ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գրիգոր Ալավերդյան

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

(ուսումնական ձեռնարկ)

I. ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2022

ՀՏԴ 531.1+3751Ţ7,
ԳՄԴ 22.212g7
Ա 280

Հրատարակության է երաշխավորվել ԵՊՀ ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետի գիտական խորհրդի կողմից:

Գրախոսներ՝

Պրոֆ. Ռ. Մ. Ավագյան

Պրոֆ. Գ. Ս. Հաջյան

Ալավերդյան Գրիգոր

Ա 280 ՄԵԽԱՆԻԿԱ (ուսումնական ձեռնարկ). I. ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ/ Գ. Ալավերդյան: -Եր., ԵՊՀ հրատ., 2022, 104 էջ:

Ներկա ուսումնական ձեռնարկում հեղինակը ներկայացնում է ընդհանուր ֆիզիկայի «Մեխանիկա» դասընթացի առաջին բաժնի՝ կինեմատիկայի վերաբերյալ իր կողմից ԵՊՀ ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետի առաջին կուրսի ուսանողների համար կարդացված դասախոսությունները:

Մաթեմատիկական հակիրճ ներածությամբ հեղինակը տալիս է դասընթացի բուհական մակարդակով մատուցման համար անհրաժեշտ մաթեմատիկական գաղափարներն ու առնչությունները:

Մեխանիկական շարժման բնութագրերի սահմանումների և կինեմատիկական նկարագրության եղանակների շարադրանքին զուգընթաց բերվում են նաև համապատասխան բաժնին վերաբերող խնդիրների լուծման օրինակներ: Մեկ օրինակի միջոցով ցուցադրված է նաև կինեմատիկայի խնդրի լուծման ժամանակ թվային եղանակի կիրառման հնարավորությունը:

Ձեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ ռադիոֆիզիկայի և ֆիզիկայի ֆակուլտետների ուսանողների համար: Այն կարող է գործածվել նաև ԵՊՀ և այլ բուհերի բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողների կողմից: Ձեռնարկն օգտակար կլինի նաև այն մարդկանց համար, ովքեր որոշել են ինքնուրույն յուրացնել ընդհանուր ֆիզիկայի «Մեխանիկա» բաժինը:

ՀՏԴ 531.1+3751Ţ7,
ԳՄԴ 22.212g7

ISBN 978-5-8084-2561-3

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

1. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

1.1 Մեխանիկայի առարկան, խնդիրներն ու կառուցվածքը

Մեխանիկան ֆիզիկայի այն բաժինն է, որում ուսումնասիրվում են մարմինների մեխանիկական շարժման ու հավասարակշռության օրենքները:

Շարժումը մարմնի կամ համակարգի հետ տեղի ունեցող կամայական փոփոխությունն է: Շարժման օրինակներ են. մարմնի՝ ագրեգատային վիճակի, քիմիական բաղադրության, կենսաբանական կառուցվածքի, ջերմաստիճանի, գույնի, համի, հոտի, ծավալի, երկրաչափական տեսքի և այլ բնութագրերի փոփոխությունները, բանական էակի՝ գիտելիքների, մտածելակերպի, պատկերացումների, մտահորիզոնի, քաղաքական հայացքների, ճաշակի և այլ հատկանիշների փոփոխությունները: Շարժման պարզագույն տեսակը մեխանիկական շարժումն է, որի դեպքում տեղի է ունենում մարմնի դիրքի փոփոխություն շրջապատող աշխարհի այլ մարմինների նկատմամբ կամ մարմնի մասերի՝ միմյանց նկատմամբ դիրքերի փոփոխություն:

Մեխանիկայի խնդիրը տարբեր շարժումների փորձնական հետազոտությունն է և այդ հետազոտությունների հիման վրա շարժման օրենքների ձևակերպումը, որոնք այս կամ այն կոնկրետ դեպքում հնարավորություն կտան կանխագուշակելու առաջացող շարժման պատկերը: Ակնհայտ է, որ այս խնդրի իրականացումը կախված կլինի նաև ազդող ուժերից, որոնց ուսումնասիրությունը, սակայն, մեխանիկայի շրջանակներից դուրս է: Ուժերի բնույթը, առանձնահատկություններն ու օրենքներն ուսումնասիրվում են ֆիզիկայի այլ բաժիններում՝ մոլեկուլային ֆիզիկայում, գրավիտացիայի տեսությունում, էլեկտրադինամիկայում, միջուկային ֆիզիկայում և այլն: Մեխանիկական շարժում առաջացնող ուժերի բնույթից անկախ, այդ շարժումների ուսումնասիրությունը պետք է դիտարկել որպես մեխանիկայի խնդիր:

Մեխանիկայի խնդիրները բաժանվում են երկու խմբի՝ ***ուղիղ խնդրի*** և ***հակադարձ խնդրի***: **Ուղիղ խնդիր** է համարվում այն խնդիրը, որում տրված են մեխանիկական շարժման պատճառները և պահանջվում է գտնել շարժման բնութագրերը: **Հակադարձ խնդրի** դեպքում հայտնի է շարժումը և պահանջվում է գտնել այն առաջացնող պատճառները:

Ֆիզիկայի բաժիններից առաջինը ստեղծվել է մեխանիկան: Մեխանիկայի օրենքներն առաջին անգամ ձևակերպվել են Նյուտոնի՝ 1687թ. հրատարակված «Բնափիլիսոփայության մաթեմատիկական սկզբունքները» աշխատության մեջ:

Մեխանիկան բաժանվում է ***կինեմատիկա*** և ***դինամիկա*** բաժինների: Դինամիկա բաժինը իր մեջ պարունակում է ***ստատիկա*** ենթաբաժինը:

Կինեմատիկան մեխանիկայի այն բաժինն է, որում ուսումնասիրվում են մեխանիկական շարժման նկարագրության եղանակները, ներմուծվում են այդ ուսումնասիրման համար անհրաժեշտ գաղափարներն ու տրվում համապատասխան ֆիզիկական մեծությունների սահմանումները: Կինեմատիկայի խնդրո առարկայի համար ուժերը որևէ դերակատարություն չունեն, ուստի ավելորդ է ասել, որ կինեմատիկան ուսունասիրում է շարժումներն առանց հաշվի առնելու նրանց առաջացման պատճառները:

Դինամիկան մեխանիկայի այն բաժինն է, որում ուսումնասիրվում են մեխանիկական շարժման օրենքներն ու օրինաչափությունները և դրանց կիրառություններն առանձին կոնկրետ խնդիրներում: Հաճախ ասում են, որ դինամիկան ուսումնասիրում է շարժման օրենքները հաշվի առնելով նրանց առաջացման պատճառները: Համոզվենք, որ այստեղ ավելորդ է շեշտել այդ ակնհայտ ճշմարտությունը: Դա հասկանալու համար պարզենք, թե ի՞նչ է օրենքը: Օրենքը տվյալ երևույթի հետևանքի արտահայտումն է պատճառով:

Այդ արտահայտումը կարող է արվել ինչպես մաթեմատիկորեն, այնպես էլ մարդու կողմից ըմբռնելի որևէ լեզվով, այդ թվում նաև ժեստերի լեզվով: Ակնհայտ է, որ օրենքի ուսումնասիրությունը չի կարող կատարվել առանց պատճառների տիրապետման:

Ստատիկան այն ենթաբաժինն է, որում ուսումնասիրվում են մարմինների անշարժության կամ հավասարակշռության օրենքներն ու օրինաչափությունները: Քանի որ դադարը շարժման մասնավոր դեպք է, ուստի տրամաբանական է ստատիկան համարել դինամիկայի ենթաբաժին:

Կախված ուսումնասիրվող մարմնի հատկություններից՝ մեխանիկան բաժանվում է ***նյութական կետի մեխանիկայի***, ***պինդ մարմնի մեխանիկայի և հոծ միջավայրի մեխանիկայի***, որն իր մեջ ընդգրկում է նաև ***հեղուկների և գազերի մեխանիկան:***

Նյուտոնյան մեխանիկան, որպես ֆիզիկական գիտություն, ունի կիրառության իր սահմանները: Այն ստեղծվել է փորձնական այնպիսի փաստերի ընդհանրացման ճանապարհով, որոնք վերաբերում են մակրոսկոպական մարմինների դանդաղ շարժումներին: Մակրոսկոպական կոչվում են ահռելի թվով ատոմներից կամ մոլեկուլներից բաղկացած մարմինները: Դանդաղ կամ ***ոչ ռելյատիվիստական*** կոչվում են այն շարժումները, որոնց արագությունները արհամարհելի փոքր են վակուումում լույսի ունեցած՝ $c \approx 3 \cdot 10^8$ մ/վ արագությունից: Լույսի՝ վակուումում ունեցած արագությանը մոտ արագությամբ շարժումները կոչվում են ***ռելյատիվիստական*** կամ արագ շարժումներ:

20-րդ դարասկզբին կատարված փորձնական հետազոտությունները ցույց տվեցին, որ Նյուտոնյան մեխանիկայի սկզբունքները կիրառելի չեն ինչպես միկրոսկոպական մարմինների, այնպես էլ ռելյատիվիստական շարժումների համար:

Էյնշտեյնի կողմից ստեղծված հարաբերականության հատուկ տեսությունը կիրառելի է ինչպես լույսի արագությունից շատ անգամ փոքր արագությամբ շարժումների, այնպես էլ լույսի արագությանը մոտ արագությամբ շարժվող մարմինների համար: Հարաբերականության հատուկ տեսության շրջանակներում ստեղծված մեխանիկան ստացել է ***ռելյատիվիստական մեխանիկա*** անվանումը:

Միկրոաշխարհում շարժումը նկարագրվում է ***քվանտային մեխանիկայի*** շրջանակներում, որի նկարագրության եղանակը էապես տարբերվում է Նյուտոնյան մեխանիկայի նկարագրության եղանակից: Քվանտային մեխանիկան իր հերթին բաժանվում է ***ոչ ռելյատիվիստական քվանտային մեխանիկայի*** և ***ռելյատիվիստական քվանտային մեխանիկայի***:

Մակրոաշխարհի համար իրավացի մեխանիկան ստացել է ***դասական մեխանիկա*** անվանումը: Այսպիսով, Նյուտոնյան մեխանիկան ***ոչ ռելյատիվիստական դասական*** մեխանիկա է: Նյուտոնյան մեխանիկայի կիրառելիության սահմանների մասին վերևում բերված պարզաբանման հիման վրա մեխանիկական շարժումն ուսումնասիրող ֆիզիկայի բաժինների շարքում Նյուտոնյան մեխանիկայի գրաված դիրքը կարելի է պատկերել այսպես (տես աղյուսակը):

Շարժում / Աշխարհ	Ոչ ռելյատիվիստական	Ռելյատիվիստական
Մակրոսկոպական (դասական)	Նյուտոնյան մեխանիկա *Ոչ ռելյատիվիստական դասական մեխանիկա*	Ռելյատիվիստական դասական մեխանիկա
Միկրոսկոպական (քվանտային)	Ոչ ռելյատիվիստական քվանտային մեխանիկա	Ռելյատիվիստական քվանտային մեխանիկա

1.2 Հաշվարկման համակարգ, տարածական կոորդինատական համակարգեր

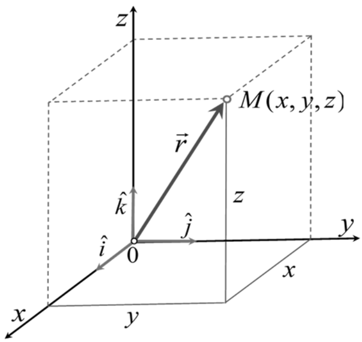
Մեխանիկական շարժումը նկարագրելու համար անհրաժեշտ է ունենալ մարմնի դիրքը ժամանակի յուրաքանչյուր պահի որոշելու հնարավորություն: Մարմնի դիրքը տարածության մեջ կարող է տրվել միայն այլ մարմինների նկատմամբ: Մարմինը, որի նկատմամբ որոշվում են մնացած բոլոր մարմինների դիրքերը կոչվում է հաշվարկման մարմին: Հետազոտվող մարմնի դիրքը նկարագրելու համար հաշվարկման մարմնի հետ կոշտ կապում են տարածական կոորդինատական համակարգ, որը սովորաբար անվանվում է հաշվարկման տարածական համակարգ: Ֆիզիկական յուրաքանչյուր երևույթ որոշակի պատահարների հաջորդականություն է: Պատահարը նկարագրվում է տեղի ունենալու վայրի տարածական դիրքով և ժամանակի պահով: Մեխանիկական շարժումը ժամանակի ընթացքում մարմնի դիրքի փոփոխությունն է տարածության մեջ: Շարժման ուսումնասիրման համար անհրաժեշտ է ունենալ հաշվարկման տարածական համակարգ և նրանում տեղադրված համաժամանակեցված ժամացույցներ: Այդ դեպքում մարմնի տվյալ կետում գտնվելու պատահարը կարելի է նկարագրել այդ կետի տարածական կոորդինատների և այդ կետում եղած ժամացույցի ցուցմունքի համախմբով:

Հաշվարկման մարմինը, նրան կոշտ ամրացված տարածական կոորդինատական համակարգը և վերջինում տեղադրված համաժամանակեցված ժամացույցների համախումբը միասին կոչվում են **հաշվարկման համակարգ**:

Գոյություն ունեն տարածական կոորդինատական համակարգերի բազմաթիվ տեսակներ: Այստեղ մենք կներկայացնենք ֆիզիկայում ավելի հաճախակի օգտագործվող տարածական կոորդինատական համակարգերի երեք տեսակները: Դրանք են՝ դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգը, գլանային համակարգը և գնդային համակարգը:

1.2.1 Դեկարտյան կոորդինատական համակարգ

Այս համակարգը կազմված է մեկ կետում հատվող երեք փոխուղղահայաց ուղղագիծ առանցքներից: Յանկացած կետի դիրք նկարագրվում է x, y, z երեք կոորդինատների միջոցով, որոնք տվյալ կետի հեռավորություններն են, համապատասխանաբար, (y, z), (x, z), և (x, y), կոորդինատական հարթություններից (Նկ.1-1): Կոորդինատական առանցքների ուղղությունները տարածության մեջ բնորոշվում են միավոր երկարության $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ վեկտորներով, որոնց ուղղությունները համընկնում են, համապատասխանաբար, x, y, z առանցքների ուղղությունների հետ: Այս միավոր վեկտորները դեկարտյան համակարգի **օրթերն** են: Այստեղ տառի վրա դրվող ∧-գլխարկ սիմվոլը միավոր վեկտորի նշանն է: Կետի դիրքը տարածության մեջ կարելի է նկարագրել նաև մեկ վեկտորական մեծության՝ ***շառավիղ վեկտորի*** միջոցով: Շառավիղ վեկտորը կոորդինատական համակարգի սկզբնակետը տվյալ կետին միացնող վեկտորն է: Շառավիղ վեկտորը կոորդինատներով կարտահայտվի այսպես՝



Նկ.1-1 Դեկարտյան կոորդինատական համակարգ, շառավիղ վեկտոր:

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}: \qquad (1.1)$$

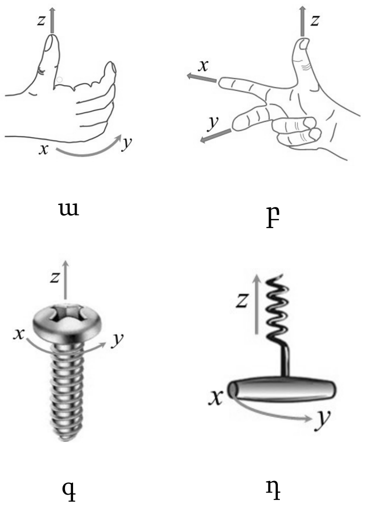
Շառավիղ վեկտորի մոդուլը կոորդինատների հետ կապված է

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.2)$$

առնչությամբ:

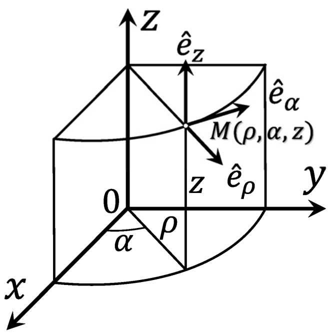
Կոորդինատական համակարգերը կարող են լինել «աջ» կամ «ձախ»: x, y, z կոորդինատական համակարգը համարվում է աջ, եթե երրորդ z առանցքի ծայրից նայելիս x առանցքից դեպի y առանցք կարճ ճանապարհով պտույտն ունի ժամսլաքի պտույտի հակառակ ուղղությունը: Հակառակ դեպքում համակարգը համարվում է ձախ: Համակարգի աջ կամ ձախ լինելը կարելի է որոշել նաև աջ ձեռքի կանոնով:

Եթե աջ ձեռքի չորս մատները պահում ենք x առանցքից դեպի y առանցք կարճ պտույտի ուղղությամբ և ուղիղ անկյան տակ բացված բութ մատի ուղղությունը համընկնում է z առանցքի ուղղության հետ, ապա համակարգը աջ է (Նկ.1-2ա): Հակառակ դեպքում՝ ձախ: Համակարգի աջ լինելը կարելի է ստուգել աջ ձեռքի մեկ այլ կանոնով, որը ցուցադրված է Նկ.1-2 բ-ում: Նույնը կարելի է անել նաև պտուտակի (Նկ.1-2գ) կամ խցանահանի (Նկ.1-2դ) կանոնով: Եթե խցանահանի բռնիչը (պտուտակի գլխիկը) պտտենք x առանցքից դեպի y առանցք կարճ պտույտի ուղղությամբ և խցանահանի (պտուտակի) համընթաց շարժման ուղղությունը համընկնի z առանցքի ուղղության հետ, ապա համակարգը աջ է: Նկատենք, որ կենտ թվով առանցքների ուղղությունների հակադարձման ժամանակ աջ համակարգը վերածվում է ձախ համակգի, իսկ ձախը՝ աջի: Ֆիզիկայում պայմանավորվել են օգտագործել բացառապես աջ համակարգեր:



Նկ.1-2 Աջ համակարգ:

1.2.2 Գլանային կոորդինատական համակարգ



Նկ.1-3 Գլանային համակարգ:

Կետի դիրքը տարածության մեջ կարելի է նկարագրել նաև երեք այլ կոորդինատների միջոցով: Տարածության մեջ վերցնենք որևէ հարթություն և տանենք նրան ուղղահայաց z առանցք: Հարթության հետ z առանցքի հատման O կետը համարենք համակարգի սկզբնակետ: Այդ կետով տանենք նշված հարթության մեջ գտնվող x առանցքը: Տարածության որևէ M կետի դիրք կարելի է տալ Նկ.1-3-ում պատկերված ρ, α, z մեծությունների միջոցով: Այս կոորդինատները կոչվում են գլանային կոորդինատներ, իսկ համապատասխան կոորդինատական համակարգը՝ գլանային համակարգ: Դեկարտյան կոորդինատները գլանային կոորդինատներով կարտահայտվեն այսպես՝

$$\begin{aligned} x &= \rho\, cos\alpha, \\ y &= \rho\, sin\alpha, \\ z &= z \, : \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Ինչպես երևում է նկարից, գլանային կոորդինատներն ունեն արժեքների այսպիսի տիրույթներ՝ $\rho \geq 0, 0 \leq \alpha < 2\pi, -\infty \leq z \leq \infty$:

Այս համակարգի օրթերը սահմանելու համար, նախ պետք է ներմուծել կոորդինատական գծի գաղափարը: Տվյալ կոորդինատին համապատասխանող կոորդինատական գիծը այն կորն է, որով շարժվելիս միայն այդ կոորդինատն է փոփոխվում: Պարզ է, որ M կետով անցնող ρ-կոորդինատական գիծը z առանցքից սկիզբ առնող և այդ առանցքին ուղղահայաց ճառագայթ է: α-կոորդինատական գիծը շրջանագիծ է, որի հարթությունն ուղղահայաց է z առանցքին, իսկ կենտրոնը գտնվում է այդ առանցքի վրա: z-կոորդինատական գիծը այդ առանցքին զուգահեռ ուղիղ գիծ է:

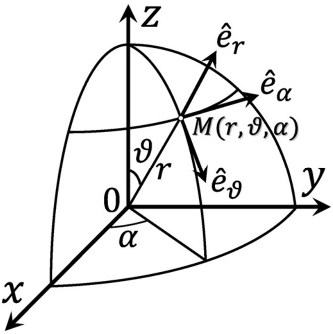
Վերադառնալով դեկարտյան համակարգին՝ նկատենք, որ այդ համակարգի բոլոր կոորդինատական գծերը ուղիղ գծեր են: Նման համակարգերը կոչվում են ուղղագիծ համակարգեր: Գլանային համակագի կոորդինատական գծերի շարքում, ինչպես տեսնում ենք, առկա է ոչ ուղիղ գիծ: Այդպիսի կոորդինատական համակարգերը կոչվում են կորագիծ կոորդինատական համակարգեր:

Կոորդինատական համակարգի օրթերի ընդհանուր սահմանումը հետևյալն է: Տվյալ կոորդինատին համապատասխանող օրթը տարածության տվյալ կետում համապատասխան կոորդինատական գծին շոշափող միավոր վեկտոր է, որը ցույց է տալիս այդ կոորդինատի աճման ուղղությունը: Օրթերի համար այս դեպքում կօգտագործենք $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\alpha$, $\hat{e}_z$ նշանակումները: Վերևում բերված սահմանումներին համապատասխան՝ գլանային համակարգի օրթերը տարածության M կետի համար պատկերված են Նկ.1-3-ում:

Նկատենք, որ ի տարբերություն դեկարտյան համակարգի օրթերի, որոնք տարածական կետի դիրքից կախված չեն, գլանային համակարգի օրթերը, ընդհանուր դեպքում, կետի դիրքից կախված փոփոխվում են ըստ ուղղության: Նշենք, որ այս հատկությունը հատուկ է բոլոր կորագիծ կոորդինատական համակարգերին:

1.2.3 Գնդային կոորդինատական համակարգ

Գնդային համակարգի դեպքում կետի դիրքը որոշվում է r, ϑ, α գնդային կոորդինատներով, որոնք պատկերված են Նկ.1-4-ում:



Նկ.1-4 Գնդային համակարգ:

Նկարից կարող ենք եզրակացնել, որ գնդային կոորդինատների փոփոխման տիրույթներն այսպիսին են՝

$$0 \le r \le \infty, 0 \le \vartheta \le \pi, 0 \le \alpha < 2\pi:$$

Դեկարտյան կոորդինատների կապը գնդային կոորդինատների հետ տրվում է

$$\begin{aligned} x &= r\, sin\vartheta\, cos\alpha, \\ y &= r\, sin\vartheta\, sin\alpha, \\ z &= r\, cos\vartheta \end{aligned} \tag{1.4}$$

բանաձևերով:

Կոորդինատական գծերն այս դեպքում հետևյալ տեսքն ունեն: r-կոորդինատական գիծը սկզբնակետից սկսվող ճառագայթ է: ϑ-կոորդինատական գիծը M կետով և z առանցքով անցնող հարթության մեջ կիսաշրջանագիծ է, որի կենտրոնը համակարգի սկզբնակետում է: α-կոորդինատական գիծը M կետով անցնող և z առանցքին ուղղահայաց հարթության մեջ շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է z առանցքի վրա: Թվարկված գծերին շոշափող և համապատասխան կոորդինատի աճման ուղղությունը ցույց տվող միավոր վեկտորները այս համակարգի $\hat{e}_r, \hat{e}_\vartheta, \hat{e}_\alpha$ օրթերն են, որոնք պատկերված են Նկ.1-4-ում: Ինչպես տեսնում ենք, գնդային համակարգը ևս կորագիծ կոորդինատական համակարգ է: Օրթերն այս դեպքում ևս հաստատուն չեն, նրանց ուղղությունները, ընդհանուր դեպքում, կետի դիրքից կախված փոփոխվում են:

1.3 Մաթեմատիկական հակիրճ ներածություն

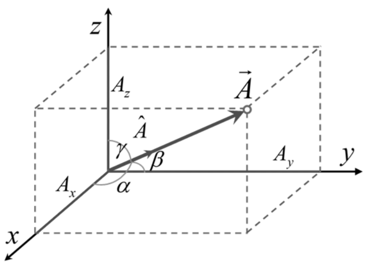
Այս բաժնում կվերհիշենք դպրոցից ձեզ արդեն իսկ հայտնի մաթեմատիկական որոշ գաղափարներ ու առնչություններ՝ ավելացնելով նաև մաթեմատիկական՝ ձեզ համար նոր, այնպիսի հասկացություններ ու բանաձևեր, որոնք անհրաժեշտ են ընդհանուր ֆիզիկայի «Մեխանիկա» բաժինը բուհական մակարդակով շարադրելու համար:

1.3.1 Վեկտորական հաշվի տարրերը

Ֆիզիկայում հանդիպում են մեծություններ, որոնք բնութագրվում են միայն թվային արժեքով: Այդպիսի մեծությունները կոչվում են ***սկալյարներ:*** Ֆիզիկայում սկալյար մեծությունների օրինակներ են՝ զանգվածը, լիցքը, խտությունը, անցած ճանապարհը, էներգիան, ջերմաստիճանը, ճնշումը և այլն: Մեծությունները, որոնք թվային արժեքից բացի բնութագրվում են նաև ուղղությամբ կոչվում են ***վեկտորներ***: Նման մեծությունների օրինակներ են՝ տեղափոխությունը, արագությունը, արագացումը, իմպուլսը, ուժը, էլեկտրական դաշտի լարվածությունը և այլն: Հետագայում կհամոզվեք, որ սկալյար և վեկտորական մեծությունների այստեղ բերված սահմանումները մաթեմատիկական ճշգրիտ սահմանումները չեն: Մեծությունների՝ սկալյար, վեկտոր և թենզոր տեսակների բաժանումը կապված է իրար նկատմամբ պտտված կոորդինատական մի համակարգից մյուսին անցման ժամանակ այդ մեծությունների դրսևորած (իրարից տարբերվող) ձևափոխման հատկությունների հետ:

Վեկտորները նշվում են համապատասխան տառի վերևում դրվող սլաք (→) նշանով: Վեկտորի մոդուլը նշվում է այսպես՝ $|\vec{A}|$: Մենք կպայմանավորվենք վեկտորի մոդուլը նշել՝ գրելով միայն վեկտորական մեծությունը ներկայացնող տառը՝ ընդսմին բաց թողնելով սլաք և ուղիղ փակագծեր սիմվոլները ($|\vec{A}| = A$): Կլինեն դեպքեր, երբ այս պայմանավորվածությունը կիրառելի չի լինի և մենք ստիպված կլինենք երկու նշաններն էլ գրել: Նման օրինակ է վեկտորի աճի մոդուլը՝ $|\Delta\vec{A}|$: Եթե նշանները բաց թողնենք, ապա կստացվի ΔA մեծությունը, որը վեկտորի մոդուլի աճն է, այլ ոչ թե վեկտորի աճի մոդուլը:

Եթե վեկտորի մոդուլը (չափը) հավասար է մեկի, ապա այն կոչվում է միավոր վեկտոր և նշանակվում տառի վրա դրվող գլխարկ (∧) նշանով: Այս նշանակումը մենք արդեն գործածել ենք օրթերի գրելաձևի մեջ: Որոշ գրքերում վեկտորները նշանակվում են ոչ թե տառի վրա դրվող սլաքի միջոցով, այլ սիմվոլների պարզեցման նպատակով նշվում են թավ (bold) տառերով: Պետք է նկատի ունենալ, որ ձեռագրի դեպքում սլաքների գործածումը պարտադիր է:



Նկ.1-5 Վեկտորի պրոյեկցիաները, ուղղորդ անկյունները:

Վեկտորն ընդունված է պատկերել ուղղորդված հատվածի տեսքով: Այդ ուղղորդված հատվածի երկարությունը ցույց է տալիս վեկտորի մոդուլը կամ չափը, իսկ ուղղությունը՝ տարածության մեջ վեկտորի կողմնորոշումը:

Յուրաքանչյուր $\vec{A}$ վեկտոր բնութագրվում է x, y, z առանցքների վրա իր ունեցած A_x, A_y, A_z երեք պրոյեկցիաներով (Նկ.1-5), որոնց միջոցով այն արտահայտվում է այսպես՝

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}: \qquad (1.5)$$

Վեկտորի մոդուլն արտահայտվում է իր պրոյեկցիաների միջոցով՝

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}: \qquad (1.6)$$

Վեկտորի ուղղությունը տարածություն մեջ կարելի է բնութագրել այդ վեկտորին համապատասխանող միավոր վեկտորով:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\hat{\imath} + \frac{A_y}{A}\hat{\jmath} + \frac{A_z}{A}\hat{k}: \quad (1.7)$$

Եթե վեկտորի կազմած անկյունը x, y, z առանցքների հետ նշանակենք համապատասխանաբար α, β, γ, ապա կարող ենք գրել՝

$$cos\alpha = \frac{A_x}{A}, cos\beta = \frac{A_y}{A}, cos\gamma = \frac{A_z}{A}: \quad (1.8)$$

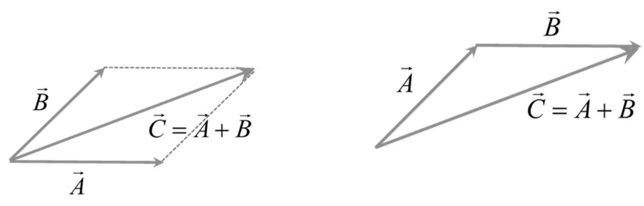
$\{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\}$ մեծությունները նկարագրում են վեկտորի ուղղությունը տարածության մեջ և կոչվում են վեկտորի ուղղորդ կոսինուսներ: Ուղղորդ կոսինուսներն իրարից անկախ չեն, $|\hat{A}|^2 = 1$ պայմանի համաձայն՝

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1: \quad (1.9)$$

Վեկտորների գումարն ու տարբերությունը: $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ և $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ երկու վեկտորների գումարը մի նոր $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ վեկտոր է, որի պրոյեկցիաներն են

$$C_x = A_x + B_x, C_y = A_y + B_y, C_z = A_z + B_z: \quad (1.10)$$

Երկրաչափորեն երկու վեկտորների գումարը կառուցվում է զուգահեռագծի կանոնով, ինչպես պատկերված է Նկ.1-6-ում:

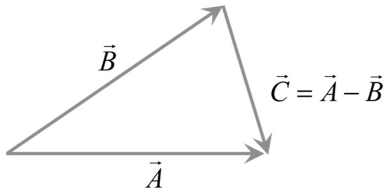


Նկ.1-6 Վեկտորների գումարի երկրաչափական կանոնը:

$\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ և $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ երկու վեկտորների տարբերությունը մի նոր $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ վեկտոր է, որի պրոյեկցիաներն են

$$C_x = A_x - B_x, C_y = A_y - B_y, C_z = A_z - B_z: \quad (1.11)$$

Երկրաչափորեն երկու վեկտորների տարբերությունը կառուց-վում է Նկ.1-7 –ում պատկերված կանոնով:



Նկ.1-7 Վեկտորների տարբերության երկրաչափական կանոնը:

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը: $\vec{A}$ և $\vec{B}$ երկու վեկտոր-ների սկալյար արտադրյալը նշանակվում է այսպես՝ $\vec{A}\cdot\vec{B}$: Այն հավասար է վեկտորների մոդուլների և վեկտորներով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալին՝

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = ABcos\alpha: \qquad (1.12)$$

Սկալյար արտադրյալը դրական է, եթե վեկտորների կազմած անկյունը սուր անկյուն է, բացասական, եթե այն բութ անկյուն է և զրո, եթե վեկտորների կազմած անկյունն ուղիղ անկյուն է:

Արտադրիչների տեղերը փոխելիս սկալյար արտադրյալը մնում է անփոփոխ՝

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}: \qquad (1.13)$$

Սկալյար արտադրյալը կարելի է ներկայացնել նաև վեկտոր-ներից մեկի՝ մյուսի վրա ունեցած պրոյեկցիայով՝

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,\text{Պր}_{\vec{A}}\vec{B} = B\,\text{Պր}_{\vec{B}}\vec{A}: \qquad (1.14)$$

Սկալյար արտադրյալի սահմանումից օգտվելով՝ գրենք օրթերի միջև հնարավոր ինը սկալյար արտադրյալները.

$$\begin{matrix} \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = 1 & \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0 & \hat{\imath}\cdot\hat{k} = 0 \\ \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} = 0 & \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1 & \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0 \\ \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0 & \hat{k}\cdot\hat{\jmath} = 0 & \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \end{matrix} \qquad (1.15)$$

Սկալյար արտադրյալը կարելի է արտահայտել արտադրիչ վեկտորների պրոյեկցիաներով հետևյալ կերպ.

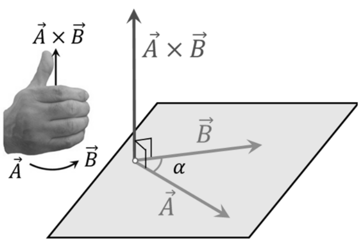
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)\cdot\left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right) = \\ = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z: \tag{1.16}$$

Երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալը: Երկու վեկտորներ կարող են բազմապատկվել այնպես, որ արդյունքը ստացվի վեկտորական մեծություն: Նման արտադրյալը կոչվում է վեկտորական արտադրյալ և նշանակվում այսպես՝ $\vec{A}\times\vec{B}$: Որոշ գրքերում օգտագործվում են նաև $[\vec{A},\vec{B}]$ կամ $[\vec{A}\,\vec{B}]$ նշանակումները: Մենք կգործածենք $\vec{A}\times\vec{B}$ նշանակումը:

$\vec{A}$ և $\vec{B}$ երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալը մի նոր վեկտոր է, որի մոդուլը որոշվում է

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = ABsin\alpha: \tag{1.17}$$

բանաձևով, իսկ ուղղությունն ուղղահայաց է միաժամանակ $\vec{A}$ և $\vec{B}$ վեկտորներին (այսինքն՝ ուղղահայաց է $(\vec{A},\vec{B})$ հարթությանը) և կողմնորոշված է այնպես, որ վեկտորների $\{\vec{A},\vec{B},\vec{A}\times\vec{B}\}$ եռյակը կազմի աջ պտուտակային համակարգ: Եթե աջ ձեռքի չորս մատները պահենք $\vec{A}$-ից դեպի $\vec{B}$ կարճ պտույտի ուղղությամբ, ապա ուղիղ անկյան տակ բացված բութ մատը ցույց կտա $\vec{A}\times\vec{B}$ վեկտորական արտադրյալի ուղղությունը (Նկ.1-8): Վեկտորական արտադրյալի ուղղությունը կարելի է որոշել նաև խցանահանի, աջ պտուտակի կանոններով կամ ժամսլաքի պտույտի միջոցով, ինչպես դա նկարագրվել է կոորդինատական աջ համակարգի դեպքում:



Նկ.1-8 Վեկտորական արտադրյալի ուղղությունը:

Նկատենք, որ վեկտորական արտադրյալի մոդուլը հավասար է արտադրիչ վեկտորներով կազմված զուգահեռագծի մակերեսին: Վեկտորական արտադրյալը արտադրիչների տեղերը փոխելիս, փոխում է նշանը՝

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} : \tag{1.18}$$

Համուղղված կամ հակուղղված վեկտորների վեկտորական արտադրյալը հավասար է զրոյի: Մասնավորաբար, վեկտորի վեկտորական արտադրյալն ինքն իր հետ հավասար է զրոյի՝ $\vec{a} \times \vec{a} = 0$:

Օրթերի միջև հնարավոր ինը վեկտորական արտադրյալները կլինեն.

$$\begin{array}{ccc} \hat{\imath} \times \hat{\imath} = 0 & \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} & \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath} \\ \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k} & \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0 & \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \\ \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} & \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath} & \hat{k} \times \hat{k} = 0 \end{array} \tag{1.19}$$

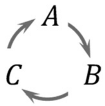
Օգտվելով այս բանաձևերից՝ վեկտորական արտադրյալի համար կստանանք՝

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}: \tag{1.20}$$

Ստացվածը թույլ է տալիս վեկտորական արտադրյալի պրոյեկցիաներն արտահայտել արտադրիչ վեկտորների պրոյեկցիաներով՝

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B})_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ (\vec{A} \times \vec{B})_y &= A_z B_x - A_x B_z\,, \\ (\vec{A} \times \vec{B})_z &= A_x B_y - A_y B_x\,: \end{aligned} \tag{1.21}$$

Երեք վեկտորների խառը արտադրյալը: Երեք վեկտորների $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ կամ $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C})$ տեսքի արտադրյալները կոչվում են խառը արտադրյալ: Կարելի է ցույց տալ, որ **խառը արտադրյալը չի փոխվում, երբ արտադրիչները ցիկլային (շրջանային) տեղափոխության են ենթարկվում, իսկ բազմապատկման նշանները մնում են իրենց տեղում**՝



$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right): \qquad (1.22)$$

Վերևում բերված պնդումը հայտնի է խառը արտադրյալի ցիկլային տեղափոխման կանոն անվանումով:

Երեք վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալը: Երեք վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ անվանում են

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) \text{ կամ } \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$$

տեսքի արտադրյալները: Կրկնակի վեկտորական արտադրյալի համար իրավացի է

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) \qquad (1.23)$$

նույնությունը, որը հայտնի է «բաց մինուս ցաբ» կանոն անվանումով: Վերևում բերված մյուս կրկնակի վեկտորական արտադրյալի համար այն կգրվի այսպես.

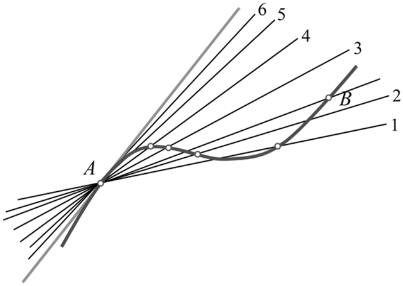
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{A}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right): \qquad (1.24)$$

Անկախ կրկնակի վեկտորական արտադրյալի կոնկրետ տեսքից՝ նրա համար իրավացի է հետևյալ կանոնը: **Կրկնակի վեկտորական արտադրյալը հավասար է միջին վեկտորը՝ բազմապատկած մյուս երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալով, հանած՝ փակագծերի մեջ եղած հաջորդ վեկտորը՝ բազմապատկած մյուս երկուսի սկալյար արտադրյալով:**

1.3.2 Կորին տարված շոշափող: Կորության կենտրոն, կորության շառավիղ

Մեխանիկան ուսումնասիրելիս կարիք է լինելու օգտագործել կորի շոշափողի, կորության կենտրոնի, կորության շառավղի գաղափարները: Այստեղ բերում ենք այդ գաղափարների հակիրճ շարադրանքը:

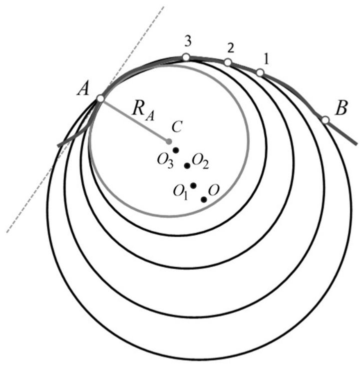
Կորին տարված շոշափող: Դիտարկենք մի ինչ-որ կոր և նրա վրա ընտրենք *A* և *B* կետերը (տե՛ս Նկ.1-9): Տանենք այդ կետերով անցնող ուղիղ գիծ: *B* կետը կորով շարժելով՝ հետզհետե մոտեցնենք սևեռված *A* կետին: Այդ ընթացքում ուղիղը կսկսի փոփոխել իր դիրքը, իհարկե միշտ մնալով սևեռված՝ *A* կետով անցնող: Երբ *B* կետը անչափ մոտենա *A* կետին, գիծը կսկսի այլևս չփոփոխվել և կձգտի մի վերջնական դիրքի:



Նկ.1-9 Կորի շոշափողի գաղափարը:

Նշված ուղիղ գծի սահմանային դիրքը, երբ *B* կետը կձգտի *A* կետին (այսինքն՝ *B* կետը անվերջ մոտ կլինի *A* կետին) կոչվում է կորի շոշափող *A* կետում:

Կորի կորության կենտրոն և կորության շառավիղ: Դիտարկվող կորի վրա վերցնենք իրարից ոչ շատ հեռու *A* և *B* կետերը (տե՛ս Նկ.1-10): Կառուցենք կորի *AB* հատվածին ամենամոտ աղեղն ունեցող շրջանագիծը: Նրա կենտրոնի դիրքը նշանակենք *O* տառով, իսկ շառավիղը՝ R_0-ով: *B* կետը կորով շարժելով հետզհետե մոտեցնենք սևեռված *A* կետին: Այդ ընթացքում շրջանագիծը կսկսի փոփոխվել, կփոփոխվի շրջանագծի ինչպես կենտրոնի դիրքը, այնպես էլ շառավիղը: *B* կետի հաջորդ դիրքերին համապատասխանող շրջանագծերի կենտրոնները կլինեն O_1, O_2, $O_3, \cdots$, իսկ շառավիղները՝



Նկ.1-10 Կորության կենտրոն և կորության շառավիղ:

$R_1, R_2, R_3, \cdots$: Ի վերջո, երբ B կետը անչափ մոտենա A կետին, շրջանագիծը կսկսի այլևս չփոփոխվել և կձգտի մի վերջնական սահմանային դիրքի: Այս սահմանային շրջանագծի կենտրոնը կնշանակենք C-ով և կանվանենք կորության կենտրոն A կետում, իսկ համապատասխան շառավիղը՝ կորի կորության շառավիղ A կետում: Այլ կերպ ասած, երևակայորեն պատկերացրած այն շրջանագծի կենտրոնը, որի աղեղը համընկնում է կորի անվերջ փոքր հատվածի հետ կոչվում է կորի այդ մասի կորության կենտրոն: Կորի տվյալ կետը իր կորության կենտրոնին միացնող հատվածի երկարությունը կլինի այդ կետի կորության շառավիղը: Ակնհայտ է, որ կորի տվյալ կետը կորության կենտրոնին միացնող ուղիղն ուղղահայաց կլինի այդ կետում տարված շոշափողին:

1.3.3 Ֆունկցիայի ածանցյալ: Մասնակի ածանցյալ

Դիցուք տրված է $f(x)$ ֆունկցիան: Ֆունկցիայի աճը կամ փոփոխությունը արգումենտի փոփոխման $[x, x + \Delta x]$ տիրույթում հավասար կլինի $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$: Ֆունկցիայի ածանցյալը սահմանվում է որպես ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերության սահմանային արժեք, երբ արգումենտի աճը ձգտում է զրոյի: Ածանցյալի համար դպրոցում գործածել եք f' նշանակումը: Քանի որ, ֆիզիկայում սովորաբար անհրաժեշտ է լինում քննարկել ֆունկցիաներ, որոնց արգումենտները տարբեր դեպքերում տարբեր են, ուստի նպատակահարմար է ունենալ ածանցյալի այնպիսի նշանակում, որն ակնառու ցույց կտա, թե ըստ ո՞ր մեծության է ածանցումը կատարվում: Ածանցյալի համար ընդունված է այսպիսի նշանակում

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}: \qquad (1.25)$$

Պետք է նկատի ունենալ, որ df/dx-ը սիմվոլիկ նշանակում է և այն իրենից չի ներկայացնում df և dx մեծությունների հարաբերությունը: Արտասանվում է՝ «*df ըստ dx -ի*», այլ ոչ թե՝ «*df բաժանած* *dx-ի*»: Երկրորդ, երրորդ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալները գրվում են այսպես՝

$$\frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \cdots, \frac{d^nf}{dx^n} \tag{1.26}$$

և արտասանվում՝ «*դէ երկու f դէ x քառակուսի*», «*դէ երեք f դէ x խորանարդ*» և այսպես շարունակ:

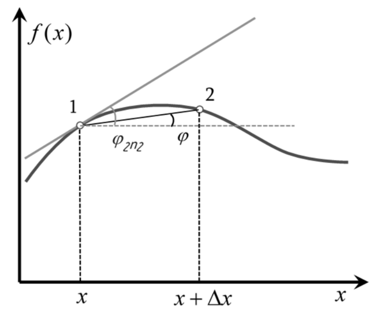
Արտադրյալի ածանցման կանոնի համաձայն՝

$$\frac{d(fg)}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}: \tag{1.27}$$

$f(u(x))$ բարդ ֆունցիայի դեպքում ածանցյալը որոշվում է այսպես՝

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}: \tag{1.28}$$

Պարզենք ածանցյալի երկրաչափական իմաստը: Նկատենք, որ ֆունկցիայի աճի և արգումենտի աճի հարաբերությունը Նկ.1-11–ում պատկերված կորի վրա գտնվող 1 և 2 կետերով անցնող ուղիղ գծի՝ x առանցքի հետ կազմած φ անկյան տանգենսն է: Ածանցյալի (1.25) սահմանումից էլ տեսնում ենք, որ ածանցյալն այդ հարաբերության սահմանային արժեքն է, երբ $\Delta x \to 0$, այսինքն՝ երբ 2 կետը շարժվելով կորով ձգտում է 1 կետին: Բայց վերևում նկարագրված ուղիղ գծի սահմանային դիրքը, երբ 2 կետը, շարժվելով կորով, ձգտում է 1 կետին կորին 1 կետում տարված շոշափողն է: Այստեղից կարող ենք եզրակացնել, որ ֆունկցյաի ածանցյալը տվյալ կետում հավասար է այդ կետում կորին տարած շոշափողի՝ x առանցքի հետ կազմած $\varphi_{շոշ}$ անկյան տանգենսին



Նկ.1-11 Ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանությունը:

$$\frac{df}{dx} = tg\varphi_{շոշ}: \tag{1.29}$$

Ֆիզիկայում հաճախ է անհրաժեշտ լինում ուսումնասիրել տարբեր բնութագրերի ժամանակային փոփոխությունները: Ժամանակի ընթացքում տվյալ մեծության փոփոխման արագությունը բնութագրվում է այդ մեծության ժամանակային ածանցյալով: Պայմանավորվել են ըստ ժամանակի ածանցյալի համար վերևում բերված նշանակմանը զուգընթաց օգտագործել նաև տառի վրա դրվող կետ նշանը՝

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \frac{d^3x}{dt^3} = \dddot{x}, \cdots : \tag{1.30}$$

Մասնակի ածանցյալ: Ֆունկցիան կարող է ունենալ նաև մեկից ավելի արգումենտներ: Այդպիսի ֆունկցիաները կոչվում են մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաներ: $f(x, y, z, t, \cdots)$ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ x փոփոխականի, պայմանով, որ մնացած արգումենտները մնում են հաստատուն կոչվում է մասնակի ածանցյալ ըստ x-ի և նշանակվում է հետևյալ կերպ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t, \cdots) - f(x, y, z, t, \cdots)}{\Delta x} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{y,z,t,\cdots=const}: \tag{1.31}$$

Բարձր կարգի մասնակի ածանցյալները գրվում են այսպես.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial t}, \cdots : \tag{1.32}$$

Բերենք ֆիզիկայում ածանցյալի օգտագործման օրինակներ: Ենթադրենք ունենք m զանգվածով և L երկարության համասեռ ձող: Պարզ է, որ ձողի միավոր երկարությանը բաժին ընկնող զանգվածը ձողի բոլոր հատվածներում էլ հավասար կլինի m/L: Այս մեծությունը կոչվում է զանգվածի գծային խտություն: Անհամասեռ ձողի դեպքում այս բանաձևը կիրառելի չի լինի, քանի որ ձողի տարբեր մասերում միավոր երկարությանը տարբեր զանգվածներ կհամապատասխանեն, այսինքն՝ զանգվածի գծային խտությունը ձողի տարբեր մասերում տարբեր կլինի: Ձողի տվյալ կետում զանգվածի գծային խտությունը գտնելու համար պետք է այդ կետի շրջակայքում առանձնացնել Δl փոքր երկարության հատված և նրանում եղած Δm փոքր զանգվածը բաժանել Δl-ի վրա: Ճշգրիտ արժեքը գտնելու համար պետք է Δl երկարությունը ձգտեցնել զրոյի: Եթե գծային խտությունը նշանակենք χ-ով, ապա կարող ենք գրել՝

$$\chi = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl}: \tag{1.33}$$

Եթե զանգվածը բաշխված է մակերևույթով, ապա կարիք է առաջանում միավոր մակերեսին բաժին ընկնող զանգվածի, կամ ինչպես ընդունված է ասել՝ զանգվածի մակերևութային խտության, գաղափար ներմուծել: Այն որոշվում է այսպես՝

$$\sigma = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \frac{dm}{ds}: \tag{1.34}$$

Զանգվածի ծավալային խտության համար նման ձևով կարելի է գրել՝

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}: \tag{1.35}$$

1.3.4 Գաղափար ինտեգրալի մասին: Անորոշ և որոշյալ ինտեգրալներ

Ֆունկցիայի նախնական, անորոշ ինտեգրալ: Դիցուք $f(x)$ և $\varphi(x)$ երկու ֆունցիաներն իրար հետ կապված են

$$f(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} \tag{1.36}$$

առնչությամբ: $\varphi(x)$ ֆունկցիան, որի ածանցյալը հավասար է տրված $f(x)$ ֆունկցիային կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական: Եթե տրված է $\varphi(x)$-ը և պահանջվում է գտնել $f(x)$-ը, ապա խնդրի լուծումը բերվում է ձեզ լավ ծանոթ ածանցման գործողության: Հանդիպում են խնդիրներ, որոնցում տրված է $f(x)$ ֆունկցիան և պահանջվում է որոշել նրա $\varphi(x)$ նախնականը: Այս գործողությունը ածանցման հակադարձ գործողությունն է: Այն կոչվում է ինտեգրման գործողություն և գրվում այսպես՝

$$\varphi(x) = \int f(x)dx \text{ :} \tag{1.37}$$

Ածանցման և ինտեգրման գործողությունների հակադարձ լինելը ակնառու երևում է հետևյալ նույնություններից՝

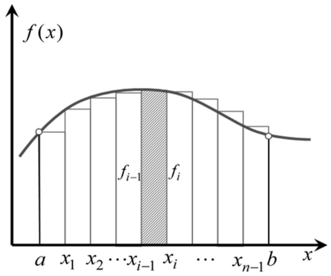
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x), \int \frac{df(x)}{dx}dx = f(x) \text{ :} \tag{1.38}$$

Այսպիսի ինտեգրալը կոչվում է անորոշ ինտեգրալ:

Քանի որ հաստատունի ածանցյալը հավասար է զրոյի, ապա տվյալ ֆունկցիան կունենա անթիվ բազմությամբ նախնականներ, որոնք իրարից կտարբերվեն կամայական հաստատուն գումարելիով: Աղյուսակի ձևով ներկայացնենք որոշ տարրական ֆունկցիաների նախնականների կամ անորոշ ինտեգրալների տեսքերը.

	Ֆունկցիան	Նախնականը	Անորոշ ինտեգրալը	
1	a $(a = const)$	$ax + const$	$\int adx = ax + const$	
2	x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + const$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + const,$ $(\alpha \neq -1)$	
3	$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + const$	$\int \frac{dx}{x} = \ln(\lvert x\rvert) + const$	
4	$\sin x$	$-\cos x + const$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + const$	(1.39)
5	$\cos x$	$\sin x + const$	$\int \cos x\, dx = \sin x + const$	
6	e^x	$e^x + const$	$\int e^x\, dx = e^x + const$	
7	a^x $(a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + const$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + const,$ $(a > 0, a \neq 1)$	

Որոշյալ ինտեգրալ: Դիտարկենք կամայական անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիա և խնդիր դնենք գտնել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա առաջացած այն պատկերի մակերեսը, որը սահմանափակված է x առանցքով, $x = a$ գծով, $x = b$ գծով և $f(x)$ կորով (Նկ.1-12):



Նկ.1-12 Որոշյալ ինտեգրալի գաղափարը:

$[a, b]$ հատվածը բաժանենք n մասերի $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \cdots, x_{n-1},\ x_n = b$ կետերով և կառուցենք ուղղանկյուն զուգահեռագծեր, ինչպես պատկերված է նկարում: Այդ կետերում ֆունցիայի արժեքները կլինեն՝ $f_0 = f(a), f_1 = f(x_1), \cdots, f_{i-1} = f(x_{i-1}), f_i = f(x_i), \cdots, f_n = f(b)$:

Նկարում ստվերագծված i–րդ զուգահեռագծի մակերեսը հավասար կլինի՝

$$S_i = f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f_{i-1} \Delta x_i :$$

Զուգահեռագծերի ընդհանուր մակերեսի համար կունենանք՝

$$S_{ab}^n = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} \Delta x_i :$$

Հասկանալի է, որ բաժանումների n թվի մեծացմանը զուգընթաց, երբ $\{\Delta x_i\}$ երկարությունները գնալով նվազեն, այս մակերեսի արժեքը ավելի ու ավելի կմոտենա կորով սահմանափակված պատկերի մակերեսի իրական արժեքին:

Մակերեսի ճշգրիտ արժեքը կորոշվի

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \{\Delta x_i\} \to 0}} S_{ab}^n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \{\Delta x_i\} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} \Delta x_i = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \{\Delta x_i\} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i \qquad (1.40)$$

բանաձևով:

Ստացվածը $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալն է $[a, b]$ հատվածում: Այն գրվում է այսպես՝

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \{\Delta x_i\} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx: \qquad (1.41)$$

Այստեղ $f(x)$-ը կոչվում է ենթինտեգրալ ֆունկցիա, a-ն ինտեգրալի ստորին սահման, b-ն՝ վերին սահման: Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականը $\varphi(x)$-ն է, ապա կարող ենք գրել՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{d\varphi}{dx}dx = \varphi(x)\Big|_a^b = \varphi(b) - \varphi(a): \tag{1.42}$$

Ինչպես ածանցյալի գաղափարի շարադրման վերջում բերեցինք ֆիզիկայում օգտագործման պարզագույն օրինակներ, ինտեգրալի դեպքում ևս բերենք նմանատիպ օրինակներ: Դիցուք տրված է L անհամասեռ ձողի $\chi(l)$ զանգվածի գծային խտության կախումը սկզբնակետից հաշված նրա l երկարությունից և պահանջվում է հաշվել ձողի զանգվածը: Ձողի $[l, l + dl]$ անվերջ փոքր հատվածի զանգվածը հավասար կլինի $dm = \chi(l)dl$: Ինտեգրելով կստանանք՝

$$m = \int_0^L \chi(l)\, dl: \tag{1.43}$$

Զանգվածի մակերևութային բաշխման դեպքում կունենանք՝

$$m = \int_S \sigma\, ds, \tag{1.44}$$

իսկ ծավալային բաշխման դեպքում՝

$$m = \int_V \rho\, dV: \tag{1.45}$$

1.3.5 Ֆունկցիայի միջինը և նրա երկրաչափական մեկնաբանությունը

Դիցուք ունենք մի ինչ-որ f մեծության $f_1, f_2, f_3 \cdots f_N$ ընդհատ (դիսկրետ) արժեքների համախումբը: f մեծության միջին արժեքը որոշվում է

$$f_{միջ} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \qquad (1.46)$$

բանաձևով: Մասնավոր դեպքում, եթե f մեծության N արժեքներից N_1 հատը ունեն f_1 արժեք, N_2 հատը՝ f_2 արժեք, ⋯, N_k հատը՝ f_k արժեք, ապա միջին արժեքը կլինի՝

$$f_{միջ} = \frac{N_1 f_1 + N_2 f_2 + N_3 f_3 + \cdots + N_k f_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i f_i : \qquad (1.47)$$

$w_i = N_i/N$ հարաբերությունը f մեծության f_i արժեք ունենալու հարաբերական քանակական մասնաբաժինն է բոլոր արժեքների քանակի համեմատ և կոչվում է f_i արժեք ունենալու w_i հավանականություն:

Հավանականության միջոցով միջին արժեքը կգրվի այսպես՝

$$f_{միջ} = \sum_{i=1}^{k} w_i f_i : \qquad (1.48)$$

Այժմ ենթադրենք տրված է $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան և պահանջվում է գտնել նրա միջին արժեքը $x \in [a, b]$ հատվածում: $[a, b]$ հատվածը բաժանենք N հավասար մասերի $\Delta x = (b - a)/N$ քայլով: Եթե բաժանումների թիվը բավականաչափ մեծ է, ապա յուրաքանչյուր փոքր հատվածում կարող ենք անտեսել ֆունկցիայի փոփոխությունը և միջինի համար գրել՝

$$f_{միջ,N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{N} f_i \, \Delta x : \qquad (1.49)$$

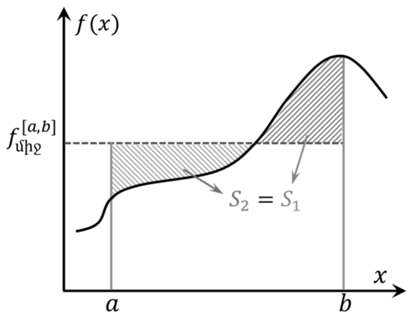
Միջինի ճշգրիտ արժեքը կստացվի, եթե բաժանումների N թիվը ձգտեցնենք անվերջի ($\Delta x \to 0$).

$$f_{միջ} = \frac{1}{b-a} \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta x \to 0)}} \sum_{i=1}^{N} f_i \, \Delta x : \qquad (1.50)$$

Հիշելով որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը՝ վերջնականապես կգրենք՝

$$f_{միջ}^{[a,b]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx: \tag{1.51}$$

Պարզենք միջինի երկրաչափական իմաստը: Ինչպես գիտենք, $f(x)$ ֆունկցիայի ինեգրալը $[a, b]$ հատվածում հավասար է $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հարթության մեջ x առանցքով, $x = a$ գծով, $x = b$ գծով և $f(x)$ կորով սահմանափակված պատկերի մակերեսին: Այդ մակերեսի և x առանցքի վրա ստացված հատվածի $b - a$ երկարության հարաբերությունը հավասար կլինի f մեծության այնպիսի $f_{միջ}^{[a,b]}$ հաստատուն արժեքին, որի դեպքում ստացված ուղղանկյան մակերեսը հավասար կլինի վերոհիշյալ բարդ պատկերի մակերեսին (Նկ.1-13): Այս պնդումը համարժեք է այն պնդմանը, որ $[a, b]$ հատվածում $f = f_{միջ}^{[a,b]}$ ուղիղ գծից վերև գտնվող $f(x)$ կորով սահմանափակված պատկերի S_1 մակերեսը հավասար է գծից ներքև գտնվող $f(x)$ կորով սահմանափակված պատկերի S_2 մակերեսին:



Նկ.1-13Ֆունկցիայի միջին արժեքի երկրաչափական իմաստը:

2. ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

2.1 Նյութական կետի կինեմատիկական նկարագրության եղանակները

Նյութական կետ: Պարզագույն մարմինը, որի շարժումն ուսումնասիրվում է մեխանիկայում, նյութական կետն է: Նյութական կետը մակրոսկոպական այն մարմինն է, որի չափերը տվյալ շարժման պայմաններում կարելի է անտեսել և համարել, որ ամբողջ նյութը կուտակված է մեկ երկրաչափական կետում: Նյութական կետի գաղափարը իրականության իդեալականացված պատկեր է, քանզի նյութական յուրաքանչյուր մակրոսկոպական մարմին անպայման ունի վերջավոր չափեր: Այս վերացարկումը օգնում է հեշտացնել խնդրի լուծումը, միաժամանակ ապահովելով վերացարկված խնդրի լուծման ընդունելի չափով մոտ լինելն իրական խնդրի լուծմանը: Նյութական կետի գաղափարը նաև հարաբերական գաղափար է: Միևնույն մարմինը մի խնդրում կարող է համարվել նյութական կետ, իսկ մեկ այլ խնդրում՝ ոչ: Մարմնի բացարձակ չափերը որևէ դերակատարություն չունեն, կարևոր է մարմնի չափերի և շարժման բնութագրական հեռավորությունների հարաբերությունը: Նյութական կետի սահմանման մեջ շեշտված է նրա մակրոսկոպական լինելը, որպեսզի հնարավոր լինի այն դիտարկել դասական (Նյուտոնյան) մեխանիկայի շրջանակներում:

Նյութական կետի մեխանիկան դասական մեխանիկայի հիմքն է: Դասական տեսանկյունից ցանկացած մակրոսկոպական մարմին կարելի է պատկերացնել որպես իրար հետ փոխազդող նյութական կետերի համախումբ: Այդ պատճառով մակրոմարմնի շարժման խնդիրը բերվում է իրար հետ փոխազդող նյութական կետերի շարժման խնդրին: Ուստի բնական է դասական մեխանիկայի ուսումնասիրությունը սկսել նյութական կետի մեխանիկայից:

Շարժումը կարելի է համարել լրիվությամբ նկարագրված, եթե ընտրված հաշվարկման համակարգում ժամանակի ցանկացած պահի հայտնի է նյութական կետի դիրքը: Ասվածից երևում է, որ նյութական կետի շարժման լրիվ նկարագրությունը հանգում է շառավիղ վեկտորի ժամանակային կախվածության գտնելուն: Նույն նպատակին կարել է նաև հասնել կոորդինատների ժամանակային կախվածությունները գտնելու միջոցով:

Ժամանակից կախված ֆունկցիան կամ ֆունկցիաների համախումբը, որը թույլ է տալիս ժամանակի յուրաքանչյուր պահի որոշել նյութական կետի դիրքը ստացել է *շարժման օրենք* անվանումը:

Շարժման նկարագրության եղանակների ուսումնասիրությունը, որը կինեմատիկայի նպատակն է, կարելի է կատարել տարբեր հաշվարկման համակարգերում: Այս տեսանկյունից բոլոր հաշվարկման համակարգերը հավասարազոր են: Կինեմատիկայում որևէ հաշվարկման համակարգ մեկ այլ համակարգի նկատմամբ չունի արտոնություն: Հաշվարկման համակարգերի միջև տարբերություններն ի հայտ են գալիս դինամիկայում:

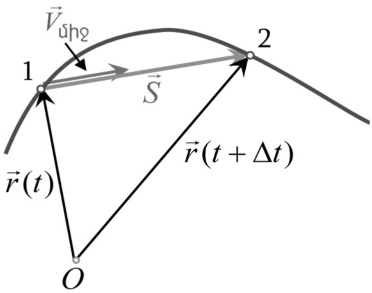
Կինեմատիկական նկարագրության եղանակները երեքն են՝ վեկտորական, կոորդինատական և, այսպես կոչված, «բնական»: Հերթով շարադրենք այդ եղանակները:

2.1.1 Կինեմատիկական նկարագրության վեկտորական եղանակ

Կինեմատիկական նկարագրության վեկտորական եղանակի դեպքում նյութական կետի դիրքը նկարագրվում է $\vec{r}$ շառավիղ վեկտորի միջոցով: Շարժման ընթացքում նյութական կետի դիրքը փոփոխվում է, որը բերում է նրա դիրքը նկարագրող շառավիղ վեկտորի փոփոխության ընդհանուր դեպքում ինչպես ըստ մոդուլի, այնպես էլ ըստ ուղղության: Կետերի բազմությունը որոնցում ժամանակի հաջորդական պահերին եղել է նյութական կետը կազմում է տարածության մեջ մի ինչ-որ գիծ, որը կոչվում է շարժման հետագիծ:

Որևէ ժամանակահատվածում նյութական կետի անցած ճանապարհը հետագծի այն հատվածի երկարությունն է, որ ընկած է այդ ժամանակահատվածի սկզբնական ու վերջնական պահերին նյութական կետի ունեցած դիրքերի միջև:

Կինեմատիկական նկարագրության վեկտորական եղանակի դեպքում շարժման օրենքը շառավիղ վեկտորի $\vec{r}(t)$ ժամանակային կախվածության ֆունկցիան է:



Նկ. 2-1 Տեղափոխության և միջին արագության վեկտորները:

Դիցուք ժամանակի $t_1 = t$ պահին նյութական կետը գտնվում է 1 կետում, որի շառավիղ վեկտորն է $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t)$, իսկ դրան հաջորդող $t_2 = t + \Delta t$ պահին՝ 2 կետում, որի շառավիղ վեկտորն է $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2) = \vec{r}(t+\Delta t)$ (Նկ.2-1):

Առաջին կինեմատիկական մեծությունը տեղափոխության վեկտորն է, որը նյութական կետի սկզբնական դիրքը վերջնականին միացնող վեկտորն է: Ինչպես երևում է նկարից, տեղափոխությունը շառավիղ վեկտորի աճն է $[t, t+\Delta t]$ ժամանակահատվածում

$$\vec{S} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}: \qquad (2.1)$$

$[t, t+\Delta t]$ ժամանակահատվածում միջին արագությունը սահմանվում է, որպես տեղափոխության և համապատասխան ժամանակահատվածի հարաբերություն՝

$$\vec{V}_{միջ}^{[t,t+\Delta t]} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}: \qquad (2.2)$$

Միջին արագության ուղղությունը համընկնում է նույն ժամանակահատվածում կատարած տեղափոխության $\Delta\vec{r}$ վեկտորի ուղղության հետ: Միջինի համար որոշ դեպքերում օգտագործվում են նաև այսպիսի նշանակումներ՝ $\vec{V}_{միջ} = \langle\vec{V}\rangle = \overline{\vec{V}}$:

Միջին ճանապարհային արագությունը սահմանվում է որպես անցած ճանապարհի և համապատասխան ժամանակահատվածի հարաբերություն՝

$$V_{միջ.ճ}^{[t,t+\Delta t]} = \frac{S_{ճ}^{[t,t+\Delta t]}}{\Delta t} : \tag{2.3}$$

Միջին ճանապարհային արագությունը սկալյար մեծություն է:

Միջին արագությունները $[t, t+\Delta t]$ ժամանակահատվածում շարժման միջին նկարագիրն են ներկայացնում: Δt ժամանակահատվածի նվազմանը զուգընթաց նրանք փոփոխվում են: Սահմանային դեպքում, երբ $\Delta t \to 0$, այդ ժամանակահատվածը վերածվում է մեկ կետի t առանցքի վրա, այսինքն՝ ձգտում է t պահին ($[t, t+\Delta t] \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} t$): Ակնհայտ է, որ այդ դեպքում միջին բնութագրերը կվերածվեն t պահին շարժումը բնութագրող մեծությունների:

Ակնթարթային արագությունը ժամանակի t պահին սահմանվում է որպես $[t, t+\Delta t]$ ժամանակահատվածում միջին արագության սահմանային արժեք, երբ Δt ժամանակահատվածը ձգտում է զրոյի՝

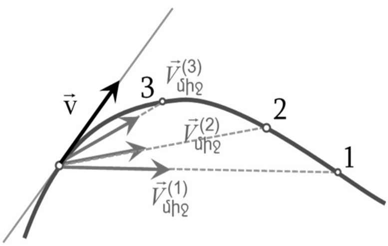
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{միջ}^{[t,t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} : \tag{2.3}$$

Օգտվելով ածանցյալի գաղափարից՝ կգրենք

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}: \tag{2.4}$$

Այսուհետ ակնթարթային բառը բաց կթողնենք և այն պարզապես կանվանենք արագություն: Արագությունը շառավիղ վեկտորի ածանցյալն է ըստ ժամանակի:

Ցույց տանք, որ ակնթարթային արագության վեկտորն ուղղված է հետագծի տվյալ կետով տարված շոշափողով: Դիտարկենք $\Delta t^{(1)} > \Delta t^{(2)} > \Delta t^{(3)} > \cdots$ ավելի ու ավելի փոքրացող ժամանակահատվածներ: Նկ.2-2-ում նյութական կետի այդ ժամանակահատվածներին համապատասխանող դիրքերը կլինեն 1,2,3 ... կետերը, որոնք հետագծի երկայնքով շարժվելով ավելի ու ավելի են մոտենում t պահի դիրքին: Նկատենք, որ



Նկ.2-2 Ակնթարթային արագության ուղղությունը:

ակնթարթային արագության ուղղությունը համընկնում է միջին արագության սահմանային ուղղության հետ, երբ ժամանակահատվածը ձգտում է զրոյի: Քանի որ ժամանակահատվածի զրոյի ձգտելու դեպքում հետագծի վրա գտնվող կետը շարժվելով հետագծով ձգտում է t պահի դիրքին, ապա ակնթարթային արագությունը հետագծի տվյալ կետում ուղղված կլինի հետագծի վրա գտնվող երկու իրար անվերջ մոտ կետերով անցնող ուղղով: Բայց կորին պատկանող իրար անսահման մոտ երկու կետով անցնող ուղիղ գիծը հենց այդ կետում կորին տարված շոշափողն է:

Միջին ճանապարհային արագության սահմանային արժեքը, երբ ժամանակահատվածը ձգտում է զրոյի հավասար կլինի ակնթարթային արագության մոդուլին:

Նման ձևով սահմանվում է միջին արագացումը: Միջին արագացումը որևէ ժամանակահատվածում հավասար է այդ ընթացքում արագության փոփոխության և ժամանակահատվածի հարաբերությանը՝

$$\vec{a}_{միջ}^{[t,t+\Delta t]} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}: \tag{2.5}$$

Ակնթարթային արագացում, արագացում ժամանակի տվյալ պահին, արագացում հետագծի տվյալ կետում կամ պարզապես արագացում անվանում են միջին արագացման սահմանային արժեքը, երբ ժամանակահատվածը ձգտում է զրոյի

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_{միջ}^{[t,t+\Delta t]} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}: \tag{2.6}$$

Արագացումը արագության վեկտորի ածանցյալն է ըստ ժամանակի կամ, որ նույնն է, շառավիղ վեկտորի երկրորդ կարգի ածանցյալն է ըստ ժամանակի՝

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}\ : \tag{2.7}$$

Այսպիսով, եթե հայտնի է $\vec{r}(t)$ շարժման օրենքը, ապա (2.4) և (2.7) բանաձևերի օգնությամբ կարող ենք որոշել $\vec{v}(t)$ արագությունը և $\vec{a}(t)$ արագացումը ժամանակի յուրաքանչյուր պահի:

Հարաբերական արագություն: Շարժման կինեմատիկական նկարագրությանը վերաբերող խնդիրներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում որոշել մեկ նյութական կետի արագությունը մեկ այլ նյութական կետի նկատմամբ: Այդ արագությունը կոչվում է հարաբերական արագություն:

Դիտարկենք A և B նյութական կետերը և պայմանավորվենք A նյութական կետի արագությունը B-ի նկատմամբ նշանակել $\vec{v}_{AB}$-ով: Առաջին մարմնի շառավիղ վեկտորը նշանակենք $\vec{r}_A$-ով, իսկ երկրորդինը՝ $\vec{r}_B$-ով: A մարմնի շառավիղ վեկտորը B մարմնի նկատմամբ կլինի՝ $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$: A մարմնի հարաբերական արագությունը B մարմնի նկատմամբ կգտնենք՝ կատարելով ածանցում ըստ ժամանակի՝ $\vec{v}_{AB} = \dot{\vec{r}}_{AB} = \dot{\vec{r}}_A - \dot{\vec{r}}_B = \vec{v}_A - \vec{v}_B$:

Այսպիսով, A մարմնի հարաբերական արագությունը B մարմնի նկատմամբ որոշվում է

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \tag{2.8}$$

բանձևով: Այս բանաձևին համարժեք $\vec{v}_A = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_B$ բանաձևը ֆիզիկայում հայտնի է որպես արագությունների գումարման կանոն:

Նավակի շարժման վերաբերյալ խնդիրներում ունենք նավակ, որի արագությունը ափի նկատմամբ $\vec{v}_{ն}$ է, գետ, որում ջրի արագությունն ափի նկատմամբ $\vec{v}_{ջ}$ է: Հարաբերական արագության

$$\vec{v}_{նջ} = \vec{v}_{ն} - \vec{v}_{ջ} \tag{2.9}$$

բանաձևը այս դեպքում թույլ կտա որոշել նավակի արագությունը ջրի նկատմամբ կամ, որ նույնն է, նավակի արագությունը անշարժ ջրում (լճում), եթե հայտնի են նավակի և գետի ջրի արագություններն ափի նկատմամբ:

Նյութական կետի շարժումների դասակարգումը: Նյութական կետի շարժումներն ըստ հետագծի տեսակի բաժանվում են երկու մեծ խմբի՝ ***ուղղագիծ*** և ***կորագիծ*** շարժումների: ***Ուղղագիծ*** կոչվում են այն շարժումները, որոնց հետագիծն ուղիղ գիծ է: Մնացած բոլոր շարժումները կոչվում են ***կորագիծ*** շարժումներ: Կորագիծ հետագծի կոնկրետ տեսակից կախված կորագիծ շարժումները բաժանվում են շրջանագծային, էլիպտական, պարաբոլական, հիպերբոլական և այլ շարժման տեսակների:

Նյութական կետի շարժումները դասակարգվում են նաև ըստ շարժման օրենքի: Ըստ շարժման օրենքի՝ նյութական կետի շարժումները բաժանվում են երկու խմբի՝ ***ուղղագիծ հավասարաչափ*** և ***անհավասարաչափ*** շարժումների:

Ուղղագիծ հավասարաչափ շարժում է կոչվում այն շարժումը, որի ժամանակ ցանկացած հավասար ժամանակահատվածներում նյութական կետը կատարում է միևնույն տեղափոխությունը: Արագության գաղափարի օգնությամբ այս սահմանումը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ. ***Ուղղագիծ հավասարաչափ*** է կոչվում այն շարժումը, որի ժամանակ արագության վեկտորը մնում է հաստատուն: Ակնհայտ է, որ ուղղագիծ հավասարաչափ շարժման դեպքում արագացումը միշտ հավասար կլինի զրոյի:

Եթե շարժումը ուղղագիծ հավասարաչափ չէ, ապա այն կոչվում է ***անհավասարաչափ*** շարժում: Անհավասարաչափ շարժումների դասին է պատկանում ***կորագիծ հավասարաչափ*** շարժումը, որի դեպքում նյութական կետը մոդուլով հաստատուն արագությամբ շարժվում է ոչ ուղղագիծ հետագծով: Կորագիծ հավասարաչափ շարժման դեպքում, ի տարբերություն ուղղագիծ հավասարաչափ շարժման, արագացումը հավասար չէ զրոյի:

Անհավասարաչափ շարժումներն իրենց հերթին բաժանվում են ***հավասարաչափ արագացող*** (հավասարաչափ փոփոխական) և ***անհավասարաչափ փոփոխական*** շարժումների:

Շարժումը կոչվում է ***հավասարաչափ արագացող***, եթե ցանկացած հավասար ժամանակահատվածներում արագության վեկտորը միևնույն չափով է փոփոխվում: Արագացման գաղափարի օգնությամբ այս սահմանումը կարելի է վերաձևակերպել այսպես. շարժումը, որի դեպքում արագացումը զրո չէ և որպես վեկտոր մնում է հաստատուն կոչվում է ***հավասարաչափ փոփոխական*** կամ ***հավասարաչափ արագացող*** շարժում:

Անհավասարաչափ փոփոխական կոչվում են մնացած բոլոր շարժումները, որոնք չեն պատկանում ըստ շարժման օրենքի շարժումների դասակարգման վերևում սահմանված տեսակներին: Անհավասարաչափ փոփոխական շարժումների ժամանակ արագացման վեկտորը փոփոխական վեկտոր է:

2.1.2 Կինեմատիկական նկարագրության կոորդինատական եղանակ

Կոորդինատական եղանակի դեպքում նյութական կետի դիրքը տարածության մեջ որոշվում է երեք կոորդինատների միջոցով: Եթե ընտրել ենք դեկարտյան կոորդինատական համակարգը, ապա դիրքը տրվում է x, y, z կոորդինատներով: Շարժման օրենքն այս դեպքում $\{x(t), y(t), z(t)\}$ երեք սկալյար ֆունկցիաների համախումբն է: Եթե տրված է շարժման օրենքը, ապա արագության բաղադրիչները որոշվում են

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \tag{2.10}$$

բանաձևերով: Արագության մոդուլի համար կարող ենք գրել՝

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}: \tag{2.11}$$

Արագության ուղղությունը բնութագրվում է հետևյալ ուղղորդ կոսինուսներով՝

$$cos\alpha_v = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, cos\beta_v = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$
$$cos\gamma_v = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}: \tag{2.12}$$

Արագացման բաղադրիչների համար կգրենք՝

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y},\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}: \tag{2.13}$$

Արագացման մոդուլը կորոշվի

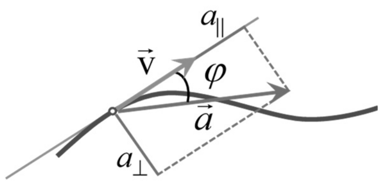
$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \tag{2.14}$$

բանաձևով, իսկ ուղղությունը ուղղորդ կոսինուսներով, որոնք տրվում են

$$cos\alpha_a = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, cos\beta_a = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \tag{2.15}$$

$$cos\gamma_a = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}:$$

առնչություններով:



Նկ.2-3 Արագացման պրոյեկցիաները և արագության հետ կազմած անկյունը:

Հաճախ անհրաժեշտ է լինում որոշել ժամանակի տվյալ պահին արագության և արագացման վեկտորներով կազմված φ անկյունը (Նկ.2-3): Դա կարելի է կատարել՝ օգտվելով սկալյար արտադրյալի որոշման բանաձևերից

$$\begin{aligned} &\vec{v}\cdot\vec{a} = v\,a\cos\varphi = \\ &= v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z : \end{aligned} \tag{2.16}$$

Արագության և արագացման վեկտորներով կազմված անկյան համար կստանանք՝

$$\cos\varphi = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}: \tag{2.17}$$

Ստացվածը թույլ է տալիս որոշել արագացման պրոյեկցիաներն արագության ուղղության վրա և արագությանն ուղղահայաց ուղղության վրա՝

$$\begin{aligned} a_{\|} &= \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ a_{\perp} &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - \frac{(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} : \end{aligned} \tag{2.18}$$

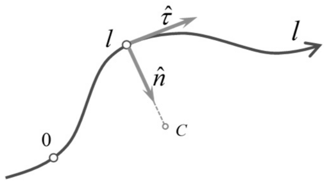
2.1.3 Կինեմատիկական նկարագրության «բնական» եղանակ

Մեխանիկայում հանդիպում են շարժմանը վերաբերող այնպիսի խնդիրներ, որոնցում հետագիծը նախապես հայտնի է: Կինեմատիկական նկարագրության «բնական» եղանակը կիրառելի է հենց այս տեսակ խնդիրների համար:

Դիտարկենք նյութական կետի շարժումը նախապես հայտնի հետագծով: Այս դեպքում նյութական կետի դիրքը միարժեքորեն կարելի է նկարագրել մեկ սկալյար մեծության միջոցով: Հետագծի մի որևէ կետ ընտրենք որպես հաշվարկման սկզբնակետ և նշանակենք O տառով: Ըստ մեր ցանկության ընտրենք հետագծի երկայնքով ուղղված հաշվարկման դրական ուղղությունը (Նկ.2-4): Նշենք, որ այս ուղղության ընտրությունը որևէ կերպ կապված չէ նյութական կետի հնարավոր շարժման ուղղության հետ: Հետագծի տվյալ A կետի դիրքը նկարագրենք l կոորդինատով, որը ցույց է տալիս հաշվարկման սկզբնակետի և տվյալ կետի միջև հետագծի հատվածի երկարությունը դրական նշանով, եթե կետը սկզբնակետից շեղված է մեր ընտրած դրական ուղղությամբ, և բացասական նշանով, եթե այն շեղված է դրական ուղղության հակառակ ուղղությամբ: Այս կոորդինատը ստացել է ***աղեղային կոորդինատ*** կամ աղեղային փոփոխական անվանումը: Որոշ գրքերում այն անվանում են «***դիրքաթիվ***», որը սակայն լեզվական իմաստով անընդունելի է, քանի որ դիրքաթվեր են ընդհանրապես բոլոր կոորդինատները, որոնք իսկապես թվայնորեն նկարագրում են կետի դիրքը:

«Բնական» եղանակի դեպքում շարժման օրենքը ժամանակից կախված $l(t)$ սկալյար ֆունկցիան է:

Դպրոցական մաթեմատիկայից ձեզ հայտնի է թվային առանցքի գաղափարը, որի համար սահմանվում է սկզբնակետը, դրական ուղղությունն ու հաշվարկման միավորը, և դա թույլ է տալիս այդ ուղղագիծ առանցքի յուրաքանչյուր կետի միարժեք համապատասխանության մեջ դնել տվյալ մեծության որոշակի թվային արժեք: Այժմ պատկերացրեք, որ այդ առանցքը ճկուն առանցք է և փռված է տվյալ շարժման հետագծի երկայնքով: Այս դեպքում մենք գործ ունենք կորագիծ թվային առանցքի հետ, որը ճիշտ նույն կերպ թույլ է տալիս հետագծի յուրաքանչյուր կետի միարժեք համապատասխանության մեջ դնել աղեղային l կոորդինատի որոշակի թվային արժեք:



Նկ.2-4 Աղեղային կոորդինատ: Նորմալ և տանգենցիալ ուղղություններ:

Պայմանավորվենք հետագծի տվյալ կետում շոշափողով ուղղված միավոր վեկտորը, որը ցույց է տալիս աղեղային կոորդինատի աճման ուղղությունը նշանակել $\hat{\tau}$-ով: Այս ուղղությունը կոչվում է տանգենցիալ ուղղություն, իսկ $\hat{\tau}$ միավոր վեկտորը՝ տանգենցիալ միավոր վեկտոր:

Հետագծի տվյալ կետից դեպի կորության կենտրոն ուղղված միավոր վեկտորը նշանակենք $\hat{n}$-ով: Այս ուղղությունը կոչվում է նորմալ ուղղություն, իսկ $\hat{n}$-ը՝ նորմալ միավոր վեկտոր: Նորմալ և տանգենցիալ միավոր վեկտորները փոխուղղահայաց վեկտորներ են:

Հաշվի առնելով, որ արագությունն ուղղված է հետագծի շոշափողով, կարող ենք գրել

$$\vec{v} = v_\tau \hat{\tau}, \tag{2.19}$$

որտեղ $v_\tau = \vec{v} \cdot \hat{\tau}$-ն նյութական կետի արագության պրեյեկցիան է տանգենցիալ ուղղության վրա: Աղեղային կոորդինատի հետ v_τ պրոյեկցիայի կապը կգրվի այսպես՝

$$v_\tau = \frac{dl}{dt}: \tag{2.20}$$

Արագության պրոյեկցիան դրական է, եթե $l(t)$ ֆունկցիան ժամանակից կախված աճող ֆունկցիա է, և բացասական, եթե $l(t)$-ն նվազող ֆունկցիա է:

Այսպիսով, կինեմատիկական նկարագրության «բնական» եղանակի դեպքում, եթե հայտնի է $l(t)$ շարժման օրենքը, ապա արագության վեկտորը որոշվում է

$$\vec{v} = \frac{dl}{dt}\hat{\tau} \tag{2.21}$$

բանաձևով:

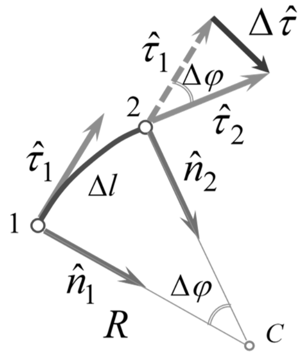
Օգտվելով արագացման սահմանումից՝ ստանանք բանաձև, որը թույլ կտա գտնել արագացումը, եթե տրված է $l(t)$ շարժման օրենքը: Այստեղ պետք է նկատի ունենալ, որ տանգենցիալ միավոր վեկտորն ընդհանուր դեպքում ժամանակից կախված, ըստ ուղղության, փոփոխվող վեկտոր է:

Արագացման համար կարող ենք գրել՝

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dl}{dt}\hat{\tau}\right) = \frac{d^2l}{dt^2}\hat{\tau} + \frac{dl}{dt}\frac{d\hat{\tau}}{dt} : \tag{2.22}$$

Հաշվի առնելով, որ տանգենցիալ միավոր վեկտորը ժամանակից կախված բարդ ֆունկցիա է՝ $\hat{\tau}(l(t))$, կարող ենք գրել՝

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\hat{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} : \tag{2.23}$$



Նկ.2-5 Տանգենցիալ միավոր վեկտորի փոփոխությունը:

Մնում է $d\hat{\tau}/dl$ ածանցյալն արտահայտել $l(t)$ շարժման օրենքով: Այդ նպատակով դիտարկենք հետագծի փոքր հատված (Նկ.2-5): Այդ հատվածին համապատասխանող կորության շառավիղը նշանակենք R-ով, իսկ կորության կենտրոնը՝ C-ով: Եզրային կետերում տանգենցիալ միավոր վեկտորները նշանակենք $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2$-ով, նորմալ միավոր վեկտորները՝ $\hat{n}_1, \hat{n}_2$-ով իսկ վերջիններիս միմյանց հետ կազմած անկյունը $\Delta\varphi$-ով: Նախ քննարկենք $d\hat{\tau}/dl$ վեկտորի մոդուլի հարցը: Նկատի ունենալով, որ ածանցյալի հաշվման դեպքում $\Delta l \to 0$, կարող ենք 1 և 2 կետերը իրար միացնող հատվածի երկարությունը փոխարինել Δl աղեղի երկարությամբ և օգտվելով նկարում պատկերված եռանկյունների նմանությունից՝ գրել՝

$$\frac{|\Delta\hat{\tau}|}{|\hat{\tau}|} = \frac{\Delta l}{R} \Rightarrow \left|\frac{d\hat{\tau}}{dl}\right| = \frac{1}{R} : \tag{2.24}$$

Այժմ քննարկենք $d\hat{\tau}/dl$ վեկտորի ուղղության հարցը: Պարզ է, որ $\Delta l \to 0$ դեպքում $\Delta\varphi \to 0$: Այստեղից հետևում է, որ $\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \Delta\hat{\tau}\}$ վեկտորներով կազմված հավասարասրուն եռանկյան մեջ սրունքի անկյունները կձգտեն $\pi/2$-ի: $\Delta\hat{\tau}$ վեկտորի սահմանային ուղղությունը կլինի ուղղահայաց $\hat{\tau}_1$ վեկտորին և, ինչպես երևում է Նկ.2-5-ից, ուղղված կլինի դեպի կորության կենտրոն, այսինքն՝ կունենա նորմալ ուղղություն: Տանգենցիալ վեկտորի ժամանակային ածանցյալի համար կունենանք՝

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dl}{dt}\,\hat{n} : \tag{2.25}$$

Ստացվածը տեղադրելով (2.22) բանաձևի մեջ՝ արագացման համար վերջնականորեն կգրենք՝

$$\vec{a} = \frac{d^2 l}{dt^2}\hat{\tau} + \frac{1}{R}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \hat{n} : \tag{2.26}$$

Այս բանաձևը թույլ է տալիս որոշել արագացումը, եթե հայտնի է տվյալ հետագծով նյութական կետի $l(t)$ շարժման օրենքը: Ինչպես երևում է, արագացումը երկու գումարելիով է ներկայացված, որոնցից մեկն ուղղված է շոշափողով, իսկ մյուսն ունի նորմալ ուղղություն: Արագացման նորմալ և տանգենցիալ բաղադրիչների համար կունենանք՝

$$a_\tau = \frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\,, a_n = \frac{1}{R}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{R} : \tag{2.27}$$

Նորմալ արագացումը դպրոցական դասընթացից ձեզ արդեն հայտնի կենտրոնաձիգ արագացումն է՝ $a_{կձ} = v^2/R$:

Արագացման մոդուլի համար կստանանք՝

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 l}{dt^2}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^4} : \tag{2.28}$$

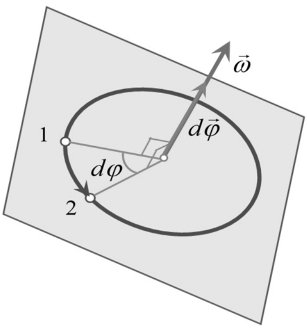
Նկատենք, որ նորմալ արագացումը միշտ ուղղված է հետագծի տվյալ կետի կորության կենտրոնի ուղղությամբ: Ինչ վերաբերում է տանգենցիալ արագացմանը, ապա այն կարող է լինել ինչպես $\hat{\tau}$ վեկտորին համուղղված, այնպես էլ նրան հակուղղված:

Տանգենցիալ արագացումն ունի $\hat{\tau}$-ի ուղղությունը, եթե մարմինը շարժվում է $\hat{\tau}$ ուղղությամբ և նրա արագության մոդուլը ժամանակի ընթացքում աճում է, կամ, եթե մարմինը շարժվում է $\hat{\tau}$-ին հակառակ ուղղությամբ և արագության մոդուլը ժամանակի ընթացքում նվազում է:

Տանգենցիալ արագացումը հակուղղված է $\hat{\tau}$-ին, եթե մարմինը շարժվում է $\hat{\tau}$ ուղղությամբ և նրա արագության մոդուլը ժամանակի ընթացքում նվազում է, կամ, եթե մարմինը շարժվում է $\hat{\tau}$-ին հակառակ ուղղությամբ և արագության մոդուլը ժամանակի ընթացքում աճում է:

2.2 Շրջանագծային շարժման կինեմատիկական նկարագրությունը

Դիտարկենք նյութական կետի շարժումը շրջանագծով, որի հարթությունը տարածության մեջ ունի կամայական դիրք: Շրջանագծի շառավիղը նշանակենք R-ով: Դիցուք ժամանակի t պահին նյութական կետը գտնվել է շրջանագծի 1 կետում, իսկ $t + dt$ պահին շրջանագծով պտտվելով հայտնվել է 2 կետում: Երկու դիրքերի շառավղային ուղղություններով կազմած անկյունը նշանակենք $d\varphi$-ով: Ակնհայտ է, որ միայն $d\varphi$ անկյան մեծությունը բավարար չէ տեղի ունեցած պտույտը միարժեք նկարագրելու համար: Այն միարժեք նկարագրելու համար լրացուցիչ պետք է իմանալ, ո՞ր հարթության մեջ է տեղի ունենում պտույտը և այդ հարթության մեջ ո՞ր ուղղությամբ է կատարվում այն: Անվերջ փոքր պտույտը բնութագրելու համար անհրաժեշտ է ներմուծել պտտման անկյան վեկտորի, կամ ինչպես ընդունված է ասել, անկյունային տեղափոխու-



Նկ.2-6 Անկյունային տեղափոխության և անկյունային արագության վեկտորները:

թյան վեկտորի գաղափարը: Անվերջ փոքր անկյունային տեղափոխության $d\vec{\varphi}$ վեկտորը սահմանվում է որպես վեկտոր, որի մոդուլը հավասար է պտտման անկյան ռադիանային չափին, իսկ ուղղությունն ուղղահայաց է պտտման հարթությանը և պտույտի ուղղության հետ կազմում է աջ պտուտակային համակարգ (Նկ.2-6):

Անկյունային արագության վեկտորը պտտման անկյան վեկտորի ածանցյալն է ըստ ժամանակի՝

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} : \tag{2.29}$$

Անկյունային արագության վեկտորն ուղղված է $d\vec{\varphi}$ անվերջ փոքր անկյունային տեղափոխության վեկտորի ուղղությամբ, այսինքն՝ պտտման առանցքի երկայնքով, պտույտի ուղղության հետ աջ համակարգ կազմող ուղղությամբ:

Անկյունային արագացման վեկտորը պտտման անկյունային արագության վեկտորի ածանցյալն է ըստ ժամանակի կամ, որ նույնն է, պտտման անկյան վեկտորի երկրորդ կարգի ածանցյալն է՝

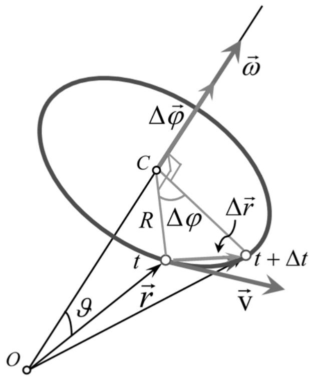
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} : \tag{2.30}$$

Գծային և անկյունային մեծությունների համանմանությունը: Պտույտը բնութագրող $d\vec{\varphi}$ անկյունային տեղափոխության, $\vec{\omega}$ անկյունային արագության և $\vec{\varepsilon}$ անկյունային արագացման գաղափարները ներմուծելուց հետո, նախկինում մեր սահմանած $d\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ մեծությունները վերանվանվում են համապատասխանաբար՝ գծային տեղափոխություն, գծային արագություն և գծային արագացում:

	Գծային	Անկյունային
Տեղափոխություն	$d\vec{r}$	$d\vec{\varphi}$
Արագություն	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}$
Արագացում	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\vec{\varphi}}$

Սահմանումներից պարզ է դառնում, որ գծային և անկյունային կինեմատիկական մեծությունների միջև առկա է որոշակի համանմանություն: Այդ համանմանությունը ներկայացնենք աղյուսակի տեսքով:

Գծային և անկյունային մեծությունների կապը: Գտնենք գծային և անկյունային մեծությունների կապը շրջանագծային շարժման դեպքում: Պարզության համար կոորդինատների համակարգի սկզբնակետը ընտրենք պտտման առանցքի վրա, ինչպես այն պատկերված է Նկ.2-7-ում: Նկատենք, որ սկզբնակետի այսպիսի ընտրության դեպքում շարժման ընթացքում նյութական կետի շառավիղ վեկտորի r մոդուլը, ինչպես նաև պտտման առանցքի հետ նրա կազմած ϑ անկյունը մնում են անփոփոխ: $[t, t+dt]$ անվերջ փոքր ժամանակահատվածում նյութական կետի կատարած գծային և անկյունային տեղափոխությունները նշանակենք համապատասխանաբար՝



Նկ.2-7 Գծային և անկյունային մեծությունների կապը:

$d\vec{r}$ -ով և $d\vec{\varphi}$-ով: Շրջանագծի շառավիղը կլինի՝ $R = r\sin\vartheta$: Նախ քննարկենք փոքր, սակայն վերջավոր աճերի միջև կապը: Փոքր անկյունների դեպքում լարի երկարությունը կարող ենք փոխարինել աղեղի երկարությամբ և գրել $|\Delta\vec{r}| \approx R\Delta\varphi = r\Delta\varphi\sin\vartheta$: Քանի որ ϑ-ն $\vec{r}$ և $\Delta\vec{\varphi}$ վեկտորներով կազմված անկյունն է, ուրեմն կարող ենք գրել՝ $|\Delta\vec{r}| \approx |\vec{r}\times\Delta\vec{\varphi}|$: Նկարից երևում է, որ $\Delta\vec{\varphi}\to 0$ դեպքում $\Delta\vec{r}$ վեկտորի ուղղությունը ձգտում է շոշափողի ուղղությանը, ավելի ստույգ համընկնում է $\vec{v}$ գծային արագության ուղղության հետ: $\vec{r}\times\Delta\vec{\varphi}$ վեկտորը ուղղված կլինի $(\vec{r}, \Delta\vec{\varphi})$ հարթությանն ուղղահայաց, իսկ այդ հարթության ուղղահայացը հենց շոշափողն է: Մնում է աջ ձեռքի կանոնով որոշել, թե այդ վեկտորը շոշափողով դեպի որ կողմ է ուղղված: Հեշտ է ստուգել, որ $\vec{r} \times \Delta\vec{\varphi}$ վեկտորը հակուղղված է $\vec{v}$ վեկտորին, հետևաբար նաև անվերջ փոքր $d\vec{r}$ տեղափոխությանը: Ստացվածը թույլ է տալիս անվերջ փոքր տեղափոխությունների կապը գրել այսպես՝

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} : \tag{2.31}$$

Գծային և անկյունային տեղափոխությունների (2.31) կապը թույլ է տալիս գծային ու անկյունային արագությունների կապը գրել այս տեսքով՝

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} : \tag{2.32}$$

Այժմ գծային արագացումն արտահայտենք անկյունային բնութագրերով: Օգտվենք արագացման սահմանումից և գրենք՝

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}): \tag{2.33}$$

Համոզվենք, որ առաջին գումարելին տանգենցիալ արագացումն է: Իսկապես, անկյունային արագությունը շրջանագծային շարժման դեպքում ուղղված է պտտման առանցքով և պտույտի ուղղության հետ կազմում է աջ պտուտակային համակարգ: Ակնհայտ է, որ անկյունային արագության $d\vec{\omega}$ աճը ևս կլինի պտտման առանցքի վրա, հետևաբար այդ առանցքի վրա կլինի նաև $\vec{\varepsilon}$ անկյունային արագացումը: Այն կունենա $\vec{\omega}$ վեկտորի ուղղությունը, եթե անկյունային արագության մոդուլը ժամանակի ընթացքում աճող է, և $\vec{\omega}$-ին հակառակ ուղղություն, եթե անկյունային արագության մոդուլը նվազող է: Ամեն դեպքում կարող ենք պնդել, որ $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ և $\vec{\omega} \times \vec{r}$ վեկտորները լայն իմաստով զուգահեռ են: Համաձայն (2.32) բանաձևի՝ $\vec{\omega} \times \vec{r}$ վեկտորը գծային արագությունն է, հետևաբար կարող ենք եզրակացնել, որ $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$-ը տանգենցիալ վեկտոր է:

Ցույց տանք, որ (2.33) բանաձևի երկրորդ գումարելին նորմալ արագացումն է: Շառավիղ վեկտորը ներկայացնենք առանցքին ուղղահայաց և առանցքին զուգահեռ երկու բաղադրիչների գումարի տեսքով՝ $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$: Նշված գումարելին կգրվի

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\parallel}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp})$$

տեսքով: Զուգահեռ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի զրո լինելու պայմանից կհետևի, որ առաջին գումարելին հավասար է զրոյի և կունենանք՝ $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\perp})$: «Բաց մինուս ցաբ» կանոնը կիրառելով և այս դեպքում էլ նկատի ունենալով, որ $\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{\perp}=0$՝ վերջնականապես կստանանք

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=-\omega^2\,\vec{r}_{\perp}\ : \tag{2.34}$$

Նկատելով, որ $\vec{r}_{\perp}$ վեկտորը պտույտի հարթության մեջ գտնվող վեկտորն է, որը շրջանագծի C կենտրոնը նյութական կետին է միացնում և հաշվի առնելով (2.34)-ում մինուս նշանի առկայությունը, կգանք եզրակացության, որ $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$-ը կենտրոնաձիգ (նորմալ) արագացումն է: Արագացման այս բաղադրիչի մոդուլի համար կստանանք դպրոցական դասընթացից ձեզ արդեն հայտնի կենտրոնաձիգ արագացման $a_{կձ}=\omega^2 R$ բանաձևը:

Վերջում քննարկենք շրջանագծային շարժման դեպքում արագացման և արագության վեկտորների կազմած անկյան հարցը: Եթե $\vec{\varepsilon}$ անկյունային արագացման պրոյեկցիան անկյունային արագության ուղղության վրա նշանակենք ε_{ω}, ապա տանգենցիալ արագացման համար կարող ենք գրել՝ $\vec{a}_{\tau}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}=(\vec{\omega}\times\vec{r})\varepsilon_{\omega}/\omega=\frac{\vec{v}\varepsilon_{\omega}}{\omega}$: Այստեղից կհետևի, որ արագացման պրոյեկցիան արագության ուղղության վրա հավասար է $a_v=v\varepsilon_{\omega}/\omega=\varepsilon_{\omega}R$: Նորմալ արագացումը միշտ ուղղված է դեպի շրջանագծի կենտրոն և ունի $a_n=\omega^2 R$ մոդուլ: Արագացման և արագության վեկտորներով կազմված α անկյան համար կունենանք՝

$$tg\alpha=\frac{a_n}{a_{\tau}}=\frac{\omega^2}{\varepsilon_{\omega}}=\frac{\omega^2}{\dot{\omega}}\ :$$

Քանի որ այս դեպքում շարժման օրենքը տրվում է $\varphi(t)$ ֆունկցիայով, ապա գծային արագացման և արագության վեկտորներով կազմված անկյան համար վերջնականապես կստանանք՝

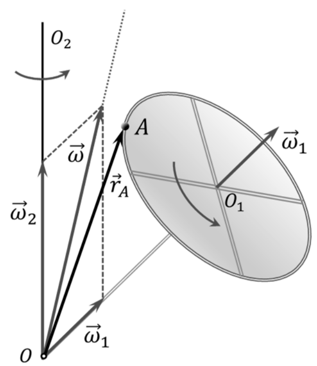
$$tg\alpha=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\Big/\frac{d^2\varphi}{dt^2}\ : \tag{2.35}$$

Արագացման և արագության վեկտորներով կազմված անկյունը սուր անկյուն է, եթե պտույտի անկյունային արագության մոդուլը ժամանակի ընթացքում աճում է և բութ անկյուն, եթե այն նվազում է: Մասնավոր դեպքում, եթե պտույտը հավասարաչափ է՝

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const \;\Rightarrow\; \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0\,,$$

Կստանանք $tg\alpha = \infty$, այսինքն՝ $\alpha = \pi/2$: Այս դեպքում $\vec{a}_\tau = 0$ և արագացումը մաքուր կենտրոնաձիգ է:

Անկյունային արագության վեկտորների գումարումը: Ինչպես տեսանք պտույտը նկարագրելու համար անհրաժեշտ եղավ ներմուծել անկյունային արագության վեկտորի գաղափարը: Ցույց տանք, որ՝ գծային արագության վեկտորների նման, անկյունային արագության վեկտորների համար ևս իրավացի է վեկտորական գումարման կանոնը: Եթե նյութական կետը $\vec{\omega}_1$ անկյունային արագությամբ պտտվում է մի առանցքի շուրջը, որն իր հերթին $\vec{\omega}_2$ անկյունային արագությամբ պտտվում է տվյալ համակարգում անշարժ մեկ այլ առանցքի շուրջը, ապա այս երկու պտույտները համարժեք են տվյալ պահին մեկ առանցքի շուրջը $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ անկյունային արագությամբ պտույտի: Դրանում համոզվենք Նկ.2-8-ում բերված օրինակի վրա: Նկարում պատկերված A նյութական կետը $\vec{\omega}_1$ անկյունային արագությամբ պտտվում է OO_1 առանցքի շուրջը: OO_1 առանցքն իր հերթին $\vec{\omega}_2$ անկյունային արագությամբ պտտվում է OO_2 առանցքի շուրջը: O կետը առանցքների հատման կետն է:



Նկ.2-8 Անկյունային արագությունների գումարումը:

Նյութական կետի շառավիղ վեկտորը O սկզբնակետի նկատմամբ նշանակենք $\vec{r}_A$-ով: Դիցուք $[t, t+dt]$ անվերջ փոքր ժամանակահատվածում նյութական կետի OO_1 առանցքի շուրջը պտույտով պայմանավորված անկյունային տեղափոխության վեկտորը $d\vec{\varphi}_1$ է: Այդ պտույտով պայմանավորված գծային տեղափոխության վեկտորը կլինի՝ $d\vec{r}_1 = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r}_A$: Այդ նույն ժամանակահատվածում նյութական կետը կպտտվի OO_2 առանցքի շուրջը $d\vec{\varphi}_2$ անկյունով, որով պայմանավորված գծային տեղափոխության վեկտորը կլինի՝ $d\vec{r}_2 = d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r}_A$: Ուշադրություն դարձնենք, որ երկու պտույտների համար էլ շառավիղ վեկտորը նույնն է: Օգտվելով գծային տեղափոխությունների գումարման կանոնից՝ կգրենք՝ $d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = (d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2) \times \vec{r}_A$: Ստացվածը ցույց է տալիս, որ արդյունարար $d\vec{\varphi}$ անկյունային տեղափոխությունը $d\vec{\varphi}_1$ և $d\vec{\varphi}_2$ տեղափոխությունների հետ կապված է $d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$ առնչությամբ: Անկյունային տեղափոխությունների այս կապից կհետևի՝

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \tag{2.36}$$

անկյունային արագության վեկտորների գումարման կանոնը:

Նկատենք, որ վերևում նկարագրած երկու պտույտների անկյունային արագությունների մոդուլով հաստատուն լինելու պարագայում նույնիսկ, $\vec{\omega}_1$ անկյունային արագության ուղղության փոփոխական լինելու շնորհիվ, նյութական կետի պտույտի անկյունային արագացումը կլինի զրոյից տարբեր:

2.3 Խնդիրների լուծման օրինակներ

Նյութական կետի շարժման կինեմատիկական նկարագրությանը վերաբերող խնդիրների լուծման օրինակներ բերելուց առաջ որոշ դիտարկումներ ներկայացնենք ֆիզիկայի՝ այդ թվում նաև մեխանիկայի, խնդիրների լուծման վերաբերյալ:

Վերջին շրջանում բուհական ընդունելության քննությունների արդյունքների համակարգչային գնահատման պահանջներից ելնելով՝ խնդիրների տվյալներն ընտրվում են այնպես, որ ստացված պատասխանները լինեն վերջավոր թվեր՝ նիշերի թույլատրելի առավելագույն քանակով: Այդ հանգամանքը թյուր կարծիք է ձևավորել աշակերտների և ուսանողների մոտ և սխալ տպավորություն ստեղծել, թե ֆիզիկայի բոլոր խնդիրներն անպայման պետք է ունենան միարժեք և վերջավոր տասնորդական կոտորակներով ներկայացվող պատասխաններ: Մինչդեռ՝ իրականությունը բոլորովին այլ է, քանի որ ֆիզիկայում հանդիպող խնդիրները կարող են ինչպես բազմարժեք, այնպես էլ անվերջ տասնորդական կոտորակով ներկայացվող, իռացիոնալ պատասխաններ ունենալ: Նման դեպքերում խնդրի պատասխանների թվային արժեքները կլորացվում են՝ պահպանելով խնդրի լուծման վրա դրվող ճշգրտության չափանիշը:

Խնդրի լուծումն անպայմանորեն պետք է կատարվի յուրաքանչյուր քայլը պարզաբանող բացատրությամբ, կարիքի դեպքում նաև պարզաբանող նկարով կամ գրաֆիկով՝ նշելով, թե ֆիզիկայի կամ մաթեմատիկայի՝ այդ թվում նաև երկրաչափության, որ կանոնից կամ օրենքից օգտվեցիք այս կամ այն արտահայտությունը գրելիս:

Պետք է նկատի ունենալ, որ ոչ բոլոր խնդիրների դեպքում է, որ հնարավոր կլինի անալիտիկ, այսինքն՝ բանաձևային, լուծում գտնել: Այն դեպքերում, երբ բանաձևային լուծումը գոյություն չունի կամ նրա գտնելը շատ խճճված և աշխատատար է, խնդիրը լուծվում է թվային եղանակով՝ համակարգչային համապատասխան ծրագրի միջոցով: Ստորև բերվող խնդիրների լուծման օրինակների շարքում մենք կանդրադառնանք նաև այնպիսի խնդրի, որի լուծման համար անհրաժեշտ կլինի կիրառել մինչև այժմ ձեզ չհանդիպած այնպիսի եղանակ, ինչպիսին թվային եղանակն է: Այդ խնդրում կբերենք քայլերի տրամաբանական շղթան, որն իրականացնելով համակարգչի օգնությամբ՝ կարելի է գտնել խնդրի թվային լուծումը:

2-1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ հարթության մեջ շարժվող նյութական կետի շարժման օրենքը տրվում է $\boldsymbol{x = At}, \boldsymbol{y = Bt^2}$ հավասարումներով, որտեղ $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ մեծություններն ինչ-որ հաստատուններ են: Գտե՛ք հետագծի հավասարումը, արագացման տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչները, արագացման՝ արագության հետ կազմած անկյան և հետագծի կորության շառավղի $\boldsymbol{x}$ կոորդինատից կախման $\boldsymbol{\alpha(x)}$ և $\boldsymbol{R_c(x)}$ ֆունկցիաները:

Լուծում: Շարժման օրենքից արտաքսելով ժամանակը՝ կստանանք

$$y = \frac{B}{A^2} x^2$$

հետագծի հավասարումը և կպարզենք, որ նյութական կետը շարժվում է պարաբոլով: $B > 0$ դեպքում պարաբոլի ճյուղերն ուղղված կլինեն y առանցքի դրական ուղղությամբ, $B < 0$ դեպքում՝ բացասական ուղղությամբ:

Գտնենք արագության և արագացման պրոյեկցիաներն ու մոդուլները՝

$$v_x = \dot{x} = A, v_y = \dot{y} = 2Bt, v = \sqrt{A^2 + 4B^2t^2},$$

$$a_x = \ddot{x} = 0, a_y = \ddot{y} = 2B: a = 2|B|:$$

Արագացման տանգենցիալ բաղադրիչի համար կունենանք՝

$$a_\tau = \frac{\vec{a}\vec{v}}{v} = \frac{4B^2t}{\sqrt{A^2 + 4B^2t^2}}:$$

Արագացման նորմալ բաղադրիչը կարող ենք որոշել՝ օգտվելով $a_n = \sqrt{a^2 - {a_\tau}^2}$ բանաձևից՝

$$a_n = \frac{2|AB|}{\sqrt{A^2 + 4B^2t^2}}:$$

Արագացման և արագության վեկտորներով կազմված α անկյունը կգտնենք՝ օգտվելով սկալյար արտադրյալի բանաձևից՝

$$cos\alpha = \frac{a_\tau}{a} = \frac{2|B|t}{\sqrt{A^2 + 4B^2t^2}} = \frac{2|B|x}{\sqrt{4B^2x^2 + A^4}}:$$

Հետագծի կորության շառավղի համար կունենանք՝

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(4B^2x^2 + A^4)^{3/2}}{2A^4|B|}:$$

2-2. **(x, y) հարթության մեջ շարժվող նյութական կետի արագության վեկտորը տրվում է $\vec{v} = A\hat{\imath} + Bx\hat{\jmath}$ բանաձևով, որտեղ A և B մեծությունները ինչ-որ հաստատուններ են, իսկ $\hat{\imath}$-ն և $\hat{\jmath}$-ն համապատասխանաբար՝ x և y առանցքների օրթերը: Հայտնի է, որ ժամանակի սկզբնապահին նյութական կետը գտնվել է $x = 0, y = 0$ կետում: Գտե՛ք շարժման օրենքը, հետագծի հավասարումը,**

նորմալ և տանգենցիալ արագացումները, ինչպես նաև արագացման և արագության վեկտորներով կազմված անկյունը:

Լուծում: Օգտվենք արագության սահմանումից՝ $v_x = \frac{dx}{dt} = A$: Ինտեգրելով կստանանք՝

$$x(t) = \int A dt = At + const_1:$$

Քանի որ $x(0) = 0$, ուրեմն $const_1 = 0$ և կունենանք՝

$$x = At:$$

Արագության y պրոյեկցիայի $v_y = \frac{dy}{dt} = Bx$ բանաձևի մեջ տեղադրելով x կոորդինատի ժամանակային կախվածության համար ստացածը՝ կունենանք՝

$$v_y = \frac{dy}{dt} = ABt \implies y(t) = \int ABtdt = AB\frac{t^2}{2} + const_2:$$

$y(0) = 0$ սկզբնական պայմանից կհետևի, որ $const_2 = 0$ և կգրենք

$$y = AB\frac{t^2}{2}:$$

Արագության մոդուլը կլինի՝ $v = |A|\sqrt{1 + B^2t^2}$:

Շարժման օրենքից արտաքսելով ժամանակը՝ կստանանք հետագծի հավասարումը՝

$$y = B\frac{x^2}{2A} :$$

Պարզեցինք, որ նյութական կետը շարժվում է պարաբոլով: Արագացման պրոյեկցիաների համար կունենանք՝

$$a_x = \dot{v}_x = 0, a_y = \dot{v}_y = AB:$$

Արագացման տանգենցիալ բաղադրիչի համար կունենանք՝

$$a_\tau = \frac{\vec{a}\vec{v}}{v} = \frac{AB^2t}{\sqrt{1 + B^2t^2}},\ a_n = \sqrt{a^2 - {a_\tau}^2} = \frac{|AB|}{\sqrt{1 + B^2t^2}} :$$

Կորության շառավղի համար կստանանք՝

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{|A|}{|B|}(1 + B^2t^2)^{3/2}, R_c = \frac{(A^2 + B^2x^2)^{3/2}}{A^2|B|} :$$

2-3. Նյութական կետը (x, y) հարթության մեջ կատարում է հավասարաչափ արագացող շարժում a արագացմամբ: Ժամանակի

սկզբնապահին նյութական կետի կոորդինատներն են x_0, y_0, իսկ արագությունը՝ $\vec{v}_0$, որն արագացման վեկտորի հետ կազմում է α_0 անկյուն: Գտե՛ք շարժման օրենքը, հետագծի հավասարումը, արագությունը, արագացման տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչները, արագության և արագացման կազմած անկյունը, կորության շառավիղը ժամանակի t պահին:

Լուծում: Կոորդինատական համակարգի y առանցքն ուղղենք արագացման վեկտորի ուղղությամբ, իսկ x առանցքը նրան ուղղահայաց այնպես, որ սկզբնական արագության պրոյեկցիան լինի դրական: Արագացման պրոյեկցիաները կլինեն՝

$$a_x = 0, a_y = a :$$

Արագության պրոյեկցիաների համար կստանանք՝

$$\dot{v}_x = a_x = 0 \implies v_x = const = v_0 sin\alpha_0,$$

$$\dot{v}_y = a_y = a \implies v_y = at + v_0 cos\alpha_0 :$$

Արագության մոդուլը կլինի՝

$$v = \sqrt{(at + v_0 cos\alpha_0)^2 + (v_0 sin\alpha_0)^2}:$$

Կոորդինատների համար կստանանք՝

$$\dot{x} = v_x = v_0 sin\alpha_0 \implies x = x_0 + v_0 t\ sin\alpha_0,$$

$$\dot{y} = v_y = at + v_0 cos\alpha_0 \implies y = y_0 + v_0 t\ cos\alpha_0 + at^2/2:$$

Ստացված $\{x(t), y(t)\}$ ֆունկցիաների զույգը շարժման օրենքն է, որից արտաքսելով ժամանակը՝ կստանանք հետագծի հավասարումը՝

$$y = y_0 + ctg\alpha_0(x - x_0) + \frac{a(x - x_0)^2}{2{v_0}^2 sin^2\alpha_0} :$$

Ինչպես տեսնում ենք հետագիծը պարաբոլ է, որի ճյուղերն ուղղված են y առանցքի դրական ուղղությամբ: Գտնենք $y(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի x_m կետը և նրան համապատասխանող $y_m = y(x_m)$ արժեքը: Մինիմումի $y' = 0$ պայմանից օգտվելով, կստանանք՝

$$x_m = x_0 - \frac{{v_0}^2 sin2\alpha_0}{2a}, y_m = y_0 - \frac{{v_0}^2 cos^2\alpha_0}{2a} :$$

Արագացման տանգենցիալ բաղադրիչի համար կունենանք՝

$$a_\tau = \frac{\vec{a}\vec{v}}{v} = \frac{a v_y}{v} = \frac{a(at + v_0 cos\alpha_0)}{\sqrt{(at + v_0 cos\alpha_0)^2 + (v_0 sin\alpha_0)^2}},$$

Իսկ նորմալ բաղադրիչի համար՝

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2} = \frac{av_0 sin\alpha_0}{\sqrt{(at + v_0 cos\alpha_0\,)^2 + (v_0 sin\alpha_0\,)^2}}:$$

Արագության և արագացման վեկտորներով կազմված α անկյունը կորոշվի

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{v_0 sin\alpha_0}{at + v_0 cos\alpha_0}$$

բանաձևով: Կորության շառավղի համար կստանանք՝

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{[(at + v_0 cos\alpha_0\,)^2 + (v_0 sin\alpha_0\,)^2]^{3/2}}{av_0 sin\alpha_0}:$$

2-4. Երկու նյութական կետեր շարժվում են $\vec{v}_1$ և $\vec{v}_2$ հաստատուն արագություններով: Ժամանակի սկզբնական պահին նրանց շառավիղ վեկտորները $\vec{r}_{01}$ և $\vec{r}_{02}$ են: Այս չորս վեկտորների միջև ի՞նչ պայմանի բավարարման դեպքում նյութական կետերը կբախվեն իրար: Գտե՛ք բախման ժամանակի $t_{բախ}$ պահը և բախման կետի $\vec{r}_{բախ}$ շառավիղ վեկտորը:

Լուծում: Նյութական կետերի շարժման օրենքները կլինեն՝

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{01} + \vec{v}_1 t\;, \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{02} + \vec{v}_2 t\;:$$

Բախում կլինի, եթե ժամանակի միևնույն $t_{բախ}$ պահին նյութական կետերը գտնվեն տարածության միևնույն $\vec{r}_{բախ}$ կետում՝

$$\vec{r}_1(t_{բախ}) = \vec{r}_2(t_{բախ}) = \vec{r}_{բախ}:$$

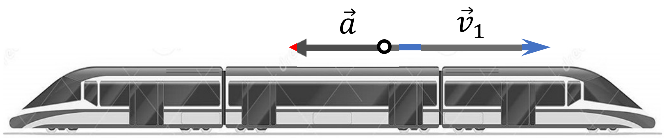
Այստեղից կունենանք՝ $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)t_{բախ} = \vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}$: Ստացվածից երևում է, որ բախում կլինի եթե $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ և $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02})$ երկու վեկտորները համուղղված լինեն:

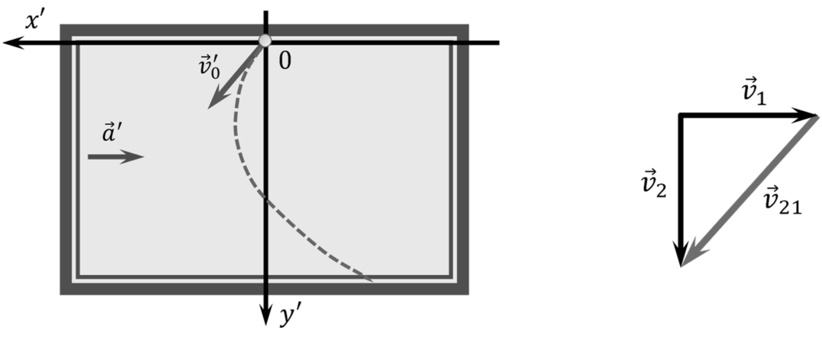
$$t_{բախ} = |\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}|/|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|, \vec{r}_{բախ} = \vec{r}_{01} + \vec{v}_1\,|\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}|/|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|:$$

2-5. Հորիզոնական ուղղությամբ v_1 արագությամբ շարժվող գնացքը սկսում է հավասարաչափ դանդաղող շարժում կատարել, որի արագացման մոդուլը a է: Գտե՛ք արգելակման սկզբնական

պահին գնացքի կողապակու վրա հայտնված անձրևի կաթիլի հետագիծը, եթե հայտնի է, որ անձրևի կաթիլները ուղղաձիգով են ընկնում և ունեն երկրի նկատմամբ հաստատուն v_2 արագություն:

Լուծում: Պայմանավորվենք կողապակու հետ կոշտ ամրացված կոորդինատական համակարգի x' առանցքն ընտրել հորիզոնական և գնացքի շարժման ուղղությանը հակառակ ուղղված, իսկ y' առանցքը՝ ուղղաձիգով ներքև ուղղված (տե՛ս Նկ.2-9): Կհամարենք, որ կաթիլը գնացքի արգելակման սկզբնական պահին հայտնվել է կոորդինատների համակարգի սկզբնակետում:





Նկ.2-9

Առաջին հերթին պետք է որոշել կաթիլի կինեմատիկական մեծությունները գնացքի համակարգում: Կաթիլի սկզբնական արագությունը գնացքի համակարգում կլինի՝ $\vec{v}'_0 = \vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$: Այս խնդրում $\vec{v}_1$ և $\vec{v}_2$ վեկտորների ունեցած ուղղությունները հաշվի առնելով՝ կարող ենք գրել՝

$$v'_{0x} = v_1, v'_{0y} = v_2 :$$

Գնացքի համակարգում կաթիլի արագացումը կլինի՝ $\vec{a}' = \dot{\vec{v}}_{12} = -\dot{\vec{v}}_1 = -\vec{a}$: Արագացման պրոյեկցիաների համար կստանանք՝ $a'_x = -a, \vec{a}'_y = 0$: Պարզ դարձավ, որ կաթիլը գնացքի կողապակու համակարգում կատարում է հավասարաչափ արագացող շարժում, որի ժամանակ սկզբնական արագության ուղղությունը չի համընկնում հորիզոնական ուղղված արագացման ուղղության հետ:

Օգտվելով ստացվածից՝ կարող ենք կաթիլի շարժման օրենքը գրել հետևյալ տեսքով՝

$$x' = v_1 t - a\frac{t^2}{2}\ , y' = v_2 t\ :$$

Շարժման օրենքից արտաքսելով ժամանակը՝ հետագծի հավասարման համար կստանանք՝

$$x' = -\frac{a}{2{v_2}^2}{y'}^2 + \frac{v_1}{v_2}y':$$

Պարզեցինք, որ կաթիլը կողմապակու վրա կշարժվի պարաբոլական հետագծով, որի ճյուղերը հակառակ են ուղղված x' առանցքին, այսինքն՝ ուղղված են գնացքի շարժման ուղղությամբ (տե՛ս Նկ.2-9): Կաթիլի հորիզոնական ուղղությամբ շարժումը սկզբնական շրջանում կլինի գնացքի շարժմանը հակառակ, մի ինչ-որ $t_{շրջ}$ պահի տեղի կունենա կաթիլի հորիզոնական ուղղությամբ շարժման շրջադարձ: Շրջադարձի ժամանակի $t_{շրջ}$ պահին կբավարարվի $dx'/dt = 0$ պայմանը, որտեղից կգտնենք՝

$$t_{շրջ} = \frac{v_1}{a}\ :$$

Կարող ենք գտնել նաև շրջադարձի կետի կոորդինատները՝

$$x'_{շրջ} = x'(t_{շրջ}) = \frac{{v_1}^2}{2a}\ , y'_{շրջ} = y'(t_{շրջ}) = \frac{v_1 v_2}{a}\ :$$

Կաթիլը որոշ ժամանակ հետո հայտնվում է սկզբնական դիրքին համապատասխանող նույն ուղղաձիգի վրա: Այդ պահը կորոշվի՝ $x'(t_{ու}) = 0$: Այստեղից կստանանք՝

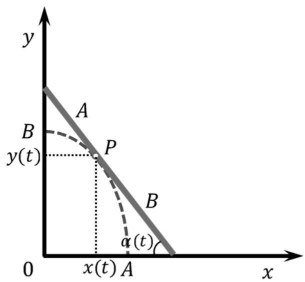
$$t_{\text{ու}} = \frac{2v_1}{a} = 2t_{\text{շրջ}}:$$

Կաթիլի ուղղաձիգ տեղափոխությունն այդ պահին հավասար կլինի՝

$$y'_{\text{ու}} = y'(t_{\text{ու}}) = \frac{v_1 v_2}{a} = 2y'_{\text{շրջ}}:$$

2-6. Չդեֆորմացվող ձողի երկու ծայրերը կարող են ազատ սահել ուղիղ անկյան կողմերով, ինչպես պատկերված է Նկ.2-10-ում: Գտե՛ք ձողը *A* և *B* երկարությամբ հատվածների բաժանող *P* կետի հետագծի հավասարումը:

Լուծում: Կոորդինատական համակարգի սկզբնակետը տեղադրենք ուղիղ անկյան գագաթում և առանցքներն ուղղենք ուղիղ անկյան կողմերով: Ժամանակի որևէ t պահի ձողի կազմած սուր անկյունը x առանցքի հետ նշանակենք $\alpha(t)$-ով: Նկարից օգտվելով՝ ձողի P կետի կոորդինատների ժամանակային կախվածությունները կգրենք այսպես՝



Նկ.2-10

$$x(t) = A\cos\alpha(t)\ , y(t) = B\sin\alpha(t)\ :$$

Ժամանակը արտաքսելով, կստանանք կոորդինատների փոխադարձ կապը, որը կլինի հետագծի հավասարումը՝

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\ :$$

Ինչպես տեսնում ենք կետը շարժվում է էլիպտական հետագծով, որն ունի A և B կիսաառանցքներ: Էլիպսը ձգված կլինի այն առանցքի երկայնքով, որին հպվող ձողի բաժնեմասն ավելի փոքր կլինի: Նկատենք, որ ձողի միջնակետի հետագիծը կլինի շրջանագիծ, որի տրամագիծը հավասար է ձողի երկարությանը:

2-7. Նյութական կետը շարժվում է $\boldsymbol{x = Asin(Bt^2)}$ և $\boldsymbol{y = Acos(Bt^2)}$ օրենքով, որտեղ $\boldsymbol{A, B}$-ն հաստատուններ են: Ցույց տվե՛ք, որ հետագիծը շրջանագիծ է և գտե՛ք այդ շրջանագծի շառավիղը: Գտե՛ք արագության և արագացման պրոյեկցիաները $\boldsymbol{x, y}$ առանցքների վրա, տանգենցիալ և նորմալ արագացումները, արագացման և արագության վեկտորներով կազմված անկյունը ժամանակի $\boldsymbol{t}$ պահին: Գտե՛ք նաև պտույտի անկյունային արագությունը և գրե՛ք շարժման օրենքը պտույտի անկյան միջոցով՝ $\boldsymbol{\varphi(t)}$, եթե հայտնի է, որ ժամանակի սկզբնապահին այն եղել է $\boldsymbol{\varphi_0}$:

Լուծում: Շարժման օրենքից ժամանակը արտաքսելով կստանանք հետագծի հավասարումը: Հիշելով $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ նույնությունը՝ կստանանք՝

$$x^2 + y^2 = A^2$$

հետագծի հավասարումը, որը $R = A$ շառավղով շրջանագծի հավասարումն է: Արագության համար կստանանք՝

$$v_x = \dot{x} = 2ABtcos(Bt^2), v_y = \dot{y} = -2ABtsin(Bt^2), v = 2ABt:$$

Արագացումը կլինի՝

$$a_x = \dot{v}_x = 2ABcos(Bt^2) - 4AB^2t^2sin(Bt^2),$$
$$a_y = \dot{v}_y = -2ABsin(Bt^2) - 4AB^2t^2cos(Bt^2),$$
$$a = 2AB\sqrt{1 + 4B^2t^4}:$$

Արագացման տանգենցիալ բաղադրիչը կարելի է գտնել $a_\tau = (\vec{a}\vec{v})/v$ բանաձևի միջոցով կամ՝ ածանցելով արագության մոդուլը: Այս խնդրում երկրորդ եղանակը գերադասելի է՝ $a_\tau = \dot{v} = 2AB$:

Արագացման նորմալ բաղադրիչի համար կունենանք՝

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2} = 4AB^2t^2:$$

Արագության և արագացման վեկտորներով կազմված անկյան համար կստանանք՝

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = 2Bt^2:$$

Համոզվենք, որ կորության շառավիղը կստացվի հաստատուն և հավասար A-ի՝

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(2ABt)^2}{4AB^2t^2} = A:$$

Պտտման անկյունային արագության համար կունենանք՝

$$\omega = \frac{v}{R} = 2Bt:$$

Շարժման օրենքը պտտման անկյան միջոցով կգրվի այսպես՝

$$\varphi = \varphi_0 + Bt^2:$$

2-8. *R* շառավղով շրջանագծային շարժում կատարող նյութական կետի արագությունը աղեղային կոորդինատից կախված է $\boldsymbol{v = kl}$ օրենքով, որտեղ *k*-ն հաստատուն գործակից է: Գտե՛ք արագացման տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչները, ինչպես նաև արագացման և արագության վեկտորներով կազմված անկյունը:

Լուծում: Արագացման նորմալ բաղադրիչի համար կունենանք՝

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{k^2l^2}{R}:$$

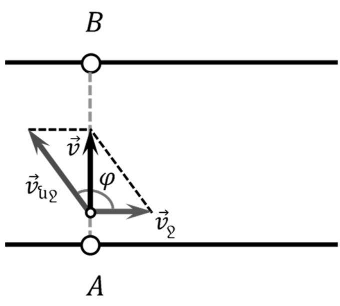
Տանգենցիալ արագացումը արագության մոդուլի ածանցյալն է ըստ ժամանակի՝

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = k\frac{dl}{dt} = kv = k^2l:$$

Արագության հետ արագացման կազմած անկյունը կլինի՝

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{l}{R}:$$

2-9. Մոտորանավակի արագությունը ջրի նկատմամբ $\boldsymbol{v_{նջ}}$ է, իսկ գետի ջրի արագությունը՝ $\boldsymbol{v_{ջ}}$: Գտե՛ք ջրի հոսանքի ուղղության և ջրի նկատմամբ մոտորանավակի արագության ուղղություններով կազմված *φ* անկյունը, որի դեպքում մոտորանավակը գետը կհատի ամենակարճ ճանապարհով:



Նկ.2-11

Լուծում: Ակնհայտ է, որ նավակի ափին ուղղահայաց շարժման դեպքում գետը հատելու ճանապարհը կլինի նվազագույնը՝ և հավասար գետի լայնությանը: Նկարից երևում է, որ նշված դեպքում $\sin\varphi = v/v_{նջ}$, $cos\varphi = -v_{ջ}/v_{նջ}$: Այստեղից անկյան համար կստանանք՝

$$\varphi = \pi - \arccos\left(v_{ջ}/v_{նջ}\right):$$

Պարզ է, որ ամենակարճ ճանապարհով անցում հնարավոր կլինի իրականացնել $v_{ջ} < v_{նջ}$ պայմանի բավարարման դեպքում: φ անկյան հնարավոր աժեքների բազմությունը՝ $v_{ջ}, v_{նջ}$ արագությունների հարաբերությունից կախված կորոշվի այսպես՝ $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$:

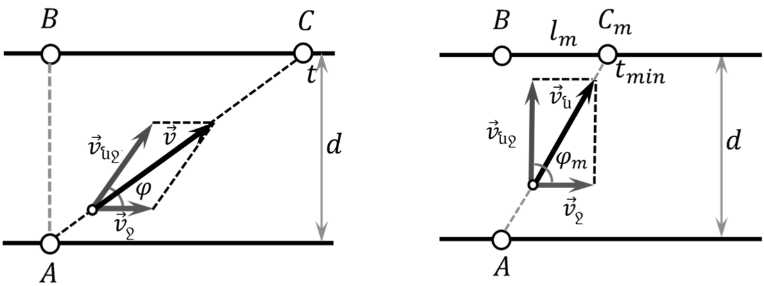
2-10. Մոտորանավակի արագությունը ջրի նկատմամբ $v_{նջ}$ է, իսկ գետի ջրի արագությունը՝ $v_{ջ}$: Գտե՛ք ջրի հոսանքի ուղղության և ջրի նկատմամբ մոտորանավակի արագության ուղղություններով կազմված φ անկյունը, որի դեպքում մոտորանավակը գետը կհատի ամենակարճ ժամանակում: Գտե՛ք այդ ամենակարճ t_{min} ժամանակահատվածը, մյուս ափ հասնելու ընթացքում գետի երկայնքով նավակի l_m տեղափոխությունը և նավակի անցած s_m ճանապարհը:

Լուծում: Մոտորանավակի արագությունն ափի նկատմամբ որոշվում է արագությունների գումարման կանոնի համաձայն՝ $\vec{v}_{ն} = \vec{v}_{նջ} + \vec{v}_{ջ}$: Ընդհանուր դեպքում գետն անցնելու ժամանակը կլինի $t = s/v_{ն}$, որտեղ s-ը նավակի անցած ճանապարհն է: Քանի որ և՛ s-ը, և՛ $v_{ն}$ փոփոխական մեծություններ են, ապա արժե s-ից ազատվել: Նկարից երևում է, որ $\vec{v}_{նջ}$-ի կամայական ուղղության դեպքում

$$\frac{d}{s} = \frac{v_{ն\perp}}{v_{ն}},$$

որտեղ $v_{ն\perp}$ նավակի արդյունարար արագության՝ ափին ուղղահայաց բաղադրիչն է: Քանի որ ջրի արագության պրոյեկցիան ափին ուղղահայաց ուղղությամբ զրո է, ուրեմն $v_{ն\perp} = v_{նջ\perp}$: Այսպիսով, անցման ժամանակի համար կունենանք՝

$$t = \frac{s}{v_{ն}} = \frac{d}{v_{նջ\perp}}:$$



Նկ.2-12

Ստացվածից երևում է, որ գետն անցնելու ժամանակը նվազագույնը կլինի, եթե $v_{նջ\perp}$-ն ունենա առավելագույն արժեք, այսինքն՝ $\vec{v}_{նջ}$ վեկտորն ուղղահայաց լինի ափին: Այսպիսով, գետի անցումը նվազագույն ժամանակը կխլի

$$\varphi_m = \frac{\pi}{2}$$

անկյան դեպքում:

Նվազագույն ժամանակին համապատասխանող անցումը պատկերված է խնդրի երկրորդ նկարում: Այդ նվազագույն ժամանակը հավասար կլինի՝

$$t_{min} = \frac{d}{v_{նջ}}:$$

Ափի երկայնքով նավակի անցած l_m տեղափոխությունը կորոշվի

$$l_m = v_{ջ} t_{min} = \frac{v_{ջ}}{v_{նջ}} d:$$

s_m անցած ճանապարհի համար կստանանք՝ $s_m = d\sqrt{1 + {v_{ջ}}^2/{v_{նջ}}^2}$:

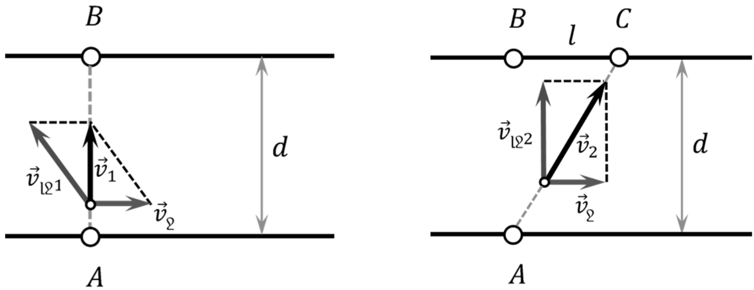
2-11. Երկու լողորդ գետի մի ափի A կետից պետք է գնան մյուս ափի ամենամոտ B կետը: Լողորդներից մեկը որոշեց լողալով անցնել գետը AB ուղիղ գծով: Երկրորդը որոշեց ջրի նկատմամբ իր արագությունը պահել միշտ ափին ուղղահայաց, հասնել մյուս ափի համապատասխան ***C*** կետը, այնուհետև այդ կետից ափով քայլել մինչև ***B*** կետը: Լողորդների՝ ջրի նկատմամբ ունեցած արագությունների մոդուլները նույնն են և հավասար $\boldsymbol{v_{լջ}}$-ի, իսկ գետում ջրի արագությունը՝ $\boldsymbol{v_{ջ}}$: Գտե՛ք, թե ինչ ***u*** արագությամբ պետք է ափով քայլի երկրորդ լողորդը, որ առաջինի հետ միաժամանակ հասնի ***B*** կետ:

Լուծում: Առաջին և երկրորդ լողորդների շարժումները պատկերված են նկարում: Առաջին լողորդի *A* կետից *B* կետ հասնելու ժամանակը կլինի՝

$$t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{d}{\sqrt{{v_{լջ}}^2 - {v_{ջ}}^2}}:$$

Երկրորդ լողորդի հասնելու ժամանակի համար կունենանք՝

$$t_2 = \frac{d}{v_{լջ}} + \frac{l}{u}:$$



Նկ.2-13

Եռանկյունների նմանությունից օգտվելով՝ կարող ենք գրել՝

$$\frac{l}{d} = \frac{v_{ջ}}{v_{լջ}}:$$

t_2 ժամանակի համար կունենանք՝

$$t_2 = \frac{d}{v_{լջ}}\left(1 + \frac{v_{ջ}}{u}\right):$$

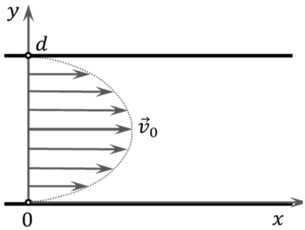
Ժամանակների հավասարության $t_1 = t_2$ պայմանից օգտվելով՝ կստանանք երկրորդ լողորդի ափով շարժման u արագության պահանջվող արժեքը՝

$$u = \frac{v_ջ}{\left(1 - v_ջ{}^2/v_{լջ}{}^2\right)^{-1/2} - 1}:$$

Նկատենք, որ առաջին լողորդը ընտրել էր ամենակարճ ճանապարհով մյուս ափ հասնելու տարբերակը, իսկ երկրորդ լողորդը՝ ամենակարճ ժամանակում մյուս ափում հայտնվելու տարբերակը (տե՛ս 2-10 խնդրի արդյունքը): Ջրի մեջ շարժման ժամանակների այս տարբերության հաշվին էր, որ երկրորդ լողորդը կարողացավ առաջինի հետ միաժամանակ հասնել B կետ:

2-12. Մոտորանավակն անցնում է $\boldsymbol{d}$ լայնություն ունեցող գետը, որում ջրի արագությունը պարաբոլական օրենքով աճում է ափերից դեպի կենտրոն ուղղությամբ՝ ափերի մոտ զրո արժեքից կենտրոնում հասնելով $\boldsymbol{v_0}$ առավելագույն արժեքի: Նավակի ջրի նկատմամբ ունեցած $\vec{\boldsymbol{v}}_{նջ}$ արագությունը հաստատուն է և ուղղված ափին ուղղահայաց ուղղությամբ: Գտե՛ք մոտորանավակի շարժման օրենքը, հետագծի հավասարումը, գետն անցնելու $\boldsymbol{t}_{անց}$ ժամանակը և գետն անցնելու ընթացքում ափի երկայնքով նավակի $\boldsymbol{l}$ տեղափոխությունը:

Լուծում: Խնդրի լուծման համար նախ պետք է ընտրել կոորդինատական համակարգ և գրել գետի ջրի արագության՝ կոորդինատից կախման օրենքը: Պայմանավորվենք կոորդինատական համակարգի սկիզբ համարել նավակի ելման դիրքը, x առանցքն ուղղել ջրի հոսանքի ուղղությամբ, իսկ y առանցքը՝ գետի լայնական ուղղությամբ, ինչպես պատկերված է նկարում: Ջրի արագությունը պարաբոլական օրենքով է կախված y կոորդինատից, ուրեմն՝



Նկ.2-14

$$v_{ջ}(y) = ay^2 + by + c :$$

Օգտվելով $v_{ջ}(0) = 0, v_{ջ}(d/2) = v_0, v_{ջ}(d) = 0$ պայմաններից՝ a, b, c գործակիցների համար կստանանք՝

$$a = -\frac{4v_0}{d^2}, b = \frac{4v_0}{d}, c = 0:$$

Ջրի արագության՝ կոորդինատից կախման օրենքը կգրվի այսպես՝

$$v_{ջ}(y) = \frac{4v_0}{d}y - \frac{4v_0}{d^2}y^2:$$

Նավակի արագության պրոյեկցիաների համար կունենանք՝

$$v_x = v_{նջx} + v_{ջx} = v_{ջ}, v_y = v_{նջy} + v_{ջy} = v_{նջ} :$$

Շարժման օրենքը կորոշվի

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4v_0}{d}y - \frac{4v_0}{d^2}y^2,$$
$$\frac{dy}{dt} = v_{նջ}$$

հավասարումների համակարգի լուծման միջոցով: Երկրորդ հավասարումից կստացվի $y(t) = v_{նջ}t + const$: Հաշվի առնելով $y(0) = 0$ սկզբնական պայմանը՝ կստանանք $y(t) = v_{նջ}t$: Այս արդյունքը տեղադրելով առաջին հավասարման մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4v_0v_{նջ}}{d}t - \frac{4v_0{v_{նջ}}^2}{d^2}t^2$$

հավասարումը, որն ինտեգրելով և հաշվի առնելով $x(0) = 0$ սկզբնական պայմանը, կունենանք՝

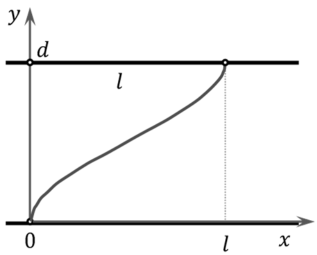
$$x(t) = \frac{2v_0v_{նջ}}{d}t^2 - \frac{4v_0{v_{նջ}}^2}{3d^2}t^3 :$$

Այսպիսով, նավակի շարժման օրենքն ունի

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2v_0v_{նջ}}{d}t^2 - \frac{4v_0{v_{նջ}}^2}{3d^2}t^3, \\ y(t) = v_{նջ}t \end{cases}$$

տեսքը: Հետագծի հավասարումը կստանանք, եթե շարժման օրենքից արտաքսենք t ժամանակը՝

$$x = \frac{2v_0}{dv_{նջ}}y^2 - \frac{4v_0}{3d^2v_{նջ}}y^3 :$$



Նկ.2-15

Հետագծի տեսքը բերված է Նկ.2-15–ում: Գետն անցնելու ժամանակը կգտնենք $y(t_{անց}) = d$ հավասարումից և կստանանք՝

$$t_{անց} = \frac{d}{v_{նջ}}:$$

Գետն անցնելու ընթացքում մոտորանավակը ափի երկայնքով տեղաշարժված կլինի $l = x(t = t_{անց})$ չափով, որը կգտնենք շարժման օրենքից և կստանանք՝

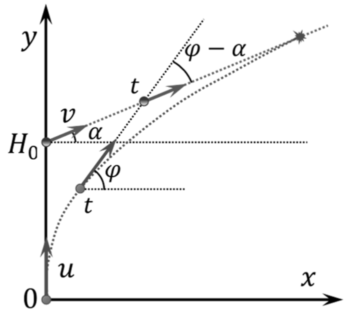
$$l = \frac{2v_0}{3v_{նջ}}d:$$

2-13. Ժամանակի սկզբնական պահին թիրախը գտնվում է ինքնակառավարվող հրթիռից տարված ուղղաձիգի վրա գտնվող $\boldsymbol{H_0}$ բարձրությամբ կետում և $\boldsymbol{v}$ հաստատուն արագությամբ շարժվում է հորիզոնի հետ $\boldsymbol{\alpha}$ անկյուն կազմող ուղիղ գծով (տե՛ս Նկ.2-16): Հրթիռը շարժվում է մոդուլով հաստատուն $\boldsymbol{u}$ արագությամբ, որը յուրաքանչյուր պահի ուղղված է դեպի թիրախը:

ա) Գտե՛ք խոցման $\boldsymbol{t_խ}$ ժամանակի պահը և խոցման կետի $\boldsymbol{x_խ}$, $\boldsymbol{y_խ}$ կոորդինատները:

բ) Գտե՛ք $\boldsymbol{u = v}$ դեպքում իրարից ինչ հեռավորությամբ կշարժվեն մարմինները շատ երկար ժամանակ հետո:

գ) Գտե՛ք հրթիռի շարժման օրենքը, հետագիծը, խոցման ժամանակի պահը և խոցման կետի կոորդինատները՝ կիրառելով խնդրի լուծման թվային եղանակը:



Նկ.2-16

Լուծում: ա) Ժամանակի t պահին x առանցքի հետ հրթիռի արագության կազմած անկյունը նշանակենք φ-ով: Հրթիռի թիրախին մոտենալու արագությունն այդ պահին կլինի՝

$$u - v\cos(\varphi - \alpha):$$

$[t, t + dt]$ անվերջ փոքր ժամանակահատվածում մարմինների միջև հեռավորությունը կկրճատվի $dl = (u - v\cos(\varphi - \alpha))dt$ –ով:

Օգտվելով

$$\cos(\varphi - \alpha) = \cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha$$

բանաձևից և հաշվի առնելով, որ $\cos\varphi = u_x/u$, $\sin\varphi = u_y/u$՝ կստանանք՝

$$dL = \left(u - v\frac{u_x}{u}\cos\alpha - v\frac{u_y}{u}\sin\alpha\right)dt:$$

Թիրախը խոցելու պահին հեռավորության ընդհանուր կրճատումը կհավասարվի H_0-ի, քանի որ հեռավորությունը սկզբնական պահին հավասար է H_0-ի, իսկ խոցման պահին՝զրոյի: $u_x dt$-ն հրթիռի ds_x տեղափոխությունն է x առանցքի ուղղությամբ $[t, t + dt]$ ժամանակահատվածում: Հրթիռի լրիվ տեղափոխությունն այդ ուղղությամբ հավասար կլինի խոցման դիրքի կոորդինատին՝ $s_x = x_{խ} = vt_{խ}\cos\alpha$: Նման ձևով՝ $u_y dt = ds_y$: Խոցման պահին հրթիռի ընդհանուր տեղափոխությունը y առանցքի ուղղությամբ հավասար կլինի՝$s_y = y_{խ} = vt_{խ}\sin\alpha + H_0$: Այսպիսով կունենք՝

$$ut_{խ} - \frac{v^2}{u}t_{խ}\cos^2\alpha - \frac{v}{u}\sin\alpha\left(vt_{խ}\sin\alpha + H_0\right) = H_0\,,$$

որտեղից էլ կգտնենք խոցման ժամանակի պահը.

$$t_{խ} = \frac{u + v\sin\alpha}{u^2 - v^2}H_0\;:$$

Խոցման դիրքի կոորդինատները կլինեն՝

$$x_{խ} = v\cos\alpha \frac{u + v\sin\alpha}{u^2 - v^2} H_0 \, , y_{խ} = \left(v\sin\alpha \frac{u + v\sin\alpha}{u^2 - v^2} + 1\right) H_0:$$

Նշենք, որ $\alpha = -\pi/2$ մասնավոր դեպքում (հակուղղված շարժում) կստացվի՝

$$t_{խ} = \frac{\mathrm{H_0}}{\mathrm{u+v}} \, , x_{խ} = 0, y_{խ} = \frac{u}{u+v} H_0$$

ակնհայտ արդյունքը:

Համուղղված շարժման մասնավոր դեպքում ($\alpha = \pi/2$) կստացվի՝

$$t_{խ} = \frac{\mathrm{H_0}}{\mathrm{u-v}} \, , x_{խ} = 0, y_{խ} = \frac{u}{u-v} H_0$$

հայտնի արդյունքը:

բ) $u = v$ դեպքում հրթիռը չի կարող խոցել թիրախ-մարմնին, եթե $\alpha \neq -\pi/2$: Շատ երկար ժամանակ հետո նրանց հեռավորության կրճատումը կհավասարվի $H_0 - l$-ի, որտեղ l-ը նրանց միջև եղած հեռավորությունն է անվերջ մեծ ժամանակահատված հետո: Պարզ է, որ շատ երկար ժամանակ հետո հրթիռը ևս կշարժվի ուղղագիծ հետագծով, որի կազմած անկյունը x առանցքի հետ հավասար կլինի α-ի: Վերևում բերված դատողությունների նման, այժմ օգտվելով հրթիռի տեղափոխության վեկտորի պրոյեկցիաների համար գրված

$$s_x = vt\cos\alpha - l\cos\alpha \, , s_y = vt\sin\alpha + H_0 - l\sin\alpha$$

բանաձևերից՝ կունենանք՝

$$vt - v\cos\alpha\,(vt\cos\alpha - l\cos\alpha) - v\sin\alpha\,(vt\sin\alpha + H_0 - l\sin\alpha) = H_0 - l\,,$$

որտեղից էլ կստանանք՝

$$l = \frac{H_0}{2}(1 + \sin\alpha), \text{եթե}\ \alpha \neq -\pi/2 :$$

Մասնավոր դեպքում, երբ թիրախը շարժվում է y առանցքի ուղղությամբ, որին մեր խնդրում համապատասխանում է $\alpha = \pi/2$ արժեքը, ստանում ենք $l = H_0$ ակնհայտ պատասխանը:

գ) Հրթիռի շարժման օրենքը գտնել բանաձևային տեսքով կամ, ինչ-պես ընդունված է ասել, անալիտիկորեն լուծել խնդիրը՝ այս դեպ-քում անհնար է: Խնդրի այս պահանջը դրվել է ուսանողին խնդրի թվային լուծման եղանակի հետ ծանոթացնելու նպատակով:

Ժամանակահատվածը բաժանենք dt անվերջ փոքր հատված-ների՝ $t_0 = 0, t_1 = dt, t_2 = 2dt, \cdots, t_i = i\,dt, \cdots$: Ժամանակի $t_i = i\,dt$ պահին թիրախ-մարմնի կոորդինատները կլինեն՝

$$x_i = i\,v\,dt\cos\alpha\,, y_i = i\,v\,dt\sin\alpha + H_0 :$$

Նույն $t_i = i\,dt$ պահին հրթիռի արագության պրոյեկցիաների համար կունենանք՝

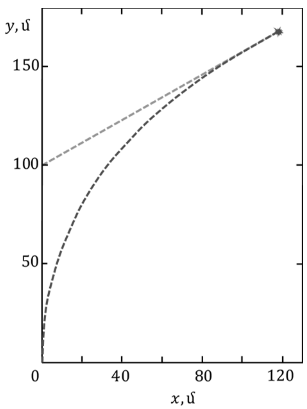
$$u_{xi} = u\frac{x_i - X_i}{\sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2}}\,, u_{xi} = u\frac{y_i - Y_i}{\sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2}}\,,$$

որտեղ X_i, Y_i-ն հրթիռի կոորդինատներն են t_i պահին: Հաշվի առնե-լով, որ

$u_{xi} = \frac{X_{i+1} - X_i}{dt}, u_{yi} = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{dt}$ կստանանք՝

$$X_{i+1} = X_i + u\,dt\frac{x_i - X_i}{\sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2}}\,,$$

$$Y_{i+1} = Y_i + u\,dt\frac{y_i - Y_i}{\sqrt{(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2}} :$$



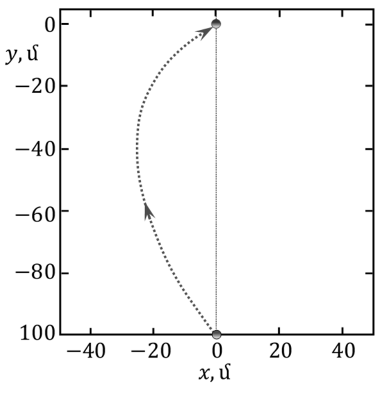
Նկ.2-17

Տալով $i = 0$ $(t = 0)$ պահի $x_0 = 0, y_0 = H_0, X_0 = 0, Y_0 = 0$ սկզբնական արժեք-ները՝ վերևում ստացված ռեկուրենտ բանաձևերի օգնությամբ հնարավո-րություն կունենանք հաշվել ժամա-նակի t_i $(i = 1, 2, 3 \cdots)$ պահերին հա-մապատասխանող կոորդինատները: Հաշվարկը պետք է շարունակել այն-քան ժամանակ, քանի դեռ բավարար-վում է $X_{i+1} < x_{i+1} = (i+1)\,v\,dt\cos\alpha$: i-նշիչի ամենամեծ արժեքը, որի դեպքում առաջին անգամ խախտվում է այս պայմանը նշանակենք $i_{max} = N - 1$:

Նկարագրված հաշվարկի արդյունքում աղյուսակի տեսքով կունենանք t_i $(i = 1, 2, 3 \cdots N)$ ժամանակի ընդհատ (դիսկրետ) պահերին հրթիռի դիրքը նկարագրող X_i, Y_i կոորդինատները, այսինքն՝ կունենանք շարժման օրենքը թվային տեսքով: Կոորդինատների համար ստացված X_N, Y_N վերջին արժեքները կլինեն խոցման կետի կոորդինատները՝ $x_{խ} = X_N, y_{խ} = Y_N$, իսկ խոցման ժամանակի պահը կլինի՝ $t_{խ} = Ndt$: $Y_i(X_i)$ գրաֆիկը X, Y հարթության մեջ կլինի ընդհատ (դիսկրետ) կետերի բազմություն, որը հրթիռի հետագիծն է թվային եղանակի դեպքում:

Հասկանալի է, որ որքան փոքր լինի dt ժամանակահատվածը, այնքան մեր ստացած թվային տվյալները մոտ կլինեն շարժման բնութագրերի իրական արժեքներին:

Նկ.2-17 –ում ցուցադրել ենք թվային հաշվարկի արդյունքները, որոնք իրականացվել են MathCad ծրագրային փաթեթի միջավայրում՝ $H_0 = 100$ մ, $v = 5$ մ/վ, $\alpha = \pi/6$, $u = 10$ մ/վ, $dt = 0.05$ վ թվային արժեքների դեպքում: Հաշվումների մեր ընտրած քայլի դեպքում խոցման ժամանակի համար ստացվել է՝ $t_{խ} = 26{,}95$ վ, $x_{խ} = 116{,}697$ մ, $y_{խ} = 167{,}375$ մ: Անալիտիկ լուծման դեպքում պատասխաններն են՝ $t_{խ} = 26{,}923$ վ, $x_{խ} = 116{,}58$ մ, $y_{խ} = 167{,}308$ մ: $dt = 0.001$ քայլի դեպքում թվային հաշիվը տալիս է $t_{խ} = 26{,}924$ վ, $x_{խ} = 116{,}584$ մ, $y_{խ} = 167{,}31$ մ պատասխանները, որոնք բնականաբար ավելի մոտ են իրական պատասխաններին:



Նկ.2-18

Չնայած խնդիրը չէր պահանջում, բայց արժե պատկերել հրթիռի հետագիծը թիրախ-օբյեկտ հաշվարկման համակարգում: Հրթիռի հարաբերական կոորդինատները թիրախ-մարմնի նկատմամբ կլինեն՝

$$\bar{X}_i = X_i - x_i\,, \bar{Y}_i = Y_i - x_i \,:$$

Նկ.2-18–ում պատկերված է հրթիռի շարժման հետագիծը թիրախ-մարմնի համակարգում: Թիրախ-օբյեկտում գտնվող դիտողին սկզբնական շրջանում կթվա, թե հրթիռն իրենց ուղղությամբ չի շարժվում: Միայն որոշ ժամանակ անց այդ դիտողը կզգա, որ հրթիռն իրենց է հետապնդում:

3. ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

3.1 Պինդ մարմին: Ազատության աստիճաններ: Պինդ մարմնի ազատության աստիճանների թիվը

Բացարձակ պինդ մարմինն այն մարմինն է, որի կամայական երկու կետերի միջև հեռավորությունը միշտ նույնն է: Նյութական կետի գաղափարի նման, բացարձակ պինդ մարմնի գաղափարը ևս իրականության իդեալականացված կերպարն է: Յանկացած պինդ մարմին այս կամ այն չափով դեֆորմացվող է: Իրական մարմինը տվյալ խնդրում կարող ենք համարել բացարձակ պինդ մարմին, եթե այն կազմող կետերի միջև հեռավորությունների փոփոխություններն արհամարհելի փոքր են: Այս վերացարկումը թույլ է տալիս հեշտացնել խնդրի լուծումը՝ վստահ լինելով, որ ստացված արդյունքը պահանջվող ճշտությամբ մոտ է իրական խնդրի լուծմանը: Մեխանիկայում հաճախ բացարձակ բառը բաց են թողնում և պինդ մարմին ասելով՝ հասկանում բացարձակ պինդ մարմինը:

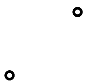
«Նյութական կետի կինեմատիկա» բաժնում մենք համոզվեցինք, որ կետի շարժումը տարածության մեջ նկարագրելու համար անհրաժեշտ է ունենալ կամ մեկ վեկտորական մեծության, այն է՝ շառավիղ վեկտորի ժամանակից կախման ֆունկցիան կամ երեք սկալյար մեծությունների՝ կոորդինատների ժամանակային կախվածությունները: Քանի որ պինդ մարմինն իրար հետ փոխազդող անթիվ բազմությամբ նյութական կետերի համախումբ է, ապա առաջին հայացքից կարող է թվալ, թե այդ մարմնի շարժման նկարագրությունն անհնար է, քանի որ անհրաժեշտ կլինի ունենալ անվերջ թվով կոորդինատների ժամանակային կախվածության ֆունկցիաներ: Պարզվում է, անվերջ թվով կետեր ունեցող պինդ մարմնի շարժման նկարագրության համար ընդհանուր դեպքում անհրաժեշտ է ունենալ ընդամենը վեց կոորդինատի ժամանակից կախման ֆունկցիաները: Դա հասկանալու համար կարիք կա ծանոթանալ ֆիզիկայում հայտնի մի նոր գաղափարի հետ, ինչպիսին ազատության աստիճանի գաղափարն է:

Ազատության աստիճանը կամ ***ազատության աստիճանների թիվը*** անկախ կոորդինատների այն քանակն է, որն անհրաժեշտ է տվյալ համակարգի (մարմնի) դիրքը տարածության մեջ միարժեք նկարագրելու համար: Ակնհայտ է, որ համակարգի դիրքը միարժեք բնութագրող անկախ կոորդինատների քանակը կլինի դրա համար անհրաժեշտ կոորդինատների նվազագույն քանակը: Ազատության աստիճանը կոորդիննատների այն նվազագույն քանակն է, որն անհրաժեշտ է տվյալ համակարգի դիրքը տարածության մեջ միար-ժեք նկարագրելու համար: Պայմանավորվենք ազատության աստի-ճանների թիվը նշանակել k_f -ով:

Դիտարկենք համակարգերի մի շարք մասնավոր դեպքեր և գտնենք նրանց ազատության աստիճանների թիվը:

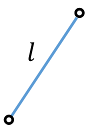
$k_f = 3$

Մեկ նյութական կետի ազատության աստի-ճանների թիվը հավասար կլինի 3-ի՝ $k_f = 3$:



$k_f = 6$

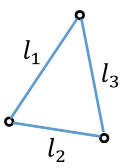
Երկու իրարից անկախ շարժվող նյութական կետերի համակարգի ազատության աստի-ճանների թիվը՝ $k_f = 6$:



$k_f = 5$

Եթե երկու նյութական կետերի համակագում կետերի միմյանցից ունեցած հեռավորությու-նը սևեռված է, այսինքն՝ շարժման ընթաց-քում մնում է հաստատուն, ապա՝ $k_f = 5$, քա-նի որ վեց կոորդինատների միջև առկա է մեկ կապ՝

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2:$$



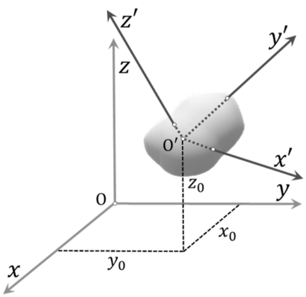
$k_f = 6$

Երեք իրարից անկախ շարժվող նյութական կետերի համակագի ազատության աստի-ճանների թիվը կլինի՝ $k_f = 9$: Եթե կետերի միջև առկա երեք հեռավորություններն էլ սևեռված են, ապա ինը կոորդինատների միջև կլինի երեք կապ, ինչը կնշանակի, որ անկախ կոորդինատների թիվը վեց է՝ $k_f = 6$:

Եթե սևեռենք պինդ մարմնի միայն մի կետի դիրքը, ապա մարմնի դիրքը միարժեք որոշված չի լինի: Մարմինը հնարավորություն կունենա պտույտներ կատարել այդ կետի շուրջը: Եթե սևեռենք միայն երկու կետի դիրքերը, ապա այս դեպքում մարմինը կարող է պտույտներ կատարել այդ կետերով անցնող առանցքի շուրջը: Պինդ մարմնի մեկ առանցքի վրա չգտնվող երեք կետերի դիրքերը սևեռելու դեպքում պինդ մարմինն այլևս որևէ շարժում կատարել չի կարող, նրա դիրքը կլինի խիստ որոշակի: Քանի որ պինդ մարմնի կետերի միջև փոխադարձ հեռավորություններն անփոփոխ են, ապա այստեղից կարող ենք եզրակացնել, որ պինդ մարմնի ազատության աստիճանների թիվը համընկնում է երեք՝ իրար նկատմամբ սևեռված հեռավորությունների վրա գտնվող նյութական կետերի համակարգի ազատության աստիճանների թվին: Այսպիսով, պինդ մարմնի ազատության աստիճանների թիվը վեց է՝ $k_f = 6$:

3.2 Պինդ մարմնի դիրքի նկարագրությունը: Էյլերի անկյուններ

«Նյութական կետի կինեմատիկա» բաժնում տեսանք, որ կետի դիրքը որոշելու բազմաթիվ եղանակներ կան: Պինդ մարմնի դիրքը նկարագրելու համար ևս կան տարբեր եղանակներ: Մեր ծրագրի շրջանակներում կծանոթանանք առավել հաճախակի օգտագործվող այն եղանակի հետ, որն առաջարկել է Էյլերը:

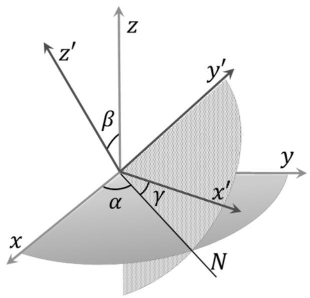


Նկ.3-1

Դիտարկենք կոորդինատների $\{x, y, z\}$ հիմնական համակարգը և այդ համակարգում պինդ մարմնին պատկանող մի որևէ O' կետի կոորդինատները նշանակենք x_0, y_0, z_0: Պինդ մարմնի հետ կոշտ ամրացնենք $\{x', y', z'\}$ կոորդինատական համակարգը (տե՛ս Նկ.3-1):

Պինդ մարմնի դիրքը միարժեք որոշված կլինի, եթե հայտնի են x_0, y_0, z_0 երեք կոորդինատները և

$\{x', y', z'\}$ կոորդինատական համակարգի կողմնորոշումը $\{x, y, z\}$ համակարգի նկատմամբ: Նշված կողմնորոշումը նկարագրելու համար համակարգերի սկզբնակետերի դիրքերը կարևոր չեն, ուստի

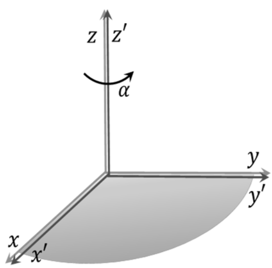


Նկ.3-2 Էյլերի անկյունները:

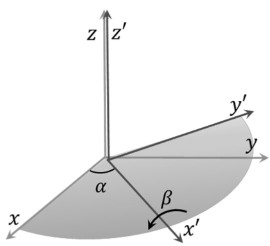
հարմար է կոորդինատական համակարգերը բերել մեկ ընդհանուր սկզբնակետի, ինչպես դա պատկերված է Նկ.3-2-ում: Նկարում պատկերված α, β, γ անկյունները Էյլերի անկյուններն են: N-ով նշանակված է (x, y) և (x', y') կոորդինատական հարթությունների հատման գիծը, որն ստացել է հանգույցների գիծ անվանումը:

Դժվար չէ պատկերացնել, որ $\{x', y', z'\}$ կոորդինատական համակարգը $\{x, y, z\}$ կոորդինատական համակարգի դիրքից երեք հաջորդական պտույտների միջոցով կարելի է բերել նկարում պատկերված դիրքին: Ենթադրենք նախապես երկու համակարգերը համընկնում են (տե՛ս Նկ.3-3): Առաջին քայլով $\{x', y', z'\}$ համակարգը պտտենք zz' ընդհանուր ուղղության շուրջը α անկյունով:

Արդյունքում x' առանցքի նոր դիրքը կհամընկնի հանգույցների N գծի հետ, իսկ (x, y) և (x', y') հարթությունները ինչպես մինչև պտույտը, այնպես էլ այդ պտույտից հետո կլինեն համընկնող:

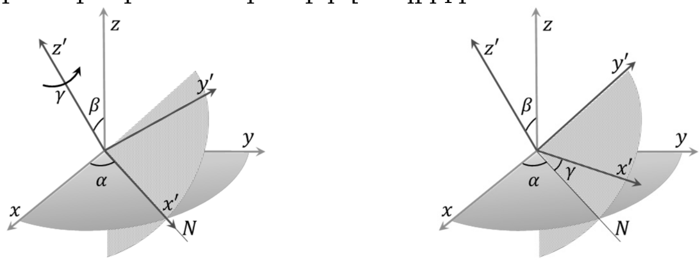


Նկ.3-3ա



Նկ.3-3բ

Երկրորդ քայլով նոր համակարգը պտտենք x' առանցքի (N գծի) շուրջը β անկյունով: Արդյունքում x' առանցքը կմնա N գծի վրա, իսկ z'-ը կպտտվի և կհասնի Նկ.3-2-ում պատկերված դիրքին: Այս պտույտից հետո (x, y) և (x', y') կոորդինատական հարթությունները այլևս չեն լինի համընկնող, այլ կհատվեն՝ առաջացնելով հանգույցների N գիծը: Վերջին քայլով նոր համակարգը կպտտենք z' առանցքի շուրջը γ անկյունով և x' առանցքը շարժվելով (x', y') հարթությամբ կհասնի Նկ.3-2-ում պատկերված դիրքին:



Նկ.3-3գ Նկ.3-3դ

Վերևում շարադրածից պարզ է դառնում, որ պինդ մարմնի դիրքը տարածության մեջ կարելի է նկարագրել $\{x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma\}$ վեց կոորդինատների միջոցով: x_0, y_0, z_0 երեք կոորդինատները կնկարագրեն պինդ մարմնի համընթաց շարժումը տարածական երեք անկախ առանցքների ուղղություններով, իսկ α, β, γ երեք Էյլերյան անկյունները՝ պտույտները տարածական երեք անկախ առանցքների շուրջը:

3.3 Պինդ մարմնի շարժման տեսակները

Պինդ մարմնի շարժումներն ընդունված է բաժանել հինգ տեսակի՝

- համընթաց շարժում,
- պտույտ անշարժ առանցքի շուրջը,
- հարթ շարժում,
- շարժում անշարժ կետի շուրջը,

- նախորդ թվարկածներից տարբերվող կամայական շարժում:

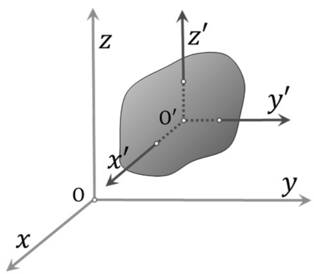
Թվարկածներից առաջին երկուսը պինդ մարմնի հիմնական շարժումներն են: Պինդ մարմնի ցանկացած շարժում կարելի է բերել կա՛մ մաքուր համընթաց շարժման, կա՛մ մաքուր պտտական շարժման, կա՛մ դրանց համադրության:

Այս բաժնում կքննարկենք վերևում թվարկված շարժումների առաջին երեք տեսակները:

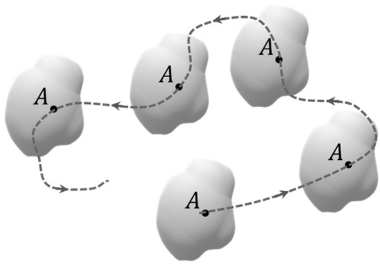
3.3.1 Պինդ մարմնի համընթաց շարժում

Համընթաց կոչվում է այն շարժումը, որի ժամանակ պինդ մարմնի կամայական երկու կետ իրար միացնող հատվածը ամբողջ շարժման ընթացքում մնում է ինքն իրեն զուգահեռ: Առաջին հայացքից կարող է թվալ, որ անհնար կլինի ստուգել շարժումը համընթաց է, թե ոչ, քանի որ վերոնշյալ հատվածների թիվն անսահման է: Իրականում բոլոր հատվածների զուգահեռությունն ստուգելու կարիք չկա:

Եթե պինդ մարմնին պատկանող, մեկ հարթության մեջ չգտնվող երեք ուղիղներ մնան իրենք իրենց զուգահեռ, ապա պինդ մարմնի մնացած բոլոր կետերն իրար միացնող հատվածները նույնպես կմնան իրենք իրենց զուգահեռ: Համընթաց շարժումը իր ամբողջ բազմազանությամբ լավ պատկերացնելու համար պինդ մարմնի հետ կոշտ ամրացնենք $\{x', y', z'\}$ կոորդինատների համակարգը, որի առանցքները ժամանակի սկզբնապահին զուգահեռ են $\{x, y, z\}$ անշարժ համակարգի համապատասխան առանցքներին (Նկ.3-4): Պինդ մարմնի այն շարժումը, որի ժամանակ ամբողջ շարժման ընթացքում x' առանցքը մնում է զուգահեռ x առանցքին, y'-ը՝ y-ին և z'-ը՝ z-ին կոչվում է համընթաց շարժում:



Նկ.3-4



Նկ.3-5 Համընթաց շարժում:

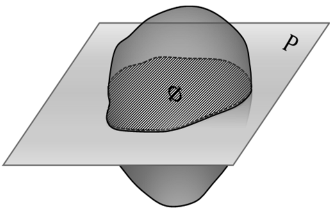
Համընթաց շարժման դեպքում պինդ մարմնի բոլոր կետերը տվյալ ժամանակամիջոցում կատարում են միատեսակ տեղափոխություններ: Այստեղից հետևում է, որ համընթաց շարժվող մարմնի բոլոր կետերը ժամանակի տվյալ պահին կունենան նույն արագությունը: Նույնը կլինի նաև արագացումը: Շարժման հետագծերը կլինեն տարածականորեն զուգահեռ տեղաշարժված միատեսակ կորեր: Եթե հայտնի է պինդ մարմնի դիրքը ժամանակի սկզբնապահին և նրա մի որևէ A կետի $\vec{r}_A(t)$ շարժման օրենքը, ապա դրանով իսկ հայտնի կդառնա պինդ մարմնի դիրքը տարածության մեջ ժամանակի կամայական t պահին: Սա նշանակում է, որ պինդ մարմնի համընթաց շարժման կինեմատիկական նկարագրությունը հանգում է մեկ նյութական կետի կինեմատիկական նկարագրության, որն արդեն շարադրել ենք նախորդ բաժնում:

3.3.2 Պինդ մարմնի պտույտն անշարժ առանցքի շուրջը

Դիտարկենք անշարժ առանցքի շուրջը պինդ մարմնի պտույտը: Այս դեպքում պինդ մարմնի բոլոր կետերը կկատարեն շրջանագծային շարժումներ, այնպիսի շրջանագծերով, որոնց կենտրոնները գտնվում են պտտման առանցքի վրա, իսկ հարթություններն ուղղահայաց են պտտման առանցքին: Եթե $[t, t+dt]$ ժամանակահատվածում պինդ մարմնի A կետը կատարել է $d\vec{\varphi}$ անկյունային տեղափոխություն, ապա նույն անկյունային տեղափոխությունները կատարած կլինեն նաև առանցքի վրա չգտնվող մնացած բոլոր կետերը: Այստեղից հետևում է, որ անշարժ առանցքի շուրջը պտույտի դեպքում պինդ մարմնի բոլոր կետերը կունենան միևնույն $\vec{\omega}$ անկյունային արագությունը: Նույնը կլինի նաև բոլոր կետերի $\vec{\varepsilon}$ անկյունային արագացումը: Առանցքից տարբեր հեռավորություններ ունեցող կետերի գծային արագությունները կլինեն տարբեր: Տարբեր կլինեն նաև այդ կետերի գծային արագացումները:

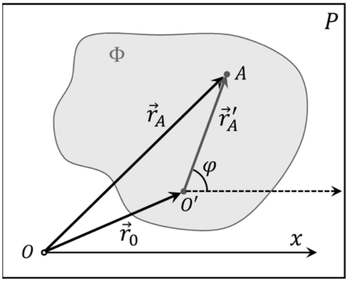
Եթե հայտնի է պինդ մարմնի դիրքը ժամանակի սկզբնական պահին և նրա մի որևէ A կետի $\varphi(t)$ շարժման օրենքը, ապա դրանով իսկ հայտնի կդառնա պինդ մարմնի դիրքը ժամանակի կամայական t պահին: Սա նշանակում է, որ անշարժ առանցքի շուրջը պինդ մարմնի պտտական շարժման կինեմատիկական նկարագրությունը հանգում է մեկ նյութական կետի շրջանագծային շարժման նկարագրության, որն արդեն շարադրել ենք նախորդ բաժնում

3.3.3 Պինդ մարմնի հարթ շարժում, ակնթարթային առանցք



Նկ.3-6 Հարթ շարժում:

Հարթ կոչվում է այն շարժումը, որի դեպքում պինդ մարմնի բոլոր կետերը շարժվում են մի ինչ-որ P անշարժ հարթությանը զուգահեռ հարթությունների մեջ: Սահմանումից հետևում է, որ պինդ մարմնի այն կետերը, որոնք վերոնշյալ հարթության մեջ են, հարթ շարժման ամբողջ ընթացքում կգտնվեն նույն հարթության մեջ: Եթե պինդ մարմնի և P հարթության հատումից առաջացած հարթ պատկերը նշանակենք Փ-ով, ապա կարող ենք պնդել, որ հարթ շարժման դեպքում Փ հարթ պատկերը շարժվում է սեփական P հարթության մեջ (Նկ.3-6): Նկատենք, որ եթե հայտնի է Փ հարթ պատկերի դիրքը P հարթության մեջ, ապա հայտնի կլինի նաև հարթ շարժում կատարող պինդ մարմնի դիրքը տարածության մեջ: Ասվածից կարող ենք եզրակացնել, որ պինդ մարմնի հարթ շարժման ուսումնասիրությունը հանգում է Փ հարթ պատկերի սեփական P հարթության մեջ շարժման ուսումնասիրության:



Նկ.3-7 Հարթ պատկերի դիրքի նկարագրությունը:

Պարզենք, թե ինչ եղանակով կարելի է նկարագրել Φ հարթ պատկերի դիրքը սեփական հարթության մեջ: P հարթության մեջ ընտրենք հաշվարկման O սկզբնակետը և Φ հարթ պատկերին կոշտ ամրացված որևէ O' կետի շառավիղ վեկտորը նշանակենք $\vec{r}_0$: Տրված $\vec{r}_0$-ի դեպքում հարթ պատկերի դիրքը դեռևս միարժեք որոշված չի լինի. այն կարող է O' կետով անցնող և P հարթությանն ուղղահայաց առանցքի շուրջ պտույտներ կատարել: Պատկերի դիրքը միարժեք կդառնա, եթե սևեռենք Φ հարթ պատկերին պատկանող մեկ այլ կետի (A կետի) O' կետի նկատմամբ ունեցած $\vec{r}_A'$ շառավիղ վեկտորի կազմած φ անկյունը P հարթությանն ամրացված որևէ x առանցքի հետ (Նկ.3-7):

Պինդ մարմնի շարժմանը զուգընթաց Φ հարթ պատկերը կշարժվի սեփական հարթության մեջ, ժամանակի ընթացքում կփոփոխվեն $\vec{r}_0$ և φ մեծությունները: Շարժման օրենքն այս դեպքում կտրվի $\{\vec{r}_0(t)\ ,\ \varphi(\mathrm{t})\}$ ֆունկցիաների խմբով: Հաշվի առնելով, որ $\vec{r}_0(t)$ վեկտորը միշտ գտնվում է նախապես հայտնի P հարթության մեջ և հետևաբար ունի երկու անկախ պրոյեկցիաներ, կարող ենք եզրակացնել, որ հարթ շարժում կատարող պինդ մարմնի ազատության աստիճանների թիվը հավասար է երեքի ($k_f = 3$):

Նկ.3-7-ից երևում է, որ

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_A'(t)\ : \tag{3.1}$$

Ածանցելով ըստ ժամանակի՝ կստանանք՝

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_A'}{dt}\ : \tag{3.2}$$

Հաշվի առնելով այն, որ $d\vec{r}_A/dt$ ածանցյալը A կետի $\vec{v}_A$ արագությունն է, իսկ $d\vec{r}_0/dt$-ն՝ O' կետի $\vec{v}_0$ արագությունը O սկզբնակետի նկատմամբ, կարող ենք գրել՝

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + d\vec{r}_A'/dt \text{ ։} \tag{3.3}$$

Ինչ վերաբերում է $d\vec{r}_A'/dt$ ածանցյալին, ապա այն A կետի արագությունն է O' կետի նկատմամբ: Քանի որ A և O' երկու կետն էլ պատկանում են հարթ պատկերին, հետևաբար նաև պինդ մարմնին, ուրեմն $\vec{r}_A'$ վեկտորի մոդուլը ժամանակի ընթացքում չի փոփոխվում: Այստեղից բխում է, որ $\vec{r}_A'$ վեկտորի փոփոխությունը պայմանավորված է բացառապես պտույտով՝ $d\vec{r}_A' = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_A'$: Օգտվելով անկյունային արագության $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ գաղափարից՝ (3.3)-ից կստանանք

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_A' \text{ ։} \tag{3.4}$$

Այսպիսով, հարթ պատկերի որևէ A կետի արագությունը ներկայացվում է երկու արագությունների գումարի տեսքով, որոնցից առաջինը հարթ պատկերին պատկանող O' կետի արագությունն է, իսկ երկրորդը՝ O' կետի շուրջը A կետի պտույտով պայմանավորված $\vec{v}_A^{\,պտ} = \vec{\omega} \times \vec{r}_A'$ գծային արագությունը:

Ինչպես տեսնում ենք, պինդ մարմնի հարթ շարժումը բերվում է համընթաց և պտտական շարժումների համադրության:

(3.4) բանաձևով որոշվող արագությունը ածանցելով ըստ ժամանակի, օգտվելով կրկնակի արտադրյալի կանոնից և հաշվի առնելով, որ $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_A'$ սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի, արագացման համար կստանանք

$$\vec{a}_A = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A' - \omega^2 \vec{r}_A' , \tag{3.5}$$

որտեղ $\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0$-ը O' կետի գծային արագացումն է, իսկ $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$-ը՝ պինդ մարմնի պտտման անկյունային արագացման վեկտորը:

Ցույց տանք, որ O' կետի հարմար ընտրության միջոցով հարթ շարժումը ժամանակի տվյալ պահին կարելի է հանգեցնել մաքուր պտտական շարժման:

Պինդ մարմնի և P հարթության իրական հատումից առաջացած Φ հարթ պատկերը մտովի ընդլայնենք՝ դարձնելով անսահման $\widetilde{\Phi}$ հարթություն: $\widetilde{\Phi}$ անսահման հարթությունը կոշտ ամրացված լինելով՝ Φ հարթ պատկերին պինդ մարմնի հարթ շարժմանը զուգընթաց նույնպես կլինի սեփական հարթության մեջ շարժվող հարթություն: Ցույց տանք, որ $\widetilde{\Phi}$ հարթության վրա անպայման գոյություն ունի այնպիսի M կետ, որի արագությունը տվյալ պահին զրո է:

Նկատենք, որ $\vec{\omega}$ անկյունային արագությունն ուղղահայաց է P հարթությանը, որից հետևում է, որ $\vec{\omega} \times \vec{r}'_M$ վեկտորը կլինի P հարթության մեջ: $\vec{v}_0$ վեկտորը նույնպես գտնվում է P հարթության մեջ: $\vec{r}'_M$ վեկտորի հարմար ընտրությամբ կարելի է հասնել այն բանին, որ $\vec{\omega} \times \vec{r}'_M$ վեկտորը մոդուլով հավասար և ուղղությամբ հակադիր լինի $\vec{v}_0$ վեկտորին: Այս որակական պարզաբանումից հետո անցնեք համապատասխան հավասարման լուծմանը:

Օգտվելով (3.4) բանաձևից և պահանջելով, որ բավարարվի $\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_M = 0$ պայմանը՝ $\vec{r}'_M$ անհայտի համար կստանանք

$$\vec{\omega} \times \vec{r}'_M = -\vec{v}_0 \tag{3.6}$$

հավասարումը: Հավասարման երկու կողմը վեկտորապես բազմապատկենք $\vec{\omega}$ վեկտորով և օգտվենք կրկնակի վեկտորական արտադրյալի կանոնից

$$\vec{r}'_M\,\omega^2 - \vec{\omega}\,(\vec{r}'_M \cdot \vec{\omega}) = -\vec{v}_0 \times \vec{\omega}\ :$$

Քանի որ $\vec{\omega}$ վեկտորն ուղղահայաց է P հարթությանը, իսկ $\vec{r}'_M$ վեկտորն այդ հարթության մեջ է, ուրեմն $\vec{r}'_M \cdot \vec{\omega} = 0$: $\vec{r}'_M$ անհայտ վեկտորի համար վերջնականապես կստանանք՝

$$\vec{r}'_M = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2}: \tag{3.7}$$

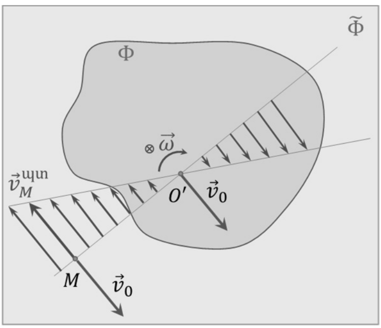
Այսպիսով, հաջողվեց ապացուցել, որ $\widetilde{\Phi}$ հարթությանը պատկանող $\vec{r}'_M$ շառավիղ վեկտորով կետի արագությունը ժամանակի տվյալ պահին հավասար է զրոյի: Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում $\vec{\omega}$ և $\vec{v}_0$ վեկտորները ժամանակից կախված մեծություններ են, այնպես որ հարթ շարժման ընթացքում M կետն ունի անընդհատ փոփոխվող դիրք:

Քանի որ O' կետի ընտրությունը կամայական է, ապա կարող ենք այդ կետի փոխարեն ընտրել M կետը: Այդպիսի ընտրության դեպքում A կետի արագության համար, օգտվելով (3.4)-ից, կգրենք

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{MA}\,, \tag{3.8}$$

որտեղ $\vec{r}_{MA}$ վեկտորը M կետը A կետին միացնող վեկտորն է: Ստացված բանաձևը համընկնում է պտտական շարժում կատարող նյութական կետի գծային և անկյունային արագությունների կապն արտահայտող բանաձևի հետ:

Այսպիսով, պինդ մարմնի հարթ շարժումը ժամանակի տվյալ պահին կարելի է ներկայացնել որպես մաքուր պտույտ՝ (3.7) բանաձևով որոշվող M կետով անցնող և P հարթությանն ուղղահայաց առանցքի շուրջը: Այս առանցքը ստացել է ակնթարթային առանցք անվանումը: Ակնթարթային առանցքի դիրքը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է՝ իհարկե միշտ մնալով P հարթությանն ուղղահայաց:



Նկ.3-8. Ակնթարթային առանցքի դիրքը:

Ժամանակի տվյալ պահին ակնթարթային առանցքի դիրքի վերաբերյալ գրաֆիկական պարզաբանումը բերված է Նկ.3-8-ում:

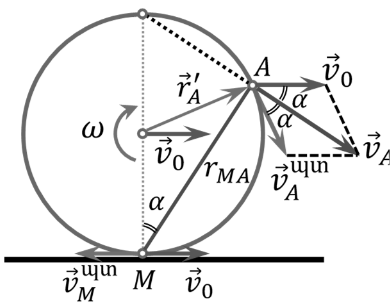
Պտույտով պայմանավորված՝ գծային արագությունը պտտման կենտրոնից ունեցած հեռավորության աճմանը զուգընթաց գծային օրենքով աճում է: Պտտման ակնթարթային առանցքը անցնում է $\widetilde{\Phi}$ հարթության այն M կետով, որտեղ պտույտով պայմանավորված՝ $\vec{v}_{\mathrm{M}}^{\,պտ}$ գծային արագությունը մոդուլով հավասարվում է համընթաց շարժման $\vec{v}_0$ արագությանը և հակուղղված լինում վերջինին: Ինչպես տեսնում ենք, պտտման ակնթարթային առանցքի դիրքը ներկայացնող M կետը կարող է նաև պինդ մարմնի և P հարթության հատումից առաջացած Φ հարթ պատկերից դուրս լինել:

3.3.4 Հարթ շարժման օրինակ՝ գլանի գլորումը հարթությունով

Դիտարկենք գլանի գլորումը հարթությունով: Ենթադրենք տեղի է ունենում մաքուր գլորում, այսինքն՝ սահքը բացակայում է: Այս խնդրում գլանի բոլոր կետերը շարժվում են գլանի առանցքին ուղղահայաց հարթությունների մեջ, հետևաբար շարժումը հարթ շարժում է: Գլանի առանցքի շարժման արագությունը նշանակենք $\vec{v}_0$, արագացումը՝ $\vec{a}_0$, իսկ իր առանցքի շուրջը պտտման անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը համապատասխանաբար՝ $\vec{\omega}$ և $\vec{\varepsilon}$: Գլանի մակերևույթի որևէ A կետի արագություն կորոշվի հարթ շարժման արագության

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_A^{(պտ)}:$$

բանաձևով, որտեղ $\vec{v}_A^{(պտ)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_A'$ -ը A կետի՝ գլանի պտույտով պայմանավորված գծային արագությունն է: Նկատենք, որ գլանի մակերևույթի բոլոր կետերի համար պտույտով պայմանավորված գծային արագության վեկտորի մոդուլը կլինի միևնույնը: Տարբեր կետերում այդ վեկտորի ուղղությունը կլինի տարբեր: Նկ.3-9-ում պատկերված դեպքում անկյունային արագության վեկտորն ուղղված է նկարի հարթությանն ուղղահայաց, դիտողից դեպի նկարը ուղղությամբ:



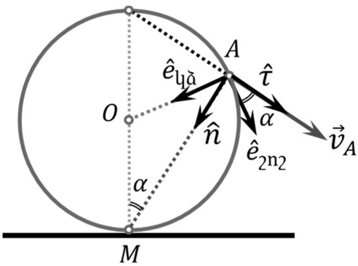
Նկ.3-9

Եթե գլանը չի սահում, ապա նշանակում է ժամանակի ցանկացած պահի հարթության հետ հպման գծին պատկանող գլանի կետերի արագությունը հավասար է զրոյի: Հիշենք, որ ակնթարթային առանցքի դիրքը նկարագրող M կետն այն կետն էր, որի արագությունը ժամանակի տվյալ պահին հավասար էր զրոյի: Քննարկվող խնդրում M կետը հպման կետն է: Գլանի գլորումը տվյալ պահին կարելի է ներկայացնել որպես մաքուր պտույտ հպման գծի շուրջը: Ակնթարթային առանցքը յուրաքանչյուր պահի հպման գիծն է, որն այս շարժման ժամանակ շարժվում է նույն $\vec{v}_0$ արագությամբ: Ինչպես երևում է նկարից, հպման կետում համընթաց շարժման $\vec{v}_0$ արագությունը և պտույտի գծային $\vec{v}_A^{(պտ)}$ արագությունները հակուղղված են: Այստեղից հետևում է, որ սահքի բացակայության դեպքում այդ արագությունները մոդուլով իրար հավասար են: Քանի որ եզրագծի բոլոր կետերում $\vec{v}_A^{(պտ)}$ վեկտորի մոդուլը նույնն է, ուրեմն կարող ենք եզրակացնել, որ եզրագծի բոլոր կետերում նրա մոդուլը հավասար կլինի v_0-ի: Սահքի բացակայության դեպքում անկյունային արագության մոդուլը որոշվում է $\omega = v_0/R$ բանաձևով, որտեղ R-ը գլանի շառավիղն է:

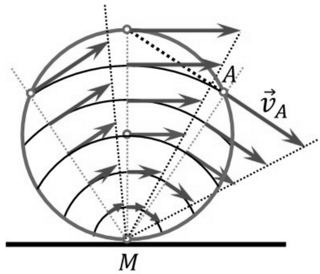
Հպման կետը A կետին միացնող գծի կազմած անկյունը հարթությանն ուղղահայաց ուղղության հետ նշանակենք α–ով (Նկ.3-9): Քանի որ նկարում պատկերված պահին հարթ շարժումը բերվել է հպման կետով անցնող առանցքի շուրջը պտույտի, ապա ակնհայտ է, որ $\vec{v}_A$ արագությունը կլինի ուղղահայաց MA գծին: Այս եզրակացությունը կարելի էր անել նաև զուտ երկրաչափական դատողություններից ելնելով: Նկատենք, որ ինչ դիրք էլ գրավի եզրագծի A կետը, նրա արագության շարունակությունն անպայման կանցնի հպման կետի նկատմամբ տրամագծորեն հակադիր կետով: A կետի արագության ուղղության միավոր վեկտորը նշանակենք $\hat{\tau}$–ով, իսկ A-ից դեպի հպման կետ ուղղված միավոր վեկտորը՝ $\hat{n}$–ով (Նկ.3-10): Պայմանավորվենք շոշափող ուղղություն ասելով՝ հասկանալ գլանին շոշափող ուղղությունը ($\hat{e}_{շոշ}$), հետագծին շոշափողը պարզ է, որ $\hat{\tau}$–ն է: Գլանի եզրագծի որևէ կետից դեպի գլանի հատույթ հանդիսացող շրջանի կենտրոն ուղղությունը կանվանենք կենտրոնաձիգ ուղղություն ($\hat{e}_{կձ}$):

Արագության համար կստանանք՝

$$\vec{v}_A = 2v_0 cos\alpha\,\hat{\tau}\ ։ \tag{3.9}$$



Նկ.3-10



Նկ.3-11

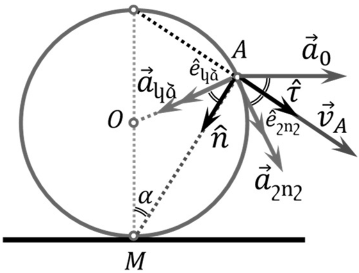
Հաշվի առնելով, որ $2Rcos\alpha = r_{MA}$, արագության համար կգրենք $\vec{v}_A = \omega\, r_{MA}\,\hat{\tau}$, ինչը նշանակում է, որ տվյալ պահին A կետը պտտվում է M կետի շուրջը $\omega = v_0/R$ անկյունային արագությամբ։ Ակնթարթային առանցքից միևնույն հեռավորությունն ունեցող կետերի գծային արագությունները մոդուլով իրար հավասար կլինեն։ Նկ.3-11-ում M կենտրոնով շրջանագծերի աղեղներից յուրաքանչյուրի վրա գտնվող գլանի կետերի գծային արագությունների մոդուլը միատեսակ արժեք կունենա։ Նկարում պատկերված են արագության վեկտորները գլանի՝ գլորման հարթությանն ուղղահայաց տրամագծի տարբեր կետերում։

Արագացման համար (3.5)-ից ունենք՝

$$\vec{a}_A = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_A - \omega^2 \vec{r}'_A\,,$$

Քննարկենք արագացման երեք բաղադրիչներն առանձին-առանձին։ Մեր խնդրում $\vec{a}_0$ արագացումը կարող է լինել $\vec{v}_0$ արագությանը կա՛մ համուղղված, կա՛մ հակուղղված։ $\vec{a}_0$-ի պրոյեկցիան $\vec{v}_0$-ի ուղղության վրա նշանակենք a_{0v}-ով։

Պարզենք արագացման $\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_A$ անդամի ուղղությունը և մոդուլը: Նկատենք, որ անկյունային արագացումը և անկյունային արագությունը ուղղված են մեկ գծով: Անկյունային արագացումը և անկյունային արագությունը համուղղված կլինեն, եթե $\vec{a}_0$ և $\vec{v}_0$ վեկտորները համուղղված լինեն և հակուղղված կլինեն, եթե $\vec{a}_0$ և $\vec{v}_0$ վեկտորները հակուղղված լինեն: Օգտվելով սահքի բացակայության $v_0 = \omega R$ պայմանից՝ կարող ենք գրել $a_{0v} = \varepsilon_\omega R$: Անկյունային արագացման համար կարող ենք գրել $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_\omega \vec{\omega}/\omega$, որտեղ ε_ω-ն $\vec{\varepsilon}$ վեկտորի պրոյեկցիան է $\vec{\omega}$ –ի վրա: $\vec{a}_1$ վեկտորի համար կունենանք՝ $\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'_A = \varepsilon_\omega (\vec{\omega} \times \vec{r}'_A)/\omega = \varepsilon_\omega \vec{v}_A^{(\text{պտ})}/\omega$: Ինչպես տեսնում ենք, $\vec{a}_1$ վեկտորը, շոշափող ուղղության վեկտոր է՝



Նկ.3-12

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{\text{շոշ}} = a_{0v}\, \vec{v}_A^{(\text{պտ})}/v_0 = a_{0v}\, \hat{e}_{\text{շոշ}} : \qquad (3.10)$$

$\vec{a}_{\text{շոշ}}$ արագացումը ուղղված կլինի $\hat{e}_{\text{շոշ}}$ ուղղությամբ, եթե $\vec{a}_0$-ն ուղղված լինի $\vec{v}_0$-ի ուղղությամբ: $\vec{a}_{\text{շոշ}}$ արագացումը հակուղղված կլինի $\hat{e}_{\text{շոշ}}$ ուղղությանը, եթե $\vec{a}_0$-ն հակուղղված լինի $\vec{v}_0$-ին:

Արագացման երրորդ բաղադրիչի համար կունենանք՝

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_{\text{կձ}} = -\omega^2\, \vec{r}'_A = \omega^2 R\, \hat{e}_{\text{կձ}} = \frac{v_0^2}{R}\, \hat{e}_{\text{կձ}} : \qquad (3.11)$$

Նկ.3-12–ում պատկերել ենք արագացման երեք բաղադրիչներն այն ենթադրությամբ, որ $\vec{a}_0$-ն համուղղված է $\vec{v}_0$-ին ($a_{0v} = a_0$), ուստի $\varepsilon_\omega = \varepsilon$: Եթե $\vec{a}_0$ արագացումը հակառակ ուղղված լինի $\vec{v}_0$-ին, ապա նկարում $\vec{a}_0$ և $\vec{a}_{\text{շոշ}}$ վեկտորները միաժամանակ կշրջվեն հակառակ ուղղության: Ուշադրություն դարձնենք, որ նկարում պատկերված $\vec{a}_0$

և $\vec{a}_{շող}$ վեկտորները արագության $\vec{v}_A$ վեկտորի նկատմամբ հայելային համաչափ դիրք ունեցող վեկտորներ են:

Արագացման $\vec{a}_0, \vec{a}_{շող}, \vec{a}_{կձ}$ բաղադրիչների վերաբերյալ վերևում ստացածն օգտագործելով՝ կարող ենք գտնել արագացման տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչները: Նկ.3-12-ից երևում է, որ տանգենցիալ բաղադրիչի մեջ ներդրում ունեն արագացման բոլոր երեք գումարելիները: Արագացման տանգենցիալ բաղադրիչի համար կստանանք՝

$$a_\tau = 2a_{0v}cos\alpha - \frac{v_0^2}{R}sin\alpha : \tag{3.12}$$

Նորմալ բաղադրիչի մեջ $\vec{a}_0, \vec{a}_{շող}$ արագացումների ներդրումները կկրճատվեն վերջիններիս հայելային համաչափ դասավորության պատճառով: Արագացման նորմալ բաղադրիչի համար կունենանք՝

$$a_n = \frac{v_0^2}{R}cos\alpha : \tag{3.13}$$

Արագացման մոդուլը հավասար կլինի՝

$$a = \sqrt{\left(2a_{0v}cos\alpha - \frac{v_0^2}{R}sin\alpha\right)^2 + \frac{v_0^4}{R^2}cos^2\alpha} : \tag{3.14}$$

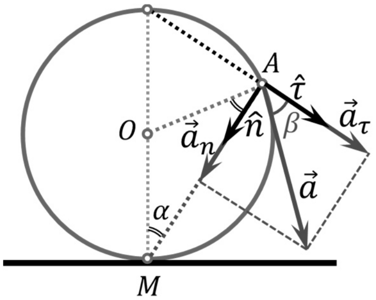
Արագացման և արագության կազմած $\beta = (\widehat{\vec{a}, \vec{v}})$ անկյան համար (տե՛ս Նկ.3-13) կունենանք՝

$$\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{2a_{0v}R}{v_0^2} - tg\alpha : \tag{3.15}$$

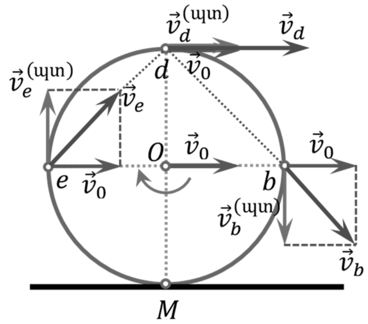
Հետագծի կորության $R_c^{(A)}$շառավիղը A կետում կգտնենք՝ օգտվելով արագացման նորմալ բաղադրիչի $a_n = v^2/R_c^{(A)}$.

$$R_c^{(A)} = 4Rcos\alpha: \tag{3.16}$$

Օգտվելով գլանի եզրագծի կամայական A կետի կինեմատիկական բնութագրերի համար վերևում ստացած արտահայտություններից՝ որոշենք Նկ.3-14-ում պատկերված b, d, e երեք նշանավոր կետերի բնութագրերը:



Նկ.3-13



Նկ.3-14

Գլանի b կետի համար $\alpha = \pi/4$: Օգտվելով (3.9) և (3.12)-(3.16) բանաձևերից՝ կստանանք՝

$$
\begin{gathered}
v_b = \sqrt{2}v_0, \\
a_\tau^{(b)} = \sqrt{2}a_{0v} - \frac{v_0^2}{\sqrt{2}R}\,, a_n^{(b)} = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}R}\,, \\
a_b = a_0\sqrt{1 + \left(1 - \frac{v_0^2}{Ra_{0v}}\right)^2}, \\
ctg\beta_b = \frac{2Ra_{0v}}{v_0^2} - 1, R_c^{(b)} = 2\sqrt{2}R,
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

Գլանի d կետի համար ($\alpha = 0$) կունենանք

$$
\begin{gathered}
v_d = 2v_0, \\
a_\tau^{(d)} = 2a_{0v}\,, a_n^{(d)} = \frac{v_0^2}{R}\,, \\
a_d = \sqrt{4a_0^2 + \frac{v_0^4}{R^2}}\,, \\
ctg\beta_d = \frac{2Ra_{0v}}{v_0^2}, R_c^{(d)} = 4R:
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

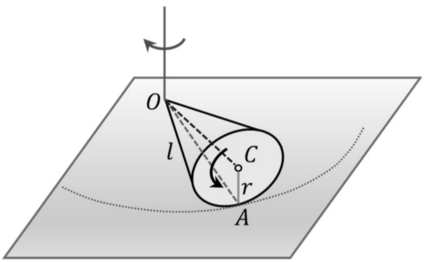
Գլանի e կետի համար ($\alpha = -\pi/4$) կստանանք

$$v_e = \sqrt{2}v_0,$$
$$a_\tau^{(b)} = \sqrt{2}a_{0v} + \frac{v_0^2}{\sqrt{2}R}\ , a_n^{(b)} = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}R}\,,$$
$$a_b = a_0\sqrt{1 + \left(1 + \frac{v_0^2}{Ra_{0v}}\right)^2}\,, \tag{3.19}$$
$$ctg\beta_e = \frac{2Ra_{0v}}{v_0^2} + 1, R_c^{(b)} = 2\sqrt{2}R\ :$$

3.4 Խնդիրների լուծման օրինակներ

3-1. **Կոնը, որի ծնորդը $\boldsymbol{l}$ է, իսկ հիմքի շառավիղը՝ $\boldsymbol{r}$, առանց սահքի գլորվում է հարթությունով այնպես, որ նրա $\boldsymbol{O}$ գագաթը գտնվում է հարթության սևեռված կետում (Նկ.3-15)։ Կոնի հավասարաչափ իրականացվող մեկ պտույտը գագաթով անցնող և հարթությանն ուղղահայաց առանցքի շուրջը կատարվում է $\boldsymbol{T}$ ժամանակում։ Գտե՛ք կոնի պտտման անկյունային արագությունը գլորման հարթության հետ կապված հաշվարկման համակարգում։**

Լուծում: Կոնը միաժամանակ մասնակցում է երկու պտույտների։

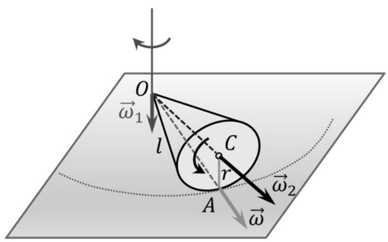


Նկ.3-15

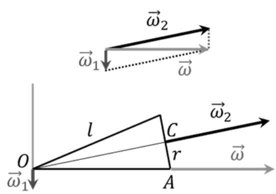
Այդ պտույտներից մեկի $\vec{\omega}_1$ անկյունային արագությունն ուղղված է գլորման հարթությանն ուղղահայաց, իսկ մյուսի $\vec{\omega}_2$ անկյունային արագությունը՝ գլանի համաչափության առանցքով։ Կոնի պտտման արդյունարար $\vec{\omega}$ անկյունային արագությունը կորոշվի անկյունային արագությունների գումարման կանոնով՝

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 :$$

$\vec{\omega}_1$ և $\vec{\omega}_2$ անկյունային արագությունները՝ ինչպես ըստ մոդուլների, այնպես էլ ըստ ուղղությունների, փոխադարձ կախվածություն ունեն միմյանցից: Եթե համարենք, որ գլորումը տեղի է ունենում ժամսլաքի պտույտի ուղղությամբ, այսինքն՝ $\vec{\omega}_1$ անկյունային արագությունն ուղղված է ուղղաձիգով դեպի գլորման հարթությունը, ապա $\vec{\omega}_2$ անկյունային արագությունն ուղղված կլինի համաչափության առանցքով՝ գագաթից դեպի հիմք ուղղությամբ (Նկ.3-16): Այս վեկտորներից մեկի ուղղության հակադարձման դեպքում մյուսի ուղղությունը ևս կհակադարձվի:



Նկ.3-16



Նկ.3-17

Խնդրի տվյալներից օգտվելով՝ $\vec{\omega}_1$ անկյունային արագության մոդուլի համար կարող ենք գրել՝

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} :$$

Անկյունային արագությունների մոդուլների միջև կապը կարելի է գտնել ինչպես երկրաչափական դատողությունների միջոցով, այնպես էլ ակնթարթային արագության գաղափարից օգտվելու եղանակով: Նախ շարադրենք ակնթարթային արագության միջոցով մոդուլների կապի որոշելը:

Քանի որ կոնի՝ հարթության հետ հպման գծին պատկանող բոլոր կետերը ժամանակի տվյալ պահին հարթության նկատմամբ անշարժ են, ուստի ակնթարթային առանցքը հպման գծի հետ համընկնող առանցքն է: Նշանակում է կոնի բարդ շարժումը տվյալ պահին կարելի է պատկերացնել որպես մաքուր պտույտ այդ առանցքի շուրջը: Այլ կերպ ասած, կոնի պտտման $\vec{\omega}$ արդյունարար անկյունային արագությունը հենց այդ առանցքով է ուղղված: Նկ.3-17-ից օգտվելով՝ կգտնենք՝

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{l}, \omega = \sqrt{{\omega_2}^2 - {\omega_1}^2} = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{r}\omega_1 :$$

Անկյունային արագությունների կապը կարելի է գտնել նաև հետևյալ դատողությունների միջոցով: Կոնի՝ գլորման հարթությանն ուղղահայաց առանցքի շուրջը մեկ պտույտի ժամանակ կոնի A կետը հարթության մեջ կգծի շրջանագիծ, որի երկարությունը $2\pi l$ է: Կոնի՝ իր առանցքի շուրջը մեկ պտույտ կատարելու ընթացքում այդ կետը կոնի առանցքի համակարգում կանցնի $2\pi r$ ճանապարհ: Քանի որ սահքը բացակայում է, ապա այդ նույն ընթացքում կոնի կատարած պտույտների թիվը հավասար կլինի վերոհիշյալ երկարությունների հարաբերությանը՝

$$N_2 = \frac{l}{r} :$$

Անկյունային արագությունների կապի համար կստանանք՝

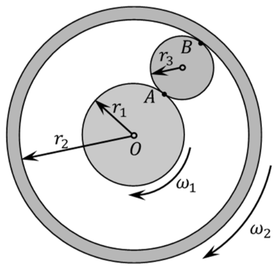
$$\omega_2 = \frac{2\pi N_2}{T} = \frac{2\pi l}{rT} = \frac{l}{r}\omega_1 :$$

$\vec{\omega}_1$ և $\vec{\omega}_2$ վեկտորների ուղղությունների հայտնի լինելու հանգամանքը և այս վերջին եղանակով նրանց հարաբերության համար ստացածը ապացուցում են, որ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ արդյունարար անկյունային արագությունն իսկապես ուղղված է հպման գծով:

Այսպիսով, կոնի պտտման անկյունային արագությունը գլորման հարթության հետ կապված հաշվարկման համակարգում կլինի

$$\omega = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{r}\frac{2\pi}{T}:$$

3-2. Երկու համառանցք անիվներ, որոնց շառավիղները $\boldsymbol{r_1}$ և $\boldsymbol{r_2}$ ($\boldsymbol{r_2 > r_1}$) են միևնույն ուղղությամբ հավասարաչափ պտտվում են համապատասխանաբար $\boldsymbol{\omega_1}$ և $\boldsymbol{\omega_2}$ անկյունային արագություններով: Անիվների միջև դրված է $\boldsymbol{r_3 = (r_2 - r_1)/2}$ շառավղով երրորդ անիվը, որը շարժվում է առանց սահքի (Նկ.3-18): Գտե՛ք երրորդ անիվի $\boldsymbol{\omega}$ անկյունային արագությունը, այդ անիվի կենտրոնի $\boldsymbol{v_0}$ գծային արագությունը և ակնթարթային առանցքի դիրքը: Առաջին և երրորդ անիվների հպման կետից հաշված ի՞նչ հեռավորության վրա է գտնվում պտտման ակնթարթային առանցքը:



Նկ.3-18

Լուծում: Նկատենք, որ երրորդ անիվի շարժումը պինդ մարմնի հարթ շարժման դասին է պատկանում, քանի որ անիվի բոլոր կետերը շարժվում են նկարի հարթությանը զուգահեռ հարթություններում: Տեսությունից մեզ արդեն հայտնի է, որ այս դեպքում անպայման գոյություն ունի պտտման ակնթարթային առանցք, որի շուրջը մաքուր պտտական շարժման է հանգում տվյալ պահի հարթ շարժումը:

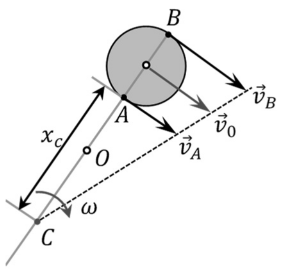
Քանի որ անիվները պտտվում են առանց սահքի, ուրեմն հպման կետում երկու հպվող անվների գծային արագությունները նույնն են: Առաջին անիվի եզրակետի գծային արագությունը $\omega_1 r_1$ է, ուրեմն երրորդ անիվին պատկանող A կետի գծային արագությունը կլինի $v_A = \omega_1 r_1$: Նույն դատողություններով կստանանք երրորդ անիվին պատկանող B կետի գծային արագությունը՝ $v_B = \omega_2 r_2$:

Նկատի ունենալով այն հանգամանքը, որ մաքուր պտտական շարժման դեպքում կետը շարժվում է շրջանագծով, որի կենտրոնը տվյալ կետին միացնող շառավիղն ուղղահայաց է այդ կետի գծային արագության վեկտորին, կգանք եզրահանգման, որ ակնթարթային առանցքը՝ լինելով նկարի հարթությանն ուղղահայաց, կանցնի *OB* հատվածի շարունակությունը կազմող ուղիղ գծին պատկանող մի ինչ-որ C կետով: C կետը կլինի երրորդ անիվից դուրս: $v_B > v_A$ դեպքում այն կլինի A կետից կենտրոնաձիգ ուղղությամբ շեղված (Նկ.3-19), իսկ $v_B < v_A$ դեպքում B կետից կենտրոնախույս ուղղությամբ շեղված (Նկ.3-20): Այս C կետի՝ A կետից ունեցած հեռավորությունը նշանակենք x_C-ով և քննարկենք գծային արագությունների միջև հարաբերակցության տարբեր դեպքեր.

ա) $\boldsymbol{v_B > v_A}$ $(\boldsymbol{\omega_2 r_2 > \omega_1 r_1})$

Այս դեպքում, ինչպես երևում է Նկ.3-19 –ից, երրորդ անիվի պտույտը տեղի է ունենում ժամսլաքի շարժման ուղղությամբ: Արագությունների համար կունենանք՝

$$v_A = \omega x_C = \omega_1 r_1,$$
$$v_B = \omega(x_C + 2r_3) = \omega_2 r_2 :$$



Նկ.3-19

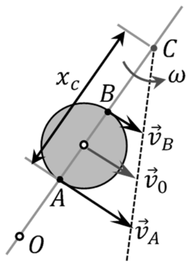
Լուծելով հավասարումների այս համակարգը՝ կգտնենք ակնթարթային առանցքի դիրքը նկարագրող x_C հեռավորությունը և երրորդ անիվի պտտման անկյունային արագությունը՝

$$x_C = 2r_3 \frac{\omega_1 r_1}{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}, \omega = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{2r_3} :$$

Երրորդ անիվի կենտրոնի շարժման գծային արագության համար կունենանք՝

$$v_0 = \omega(x_C + r_3) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} :$$

բ) $\boldsymbol{v_B < v_A\ (\omega_2 r_2 < \omega_1 r_1)}$



Նկ.3-20

Նկ.3-20-ից, երևում է, որ երրորդ անիվի պտույտն այս դեպքում տեղի կունենա ժամսլաքի պտույտին հակառակ: Արագությունների համար կունենանք՝

$$v_A = \omega x_C = \omega_1 r_1,$$
$$v_B = \omega(x_C - 2r_3) = \omega_2 r_2 :$$

Բնութագրական մեծությունների համար այս դեպքում կստանանք՝

$$x_C = 2r_3 \frac{\omega_1 r_1}{\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2}, \omega = \frac{\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2}{2r_3} :$$

Երրորդ անիվի կենտրոնի շարժման գծային արագության համար կունենանք՝

$$v_0 = \omega(x_C - r_3) = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} :$$

գ) $\boldsymbol{v_B = v_A\ (\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1)}$

Այս դեպքում երրորդ անիվի պտույտի անկյունային արագությունը զրո է: Երրորդ անիվն այս դեպքում կատարում է համընթաց շարժում, որի ժամանակ նրա կենտրոնը շարժվում է $r_1 + r_3$ շառավղով շրջանագծով:

դ) $\boldsymbol{\omega_2 = \omega_1}$

Առաջին և երկրորդ անիվների անկյունային արագությունների հավասար լինելու դեպքում՝ $x_C = r_1$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$: Այս դեպքում պտտման ակնթարթային առանցքն անցնում է առաջին և երկրորդ անիվների ընդհանուր O կենտրոնով: Երեք անիվները, որպես կոշտ ամրացված մեկ մարմին, համատեղ կատարում են մաքուր պտտական շարժում O կենտրոնով անցնող և նկարի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի շուրջը:

4. ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻՑ ՄՅՈՒՍԻՆ ԱՆՑՆԵԼԻՍ

Միևնույն մեխանիկական շարժումը կարելի է ուսումնասիրել տարբեր հաշվարկման համակարգերում: Շարժման խնդիրների քննարկման ժամանակ հաճախ անհրաժեշտություն է առաջանում մի հաշվարկման համակարգից անցում կատարել մեկ այլ հաշվարկման համակարգի: Ենթադրվում է, որ գիտենք նյութական կետի շարժման կինեմատիկական բնութագրերը առաջին հաշվարկման համակարգում, հայտնի է, թե ինչ շարժում է կատարում երկրորդ հաշվարկման համակարգը առաջինի նկատմամբ և պահանջվում է գտնել նյութական կետի շարժման բնութագրերը հաշվարկման երկրորդ համակարգում:

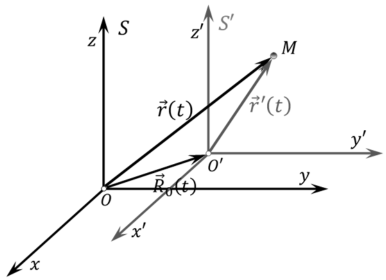
Չնայած այն հանգամանքին, որ մեկ հաշվարկման համակարգից մյուսին անցելիս շարժման բնութագրերի ձևափոխությունները օգտագործվում են առավելապես «Դինամիկա» բաժնում, սակայն այդ ձևափոխությունների ստացումն ու քննարկումը զուտ կինեմատիկայի տիրույթում են:

Ձևափոխությունների ստացման ընթացքում հիմնվելու ենք նյուտոնյան մեխանիկայի այն պատկերացումների վրա, որոնց համաձայն տարածական մասշտաբներն ու ժամանակը բացարձակ հասկացություններ են, այսինքն՝ կախված չեն համակարգի ընտրությունից: Նշենք, որ այս դրույթները մոտավոր կիրառելի են միայն դանդաղ շարժումների համար: Իրականում, ինչպես երկու կետերի միջև հեռավորությունը, այնպես էլ երևույթի տևողությունը տարբեր հաշվարկման համակարգերում տարբեր են: Այս հարցերին կանդրադառնանք դասընթացի վերջում՝ «Հարաբերականության հատուկ տեսության տարրերը» բաժնում:

Քննարկենք երկրորդ համակարգի շարժման մի քանի մասնավոր դեպքեր և ստանանք կինեմատիկական հիմնական բնութագրերի ձևափոխման բանաձևերը հաշվարկման մի համակարգից մյուսին անցնելիս:

4.1 Համընթաց շարժվող հաշվարկման համակարգ

Դիտարկենք S հաշվարկման համակարգը և նրա նկատմամբ համընթաց շարժվող S' հաշվարկման համակարգը: Գտնենք միևնույն նյութական կետի կինեմատիկական բնութագրերի՝ կոորդինատների, տեղափոխության, արագության և արագացման ձևափոխությունները S' համակարգից S համակարգին անցման ժամանակ:



Նկ.4-1

Քանի որ հաշվարկման համակարգի առանցքների ուղղությունների ընտրությունը մեզնից է կախված, ապա առանցքների ուղղություններն ընտրենք այնպես, որ S' համակարգի x', y', z' առանցքները լինեն զուգահեռ S համակարգի x, y, z համապատասխան առանցքներին (Նկ.4-1): Ժամանակի t պահին S' համակարգի O' սկզբնակետի շառավիղ վեկտորը S համակարգում նշանակենք $\vec{R}_0(X_0, Y_0, Z_0)$-ով, արագությունը՝ $\vec{V}_0(t)$-ով, իսկ արագացումը՝ $\vec{a}_0(t)$-ով: M նյութական կետի շառավիղ վեկտորը S համակարգում նշանակենք $\vec{r}(x, y, z)$-ով, իսկ S' համակարգում՝ $\vec{r}'(x', y', z')$-ով: Նկ.4-1-ից երևում է, որ շառավիղ վեկտորները ժամանակի կամայական պահի կապված են

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_0(t) + \vec{r}'(t) \tag{4.1}$$

առնչությամբ: Կոորդինատների ձևափոխությունները կգրվեն այսպես՝

$$x = X_0 + x', y = Y_0 + y', z = Z_0 + z': \tag{4.2}$$

$[t, t + dt]$ ժամանակահատվածում վեկտորների փոփոխությունները S համակարգում կապված են

$$d\vec{r}(t) = d\vec{R}_0(t) + \mathrm{d}\vec{r}'(t)$$

արտահայտությամբ: Համընթաց շարժման դեպքում պտույտը բացակայում է, ուստի տվյալ վեկտորի փոփոխությունը երկու համակարգերում էլ կլինի նույնը: Հաջորդ բաժնում, երբ կքննարկենք պտտվող համակարգի դեպքը, կտեսնենք որ տվյալ վեկտորի փոփոխությունը՝ պտույտի բերած լրացուցիչ փոփոխության պատճառով, երկու համակարգերում տարբեր է:

Վերևում բերված $d\vec{r}$ և $d\vec{R}_0$ աճերը S համակարգում որոշված վեկտորների փոփոխություններն են նույն համակարգում, հետևաբար կարող ենք գրել՝ $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ և $d\vec{R}_0 = \vec{V}_0 dt$: Ինչ վերաբերում է $\mathrm{d}\vec{r}'$ աճին, ապա այն S' համակարգում որոշված $\vec{r}'$ վեկտորի փոփոխությունն է S համակարգում: Նկատենք, որ $\vec{r}'$ վեկտորի փոփոխությունը S' համակարգում հավասար կլինի $\vec{v}\,'dt$-ի: Եթե պտույտը չբացակայեր, ապա վերևում բերված $\mathrm{d}\vec{r}'$ աճը հավասար չէր լինի $\vec{v}\,'dt$ արտադրյալին:

Այսպիսով, համընթաց շարժվող S' համակարգի դեպքում մի համակարգից մյուսին անցման ժամանակ արագության ձևափոխությունը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{v}\,' : \tag{4.3}$$

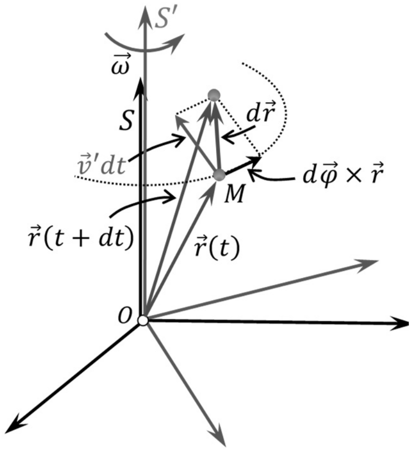
Մեկ անգամ ևս ածանցելով ըստ ժամանակի և հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ պտույտի բացակայության դեպքում վեկտորի աճը երկու համակարգերում էլ նույնն է՝ արագացման ձևափոխման օրենքը կգրենք այսպես՝

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' : \tag{4.4}$$

Ուղղագիծ հավասարաչափ շարժվող S' համակարգի դեպքում արագացումը երկու համակարգերում կլինի նույնը՝ $\vec{a} = \vec{a}'$: Եթե մեծությունը որևէ ձևափոխության ժամանակ մնում է անփոփոխ, ապա ասում են որ այն ինվարիանտ է այդ ձևափոխության նկատմամբ: Արագացումը ինվարիանտ է ($\vec{a} = inv$) մի հաշվարկման համակարգից այդ համակարգի նկատմամբ ուղղագիծ հավասարաչափ համընթաց շարժվող մեկ այլ համակարգի անցման ձևափոխության նկատմամբ:

4.2 Անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող համակարգ

Դիցուք S' համակարգը պտտվում է S համակարգում անշարժ առանցքի շուրջը $\vec{\omega}(t)$ անկյունային արագությամբ: Երկու հաշվարկման համակարգերի սկզբնակետերն ընտրենք պտտման առանցքի վրա գտնվող միևնույն O կետում: Այսպիսի ընտրության դեպքում M կետի շառավիղ վեկտորները S և S' համակարգերում կհամընկնեն՝ $\vec{r}' \equiv \vec{r}$ (Նկ.4-2):



Նկ.4-2

Կինեմատիկական մեծությունների ձևափոխությունները ստանալուց առաջ պարզենք կամայական $\vec{b}$ վեկտորի S և S' համակարգերում ունեցած աճերի միջև եղած կապը: Մի պահ ենթադրենք, թե $\vec{b}$ վեկտորը S' համակարգերում անփոփոխ վեկտոր է և հավասար $\vec{b}'$-ի (S' համակարգին կոշտ ամրացված վեկտոր է): S համակարգում այդ վեկտորը փոփոխություն կկրի, քանի որ dt ժամանակահատվածում S' համակարգի հետ միասին պտտված կլինի $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}dt$ անկյունով: Այս պտույտի պատճառով նրա փոփոխությունը կլինի $d\vec{\varphi} \times \vec{b}'$: Եթե S' համակարգում $\vec{b}'$ վեկտորը հաստատուն չէ և այդ համակարգի դիտողի տեսակետից փոփոխվում է $\dot{\vec{b}}'$ արագությամբ, ապա պտույտով պայմանավորված՝ փոփոխությանը կգումարմի $\dot{\vec{b}}'dt$ փոփոխությունը: S համակարգում $\vec{b}$ վեկտորի փոփոխությունը այսպիսով հավասար կլինի՝

$$d\vec{b} = \dot{\vec{b}}'dt + d\vec{\varphi} \times \vec{b}' : \tag{4.5}$$

Այս արտահայտության մեջ $\dot{\vec{b}}'$-ը $\vec{b}'$ վեկտորի ժամանակային ածանցյալն է S' համակարգում: Ինչպես համոզվեցինք, պտտվող համակարգի դեպքում միևնույն վեկտորական մեծության աճը երկու համակարգերում տարբեր է: Եթե համակարգերը իրար նկատմամբ չեն պտտվում (իսկ դա կլինի այն դեպքում, երբ իրար նկատմամբ համընթաց շարժում կատարեն), վեկտորական մեծության աճերը երկու համակարգերում կլինեն նույնը:

Այսպիսով, $\vec{b}$ վեկտորական մեծության ըստ ժամանակի ածանցյալները S համակարգում և այդ համակարգի անշարժ առանցքի շուրջը $\vec{\omega}$ անկյունային արագությամբ պտտվող S' համակարգում իրար հետ կապված են

$$\frac{d\vec{b}}{dt}^{(S)} = \frac{d\vec{b}'}{dt}^{(S')} + \vec{\omega} \times \vec{b}' : \tag{4.6}$$

Օգտվելով կամայական վեկտորի համար ստացածից՝ այն կիրառենք շառավիղ վեկտորի համար, հաշվի առնելով, որ շառավիղ վեկտորի ածանցյալն ըստ ժամանակի նյութական կետի արագությունն է:

Արագության ձևափոխության համար կստանանք՝

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}': \tag{4.7}$$

Այստեղ $\vec{v}$-ն և $\vec{v}'$-ը նյութական կետի արագություններն են համապատասխանաբար՝ S և S' համակարգերում:

Արագության ըստ ժամանակի ածանցյալը S համակարգում կլինի նյութական կետի արագացումը S համակարգում՝

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}^{(S)} = \frac{d\vec{v}'}{dt}^{(S)} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}^{(S)} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}':$$

(4,6)-ից օգտվելով՝ կգրենք՝

$$\frac{d\vec{v}'^{(S)}}{dt} = \frac{d\vec{v}'^{(S')}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}',$$
$$\frac{d\vec{r}'^{(S)}}{dt} = \frac{d\vec{r}'^{(S')}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}':$$
Տեղադրելով արագացման բանաձևի մեջ և օգտվելով անկյունային արագացման $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$ սահմանումից՝ կստանանք՝

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}': \tag{4.8}$$

Ստացվածը արագացման ձևափոխությունն է պտտվող S' համակարգից անշարժ համակարգի անցման ժամանակ: Կրկնակի վեկտորական արտադրյալով անդամը կարելի է ձևափոխել, նկատելով, որ $\vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'_{\perp}$, որտեղ $\vec{r}'_{\perp}$ շառավիղ վեկտորի պրոյեկցիան է պտտման առանցքին ուղղահայաց ուղղության վրա: Օգտվենք «բաց մինուս ցաբ» կանոնից՝

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\perp}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_{\perp}) - \omega^2\, \vec{r}'_{\perp} = -\omega^2\, \vec{r}'_{\perp}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, այս անդամը կենտրոնաձիգ (առանցքաձիգ) արագացումն է՝

$$\vec{a}_{կձ} = -\omega^2\, \vec{r}'_{\perp}: \tag{4.9}$$

Արագացման ձևափոխության (4.8) բանաձևի $2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$ անդամը ֆիզիկայում հայտնի է որպես Կորիոլիսի արագացում՝

$$\vec{a}_{Կոր} = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}': \tag{4.10}$$

4.3 Համընթաց շարժվող առանցքի շուրջը պտտվող համակարգ

Դիտարկվող դեպքում S' համակարգը պտտվում է մի առանցքի շուրջը, որը $\vec{v}_0$ արագությամբ և $\vec{a}_0$ արագացմամբ համընթաց շարժում է կատարում S համակարգի նկատմամբ: Մտովի ներմուծենք S համակարգի նկատմամբ համընթաց շարժվող $\tilde{S}$ հաշվարկման համակարգ, որում պտտման առանցքն անշարժ է: $\tilde{S}$ հաշվարկման համակարգից S համակարգին անցման ձևափոխությունը կկատարվի 4.1–ում ստացված բանաձևի համաձայն՝

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}, \vec{a} = \vec{a}_0 + \tilde{\vec{a}} \; : \tag{4.11}$$

S' հաշվարկման համակարգից $\tilde{S}$ համակարգին անցումը համապատասխանում է 4.2-ում քննարկած դեպքին, ուրեմն կարող ենք գրել՝

$$\begin{gathered} \tilde{\vec{v}} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}', \\ \tilde{\vec{a}} = \vec{a}' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' - \omega^2\, \vec{r}'_\perp + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}': \end{gathered} \tag{4.12}$$

$$\begin{gathered} \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}', \\ \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}' - \omega^2\, \vec{r}'_\perp + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}': \end{gathered} \tag{4.13}$$

«Դինամիկա» բաժնի շարադրանքում կանդրադառնանք կենտրոնաձիգ (առանցքաձիգ) և կորիոլիսյան արագացումներին և ցույց կտանք, որ այդ արագացումները պտտվող ոչ իներցիալ համակարգերում բերում են, այսպես կոչված, իներցիոն ուժերի առաջացման, որոնց պատճառը ոչ թե այլ մարմինների հետ փոխազդեցություններն են, այլ հաշվարկման համակարգի առանձնահատկությունը: Առանցքաձիգ արագացմամբ պայմանավորված իներցիոն ուժը ստացել է *կենտրոնախույս ուժ* անվանումը, իսկ կորիոլիսյան արագացմամբ պայմանավորվածը՝ *Կորիոլիսի ուժ* անվանումը: Կենտրոնախույս ուժի ներգործությունը կզգանք, եթե, օրինակ, գտնվենք հորիզոնական պտտվող բեմի վրա, անկախ նրանից բեմում անշարժ կանգնած ենք, թե շարժվում ենք: Պտտվող բեմում շարժվելու դեպքում կենտրոնախույս ուժից զատ կզգանք բեմի հարթությանը զուգահեռ և մեր շարժման ուղղությանն ուղղահայաց ազդող ուժի առկայությունը ևս, որը կորիոլիսյան ուժն է:

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գրիգոր Բախշիի Ալավերդյան

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

(ուսումնական ձեռնարկ)

I. ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

Հրատ. պատ. խմբագիր՝ Լ. Հովհաննիսյան
Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Ա. Գույումջյանի

Տպագրված է «ՔՈՓԻ ՓՐԻՆԹ» ՍՊԸ-ում:
Ք. Երևան, Խորենացի 4-րդ նրբ., 69 տուն

Ստորագրված է տպագրության՝ 08.07.2022:
Չափսը՝ 60x84 1/16: Տպ. մամուլը՝ 6.5:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am