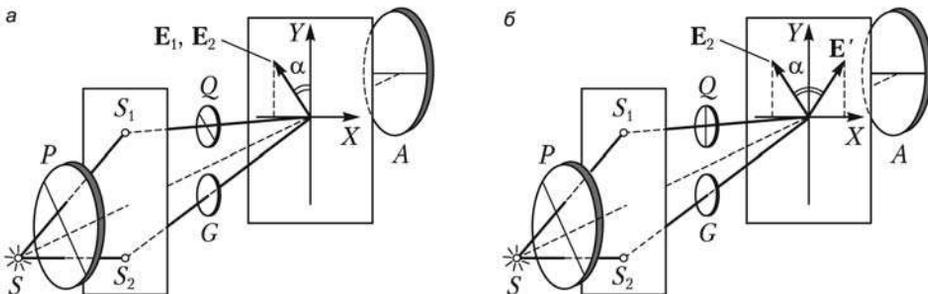


Рис. 12.15. Наблюдение интерференции поляризованных лучей при различной ориентации фазовой пластинки  $Q$

Полуволновая кристаллическая пластинка  $Q$  в сочетании с обычной стеклянной пластиной  $G$  позволяет изменять угол между плоскостями поляризации интерферирующих лучей. Если оптическая ось пластинки параллельна направле-

нию пропускания поляризатора  $P$ , обе волны  $E_1$  и  $E_2$  в плоскости наблюдения поляризованы одинаково (рис. 12.15, а). В этом случае на экране наблюдается четкая интерференционная картина. Поворот пластинки на угол  $\alpha$  приводит к повороту вектора  $E_1$  на угол  $2\alpha$  (вектор  $E'$  на рис. 12.15, б). В этом случае с увеличением угла  $\alpha$  видимость интерференционных полос падает, а при  $\alpha = \pi/4$  обращается в нуль (ортогонально поляризованные волны не интерферируют). Если наблюдать интерференционные полосы через анализатор, то при его повороте на  $\pi/2$  картина инвертируется, так как из-за дополнительной разности фаз  $\pi$  темные полосы становятся светлыми, и наоборот.

Вообще, при прохождении поляризованного света через кристалл разность хода  $\Delta$  между двумя компонентами поляризации зависит от толщины пластинки, среднего угла преломления и разности показателей  $n_o$  и  $n_e$ . Очевидно, возникающая при этом разность фаз  $\delta$  различна для разных длин волн, в результате чего интерференционная картина оказывается окрашенной. Для плоскопараллельных пластинок наблюдаются полосы равного наклона, а для тонких клиновидных пластинок — полосы равной толщины.

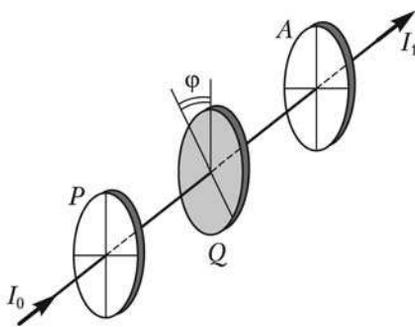


Рис. 12.16. Интерференция в параллельных лучах

Система «поляризатор–пластинка–анализатор» (рис. 12.16) используется для наблюдения так называемой *интерференции в параллельных лучах*. Формула (12.9) позволяет для любой фазовой пластинки, создающей разность фаз  $\delta$ , рассчитать интенсивность на выходе при скрещенных поляризаторе и анализаторе и заданной ориентации оптической оси пластинки (угол  $\varphi$ ).

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (12.9)$$

Более сложные *коноскопические картины* наблюдаются при *интерференции сходящихся поляризованных лучей*. Проявляющиеся за анализатором линии постоянной разности фаз называют в этом случае *изохроматами*. На рис. 12.17 показаны коноскопические картины, слева направо: одноосный кристалл, поляризаторы скрещены; одноосный кристалл, поляризаторы параллельны; двухосный кристалл, поляризаторы скрещены; кварцевая пластинка, поляризаторы скрещены; две развернутых кварцевых пластинки, поляризаторы скрещены. В двух последних случаях к двулучепреломлению добавляется поворот плоскости поляризации (см. следующий раздел).

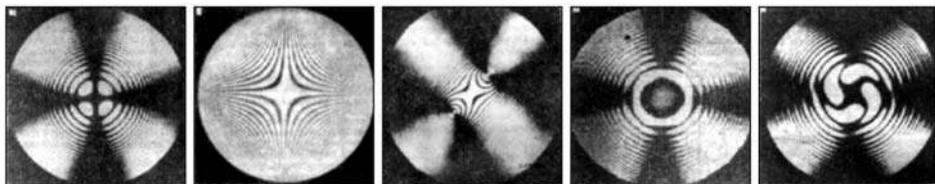


Рис. 12.17. Коноскопические картины

## 12.7. Гиротропия или естественная оптическая активность

Кроме эффекта двулучепреломления пространственная дисперсия в анизотропных средах может проявляться в виде *вращения плоскости поляризации* или *оптической активности* (*гиротропии*). В этом случае по мере прохождения среды *вдоль ее оптической оси* плоскость колебаний линейно поляризованного света поворачивается на некоторый угол  $\varphi$ . В отличие от двулучепреломления вращение плоскости поляризации объясняется *различной скоростью* распространения в гиротропной среде *право- и левоциркулярного света*. Действительно, линейное колебание можно представить как векторную сумму двух противоположных по направлению вращений частоты  $\omega_0$  (рис. 12.18). В случае если скорости этих волн неравны, плоскость поляризации света, прошедшего через оптически активную среду толщиной  $d$ , повернется на угол

$$\varphi = \frac{\pi d(n_+ - n_-)}{\lambda}. \quad (12.10)$$

Оптической активностью могут обладать не только анизотропные среды типа кристаллов, но и жидкости, содержащие молекулы, структура которых не имеет центров и плоскостей симметрии. К ним относятся практически все биологически активные вещества: белки, сахара, аминокислоты, молекулы которых имеют спиралевидную форму. Угол поворота плоскости поляризации в растворах пропорционален концентрации оптически активного вещества. На этом основан принцип действия сахариметра, в котором по повороту плоскости поляризации определяется концентрация глюкозы.

Все оптически активные вещества могут существовать в двух модификациях: право- и левовращающей, структуры которых представляют зеркальное отображение друг друга. Такие модификации называются *стереоизомерами*. При химическом синтезе, например, глюкозы, правые и левые изомеры образуются в одинаковых количествах, и раствор такого сахара не обладает оптической активностью. Но глюкоза, полученная в организмах биологическим путем, всегда только левовращающая.

Демонстрация оптической активности и стереоизомерии в микроволновом диапазоне реализуется при пропускании поляризованных электромагнитных колебаний через объем, хаотично заполненный металлическими пружинами с одинаковым направлением закручивания (рис. 12.19). Характерно, что при заполнении объема в равных количествах левыми и правыми спиралями поворот не наблюдается.

В 1811 г. Араго открыл оптическую активность в пластинах кварца, а несколько позже Френель, скомбинировав три призмы из правовращающего ( $R$ ) и левовращающего ( $L$ ) кварца (рис. 12.20), доказал существование в нем волн обеих циркулярных поляризаций. Преломление на плоскостях склейки призм для этих

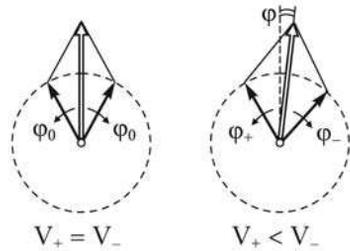


Рис. 12.18. Представление линейно поляризованного света в виде суперпозиции круговых компонент

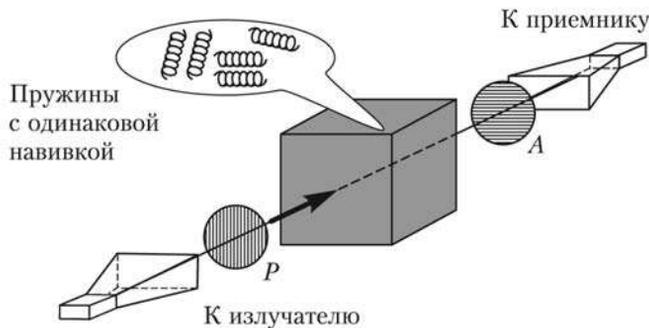


Рис. 12.19. Демонстрация оптической активности и стереоизомерии в микроволновом диапазоне

поляризаций различно: в правом кварце  $n_+ < n_-$ , а в левом — наоборот. Поэтому на каждой грани возникает угловое расхождение двух лучей, которое на выходе из составного параллелепипеда достигает 4 угловых минут.

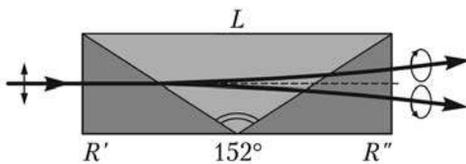


Рис. 12.20. Призма Френеля

Матрица Мюллера оптически активной среды содержит четыре ненулевые центральные компоненты:

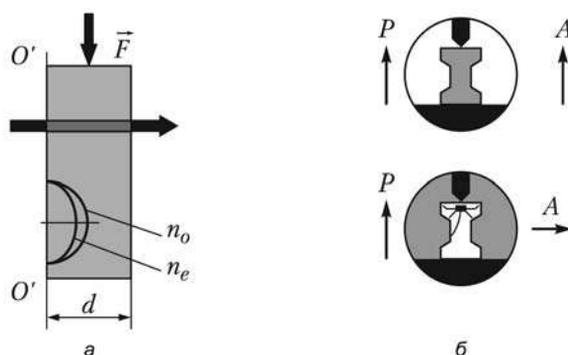
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, будучи умножена на вектор Стокса линейно поляризованного света, действительно приводит к его повороту на угол  $\varphi$ . Очевидно, прохождение света через оптически активную среду отображается на сфере Пуанкаре дугой экватора (для входной линейной поляризации) или параллели (для входной эллиптической поляризации). «Широта места» или параметр эллиптичности при этом не изменяется. Отметим, что при повторном прохождении гиротропной среды в обратном направлении (например, после отражения) поворот плоскости поляризации будет скомпенсирован.

## 12.8. Параметрическая кристаллооптика

Изотропное тело, подвергнутое упругим деформациям, может стать анизотропным и изменить состояние поляризации проходящего света. Это явление, открытое в 1818 г. Брюстером, получило название *фотоупругости* или *пьезооптического эффекта* (рис. 12.21). При одностороннем растяжении или сжатии тело становится подобным одноосному кристаллу с оптической осью, параллельной направлению приложенной силы. Возникающая при этом разность фаз пропорциональна величине механических напряжений  $\sigma$ :

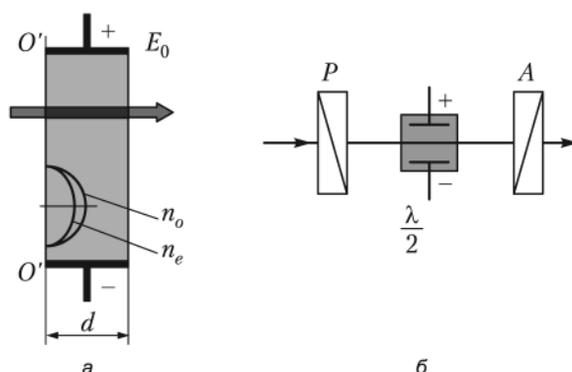
$$\delta \sim \frac{\sigma d}{\lambda}.$$



**Рис. 12.21.** Фотоупругость: возникновение наведенной оптической оси (а) и вид фотоупругой модели в параллельных и скрещенных поляризаторах (б)

Помещая прозрачные фотоупругие модели между поляризатором и анализатором и подвергая их различным нагрузкам, можно изучать распределения возникающих внутренних напряжений.

В 1875 г. был открыт *электрооптический эффект Керра*, заключающийся в возникновении в изотропном теле одноосной анизотропии при наложении постоянного электрического поля (рис. 12.22). Оптическая ось соответствует направлению напряженности приложенного поля, а величина двулучепреломления пропорциональна квадрату напряженности  $n_e - n_o = KE^2$ . На основе *ячеек Керра* построены практически безынерционные затворы и модуляторы света со временем срабатывания до  $10^{-12}$  с. Объясняется эффект Керра анизотропией молекул, описываемой тензором поляризуемости. При наложении внешнего поля молекулы ориентируются вдоль поля осями наибольшей поляризуемости, что и приводит к различным условиям для распространения света ортогональных поляризацій.



**Рис. 12.22.** Электрооптический эффект: возникновение наведенной оптической оси (а) и схема электрооптического затвора (б)

Большим значением постоянной Керра обладает нитробензол, который часто используется в электрооптических устройствах. Так, для конденсатора длиной 5 см

и расстоянием между пластинами 1 мм при напряжении 1500 В разность фаз достигает  $\pi/2$ , то есть ячейка Керра работает как четвертьволновая пластинка. В двупреломляющих кристаллах без центра симметрии наблюдается другой вариант электрооптического эффекта – эффект Поггеля, при котором разность показателей преломления  $\Delta n$  линейно зависит от напряженности электрического поля.

Первым историческим доказательством связи между оптикой и электромагнетизмом стал открытый в 1846 г. Фарадеем эффект магнитооптического вращения (рис. 12.23, а). При помещении оптически неактивного вещества, например обыкновенного стекла, в продольное магнитное поле плоскость поляризации поворачивается на угол  $\varphi = V B d$ , где  $V$  – постоянная Верде, зависящая от свойств вещества и длины волны. Эффект Фарадея обусловлен тем, что для заряженных частиц одного знака в магнитном поле имеется определенное направление вращения под действием силы Лоренца, поэтому условия распространения для право- и левоциркулярных волн оказываются различными. В отличие от естественной оптической активности, при эффекте Фарадея реверсирование направления луча приводит к удвоению угла поворота  $\varphi$ , что позволяет конструировать *оптические вентиля* (рис. 12.23, б).

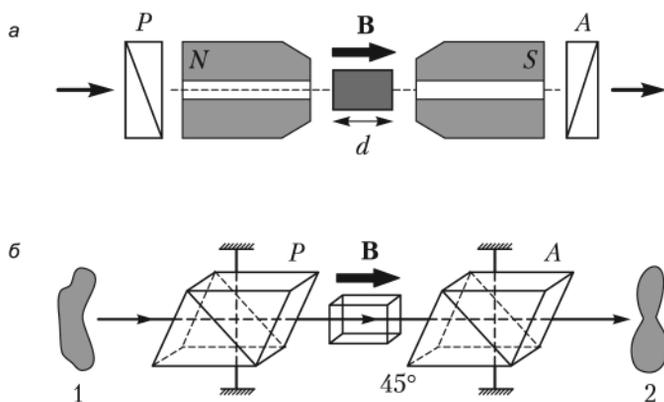


Рис. 12.23. Эффект Фарадея (а) и оптический вентиль (б)

В оптическом вентиле ячейка Фарадея поворачивает плоскость поляризации на  $45^\circ$ . Эта ячейка помещена между поляризатором и анализатором, плоскости пропускания которых развернуты тоже на  $45^\circ$ . При этом плоскость поляризации света, идущего от объекта 1, совпадает с направлением пропускания анализатора А, и свет полностью проходит к объекту 2. Для света, идущего в обратном направлении, вращение плоскости поляризации происходит в ту же сторону по отношению к вектору  $\mathbf{B}$ , поэтому после ячейки плоскость поляризации света перпендикулярна направлению пропускания поляризатора Р, и свет не попадает на объект 1.

Одностороннее пропускание оптического вентиля приводит к так называемому *парадоксу Вина*. Если тела 1 и 2 первоначально имели одинаковую температуру  $T_0$ , то из-за попадания части теплового излучения на тело 2 через некоторое

время возникнет разность температур:  $T_1 < T_2$ . Таким образом, как бы нарушается второе начало термодинамики и становится возможным вечный двигатель второго рода. Предлагается самостоятельно ответить на вопросы: а) возникнет ли разность температур и б) если возникнет, будет ли это достаточно для работы вечного двигателя?

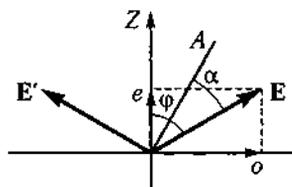
В заключение раздела, посвященного поляризации света, кратко перечислим некоторые оптические явления, оставшиеся за рамками рассмотрения. Если различные поляризационные компоненты по-разному поглощаются в среде, то говорят о *дихроизме* (соответственно, линейном или циркулярном). Существует также поперечное магнитооптическое вращение (*эффект Фогта*). Наконец, различные состояния поляризации наблюдаются при расщеплении атомарных спектральных линий в магнитном (*эффект Зеемана*) или электрическом (*эффект Штарка*) поле.

## Примеры решения задач

**Пример 12.1.** Пучок света проходит через два николя, главные плоскости которых составляют угол  $\alpha = 20^\circ$ . Между николями ставится полуволновая пластинка. Какой угол должна составлять оптическая ось пластинки с главной плоскостью первого николя, чтобы свет через эту систему не прошел?

*Решение*

После первого николя световой пучок будет линейно поляризован с вектором поляризации  $\mathbf{E}$ . Попав в пластинку, этот пучок распадется на два: необыкновенный  $e$ , поляризованный вдоль оптической оси  $Z$ , и обыкновенный  $o$ , с поляризацией, перпендикулярной  $Z$ .

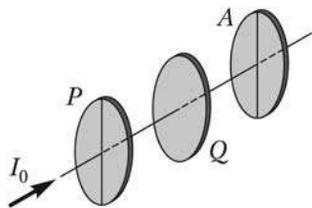


Полуволновая пластинка внесет разность фаз  $\pi$  между обыкновенной и необыкновенной компонентами, благодаря чему они сложатся в вектор  $\mathbf{E}'$ . Очевидно, в результате плоскость поляризации повернется на угол  $2\phi$ , где  $\phi$  — искомый угол между направлением пропускания первого николя и оптической осью пластинки. Чтобы свет через систему не прошел, направление вектора  $\mathbf{E}'$  должно быть перпендикулярно направлению пропускания анализатора  $A$ . Из рисунка следует, что  $2\phi - \alpha = \pi/2$ , следовательно,  $\phi = 55^\circ$ .

**Пример 12.2.** Кварцевая пластинка  $Q$ , вырезанная перпендикулярно оптической оси и помещенная между поляризатором  $P$  и анализатором  $A$  с параллельными главными плоскостями, полностью затемняет поле зрения. Минимальная толщина пластинки  $d = 4,20$  мм. Найдите постоянную вращения кварца  $\alpha$ .

*Решение*

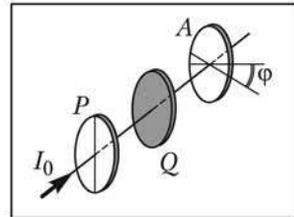
Изложенное в условии задачи означает, что в кварцевой пластинке произошел поворот плоскости поляризации луча на угол  $\phi = \pi/2$  (так как толщина пла-



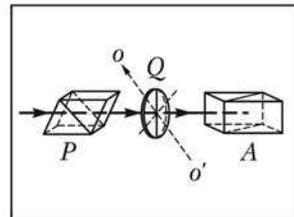
стинки, при которой происходит затемнение, минимальна). Угол поворота определяется как  $\varphi = \alpha d$ , откуда  $\alpha = 21,4$  град/мм.

## Задачи

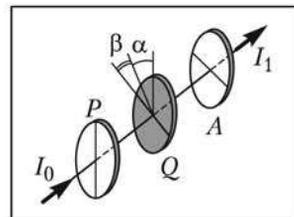
**12.1.** Между скрещенными поляроидами  $P$  и  $A$  поместили пластину кварца  $Q$ , вырезанную поперек оптической оси. Чтобы погасить свет с  $\lambda = 0,5$  мкм, пришлось повернуть анализатор на угол  $\varphi = 22^\circ$ . Найдите толщину пластинки, если постоянная вращения кварца для этой длины волны  $\alpha = 29,7^\circ/\text{мм}$ .



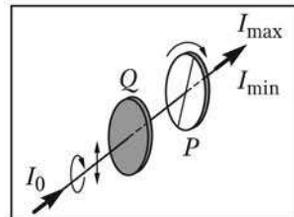
**12.2.** Между скрещенными николями  $P$  и  $A$  помещена кристаллическая пластинка  $Q$ , вырезанная параллельно оптической оси так, что ее ось составляет угол  $45^\circ$  с главными плоскостями николей. Рассчитайте минимальную толщину пластинки, при которой линия с  $\lambda_1 = 660$  нм будет максимально ослаблена, а линия с  $\lambda_2 = 410$  нм максимально усилена, если разность показателей преломления  $n_e - n_o = 0,01$ .



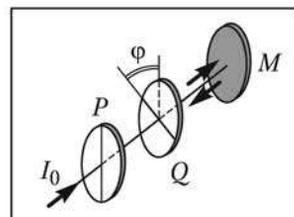
**12.3.** Естественный свет проходит через систему из двух поляризаторов  $P$  и  $A$ , между которыми помещена кристаллическая пластинка в полволны  $Q$ . Главные плоскости поляризаторов составляют с главной плоскостью пластинки углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Определите отношение интенсивностей света на выходе и входе в эту систему. Рассчитайте при  $\alpha = 50^\circ$  и  $\beta = 20^\circ$ .



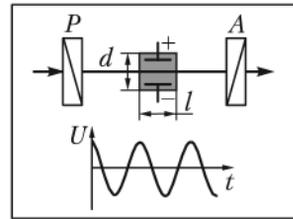
**12.4.** Частично поляризованный свет с компонентами, поляризованной по кругу ( $I_k$ ) и естественной ( $I_e$ ), проходит через четвертьволновую пластинку  $Q$  и анализатор (призму Николя)  $P$ . При вращении последнего найдено, что  $(I_{\max}/I_{\min}) = 3$ . Найдите отношение  $I_k/I_e$ .



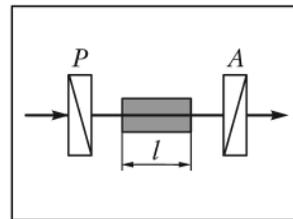
**12.5.** Естественный свет интенсивностью  $I_0$  проходит через систему, состоящую из поляризатора  $P$  и четвертьволновой пластинки  $Q$ . Затем свет отражается от зеркала  $M$  и проходит через пластинку и поляризатор в обратном направлении. Определите интенсивность на выходе этой системы как функцию угла  $\varphi$  между плоскостью пропускания поляризатора и главной плоскостью пластинки. Чему равны максимальная и минимальная интенсивности?



**12.6.** На ячейку Керра, помещенную между скрещенными поляризаторами, подается переменное напряжение  $U = U_0 \cos(\Omega t)$ . Постройте график интенсивности прошедшего через систему света с длиной волны  $\lambda = 500$  нм, если  $U_0 = 3,3$  кВ, расстояние между пластинами конденсатора  $d = 1$  мм, длина конденсатора  $l = 10$  см. Постоянная Керра равна  $10^{-18}$  м<sup>2</sup>В<sup>-2</sup>. Ориентация поляризатора  $P$  перпендикулярна пластинам конденсатора.

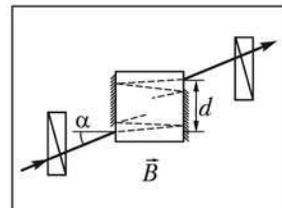


**12.7.** Решите предыдущую задачу для параллельной ориентации поляризатора и анализатора и угла  $45^\circ$  между направлением пропускания поляризатора и плоскостью пластин конденсатора.

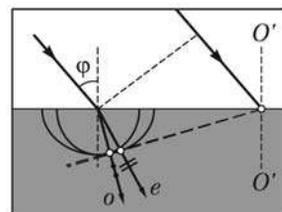


**12.8.** Какую минимальную разность показателей преломления волн натриевой лампы ( $\lambda = 589$  нм) с правой и левой круговой поляризацией можно измерить, поместив оптически активную среду длиной  $l = 10$  см между скрещенными поляризаторами? Чувствительность системы позволяет заметить поворот плоскости поляризации на  $1^\circ$ .

**12.9.** Ячейка Фарадея с посеребренными гранями, изготовленная из стекла с  $n = 1,7$ , помещена между параллельными поляризаторами. Свет падает на ячейку под углом  $\alpha = 10^\circ$ , расстояние между точками входа и выхода луча  $d = 10$  см. При какой индукции магнитного поля свет перестанет проходить через систему, если постоянная Верде  $V = 12^\circ \text{ см}^{-1} \text{ Тл}^{-1}$ ?



**12.10.** На сколько процентов отличаются фазовые скорости обыкновенной и необыкновенной волн в исландском шпате ( $n_o = 1,65$ ,  $n_e = 1,48$ ) при падении света под углом  $\varphi = 45^\circ$ ? Оптическая ось  $O'O'$  перпендикулярна поверхности кристалла.



# ГЛАВА 13 Классическая теория излучения и поглощения

По классической электромагнитной теории простейшей системой, которая может излучать электромагнитные волны, является электрический диполь, дипольный момент которого  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  не постоянен во времени. На практике изменение дипольного момента может быть вызвано как изменением заряда  $q$ , что характерно для антенн радиодиапазона, так и изменением эффективного размера диполя  $d$  в классической модели атома. Процесс может развиваться в две стороны: исходно возбужденный диполь может генерировать электромагнитную волну (излучение света), или диполь в невозбужденном состоянии способен резонансно поглощать внешнюю энергию высокочастотных электромагнитных волн (поглощение света).

## 13.1. Естественная ширина спектральной линии

Из уравнений Максвелла следует, что амплитуды электрического и магнитного полей волны оказываются пропорциональными второй производной дипольного момента по времени. В точке, отстоящей от колеблющегося диполя на расстоянии  $r \gg \lambda$  (так называемая дальняя, или волновая зона), поле определяется выражением

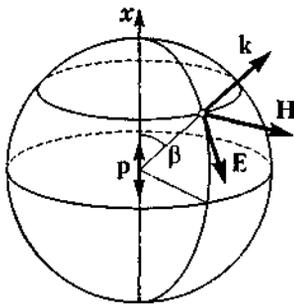


Рис. 13.1. Излучение диполя

$$E(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{\partial^2 p \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^2} \sin\beta, \quad (13.1)$$

где  $\beta$  — угол между осью диполя и направлением на точку наблюдения (рис. 13.1). При этом направление колебаний электрического вектора лежит в меридиональной плоскости, а магнитного — в широтной.

Отметим ряд важных следствий, вытекающих из формулы (13.1). Во-первых, при гармоническом из-

менении дипольного момента  $p = p_0 \cos(\omega_0 t)$  амплитуды полей оказываются пропорциональными квадрату частоты  $\omega_0^2$ , а интенсивность излучения – четвертой степени частоты:  $I \sim \omega_0^4$ .

Во-вторых, имеется зависимость интенсивности излучения от направления:  $I = I_0 \sin^2 \beta$ , что иллюстрирует рис. 13.2. Максимальная интенсивность наблюдается в экваториальной плоскости при  $\beta = \pi/2$ , а вдоль своей оси диполь не излучает. Эти зависимости играют важную роль в теории рассеяния света, обсуждаемой ниже.

В-третьих, волновой фронт, то есть поверхность постоянной фазы, представляет собой сферу. Таким образом, *точечный источник* (точнее источник, размеры которого малы по сравнению с длиной волны) *всегда излучает сферические волны*. Плоская волна, характеризующаяся определенным направлением распространения, является математической абстракцией, приближением, применимым при очень больших радиусах волнового фронта.

Поскольку колеблющийся диполь теряет энергию на излучение, его колебания затухают. Уравнение затухающих колебаний хорошо известно, оно имеет вид:

$$p'' + \gamma p' + \omega_0^2 p = 0, \quad (13.2)$$

где  $\gamma$  – так называемый коэффициент радиационного трения, учитывающий потери на излучение. Решая уравнение (13.2) при условии  $\omega_0 \gg \gamma$ , с учетом (13.1) для излучаемой волны находим:

$$E(t) = E_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right) \cos(\omega_0 t). \quad (13.3)$$

Изменение амплитуды со временем приводит к нарушению монохроматичности волны и появлению новых частот в ее спектре  $F(\omega)$ . По теореме Фурье, ограничиваясь положительными частотами  $\omega_0$ :

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} E(t) \exp(-i\omega t) dt = \frac{1}{2} E_0 \frac{\gamma/2 + i(\omega - \omega_0)}{(\gamma/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (13.4)$$

Перейдя от напряженности поля к интенсивности, получим:

$$I(\omega) = |F(\omega)|^2 = I_0 \frac{(\gamma/2)^2}{(\gamma/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (13.5)$$

В этом случае распределение энергии по частотам  $I(\omega)$  соответствует *лоренцевскому контуру* (рис. 13.3), ширина которого на половине высоты определяется коэффициентом затухания  $\gamma$ . Эта величина называется *естественной шириной* спектральной линии.

$$\Delta\omega_{\text{ест}} = \gamma. \quad (13.6)$$

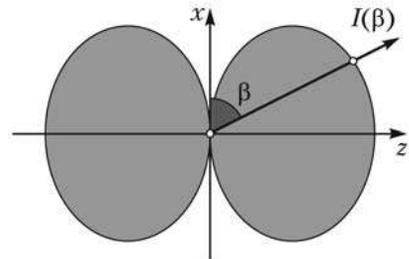


Рис. 13.2. Пространственное распределение интенсивности

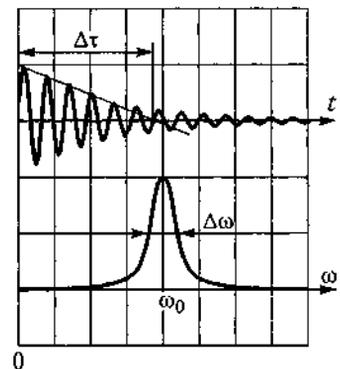


Рис. 13.3. Затухающие колебания и их лоренцевский спектр

В соответствии с классической теорией коэффициент затухания зависит только от частоты излучения и равен:

$$\gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot 3mc^3}.$$

Для излучателя оптического диапазона ( $\lambda = 0,6$  мкм,  $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>) естественная ширина линии имеет порядок  $10^8$  с<sup>-1</sup>, а добротность атомного осциллятора  $Q = (\omega_0/\gamma) \sim 10^7$ . Атомарный осциллятор с такой естественной шириной является высокодобротной системой, превосходящей по значению  $Q$  любые устройства радиодиапазона. Излучение спектральной линии можно считать квазимонохроматическим, поскольку отношение  $\Delta\lambda/\lambda$  не превосходит  $10^{-7}$ .

Переменные самой функции и ее спектра (в данном случае — время и частота) являются сопряженными, поэтому для произведения времени затухания  $\tau$  и ширины спектра  $\Delta\omega$  выполняется универсальное ограничение:  $\tau \cdot \Delta\omega \approx 2\pi$ . Таким образом, амплитуда колебаний уменьшается вдвое за несколько миллионов периодов. Можно считать, что излучение отдельного атома представляет собой волновой пучок конечной длительности  $\tau \sim 10^{-8}$  с и протяженностью  $l = c \cdot \tau \sim 3$  м. Последняя оценка соответствует длине когерентности в условиях генерации излучения одной спектральной линии естественной ширины и свободного затухания атомного осциллятора.

Современная квантовая теория позволяет значительно более строго и точно рассчитать спектральные характеристики излучаемого атомом света, однако основные качественные результаты совпадают с классическими: линия имеет лоренцевскую форму с типичной естественной шириной  $\Delta\omega_{\text{ест}} \sim 10^8$  с<sup>-1</sup>.

Соотношение между шириной спектра и резонансной частотой  $\Delta\omega \ll \omega_0$  определяет условие квазимонохроматичности света (для монохроматического света считают  $\Delta\omega = 0$ ).

## 13.2. Механизмы уширения спектральных линий

Ширина линии излучения реальных источников света обусловлена не только радиационным затуханием, но и рядом других физических эффектов. Один из них — столкновения излучающих атомов с окружающими их атомами и молекулами. При таких столкновениях может произойти обрыв излучаемого волнового пучка или скачок фазы излучения. И в том и в другом случае эффективная длительность пучка  $\tau$  уменьшается и, соответственно, возрастает ширина спектра (рис. 13.4).

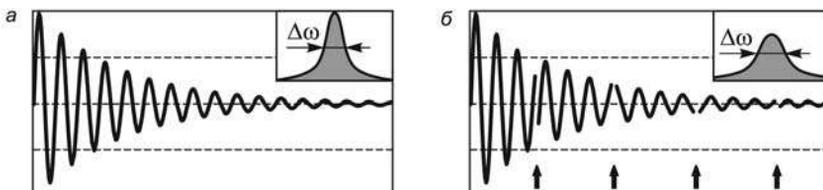


Рис. 13.4. Уширение спектральной линии при сбоях фазы в результате столкновений

При фиксированных давлении и температуре время  $\tau$  статистически одинаково для всех атомарных излучателей.

Можно показать, что в газоразрядном источнике света с максвелловским распределением атомов по скоростям спектральная линия описывается лоренцевским контуром, аналогичным (13.5), но с шириной  $\Delta\omega = \gamma + \gamma_{ст}$ , где  $\gamma_{ст}$  — уширение, определяемое числом столкновений в единицу времени. Из кинетической теории Максвелла следует, что

$$\gamma_{ст} = 8N_A p \sigma^2 \sqrt{\frac{\pi}{RT\mu}}, \quad (13.7)$$

где  $N_A$  — число Авогадро,  $p$ ,  $T$ ,  $\mu$  — давление, температура и молярная масса газа,  $\sigma^2$  — сечение столкновений, параметр, по порядку величины близкий к геометрическому размеру молекул и характеризующий вероятность обрыва волнового цуга.

Расчеты показывают, что при давлении порядка 10 мм рт. ст. столкновительное уширение в несколько раз превышает естественную ширину линии. Проводя измерения ширины линии при различных давлениях (рис. 13.5) и экстраполируя результаты к нулевому давлению, можно определить естественную ширину, а из наклона — сечение столкновений.

Другая причина уширения спектральных линий — эффект Доплера. Как известно, этот эффект заключается в сдвиге наблюдаемой частоты излучения при движении источника (атома) относительно неподвижного фотоприемника (рис. 13.6).

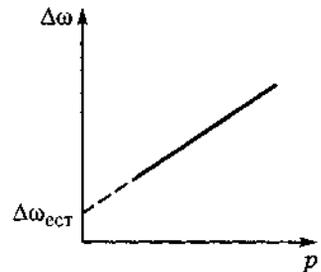


Рис. 13.5. Зависимость столкновительного уширения от давления газа

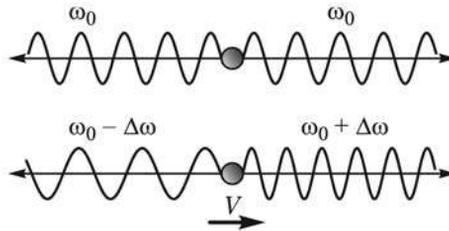


Рис. 13.6. Сдвиг частоты излучения при движении источника

Величина сдвига определяется как  $\Delta\omega = \omega_0 v_z / c$ , где  $v_z$  — проекция скорости на направление наблюдения. При этом, если атом движется к приемнику,  $\Delta\omega > 0$ , видимая частота увеличивается (фиолетовый сдвиг); если от приемника,  $\Delta\omega < 0$  (красный сдвиг). Полный спектр излучения источника представляет собой наложение сдвинутых друг относительно друга одинаковых спектральных распределений отдельных атомов (рис. 13.7).

Форму и ширину получающегося спектра можно найти в предположении, что естественная ширина линии отдельного неподвижного атома мала, а распределение ансамбля атомов по скоростям — максвелловское. Как известно, число атомов, имеющих определенную проекцию скорости, пропорционально  $\exp(-mv_z^2/2kT)$ ,

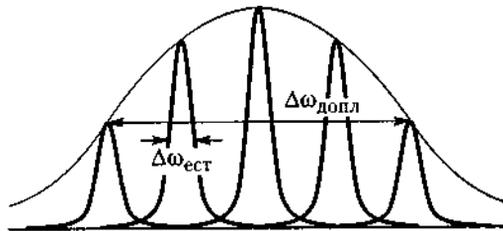


Рис. 13.7. Формирование доплеровского контура

где  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана. Перейдя от распределения по скоростям к распределению по частотам, получим:

$$I(\omega) = I_0 \exp\left(-\frac{mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2kT\omega_0^2}\right). \quad (13.8)$$

В этом случае спектральный контур называется *гауссовским* или *доплеровским*. Для его ширины на половине высоты нетрудно вывести соотношение:

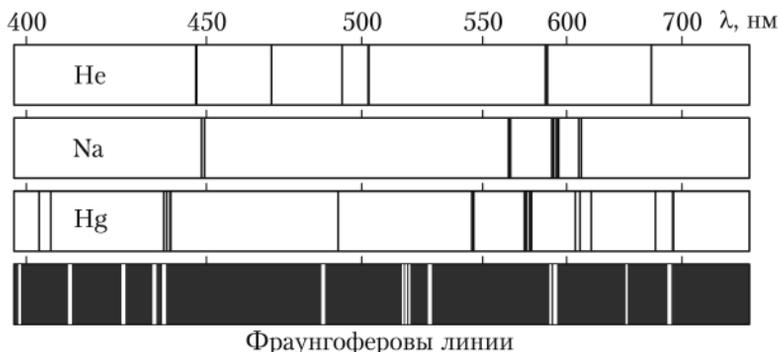
$$\Delta\omega_{\text{допл}} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{kT \cdot 2 \ln 2}{m}}. \quad (13.9)$$

Как видно, доплеровское уширение растет с ростом температуры газа и с увеличением частоты (уменьшением длины волны) спектральной линии. Для видимого диапазона и температур  $T \sim 300$  К,  $\Delta\omega_{\text{допл}} \sim 10^{10}$  с<sup>-1</sup>. Таким образом, при рассматриваемых условиях доплеровская ширина примерно на два порядка превышает естественную и столкновительную. Именно вследствие доплеровского уширения эффективная длительность волнового цуга, а следовательно, и *время когерентности* (см. главу 5) составляют всего  $\sim 10^{-10}$  с.

Отметим принципиальное различие между радиационным и столкновительным уширениями, с одной стороны, и доплеровским уширением, с другой. Вследствие затухания колебаний или влияния столкновений *каждый* атом излучает цуг волн конечной длительности, поэтому излучению атома соответствует *весь* профиль спектральной линии. Такой тип уширения называется *однородным*. В случае доплеровского уширения излучению разных атомов соответствуют различные частоты из общего широкого спектра. Этот тип уширения называется *неоднородным*. Однородное столкновительное уширение сохраняет лоренцевскую форму спектральной линии, а неоднородное доплеровское ее изменяет, формируя гауссовский профиль линии излучения ансамбля хаотически движущихся атомов.

Понятия естественной ширины линии, столкновительного и доплеровского уширения относятся, как уже указывалось, к излучению изолированных атомов. Это приближение хорошо выполняется только для газообразного состояния вещества. Именно для газов спектры имеют *линейчатый* характер (рис. 13.8).

Спектральные линии группируются в спектральные серии, объяснение которых можно получить только в рамках квантовомеханической модели атома. Для нас важно подчеркнуть квазимонохроматичность ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ) спектральных линий газовых источников света (ртутные, натриевые, водородные и т. д. лампы). В отличие от них излучение жидкостей и твердых тел обладает значительно



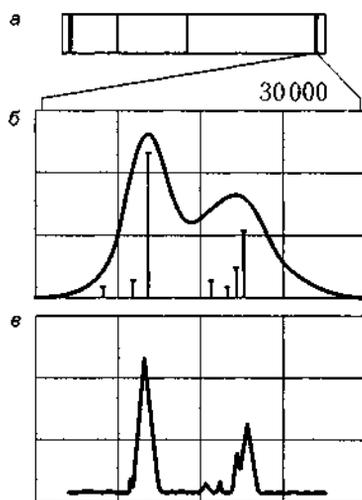
**Рис. 13.8.** Линейчатые спектры излучения некоторых элементов и спектр поглощения верхними слоями атмосферы Солнца (фраунгоферовы линии)

более широким спектром. Сильное взаимодействие атомов вещества в конденсированном состоянии может сделать спектр излучения сплошным, в итоге обеспечивая излучение монохроматического белого света.

Из вышеизложенного понятно, что доплеровское уширение накладывает определенные ограничения на возможности спектрального анализа. Так, например, спектр водорода, полученный с помощью прибора с низким разрешением (призмный спектрограф), имеет вид, показанный на рис. 13.9, а. Увеличение разрешения в 30 000 раз с помощью дифракционного спектрографа или интерферометра Фабри–Перо позволяет увидеть дублетную структуру одной из линий (рис. 13.9, б). Однако на самом деле эта линия состоит не из двух, а из семи компонент. Дальнейшее увеличение разрешения спектрографа не имеет практического смысла, так как эти компоненты все равно будут перекрываться из-за доплеровского уширения. Поэтому возникает задача *спектроскопии, свободной от доплеровского уширения*, то есть выработки методов, позволяющих довести спектральное разрешение до величины порядка естественной ширины.

Большинство методов субдоплеровской спектроскопии основаны на применении лазерных источников и базируются на принципах квантовой механики. Рассмотрим кратко схему одного из классических методов оптической спектроскопии под доплеровским контуром — *метода атомного пучка*, реализованного впервые Добрецовым и Терениным в 1928 г.

Схема эксперимента показана на рис. 13.10. Пучок атомов, летящих в направлении  $OZ$ , формируется с помощью двух диафрагм и имеет угловую расходимость  $2\varphi$ . Эти атомы возбуждаются перпендикулярным электронным пучком



**Рис. 13.9.** Спектр, полученный при низком (а), высоком (б) и сверхвысоком (в) разрешениях

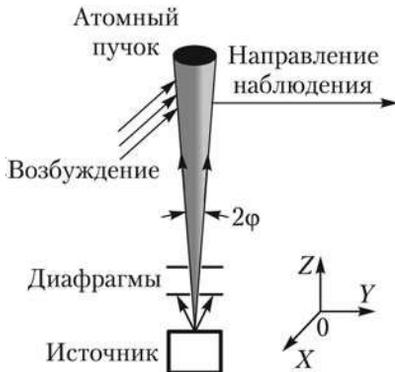


Рис. 13.10. Метод атомного пучка

в направлении  $OX$ , а возникающая флуоресценция наблюдается также строго перпендикулярно пучку в направлении  $OY$ . Проекция скорости атомов на это направление мала, поэтому они будут посылать внешнему наблюдателю излучение практически одной частоты. Таким образом, сокращение доплеровского уширения определяется степенью коллимации атомного пучка и имеет порядок  $\delta\omega \approx \varphi \cdot \Delta\omega_{\text{допл}}$ .

Экспериментальный спектр, полученный с помощью субдоплеровской спектроскопии, показан на рис. 13.9, в. Хорошо видны все спектральные компоненты.

### 13.3. Поглощение света. Закон Бугера

Напомним некоторые важные соотношения между физическими параметрами, характеризующими электрические свойства сред. Как известно, связь между *индукцией* и *напряженностью* электрического поля может быть записана двояко. Относительная *диэлектрическая проницаемость*  $\epsilon$  показывает, во сколько раз изменяется поле при попадании в среду:  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$ . С другой стороны, *поляризация* среды описывает аддитивную добавку к внешнему полю:  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . В приближении *линейной* теории поляризация пропорциональна напряженности поля:  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ , где  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость. Отсюда находим, что диэлектрическая проницаемость и восприимчивость связаны соотношением  $\epsilon = 1 + \chi$ . В свою очередь, диэлектрическая проницаемость определяет показатель преломления среды:  $n^2 = \epsilon$ . Таким образом, определив частотную зависимость  $\chi(\omega)$ , легко найти также зависимости  $\epsilon(\omega)$  и  $n(\omega)$ , то есть закон дисперсии.

Отметим, вектор поляризации среды  $\mathbf{P}$  отстает по фазе от внешнего поля световой волны  $\mathbf{E}$ , вследствие чего диэлектрическая восприимчивость  $\chi(\omega)$ , а следовательно, и показатель преломления  $n(\omega)$  являются комплексными величинами. Очевидно, что комплексный показатель преломления  $\tilde{n} = n(1 - ik)$  не может трактоваться просто как отношение скоростей света в вакууме и в среде. Для выяснения физического смысла  $\tilde{n}$  запишем уравнение монохроматической световой волны, распространяющейся вдоль оси  $OZ$ :

$$E(z, t) = E_0 \exp[i(\omega t - ckz)] = E_0 \exp[-nkz] \cdot \exp[i(\omega t - nkz)]. \quad (13.10)$$

Из (13.10) видно, что в среде с  $k \neq 0$  амплитуда поля убывает по мере проникновения света в глубь среды, то есть происходит поглощение. Перейдя от напряженности к интенсивности света, получим:

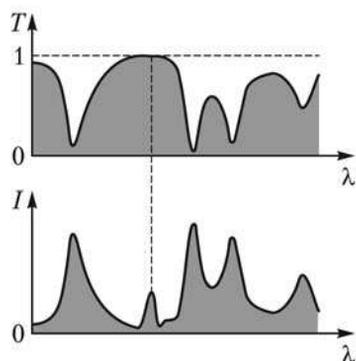
$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha z), \quad (13.11)$$

где коэффициент поглощения  $\alpha = 2nk = 4\pi k/\lambda$ . Соотношение (13.11) носит название закона Бугера–Ламберта–Бэра. Таким образом, *действительная часть* комплексного показателя преломления определяет *преломляющие (рефракцион-*

ные) свойства среды. Мнимая часть описывает поглощение (абсорбционные свойства).

Обе части не являются независимыми. Они связаны некоторыми общими интегральными соотношениями, именуемыми *соотношениями Крамерса–Кронига*. Это указывает на глубокую взаимосвязь, казалось бы, далеких друг от друга эффектов преломления и поглощения.

Наряду со *спектрами испускания*, о которых шла речь выше, существуют также *спектры поглощения*. Как правило, спектры поглощения и испускания являются дополнительными: вещество в «холодном» состоянии поглощает там же, где оно светится при возбуждении (рис. 13.11). Исключения, например, когда в спектре испускания присутствуют линии, отсутствующие в спектре поглощения, объясняются в рамках квантовой механики. Наиболее ярким примером спектра поглощения являются фраунгоферовы линии — темные полосы на фоне непрерывного солнечного спектра. Их возникновение обусловлено газами, составляющими корону Солнца (см. рис. 13.8).



**Рис. 13.11.** Сравнение спектров поглощения и испускания

# ГЛАВА 14 Классическая теория дисперсии

Тот факт, что реальная световая волна не является идеально монохроматичной, а представляет собой суперпозицию колебаний с различными частотами, оказывается особо важным при анализе взаимодействия света с веществом. Реакция молекул вещества на внешнее электромагнитное поле всегда запаздывает, причем величина запаздывания зависит от частоты. В результате возникает явление *дисперсии света*, заключающееся в различии фазовых скоростей для спектральных компонент с разными частотами.

## 14.1. Групповая и фазовая скорости. Дисперсионная зависимость

Поскольку волновой пакет, или *цуг волн*, оказывается суперпозицией гармоник с различными частотами, возникает вопрос о поведении этих волн в среде распространения. Представим волновой пакет в виде импульса, длительность которого значительно превышает период колебаний электромагнитного поля в световой волне (рис. 14.1). Из-за инерционности любой фотоприемник не реагирует на мгновенную величину поля. Поэтому при измерении скорости света реально регистрируется скорость распространения медленно меняющейся огибающей импульса, а не заполняющей его высокочастотной синусоиды.

Представим себе волновой пакет, распространяющийся вдоль оси  $OZ$  в виде суперпозиции гармонических составляющих, каждая из которых имеет некоторое волновое число  $k$  и соответствующую частоту  $\omega(k)$ :

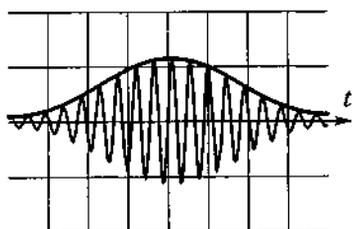


Рис. 14.1. Волновой пакет

$$E(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} E_0(k) \exp[i(\omega(k)t - kz)] dk, \quad (14.1)$$

причем  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ,  $\Delta k \ll k_0$ .

Запишем фазу колебания как

$$\begin{aligned} \omega(k)t - kz &= \omega_0 t - k_0 z + \\ &+ [(\omega(k) - \omega_0)t - (k - k_0)z]. \end{aligned}$$

Тогда выражение (14.1) можно преобразовать к виду

$$E(z, t) = A(z, t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 z)],$$

где  $A(z, t)$  — медленно меняющаяся амплитуда, представляющая собой *огibaющую* импульса,

$$A(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} E_0(k) \exp[i[(\omega(k) - \omega_0)t - (k - k_0)z]] dk. \quad (14.2)$$

Разложив зависимость  $\omega(k) - \omega_0$  в ряд и ограничившись первым членом разложения

$$\omega(k) - \omega_0 = \frac{d\omega}{dk}(k - k_0),$$

получим из (14.2):

$$A(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} E_0(k) \exp\left[i(k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk} t - z\right)\right] dk. \quad (14.3)$$

Соотношение (14.3) означает, что амплитуда  $A(z, t)$  представляет собой суперпозицию низкочастотных составляющих, распространяющихся с одинаковой скоростью

$$U = \frac{d\omega}{dk}. \quad (14.4)$$

С такой же скоростью движется и волновой пакет как целое. Эта скорость называется *групповой*. Напомним, что скорость монохроматической волны, определяемая как скорость перемещения волнового фронта, то есть поверхности равной фазы (*фазовая скорость*), равна

$$v = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k}.$$

Для вакуума обе эти величины совпадают, поскольку частота и волновое число связаны соотношением  $\omega = c \cdot k$ , но в любых других средах эта связь более сложная. Зависимость  $\omega = \omega(k)$  называют *дисперсионной зависимостью* (рис. 14.2).

В этих координатах фазовая и групповая скорости имеют прозрачную геометрическую трактовку как тангенсы углов наклона секущей и касательной в выбранной точке  $k$  или, что то же самое, для данной длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ . Если график  $\omega(k)$  имеет выпуклость вверх (вторая производная отрицательна, рис. 14.2, *кривая а*), то секущая наклонена сильнее касательной и  $v > U$ . В противном случае угол наклона касательной больше и  $v < U$  (рис. 14.2, *кривая б*). Линейный график  $\omega(k)$  соответствует условию  $v = U$ . Функцию  $\omega = \omega(k)$  можно определить, зная зависимость показателя преломления от длины

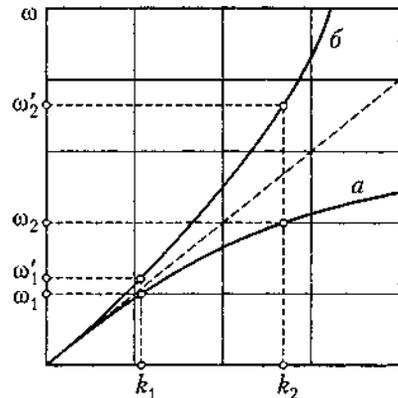


Рис. 14.2. Типы дисперсионных зависимостей

волны или частоты:  $n = n(\omega)$  или  $n = n(\lambda)$ , которая обычно называется *дисперсией среды*. Найдем связь групповой и фазовой скорости:

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Перейдя к независимой переменной  $\lambda$  с учетом соотношения  $k = 2\pi/\lambda$ , получаем формулу Рэлея:

$$U = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \text{ или } U = v \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (14.5)$$

Очевидно, возможны три случая:

1.  $dv/d\lambda = dn/d\lambda = 0$ ; дисперсия отсутствует; строго говоря, эта ситуация реализуется только в вакууме, но на практике бывает, что дисперсией можно пренебречь, например, при распространении света в воздухе;
2.  $dv/d\lambda > 0$ ,  $dn/d\lambda < 0$ ; показатель преломления убывает с ростом длины волны; такую дисперсию называют *нормальной*, и в этом случае *групповая скорость меньше фазовой*; такой тип дисперсии типичен для прозрачных сред; функция  $\omega = \omega(k)$ , показанная на рис. 14.2, *кривая а*, соответствует нормальной дисперсии (см. пример 14.2),
3.  $dv/d\lambda < 0$ ,  $dn/d\lambda > 0$ ; показатель преломления растет с ростом длины волны; такая дисперсия называется *аномальной* (см. рис. 14.2, *кривая б*), для областей аномальной дисперсии характерно *превышение групповой скорости над фазовой и сильное поглощение света*.

Иллюстрация отличия фазовой скорости от групповой для случая нормальной дисперсии приведена на рис. 14.3.

Показаны положения волнового пакета в последовательные моменты времени  $t_1, t_2, t_3$ . Видно, что формирующая пакет высокочастотная волна как бы «переползает» вперед, из-за чего ее фазовая скорость  $v$  оказывается выше, чем групповая скорость  $U$  пакета в целом.

Отметим также, идеально монохроматическая волна не переносит какой-либо информации, поэтому теория относительности не накладывает каких-либо ограничений на фазовую скорость, и возможны среды, в которых  $n < 1$  и  $v > c$

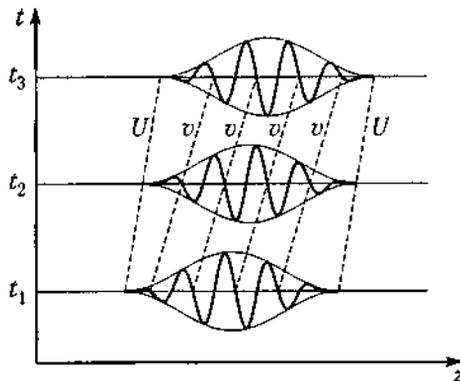


Рис. 14.3. Отличие фазовой скорости от групповой

и возможны среды, в которых  $n < 1$  и  $v > c$

В области аномальной дисперсии из формулы Рэлея может получиться, что  $U > c$ , то есть групповая скорость больше скорости света в вакууме, а в некоторых случаях даже  $U < 0$ . Очевидно, этот результат противоречит теории относительности, в соответствии с которой скорость света в вакууме есть предельная скорость передачи информации. Причиной неприменимости формулы Рэлея в данном случае является *деформация световых импульсов* в условиях сильного затухания (рис. 14.4),

вследствие чего само понятие групповой скорости, как скорости перемещения импульса, нуждается в уточнении. При нормальной дисперсии (рис. 14.4, а) максимум импульса отстает от переднего фронта, при аномальной (рис. 14.4, б) — максимум смещается вперед.

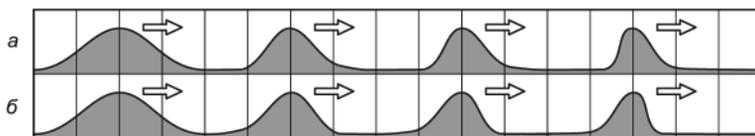


Рис. 14.4. Деформация светового импульса при распространении в средах с нормальной (а) и аномальной (б) дисперсией

Последний случай реализуется, например, при распространении поверхностных волн в жидкости в условиях уменьшающейся глубины водоема — так называемые волны прибой. В них как бы моделируется ситуация аномальной дисперсии: групповая скорость превосходит фазовую; вершина волны смещается вперед и даже переваливает через передний волновой фронт, вызывая обрушение волны. Причиной возникновения волн прибой является потеря ветровой энергии волны за счет трения о дно. Уже из этого примера понятно, что в условиях аномальной дисперсии волны не могут распространяться далеко — они затухают.

В оптике схожие деформации световых импульсов возникают в квантовых усилителях. Проходя через среду с инверсной населенностью (см. часть 4), передняя часть импульса усиливается сильнее «хвоста», и максимум смещается вперед.

Наблюдающуюся в прозрачных средах зависимость диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , а следовательно, и показателя преломления  $n$  от частоты принято называть *временной дисперсией*. В этом случае фазовая и групповая скорости не совпадают по величине, но имеют одно и то же направление. В анизотропных средах (см. главу 12) фазовая и групповая скорости могут не совпадать и по направлению.

## 14.2. Нормальная и аномальная дисперсия

В классической физической теории широко применяется *квазиупругая модель*, в которой атом представлен двумя зарядами: положительным (по современной терминологии — ядро) и отрицательным — электрон. Эти заряды находятся в равновесии на некотором расстоянии  $d_0$  между ними. При смещении электрона из положения равновесия на него начинает действовать возвращающая квазиупругая (пропорциональная расстоянию) сила. Такая система является гармоническим осциллятором с собственной частотой  $\omega_0$ , определяемой параметрами системы.

Движение электрона в поле падающей световой волны  $E_0 \exp(i\omega t)$  описывается уравнением, аналогичным (10.2) с той разницей, что в правой части присутствует вынуждающая кулоновская сила:

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 \exp(i\omega t), \quad (14.6)$$

где  $e$  — заряд,  $m$  — масса электрона. Стационарное (без учета переходных процессов) решение этого уравнения имеет вид

$$x = \frac{eE_0 \exp(i\omega t)}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (14.7)$$

В результате смещения электрона от положения равновесия атом приобретает наведенный дипольный момент  $p = ex$ . Если среда достаточно разреженная (взаимовлиянием поляризованных атомов друг на друга можно пренебречь), то поляризация среды пропорциональна концентрации атомов  $N$ , то есть  $P = \varepsilon_0 Np$ . Следовательно, из (14.7) можно найти, что восприимчивость среды равна:

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega},$$

где  $\omega_p^2 = Ne^2/\varepsilon_0 m$  — *плазменная частота*, физический смысл которой подробно обсуждается в следующем разделе. Таким образом, вещественная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости, описывающие дисперсию и поглощение света, оказываются равными соответственно

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}, \quad (14.8)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = \omega_p^2 \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \quad (14.9)$$

Анализ соотношений (14.8) и (14.9) упрощается, если показатель преломления близок к единице, коэффициент поглощения мал, а частота света  $\omega$  близка к собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ , так что в этом случае  $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ . Тогда

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}, \quad (14.10)$$

$$k(\omega) = \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (14.11)$$

Графики функций  $k(\omega)$  и  $n(\omega) - 1$  показаны на рис. 14.5 ( $C = \omega_p^2/4\gamma\omega_0$ ). Как видно, если частота света достаточно далека от  $\omega_0$ , показатель преломления растет с частотой, то есть имеет место нормальная дисперсия. Аномальная дисперсия наблюдается только вблизи  $\omega_0$ , но в этой области существует сильное поглощение.

Экспериментально дисперсионную зависимость можно наблюдать, например, методом скрещенных призм (рис. 14.6, а). Первая призма (с вертикальным ребром) — стеклянная, она разлагает проходящий через нее белый свет в спектральную полосу. Вторая призма (с горизонтальным ребром) изготавливается из ис-

следуемого материала. Она смещает каждую точку спектра по вертикали, причем величина смещения зависит от показателя преломления на данной частоте. Таким образом, форма спектральной полосы на экране отражает зависимость показателя преломления от длины волны. На рисунке показан примерный вид спектра для случаев нормальной (НД) и аномальной (АД) дисперсии.

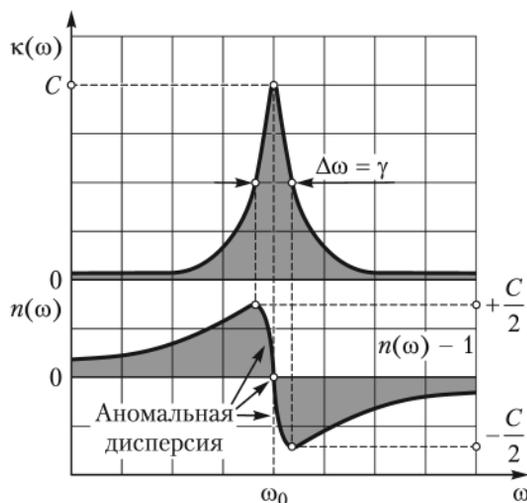


Рис. 14.5. Дисперсионные зависимости

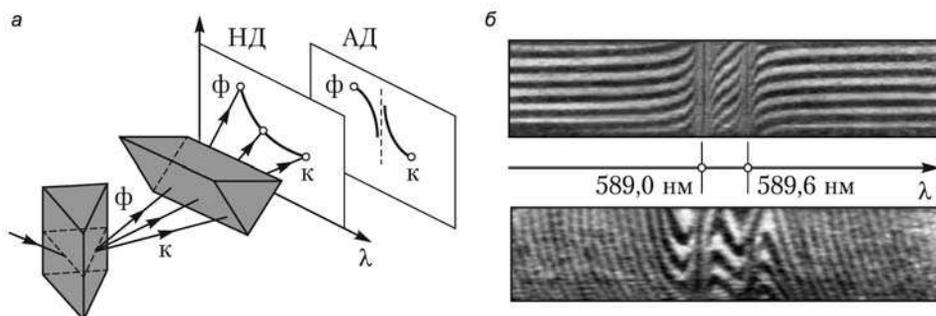


Рис. 14.6. Наблюдение дисперсии методом скрещенных призм (а) и фотографии дисперсионных кривых в методе крюков (б)

Для более точного определения изменения показателя преломления в области аномальной дисперсии, где велико поглощение, Д. С. Рождественским был предложен спектро-интерференционный метод «крюков», основанный на внесении дополнительной разности хода между опорным и измерительным пучками в двухлучевом интерферометре. В результате интерференционные полосы оказываются наклоненными, что позволяет количественно оценить параметры аномальной дисперсии. На рис. 14.6, б, изображена дисперсия в парах натрия в области желтой дублетной линии.

### 14.3. Дисперсия вдали от линий поглощения

Рассмотрим более подробно поведение показателя преломления прозрачных сред. При выполнении неравенства  $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$  дисперсионная формула (14.8) сводится к виду

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (14.12)$$

Как следует из (14.12), при любых частотах в области прозрачности имеет место нормальная дисперсия (рис. 14.7). В реальных случаях собственные частоты  $\omega_0$ , как правило, лежат в ультрафиолетовом диапазоне. Поэтому для относительно низких частот ( $\omega < \omega_0$ , видимая область) показатель преломления, как ему и положено, больше единицы. Напротив, в высокочастотной области ( $\omega > \omega_0$ , рентгеновский диапазон)  $n < 1$ , и, следовательно, фазовая скорость волны больше скорости света в вакууме  $v > c$ .

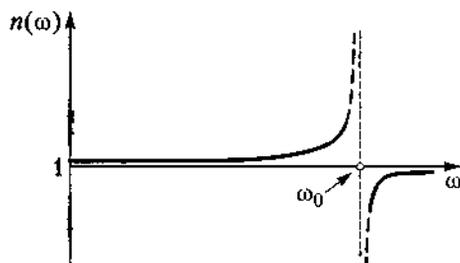


Рис. 14.7. Дисперсия в прозрачных средах

Как указывалось ранее, это неравенство не противоречит теории относительности, поскольку монохроматическая волна является математической абстракцией. Из-за низкого показателя преломления в рентгеновской области может наблюдаться полное внутреннее отражение на переходе воздух–среда.

Предполагая, что  $\omega \ll \omega_0$ , дисперсионную формулу (14.12) можно разложить в ряд по степеням малого параметра  $\omega/\omega_0$ . Тогда

$$n^2(\omega) \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right).$$

Переходя от частоты к длине волны, получаем дисперсионную формулу Коши:

$$n^2(\lambda) = 1 + A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right), \quad (14.13)$$

где  $A = \omega_p^2/\omega_0^2$  — коэффициент рефракции,  $B = 4\pi^2 c^2/\omega_0^2$  — коэффициент дисперсии (рис. 14.8). Несмотря на то что формула Коши носит явно приближенный характер, она с удовлетворительной точностью описывает изменение показателя преломления в области прозрачности. Например, для водорода в нормальных условиях зависимость  $n^2 = 1 + 2,72 \cdot 10^{-4} + (2,11 \cdot 10^{-6})/\lambda^2$  ( $\lambda$  — в микрометрах) оказывается справедлива для диапазона длин волн 0,4–9,0 мкм (см. задачу 14.6).

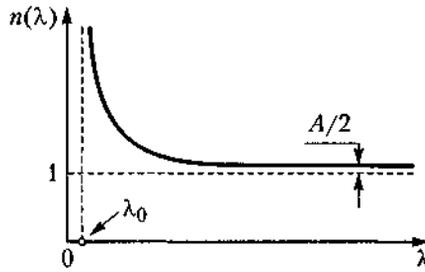


Рис. 14.8. Дисперсионная зависимость по формуле Коши

Другой важный предельный случай дисперсии —  $\omega \gg \omega_0$ . На практике он реализуется, например, при распространении электромагнитных волн в плазме, то есть в среде, содержащей большое количество свободных зарядов, для которых вообще отсутствует квазиупругая сила ( $\omega_0 = 0$ ). Из (14.12) в этом случае находим:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (14.14)$$

Мало того, что показатель преломления меньше единицы, при  $\omega < \omega_p$  оказывается  $n^2 < 0$ , то есть показатель преломления становится мнимым. Это означает, что при частотах излучения, меньших  $\omega_p$ , для любых углов падения наблюдается полное отражение ( $R = 1$ ). Граничная частота  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}$  называется *плазменной* или *лэнгмюровской частотой* (рис. 14.9).

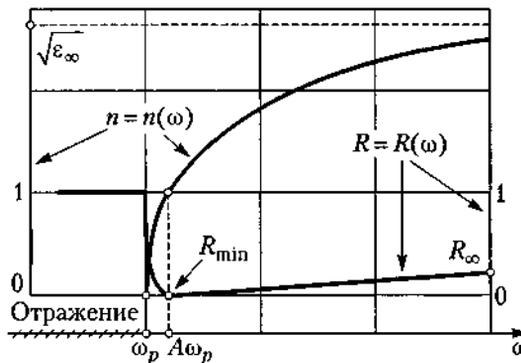


Рис. 14.9. Частотные зависимости коэффициента отражения и показателя преломления при распространении радиоволн в ионосфере

Описываемое явление проявляется, например, в отражении радиоволн от ионосферы. Концентрация заряженных частиц в ионосфере такова, что  $\lambda_p$  лежит в области нескольких метров. Поэтому радиоволны коротковолнового диапазона с  $\lambda > \lambda_p$  отражаются от плазмы ионосферы, обеспечивая дальнюю радиосвязь.

Телевизионный диапазон лежит по другую сторону плазменной частоты, поэтому прием телесигнала возможен только в зоне прямой видимости. В период

магнитных бурь концентрация заряженных частиц резко возрастает, плазменная частота повышается, и складываются условия для сверхдального приема телевизионных передач метровых каналов.

Аналогично объясняется зеркальный блеск металлов, обусловленный плазмой свободных электронов. В этом случае из-за высокой концентрации зарядов плазменная частота лежит в УФ-области.

Вблизи лэнгмюровской частоты наблюдается *плазменный минимум отражения*  $R_{\min}$ , возникающий при переходе показателя преломления через единицу.

Физический смысл плазменной частоты заключается в том, что она соответствует частоте собственных колебаний электронов в плазме, состоящей из  $N$  частиц с зарядом  $\pm e$ . Такие колебания могут возникнуть, например, при смещении заряженных частиц из положения равновесия. Тогда под действием кулоновских сил заряды противоположных знаков будут ускоренно двигаться навстречу друг другу, по инерции проскочат положение равновесия, затем начнут двигаться в обратном направлении и т. д., совершая затухающие колебания с частотой  $\omega_p$ .

Учтем теперь, что вклад в дисперсию дают колебания не только электронов, но и ионов. Поскольку масса ионов намного больше, соответствующие собственные частоты оказываются меньше. Ионные линии поглощения для веществ, прозрачных в видимой области, попадают в ИК-диапазон. Дисперсионная формула может быть записана в виде:

$$n^2 = 1 + \frac{C_1}{\omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{C_2}{\omega_{02}^2 - \omega^2}. \quad (14.15)$$

Например, для флюорита ( $\text{CaF}_2$ ) длины волн, соответствующих электронным и ионным линиям поглощения, равны соответственно  $\lambda_{01} = 0,094$  мкм (УФ) и  $\lambda_{02} = 35$  мкм (ИК) (рис. 14.10).

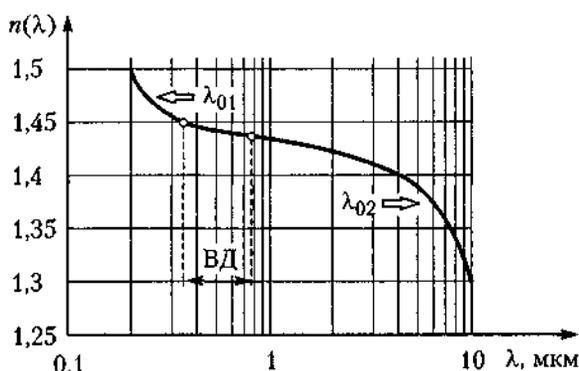


Рис. 14.10. График зависимости показателя преломления флюорита ( $\text{CaF}_2$ ) от частоты падающего излучения (ВД — видимый диапазон)

При переходе к очень низким частотам  $\omega \rightarrow 0$  основной вклад в показатель преломления вносит именно ионная составляющая. Этим объясняется наблюдающееся у некоторых веществ расхождение измеряемой величины  $n$  и вычислен-

ной по теории Максвелла. Например, для воды  $n = 1,33$ , а  $\epsilon = 81$ . Дело в том, что диэлектрическая проницаемость определяется для статического поля, а показатель преломления — для оптического диапазона электромагнитных волн. Между этими областями лежат инфракрасные ионные полосы поглощения.

Формулы (14.12), (14.15) были получены в предположении, что среда достаточно разреженная и взаимодействием поляризованных частиц можно пренебречь. В конденсированных средах (жидкости, твердые тела) локальное поле, действующее на рассматриваемый атом, обусловлено не только полем световой волны, но и соседними атомами. Г. Лоренц и Л. Лоренц показали, что в этом случае справедливо соотношение (формула *Лоренц–Лоренца*):

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\omega_p^2}{3(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (14.16)$$

Если показатель преломления близок к единице, то  $n^2 + 2 \approx 3$  и (14.16) переходит в (14.12). В правой части (14.16) величина  $\omega_p^2$  пропорциональна концентрации атомов  $N$ , а следовательно, и плотности вещества  $\rho$ . Поэтому во многих случаях справедлив закон постоянной удельной рефракции:

$$\frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \text{const}. \quad (14.17)$$

Например, для воздуха при увеличении давления в 200 раз удельная рефракция изменяется на доли процента.

Так же как классическая теория излучения, классическая теория дисперсии в определенных случаях требует уточнения с учетом квантовой природы вещества. Тем не менее основные качественные (а во многих случаях и количественные) результаты остаются справедливыми. Так, дисперсионную формулу (14.12) следует заменить *формулой Зельмейера*:

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{\omega_p^2 f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}, \quad (14.18)$$

где  $\omega_{0k}$  — частота, соответствующая одному из переходов между квантованными уровнями энергии атома,  $f_k$  — сила осциллятора, коэффициент, зависящий от квантовых чисел уровней.

## Примеры решения задач

**Пример 14.1.** Показатель преломления сероуглерода при  $\lambda_1 = 656$  нм равен  $n_1 = 1,620$ , а при  $\lambda_2 = 580$  нм равен  $n_2 = 1,629$ . Найдите, во сколько раз отличаются фазовая и групповая скорости света в сероуглероде для желтой области спектра ( $\lambda = 620$  нм).

*Решение*

Связь между групповой и фазовой скоростью описывается формулой Рэлея:

$$U = v \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Считая дисперсию сероуглерода в интервале длин волн  $\lambda_1 - \lambda_2$  постоянной, найдем ее среднее значение

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -0,118 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$$

Величину показателя преломления вблизи 620 нм можно оценить как

$$n = n_2 + (\lambda - \lambda_2) \frac{dn}{d\lambda} = 1,625$$

Тогда отношение групповой скорости к фазовой равно

$$\frac{U}{v} = 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} = 0,955, \text{ дисперсия нормальная.}$$

**Пример 14.2.** Показатель преломления вещества для длины волны  $\lambda = 600$  нм равен  $n = 1,8$ . Дисперсия вещества в этой области  $dn/d\lambda = 3 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ . Групповая скорость распространения света равна  $U = 2,9 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ , определить фазовую скорость волны  $v$  и тип дисперсии.

*Решение*

Запишем формулу Рэлея в виде

$$U = v \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) = v + \frac{\lambda c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda},$$

откуда

$$v = U - \frac{\lambda c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} = 2,63 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Поскольку групповая скорость больше фазовой, мы имеем дело с аномальной дисперсией.

**Пример 14.3.** Водород при  $0^\circ\text{C}$  и давлении 760 мм рт. ст. имеет плотность  $0,0000896 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , а его показатель преломления равен 1,000138. Плотность жидкого водорода равна  $0,068 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . Считая, что формула Лоренц–Лоренца применима к этому случаю и используя понятие удельной рефракции, определите показатель преломления жидкого водорода.

*Решение*

Используя понятие удельной рефракции (14 17), можно записать

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} = \frac{1}{\rho_2} \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2}.$$

Подставим численные значения:

$$\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} = \frac{276 \cdot 10^{-6}}{3,000276} \cdot \frac{68}{896 \cdot 10^{-4}},$$

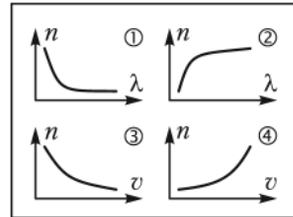
откуда

$$n_2^2 = 1,22514, \quad n_2 = 1,107.$$

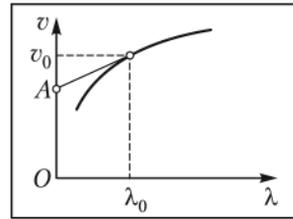
## Задачи

14.1. Показатель преломления стекла для длины волны  $\lambda = 0,5$  мкм равен  $n = 1,5$ . Дисперсия стекла в этой области  $dn/d\lambda = -3 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$ . Определите, на сколько процентов групповая скорость распространения света с этой длиной волны в стекле меньше фазовой скорости.

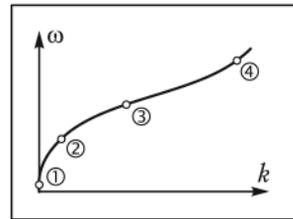
14.2. Какие графики из представленных соответствуют нормальной дисперсии?



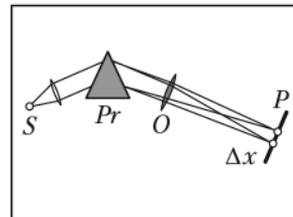
14.3. Зависимость фазовой скорости волны  $v$  от длины волны  $\lambda$  представлена на рисунке. Покажите, что отрезок  $OA$  на оси  $v$ , отсекаемый касательной к этой кривой в точке  $\lambda_0$ , равен групповой скорости для этой длины волны  $\lambda = \lambda_0$ .



14.4. Дисперсионная зависимость вещества представлена зависимостью  $\omega(k)$ . В каких точках графика фазовая и групповая скорости одинаковы? Групповая скорость максимальна или минимальна? Фазовая скорость максимальна или минимальна?



14.5. С помощью объектива  $O$  и стеклянной призмы  $Pr$  с преломляющим углом  $60^\circ$  на экране  $P$  получены изображения щели  $S$  в монохроматических цветах (спектр). Какова ширина спектра при таких условиях, лучи падают на призму под углом  $49^\circ$ , экран находится на расстоянии 3 м от объектива, показатель преломления для красных и фиолетовых лучей равен 1,505 и 1,525 соответственно.



14.6. Дисперсия показателя преломления водорода при нормальных условиях (температуре и давлении) может быть представлена в интервале от 0,4 до 9 мкм в виде следующей зависимости:  $n^2 = 1 + 2,72 \cdot 10^{-4} + (2,11 \cdot 10^{-6})/\lambda^2$  ( $\lambda$  в микрометрах). Найдите значения коэффициентов рефракции и дисперсии  $A$  и  $B$  в формуле Коши и убедитесь, что собственная частота осциллятора лежит в УФ-области. Найдите отношение  $q/m$ . К какой частице применимо полученное значение? Плотность водорода  $9,0 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ .

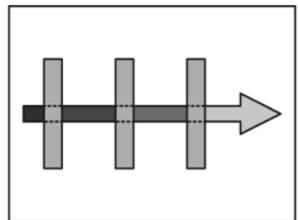
14.7. Вычислите групповую скорость  $U$  волн, фазовая скорость  $v$  которых зависит от длины волны следующим образом:

- акустические волны в воздухе:  $v = A$ ,  $A$  — константа;
- поперечные упругие волны в стержне:  $v = A/\lambda$ ;
- глубоководные волны:  $V = A\sqrt{\lambda}$ ;
- капиллярные волны:  $V = A/\sqrt{\lambda}$ ;
- ионосферные электромагнитные волны:  $V = \sqrt{c^2 + A^2\lambda^2}$  ( $c$  — скорость света в вакууме).

14.8. Майкельсон измерил скорость света в сероуглероде и нашел ее равной  $U = c/1,77$ . Источник излучал белый свет. Значения показателя преломления сероуглерода для трех длин волн в воздухе приведены в таблице. Покажите, что эти значения согласуются с экспериментом Майкельсона.

$\lambda$ , мкм	0,589	0,550	0,486
$n$	1,628	1,640	1,652

14.9. Световой пучок интенсивностью  $I_0$  проходит через три частично поглощающие пластины. Коэффициент пропускания каждой пластины  $T = 0,8$ ; коэффициент отражения на одной поверхности  $R = 0,2$ . Определите интенсивность прошедшего света.



14.10. Показатель преломления германия для длины волны  $\lambda_0 = 0,5$  мкм (в вакууме) равен  $\tilde{n} = 3,47 + 1,40i$ . Рассчитайте глубину проникновения плоской волны в германий, на которой ее интенсивность уменьшится в 1000 раз.

## ГЛАВА 15    Рассеяние света

Электрическое поле распространяющейся в веществе световой волны взаимодействует с частицами среды и вызывает переизлучение энергии. Если среда не вполне однородна, возникает *рассеяние*, то есть разброс направлений волновых векторов  $k$  при сохранении полной энергии световой волны. При этом световой поток в первоначальном направлении ослабевает (рис. 15.1).

В качестве рассеивателей могут выступать частицы различной формы и размеров, от единиц ангстрем до тысяч нанометров, наконец, оптические неоднородности (посторонние включения, дефекты структуры, упругие колебания решетки, флуктуации плотности). Если размер рассеивателя  $a$  менее  $\lambda/15$ , наблюдается *рэлеевское рассеяние*, если более — *рассеяние Ми*. При  $a \sim \lambda$  эффекты рассеяния постепенно переходят в дифракционные.

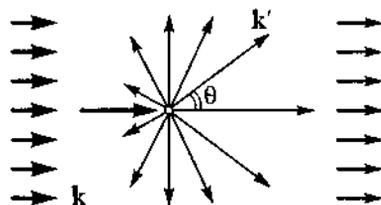


Рис. 15.1. Схема рассеяния света

Среды с явно выраженной оптической неоднородностью носят название *мутных сред*. К их числу относятся дымы (аэрозоли), взвеси (суспензии), эмульсии, молочные стекла и т. п. Рассеяние в таких средах называют *эффектом Тиндаля* и учитывают через *коэффициент рассеяния* (или *экстинкции*)  $k'$ , аддитивно входящий в показатель экспоненты *бугеровского закона* (13.11):

$$I = I_0 \exp \left[ \frac{-4 \pi n (k + k') z}{\lambda} \right].$$

### 15.1. Теория рассеяния Рэлея

В модели Рэлея оптическая неоднородность создается сферическими частицами с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ . Размеры рассеивателей (как правило, молекул) предполагаются много меньшими длины волны. Поэтому *рассеивающая волна считается когерентной с падающей*, так как не возникает фазового сдвига, зависящего от размеров и формы рассеивателя. Частицы хаотически распределены в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$ , и волны от них складываются по интенсивности. Под действием поля  $E$  падающей волны в веществе возникают наведенные диполи, дипольный момент которых параллелен  $E$  (рис. 15.2) и пропор-

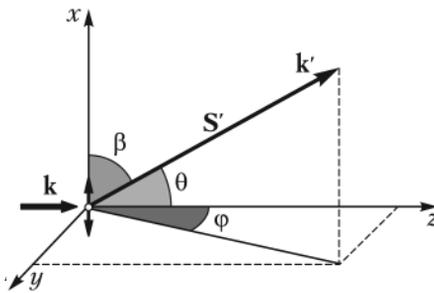


Рис. 15.2. К определению углов рассеяния

ционален напряженности поля и поляризуемости рассеивающих частиц. В условиях модели Лоренц—Лоренца (14.16)

$$\alpha = 3 \left[ \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)} \right] V,$$

где  $V$  — объем частицы.

В соответствии с законами электродинамики индуцированный диполь излучает, причем величина вектора Пойнтинга  $S'$  переизлученного света зависит от направления рассеяния. В случае линейно поляризованного падающего света колебания электрического вектора происходят вдоль оси  $OX$ , поэтому все наведенные диполи тоже ориентированы параллельно этой оси. Диаграмма направленности излучения, или *индикатриса рассеяния*, описывается формулой (15.1), которая легко получается из (13.1):

$$I' = 9\epsilon_0^2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)^2} \frac{\pi^2 V^2}{\lambda^4} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} I_0. \quad (15.1)$$

Поскольку вдоль своей оси диполь не излучает, интенсивность рассеяния вдоль  $OX$  равна нулю, а вдоль  $OY$  и  $OZ$  — максимальна (рис. 15.3, а). Длина отрезка  $I'(\theta)$ , отсекаемого на индикатрисе, определяет относительную интенсивность рассеяния в заданном направлении. Видно, что от азимутального угла  $\varphi$  рэлеевское рассеяние не зависит.

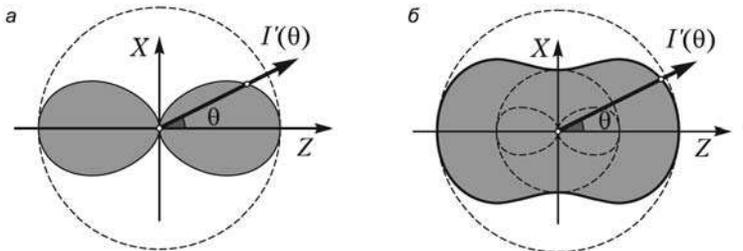


Рис. 15.3. Сечения индикатрисы рассеяния линейно поляризованного (а) и неполяризованного (б) света

Показанное на рисунке сечение индикатрисы плоскостью  $XOZ$  получило название «бабочки Рэлея» (ср. с рис. 13.2). Такую же форму имеет и сечение  $XOY$ . Как следует из (15.1), рэлеевское рассеяние происходит с равной интенсивностью вперед, назад, вбок и линейно поляризовано в плоскостях, проходящих через ось  $OX$  (см. раздел 10.1). Нулевая интенсивность наблюдается только в направлении оси  $OX$ , а сечение индикатрисы  $YOZ$  является круговым. Таким образом, общая форма индикатрисы — почти тороид, у которого в центре не отверстие, а нулевая точка, в которую стягивается поверхность индикатрисы (рис. 15.4).

Если же падающий свет неполяризован, то есть колебания вектора  $E$  происходят хаотично в плоскости  $XOY$ , то и оси индуцированных диполей равномерно

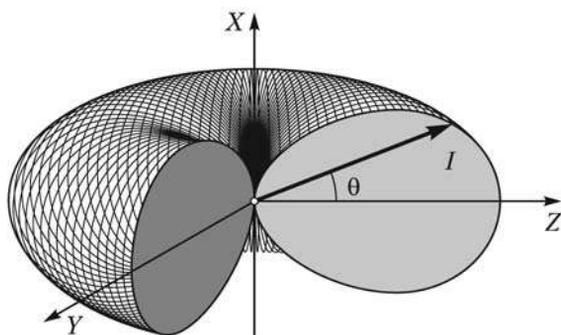


Рис. 15.4. Индикатриса рассеяния линейно поляризованного света

распределены в этой плоскости. Диаграмма направленности рассеянного света в этом случае дается соотношением (15.2) и показана на рис. 15.3, б. Ее можно представить как результат суммирования множества поляризованных индикатрис, повернутых вокруг оси  $OZ$  в пределах угла  $2\pi$ .

$$I' = 9\epsilon_0^2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)^2} \frac{\pi^2 V^2}{\lambda^4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2r^2} I_0. \quad (15.2)$$

Пунктиром внутри диаграммы показаны индикатрисы рассеяния для ортогональных компонент поляризации — в плоскости рисунка и перпендикулярно ей. Итоговая индикатриса во всех направлениях плоскости  $XOY$  будет иметь единичную ширину, а в направлении оси  $OZ$  — удвоенную. Это легко получить и из формулы (15.2) для углов  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 0, \pi$ . Таким образом, рэлеевское рассеяние неполяризованного света симметрично и максимально вперед и назад, а под прямым углом к направлению распространения имеет вдвое меньшую интенсивность.

Обратная пропорциональность интегральной интенсивности рассеяния четвертой степени длины волны называется *законом Рэлея* и является причиной изменения оттенков белого света на красноватые при рассеянии вперед и на синеватые — при рассеянии под углом  $90^\circ$ . Кроме того, рассеянный в поперечном направлении свет оказывается линейно поляризованным. Эффектами рассеяния объясняется красный цвет Солнца на закате и восходе, а также голубой цвет неба.

Фарадеем была предложена изящная демонстрация оптической активности (см. раздел 12.7) с использованием рэлеевского рассеяния. В раствор сахара, обладающий способностью вращать плоскость поляризации, добавляют несколько капель молока (рассеиватель). При наблюдении поперек кюветы, легко заметить винтовую модуляцию интенсивности рассеяния (рис. 15.5), поэтому эффект был назван «винт Фарадея».



Рис. 15.5. Рассеяние света в мутной оптически активной среде (винт Фарадея)

## 15.2. Рассеяние Ми и молекулярное рассеяние

Если размеры рассеивателя оказываются сравнимы с длиной волны падающего излучения, то приближения теории Рэля не выполняются: возникающий на каждом рассеивателе фазовый сдвиг зависит от формы, размеров и оптических свойств частицы. Кроме того, сами элементарные диполи, находящиеся на конечных расстояниях друг от друга, оказываются под воздействием различных полей в результате переизлучений.

*Теория рассеяния Ми* предсказывает для ряда простейших случаев (преломляющие или отражающие частицы круглой или эллиптической формы) интуитивно понятную трансформацию индикатрис рассеяния при изменении размеров рассеивателей. Индикатрисы теряют свою симметричность (рассеяние вперед может превосходить рассеяние назад, и наоборот) и постепенно становятся многолепестковыми, причем боковые максимумы подчиняются дифракционным соотношениям  $a \cdot \sin \theta = \lambda$  (рис. 15.6).

Математическую основу теории Ми составляет разложение уравнений для переизлученной электромагнитной волны по малому параметру  $\alpha = ka = 2\pi a/\lambda$ . При возрастании этого параметра приходится учитывать все больше членов разложения по степеням  $\alpha$ . Частотная зависимость интенсивности рассеяния  $I'$  также изменяется и становится более медленной, чем следует из закона Рэля.

Примерами рассеяния Ми являются облака, тучи, клубы дыма, рассеяние туманами, проявление трассового следа реактивных самолетов и т. д. По мере удаления из оптической среды посторонних примесей и включений, индикатрисы рассеяния становятся все уже, интенсивность рассеяния ослабевает, уступая место когерентному переизлучению вперед. Однако даже в идеально чистых средах наблюдается так называемое *молекулярное рассеяние* за счет тепловых флуктуаций плотности атомов или молекул и, следовательно, флуктуаций показателя преломления.

Оптические неоднородности с линейными размерами порядка длины волны образуются также в окрестностях критической точки  $K$  на диаграмме  $P$ - $V$  для реального газа (рис. 15.7). При стремлении к нулю производной  $dP/dV$  исчезает

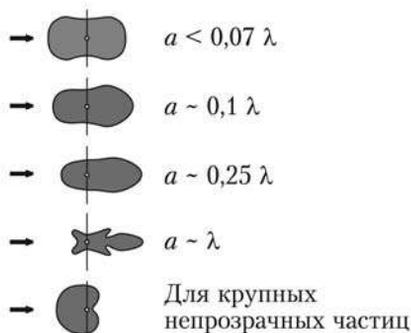


Рис. 15.6. Индикатрисы рассеяния на частицах разных размеров

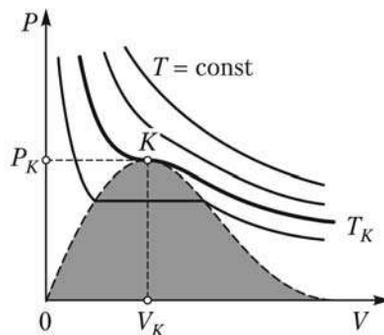


Рис. 15.7. Критическая точка реального газа. Затенена область двухфазного состояния жидкость-пар

различия между жидкостью и паром, флуктуации плотности, а следовательно, и показателя преломления резко нарастают; их уже нельзя считать малыми. Это приводит к *критической опалесценции* — сильному рассеянию света в этих условиях. Среда становится практически непрозрачной.

### 15.3. Неупругое рассеяние

В отличие от рассмотренных ранее типов рассеяния, в некоторых случаях частота рассеянного излучения отличается от частоты падающего света. Такой вид рассеяния называют неупругим<sup>1</sup>. Одним из них является *комбинационное рассеяние света* или *эффект Рамана* — рассеяние на колебаниях молекул газов и жидкостей, сопровождающееся заметным изменением частоты, открытое Ч. Раманом в 1928 г. Проявляющиеся в спектре рассеянного излучения линии делятся на *стоксовы* (с уменьшением частоты — «красные спутники») и *антистоксовы* (с увеличением частоты — «фиолетовые спутники»).

Феноменологическое волновое описание эффекта Рамана заключается в модуляции дипольного момента молекулы с колебательной частотой  $\Omega$ . Действительно, если нормальная координата  $x_i$ , соответствующая какой-либо колебательной степени свободы, зависит от времени как  $x_i = a \cos \Omega t$ , электронная поляризуемость молекулы изменяется на частоте  $\Omega$ :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right)_0 x_i(t) = \alpha_0 + \mu a \cos \Omega t, \quad (15.3)$$

где  $\alpha_0$  — восприимчивость молекулы в равновесной конфигурации, а коэффициент  $\mu$  характеризует изменение восприимчивости при смещении атомов из равновесных положений. В результате наведенный дипольный момент молекулы (см. раздел 14.2) оказывается промодулированным с частотой колебаний  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon_0 \alpha E = \varepsilon_0 (\alpha_0 + \mu a \cos \Omega t) E_0 \cos \omega_0 t = \\ &= \varepsilon_0 \alpha_0 E_0 \cos \omega_0 t + \frac{\varepsilon_0 \mu a E_0}{2} [\cos((\omega_0 + \Omega)t) + \cos((\omega_0 - \Omega)t)]. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Таким образом, гармоническая амплитудная модуляция приводит к возникновению в спектре сигнала комбинационных частот, отличающихся от несущей частоты  $\omega_0$  на величину  $\Omega$  (рис. 15.8), которые и наблюдаются в рассеянном свете.

По квантовым представлениям, стоксова компонента с частотой  $\omega_0 - \Omega$  возникает, когда энергия фотона  $\hbar\omega$  уменьшается на величину, равную энергии колебательного возбуждения молекулы; антистоксова ( $\omega_0 + \Omega$ ) — когда квант энергии  $\hbar\Omega$  первоначально возбужденной молекулы передается излучению. Поскольку отношение числа возбужденных и невозбужденных молекул  $\exp(-\hbar\Omega/kT) \ll 1$ , интенсивность антистоксовой компоненты оказывается много меньше интенсивности стоксовой. Комбинационное рассеяние является мощным средством исследования структуры и свойств молекул.

<sup>1</sup> По аналогии с механикой, столкновения двух неупругих объектов, когда нарушается закон сохранения механической энергии.

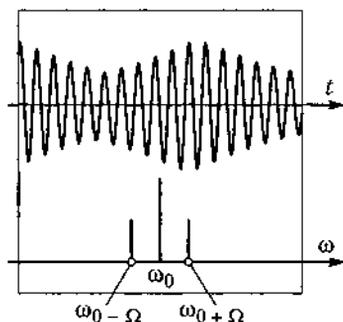


Рис. 15.8. Амплитудная модуляция и появление в спектре комбинационных частот

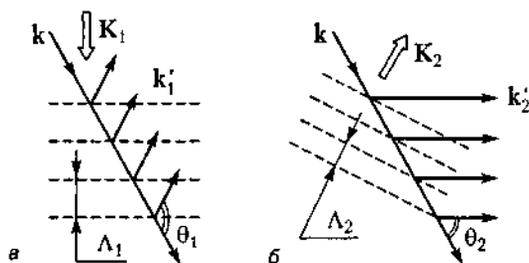


Рис. 15.9. Рассеяние на динамической решетке: стоксово (а) и антистоксово (б)

при тупом угле между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{K}$  (рис. 15.9, б).

С квантовой точки зрения рассеяние Мандельштама–Бриллюэна представляет собой рассеяние фотона исходного светового пучка с испусканием или поглощением кванта упругих колебаний среды — *фонона*, представляющего собой квазичастицу с энергией  $\hbar\Omega$  и импульсом  $\hbar\mathbf{K}$  (рис. 15.10).

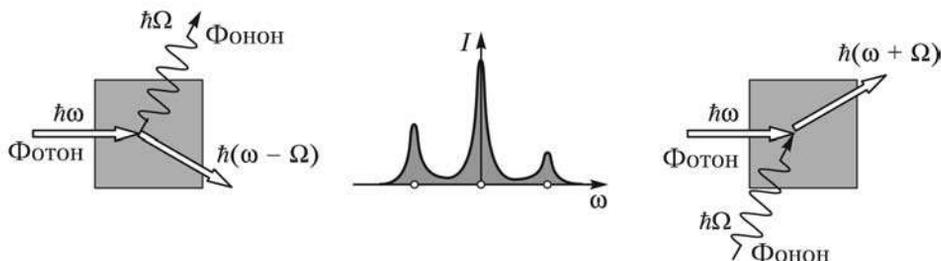


Рис. 15.10. Комбинационное рассеяние как результат взаимодействия фотона и фонона

При этом рассеяние происходит с соблюдением законов сохранения энергии  $\hbar\omega \pm \hbar\Omega = \hbar\omega'$  и импульса:  $\hbar\mathbf{k} \pm \hbar\mathbf{K} = \hbar\mathbf{k}'$ .

Красные и фиолетовые спутники появляются и при неупругом рассеянии света на колебаниях кристаллической решетки — так называемом *рассеянии Мандельштама–Бриллюэна*, при этом частотный сдвиг  $\Omega$  оказывается зависящим от угла рассеяния. Волновое описание этого эффекта опирается на формулу Вульфа–Брэггов (9.11) для наводимых в кристалле динамических дифракционных решеток.

Предположим, что в среде распространяется упругая волна с частотой  $\Omega$ , длиной волны  $\Lambda$  и волновым вектором  $\mathbf{K}$  (рис. 15.9). Периодические изменения плотности среды приводят к появлению динамической дифракционной решетки, перемещающейся в направлении  $\mathbf{K}$  со скоростью  $v = \Omega/K$ .

Условие дифракционных максимумов для такой решетки сводится к соотношению для волновых векторов  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} \pm \mathbf{K}$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор падающей,  $\mathbf{k}'$  — рассеянной волны. Знак « $-$ » соответствует красному смещению частоты, возникающему при остром угле между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{K}$  (рис. 15.9, а). Знак « $+$ » соответствует фиолетовому сдвигу частоты

# Часть 4

## **Квантовая и лазерная оптика**

## ГЛАВА 16    Квантовая теория излучения

Все рассмотренные в предыдущих главах оптические явления (за исключением неупругого рассеяния) имеют вполне удовлетворительное волновое описание. Даже дискретный характер атомарных спектров допускает классическую трактовку на языке затухающих колебаний.

Рассматриваемые ниже явления, в первую очередь — равновесное тепловое излучение, фотоэффект, световое давление, эффект Комптона, — получили наиболее логичное и законченное объяснение на основе иного механизма взаимодействия света с веществом. Этот механизм базируется на понятии фотона — светового кванта, минимальной порции световой энергии.

### 16.1. Законы теплового излучения

Излучение телами электромагнитных волн (свечение тел) требует энергетических затрат и может осуществляться за счет различных видов энергии. Если свечение происходит за счет внутренней (тепловой) энергии тела, оно называется *тепловым излучением*. Все остальные виды свечения, возбуждаемые за счет любого другого вида энергии, кроме тепловой, называются *люминесценцией*. В первую очередь, к ним относятся: *химилюминесценция* (свечение вещества при некоторых химических превращениях), *электролюминесценция* (свечение газового разряда под действием соударений заряженных частиц), *фотолюминесценция* (излучение, вызываемое предварительным освещением тела) и т. д.

В отличие от других видов излучения, тепловое может находиться в состоянии *термодинамического равновесия* с материальными телами. Рассмотрим несколько тел, нагретых до различной температуры и помещенных в замкнутую оболочку, полностью отражающую падающее на нее излучение (рис. 16.1, а). Такую систему называют еще *адиабатической*, поскольку в ней отсутствует теплообмен с окружающей средой. Каждое из этих тел испускает тепловое излучение, причем его интенсивность возрастает с повышением температуры тела. Одновременно тела полностью или частично поглощают падающее на них излучение. Через некоторое время температуры всех тел выравняются, а испущенная каждым телом лучистая энергия станет в среднем равной поглощенной энергии.

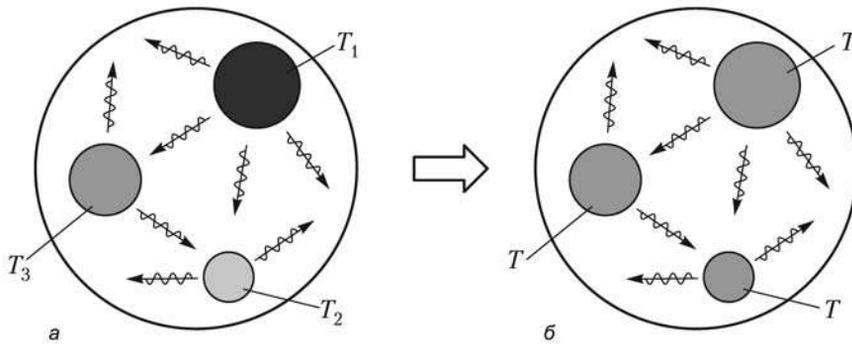


Рис. 16.1. Установление термодинамического равновесия

При этом плотность энергии излучения в пространстве между телами достигает определенной величины, соответствующей установившейся в системе температуре (рис. 16.1, б).

С увеличением температуры внутри оболочки возрастет энергия равновесного излучения и изменится его спектральный состав. Наблюдать эти изменения можно, проделав небольшое отверстие в стенке и регистрируя выходящее из него излучение.

Для описания распределения энергии по частотам введем зависящую от температуры *спектральную плотность излучения*  $U_\omega(T)$ , тогда величина  $U_\omega(T)d\omega$  будет представлять энергию единицы объема излучения с частотами от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Если в качестве независимой переменной взять не частоту, а длину волны, то получим спектральную плотность  $U_\lambda$ , для которой легко вывести соотношение

$$U_\lambda(T) = \left( \frac{2\pi c}{\lambda^2} \right) U_\omega(T). \quad (16.1)$$

Очевидно, что полная плотность излучения  $U(T)$  может быть найдена интегрированием  $U_\omega$  (или  $U_\lambda$ ) по всем частотам (или по всем длинам волн):

$$U(T) = \int_0^\infty U_\omega(T) d\omega = \int_0^\infty U_\lambda(T) d\lambda. \quad (16.2)$$

В соответствии с первым законом Кирхгофа, *равновесная спектральная плотность энергии зависит только от абсолютной температуры* и не зависит от количественного и качественного состава термодинамической системы. Это означает, что функция  $U_\omega(T)$  (или  $U_\lambda(T)$ ) является универсальной, независимой от вида тел, находящихся в оболочке, их числа, материала стенок, коэффициента отражения стенок и т. д.

Для теплового излучения тела, не находящегося в полости (в отсутствие равновесия с излучением), спектральное распределение зависит от материала поверхности. Для описания этого распределения введем понятие *испускательной способности* тела  $r_\omega$  (или  $r_\lambda$ ), которая представляет собой спектральную плотность потока энергии излучения, испускаемую единичной площадкой поверхности по всем направлениям. Испускательная способность измеряется в Дж/м<sup>2</sup>.

Полный поток излучения для всех длин волн дает *энергетическую светимость*  $R$  поверхности:

$$R = \int_0^{\infty} r_{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} r_{\lambda} d\lambda. \quad (16.3)$$

Всякое тело полностью или частично поглощает падающее на него излучение. *Поглощательная способность* (или спектральный коэффициент поглощения)  $a_{\omega}$  показывает, какая доля энергии падающего излучения данной частоты поглощается телом. Это безразмерная величина, которая может принимать значения от 0 до 1. Поглощательная способность зависит от температуры и свойств тела, например окраски. Тело, которое при любой температуре полностью поглощает всю энергию падающих на него электромагнитных волн, независимо от частоты, поляризации и направления распространения, называется *абсолютно черным телом* (АЧТ). Моделью АЧТ может служить замкнутая полость, в стенке которой имеется малое отверстие.

Рассмотрим поток равновесного теплового излучения  $\Phi_{\omega}$  в единичном спектральном интервале вблизи частоты  $\omega$ , падающий на единичную площадку поверхности тела. Так как равновесное излучение изотропно, то в пределах телесного угла  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  распространяется энергия, составляющая долю  $d\Omega/4\pi$  от всей энергии. Если выбранное направление образует угол  $\theta$  с нормалью к поверхности (рис 16.2), то поток  $d\Phi_{\omega}$ , заключенный в телесном угле  $d\Omega$ , связан со спектральной плотностью энергии  $U_{\omega}$  и равен

$$d\Phi_{\omega} = \frac{cU_{\omega} \cos\theta d\Omega}{4\pi}.$$

Полный поток со всех направлений

$$\Phi_{\omega} = \left( \frac{cU_{\omega}}{4\pi} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{cU_{\omega}}{4}. \quad (16.4)$$

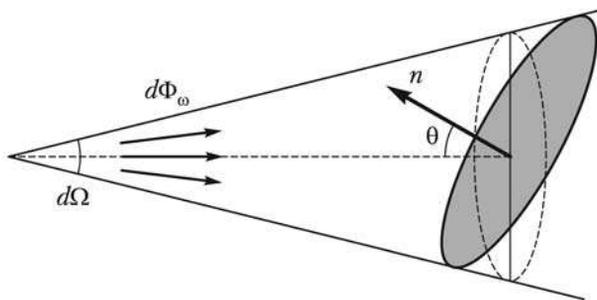


Рис. 16.2. К выводу второго закона Кирхгофа

Часть этого потока, равная  $a_{\omega}\Phi_{\omega}$ , поглощается, остальная часть  $(1 - a_{\omega})\Phi_{\omega}$  отражается. С отраженным потоком складывается поток собственного теплового излучения поверхности  $r_{\omega}$ . В условиях равновесия полный, исходящий от поверхности поток равен падающему:

$$(1 - a_{\omega})\Phi_{\omega} + r_{\omega} = \Phi_{\omega}, \quad (16.5)$$

откуда с учетом формулы (16.4) получим:

$$\frac{r_{\omega}}{a_{\omega}} = \frac{cU_{\omega}}{4}. \quad (16.6)$$

Соотношение (16.6) выражает *второй закон Кирхгофа*: отношение испускающей способности тела к его поглощательной способности не зависит от материала тела и совпадает (с точностью до множителя  $c/4$ ) со спектральной плотностью равновесного излучения. Это означает, что тело, сильнее поглощающее какие-либо лучи, будет эти лучи сильнее и испускать. При этом не следует смешивать испускание лучей с их отражением.

Для АЧТ  $a_{\omega} = 1$ , следовательно, спектральное распределение теплового излучения черного тела будет таким же, как у равновесного излучения при той же температуре. Именно поэтому равновесное излучение называют также *черным излучением*. В методе *оптической пирометрии* производится бесконтактное определение температуры путем сравнения энергетических и спектральных характеристик теплового излучения объекта с излучением эталонного АЧТ.

*Коэффициентом черноты* (степенью черноты) называется отношение испускающей способности тела к испускающей способности АЧТ. Если коэффициент черноты меньше единицы и не зависит от частоты излучения, то тело называют *серым*. Если коэффициент черноты различен в различных частях спектра, то тело называют *селективным* или *цветным*. Непрозрачные тела, у которых степень черноты равна нулю, не излучают и не поглощают электромагнитных волн. Падающее на них излучение эти зеркальные тела полностью отражают.

В 1893 г. Вином было доказано, что спектральная плотность черного излучения должна иметь универсальный вид:

$$U_{\omega}(T) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (16.7)$$

где  $f$  — некоторая функция отношения частоты к температуре, конкретный вид которой в рамках классической электромагнитной теории света и термодинамики установить невозможно.

Проинтегрируем соотношение Вина (16.7) по частотам, введя новую переменную  $x = \omega/T$ :

$$U(T) = \int_0^{\infty} \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = T^4 \int_0^{\infty} x^3 f(x) dx. \quad (16.8)$$

Поскольку интеграл не зависит от температуры, плотность равновесного излучения, а следовательно (в соответствии с (16.6)), и энергетическая светимость оказываются пропорциональными четвертой степени температуры:

$$R(T) = \sigma T^4. \quad (16.9)$$

Равенство (16.9) называется *законом Стефана—Больцмана*. Постоянная Стефана—Больцмана  $\sigma$  была определена из опыта, ее значение  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ .

Экспериментально установлено, что зависимость  $r_{\lambda}(T)$  (или  $U_{\lambda}(T)$ ), рассматриваемая как функция длины волны, имеет максимум при некотором значении  $\lambda_m$ , причем с увеличением температуры этот максимум смещается в сторону более

коротких длин волн. Перейдя в (16.7) от частот к длинам волн, с учетом (16.1) получим

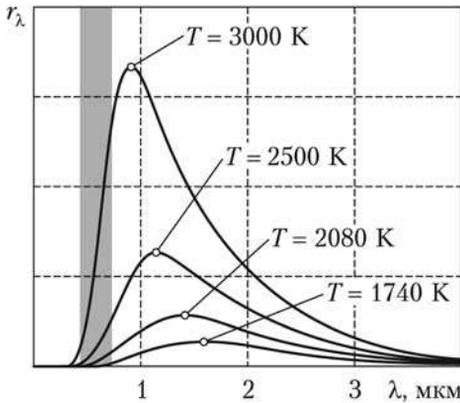
$$U_\lambda(T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \left( \frac{2\pi c}{\lambda} \right)^3 f \left( \frac{2\pi c}{\lambda T} \right) = T^5 f_1(\lambda T), \quad (16.10)$$

где  $f_1$  — функция, зависящая от произведения  $\lambda T$ . Продифференцировав ее, найдем, что при любой температуре максимумы зависимости  $U_\lambda(T)$  и  $r_\lambda(T)$  получаются при одном и том же значении  $\lambda_m T$ , что выражает закон смещения Вина:

$$\lambda_m T = b, \quad (16.11)$$

где константа  $b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

Реальные зависимости испускательной способности  $r_\lambda$  АЧТ при четырех температурах, отличающихся друг от друга в 1,2 раза, показаны на рис. 16.3. Видно, что даже при 3000 К максимум теплового излучения лежит в ИК-области (видимая часть спектра затенена). Значение спектральной плотности в максимуме пропорционально пятой степени температуры.



**Рис. 16.3.** Смещение максимума теплового излучения с ростом температуры (закон смещения Вина). Затенена видимая область спектра

Попробуем объяснить законы теплового излучения с точки зрения классической электродинамики. Поскольку спектральное распределение равновесного теплового излучения не зависит от того, какие именно тела находятся в тепловом равновесии, рассмотрим простейший вид излучателя: гармонический осциллятор с собственной частотой  $\omega_0$ , зарядом  $e$  и массой  $m$ . Ранее было показано (см. разделы 13.1 и 14.3), что такой осциллятор излучает и поглощает излучение только в узкой полосе частот вблизи  $\omega_0$ . Учитывая, что при равновесии поглощаемая мощность (пропорциональная  $U_\omega$ ) равна испускаемой (пропорциональной средней энергии осциллятора  $\langle \epsilon \rangle$ ), получим:

$$U_\omega = \frac{\omega^2 \langle \epsilon \rangle}{\pi^2 c^3}. \quad (16.12)$$

В соответствии с законом о равномерном распределении энергии, на каждую степень свободы приходится  $kT/2$  кинетической энергии. У осциллятора средние значения кинетической и потенциальной энергии одинаковы, так что

$$\langle \epsilon \rangle = kT. \quad (16.13)$$

Таким образом, для спектральной плотности равновесного теплового излучения получим формулу Рэлея—Джинса:

$$U_\omega = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}. \quad (16.14)$$

Нетрудно увидеть, что это соотношение удовлетворяет закону Вина (16.7).

Несмотря на то что с классической точки зрения вывод формулы Рэлея—Джинса безупречен, с экспериментом она согласуется лишь при больших длинах волн (малых частотах) и резко расходится с опытом для малых длин волн (рис. 16.4).

Экспериментальная кривая (сплошная линия) демонстрирует прохождение функции  $U_\omega$  максимума с последующим ее уменьшением с ростом частоты. В то же время  $U_\omega$ , вычисленная по формуле Рэлея—Джинса, не имеет никакого экстремума, монотонно возрастая с частотой. Более того, интегрирование выражения (16.14) по всем частотам дает для равновесной плотности энергии бесконечно большое значение. Этот результат получил название *ультрафиолетовой катастрофы*. Суть ее в том, что по классической теории получается, что вся энергия тела перейдет в энергию высоких частот излучения и установление термодинамического равновесия вообще невозможно. Расхождение формулы Рэлея—Джинса с опытом указывало на существование каких-то закономерностей, несовместимых с представлениями классической физики, и послужило одной из причин великой революции в физике в начале XX века.

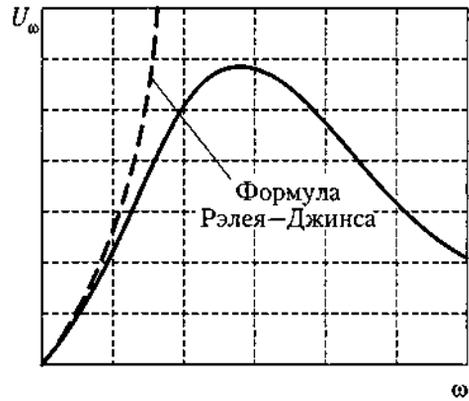


Рис. 16.4. Ультрафиолетовая катастрофа

## 16.2. Формула Планка

В 1900 г. Планком была получена формула для спектральной плотности равновесного теплового излучения в предположении, что энергия осциллятора может принимать не любые, а только определенные дискретные значения энергии  $\epsilon_n$ . По гипотезе Планка все разрешенные значения энергии осциллятора кратны некоторой наименьшей энергии:  $\epsilon_n = n\epsilon_0$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В этом случае средняя энергия осциллятора в формуле (16.12) не будет равна  $kT$ . Действительно, вероятность того, что осциллятор находится в состоянии с энергией  $\epsilon_n$ , в соответствии с распределением Больцмана пропорциональна  $\exp[-\epsilon_n/kT]$ . Тогда

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_n \epsilon_n \exp[-\epsilon_n/kT]}{\sum_n \exp[-\epsilon_n/kT]} = \frac{\sum_0^\infty n\epsilon_0 \exp[-n\epsilon_0/kT]}{\sum_0^\infty \exp[-n\epsilon_0/kT]} \quad (16.15)$$

Выражение в знаменателе (16.15) представляет собой геометрическую прогрессию и равно

$$S(\beta) = \frac{1}{[1 - \exp(-\beta\epsilon_0)]}, \text{ где } \beta = \frac{1}{kT}.$$

Выражение в числителе (16.15) может быть представлено как

$$\sum_0^{\infty} n \epsilon_0 \exp(-\beta n \epsilon_0) = -\frac{dS}{d\beta} = \frac{\epsilon_0 \exp(-\beta \epsilon_0)}{[1 - \exp(-\beta \epsilon_0)]^2}.$$

Таким образом, для средней энергии осциллятора находим:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\epsilon_0}{[\exp(\beta \epsilon_0) - 1]}. \quad (16.16)$$

Подставляя полученное значение в (16.12), получим вместо формулы Рэля—Джинса следующее выражение:

$$U_{\omega} = \frac{\omega^2 \epsilon_0}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\epsilon_0/kT) - 1}. \quad (16.17)$$

Формула (16.17) будет удовлетворять термодинамической формуле Вина (16.7), если энергия осциллятора пропорциональна частоте:

$$\epsilon_0 = \hbar \omega = h\nu. \quad (16.18)$$

Коэффициент пропорциональности  $h = 2\pi\hbar$  впоследствии был назван *постоянной Планка*. По современным данным,  $h = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. Окончательно для спектральной плотности равновесного теплового излучения получим *формулу Планка*:

$$U_{\omega}(T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar \omega/kT) - 1}. \quad (16.19)$$

Покажем, что обсуждавшиеся выше классические соотношения для теплового излучения могут быть получены из формулы Планка в качестве предельных случаев.

- *Формула Рэля—Джинса*. Получается из формулы Планка при низких частотах или высоких температурах, когда  $\hbar \omega/kT \ll 1$ . Разложив экспоненту в ряд  $\exp[\hbar \omega/kT] \approx 1 + \hbar \omega/kT$ , получим формулу (16.14).
- *Закон Стефана—Больцмана* (16.9). Энергетическая светимость АЧТ, определяемая по формуле Планка, равна

$$R(T) = \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{d\omega}{\exp(\hbar \omega/kT) - 1} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left( \frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1},$$

где  $x = \hbar \omega/kT$ . Интеграл в последнем выражении равен  $\pi^4/15$ . Таким образом, приходим к закону Стефана—Больцмана  $R(T) = \sigma T^4$  с постоянной

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}.$$

- *Закон смещения Вина* (16.11). Перейдем в формуле Планка от частот к длинам волн. С учетом (16.1) получим:

$$U_{\lambda}(T) = \frac{16 \pi^2 c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(2\pi \hbar c/kT\lambda) - 1}.$$

Введя безразмерную переменную  $x = 2\pi\hbar c/kT\lambda$ , сведем задачу к нахождению максимума функции

$$f_\lambda(x) = \frac{x^5}{e^x - 1}.$$

Продифференцировав, найдем  $x = 5(1 - e^{-x})$ . Это уравнение может быть решено численно, его корень  $x = 4,965$ . Отсюда

$$\lambda_m T = \frac{2\pi\hbar c}{4,965k} = b. \quad (16.20)$$

Полученное из (16.20) численное значение константы Вина  $b$  в точности совпадает с приведенным выше экспериментальным значением.

Напомним, что по классической теории энергия (интенсивность) электромагнитных волн определяется квадратом амплитуды и никак не связана с частотой. Гипотеза Планка о пропорциональности энергии и частоты фактически заставила вновь (после Ньютона) обратиться к корпускулярной теории света.

### 16.3. Спонтанное и вынужденное излучение

Развивая идеи Планка, Эйнштейн в 1905 г. предположил, что дискретный характер присущ не только процессам испускания и поглощения, но и самому свету, представляющему собой поток световых квантов — *фотонов*. По современным физическим представлениям свет обладает так называемым *корпускулярно-волновым дуализмом*, то есть в одних экспериментальных ситуациях проявляют себя преимущественно квантовые свойства света, в других — волновые.

Элементарная квантовая теория теплового излучения строится на основе двухуровневой модели атома. Предполагается, что атом имеет два дискретных энергетических состояния: основное с энергией  $W_0$  и возбужденное с энергией  $W_1$ . Число атомов в каждом из этих состояний —  $N_0$  и  $N_1$  — называют *населенностями* соответствующих уровней. Разность энергий основного и возбужденного состояний равна энергии светового кванта, поглощаемого при переходе  $0 \rightarrow 1$  или излучаемого при переходе  $1 \rightarrow 0$ :

$$\hbar\omega = W_1 - W_0. \quad (16.21)$$

По Эйнштейну, возможны следующие типы радиационных переходов между энергетическими уровнями:

- *Спонтанное излучение* (рис. 16.5, а). Атом исходно находится в возбужденном состоянии  $W_1$  и в некоторый случайный момент времени самопроизвольно переходит в основное состояние, испуская фотон. Этот процесс характеризуется вероятностью перехода в единицу времени  $A_{10}$ .
- *Поглощение* (рис. 16.5, б). Атом находится в основном состоянии и, поглощая квант света, переходит в возбужденное состояние (из которого он через некоторое время вернется в основное состояние). Вероятность такого перехода пропорциональна плотности энергии электромагнитного поля  $U_\omega$  на частоте перехода и некоторому коэффициенту  $B_{01}$ , зависящему от конкретного сорта атомов. При каждом акте поглощения число фотонов уменьшается на единицу.

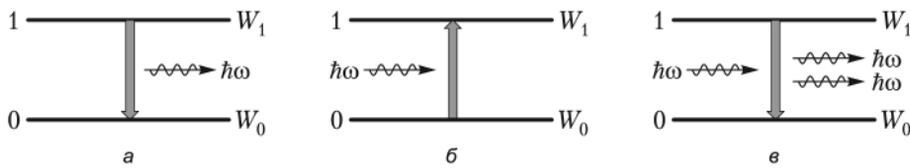


Рис. 16.5. Типы радиационных переходов в двухуровневой системе

Указанные типы переходов вполне соответствуют классической теории, однако они не могут обеспечить выполнение условий энергетического баланса. Действительно, если вероятность спонтанного излучения зависит только от внутренних свойств атомов, то вероятность поглощения всегда связана с количеством падающих фотонов с данной частотой. Поэтому детальное равновесие (то есть равновесие для всех частот) не может быть установлено. Для устранения этого противоречия Эйнштейн ввел еще один тип перехода.

□ **Вынужденное излучение** (рис. 16.5, в). Атом переходит из возбужденного состояния в основное, но не самопроизвольно, а под воздействием внешнего электромагнитного поля. Вероятность вынужденного излучения равна  $B_{10} \cdot U_\omega$ . Число фотонов увеличивается на единицу. В отличие от спонтанного процесса, при котором фотоны испускаются различными атомами независимо друг от друга, при вынужденном излучении новый фотон неотличим по своим свойствам от фотона, вызвавшего переход. Все фотоны, возникшие в результате вынужденного излучения, имеют одинаковую частоту, фазу, направление распространения и поляризацию. Таким образом, вынужденное излучение *когерентно* (см. главу 5).

Рассмотрим сначала спонтанное излучение, благодаря которому светятся обычные (нелазерные) источники света. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  в состоянии  $W_1$  было возбуждено  $N_{10}$  атомов (например, коротким импульсом тока). С вероятностью  $A_{10}$  атомы переходят в основное состояние, в результате чего к моменту  $t$  в возбужденном состоянии остается  $N_1$  атомов. За время  $dt$  спонтанный переход совершат в среднем

$$dN_{10} = A_{10} N_1 dt \quad (16.22)$$

атомов. Соответственно, изменение числа атомов на верхнем уровне равно  $dN_1 = -dN_{10} = -A_{10} N_1 dt$ . Интегрируя, получим, что число возбужденных атомов убывает по экспоненциальному закону

$$N_1(t) = N_{10} \exp(-A_{10} t). \quad (16.23)$$

Интенсивность спонтанного излучения пропорциональна числу испущенных фотонов, то есть числу переходов. Из формул (16.23) и (16.22) получаем:

$$I(t) = I_0 \exp(-A_{10} t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right), \quad (16.24)$$

где  $\tau_1 = 1/A_{10}$  — *радиационное время жизни* уровня 1.

Формально выражение (16.24) совпадает с классической формулой излучения затухающего осциллятора (см. раздел 13.1) с точностью до замены постоянной радиационного трения  $\gamma$  на коэффициент Эйнштейна  $A_{10}$ . Соответственно, остается

справедливым обсуждение вопроса о естественной ширине спектральной линии:  $\Delta\omega_{\text{ст}} = A_{10} = 1/\tau_1$ . Однако физический смысл времени жизни в классическом и квантовом случаях совершенно различен. По классической электродинамике все излучающие осцилляторы одновременно совершают затухающие колебания и время  $\tau$  одинаково для всех осцилляторов с данной частотой. По квантовым представлениям, спонтанные переходы происходят в случайные моменты времени, и понятие времени жизни имеет статистический смысл, применимый к большому ансамблю атомов. Кроме того, коэффициент Эйнштейна зависит от вида атомов и от того, в какое именно возбужденное состояние переведен атом. Времена жизни различных состояний могут различаться на много порядков, однако для большого количества спектральных линий справедлива оценка  $\tau \sim 10^{-8} \dots 10^{-9}$  с.

Статистический характер спонтанного излучения приводит к тому, что фазы направления распространения и поляризации волн, испущенных разными атомами, не скоррелированы друг с другом — именно поэтому спонтанное излучение *некогерентно*.

Учтем теперь и вынужденное излучение. В состоянии термодинамического равновесия число переходов между уровнями  $1 \rightarrow 0$  должно равняться числу переходов  $0 \rightarrow 1$ , следовательно

$$N_1(A_{10} + B_{10}U_\omega) = N_0B_{01}U_\omega. \quad (16.25)$$

Равновесные населенности уровней связаны соотношением Больцмана

$$\frac{N_1}{N_0} = \exp\left(-\frac{W_1 - W_0}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right).$$

Чем больше энергия уровня, тем меньше его населенность.

Кроме того, при высокой температуре, когда плотность энергии высока, спонтанным излучением можно пренебречь, а населенности уровней выравниваются, откуда следует, что  $B_{10} = B_{01}$ . Подставив эти соотношения в формулу (16.25), для спектральной плотности равновесного теплового излучения получим:

$$U_\omega(T) = \frac{A_{10}/B_{10}}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \quad (16.26)$$

Это выражение совпадает с формулой Планка (16.19) при

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}.$$

Таким образом, совместное действие квантовых механизмов спонтанного и вынужденного излучения обеспечивает экспериментально наблюдаемую спектральную плотность равновесного теплового излучения.

## 16.4. Квантовые эффекты в оптике

Проявления квантовых свойств света отнюдь не исчерпываются тепловым излучением. В конце XIX – начале XX в. были получены экспериментальные данные, которые могли быть последовательно интерпретированы на основе квантовых представлений. Обсудим некоторые из них.

## Фотоэффект

Испускание электронов веществом под действием света было открыто Г. Герцем еще в 1887 г. Схема наблюдения фотоэффекта показана на рис. 16.6, а. Свет, проникающий через кварцевое окошко, освещает фотокатод  $K$ . Под действием приложенного электрического напряжения электроны перемещаются к аноду  $A$ , в результате чего в цепи прибора течет ток, измеряемый амперметром.

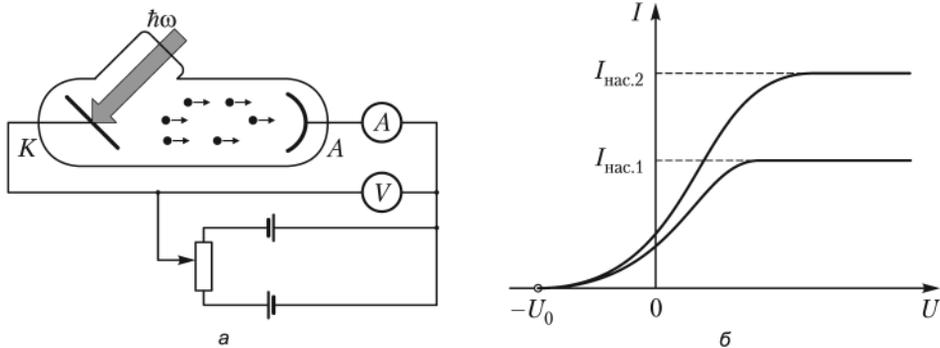


Рис. 16.6. Фотоэффект (а) и вольтамперные характеристики фотоэлемента (б)

Вольтамперная характеристика, то есть зависимость фототока  $I$  от величины приложенного напряжения  $U$  показана на рис. 16.6, б. Видно, что при  $U = 0$  существует определенное количество электронов, обладающих достаточными скоростями, чтобы долететь до анода без помощи ускоряющего поля. С ростом  $U$  сила тока растет, однако затем наступает насыщение, связанное с тем, что все электроны, вылетевшие из катода, достигают анода. Величина тока насыщения  $I_{\text{нас}}$ , а следовательно, и число вылетающих в единицу времени электронов пропорциональны интенсивности света.

Для обращения силы тока в нуль нужно приложить задерживающее напряжение  $U_0$ . По этому напряжению можно определить максимальную скорость фотоэлектронов  $v_m$ :

$$eU_0 = \frac{mv_m^2}{2}.$$

Величина  $v_m$  не зависит от интенсивности света, а определяется только его частотой. Для каждого вещества существует минимальная пороговая частота излучения (максимальная длина волны  $\lambda_0$ ), при которой возникает фотоэффект. Если длина волны падающего излучения превышает эту *красную границу фотоэффекта*, то фотоэлектроны отсутствуют даже при достаточно большой интенсивности облучающего света.

Указанные закономерности противоречат классической теории, по которой энергия фотоэлектронов должна определяться интенсивностью света. В 1905 г. экспериментальные закономерности фотоэффекта были объяснены Эйнштейном на основе гипотезы о световых квантах. По этой теории энергия фотона  $\hbar\omega$  целиком передается электрону. Часть ее (так называемая *работа выхода*  $A$ ) затрачивается на освобождение электрона из вещества, остаток определяет кине-

тическую энергию электрона. Таким образом, уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, по сути представляющее закон сохранения энергии, имеет вид:

$$\hbar\omega = A + \frac{mv^2}{2}. \quad (16.27)$$

Красная граница фотоэффекта соответствует энергии фотона, равной работе выхода, то есть нулевой кинетической энергии освобожденного электрона. Максимальная длина волны излучения, вызывающего фотоэффект, равна

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{A}. \quad (16.28)$$

Для большинства металлов  $\lambda_0$  лежит в ультрафиолетовой области, только у щелочных металлов красная граница попадает в видимый диапазон, поэтому именно они используются для покрытия фотокатодов.

### Световое давление

Давление света, впервые обнаруженное в опытах П. Н. Лебедева в 1900 г., может быть интерпретировано как результат передачи импульса фотонов поглощающей или отражающей стенке (рис. 16.7). По известной релятивистской формуле Эйнштейна, энергия фотона может быть записана как  $\hbar\omega = mc^2$ , откуда находим, что импульс фотона

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k. \quad (16.29)$$

При нормальном падении каждый поглощенный фотон передает стенке импульс  $p$ , отраженный —  $2p$ . При коэффициенте отражения  $R$  из общего потока в  $N$  фотонов отразится  $NR$  частиц, а  $N(1 - R)$  поглотится. Число фотонов, попавших на поверхность за единицу времени, может быть выражено через объемную плотность излучения  $U$ :

$$N\hbar\omega = Uc. \quad (16.30)$$

Из формул (16.29) и (16.30) получаем для переданного стенке импульса, то есть для величины светового давления  $P$  соотношение<sup>1</sup>

$$P = U(1 + R). \quad (16.31)$$

### Эффект Комптона

В 1923 г. было обнаружено, что при рассеянии рентгеновского излучения на мишени из вещества с небольшим атомным номером появляется спектральная ком-

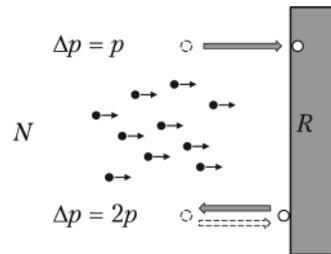


Рис. 16.7. Световое давление

<sup>1</sup> Интересно, что точно такое же выражение получается и в чисто классической модели как результат взаимодействия электрического и магнитного полей волны с зарядами в веществе. В последнем случае сила светового давления выражается через силу Лоренца, действующую на заряды, ускоренные электрическим полем световой волны, со стороны магнитного поля той же волны.

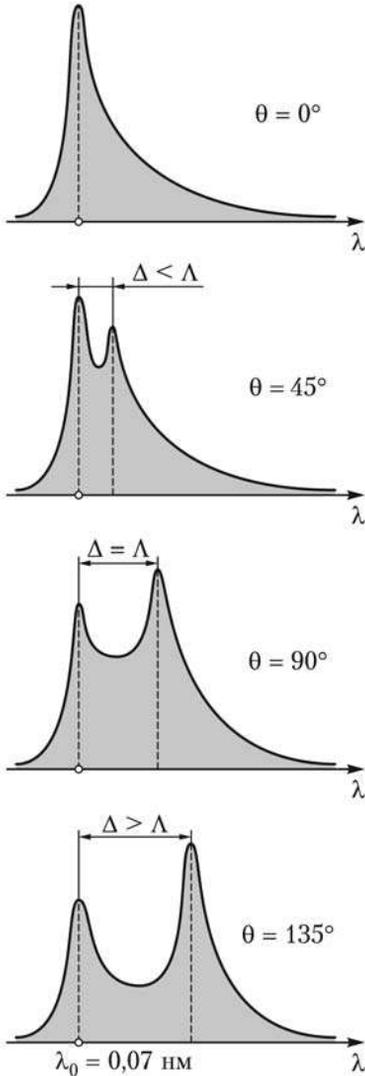


Рис. 16.8. Спектральный сдвиг при комптоновском рассеянии рентгеновских лучей

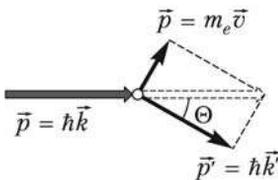


Рис. 16.9. Эффект Комптона как рассеяние фотона на электроне

понента, смещенная в сторону длинных волн (эффект Комптона). Величина смещения непостоянна и зависит от угла рассеяния. Пример экспериментальных кривых Комpton-эффекта в графите при его освещении рентгеновским излучением с  $\lambda = 0,07$  нм ( $K_\alpha$  линия молибдена) приведен на рис. 16.8.

Элементарная теория этого эффекта рассматривает упругое рассеяние фотона на электроне (рис. 16.9).

В атомах легких элементов энергия связи электрона около 10 эВ, что на несколько порядков меньше энергии рентгеновского фотона ( $\sim 10$  кэВ), поэтому электроны в этих опытах можно считать практически свободными. Запишем законы сохранения энергии и импульса при упругом ударе:

$$\begin{cases} \hbar\omega = \hbar\omega' + \frac{p^2}{2m}, \\ \hbar\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k}' + \mathbf{p}. \end{cases} \quad (16.32)$$

где  $\hbar\mathbf{k}$  и  $\hbar\mathbf{k}'$  — импульс фотона до и после столкновения,  $\mathbf{p}$  — импульс электрона после удара. По теореме косинусов из второго уравнения (16.32) находим

$$p^2 = (\hbar k)^2 + (\hbar k')^2 - 2\hbar^2 k k' \cos \theta.$$

Подставив в это выражение квадрат импульса электрона из закона сохранения энергии и учтя, что  $k = \omega/c$ , получим:

$$2m\hbar(\omega - \omega') = (\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\theta)\frac{\hbar^2}{c^2}. \quad (16.33)$$

Поскольку  $\hbar\omega/mc^2 \ll 1$ , изменение частоты  $\Delta\omega = \omega' - \omega \ll \omega$ , а  $\Delta\lambda/\lambda = -\Delta\omega/\omega$ , из (16.33) окончательно получим, что изменение длины волны равно

$$\Delta\lambda = \frac{2\hbar}{mc} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\Lambda \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (16.34)$$

Входящая в выражение (16.34) константа  $\Lambda = \hbar/(mc) = 0,00246$  нм называется *комптоновской длиной волны электрона*.

Таким образом, в ряде эффектов (интерференция, дифракция) свет проявляет себя как электромагнитная волна, в других случаях (фотоэффект, эффект Комптона) — как поток фотонов. Это — проявления уже

упомянутого корпускулярно-волнового дуализма, который присущ не только фотонам, но и всем другим частицам микромира, и находит свое объяснение в рамках квантовой механики.

## Примеры решения задач

**Пример 16.1.** В какой области спектра лежат максимумы излучения чернокожего африканца и человека с белой кожей? Считайте, что они излучают как абсолютно черные тела.

*Решение*

Реально человек не является абсолютно черным телом. Но при температуре кожного покрова человека коэффициент серости у белой и черной кожи практически одинаков. Поэтому можно считать, что максимум излучения и того и другого можно рассчитать по закону смещения Вина (16.11):  $\lambda_m T_{\text{тел}} = b$ , откуда

$$\lambda_m = \frac{b}{T_{\text{тел}}} = 9,35 \text{ мкм.}$$

**Пример 16.2.** Чему равна равновесная температура черной пластинки, помещенной перпендикулярно солнечным лучам? Расстояние от Земли до Солнца  $L = 1,5 \cdot 10^{11}$  м, температура поверхности Солнца  $T_C = 5760$  К, радиус Солнца  $r_C = 7 \cdot 10^8$  м. Конвекцией и теплопроводностью пренебречь.

*Решение*

По мере нагрева пластинки солнечным излучением и роста ее температуры будет соответственно увеличиваться и энергия, испускаемая ею в виде теплового излучения. Равновесие установится, когда излучаемая мощность станет равен поглощаемой:  $N_{\text{погл}} = N_{\text{изл}}$ . Мощность, поглощаемая пластинкой, будет равна потоку излучения Солнца, приходящемуся на единицу поверхности сферы радиусом Солнце–Земля, умноженному на площадь пластинки:

$$N_{\text{погл}} = \frac{N_C \cdot S_{\text{пл}}}{4\pi L^2}.$$

Испускаемая всей поверхностью Солнца мощность может быть записана как  $N_C = R_C \cdot 4\pi r_C^2$ , где  $R_C$  — излучательная способность Солнца, равная по закону Стефана-Больцмана (16.9)  $R_C = \sigma T_C^4$ . Аналогично, мощность излучения пластинки  $N_{\text{изл}} = R_{\text{пл}} \cdot S_{\text{пл}}$ , где излучательная способность пластинки  $R_{\text{пл}} = \sigma T_{\text{пл}}^4$ . Таким образом, уравнение энергетического баланса принимает вид

$$\frac{\sigma T_C^4 4\pi r_C^2 S_{\text{пл}}}{4\pi L^2} = \sigma T_{\text{пл}}^4 S_{\text{пл}},$$

откуда

$$T_{\text{пл}} = T_C \sqrt{\frac{r_C}{L}} = 393,4 \text{ К} \approx 120 \text{ }^\circ\text{C}.$$

**Пример 16.3.** При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длиной волны  $\lambda_1 = 0,35$  мкм и  $\lambda_2 = 0,54$  мкм обнаружили, что соответствующим

ные максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в 2 раза. Найдите работу выхода электронов с поверхности этого металла.

*Решение*

Запишем уравнения фотоэффекта Эйнштейна для обоих случаев:

$$\begin{cases} h\nu_1 = A + \frac{mv_{1\max}^2}{2}, \\ h\nu_2 = A + \frac{mv_{2\max}^2}{2} \end{cases}$$

Поскольку работа выхода электронов  $A$  есть константа для данного металла, выражаем ее из обоих равенств и, учитывая что  $v_{1\max} = 2v_{2\max}$ , получаем

$$h(\nu_1 - \nu_2) = \frac{m(4v_{2\max}^2 - v_{2\max}^2)}{2}.$$

Перейдя от частоты к длине волны ( $\nu = c/\lambda$ ), найдем

$$\frac{mv_{2\max}^2}{2} = \frac{hc(\lambda_2 - \lambda_1)}{3\lambda_1\lambda_2}.$$

Подставив это значение кинетической энергии фотоэлектронов в уравнение Эйнштейна, получим выражение для работы выхода

$$A = \frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc(\lambda_2 - \lambda_1)}{3\lambda_1\lambda_2} = \frac{hc(4\lambda_1 - \lambda_2)}{3\lambda_1\lambda_2} = 30,2 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

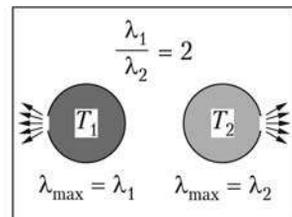
Переведа эту величину в обычные для атомной физики единицы — электрон-вольты, окончательно получим

$$A = \frac{30,2 \cdot 10^{-20}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,89 \text{ эВ}.$$

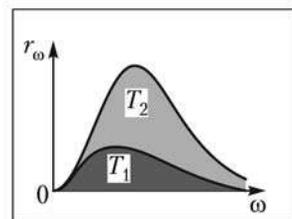
Эта величина работы выхода соответствует цезию.

## Задачи

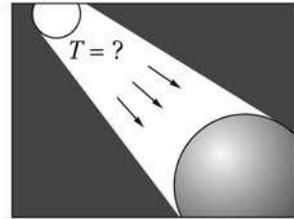
**16.1.** Каково соотношение температур  $T_1/T_2$  источников излучения (АЧТ), если отношение длин волн, соответствующих максимуму их излучения,  $\lambda_1/\lambda_2 = 2$ ?



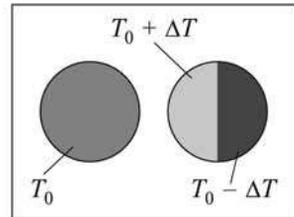
**16.2.** Температура АЧТ возросла с 500 до 1500 °С. Во сколько раз увеличилась его интегральная энергетическая светимость?



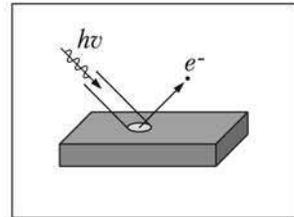
**16.3.** Интенсивность солнечной радиации вблизи Земли за пределами ее атмосферы (солнечная постоянная)  $J = 1350 \text{ Вт/м}^2$ . Приняв, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, определите температуру его излучающей поверхности.



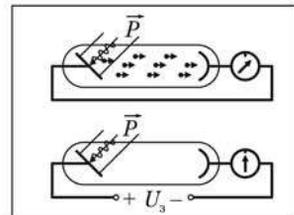
**16.4.** Как изменилось бы общее количество энергии, излучаемой Солнцем, если бы одна половина его поверхности нагрелась на  $\Delta T$ , а другая на столько же охладилась?



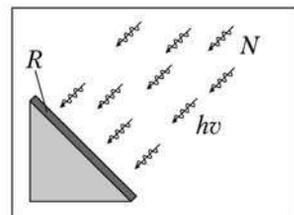
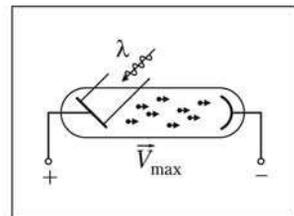
**16.5.** Красная граница фотоэффекта для рубидия равна  $540 \text{ нм}$ . Определите работу выхода и максимальную скорость электронов при освещении поверхности металла светом с длиной волны  $\lambda = 400 \text{ нм}$ .



**16.6.** Выбиваемые светом при фотоэффекте электроны полностью задерживаются обратным потенциалом  $4 \text{ В}$ . Красная граница фотоэффекта  $0,6 \text{ мкм}$ . Определите частоту падающего света.



**16.7.** Солнечная батарея  $R$  площадью  $5 \text{ м}^2$  с  $50\%$  отражением развернута перпендикулярно солнечным лучам. Считая среднюю длину волны  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ , оцените световое давление при попадании  $N = 6 \cdot 10^{13}$  фотонов в секунду на  $1 \text{ см}^2$ .



# ГЛАВА 17 Лазеры

Одной из наиболее эффективных и практически значимых реализаций принципов квантовой оптики стало создание лазеров — уникальных источников когерентного высоконаправленного мощного излучения.

Принципы работы лазеров основаны на уже рассмотренном механизме вынужденного излучения, позволяющем в неравновесных условиях добиваться усиления интенсивности излучения по мере прохождения среды с так называемой инверсной населенностью.

## 17.1. Принципы усиления света

При распространении светового потока в веществе его энергия может переходить во внутреннюю энергию атомарных систем за счет поглощения (рис. 17.1).

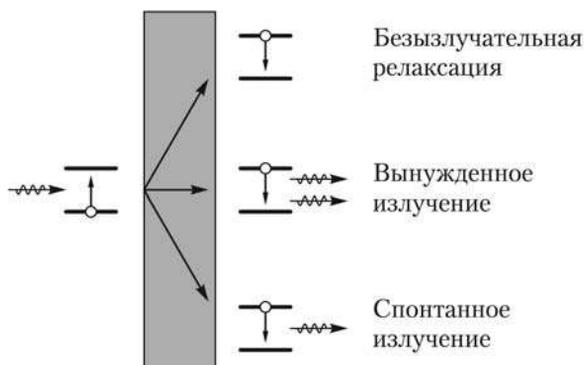


Рис. 17.1. Преобразование энергии при поглощении света в веществе

Часть этой энергии преобразуется в тепловые колебания решетки благодаря механизму *безызлучательной релаксации*. Оставшаяся часть поглощенной энергии высвечивается в виде спонтанного и вынужденного излучения. При этом только вынужденные переходы, для которых выполняются условия когерентности, приводят к усилению направленного потока фотонов. Спонтанное же излучение направлено во все стороны.

Изменение числа фотонов, распространяющихся в прямом направлении, при прохождении слоя вещества толщиной  $dz = cdt/n$  равно

$$dN = \frac{(N_1 B_{10} - N_0 B_{01}) U_\omega n dz}{c}. \quad (17.1)$$

Так как  $B_{10} = B_{01}$ , а в соответствии с распределением Больцмана равновесная населенность возбужденного состояния меньше, чем основного  $N_1 < N_0$ , то  $dN < 0$  и излучение при прохождении вещества ослабляется. Поскольку спектральная плотность излучения  $U_\omega$  пропорциональна полному числу фотонов с данной частотой, для интенсивности света получаем обычный закон Бугера (11.7).  $I(z) = I_0 \exp(-\alpha z)$ , где  $\alpha$  — коэффициент поглощения, равный

$$\alpha = \hbar \omega B (N_0 - N_1) \frac{n}{c}. \quad (17.2)$$

Часто вместо коэффициента поглощения используют величину  $\sigma = \alpha / (N_0 - N_1)$ , которая имеет размерность площади и называется *сечением поглощения*.

Очевидно, добившись изменения знака  $\alpha$ , можно реализовать условия оптического усиления. Для этого необходимо, чтобы населенность верхнего уровня хотя бы на некоторое время превзошла населенность нижнего, то есть была бы достигнута *инверсная населенность среды*. Нетрудно заметить, что в двухуровневой схеме нельзя добиться инверсии населенностей. Действительно, в соответствии с принципом детального равновесия, увеличение количества переходов  $0 \rightarrow 1$  сопровождается ростом числа обратных переходов, при этом конкретный механизм, вызывающий переходы, не имеет значения. В пределе, при очень большой вероятности перехода населенности уровней выравниваются (*условия насыщения*)  $N_0 = N_1$ , то есть процессы вынужденного излучения и поглощения компенсируются, и среда становится прозрачной.

Для создания инверсной населенности и получения оптического усиления на резонансной частоте используются трех- и четырехуровневые схемы. В трехуровневой схеме первого рода (рис. 17.2, а) накачка осуществляется в систему энергетических состояний 1 с малым временем жизни и быстрой релаксацией на долгоживущий (*метастабильный*) уровень 2. Для получения инверсии на уровне 2 нужно накопить больше половины всех атомов. В трехуровневой схеме вто-

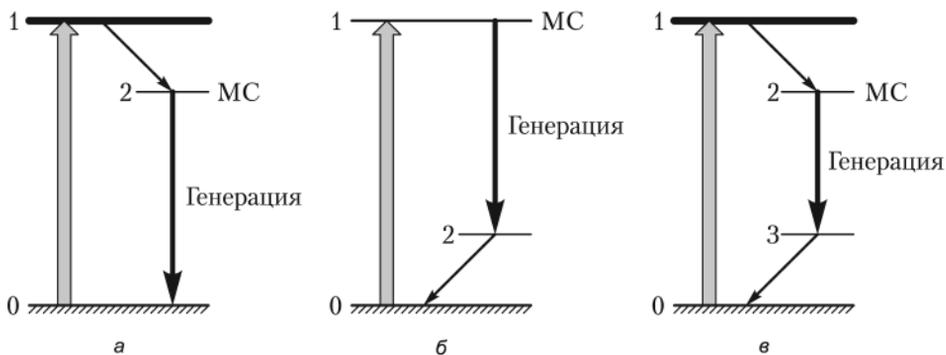


Рис. 17.2. Трехуровневые (а, б) и четырехуровневая (в) схемы получения инверсной населенности

рого рода (рис. 17.2, б) инверсия создается между метастабильным уровнем 1 и возбужденным уровнем 2. За счет высокого положения и быстрой релаксации населенность уровня 2 может быть очень малой, поэтому для получения инверсии количество атомов на уровне 1 может составлять малую долю от общего числа. Четырехуровневая схема (рис. 17.2, в) представляет собой комбинацию двух трехуровневых.

Легко видеть, что минимальная энергия накачки, необходимая для излучения одного вынужденного фотона, равна  $\hbar\omega_1$ , так что КПД оптического усилителя не может превысить  $\hbar\omega_2/\hbar\omega_1$  в трехуровневой схеме первого рода или  $\hbar\omega_{23}/\hbar\omega_1$  в четырехуровневой.

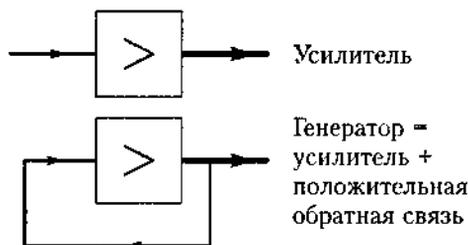


Рис. 17.3. Прохождение сигнала через усилитель и генератор

Известно, что любой усилитель сигнала можно превратить в генератор, если дополнить его *положительной обратной связью*, то есть направить часть выходного сигнала на вход (рис. 17.3). *Лазер* (от *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) — генератор когерентного оптического излучения, основанный на явлении вынужденного излучения в среде с инверсной населенностью, в котором обратная связь осуществляется с помощью *открытого* (незамкнутого) *резонатора*. В простейшем случае резонатор выполнен в виде *интерферометра Фабри—Перо* (см. раздел 6.5), одно из зеркал которого полностью отражающее, а второе обладает конечным пропусканием на уровне 2–6 % для вывода излучения. Таким образом, более 90 % энергии при каждом отражении возвращается в систему, создавая условия для возникновения генерации. Подробнее особенности открытых лазерных резонаторов обсуждаются в разделе 17.3.

## 17.2. Основные типы лазеров

### Рубиновый лазер

Впервые лазерная генерация была получена на кристалле рубина ( $\lambda = 694,3$  нм), химически представляющего собой корунд ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), в котором часть трехвалентных ионов алюминия замещены ионами хрома (~0,05 %). Именно их концентрация и определяет цвет рубина — от бледно-розового до темно-красного.

Схема уровней  $\text{Cr}^{3+}$  приведена на рис. 17.4, а. Накачка рубина осуществляется светом от мощных ламп-вспышек, подобно тому, как это делается в фотографии. Ионы хрома обладают сильным поглощением на двух широких полосах

в синие-зеленой области спектра. Часть света, которая соответствует по частоте этим полосам, переводит ионы  $\text{Cr}^{3+}$  на уровни  $^4F$

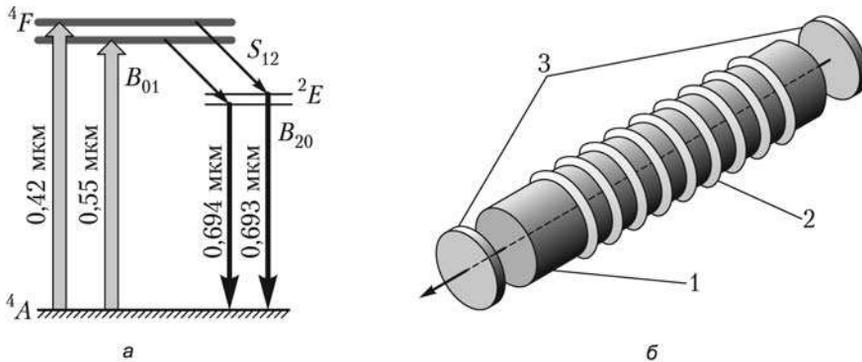


Рис. 17.4. Схема уровней (а) и конструкция (б) рубинового лазера

Процесс быстрой релаксации  $S_{12}$  за время  $\tau_1 \approx 5 \cdot 10^{-8}$  с на верхний лазерный уровень  $^2E$  с большим временем жизни ( $\tau_2 \approx 3 \cdot 10^{-3}$  с) позволяет накопить на этом уровне больше половины атомов. Тем самым создается инверсная населенность между долгоживущим уровнем  $^2E$  и основным состоянием, являющимся нижним лазерным уровнем. Таким образом, рубиновый лазер — трехуровневый, 1-го рода.

Типичный режим работы рубинового лазера — импульсный с длительностью импульса генерации  $\sim 1$  мс. При энергии в импульсе несколько джоулей мощность излучения достигает десятков киловатт. Генерация происходит на длинах волн красной части спектра.

Конструкция рубинового лазера показана на рис. 17.4, б, на котором 1 — кристалл рубина, 2 — спиральная лампа-вспышка, 3 — зеркала резонатора.

## Неодимовый лазер

Активным элементом неодимовых лазеров ( $\lambda = 1,06$  мкм) непрерывного действия служит кристалл алюмо-итриевого граната ( $\text{Y}_3\text{Al}_2\text{O}_3$  или YAG), в котором часть ионов  $\text{Y}^{3+}$  замещена ионами  $\text{Nd}^{3+}$ . Импульсный режим генерации реализуется на менее теплопроводном стекле, активированном ионами  $\text{Nd}^{3+}$ . Когерентное излучение в ближнем ИК-диапазоне получают по четырехуровневой схеме с оптической накачкой (рис. 17.5, а). Нижний лазерный уровень лежит выше основного состояния на  $\Delta E = 0,3$  эВ, поэтому его населенность в  $\exp(\Delta E/(kT)) \cong e^{10}$  раз меньше населенности основного состояния. Поэтому получить инверсную населенность оказывается значительно легче, чем в случае рубина. Пороговая мощность накачки YAG:  $\text{Nd}^{3+}$  лазера оказывается на три порядка меньше, чем у рубина, а КПД — значительно выше.

Накачка излучением на границе видимого и ИК-диапазонов приводит к возбуждению ионов  $\text{Nd}^{3+}$  в состояние  $^2H$ . Безызлучательная релаксация  $S_{12}$  переводит их в состояние  $^4F$  (верхнее лазерное), а нижний лазерный уровень  $^4I$  эффективно освобождается за счет спонтанного излучения  $A_{30}$ .

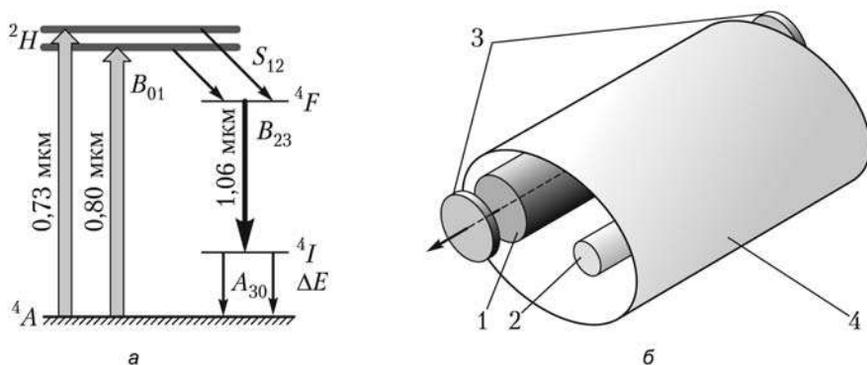


Рис. 17.5. Схема уровней (а) и конструкция (б) неодимового лазера

Типичная конструкция непрерывного твердотельного лазера показана на рис. 17.5, б. Активный элемент 1 и лампа накачки 2 расположены вдоль фокальных осей эллиптического отражателя 4 с внутренним зеркальным покрытием. При такой конфигурации большая часть света, испускаемого лампой, проходит через лазерный стержень. Резонатор лазера образован зеркалами 3.

Лазерные системы на основе неодима относятся к наиболее мощным лазерам. При энергии в импульсе несколько килоджоулей и сокращении длительности импульса до  $\sim 1$  нс, мощность излучения превышает  $10^{12}$  Вт, а в особо мощных установках, предназначенных для управляемого термоядерного синтеза, может достигать  $10^{18}$  Вт.

## Гелий-неоновый лазер

Газовый лазер на смеси неона и гелия является в настоящее время одним из самых популярных и распространенных. Газовая смесь помещается в электрический разрядник, а накачка осуществляется путем неупругих столкновений атомов He и Ne с электронами, разгоняемыми высоким напряжением. При каскадной релаксации возбужденных атомов гелия к основному состоянию многие из них накапливаются на долгоживущих метастабильных уровнях  $2^3S$  и  $2^1S$  (время жизни  $10^{-4}$  и  $5 \cdot 10^{-6}$  с соответственно). Так как эти метастабильные уровни почти совпадают по энергии с уровнями  $2s$  и  $3s$  неона, при столкновениях происходит передача возбуждения (рис. 17.6, а). Осуществляя спектральную селекцию, можно сменой зеркал резонатора настроить гелий-неоновый лазер на одну из трех длин волн: красную  $0,63$  мкм (переход  $3s-2p$ ) или инфракрасные  $1,15$  (переход  $2s-2p$ ) и  $3,39$  мкм (переход  $3s-3p$ ).

По схеме уровней гелий-неоновый лазер относится к трехуровневым 2-го рода. Поскольку оба нижних лазерных уровня ( $2p$  и  $3p$ ) рассеиваются радиационно с постоянной времени около  $10^{-8}$  с, нет необходимости для получения инверсии переводить на верхний лазерный уровень более половины всех атомов, как в рубиновом лазере. Генерация в таких условиях может осуществляться в непрерывном режиме.

Схема гелий-неонового лазера показана на рис. 17.6, б. Разрядная трубка 1 закрыта с торцов окнами 2, установленными под углом Брюстера (см. раз-

дел 14.2) к оптической оси. Это делается для уменьшения потерь на отражение, так как коэффициент усиления невелик и составляет всего порядка 2 % на метр для  $\lambda = 0,63$  мкм. Из-за такой установки торцевых окон условия генерации выполняются только для поляризации, перпендикулярной плоскости падения на них луча (вертикальная ориентация вектора  $\mathbf{E}$  на рис. 17.6, б).

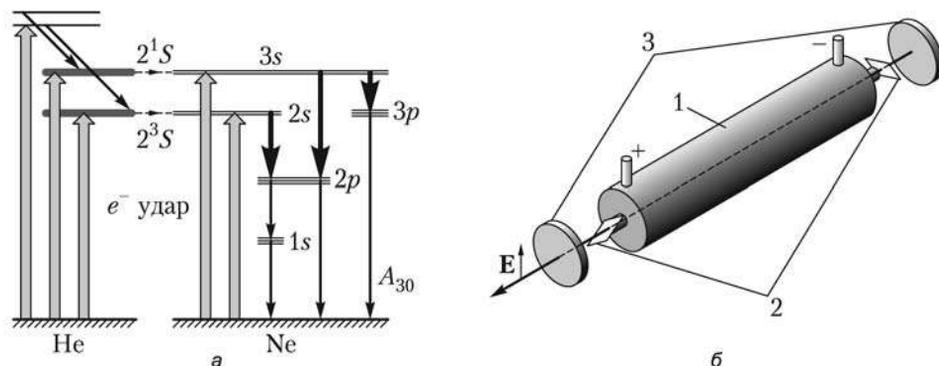


Рис. 17.6. Схема уровней (а) и конструкция (б) гелий-неонового лазера

Давление рабочей смеси гелий-неонового лазера составляет несколько миллиметров ртутного столба, столкновительное уширение незначительно, и излучение отличается высокой степенью когерентности. Поэтому такие лазеры широко применяются для интерферометрических измерений, в лазерных гироскопах и других устройствах, в которых требуется монохроматическое когерентное излучение.

### Лазер на углекислом газе

Лазер на смеси  $\text{CO}_2\text{-N}_2\text{-He}$  ( $\lambda = 10,6$  мкм, дальний ИК-диапазон) является самым мощным из газовых. Он относится к классу молекулярных лазеров и работает на низкоэнергетических колебательно-вращательных уровнях (рис. 17.7, а), то есть уровнях, энергия которых обусловлена движением составляющих молекулу атомов, а не возбуждением электронов. Накачка осуществляется электронным ударом и передачей возбуждения от молекул  $\text{N}_2$  на долгоживущий 001-уровень антисимметричной моды колебаний. Излучение генерируется при переходах молекулы  $\text{CO}_2$  на симметричные (001–100) или на деформационные колебания удвоенной частоты (001–020).

Гелий выполняет роль буферного газа: через неупругие столкновения с его атомами молекулы  $\text{CO}_2$  переводятся в основное состояние; кроме того, более эффективно отводится тепло на стенки трубки. Для  $\text{CO}_2$  лазера характерен высокий КПД (до 30 %), объясняемый тем, что все рабочие уровни находятся очень близко к основному состоянию.

Лазеры на углекислом газе могут давать излучение мощностью в десятки киловатт в непрерывном режиме. Это обусловлено тем, что молекула, испустив фотон, быстро возвращается в основное состояние, где ее можно использовать снова. Высокие мощность и КПД определили широкое применение  $\text{CO}_2$  лазе-

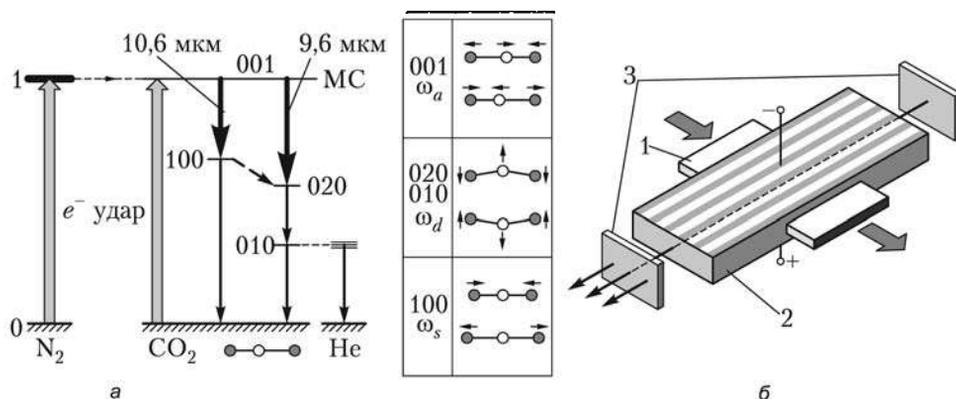


Рис. 17.7. Схема уровней (а) и конструкция (б) лазера на углекислом газе

ров в технологических процессах. Схема импульсного TEA<sup>1</sup>  $CO_2$  лазера показана на рис. 17.7, б, на которой 1 — канал, по которому прокачивается рабочая смесь, 2 — разрядник, 3 — зеркала резонатора.

## Ионные лазеры

Ионные лазеры — это тип газовых лазеров, в которых верхний уровень заселяет ся путем двух последовательных столкновений с электронами в электрическом разряде (ионизация + возбуждение). Энергии ионов превосходят атомарные, поэтому ионные лазеры генерируют в видимой и УФ-области спектра.

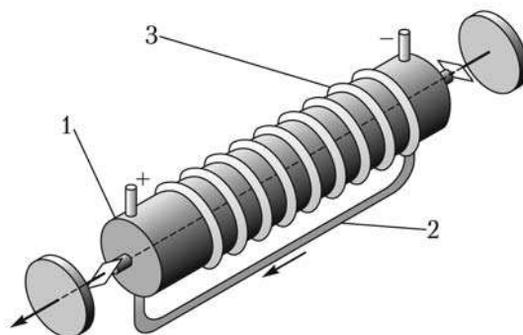


Рис. 17.8. Конструкция аргонового лазера

Из-за большой плотности тока в разрядной трубке 1 (рис. 17.8) может происходить перекачка ионов к катоду, поэтому требуется дополнительный обводной канал 2. Для предотвращения разрушения трубки при бомбардировке быстрыми ионами ее изготавливают из керамики и помещают в продольное магнитное поле, создаваемое соленоидом 3. Радиально движущиеся заряженные частицы испыты-

<sup>1</sup> Название означает с поперечным электрическим возбуждением, при атмосферном давлении.

тывают отклоняющее действие силы Лоренца, в результате их траектории искривляются, уменьшая скорость диффузии зарядов к стенкам. Примером может служить аргоновый лазер, генерирующий в видимой области на линиях  $\lambda_1 = 488$  нм (голубая) и  $\lambda_2 = 514,5$  нм (зеленая).

## Экимерные лазеры

Экимерные лазеры — молекулярные лазеры, использующие переходы молекул, существующих только в возбужденном состоянии. Поскольку в основном состоянии атомы эксимера (от англ. *excited dimer*) отталкиваются, то сразу после генерации молекула диссоциирует, и нижний лазерный уровень всегда будет пустым. Это облегчает получение инверсии и повышает эффективность накачки. Благодаря тому, что рабочие лазерные уровни имеют высокую энергию, эксимерные лазеры генерируют в коротковолновой части спектра, например, ксеноновый лазер излучает в области вакуумного ультрафиолета<sup>1</sup> ( $\lambda = 170-175$  нм). Второй особенностью эксимерных лазеров является возможность перестройки частоты генерации, так как нижний лазерный уровень из-за очень короткого времени жизни сильно уширен.

## Лазеры на красителях

Многие органические красители (то есть соединения, которые сильно поглощают свет в определенных диапазонах видимых длин волн) являются эффективными люминофорами, причем их люминесценция охватывает широкий диапазон волн в видимой части спектра. Схема уровней молекулы органического красителя показана на рис. 17.9. Состояние  $S_0$  — основное,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  — возбужденные синглетные и триплетные состояния, соответствующие переходам электрона на возбужденные орбиты. Каждое из электронных состояний имеет структуру, состоящую из колебательных и вращательных подуровней.

Оптическое поглощение переводит молекулу на разные колебательные подуровни состояния  $S_1$  с последующей быстрой релаксацией на основной колебательный подуровень. Лазерные переходы происходят на возбужденные колебательные подуровни основного состояния. Благодаря очень большой ширине линий флуоресценции, которая может достигать сотен нанометров, можно перестраивать длину волны излучения лазера на красителе по всей видимой области. Активная среда, которой является раствор органических красителей в воде или спиртах, легко готовится и заменяется, накачка осуществляется, как правило, азотным УФ-лазером. Лазеры на красителях незаменимы в тех случаях, когда необходимо получить когерентное излучение с заданной длиной волны.

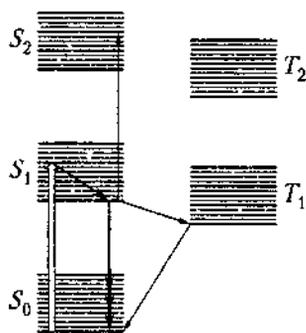


Рис. 17.9. Схема уровней лазера на красителе

<sup>1</sup> Так называется область спектра короче 320 нм. Эти длины волн поглощаются атмосферными газами и могут распространяться только в вакууме.

## Полупроводниковые лазеры

Широкое распространение получили твердотельные лазеры на обычных полупроводниковых  $p-n$ -переходах (лазерные диоды) или многослойных гетеропереходах с использованием так называемых твердых растворов (гетеролазеры). Одно из главных отличий полупроводникового лазера от лазеров других типов состоит в том, что индуцированные переходы происходят не между узкими уровнями энергии, а между *энергетическими зонами*.

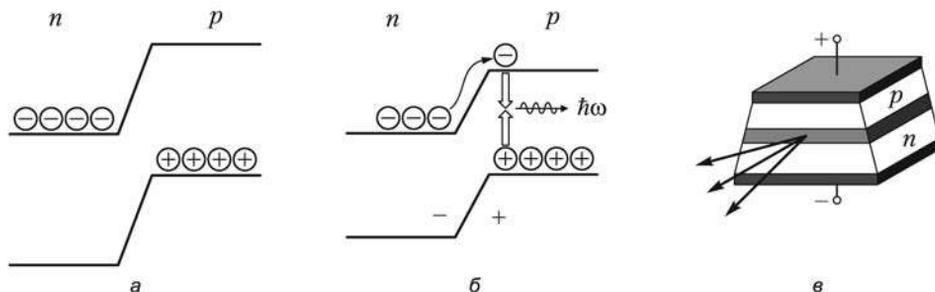


Рис. 17.10. Схема энергетических зон (а, б) и конструкция (в) полупроводникового лазера

Как известно, примесные полупроводники бывают двух типов:  $n$ -типа с электронной проводимостью, в которых носители заряда — отрицательно заряженные электроны, и  $p$ -типа, где носители заряда — положительно заряженные дырки. В области контакта полупроводников двух типов ( $p-n$ -переход) потенциальная энергия носителей ведет себя, как показано на рис. 17.10, а. Потенциал электронов в  $p$ -области выше, чем в  $n$ -области, у дырок — наоборот, поэтому возникает потенциальный барьер, препятствующий прохождению носителей через переход. Если к переходу приложить электрическое напряжение в прямом направлении (плюс — к  $p$ -области, минус — к  $n$ -области), то высота барьера снижается (рис. 17.10, б) и появляется узкая область, которая содержит и электроны, и дырки. Энергия, выделяющаяся при электрон-дырочной рекомбинации, примерно равная ширине запрещенной зоны, может обеспечить усиление света.

Конструктивными особенностями полупроводниковых лазеров являются плоская геометрия активной зоны (рис. 17.10, в) и различная расходимость излучения в ортогональных сечениях: большая в поперечном, меньшая в продольном. Высокий коэффициент усиления позволяет полупроводниковым лазерам генерировать даже в отсутствие зеркал резонатора, так как для обратной связи достаточно отражения на боковых гранях кристалла.

Если  $p-n$ -переход на основном полупроводнике дополнен неоднородными (*гетерогенными*) границами с другим полупроводником или твердым раствором (например,  $\text{GaAs}-\text{Ga}_x\text{Al}_{1-x}\text{As}$ ), то область рекомбинации электронов и дырок резко сужается. Расходимость излучения также значительно уменьшается, так как ограничение среды с меньшим показателем преломления приводит к эффекту волноводного распространения. Поэтому гетеролазеры, в отличие от обычных лазеров, имеют более когерентное, мощное и направленное излучение.

Полупроводниковые лазеры генерируют, как правило, в ближнем ИК-диапазоне или в красной части видимого (у распространенного лазера на арсениде

галлия  $\lambda = 0,84$  нм). Эти лазеры обладают самым высоким КПД, который может превышать 70 %. Низкая энергия электрического возбуждения, малые размеры, возможность управления частотой генерации — все это обусловило применение полупроводниковых лазеров в системах оптоволоконной связи, записи информации (компакт-диски) и т. д.

## Химические лазеры

Инверсная населенность в химических лазерах создается в процессе химической реакции, когда избыток энергии выделяется в виде колебательно-вращательного возбуждения молекул. Поэтому линии генерации лежат в среднем и дальнем ИК-диапазонах. Пример наиболее распространенной лазерной реакции:  $F_2 + H_2 = 2HF^*$  ( $\lambda = 2,7-3,2$  мкм).

Диапазоны длин волн, перекрываемые лазерами разных типов, схематически показаны на рис. 17.11. Следует, однако, помнить, что эти области состоят из отдельных дискретных линий генерации, принадлежащих лазерам с той или иной активной средой, за исключением перестраиваемых в широких пределах лазеров на красителях.

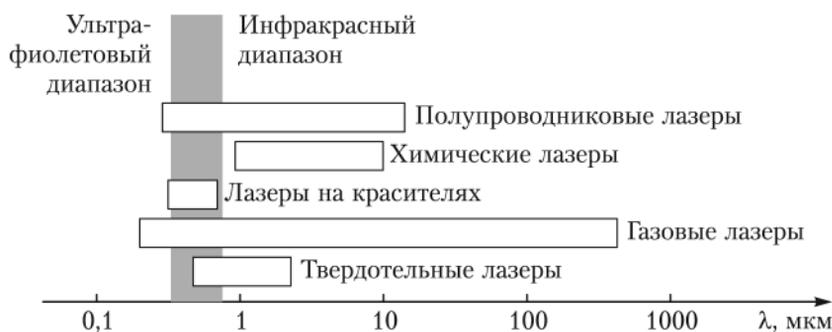


Рис. 17.11. Диапазоны генерации лазеров различных типов. Видимая область спектра затенена

## 17.3. Открытые резонаторы лазеров

В теории лазеров рассматриваются так называемые *открытые незаполненные резонаторы*, образованные плоскими или сферическими зеркалами. Два основных типа резонаторов линейный (а) и кольцевой (б) схематически показаны на рис. 17.12. Одно из зеркал резонатора частично пропускает свет, через него и осуществляется вывод излучения. При решении большинства задач влиянием активной среды, заполняющей пространство между зеркалами, пренебрегают, а световое поле, устанавливающееся в таких системах, рассчитывается путем прослеживания лучей при многократных отражениях в приближении геометрической оптики, но с учетом *дифракционных потерь* на краях зеркал.

В зависимости от значений радиусов кривизны зеркал  $R$  и базы резонатора  $L$  могут возникать различные конфигурации светового поля:

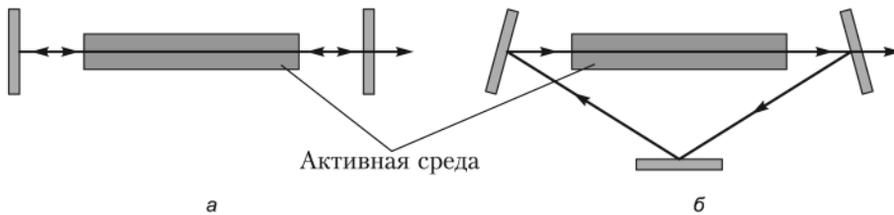


Рис. 17.12. Линейный (а) и кольцевой (б) резонаторы

- лучи могут постепенно концентрироваться в приосевой *параксиальной* области (случай *устойчивых резонаторов*, рис. 17.13, а);
- они могут создавать некоторые фиксированные во времени и пространстве траектории (рис. 17.13, б);
- наконец, они могут покидать систему при конечном числе отражений (случай *неустойчивых резонаторов*, рис. 17.13, в).

При всех конфигурациях оптических резонаторов явление дифракции света играет определяющую роль.

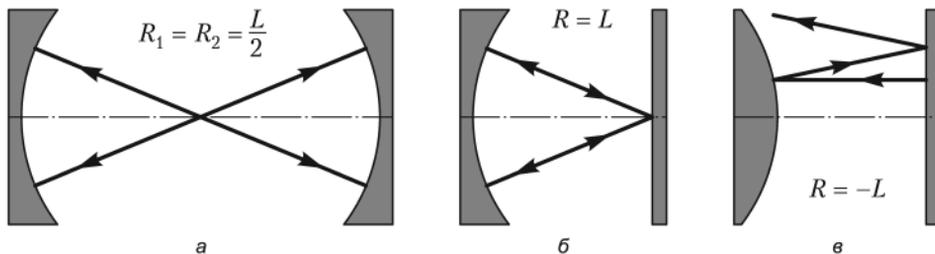


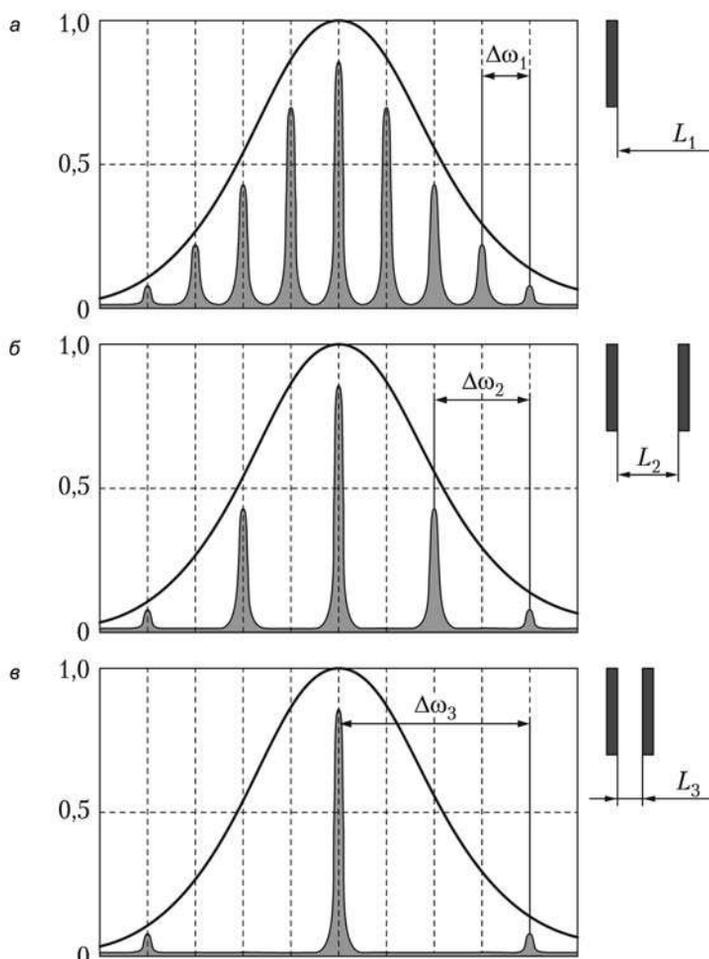
Рис. 17.13. Открытые резонаторы: а — концентрический, б — полуконцентрический, в — неустойчивый

Как уже говорилось, простейшим резонатором является *эталон Фабри–Перо*, состоящий из двух плоских параллельных зеркал (см. рис. 17.12, а). Электромагнитное поле в таком резонаторе представляет собой суперпозицию встречных волн с одинаковыми амплитудами. Эти волны формируют *стоячую волну*:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz) - E_0 \cos(\omega t + kz) = 2E_0 \cos(\omega t) \sin(kz). \quad (17.3)$$

Стоячая волна в пространстве имеет *пучности* (точки, в которых  $|\sin kz| = 1$ ,  $z = (2m + 1)\lambda/4$ , амплитуда поля максимальна) и *узлы* ( $\sin kz = 0$ ,  $z = m\lambda/2$ , поле равно нулю). Граничные условия (см. раздел 14.1) на зеркалах таковы, что на поверхности зеркала всегда находится узел стоячей волны. Следовательно, в резонаторе могут устойчиво существовать только такие *продольные моды*, которые удовлетворяют простому условию: в базу резонатора  $L$  должно укладываться целое число полуволи. В этом случае расстояние по частотной оси между продольными модами  $\Delta\omega$  обратно пропорционально длине  $L$ :  $\Delta\omega = \pi c/L$ , или  $\Delta\nu = c/2L$ .

Так, при длине резонатора 1 м частотное расстояние между соседними модами равно  $\Delta\omega = 150$  МГц, что для гелий-неонового лазера соответствует  $\Delta\lambda = 0,0002$  нм.



**Рис. 17.14.** Изменение структуры продольных мод при уменьшении длины резонатора

В обычных условиях на сравнительно широком контуре линии усиления может укладываться несколько продольных мод (рис. 17.14). Следовательно, спектр излучения лазера состоит из ряда равноотстоящих спектральных линий, причем их число зависит как от длины резонатора, так и от уровня потерь. На рис. 17.14 показано, как по мере уменьшения длины резонатора лазер переходит от пятимодового режима (см. 17.14, а) к трехмодовому (см. 17.14, б) и к одномодовому (см. 17.14, в). Естественно, что в каждом случае генерация происходит только на тех модах, для которых усиление превышает потери.

На практике резонатор, состоящий из двух плоскопараллельных зеркал, почти не применяется, так как малейшая разъюстировка приводит к потере устойчивости и срыву генерации. Реальные резонаторы образованы сферическими зеркалами, причем два сферических зеркала с общим центром кривизны составляют *концентрический резонатор*, а в случае, когда центр кривизны каждого из

зеркал лежит в вершине противоположного зеркала, говорят о *конфокальном резонаторе* (рис. 17.15).

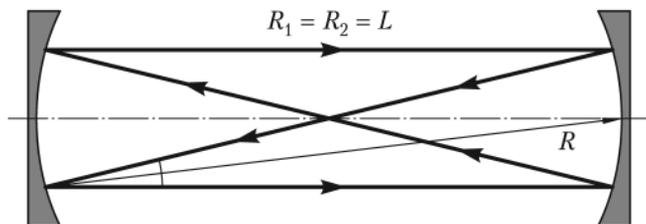


Рис. 17.15. Конфокальный резонатор

Общую классификацию лазерных резонаторов можно наглядно пояснить с помощью *g-диаграммы* (рис. 17.16). На ней по осям координат для каждого из зеркал отложены параметры  $g = 1 - L/R$ . На рисунке затенена ограниченная гиперболами область устойчивых резонаторов, а также отмечена прямая, соответствующая геометрическому месту точек симметричных резонаторов ( $R_1 = R_2$ ).

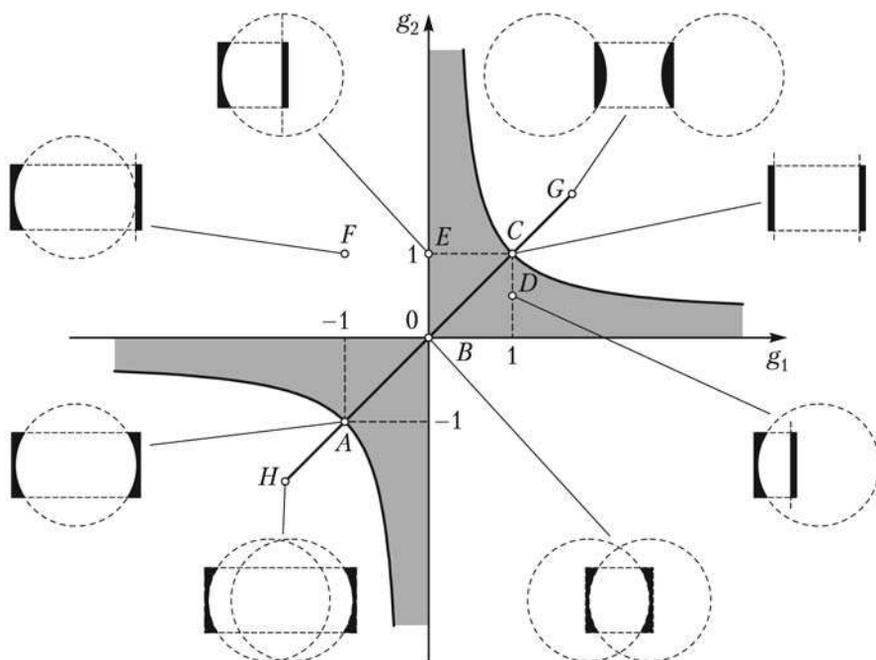


Рис. 17.16. Диаграмма устойчивости резонаторов

Каждой точке на *g-диаграмме* соответствует свой тип резонатора: *A* — концентрический, *B* — конфокальный, *C* — плоский (Фабри—Перо), *D* — полуконфокальный, *E* — полуконцентрический, *F* — неустойчивый плосковогнутый, *G* — неустойчивый с выпуклыми зеркалами, *H* — неустойчивый двояковогнутый.

Рассмотрим более подробно конфигурацию светового поля в конфокальном резонаторе. Несмотря на то что лучи в пустом резонаторе распространяются прямолинейно (за исключением дифракционных потерь на зеркалах), формирующиеся лазерные пучки имеют криволинейные огибающие. На рис. 17.17 показано, как прямолинейные отрезки, развернутые в пространстве на определенный угол, могут образовать криволинейную (в данном случае гиперболическую) поверхность, подобную той, что возникала в известной конструкции шуховской телебашни в Москве. Точно такая же *каустическая поверхность* переменной кривизны характерна для лазерных *гауссовых пучков*. Название этих пучков обусловлено тем, что поперечное распределение интенсивности описывается гауссовской функцией

$$I(x, y) = I_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right), \quad (17.4)$$

где  $w$  — радиус пучка по уровню  $1/e^2$ .

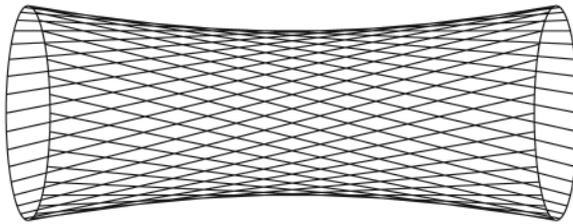


Рис. 17.17. Формирование криволинейной каустической поверхности

Конкретные свойства гауссова пучка определяются несколькими основными параметрами, среди которых число Френеля

$$N = \frac{a^2}{\lambda L} = \frac{\theta_a}{\pi\theta_0},$$

по сути являющееся числом перекрываемых первым зеркалом полуволновых зон для точки в вершине второго зеркала, радиусы кривизны зеркал резонатора и его длина. Если число Френеля велико, то расчет поля в резонаторе может проводиться в приближении геометрической оптики. В этом случае радиус пучка в фокальной плоскости резонатора  $w_0$  (рис. 17.18), называемый *радиусом перетяжки* каустики, не зависит от поперечного размера зеркал  $2a$  и составляет для симметричного конфокального резонатора

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}} = \sqrt{\frac{L}{k}}. \quad (17.5)$$

Для резонаторов с иной конфигурацией зеркал вводится *параметр конфокальности*  $R_{кз}$ , численно равный базе  $L$  эквивалентного конфокального резонатора, так что

$$w_0 = \sqrt{\frac{R_{кз}}{k}}.$$

Ширина распределения интенсивности  $w$  меняется вдоль оси  $z$  по закону

$$w^2 = w_0^2 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0} \right)^2 = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{2z}{R_{кр}} \right)^2 \right]. \quad (17.6)$$

Таким образом, радиус пучка на зеркалах при  $z = R_{кр}/2$  увеличивается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с радиусом перетяжки. Угол расходимости светового пучка в дальней зоне определяется по формуле:

$$2\theta_0 = \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \quad (17.7)$$

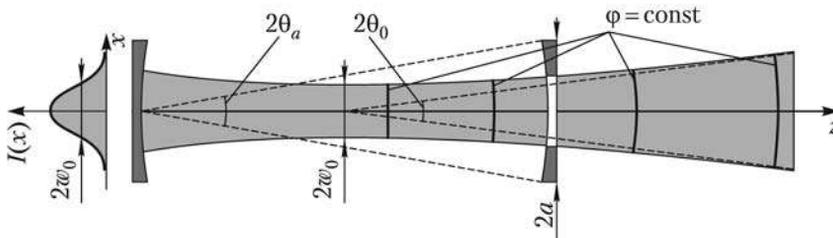


Рис. 17.18. Гауссов пучок

Из последнего соотношения следует, что расходимость гауссова пучка несколько меньше, чем дифракционная расходимость плоской волны на круглой апертуре такого же радиуса  $2\theta_{кр} = 1.22\lambda/R$  (см. раздел 8.4).

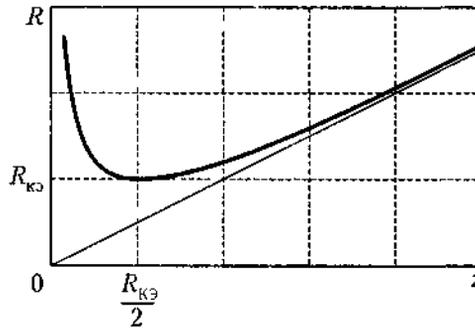
Очевидно, соотношение (17.7) показывает невозможность одновременного уменьшения расходимости излучения  $2\theta_0$  (коллимации пучка) и сужения перетяжки пучка  $2w_0$  (фокусировки излучения). В зависимости от назначения лазерной системы необходимо выбрать приемлемый способ трансформации пучка: для передачи энергии на большие расстояния следует увеличивать перетяжку и уменьшать угол расходимости; для достижения высокой плотности излучения (лазерная резка, сварка) следует увеличивать апертурный угол, добиваясь минимального размера перетяжки.

Для гауссова пучка характерна переменная кривизна волнового фронта. Внутри резонатора она увеличивается от нуля в области перетяжки (плоский фронт) до кривизны зеркал, являющихся поверхностью равной фазы. Вне резонатора кривизна убывает (радиус кривизны растет) по мере увеличения расстояния (рис. 17.19) подобно кривизне сферической волны в соответствии с выражением

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{z\lambda} \right)^2 \right] = z \left[ 1 + \left( \frac{R_{кр}}{2z} \right)^2 \right]. \quad (17.8)$$

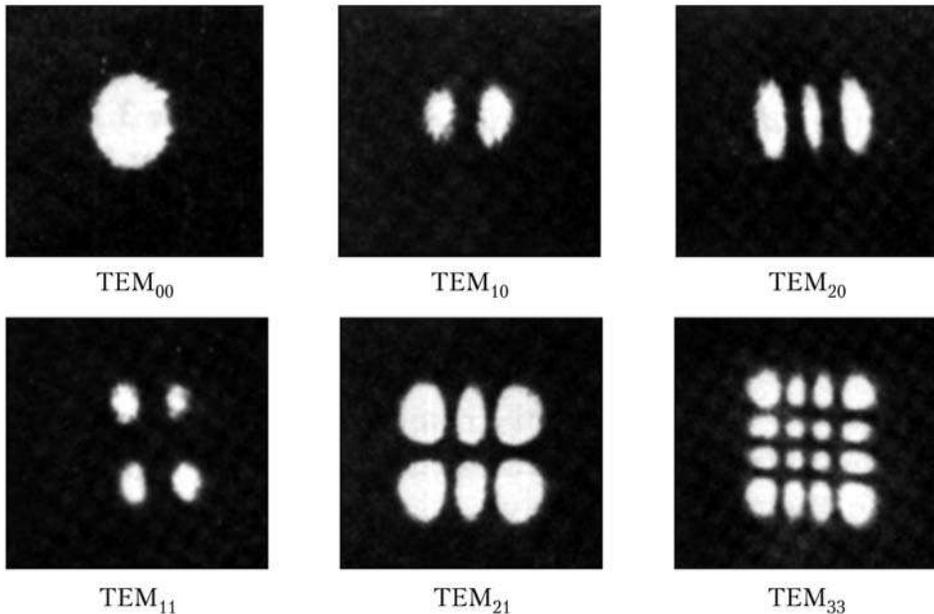
То есть на расстояниях, много больших базы резонатора, волновой фронт гауссова пучка можно считать сферическим.

Помимо рассмотренных продольных мод, в резонаторе могут существовать также *поперечные моды*, в которых световой пучок направлен под углом к оси резонатора. Для поперечных мод используются обозначения *TEM* (поперечное электрическое и магнитное поле) с двумя индексами по числу узлов функции



**Рис. 17.19.** Изменение радиуса кривизны фронта гауссова пучка в зависимости от расстояния до перетяжки

распределения световой энергии по соответствующей координате. Обсуждавшийся выше гауссов пучок, распространяющийся вдоль оси, будет иметь обозначение  $TEM_{00}$ . Фотографии распределения поля в различных более высоких поперечных модах приведены на рис. 17.20.



**Рис. 17.20.** Распределение поля в различных поперечных модах

Трансформация гауссовых пучков в различных оптических системах в большинстве случаев хорошо описывается формулами геометрической оптики. При прохождении гауссова пучка через линзу с фокусным расстоянием  $F$  радиус кривизны волнового фронта меняется:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{F}. \quad (17.9)$$

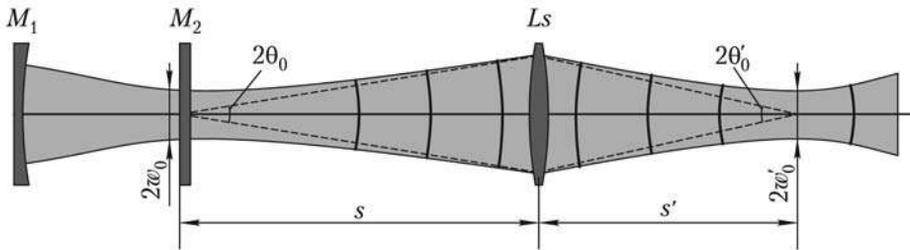


Рис. 17.21. Фокусировка гауссова пучка

Если  $F < R$ , то знак кривизны изменяется и пучок становится сходящимся. Пример фокусировки гауссова пучка, сформированного в резонаторе с плоским выходным зеркалом, показан на рис. 17.21. Поскольку в дальней зоне волновой фронт близок к сферическому, новое положение перетяжки определяется по формуле, аналогичной обычной формуле линзы:

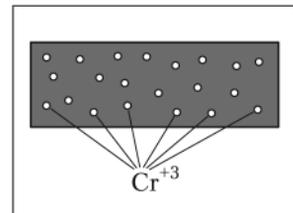
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{F}, \quad (17.10)$$

а радиус вычисляется по формуле линейного увеличения:

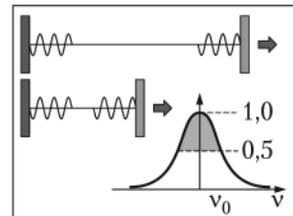
$$w'_0 = w_0 \frac{s'}{s}. \quad (17.11)$$

## Задачи

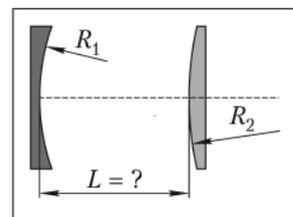
**17.1.** Рубин, используемый в качестве лазерной среды, имеет плотность  $3,98 \text{ г/см}^3$  при концентрации активного вещества ( $\text{Cr}$ )  $0,05\%$ . Максимальное значение коэффициента поглощения на лазерном переходе  $\alpha = 0,4 \text{ см}^{-1}$ . Чему равно соответствующее сечение поглощения?



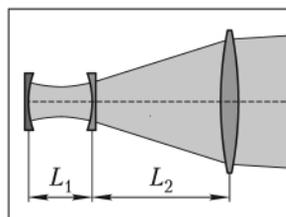
**17.2.** Чему равно число генерирующих мод гелий-неонового лазера при длине резонатора  $1 \text{ м}$  и уровне потерь  $50\%$  от максимального усиления? Сколько мод будет при уменьшении длины резонатора до  $20 \text{ см}$ ? Температуру газа считайте комнатной, контур линии усиления — доплеровским.



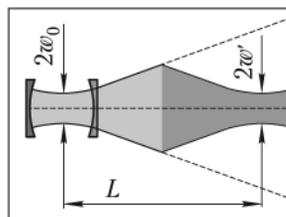
**17.3.** Резонатор образован вогнутым сферическим зеркалом радиусом  $R_1 = -1 \text{ м}$  и выпуклым сферическим зеркалом радиусом  $R_2 = 1,5 \text{ м}$ . Каково должно быть наименьшее расстояние между зеркалами, чтобы резонатор оставался устойчивым?



**17.4.** Гелий-неоновый лазер ( $\lambda = 0,63$  мкм) имеет конфокальный резонатор длиной  $L_1 = 1$  м. В лазерном пучке на расстоянии  $L_2 = 1,5$  м от выходного зеркала помещена линза с оптической силой  $D = +0,5$  дптр. Определите расходимость пучка в режиме  $TEM_{00}$  после линзы.



**17.5.** Гауссов пучок от гелий-неонового лазера в видимом диапазоне имеет размер перетяжки  $w_0 = 0,5$  мм. Требуется сфокусировать этот пучок таким образом, чтобы получить пятно размером  $w' = 50$  мкм на расстоянии  $L = 1$  м от места расположения перетяжки исходного пучка. Какое фокусное расстояние должна иметь линза и где она должна располагаться?



## ГЛАВА 18 Нелинейная оптика

*Нелинейная оптика* изучает процессы взаимодействия света и вещества, параметры протекания которых зависят от интенсивности света. Как описывалось раньше (см. раздел 14.2), реакция среды на электрическое поле световой волны описывается уравнением  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ , где  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость, зависящая только от свойств среды. Такой линейный отклик, при котором вектор поляризации среды  $\mathbf{P}$  сонаправлен и прямо пропорционален напряженности внешнего поля  $\mathbf{E}$ , характерен для значений  $E$  много меньших внутриатомных значений  $E_a$ , определяемых кулоновским взаимодействием ядра и внешних электронов ( $E_a \sim 10^{10}$  В/м).

В ряде случаев, например в интенсивных лазерных пучках, напряженность поля  $E$  может быть весьма высокой, и члены высших порядков в разложении функции  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  становятся существенными. В результате возникает зависимость оптических характеристик среды от интенсивности света. Поляризуемость  $\chi$  (а значит, и показатель преломления  $n^2 = 1 + \chi$ ) оказывается различной в различных точках пространства в соответствии с распределением энергии в сечении светового пучка или меняется со временем вслед за временной зависимостью амплитуды светового импульса. Для такой среды должны быть характерны пространственные и временные трансформации световых полей, отсутствующие в линейных средах. Более того, оказывается возможным наблюдение взаимодействия света со светом — ведь в области пересечения пучков амплитудно-зависимый поляризационный отклик будет иным. Таким образом, для нелинейно-оптических эффектов характерно *нарушение принципа суперпозиции* световых волн.

### 18.1. Механизмы оптической нелинейности

Для определения связи поляризации среды с напряженностью внешнего поля обобщим модель гармонического осциллятора, лежащую в основе классической теории дисперсии. Разложим зависимость потенциальной энергии электрона в атоме от его смещения от положения равновесия  $U(x)$  по степеням  $x$ :

$$U(x) = \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 U(0)}{\partial x^2} + \frac{x^3}{3!} \frac{\partial^3 U(0)}{\partial x^3} + \frac{x^4}{4!} \frac{\partial^4 U(0)}{\partial x^4} + \dots \quad (18.1)$$

В приближении гармонического осциллятора ограничиваются только квадратичным членом в разложении (рис. 18.1, а).

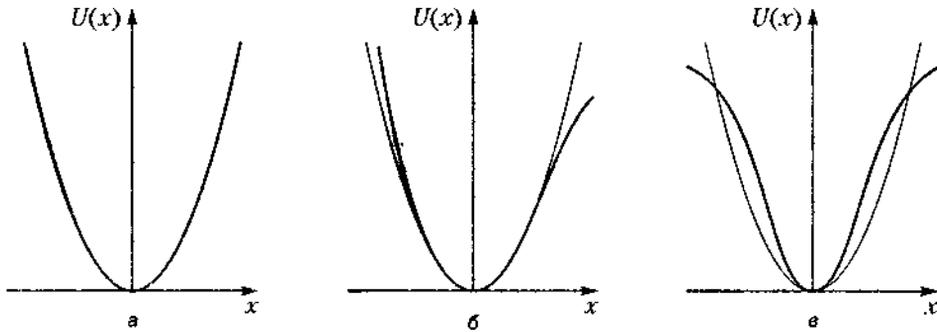


Рис. 18.1. Потенциальная энергия гармонического (а) и ангармонических (б, в) осцилляторов

В следующих приближениях нужно учесть более высокие степени в разложении (18.1). Конкретный тип нелинейности определяется типом осциллятора. В средах, не имеющих центра симметрии, например в анизотропных кристаллах, появляется кубический член (рис. 18.1, б). В центрально-симметричных средах (газы, жидкости, стекла) — член четвертого порядка (рис. 18.1, в) и т. д. Электрическая индукция по-прежнему определяется как  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , однако поляризация среды теперь зависит от напряженности поля более сложно:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E} \mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E} \mathbf{E} \mathbf{E} + \dots), \quad (18.2)$$

где  $\chi^{(2)}$  — квадратичная восприимчивость,  $\chi^{(3)}$  — кубическая и т. д.

В анизотропных средах восприимчивости  $\chi$  являются тензорами, поэтому уравнение (18.2) нужно понимать как уравнение для проекций векторов:

$$P_i = \epsilon_0 \left( \sum_j \chi_{ij} E_j + \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right), \quad (18.3)$$

где индексы суммирования пробегает значения  $x, y, z$ . Однако при упрощенном, качественном анализе мы будем пользоваться изотропной моделью, описываемой уравнением (18.2).

Нелинейность восприимчивости приводит и к нелинейности показателя преломления среды, который начинает зависеть от поля световой волны

$$n(E) = n + n_1 E + n_2 E^2 + \dots \quad (18.4)$$

Физическими причинами, определяющими появление нелинейных восприимчивостей  $\chi^{(n)}$ , могут быть: нелинейный отклик свободного или связанного электрона, нелинейные колебания многоатомных молекул и кристаллической решетки, возбуждение светом дрейфа и диффузии зарядов в кристаллах, индуцированная светом ориентация анизотропных молекул, электрострикция (локальные изменения плотности среды под действием поля), тепловые эффекты и т. п. Все они обладают существенно различным временем установления нелинейного отклика  $\tau$ , которое может варьироваться в широких пределах от  $10^{-2}$  до  $10^{-14}$  с.

В типичном нелинейном кристалле KDP (дигидрофосфат калия,  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ) квадратичный показатель преломления имеет величину порядка  $10^{-13}$  м/В. Это означает, что нелинейные оптические эффекты могут наблюдаться, как правило, при очень высоких напряженностях электрического поля  $\sim 10^{10}$  В/м и выше, чему соответствует интенсивность  $\sim 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>, хотя в некоторых случаях они могут возникать и при существенно меньших интенсивностях. Так, широко известен нелинейный эффект увеличения степени поглощения при превышении некоторого порогового значения интенсивности. Он характерен для так называемых фототропных стекол, применяемых, в частности, в очках-хамелеонах.

## 18.2. Некогерентные нелинейные эффекты

Рассмотрим вначале нелинейные явления, для которых высокие монохроматичность и направленность лазерного излучения не играют определяющей роли. Одним из них является *насыщение поглощения*, то есть просветление нелинейной поглощающей среды при прохождении мощных световых пучков.

Как было показано ранее (см. формулу (17.2)), коэффициент поглощения двухуровневой среды с показателем преломления  $n$  определяется разностью населенностей уровней:

$$\alpha = \frac{\hbar\omega B(N_0 - N_1)n}{c}.$$

При малой интенсивности падающего излучения почти все атомы находятся в основном состоянии ( $N_0 \approx N$ ,  $N_1 \approx 0$ ), и коэффициент поглощения не зависит от интенсивности и равен  $\alpha = \hbar\omega B N n / c$ . С повышением интенсивности населенности уровней начинают меняться:

$$\frac{dN_0}{dt} = A_{10}N_1 - I(N_1B_{10} - N_0B_{01})\frac{n}{c}, \quad N_1 = N - N_0.$$

Введем обозначения  $B_{10} = B_{01} = B$ ,  $A_{10} = A$ , тогда для стационарного режима ( $dN_0/dt = 0$ ) получим:

$$N_0 = N \frac{A + IBn/c}{A + 2IBn/c}, \quad N_1 = N \frac{IBn/c}{A + IBn/c}.$$

Таким образом, в сильных пучках ( $I \rightarrow \infty$ ) населенности уровней выравниваются, то есть  $N_0$  и  $N_1$  стремятся к  $N/2$ , коэффициент поглощения  $\alpha \rightarrow 0$ , а поглощаемая мощность

$$P = \hbar\omega IBn \frac{N_0 - N_1}{c} \rightarrow \frac{\hbar\omega NA}{2}.$$

Отсутствие в последнем выражении коэффициента Эйнштейна для вынужденных переходов  $B$  означает, что при насыщении поглощаемая мощность для конкретной среды определяется только скоростью спонтанных переходов, поскольку  $\hbar\omega N$  есть суммарная энергия потока  $N$  фотонов. Таким образом, при высоких плотностях мощности излучения происходит заметное уменьшение коэффициента поглощения  $\alpha$  и возникает *просветление* среды, которая становится тем прозрачнее, чем выше интенсивность света.

В активной среде с инверсией населенностей эффект насыщения приводит к уменьшению коэффициента усиления при увеличении интенсивности света и тем самым к установлению стационарного режима генерации в лазерах.

Если непрозрачная для слабого света среда за счет эффекта насыщения становится прозрачной в сильных световых пучках, то в прозрачных средах может наблюдаться противоположная ситуация. Здесь в результате *многофотонного поглощения* интенсивный свет может поглощаться гораздо сильнее, чем слабый. При больших плотностях энергии атом с уровнями энергии  $W_0$  и  $W_1$  может поглотить сразу два фотона с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , удовлетворяющими закону сохранения энергии  $W_1 - W_0 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$ . Вероятность такого процесса пропорциональна произведению интенсивностей световых пучков. Возможно также поглощение двух (или нескольких) фотонов из одного и того же лазерного пучка. Многофотонные процессы играют большую роль и в когерентных нелинейных эффектах, описываемых ниже.

К нелинейным эффектам поглощения примыкает и *многофотонный фотоэффект*. В сфокусированных лазерных пучках возможно одновременное поглощение до 7–8 фотонов. В результате происходит фотоионизация атомов длинноволновым излучением и смещается красная граница фотоэффекта.

## 18.3. Генерация второй оптической гармоники

Удвоение частоты света в кристалле (генерация второй гармоники) было первым нелинейно-оптическим эффектом, обнаруженным вскоре после создания лазера. Знаменитый опыт Франкена заключался в фокусировке пучка красного излучения рубинового лазера на кристалл кварца (рис. 18.2).

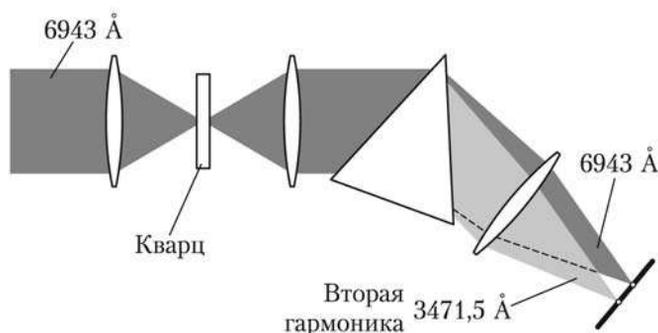


Рис. 18.2. Опыт Франкена по генерации второй гармоники

Нелинейно-оптические эффекты, проявляющиеся в области перетяжки, приводили к появлению сине-фиолетового свечения вполумину меньшей длины волны. Вначале КПД преобразования был ничтожным — порядка  $10^{-8}$ , но уже к 1963 г. его подняли до 20–30%, а сегодня возможно практически 100% преобразование энергии падающей световой волны (волны накачки) во вторую гармонику.

Для объяснения эффекта удвоения частоты рассмотрим нелинейные явления, обусловленные квадратичной восприимчивостью  $\chi^{(2)}$  в уравнении (18.2). В поле монохроматической волны нелинейная часть поляризации имеет вид

$$P_{nl} = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 \cos^2(\omega t - k_1 z) = \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2}{2} + \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 \cos[2(\omega t - k_1 z)]}{2}. \quad (18.5)$$

Первое слагаемое здесь не зависит от времени. Это означает, что в нелинейной среде создается статическое поле как в обычном конденсаторе. Такой эффект получил название *оптического детектирования*, он аналогичен выпрямлению электрического тока и может использоваться в детекторах мощных лазерных импульсов, ведь с его помощью сравнительно медленная огибающая светового импульса может быть непосредственно преобразована в импульс электрического тока (рис. 18.3).

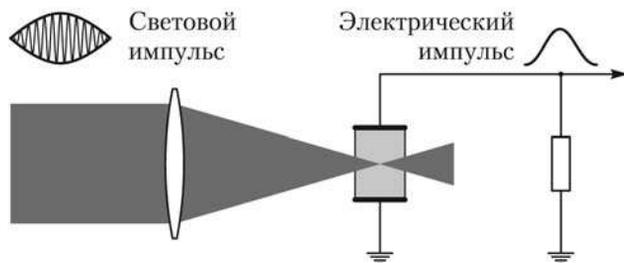


Рис. 18.3. Оптическое детектирование

Второе слагаемое в (18.5) представляет волну поляризации, изменяющуюся с удвоенной оптической частотой  $\omega_2 = 2\omega$ .

Отметим, что для нелинейностей высших порядков  $N$  аналогичные слагаемые будут содержать гармоники  $\omega_N = N\omega$ . Скорость распространения волны поляризации равна

$$v_1 = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k_1}.$$

Эта волна порождает оптическую волну с частотой  $\omega_2$  и волновым числом  $k_2$ . Из-за дисперсии скорость второй гармоники в нелинейной среде отличается от скорости исходной волны, то есть

$$v_2 = \frac{c}{n(2\omega)} = \frac{2\omega}{k_2} \neq v_1.$$

Следовательно,

$$\Delta k = \frac{k_2}{2} - k_1 \neq 0. \quad (18.6)$$

В этом случае испущенные в разных точках нелинейной среды волны удвоенной частоты оказываются в различных фазовых соотношениях, и результирующий эффект по интенсивности может варьироваться от полного гашения до максимально эффективного преобразования энергии во вторую гармонику.

Предположим, что удвоение частоты происходит в нелинейном кристалле длиной  $L$ . Волна квадратичной поляризации, достигшая точки  $z$ , имеет фазу

$$\Phi(z) = 2(\omega t - k_1 z). \quad (18.7)$$

Фаза световой волны, переизлученной в точке  $z$  и достигшей конца кристалла

$$\varphi(z) = \Phi(z) - k_2(L - z) = 2\omega t - 2k_1 z - k_2(L - z) = 2\omega t - k_2 L + 2\Delta k z. \quad (18.8)$$

Возникающая волна второй гармоники есть результат интерференции всех таких волн, она находится путем интегрирования по всей длине активной среды:

$$E^{(2\omega)} = C \int_0^L \cos \varphi(z) dz, \quad (18.9)$$

где  $C$  — константа, не зависящая ни от  $z$ , ни от  $\Delta k$ . Подставив (18.8) в (18.9) и выполняя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} E^{(2\omega)} &= \frac{C}{\Delta k} [\sin(2\omega t - k_2 L + 2\Delta k L) - \sin(2\omega t - k_2 L)] = \\ &= \frac{2C}{\Delta k} \sin(\Delta k L) \cos(2\omega t - k_2 L + \Delta k L). \end{aligned} \quad (18.10)$$

Множитель перед косинусом представляет собой амплитуду второй гармоники на выходе из кристалла, следовательно, ее интенсивность равна:

$$I^{(2\omega)} = I_0 \left( \frac{\sin(\Delta k L)}{\Delta k} \right)^2. \quad (18.11)$$

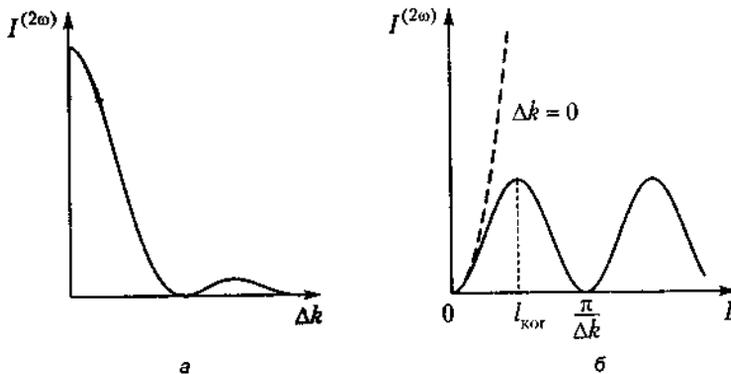


Рис. 18.4. Зависимости интенсивности второй гармоники от расстройки волновых векторов (а) и длины кристалла (б)

Таким образом, эффективность удвоения частоты зависит от расстройки волновых векторов  $\Delta k$  (рис. 18.4, а) и наиболее эффективна при малых  $\Delta k$ . При  $\Delta k \neq 0$  интенсивность второй гармоники немонотонно зависит от длины кристалла  $L$  и обращается в ноль для  $\Delta k L = m\pi$  (рис. 18.4, б). При такой длине нелинейной среды вторичные волны частотой  $2\omega$ , испущенные в разных точках, гасят друг друга в результате интерференции. Максимальное расстояние, на котором вторичные волны еще усиливают друг друга, называется *когерентной длиной*  $L_{\text{coh}}$ .

Так как

$$\Delta k = [n(2\omega) - n(\omega)] \frac{\omega}{c},$$

то выражение для когерентной длины будет иметь вид:

$$l_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{4[n(2\omega) - n(\omega)]}. \quad (18.12)$$

Так же как длина когерентности, введенная при анализе интерференции (см. раздел 5.3), когерентная длина имеет смысл предельного расстояния, на котором разность хода интерферирующих волн не превышает  $\lambda/2$ . На участке от 0 до  $l_{\text{ког}}$  энергия от исходной волны передается второй гармонике, а на интервале от  $l_{\text{ког}}$  до  $2l_{\text{ког}}$  — возвращается в исходную волну. Эти выводы подтверждаются результатами измерений интенсивности второй гармоники в кварцевой пластинке, эффективная толщина которой менялась за счет угла наклона пластинки к лучу  $\theta$  (рис. 18.5)

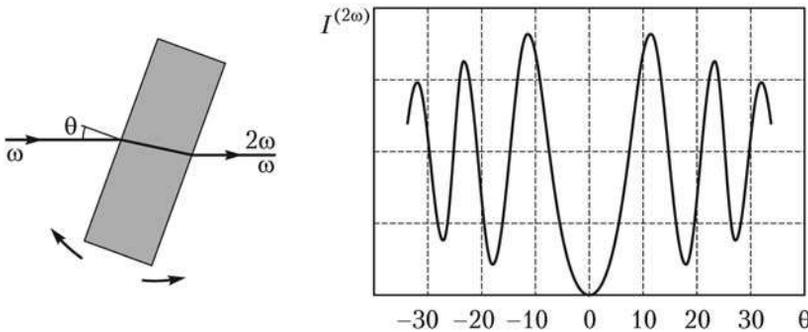


Рис. 18.5. Изменение интенсивности второй гармоники при варьировании эффективной толщины нелинейного кристалла

Величиной  $l_{\text{ког}}$  можно управлять. Так, при выполнении условия *фазового* (пространственного, волнового) *синхронизма*  $n(2\omega) = n(\omega)$  когерентная длина  $l_{\text{ког}}$  обращается в бесконечность, и на всем пути света в нелинейной среде происходит переход энергии от исходной волны ко второй гармонике. Из формулы (18.11) следует, что при  $\Delta k = 0$  интенсивность излучения на удвоенной частоте пропорциональна квадрату длины нелинейной среды. В пределе, вся световая энергия может быть перекачана во вторую гармонику.

В изотропной среде выполнение условия синхронизма невозможно, так как всякая прозрачная среда обладает нормальной дисперсией. Однако в отрицательном одноосном кристалле (см. раздел 12.3), например KDP, скорости волн основной частоты и второй гармоники могут быть равными, если эти волны имеют *разные поляризации*. В этом случае накачка является обыкновенной волной, а гармоника — необыкновенной (рис. 18.6). Интенсивность второй гармоники максимальна в указанном направлении и спадает почти до нуля при отклонении от направления синхронизма всего на  $3'$ .

В настоящее время наиболее мощное излучение в видимой части спектра получают при удвоении частоты излучения неодимовых лазеров с  $\lambda = 1,06$  мкм.

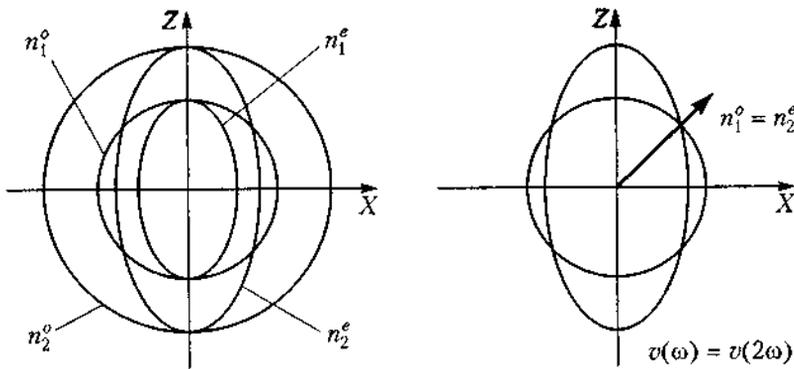


Рис. 18.6. Возникновение пространственного синхронизма

В центрально-симметричных средах  $\chi^{(2)} = 0$ , но за счет кубической нелинейности генерируется третья гармоника. Использование более высоких нелинейностей открывает перспективы генерации когерентного излучения в вакуумном УФ и мягком рентгеновском диапазонах. В сверхсильных световых полях в благородных газах (He, Ar) удалось получить и более высокие нечетные гармоники вплоть до двадцать первой.

## 18.4. Параметрическая генерация света

В общем случае для сред с квадратичной нелинейностью характерны трехволновые (трехчастотные, трехфотонные) взаимодействия световых волн (рис. 18.7). Поляризация среды на удвоенной частоте или на суммарной (разностной) частоте при определенных условиях может приводить к переизлучению световой волны на соответствующих частотах. Так, для возбуждения поля на суммарной частоте (см. рис. 18.7, а) необходимо выполнить условие векторного волнового синхронизма вида  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . С этой точки зрения процесс генерации второй гармоники (рис. 18.7, б) относится к случаю вырожденного ( $\omega_1 = \omega_2$ ) трехчастотного взаимодействия.

С нелинейной поляризацией  $P_{\omega_1 - \omega_2}$  связаны процессы генерации разностной частоты  $\Omega$  и параметрического усиления волны  $\omega_2$  (рис. 18.7, в). При этом интенсивная волна накачки  $\omega_1$  модулирует в пространстве и во времени диэлектрическую проницаемость среды, приводя к параметрическому усилению на частотах  $\omega_2$

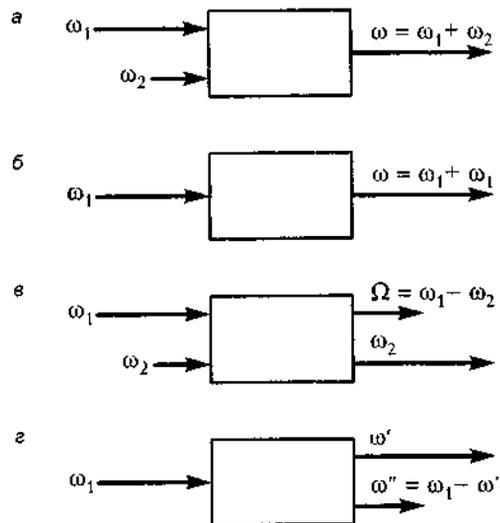


Рис. 18.7. Трехволновые процессы

и  $\Omega$ . На квантовом языке параметрическое усиление можно рассматривать как процесс вынужденного распада фотона с энергией  $\hbar\omega_1$  на два фотона с энергиями  $\hbar\omega_2$  и  $\hbar\Omega$ .

Распад фотона на два может происходить и в отсутствие слабой волны  $\omega_2$  (см. рис. 18.7, *з*), тогда  $\omega' + \omega'' = \omega_1$ . Частным случаем этого процесса является генерация субгармоник, когда  $\omega' = \omega'' = \omega_1/2$ .

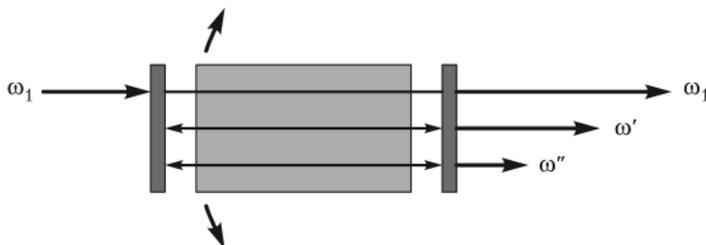


Рис. 18.8. Параметрическая генерация

Последний из описанных эффектов используется в *параметрическом генераторе света* — источнике когерентного оптического излучения, в котором мощная световая волна частоты накачки  $\omega_1$  преобразуется в волны меньших частот. Волна  $\omega_1$  запускает механизм нелинейной поляризации. Уже у входной грани анизотропного нелинейного кристалла из шумов возбуждаются электромагнитные колебания частот  $\omega'$  и  $\omega''$  (рис. 18.8.). Если для них выполняются условия фазового синхронизма, то возникает возможность перестраиваемой генерации. Варьирование частот  $\omega'$  и  $\omega''$  производится поворотом нелинейного кристалла, который приводит к изменению волновых векторов  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  в условии синхронизации  $k_1 = k' + k''$ , а открытый резонатор увеличивает эффективную длину взаимодействия. Полоса перестройки определяется диапазоном частот, для которых в данном кристалле возможен пространственный синхронизм.

## 18.5. Вынужденное рассеяние и обращение волнового фронта

С кубической нелинейностью centrosymmetric сред (газы, жидкости, плазма, твердые тела) связано явление *вынужденного рассеяния света* — рассеяния на индуцированных самой световой волной элементарных возбуждениях среды: собственных колебаниях молекул, колебаниях кристаллической решетки, температурных волнах и т. п. Причиной его является обратное воздействие световых волн на рассеивающую среду в силу нелинейности последней.

*Спонтанное неупругое рассеяние* (см. раздел 15.3) происходит в линейном режиме на равновесных тепловых флуктуациях и поэтому является *некогерентным*. Напомним, что частота рассеянного излучения по отношению к частоте падающего света либо уменьшается (*стокс*) либо увеличивается (*антистокс*). При *вынужденном рассеянии* также наблюдаются частотные сдвиги, но происходит взаимодействие излучения накачки и рассеянного света через среду, и поэтому

элементарные возбуждения становятся когерентными. Наиболее характерные признаки режима вынужденного рассеяния — *резкое возрастание интенсивности и сужение диаграмм направленности* всех спектральных компонент.

*Вынужденное комбинационное рассеяние* (ВКР) описывается с помощью модели нелинейно-связанных осцилляторов. Представим энергию молекулы в виде суммы электронной и колебательной составляющих

$$U = \frac{f_1 x^2}{2} + \frac{f_2 y^2}{2} + \alpha xy^2, \quad (18.13)$$

где  $\alpha$  — нелинейная поляризуемость молекулы;  $x$  и  $y$  — координаты колебаний атомов в молекуле и колебаний внешних электронов соответственно. Последнее слагаемое описывает взаимодействие электронных и колебательных возмущений в молекуле (*электрон-фононные взаимодействия*) и является следствием различной деформации электронных оболочек в разных колебательных состояниях (модах) многоатомной молекулы. В этом случае уравнения движения атомов и электронов имеют вид:

$$\begin{cases} x'' + 2\gamma_1 x' + \Omega^2 x = -\frac{\alpha y^2}{M}, \\ y'' + 2\gamma_2 y' + \omega_0^2 y = \frac{(eE - 2\alpha xy)}{m}. \end{cases} \quad (18.14)$$

где  $\Omega$  — одна из колебательных частот данной молекулы,  $M$  и  $m$  — массы атома и электрона соответственно.

Изменение координат атомов  $x$  ведет за собой изменение поляризуемости молекулы  $\chi da/dx$ , что, в свою очередь, приводит к появлению разностной стоксовой частоты  $\omega_s = \omega_0 - \Omega$ . Условия усиления для стоксовой компоненты выполняются для всех направлений распространения без ограничений на волновые векторы. В результате нелинейного взаимодействия на хаотическое внутримолекулярное движение накладываются регулярные *вынужденные колебания*, происходит фазирование молекулярных колебаний во всем объеме, занятом полями. Энергия волны накачки резонансно передается стоксовой волне, и при достаточной интенсивности накачки рассеяние на молекулярных колебаниях нарастает экспоненциально — возникает эффект ВКР.

В отличие от стоксова антистоксова рассеяние возникает в четырехфотонном процессе. На первом этапе из лазерного фотона образуются стоксов фотон и фонon  $\hbar\Omega$  с волновым вектором  $\mathbf{K}$ :  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_s + \mathbf{K}$ . На втором этапе с участием родившегося фотона и еще одного фотона накачки образуется антистоксов фотон  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{K} = \mathbf{k}_{ac}$ . Векторная диаграмма процесса имеет вид, показанный на рис. 18.9. Из нее следует, что антистоксово излучение возникает только под определенным углом  $\theta$  к возбуждающему лазерному пучку.

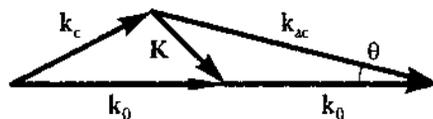


Рис. 18.9. Векторная диаграмма вынужденного антистоксова рассеяния

Длины волновых векторов связаны соотношениями

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c} n_0, \quad k_c = \frac{\omega_0 - \Omega}{c} n_c, \quad k_{ac} = \frac{\omega_0 + \Omega}{c} n_{ac}. \quad (18.15)$$

Введем обозначения  $\Delta n_1 = n_{ac} - n_0$ ,  $\Delta n_{-1} = n_0 - n_c$ . Учитывая, что  $\Delta n \ll n_0$ ,  $\Omega \ll \omega_0$ ,  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ , для угла антистоксова рассеяния найдем:

$$\theta^2 \approx \frac{1}{n_0} \frac{\omega_0 - \Omega}{\omega_0 + \Omega} (\Delta n_1 - \Delta n_{-1}). \quad (18.16)$$

Таким образом, антистоксово излучение распространяется вдоль образующей конуса с углом  $\theta$  (рис. 18.10). На экране, поставленном за нелинейной средой, облучаемой ИК-лазером, образуются цветные кольца, соответствующие антистоксовым гармоникам  $\omega_m = \omega_0 + m\Omega$ .

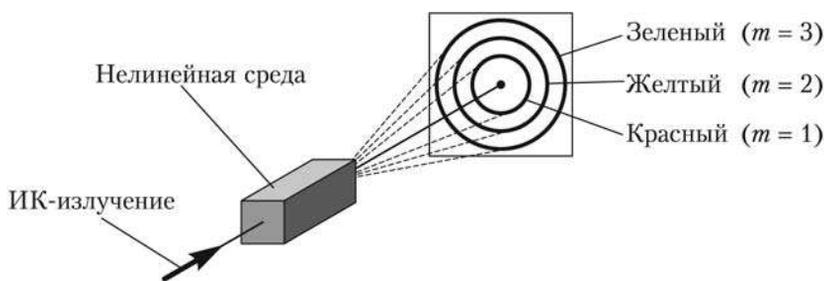


Рис. 18.10. Генерация антистоксовых гармоник

Каждому виду спонтанного рассеяния можно сопоставить соответствующее вынужденное. Например, *вынужденное рассеяние Мандельштама—Бриллюэна* (ВРМБ) наблюдается при индуцированной генерации гиперзвуковых волн в твердых телах. Как и в спонтанном случае, частотный сдвиг компонент ВРМБ меньше, чем ВКР (доли обратного сантиметра) и зависит от ориентации кристаллической решетки. Как и другие нелинейные эффекты, ВРМБ обусловлено влиянием мощной световой волны на параметры среды. Такое влияние, в частности, связано с явлением электрострикции, так как электрическое поле в диэлектрике вызывает дополнительное давление, пропорциональное квадрату напряженности поля. В соответствии с формой и длительностью импульса электромагнитного излучения, в среде генерируется акустическая волна, на которой и происходит когерентное рассеяние света.

С ВРМБ тесно связано явление *обращения волнового фронта* (ОВФ), не имеющее аналога в классической оптике. Схема этого эффекта показана на рис. 18.11. Исходный лазерный пучок с высокой направленностью проходит через среду с фазовыми неоднородностями, превращаясь в сильно расходящийся пучок 1 (рис. 18.11, а). Затем в нелинейной среде происходит обращение волнового фронта, то есть генерируется волна 2, поле которого связано с исходной волной 1 операцией комплексного сопряжения:  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1^*(\mathbf{r})$  (рис. 18.11, б).

Каждая составляющая пространственного спектра  $A_1 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$  преобразуется в волну  $A_2 \exp[i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r})]$ , и эти две волны распространяются точно в противоположных направлениях. При вторичном прохождении в обратном направ-

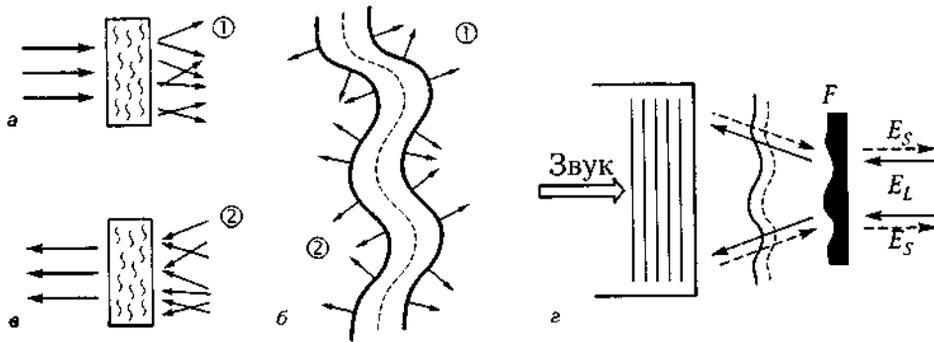


Рис. 18.11. Обращение волнового фронта

лении через ту же неоднородную среду (рис. 18.11, *б*), все фазовые искажения пучка 2 полностью компенсируются, и он снова приобретает высокую направленность.

Одним из методов осуществления обращения волнового фронта является ВРМБ назад (рис. 18.11, *в*), когда усиливаемые упругая и световая волны распространяются навстречу и каждая из них обеспечивает положительную обратную связь для параметрического усиления другой.

Возникающая в кювете с сероуглеродом или метаном гиперзвуковая волна формирует *динамическую голограмму*, отражающую световой пучок под углом  $180^\circ$ . При этом в результате нелинейного взаимодействия происходит перекачка энергии исходного лазерного пучка  $E_L$  в рассеянную волну  $E_S$ . Отметим, что для получения эффективной динамической голограммы пучок накачки должен быть пространственно неоднородным. Поскольку параллельный пучок не может вызвать ОВФ, в схеме указан рассеивающий фильтр  $F$ , вводимый специально либо реализуемый естественным образом (гурбулентности атмосферы, абберационные искажения, мутные среды и т. п.).

Большой научный интерес к обращению волнового фронта, проявляемый в настоящее время, связан с задачами развития лазерной техники. ОВФ — один из эффективных методов борьбы за повышение качества изображений, получаемых наземными телескопами или спутниками, исследующими поверхность Земли. Прохождение световых лучей через неоднородную атмосферу искажает форму волнового фронта, снижая разрешающую способность и смещая наблюдаемые координаты объектов. Другой пример — абберации, имеющиеся в различных оптических элементах. Наряду с неоднородностями усиливающей среды они препятствуют получению мощных лазерных пучков с расходимостью, близкой к дифракционной. Если искаженный пучок обратить и вторично пропустить через усилитель, наряду с дальнейшим увеличением интенсивности произойдет компенсация искажений волнового фронта, и выходящее излучение будет иметь направленность, близкую к предельной.

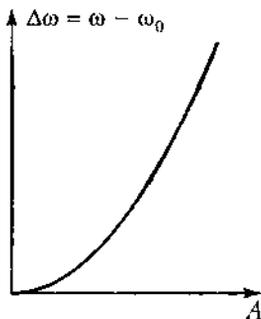
Еще одним применением ОВФ является самонаведение лазерного излучения на малую мишень. Если подсветить мишень вспомогательным лазером, то она станет источником вторичной световой волны, возникающей вследствие отражения и рассеяния лазерного света. Некоторую часть этой волны можно направить

в усилитель и после его прохождения подвергнуть обращению. Распространяясь по пути исходной волны, мощная обратная волна пройдет усилитель в обратном направлении, а затем соберется точно на мишени.

## 18.6. Эффекты самовоздействия света

Четырехволновые взаимодействия в среде с кубической нелинейностью приводят к возникновению волн нелинейной поляризации на исходных частотах. Через компоненты  $P_i = \chi_{ij}^{(3)} E_j E_k E_l$  (см. формулу (18.3)) они определяют эффекты *кросс-модуляции* (например, уже рассмотренное вынужденное рассеяние), а через  $P_i = \chi_{iii}^{(3)} E_i E_i E_i$  — различные явления *самовоздействия*, связанные с нелинейной добавкой к показателю преломления  $n_2$ . При дальнейшем анализе пренебрежем анизотропией среды и будем считать, что все диагональные компоненты нелинейной восприимчивости одинаковы:  $\chi_{iii}^{(3)} = \beta$ . Физические механизмы зависимости показателя преломления от интенсивности излучения  $n = n(I) = n_0 + n_2 E^2$  могут быть различными: ориентация анизотропных молекул (*высокочастотный эффект Керра*), нелинейность электронной поляризации, изменение плотности в результате электрострикции или термических воздействий.

В терминах осцилляторной модели возникает *неизохронность* нелинейного осциллятора, то есть зависимость частоты колебаний от амплитуды. Действительно, решение уравнения с кубической нелинейностью  $x'' + \omega_0^2 x - \beta x^3 = 0$  имеет вид колебаний с частотой



**Рис. 18.12.**  
Зависимость частоты колебаний от амплитуды в среде с кубической нелинейностью

$$\omega = \omega_0 - \frac{3\beta A^2}{8\omega_0},$$

где  $A$  — амплитуда колебаний, определяемая амплитудой светового поля (рис. 18.12). Неизохронность приводит к появлению дополнительного фазового сдвига, зависящего от интенсивности световой волны. Такая фазировка ансамбля осцилляторов в поле пространственно неоднородного (например, гауссова) пучка приводит к искривлению волнового фронта и изменению поперечных размеров пучка — его *самофокусировке* или *самодефокусировке* (в зависимости от знака  $n_2 = 3\beta/8n_0$ ). Как всегда в неоднородной среде, световые лучи отклоняются в сторону большего показателя преломления (рис. 18.13).

Для получения численных оценок рассмотрим упрощенную модель, в которой в однородную нелинейную среду с  $n_2 > 0$  попадает лазерный пучок с постоянной по сечению  $d$  амплитудой поля (рис. 18.14).

Под воздействием пучка в среде образуется своего рода световод с повышенным показателем преломления. Лучи, распространяющиеся под небольшим углом  $\theta$  к оси световода, испытывают полное отражение на его границе. Предельный угол полного отражения определяется соотношением

$$(n_0 + n_2 E^2) \cos \theta_0 = n_0. \quad (18.17)$$

При малых углах  $\cos \theta_0 \approx 1 - \theta_0^2/2$ , откуда

$$\theta_0^2 \approx \frac{2n_2 E^2}{n_0}. \quad (18.18)$$

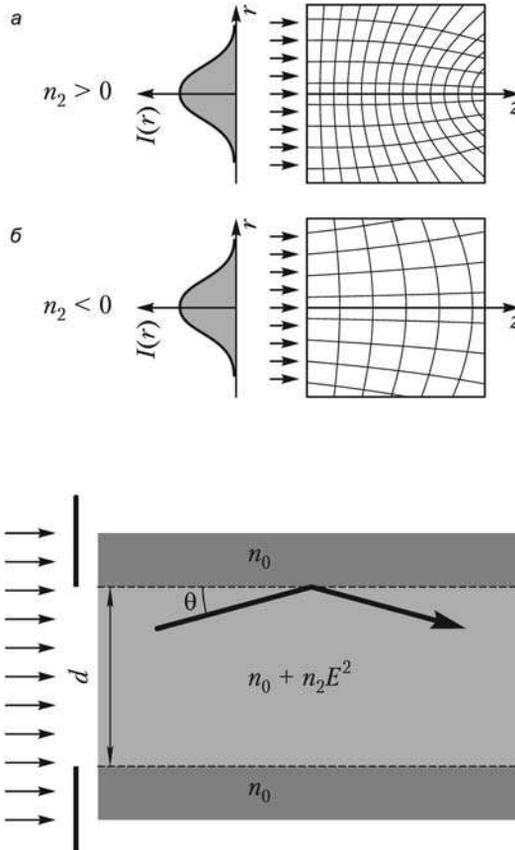


Рис. 18.14. Возникновение нелинейного световода

Если принять, что наклонные лучи возникают в результате дифракции на диафрагме диаметром  $d$ , то угол дифракции по порядку равен  $1,22\lambda_0/n_0 d$ , где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме. Подставив это значение в качестве  $\theta_0$  в формулу (18.18), получим, что компенсация дифракционной расходимости произойдет при напряженности поля в пучке не менее

$$E_0^2 = \frac{1,5\lambda_0^2}{2n_0 n_2 d^2}. \quad (18.19)$$

Учитывая, что мощность излучения связана с напряженностью светового электрического поля соотношением

$$N = \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) n E^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{10^7 d^2 n E^2}{16c},$$

найдем для пороговой мощности самофокусировки

$$N_{\text{пор}} = \frac{1,5 \cdot 10^7 \lambda_0^2}{32 n_2 c}. \quad (18.20)$$

Примечательно, что пороговая мощность не зависит от диаметра пучка. Для значений  $n_2 \sim 10^{-21} \text{ м}^2/\text{В}^2$  получим, что  $N_{\text{пор}} \sim 1 \text{ МВт}$ . Режим, когда нелинейность среды полностью компенсирует дифракционную расходимость, называется *самоканализацией* света.

Поскольку в реальных световых пучках интенсивность возрастает от краев к оси пучка постепенно, то при превышении пороговой мощности нелинейная среда начинает вести себя подобно собирающей линзе, и происходит *самофокусировка* пучка (см. рис. 18.13, а). При этом за счет уменьшения сечения пучка резко возрастает интенсивность света, что может привести к оптическому пробое и разрушению оптических элементов.

Дефокусировка пучка наступает при  $n_2 < 0$ . Однако на практике дефокусировка чаще связана не с нелинейностью, а с неоднородным нагревом среды, например воздуха, уменьшением его плотности и, соответственно, показателя преломления. Именно этот эффект в основном ограничивает возможности передачи большой энергии в атмосфере на уровне максимальной плотности мощности  $\sim 100 \text{ МВт}/\text{см}^2$ .

Нелинейный фазовый набег может зависеть не только от координат, но и от времени. В коротком световом импульсе интенсивность быстро меняется и, следовательно, частота и фаза оказываются промодулированными во времени. Таким образом, мощный световой импульс в нелинейной среде может испытывать *само модуляцию* (как сжатие, так и расширение). При компенсации нелинейного сжатия и дисперсионного расплывания могут образовываться своеобразные стационарные импульсы — устойчивые оптические *солитоны*. Еще из общей теории нелинейных колебаний были известны уединенные волны, распространяющиеся на большие расстояния с малыми искажениями, например волны в узких каналах или гигантские океанские цунами, возникающие после землетрясений. На рис. 18.15 показано, как при достижении некоторой критической плотности энергии  $w_{\text{кр}}$  формируется солитон, форма которого описывается гиперболическим секансом

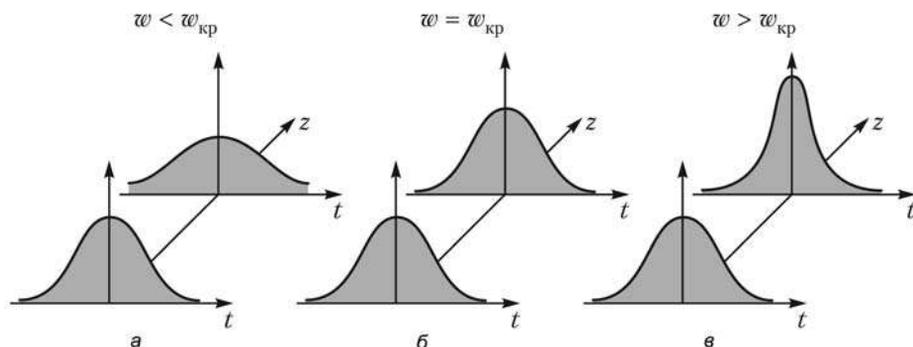
$$E(t) = A \operatorname{sech} \left( \frac{t}{\tau} \right) \quad (\text{рис. 18.15, б}).$$

Импульс с плотностью энергии меньше критической  $w < w_{\text{кр}}$  расплывается (рис. 18.15, а), а с  $w > w_{\text{кр}}$  — сжимается (рис. 18.15, в).

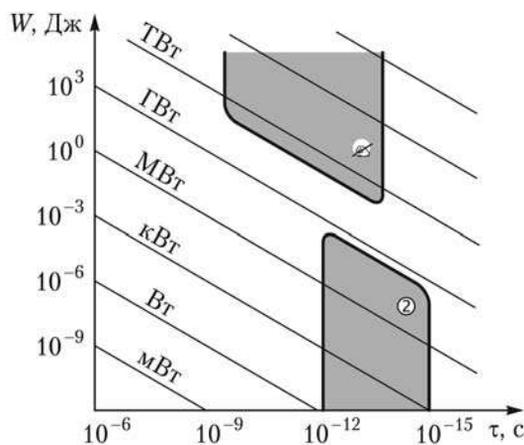
В настоящее время методами нелинейной оптики получены предельно короткие световые импульсы длительностью 4,5 фс в видимом диапазоне (два периода колебаний) и 40 фс в средней ИК-области спектра (всего один период). Освоение фемтосекундного масштаба времени (1 фс =  $10^{-15}$  с) означает фактически полную реализацию возможностей оптики, поскольку один период колебания — это не только минимальная длительность светового импульса, но и предельное время оптического отклика материальной среды.

С прикладной точки зрения переход к фемтосекундным импульсам — это, прежде всего, реализация предельных скоростей передачи и обработки данных, развитие *активной спектроскопии сверхбыстрых процессов* (область 1 на диа-

грамме энергия–длительность рис. 18.16) и переход, за счет уменьшения длительности, к тераваттным уровням мощности *сверхсильных световых полей* (область 2).



**Рис. 18.15.** Изменение характера распространения импульса в нелинейной среде с ростом плотности энергии



**Рис. 18.16.** Диаграмма энергия–длительность: 1 — сверхбыстрые процессы, 2 — сверхсильные поля.

Для генерации фемтосекундных импульсов успешно применяют *принцип фазировки спектральных компонент* света (рис. 18.17, а). Так как длительность импульса и ширина его частотного спектра есть величины дополнительные, то на первой стадии путем самовоздействия импульса в нелинейной среде получают широкополосное излучение, и лишь на второй, вводя дополнительную разность хода между различными спектральными компонентами, добиваются их наилучшей фазировки и тем самым формирования сверхкороткого светового импульса. Один из наиболее эффективных вариантов этой техники — *компрессия модулированного импульса* (рис. 18.17, б). Используя самомодуляцию мощного лазерного импульса в волоконном световоде (среда с безынерционной кубической нелинейностью керровского типа), получают *частотно-модулированный импульс*. Как и положено в случае нормальной дисперсии прозрачных сред, в этом им-

пульсе фазовая скорость больше групповой и низкочастотные компоненты обгоняют высокочастотные. Этот частотно-модулированный импульс направляется на оптический компрессор, состоящий, например, из двух дифракционных решеток  $G_1$  и  $G_2$  и зеркала  $M$ . Решетки обладают аномальной дисперсией (при дифракции длинноволновое излучение получает большую задержку, чем коротковолновое). Это следует из условия главных максимумов  $d \sin \varphi = m\lambda$ , когда большим длинам волн соответствуют большие углы отклонения пучка. В результате вполне могут реализоваться необходимые условия синхронизации высокочастотных и низкочастотных компонент.

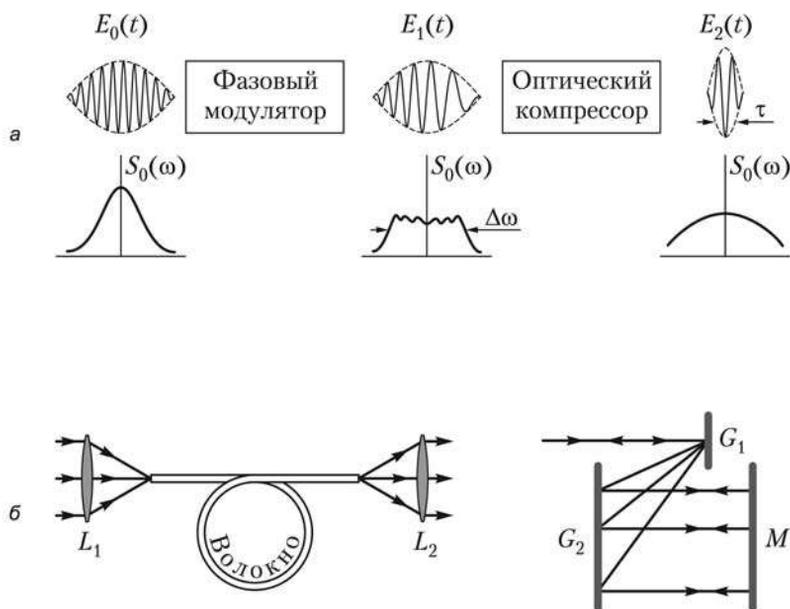


Рис. 18.17. Принцип компрессии световых импульсов (а) и его реализация (б) с помощью нелинейного световода и дифракционных решеток

Обсуждаемые принципы имеют глубокие аналогии в классической оптике. Так, сжатие во времени фазово-модулированного сигнала дисперсионным оптическим элементом есть *аналог фокусировки пучка* с помощью линзы, которая фактически синхронизирует волны, идущие под разными углами к оптической оси, то есть различные пространственные гармоники.

## 18.7. Нелинейный резонанс и оптическая бистабильность

Резонансная кривая кубично-нелинейного осциллятора может быть получена из лоренцевского контура линейного резонанса путем замены частоты  $\omega_0$  на частоту, зависящую от амплитуды (учет неизохронности). При нелинейном резонансе существует область частот с двумя амплитудными режимами, установление ко-

торых зависит от предыдущего значения частоты внешней силы. Действительно, решив нелинейное уравнение для амплитуды стационарных колебаний

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x - \beta x^3 = 0, \quad (18.21)$$

получим выражение

$$4\omega_0^2 A^2 = \frac{B^2}{(\omega_0 - \omega - \kappa A^2)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad (18.22)$$

где  $B = \frac{eE}{m}$ ;  $\kappa = \frac{3\beta}{8\omega_0} = \frac{n_0 n_2}{\omega_0}$ .

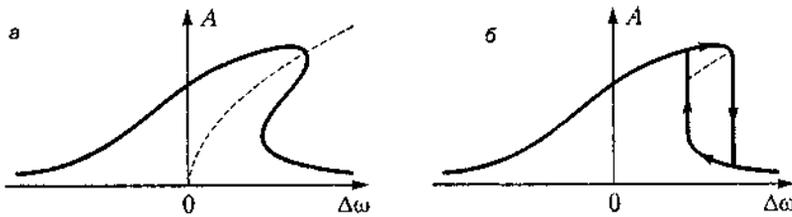


Рис. 18.18. Зависимость амплитуды нелинейного осциллятора от расстройки частоты (а) и оптический гистерезис (б)

Зависимость амплитуды от расстройки частоты  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$  показана на рис. 18.18, а. Пунктиром дана зависимость частотной расстройки от амплитуды (см. рис. 18.12). Физически реализуется случай, когда одной и той же расстройке частоты соответствуют две возможные амплитуды высокая и низкая (рис. 18.18, б). Образующийся *оптический гистерезис* может быть положен в основу создания *бистабильных элементов*, которые могут играть роль двоичных оптических переключающих устройств. Одна из возможных схем — резонатор, заполненный нелинейной средой и обеспечивающий системе *обратную связь* (рис. 18.19, а).

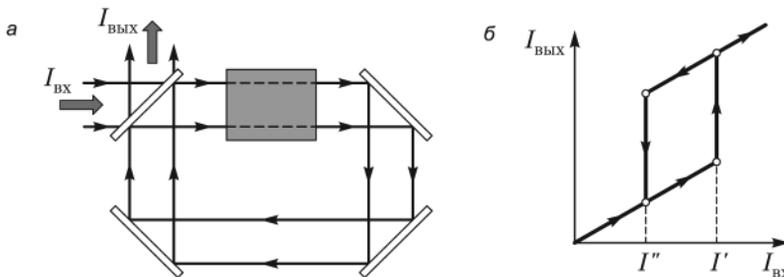


Рис. 18.19. Бистабильный элемент (а) и его передаточная характеристика (б)

При постепенном увеличении интенсивности входного пучка  $I_{\text{вх}}$  интенсивность на выходе растет сравнительно медленно в соответствии с нижней ветвью гистерезиса. По достижении некоторого порогового значения  $I'$  нелинейная среда просветляется, ее коэффициент поглощения скачком уменьшается, приводя к резкому повышению выходной мощности (рис. 18.19, б). Если теперь уменьшать интенсивность  $I_{\text{вх}}$ , то поглощательные (абсорбционные) свойства нелинейной среды восстанавливаются при значении  $I'' < I'$ , обеспечивая своеобразную «опти-

ческую память». Участок от  $I''$  до  $I'$  и является областью абсорбционной оптической бистабильности. В этом случае при одной и той же мощности входного пучка интенсивность на выходе имеет два возможных значения — оптические аналоги логических «0» и «1».

В пассивном кольцевом резонаторе помимо описанной выше *абсорбционной бистабильности* могут возникать *поляризационные мультистабильности*. Обычно считается, что поляризационные эффекты характерны для пучков с наклонным падением. Но даже для распространяющегося вдоль оптической оси интенсивного линейно поляризованного излучения флуктуации поляризации могут нарастать во времени, приводя к появлению ряда конкурирующих стационарных состояний.

На динамику пространственно-временной неустойчивости в нелинейном кольцевом резонаторе могут влиять *диффузионные процессы*, *дифракционное «перемешивание»* поперечных возмущений и специально введенные *трансформаторы светового поля* (например, оборачивающие призмы, рис. 18.20). В таком резонаторе полупрозрачные зеркала  $M_1$  и  $M_2$  обеспечивают связь между встречными волнами. Благодаря тому, что в резонатор помещена оборачивающая призма  $Pr$ , каждый луч на следующем проходе захватывает новый участок нелинейной среды  $NL$ . Таким образом осуществляется нелинейное взаимодействие по поперечному сечению пучка.

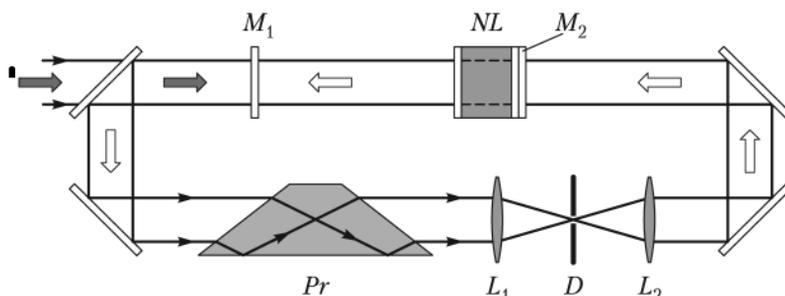


Рис. 18.20. Кольцевой резонатор с нелинейным элементом и оборачивающей призмой

В результате оказывается возможной визуализация явлений *самоорганизации света*: рождение регулярных структур из хаоса, появление вращающихся оптических ревербераторов, концентрических и ротационных волн, оптических спиралей и т. п. (рис. 18.21). Эти эффекты активно изучаются в рамках новейшего раздела оптики — *оптической синергетики*.



Рис. 18.21. Самоорганизующиеся оптические структуры

## 18.8. Принципы нелинейной лазерной спектроскопии

Динамические нелинейные эффекты лежат в основе *активной лазерной спектроскопии*, исследующей поглощение и рассеяние зондирующего пучка света в среде, предварительно возбужденной мощным лазерным импульсом накачки. Как известно, разрешение традиционных спектральных методов ограничено неоднородным, например, доплеровским уширением (см. раздел 10.2). Методы лазерной спектроскопии позволяют исключить влияние неоднородного уширения и тем самым поднять разрешение на несколько порядков.

В методах *спектроскопии насыщения* излучение накачки насыщает неоднородно уширенную линию поглощения (переход 0–1 на рис. 18.22).

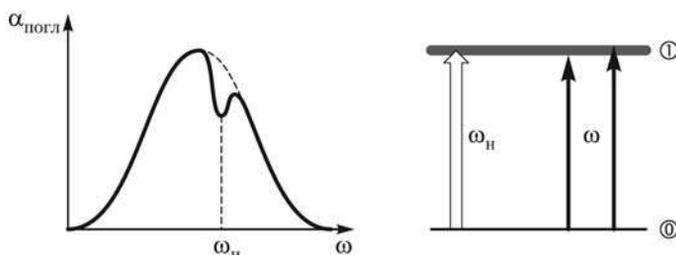


Рис. 18.22. «Провал» в линии поглощения

Этот эффект заключается в том, что под действием вынужденных переходов населенности рабочих уровней выравниваются и среда становится прозрачной. Однако для доплеровски уширенной линии выравнивание населенностей происходит не для всех атомов, а только для тех, у которых частота перехода  $\omega_0$  с учетом доплеровского сдвига совпадает с частотой лазера накачки  $\omega$ :

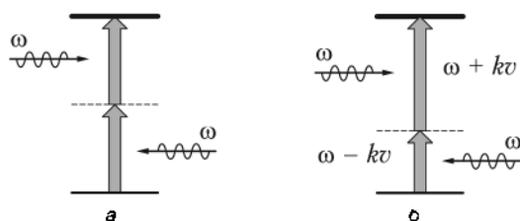
$$\omega_0 \left( 1 - \frac{v_z}{c} \right) = \omega, \quad (18.23)$$

где  $v_z$  — проекция скорости атома на направление лазерного луча. Иначе говоря, накачка селективно возбуждает только группу атомов со скоростями, удовлетворяющими соотношению (18.23).

Сканируемый по частоте зондирующий пучок фиксирует своеобразный «провал» в линии поглощения (рис. 18.22), по которому можно определить время жизни возбужденного состояния и естественную ширину спектральной линии.

Другим методом устранения влияния доплеровского уширения является *двух-фотонное поглощение* во встречных лазерных пучках. При этом доплеровские сдвиги частоты для каждого из пучков равны по величине, но противоположны по знаку. Поэтому условия поглощения выполняются как для покоящихся атомов (рис. 18.23, а), так и для движущихся (рис. 18.23, б). В результате контур линии поглощения имеет такую же ширину, как в отсутствие движения атомов.

Интересны быстротекающие переходные оптические эффекты, возникающие при скачкообразном изменении амплитуды излучения накачки  $A_n$ . Эффект *оптических пуганий* заключается в затухающих осцилляциях излучения на

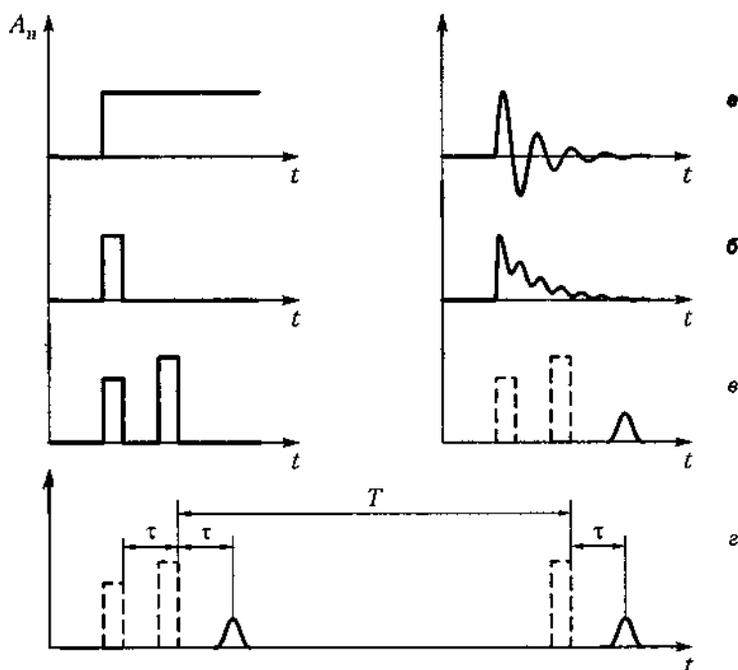


**Рис. 18.23.** Компенсация доплеровского сдвига при двухфотонном поглощении во встречных пучках

выходе из исследуемой среды сразу после включения (выключения) накачки (рис. 18.24, *a*). Затухание свободной поляризации наблюдается в виде излучения, испускаемого атомами (молекулами) сразу после их возбуждения резонансным импульсом (рис. 18.24, *б*).

Сигнал *оптического эха* возникает в нелинейной среде, возбужденной двумя импульсами, разнесенными во времени на интервал  $\tau$ . Первичное эхо (рис. 18.24, *в*) появляется через такой же промежуток времени  $\tau$  после второго импульса накачки. Таким образом, время  $\tau$  определяет длительность «запоминания» информации.

Возникающее в ряде случаев вторичное эхо (рис. 18.24, *г*) позволяет значительно увеличить эту длительность ( $T \gg \tau$ ). При этом в оптических системах обработки информации два первых импульса являются импульсами записи, а третий — считывающим.



**Рис. 18.24.** Переходные оптические эффекты

## 18.9. Световое давление в лазерных пучках

Как указывалось ранее (см. раздел 16.4), световое давление в квантовой оптике может рассматриваться как результат передачи суммарного импульса фотонов частицам среды. Для классических источников света эта величина чрезвычайно мала. Например, сила давления солнечного излучения на поверхность земли на десять порядков меньше атмосферного давления.

Ситуация, однако, в корне меняется, если рассмотреть воздействие света на отдельный атом при резонансном взаимодействии интенсивного лазерного излучения с веществом, то есть когда частота света  $\omega$  близка к частоте перехода в атоме  $\omega_0$ . При насыщении поглощения (см. раздел 18.2) сила светового давления перестает зависеть от интенсивности света, определяется исключительно скоростью распада возбужденного состояния  $\gamma$  и может иметь достаточно заметную величину. Так, атом натрия массой  $23 \text{ а.е.м.} = 3,8 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$  с  $\gamma \sim 10^7 \text{ с}^{-1}$  в лазерном пучке с  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  получает ускорение около  $2,5 \cdot 10^5 \text{ м/с}^2$ . Возможно наблюдать прямое действие сфокусированного лазерного пучка на прозрачные микрочастицы. Эффект *оптической левитации* достигается, например, при воздействии пучка мощностью 250 мВт на сферические полимерные частицы диаметром 5–20 мкм, поскольку ускорение частиц может превышать ускорение свободного падения, они оказываются как бы подвешенными в световом луче.

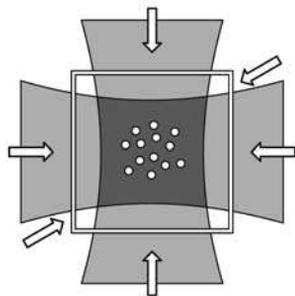
Световое давление дало возможность *лазерного управления атомными пучками*. Силы, действующие на атомы, позволяют коллимировать (направлять) атомные пучки и изменять скоростное распределение частиц в них. Исключительно важным практическим применением этого эффекта является *разделение изотопов*, основанное на том, что изотопический сдвиг спектральной линии атома позволяет настроить лазерное излучение в резонанс только с одним изотопом.

Облучение лазером атомов натрия, находящихся в буферном инертном газе, позволило создать своего рода *оптический насос*, так как при перестройке частоты лазера вблизи резонанса меняется направление движения атомов Na. Если частота несколько ниже резонанса, атомы двигаются в направлении лазерного пучка, а если выше — навстречу пучку.

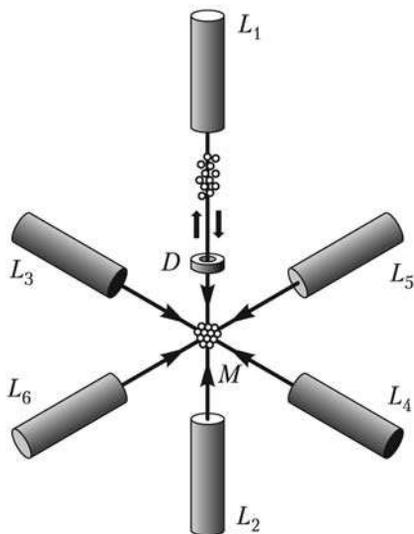
Еще одним применением светового давления является *лазерное охлаждение* атомов. Его сущность состоит в следующем. Лазер настраивается на частоту, меньшую, чем частота перехода. В соответствии с уравнением (18.23) эффективно взаимодействовать с излучением, то есть испытывать силу светового давления, будут преимущественно те атомы, скорость теплового движения которых направлена в сторону лазера. При каждом поглощении фотона атом массой  $m$  получает тормозящий импульс, изменяющий его скорость на  $\Delta v = \hbar\omega/mc$ . Средняя скорость теплового движения равна  $\bar{v} = \sqrt{kT/m}$ , поэтому в среднем для остановки атома необходимо

$$n = \frac{\bar{v}}{\Delta v} = \frac{2\pi\lambda\sqrt{mkT}}{\hbar} \quad (18.24)$$

актов поглощения. Для атомов Na с  $T = 300 \text{ К}$  формула (18.24) дает  $n \approx 2 \cdot 10^4$ . Обмен скоростями при столкновениях атомов приводит к общему охлаждению газа. С помощью этого эффекта удалось достичь температур порядка 100 мкК.



**Рис. 18.25.**  
Оптическая ловушка  
для ультрахолодных  
атомов



**Рис. 18.26.** «Оптический фонтан»

В неоднородных по сечению лазерных пучках возникают не только продольные, но и поперечные силы. С их помощью, используя шесть лазерных пучков, сфокусированных с разных сторон в одну точку, была построена *оптическая ловушка* (рис. 18.25). В такой ловушке ультрахолодные атомы могли удерживаться в объеме  $\sim 10^{-3}$  мм<sup>3</sup> в течение  $\sim 10$  с. Эксперименты с захваченными атомами и ионами позволили исследовать формирование химических связей, проверить выполнение законов сохранения в единичных актах рождения и уничтожения фотонов, получить физические объекты с совершенно необыкновенными свойствами, например с показателем преломления до 5000.

Светокинетические эффекты используются для получения сверхузких резонансов, необходимых для создания оптических стандартов частоты, прецизионного измерения спектральных характеристик и других метрологических применений. Дело в том, что ширина резонанса не может быть меньше обратного времени взаимодействия атома с излучением (так называемое *временное уширение*), что ограничивает точность измерения частоты. При тепловых скоростях атомов ( $\sim 500$  м/с) и поперечнике светового пучка в несколько миллиметров это время составляет десятки микросекунд. Увеличить его на много порядков позволяет «*оптический фонтан*» (рис. 18.26).

Шесть лазеров  $L_1 \dots L_6$  формируют оптическую ловушку, в которой накапливаются медленные атомы. Кратковременное увеличение мощности лазера  $L_2$  выбрасывает

атомы вверх из ловушки, после чего они начинают двигаться в поле силы тяжести по баллистической траектории. Детектор  $D$  регистрирует спонтанное излучение атомов на участке подъема и спуска. Эффективное время взаимодействия при этом определяется интервалом между двумя прохождениями детектора и доходит при высоте фонтана в десять сантиметров до десятых долей секунды.

# Интерактивный музей оптики OPTIMUS

Проблема привлечения молодежи к техническому творчеству и получению образования в области высоких технологий является актуальной для всех развитых и развивающихся стран. Создание и развитие наукоемких интерактивных экспозиций, музеев науки и техники и экспериментальных установок коллективного (в том числе дистанционного) доступа признается одним из основных путей решения указанной проблемы. Наиболее известные примеры — музей науки и технологии (Шанхай), музей естествознания (Лондон), музей истории науки (Флоренция) и т. д. Созданный в 2008 г. в Санкт-Петербурге музей оптики стал первым в России комплексным объектом такого рода в области современных оптических, оптико-электронных и оптико-информационных технологий.

Музей создавался в рамках инновационной образовательной программы Санкт-Петербургского университета информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО) и предназначен для приобщения учащихся к волшебному миру оптики, ее истории, современности и перспективам развития. По замыслу создателей он должен знакомить учащихся с широким кругом применений оптических и оптико-информационных технологий и усиливать их мотивацию к изучению оптической науки.

Экспозиция составлена с учетом широкого спектра целевой аудитории: от учащихся 7–9 классов на уровне начального ознакомления до учащихся 10–11 классов на базовом уровне изучения оптики. Кроме того, в стенах музея будет проводиться непосредственная профориентационная работа с абитуриентами на уровне углубленного понимания оптики. Наконец, не должны быть забыты и студенты I–II курсов оптических и оптико-информационных специальностей и направлений в рамках предпрофильной подготовки и осознанного выбора специализации.

Помимо традиционного осмотра отдельных экспонатов и коллекций в залах музея предусмотрена возможность организации самостоятельной работы учащихся с интерактивными стендами и демонстрационными моделями. Уже сегодня посетители могут знакомиться с информацией и обучающими программами по голографии, телескопостроению, основам оптического материаловедения и всем основным периодам истории оптики. Индивидуальная траектория изучения экспозиции обеспечивается использованием персональных источников света и живым участием в вариативных демонстрациях по геометрической оптике, интерференции, дифракции и поляризации света. Посетителю доступно относительно свободное манипулирование оптическими элементами на открытых установках, исследование тестовых объектов и самых различных оптических иллюзий. Большой интерес вызывают игровые стенды, сочетающие лазерный свет и музыку, стробоскопическое или ультрафиолетовое освещение, реальную апробацию инфракрасных приборов ночного видения.

Предполагается, что в музее будут использоваться самые различные формы взаимодействия с коллективными и индивидуальными посетителями. По предварительной записи будут проводиться обзорные экскурсии и тематические занятия с группами учащихся, при этом особенно приветствуются профильные классы и группы из договорных школ. Для старшеклассников методически подготовлены циклы лекций в сопровождении красочных демонстраций. Возможно и проведение практических занятий, профориентационных презентаций и разовых семинаров. В специально отведенное время планируется организация свободного индивидуального посещения.

В короткой заметке невозможно не только описать, но и просто перечислить все, что можно увидеть в музее. Отметим только самые интересные, по нашему мнению, коллекции и экспонаты. Уже сегодня можно сказать, что именно они привлекают к себе основное внимание посетителей.

В первом зале это — коллекция художественных и компьютерных голограмм, а также полномасштабные макеты двух реальных голографических установок. Здесь же на стенде памяти Ю. Н. Денисюка — основоположника цветной голографии — представлены факсимильные записи из его рабочего дневника. Современным аспирантам нелишне будет взглянуть, какую ежедневную программу научной работы намечал и выполнял Юрий Николаевич.

Для тех, кто хочет глубже разобраться с принципами голографирования предлагается поработать с интерактивной панелью обучающего стенда «Основы голографии». Весьма полезной для студентов и школьников оказалась возможность подсветки представленных голограмм индивидуальными фонариками. На многоракурсных голограммах это позволяет слону размахивать хоботом, превращать компьютерную мышь в живую, а льва — в тигра.

Особый интерес вызывают просветная радужная голограмма «Матрица» и стилизованный женский торс, собранный из кусочков голограмм. Неизменным успехом пользуется созданная коллективом нашей голографической студии художественная голограмма футбольного кубка УЕФА, оригинал которого летом был любезно предоставлен руководством клуба «Зенит».

Во втором (центральном) зале музея собрана весьма представительная ретроспективная коллекция источников света «от свечи до лазера». Здесь можно найти образцы античных светильников (греческие масляные лампы из глины и керамики, римские бронзовые люциды), мусульманские прообразы «лампы Алладина» из арабских сказок, а также более современное осветительное оборудование от керосинок до специальных ультрафиолетовых и инфракрасных источников света. В коллекции первых оптических элементов выделяются бронзовые зеркала, изготовленные по древнеегипетским и этрусским прототипам. А демонстрация отраженных узоров знаменитых китайских «магических» зеркал заставляет задуматься о вершинах технологий полировки, достигнутых еще в далекие века ханьской династии. Кстати, здесь же, на контрасте, демонстрируется работа современного «волшебного» адаптивного зеркала на уникальной пленочной основе.

В соседних витринах центрального зала, посвященных совершенствованию визирных приспособлений, представлены образцы вавилонских, римских и средневековых гномонов (солнечных часов), астролябий, армиллярных сфер и других предшественников оптических угломеров. В разделе о механизме видения можно познакомиться не только с читальными камнями, древними моделями очков, но и с подробными разборными моделями глаза, а также проверить качество собственного зрения. Стенды о природе света содержат наглядные пособия по цветовой палитре,

несколько демонстраций разложения белого света в цветной спектр с помощью дифракционных решеток и коллекцию особых спектральных ламп, созданных в Государственном оптическом институте (ГОИ). Последняя треть центрального зала отдана экспозиции по истории фотографии от камеры-обскуры и волшебного фонаря до аппаратов Дагерра и фотокамер советского производства.

Кстати, именно центральный зал легко трансформируется в минилекторий на 25 посадочных мест. Здесь оборудована циркулярная кафедра с компьютерным оснащением, имеются две плазменных панели и сетевая инфраструктура. В подсвеченных нишах размещены ретро-образцы оптических приборов, включая точные копии зеркального телескопа Ньютона и образцы зрительных труб Галилея и Кеплера.

Третий зал экспозиции посвящен оптическим материалам и, прежде всего, оптическому стеклу. На торцевой стене воссоздана панорама по истории венецианского стекла, а перед ней размещен сопряженный с компьютером интерактивный каталог Аббе — уникальная коллекция 144 различных оптических стекол от легких кронов до сверхтяжелых флинтгов, сваренных в советское время в ГОИ под руководством академика Г. Т. Петровского. Подобной по размерам стеклоблоков и полноте представления коллекции нет ни у одной фирмы в мире. Здесь же представлены образцы первых лазерных стержней и волоконно-оптических элементов, а также реальная технологическая оснастка для варки оптического стекла.

В других залах музея размещены демонстрационные стенды по интерференции, дифракции и поляризации света; действующие образцы современных лазерных приборов — нивелиров, уровней и дальномеров; игротека с лазерной арфой, лазерным тиром и лазерными шахматами; коридор «ультрафиолетовых иллюзий»; зал астрооптики с минипланетарием и многое другое...

# Литература

1. *Бутиков Е. И.* Оптика: Учебное пособие для студентов физических специальностей вузов. 2-е изд. СПб.: Невский Диалог; БХВ–Петербург, 2003.
2. *Матвеев А. Н.* Оптика: Учебное пособие для студентов физических специальностей вузов. М.: Высш. школа, 1985.
3. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. 4. Оптика: Учебное пособие для студентов физических специальностей вузов. М.: Наука, 1980.
4. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика, Учебное пособие для вузов. 3-е изд. М.: Наука, 1988.
5. *Калитеевский Н. И.* Волновая оптика: Учебное пособие для вузов. 3-е изд. М.: Высш. школа, 1995.
6. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970.
7. *Нагибина И. М.* Интерференция и дифракция света: Учебное пособие для оптических специальностей вузов. Л.: Машиностроение, 1985.
8. *Москалев В. А. и др.* Прикладная физическая оптика: Учебное пособие. СПб.: Политехника, 1995.
9. *Степанов Б. И.* Введение в современную оптику. Минск, 1989.
10. *Ишанин Г. Г., Козлов М. Г., Томский К. А.* Основы светотехники: Учебное пособие для вузов. СПб.: Береста, 2004.
11. *Ахмапов С. А., Никитин С. Ю.* Физическая оптика: Учебник. М.: Московский университет, 1998.
12. *Сечкарев А. В.* Фотонная оптика. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2000.
13. *Ярич А.* Введение в оптическую электронику. М.: Высш. школа, 1983.
14. Информационная оптика: Учебное пособие / Евтихнев Н. Н. и др. М.: Издательство МЭИ, 2000.
15. Методы компьютерной оптики / Под ред. Соифера В. А. М.: Физматлит, 2000.

# Алфавитный указатель

## А

- Аббе
  - инвариант 67, 158
  - условие синусов 72
- Аббе — Портера эксперимент 171
- абберация 67, 85, 157
  - астигматизм 56, 85
  - кома 86
  - оптической системы 85
  - сферическая 86
  - хроматическая 88
- абсолютно черное тело (АЧТ) 96, 256
- абсорбционная бистабильность 306
- абсорбционные свойства среды 233
- автокорреляционная функция 109
- азимут 190
- аккомодация 84
- активная
  - спектроскопия 302
  - лазерная 307
- активность
  - оптическая 219, 249
  - естественная 219
- Альхазен 26
- амплитудная
  - дифракционная решетка 162
  - зонная пластинка 139
  - модуляция 47, 160, 252
- амплитудные маски 160
- амплитудный
  - коэффициент
    - отражения 198
    - пропускания 198
  - объект 161
- анализатор 188
- Ангстрем 35
- анизотропия 33
- анизотропная среда 40, 208, 209
- аномальная дисперсия 236, 237
- антистоксовы линии 251, 298
- апертура 72
  - интерференции 112
  - числовая 158
- апланатические плоскости 87
- аподизация зрачка 156
- Араго опыт 217
- аргоновый лазер 276
- Архимед 18
- астигматизм 56, 85
- афокальная оптическая система 83
- АЧТ 256
  - модель 256

## Б

- Бабине
  - принцип 137, 169
  - теорема 154

- бальзам канадский 215
- Бальмер 35
- Бартолиниус 30
- Бесселя функция 154
- бизеркала Френеля 33, 118
- билинза Бийе 119
- бипризма Френеля 33, 118
- бистабильность
  - абсорбционная 306
  - оптическая 304
- бистабильный элемент 305
- близорукий глаз 84
- Больцмана распределение 259
- Брюстер 33
- Брюстера угол 199, 200, 206
- Бугер 31
- Бугера закон 232, 247
- Бугера — Ламберта — Бэра закон 232
- Бэкон 26

## В

- вектор
  - волновой 43
  - лучевой 210
  - Пойнтинга 46
  - Стокса 220
  - Умова — Пойнтинга 46
- величины фотометрические 92
- вентиль оптический 222
- Верде постоянная 222
- взаимодействие электрон-фононов 297
- видность интерференционных полос 107, 109
- Вина
  - закон смещения 258
  - парадокс 222
  - соотношение 257
- винт Фарадея 250
- ВКР 297
- вогнутое сферическое зеркало 69
- Волластон 34
- Волластона призма 216
- волна
  - необыкновенная 212
  - неоднородная 202
  - обыкновенная 212
  - плоская 42, 227
  - рассеянная 247
  - стоячая 280
  - сферическая 43, 227
  - электромагнитная 35
- волновое
  - поле 104
  - уравнение 41
  - число 43
- волновой
  - вектор 43
  - пакет 234

— синхронизм 294  
 — фронт 43  
 — фронт геометрический 51  
 — цуг 228, 230  
 волновых поверхностей сечение 213  
 волны  
 — амплитуда 42  
 — вторичные 132  
 — начальная фаза 42  
 — световые поляризованные 105  
 — сферические элементарные 132  
 — фаза 42  
 вращение плоскости поляризации 219  
 временная  
 — дисперсия 210, 237  
 — когерентность 108, 110  
 временной спектр 104  
 время  
 — жизни уровня радиационное 264  
 — когерентности 110, 230  
 времяпрелетное уширение 310  
 ВРМБ 298  
 вторая оптическая гармоника 291  
 вторичные  
 — волны 132  
 — источники 132  
 второй закон Кирхгофа 257  
 Вульфа — Брэггов условие 173  
 вынужденное  
 — ангистоксово рассеяние 298  
 — излучение 261, 262, 270  
 — комбинационное рассеяние (ВКР) 297  
 — колебание 297  
 — рассеяние 296  
 — рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ) 298  
 выпуклое сферическое зеркало 69  
 высокочастотный эффект Керра 300

## Г

гармоника 47  
 — антистоксова 298  
 гармоническая модуляция 174  
 гармонический осциллятор 288  
 гауссов пучок 283  
 гауссовский контур 230  
 гелий-неоновый лазер 274  
 Гельмгольца  
 — теорема обратимости 145  
 — уравнение 44, 51  
 генератор оптический 272  
 генерация  
 — параметрическая 295, 296  
 — субгармоник 296  
 геометрическая оптика прикладная 78  
 геометрические световые лучи 52  
 геометрический волновой фронт 51  
 Герон 29  
 Герц 35, 264  
 Гершель 34  
 гетерогенная граница 278

гетеролазер 278  
 гипотеза Планка 259  
 гиротропия 219  
 гистерезис оптический 305  
 главная  
 — оптическая ось 66, 72, 78  
 — оптическая ось линзы 73  
 — ось кристалла 209  
 — плоскость 78, 212  
 — скорость 209  
 главное значение диэлектрической проницаемости 209  
 главные  
 — сопряженные плоскости 71  
 — точки 79  
 главный  
 — максимум 161, 162  
 — показатель преломления 209  
 глаз 84  
 — близорукий 84  
 — дальнорезкий 84  
 глубина проникновения поля 204  
 голограмма  
 — динамическая 180, 299  
 — Френеля 177  
 — Фурье 177  
 голографическая  
 — интерферометрия 179  
 — память 180  
 голография 174  
 гомоцентрический  
 — параксиальный пучок 72  
 — световой пучок 55, 66  
 гомоцентричность 74, 78  
 граница  
 — гетерогенная 278  
 — сред плоская 58  
 — сред сферическая 66  
 — фотоэффекта красная 264  
 границы дифракционных приближений 146  
 граничные условия 196  
 — Кирхгофа 144  
 Гримальди, Франческо 29, 132  
 Грина теорема 143  
 групповая скорость 234  
 Гук 28  
 Гюйгенс 132  
 Гюйгенса  
 — построение 213  
 — принцип 133, 134  
 Гюйгенса — Френеля принцип 132, 143

## Д

давление  
 — световое 254, 265, 309  
 дальнорезкий глаз 84  
 двойное лучепреломление 211  
 двулучепреломление 30, 213  
 двумерная интерференционная картина 107  
 двухлучевая  
 — интерференционная картина 109  
 — интерференция 105  
 — поляризационная призма 215

- двухосный кристалл 209, 211  
 двухфотонное поглощение 307  
 действительное изображение 68, 176  
 деление  
   — амплитуды 113  
   — волнового фронта 113, 117  
 Денисюк 178  
 Денисюка метод 178  
 детектирование оптическое 292  
 детектор  
   — квадратичный 46  
   — физический 104  
 деформация светового импульса 236  
 диаграмма  
   —  $g$ -параметров 282  
   — фазовая (векторная) 106, 135–137, 140, 142, 151, 164  
 диапазон  
   — видимый 48  
   — инфракрасный 48  
   — микроволновый 49  
   — радиочастотный 49  
   — рентгеновский 48  
   — ультрафиолетовый 48  
 диапазоны электромагнитных волн 48  
 диафрагма апертурная 72  
 динамическая голограмма 180, 299  
 диод лазерный 278  
 диоптрика 18  
 диск Эйри 154  
 диспергирующие свойства 165  
 дисперсионная  
   — зависимость 234  
   — формула 242  
   — формула Коши 240  
 дисперсия 29, 234, 236  
   — аномальная 236, 237  
   — временная 210, 237  
   — нормальная 236, 237  
   — угловая 165  
 дисторсия 87  
 дифракционная решетка 34, 161  
   — амплитудная 162  
   — одномерная 162  
   — со сложной структурой 167  
 дифракционное перемешивание 306  
 дифракционные  
   — потери 279  
   — принципы голографирования 174  
   — распределения от круглого отверстия 138  
   — эффекты 44  
 дифракционный  
   — предел разрешающей способности 156  
 дифракция 29, 88, 104, 132  
   — в дальней зоне 143, 146, 148  
   — в параллельных лучах 148  
   — Кирхгофа 143  
   — на бесконечности 148  
   — на двумерных структурах 170  
   — на круглой апертуре 133, 154  
   — на круглом диске 137  
   — на круглом отверстии 133, 154  
   — на полуплоскости 141  
   — на прямолинейном крае экрана 141  
   — на прямоугольном отверстии 153  
   — на регулярных структурах 161  
   — на ультразвуке 174  
   — рентгеновских лучей 172  
   — Фраунгофера 143, 146, 148, 149, 151, 161  
   — Френеля 132, 139, 141, 142, 146  
   — Френеля на бесконечной щели 142  
 дифференцирование  
   — пространственное 160  
 дихроизм 223  
 диэлектрическая  
   — проницаемость 38, 232  
   — проницаемость комплексная 204  
   — среда 40  
 диэлектрическое  
   — зеркало 126  
   — покрытие 126  
   — покрытие многослойное 126  
 диэлектрической проницаемости главное значение 209  
 длина  
   — когерентная 293  
   — когерентности 110  
   — приведенная 81  
 Добрецов 231  
 добротность 228  
 Доплера эффект 229  
 доплеровский контур 230  
 доплеровское уширение 231  
 дополнительные экраны 137  
 дуализм корпускулярно-волновой 261
- Е**
- единицы световых величин 97  
 естественная  
   — оптическая активность 219  
   — ширина спектральной линии 226  
 естественный свет 186, 188
- Ж**
- Жамена интерферометр 122  
 жидкость иммерсионная 158
- З**
- зависимость дисперсионная 234  
 заднее фокусное расстояние 68  
 задний фокус 68  
 закон  
   — Бугера 232, 247  
   — Бугера — Ламберта — Бэра 232  
   — изменения интенсивности 54  
   — Кирхгофа второй 257  
   — Кирхгофа первый 255  
   — Ламберта 96  
   — Малюса 33, 189  
   — независимости световых пучков 55  
   — одновременности 57  
   — постоянной удельной рефракции 243  
   — преломления 60, 71, 197, 213

— Рэлея 249  
 — смещения Вина 258, 260  
 — Снеллиуса 60, 71, 197, 213  
 — Стефана — Больцмана 257, 260  
 — таухронизма 57  
 законы теплового излучения 254  
 запись голограммы 175  
 затвор безынерционный 221  
 затухание свободной поляризации 308  
 звездный интерферометр Майкельсона 122  
 Зеемана эффект 223  
 Зельмейера формула 243  
 зеркало  
 — диэлектрическое 126  
 — Ллойда 119  
 — плоское 70  
 — сферическое 69  
 зеркальное тело 257  
 Зоммерфельда условие излучения 145  
 зона энергетическая 278  
 зонная пластинка 139, 325  
 — амплитудная 139  
 — фазовая 140  
 зоны  
 — Френеля 133, 135  
 — Шустера 141, 142  
 зрачок кольцевой 158  
 зрительная труба 27

**И**

Ибн ал-Хайсам 26  
 идеальная оптическая система 78  
 излучатель косинусный 96  
 излучающая поверхность 95  
 излучение  
 — вынужденное 261, 262, 270  
 — когерентное 262  
 — некогерентное 263  
 — спонтанное 261, 270  
 — тепловое 254  
 — черное 257  
 измерение  
 — угловых размеров источников 122  
 изображение  
 — действительное 68, 176  
 — мнимое 68, 176  
 — стигматическое 55, 66, 72  
 — точечное 55  
 — точки 55  
 изотропная среда 40  
 изохроматы 218  
 иммерсионная жидкость 158  
 инвариант  
 — Аббе 67, 158  
 — Лагранжа интегральный 56  
 индикатриса рассеяния 248  
 интеграл Фурье 47  
 интегральная  
 — теорема Грина 143  
 — теорема Кирхгофа 144  
 интегральный инвариант Лагранжа 56  
 интегрирование пространственное 160

интенсивность  
 — наблюдаемая 105  
 — света 46  
 — средняя 104  
 интерференционная  
 — картина 113  
 — — двухлучевая 109  
 — схема 113  
 интерференционное кольцо 28  
 интерференционные полосы 104  
 — Юнга 154  
 интерференционный  
 — опыт Юнга 151  
 — светофильтр 127  
 — член 105  
 интерференция 32, 55, 104  
 — в параллельных лучах 218  
 — вторичных волн 132  
 — двухлучевая 105  
 — многолучевая 123, 151, 163  
 — поляризованных лучей 217  
 — сходящихся поляризованных лучей 218  
 интерферометр 120  
 — Жамена 122  
 — звездный 122  
 — Майкельсона 120  
 — Маха — Цендера 121  
 — Тваймана — Грина 121  
 интерферометрия голографическая 179  
 ионные линии поглощения 242  
 ионный лазер 276  
 исландский шпат 215  
 испускательная способность 255  
 источник  
 — белого света 104  
 — вторичный 132  
 — квазимонохроматический 104  
 — когерентного излучения 270  
 — монохроматический 104, 105  
 — некогерентный 105  
 — несамосветящийся 93  
 — протяженный 92, 111  
 — самосветящийся 93  
 — точечный 44, 92, 227

**К**

калибровка источников 98  
 камера-обскура 25  
 канадский бальзам 215  
 кандела 98  
 кардинальные  
 — плоскости 78, 79  
 — точки 78, 79  
 картина  
 — интерференционная 113  
 — коноскопическая 218  
 катастрофа ультрафиолетовая 259  
 катоптрика 16  
 каустическая поверхность 283  
 квадратичная нелинейность 295  
 квадратичный детектор 46  
 квазимонохроматический источник 104  
 квазимонохроматичность 228, 230  
 квазиупругая модель 237

- квантовая
    - оптика 16, 254
    - теория элементарная 261
  - Керра
    - эффект высокочастотный 300
    - эффект электрооптический 221
    - ячейка 221
  - Кирхгофа
    - второй закон 257
    - дифракция 143
    - метод 143
    - первый закон 255
    - теорема 144
    - условия 144
  - классификация линз 75
  - классическая теория
    - дисперсии 234
    - излучения 226
    - поглощения 226
  - клин 62, 113
  - когерентная длина 293
  - когерентное излучение 262
  - когерентность 104, 190
    - временная 108, 110
    - вторичных источников 132
    - полная 105
    - пространственная 108, 111, 122
    - частичная 105
  - когерентный фон 175
  - колебания вынужденные 297
  - коллимирующая система 93
  - кольца Ньютона 31, 114
  - кольцевой
    - зрачок 158
    - резонатор 279
  - кольцо интерференционное 28
  - кома 86
  - комбинационное рассеяние света 251
  - комбинационные частоты 252
  - компенсатор 190, 217
  - комплексная
    - диэлектрическая проницаемость 204
    - степень когерентности 109
  - компрессия модулированного
    - импульса 303
  - Комптона эффект 254, 265
  - коноскопическая картина 218
  - контур
    - гауссовский 230
    - доплеровский 230
    - лоренцев 227, 304
  - конфокальный резонатор 282
  - концентрический резонатор 280, 281
  - Корню спираль 142, 143
  - корпускулярная теория 17
  - корпускулярно-волновой дуализм 261
  - корреляционная функция 108
  - косинусный излучатель 96
  - Коши формула дисперсионная 240
  - коэффициент
    - видности излучения 99
    - наклона 135
    - отражения
      - — амплитудный 198
      - — энергетический 198
    - поглощения спектральный 256
    - пропускания
      - — амплитудный 198
      - — экрана 150
      - — энергетический 198
    - радиационного трения 227
    - рассеяния 247
    - черноты 257
    - Эйнштейна 263
    - экстинкции 247
  - Крамерса — Кронига соотношение 233
  - красная граница фотоэффекта 264
  - красный сдвиг 229
  - красные спутники 251
  - кривая видности 97
  - кристалл 208
    - двухосный 209, 211
    - одноосный 209, 211
    - отрицательный 212
    - положительный 212
  - кристалла главная ось 209
  - кристаллооптика параметрическая 220
  - критерий Рэлея 125
  - критическая опалесценция 251
  - круговая поляризация 187
  - кружок Эйри 156
  - кубическая нелинейность 296, 300
- Л**
- Лагранжа интегральный инвариант 56
  - Лагранжа — Гельмгольца теорема 72
  - лазер 270
    - аргоновый 276
    - гелий-неоновый 274
    - ионный 276
    - на красителе 277
    - на углекислом газе 275
    - неодимовый 273
    - полупроводниковый 278
    - рубиновый 272
    - химический 279
    - эксимерный 277
  - лазерная
    - оптика 254
    - спектроскопия 307
  - лазерное
    - охлаждение 309
    - управление атомными пучками 309
  - лазерный
    - диод 278
  - Ламберт 32
  - Ламберта закон 96
  - ламбертовский источник 96
  - лауэграмма 173
  - Лебедев 265
  - Лейтс 176
  - линейная
    - поляризация 187

— теория поляризации 232  
 линейное увеличение 71  
 линейный резонатор 279  
 линейчатый спектр 34, 230  
 линза 73  
 — отрицательная 75  
 — положительная 75  
 — рассеивающая 75  
 — собирающая 75  
 — толстая 79, 83  
 — тонкая 73  
 — Френеля 140  
 линзы формула 73  
 линии  
 — антистоксовы 251  
 — поглощения ионные 242  
 — поглощения электронные 242  
 — стоксовы 251  
 — фраунгоферовы 34  
 Липперсгейм 27  
 Ллойда зеркало 119  
 ловушка оптическая 310  
 Ломоносов 32  
 Лоренц 35  
 Лоренца сила 46, 222  
 лоренцев контур 227, 304  
 Лоренц — Лоренца модель 248  
 луч  
 — меридиональный 80  
 — параксиальный 73  
 лучевая скорость 210, 215  
 лучевой вектор 210  
 лучепреломление двойное 211  
 лучи  
 — параксиальные 72  
 — сопряженные 56  
 лэнгмюровская частота 241  
 люкс 99  
 люмен 99  
 люминесценция 254  
 Люмера — Герке пластинка 123

## М

Майкельсона интерферометр 120  
 — звездный 122  
 Максвелл 35  
 Максвелла  
 — распределение 229  
 — теория 38  
 — уравнения 35, 38  
 максимум  
 — главный 161  
 — побочный 161  
 Малюс 33  
 Малюса закон 33, 189  
 Марци 29  
 маски  
 — амплитудные 160  
 — фазовые 160  
 материальные уравнения 39

матрица  
 — Мюллера 192, 216, 220  
 — преобразования системы 83  
 матричное описание оптических систем 80  
 Маха — Цендера интерферометр 121  
 Международная комиссия по освещенности (МКО) 98  
 меридиональная плоскость 86  
 меридиональный луч 80  
 метод  
 — атомного пучка 231  
 — векторных диаграмм 135  
 — деления  
 — — амплитуды 113  
 — — волнового фронта 117  
 — Денисюка 178  
 — Кирхгофа 143  
 — крюков 239  
 — темного поля 159  
 методы  
 — наблюдения интерференционных картин 113  
 — обработки информации оптические 171  
 механический эквивалент света 99  
 механическое напряжение 220  
 Ми рассеяние 247, 250  
 минимум отражения плазменный 242  
 мираж 53  
 МКО 98  
 мнимое изображение 59, 68, 176  
 — стигматическое изображение 59  
 многолучевая интерференция 123, 151, 163  
 многослойное покрытие  
 — диэлектрическое 126  
 — четвертьволновое 126  
 многофотонное поглощение 291  
 многофотонный фотоэффект 291  
 мода 297  
 — поперечная 284  
 — продольная 280  
 модель  
 — АЧТ 256  
 — квазиупругая 237  
 — Лоренц — Лоренца 248  
 модуляция  
 — амплитудная 160, 252  
 — гармоническая 174  
 — импульса частотная 303  
 — фазовая 160  
 мультистабильность поляризационная 306  
 Мюллера матрица 192, 216, 220

## Н

наблюдательная разрешающая  
 — способность 125  
 наклона коэффициент 135  
 нарушение принципа суперпозиции 288  
 нарушенное полное внутреннее отражение 202  
 населенность уровней 261  
 насос оптический 309  
 насыщение поглощения 290  
 незамкнутый резонатор 272

- некогерентное излучение 263
  - некогерентные нелинейные эффекты 290
  - некогерентный источник 105
  - нелинейная
    - лазерная спектроскопия 307
    - оптика 55, 288
    - среда 40
  - нелинейное колебание
    - кристаллических решеток 289
    - молекул 289
  - нелинейность
    - квадратичная 295
    - кубическая 296, 300
  - нелинейные эффекты некогерентные 290
  - нелинейный
    - осциллятор 300
    - отклик электрона 289
    - резонанс 304
  - необыкновенная волна 212
  - неодимовый лазер 273
  - неоднородная
    - волна 202
    - среда 40, 53
  - неоднородное уширение 230
  - неполяризованный свет 188
  - несамосветящийся источник 93, 97
  - неупругое рассеяние 251
  - неустойчивый резонатор 280
  - никель 215
  - Николя призма 215
  - нит 99
  - нормальная дисперсия 236, 237
  - НПВО 202
  - нутаиии оптические 308
  - Ньютон 28, 31
  - Ньютона кольца 31, 114
- О**
- область аккомодации 84
  - оборачивающая призма 202
  - обратимость световых лучей 56
  - обращение волнового фронта (ОВФ) 296, 298
  - объекты сопряженные 78
  - объемная голограмма 178
  - обыкновенная волна 212
  - ОВФ 298
  - одноосный кристалл 209, 211
  - однородная среда 40
  - однородное уширение 230
  - опалесценция критическая 251
  - описание оптических систем матричное 80
  - опорная плоскость 81, 82
  - оптика 11
    - квантовая 254
    - лазерная 254
    - нелинейная 288
    - прикладная 88
    - физиологическая 26
  - оптическая
    - активность 219, 249
    - бистабильность 304
    - гармоника вторая 291
    - ловушка 310
    - ось
      - — главная 66, 72, 78
      - — кристалла 211
      - — линзы главная 73
      - — линзы побочная 73
    - пирамиетрия 257
    - разность хода 106, 109
    - сила 67, 74
    - синергетика 306
    - система
      - — афокальная 83
      - — идеальная 78
      - — телескопическая 83
      - — центрированная 72
  - оптические
    - методы обработки информации 171
    - нутаиии 308
  - оптический
    - вентиль 222
    - генератор 272
    - гистерезис 305
    - компенсатор 217
    - насос 309
    - переключатель 305
    - промежуток 81
    - путь 51, 52, 53, 56
    - путь наикратчайший 56
    - световод 203
    - центр 73
    - центр линзы 73
    - фонтан 310
  - оптических систем аберрации 85
  - оптическое
    - детектирование 292
    - приближение 144
    - эхо 308
  - оптотехника 50
  - опыт
    - Драго 217
    - Френеля 217
    - Юнга 161
  - ортогональная тройка векторов 45
  - освещенность 94, 96, 99
  - осциллятор
    - атомарный 228
    - гармонический 288
  - ось
    - кристалла оптическая 30, 211
    - линзы 73
  - открытый резонатор 272
  - отражатель
    - уголковый 60
  - отражающая
    - поверхность 95
    - призма 202
  - отражение 59, 196
    - полное внутреннее 61, 200, 201
    - — нарушенное 202
    - от металлов 204
  - отрицательная линза 75
  - отрицательное увеличение 71
  - отрицательный кристалл 212
  - охлаждение лазерное 309

- П**  
 пакет волновой 234  
 память голографическая 180  
 парадокс Вина 222  
 параксиальность 74  
 параксиальный  
 — луч 72, 73  
 — пучок 67  
 — — гомоцентрический 72  
 параллельная поляризация 197  
 параметр конфокальности 283  
 параметрическая  
 — генерация света 295, 296  
 — кристаллооптика 220  
 параметры Стокса 190  
 ПВО 61, 200  
 пеллуцид 17  
 первый закон Кирхгофа 255  
 переднее фокусное расстояние 68  
 передний фокус 68  
 переключатель оптический 305  
 перемешивание дифракционное 306  
 перпендикулярная поляризация 197  
 пирометрия оптическая 257  
 Пифагор 17  
 плазменный минимум отражения 242  
 Планк 35  
 Планка  
 — гипотеза 259  
 — постоянная 260  
 — формула 259, 260  
 пластинка  
 — зонная 139  
 — — амплитудная 139  
 — — фазовая 140  
 — Люммера — Герке 123  
 — полуволновая 217  
 — Цернике 159  
 — четвертьволновая 216  
 плоская  
 — волна 42, 227  
 — граница сред 58  
 плоский клин 113  
 плоское зеркало 70  
 плоская поляризация 187  
 плоскослоистая среда 58  
 плоскости  
 — апланатические 87  
 — кардинальные 78, 79  
 — опорные 82  
 — сопряженные 70, 78  
 плоскость  
 — главная 78, 212  
 — меридиональная 86  
 — опорная 81  
 — падения 59  
 — поляризации 33, 187  
 — сагитальная 86  
 — экваториальная 86  
 плотность  
 — излучения спектральная 255  
 — энергии поля 45  
 побочная оптическая ось линзы 73  
 побочный максимум 161  
 поверхностная яркость 95  
 поверхность  
 — излучающая 95  
 — каустическая 283  
 — отражающая 95  
 — сферическая преломляющая 67  
 поворачивающая призма 202  
 поворот плоскости поляризации 219  
 повышение разрешающей способности 157  
 поглощательная способность 256  
 поглощение 204, 232, 261  
 — двухфотонное 307  
 — многофотонное 291  
 Пойнтинга вектор 46  
 показатель  
 — затухания 204  
 — преломления 41  
 — преломления главный 209  
 Поккельса эффект 222  
 покрытие  
 — диэлектрическое многослойное 126  
 — четвертьволновое 126  
 — полесверхсильное 303  
 полифокальность 140  
 полная  
 — когерентность 105  
 — — пространственно-временная 105  
 полное внутреннее отражение 61, 200, 201  
 полностью поляризованный свет 188  
 положительная линза 75  
 положительное увеличение 71  
 положительный кристалл 212  
 полосы  
 — интерференционные 104  
 — равного наклона 116  
 — равной толщины 113  
 — Юнга 171  
 полуволновая пластинка 217  
 полуконцентрический резонатор 280  
 полупроводниковый лазер 278  
 поляризатор 188  
 поляризации степень 189  
 поляризационная мультистабильность 306  
 поляризационное устройство  
 кристаллическое 215  
 поляризация 33, 186, 232, 294  
 — круговая 187  
 — левая 187  
 — линейная 187  
 — параллельная 197  
 — перпендикулярная 197  
 — плоская 187  
 — правая 187  
 — света 186, 190  
 — циркулярная 187  
 — частичная 196  
 — эллиптическая 187  
 поляризованные световые волны 105  
 поляризованный свет 186  
 поперечная мода 284

- поперечное увеличение 71  
поперечность электромагнитных волн 45, 186  
постоянная  
— Верде 222  
— Планка 260  
— Стефана — Больцмана 257  
построение Гойгенса 213  
потери дифракционные 279  
потеря полволны 201  
поток  
— световой 93  
— энергии 46  
правая  
— ортогональная тройка векторов 45  
— поляризация 187  
правило знаков 67, 71, 74, 82  
предел разрешающей способности 156  
— предельный угол 61, 201  
преломление  
— в линзе 73  
— света 60, 196  
преломления  
— закон 71  
— показатель 41  
— условия 216  
преобразование Фурье 120, 159, 172  
приближение  
— геометрической оптики 51  
— оптическое 144  
прибор  
— наблюдательный 125  
— спектральный 125  
приведенная длина 81  
приемник селективный 92  
призма 61  
— ромб Френеля 203  
— Волластона 216  
— Николя 215  
— оборачивающая 202  
— отражающая 202  
— поворачивающая 202  
— поляризационная двухлучевая 215  
— Рошона 216  
— Сенармона 216  
— треугольная 61  
— Френеля 220  
принцип  
— Бабине 137, 169  
— Гойгенса 133, 134  
— Гойгенса — Френеля 132, 143  
— суперпозиции 104  
— фазировки спектральных компонент 303  
— Ферма 56, 57  
принципы голографирования 174  
— дифракционные 174  
продольная мода 280  
промежуток оптический 81  
проницаемость  
— диэлектрическая 38, 232  
— — комплексная 204  
— магнитная 38  
просветление  
— оптики 117  
— среды 290  
пространственная когерентность 108, 111  
пространственное  
— дифференцирование 160  
— интегрирование 160  
— фурье-преобразование 149  
пространственные частоты 149  
пространственный  
— синхронизм 294  
— спектр 104, 149  
протяженный источник 92, 111  
процесс сверхбыстрый 302  
Пуанкаре сфера 220  
Пуассон 137  
Пуассона пятно 137, 138  
путь оптический 51, 56  
— наикратчайший 56  
пучки  
— гомоцентрические 66  
— параксиальные 67  
— сопряженные 56  
пучок гомоцентрический параксиальный 72  
пьезооптический эффект 220  
пятно Пуассона 137, 138
- Р**  
работа выхода 264  
равновесие термодинамическое 254  
радиационное время жизни уровня 262  
радиус перетяжки 283  
разделение изотопов 309  
размер области когерентности 112  
разность хода оптическая 106, 109  
разрешающая  
— сила 88, 126  
— способность 125, 157, 166, 176  
— — наблюдательная 125  
— — оптического прибора 157  
— — спектральная 125  
разрешение спектральное 231  
— Рамана эффект 251  
распределение  
— Больцмана 259  
— Максвелла 229  
рассеивающая линза 75  
рассеяние 247  
— вынужденное 296  
— — антистоксово 298  
— — комбинационное 297  
— — Мандельштама — Бриллюэна 298  
— Ми 247, 250  
— на динамической решетке 252  
— неупругое 251  
— рэлеевское 247  
— света 247  
— — комбинационное 251  
— спонтанное неупругое 296  
рассеяния коэффициент 247  
рассеянная волна 247

- расстояние  
 — наилучшего видения 84  
 — оптимальное 84  
 — системы фокусное 79  
 — фокусное 68  
 реакция среды на внешнее электромагнитное поле 39  
 регулярная структура 161  
 резонанс нелинейный 304  
 резонатор  
 — кольцевой 279  
 — конфокальный 282  
 — концентрический 280, 281  
 — лазера 279  
 — линейный 279  
 — незамкнутый 272  
 — неустойчивый 280  
 — открытый 272  
 — полуконцентрический 280  
 — устойчивый 280  
 релаксация безызлучательная 270  
 релятивистская формула Эйнштейна 265  
 Ремер 29, 34  
 рефрактометр 121  
 рефракционные свойства среды 233  
 рефракция удельная 243  
 решения волнового уравнения 42  
 решетка  
 — дифракционная 22, 161  
 — одномерная амплитудная 162  
 — со сложной структурой 167  
 — Сорэ 175  
 — трехмерная 172  
 Ритц 35  
 Рождественский 239  
 ромб Френеля 203  
 Рошона призма 216  
 рубиновый лазер 272  
 рэлеевское рассеяние 247  
 Рэлея  
 — закон 249  
 — критерий 125  
 — теория рассеяния 247  
 — формула 236  
 Рэлея — Джинса формула 258, 260  
 ряд Фурье 47
- С**
- сагиттальная плоскость 86  
 самоканализация 302  
 самомодуляция 302  
 самоорганизация света 306  
 самосветящийся источник 93, 97  
 самофокусировка 300, 302  
 сверхбыстрый процесс 302  
 сверхсильное поле 303  
 свет  
 — естественный 186, 188  
 — левоциркулярный 219  
 — неполяризованный 188  
 — поляризованный 186  
 — — полностью 188  
 — — частично 188  
 — правциркулярный 219  
 света модулятор 221  
 светимость 96  
 — энергетическая 256  
 световод оптический 203  
 световое  
 — восприятие 97  
 — давление 254, 265, 309  
 световой  
 — поток 93, 99  
 — пучок гомоцентрический 55  
 световые  
 — лучи геометрические 52  
 — пучки стигматические 55  
 светотехника 50  
 светофильтр интерференционный 127  
 свободная дисперсионная область 166  
 свойства  
 — диспергирующие 165  
 — оптической системы 78  
 — среды абсорбционные 233  
 — среды рефракционные 233  
 сдвиг  
 — красный 229  
 — фиолетовый 229  
 селективное тело 257  
 селективный приемник 92  
 селекция спектральная 125  
 Сенармона призма 216  
 серия спектральная 230  
 серое тело 257  
 сечение  
 — волновых поверхностей 213  
 — поглощения 271  
 сигнал амплитудно-модулированный 47  
 сила  
 — Кулона 46  
 — Лоренца 46, 222  
 — оптическая 67, 74  
 — осциллятора 243  
 — разрешающая 88, 126  
 — света 93, 98  
 — света средняя сферическая 93  
 синергетика оптическая 306  
 синхронизм  
 — волновой 294  
 — пространственный 294  
 — фазовый 294  
 система  
 — адиабатическая 254  
 — коллимирующая 93  
 — многолинзовая 78  
 скалярная теория дифракции Кирхгофа 143  
 скачок фазы 114, 228  
 скорость  
 — главная 209  
 — лучевая 210, 215  
 — перемещения фронта 210  
 — переноса энергии 210  
 — фазовая 43, 210, 215  
 — электромагнитных волн в вакууме 41  
 смещения Вина закон 260

- Снеллиуса закон 60, 197, 213  
 собирающая линза 75  
 солитон 302  
 соотношение  
 — Вина 257  
 — Крамерса — Кронига 233  
 сопряженная точка 55  
 сопряженные  
 — лучи 56  
 — объекты 78  
 — плоскости 70, 78  
 — — главные 71  
 — пучки 56  
 — точки 78  
 Сорэ решетка 175  
 спектр  
 — волны 47  
 — временной 104  
 — испускания 233  
 — линейчатый 34, 230  
 — поглощения 233  
 — пространственный 104, 149  
 — угловой 150  
 спектральная  
 — плотность излучения 255  
 — разрешающая способность 125  
 — селекция 125  
 — серия 230  
 — чувствительность глаза 97, 98  
 спектральное разрешение 231  
 спектральные свойства дифракционной решетки 165  
 спектральный  
 — коэффициент поглощения 256  
 — прибор 125  
 спектроскопия лазерная  
 — активная 302, 307  
 — нелинейная 307  
 — насыщения 307  
 спираль Корню 142, 143  
 спонтанное  
 — излучение 261, 270  
 — рассеяние неупругое 296  
 способность  
 — испускательная 255  
 — поглощательная 256  
 — разрешающая 125, 166, 176  
 спутники  
 — красные 251  
 — фиолетовые 251  
 среда  
 — анизотропная 40, 208  
 — диэлектрическая 40  
 — изотропная 40  
 — мутная 96, 247  
 — нелинейная 40  
 — неоднородная 40, 53  
 — однородная 40  
 — плоскостная 58  
 — проводящая 40  
 средняя  
 — интенсивность 104  
 — сферическая сила света 93  
 степень  
 — когерентности 108  
 — — комплексная 109  
 — поляризации 188, 189  
 — — линейной 189  
 стереоизомер 219  
 Стефана — Больцмана  
 — закон 257, 260  
 — постоянная 257  
 стигматические световые пучки 55  
 стигматическое изображение 55, 66, 72  
 стигматичность 74  
 Стокса  
 — вектор 220  
 — параметры 190  
 стоковские линии 251  
 столкновительная ширина спектральной линии 229  
 стопа Столетова 199  
 стоячая волна 280  
 структура регулярная 161  
 суперпозиция  
 — гармонических колебаний 47  
 — колебаний 47  
 — электромагнитных волн 104  
 суспензия 247  
 сфера Пуанкаре 220  
 сферическая  
 — абберрация 86  
 — волна 43, 227  
 — граница сред 66  
 — преломляющая поверхность 67  
 сферические волны элементарные 132  
 сферическое зеркало 69  
 — вогнутое 69  
 — выпуклое 69  
 схема  
 — интерференционная 113  
 — трехуровневая 271  
 — Юнга 117
- Т**  
 Тваймана — Грина интерферометр 121  
 телескопическая оптическая система 83  
 тело  
 — зеркальное 257  
 — непрозрачное 257  
 — селективное 257  
 — серое 257  
 — цветное 257  
 темного поля метод 159  
 тензор диэлектрической проницаемости 208  
 теорема  
 — Бабине 154  
 — Гаусса электростатическая 39  
 — Грина 143  
 — Кирхгофа 144  
 — Лагранжа — Гельмгольца 72  
 — обратимости 145  
 — — Гельмгольца 145  
 теория  
 — дисперсии классическая 234

- дифракции Кирхгофа 143
  - излучения классическая 226
  - квантовая элементарная 261
  - корпускулярная 17
  - Максвелла 38
  - поглощения классическая 226
  - поляризация линейная 232
  - рассеяния
    - — Ми 250
    - — Рэлея 247
  - Френеля 145
  - тепловое излучение 254
  - Теренин 231
  - термодинамическое равновесие 254
  - Тиндаля эффект 247
  - тип
    - осциллятора 289
    - поляризации 217
  - типы
    - лазеров 272
    - линз 75
    - оптических сред 39
  - толстая
    - голограмма 178
    - линза 79, 83
  - тонкая линза 73
  - Торричелли 28
  - точечное изображение 55
  - точечный источник 44, 92, 227
  - точка сопряженная 55
  - точки
    - главные 79
    - кардинальные 78, 79
    - сопряженные 78
  - трансформатор светового поля 306
  - треугольная призма 61
  - трехмерная решетка 172
  - трехуровневая схема 271
  - тройка векторов ортогональная 45
  - туннельный эффект 202
- У**
- увеличение
    - линейное 71
    - отрицательное 71
    - положительное 71
    - поперечное 71
  - угол отражения 59
  - угловая дисперсия 165
  - угловой спектр 150
  - угловые
    - характеристики изображений 70
    - частоты 149
  - угол
    - блеска 168
    - Брюстера 199, 206, 274
    - зрения 84
    - отражения 59
    - падения 59
    - предельный 61, 201
  - уголковый отражатель 60
  - удельная
    - рефракция 243
    - электрическая проводимость 38
  - ультрафиолетовая катастрофа 259
  - Умова — Пойнтинга вектор 46
  - Упатниекс 176
  - управление атомными пучками лазерное 309
  - уравнение
    - волновое 41
    - волновых нормалей Френеля 210
    - Гельмгольца 44, 51
    - Максвелла 186
    - плоской волны 43
    - поверхности постоянной фазы 43
    - эйконала 51, 58
    - Эйнштейна для фотоэффекта 265
  - уравнения
    - Максвелла 35, 38
    - материальные 39
  - усиление света 270
  - условие
    - Вульфа — Брэггов 173
    - главных максимумов 162
    - излучения Зоммерфельда 145
    - квазимонохроматичности света 228
    - синусов Аббе 72
  - условия
    - граничные 196
    - Кирхгофа 144
    - преломления 216
  - устойчивый резонатор 280
  - устройство поляризационное
    - кристаллическое 215
  - уширение
    - времяпролетное 310
    - доплеровское 231
    - неоднородное 230
    - однородное 230
    - спектральных линий 228
- Ф**
- Фабри — Перо эталон 123, 280
  - фаза волны 42
  - фазовая
    - диаграмма 106, 135–137, 140, 142, 151, 164
    - зонная пластинка 140
    - модуляция 160
    - решетка 167
    - скорость 43, 210, 215, 234
  - фазовое соотношение между вторичными волнами 139
  - фазовые маски 160
  - фазовый
    - портрет 175
    - объект 161
    - синхронизм 294
    - скачок 114
  - Фарадей 34
  - Фарадея
    - винт 250

- эффект 222
  - ячейка 222
  - Ферма 29
  - принцип 56, 57
  - физический
    - детектор 104
    - точечный источник 44
  - Физо 34, 35
  - фильтр-маска 160
  - фиолетовые спутники 251
  - фиолетовый сдвиг 229
  - флюорит 242
  - Фогта эффект 223
  - фокус
    - задний 68
    - линзы 64
    - передний 68
  - фокусное расстояние 68
    - заднее 68
    - переднее 68
    - системы 79
  - фокусные расстояния системы 73
  - фон когерентный 175
  - фонон 252
  - фонтан оптический 310
  - формирование прямоугольного импульса 47
  - формула
    - дисперсионная 242
    - Зельмейера 243
    - Коши дисперсионная 240
    - линзы 73
    - Планка 259, 260
    - Рэлея 236
    - Рэлея — Джинса 258, 260
    - тонкой линзы 73
    - Эйлера 43
    - Эйри 124
    - сферической преломляющей поверхности 67
  - формулы Френеля 196, 198
  - фотолюминесценция 254
  - фотометрия 31, 92
  - фотон 254, 261
  - фотоупругость 220
  - фотоэффект 254, 264
    - многофотонный 291
  - Фраунгофер 34
  - Фраунгофера дифракция 143, 146, 148, 149, 151, 161
  - фраунгоферовы линии 34
  - Френель 132, 137
  - Френеля
    - бизеркала 118
    - бипризма 118
    - голограмма 177
    - дифракция 132, 139, 141, 146
    - зоны 133, 135
    - линза 140
    - опыт 217
    - призма 220
    - ромб 203
    - теория 145
    - уравнение волновых нормалей 210
    - формулы 196, 198
    - число 283
  - фронт волновой 43
  - ФРТ 156
  - Фуко 35
  - функция
    - автокорреляционная 109
    - Бесселя 154
    - координатно-зависимая 44
    - корреляционная 108
    - рассеяния точки (ФРТ) 156
  - Фурье
    - голограмма 177
    - интеграл 47
    - преобразование 120
    - ряд 47
  - фурье-
    - образ 159, 171
    - отика 159, 168, 171
    - плоскость 159, 172
    - преобразование 149, 159
    - спектрометр 121
    - спектроскопия 120
- Х**
- характеристики изображений
    - линейные 70
    - угловые 70
  - химический лазер 279
  - хроматическая аберрация 88
  - хрусталик 84
- Ц**
- цветное тело 257
  - центр линзы оптический 73
  - центрированная оптическая система 72
  - Цернике пластинка 159
  - циркулярная поляризация 187
  - цуг волн 230, 234
- Ч**
- частичная
    - когерентность 105
    - поляризация 196
  - частично поляризованный свет 188
  - частота лэнгмюровская 241
  - частотная модуляция импульса 303
  - частоты
    - комбинационные 252
    - пространственные 149
    - угловые 149
  - Чези 27
  - черное излучение 257
  - четвертьволновая пластинка 216
  - число
    - волновое 43
    - Френеля 283
  - числовая апертура 158
  - чувствительность глаза 97
    - спектральная 97, 98

**Ш**

- ширина
  - интерференционной полосы 107
  - спектральной линии
    - — доплеровская 230
    - — естественная 226
    - — столкновительная 229
- шпат исландский 215
- Штарка эффект 223
- Шустера зоны 141, 142

**Э**

- Эвклид 17
- эйконал 51, 56
  - уравнение 58
- Эйлер 32
- Эйлера формула 43
- Эйнштейна
  - коэффициент 263
  - уравнение для фотоэффекта 265
  - формула релятивистская 265
- Эйри
  - диск 154
  - кружок 156
  - формула 124
- экваториальная плоскость 86
- эквивалент света механический 99
- экраны дополнительные 137
- эксимерный лазер 277
- эксперимент Аббе — Портера 171
- экстинкции коэффициент 247
- электрические свойства среды 38
- электронные линии поглощения 242
- электрон-фононное
  - взаимодействие 297
- электрооптический эффект Керра 221
- электростатическая теорема Гаусса 39
- элемент бистабильный 305
- элементарная квантовая теория 261
- элементарные сферические волны 132
- эллипс поляризации 187
- эллипсоид волновых нормалей 211

- эллиптическая поляризация 187
- эллиптичность 190
- Эмпедокл 17
- энергетическая
  - зона 278
  - светимость 256
- энергетический коэффициент
  - отражения 198
  - пропускания 198
- энергии поток 46
- эталон Фабри — Перо 123, 280
- эффект
  - Брюстера 200
  - двулучепреломления 213
  - Доплера 229
  - Зеемана 223
  - Керра
    - — высокочастотный 300
    - — электрооптический 221
  - Комптона 254, 265
  - магнитооптического вращения 222
  - Поккельса 222
  - пьезооптический 220
  - Рамана 251
  - самовоздействия света 300
  - Тиндаля 247
  - туннельный 202
  - Фарадея 222
  - Фогта 223
  - Штарка 223
- эхо оптическое 308

**Ю**

- Юнга
  - интерференционные полосы 154
  - опыт 151, 161
  - полосы 171
  - схема 117

**Я**

- яркость 95, 99
- ячейка
  - Керра 221
  - Фарадея 222

*Сергей Константинович СТАФЕЕВ,  
Кирилл Кириллович БОЯРСКИЙ,  
Галина Львовна БАШНИНА*

## **ОСНОВЫ ОПТИКИ**

*Учебное пособие*

*Издание второе, исправленное и дополненное*

Выпускающие *Н. В. Черезова, Т. С. Симонова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ».** lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 24.07.13. Бумага офсетная.  
Гарнитура Литературная. Формат 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 27,30. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных материалов в ГУП ЧР «ИПК «ЧУВАШИЯ»»  
Мининформполитики Чувашии  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, д. 13  
Тел.: (8352) 56-00-23