

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В А ИЛЬИН, Э. Г ПОЗНЯК

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

*Допущено Министерством общего
и профессионального образования Российской Федерации
в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений обучающихся
по специальностям «Физика» и «Прикладная математика»*



МОСКВА
НАУКА • ФИЗМАТЛИТ
1999

УДК 512.8
ББК 22.143
И 46

Издание осуществлено при содействии
ООО «Фирма "Издательство АСТ»

УЧЕБНИК УДОСТОЕН
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРЕМИИ СССР ЗА 1980 ГОД
КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Под редакцией

А. Н.ТИХОНОВА, В.А.ИЛЬИНА,

А. Г. СВЕШНИКОВА

ВЫПУСК 4

ИЛЬИН В.А., ПОЗНЯК Э.Г. Линейная алгебра: Учеб. Для вузов — 4-е изд. — М. Наука. Физматлит, 1999 — 296 с. — (Курс высшей математики и мат. физики) — ISBN 5-02-015235-8 (Вып 4)

Один из выпусков «Курса высшей математики и математической физики» под редакцией А.Н.Тихонова, В.А.Ильина, А.Г.Свешникова Учебник создан на базе лекций, читавшихся авторами в течение многих лет на физическом факультете Московского государственного университета Содержание книги составляют теория матриц и определителей, конечномерных линейных и евклидовых пространств и линейных операторов в этих пространствах, билинейных и квадратичных форм, тензоров, вопросы классификации поверхностей второго порядка и теории представления групп Воспроизводится с 3-го изд (1984 г).

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Физика» и «Прикладная математика»

Ил 1

ТП-98-П-169

О В А Ильин, ЭГПозняк, 1998

S> Наука Физматлит, оформление, 1998

ISBN 5-02-015230-7

ISBN 5-02-015235-8 (Вып.4)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию	7
Предисловие к первому изданию	7
Введение	9
Глава 1. Матрицы и определители	10
§ 1. Матрицы	10
1. Понятие матрицы (10). 2. Основные операции над матрицами и их свойства (11). 3. Блочные матрицы (15).	
§ 2. Определители	16
1. Понятие определителя (17). 2. Выражение определителя непосредственно через его элементы (23). 3. Теорема Лапласа (24). 4. Свойства определителей (27). 5. Примеры вычисления определителей (30). 6. Определитель суммы и произведения матриц (34). 7. Понятие обратной матрицы (36).	
§ 3. Теорема о базисном миноре матрицы	37
1. Понятие линейной зависимости строк (37). 2. Теорема о базисном миноре (38). 3. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя (40).	
Глава 2. Линейные пространства	41
§ 1. Понятие линейного пространства.	41
1. Определение линейного пространства (41). 2. Некоторые свойства произвольных линейных пространств (44).	
§ 2. Базис и размерность линейного пространства	46
1. Понятие линейной зависимости элементов линейного пространства (46). 2. Базис и координаты (48). 3. Размерность линейного пространства (49). 4. Понятие изоморфизма линейных пространств (51).	
§ 3. Подпространства линейных пространств	53
1. Понятие подпространства и линейной оболочки (53). 2. Новое определение ранга матрицы (56). 3. Сумма и пересечение подпространств (56). 4. Разложение линейного пространства в прямую сумму подпространств (58).	
§ 4. Преобразование координат при преобразовании базиса n -мерного линейного пространства	60
1. Прямое и обратное преобразование базисов (60). 2. Связь между преобразованием базисов и преобразованием соответствующих координат (62).	
Глава 3. Системы линейных уравнений	64
§ 1. Условие совместности линейной системы	64
1. Понятие системы линейных уравнений и ее решения (64). 2. Нетривиальная совместность однородной системы (67). 3. Условие совместности общей линейной системы (68).	
§ 2. Отыскание решений линейной системы	69
1. Квадратная система линейных уравнений с определителем основной матрицы, отличным от нуля (69). 2. Отыскание всех решений общей линейной системы (73). 3. Свойства совокупности решений однородной системы (75). 4. Заключительные замечания о решении линейных систем (80).	

Глава 4. Евклидовы пространства	82
§ 1. Вещественное евклидово пространство и его простейшие свойства	82
1. Определение вещественного евклидова пространства (82).	
2. Простейшие свойства произвольного евклидова пространства (85).	
§ 2. Ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства	89
1. Понятие ортонормированного базиса и его существование (89).	
2. Свойства ортонормированного базиса (92).	
3. Разложение n -мерного евклидова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения (94).	
4. Изоморфизм n -мерных евклидовых пространств (94).	
§ 3. Комплексное евклидово пространство	95
1. Определение комплексного евклидова пространства (95).	
2. Неравенство Коши — Буняковского. Понятие нормы (98).	
3. Ортонормированный базис и его свойства (99).	
§ 4. Метод регуляризации для отыскания нормального решения линейной системы	100
Глава 5. Линейные операторы	107
§ 1. Понятие линейного оператора. Основные свойства	107
1. Определение линейного оператора (107).	
2. Действия над линейными операторами. Пространство линейных операторов (107).	
3. Свойства множества $L(V, V)$ линейных операторов (108).	
§ 2. Матричная запись линейных операторов	114
1. Матрицы линейных операторов в заданном базисе линейного пространства V (114).	
2. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису (117).	
3. Характеристический многочлен линейного оператора (119).	
§ 3. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов	120
§ 4. Линейные и полуторалинейные формы в евклидовом пространстве	123
1. Специальное представление линейной формы в евклидовом пространстве (123).	
2. Полуторалинейные формы в евклидовом пространстве. Специальное представление таких форм (124).	
§ 5. Линейные самосопряженные операторы в евклидовом пространстве	126
1. Понятие сопряженного оператора (126).	
2. Самосопряженные операторы. Основные свойства (128).	
3. Норма линейного оператора (129).	
4. Дальнейшие свойства самосопряженных операторов (131).	
5. Спектральное разложение самосопряженных операторов. Теорема Гамильтона — Кэли (137).	
6. Положительные операторы. Корни n -й степени из оператора (138).	
§ 6. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов	140
§ 7. Унитарные и нормальные операторы	143
§ 8. Канонический вид линейных операторов	147
§ 9. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве	151
1. Общие замечания (151).	
2. Ортогональные операторы (157).	
Глава 6. Итерационные методы решения линейных систем и задач на собственные значения	160
§ 1. Итерационные методы решения линейных систем	161
1. Метод простой итерации (метод Якоби) (161).	
2. Общий неявный метод простой итерации (164).	
3. Модифицированный метод простой итерации (171).	
4. Метод Зейделя (174).	
5. Метод верхней релаксации (174).	
6. Случай несимметричной матрицы A (175).	
7. Итерационный метод П. Л. Чебышева (175).	
§ 2. Решение полной проблемы собственных значений методом вращений	180

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 7. Билинейные и квадратичные формы	186
§ 1. Билинейные формы	186
1. Понятие билинейной формы (186). 2. Представление билинейной формы в конечномерном линейном пространстве (187). 3. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису. Ранг билинейной формы (188).	
§ 2. Квадратичные формы	190
§ 3. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов	192
1. Метод Лагранжа (193). 2. Метод Якоби (195).	
§ 4. Закон инерции квадратичных форм. Классификация квадратичных форм	198
1. Закон инерции квадратичных форм (198). 2. Классификация квадратичных форм (200). 3. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы (202).	
§ 5. Полилинейные формы	203
§ 6. Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве.	205
1. Предварительные замечания (205). 2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов в ортогональном базисе (206). 3. Одновременное приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов в линейном пространстве (207). 4. Экстремальные свойства квадратичной формы (208).	
§ 7. Гиперповерхности второго порядка.	211
1. Понятие гиперповерхности второго порядка (211). 2. Параллельные переносы в евклидовом пространстве. Преобразование ортонормированных базисов в Ортонормированные (213). 3. Преобразование общего уравнения гиперповерхности второго порядка при параллельном переносе (214). 4. Преобразование общего уравнения гиперповерхности второго порядка при переходе от ортонормированного базиса к ортонормированному (216). 5. Инварианты общего уравнения гиперповерхности второго порядка (218). 6. Центр гиперповерхности второго порядка (220) 7. Стандартное упрощение любого уравнения гиперповерхности второго порядка путем преобразования ортонормированного базиса (221). 8. Упрощение уравнения центральной гиперповерхности второго порядка. Классификация центральных гиперповерхностей (222). 9. Упрощение уравнения нецентральной гиперповерхности второго порядка. Классификация нецентральных гиперповерхностей (224).	
Глава 8. Тензоры	228
§ 1. Преобразование базисов и координат	228
1. Определители Грама (228). 2. Взаимные базисы. Ковариантные и контравариантные координаты векторов (229). 3. Преобразования базиса и координат (232).	
§ 2. Понятие тензора. Основные операции над тензорами	234
1. Понятие тензора (234). 2. Примеры тензоров (236). 3. Основные операции над тензорами (239).	
§ 3. Метрический тензор. Основные операции векторной алгебры в тензорных обозначениях	243
1. Понятие метрического тензора в евклидовом пространстве (243). 2. Операция поднятия и опускания индексов с помощью метрического тензора (245). 3. Ортонормированные базисы в J^n (247). 4. Дискриминантный тензор (248). 5. Ориентированный объем (250). 6. Векторное произведение (251). 7. Двойное векторное произведение (252).	
§ 4. Метрический тензор псевдоевклидова пространства.	252
1. Понятие псевдоевклидова пространства и метрического тензора псевдоевклидова пространства (252). 2. Галилеевы коор-	

ОГЛАВЛЕНИЕ

динаты. Преобразования Лоренца (254). 3. Преобразования Лоренца пространства $E^4_{(1,3)}$ (255).	
§ 5. Тензор момента инерции	258
Глава 9. Элементы теории групп	260
§ 1. Понятие группы. Основные свойства групп	260
1. Законы композиции (260). 2. Понятие группы. Некоторые свойства групп (261). 3. Изоморфизм групп. Подгруппы (264). 4. Смежные классы. Нормальные делители (265). 5. Гомоморфизмы. Фактор-группы (267).	
§ 2. Группы преобразований	271
1. невырожденные линейные преобразования (271). 2. Группа линейных преобразований (272). 3. Сходимость элементов в группе $GL(n)$. Подгруппы группы $GL(n)$ (273). 4. Группа ортогональных преобразований (274). 5. Некоторые дискретные и конечные подгруппы ортогональной группы (276). 6. Группа Лоренца (278). 7. Унитарные группы (281).	
§ 3. Представления групп	281
1. Линейные представления групп. Терминология (282). 2. Матрицы линейных представлений. Эквивалентные представления (283). 3. Приводимые и неприводимые представления (284). 4. Характеры (285). 5. Примеры представлений групп (287).	
Алфавитный указатель	290

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Книга написана с учетом опыта чтения лекций на физическом факультете, а также на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. От других руководств по линейной алгебре ее отличает более полное изложение теории линейных операторов, наличие специальной главы, посвященной итерационным методам решения линейных систем, наличие доказательства сходимости метода вращений для решения полной проблемы собственных значений, изложение метода регуляризации А. Н. Тихонова для отыскания нормального решения линейной системы.

Четвертое издание перепечатывается с текста третьего издания, в котором исправлено несколько замеченных опечаток.

Июнь 1998 г.

В. А. Ильин

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга возникла в результате переработки курса лекций, читавшихся авторами в Московском государственном университете.

Отметим некоторые особенности изложения.

Изложение начинается с изучения матриц и определителей, причем определитель n -го порядка вводится по индукции через определитель $(n-1)$ -го порядка с помощью формулы разложения по первой строке. При этом легко доказывается теорема о разложении по любой строке и по любому столбцу (схема доказательства этой теоремы оказывается совершенно аналогичной схеме доказательства теоремы Лапласа). Традиционное определение детерминанта (определителя) непосредственно через его элементы является простым следствием данного в этой книге определения.

Изучению линейных систем предшествует теория линейных пространств и преобразований базисов и координат векторов в таких пространствах. При изучении линейных систем мы сразу же знакомим читателя не только с обычной, но и с матричной формой записи системы и вывода формул Крамера.

Изучение вещественных и комплексных евклидовых пространств завершается доказательством теоремы А. Н. Тихонова об отыскании нормального решения линейной системы.

При изучении линейных операторов излагаются все основные аспекты спектральной теории в конечномерных евклидовых пространствах. Теорема о приведении матрицы к жордановой форме доказывается с помощью предложенного А. Ф. Филипповым короткого метода, основанного на индукции.

Книга содержит специальную главу, посвященную итерационным методам, в которой с единой точки зрения рассматриваются важнейшие итерационные методы решения линейных систем (явный и неявный методы простой итерации, метод Зейделя, метод верхней релаксации) и устанавливаются условия сходимости этих методов. Для общего неявного метода простой итерации выясняются установленные А. А. Самарским условия получения наиболее быстрой сходимости. Приводится доказательство сходимости метода вращения для решения полной проблемы собственных значений.

Изложение теории билинейных и квадратичных форм завершается приведением к каноническому виду уравнений гиперповерхностей второго порядка в n -мерном пространстве.

При изучении тензоров, наряду с традиционным материалом, излагается важная для приложений тензорная форма записи основных операций векторной алгебры. Здесь же даются понятия псевдоевклидова пространства, галилеевых координат и преобразования Лоренца.

Книга завершается изложением элементов теории групп и их представлений.

Следует отметить, что данная книга примыкает к «Аналитической геометрии», хотя может читаться и независимо от нее.

Авторы приносят глубокую благодарность А. Н. Тихонову и А. Г. Свешникову за большое количество ценных замечаний, Ш. А. Алимову, вклад которого в эту книгу далеко вышел за рамки обычного редактирования, Л. Д. Кудрявцеву, С. А. Ломову и особенно А. А. Самарскому за весьма полезные критические замечания и ценные советы, Е. С. Николаеву, Д. Д. Соколову и Е. В. Шикину за большую помощь при написании некоторых разделов этой книги.

Январь 1974 г.

В. Ильин, Э. Позняк

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге мы будем иметь дело с внешне различными объектами: 1) с матрицами (или прямоугольными таблицами из чисел), 2) с алгебраическими формами, включающими в себя так называемые линейные, билинейные и квадратичные формы, 3) с так называемыми линейными (и, в частности, с евклидовыми) пространствами и с линейными преобразованиями в таких пространствах.

Элементарные представления об этих объектах читатель имеет из курса аналитической геометрии. В самом деле, в курсе аналитической геометрии изучались квадратные матрицы второго и третьего порядков и отвечающие этим матрицам определители. Линейная и квадратичная формы представляют собой соответственно однородную линейную и однородную квадратичную функции нескольких независимых переменных (например, координат вектора). Примером линейного пространства может служить совокупность всех геометрических векторов на плоскости (или в пространстве) с заданными операциями сложения этих векторов и умножения их на числа. Если для совокупности таких векторов задано еще и скалярное произведение, то мы приходим к понятию евклидова пространства. Примером линейного преобразования в таком пространстве может служить переход от одного декартова прямоугольного базиса к другому.

Несмотря на внешнее различие, перечисленные совокупности объектов тесно связаны между собой, большинство утверждений допускает равносильную формулировку для каждой из этих совокупностей. Наиболее отчетливо эта связь выявляется при изучении произвольных линейных и евклидовых пространств (и линейных преобразований в таких пространствах).

Однако более конкретная матричная трактовка результатов непосредственно связана с фактическими вычислениями (и, в частности, с решением линейных систем уравнений). Именно поэтому мы начинаем наше рассмотрение с изучения матриц и неоднократно возвращаемся впоследствии к матричной трактовке результатов.

ГЛАВА I

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

В этой главе изучаются таблицы из чисел, называемые матрицами и играющие в дальнейшем важнейшую роль. Здесь вводятся основные операции над матрицами и детально изучаются свойства так называемых определителей, являющихся основной числовой характеристикой квадратных матриц.

§ 1. Матрицы

1. Понятие матрицы. Матрицей называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая некоторое количество m строк и некоторое количество n столбцов.

Числа m и n называются порядками матрицы. В случае, если $m = n$, матрица называется квадратной, а число $m = n$ — ее порядком.

В дальнейшем для записи матрицы будут применяться либо двойные черточки, либо круглые скобки:

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array} \right\| \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array} \right).$$

Впрочем, для краткого обозначения матрицы часто будет использоваться либо одна большая латинская буква (например, A), либо символ $\|a_{ij}\|$, а иногда и с разъяснением: $A = \|a_{ij}\| = (a_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

Числа a_{ij} , входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами. В записи a_{ij} первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j — номер столбца.

В случае квадратной матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{array} \right\| \tag{1.1}$$

вводятся понятия главной и побочной диагоналей. Главной диагональю матрицы (1.1) называется диагональ $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, идущая из левого верхнего угла этой матрицы в правый нижний ее угол. Побочной диагональю той же матрицы называется диагональ $a_{n1}a_{(n-1)2} \dots a_{1n}$, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

2. Основные операции над матрицами и их свойства. Прежде всего договоримся считать две матрицы равными, если эти матрицы имеют одинаковые порядки и все их соответствующие элементы совпадают.

Перейдем к определению основных операций над матрицами.

а) Сложение матриц. Суммой двух матриц $A = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) и $B = \|b_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) одних и тех же порядков m и n называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) тех же порядков m и n , элементы c_{ij} которой равны

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.2)$$

Для обозначения суммы двух матриц используется запись $C = A + B$. Операция составления суммы матриц называется их сложением.

Итак, по определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & \dots & (a_{2n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{vmatrix}$$

Из определения суммы матриц, а точнее из формулы (1.2) непосредственно вытекает, что операция сложения матриц обладает теми же свойствами, что и операция сложения вещественных чисел, а именно:

1) переместительным свойством: $A + B = B + A$,

2) сочетательным свойством: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Эти свойства позволяют не заботиться о порядке следования слагаемых матриц при сложении двух или большего числа матриц.

б) Умножение матрицы на число. Произведением матрицы $A = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) на вещественное число λ называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), элементы c_{ij} которой равны

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.3)$$

Для обозначения произведения матрицы на число используется запись $C = \lambda A$ или $C = A\lambda$. Операция составления произведения матрицы на число называется **умножением матрицы на это число**.

Непосредственно из формулы (1.3) ясно, что умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1) сочетательным свойством относительно числового множителя: $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;

2) распределительным свойством относительно суммы матриц: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

3) распределительным свойством относительно суммы чисел: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

З а м е ч а н и е. Разностью двух матриц A и B одинаковых порядков m и n естественно назвать такую матрицу C тех же порядков m и n , которая в сумме с матрицей B дает матрицу A . Для обозначения разности двух матриц используется естественная запись: $C = A - B$.

Очень легко убедиться в том, что разность C двух матриц A и B может быть получена по правилу $C = A + (-1) \cdot B$.

в) Перемножение матриц. Произведением матрицы $A = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), имеющей порядки, соответственно равные m и n , на матрицу $B = \|b_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, p$), имеющую порядки, соответственно равные n и p , называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, p$), имеющая порядки, соответственно равные m и p , и элементы c_{ij} , определяемые формулой

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p). \quad (1.4)$$

Для обозначения произведения матрицы A на матрицу B используют запись $C = A \cdot B$. Операция составления произведения матрицы A на матрицу B называется **перемножением этих матриц**.

Из сформулированного выше определения вытекает, что *матрицу A можно умножить не на всякую матрицу B* : необходимо, чтобы число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B .

В частности, оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ можно определить лишь в том случае, когда число столбцов A совпадает с числом строк B , а число строк A совпадает с числом столбцов B . При этом обе матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A$ будут квадратными, но порядки их будут, вообще говоря, различными. Для того чтобы оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ не только были определены, но и имели одинаковый порядок, необходимо и достаточно, чтобы обе матрицы A и B были квадратными матрицами одного и того же порядка.

Формула (1.4) представляет собой правило составления элементов матрицы C , являющейся произведением матрицы A на матрицу B . Это правило можно сформулировать и словесно: *элемент c_{ij} , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы $C = A \cdot B$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B .*

В качестве примера применения указанного правила приведем формулу перемножения квадратных матриц второго порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{pmatrix}.$$

Из формулы (1.4) вытекают следующие свойства произведения матрицы A на матрицу B :

- 1) сочетательное свойство: $(AB)C = A(BC)$;
- 2) распределительное относительно суммы матриц свойство: $(A+B)C = AC + BC$ или $A(B+C) = AB + AC$.

Распределительное свойство сразу вытекает из формул (1.4) и (1.2), а для доказательства сочетательного свойства достаточно заметить, что если $A = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), $B = \|b_{jk}\|$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$), $C = \|c_{kl}\|$ ($k = 1, 2, \dots, p$; $l = 1, 2, \dots, r$), то элемент d_{il} матрицы $(AB)C$

в силу (1.4) равен $d_{il} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) \cdot c_{kl}$, а элемент d'_{il} матрицы

$A(BC)$ равен $d'_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl} \right)$, но тогда равенство $d_{il} = d'_{il}$ вытекает из возможности изменения порядка суммирования относительно j и k .

Вопрос о перестановочном свойстве произведения матрицы A на матрицу B имеет смысл ставить лишь для квадратных матриц A и B одинакового порядка (ибо, как указывалось выше, только для таких матриц A и B оба произведения AB и BA определены и являются матрицами одинаковых порядков). Элементарные примеры показывают, что произведение двух квадратных матриц одинакового порядка не обладает, вообще говоря, перестановочным свойством. В самом деле, если положить $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Здесь мы укажем, однако, важные частные случаи, в которых справедливо перестановочное свойство *).

*) Две матрицы, для произведения которых справедливо перестановочное свойство, принято называть коммутующими.

Среди квадратных матриц выделим класс так называемых **д и а г о н а л ь н ы х** матриц, у каждой из которых элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Каждая диагональная матрица порядка n имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & d_n \end{vmatrix}, \quad (1.5)$$

где $d_1, d_2, \dots, d_n$ — какие угодно числа. Легко видеть, что если все эти числа равны между собой, т. е. $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$, то для любой квадратной матрицы A порядка n справедливо равенство $AD = DA$. В самом деле, обозначим символами c_{ij} и c'_{ij} элементы, стоящие на пересечении i -й строки и j -го столбца матриц AD и DA соответственно. Тогда из равенства (1.4) и из вида матрицы D получим, что

$$c_{ij} = a_{ij}d, \quad c'_{ij} = d_{ii}a_{ij} = da_{ij}, \quad (1.6)$$

т. е. $c_{ij} = c'_{ij}$.

Среди всех диагональных матриц (1.5) с совпадающими элементами $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$ особо важную роль играют две матрицы. Первая из этих матриц получается при $d = 1$, называется **е д и н и ч н о й** м а т р и ц е й n -го порядка и обозначается символом E . Вторая матрица получается при $d = 0$, называется **нулевой** матрицей n -го порядка и обозначается символом O . Таким образом,

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}, \quad O = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}.$$

В силу доказанного выше $AE = EA$ и $AO = OA$. Более того, из формул (1.6) очевидно, что

$$AE = EA = A, \quad AO = OA = O. \quad (1.7)$$

Первая из формул (1.7) характеризует особую роль единичной матрицы E , аналогичную той роли, которую играет число 1 при перемножении вещественных чисел. Что же касается особой роли нулевой матрицы O , то ее выявляет не только вторая из формул (1.7), но и элементарно проверяемое равенство *) $A + O = O + A = A$.

В заключение заметим, что понятие нулевой матрицы можно вводить и для неквадратных матриц (нулевой называют *любую* матрицу, все элементы которой равны нулю).

*) Это равенство является прямым следствием формулы (1.2).

3. Блочные матрицы. Предположим, что некоторая матрица $A = \|a_{ij}\|$ при помощи горизонтальных и вертикальных прямых разбита на отдельные прямоугольные клетки, каждая из которых представляет собой матрицу меньших размеров и называется блоком исходной матрицы. В таком случае возникает возможность рассмотрения исходной матрицы A как некоторой новой (так называемой блочной) матрицы $A = \|A_{\alpha\beta}\|$, элементами $A_{\alpha\beta}$ которой служат указанные блоки. Указанные элементы мы обозначаем большой латинской буквой, чтобы подчеркнуть, что они являются, вообще говоря, матрицами, а не числами и (как обычные числовые элементы) снабжаем двумя индексами, первый из которых указывает номер «блочной» строки, а второй — номер «блочного» столбца.

Например, матрицу

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{array} \right\|.$$

можно рассматривать как блочную матрицу $A = \left\| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right\|$, элементами которой служат следующие блоки:

$$A_{11} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{array} \right\|, \quad A_{12} = \left\| \begin{array}{cc} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{array} \right\|,$$

$$A_{21} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{array} \right\|, \quad A_{22} = \left\| \begin{array}{cc} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \end{array} \right\|.$$

Замечательным является тот факт, что основные операции с блочными матрицами совершаются по тем же правилам, по которым они совершаются с обычными числовыми матрицами, только в роли элементов выступают блоки.

В самом деле, элементарно проверяется, что если матрица $A = \|a_{ij}\|$ является блочной и имеет блочные элементы $A_{\alpha\beta}$, то при том же разбиении на блоки матрице $\lambda A = \|\lambda a_{ij}\|$ отвечают блочные элементы $\lambda A_{\alpha\beta}$ *).

Столь же элементарно проверяется, что если матрицы A и B имеют одинаковые порядки и одинаковым образом разбиты на блоки, то сумме матриц A и B отвечает блочная матрица с эле-

*) При этом блочные элементы $\lambda A_{\alpha\beta}$ сами вычисляются по правилу умножения матрицы $A_{\alpha\beta}$ на число λ .

ментами $C_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}$ (здесь $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ — блочные элементы матриц A и B).

Пусть, наконец, A и B — две блочные матрицы такие, что число столбцов каждого блока $A_{\alpha\beta}$ равно числу строк блока $B_{\beta\gamma}$ (так что при любых α, β и γ определено произведение матриц $A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}$). Тогда произведение $C = AB$ представляет собой матрицу с элементами $C_{\alpha\gamma}$, определяемыми формулой

$$C_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}.$$

Для доказательства этой формулы достаточно расписать левую и правую ее части в терминах обычных (числовых) элементов матриц A и B (предоставляем это сделать читателю).

В качестве примера применения блочных матриц остановимся на понятии так называемой **прямой суммы** квадратных матриц.

Прямой суммой двух квадратных матриц A и B порядков m и n соответственно называется квадратная блочная матрица C порядка $m + n$, равная $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Для обозначения прямой суммы матриц A и B используется запись $C = A \oplus B$.

Из определения прямой суммы матриц A и B очевидно, что эта сумма, вообще говоря, не обладает перестановочным свойством. Однако элементарно проверяется справедливость сочетательного свойства: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

С помощью свойств операций над блочными матрицами легко проверяются следующие формулы, устанавливающие связь между операцией прямого суммирования и операциями обычного сложения и перемножения матриц:

$$(A_m \oplus A_n) + (B_m \oplus B_n) = (A_m + B_m) \oplus (A_n + B_n),$$

$$(A_m \oplus A_n)(B_m \oplus B_n) = A_mB_m \oplus A_nB_n$$

(в этих формулах A_m и B_m — произвольные квадратные матрицы порядка m , а A_n и B_n — произвольные квадратные матрицы порядка n). Проверку этих формул мы предоставляем читателю.

§ 2. Определители

Целью настоящего параграфа является построение теории определителей любого порядка n . Хотя читатель (из курса аналитической геометрии) уже знаком с определителями второго и третьего порядков, мы будем вести изложение так, чтобы избежать каких-либо ссылок. Знакомство с определителями второго и третьего порядков разве лишь облегчит восприятие излагаемого ниже материала.

1. Понятие определителя. Рассмотрим произвольную квадратную матрицу любого порядка n :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

С каждой такой матрицей свяжем вполне определенную численную характеристику, называемую определителем, соответствующим этой матрице.

Если порядок n матрицы (1.8) равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента a_{11} и определителем первого порядка, соответствующим такой матрице, мы назовем величину этого элемента.

Если далее порядок n матрицы (1.8) равен двум, т. е. если эта матрица имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (1.9)$$

то определителем второго порядка, соответствующим такой матрице, назовем число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и обозначаемое одним из символов *) $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Итак, по определению

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.10)$$

Формула (1.10) представляет собой правило составления определителя второго порядка по элементам соответствующей ему матрицы. Словесная формулировка этого правила такова: определитель второго порядка, соответствующий матрице (1.9), равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали этой матрицы, и произведения элементов, стоящих на побочной ее диагонали **).

В дальнейшем изложении мы будем говорить об элементах, строках или столбцах определителя, подразумевая под этими терминами соответственно элементы, строки или столбцы отвечающей этому определителю матрицы.

*) В отличие от матрицы для обозначения определителя употребляют не дввоенные, а одинарные черточки.

**) Напомним, что главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, идущая из левого верхнего в правый нижний угол (т. е. в случае матрицы (1.9) $a_{11}a_{22}$), а побочной — диагональ, идущая из левого нижнего в правый верхний угол (т. е. в случае матрицы (1.9) $a_{21}a_{12}$).

Перейдем теперь к выяснению понятия определителя любого порядка n , где $n \geq 2$. Понятие такого определителя мы введем индуктивно, считая, что нами уже введено понятие определителя порядка $n - 1$, соответствующего произвольной квадратной матрице порядка $n - 1$.

Договоримся называть *минором* любого элемента a_{ij} матрицы n -го порядка (1.8) *определитель* порядка $n - 1$, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы (1.8) в результате вычеркивания i -й строки и j -го столбца (той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}). Минор элемента a_{ij} будем обозначать символом $\bar{M}_j^i$. В этом обозначении верхний индекс обозначает номер строки, нижний — номер столбца, а черта над M означает, что указанные строка и столбец вычеркиваются.

О п р е д е л и т е л е м п о р я д к а n , соответствующим матрице (1.8), назовем число, равное $\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1$ и обозначаемое символом

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

Итак, по определению

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) представляет собой правило составления определителя порядка n по элементам первой строки соответствующей ему матрицы и по минорам $\bar{M}_j^1$ элементов первой строки, являющимся определителями порядка $n - 1$.

Заметим, что при $n = 2$ правило (1.12) в точности совпадает с правилом (1.10), ибо в этом случае миноры элементов первой строки имеют вид: $\bar{M}_1^1 = a_{22}$, $\bar{M}_2^1 = a_{21}$.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли использовать для получения величины определителя (1.11) элементы и отвечающие им миноры не первой, а произвольной i -й строки матрицы (1.8). Ответ на этот вопрос дает следующая основная теорема.

Теорема 1.1. *Каков бы ни был номер строки i ($i = 1, 2, \dots, n$), для определителя n -го порядка (1.11) справедлива формула *)*

$$\Delta = \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_j^i, \quad (1.13)$$

называемая разложением этого определителя по i -й строке.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что в этой формуле показатель степени, в которую возводится число (-1) , равен сумме номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} .

Доказательство теоремы 1.1. Формулу (1.13) нужно доказать лишь для номеров $i = 2, 3, \dots, n^{**}$). При $n = 2$ (т. е. для определителя второго порядка) эту формулу нужно доказать лишь для номера $i = 2$, т. е. при $n = 2$ нужно доказать лишь формулу

$$\Delta = \det A = \sum_{j=1}^2 (-1)^{2+j} a_{2j} \overline{M}_j^2 = -a_{21} \overline{M}_1^2 + a_{22} \overline{M}_2^2.$$

Справедливость этой последней формулы сразу вытекает из выражений для миноров матрицы (1.9) $\overline{M}_1^2 = a_{12}$, $\overline{M}_2^2 = a_{11}$, в силу которых правая часть этой формулы совпадает с правой частью (1.10). Итак, при $n = 2$ теорема доказана.

Доказательство формулы (1.13) для произвольного $n > 2$ проведем по индукции, т. е. предположим, что для определителя порядка $n - 1$ справедлива формула вида (1.13) разложения по любой строке, и, опираясь на это, убедимся в справедливости формулы (1.13) для определителя порядка n .

При доказательстве нам понадобится понятие миноров матрицы (1.8) порядка $n - 2$. Определитель порядка $n - 2$, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы (1.8) в результате вычеркивания двух строк с номерами i_1 и i_2 и двух столбцов с номерами j_1 и j_2 , называется **минором** $(n - 2)$ -го порядка и обозначается символом $\overline{M}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$.

Определитель n -го порядка Δ вводится формулой (1.12), причем в этой формуле каждый минор $\overline{M}_j^i$ является определителем порядка $n - 1$, для которого по предположению справедлива формула вида (1.13) разложения по любой строке.

Фиксировав любой номер i ($i = 2, 3, \dots, n$), разложим в формуле (1.12) каждый минор $\overline{M}_j^i$ по i -й строке основного определителя (1.11) (в самом миноре $\overline{M}_j^i$ эта строка будет $(i - 1)$ -й).

*) По смыслу теоремы $n \geq 2$.

**) Ибо при $i = 1$ правая часть (1.13) по определению равна $\det A$.

В результате весь определитель Δ окажется представленным в виде некоторой линейной комбинации *) миноров $(n-2)$ -го порядка $\overline{M}_{jk}^{ii}$ с несовпадающими номерами j и k , т. е. в виде **)

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \sum_{k < j} \theta_{jk} \overline{M}_{jk}^{ii}. \quad (1.14)$$

Для вычисления множителей θ_{jk} заметим, что минор $\overline{M}_{jk}^{ii}$ получается в результате разложения по $(i-1)$ -й строке ***), *только следующих двух миноров $(n-1)$ -го порядка, отвечающих элементам первой строки матрицы (1.8): минора $\overline{M}_j^i$ и минора $\overline{M}_k^i$ (ибо только эти два минора элементов первой строки содержат в се столбцы минора $\overline{M}_{jk}^{ii}$).*

В разложениях миноров $\overline{M}_j^i$ и $\overline{M}_k^i$ по указанной $(i-1)$ -й строке выпишем только слагаемые, содержащие минор $\overline{M}_{jk}^{ii}$ (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая при этом, что элемент a_{ik} минора $\overline{M}_j^i$ стоит на пересечении $(i-1)$ -й строки и $(k-1)$ -го столбца этого минора ****), а элемент a_{ij} минора $\overline{M}_k^i$ стоит на пересечении $(i-1)$ -й строки и j -го столбца этого минора *****), мы получим

$$\overline{M}_j^i = (-1)^{(i-1)+(k-1)} a_{ik} \overline{M}_{jk}^{ii} + \dots, \quad (1.15)$$

$$\overline{M}_k^i = (-1)^{(i-1)+j} a_{ij} \overline{M}_{jk}^{ii} + \dots \quad (1.16)$$

Вставляя (1.15) и (1.16) в правую часть (1.12) и собирая коэффициент при $\overline{M}_{jk}^{ii}$, мы получим, что множитель θ_{jk} в равенстве (1.14) имеет вид

$$\theta_{jk} = (-1)^{(1+i+j+k)} [a_{1j}a_{ik} - a_{1k}a_{ij}]. \quad (1.17)$$

Для завершения доказательства теоремы покажем, что и правая часть (1.13) равна сумме, стоящей в правой части (1.14), с теми же самыми значениями (1.17) для θ_{jk} .

Для этого в правой части (1.13) разложим каждый минор $(n-1)$ -го порядка $\overline{M}_j^i$ по первой строке. В результате

*) Напомним, что линейной комбинацией каких-либо величин называется сумма произведений этих величин на некоторые вещественные числа.

**) Так как минор $\overline{M}_{jk}^{ii}$ совпадает с $\overline{M}_{kj}^{ii}$, то мы переберем все миноры $(n-2)$ -го порядка с данными номерами строк i и i , изменяя j от 1 до n и для каждого j беря все возможные $k < j$.

***). В матрице (1.8) эта строка будет i -й.

****). Ибо в миноре $\overline{M}_j^i$ отсутствуют первая строка и j -й столбец матрицы (1.8) и $j < k$.

*****). Ибо в миноре $\overline{M}_k^i$ отсутствует первая строка матрицы (1.8), а единственный отсутствующий в этом миноре столбец матрицы (1.8) имеет номер $k > j$.

вся правая часть (1.13) представится в виде линейной комбинации с некоторыми коэффициентами θ_{jk} тех же самых миноров $\overline{M}_{jk}^{ll}$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k < j} \theta_{jk} \overline{M}_{jk}^{ll}, \quad (1.18)$$

и нам остается вычислить множители θ_{jk} и убедиться в справедливости для них формулы (1.17).

Для этого заметим, что минор $\overline{M}_{jk}^{ll}$ получается в результате разложения по первой строке только следующих двух миноров $(n-1)$ -го порядка, отвечающих элементам i -й строки матрицы (1.8): минора $\overline{M}_j^l$ и минора $\overline{M}_k^l$ (ибо только эти два минора элементов i -й строки содержат все столбцы минора $\overline{M}_{jk}^{ll}$).

В разложениях миноров $\overline{M}_j^l$ и $\overline{M}_k^l$ по первой строке выпишем только слагаемые, содержащие минор $\overline{M}_{jk}^{ll}$ (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая при этом, что элемент a_{ik} минора $\overline{M}_j^l$ стоит на пересечении первой строки и $(k-1)$ -го столбца *) этого минора, а элемент a_{1j} минора $\overline{M}_k^l$ стоит на пересечении первой строки и j -го столбца **) этого минора, мы получим

$$\overline{M}_j^l = (-1)^{1+(k-1)} a_{ik} \cdot \overline{M}_{jk}^{ll} + \dots, \quad (1.19)$$

$$\overline{M}_k^l = (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \overline{M}_{jk}^{ll} + \dots \quad (1.20)$$

Вставляя (1.19) и (1.20) в правую часть (1.13) и собирая коэффициент при $\overline{M}_{jk}^{ll}$, мы получим, что θ_{jk} в сумме (1.18) определяется той же самой формулой (1.17), что и в равенстве (1.14).

Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.1 установила возможность разложения определителя n -го порядка по любой его строке. Естественно возникает вопрос о возможности разложения определителя n -го порядка по любому его столбцу. Положительный ответ на этот вопрос дает следующая основная теорема.

Теорема 1.2. *Каков бы ни был номер столбца j ($j = 1, 2, \dots, n$), для определителя n -го порядка (1.11) справедлива формула*

$$\Delta = \det A = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+j} a_{lj} \overline{M}_{lj}^j, \quad (1.21)$$

*) Ибо $j < k$ и в миноре $\overline{M}_j^l$ отсутствует j -й столбец матрицы (1.8).

**) Ибо $j < k$, а у минора $\overline{M}_k^l$ отсутствует лишь k -й столбец матрицы (1.8).

называемая разложением этого определителя по j -му столбцу.

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $j = 1$, т. е. установить формулу разложения по первому столбцу

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \bar{M}_i^1, \quad (1.22)$$

ибо если формула (1.22) будет установлена, то для доказательства формулы (1.21) для любого $j = 2, 3, \dots, n$ достаточно, поменяв ролями строки и столбцы, дословно повторить схему рассуждений теоремы 1.1.

Формулу (1.22) установим по индукции.

При $n = 2$ эта формула проверяется элементарно (так как при $n = 2$ миноры элементов первого столбца имеют вид $\bar{M}_1^1 = a_{22}$, $\bar{M}_2^1 = a_{12}$, то при $n = 2$ правая часть (1.22) совпадает с правой частью (1.10)).

Предположим, что формула разложения по первому столбцу (1.22) верна для определителя порядка $n - 1$ и, опираясь на это, убедимся в справедливости этой формулы для определителя порядка n .

С этой целью выделим в правой части формулы (1.12) для определителя n -го порядка Δ первое слагаемое $a_{11} \bar{M}_1^1$, а в каждом из остальных слагаемых разложим минор $(n - 1)$ -го порядка $\bar{M}_j^1$ по первому столбцу.

В результате формула (1.12) будет иметь вид

$$\Delta = a_{11} \bar{M}_1^1 + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \theta_{ij} \bar{M}_{ij}^{1i}, \quad (1.23)$$

где θ_{ij} — некоторые подлежащие определению коэффициенты. Для вычисления θ_{ij} заметим, что минор $\bar{M}_{ij}^{1i}$ получается при разложении по первому столбцу только одного из миноров $(n - 1)$ -го порядка, отвечающих первой строке *), — минора $\bar{M}_j^1$. Запишем в разложении минора $\bar{M}_j^1$ (при $j \geq 2$) по первому столбцу только то слагаемое, которое содержит минор $\bar{M}_{ij}^{1i}$ (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая, что элемент a_{i1} минора $\bar{M}_j^1$ (при $j \geq 2$) стоит на пересечении $(i - 1)$ -й строки и первого столбца этого минора, мы получим, что при $j \geq 2$

$$\bar{M}_j^1 = (-1)^{(i-1)+1} a_{i1} \bar{M}_{ij}^{1i} + \dots \quad (1.24)$$

*) При этом минор $\bar{M}_1^1$ предполагается исключенным.

Вставляя (1.24) в правую часть (1.12) (из которой исключено первое слагаемое) и собирая коэффициент при $\overline{M}_{ij}^{li}$, мы получим, что коэффициент θ_{ij} в формуле (1.23) имеет вид

$$\theta_{ij} = (-1)^{i+j+1} a_{ij} a_{i1}. \quad (1.25)$$

Остается доказать, что и правая часть (1.22) равна сумме, стоящей в правой части (1.23) с теми же самыми значениями (1.25) для θ_{ij} .

Для этого в правой части (1.22) выделим первое слагаемое $a_{i1} \overline{M}_i^1$, а в каждом из остальных слагаемых разложим минор $(n-1)$ -го порядка $\overline{M}_i^1$ по первой строке.

В результате правая часть (1.22) представится в виде суммы первого слагаемого $a_{i1} \overline{M}_i^1$ и линейной комбинации с некоторыми коэффициентами θ_{ij} миноров $(n-2)$ -го порядка $\overline{M}_{ij}^{li}$, т. е. в виде

$$a_{i1} \overline{M}_i^1 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \theta_{ij} \overline{M}_{ij}^{li}, \quad (1.26)$$

и нам остается вычислить множители θ_{ij} и убедиться в справедливости для них формулы (1.25).

Для этого заметим, что минор $\overline{M}_{ij}^{li}$ получается в результате разложения по первой строке только одного из миноров $n-1$ -го порядка, отвечающих первому столбцу, — минора $\overline{M}_i^1$. Запишем в разложении минора $\overline{M}_i^1$ (при $i \geq 2$) по первой строке только то слагаемое, которое содержит минор $\overline{M}_{ij}^{li}$ (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая, что элемент a_{ij} минора $\overline{M}_i^1$ стоит на пересечении первой строки и $(j-1)$ -го столбца этого минора, мы получим, что при $i \geq 2$

$$\overline{M}_i^1 = (-1)^{1+(i-1)} a_{ij} \overline{M}_{ij}^{li} + \dots \quad (1.27)$$

Вставляя (1.27) в правую часть (1.22), из которой исключено первое слагаемое, и собирая коэффициент при $\overline{M}_{ij}^{li}$, мы получим, что θ_{ij} в сумме (1.26) определяется той же самой формулой (1.25), что и в равенстве (1.23). Теорема 1.2 доказана.

2. Выражение определителя непосредственно через его элементы. Установим формулу, выражающую определитель n -го порядка непосредственно через его элементы (минуя миноры).

Пусть каждое из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ принимает одно из значений $1, 2, \dots, n$, причем среди этих чисел нет совпадающих (в таком случае говорят, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ являются некоторой перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$). Образует из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ все возможные пары $\alpha_i \alpha_j$ и будем говорить, что пара $\alpha_i \alpha_j$ образует беспорядок, если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$. Общее число беспорядков, образованных всеми парами, которые можно составить из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, обозначим символом $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

С помощью метода индукции установим для определителя n -го порядка (1.11) следующую формулу:

$$\Delta = \det A = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n} \quad (1.28)$$

(суммирование в этой формуле идет по всем возможным перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ чисел $1, 2, \dots, n$; число этих перестановок, очевидно, равно $n!$).

В случае $n = 2$ формула (1.28) элементарно проверяется (в этом случае возможны только две перестановки $1, 2$ и $2, 1$, и, поскольку $N(1, 2) = 0$, $N(2, 1) = 1$, формула (1.28) переходит в равенство (1.10)).

С целью проведения индукции предположим, что формула (1.28) при $n > 2$ справедлива для определителя порядка $(n - 1)$.

Тогда, записав разложение определителя n -го порядка (1.11) по первому столбцу *):

$$\Delta = \det A = \sum_{\alpha_1=1}^n (-1)^{\alpha_1+1} a_{\alpha_1 1} \bar{M}_1^{\alpha_1}, \quad (1.29)$$

мы можем, в силу предположения индукции, представить каждый минор $(n - 1)$ -го порядка $\bar{M}_1^{\alpha_1}$ в виде

$$\bar{M}_1^{\alpha_1} = \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_n} (-1)^{N(\alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n} \quad (1.30)$$

(суммирование идет по всем возможным перестановкам $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ $(n - 1)$ чисел, в качестве которых берутся все натуральные числа от 1 до n , за исключением числа α_1).

Так как из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, кроме пар, образованных из чисел $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, можно образовать еще только следующие пары $\alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_3, \dots, \alpha_1 \alpha_n$, и поскольку среди чисел $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ найдется ровно $(\alpha_1 - 1)$ чисел, меньших числа α_1 , то $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = N(\alpha_2, \dots, \alpha_n) + \alpha_1 - 1$.

Отсюда вытекает, что $(-1)^{N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\alpha_1+1} = (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$, и, вставляя (1.30) в (1.29), мы в точности получим формулу (1.28). Тем самым вывод формулы (1.28) завершен.

В заключение заметим, что в большинстве курсов линейной алгебры формула (1.28) положена в основу понятия определителя n -го порядка.

3. Теорема Лапласа **). В этом пункте мы установим замечательную формулу, обобщающую формулу разложения определителя n -го порядка по какой-либо его строке.

С этой целью введем в рассмотрение миноры матрицы n -го порядка (1.8) д в у х т и п о в.

*) Индекс, по которому производится суммирование, на этот раз нам удобно обозначить буквой α_1 .

**) П. С. Лаплас — выдающийся французский астроном, математик и физик (1749—1827).

Пусть k — любой номер, меньший n , а $i_1, i_2, \dots, i_k$ и $j_1, j_2, \dots, j_k$ — произвольные номера, удовлетворяющие условиям $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$.

Миноры первого типа $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ являются определителями порядка k , соответствующими той матрице, которую образуют элементы матрицы (1.8), стоящие на пересечении k строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и k столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Миноры второго типа $\overline{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ являются определителями порядка $n - k$, соответствующими той матрице, которая получается из матрицы (1.8) в результате вычеркивания k строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и k столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Миноры второго типа естественно назвать д о п о л н и т е л ь н ы м и по отношению к минорам первого типа.

Теорема 1.3 (теорема Лапласа). При любом номере k , меньшем n , и при любых фиксированных номерах строк $i_1, i_2, \dots, i_k$ таких, что $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, для определителя n -го порядка (1.11) справедлива формула

$$\Delta = \det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \times \\ \times M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k} \overline{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}, \quad (1.31)$$

называемая разложением этого определителя по k строкам $i_1, i_2, \dots, i_k$. Суммирование в этой формуле идет по всем возможным значениям индексов $j_1, j_2, \dots, j_k$, удовлетворяющим условиям $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что формула (1.31) является обобщением уже доказанной нами формулы разложения определителя n -го порядка по одной его строке с номером i_1 , в которую она переходит при $k = 1$ (при этом минор $M_{i_1}^{j_1}$ совпадает с элементом $a_{i_1 j_1}$, а минор $\overline{M}_{i_1}^{j_1}$ — это введенный выше минор элемента $a_{i_1 j_1}$).

Таким образом, при $k = 1$ формула (1.31) доказана. Доказательство этой формулы для любого k , удовлетворяющего неравенствам $1 < k < n$, проведем по индукции, т. е. предположим, что формула (1.31) справедлива для $(k - 1)$ строк, и, опираясь на это, убедимся в справедливости формулы (1.31) для k строк.

Итак, пусть $1 < k < n$ и фиксированы какие угодно k строк матрицы (1.8) с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$, удовлетворяющими условию $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Тогда по предположению для $(k - 1)$ строк с номерами $i_1, \dots, i_{k-1}$ справедлива формула

$$\Delta = \sum_{j_1, \dots, j_{k-1}} (-1)^{i_1 + \dots + i_{k-1} + j_1 + \dots + j_{k-1}} \times \\ \times M_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{k-1}} \overline{M}_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{k-1}} \quad (1.32)$$

(суммирование идет по всем возможным значениям индексов $j_1, \dots, j_{k-1}$, удовлетворяющим условиям $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{k-1} \leq n$).

Разложим в формуле (1.32) каждый минор $\overline{M}_{j_1 \dots j_{k-1}}^{i_1 \dots i_{k-1}}$ по строке, имеющей в матрице (1.8) номер i_k . В результате весь определитель Δ будет представлен в виде некоторой линейной комбинации миноров $\overline{M}_{j_1 \dots j_{k-1}/k}^{i_1 \dots i_{k-1}/k}$ с коэффициентами, которые мы обозначим через $\theta_{j_1 \dots j_k}$, т. е. для Δ будет справедливо равенство *) $\Delta = \sum_{j_1, \dots, j_k} \theta_{j_1 \dots j_k} \overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$, и нам остается вычислить коэффициенты $\theta_{j_1 \dots j_k}$ и убедиться в том, что они равны

$$\theta_{j_1 \dots j_k} = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}. \quad (1.33)$$

С этой целью заметим, что минор $(n - k)$ -го порядка $\overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$ получается в результате разложения по строке с номером i_k только следующих k миноров $(n - k + 1)$ -го порядка:

$$\overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_{k-1}/k}^{(без\ j_s)} \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (1.34)$$

ибо каждый из остальных содержащих строку i_s миноров $(n - k + 1)$ -го порядка не содержит всех строк и всех столбцов минора $\overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$.

В разложении каждого минора (1.34) по строке матрицы (1.8) с номером i_k выпишем только то слагаемое, которое содержит минор $\overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$ (остальные не интересующие нас слагаемые обозначим многоточием). Учитывая при этом, что в каждом миноре (1.34) элемент $a_{i_k j_s}$ стоит на пересечении $[i_k - (k - 1)]$ -й строки и $[j_s - (s - 1)]$ -го столбца этого минора **), мы получим

$$\overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_{k-1}/k}^{(без\ j_s)} = (-1)^{[i_k - (k - 1)] + [j_s - (s - 1)]} a_{i_k j_s} \overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} + \dots$$

*) Суммирование в этом равенстве, как и выше, идет по всем возможным значениям индексов $j_1, \dots, j_k$, удовлетворяющим условию $1 \leq j_1 < j_2 < \dots \leq j_k \leq n$.

**) Символом $M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_{k-1}/k}^{(без\ j_s)}$ обозначается минор, отвечающий пересечению строк с номерами $i_1, \dots, i_{k-1}$ и всех столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$, за исключением столбца с номером j_s , а символом (1.34) дополнительный к нему минор.

***) Это вытекает из того, что строке с номером i_k предшествует $(k - 1)$ строк, а столбцу с номером j_s предшествует $(s - 1)$ столбцов минора $M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_{k-1}/k}^{(без\ j_s)}$, к которому минор (1.34) является дополнительным.

Теперь нам остается учесть, что в формуле (1.32) каждый минор (1.34) умножается на множитель

$$(-1)^{(i_1 + \dots + i_{k-1}) + (j_1 + \dots + j_k) - 1} M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_{k-1}} (\text{без } i_s)$$

и после этого суммируется по всем s от 1 до k . Имея также в виду, что $(-1)^{2-2k-2s} = 1$, мы получим, что

$$\theta_{j_1 \dots j_k} = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \left[\sum_{s=1}^k (-1)^{k+s} M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_{k-1}} (\text{без } i_s) \right].$$

Замечая, что сумма в квадратных скобках представляет собой разложение минора $M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$ по его последней k -й строке, мы окончательно получим для $\theta_{j_1 \dots j_k}$ формулу (1.33). Теорема Лапласа доказана.

З а м е ч а н и е. В полной аналогии с формулой (1.32) записывается и выводится формула разложения определителя по каким-либо k его столбцам.

4. Свойства определителей. Ниже устанавливается ряд свойств, которыми обладает произвольный определитель n -го порядка.

1°. Свойство равноправности строк и столбцов. Транспонированием любой матрицы или определителя называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. В результате транспонирования матрицы A получается матрица, называемая транспонированной по отношению к матрице A и обозначаемая символом A' .

В дальнейшем мы договоримся символами $|A|$, $|B|$, $|A'|$... обозначать определители квадратных матриц A , B , A' соответственно.

Первое свойство определителя формулируется так: *при транспонировании величина определителя сохраняется, т. е. $|A'| = |A|$.*

Это свойство непосредственно вытекает из теоремы 1.2 (достаточно лишь заметить, что разложение определителя $|A|$ по первому столбцу тождественно совпадает с разложением определителя $|A'|$ по первой строке).

Доказанное свойство означает полную равноправность строк и столбцов и позволяет нам все последующие свойства устанавливать лишь для строк и быть уверенными в справедливости их и для столбцов.

2°. Свойство антисимметрии при перестановке двух строк (или двух столбцов). *При перестановке местами двух строк (или двух столбцов) определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.*

Для определителя второго порядка это свойство проверяется элементарно (из правила (1.10) сразу вытекает, что определители

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$ отличаются лишь знаком).

Считая, что $n > 2$, рассмотрим теперь определитель n -го порядка (1.11) и предположим, что в этом определителе меняются местами две строки с номерами i_1 и i_2 . Записывая формулу Лапласа разложения по этим двум строкам, будем иметь

$$\Delta = \sum_{i_1, i_2} (-1)^{i_1+i_2+l_1+l_2} M_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} \overline{M}_{i_1 i_2}^{i_1 i_2}. \quad (1.35)$$

При перестановке местами строк с номерами i_1 и i_2 каждый определитель второго порядка $M_{i_1 i_2}^{i_1 i_2}$ в силу доказанного выше меняет знак на противоположный, а все остальные величины, стоящие под знаком суммы в (1.35), совсем не зависят от элементов строк с номерами i_1 и i_2 и сохраняют свое значение. Тем самым свойство 2° доказано.

3°. **Линейное свойство определителя.** Будем говорить, что некоторая строка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ является линейной комбинацией строк $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, ..., $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ с коэффициентами $\lambda, \mu, \dots, \nu$, если $a_j = \lambda b_j + \mu c_j + \dots + \nu d_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$.

Линейное свойство определителя можно сформулировать так: если в определителе n -го порядка Δ некоторая i -я строка $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ является линейной комбинацией двух строк $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ и $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ с коэффициентами λ и μ , то $\Delta = \lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2$, где Δ_1 — определитель, у которого i -я строка равна $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, а все остальные строки те же, что и у Δ , а Δ_2 — определитель, у которого i -я строка равна $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, а все остальные строки те же, что и у Δ .

Для доказательства разложим каждый из трех определителей Δ , Δ_1 и Δ_2 по i -й строке и заметим, что у всех трех определителей все миноры $\overline{M}_j^i$ элементов i -й строки одинаковы. Но отсюда следует, что формула $\Delta = \lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2$ сразу вытекает из равенств $a_{ij} = \lambda b_j + \mu c_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Конечно, линейное свойство справедливо и для случая, когда i -я строка является линейной комбинацией не двух, а нескольких строк. Кроме того, линейное свойство справедливо и для столбцов определителя.

Доказанные три свойства являются основными свойствами определителя, вскрывающими его природу.

Следующие пять свойств являются логическими следствиями трех основных свойств.

Следствие 1. *Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.* (В самом деле, при перестановке двух одинаковых строк, с одной стороны, определитель Δ не из-

меняется, а с другой стороны, в силу свойства 2° изменит знак на противоположный. Таким образом, $\Delta = -\Delta$, т. е. $2\Delta = 0$ или $\Delta = 0$.

Следствие 2. Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число λ .

Иными словами, общий множитель всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя можно вынести за знак этого определителя. (Это свойство вытекает из свойства 3° при $\mu = 0$.)

Следствие 3. Если все элементы некоторой строки (или некоторого столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю. (Это свойство вытекает из предыдущего при $\lambda = 0$.)

Следствие 4. Если элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю. (В самом деле, в силу следствия 2 множитель пропорциональности можно вынести за знак определителя, после чего останется определитель с двумя одинаковыми строками, который равен нулю согласно следствию 1).

Следствие 5. Если к элементам некоторой строки (или некоторого столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на произвольный множитель λ , то величина определителя не изменится. (В самом деле, полученный в результате указанного прибавления определитель можно в силу свойства 3° разбить на сумму двух определителей, первый из которых совпадает с исходным, а второй равен нулю в силу пропорциональности двух строк (или столбцов) и следствия 4.)

З а м е ч а н и е. Следствие 5, как и линейное свойство, допускает более общую формулировку, которую мы приведем для строк: если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы строки, являющейся линейной комбинацией нескольких других строк этого определителя (с какими угодно коэффициентами), то величина определителя не изменится.

Следствие 5 широко применяется при конкретном вычислении определителей (соответствующие примеры будут приведены в следующем пункте).

Прежде чем сформулировать еще одно свойство определителя, введем полезное понятие алгебраического дополнения данного элемента определителя.

А л г е б р а и ч е с к и м д о п о л н е н и е м данного элемента a_{ij} определителя n -го порядка (1.11) назовем число, равное $(-1)^{i+j} M_{ij}$ и обозначаемое символом A_{ij} .

Таким образом, алгебраическое дополнение данного элемента может отличаться от минора этого элемента только знаком.

С помощью понятия алгебраического дополнения теоремы 1.1 и 1.2 можно переформулировать так: *сумма произведений элементов любой строки (любого столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения этой строки (этого столбца) равна этому определителю.*

Соответствующие формулы разложения определителя по i -й строке и по j -му столбцу можно переписать так:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (\text{для любого } i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.13')$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (\text{для любого } j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.21')$$

Теперь мы можем сформулировать последнее свойство определителя:

4°. Свойство алгебраических дополнений соседних строк (или столбцов). *Сумма произведений элементов какой-либо строки (или какого-либо столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов любой другой строки (любого другого столбца) равна нулю.*

Доказательство проведем для строк (для столбцов оно проводится аналогично). Записывая подробно формулу (1.13')

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} + \dots + A_{in}a_{in}, \quad (1.36)$$

заметим, что поскольку алгебраические дополнения $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ не зависят от элементов i -й строки $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, то равенство (1.36) является тождеством относительно $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ и сохраняется при замене чисел $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ любыми другими n числами. Заменяя $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ соответствующими элементами любой (отличной от i -й) k -й строки $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$, мы получим слева в (1.36) определитель с двумя одинаковыми строками, равный нулю согласно следствию 1. Таким образом,

$$A_{i1}a_{k1} + A_{i2}a_{k2} + \dots + A_{in}a_{kn} = 0$$

(для любых несовпадающих i и k).

5. Примеры вычисления определителей. При конкретном вычислении определителей широко используются формулы разложения по строке или столбцу и следствие 5, позволяющее, не изменяя величины определителя, прибавлять к любой его строке (или столбцу) произвольную линейную комбинацию других его

строк (или столбцов). Особенно удобно использовать формулу разложения по тем строкам (или столбцам), многие элементы которых равны нулю. В частности, если в данной строке отличен от нуля только один элемент, то разложение по этой строке содержит только одно слагаемое и сразу сводит вопрос о вычислении определителя порядка n к вопросу о вычислении определителя порядка $(n - 1)$ (минора, стоящего в указанном слагаемом).

Если в данной строке отличны от нуля несколько элементов, отвечающих пересечению этой строки с несколькими столбцами, то, применяя к указанным столбцам следствие 5, мы можем, не изменив определителя, обратить в нуль все элементы данной строки, за исключением одного.

Перейдем к конкретным примерам.

Пример 1. Пусть требуется вычислить следующий определитель четвертого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из первого столбца утроенный последний столбец, будем иметь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Далее естественно разложить определитель по первому столбцу. В результате получим

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Теперь в определителе третьего порядка вычтем из второго столбца удвоенный первый столбец. При этом будем иметь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix}.$$

Разлагая, наконец, последний определитель третьего порядка по первой строке, окончательно получим

$$\Delta = 8 \cdot \begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8(500 - 400) = 800.$$

Пример 2. Вычислим так называемый **треугольный определитель**, у которого все элементы, лежащие выше главной диагонали, равны нулю

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} \dots a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель Δ_n по последнему столбцу, мы получим, что он равен произведению элемента a_{nn} на треугольный определитель $(n-1)$ -го порядка Δ_{n-1} , равный

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ & & \ddots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} \dots a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель мы снова разложим по его последнему столбцу, в результате чего убедимся в том, что он равен произведению элемента $a_{(n-1)(n-1)}$ на треугольный определитель $(n-2)$ -го порядка Δ_{n-2} . Продолжая аналогичные рассуждения, мы придем к следующему выражению для исходного определителя: $\Delta_n = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Итак, *треугольный определитель равен произведению элементов, стоящих на его главной диагонали.*

З а м е ч а н и е 1. Если у определителя Δ равны нулю все элементы, лежащие ниже главной диагонали, то этот определитель также равен произведению элементов, лежащих на его главной диагонали (убедиться в этом можно по схеме, изложенной выше но примененной не к последним столбцам, а к последним строкам можно и просто произвести транспонирование Δ и свести этот случай к рассмотренному выше).

Аналогичным способом устанавливается, что определитель, у которого равны нулю все элементы, лежащие выше (или ниже) побочной диагонали, равен произведению числа $(-1)^{n(n-1)/2}$ и всех элементов, лежащих на этой диагонали.

Пример 3. Обобщением треугольного определителя второго порядка может служить определитель $2n$ -го порядка следующей блочной матрицы $\begin{vmatrix} A & O \\ B & C \end{vmatrix}$, в которой A , B и C — произвольные квадратные матрицы n -го порядка, а O — нулевая квадратная матрица n -го порядка. Убедимся в том, что для указанного

определителя справедлива формула

$$\begin{vmatrix} A & O \\ B & C \end{vmatrix} = |A| |C| *.$$
 (1.37)

Привлекая теорему Лапласа, разложим определитель, стоящий в левой части (1.37), *по первым n строкам*. Так как определитель, у которого хотя бы один столбец состоит из нулей, равен нулю, то в формуле разложения (1.31) будет отлично от нуля только одно слагаемое, причём это слагаемое (в силу того, что $(-1)^{(1+\dots+n)+(1+\dots+n)} = 1$) будет как раз равно $|A| |C|$.

З а м е ч а н и е 2. Аналогичными рассуждениями легко убедиться в справедливости формулы

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix} = (-1)^n |B| |C|$$
 (1.38)

(A , B , C и O имеют тот же смысл, что и выше).

Для этого следует разложить определитель, стоящий в левой части (1.38), *по последним n строкам* и учесть, что

$$(-1)^{[(n+1)+\dots+2n]+[1+\dots+n]} = (-1)^{2n(2n+1)/2} = (-1)^n.$$

П р и м е р 4. Вычислим теперь так называемый **определитель Вандермонда**

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (1.39)$$

Вычитая первый столбец из всех последующих, будем иметь

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & (x_2 - x_1) & (x_n - x_1) \\ x_1^2 & (x_2^2 - x_1^2) & (x_n^2 - x_1^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Далее естественно произвести разложение по первой строке, в результате чего мы получим

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & (x_n - x_1) \\ (x_2^2 - x_1^2) & (x_3^2 - x_1^2) & (x_n^2 - x_1^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) & (x_3^{n-1} - x_1^{n-1}) & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

*) Напомним, что символами $|A|$, $|B|$, $|C|$, ... мы договорились обозначать определители матриц A , B , C , ... соответственно.

Вычитая теперь из каждой строки предыдущую строку, умноженную на x_1 , получим

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & (x_n - x_1) \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Далее мы можем вынести за знак определителя общий множитель первого столбца, равный $(x_2 - x_1)$, общий множитель второго столбца, равный $(x_3 - x_1)$, ..., общий множитель $(n - 1)$ -го столбца, равный $(x_n - x_1)$. В результате получим

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \cdot \Delta(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Со стоящим в правой части определителем $\Delta(x_2, x_3, \dots, x_n)$ поступим точно так же, как и с $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В результате получим, что

$$\Delta(x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \cdot \Delta(x_3, \dots, x_n).$$

Продолжая аналогичные рассуждения далее, окончательно получим, что исходный определитель (1.39) равен

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \dots \\ &\quad \dots (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

6. Определитель суммы и произведения матриц. Непосредственно из линейного свойства определителя вытекает, что *определитель суммы двух квадратных матриц одного и того же порядка n $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ равен сумме всех различных определителей порядка n , которые могут получиться, если часть строк (или столбцов) брать совпадающими с соответствующими строками (или столбцами) матрицы A , а остальную часть — совпадающими с соответствующими строками (или столбцами) B .*

Докажем теперь, что *определитель матрицы C , равной произведению квадратной матрицы A на квадратную матрицу B , равен произведению определителей матриц A и B .*

Пусть порядок всех трех матриц A , B и C равен n , и пусть O — нулевая квадратная матрица порядка n , а $(-1)E$ следующая матрица:

$$(-1)E = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

В силу примера 2 из предыдущего пункта определитель матрицы $(-1)E$ равен числу $(-1)^n$.

Рассмотрим следующие две блочные квадратные матрицы порядка $2n$:

$$\begin{vmatrix} A & O \\ (-1)E & B \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A & C \\ (-1)E & O \end{vmatrix}.$$

В силу формул (1.37) и (1.38) из предыдущего пункта определители этих матриц равны

$$\begin{vmatrix} A & O \\ (-1)E & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|, \quad \begin{vmatrix} A & C \\ (-1)E & O \end{vmatrix} = (-1)^n |(-1)E| |C| = |C|.$$

Таким образом, достаточно доказать равенство определителей

$$\begin{vmatrix} A & O \\ (-1)E & B \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A & C \\ (-1)E & O \end{vmatrix}.$$

Подробнее эти два определителя можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & 0 & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & 0 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & & 0 & b_{11} & b_{12} & & b_{1n} \\ 0 & -1 & & 0 & b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & & b_{nn} \end{vmatrix},$$

(1.40)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы убедиться в равенстве этих двух определителей, достаточно заметить, что первые n столбцов у этих определителей совпадают, а каждый столбец второго определителя (1.40) с номером $n+k$ (где $k=1, 2, \dots, n$) в силу формулы $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, получается в результате прибавления к $(n+k)$ -му столбцу первого определителя (1.40) линейной комбинации первых n его столбцов с коэффициентами, соответственно равными

$b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn}$. Таким образом, определители (1.40) равны в силу следствия 5 из п. 3.

В заключение заметим, что непосредственно из формулы (1.37) вытекает, что определитель прямой суммы $|A \oplus B| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$ двух матриц A и B равен произведению определителей этих матриц.

7. Понятие обратной матрицы. Пусть A — квадратная матрица n -го порядка, а E — единичная квадратная матрица того же порядка (см. п. 2 § 1).

Матрица B называется правой обратной по отношению к матрице A , если $AB = E$.

Матрица C называется левой обратной по отношению к матрице A , если $CA = E$.

Так как обе матрицы A и E являются квадратными матрицами порядка n , то матрицы B и C (при условии, что они существуют) также являются квадратными матрицами порядка n .

Убедимся в том, что если обе матрицы B и C существуют, то они совпадают между собой. В самом деле, на основании равенств (1.7) (см. п. 2 § 1), соотношений $AB = E$, $CA = E$ и сочетательного свойства произведения матриц, получим

$$C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B.$$

Естественно возникает вопрос об условиях на матрицу A , при выполнении которых для этой матрицы существуют как левая, так и правая обратные матрицы *).

Теорема 1.4. Для того чтобы для матрицы A существовали левая и правая обратные матрицы, необходимо и достаточно, чтобы определитель $\det A$ матрицы A был отличен от нуля.

Доказательство. 1) **Необходимость.** Если для матрицы A существует хотя бы одна из обратных матриц, например B , то из соотношения $A \cdot B = E$ мы получим, что $\det A \cdot \det B = \det E = 1$ **), откуда вытекает, что $\det A \neq 0$.

2) **Достаточность.** Пусть определитель $\Delta = \det A$ отличен от нуля. Обозначим, как и выше, символом A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A и составим матрицу B , в i -й строке которой стоят алгебраические дополнения i -го столбца матрицы A , поделенные на величину определителя Δ :

$$B = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix}. \quad (1.41)$$

*) И, стало быть, эти матрицы совпадают.

**) $\det E = 1$ в силу примера 2 из п. 5 этого параграфа.

Убедимся в том, что эта матрица B является как правой, так и левой обратной по отношению к матрице A .

Достаточно доказать, что оба произведения AB и BA являются единичной матрицей. Для этого достаточно заметить, что у обоих произведений *любой элемент, не лежащий на главной диагонали, равен нулю*, ибо после выноса множителя $1/\Delta$ этот элемент равен сумме произведений элементов одной строки (или одного столбца) на соответствующие алгебраические дополнения другой строки (или другого столбца). Что же касается элементов, лежащих на главной диагонали, то у обоих произведений AB и BA все такие элементы равны единице в силу того, что сумма произведений элементов и соответствующих алгебраических дополнений одной строки (одного столбца) равна определителю. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Квадратную матрицу A , определитель $\det A$ которой отличен от нуля, принято называть *н е в ы р о ж д е н н о й*.

З а м е ч а н и е 2. Впредь мы можем опускать термины «левая» и «правая» и говорить просто о матрице B , обратной по отношению к *н е в ы р о ж д е н н о й* матрице A и определяемой соотношениями $AB = BA = E$. Очевидно также, что свойство быть обратной матрицей взаимно в том смысле, что если B является обратной для A , то A является обратной для B . Матрицу, обратную к матрице A , впредь мы будем обозначать символом A^{-1} .

§ 3. Теорема о базисном миноре матрицы

1. Понятие линейной зависимости строк. Выше мы уже договорились называть строку *) $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ линейной комбинацией строк $B = (b_1, b_2, \dots, b_n), \dots, C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, если для некоторых вещественных чисел $\lambda, \dots, \mu$ справедливы равенства

$$a_j = \lambda b_j + \dots + \mu c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.42)$$

Указанные n равенств (1.42) удобно записать в виде одного равенства

$$A = \lambda B + \dots + \mu C. \quad (1.43)$$

Всякий раз, когда будет встречаться равенство (1.43), мы будем понимать его в смысле n равенств (1.42).

Введем теперь понятие линейной зависимости строк.

Определение. Строки $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n), \dots, C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ назовем *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа α, β, γ , не все равные нулю, что справедливы равенства

$$\alpha a_j + \beta b_j + \dots + \gamma c_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.44)$$

*) Каждую строку можно рассматривать как матрицу. Поэтому естественно использовать для обозначения строк большие латинские буквы.

n равенств (1.44) удобно записать в виде одного равенства

$$\alpha A + \beta B + \dots + \gamma C = 0, \quad (1.45)$$

в котором $O = (0, 0, \dots, 0)$ обозначает нулевую строку.

Строки, не являющиеся линейно зависимыми, называются **линейно независимыми**. Можно дать и «самостоятельное» определение линейной независимости строк: *строки $A, B, \dots, C$ называются линейно независимыми, если равенство (1.45) возможно лишь в случае, когда все числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ равны нулю.*

Докажем следующее простое, но важное утверждение.

Теорема 1.5. *Для того чтобы строки $A, B, \dots, C$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы одна из этих строк являлась линейной комбинацией остальных строк.*

Доказательство. 1) **Необходимость.** Пусть строки $A, B, \dots, C$ линейно зависимы, т. е. справедливо равенство (1.45), в котором хотя бы одно из чисел $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ отлично от нуля. Ради определенности допустим, что $\alpha \neq 0$. Тогда поделив (1.45) на α и введя обозначения $\lambda = -\beta/\alpha, \dots, \mu = -\gamma/\alpha$, мы можем переписать (1.45) в виде

$$A = \lambda B + \dots + \mu C, \quad (1.46)$$

а это и означает, что строка A является линейной комбинацией строк $B, \dots, C$.

2) **Достаточность.** Пусть одна из строк (например, A) является линейной комбинацией остальных строк. Тогда найдутся числа $\lambda, \dots, \mu$ такие, что справедливо равенство (1.46). Но это последнее равенство можно переписать в виде

$$(-1)A + \lambda B + \dots + \mu C = 0 *).$$

Так как из чисел $-1, \lambda, \dots, \mu$ одно отлично от нуля, то последнее равенство устанавливает линейную зависимость строк $A, B, \dots, C$. Теорема доказана.

Конечно, во всех проведенных выше рассуждениях термин «строки» можно заменить термином «столбцы».

2. Теорема о базисном миноре. Рассмотрим произвольную (не обязательно квадратную) матрицу

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}. \quad (1.47)$$

Минором k -го порядка матрицы A будем называть определитель k -го порядка с элементами, лежащими на пересече-

*) Здесь $O = (0, 0, \dots, 0)$ — нулевая строка.

чении любых k строк и любых k столбцов матрицы A . (Конечно, k не превосходит наименьшее из чисел m и n .)

Предположим, что хотя бы один из элементов a_{ij} матрицы A отличен от нуля. Тогда найдется такое целое положительное число r , что будут выполнены следующие два условия: 1) у матрицы A имеется минор r -го порядка, отличный от нуля, 2) всякий минор $(r+1)$ -го и более высокого порядка (если таковые существуют), равен нулю.

Число r , удовлетворяющее требованиям 1) и 2), назовем **рангом** матрицы A *). Тот минор r -го порядка, который отличен от нуля, назовем **базисным минором** (конечно, у матрицы A может быть несколько миноров r -го порядка, отличных от нуля). Строки и столбцы, на пересечении которых стоит базисный минор, назовем соответственно **базисными строками** и **базисными столбцами**.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 1.6 (теорема о базисном миноре). *Базисные строки (базисные столбцы) линейно независимы. Любая строка (любой столбец) матрицы A является линейной комбинацией базисных строк (базисных столбцов).*

Доказательство. Все рассуждения проведем для строк.

Если бы базисные строки были линейно зависимы, то по теореме 1.5 одна из этих строк являлась бы линейной комбинацией других базисных строк, и мы могли бы, не изменяя величины базисного минора, вычесть из этой строки указанную линейную комбинацию и получить строку, целиком состоящую из нулей, а это противоречило бы тому, что базисный минор отличен от нуля. Итак, базисные строки линейно независимы.

Докажем теперь, что любая строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк. Так как при произвольных переменных строк (или столбцов) определитель сохраняет свойство равенства нулю, то мы, не ограничивая общности, можем считать, что базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы (1.47), т. е. расположен на первых r строках и первых r столбцах. Пусть j — любое число от 1 до n , а k — любое число от 1 до m .

Убедимся в том, что определитель $(r+1)$ -го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix} \quad (1.48)$$

*) Ранг матрицы A , все элементы которой — нули, по определению равен нулю.

равен нулю. Если $j < r$ или $k < r$, то указанный определитель будет равен нулю в силу того, что у него будет два одинаковых столбца или две одинаковые строки.

Если же оба числа j и k превосходят r , то (1.48) является минором матрицы A порядка $(r+1)$, а всякий такой минор равен нулю (по определению базисного минора). Итак, определитель (1.48) равен нулю при всех j от 1 до n и всех k от 1 до m .

Но тогда, разложив этот определитель по последнему столбцу и обозначив не зависящие от номера j алгебраические дополнения элементов этого столбца символами $A_{1j} = c_1, A_{2j} = c_2, \dots, A_{rj} = c_r, A_{kj} = c_{r+1}$, мы получим, что

$$c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + \dots + c_r a_{rj} + c_{r+1} a_{kj} = 0$$

(для всех $j = 1, 2, \dots, n$). Учитывая, что в последних равенствах алгебраическое дополнение $c_{r+1} = A_{kj}$ совпадает с заведомо отличным от нуля базисным минором, мы можем поделить каждое из этих равенств на c_{r+1} . Но тогда, вводя обозначения

$$\lambda_1 = -\frac{c_1}{c_{r+1}}, \quad \lambda_2 = -\frac{c_2}{c_{r+1}}, \quad \dots, \quad \lambda_r = -\frac{c_r}{c_{r+1}},$$

мы получим, что $a_{kj} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \dots + \lambda_r a_{rj}$ (для всех $j = 1, 2, \dots, n$), а это и означает, что k -я строка является линейной комбинацией первых r (базисных) строк. Теорема доказана.

3. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

Теорема 1.7. Для того, чтобы определитель n -го порядка Δ был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были линейно зависимы.

Доказательство. 1) **Необходимость.** Если определитель n -го порядка Δ равен нулю, то базисный минор его матрицы имеет порядок r , заведомо меньший n . Но тогда хотя бы одна из строк является не базисной. По теореме 1.6 эта строка является линейной комбинацией базисных строк. В эту линейную комбинацию мы можем включить и все оставшиеся строки, поставив перед ними нули.

Итак, одна строка является линейной комбинацией остальных. Но тогда по теореме 1.5 строки определителя линейно зависимы.

2) **Достаточность.** Если строки Δ линейно зависимы, то по теореме 1.5 одна строка A_i является линейной комбинацией остальных строк. Вычитая из строки A_i указанную линейную комбинацию, мы, не изменив величины Δ , получим одну строку, целиком состоящую из нулей. Но тогда определитель Δ равен нулю (в силу следствия 3 из п. 4 § 2). Теорема доказана.

ГЛАВА 2

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Из курса аналитической геометрии читатель знаком с операцией сложения свободных векторов и с операцией умножения вектора на вещественное число, а также со свойствами этих операций. В настоящей главе изучаются множества объектов любой природы, для элементов которых каким-либо способом (причем, безразлично каким) определены операция сложения элементов и операция умножения элемента на вещественное число, причем указанные операции обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над геометрическими векторами. Такие множества, называемые *линейными пространствами*, обладают целым рядом общих свойств, которые и будут установлены в настоящей главе.

§ 1. Понятие линейного пространства

1. Определение линейного пространства. Множество R элементов $x, y, z, \dots$ любой природы называется *линейным* (или *аффинным*) *пространством*, если выполнены следующие три требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам x и y множества R ставится в соответствие третий элемент z этого множества, называемый *суммой* элементов x и y и обозначаемый символом $z = x + y$.

II. Имеется правило, посредством которого любому элементу x множества R и любому вещественному числу λ ставится в соответствие элемент u этого множества, называемый *произведением* элемента x на число λ и обозначаемый символом $u = \lambda x$ или $u = x\lambda$.

III. Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам:

- 1°. $x + y = y + x$ (переместительное свойство суммы);
- 2°. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сочетательное свойство суммы);
- 3°. существует нулевой элемент 0 такой, что $x + 0 = x$ для любого элемента x (особая роль нулевого элемента);
- 4°. для каждого элемента x существует *противоположный* элемент x' такой, что $x + x' = 0$;

5°. $1 \cdot x = x$ для любого элемента x (особая роль числового множителя 1);

6°. $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$ (сочетательное относительно числового множителя свойство);

7°. $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$ (распределительное относительно суммы числовых множителей свойство);

8°. $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$ (распределительное относительно суммы элементов свойство).

Подчеркнем, что при введении понятия линейного пространства мы абстрагируемся не только от природы изучаемых объектов, но и от конкретного вида правил образования суммы элементов и произведения элемента на число (важно лишь, чтобы эти правила удовлетворяли восьми аксиомам, сформулированным в данном выше определении).

Если же природа изучаемых объектов и вид правил образования суммы элементов и произведения элемента на число указаны *), то мы будем называть линейное пространство **конкретным**.

Приведем примеры конкретных линейных пространств.

Пример 1. Рассмотрим множество всех свободных векторов в трехмерном пространстве. Операции сложения указанных векторов и умножения этих векторов на числа определим так, как это было сделано в аналитической геометрии (сложение векторов определим по правилу «параллелограмма»; при умножении вектора на вещественное число λ длина этого вектора умножается на $|\lambda|$, а направление при $\lambda > 0$ остается неизменным, а при $\lambda < 0$ — изменяется на противоположное).

Элементарно проверяется справедливость всех аксиом 1°—8° (справедливость всех аксиом, за исключением аксиомы 5°, установлена в курсе аналитической геометрии **), справедливость аксиомы 5° не вызывает сомнений.)

Таким образом, множество всех свободных векторов в пространстве с так определенными операциями сложения векторов и умножения их на числа представляет собой линейное пространство, которое мы будем обозначать символом B_3 .

Аналогичные множества векторов на плоскости и на прямой, также являющиеся линейными пространствами, мы будем обозначать соответственно символами B_2 и B_1 .

Пример 2. Рассмотрим множество $\{x\}$ всех положительных вещественных чисел. Определим сумму двух элементов x и y этого множества как произведение вещественных чисел x и y (понимаемое в обычном в теории вещественных чисел

*) Разумеется, эти правила должны быть указаны так, чтобы были справедливы свойства 1°—8°, перечисленные в данном выше определении в виде аксиом.

**) См. выпуск «Аналитическая геометрия», гл. 2, § 1, п. 2.

смысле). Произведение элемента x множества $\{x\}$ на вещественное число λ определим как возведение положительного вещественного числа x в степень λ . Нулевым элементом множества $\{x\}$ будет являться вещественное число 1, а противоположным (для данного элемента x) элементом будет являться вещественное число $1/x$.

Легко убедиться в справедливости всех аксиом 1°—8°. В самом деле, справедливость аксиом 1° и 2° вытекает из переместительного и сочетательного свойств произведения вещественных чисел; справедливость аксиом 3 и 4° вытекает из элементарных равенств $x \cdot 1 = x$, $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (для любого вещественного $x > 0$);

аксиома 5° эквивалентна равенству $x^1 = x$; аксиомы 6° и 7° справедливы в силу того, что для любого $x > 0$ и любых вещественных λ и μ имеют место соотношения $(x^\mu)^\lambda = x^{\lambda\mu}$, $x^{(\lambda+\mu)} = x^\lambda \cdot x^\mu$; наконец, справедливость аксиомы 8° следует из того, что для любых положительных x и y и для любого вещественного λ имеет место равенство $(xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda$. Итак, мы убедились, что множество $\{x\}$ с так определенными операциями сложения элементов и умножения их на числа является линейным пространством.

Пример 3. Важный пример линейного пространства дает множество A^n , элементами которого служат упорядоченные совокупности n произвольных вещественных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Элементы этого множества мы будем обозначать одним символом x , т. е. будем писать $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, и при этом называть вещественные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ координатами элемента x .

В анализе множество A^n обычно называют n -мерным координатным пространством*). В алгебраической трактовке множество A^n можно рассматривать как совокупность всевозможных строк, каждая из которых содержит n вещественных чисел (что мы уже и делали в § 3 гл. 1).

Операции сложения элементов множества A^n и умножения этих элементов на вещественные числа определим правилами:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Предоставляем читателю элементарную проверку справедливости всех аксиом 1°—8° и того факта, что нулевым элементом рассматриваемого множества является элемент $0 = (0, 0, \dots, 0)$, а противоположным для элемента $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является элемент $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Пример 4. Рассмотрим далее множество $C[a, b]$ всех функций $x = x(t)$, определенных и непрерывных на сегменте $a \leq t \leq b$. Операции сложения таких функций и умножения их на

*) См. выпуск «Основы математического анализа», часть 1, гл. 14, § 1, п. 4.

вещественные числа определим обычными правилами математического анализа. Элементарно проверяется справедливость аксиом 1° — 8° *), позволяющая заключить, что множество $C[a, b]$ является линейным пространством.

Пример 5. Следующим примером линейного пространства может служить множество $\{P_n(t)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа n , с операциями, определенными так же, как в предыдущем примере. Заметим, что множество $\{P_n(t)\}$, если его рассматривать на сегменте $a \leq t \leq b$, является подмножеством линейного пространства $C[a, b]$, рассмотренного в примере 4.

Замечание 1. Для разъяснения изучаемого понятия линейного пространства укажем примеры множеств, по той или иной причине не являющихся линейными пространствами:

а) множество всех векторов пространства с исключением векторов, коллинеарных некоторой прямой l (ибо в пределах этого множества нельзя складывать векторы, симметричные относительно указанной прямой l);

б) множество всех многочленов степени, точно равной натуральному числу n (сумма двух таких многочленов может оказаться многочленом степени ниже n);

в) множество всех многочленов степени, не превышающей натурального n , все коэффициенты которых положительны (элементы такого множества нельзя умножить на отрицательные вещественные числа).

Замечание 2. Отметим, что элементы произвольного линейного пространства принято называть **векторами**. То обстоятельство, что часто термин «вектор» употребляется в более узком смысле, при этом не приводит к недоразумениям, а, напротив, вызывая к сложившимся геометрическим представлениям, позволяет уяснить, а зачастую и предвидеть ряд результатов, справедливых для линейных пространств произвольной природы.

Замечание 3. В сформулированном нами определении линейного пространства числа $\lambda, \mu, \dots$ брались из множества вещественных чисел. Поэтому определенное нами пространство естественно назвать **вещественным линейным пространством**. При более широком подходе можно брать $\lambda, \mu, \dots$ из множества комплексных чисел. При этом мы приходим к понятию **комплексного линейного пространства**.

2. Некоторые свойства произвольных линейных пространств. Из аксиом 1° — 8° в качестве логических следствий можно получить ряд утверждений, справедливых для произвольных ли-

*) В частности, нулевым элементом пространства $C[a, b]$ является функция, тождественно равная нулю на сегменте $a \leq t \leq b$.

нейных пространств. В качестве примера установим два утверждения.

Теорема 2.1. *В произвольном линейном пространстве существует единственный нулевой элемент и для каждого элемента x существует единственный противоположный элемент.*

Доказательство. Существование хотя бы одного нулевого элемента утверждается в аксиоме 3°. Предположим, что существуют два нулевых элемента 0_1 и 0_2 . Тогда, полагая в аксиоме 3° сначала $x = 0_1$, $0 = 0_2$, а затем $x = 0_2$, $0 = 0_1$, мы получим два равенства $0_1 + 0_2 = 0_1$, $0_2 + 0_1 = 0_2$, левые части которых (в силу аксиомы 1°) равны. Стало быть, в силу транзитивности знака = равны и правые части двух последних равенств, т. е. $0_1 = 0_2$, и единственность нулевого элемента установлена.

Существование для каждого элемента x хотя бы одного противоположного элемента y утверждается в аксиоме 4°. Предположим, что для некоторого элемента x существует два противоположных элемента y_1 и y_2 , так что $x + y_1 = 0$ и $x + y_2 = 0$. Но тогда в силу аксиом 3°, 2° и 1° $y_1 = y_1 + 0 = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = 0 + y_2 = y_2 + 0 = y_2$, т. е. $y_1 = y_2$, и единственность для каждого элемента x противоположного элемента доказана. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *В произвольном линейном пространстве*

1) *нулевой элемент 0 равен произведению произвольного элемента x на вещественное число 0;*

2) *для каждого элемента x противоположный элемент равен произведению этого элемента x на вещественное число -1 .*

Доказательство. 1) Пусть x — произвольный элемент, а y — ему противоположный. Последовательно применяя аксиомы 3°, 4°, 2°, 5°, 1°, 7° и снова 5° и 4°, будем иметь $x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + (x + y) = (x \cdot 0 + x) + y = (x \cdot 0 + x \cdot 1) + y = x(0 + 1) + y = x \cdot 1 + y = x + y = 0$, т. е. $x \cdot 0 = 0$.

2) Пусть x — произвольный элемент, $y = (-1) \cdot x$. Используя аксиомы 5°, 7°, 1° и уже доказанное равенство $x \cdot 0 = 0$, получим равенство $x + y = x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = [1 + (-1)]x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, которое и доказывает (в силу аксиомы, 4°), что y — элемент противоположный x . Теорема доказана.

Отметим в заключение, что аксиомы 1°—4° позволяют доказать существование и единственность разности любых двух элементов линейного пространства x и y , которая определяется как элемент z , удовлетворяющий условию $z + y = x^*$). (Таковым элементом служит сумма $z = x + (-1)y$.)

*) Достаточно дословно повторить доказательство, данное в теории вещественных чисел (см. выпуск «Основы математического анализа», часть 1, гл. 2, § 2, п. 3).

§ 2. Базис и размерность линейного пространства

1. Понятие линейной зависимости элементов линейного пространства. В курсе аналитической геометрии *) было введено понятие линейной зависимости векторов, а в п. 1 § 3 предыдущей главы — понятие линейной зависимости строк (или, что то же самое, элементов пространства A^n , рассмотренного в примере 3 из п. 1 § 1 настоящей главы).

Обобщением этих понятий является понятие линейной зависимости элементов совершенно произвольного линейного пространства, к выяснению которого мы и переходим.

Рассмотрим произвольное вещественное линейное пространство R с элементами $x, y, \dots, z, \dots$.

Л и н е й н о й к о м б и н а ц и е й элементов $x, y, \dots, z$ пространства R мы будем называть сумму произведений этих элементов на произвольные вещественные числа, т. е. выражение вида

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z. \quad (2.1)$$

где $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ — какие угодно вещественные числа.

Определение 1. *Элементы $x, y, \dots, z$ пространства R называются л и н е й н о з а в и с и м ы м и, если найдутся такие вещественные числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация элементов $x, y, \dots, z$ с указанными числами является нулевым элементом пространства R , т. е. имеет место равенство*

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0. \quad (2.2)$$

Элементы $x, y, \dots, z$, не являющиеся линейно зависимыми, мы будем называть л и н е й н о н е з а в и с и м ы м и.

Дадим другое определение линейно независимых векторов, построенное на логическом отрицании содержания определения 1.

Определение 2. *Элементы $x, y, \dots, z$ пространства R называются л и н е й н о н е з а в и с и м ы м и, если линейная комбинация (2.1) является нулевым элементом пространства R лишь при условии $\alpha = \beta = \dots = \gamma = 0$.*

Теорема 2.3. *Для того чтобы элементы $x, y, \dots, z$ пространства R были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных элементов.*

Доказательство. 1) **Необходимость.** Пусть элементы $x, y, \dots, z$ линейно зависимы, т. е. справедливо равенство (2.2), в котором хотя бы одно из чисел $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ отлично от нуля. Пусть, ради определенности, $\alpha \neq 0$. Тогда, поделив (2.2) на α и введя обозначения $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}, \dots, \mu = -\frac{\gamma}{\alpha}$, мы можем

*) См. выпуск «Аналитическая геометрия», гл. 2, § 1, п. 3.

переписать (2.2) в виде

$$x = \lambda y + \dots + \mu z, \quad (2.3)$$

а это и означает, что элемент x является линейной комбинацией элементов $y, \dots, z$.

2) *Достаточность*. Пусть один из элементов (например, x) является линейной комбинацией остальных элементов. Тогда найдутся числа $\lambda, \dots, \mu$, такие, что справедливо равенство (2.3). Но это последнее равенство можно переписать в виде

$$(-1)x + \lambda y + \dots + \mu z = 0. \quad (2.4)$$

Так как из чисел $(-1), \lambda, \dots, \mu$ одно отлично от нуля, то равенство (2.4) устанавливает линейную зависимость элементов $x, y, \dots, z$. Теорема доказана.

Справедливы два элементарных утверждения:

1. *Если среди элементов $x, y, \dots, z$ имеется нулевой элемент, то эти элементы линейно зависимы*. В самом деле, если, например, $x = 0$, то равенство (2.2) справедливо при $\alpha = 1, \beta = \dots = \gamma = 0$.

2. *Если часть элементов $x, y, \dots, z$ являются линейно зависимыми, то и все эти элементы являются линейно зависимыми*. В самом деле, если, например, элементы $y, \dots, z$ линейно зависимы, то справедливо равенство $\beta y + \dots + \gamma z = 0$, в котором не все числа $\beta, \dots, \gamma$ равны нулю. Но тогда с теми же числами $\beta, \dots, \gamma$ и с $\alpha = 0$ будет справедливо равенство (2.2).

В заключение рассмотрим вопрос о линейной зависимости элементов пространства A^n , введенного в примере 3 п. 1 § 1.

Докажем, что n элементов указанного пространства

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0), \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

являются линейно независимыми, а совокупность n элементов (2.5) и еще одного произвольного элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства A^n уже образует линейно зависимую систему элементов.

Рассмотрим линейную комбинацию элементов (2.5) с какими-либо числами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. В силу аксиом эта линейная комбинация представляет собой элемент

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

который является нулевым лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Но это и означает линейную независимость элементов (2.5).

Докажем теперь, что система, состоящая из n элементов (2.5) и еще одного произвольного элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства A^n , уже является линейно зависимой. В силу теоремы 2.3 достаточно доказать, что элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляет собой линейную комбинацию элементов (2.5), а это очевидно, ибо в силу аксиом

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

2. Базис и координаты. Рассмотрим произвольное вещественное линейное пространство R .

Определение. Совокупность линейно независимых элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства R называется базисом этого пространства, если для каждого элемента x пространства R найдутся вещественные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что справедливо равенство

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (2.6)$$

При этом равенство (2.6) называется разложением элемента x по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются координатами элемента x (относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$).

Докажем, что каждый элемент x линейного пространства R может быть разложен по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ единственным способом, т. е. координаты каждого элемента x относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ определяются однозначно.

Допустим, что для некоторого элемента x наряду с разложением (2.6) справедливо еще и другое разложение по тому же самому базису

$$x = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \dots + x'_n e_n. \quad (2.7)$$

Почленное вычитание равенств (2.6) и (2.7) приводит нас к соотношению *)

$$(x_1 - x'_1) e_1 + (x_2 - x'_2) e_2 + \dots + (x_n - x'_n) e_n = 0. \quad (2.8)$$

В силу линейной независимости базисных элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$, соотношение (2.8) приводит к равенствам $x_1 - x'_1 = 0$, $x_2 - x'_2 = 0$, ..., $x_n - x'_n = 0$ или $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, ..., $x_n = x'_n$. Единственность разложения по базису доказана. Значение базиса заключается также и в том, что операции сложения элементов и умножения их на числа при задании базиса превращаются в соответствующие операции над числами — координатами этих элементов. Именно справедливо следующее утверждение.

*) Возможность почленного вычитания равенств (2.6) и (2.7) и производимой группировки членов вытекает из аксиом 1°—8°.

Теорема 2.4. При сложении двух любых элементов линейного пространства R их координаты (относительно любого базиса пространства R) складываются; при умножении произвольного элемента на любое число λ все координаты этого элемента умножаются на λ .

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — произвольный базис пространства R , $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ и $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$ — любые два элемента этого пространства.

Тогда в силу аксиом 1°—8°

$$x + y = (x_1 + y_1) e_1 + (x_2 + y_2) e_2 + \dots + (x_n + y_n) e_n,$$

$$\lambda x = (\lambda x_1) e_1 + (\lambda x_2) e_2 + \dots + (\lambda x_n) e_n.$$

В силу единственности разложения по базису теорема доказана.

Приведем примеры базисов конкретных линейных пространств.

Из аналитической геометрии известно, что любые три некопланарных вектора образуют базис в линейном пространстве B_3 всех свободных векторов (это пространство рассмотрено в примере 1 п. 1 § 1).

Заметим далее, что совокупность n элементов (2.5), рассмотренных в конце п. 1, образует базис в линейном пространстве A_n , введенном в примере 3 п. 1 § 1.

В самом деле, в конце предыдущего пункта доказано, что элементы (2.5) линейно независимы и что любой элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства A^n представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов (2.5).

Убедимся, наконец, что базис линейного пространства $\{x\}$, введенного в примере 2 п. 1 § 1, состоит из одного элемента, в качестве которого можно взять любой не нулевой элемент этого пространства (т. е. любое положительное вещественное число x_0 , не равное 1). Достаточно доказать, что для любого положительного вещественного числа x найдется вещественное число λ такое, что $x = x_0^\lambda$ *). Но это очевидно: достаточно взять $\lambda = \log_{x_0} x$.

3. Размерность линейного пространства. Как и выше, будем рассматривать произвольное вещественное линейное пространство R .

Определение 1. Линейное пространство R называется *п-мерным*, если в нем существует n линейно независимых элементов, а любые $(n + 1)$ элементов уже являются линейно зависимыми. При этом число n называется *размерностью* пространства R .

*) Напомним, что произведение элемента x_0 на число λ определяется как число x_0^λ .

Размерность пространства R обычно обозначают символом $\dim R$.

Определение 2. *Линейное пространство R называется бесконечномерным, если в нем существует любое число линейно независимых элементов *).*

В настоящей книге мы будем изучать в основном пространства конечной размерности n . Бесконечномерные пространства составляют предмет специального изучения. (Они изучаются в гл. 10 и 11 выпуска «Основы математического анализа», часть II.)

Выясним связь между понятием размерности пространства и введенным в предыдущем пункте понятием базиса.

Теорема 2.5. *Если R — линейное пространство размерности n , то любые n линейно независимых элементов этого пространства образуют его базис.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — любая система n линейно независимых элементов пространства R (существование хотя бы одной такой системы вытекает из определения 1).

Если x — любой элемент R , то, согласно определению 1, система $(n+1)$ элементов $x, e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно зависима, т. е. найдутся не все равные нулю числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что справедливо равенство

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0. \quad (2.9)$$

Заметим, что число α_0 заведомо отлично от нуля (ибо в противном случае из равенства (2.9) вытекала бы линейная зависимость элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$). Но тогда, поделив равенство (2.9) на α_0 и положив $x_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, $x_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_0}$, ..., $x_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_0}$, мы получим из (2.9)

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (2.10)$$

Так как x — произвольный элемент R , то равенство (2.10) доказывает, что система элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ является базисом пространства R . Теорема доказана.

Теорема 2.6. *Если линейное пространство R имеет базис, состоящий из n элементов, то размерность R равна n .*

Доказательство. Пусть система n элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ является базисом пространства R . Достаточно доказать, что любые $(n+1)$ элементов этого пространства $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ линейно зависимы **). Разложив каждый из этих элементов по

*) Для обозначения того, что пространство R является бесконечномерным, используют следующую символику: $\dim R = \infty$.

**) Ибо базисные элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют систему n линейно независимых элементов пространства R .

базису, будем иметь

$$x_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n,$$

$$x_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n,$$

$$x_{n+1} = a_{(n+1)1}e_1 + a_{(n+1)2}e_2 + \dots + a_{(n+1)n}e_n,$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{(n+1)n}$ — некоторые вещественные числа.

Очевидно, линейная зависимость элементов $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ эквивалентна линейной зависимости строк матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \dots & a_{(n+1)n} \end{vmatrix}.$$

Но строки указанной матрицы заведомо линейно зависимы, ибо порядок базисного минора этой матрицы (содержащей $(n+1)$ строк и n столбцов) не превосходит n , и хотя бы одна из $(n+1)$ ее строк не является базисной и по теореме о базисном миноре *) представляет собой линейную комбинацию базисных (а стало быть, и всех остальных) строк. Теорема доказана.

Обращаясь к примерам, рассмотренным в конце предыдущего пункта, мы теперь можем сказать, что размерность пространства B_3 всех свободных векторов равна трем, размерность пространства A^n равна n , а размерность пространства $\{x\}$ равна единице.

Примером бесконечномерного пространства может служить линейное пространство $C[a, b]$ всех функций $x = x(t)$, определенных и непрерывных на сегменте $a \leq t \leq b$ (см. пример 4 из п. 1 § 1).

В самом деле, для любого номера n система $(n+1)$ элементов этого пространства $1, t, t^2, \dots, t^n$ является линейно независимой (ибо в противном случае некоторый многочлен $C_0 + C_1t + C_2t^2 + \dots + C_nt^n$, не все коэффициенты $C_0, C_1, \dots, C_n$ которого равны нулю, оказался бы тождественно равным нулю на сегменте $a \leq t \leq b$).

4. Понятие изоморфизма линейных пространств. В этом пункте мы покажем, что различные линейные пространства одной и той же размерности n в смысле свойств, связанных со введенными в этих пространствах операциями, по существу не отличаются друг от друга.

Так как в линейных пространствах введены лишь операции сложения элементов и умножения элементов на числа, то естественно сформулировать следующее определение.

*) См. теорему 1.6 из п. 2 § 3 гл. 1.

Определение. Два произвольных вещественных линейных пространства R и R' называются *и з о м о р ф н ы м и*, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие *) так, что если элементам x и y пространства R отвечают соответственно элементы x' и y' пространства R' , то элементу $x + y$ отвечает элемент $x' + y'$, а элементу λx при любом вещественном λ отвечает элемент $\lambda x'$.

Заметим, что если линейные пространства R и R' изоморфны, то нулевому элементу R отвечает нулевой элемент R' и наоборот. (В самом деле, пусть элементу x пространства R отвечает некоторый элемент x' пространства R' . Тогда элементу $0 \cdot x$ пространства R отвечает элемент $0 \cdot x'$ пространства R' .)

Отсюда следует, что если в случае изоморфизма элементам $x, y, \dots, z$ пространства R отвечают соответственно элементы $x', y', \dots, z'$ пространства R' , то линейная комбинация $\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z$ является нулевым элементом пространства R тогда и только тогда, когда линейная комбинация $\alpha x' + \beta y' + \dots + \gamma z'$ является нулевым элементом пространства R' .

Но это означает, что если пространства R и R' изоморфны, то максимальное число линейно независимых элементов в каждом из этих пространств одно и то же.

Иными словами, два изоморфных пространства обязаны иметь одинаковую размерность.

Стало быть, пространства разной размерности не могут быть изоморфны.

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 2.7. Любые два n -мерных вещественных линейных пространства R и R' изоморфны.

Доказательство. Выберем в R какой-либо базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, а в R' — какой-либо базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Поставим в соответствие каждому элементу $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ пространства R элемент $x' = x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n$ пространства R' (т. е. мы берем в качестве x' тот элемент R' , который имеет относительно базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ те же самые координаты, что и элемент x относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$).

Убедимся в том, что установленное соответствие является взаимно однозначным. В самом деле, каждому элементу x пространства R однозначно соответствуют координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые в свою очередь определяют единственный элемент x' пространства R' . В силу равноправности пространств R и R' каждому элементу x' пространства R' в свою очередь соответствует единственный элемент x пространства R .

*) Напомним, что соответствие между элементами двух множеств R и R' называется взаимно однозначным, если при этом соответствии каждому элементу R отвечает один и только один элемент R' , причем каждый элемент R' отвечает одному и только одному элементу R .

Остается заметить, что если элементам x и y пространства R отвечают соответственно элементы x' и y' пространства R' , то в силу теоремы 2.4 элементу $x + y$ отвечает элемент $x' + y'$, а элементу λx отвечает элемент $\lambda x'$. Теорема доказана.

Из приведенного нами рассмотрения следует, что единственной существенной характеристикой конечномерного линейного пространства является его размерность.

§ 3. Подпространства линейных пространств

1. Понятие подпространства и линейной оболочки. Предположим, что некоторое подмножество L линейного пространства R удовлетворяет следующим двум требованиям:

1°. Если элементы x и y принадлежат подмножеству L , то и сумма $x + y$ принадлежит этому подмножеству.

2°. Если элемент x принадлежит подмножеству L , а λ — любое вещественное число, то и элемент λx принадлежит подмножеству L .

Убедимся в том, что подмножество L , удовлетворяющее требованиям 1° и 2°, само является линейным пространством. Достаточно убедиться в справедливости для элементов подмножества L аксиом 1°—8° из определения линейного пространства. Все указанные аксиомы, кроме аксиом 3° и 4°, заведомо справедливы для элементов подмножества L , поскольку они справедливы для всех элементов пространства R . Остается проверить выполнение аксиом 3° и 4°. Пусть x — любой элемент подмножества L , а λ — любое вещественное число. Тогда в силу требования 2° элемент λx также принадлежит L . Остается заметить, что (в силу теоремы 2.2) этот элемент λx при $\lambda = 0$ превращается в нулевой элемент пространства R , а при $\lambda = -1$ превращается в противоположный для x элемент. Таким образом, подмножеству L принадлежит нулевой элемент и противоположный (для каждого элемента x) элемент, а это и означает, что для элементов подмножества L справедливы аксиомы 3° и 4°. Тем самым полностью доказано, что подмножество L само является линейным пространством.

Определение. Подмножество L линейного пространства R , удовлетворяющее требованиям 1° и 2°, называется *линейным подпространством* (или просто *подпространством*) пространства R .

Простейшими примерами подпространств могут служить:

1) так называемое *нулевое подпространство*, т. е. подмножество линейного пространства R , состоящее из одного нулевого элемента; 2) все пространство R (которое, конечно, можно рассматривать как подпространство).

Оба эти подпространства принято называть *несобственными*.

Укажем примеры подпространств более содержательного вида.

Пример 1. Подмножество $\{P_n(t)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа n *), в линейном пространстве $C[a, b]$ всех функций $x = x(t)$, определенных и непрерывных на сегменте $a \leq t \leq b$ **) (справедливость для элементов подмножества $\{P_n(t)\}$ требований 1° и 2° не вызывает сомнений).

Пример 2. Подмножество B_2 всех свободных векторов, параллельных некоторой плоскости, в линейном пространстве B_3 всех свободных векторов ***)) (справедливость для элементов B_2 требований 1° и 2° очевидна).

Пример 3. Пусть $x, y, \dots, z$ — совокупность элементов некоторого линейного пространства R . *Линейной оболочкой элементов $x, y, \dots, z$ будем называть совокупность всех линейных комбинаций этих элементов*, т. е. множество элементов вида

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z,$$

где $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ — какие угодно вещественные числа.

Договоримся обозначать линейную оболочку элементов $x, y, \dots, z$ символом $L(x, y, \dots, z)$.

Для линейной оболочки произвольных элементов $x, y, \dots, z$ линейного пространства R , очевидно, выполняются требования 1° и 2°, сформулированные в начале настоящего пункта. Поэтому *всякая линейная оболочка является подпространством основного линейного пространства R* . Это подпространство, очевидно, содержит элементы $x, y, \dots, z$, на которых построена линейная оболочка $L(x, y, \dots, z)$. С другой стороны, всякое подпространство, содержащее элементы $x, y, \dots, z$, обязано содержать и все линейные комбинации этих элементов. Поэтому *линейная оболочка элементов $x, y, \dots, z$ является наименьшим подпространством, содержащим элементы $x, y, \dots, z$* .

Конкретным примером линейной оболочки может служить линейная оболочка элементов $1, t, t^2, \dots, t^n$ линейного пространства $C[a, b]$ всех функций $x = x(t)$, определенных и непрерывных на сегменте $a \leq t \leq b$. Эта линейная оболочка, очевидно, представляет собой множество $\{P_n(t)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей n .

Другие примеры подпространств будут рассмотрены в п. 3 настоящего параграфа.

*) Это подмножество введено в примере 5 п. 1 § 1 настоящей главы.

**) Пространство $C[a, b]$ введено в примере 4 п. 1 § 1 этой главы.

***)) Множества B_2 и B_3 были введены в примере 1 п. 1 § 1 этой главы.

Рассмотрим вопрос о размерности подпространства (и, в частности, линейной оболочки).

Можно утверждать, что *размерность любого подпространства n -мерного линейного пространства R не превосходит размерности n пространства R* (ибо всякая линейно независимая система элементов подпространства является одновременно линейно независимой системой элементов всего пространства R).

Более точно можно утверждать, что *если подпространство L не совпадает со всем n -мерным линейным пространством R , то размерность L строго меньше n* .

Это вытекает из того, что если размерности L и R обе равны n , то всякий базис подпространства L , поскольку он состоит из n элементов, является (в силу теоремы 2.5) базисом и всего пространства R .

Заметим, что если во всем пространстве R выбран базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, то базисные элементы подпространства L , вообще говоря, нельзя выбирать из числа элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ (ибо в общем случае ни один из элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ может не принадлежать L). Однако справедливо обратное утверждение: *если элементы $e_1, e_2, \dots, e_k$ составляют базис k -мерного подпространства n -мерного линейного пространства R , то этот базис можно дополнить элементами $e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства R так, что совокупность элементов $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ будет составлять базис всего пространства R* .

Докажем это утверждение. Если $k < n$, то найдется элемент e_{k+1} пространства R такой, что элементы $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}$ линейно независимы (в противном случае пространство R оказалось бы k -мерным). Далее, если $k + 1 < n$, то найдется элемент e_{k+2} пространства R такой, что элементы $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}$ линейно независимы (в противном случае пространство R оказалось бы $(k + 1)$ -мерным). Продолжая аналогичные рассуждения, мы докажем сформулированное утверждение.

В заключение докажем важную теорему о размерности линейной оболочки.

Теорема 2.8. *Размерность линейной оболочки $L(x, y, \dots, z)$ элементов $x, y, \dots, z$ равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе элементов $x, y, \dots, z$. В частности, если элементы $x, y, \dots, z$ линейно независимы, то размерность линейной оболочки $L(x, y, \dots, z)$ равна числу элементов $x, y, \dots, z$ (а сами эти элементы образуют базис линейной оболочки $L(x, y, \dots, z)$).*

Доказательство. Допустим, что среди элементов $x, y, \dots, z$ имеется r линейно независимых элементов (обозначим их через $x_1, x_2, \dots, x_r$), а любые $(r + 1)$ из элементов $x, y, \dots, z$ линейно зависимы. Тогда каждый из элементов $x, y, \dots, z$ представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов

$x_1, x_2, \dots, x_r$), и поскольку по определению каждый элемент линейной оболочки $L(x, y, \dots, z)$ представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов $x, y, \dots, z$, то каждый элемент указанной линейной оболочки представляет собой некоторую линейную комбинацию одних только элементов $x_1, x_2, \dots, x_r$. Но это и означает, что система линейно независимых элементов $x_1, x_2, \dots, x_r$ образует базис линейной оболочки $L(x, y, \dots, z)$ и что размерность $L(x, y, \dots, z)$ равна r . Теорема доказана.

2. Новое определение ранга матрицы. В § 3 главы 1 мы определили ранг произвольной матрицы A как порядок ее базисного минора, т. е. как число r , удовлетворяющее требованию существования у матрицы A отличного от нуля минора порядка r и отсутствия у этой матрицы отличных от нуля миноров порядка, большего r .

В этом пункте мы убедимся, что *ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (или столбцов) этой матрицы*.

Отсюда будет следовать новое определение ранга матрицы как максимального числа линейно независимых строк (или столбцов) этой матрицы **).

Проведем все рассуждения для строк (для столбцов они аналогичны). Рассмотрим в линейном пространстве A^n (введенном в примере 3 п. 1 § 1) линейную оболочку базисных строк произвольной содержащей m строк и n столбцов матрицы A и предположим, что число базисных строк равно r . Из теоремы 1.6 о базисном миноре вытекает, что любая строка матрицы A является элементом указанной линейной оболочки, а из линейной независимости r базисных строк и из теоремы 2.8 вытекает, что размерность указанной линейной оболочки равна r . Стало быть, любые $(r + 1)$ элементов указанной линейной оболочки (и, в частности, любые $(r + 1)$ строк матрицы A) линейно зависимы. А это и означает, что число r представляет собой максимальное число линейно независимых строк.

3. Сумма и пересечение подпространств. Пусть L_1 и L_2 — два произвольных подпространства одного и того же линейного пространства R .

Совокупность всех элементов x пространства R , принадлежащих одновременно L_1 и L_2 , образует подпространство пространства R ***), называемое пересечением подпространств L_1 и L_2 .

*) Это устанавливается с помощью тех же самых рассуждений, которые были проведены при доказательстве теоремы 2.5.

**) В частности, отсюда будет следовать весьма нетривиальная теорема о том, что у любой матрицы максимальное число линейно независимых строк совпадает с максимальным числом линейно независимых столбцов.

***) Ибо элементы этой совокупности удовлетворяют требованиям 1° и 2°, сформулированным в начале п. 1.

Совокупность всех элементов пространства R вида $y + z$, где y — элемент подпространства L_1 , а z — элемент подпространства L_2 , образует подпространство пространства R *), называемое суммой подпространств L_1 и L_2 .

Пример. Пусть R — линейное пространство всех свободных векторов (в трехмерном пространстве), L_1 — подпространство всех свободных векторов, параллельных плоскости Oxy , L_2 — подпространство всех свободных векторов, параллельных плоскости Oxz . Тогда суммой подпространств L_1 и L_2 будет являться все пространство R **), а пересечением подпространств L_1 и L_2 будет являться множество всех свободных векторов, параллельных оси Ox .

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.9. Сумма размерностей произвольных подпространств L_1 и L_2 конечномерного линейного пространства R равна сумме размерности пересечения этих подпространств и размерности суммы этих подпространств.

Доказательство. Обозначим через L_0 пересечение L_1 и L_2 , а через $\hat{L}$ — сумму L_1 и L_2 . Считая L_0 k -мерным, выберем в нем базис

$$e_1, e_2, \dots, e_k. \quad (2.11)$$

Используя утверждение, доказанное в п. 1, дополним базис (2.11) до базиса

$$e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_l \quad (2.12)$$

в подпространстве L_1 и до базиса

$$e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_m \quad (2.13)$$

в подпространстве L_2 .

Достаточно доказать, что элементы

$$g_1, \dots, g_l, e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_m \quad (2.14)$$

являются базисом суммы $\hat{L}$ подпространств L_1 и L_2 ***). Для этого в свою очередь достаточно доказать, что элементы (2.14) линейно независимы и что любой элемент x суммы $\hat{L}$ представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов (2.14).

Сначала докажем, что элементы (2.14) линейно независимы.

*) См. предыдущую сноску.

**) В самом деле, любой вектор x пространства R представляет собой линейную комбинацию $x = \alpha i + \beta j + \gamma k$ базисных векторов i, j, k параллельных осям Ox, Oy и Oz соответственно, причем вектор $\alpha i + \beta j$ принадлежит L_1 , а вектор γk принадлежит L_2 .

***)) Ибо при этом размерность $\hat{L}$, равная $l + k + m$, в сумме с размерностью L_0 , равной k , будет равна сумме размерностей $k + l$ и $k + m$ подпространств L_1 и L_2 .

Предположим, что некоторая линейная комбинация элементов (2.14) представляет собой нулевой элемент, т. е. справедливо равенство

$$\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_l g_l + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k + \gamma_1 f_1 + \dots + \gamma_m f_m = 0 \quad (2.15)$$

или

$$\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_l g_l + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k = -\gamma_1 f_1 - \dots - \gamma_m f_m \quad (2.16)$$

Так как левая часть (2.16) является элементом L_1 , а правая часть (2.16) является элементом L_2 , то как левая, так и правая часть (2.16) принадлежит пересечению L_0 подпространств L_1 и L_2 . Отсюда следует, в частности, что правая часть (2.16) представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов (2.11), т. е. найдутся такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, что

$$-\gamma_1 f_1 - \dots - \gamma_m f_m = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k. \quad (2.17)$$

В силу линейной независимости базисных элементов (2.13) равенство (2.17) возможно лишь в случае, когда все коэффициенты $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ равны нулю. Но при этом из (2.15) мы получим, что

$$\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_l g_l + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k = 0. \quad (2.18)$$

В силу линейной независимости базисных векторов (2.12) равенство (2.18) возможно лишь в случае, когда все коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_k$ равны нулю. Тем самым мы установили, что равенство (2.15) возможно лишь в случае, когда все коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_k, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ равны нулю, а это и доказывает линейную независимость элементов (2.14).

Остается доказать, что любой элемент x суммы $\hat{L}$ представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов (2.14), но это сразу следует из того, что этот элемент x представляет собой (по определению $\hat{L}$) сумму некоторого элемента x_1 подпространства L_1 , являющегося линейной комбинацией элементов (2.12), и некоторого элемента x_2 подпространства L_2 , являющегося линейной комбинацией элементов (2.13). Теорема доказана.

Возвращаясь к примеру, рассмотренному перед формулировкой теоремы 2.9, заметим, что в этом примере размерность каждого из подпространств L_1 и L_2 равна двум, размерность их суммы равна трем, а размерность их пересечения равна единице.

4. Разложение линейного пространства в прямую сумму подпространств. Пусть R_1 и R_2 — два подпространства линейного n -мерного пространства R .

Определение. Будем говорить, что пространство R представляет собой *п р я м у ю с у м м у* подпространств R_1 и R_2 , если

каждый элемент x пространства R может быть единственным способом представлен в виде суммы

$$x = x_1 + x_2 \quad (2.19)$$

элемента x_1 подпространства R_1 и элемента x_2 подпространства R_2 .

Тот факт, что R представляет собой прямую сумму R_1 и R_2 символически записывают так: $R = R_1 \oplus R_2$.

Последнее равенство обычно называют разложением пространства R в прямую сумму подпространств R_1 и R_2 .

Так пространство R всех свободных векторов (в трехмерном пространстве) можно разложить в прямую сумму подпространства R_1 всех векторов, параллельных плоскости Oxy и подпространства R_2 всех векторов, параллельных оси Oz .

Теорема 2.10. Для того чтобы n -мерное пространство R представляло собой прямую сумму подпространств R_1 и R_2 , достаточно, чтобы пересечение R_1 и R_2 содержало только нулевой элемент и чтобы размерность R была равна сумме размерностей подпространств R_1 и R_2 .

Доказательство. Выберем некоторый базис $e_1, \dots, e_k$ в подпространстве R_1 и некоторый базис $g_1, \dots, g_l$ в подпространстве R_2 . Докажем, что объединение этих базисов

$$e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_l \quad (2.20)$$

представляет собой базис всего пространства R . Так как по условию теоремы размерность n всего пространства R равна сумме $k + l$ размерностей R_1 и R_2 , то достаточно (в силу теоремы 2.5) доказать линейную независимость элементов (2.20).

Предположим, что некоторая линейная комбинация элементов (2.20) представляет собой нулевой элемент, т. е. справедливо равенство

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_l g_l = 0, \quad (2.21)$$

или

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = -\beta_1 g_1 - \dots - \beta_l g_l. \quad (2.22)$$

Так как левая часть (2.22) является элементом R_1 , а правая — элементом R_2 , а пересечение R_1 и R_2 содержит лишь нулевой элемент, то как левая, так и правая часть (2.22) представляет собой нулевой элемент, а это (на основании линейной независимости элементов каждого из базисов $e_1, \dots, e_k$ и $g_1, \dots, g_l$) возможно лишь при условии

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0, \quad \beta_1 = \dots = \beta_l = 0. \quad (2.23)$$

Тем самым мы установили, что равенство (2.21) возможно лишь при условии (2.23), а это и доказывает линейную независимость элементов (2.20) и тот факт, что элементы (2.20) образуют базис всего пространства R .

Пусть теперь x — любой элемент R . Разложив его по базису (2.20), будем иметь $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_l g_l$ или $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ — элемент R_1 , а $x_2 = \mu_1 g_1 + \dots + \mu_l g_l$ — элемент R_2 .

Остается доказать, что представление (2.19) является единственным. Предположим, что, кроме (2.19), справедливо и еще одно представление

$$x = x'_1 + x'_2, \quad (2.24)$$

где x'_1 — элемент R_1 , а x'_2 — элемент R_2 . Вычитая (2.24) из (2.19), получим, что $0 = x_1 - x'_1 + x_2 - x'_2$, или $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$. Так как в левой части последнего равенства стоит элемент R_1 , а в правой — элемент R_2 , и поскольку пересечение R_1 и R_2 содержит лишь нулевой элемент, то из этого равенства следует, что $x_1 - x'_1 = 0$, $x'_2 - x_2 = 0$, т. е. $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В случае, когда пространство R представляет собой не прямую, а обычную сумму подпространств R_1 и R_2 , представление (2.19) любого элемента x пространства R также справедливо, но *не является, вообще говоря, единственным*.

Пусть, например, R представляет собой трехмерное пространство всех свободных векторов, R_1 — подпространство всех векторов, параллельных плоскости Oxy , а R_2 — подпространство всех векторов, параллельных плоскости Oxz . В предыдущем пункте мы выяснили, что R представляет собой сумму (но, конечно, не прямую сумму) подпространств R_1 и R_2 . Обозначим через i, j, k базисные векторы, параллельные осям Ox, Oy и Oz соответственно, и разложим произвольный элемент x пространства R по базису i, j, k . Найдутся вещественные числа α, β и γ такие, что $x = \alpha i + \beta j + \gamma k$, так что, с одной стороны, $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = \alpha i + \beta j$ — элемент R_1 , а $x_2 = \gamma k$ — элемент R_2 , с другой стороны, $x = x'_1 + x'_2$, где $x'_1 = \beta j$ — элемент R_1 , а $x'_2 = \alpha i + \gamma k$ — элемент R_2 .

§ 4. Преобразование координат при преобразовании базиса n -мерного линейного пространства

1. Прямое и обратное преобразование базисов. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ — два произвольных базиса n -мерного линейного пространства R . Как всякий элемент пространства R , каждый элемент $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ может быть разложен по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Предположим, что элементы $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$

выражаются через $e_1, e_2, \dots, e_n$ с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n, \\ e'_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n, \\ e'_n &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Это означает, что переход от первого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ ко второму базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, задается матрицей

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.26)$$

Подчеркнем, что определитель Δ матрицы (2.26) заведомо отличен от нуля *), ибо в противном случае в силу теоремы 1.7 строки этой матрицы (а стало быть, и базисные элементы $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$) оказались бы линейно зависимыми.

Убедимся в том, что *обратный переход от второго базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ к первому базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, осуществляется с помощью матрицы B , обратной к матрице A .*

Напомним, что матрица B , обратная к матрице A , введена в п. 7 § 2 гл. 1 и имеет вид

$$B = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix}, \quad (2.27)$$

где через Δ обозначен определитель матрицы A , а через A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} этого определителя.

Умножим уравнения (2.25) соответственно на алгебраические дополнения $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ элементов j -го столбца определителя Δ и после этого сложим эти уравнения. В результате получим (для любого номера j , равного $1, 2, \dots, n$)

$$e'_1 A_{1j} + e'_2 A_{2j} + \dots + e'_n A_{nj} = \sum_{i=1}^n e_i (a_{i1} A_{1j} + a_{i2} A_{2j} + \dots + a_{in} A_{nj}).$$

Учитывая, что сумма произведений элементов i -го столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов j -го столбца равна нулю при $i \neq j$ и равна определителю Δ при $i = j$ **)

*) Такую матрицу в п. 7 § 2 гл. 1 мы договорились называть невырожденной.

**) См. свойство 4° из п. 4 § 2 гл. 1.

получим из последнего равенства

$$e'_1 A_{1j} + e'_2 A_{2j} + \dots + e'_n A_{nj} = e_j \Delta,$$

откуда $e_j = \frac{A_{1j}}{\Delta} e'_1 + \frac{A_{2j}}{\Delta} e'_2 + \dots + \frac{A_{nj}}{\Delta} e'_n$ ($j = 1, 2, \dots, n$) или подробнее

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{A_{11}}{\Delta} e'_1 + \frac{A_{21}}{\Delta} e'_2 + \dots + \frac{A_{n1}}{\Delta} e'_n, \\ e_2 &= \frac{A_{12}}{\Delta} e'_1 + \frac{A_{22}}{\Delta} e'_2 + \dots + \frac{A_{n2}}{\Delta} e'_n, \\ &\vdots \\ e_n &= \frac{A_{1n}}{\Delta} e'_1 + \frac{A_{2n}}{\Delta} e'_2 + \dots + \frac{A_{nn}}{\Delta} e'_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Формулы (2.28) и устанавливают, что обратный переход от базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ осуществляется с помощью матрицы (2.27), обратной к матрице A . Эту обратную к A матрицу мы кратко будем обозначать символом A^{-1} .

2. Связь между преобразованием базисов и преобразованием соответствующих координат. Пусть, как и выше, базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ преобразуется в базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ с помощью невырожденной матрицы (2.26), так что обратное преобразование базисов задается матрицей (2.27). Пусть далее x — произвольный элемент рассматриваемого линейного пространства R , $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — его координаты относительно первого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ — его координаты относительно второго базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, так что

$$x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Подставив в это равенство вместо элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ их выражения, определяемые формулами (2.28), получим

$$\begin{aligned} x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n &= x_1 \left(\frac{A_{11}}{\Delta} e_1 + \frac{A_{21}}{\Delta} e_2 + \dots + \frac{A_{n1}}{\Delta} e_n \right) + \\ &+ x_2 \left(\frac{A_{12}}{\Delta} e_1 + \frac{A_{22}}{\Delta} e_2 + \dots + \frac{A_{n2}}{\Delta} e_n \right) + \\ &+ x_n \left(\frac{A_{1n}}{\Delta} e_1 + \frac{A_{2n}}{\Delta} e_2 + \dots + \frac{A_{nn}}{\Delta} e_n \right). \end{aligned}$$

Из последнего равенства (в силу единственности разложения по базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$) сразу же вытекают формулы перехода от координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно первого базиса к

координатам $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ относительно второго базиса:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{A_{11}}{\Delta} x_1 + \frac{A_{12}}{\Delta} x_2 + \dots + \frac{A_{1n}}{\Delta} x_n, \\ x'_2 &= \frac{A_{21}}{\Delta} x_1 + \frac{A_{22}}{\Delta} x_2 + \dots + \frac{A_{2n}}{\Delta} x_n, \\ x'_n &= \frac{A_{n1}}{\Delta} x_1 + \frac{A_{n2}}{\Delta} x_2 + \dots + \frac{A_{nn}}{\Delta} x_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Формулы (2.29) показывают, что переход от координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к координатам $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ осуществляется с помощью матрицы

$$C = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{1n}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \frac{A_{n2}}{\Delta} & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix},$$

транспонированной к обратной матрице (2.27).

Мы приходим к следующему выводу: если переход от первого базиса ко второму осуществляется с помощью невырожденной матрицы A , то переход от координат произвольного элемента относительно первого базиса к координатам этого элемента относительно второго базиса осуществляется с помощью матрицы $(A^{-1})'$, транспонированной к обратной матрице A^{-1} .

Г Л А В А 3

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Из элементарного курса и из курса аналитической геометрии читатель знаком с системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными и с системами двух и трех линейных уравнений с тремя неизвестными *). Целью настоящей главы является изучение системы произвольного числа m линейных уравнений с произвольным числом n неизвестных.

Мы сначала установим необходимое и достаточное условие существования хотя бы одного решения (или, как говорят, *с о в м е с т н о с т и*) такой системы, а затем займемся отысканием всей совокупности ее решений.

В § 4 главы 4 будет рассмотрен важный для приложений случай приближенного задания всех коэффициентов системы и ее свободных членов. Для этого случая будет изложен *м е т о д р е г у л я р и з а ц и и* А. Н. Тихонова, позволяющий найти так называемое *н о р м а л ь н о е* (т. е. наиболее близкое к началу координат) решение указанной системы с точностью, соответствующей точности задания коэффициентов и свободных членов.

В главе 6 будет дано представление о численных (итерационных) методах решения систем линейных уравнений.

§ 1. Условие совместности линейной системы

1. Понятие системы линейных уравнений и ее решения. В общем случае система m линейных уравнений с n неизвестными (или кратко *л и н е й н а я с и с т е м а*) имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

*) См. выпуск «Аналитическая геометрия», дополнение к главе 1.

При этом через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначены неизвестные, подлежащие определению (число их n не предполагается обязательно равным числу уравнений m); величины $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$, называемые коэффициентами системы, и величины $b_1, b_2, \dots, b_m$, называемые свободными членами, предполагаются известными. Каждый коэффициент системы a_{ij} имеет два индекса, первый из которых i указывает номер уравнения, а второй j — номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Система (3.1) называется однородной, если все ее свободные члены $b_1, b_2, \dots, b_m$ равны нулю.

Если хотя бы один из свободных членов $b_1, b_2, \dots, b_m$ отличен от нуля, то система (3.1) называется неоднородной.

Система (3.1) называется квадратной, если число m составляющих ее уравнений равно числу неизвестных n .

Решением системы (3.1) называется такая совокупность n чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, которая при подстановке в систему (3.1) на место неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ обращает все уравнения этой системы в тождества.

Не всякая система вида (3.1) имеет решения. Так, система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

заведомо не имеет ни одного решения (ибо если бы существовало решение этой системы, то при подстановке этого решения в левых частях обоих уравнений стояли бы одинаковые числа и мы получили бы, что $1=2$).

Система уравнений вида (3.1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у нее не существует ни одного решения.

Совместная система вида (3.1) может иметь или одно решение, или несколько решений.

Два решения совместной системы вида (3.1) $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_n^{(1)}$ и $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_n^{(2)}$ называются различными, если нарушается хотя бы одно из равенств $c_1^{(1)} = c_1^{(2)}, c_2^{(1)} = c_2^{(2)}, \dots, c_n^{(1)} = c_n^{(2)}$.

Совместная система вида (3.1) называется определенной, если она имеет единственное решение.

Совместная система вида (3.1) называется неопределенной, если у нее существуют по крайней мере два различных решения.

Весьма удобно записывать линейную систему (3.1) в матричной форме. Для этого используем введенное в п. 2 § 1 гл. 1 понятие произведения двух матриц (таких, что число столбцов первой из этих матриц равно числу строк второй из матриц). В качестве

перемножаемых матриц возьмем две матрицы: матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

содержащую m строк и n столбцов и составленную из коэффициентов при неизвестных (такую матрицу мы в дальнейшем будем называть основной матрицей системы (3.1)) и матрицу X , содержащую n строк и 1 столбец, т. е. один столбец вида

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Согласно правилу перемножения двух матриц *) произведение AX матрицы (3.2) на матрицу (3.3) представляет собой матрицу, содержащую m строк и 1 столбец, т. е. один столбец следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Система равенств (3.1) означает, что этот столбец (3.4) совпадает со столбцом

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Таким образом, в матричной записи систему (3.1) можно заменить одним эквивалентным ей матричным уравнением

$$AX = B, \quad (3.6)$$

в котором матрицы A , X и B определяются соотношениями (3.2), (3.3) и (3.5). Решение матричного уравнения (3.6) заключается в отыскании такого столбца (3.3), который при заданной матрице (3.2) и заданном столбце правых частей (3.5) обращает уравнение (3.6) в тождество.

В этом и в следующем параграфах мы выясним в отношении линейной системы (3.1) следующие три вопроса:

1) способ установления того, является система (3.1) совместной или нет,

*) См. п. 2 § 1 гл. 1, формулу (1.4).

2) способ установления того, является система (3.1) (в случае ее совместности) определенной или нет,

3) способ отыскания единственного решения совместной системы (3.1) (в случае ее определенности) и отыскания всех ее решений (в случае ее неопределенности).

2. Нетривиальная совместность однородной системы. Начнем с рассмотрения однородной линейной системы вида (3.1), т. е. системы

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Сразу же отметим, что эта система *всегда совместна*, ибо она всегда обладает так называемым *т р и в и а л ь н ы м* (или *н у л е в ы м*) решением $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ *).

Возникает вопрос о том, *при каких условиях однородная система (3.7) имеет, кроме указанного тривиального решения, еще и другие решения* (т. е. является *н е т р и в и а л ь н о с о в м е с т н о й*).

Этот вопрос решается довольно просто. Заметим, что существование нетривиального решения системы (3.7) эквивалентно линейной зависимости столбцов матрицы (3.2) (ибо линейная зависимость столбцов матрицы (3.2) означает, что существуют числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, не все равные нулю и такие, что справедливы равенства (3.7)).

Но в силу теоремы 1.6 о базисном миноре линейная зависимость столбцов матрицы (3.2) будет иметь место тогда и только тогда, когда не все столбцы этой матрицы являются базисными, т. е. тогда и только тогда, когда порядок r базисного минора матрицы (3.2) меньше числа n ее столбцов.

Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. *Однородная система (3.7) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ранг r матрицы (3.2) меньше числа n ее столбцов.*

Следствие. *Квадратная однородная система **)* *имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю.*

В самом деле, в случае квадратной однородной системы (3.7), т. е. при $m = n$ ранг r матрицы (3.2) будет меньше числа $m = n$ тогда и только тогда, когда определитель этой матрицы равен нулю.

*) Действительно, подставив в систему (3.7) нули на место всех неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, мы обратим в тождества все уравнения этой системы.

**) То есть система (3.7), у которой число уравнений m равно числу неизвестных n .

3. Условие совместности общей линейной системы. Установим теперь необходимое и достаточное условие совместности общей (вообще говоря, неоднородной) системы вида (3.1). С этой системой связаны две матрицы: матрица A , определяемая соотношением (3.2), которую принято называть основной матрицей системы (3.1) (она составлена из коэффициентов при неизвестных), и матрица

$$A_1 = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{array} \right\|, \quad (3.8)$$

которую принято называть расширенной матрицей системы (3.1) (она получается из основной матрицы путем добавления к этой матрице столбца (3.5) свободных членов).

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 3.2 (теорема Кронекера—Капелли *). Для того чтобы линейная система (3.1) являлась совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы.

Доказательство. 1) **Необходимость.** Пусть система (3.1) совместна, т. е. существуют такие числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, что справедливы равенства

$$\left. \begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n &= b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n &= b_2, \\ \dots & \dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Обозначим через r ранг основной матрицы системы (3.1) и рассмотрим линейную оболочку L r базисных столбцов этой матрицы. В силу теоремы 1.6 о базисном миноре любой столбец основной матрицы принадлежит указанной линейной оболочке L . Иными словами, любой столбец расширенной матрицы (3.8), кроме последнего ее столбца, принадлежит указанной линейной оболочке L .

Из равенств (3.9) следует, что и последний столбец расширенной матрицы (3.8) принадлежит линейной оболочке L (ибо этот последний столбец в силу равенств (3.9) линейно выражается через все столбцы основной матрицы и поэтому линейно выражается через ее базисные столбцы).

Таким образом, все столбцы расширенной матрицы (3.8) принадлежат указанной линейной оболочке L . В п. 2 § 3 гл. 2 мы уже установили, что размерность указанной линейной оболочки L равна r . Это означает, что любые $r + 1$ столбцов расширенной

*) Леопольд Кронекер (1823—1891) — немецкий математик, Альфред Капелли (1855—1910) — итальянский математик.

матрицы (3.8) линейно зависимы, т. е. ранг расширенной матрицы (равный максимальному числу линейно независимых столбцов этой матрицы) также равен числу r . Необходимость доказана.

2) **Достаточность.** Пусть ранги основной и расширенной матриц совпадают. Тогда r базисных столбцов основной матрицы будут являться базисными столбцами и расширенной матрицы (3.8) *). По теореме 1.6 о базисном миноре последний столбец расширенной матрицы (3.8) представляет собой некоторую линейную комбинацию указанных r базисных столбцов. Стало быть, последний столбец расширенной матрицы (3.8) представляет собой некоторую линейную комбинацию и всех столбцов основной матрицы (3.2) **), т. е. существуют числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ такие, что справедливы равенства (3.9). Последние равенства означают, что числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ представляют собой решение системы (3.1), т. е. эта система является совместной. Теорема полностью доказана.

§ 2. Отыскание решений линейной системы

Теорема Кронекера—Капелли устанавливает необходимое и достаточное условие совместности линейной системы, но не дает способа нахождения решений этой системы.

В этом параграфе мы займемся отысканием решений линейной системы (3.1). Сначала мы рассмотрим простейший случай квадратной системы линейных уравнений с отличным от нуля определителем основной матрицы, а затем перейдем к отысканию совокупности всех решений общей линейной системы вида (3.1).

1. **Квадратная система линейных уравнений с определителем основной матрицы, отличным от нуля.** Пусть дана квадратная система линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

с отличным от нуля определителем Δ основной матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

*) Ибо указанные r базисных столбцов линейно независимы, а большего чем r числа линейно независимых столбцов расширенная матрица не имеет.

**) Не изменяя линейной комбинации r базисных столбцов, мы можем добавить к ней все небазисные столбцы с множителями, равными нулю.

Докажем, что такая система имеет и притом единственное решение, и найдем это решение. Сначала докажем, что система (3.10) может иметь только одно решение (т. е. докажем единственность решения системы (3.10) в предположении его существования).

Предположим, что существуют какие-либо n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что при подстановке этих чисел в систему (3.10) все уравнения этой системы обращаются в тождества (т. е. существует некоторое решение системы (3.10) $x_1, x_2, \dots, x_n$). Тогда, умножая тождества (3.10) соответственно на алгебраические дополнения $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ элементов j -го столбца определителя Δ матрицы (3.11) и складывая затем получающиеся при этом тождества, мы получим (для любого номера j , равного $1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{i=1}^n x_i (a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj}) = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}.$$

Учитывая, что сумма произведений элементов i -го столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов j -го столбца равна нулю при $i \neq j$ и равна определителю Δ матрицы (3.11) при $i = j$), мы получим из последнего равенства

$$x_j \Delta = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}. \quad (3.12)$$

Обозначим символом $\Delta_j(b_i)$ (или более кратко символом Δ_j) определитель, получающийся из определителя Δ основной матрицы (3.11) заменой его j -го столбца столбцом из свободных членов $b_1, b_2, \dots, b_n$ (с сохранением без изменения всех остальных столбцов Δ).

Заметим, что в правой части (3.12) стоит именно определитель $\Delta_j(b_i)$ **), и это равенство принимает вид

$$x_j \Delta = \Delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.13)$$

Поскольку определитель Δ матрицы (3.11) отличен от нуля, равенства (3.13) эквивалентны соотношениям

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.14)$$

Итак, мы доказали, что если решение $x_1, x_2, \dots, x_n$ системы (3.10) с определителем Δ основной матрицы (3.11), отличным от нуля, существует, то это решение однозначно определяется формулами (3.14).

Формулы (3.14) называются формулами Крамера ***).

*) См. свойство 4° из п. 4 § 2 гл. 1.

**) Чтобы убедиться в этом, достаточно записать разложение определителя $\Delta_j(b_i)$ по элементам (i -го столбца).

***) Габриель Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

Еще раз подчеркнем, что формулы Крамера пока получены нами в предположении существования решения и доказывают его единственность.

Остается доказать существование решения системы (3.10). Для этого в силу теоремы Кронекера—Капелли достаточно доказать, что ранг основной матрицы (3.11) равен рангу расширенной матрицы *)

$$A_1 = \left\| \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & b_n \end{array} \right\|, \quad (3.15)$$

но это очевидно, ибо в силу соотношения $\Delta \neq 0$, ранг основной матрицы равен n , а ранг содержащей n строк расширенной матрицы (3.15) больше числа n быть не может и потому равен рангу основной матрицы.

Тем самым полностью доказано, что *квадратная система линейных уравнений (3.10) с определителем основной матрицы, отличным от нуля, имеет и притом единственное решение, определяемое формулами Крамера (3.14).*

Доказанное нами утверждение еще проще устанавливается матричным способом. Для того чтобы сделать это, заменим (как и в п. 1 § 1) систему (3.10) эквивалентным ей матричным уравнением

$$AX = B, \quad (3.16)$$

где A — основная матрица системы (3.11), а X и B — столбцы

$$X = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{array} \right\|,$$

первый из которых подлежит определению, а второй задан.

Так как определитель Δ матрицы A отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1} (см. п. 7 § 2 гл. 1).

Предположим, что существует решение системы (3.10), т. е. существует столбец X , обращающий в тождество матричное уравнение (3.16). Помножая указанное тождество слева на обратную матрицу A^{-1} , будем иметь

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B. \quad (3.17)$$

Учтем теперь, что в силу сочетательного свойства произведения трех матриц (см. п. 2 § 1 гл. 1) и в силу соотношения $A^{-1}A = E$,

*) Существует и другой способ доказательства существования решения системы (3.10), заключающийся в проверке того, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, определяемые формулами Крамера (3.14), обращают в тождества все уравнения системы (3.10).

где E — единичная матрица (см. п. 7 § 2 гл. 1), $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, так что мы получим из (3.17)

$$X = A^{-1}B. \quad (3.18)$$

Развертывая равенство (3.18) и учитывая вид обратной матрицы *), мы и получим для элементов столбца X формулы Крамера.

Итак, мы доказали, что если решение матричного уравнения (3.16) существует, то оно однозначно определяется соотношением (3.18), эквивалентным формулам Крамера.

Легко проверить, что столбец X , определяемый соотношением (3.18), в самом деле является решением матричного уравнения (3.16), т. е. при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. В самом деле, если столбец X определяется равенством (3.18), то $AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = EB = B$.

Итак, если определитель Δ матрицы A отличен от нуля (т. е. если эта матрица является невырожденной), то существует и притом единственное решение матричного уравнения (3.16), определяемое соотношением (3.18), эквивалентным формулам Крамера.

Пример. Найдём решение квадратной системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ \quad \quad \quad x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{array} \right\}$$

с отличным от нуля определителем основной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 30 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 30 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 30 & 4 \\ -1 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -12, & \Delta_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -16, \end{aligned}$$

*) См. формулу (1.41) из п. 7 § 2 гл. 1.

то в силу формул Крамера единственное решение рассматриваемой системы имеет вид $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Основное значение формул Крамера состоит в том, что они дают явное выражение для решения квадратной системы линейных уравнений (с определителем, отличным от нуля) через коэффициенты уравнений и свободные члены. Практическое использование формул Крамера связано с довольно громоздкими вычислениями (для решения системы n уравнений с n неизвестными приходится вычислять $(n + 1)$ определитель n -го порядка). К этому следует добавить, что если коэффициенты уравнений и свободные члены представляют собой лишь приближенные значения каких-либо измеряемых физических величин или округляются в процессе вычислений, то использование формул Крамера может привести к большим ошибкам и в ряде случаев является нецелесообразным.

В § 4 гл. 4 будет изложен метод регуляризации, принадлежащий А. Н. Тихонову и позволяющий находить решение линейной системы с точностью, соответствующей точности задания матрицы коэффициентов уравнений и столбца свободных членов, а в главе 6 дается представление о так называемых итерационных методах решения линейных систем, позволяющих решать эти системы при помощи последовательных приближений неизвестных.

В заключении отметим, что в этом пункте мы исключили из рассмотрения случай обращения в нуль определителя Δ основной матрицы системы (3.10). Этот случай будет содержаться в общей теории систем m линейных уравнений с n неизвестными, излагаемой в следующем пункте.

2. Отыскание всех решений общей линейной системы. Рассмотрим теперь общую систему m линейных уравнений с n неизвестными (3.1). Предположим, что эта система совместна и что ранг ее основной и расширенной матриц равен числу r . Не ограничивая общности, мы можем предположить, что базисный минор основной матрицы (3.2) находится в левом верхнем углу этой матрицы (общий случай сводится к этому случаю посредством перестановки в системе (3.1) уравнений и неизвестных).

Тогда первые r строк как основной матрицы (3.2), так и расширенной матрицы (3.8) являются базисными строками этих матриц *), и по теореме 1.6 о базисном миноре каждая из строк расширенной матрицы (3.8), начиная с $(r + 1)$ -й строки, является линейной комбинацией первых r строк этой матрицы.

В терминах системы (3.1) это означает, что каждое из уравнений этой системы, начиная с $(r + 1)$ -го уравнения, является

*) Так как ранги основной и расширенной матриц оба равны r , то базисный минор основной матрицы будет одновременно являться базисным минором и расширенной матрицы.

линейной комбинацией (т. е. следствием) первых r уравнений этой системы (т. е. *всякое решение первых r уравнений системы (3.1) обращает в тождества и все последующие уравнения этой системы*).

Таким образом, достаточно найти все решения лишь первых r уравнений системы (3.1). Рассмотрим первые r уравнений системы (3.1), записав их в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Если мы придадим неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ совершенно произвольные значения $c_{r+1}, \dots, c_n$, то система (3.19) превратится в квадратную систему r линейных уравнений для r неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$, причем определителем основной матрицы этой системы является отличный от нуля базисный минор матрицы (3.2). В силу результатов предыдущего пункта эта система (3.19) имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера, т. е. для произвольно выбранных $c_{r+1}, \dots, c_n$ существует единственная совокупность r чисел $c_1, c_2, \dots, c_r$, обращающих в тождества все уравнения системы (3.19) и определяющихся формулами Крамера.

Чтобы записать это единственное решение, договоримся обозначать символом $M_j(d_i)$ определитель, получающийся из базисного минора M матрицы (3.2) заменой его j -го столбца столбцом из чисел $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_r$ (с сохранением без изменения всех остальных столбцов M). Тогда записывая решение системы (3.19) с помощью формул Крамера и пользуясь линейным свойством определителя, мы получим

$$\begin{aligned} c_j &= \frac{1}{M} M_j(b_i - a_{i(r+1)}c_{r+1} - \dots - a_{in}c_n) = \\ &= \frac{1}{M} [M_j(b_i) - c_{r+1}M_j(a_{i(r+1)}) - \dots - c_n M_j(a_{in})] \quad (3.20) \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, r). \end{aligned}$$

Формулы (3.20) выражают значения неизвестных $x_j = c_j$ ($j = 1, 2, \dots, r$) через коэффициенты при неизвестных, свободные члены и произвольно заданные параметры $c_{r+1}, \dots, c_n$.

Докажем, что формулы (3.20) содержат любое решение системы (3.1). В самом деле, пусть $c_1^0, c_2^0, \dots, c_r^0, c_{r+1}^0, \dots, c_n^0$ — произвольное решение указанной системы. Тогда оно является решением и системы (3.19). Но из системы (3.19) величины $c_1^0, c_2^0, \dots, c_r^0$ определяются через величины $c_{r+1}^0, \dots, c_n^0$ однозначно и именно по формулам Крамера (3.20). Таким образом, при $c_{r+1} = c_{r+1}^0, \dots$

..., $c_n = c_n^0$ формулы (3.20) дают нам как раз рассматриваемое решение $c_1^0, c_2^0, \dots, c_r^0, c_{r+1}^0, \dots, c_n^0$.

З а м е ч а н и е. Если ранг r основной и расширенной матриц системы (3.1) равен числу неизвестных n , то в этом случае соотношения (3.20) переходят в формулы

$$c_j = \frac{M_j(b_i)}{M} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

определяющие единственное решение системы (3.1). Таким образом, система (3.1) имеет единственное решение (т. е. является определенной) при условии, что ранг r основной и расширенной ее матриц равен числу неизвестных n (и меньше числа уравнений m или равен ему).

П р и м е р. Найдём все решения линейной системы

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 &= 4. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Нетрудно убедиться в том, что ранг как основной, так и расширенной матрицы этой системы равен двум (т. е. эта система совместна), причем можно считать, что базисный минор M стоит в левом верхнем углу основной матрицы, т. е. $M = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

Но тогда, отбрасывая два последних уравнения и задавая произвольно c_3 и c_4 , мы получим систему

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 - c_3 + c_4, \\ x_1 + x_2 &= 8 - 2c_3 - 3c_4, \end{aligned} \right\}$$

из которой в силу формул Крамера получаем значения

$$x_1 = c_1 = 6 - \frac{3}{2}c_3 - c_4, \quad x_2 = c_2 = 2 - \frac{1}{2}c_3 - 2c_4. \quad (3.22)$$

Таким образом, четыре числа

$$\left(6 - \frac{3}{2}c_3 - c_4, \quad 2 - \frac{1}{2}c_3 - 2c_4, \quad c_3, \quad c_4 \right) \quad (3.23)$$

при произвольно заданных значениях c_3 и c_4 образуют решение системы (3.21), причем строка (3.23) содержит все решения этой системы.

3. Свойства совокупности решений однородной системы. Рассмотрим теперь однородную систему m линейных уравнений с n неизвестными (3.7), предполагая, как и выше, что матрица (3.2)

имеет ранг, равный r , и что базисный минор M расположен в левом верхнем углу этой матрицы.

Поскольку на этот раз все b_i равны нулю, вместо формул (3.20) мы получим следующие формулы:

$$c_j = -\frac{1}{M} [c_{r+1}M_j(a_{i(r+1)}) + \dots + c_n M_j(a_{in})] \quad (j = 1, 2, \dots, r), \quad (3.24)$$

выражающие значения неизвестных $x_j = c_j$ ($j = 1, 2, \dots, r$) через коэффициенты при неизвестных и произвольно заданные значения $c_{r+1}, \dots, c_n$. В силу доказанного в предыдущем пункте формулы (3.24) *содержат любое решение однородной системы (3.7).*

Убедимся теперь в том, что *совокупность всех решений однородной системы (3.7) образует линейное пространство.*

Пусть $X_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ и $X_2 = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ — два произвольных решения однородной системы (3.7), а λ — любое вещественное число. В силу того, что каждое решение однородной системы (3.7) является элементом линейного пространства A^n всех упорядоченных совокупностей n чисел, достаточно доказать, что каждая из двух совокупностей

$$X_1 + X_2 = (x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) \quad \text{и} \quad \lambda X_1 = (\lambda x_1^{(1)}, \dots, \lambda x_n^{(1)})$$

также является решением однородной системы (3.7).

Рассмотрим любое уравнение системы (3.7), например i -е уравнение, и подставим в это уравнение на место неизвестных элементы указанных совокупностей. Учитывая, что X_1 и X_2 — решения однородной системы, будем иметь

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [x_j^{(1)} + x_j^{(2)}] = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(2)} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\lambda x_j^{(1)}] = \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(1)} = 0,$$

а это и означает, что совокупности $X_1 + X_2$ и λX_1 являются решениями однородной системы (3.7).

Итак, совокупность всех решений однородной системы (3.7) образует линейное пространство, которое мы обозначим символом R .

Найдем размерность этого пространства R и построим в нем базис.

Докажем, что в предположении о том, что ранг матрицы однородной системы (3.7) равен r , *линейное пространство R всех решений однородной системы (3.7) изоморфно линейному пространству A^{n-r} всех упорядоченных совокупностей $(n - r)$ чисел *).*

*) Пространство A^m введено в примере 3 п. 1 § 1 гл. 2.

Поставим в соответствие каждому решению $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n)$ однородной системы (3.7) элемент $(c_{r+1}, \dots, c_n)$ пространства A^{n-r} . Поскольку числа $c_{r+1}, \dots, c_n$ могут быть выбраны произвольно и при каждом выборе с помощью формул (3.24) однозначно определяют решение системы (3.7), то установленное нами соответствие является взаимно однозначным. Далее заметим, что если элементы $(c_{r+1}^{(1)}, \dots, c_n^{(1)})$ и $(c_{r+1}^{(2)}, \dots, c_n^{(2)})$ пространства A^{n-r} отвечают элементам $(c_1^{(1)}, \dots, c_r^{(1)}, c_{r+1}^{(1)}, \dots, c_n^{(1)})$ и $(c_1^{(2)}, \dots, c_r^{(2)}, c_{r+1}^{(2)}, \dots, c_n^{(2)})$ пространства R , то из формул (3.24) сразу же следует, что элементу $(c_{r+1}^{(1)} + c_{r+1}^{(2)}, \dots, c_n^{(1)} + c_n^{(2)})$ отвечает элемент $(c_1^{(1)} + c_1^{(2)}, \dots, c_r^{(1)} + c_r^{(2)}, c_{r+1}^{(1)} + c_{r+1}^{(2)}, \dots, c_n^{(1)} + c_n^{(2)})$, а элементу $(\lambda c_{r+1}^{(1)}, \dots, \lambda c_n^{(1)})$ при любом вещественном λ отвечает элемент $(\lambda c_1^{(1)}, \dots, \lambda c_r^{(1)}, \lambda c_{r+1}^{(1)}, \dots, \lambda c_n^{(1)})$. Тем самым доказано, что установленное нами соответствие является изоморфизмом.

Итак, линейное пространство R всех решений однородной системы (3.7) с n неизвестными и рангом основной матрицы, равным r , изоморфно пространству A^{n-r} , и, стало быть, имеет размерность $n - r$.

Любая совокупность из $(n - r)$ линейно независимых решений однородной системы (3.7) образует (в силу теоремы 2.5) базис в пространстве R всех решений и называется фундаментальной совокупностью решений однородной системы (3.7).

Для построения фундаментальной совокупности решений можно отправляться от любого базиса пространства A^{n-r} . Отвечающая этому базису совокупность решений системы (3.7) в силу изоморфизма будет линейно независимой и поэтому будет являться фундаментальной совокупностью решений.

Особо выделяют фундаментальную совокупность решений системы (3.7), отвечающую простейшему базису $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_{n-r} = (0, 0, 0, \dots, 1)$ пространства A^{n-r} и называемую нормальной фундаментальной совокупностью решений однородной системы (3.7).

При сделанных выше предположениях о ранге и расположении базисного минора, в силу формул (3.24), нормальная фундаментальная совокупность решений однородной системы (3.7) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \left(-\frac{M_1(a_{1(r+1)})}{M}, \quad -\frac{M_r(a_{1(r+1)})}{M}, 1, 0, \dots, 0 \right), \\ X_2 &= \left(-\frac{M_1(a_{1(r+2)})}{M}, \dots, -\frac{M_r(a_{1(r+2)})}{M}, 0, 1, \dots, 0 \right), \\ &\vdots \\ X_{n-r} &= \left(-\frac{M_1(a_{1n})}{M}, \dots, -\frac{M_r(a_{1n})}{M}, 0, 0, \dots, 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

По определению базиса любое решение X однородной системы (3.7) представимо в виде

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_{n-r} X_{n-r}, \quad (3.26)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ — некоторые постоянные. Поскольку в формуле (3.26) содержится любое решение однородной системы (3.7), то эта формула дает о б щ е е р е ш е н и е рассматриваемой однородной системы.

П р и м е р. Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

соответствующую неоднородной системе (3.21), разобранной в примере в конце предыдущего пункта. Там мы выяснили, что ранг r матрицы этой системы равен двум, и взяли в качестве базисного минор, стоящий в левом верхнем углу указанной матрицы.

Повторяя рассуждения, проведенные в конце предыдущего пункта, мы получим вместо формул (3.22) соотношения

$$c_1 = -\frac{3}{2}c_3 - c_4, \quad c_2 = -\frac{1}{2}c_3 - 2c_4,$$

справедливые при произвольно выбранных c_3 и c_4 . С помощью этих соотношений (полагая сначала $c_3 = 1, c_4 = 0$, а затем $c_3 = 0, c_4 = 1$) мы получим нормальную фундаментальную совокупность двух решений системы (3.27):

$$X_1 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), \quad X_2 = (-1, -2, 0, 1).$$

Общее решение однородной системы (3.27) имеет вид

$$X = C_1 \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) + C_2 (-1, -2, 0, 1), \quad (3.28)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В заключение этого пункта установим связь между решениями неоднородной линейной системы (3.1) и соответствующей ей однородной системы (3.7) *). Докажем следующие д в а у т в е р ж д е н и я.

1°. Сумма любого решения неоднородной системы (3.1) с любым решением соответствующей однородной системы (3.7) представляет собой решение системы (3.1).

*) С теми же самыми коэффициентами при неизвестных.

В самом деле, если $c_1, \dots, c_n$ — решение системы (3.1), а $d_1, \dots, d_n$ — решение соответствующей ей однородной системы (3.7), то, подставив в любое (например, в i -е) уравнение системы (3.1) на место неизвестных числа $c_1 + d_1, \dots, c_n + d_n$, получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(c_j + d_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}d_j = b_i + 0 = b_i,$$

что и требовалось доказать.

2°. Разность двух произвольных решений неоднородной системы (3.1) является решением соответствующей однородной системы (3.7).

В самом деле, если $c_1, \dots, c'_n$ и $c''_1, \dots, c''_n$ — два произвольных решения системы (3.1), то, подставив в любое (например, в i -е) уравнение системы (3.7) на место неизвестных числа $c'_1 - c''_1, \dots, c'_n - c''_n$, получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(c'_j - c''_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}c'_j - \sum_{j=1}^n a_{ij}c''_j = b_i - b_i = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанных утверждений вытекает, что, найдя одно решение неоднородной системы (3.1) и складывая его с каждым решением соответствующей однородной системы (3.7), мы получим все решения неоднородной системы (3.1).

Другими словами, сумма частного решения неоднородной системы (3.1) и общего решения соответствующей однородной системы (3.7) дает общее решение неоднородной системы (3.1).

В качестве частного решения неоднородной системы (3.1) естественно взять то его решение *)

$$X_0 = \left(\frac{M_1(b_i)}{M}, \dots, \frac{M_r(b_i)}{M}, 0, 0, \dots, 0 \right), \quad (3.29)$$

которое получится, если в формулах (3.20) положить равными нулю все числа $c_{r+1}, \dots, c_n$. Складывая это частное решение с общим решением (3.26) соответствующей однородной системы, мы получим следующее выражение для общего решения неоднородной системы (3.1):

$$X = X_0 + C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_{n-r} X_{n-r}. \quad (3.30)$$

В этом выражении X_0 обозначает частное решение (3.29), $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ — произвольные постоянные, а $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ — элементы нормальной фундаментальной совокупности решений (3.25) соответствующей однородной системы.

*) При этом предполагается, как и выше, что ранги основной и расширенной матриц системы (3.1) равны r и что базисный минор находится в левом верхнем углу этих матриц.

Так, для рассмотренной в конце предыдущего пункта неоднородной системы (3.21) частное решение вида (3.29) равно $X_0 = (6, 2, 0, 0)$. Складывая это частное решение с общим решением (3.28) соответствующей однородной системы (3.27), мы получим следующее общее решение неоднородной системы (3.21):

$$X = (6, 2, 0, 0) + C_1 \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right) + C_2 (-1, -2, 0, 1).$$

(Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные.)

4. Заключительные замечания о решении линейных систем. Развитые в предыдущих пунктах методы решения линейных систем упираются в необходимость вычисления ранга матрицы и нахождения ее базисного минора. После того как базисный минор найден, решение сводится к технике вычисления определителей и к использованию формул Крамера.

Для вычисления ранга матрицы можно использовать следующее правило: *при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков; при этом, если уже найден отличный от нуля минор M порядка k , то требуют вычисления лишь миноры порядка $(k+1)$, окаймляющие M ; в случае равенства нулю всех окаймляющих миноров порядка $(k+1)$ ранг матрицы равен k **).*

Укажем и другое правило вычисления ранга матрицы. Заметим, что со строками (столбцами) матрицы можно производить три элементарные операции, не изменяющие ранга этой матрицы: 1) перестановку двух строк (или двух столбцов), 2) умножение строки (или столбца) на любой отличный от нуля множитель, 3) прибавление к одной строке (столбцу) произвольной линейной комбинации других строк (столбцов) ***).

Будем говорить, что матрица $\|a_{ij}\|$, содержащая m строк и n столбцов, имеет диагональный вид, если равны нулю все ее элементы, отличные от $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$, где $r = \min\{m, n\}$. Ранг такой матрицы, очевидно, равен r .

Убедимся в том, что посредством трех элементарных операций любую матрицу

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (3.31)$$

*) То есть содержащие внутри себя минор M .

**) В самом деле, в указанном случае все строки (столбцы) матрицы принадлежат линейной оболочке ее k строк (столбцов), на пересечении которых стоит минор M , а размерность указанной линейной оболочки равна k .

***)) Эти три операции не изменяют ранга матрицы вследствие того, что операции 1) и 2) не изменяют максимального числа линейно независимых строк (столбцов) матрицы, а операция 3) обладает тем свойством, что линейная оболочка всех строк (столбцов), имевшихся до проведения этой операции, совпадает с линейной оболочкой всех строк (столбцов), полученных после проведения этой операции.

можно привести к диагональному виду (что и позволяет вычислить ее ранг).

В самом деле, если все элементы матрицы (3.31) равны нулю, то эта матрица уже приведена к диагональному виду. Если же у матрицы (3.31) есть отличные от нуля элементы, то путем перестановки двух строк и двух столбцов можно добиться того, чтобы был отличен от нуля элемент a_{11} . Умножая после этого первую строку матрицы на a_{11}^{-1} , мы превратим элемент a_{11} в единицу. Вычитая далее из j -го столбца матрицы (при $j = 2, 3, \dots, n$) первый столбец, умноженный на a_{1j} , а затем вычитая из i -й строки (при $i = 2, 3, \dots, n$) первую строку, умноженную на a_{i1} , мы получим вместо (3.31) матрицу следующего вида:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left\| \begin{array}{cc} a'_{22} & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{array} \right\| & \\ 0 & & \end{array} \right\|.$$

Совершая уже описанные нами операции с матрицей, взятой в рамку, и продолжая действовать аналогичным способом, мы после конечного числа шагов получим матрицу диагонального вида.

Изложенные в предыдущих пунктах методы решения линейных систем, использующие в конечном итоге аппарат формул Крамера, могут привести к большим погрешностям в случае, когда значения коэффициентов уравнений и свободных членов заданы приближенно или когда производится округление этих значений в процессе вычислений. В первую очередь это относится к случаю, когда матрица, отвечающая основному определителю (или базисному минору), является п л о х о о б у с л о в л е н н о й (т. е. когда «малым» изменениям элементов этой матрицы отвечают «большие» изменения элементов обратной матрицы). Естественно, что в этом случае решение линейной системы будет н е у с т о й ч и в ы м (т. е. «малым» изменениям значений коэффициентов уравнений и свободных членов будут отвечать «большие» изменения решения). Отмеченные обстоятельства приводят к необходимости разработки как других (отличных от формул Крамера) теоретических алгоритмов отыскания решения, так и численных методов решения линейных систем.

В § 4 главы 4 мы познакомимся с м е т о д о м р е г у л я р и з а ц и и А. Н. Тихонова отыскания так называемого н о р м а л ь н о г о (т. е. наиболее близкого к началу координат) решения линейной системы.

В главе 6 будут изложены основные сведения о так называемых и т е р а ц и о н н ы х м е т о д а х решения линейных систем, позволяющих решать эти системы при помощи последовательных приближений неизвестных.

ГЛАВА 4

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Из курса аналитической геометрии читатель знаком с понятием скалярного произведения двух свободных векторов и с четырьмя основными свойствами указанного скалярного произведения. В настоящей главе изучаются линейные пространства любой природы, для элементов которых каким-либо способом (причем, безразлично каким) определено правило, ставящее в соответствие любым двум элементам число, называемое **скалярным произведением** этих элементов. При этом важно только, чтобы это правило обладало теми же четырьмя свойствами, что и правило составления скалярного произведения двух свободных векторов. Линейные пространства, в которых определено указанное правило, называются **евклидовыми пространствами**. В настоящей главе выясняются основные свойства произвольных евклидовых пространств.

§ 1. Вещественное евклидово пространство и его простейшие свойства

1. Определение вещественного евклидова пространства. *Вещественное линейное пространство R называется вещественным евклидовым пространством (или просто евклидовым пространством), если выполнены следующие два требования:*

I. *Имеется правило, посредством которого любым двум элементам этого пространства x и y ставится в соответствие вещественное число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (x, y) .*

II. *Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:*

1°. $(x, y) = (y, x)$ (переместительное свойство или симметрия).

2°. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (распределительное свойство).

3°. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ для любого вещественного λ .

4°. $(x, x) > 0$, если x — ненулевой элемент; $(x, x) = 0$, если x — нулевой элемент.

Подчеркнем, что при введении понятия евклидова пространства мы абстрагируемся не только от природы изучаемых объек-

тов, но и от конкретного вида правил образования суммы элементов, произведения элемента на число и скалярного произведения элементов (важно лишь, чтобы эти правила удовлетворяли восьми аксиомам линейного пространства и четырем аксиомам скалярного произведения).

Если же природа изучаемых объектов и вид перечисленных правил указаны, то евклидово пространство называется **к о н к р е т н ы м**.

Приведем примеры конкретных евклидовых пространств.

П р и м е р 1. Рассмотрим линейное пространство B_3 всех свободных векторов. Скалярное произведение любых двух векторов определим так, как это было сделано в аналитической геометрии (т. е. как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними). В курсе аналитической геометрии была доказана справедливость для так определенного скалярного произведения аксиом 1°—4° *). Стало быть, пространство B_3 с так определенным скалярным произведением является евклидовым пространством.

П р и м е р 2. Рассмотрим бесконечномерное линейное пространство $C[a, b]$ всех функций $x(t)$, определенных и непрерывных на сегменте $a \leq t \leq b$. Скалярное произведение двух таких функций $x(t)$ и $y(t)$ определим как интеграл (в пределах от a до b) от произведения этих функций

$$\int_a^b x(t) y(t) dt. \quad (4.1)$$

Элементарно проверяется справедливость для так определенного скалярного произведения аксиом 1°—4°. В самом деле, справедливость аксиомы 1° очевидна; справедливость аксиом 2° и 3° вытекает из линейных свойств определенного интеграла; спра-

ведливость аксиомы 4° вытекает из того, что интеграл $\int_a^b x^2(t) dt$ от непрерывной неотрицательной функции $x^2(t)$ неотрицателен и обращается в нуль лишь тогда, когда эта функция тождественно равна нулю на сегменте $a \leq t \leq b$ **) (т. е. является нулевым элементом рассматриваемого пространства). Таким образом, пространство $C[a, b]$ с так определенным скалярным произведением представляет собой бесконечномерное евклидово пространство.

П р и м е р 3. Следующий пример евклидова пространства дает n -мерное линейное пространство A^n упорядоченных сово-

*) См. выпуск «Аналитическая геометрия», гл. 2, § 2, п. 3.

**) См. выпуск «Основы математического анализа», часть 1, свойства 1° и 2° из п. 1 § 6 гл. 10.

купностей n вещественных чисел, скалярное произведение двух любых элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ которого определяется равенством

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (4.2)$$

Справедливость для так определенного скалярного произведения аксиомы 1° очевидна; справедливость аксиом 2° и 3° легко проверяется (достаточно вспомнить определение операций сложения элементов и умножения их на числа:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n); \end{aligned}$$

наконец, справедливость аксиомы 4° вытекает из того, что $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ всегда является неотрицательным числом и обращается в нуль лишь при условии $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Рассмотренное в этом примере евклидово пространство часто обозначают символом E^n .

Пример 4. В том же самом линейном пространстве A^n введем скалярное произведение любых двух элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ не соотношением (4.2), а другим более общим способом.

Для этого рассмотрим квадратную матрицу порядка n

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Составим с помощью матрицы (4.3) однородный многочлен второго порядка относительно n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k. \quad (4.4)$$

Забегая вперед, отметим, что такой многочлен называется *к в а д р а т и ч н о й ф о р м о й* (порождаемой матрицей (4.3))*).

Квадратичная форма (4.4) называется *п о л о ж и т е л ь н о о п р е д е л е н н о й*, если она принимает строго положительные значения для всех значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, одновременно не равных нулю **). Так как при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ квадратичная форма (4.4), очевидно, равна нулю, то можно сказать, что *положительно определенная квадратичная форма обращается в нуль лишь при условии $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.*

*) Квадратичные формы систематически изучаются в главе 7 этой книги.

**) В главе 7 этой книги будет указано необходимое и достаточное условие положительной определенности квадратичной формы.

Потребуем, чтобы матрица (4.3) удовлетворяла двум условиям:

1°. Порождала положительно определенную квадратичную форму (4.4).

2°. Была симметричной (относительно главной диагонали), т. е. удовлетворяла условию $a_{ik} = a_{ki}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и всех $k = 1, 2, \dots, n$.

С помощью матрицы (4.3), удовлетворяющей условиям 1° и 2°, определим скалярное произведение двух любых элементов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ пространства A^n соотношением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k. \quad (4.5)$$

Легко проверить справедливость для так определенного скалярного произведения всех аксиом 1°—4°. В самом деле, аксиомы 2° и 3°, очевидно, справедливы при совершенно произвольной матрице (4.3); справедливость аксиомы 1° вытекает из условия симметричности матрицы (4.3), а справедливость аксиомы 4° вытекает из того, что квадратичная форма (4.4), представляющая собой скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, является положительно определенной.

Таким образом, пространство A^n со скалярным произведением, определяемым равенством (4.5), при условии симметричности матрицы (4.3) и положительной определенности порождаемой ею квадратичной формы, является евклидовым пространством.

Если в качестве матрицы (4.3) взять единичную матрицу, то соотношение (4.4) перейдет в (4.2), и мы получим евклидово пространство E^n , рассмотренное в примере 3.

2. Простейшие свойства произвольного евклидова пространства. Устанавливаемые в этом пункте свойства справедливы для совершенно произвольного евклидова пространства как конечной, так и бесконечной размерности.

Теорема 4.1. Для любых двух элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ произвольного евклидова пространства справедливо неравенство

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad (4.6)$$

называемое *неравенством Коши—Буняковского*.

Доказательство. Для любого вещественного числа λ , в силу аксиомы 4° скалярного произведения, справедливо неравенство $(\lambda \mathbf{x} - \mathbf{y}, \lambda \mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0$. В силу аксиом 1°—3° последнее неравенство можно переписать в виде

$$\lambda^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0.$$

Необходимым и достаточным условием неотрицательности последнего квадратного трехчлена является неположительность его дискриминанта, т. е. неравенство *)

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0. \quad (4.7)$$

Из (4.7) сразу же вытекает неравенство (4.6). Теорема доказана.

Наша очередная задача — ввести в произвольном евклидовом пространстве понятие *н о р м ы* (или *д л и н ы*) каждого элемента. Для этого введем понятие линейного нормированного пространства.

Определение. *Линейное пространство R называется н о р м и р о в а н н ы м*, если выполнены следующие два требования:

I. *Имеется правило, посредством которого каждому элементу x пространства R ставится в соответствие вещественное число, называемое н о р м о й* (или *д л и н о й*) *указанного элемента и обозначаемое символом $\|x\|$.*

II. *Указанное правило подчинено следующим трем аксиомам:*

1°. $\|x\| > 0$, если x — ненулевой элемент; $\|x\| = 0$, если x — нулевой элемент.

2°. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любого элемента x и любого вещественного числа λ .

3°. Для любых двух элементов x и y справедливо следующее неравенство:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (4.8)$$

называемое неравенством треугольника (или неравенством Минковского).

Теорема 4.2. *Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норму любого элемента x определить равенством*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (4.9)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для нормы, определенной соотношением (4.9), справедливы аксиомы 1°—3° из определения нормированного пространства.

Справедливость для нормы аксиомы 1° сразу вытекает из аксиомы 4° скалярного произведения. Справедливость для нормы аксиомы 2° почти непосредственно вытекает из аксиом 1° и 3° скалярного произведения.

Остается убедиться в справедливости для нормы аксиомы 3°, т. е. неравенства (4.8). Будем опираться на неравенство Коши—Буняковского (4.6), которое перепишем в виде

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}. \quad (4.7')$$

*) В случае $(x, x) = 0$ квадратный трехчлен вырождается в линейную функцию, но в этом случае элемент x является нулевым, так что $(x, y) = 0$ и неравенство (4.7) также справедливо.

С помощью последнего неравенства, аксиом 1°—4° скалярного произведения и определения нормы получим

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)} \leq \\ &< \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(x, x) \cdot \sqrt{(y, y)} + (y, y)} = \\ &= \sqrt{[\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}]^2} = \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие. Во всяком евклидовом пространстве с нормой элементов, определяемой соотношением (4.9), для любых двух элементов x и y справедливо неравенство треугольника (4.8).

Заметим далее, что в любом вещественном евклидовом пространстве можно ввести понятие угла между двумя произвольными элементами x и y этого пространства. В полной аналогии с векторной алгеброй, мы назовем углом φ между элементами x и y тот (изменяющийся в пределах от 0 до π) угол, косинус которого определяется соотношением

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}}.$$

Данное нами определение угла корректно, ибо в силу неравенства Коши—Буняковского (4.7') дробь, стоящая в правой части последнего равенства, по модулю не превосходит единицы.

Далее договоримся называть два произвольных элемента x и y евклидова пространства E ортогональными, если скалярное произведение этих элементов (x, y) равно нулю (в этом случае косинус угла φ между элементами x и y будет равен нулю).

Снова апеллируя к векторной алгебре, назовем сумму $x + y$ двух ортогональных элементов x и y гипотенузой прямоугольного треугольника, построенного на элементах x и y .

Заметим, что во всяком евклидовом пространстве справедлива теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. В самом деле, поскольку x и y ортогональны и $(x, y) = 0$, то в силу аксиом и определения нормы $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) =$

$$= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Этот результат обобщается и на n попарно ортогональных элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$: если $z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, то

$$\begin{aligned}z^2 &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n, x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \\ &= (x_1, x_1) + (x_2, x_2) + \dots + (x_n, x_n) = \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.\end{aligned}$$

В заключение запишем норму, неравенство Коши—Буняковского и неравенство треугольника в каждом из конкретных евклидовых пространств, рассмотренных в предыдущем пункте.

В евклидовом пространстве всех свободных векторов с обычным определением скалярного произведения норма вектора a совпадает с его длиной $|a|$, неравенство Коши—Буняковского приводится к виду $(a, b)^2 \leq |a|^2 |b|^2$ *, а неравенство треугольника — к виду $|a + b| \leq |a| + |b|$ **).

В евклидовом пространстве $C[a, b]$ всех непрерывных на сегменте $a \leq t \leq b$ функций $x = x(t)$ со скалярным произведе-

нием (4.1) норма элемента $x = x(t)$ равна $\sqrt{\int_a^b x^2(t) dt}$, а неравенства Коши—Буняковского и треугольника имеют вид

$$\left[\int_a^b x(t) y(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b x^2(t) dt \int_a^b y^2(t) dt,$$

$$\sqrt{\int_a^b [x(t) + y(t)]^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt} + \sqrt{\int_a^b y^2(t) dt}$$

Оба эти неравенства играют важную роль в различных разделах математического анализа.

В евклидовом пространстве E^n упорядоченных совокупностей n вещественных чисел со скалярным произведением (4.2) норма любого элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

а неравенства Коши—Буняковского и треугольника имеют вид

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq$$

$$\leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2),$$

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}.$$

Наконец, в евклидовом пространстве упорядоченных совокупностей n вещественных чисел со скалярным произведением (4.5) норма любого элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна ***)

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k},$$

*) Для скалярного произведения векторов $(a, b) = |a| |b| \cos \varphi$ это неравенство тривиально вытекает из того, что $\cos^2 \varphi \leq 1$.

**) Если сложить векторы a и b по правилу треугольника, то это неравенство тривиально сводится к тому, что одна сторона треугольника не превосходит суммы двух других его сторон.

***) Напоминаем, что при этом матрица (4.3) симметрична и порождает положительно определенную квадратичную форму (4.4).

а неравенства Коши—Буняковского и треугольника имеют вид

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} y_i y_k \right),$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} (x_i + y_i) (x_k + y_k)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k} + \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} y_i y_k}.$$

§ 2. Ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства

В этом параграфе будут изучаться евклидовы пространства конечной размерности n . Распространение изучаемых здесь результатов на бесконечномерные евклидовы пространства выходит за рамки этой книги и является предметом специального изучения. (Такие пространства изучаются в главах 10 и 11 выпуска «Основы математического анализа, часть 2».)

1. Понятие ортонормированного базиса и его существование. В главе 2 было введено понятие базиса n -мерного линейного пространства. В линейном пространстве все базисы являлись равноправными, и у нас не было оснований предпочитать один базис другому.

В евклидовом пространстве существуют специальные, особо удобные базисы, называемые ортонормированными базисами. Эти базисы играют ту же роль, что и декартов прямоугольный базис в аналитической геометрии. Перейдем к определению ортонормированного базиса.

Определение. Будем говорить, что n элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ n -мерного евклидова пространства E образуют ортонормированный базис этого пространства, если эти элементы попарно ортогональны и норма каждого из этих элементов равна единице, т. е. если

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (4.10)$$

Для того чтобы установить корректность сформулированного определения, следует доказать, что входящие в это определение элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют один из базисов рассматриваемого n -мерного пространства E , а для этого в силу теоремы 2.5 достаточно доказать, что эти элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы, т. е. что равенство

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \quad (4.11)$$

возможно, лишь когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Докажем это. Пусть k — любой из номеров $1, 2, \dots, n$. Умножая равенство (4.11) скалярно на элемент e_k и пользуясь аксиомами скалярного произведения и соотношениями (4.10), мы получим, что $\alpha_k = 0$.

Докажем теперь следующую основную теорему.

Теорема 4.3. *Во всяком n -мерном евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Согласно определению размерности в пространстве E найдется n линейно независимых элементов $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Докажем, что можно построить n элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$, линейно выражающихся через $f_1, f_2, \dots, f_n$ и образующих ортонормированный базис (т. е. удовлетворяющих соотношениям (4.10)).

Проведем доказательство возможности построения таких элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ методом математической индукции.

Если имеется только один элемент f_1 , то для построения элемента e_1 с нормой, равной единице, достаточно нормировать элемент f_1 , т. е. умножить этот элемент на число $[\sqrt{(f_1, f_1)}]^{-1}$, обратное его норме *). Мы получим при этом элемент $e_1 = [\sqrt{(f_1, f_1)}]^{-1} f_1$ с нормой, равной единице.

Считая, что m — целое число, меньшее n , предположим, что нам удалось построить m элементов $e_1, e_2, \dots, e_m$, линейно выражающихся через $f_1, f_2, \dots, f_m$ попарно ортогональных и имеющих нормы, равные единице. Докажем, что к этим элементам $e_1, e_2, \dots, e_m$ можно присоединить еще один элемент e_{m+1} , линейно выражающийся через $f_1, f_2, \dots, f_{m+1}$, ортогональный к каждому из элементов $e_1, e_2, \dots, e_m$ и имеющий норму, равную единице.

Убедимся в том, что этот элемент e_{m+1} имеет вид

$$e_{m+1} = \alpha_{m+1} [f_{m+1} - (f_{m+1}, e_m) e_m - (f_{m+1}, e_{m-1}) e_{m-1} - \dots - (f_{m+1}, e_1) e_1], \quad (4.12)$$

где α_{m+1} — некоторое вещественное число.

В самом деле, элемент e_{m+1} линейно выражается через $f_1, f_2, \dots, f_{m+1}$ (в силу того, что он линейно выражается через $e_1, e_2, \dots, e_m, f_{m+1}$, а каждый из элементов $e_1, e_2, \dots, e_m$ линейно выражается через $f_1, f_2, \dots, f_m$).

Отсюда сразу же следует, что при $\alpha_{m+1} \neq 0$ элемент e_{m+1} заведомо не является нулевым (ибо в противном случае являлась бы нулевым элементом некоторая линейная комбинация линейно независимых элементов $f_1, f_2, \dots, f_{m+1}$, в которой в силу (4.12) отличен от нуля коэффициент при f_{m+1}).

*) Напомним, что среди линейно независимых элементов $f_1, f_2, \dots, f_n$ не может быть нулевого элемента, так что норма f_i больше нуля.

Далее из того, что элементы $e_1, e_2, \dots, e_m$ попарно ортогональны и имеют нормы, равные единице, и из соотношения (4 12) сразу же вытекает, что скалярное произведение (e_{m+1}, e_k) равно нулю для любого номера k равного $1, 2, \dots, m$.

Для завершения индукции остается доказать, что число α_{m+1} можно выбрать так, что норма элемента (4 12) будет равна единице. Выше уже установлено, что при $\alpha_{m+1} \neq 0$ элемент e_{m+1} , а, стало быть, и элемент, заключенный в (4 12) в квадратные скобки, не является нулевым.

Стало быть, для того чтобы нормировать элемент, заключенный в квадратные скобки, следует взять число α_{m+1} обратным положительной норме этого заключенного в квадратные скобки элемента. При этом норма e_{m+1} будет равна единице. Теорема доказана.

Доказанная теорема приводит к следующему осуществляемому шаг за шагом алгоритму построения по данной системе n линейно независимых элементов $f_1, f_2, \dots, f_n$ системы n попарно ортогональных элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$, норма каждого из которых равна единице:

$$e_1 = \frac{f_1}{V(f_1, f_1)};$$

$$e_2 = \frac{g_2}{V(g_2, g_2)}, \text{ где } g_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1;$$

$$e_3 = \frac{g_3}{V(g_3, g_3)}, \text{ где } g_3 = f_3 - (f_3, e_2)e_2 - (f_3, e_1)e_1;$$

$$e_n = \frac{g_n}{V(g_n, g_n)}, \text{ где } g_n = f_n - (f_n, e_{n-1})e_{n-1} - \dots - (f_n, e_1)e_1.$$

Указанный алгоритм обычно называют процессом ортогонализации линейно независимых элементов $f_1, f_2, \dots, f_n$.

З а м е ч а н и е. Конечно, в каждом n -мерном евклидовом пространстве E существует много ортонормированных базисов. Действительно, если например, строить ортонормированный базис процессом ортогонализации одних и тех же линейно независимых элементов $f_1, f_2, \dots, f_n$, то, начиная процесс ортогонализации с различных элементов f_h , мы придем к различным ортонормированным базисам. Ниже, в п. 2 § 7 гл. 7 будет рассмотрен вопрос о том, как связаны между собой различные ортонормированные базисы данного евклидова пространства E .

Примером ортонормированного базиса может служить декартов прямоугольный базис евклидова пространства всех

свободных векторов или совокупность n элементов

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

евклидова пространства E^n всех упорядоченных совокупностей n вещественных чисел со скалярным произведением (4.2).

2. Свойства ортонормированного базиса. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — произвольный ортонормированный базис n -мерного евклидова пространства E , а x и y — два произвольных элемента этого пространства. Найдем выражение скалярного произведения (x, y) этих элементов через их координаты относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Обозначим координаты элементов x и y относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ соответственно через $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$, т. е. предположим, что $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$. Тогда

$$(x, y) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n).$$

Из последнего равенства в силу аксиом скалярного произведения и соотношений (4.10) получим

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{k=1}^n y_k e_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i y_k (e_i, e_k) = \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Итак, окончательно,

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (4.13)$$

Таким образом, в ортонормированном базисе скалярное произведение двух любых элементов равно сумме произведений соответствующих координат этих элементов.

Рассмотрим теперь в n -мерном евклидовом пространстве E совершенно произвольный (вообще говоря, не ортонормированный) базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ и найдем выражение скалярного произведения двух произвольных элементов x и y через координаты этих элементов относительно указанного базиса.

Обозначим координаты элементов x и y относительно базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ соответственно через $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$, т. е. предположим, что

$$x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n, \quad y = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n.$$

Пользуясь аксиомами скалярного произведения, получим

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n, y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i, \sum_{k=1}^n y_k f_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i y_k (f_i, f_k). \end{aligned}$$

Таким образом, в произвольном базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ скалярное произведение двух любых элементов $x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n$ и $y = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n$ определяется равенством

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k, \quad (4.14)$$

в котором матрица $\|a_{ik}\|$ ($i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n$) имеет элементы $a_{ik} = (f_i, f_k)$.

Последнее утверждение приводит к следующему результату: для того чтобы в данном базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ евклидова пространства E скалярное произведение двух любых элементов было равно сумме произведений соответствующих координат этих элементов, необходимо и достаточно, чтобы базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ был ортонормированным.

В самом деле, выражение (4.14) переходит в (4.13) тогда и только тогда, когда матрица $\|a_{ik}\|$ с элементами $a_{ik} = (f_i, f_k)$ является единичной, т. е. тогда и только тогда, когда выполнены соотношения

$$(f_i, f_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases}$$

устанавливающие ортонормированность базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Вернемся к рассмотрению произвольного ортонормированного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ n -мерного евклидова пространства E . Выясним смысл координат произвольного элемента x относительно указанного базиса.

Обозначим координаты элемента x относительно базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ через $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е. предположим, что

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (4.15)$$

Обозначим далее через k любой из номеров $1, 2, \dots, n$ и умножим обе части (4.15) скалярно на элемент e_k . На основании аксиом скалярного произведения и соотношений (4.10) получим

$$(x, e_k) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, e_k \right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i, e_k) = x_k.$$

Таким образом, координаты произвольного элемента относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие базисные элементы.

Поскольку скалярное произведение произвольного элемента x на элемент e , имеющий норму, равную единице, естественно назвать проекцией элемента x на элемент e , то можно сказать, что координаты произвольного элемента относительно ортонормированного базиса равны проекциям этого элемента на соответствующие базисные элементы.

Таким образом, произвольный ортонормированный базис обладает свойствами, вполне аналогичными свойствам декартова прямоугольного базиса.

3. Разложение n -мерного евклидова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Пусть G — произвольное подпространство n -мерного евклидова пространства E .

Совокупность F всех элементов u пространства E , ортогональных к каждому элементу x подпространства G , называется ортогональным дополнением подпространства G .

Заметим, что ортогональное дополнение F само является подпространством E (ибо из ортогональности каждого из элементов u_1 и u_2 элементу x , очевидно, вытекает, что и любая линейная комбинация элементов u_1 и u_2 ортогональна элементу x).

Докажем, что всякое n -мерное евклидово пространство E представляет собой прямую сумму своего произвольного подпространства G и его ортогонального дополнения F .

Выберем в G произвольный ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_k$. В силу доказанного в п. 1 § 3 гл. 2 этот базис можно дополнить элементами $f_{k+1}, \dots, f_n$ пространства E до базиса во всем E . Произведя процесс ортогонализации элементов $e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_n$, мы получим ортонормированный базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ всего пространства E . Разложив произвольный элемент x пространства E по этому базису, т. е. представив его в виде $x = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + \dots + x_n e_n$, мы получим, что этот элемент x однозначно представим в виде $x = x' + x''$, где $x' = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k$ совершенно определенный элемент G , а $x'' = x_{k+1} e_{k+1} + \dots + x_n e_n$ — совершенно определенный элемент ортогонального дополнения F (каждый элемент $e_{k+1}, \dots, e_n$ ортогонален к любому из элементов $e_1, \dots, e_k$, а потому ортогонален любому элементу G ; поэтому и линейная комбинация $x_{k+1} e_{k+1} + \dots + x_n e_n$ ортогональна к любому элементу G , т. е. является совершенно определенным элементом F).

4. Изоморфизм n -мерных евклидовых пространств. В этом пункте мы покажем, что различные евклидовы пространства одной и той же размерности n в смысле свойств, связанных со введенными в этих пространствах операциями, по существу не отличаются друг от друга.

Поскольку в евклидовых пространствах введены лишь операции сложения элементов, умножения элементов на числа и скалярного перемножения элементов, то естественно сформулировать следующее определение.

Определение. Два евклидовых пространства E и E' называются *изоморфными*, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если элементам x и y пространства E отвечают соот-

ответственно элементы x' и y' пространства E' , то элементу $x + y$ отвечает элемент $x' + y'$, элементу λx (при любом вещественном λ) отвечает элемент $\lambda x'$ и скалярное произведение (x, y) равно скалярному произведению (x', y') .

Таким образом, евклидовы пространства E и E' изоморфны, если они изоморфны как линейные пространства *) и если этот изоморфизм сохраняет величину скалярного произведения соответствующих пар элементов.

Теорема 4.4. Все евклидовы пространства одной и той же размерности n изоморфны между собой.

Доказательство. Достаточно доказать, что любое n -мерное евклидово пространство E' изоморфно евклидову пространству E^n упорядоченных совокупностей n вещественных чисел со скалярным произведением (4.2). Согласно теореме 4.3 в евклидовом пространстве E' существует ортонормированный базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Каждому элементу $x' = x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \dots + x_n e'_n$ пространства E' поставим в соответствие n вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е. вполне определенный элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства E^n .

Установленное соответствие будет взаимно однозначным. Кроме того, из теоремы 2.4 вытекает, что если элементам $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y' = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ пространства E' **) отвечают соответственно элементы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ пространства E^n , то элементу $x' + y'$ отвечает элемент $x + y$, а элементу $\lambda x'$ отвечает элемент λx .

Остается доказать, что для соответствующих пар элементов x', y' и x, y сохраняется величина скалярного произведения.

В силу ортонормированности базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ и формулы (4.13) $(x', y') = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. С другой стороны, в силу формулы (4.2), определяющей скалярное произведение в пространстве E^n , $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет утверждать, что если в каком-нибудь конкретном n -мерном евклидовом пространстве E' доказана теорема, сформулированная в терминах операций сложения, умножения на числа и скалярного перемножения элементов, то эта теорема справедлива и в совершенно произвольном n -мерном евклидовом пространстве E .

§ 3. Комплексное евклидово пространство

1. Определение комплексного евклидова пространства. В конце п. 1 § 1 гл. 2 мы уже указывали, что если в определении линейного пространства числа $\lambda, \mu, \dots$ брать не из множества вещественных чисел, а из множества всех комплексных чисел, то

*) См. п. 4 § 2 гл. 2.

**) Координаты этих элементов берутся относительно базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

мы приходим к понятию комплексного линейного пространства.

На базе комплексного линейного пространства строится комплексное евклидово пространство, играющее фундаментальную роль в теории несамосопряженных линейных преобразований.

Для введения комплексного евклидова пространства следует ввести в комплексном линейном пространстве понятие скалярного произведения двух его элементов, подчиненное соответствующим четырем аксиомам.

Определение. Комплексное линейное пространство R называется комплексным евклидовым пространством, если выполнены следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого любому двум элементам x и y этого пространства ставится в соответствие комплексное число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (x, y) .

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:

$$1^\circ. (x, y) = \overline{(y, x)}^*.$$

$$2^\circ. (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y).$$

$$3^\circ. (\lambda x, y) = \lambda (x, y).$$

4°. (x, x) представляет собой вещественное неотрицательное число, обращающееся в нуль лишь в случае, когда x — нулевой элемент **).

Логическими следствиями аксиом 1° — 3° являются следующие два соотношения:

$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda} (x, y), \quad (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2).$$

В самом деле, из аксиом 1° и 3° заключаем, что

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda} \overline{(y, x)} = \bar{\lambda} (x, y),$$

а из аксиом 1° и 2° получим, что

$$(x, y_1 + y_2) = \overline{(y_1 + y_2, x)} = \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2).$$

Приведем примеры конкретных комплексных евклидовых пространств.

*) Здесь и в дальнейшем символом $\bar{\alpha}$ обозначается число, комплексно сопряженное с α .

**) Аксиома 1° отличается от соответствующей аксиомы 1° вещественного евклидова пространства. Легко убедиться в том, что при переходе к комплексному пространству невозможно сохранить без изменения все три аксиомы 1° , 3° и 4° вещественного скалярного произведения. В самом деле, при наличии аксиом $(x, y) = (y, x)$ и $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, мы получили бы, что $(x, \lambda y) = (\lambda y, x) = \lambda (y, x) = \lambda (x, y)$. Но тогда оказалось бы, что $(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 (x, x)$, и, стало быть, при $\lambda = i$ мы получили бы, что $(ix, ix) = -(x, x)$, а это противоречило бы аксиоме 4° о неотрицательности (y, y) для любого элемента y .

Пример 1. Рассмотрим совокупность $C^*[a, b]$ всех функций $z = z(t)$, определенных для значений t из сегмента $a \leq t \leq b$ и принимающих комплексные значения $z(t) = x(t) + iy(t)$ такие, что вещественные функции $x(t)$ и $y(t)$ являются непрерывными на этом сегменте. Операции сложения этих функций и умножения их на комплексные числа заимствуем из анализа. Скалярное произведение двух любых таких функций определим соотношением $(z_1(t), z_2(t)) = \int_a^b z_1(t) \overline{z_2(t)} dt$.

Нетрудно убедиться в справедливости для так определенного скалярного произведения всех аксиом 1°—4°, из чего следует, что рассматриваемая совокупность представляет собой комплексное евклидово пространство.

Пример 2. Рассмотрим комплексное линейное пространство A_n^c , элементами которого служат упорядоченные совокупности n комплексных чисел, $x_1, x_2, \dots, x_n$ с такими же определениями операций сложения элементов и умножения их на числа, как и в случае вещественного линейного пространства A^n .

Скалярное произведение двух любых элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ определим соотношением

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n. \quad (4.16)$$

Справедливость для так определенного скалярного произведения аксиом 1°—3° проверяется совершенно элементарно. Справедливость аксиомы 4° вытекает из соотношения

$$(x, x) = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Стало быть, пространство A_n^c со скалярным произведением (4.16) является комплексным евклидовым пространством.

Пример 3. В том же самом комплексном линейном пространстве A_n^c можно ввести скалярное произведение не соотношением (4.16), а более общим соотношением *)

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i \bar{y}_k, \quad (4.17)$$

в котором $\|a_{ik}\|$ — произвольная матрица, состоящая из комплексных чисел a_{ik} , удовлетворяющих условию $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$, такая, что квадратичная форма $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i \bar{x}_k$ для всех комплексных $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимает вещественные неотрицательные значения и

*) (4.17) переходит в (4.16), когда матрица $\|a_{ik}\|$ является единичной.

обращается в нуль лишь при условии $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 = 0$.

Предоставляем читателю проверку того, что так определенное скалярное произведение удовлетворяет аксиомам 1°—4°.

2. Неравенство Коши — Буняковского. Понятие нормы. Докажем, что для любых двух элементов x и y произвольного комплексного евклидова пространства справедливо неравенство Коши — Буняковского *)

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (4.18)$$

На основании аксиомы 4° для любого комплексного числа λ справедливо неравенство

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0. \quad (4.19)$$

Так как в силу аксиом 1°—3° и их логических следствий

$$\begin{aligned} (\lambda x - y, \lambda x - y) &= \lambda \bar{\lambda} (x, x) - \lambda (x, y) - \bar{\lambda} (y, x) + (y, y) = \\ &= |\lambda|^2 (x, x) - \lambda (x, y) - \bar{\lambda} \overline{(x, y)} + (y, y), \end{aligned}$$

то неравенство (4.19) принимает вид

$$|\lambda|^2 (x, x) - \lambda (x, y) - \bar{\lambda} \overline{(x, y)} + (y, y) \geq 0. \quad (4.20)$$

Обозначим через φ аргумент комплексного числа (x, y) и представим это число в тригонометрической форме **)

$$(x, y) = |(x, y)| (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4.21)$$

Положим теперь комплексное число λ равным

$$\lambda = t (\cos \varphi - i \sin \varphi), \quad (4.22)$$

где t — произвольное вещественное число. Из соотношений (4.21) и (4.22) очевидно, что $|\lambda| = |t|$, $\lambda (x, y) = \bar{\lambda} \overline{(x, y)} = t |(x, y)|$. Поэтому при выбранном нами λ неравенство (4.20) переходит в неравенство

$$t^2 (x, x) - 2t |(x, y)| + (y, y) \geq 0, \quad (4.23)$$

*) Поскольку (x, y) является, вообще говоря, комплексным числом, то нельзя записывать неравенство Коши — Буняковского в виде (4.6).

**) Понятия аргумента и тригонометрической формы комплексного числа разбираются, например, в § 1 гл. 7 выпуска «Основы математического анализа», часть I.

справедливое при любом вещественном t . Необходимым и достаточным условием неотрицательности квадратного трехчлена, стоящего в левой части (4.23), является неположительность его дискриминанта, т. е. неравенство $|(x, y)|^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$, эквивалентное неравенству (4.18).

С помощью неравенства Коши—Буняковского (4.18) и рассуждений, полностью аналогичных доказательству теоремы 4.2, устанавливается, что *всякое комплексное евклидово пространство является нормированным, если в нем норму любого элемента x определить соотношением*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (4.24)$$

В частности, во всяком комплексном евклидовом пространстве с нормой, определяемой соотношением (4.24), справедливо *неравенство треугольника* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что введенное для вещественного евклидова пространства понятие угла ϕ между двумя произвольными элементами x и y теряет смысл для комплексного евклидова пространства (вследствие того, что скалярное произведение (x, y) является, вообще говоря, комплексным числом).

3. Ортонормированный базис и его свойства. Элементы x и y произвольного комплексного евклидова пространства будем называть *ортogonalными*, если скалярное произведение (x, y) этих элементов равно нулю.

Ортонормированным базисом n -мерного комплексного евклидова пространства назовем совокупность его элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$, удовлетворяющих соотношениям

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases} \quad (4.25)$$

(т. е. попарно ортогональных и имеющих нормы, равные единице).

Как и в п. 1 § 2, доказывается, что эти элементы линейно независимы и потому образуют базис.

В полной аналогии с доказательством теоремы 4.3 (т. е. с помощью процесса ортогонализации) устанавливается существование в произвольном n -мерном комплексном евклидовом пространстве ортонормированного базиса.

Выразим скалярное произведение двух произвольных элементов x и y n -мерного комплексного евклидова пространства через их координаты $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ относительно ортонормированного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Так как

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n,$$

то в силу аксиом 1°—4° и соотношений (4.25) получим

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{k=1}^n y_k e_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i y_k (e_i, e_k) = \\ = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Выразим далее координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ произвольного элемента x относительно ортонормированного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Умножая разложение этого элемента по базису $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ скалярно на e_k и пользуясь соотношениями (4.25), получим (для любого k , равного 1, 2, ..., n)

$$(x, e_k) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, e_k \right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i, e_k) = x_k.$$

Итак, как и в случае вещественного евклидова пространства, координаты произвольного элемента x относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие базисные элементы.

В полной аналогии с доказательством теоремы 4.4 устанавливается, что все комплексные евклидовы пространства одной и той же размерности n изоморфны между собой.

§ 4. Метод регуляризации для отыскания нормального решения линейной системы

Снова возвратимся к рассмотрению общей линейной системы m уравнений с n неизвестными вида (3.1). Эту систему кратко запишем в матричной форме *)

$$AX = B. \quad (4.26)$$

Напомним, что в этой записи символ A обозначает матрицу $A = \|a_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), а символы X и B обозначают столбцы (или векторы) вида

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{Bmatrix},$$

первый из которых подлежит определению, а второй — задан.

Будем рассматривать случай, когда значения элементов матрицы A и столбца свободных членов B заданы нам лишь приближенно **). Тогда естественно говорить лишь о приближенных

*) См. формулу (3.6) из предыдущей главы.

**) Такая ситуация будет иметь место в случае, если эти значения получаются из физических измерений или если в процессе вычислений приходится округлять указанные значения до некоторого знака.

значениях искомого столбца X . Изложенные в предыдущей главе и основанные на формулах Крамера алгоритмы вычисления столбца решений X в этом случае могут приводить к большим погрешностям и теряют практический смысл *)

В этом параграфе мы изложим принадлежащий А. Н. Тихонову алгоритм, позволяющий находить так называемое *нормальное* (т. е. наиболее близкое к началу координат) решение X с точностью, соответствующей точности задания элементов матрицы A и столбца B **).

Введем в рассмотрение так называемые *сферические нормы* столбцов B и X и матрицы A , положив их равными

$$\|B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}, \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}. \quad (4.27)$$

Заметим, что нормы столбцов B и X определяются как обычные нормы векторов — элементов пространств E^m и соответственно E^n . Норма матрицы A согласована с нормой n -мерного столбца X в том смысле, что норма m -мерного столбца AX , равного произведению матрицы A на столбец X , удовлетворяет условию ***)

$$\|AX\| \leq \|A\| \|X\|. \quad (4.28)$$

Будем считать, что вместо точных значений элементов матрицы $A = \|a_{ij}\|$ и столбца правых частей $B = \|b_i\|$ нам заданы приближенные значения $\tilde{A} = \|\tilde{a}_{ij}\|$, $\tilde{B} = \|\tilde{b}_i\|$.

Матрицу $\tilde{A}$ (столбец $\tilde{B}$) будем называть *δ -приближением* матрицы A (столбца B), если справедливо неравенство

$$\|A - \tilde{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \tilde{a}_{ij})^2} < \delta$$

$$\left(\|B - \tilde{B}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (b_i - \tilde{b}_i)^2} < \delta \right). \quad (4.29)$$

*) Особенно это относится к случаю так называемых «плохо обусловленных» матриц (для которых «малые» изменения элементов матрицы базисного минора ведут к «большим» изменениям элементов обратной матрицы).

**) См. А. Н. Тихонов «О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения», Доклады Академии наук СССР, том 163, № 3 (1965), стр. 591—594

***)) В самом деле, пользуясь определением произведения матрицы на столбец, соотношениями (4.27) и неравенством Коши — Буняковского для элементов евклидова пространства E^n , будем иметь

$$\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right]^2 \leq \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^n x_j^2 \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^n x_j^2 = \|A\|^2 \|X\|^2.$$

Назовем нормальным решением совместной си-

стемы (4.26) то ее решение $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$, норма $\|X^0\|$ которого яв-

ляется наименьшей среди норм $\|X\|$ всех решений X этой системы. Заметим, что у всякой совместной системы (4.26) (в том числе и у неопределенной) существует единственное нормальное решение.

Введем в рассмотрение следующую функцию n переменных

$x_1, x_2, \dots, x_n$ или одного столбца $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$F^\alpha(x_1, \dots, x_n, \tilde{A}, \tilde{B}) = F^\alpha(X, A, \tilde{B}) = \|\tilde{A}X - \tilde{B}\|^2 + \alpha\|X\|^2, \quad (4.30)$$

зависящую как от параметров от элементов матрицы $\tilde{A}$ и столбца $\tilde{B}$, а также зависящую от некоторого числового параметра α . В подробной записи эта функция выглядит так:

$$F^\alpha(X, \tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right]^2 + \alpha \sum_{j=1}^n x_j^2. \quad (4.30')$$

Фактически $F^\alpha(X, \tilde{A}, \tilde{B})$ является функцией от элементов X евклидова пространства n -мерных столбцов E^n . Такого рода функцию, аргументом которой служат элементы некоторого линейного пространства, принято называть функцией *о н а л о м**).

Легко убедиться в том, что при любом фиксированном $\alpha > 0$ неотрицательный функционал (4.30') достигает своего минимального (во всем пространстве E^n) значения в единственной точке

$X^\alpha = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix}$ пространства E^n .

В самом деле, дважды дифференцируя функцию (4.30'), получим $\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x_k \partial x_l} = 2 \sum_{i=1}^m \tilde{a}_{ik} \tilde{a}_{il} + 2\alpha \delta_{kl}$, где $\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases}$

Следовательно, второй дифференциал функции F^α имеет вид

$$\begin{aligned} d^2 F^\alpha &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \tilde{a}_{ik} \tilde{a}_{il} \right] dx_k dx_l + \alpha \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{kl} dx_k dx_l = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} dx_k \right]^2 + \alpha \sum_{k=1}^n (dx_k)^2. \end{aligned}$$

*) Функционалы систематически изучаются в следующей главе.

Из этого равенства вытекает оценка $d^2 F^\alpha \geq \alpha \sum_{k=1}^n (dx_k)^2$, означающая, что функция F^α является строго выпуклой в н.и.з. Кроме того, $F^\alpha \rightarrow +\infty$ при $\|X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \rightarrow \infty$. Отсюда очевидным образом следует, что F^α имеет и притом единственную точку минимума X^α *).

Методы отыскания минимальных значений функционалов вида (4.30) хорошо разработаны **).

Докажем следующую фундаментальную теорему, сводящую вопрос о приближенном отыскании нормального решения системы

(4.26) к отысканию того элемента $X^\alpha = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix}$, на котором достигается своего минимального значения функционал (4.30).

Теорема А. Н. Тихонова. Пусть матрица A и столбец B удовлетворяют условиям, обеспечивающим совместность системы

(4.26), $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ — нормальное решение этой системы, A —

δ -приближение матрицы A , $\tilde{B}$ — δ -приближение столбца B , $\varepsilon(\delta)$ и $\alpha(\delta)$ — какие-либо возрастающие функции δ , стремящиеся к нулю при $\delta \rightarrow 0 + 0$ и такие, что $\delta^2 \leq \varepsilon(\delta) \alpha(\delta)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \|X^0\|)$ такое, что при любом $\delta < \delta_0(\varepsilon, \|X^0\|)$ и при любом α , удовлетворяющем условию

$$\frac{1}{\varepsilon(\delta)} \delta^2 \leq \alpha \leq \alpha(\delta), \quad (4.31)$$

элемент $X^\alpha = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix}$, доставляющий минимум функционалу (4.30), удовлетворяет неравенству

$$\|X^\alpha - X^0\| \leq \varepsilon. \quad (4.32)$$

Доказательство. Рассмотрим в линейном пространстве E^n подмножество $\{U_{\tilde{A}}\}$ всех элементов $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}$, представимых в виде $U = \tilde{A}X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — произвольный элемент

*) См., в частности, выпуск 1 «Основы математического анализа», часть I, гл. 14, § 7.

**) См. там же.

пространства E^n . Совершенно очевидно, что подмножество $\{U_{\tilde{A}}\}$ представляет собой линейное пространство и поэтому является подпространством E^m . Обозначим через $\{V_{\tilde{A}}\}$ ортогональное дополнение $\{U_{\tilde{A}}\}$ (до всего E^m) и разложим E^m в прямую сумму подпространств $\{U_{\tilde{A}}\}$ и $\{V_{\tilde{A}}\}$ *). Пусть $\tilde{B}_{\tilde{A}}$ обозначает проекцию столбца $\tilde{B}$ на подпространство $\{U_{\tilde{A}}\}$, так что $\tilde{B} = \tilde{B}_{\tilde{A}} + (\tilde{B} - \tilde{B}_{\tilde{A}})$, где $(\tilde{B} - \tilde{B}_{\tilde{A}})$ — элемент $\{V_{\tilde{A}}\}$. Тогда, поскольку для любого элемента X пространства E^n столбец $\tilde{A}X$ является элементом $\{U_{\tilde{A}}\}$, мы получим следующее разложение:

$$\tilde{A}X - \tilde{B} = (\tilde{A}X - \tilde{B}_{\tilde{A}}) + (\tilde{B}_{\tilde{A}} - \tilde{B}),$$

в котором элементы $(\tilde{A}X - \tilde{B}_{\tilde{A}})$ и $(\tilde{B}_{\tilde{A}} - \tilde{B})$ ортогональны друг другу и принадлежат соответственно $\{U_{\tilde{A}}\}$ и $\{V_{\tilde{A}}\}$.

Пользуясь теоремой Пифагора (см. п. 2 § 1), мы получим (для любого элемента X пространства E^n)

$$\|\tilde{A}X - \tilde{B}\|^2 = \|\tilde{A}X - \tilde{B}_{\tilde{A}}\|^2 + \|\tilde{B}_{\tilde{A}} - \tilde{B}\|^2. \quad (4.33)$$

Из (4.33) следует, в частности, неравенство

$$\|\tilde{B} - \tilde{B}_{\tilde{A}}\| \leq \|\tilde{A}X - \tilde{B}\|, \quad (4.34)$$

также справедливое для любого элемента X пространства E^n .

Из (4.33) и (4.30) мы получим, что для любого X из E^n

$$F^\alpha(X, \tilde{A}, \tilde{B}) = \|\tilde{B} - \tilde{B}_{\tilde{A}}\|^2 + F^\alpha(X, \tilde{A}, \tilde{B}_{\tilde{A}}), \quad (4.35)$$

т. е. функционалы, стоящие в левой и в правой частях (4.35), имеют общий элемент X^α , доставляющий им минимум.

Установим теперь для любого α , удовлетворяющего условиям (4.31), следующее неравенство

$$F^\alpha(X^\alpha, \tilde{A}, \tilde{B}_{\tilde{A}}) \leq \alpha \varepsilon(\delta) C^2 + \alpha \|X^0\|, \quad (4.36)$$

в котором через C обозначена величина $C = 2(1 + \|X^0\|)$, а X^0 — нормальное решение системы (4.26).

Так как столбец X^α доставляет минимум функционалу, стоящему в правой части (4.35), то

$$F^\alpha(X^\alpha, \tilde{A}, \tilde{B}_{\tilde{A}}) \leq F^\alpha(X^0, \tilde{A}, \tilde{B}_{\tilde{A}}) = \|\tilde{A}X^0 - \tilde{B}_{\tilde{A}}\|^2 + \alpha \|X^0\|^2. \quad (4.37)$$

*) См. п. 3 § 2 этой главы.

Пользуясь соотношением $AX^0 = B$ и неравенством треугольника, получим $\|\tilde{A}X^0 - \tilde{B}\tilde{\lambda}\| \leq \|\tilde{A}X^0 - AX^0\| + \|B - \tilde{B}\| + \|\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{\lambda}\|$. В правой части последнего неравенства воспользуемся соотношениями (4.28) и (4.29), а также неравенством (4.34), взятым при $X = X^0$. Получим

$$\|\tilde{A}X^0 - \tilde{B}\tilde{\lambda}\| \leq \delta \|X^0\| + \delta + \|\tilde{B} - \tilde{A}X^0\|. \quad (4.38)$$

Еще раз учитывая, что $AX^0 = B$, и снова пользуясь неравенством треугольника и соотношениями (4.28) и (4.29), получим, что

$$\|\tilde{B} - \tilde{A}X^0\| \leq \|\tilde{B} - B\| + \|AX^0 - \tilde{A}X^0\| \leq \delta + \delta \cdot \|X^0\|. \quad (4.39)$$

Из (4.38) и (4.39) следует, что

$$\|\tilde{A}X^0 - \tilde{B}\tilde{\lambda}\| \leq 2\delta (1 + \|X^0\|) = C\delta, \quad (4.40)$$

где $C = 2(1 + \|X^0\|)$.

Для завершения доказательства оценки (4.36) остается подставить (4.40) в (4.37) и воспользоваться неравенством (4.31).

Поскольку из определения функционала F^α сразу вытекает, что $\alpha \cdot \|X^\alpha\|^2 \leq F^\alpha(X^\alpha, \tilde{A}, \tilde{B}\tilde{\lambda})$, то из доказанного нами неравенства (4.36) вытекает также следующее неравенство:

$$\|X^\alpha\| \leq \|X^0\| + \varepsilon_1(\delta), \quad (4.41)$$

в котором $\varepsilon_1(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0 + 0$. Из (4.41) вытекает, что при всех достаточно малых δ множество $\{X^\alpha\}$ точек X^α пространства E^n является ограниченным.

Теперь уже нетрудно доказать теорему от противного. Предположим, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ существует последовательность $\delta_n \rightarrow 0 + 0$ и отвечающая ей последовательность $\{\alpha_n\}$ чисел α_n , удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{\varepsilon(\delta_n)} \delta_n^2 \leq \alpha_n \leq \alpha(\delta_n), \quad (4.31^*)$$

такая, что для всех номеров n

$$\|X^{\alpha_n} - X^0\| \geq \varepsilon_0. \quad (4.42)$$

Так как множество $\{X^\alpha\}$ ограничено, то в силу теоремы Больцано—Вейерштрасса из последовательности $\{X^{\alpha_n}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не менять обозначений, будем считать, что вся последовательность $\{X^{\alpha_n}\}$

сходится к некоторому столбцу $\bar{X}^0 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^0 \\ \cdot \\ \bar{x}_n^0 \end{pmatrix}$, то есть $\|X^{\alpha_n} - \bar{X}^0\| \rightarrow$

$\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Убедимся в том, что

$$\|AX^{\alpha_n} - AX^0\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (4.43)$$

В самом деле, пользуясь неравенством треугольника, оценками (4.28), (4.29), (4.36) и (4.40) и соотношением (4.31*), получим

$$\begin{aligned} \|AX^{\alpha_n} - AX^0\| &\leq \|AX^{\alpha_n} - AX^{\alpha_n}\| + \|\tilde{A}X^{\alpha_n} - \tilde{B}_{\tilde{A}}\| + \|\tilde{B}_{\tilde{A}} - AX^0\| \leq \\ &\leq \delta_n \|X^{\alpha_n}\| + \sqrt{F^{\alpha_n}(X^{\alpha_n}, \tilde{A}, \tilde{B}_{\tilde{A}})} + C\delta_n \leq \delta_n (\|X^{\alpha_n}\| + C) + \\ &\quad + \sqrt{\alpha_n(\delta_n C + \alpha_n \|X^0\|^2)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из неравенства (4.43) вытекает, что $A\bar{X}^0 = AX^0$, т. е. предельный элемент $\bar{X}^0$ является решением системы (4.26), удовлетворяющим в силу соотношения (4.41) неравенству $\|\bar{X}^0\| \leq \|X^0\|$. Так как по определению для нормального решения X^0 справедливо обратное неравенство $\|X^0\| \leq \|\bar{X}^0\|$, то $\|\bar{X}^0\| = \|X^0\|$, т. е. $\bar{X}^0 = X^0$, а это противоречит неравенству (4.42), справедливому для любого номера n .

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ГЛАВА 5

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этой главе исследуются так называемые линейные отображения линейных и евклидовых пространств, т. е. такие отображения, при которых образ суммы элементов равен сумме их образов и образ произведения элемента на число равен произведению этого числа на образ элемента. При этом мы будем рассматривать комплексные линейные и евклидовы пространства. Результаты, относящиеся к вещественным пространствам, будут оговорены специально.

§ 1. Понятие линейного оператора. Основные свойства

1. Определение линейного оператора. Пусть V и W — линейные пространства, размерности которых равны соответственно n и m . Мы будем называть оператором A , действующим из V в W , отображение вида $A: V \rightarrow W$, сопоставляющее каждому элементу x пространства V некоторый элемент y пространства W . При этом будем использовать обозначение $y = A(x)$ или $y = Ax$.

Определение. Оператор A , действующий из V в W , называется линейным, если для любых элементов x_1 и x_2 пространства V и любого комплексного числа λ выполняются соотношения:

1°. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ (свойство аддитивности оператора).

2°. $A(\lambda x) = \lambda Ax$ (свойство однородности оператора).

Замечание 1. Если пространство W представляет собой комплексную плоскость, то линейный оператор A , действующий из V в W , называется линейной формой или линейным функционалом.

Замечание 2. Если пространство W совпадает с пространством V , то линейный оператор, действующий в этом случае из V в V , называют также линейным преобразованием пространства V .

2. Действия над линейными операторами. Пространство линейных операторов. В множестве всех линейных операторов, действующих из V в W , определим операции суммы таких операторов и умножения оператора на скаляр.

Пусть A и B — два линейных оператора, действующих из V в W . Суммой этих операторов назовем линейный оператор $A + B$, определяемый равенством

$$(A + B)x = Ax + Bx. \quad (5.1)$$

Произведением линейного оператора A на скаляр λ назовем линейный оператор λA , определяемый равенством

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax). \quad (5.2)$$

Назовем нулевым оператор, обозначаемый символом O и отображающий все элементы пространства V в нулевой элемент пространства W .

Иными словами, оператор O действует по правилу $Ox = 0$.

Для каждого оператора A определим противоположный оператор $-A$ посредством соотношения

$$-A = (-1)A.$$

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Множество $L(V, W)$ всех линейных операторов, действующих из V в W , с указанными выше операциями суммы и умножения на скаляр и выбранными нулевым оператором и противоположным оператором образует линейное пространство.

3. Свойства множества $L(V, V)$ линейных операторов. Исследуем подробнее линейные операторы, действующие из V в V , т. е. изучим подробнее множество $L(V, V)$.

Назовем тождественным (или единичным) оператором линейный оператор I , действующий по правилу $Ix = x$ (здесь x — любой элемент V).

Введем понятие произведения линейных операторов из множества $L(V, V)$.

Произведением операторов A и B из $L(V, V)$ называется оператор AB , действующий по правилу

$$(AB)x = A(Bx). \quad (5.3)$$

Отметим, что, вообще говоря, $AB \neq BA$.

Справедливы следующие свойства линейных операторов из $L(V, V)$:

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ. \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B. \\ 2^\circ. \quad (A + B)C = AC + BC. \\ 3^\circ. \quad A(B + C) = AB + AC \\ 4^\circ. \quad (AB)C = A(BC). \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

Первое из свойств (5.4) следует из определения произведения линейного оператора на скаляр (см. (5.2)) и определения произведения операторов (см. (5.3)).

Перейдем к обоснованию свойства 2°. Имеем, согласно (5.1), (5.2) и (5.3),

$$\begin{aligned} ((A + B)C)x &= (A + B)(Cx) = A(Cx) + B(Cx) = \\ &= (AC)x + (BC)x = (AC + BC)x. \end{aligned}$$

Сравнивая левую и правую части последних соотношений, мы получаем равенство $(A + B)C = AC + BC$.

Свойство 2° установлено.

Совершенно аналогично доказывается свойство 3°.

Свойство 4° справедливо, поскольку, согласно определению (см. (5.3)), произведение линейных операторов заключается в их последовательном действии, и поэтому линейные операторы $(AB)C$ и $A(BC)$ совпадают и, следовательно, тождественны.

З а м е ч а н и е 1. Свойство 4° позволяет определить произведение AB C любого конечного числа операторов из $L(V, V)$ и, в частности, n -ю степень оператора A с помощью формулы

$$A^n = \underbrace{AA \dots A}_n \text{ множителей}$$

Очевидно, справедливо соотношение $A^{n+m} = A^n A^m$.

Нам понадобится понятие обратного оператора для данного оператора A из $L(V, V)$.

Определение 1. Линейный оператор B из $L(V, V)$ называется обратным для оператора A из $L(V, V)$, если выполняется соотношение $AB = BA = I$.

Обратный оператор для оператора A обычно обозначается символом A^{-1} .

Из определения обратного оператора A^{-1} следует, что для любого $x \in V$ справедливо соотношение $A^{-1}Ax = x$.

Таким образом, если $A^{-1}Ax = 0$, то $x = 0$, т. е. если оператор A имеет обратный, то из условия $Ax = 0$ следует, что $x = 0$.

Мы будем говорить, что линейный оператор A действует взаимно однозначно из V в V , если любым двум различным элементам x_1 и x_2 отвечают различные элементы $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$.

Если оператор A действует взаимно однозначно из V в V , то отображение $A: V \rightarrow V$ представляет собой отображение V на V , т. е. каждый элемент $y \in V$ представляет собой образ некоторого элемента $x \in V$:

$$y = Ax.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно, очевидно, доказать, что n линейно независимых элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ пространства V

отображаются посредством оператора A в n линейно независимых элементов $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$ этого же пространства.

Итак, пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — линейно независимые элементы V . Если линейная комбинация $\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \dots + \alpha_n Ax_n$ представляет собой нулевой элемент пространства V :

$$\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \dots + \alpha_n Ax_n = 0,$$

то из определения линейного оператора (см. п. 1 этого параграфа) следует, что $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = 0$.

Так как оператор A действует из V в V взаимно однозначно, то из последнего соотношения вытекает, что $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. Но элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы. Поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Следовательно, элементы $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$ также линейно независимы.

Отметим следующее у т в е р ж д е н и е.

Для того чтобы линейный оператор A из $L(V, V)$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор действовал взаимно однозначно из V в V .

Убедимся, что сформулированное условие необходимо. Пусть оператор A имеет обратный, но не действует взаимно однозначно из V в V . Это означает, что некоторым различным элементам x_1 и x_2 , $x_2 - x_1 \neq 0$ из V отвечает один и тот же элемент $y = Ax_1 = Ax_2$. Но тогда $A(x_2 - x_1) = 0$, и поскольку A имеет обратный, $x_2 - x_1 = 0$. Но выше было отмечено, что $x_2 - x_1 \neq 0$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия утверждения.

Докажем достаточность этого условия.

Допустим, что оператор A действует взаимно однозначно из V в V . Тогда каждому элементу $y \in V$ отвечает элемент $x \in V$ такой, что $y = Ax$. Поэтому имеется оператор A^{-1} , обладающий тем свойством; что $A^{-1}y = A^{-1}(Ax) = x$. Легко убедиться, что оператор A^{-1} линейный. По определению A^{-1} — обратный оператор для оператора A . Достаточность условия утверждения также доказана.

Введем понятия ядра и образа линейного оператора.

Определение 2. Ядром линейного оператора A называется множество всех тех элементов x пространства V , для которых $Ax = 0$.

Ядро линейного оператора A обозначается символом $\ker A$.

Если $\ker A = 0$, то оператор A действует взаимно однозначно из V в V . Действительно, в этом случае из условия $Ax = 0$ вытекает $x = 0$, а это означает, что различным x_1 и x_2 отвечают различные $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$ (если бы $y_1 = y_2$, то $A(x_2 - x_1) = 0$, т. е. $x_1 = x_2$ и элементы x_1 и x_2 не были бы различны).

Таким образом, согласно доказанному выше утверждению условие $\ker A = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор A имел обратный.

Определение 3. *Образом линейного оператора A называется множество всех элементов y пространства V , представимых в виде $y = Ax$. Образ линейного оператора A обозначается символом $\text{im } A^*$.*

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что если $\ker A = 0$, то $\text{im } A = V$, и наоборот. Поэтому наряду с отмеченным выше условием $\ker A = 0$ условие $\text{im } A = V$ также является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор A имел обратный.

З а м е ч а н и е 3. Очевидно, ядро $\ker A$ и образ $\text{im } A$ — линейные подпространства пространства V . Поэтому можно рассматривать размерности $\dim(\ker A)$ и $\dim(\text{im } A)$ этих подпространств.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть размерность $\dim V$ пространства V равна n , и пусть A — линейный оператор из $L(V, V)$. Тогда*

$$\dim(\text{im } A) + \dim(\ker A) = n.$$

Доказательство. Так как $\ker A$ представляет собой подпространство V , то можно указать такое подпространство V_1 пространства V , что V будет представлять собой прямую сумму V_1 и $\ker A$ (**). Согласно теореме 2.10 $\dim V_1 + \dim(\ker A) = n$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $\dim V_1 = \dim(\text{im } A)$.

Пусть $\dim V_1 = p$, $\dim(\text{im } A) = q$ и $y_1, y_2, \dots, y_q$ — базис в $\text{im } A$. Так как линейный оператор A действует взаимно однозначно из V_1 в $\text{im } A$ ***), то каждому элементу y из $\text{im } A$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in V_1$ такой, что $Ax = y$. Поэтому в V_1 определены элементы $x_1, x_2, \dots, x_q$ такие, что $Ax_k = y_k$, $k = 1, 2, \dots, q$. Элементы $x_1, x_2, \dots, x_q$ линейно независимы, ибо если $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_q x_q = 0$, то $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_q x_q) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_q y_q = 0$,

*) Символ im следует отличать от символа Im , используемого для обозначения мнимой части комплексного числа.

**) Чтобы убедиться в этом, выберем в V такой базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, что первые p векторов $e_1, e_2, \dots, e_p$ образуют базис в $\ker A$, тогда линейная оболочка векторов $e_{p+1}, \dots, e_n$ представляет собой V_1 (см. подробнее главу 4).

***) По аналогии с линейными операторами, действующими взаимно однозначно из V в V , можно ввести понятие линейного оператора A , действующего взаимно однозначно из линейного пространства V в линейное пространство W . Эти операторы характеризуются тем, что различным элементам x_1 и x_2 пространства V отвечают различные элементы $y_1 = Ax_1$ и $y_2 = Ax_2$ пространства W . Таким свойством обладает рассматриваемый оператор A , действующий из пространства V_1 в пространство $\text{im } A$.

Действительно, если $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_1$, $x_2 - x_1 \neq 0$, то $x_2 - x_1 \in V_1$, и поэтому $Ax_2 \neq Ax_1$ ($Ax_1 \in \text{im } A$, $Ax_2 \in \text{im } A$), ибо если бы $Ax_2 = Ax_1$, то $A(x_2 - x_1) = 0$, т. е. $x_2 - x_1 \in \ker A$, что противоречило бы принадлежности $x_2 - x_1 \in V_1$ и условию $x_2 - x_1 \neq 0$ (V_1 и $\ker A$ составляют прямую сумму и поэтому имеют общим лишь нулевой элемент).

а так как элементы $y_1, y_2, \dots, y_q$ линейно независимы, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$, т. е. и $x_1, x_2, \dots, x_q$ линейно независимы. Таким образом, в V_1 имеется q линейно независимых элементов. Следовательно, $p \geq q$ (напомним, что $p = \dim V_1$).

Предположим, что $p > q$. Добавим к линейно независимым элементам $x_1, x_2, \dots, x_q$ элементы $x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_p$ так, что $x_1, x_2, \dots, x_p$ образуют базис в V_1 . Так как $p > q$ и $q = \dim (\operatorname{im} A)$, то элементы $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_p$, принадлежащие $\operatorname{im} A$, линейно зависимы, и поэтому существуют не все равные нулю числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ такие, что $\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \dots + \lambda_p Ax_p = 0$. Отсюда следует, что $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) = 0$. Так как A действует из V_1 в $\operatorname{im} A$ взаимно однозначно, то из последнего равенства получаем $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0$.

Но $x_1, x_2, \dots, x_p$ — базис в V_1 . Поэтому $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. Выше указывалось, что не все $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ равны нулю. Следовательно, предположение $p > q$ ведет к противоречию. Таким образом, $p = q$. Теорема доказана.

Имеет место также следующая теорема, в определенном отношении обратная теореме 5.1.

Теорема 5.2. Пусть V_1 и V_2 — два таких подпространства n -мерного пространства V , что $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$. Тогда существует такой линейный оператор A из $L(V, V)$, что $V_1 = \operatorname{im} A$ и $V_2 = \ker A$.

Доказательство. Пусть $\dim V_1 = p$, $\dim V_2 = q$. Выберем в пространстве V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ так, чтобы элементы $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ принадлежали V_2 . Далее в пространстве V_1 выберем некоторый базис $g_1, g_2, \dots, g_p$.

Определим теперь значения линейного оператора A на базисных векторах $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V следующим образом:

$$Ae_1 = g_1, Ae_2 = g_2, \dots, Ae_p = g_p,$$

$$Ae_{p+1} = 0, Ae_{p+2} = 0, \dots, Ae_n = 0.$$

Далее, если $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_p e_p + x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_n e_n$, то $Ax = x_1 g_1 + x_2 g_2 + \dots + x_p g_p$. Очевидно, оператор A линейный и обладает требуемыми свойствами. Теорема доказана.

Введем понятие ранга линейного оператора A .

Назовем рангом линейного оператора A число, обозначаемое символом $\operatorname{rang} A$ и равное $\operatorname{rang} A = \dim (\operatorname{im} A)$.

Отметим следующее очевидное следствие из теоремы 5.1 и из замечания 2 этого пункта.

Следствие из теоремы 5.1. Для того чтобы оператор A из $L(V, V)$ имел обратный A^{-1} , необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rang} A = \dim V = n$.

Пусть A и B — линейные операторы из $L(V, V)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\text{rang } AB \leq \text{rang } A, \quad \text{rang } AB \leq \text{rang } B.$$

Доказательство. Докажем сначала первое из отмеченных соотношений. Очевидно, $\text{im } AB \subseteq \text{im } A^*$). Поэтому $\dim(\text{im } AB) \leq \dim(\text{im } A)$, т. е. $\text{rang } AB \leq \text{rang } A$.

Для доказательства второго соотношения воспользуемся следующим очевидным включением **): $\ker B \subseteq \ker AB$.

Из этого включения следует, что $\dim(\ker B) \leq \dim(\ker AB)$. Из последнего неравенства в свою очередь следует неравенство $\dim V - \dim(\ker AB) \leq \dim V - \dim(\ker B)$, а из него, согласно теореме 5.1, получаем $\dim(\text{im } AB) \leq \dim(\text{im } B)$, т. е. $\text{rang } AB \leq \text{rang } B$. Теорема доказана.

Докажем еще одну теорему о рангах линейных операторов.

Теорема 5.4. *Пусть A и B — линейные операторы из $L(V, V)$ и n — размерность V . Тогда $\text{rang } AB \geq \text{rang } A + \text{rang } B - n$.*

Доказательство. Согласно теореме 5.1

$$\dim(\text{im } AB) + \dim(\ker AB) = n. \quad (5.5)$$

Так как $\text{rang } AB = \dim(\text{im } AB)$, то из (5.5) получаем

$$\text{rang } AB = n - \dim(\ker AB). \quad (5.6)$$

Поскольку, согласно теореме 5.1,

$$\dim(\ker A) + \dim(\ker B) = 2n - (\text{rang } A + \text{rang } B), \quad (5.7)$$

то для доказательства теоремы достаточно установить неравенство

$$\dim(\ker AB) \leq \dim(\ker A) + \dim(\ker B). \quad (5.8)$$

Действительно, из этого неравенства и из соотношения (5.6) следует неравенство

$$\text{rang } AB \geq n - (\dim(\ker A) + \dim(\ker B)),$$

из которого, согласно (5.7), сразу же вытекает справедливость утверждения теоремы.

Итак, перейдем к обоснованию неравенства (5.8).

*) Символ $\subseteq$ здесь и в дальнейшем обозначает включение, т. е. запись $A \subseteq B$ обозначает, что A является подмножеством B .

**) Так как AB и BA различные, вообще говоря, операторы, то включение $\text{im } AB \subseteq \text{im } B$ может не иметь места, и поэтому для доказательства второго соотношения $\text{rang } AB \leq \text{rang } B$ требуются специальные рассуждения.

Пусть

$$\dim(\ker B) = q. \quad (5.9)$$

Согласно теореме 5.3 $\dim(\ker AB) \geq q$. Поэтому справедливо соотношение

$$\dim(\ker AB) = p + q, \quad \text{где } p \geq 0. \quad (5.10)$$

Так как $\ker B \subseteq \ker AB$, то в подпространстве $\ker AB$ можно выбрать базис $x_1, x_2, \dots, x_{p+q}$ так, что элементы $x_{p+1}, \dots, x_{p+q}$ образуют базис в $\ker B$. При таком выборе $x_1, x_2, \dots, x_{p+q}$ элементы $Bx_1, Bx_2, \dots, Bx_p$ линейно независимы (если линейная комбинация $\sum_{k=1}^p \lambda_k Bx_k = 0$, то $B\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k\right) = 0$, т. е. $\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k \in \ker B$, а это может быть, в силу выбора $x_1, x_2, \dots, x_p$, лишь при $\lambda_k = 0, k = 1, 2, \dots, p$). Поэтому элементы $Bx_1, Bx_2, \dots, Bx_p$ принадлежат $\ker A$, т. е. $p \leq \dim(\ker A)$. Из этого неравенства и соотношений (5.9) и (5.10) вытекает требуемое неравенство (5.8). Теорема доказана.

Следствие из теорем 5.3 и 5.4. Если $\text{rang } A = n$ (n — размерность V), то $\text{rang } AB = \text{rang } BA = \text{rang } B$

Указанное следствие вытекает из неравенств

$$\text{rang } AB \leq \text{rang } B \quad (\text{теорема 5.3}),$$

$$\text{rang } AB \geq \text{rang } B \quad (\text{теорема 5.4 при } \text{rang } A = n).$$

Из этих неравенств получим, что $\text{rang } AB = \text{rang } B$.

Аналогично доказывается соотношение $\text{rang } BA = \text{rang } B$.

§ 2. Матричная запись линейных операторов

1. Матрицы линейных операторов в заданном базисе линейного пространства V . Фиксируем в линейном пространстве V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Пусть x — произвольный элемент V и

$$x = \sum_{k=1}^n x^k e_k \quad (5.11)$$

разложение x по данному базису.

Пусть A — линейный оператор из $L(V, V)$. Тогда из (5.11) получаем

$$Ax = \sum_{k=1}^n x^k Ae_k. \quad (5.12)$$

Полагая

$$Ae_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} e_j, \quad (5.13)$$

перепишем (5.12) в следующей форме:

$$Ax = \sum_{k=1}^n x^k \sum_{j=1}^n a'_{kj} e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a'_{kj} x^k \right) e_j.$$

Таким образом, если $y = Ax$ и элемент y имеет координаты $y^1, y^2, \dots, y^n$, то

$$y^j = \sum_{k=1}^n a'_{kj} x^k, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.14)$$

Рассмотрим квадратную матрицу A с элементами a'_{kj} :

$$A = (a'_{kj}).$$

Эта матрица называется *матрицей линейного оператора в заданном базисе* $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Наряду с ранее указанным способом записи линейного оператора используется при заданном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ матричная форма записи: $y = Ax$, причем, если $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, то $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, где $y^j, j = 1, 2, \dots, n$, определяются с помощью соотношений (5.14), а элементы a'_{kj} матрицы A вычисляются по формулам (5.13).

З а м е ч а н и е 1. Если оператор A нулевой, то все элементы матрицы A этого оператора равны нулю в любом базисе, т. е. A — нулевая матрица.

З а м е ч а н и е 2. Если оператор A единичный, т. е. $A = I$, то матрица этого оператора будет единичной в любом базисе. Иными словами в этом случае $A = E$, где E — единичная матрица. В дальнейшем единичную матрицу мы будем обозначать также символом I .

Мы выяснили, что каждому линейному оператору A из $L(V, V)$ при заданном базисе линейного пространства V отвечает матрица A этого оператора. Естественно возникает обратный вопрос — каждой ли данной матрице A при заданном базисе в V можно поставить в соответствие линейный оператор A , матрицей которого будет данная матрица. Важно также выяснить вопрос о единственности матрицы линейного оператора в заданном базисе.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.5. Пусть в линейном пространстве V задан базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, и пусть $A = (a'_{kj})$ — квадратная матрица, содержащая n строк и n столбцов. Существует единственный линейный оператор A , матрицей которого в заданном базисе является матрица A .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала существование оператора A . Для этой цели определим значения Ae_k этого опера-

тора на базисных векторах e_k с помощью соотношения (5.13), полагая в этом соотношении a_k^i равными соответствующим элементам заданной матрицы A . Значение оператора A на произвольном векторе $x \in V$, разложение которого по базисным векторам $e_1, e_2, \dots, e_n$ дается формулой (5.11), определим по формуле (5.12).

Очевидно, построенный оператор линейный и матрицей этого оператора является матрица A .

Единственность оператора A , матрицей которого в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ является матрица A , следует из соотношений (5.13): с помощью этих соотношений единственным образом определяются значения оператора на базисных векторах.

З а м е ч а н и е 3. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n , A и B — отвечающие им линейные операторы в заданном базисе $\{e_k\}$ пространства V . Из доказательства теоремы 5.5 следует, что матрице $A + \lambda B$, где λ — некоторое число, отвечает линейный оператор $A + \lambda B$ (напомним, что A, B и $A + \lambda B$ принадлежат $L(V, V)$).

Докажем следующую теорему.

Теорема 5.6. Ранг линейного оператора A равен рангу матрицы A этого оператора: $\text{rang } A = \text{rang } A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению $\text{rang } A = \dim(\text{im } A)$, а $\text{im } A$ — линейная оболочка векторов g_k :

$$g_k = \sum_{i=1}^n a_k^i e_i \quad (5.15)$$

(см. матричную форму записи оператора и определение $\text{im } A$).

Поэтому $\text{rang } A$ равен максимальному числу линейно независимых векторов g_k . Так как векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы, то, согласно (5.15), максимальное число линейно независимых векторов g_k совпадает с максимальным числом линейно независимых строк $(a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^n)$ матрицы A , т. е. с рангом A . Теорема доказана.

Пусть A и B — произвольные квадратные матрицы, содержащие n строк и n столбцов. Из теорем 5.3, 5.4, 5.5 и 5.6 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Ранг $\text{rang } AB$ произведения A и B удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \text{rang } AB &\leq \text{rang } A, \quad \text{rang } AB \leq \text{rang } B, \\ \text{rang } AB &\geq \text{rang } A + \text{rang } B - n. \end{aligned}$$

Следствие 2. Обратный оператор A^{-1} для оператора A существует только тогда, когда ранг матрицы A оператора A равен n ($n = \dim V$). Отметим, что в этом случае существует также и обратная матрица A^{-1} для матрицы A .

2. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Пусть V — линейное пространство, A — линейный оператор из $L(V, V)$, $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n$ — два базиса в V и

$$e_k = \sum_{i=1}^n u_k^i e_i, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.16)$$

— формулы перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{\tilde{e}_k\}$. Обозначим через U матрицу (u_k^i) :

$$U = (u_k^i). \quad (5.17)$$

Отметим, что $\text{rang } U = n$. Пусть

$$A = (a_k^i) \text{ и } \tilde{A} = (\tilde{a}_k^i) \quad (5.18)$$

— матрицы оператора A в указанных базисах. Найдем связь между этими матрицами.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.7. Матрицы A и $\tilde{A}$ оператора A в базисах $\{e_k\}$ и $\{\tilde{e}_k\}$ соответственно связаны соотношением

$$A = U^{-1} \tilde{A} U,$$

где U^{-1} обратная матрица *) для матрицы U , определенной равенством (5.17).

Доказательство. Обращаясь к понятию матрицы линейного оператора, получим, согласно (5.18),

$$Ae_k = \sum_{i=1}^n a_k^i e_i, \quad A\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_k^i \tilde{e}_i. \quad (5.19)$$

Из определения линейного оператора, из формул (5.16) и из второй из формул (5.19) следуют соотношения

$$A\tilde{e}_k = A \left(\sum_{i=1}^n u_k^i e_i \right), \quad A\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_k^i \sum_{j=1}^n u_j^i e_j.$$

Поэтому справедливо равенство $\sum_{i=1}^n u_k^i Ae_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \tilde{a}_k^i u_j^i \right) e_j$.

Подставляя в левую часть этого равенства выражение Ae_i по первой из формул (5.19), найдем

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_k^i a_i^j \right) e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \tilde{a}_k^i u_j^i \right) e_j.$$

*) Так как $\text{rang } U = n$, то обратная матрица U^{-1} для матрицы U существует.

Так как $\{e_j\}$ — базис, то из последнего соотношения вытекают равенства

$$\sum_{i=1}^n u_k^i a_i^j = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_k^i u_i^j, \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.20)$$

Если обратиться к матрицам A , $\tilde{A}$ и U (см. (5.17) и (5.18)), то соотношения (5.20) эквивалентны следующему матричному равенству: $UA = \tilde{A}U$.

Умножая обе части этого равенства слева на матрицу U^{-1} , получим требуемое соотношение $A = U^{-1}\tilde{A}U$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Обратимся к формуле $A = U^{-1}\tilde{A}U$. Умножая обе части этого матричного равенства слева на матрицу U и справа на U^{-1} , получим соотношение

$$\tilde{A} = UAU^{-1}, \quad (5.21)$$

представляющее собой другую форму связи между матрицами A и $\tilde{A}$ линейного оператора A в разных базисах.

З а м е ч а н и е 2 Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n , A и B — отвечающие им линейные операторы в заданном базисе $\{e_k\}$. Как уже отмечалось (см. замечание 3 предыдущего пункта) матрице $A + \lambda B$ отвечает линейный оператор $A + \lambda B$. Выясним вид матрицы этого оператора в базисе $\{\tilde{e}_k\}$. Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — матрицы операторов A и B в базисе $\{\tilde{e}_k\}$. Тогда, согласно (5.21), имеем

$$\tilde{A} = UAU^{-1}, \quad \tilde{B} = UBU^{-1}. \quad (5.22)$$

Матрица линейного оператора $A + \lambda B$ в базисе $\{\tilde{e}_k\}$ имеет, согласно (5.21), следующий вид: $U(A + \lambda B)U^{-1}$. Используя распределительное свойство умножения матриц, перепишем последнюю формулу следующим образом (напомним, что эта формула представляет собой матрицу линейного оператора $A + \lambda B$ в базисе $\{e_k\}$):

$$UAU^{-1} + \lambda(UBU^{-1}).$$

Обращаясь к соотношениям (5.22), видим, что матрица оператора $A + \lambda B$ в базисе $\{\tilde{e}_k\}$ записывается следующим образом:

$$\tilde{A} + \lambda\tilde{B}.$$

В частности, если B — единичная матрица, $B = I$, то $\tilde{B} = I$ (см. замечание 2 предыдущего пункта и теорему 5.5), и поэтому

матрица линейного оператора $A + \lambda I$ в базисе $\{e_k\}$ имеет вид $\tilde{A} + \lambda I$.

Следствие из теоремы 5.7. $\det A = \det \tilde{A}$.

В самом деле, так как определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц, то из равенства $A = U^{-1}AU$ следует, что

$$\det A = \det U^{-1} \det \tilde{A} \det U. \quad (5.23)$$

Поскольку $\det U^{-1} \det U = 1$, то из соотношения (5.23) получаем равенство $\det A = \det \tilde{A}$. Таким образом, определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса. Поэтому можно ввести понятие определителя $\det A$ линейного оператора A , полагая

$$\det A = \det \tilde{A}, \quad (5.24)$$

где $\tilde{A}$ — матрица линейного оператора A в любом базисе.

3. **Характеристический многочлен линейного оператора.** Пусть A — линейный оператор, а I — тождественный оператор из $L(V, V)$.

Определение. Многочлен относительно λ

$$\det(A - \lambda I) \quad (5.25)$$

называется **характеристическим многочленом оператора A** .

Пусть в пространстве V задан базис $\{e_k\}$ и $A = (a_{ij}^A)$ — матрица оператора A в этом базисе. Тогда, согласно (5.24), характеристический многочлен (5.25) оператора A запишется следующим образом:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}^A - \lambda & a_{12}^A & \dots & a_{1n}^A \\ a_{21}^A & a_{22}^A - \lambda & \dots & a_{2n}^A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^A & a_{n2}^A & \dots & a_{nn}^A - \lambda \end{vmatrix}. \quad (5.26)$$

Запишем характеристический многочлен (5.25), обозначая через d_k коэффициент при λ^k :

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{k=0}^n d_k \lambda^k. \quad (5.27)$$

З а м е ч а н и е 1. Так как значение определителя $\det(A - \lambda I)$ не зависит от выбора базиса, то коэффициенты d_k характеристического многочлена в правой части (5.27) также не зависят от выбора базиса. Таким образом, коэффициенты d_k характеристического многочлена оператора A представляют собой инварианты — величины, значения которых не зависят от выбора базиса.

В частности, коэффициент d_{n-1} , равный, очевидно, $a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n$, является инвариантом. Этот инвариант называется следом оператора A и обозначается символом $\text{tr } A$ (от английского слова trace — след):

$$\text{tr } A = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n. \quad (5.28)$$

З а м е ч а н и е 2. Уравнение

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (5.29)$$

называется характеристическим уравнением оператора A .

§ 3. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов

Пусть V_1 — подпространство n -мерного линейного пространства V и A — линейный оператор из $L(V, V)$.

Определение 1. Подпространство V_1 называется инвариантным подпространством оператора A , если для каждого x , принадлежащего V_1 , элемент Ax также принадлежит V_1 .

Примерами инвариантных подпространств оператора A могут служить $\ker A$ и $\text{im } A$.

Определение 2. Число λ называется собственным значением оператора A , если существует ненулевой вектор x такой, что

$$Ax = \lambda x. \quad (5.30)$$

При этом вектор x называется собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению λ .

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.8. Для того чтобы число λ было собственным значением оператора A , необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем характеристического уравнения (5.29) оператора A .

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора A и x — собственный вектор, отвечающий этому λ ($x \neq 0$). Перепишем соотношение (5.30) в следующей форме:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Так как x — ненулевой вектор, то из последнего равенства следует, что $\ker(A - \lambda I) \neq 0$, т. е.

$$\dim(\ker(A - \lambda I)) \geq 1. \quad (5.31)$$

Поскольку, согласно теореме 5.1,

$$\dim(\text{im}(A - \lambda I)) + \dim(\ker(A - \lambda I)) = n,$$

то из этого равенства и неравенства (5.31) получаем

$$\dim (\operatorname{im} (A - \lambda I)) \leq n - 1. \quad (5.32)$$

По определению $\dim (\operatorname{im} (A - \lambda I))$ равняется рангу оператора $A - \lambda I$. Поэтому из неравенства (5.32) следует

$$\operatorname{rang} (A - \lambda I) < n. \quad (5.33)$$

Таким образом, если λ — собственное значение, то ранг матрицы $A - \lambda I$ оператора $A - \lambda I$ меньше n , т. е. $\det (A - \lambda I) = 0$ и, следовательно, λ — корень характеристического уравнения.

Пусть теперь λ — корень характеристического уравнения (5.29). Тогда справедливо неравенство (5.32), а следовательно, и неравенство (5.31), из которого вытекает существование для числа λ такого ненулевого вектора x , что $(A - \lambda I)x = 0$. Последнее соотношение эквивалентно соотношению (5.30). Поэтому λ — собственное значение. Теорема доказана.

Следствие. Каждый линейный оператор имеет собственное значение.

Действительно, характеристическое уравнение всегда имеет корень (в силу основной теоремы алгебры).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5.9. Для того чтобы матрица A линейного оператора A в данном базисе $\{e_k\}$ была диагональной*), необходимо и достаточно, чтобы базисные векторы e_k были собственными векторами этого оператора.

Доказательство. Пусть базисные векторы e_k являются собственными векторами оператора A . Тогда

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad (5.34)$$

и поэтому матрица A оператора A имеет вид (см. соотношения (5.13) и понятие матрицы линейного оператора)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

т. е. является диагональной.

Пусть матрица A линейного оператора A в данном базисе $\{e_k\}$ диагональна, т. е. имеет вид (5.35). Тогда соотношения (5.13) примут вид (5.34), а это означает, что e_k — собственные векторы оператора A . Теорема доказана.

Докажем еще одно свойство собственных векторов.

*) Напомним, что матрица называется диагональной, если все ее элементы, расположенные не на главной диагонали, равны нулю.

Теорема 5.10. Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ оператора A различны. Тогда отвечающие им собственные векторы $e_1, e_2, \dots, e_p$ линейно независимы.

Доказательство. Применим индукцию. Так как e_1 — ненулевой вектор, то для одного вектора ($p = 1$) утверждение справедливо (один ненулевой вектор является линейно независимым). Пусть утверждение теоремы доказано для m векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$. Присоединим к этим векторам вектор e_{m+1} и допустим, что имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k e_k = 0. \quad (5.36)$$

Тогда, используя свойства линейного оператора, получим

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k A e_k = 0. \quad (5.37)$$

Так как e_k — собственные векторы, то $A e_k = \lambda_k e_k$, и поэтому равенство (5.37) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k e_k = 0. \quad (5.38)$$

Согласно (5.36) $\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{m+1} \alpha_k e_k = 0$. Вычитая это равенство из равенства (5.38), найдем

$$\sum_{k=1}^m (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k e_k = 0. \quad (5.39)$$

По условию все λ_k различны, т. е. $\lambda_k - \lambda_{m+1} \neq 0$. Поэтому из (5.39) и предположения о линейной независимости векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. Отсюда и из (5.36), а также из условия, что e_{m+1} — собственный вектор ($e_{m+1} \neq 0$), вытекает, что $\alpha_{m+1} = 0$. Таким образом, из равенства (5.36) мы получаем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m+1} = 0$. Это означает, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}$ линейно независимы. Индукция проведена, и доказательство теоремы завершено.

Следствие. Если характеристический многочлен оператора A имеет n различных корней, то в некотором базисе матрица оператора A имеет диагональный вид.

Действительно, в рассматриваемом случае, согласно только что доказанной теореме собственные векторы линейно независимы и поэтому могут быть выбраны в качестве базисных. Но тогда по теореме 5.9 в этом базисе матрица оператора A будет диагональной.

§ 4. Линейные и полуторалинейные формы в евклидовом пространстве

1. Специальное представление линейной формы в евклидовом пространстве. Пусть V — евклидово пространство, а C — комплексная плоскость (одномерное комплексное линейное пространство).

В п. 1 § 1 этой главы мы ввели понятие линейной формы — линейного оператора, действующего из V в C . В этом пункте мы получим специальное представление произвольной линейной формы f из $L(V, C)$.

Лемма. Пусть f — линейная форма из $L(V, C)$. Тогда существует единственный элемент h из V такой, что

$$f(x) = (x, h). \quad (5.40)$$

Доказательство. Для доказательства существования элемента h выберем в V ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Рассмотрим элемент h , координаты h^k которого в выбранном базисе определяются соотношениями *)

$$h^k = \overline{f(e_k)}. \quad (5.41)$$

Таким образом, $h = \sum_{k=1}^n h^k e_k$.

Пусть $x = \sum_{k=1}^n x^k e_k$ — произвольный элемент пространства V . Используя свойства линейной формы f и равенство (5.41), получим

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x^k f(e_k) = \sum_{k=1}^n x^k \overline{h^k}. \quad (5.42)$$

Так как в ортонормированном базисе $\{e_k\}$ скалярное произведение (x, h) векторов $x = \sum_{k=1}^n x^k e_k$ и $h = \sum_{k=1}^n h^k e_k$ равно $\sum_{k=1}^n x^k \overline{h^k}$, то из (5.42) получаем $f(x) = (x, h)$.

Существование вектора h доказано.

Докажем единственность этого вектора. Пусть h_1 и h_2 — два вектора таких, что с помощью этих векторов форма $f(x)$ может быть представлена в виде (5.40). Очевидно, для любого x справедливо соотношение $(x, h_1) = (x, h_2)$, из которого следует равенство

*) Черта над $f(e_k)$ означает, что берется комплексно сопряженное значение этого выражения.

$(x, h_2 - h_1) = 0$. Полагая в этом равенстве $x = h_2 - h_1$ и используя определение нормы элемента в евклидовом пространстве, найдем $\|h_2 - h_1\| = 0$. Итак, $h_2 = h_1$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Очевидно, лемма справедлива и в случае, если V — вещественное евклидово пространство, а $f \in L(V, R)$, где R — вещественная прямая.

2. Полуторалинейные формы в евклидовом пространстве. Специальное представление таких форм. Введем понятие полуторалинейной формы в линейном пространстве

Определение. Числовая функция $B(x, y)$, аргументами которой являются всевозможные векторы x и y линейного пространства L , называется полуторалинейной формой, если для любых векторов x, y и z из L и любого комплексного числа λ выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} B(x + y, z) &= B(x, z) + B(y, z), \\ B(x, y + z) &= B(x, y) + B(x, z), \\ B(\lambda x, y) &= \lambda B(x, y), \\ B(x, \lambda y) &= \bar{\lambda} B(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Иными словами, полуторалинейная форма $B(x, y)$ представляет собой числовую функцию двух векторных аргументов x, y , определенную на всевозможных векторах x и y линейного пространства L , линейную по первому аргументу x и антилинейную по второму аргументу y .

З а м е ч а н и е 1. Если линейное пространство L является вещественным, то полуторалинейные формы переходят в так называемые билинейные формы, т. е. формы, линейные по каждому из аргументов (четвертое из соотношений (5.43) в силу вещественности λ будет характеризовать линейность и по второму аргументу). Билинейные формы изучаются в главе 7.

Обратимся к полуторалинейной форме, заданной в евклидовом пространстве V . Справедлива следующая теорема о специальном представлении такой формы.

Теорема 5.11. Пусть $B(x, y)$ — полуторалинейная форма в евклидовом пространстве V . Тогда существует единственный линейный оператор A из $L(V, V)$ такой, что

$$B(x, y) = (x, Ay). \quad (5.44)$$

Доказательство. Пусть y — любой фиксированный элемент пространства V . Тогда $B(x, y)$ представляет собой линейную форму аргумента x . Поэтому по лемме предыдущего пункта можно указать такой однозначно определенный элемент h пространства V , что

$$B(x, y) = (x, h). \quad (5.45)$$

Итак, каждому y из V по правилу (5.45) ставится в соответствие единственный элемент h из V . Таким образом, определен оператор A такой, что $h = Ay$. Линейность этого оператора элементарно следует из свойств (5.43) полуторалинейной формы и из свойств скалярного произведения.

Докажем единственность оператора A .

Пусть A_1 и A_2 — два оператора таких, что с помощью этих операторов форма $B(x, y)$ может быть представлена в виде (5.44). Очевидно, для любых x и y справедливо соотношение $(x, A_1 y) = (x, A_2 y)$, из которого следует равенство $(x, A_2 y - A_1 y) = 0$. Полагая в этом равенстве $x = A_2 y - A_1 y$ и используя определение нормы элемента, найдем $\|A_2 y - A_1 y\| = 0$.

Таким образом, для любого y из V имеет место равенство $A_2 y = A_1 y$, т. е. $A_2 = A_1$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $B(x, y)$ — полуторалинейная форма в евклидовом пространстве V . Тогда существует единственный линейный оператор A из $L(V, V)$ такой, что

$$B(x, y) = (Ax, y). \quad (5.46)$$

Справедливость следствия вытекает из следующих рассуждений. Во-первых, форма $B_1(y, x) = \overline{B(x, y)}$ является полуторалинейной (это следует из того, что $B(x, y)$ — полуторалинейная форма и из определения такой формы). Далее, по теореме 5.11 получаем для $B_1(y, x)$ представление в виде

$$B_1(y, x) = (y, Ax). \quad (5.47)$$

Так как сопряженное значение от $\overline{B_1(x, y)}$ равно $B_1(x, y)$, то, беря сопряженное значение левой и правой частей (5.47) и учитывая равенство $B_1(y, x) = \overline{B(x, y)}$, получим

$$B(x, y) = \overline{(y, Ax)}. \quad (5.48)$$

Но $\overline{(y, Ax)} = (Ax, y)$ (см. гл. 4, § 3, п. 1). Поэтому из (5.48) получаем равенство (5.46). Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 5.11 и следствие из этой теоремы справедливы и для случая вещественного евклидова пространства. В этом случае в формулировке теоремы и следствия термин «полуторалинейная форма» надо заменить термином «билинейная форма». См. также замечание 1.

Введем понятие матрицы полуторалинейной формы в данном базисе $\{e_k\}$.

Пусть x, y принадлежат V и $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$, $y = \sum_{k=1}^n y^k e_k$ — разложения x и y по базису $\{e_k\}$. Из определения полуторалинейной

формы следуют соотношения

$$B(x, y) = B\left(\sum_{j=1}^n x^j e_j, \sum_{k=1}^n y^k e_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x^j y^k B(e_j, e_k). \quad (5.49)$$

Полагая

$$b_{jk} = B(e_j, e_k), \quad (5.50)$$

запишем выражение (5.49) для $B(x, y)$ в следующей форме:

$$B(x, y) = \sum_{j,k=1}^n b_{jk} x^j y^k.$$

Матрица $B = (b_{jk})$ называется *матрицей полуторалинейной формы* $B(x, y)$ в базисе $\{e_k\}$.

Справедливо следующее утверждение:

Пусть полуторалинейная форма $B(x, y)$ представлена в виде (5.46)

$$B(x, y) = (Ax, y). \quad (5.46)$$

Пусть далее элементы матрицы A оператора A в данном ортонормированном базисе равны a_j^k . Тогда в этом базисе $b_{jk} = a_j^k$.

Для доказательства обратимся к выражению (5.50) для коэффициентов b_{jk} полуторалинейной формы. Преобразуем правую часть (5.50) с помощью (5.46). Получим, согласно (5.13),

$$b_{jk} = B(e_j, e_k) = (Ae_j, e_k) = \left(\sum_{q=1}^n a_j^q e_q, e_k\right) = \sum_{q=1}^n a_j^q (e_q, e_k).$$

Так как базис $\{e_k\}$ ортонормированный, то $(e_q, e_k) = 0$, если $q \neq k$ и $(e_k, e_k) = 1$. Поэтому из всех слагаемых последней суммы отличным от нуля будет лишь то, которое получается при $q = k$. Таким образом, $b_{jk} = a_j^k$. Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е 3. Если полуторалинейная форма представлена в виде $B(x, y) = (x, Ay)$ и элементы матрицы A оператора A в данном ортонормированном базисе равны a_j^k , то в этом базисе $b_{jk} = \bar{a}_j^k$.

§ 5. Линейные самосопряженные операторы в евклидовом пространстве

1. Понятие сопряженного оператора. Мы будем рассматривать линейные операторы в конечномерном евклидовом пространстве V .

Определение 1. Оператор A^* из $L(V, V)$ называется *сопряженным к линейному оператору A* , если для любых x и y из V выполняется соотношение

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \quad (5.51)$$

Легко убедиться в том, что оператор A^* , сопряженный к линейному оператору A , сам является линейным оператором. Это вытекает из очевидного соотношения

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \bar{\alpha}(Ax, y_1) + \bar{\beta}(Ax, y_2) = \\ &= \bar{\alpha}(x, A^*y_1) + \bar{\beta}(x, A^*y_2) = (x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)),\end{aligned}$$

справедливого для любых элементов x, y_1, y_2 и любых комплексных чисел α и β .

Докажем следующую теорему.

Теорема 5.12. *Каждый линейный оператор A имеет единственный сопряженный.*

Доказательство. Очевидно, скалярное произведение (Ax, y) представляет собой полуторалинейную форму (см. гл. 4, § 3, п. 1 и определение полуторалинейной формы).

По теореме 5.11 существует единственный линейный оператор A^* такой, что эта форма может быть представлена в виде (x, A^*y) . Таким образом, $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Следовательно, оператор A^* — сопряженный к оператору A . Единственность оператора A^* следует из единственности представления полуторалинейного оператора в виде (5.44). Теорема доказана.

В дальнейшем символ A^* будет обозначать оператор, сопряженный оператору A .

Отметим следующие свойства сопряженных операторов:

- 1°. $I^* = I$.
- 2°. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- 3°. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.
- 4°. $(A^*)^* = A$.
- 5°. $(AB)^* = B^* A^*$.

Доказательства свойств 1°—4° элементарны, и мы предоставляем их читателю. Приведем доказательство свойства 5°.

Согласно определению произведения операторов справедливо соотношение $(AB)x = A(Bx)$. С помощью этого равенства и определения сопряженного оператора получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}((AB)x, y) &= (A(Bx), y) = (Bx, A^*y) = \\ &= (x, B^*(A^*y)) = (x, (B^*A^*)y).\end{aligned}$$

Таким образом, $((AB)x, y) = (x, (B^*A^*)y)$. Иными словами, оператор B^*A^* является сопряженным к оператору AB . Справедливость свойства 5° установлена.

З а м е ч а н и е. Понятие сопряженного оператора для вещественного пространства вводится совершенно аналогично. Выводы этого пункта и свойства сопряженных операторов справедливы и для этого случая (при этом свойство 3° формулируется так: $(\lambda A)^* = \lambda A^*$).

2. Самосопряженные операторы. Основные свойства.

Определение 2. *Линейный оператор A из $L(V, V)$ называется самосопряженным, если справедливо равенство*

$$A^* = A$$

Самосопряженный оператор в вещественном пространстве определяется аналогично.

Простейшим примером самосопряженного оператора является тождественный оператор I (см. свойство 1° сопряженных операторов в предыдущем пункте).

С помощью самосопряженных операторов можно получить специальное представление произвольных линейных операторов. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.13. *Пусть A — линейный оператор, действующий в комплексном евклидовом пространстве V . Тогда справедливо представление $A = A_R + iA_I$, где A_R и A_I — самосопряженные операторы, называемые соответственно действительной и мнимой частью оператора A .*

Доказательство. Согласно свойствам 2°, 3° и 4° сопряженных операторов (см. предыдущий пункт этого параграфа) операторы $A_R = (A + A^*)/2$ и $A_I = (A - A^*)/2i$ самосопряженные.

Очевидно, $A = A_R + iA_I$. Теорема доказана.

В следующей теореме выясняются условия самосопряженности произведения самосопряженных операторов. Мы будем говорить, что операторы A и B коммутируют, если $AB = BA$.

Теорема 5.14. *Для того чтобы произведение AB самосопряженных операторов A и B было самосопряженным оператором, необходимо и достаточно, чтобы они коммутировали.*

Доказательство. Так как A и B — самосопряженные операторы, то, согласно свойству 5° сопряженных операторов (см. п. 1 этого параграфа), справедливы соотношения

$$(AB)^* = B^*A^* = BA \quad (5.52)$$

Следовательно, если $AB = BA$, то $(AB)^* = AB$, т. е. оператор AB самосопряженный. Если же AB — самосопряженный оператор, то $AB = (AB)^*$, и тогда на основании (5.52) $AB = BA$. Теорема доказана.

В дальнейших теоремах устанавливается ряд важных свойств самосопряженных операторов.

Теорема 5.15. *Если оператор A самосопряженный, то для любого $x \in V$ скалярное произведение (Ax, x) — вещественное число.*

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы вытекает из следующего свойства скалярного произведения

в комплексном евклидовом пространстве $(Ax, x) = \overline{(x, Ax)}$ и определения самосопряженного оператора $(Ax, x) = (x, Ax)^*$.

Теорема 5.16. *Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение самосопряженного оператора A . По определению собственного значения оператора A (см. определение 2 § 3 этой главы) существует ненулевой вектор x такой, что $Ax = \lambda x$. Из этого соотношения следует, что вещественное (в силу теоремы 5.15) скалярное произведение (Ax, x) может быть представлено в виде

$$(Ax, x) = \lambda (x, x) = \lambda \|x\|^2.$$

Так как $\|x\|$ и (Ax, x) вещественны, то, очевидно, и λ — вещественное число. Теорема доказана.

В следующей теореме выясняется свойство ортогональности собственных векторов самосопряженного оператора.

Теорема 5.17. *Если A — самосопряженный оператор, то собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям этого оператора, ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ_1 и λ_2 — различные собственные значения ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) самосопряженного оператора A , а x_1 и x_2 — соответственно отвечающие им собственные векторы. Тогда имеют место соотношения $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Поэтому скалярные произведения (Ax_1, x_2) и (x_1, Ax_2) соответственно равны следующим выражениям:

$$(Ax_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2), \quad (x_1, Ax_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)^{***}).$$

Так как оператор A самосопряженный, то скалярные произведения (Ax_1, x_2) и (x_1, Ax_2) равны, и поэтому из последних соотношений путем вычитания получаем равенство

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(x_1, x_2) = 0.$$

Поскольку $\lambda_2 \neq \lambda_1$, то из последнего равенства следует равенство нулю скалярного произведения (x_1, x_2) , т. е. ортогональность собственных векторов x_1 и x_2 . Теорема доказана.

3. Нормы линейного оператора. Пусть A — линейный оператор, отображающий евклидово пространство V в это же пространство. Введем понятие нормы оператора A .

*) Напомним, что если комплексное число равно своему сопряженному, то это число — вещественное.

**) Напомним, что символ $\|x\|$ обозначает норму элемента x

***). Так как собственные значения самосопряженного оператора вещественны, то $(x_1, Ax_2) = \lambda_2 (x_1, x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$.

Определение 3. Нормой $\|A\|$ линейного оператора A называется число, определяемое соотношением *)

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \quad (5.53)$$

Из определения нормы линейного оператора вытекает следующее очевидное неравенство:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (5.54)$$

(для доказательства достаточно воспользоваться соотношением $Ax = \left(A \frac{x}{\|x\|}\right) \|x\|$). Из соотношения (5.54) следует, что если $\|A\| = 0$, то оператор A является нулевым.

Норму самосопряженного оператора A можно определить и другим способом. Именно, справедливо утверждение:

Если A — самосопряженный оператор, то введенная выше норма A оператора A равна $\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$:

$$\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|. \quad (5.55)$$

Доказательство. Для любого x из V справедливо неравенство Коши—Буняковского (см. п. 2, § 3, гл. 4)

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \|x\|.$$

Из него и из неравенства (5.54) получаем следующее неравенство: $|(Ax, x)| \leq \|A\| \|x\|^2$. Поэтому число

$$\mu = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \quad (5.56)$$

удовлетворяет соотношению

$$\mu \leq \|A\|. \quad (5.57)$$

Отметим, что из равенства $(Az, z) = \left(A \frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|}\right) \|z\|^2$, $z \neq 0$, и определения числа μ (см. (5.56)) вытекает следующее неравенство:

$$|(Az, z)| \leq \mu \|z\|^2. \quad (5.58)$$

Обратимся теперь к следующему очевидному тождеству:

$$4 \operatorname{Re} (Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)$$

*) Напомним, что $\|Ax\| = \sqrt{(Ax, Ax)}$. Отсюда следует, что $\|Ax\|$ представляет собой непрерывную функцию x , которая на замкнутом множестве $\|x\| = 1$ достигает конечного наибольшего значения.

(в этом тождестве символ $\operatorname{Re} (Ax, y)$ обозначает действительную часть комплексного числа (Ax, y) ; само тождество легко вытекает из свойств скалярного произведения, см. п. 1 § 3 гл. 4). Беря левую и правую части этого тождества по модулю, используя свойство модуля суммы и неравенство (5.58), получим следующие соотношения *).

$$4 |\operatorname{Re} (Ax, y)| \leq \mu \|x + y\|^2 + \mu \|x - y\|^2 = 2\mu (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Отсюда при $\|x\| = \|y\| = 1$ получаем неравенство

$$|\operatorname{Re} (Ax, y)| \leq \mu.$$

Полагая в этом неравенстве $y = Ax/\|Ax\|$ (очевидно, $\|y\| = 1$) и учитывая, что число $(Ax, Ax) = \|Ax\|^2$ является вещественным (поэтому $\operatorname{Re} (Ax, Ax) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2$), получим $\|Ax\| \leq \mu$, $\|x\| = 1$. Отсюда, согласно неравенству (5.53), найдем $\|A\| \leq \mu$.

Для завершения доказательства остается сравнить полученное неравенство с неравенством (5.57) и воспользоваться определением числа μ (см. (5.56)).

4. Дальнейшие свойства самосопряженных операторов. В этом пункте мы докажем ряд важных свойств линейных операторов, связанных с понятием нормы. Сначала мы установим необходимое и достаточное условие самосопряженности оператора. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.18. *Для того чтобы линейный оператор A был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Im} (Ax, x) = 0^{**}.$$

Доказательство. По теореме 5.13 произвольный линейный оператор A может быть представлен в виде $A = A_R + iA_I$, где A_R и A_I — самосопряженные операторы. Поэтому

$$(Ax, x) = (A_R x, x) + i(A_I x, x),$$

причем, согласно теореме 5.15, для любого x числа $(A_R x, x)$ и $(A_I x, x)$ — вещественные. Следовательно, эти числа соответственно равны действительной и мнимой частям комплексного числа (Ax, x) :

$$\operatorname{Re} (Ax, x) = (A_R x, x), \quad \operatorname{Im} (Ax, x) = (A_I x, x).$$

Допустим, что A — самосопряженный оператор.

*) Мы использовали при этом определение нормы элемента в комплексном евклидовом пространстве.

**) Символ $\operatorname{Im} (Ax, x)$ обозначает мнимую часть комплексного числа (Ax, x) . Равенство $\operatorname{Im} (Ax, x) = 0$ означает, что число (Ax, x) является вещественным.

По теореме 5.15 в этом случае (Ax, x) — вещественное число, и поэтому $\text{Im}(Ax, x) = 0$. Необходимость условия теоремы доказана.

Докажем достаточность условия теоремы.

Пусть $\text{Im}(Ax, x) = (A_1x, x) = 0$. Отсюда следует, что $\|A_1\| = 0$, т. е. $A_1 = 0$. Поэтому $A = A_R$, где A_R — самосопряженный оператор. Теорема доказана.

В следующих утверждениях выясняются некоторые свойства собственных значений самосопряженных операторов.

Лемма. Любое собственное значение λ произвольного линейного самосопряженного оператора A в евклидовом пространстве равно скалярному произведению (Ax, x) , где x — некоторый вектор, удовлетворяющий условию $\|x\| = 1$:

$$\lambda = (Ax, x), \quad \|x\| = 1. \quad (5.59)$$

Доказательство. Так как λ — собственное значение оператора A , то существует такой ненулевой вектор z , что

$$Az = \lambda z. \quad (5.60)$$

Полагая $x = z/\|z\|$ (очевидно, $\|x\| = 1$), перепишем (5.60) следующим образом: $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$. Отсюда получаем соотношения $(Ax, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2 = \lambda$, т. е. (5.59) имеет место. Лемма доказана.

Следствие. Пусть A — самосопряженный оператор и λ — любое собственное значение этого оператора. Пусть далее

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x). \quad (5.61)$$

Справедливы следующие неравенства:

$$m \leq \lambda \leq M. \quad (5.62)$$

З а м е ч а н и е 1. Так как скалярное произведение (Ax, x) представляет собой непрерывную функцию от x , то на замкнутом множестве $\|x\| = 1$ эта функция ограничена и достигает своих точных граней m и M .

З а м е ч а н и е 2. Согласно теореме 5.16 собственные значения самосопряженного оператора вещественны. Поэтому неравенства (5.62) имеют смысл.

Доказательство следствия. Так как любое собственное значение λ удовлетворяет соотношению (5.59), то, очевидно, каждое собственное значение заключено между точными гранями m и M скалярного произведения (Ax, x) . Поэтому неравенства (5.62) справедливы.

Мы докажем, что числа m и M , определенные соотношениями (5.61) являются соответственно наименьшим и наибольшим собственными значениями самосопряженного оператора A . Предварительно убедимся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 5.19. Пусть A — самосопряженный оператор и, кроме того, $(Ax, x) \geq 0$ для любого x . Тогда $\|A\|$ равна наибольшему собственному значению этого оператора *).

Доказательство Мы уже отмечали (см. утверждение предыдущего пункта), что $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$. Так как $(Ax, x) \geq 0$, то $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$. Согласно замечанию 1 этого пункта для некоторого x_0 , $\|x_0\| = 1$,

$$(Ax_0, x_0) = \|A\| = \lambda.$$

Обращаясь к определению нормы и используя только что написанные равенства, получим соотношения **)

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)x_0\|^2 &= \|Ax_0\|^2 - 2\lambda(Ax_0, x_0) + \lambda^2\|x_0\|^2 = \\ &= \|A\|^2 - 2\|A\| \cdot \|A\| + \|A\|^2 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $(A - \lambda I)x_0 = 0$, или иначе $Ax_0 = \lambda x_0$, т. е. $\lambda = \|A\|$ — собственное значение оператора A . То, что λ — наибольшее собственное значение, вытекает из только что установленного следствия из леммы этого пункта. Теорема доказана.

Докажем теперь, что числа m и M (см. (5.61)) являются наименьшим и наибольшим собственными значениями самосопряженного оператора A .

Теорема 5.20. Пусть A — самосопряженный оператор, а m и M — точные грани (Ax, x) на множестве $\|x\| = 1$. Эти числа представляют собой наименьшее и наибольшее собственные значения оператора A .

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что числа m и M — собственные значения оператора A . Тогда из неравенств (5.62) сразу же следует, что m и M являются соответственно наименьшим и наибольшим собственными значениями.

Докажем сначала, что M — собственное значение. Для этого рассмотрим самосопряженный оператор $B = A - mI$. Так как

$$(Bx, x) = (Ax, x) - m(x, x) \geq 0,$$

то оператор B удовлетворяет условиям теоремы 5.19 и поэтому

*) Так как собственных значений конечное число и они вещественны, то из них можно указать наибольшее

**) Мы также воспользовались равенством $\|Ax_0\|^2 = \|A\|^2$, которое следует из соотношений $\|A\| = (Ax_0, x_0) \leq \|Ax_0\|$ и $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

норма $\|B\|$ этого оператора равна наибольшему собственному значению. С другой стороны

$$\|B\| = \sup_{\|x\|=1} (Bx, x) = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) - m = M - m.$$

Таким образом, $(M - m)$ — наибольшее собственное значение оператора B . Следовательно, существует такой ненулевой вектор x_0 , что

$$Bx_0 = (M - m)x_0. \quad (5.63)$$

Так как $B = A - mI$, то $Bx_0 = Ax_0 - mIx_0 = Ax_0 - mx_0$. Подставляя это выражение Bx_0 в левую часть равенства (5.63), получим после несложных преобразований соотношение $Ax_0 = Mx_0$. Таким образом, M — собственное значение оператора A .

Убедимся теперь, что число m также является собственным значением оператора A .

Рассмотрим самосопряженный оператор $B = -A$. Очевидно, $-m = \sup_{\|x\|=1} (Bx, x)$. Согласно только что проведенному дока-

зательству число $-m$ представляет собой собственное значение оператора B . Так как $B = -A$, то m будет являться собственным значением оператора A . Теорема доказана.

В следующей теореме выясняется важное свойство собственных векторов самосопряженного оператора.

Теорема 5.21. У каждого самосопряженного линейного оператора A , действующего в n -мерном евклидовом пространстве V существует n линейно независимых попарно ортогональных и единичных собственных векторов.

Доказательство. Пусть λ_1 — максимальное собственное значение оператора A ($\lambda_1 = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$). Обозначим через e_1 собственный вектор, отвечающий λ_1 и удовлетворяющий условию $\|e_1\| = 1$ (возможность его выбора следует из доказательства леммы этого пункта).

Обозначим через V_1 $(n - 1)$ -мерное подпространство пространства V , ортогональное к e_1 . Очевидно, V_1 — инвариантное подпространство оператора A (т. е. если $x \in V_1$, то и $Ax \in V_1$). Действительно, пусть $x \in V_1$ (т. е. $(x, e_1) = 0$). Тогда *)

$$(Ax, e_1) = (x, Ae_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0.$$

Следовательно, Ax — элемент V_1 , и поэтому V_1 — инвариантное подпространство оператора A . Это дает нам право рассматривать оператор A в подпространстве V_1 . В этом подпространстве A будет представлять собой самосопряженный оператор. Следова-

*) Мы использовали свойство самосопряженности оператора $(Ax, e_1) = (x, Ae_1)$ и то обстоятельство, что e_1 — собственный вектор оператора: $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.

тельно, имеется максимальное собственное значение λ_2 этого оператора, которое можно найти с помощью соотношения *)

$$\lambda_2 = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp e_1}} (Ax, x).$$

Кроме того, можно указать такой вектор e_2 , $e_2 \perp e_1$, $\|e_2\| = 1$, что $Ae_2 = \lambda_2 e_2$.

Обращаясь далее к $(n-2)$ -мерному подпространству V_2 , ортогональному векторам e_1 и e_2 и повторяя проведенные выше рассуждения, мы построим собственный вектор e_3 , $\|e_3\| = 1$, ортогональный e_1 и e_2 . Рассуждая и далее таким же образом, мы последовательно найдем n взаимно ортогональных собственных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, удовлетворяющих условию $\|e_i\| = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

З а м е ч а н и е 1. Договоримся в дальнейшем нумеровать собственные значения самосопряженного оператора в порядке убывания с учетом повторяющихся, т. е. кратных собственных значений. При этом $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ и отвечающие им собственные векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ можно считать взаимно ортогональными и удовлетворяющими условию $\|e_i\| = 1$. Таким образом,

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 2. Из рассуждений в доказательстве теоремы 5.21 следует соотношение $\lambda_{m+1} = \max_{\substack{x \perp E_m \\ \|x\|=1}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$. Это соотно-

шение можно также записать в виде $\lambda_{m+1} = \max_{x \perp E_m} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$,

где E_m — линейная оболочка векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$. Справедливость замечания вытекает из того, что $(x, x) = \|x\|^2$, и поэтому

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \left(A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right),$$

причем норма элемента $x/\|x\|$ равна 1.

Пусть $\mathcal{E}_m$ — множество всех m -мерных подпространств пространства V . Справедливо следующее важное **м и н и м а к с н о е** свойство собственных значений.

Теорема 5.22. Пусть A — самосопряженный оператор и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — его собственные значения, занумерованные в порядке, указанном в замечании 1. Тогда

$$\lambda_{m+1} = \min_{E \in \mathcal{E}_m} \max_{x \perp E} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \quad (5.64)$$

*) Символ $e_1 \perp e_2$ обозначает ортогональность векторов e_1 и e_2 .

Доказательство. Пусть E_m — линейная оболочка собственных векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$ оператора A (см. замечание 1). В силу замечания 2

$$\max_{x \perp E_m} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_{m+1}.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$\max_{x \perp E \subset \mathcal{E}_m} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \geq \max_{x \in E_m} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_{m+1} \quad (5.65)$$

для любого $E \in \mathcal{E}_m$.

Перейдем к доказательству соотношения (5.65).

Обозначим символом $E^\perp$ ортогональное дополнение подпространства E (см. п. 3 § 2 гл. 4). Из теоремы 2.10 следует, что размерность $E^\perp$ равна $n - m$. Следовательно,

$$\dim E^\perp + \dim E_{m+1} = (n - m) + (m + 1) = n + 1 > n.$$

Это означает, в силу теоремы 2.9, что пересечение подпространств $E^\perp$ и E_{m+1} содержит ненулевой элемент. Итак, существует элемент $\tilde{x}$ такой, что $\tilde{x} \perp E$, $\|\tilde{x}\| = 1$, $\tilde{x} \in E_{m+1}$, т. е. $\tilde{x} = \sum_{k=1}^{m+1} c_k e_k$. Так как $\|\tilde{x}\| = 1$ и базис $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}$ ортонормированный, то в силу теоремы Пифагора (см. п. 2 § 1 гл. 4)

$$\|\tilde{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{m+1} |c_k|^2 = 1. \quad (5.66)$$

Имеем далее $Ax = A \sum_{k=1}^{m+1} c_k e_k = \sum_{k=1}^{m+1} c_k A e_k$. Поскольку e_k — собственные векторы оператора A , то из последних соотношений получаем $Ax = \sum_{k=1}^{m+1} c_k \lambda_k e_k$. Отсюда и из ортонормированности e_k следует справедливость соотношения

$$(\tilde{Ax}, x) = \left(\sum_{k=1}^{m+1} c_k \lambda_k e_k, \sum_{p=1}^{m+1} c_p e_p \right) = \sum_{k=1}^{m+1} |c_k|^2 \lambda_k. \quad (5.67)$$

Мы занумеровали собственные значения в порядке убывания с учетом возможной их кратности. Поэтому $\lambda_{m+1} \geq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Отсюда и из соотношений (5.67) и (5.66) получаем

$$(Ax, x) = \sum_{k=1}^{m+1} |c_k|^2 \lambda_k \geq \lambda_{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} |c_k|^2 = \lambda_{m+1}.$$

Замечая, что для любого $x \neq 0$ норма элемента $x/\|x\|$ равна 1 и $\|\tilde{x}\| = 1$, а также учитывая, что $\tilde{x} \perp E$, получим

$$\max_{x \perp E} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \max_{x \perp E} \left(A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \geq (A\tilde{x}, \tilde{x}) \geq \lambda_{m+1}.$$

Итак, соотношения (5.65) установлены. Теорема доказана.

5. Спектральное разложение самосопряженных операторов. Теорема Гамильтона—Кэли. Рассмотрим самосопряженный оператор A и собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ этого оператора. При этом $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, отвечающих $\{\lambda_i\}$. Пусть $x \in V$. Тогда

$$x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \quad (5.68)$$

(см. п. 3 § 2 гл. 4), а так как $Ae_k = \lambda_k e_k$, то с помощью (5.68) получаем

$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x, e_k) e_k. \quad (5.69)$$

Оператор P_k , определяемый соотношением

$$P_k x = (x, e_k) e_k, \quad (5.70)$$

называется проектором на одномерное подпространство, порожденное вектором e_k .

Из свойств скалярного произведения сразу же следует, что P_k — самосопряженный линейный оператор.

Отметим следующие важные свойства проекторов:

1°. $P_k^2 = P_k$ (отсюда следует, что $P_k^m = P_k$, где m — натуральное).

2°. $P_k P_j = 0$, где $k \neq j$.

Доказательство этих свойств следует из соотношений

$$\begin{aligned} (P_k P_j) x &= P_k (P_j x) = P_k (x, e_j) e_j = \\ &= (x, e_j) (e_j, e_k) e_k = \begin{cases} (x, e_k) e_k & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим также, что непосредственно из определения (5.70) следует, что P_k коммутирует с каждым оператором, который коммутирует с A .

Из соотношений (5.68), (5.69) и (5.70) получаем следующие выражения для x и Ax :

$$x = \sum_{k=1}^n P_k x, \quad (5.71)$$

$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k x. \quad (5.72)$$

Из равенства (5.71) следует, что оператор $\sum_{k=1}^n P_k$ является тождественным:

$$I = \sum_{k=1}^n P_k. \quad (5.73)$$

Из равенства (5.72) получаем так называемое *спектральное разложение самосопряженного оператора*:

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k. \quad (5.74)$$

Из свойств 1° и 2° проекторов и из соотношения (5.74) вытекает следующее выражение для A^2 :

$$A^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 P_k.$$

Очевидно, вообще для любого целого положительного s

$$A^s = \sum_{k=1}^n \lambda_k^s P_k. \quad (5.75)$$

Рассмотрим произвольный полином $p(\lambda) = \sum_{i=1}^m c_i \lambda^i$. По определению считают $p(A) = \sum_{k=1}^m c_k A^k$. Обращаясь к соотношению (5.75), легко получить следующее выражение для $p(A)$:

$$p(A) = \sum_{i=1}^m p(\lambda_i) P_i. \quad (5.76)$$

Скажем следующую теорему.

Теорема 5.23 (теорема Гамильтона—Кэли). Если A — самосопряженный оператор и $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ — характеристический многочлен этого оператора, то

$$p(A) = 0.$$

Доказательство. Действительно, если A — самосопряженный оператор и λ_i — собственные значения этого оператора, то, согласно теореме 5.8, λ_i является корнем характеристического уравнения, т. е. $p(\lambda_i) = 0$. Отсюда и из соотношения (5.76) следует, что $p(A) = 0$. Теорема доказана.

6. Положительные операторы. Корни m -й степени из оператора. Самосопряженный оператор A называется *положительным*, если для любого x из V справедливо соотношение

$$(Ax, x) \geq 0. \quad (5.77)$$

Если оператор A — положительный и из условия $(Ax, x) = 0$ следует, что $x = 0$, то A называется положительно определенным оператором.

Положительные и положительно определенные операторы соответственно обозначаются символами $A \geq 0$ и $A > 0$.

Отметим следующее простое утверждение.

Каждое собственное значение положительного (положительно определенного) оператора неотрицательно (положительно).

Это утверждение следует из простых рассуждений.

Пусть λ — собственное значение оператора A . Тогда, согласно лемме п. 4 этого параграфа, можно указать такой элемент x , $\|x\| = 1$, что $\lambda = (Ax, x)$.

Отсюда и из соотношения (5.77) получаем, что $\lambda \geq 0$ для положительных операторов и $\lambda > 0$ для положительно определенных операторов. Утверждение доказано.

Введем понятие корня m -й степени (и m — натуральное число) из оператора.

Определение. Корнем m -й степени из оператора A называется оператор B такой, что $B^m = A$.

Корень m -й степени из оператора A обозначается символом $A^{1/m}$.

Естественно выделить какой-либо класс операторов, для которых имела бы смысл операция нахождения корня m -й степени. Определенный ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 5.24. Пусть A — положительный самосопряженный оператор, $A \geq 0$. Тогда для любого натурального m существует положительный самосопряженный оператор $A^{1/m}$, $A^{1/m} \geq 0$.

Доказательство. Обозначим через λ_k — собственные значения оператора A , и пусть $\{e_k\}$ — ортонормированный базис из собственных векторов. Обозначим далее через P_k — проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором e_k .

Согласно предыдущему пункту имеет место спектральное разложение (5.74) самосопряженного оператора A :

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k. \quad (5.74)$$

Так как $\lambda_k \geq 0$ (см. только что доказанное утверждение), то можно ввести следующий самосопряженный оператор B :

$$B = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{1/m} P_k. \quad (5.78)$$

Согласно (5.70) справедливо соотношение

$$(P_k x, x) \geq 0,$$

из которого следует положительность операторов P_k и положительность оператора B (см. (5.78)).

Из свойств 1° и 2° проекторов P_k (см. п. 5 этого параграфа) вытекает, что $B^m = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k$. Сравнивая это выражение для B^m с выражением (5.74) для A , получим $B^m = A$. Выше была установлена положительность оператора B . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Отметим без доказательства, что существует единственный положительный оператор $A^{1/m}$.

З а м е ч а н и е 2. В ортонормированном базисе $\{e_k\}$ собственных векторов оператора A матрица оператора $A^{1/m}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{1/m} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n^{1/m} \end{pmatrix}.$$

§ 6. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов

В этом параграфе мы изучим вопрос о выборе такого базиса, в котором квадратичная форма (инвариантная квадратичная функция координат вектора; точно это понятие определяется ниже) имеет наиболее простой вид.

Квадратичные формы подробно изучаются в главе 7. Там будут, в частности, рассмотрены различные способы приведения таких форм к сумме квадратов.

Введем понятие так называемых эрмитовых форм.

Определение. Полуторалинейная форма $B(x, y)$ называется эрмитовой, если для любых x и y справедливо соотношение

$$B(x, y) = \overline{B(y, x)}. \quad (5.79)$$

Согласно следствию из теоремы 5.11 любая полуторалинейная форма $B(x, y)$ (в том числе и эрмитова) может быть единственным образом представлена в виде

$$B(x, y) = (Ax, y), \quad (5.80)$$

где A — линейный оператор.

Докажем следующие два утверждения, в которых выясняются условия, при которых полуторалинейная форма является эрмитовой.

Теорема 5.25. Для того чтобы полуторалинейная форма $B(x, y)$ являлась эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы оператор A в представлении (5.80) этой формы был самосопряженным ($A = A^*$).

Доказательство. Действительно, если A — самосопряженный оператор, то, используя свойства скалярного произведения, получим

$$B(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \overline{(Ay, x)} = \overline{B(y, x)}.$$

Таким образом, выполнено соотношение (5.79), т. е. форма $B(x, y) = (Ax, y)$ является эрмитовой.

Если же форма $B(x, y) = (Ax, y)$ эрмитова, то, опять обращаясь к свойствам скалярного произведения, получим равенства

$$(Ax, y) = B(x, y) = \overline{B(y, x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay).$$

Таким образом, $(Ax, y) = (x, Ay)$, т. е. оператор A является самосопряженным. Теорема доказана.

Теорема 5.26. Для того чтобы полуторалинейная форма $B(x, y)$ была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы функция $B(x, x)$ была вещественной.

Доказательство. Форма $B(x, y)$ будет эрмитовой в том и только в том случае, когда линейный оператор A в представлении (5.80) этой формы является самосопряженным (см. теорему 5.25). Согласно же теореме 5.18, для того чтобы оператор A был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы для любого x скалярное произведение (Ax, x) было вещественным. Теорема доказана.

Введем теперь понятие квадратичной формы.

Пусть $B(x, y)$ — эрмитова форма.

Квадратичной формой, соответствующей форме $B(x, y)$, называется функция $B(x, x)$.

Докажем следующую теорему о приведении квадратичной формы к сумме квадратов.

Теорема 5.27. Пусть $B(x, y)$ — эрмитова форма, определенная на всевозможных векторах x и y n -мерного евклидова пространства V . Тогда в этом пространстве существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}$ и можно указать такие вещественные числа λ_k , что для любого x , принадлежащего V , квадратичная форма $B(x, x)$ может быть представлена в виде следующей суммы квадратов координат ξ_k вектора x в базисе $\{e_k\}$:

$$B(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\xi_k|^2. \quad (5.81)$$

Доказательство. Так как форма $B(x, y)$ эрмитова, то, согласно теореме 5.25, существует самосопряженный оператор A такой, что

$$B(x, y) = (Ax, y). \quad (5.82)$$

Обратимся теперь к теореме 5.21. По этой теореме для оператора A можно указать ортонормированный базис $\{e_k\}$ из собственных векторов этого оператора. Если λ_k — собственные значения A , а ξ_k — координаты вектора x в базисе $\{e_k\}$, так что

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \quad (5.83)$$

то, используя формулу (5.12) и соотношение $Ae_k = \lambda_k e_k$ *,), получим следующее выражение для Ax :

$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k e_k. \quad (5.84)$$

Из (5.83), (5.84) и ортонормированности базиса $\{e_k\}$ получим следующее выражение для (Ax, x) :

$$(Ax, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\xi_k|^2.$$

Из этого выражения и из соотношения (5.82) получим (5.81). Теорема доказана.

Докажем теперь важную теорему об одновременном приведении двух квадратичных форм к сумме квадратов.

Теорема 5.28. Пусть $A(x, y)$ и $B(x, y)$ — эрмитовы формы, определенные на всевозможных векторах x и y n -мерного линейного пространства V . Допустим, далее что для всех ненулевых элементов x из V имеет место неравенство $B(x, x) > 0$. Тогда в пространстве V можно указать базис $\{e_k\}$ такой, что квадратичные формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ могут быть представлены в следующем виде:

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\xi_k|^2, \quad (5.85)$$

$$B(x, x) = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2, \quad (5.86)$$

где λ_k — вещественные числа, а ξ_k — координаты вектора x в базисе $\{e_k\}$.

Доказательство. Так как свойства скалярного произведения и свойства эрмитовой формы $B(x, y)$ при дополнительном требовании о том, что $B(x, x) > 0$ при $x \neq 0$, формулируются одинаково, мы можем ввести в линейном пространстве V скалярное произведение (x, y) векторов, полагая

$$(x, y) = B(x, y). \quad (5.87)$$

*) Это соотношение следует из того, что λ_k и e_k — соответственно собственные значения и собственные векторы оператора A .

Таким образом, V представляет собой евклидово пространство со скалярным произведением (5.87).

По теореме 5.27 можно указать в V такой ортонормированный базис $\{e_k\}$ и такие вещественные числа λ_k , что в этом базисе квадратичная форма $A(x, x)$ будет представлена в виде (5.85).

С другой стороны, в любом ортонормированном базисе скалярное произведение (x, x) , равное, согласно (5.87), $B(x, x)$, равно сумме квадратов модулей координат вектора x . Таким образом, представление $B(x, x)$ в виде (5.86) также обосновано. Теорема доказана.

§ 7. Унитарные и нормальные операторы

В этом параграфе рассматриваются свойства важного класса операторов, действующих в евклидовом пространстве V .

Определение 1. *Линейный оператор U из $L(V, V)$ называется унитарным, если для любых элементов x и y из V справедливо соотношение*

$$(Ux, Uy) = (x, y). \quad (5.88)$$

В дальнейшем соотношение (5.88) будем называть *условием унитарности оператора*.

Замечание 1. Из условия (5.88) унитарности оператора следует, что для любого унитарного оператора U справедливо равенство $\|Ux\| = \|x\|$.

Отметим следующее **утверждение**.

Если λ — собственное значение унитарного оператора U , то $|\lambda| = 1$.

Действительно, если λ — собственное значение U , то существует такой элемент e , что $\|e\| = 1$ и $Ue = \lambda e$. Отсюда и из замечания 1 следуют соотношения $|\lambda| = \|\lambda e\| = \|Ue\| = \|e\| = 1$. Утверждение доказано.

Докажем следующую теорему.

Теорема 5.29. *Для того чтобы линейный оператор U , действующий в евклидовом пространстве V , был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено соотношение*

$$U^* = U^{-1}. \quad (5.89)$$

Доказательство. 1) **Необходимость.** Пусть оператор U унитарный, т. е. выполнено условие (5.88). Обращаясь к определению сопряженного оператора U^* , можно переписать это условие в следующей форме *)

$$(U^*Ux, y) = (x, y), \quad (5.90)$$

) Напомним, что оператор U^ называется сопряженным к оператору U , если для любых z и y выполняется соотношение $(z, Uy) = (U^*z, y)$. Полагая $z = Ux$, получим (5.90).

или, иначе, для любых x и y выполняется равенство

$$((U^*U - I)x, y) = 0.$$

Фиксируя в этом равенстве любой элемент x и считая y произвольным, получим, что линейный оператор $U^*U - I$ действует по правилу $(U^*U - I)x = 0$

Следовательно, $U^*U = I$. Совершенно аналогично можно убедиться, что $UU^* = I$.

Таким образом, U и U^* — взаимно обратные операторы, т. е. соотношение (5.89) выполнено. Необходимость условия теоремы доказана.

2) **Достаточность.** Пусть выполнено условие (5.89). Тогда, очевидно, $UU^* = U^*U = I$. Обращаясь к определению сопряженного оператора и используя только что написанные соотношения, получим при любых x и y равенства

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, Iy) = (x, y).$$

Таким образом, условие (5.88) унитарности оператора выполнено. Следовательно, оператор U унитарный. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. 2. В процессе доказательства теоремы установлено, что условие (5.88) унитарности оператора U и условие

$$U^*U = UU^* = I \quad (5.91)$$

эквивалентны. Таким образом, в основу определения унитарного оператора можно положить условие (5.91).

Это условие также можно называть *условием унитарности оператора* U .

Введем понятие *нормального оператора*.

Определение 2. Линейный оператор A называется *нормальным*, если справедливо соотношение

$$A^*A = AA^*. \quad (5.92)$$

Обращаясь к условию (5.91) унитарности оператора и к условию (5.92), мы видим, что *любой унитарный оператор является нормальным оператором*.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть A — нормальный оператор. Тогда оператор A и оператор A^* имеют общий собственный элемент e такой, что $\|e\| = 1$, и справедливы соотношения $Ae = \lambda e$ и $A^*e = \lambda e$.

Доказательство. Пусть λ — собственное значение оператора A , и пусть $R_\lambda = \ker(A - \lambda I)$. Иными словами, R_λ — множество всех элементов x таких, что $Ax - \lambda x = 0$.

Убедимся теперь, что если x принадлежит R_λ , то и A^*x принадлежит R_λ . Действительно, если $Ax = \lambda x$ (т. е. $x \in R_\lambda$), то, поскольку A — нормальный оператор,

$$A(A^*x) = A^*(Ax) = A^*(\lambda x) = \lambda(A^*x).$$

Иными словами, вектор A^*x является собственным вектором оператора A и отвечает собственному значению λ , т. е. принадлежит R_λ .

Рассматривая далее оператор A^* как оператор, действующий из R_λ в R_λ , и используя вывод следствия из теоремы 5.8 о том, что каждый линейный оператор имеет собственное значение, мы можем утверждать, что в R_λ существует элемент e такой, что $\|e\| = 1$ и справедливы соотношения $A^*e = \mu e$ и $Ae = \lambda e$.

Используя эти соотношения и условие $\|e\| = 1$, найдем

$$(Ae, e) = (\lambda e, e) = \lambda \|e\|^2 = \lambda, \quad (e, A^*e) = (e, \mu e) = \bar{\mu} \|e\|^2 = \bar{\mu}.$$

Так как $(Ae, e) = (e, A^*e)$, то, очевидно, $\lambda = \mu$. Лемма доказана.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 5.30. Пусть A — нормальный оператор. Тогда существует ортонормированный базис $\{e_k\}$, состоящий из собственных элементов операторов A и A^* .

Доказательство. Согласно только что доказанной лемме операторы A и A^* имеют принадлежащий V общий собственный элемент e_1 , причем $\|e_1\| = 1$. Собственные значения для операторов A и A^* , соответствующие e_1 , равны соответственно λ_1 и $\bar{\lambda}_1$.

Пусть V_1 — ортогональное дополнение элемента e_1 до пространства V . Иными словами, V_1 — совокупность всех x , удовлетворяющих условию $(x, e_1) = 0$.

Докажем, что если x принадлежит V_1 , то Ax и A^*x принадлежат V_1 . Действительно, если $(x, e_1) = 0$, то

$$(Ax, e_1) = (x, A^*e_1) = (x, \bar{\lambda}_1 e_1) = \bar{\lambda}_1 (x, e_1) = 0,$$

т. е. $Ax \in V_1$. Аналогично, если $(x, e_1) = 0$, то

$$(A^*x, e_1) = (x, Ae_1) = (x, \lambda_1 e_1) = \lambda_1 (x, e_1) = 0,$$

т. е. $A^*x \in V_1$.

Таким образом, V_1 — инвариантное подпространство операторов A и A^* . Поэтому по только что доказанной лемме в подпространстве V_1 существует общий собственный элемент e_2 операторов A и A^* такой, что $\|e_2\| = 1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, $A^*e_2 = \bar{\lambda}_2 e_2$.

Далее мы обозначим через V_2 ортогональное дополнение элемента e_2 до V_1 . Рассуждая так же, как и выше, мы докажем, что в V_2 есть общий собственный элемент e_3 операторов A и A^* такой, что $\|e_3\| = 1$. Продолжая аналогичные рассуждения, мы, очевидно, построим в пространстве V ортонормированный базис $\{e_k\}$, состоящий из собственных элементов операторов A и A^* . Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть A — нормальный оператор. Существует базис $\{e_k\}$, в котором A имеет диагональную матрицу.

Действительно, по только что доказанной теореме существует базис $\{e_k\}$ из собственных векторов оператора A . Согласно теореме 5.9 в этом базисе матрица оператора A диагональна.

Следствие 2. Унитарный оператор имеет полную ортонормированную систему собственных векторов.

Следующая теорема является обратной для теоремы 5.30.

Теорема 5.31. Если у действующего в n -мерном евклидовом пространстве V оператора A имеется n попарно ортогональных собственных элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$, то оператор A нормальный.

Доказательство. Пусть $\{e_k\}$ — попарно ортогональные собственные векторы оператора A . Тогда $Ae_k = \lambda_k e_k$, и, согласно (5.69), имеет место следующее представление оператора A^* .

$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

Докажем, что сопряженный оператор A^* действует по правилу

$$A^*y = \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k (y, e_k) e_k. \quad (5.93)$$

Достаточно доказать, что для операторов A и A^* , определяемых соотношениями (5.69) и (5.93), справедливо равенство

$$(x, A^*y) = (Ax, y). \quad (5.94)$$

Подставляя в левую часть этого равенства выражение A^*y по формуле (5.93), получим после несложных преобразований

$$\begin{aligned} (x, A^*y) &= \sum_{k=1}^n (x, \bar{\lambda}_k (y, e_k) e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{(y, e_k)} (x, e_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (x, e_k) (e_k, y) = (Ax, y). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (5.94) доказано, и поэтому оператор A^* , действующий по правилу (5.93), является сопряженным к оператору A .

Чтобы завершить доказательство теоремы, нужно убедиться в справедливости равенства (5.92): $A^*A = AA^*$.

Имеем, согласно (5.93) **),

$$\begin{aligned} AA^*x &= \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k (x, e_k) Ae_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \bar{\lambda}_k (x, e_k) e_k = \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_k \lambda_k (x, e_k) e_k = A^*Ax. \end{aligned}$$

*) Представление (5.69) справедливо для любого оператора, имеющего n попарно ортогональных собственных векторов.

**) Мы воспользовались так же соотношениями $Ae_k = \lambda_k e_k$.

Итак, для операторов A и A^* справедливо равенство (5.92), и, следовательно, оператор A является нормальным. Теорема доказана.

§ 8. Канонический вид линейных операторов

В этом параграфе рассматривается вопрос о выборе для заданного линейного оператора специального базиса, в котором матрица этого оператора имеет простейший вид, называемый *жордановой формой матрицы*.

Введем понятие *присоединенного элемента* оператора A .

Определение. Элемент x называется *присоединенным элементом оператора A* , отвечающим собственному значению λ , если для некоторого целого $m \geq 1$ выполняются соотношения

$$(A - \lambda I)^m x \neq 0, \quad (A - \lambda I)^{m+1} x = 0.$$

При этом число m называется *порядком присоединенного элемента x* .

Иными словами, если x — присоединенный элемент порядка m , то элемент $(A - \lambda I)^m x$ является собственным вектором оператора A .

В этом параграфе мы докажем следующую основную теорему.

Теорема 5.32. Пусть A — линейный оператор, действующий в n -мерном евклидовом пространстве V . Существует базис

$$\{e_k^m\}, \quad k = 1, 2, \dots, l; \quad m = 1, 2, \dots, n_k; \\ n_1 + n_2 + \dots + n_l = n, \quad (5.95)$$

образованный из собственных и присоединенных векторов оператора A , в котором действие оператора A описывается следующими соотношениями:

$$Ae_k^1 = \lambda_k e_k^1, \quad k = 1, 2, \dots, l; \\ Ae_k^m = \lambda_k e_k^m + e_k^{m-1}, \quad k = 1, 2, \dots, l; \quad m = 2, 3, \dots, n_k. \quad (5.96)$$

Прежде чем перейти к доказательству, сделаем ряд замечаний.

Замечание 1. Очевидно, векторы e_k^1 ($k = 1, 2, \dots, l$) базиса (5.95) являются собственными векторами оператора A , отвечающими собственным значениям λ_k .

Из определения присоединенных векторов и соотношений (5.96) следует, что векторы e_k^m ($k = 1, 2, \dots, l; m = 2, 3, \dots, n_k$) являются присоединенными векторами порядка m , отвечающими собственным значениям λ_k соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Обращаясь к формулам (5.13) и (5.12), мы видим, что соотношения (5.96) действительно определяют действие оператора A в пространстве V при заданном базисе $\{e_k^m\}$.

З а м е ч а н и е 3. Матрица A линейного оператора A в базисе $\{e_k^m\}$ имеет следующий «клеточный» вид:

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \Lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \Lambda_l \end{pmatrix}, \quad (5.97)$$

где клетка Λ_k представляет собой следующую матрицу:

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}. \quad (5.98)$$

З а м е ч а н и е 4. Форма (5.97) матрицы A линейного оператора A называется жордановой формой матрицы этого оператора. При этом клетка Λ_k обычно называется жордановой клеткой матрицы A . Отметим, что теорему 5.32 о приведении матрицы оператора к простейшему виду (5.97) называют теоремой о приведении матрицы оператора к жордановой форме.

З а м е ч а н и е 5. Жорданова форма матрицы (5.97) определена с точностью до порядка расположения клеток Λ_k по диагонали матрицы. Этот порядок зависит от порядка нумерации собственных значений λ_k .

Мы дадим доказательство теоремы 5.32, предложенное А. Ф. Филипповым *).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5.32. Для доказательства теоремы применим метод индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $n > 1$ и теорема верна для пространств размерности меньше n . Докажем, что при этом предположении она верна и для пространств размерности n . Этим и будет завершено доказательство теоремы.

Пусть λ — собственное значение оператора A . Согласно теореме 5.8 это число является корнем характеристического уравнения $\det(A - \lambda I) = 0$. Следовательно, ранг r линейного оператора **)

$$B = A - \lambda I \quad (5.99)$$

меньше n , т. е. $r < n$.

*) А. Ф. Филиппов. Краткое доказательство теоремы о приведении матрицы к жордановой форме. — Вестник Московского университета, 1971, № 2.

**) Напомним, что ранг r линейного оператора B равен размерности $\text{im } B$; согласно теореме 5.6 ранг r равен рангу матрицы этого оператора.

Линейный оператор B отображает пространство V на подпространство $\text{im } B$. Поэтому оператор B отображает подпространство $\text{im } B$ размерности $r < n$ в это же подпространство. По предположению индукции в $\text{im } B$ есть базис

$$\{h_k^m\}, \quad k = 1, 2, \dots, p; \quad m = 1, 2, \dots, r_k; \quad r_1 + r_2 + \dots + r_p = r, \quad (5.100)$$

в котором действие оператора B из $\text{im } B$ в $\text{im } B$ дается следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} Bh_k^1 &= \mu_k h_k^1, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ Bh_k^m &= \mu_k h_k^m + h_k^{m-1}, \quad k = 1, 2, \dots, p; \quad m = 2, 3, \dots, r_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.101)$$

Таким образом, в этом базисе матрица $\tilde{B}$ оператора $\tilde{B}$, действующего из $\text{im } B$ в $\text{im } B$ *), имеет следующий клеточный вид:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & M_p \end{pmatrix}, \quad \text{где } M_k = \begin{pmatrix} \mu_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_k \end{pmatrix}. \quad (5.102)$$

Пусть лишь первые m_1 ($m_1 \geq 0$) собственных значений оператора $\tilde{B}$ равны нулю.

Так как ранг каждой клетки M_k (см. (5.102)), для которой $\mu_k = 0$, равен $r_k - 1$, а ранг клетки, для которой $\mu_k \neq 0$, равен r_k , то, согласно (5.100), ранг матрицы $\tilde{B}$ равен $\sum_{k=1}^p r_k - m_1 = r - m_1$.

Поэтому размерность подпространства $\ker \tilde{B}$ равна m_1 **) и $\ker \tilde{B}$ представляет собой линейную оболочку векторов $h_1^1, h_2^1, \dots, h_{m_1}^1$. Эти векторы в силу линейной независимости образуют базис в $\ker \tilde{B}$. Очевидно, $\ker \tilde{B} \subset \ker B$. Дополним базис $h_1^1, h_2^1, \dots, h_{m_1}^1$ в $\ker \tilde{B}$ до базиса в $\ker B$ векторами $g_k, k = 1, 2, \dots, m_0, m_0 = n - r - m_1$ (размерность $\ker B$ по теореме 5.1 равна $n - \dim \text{im } B$, т. е. равна $n - r$).

Так как $g_k \in \ker B$, то

$$Bg_k = 0. \quad (5.103)$$

*) Символом $\tilde{B}$ мы будем обозначать оператор B , действующий из $\text{im } B$ в $\text{im } B$.

**) Ранг матрицы $\tilde{B}$ равен $\dim \text{im } \tilde{B}$. Согласно теореме 5.1 $\dim \text{im } \tilde{B} + \dim \ker \tilde{B} = r$. Следовательно, $\dim \ker \tilde{B} = m_1$.

Обратимся теперь к векторам $\hat{h}_k^r, k = 1, 2, \dots, m_1$. Поскольку эти векторы принадлежат $\text{im } B$, то существуют такие векторы $f_k \in V$, что

$$Bf_k = \hat{h}_k^r, k = 1, 2, \dots, m_1. \quad (5.104)$$

Докажем теперь, что векторы

$$\left. \begin{aligned} \hat{h}_k^m (k = 1, 2, \dots, p; m = 1, 2, \dots, r_k), \\ g_k (k = 1, 2, \dots, m_0), f_k (k = 1, 2, \dots, m_1) \end{aligned} \right\} \quad (5.105)$$

линейно независимы.

Рассмотрим следующую равную нулю линейную комбинацию f этих векторов:

$$f = \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{r_k} \alpha_{km} \hat{h}_k^m + \sum_{k=1}^{m_0} \beta_k g_k + \sum_{k=1}^{m_1} \gamma_k f_k = 0. \quad (5.106)$$

Рассмотрим действие оператора B на этот элемент f .

Получим согласно (5.101), (5.103) и (5.104), следующее выражение

$$Bf = \sum_{k=1}^p \alpha_{k1} \mu_k \hat{h}_k^1 + \sum_{k=1}^p \sum_{m=2}^{r_k} \alpha_{km} (\mu_k \hat{h}_k^m + \hat{h}_k^{m-1}) + \sum_{k=1}^{m_1} \gamma_k \hat{h}_k^r = 0. \quad (5.107)$$

Соотношение (5.107) представляет собой равную нулю линейную комбинацию базисных векторов $\{\hat{h}_k^m\}$; поэтому коэффициенты при этих векторах в указанной линейной комбинации равны нулю. Поскольку $\mu_k = 0$ при $k \leq m_1$, то из (5.107) следует, что коэффициенты при $\hat{h}_k^r$ в точности равны γ_k , и поэтому $\gamma_k = 0$. Отсюда и из соотношения (5.106) получаем равенства

$$g = \sum_{k=1}^{m_0} \beta_k g_k = - \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{r_k} \alpha_{km} \hat{h}_k^m, \quad (5.108)$$

из которых следует, что вектор g , представляющий собой линейную комбинацию векторов $\{g_k\}$, принадлежит $\ker B$ (напомним, что векторы $\{g_k\}$ составляют часть базиса в $\ker B$).

С другой стороны, из (5.108) вытекает, что g представляет собой линейную комбинацию векторов $\hat{h}_k^m$, т. е. принадлежит $\text{im } \tilde{B}$. Следовательно, g принадлежит $\ker \tilde{B}$ (напомним, что $\ker \tilde{B}$ есть пересечение $\text{im } \tilde{B}$ и $\ker B$), и поэтому $g = \sum_{k=1}^{m_1} \delta_k \hat{h}_k^1$.

Так как линейные оболочки наборов векторов $\{g\}$ и $\{h_k^1\}$ имеют общий лишь нулевой элемент (эти наборы вместе образуют базис в $\ker B$) и, как мы установили, g принадлежит каждой из упомянутых линейных оболочек, то $g = 0$. Но тогда из (5.108) следует, что $\beta_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m_0$) и $\alpha_{km} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, p$; $m = 1, 2, \dots, r_k$).

Итак, все коэффициенты в линейной комбинации (5.106) векторов (5.105) равны нулю, т. е. векторы (5.105) *линейно независимы*.

Общее число векторов (5.105) равно $r + m_0 + m_1$. Так как $m_0 = n - r - m_1$ (это было установлено выше в доказательстве при введении векторов g_k), то общее число векторов (5.105) равно n и поэтому они образуют базис в V . Обозначим

$$f_k = h_k^{r_k+1} \quad (5.109)$$

и запишем векторы этого базиса в следующей последовательности серий:

$$\left. \begin{array}{l} \{g_1\}; \{g_2\}; \quad \{g_{m_0}\}; \\ \{h_k^1, \quad h_k^{r_k}, h_k^{r_k+1}\}, k = 1, 2, \quad m_1; \\ \{h_k^1, \quad h_k^{r_k}\}, k = m_1 + 1, \quad p. \end{array} \right\} \quad (5.110)$$

Рассмотрим действие оператора B на векторы базиса (5.110) в пространстве V . Обращаясь к соотношениям (5.101), (5.103), (5.104) и (5.109), убедимся, что действие B в базисе (5.110) дается соотношениями

$$Bg_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad m_0, \quad Bh_k^{r_k+1} = h_k^{r_k}, \quad k = 1, 2, \quad m_1$$

и соотношениями (5.101).

Итак, в базисе (5.110) оператор $B = A - \lambda I$ действует по правилу (5.96), указанному в формулировке теоремы 5. Но тогда в этом базисе и оператор $A = B + \lambda I$ действует по этому же правилу. Теорема доказана.

§ 9. Линейные операторы в вещественном евклидовом пространстве

В этом параграфе мы покажем, каким образом определения и результаты предыдущих параграфов переносятся на случай вещественных евклидовых пространств.

1. Общие замечания. Рассмотрим произвольное n -мерное вещественное евклидово пространство V и оператор A , действующий из V в V .

Понятие линейного оператора для случая вещественного линейного пространства формулируется в полной аналогии с соответствующим понятием для комплексного пространства.

Определение 1. Оператор A называется *линейным*, если для любых элементов $x \in V$ и $y \in V$ и любых вещественных чисел α и β выполняется равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay. \quad (5.111)$$

В полной аналогии с комплексным пространством вводится понятие собственного значения и собственного вектора оператора.

Важно заметить, что собственные значения являются корнями характеристического уравнения оператора.

Обратное утверждение в вещественном случае верно лишь тогда, когда соответствующий корень характеристического уравнения вещественный. Только в этом случае указанный корень будет собственным значением рассматриваемого линейного оператора.

В связи с этим естественно выделить какой-либо класс линейных операторов в вещественном евклидовом пространстве, все корни характеристических уравнений которых вещественны.

В доказанной выше теореме 5.16 было установлено, что все собственные значения самосопряженного оператора вещественны. Кроме того, понятие самосопряженного оператора играло важную роль в выводах § 6 настоящей главы о квадратичных формах. Естественно поэтому перенести понятие самосопряженного оператора на случай вещественного пространства.

Предварительно введем понятие оператора A^* , сопряженного к оператору A . Именно, оператор A^* называется сопряженным к A , если для любых x и y из V выполняется равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Без затруднений на случай вещественного пространства переносится теорема 5.12 о существовании и единственности сопряженного оператора.

Напомним, что доказательство теоремы 5.12 опирается на понятие полуторалинейной формы. В вещественном случае вместо полуторалинейной формы следует воспользоваться билинейной формой $B(x, y)$.

По этому поводу в п. 2 § 4 гл. 5 сделано соответствующее замечание.

Напомним в связи с этим определение билинейной формы в любом вещественном не обязательно евклидовом линейном пространстве L . Пусть B — функция, сопоставляющая каждой упорядоченной паре (x, y) векторов $x \in L$ и $y \in L$ вещественное число $B(x, y)$.

Определение 2. Функция $B(x, y)$ называется *билинейной формой*, заданной на L , если для любых векторов x, y и z из L и любого вещественного числа λ выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} B(x + z, y) &= B(x, y) + B(z, y), \\ B(x, y + z) &= B(x, y) + B(x, z), \\ B(\lambda x, y) &= B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (5.112)$$

Важную роль в данном параграфе будет играть специальное представление билинейной формы $B(x, y)$ в виде

$$B(x, y) = (Ax, y), \quad (5.113)$$

где A — некоторый линейный оператор. Соответствующая теорема (теорема 5.11) об аналогичном представлении полуторалинейной формы в комплексном пространстве опиралась на выводы леммы п. 1 § 4 настоящей главы о специальном представлении линейной формы $f(x)$. В конце указанного пункта отмечалось, что эта лемма верна и в вещественном пространстве. Заметим только, что в доказательстве леммы выбор элементов h^k нужно производить не по формуле (5.41), а с помощью формулы $h^k = f(e_k)$, где $f(x)$ — данная линейная форма в вещественном пространстве.

В § 6 настоящей главы были введены эрмитовы формы. Эрмитова форма — это полуторалинейная форма $B(x, y)$ в комплексном пространстве, характеризующаяся соотношением $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$ (черта над B означает, что берется комплексно сопряженное значение для B).

В случае вещественного пространства аналогом эрмитовых форм служат симметричные билинейные формы. Такая форма характеризуется соотношением

$$B(x, y) = B(y, x). \quad (5.114)$$

Билинейная форма $B(x, y)$, заданная на линейном пространстве L , называется кососимметричной, если для любых векторов x и y из L выполняется соотношение $B(x, y) = -B(y, x)$. Очевидно, что для каждой билинейной формы функции

$$B_1(x, y) = \frac{1}{2} [B(x, y) + B(y, x)],$$

$$B_2(x, y) = \frac{1}{2} [B(x, y) - B(y, x)]$$

являются соответственно симметричной и кососимметричной билинейными формами. Поскольку $B(x, y) = B_1(x, y) + B_2(x, y)$, то мы получаем следующее утверждение:

Любую билинейную форму можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейной формы.

Нетрудно видеть, что такое представление является единственным.

Мы докажем следующую теорему о симметричных билинейных формах (эта теорема служит аналогом теоремы 5.25 об эрмитовых формах).

Теорема 5.33. *Для того чтобы билинейная форма $B(x, y)$, заданная на всевозможных векторах x и y вещественного евклидова пространства V , была симметричной, необходимо и достаточно, чтобы линейный оператор A , фигурирующий в представлении (5.113), был самосопряженным.*

Доказательство. Если A — самосопряженный оператор, то, используя свойства скалярного произведения, получим

$$B(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (Ay, x) = B(y, x).$$

Таким образом, выполняется соотношение (5.114), т. е. билинейная форма $B(x, y) = (Ax, y)$ симметричная.

Если же форма $B(x, y) = (Ax, y)$ симметричная, то справедливы соотношения $(Ax, y) = B(x, y) = B(y, x) = (Ay, x)$.

Следовательно, оператор A самосопряженный. Теорема доказана.

Введем понятие матрицы линейного оператора A . Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — какой-либо базис в n -мерном вещественном линейном пространстве L . Положим $Ae_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}^i e_i$.

Тогда, как и в комплексном случае, нетрудно показать, что если $x = \sum_{k=1}^n x^k e_k$, то для компонент вектора $y = Ax$ справедливо представление $y^i = \sum_{k=1}^n a_{ik}^i x^k$.

Матрица $A = (a_{ik}^i)$ называется матрицей линейного оператора A в базисе $\{e_k\}$.

Аналогично тому, как это было сделано в § 2 настоящей главы, можно доказать, что величина $\det A$ не зависит от выбора базиса и, тем самым, корректно вводится определитель $\det A$ оператора A .

Характеристическим уравнением, отвечающим оператору A , называется уравнение $\det(A - \lambda I) = 0$, а многочлен, стоящий в левой части этого уравнения, называется *характеристическим многочленом оператора A* .

Докажем теперь теорему о корнях характеристического многочлена самосопряженного оператора в вещественном евклидовом пространстве.

Теорема 5.34. *Все корни характеристического многочлена самосопряженного линейного оператора A в евклидовом пространстве вещественны.*

Доказательство. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ — корень характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (5.115)$$

самосопряженного оператора A .

Фиксируем в V какой-либо базис $\{e_k\}$ и обозначим через a_{jk} — элементы матрицы оператора A в этом базисе (отметим, что a_{jk} — вещественные числа).

Будем искать ненулевое решение следующей системы линейных однородных уравнений относительно $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k = \lambda \xi_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.116)$$

где $\lambda = \alpha + i\beta$.

Так как определитель системы (5.116) равен $\det(A - \lambda I)$ (напомним, что определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса и, согласно (5.115), этот определитель равен нулю), то система (5.116) однородных линейных уравнений имеет ненулевое решение $\xi_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Подставляя это решение в правую и левую части системы (5.116), учитывая при этом, что $\lambda = \alpha + i\beta$ и отделяя затем вещественную и мнимую части полученных соотношений, найдем, что наборы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ вещественных чисел *) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k &= \alpha x_j - \beta y_j, \\ \sum_{k=1}^n a_{jk} y_k &= \alpha y_j + \beta x_j, \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.117)$$

Рассмотрим в данном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторы x и y с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ соответственно. Тогда соотношения (5.117) можно переписать в виде

$$Ax = \alpha x - \beta y, \quad Ay = \alpha y + \beta x.$$

Умножим первое из полученных соотношений скалярно на y , а второе — на x . Очевидно, получим равенства

$$\left. \begin{aligned} (Ax, y) &= \alpha(x, y) - \beta(y, y), \\ (x, Ay) &= \alpha(x, y) + \beta(x, x). \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

Так как оператор A самосопряженный, то $(Ax, y) = (x, Ay)$. Поэтому путем вычитания соотношений (5.118) получим равенство

$$\beta[(x, x) + (y, y)] = 0.$$

Но $(x, x) + (y, y) \neq 0$ (если $(x, x) + (y, y) = 0$, то $x_k = 0$ и $y_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$; следовательно, решение $\xi_k = x_k + iy_k$ было бы нулевым, тогда как по построению это решение ненулевое). Поэтому $\beta = 0$, а так, как β — мнимая часть корня $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического уравнения (5.115), то, очевидно, λ — вещественное число. Теорема доказана.

*) Напомним, что не все эти числа равны нулю.

Как и в комплексном случае, для самосопряженного оператора справедливо утверждение о существовании ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов этого оператора (аналог теоремы 5.21). Докажем это утверждение.

Теорема 5.35. *У каждого самосопряженного линейного оператора A , действующего в n -мерном вещественном евклидовом пространстве V , существует ортонормированный базис из собственных векторов.*

Доказательство. Пусть λ_1 — вещественное собственное значение оператора A , а e_1 — единичный собственный вектор, отвечающий этому собственному значению ($\|e_1\| = 1$).

Обозначим через V_1 $(n-1)$ -мерное подпространство пространства V , ортогональное к e_1 . Очевидно, V_1 — инвариантное подпространство пространства V (т. е. если $x \in V_1$, то $Ax \in V_1$). Действительно, пусть $x \in V_1$; тогда $(x, e_1) = 0$. Поскольку оператор A самосопряженный и λ_1 — собственное значение A , получим $(Ax, e_1) = (x, Ae_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0$.

Следовательно, $Ax \in V_1$, и поэтому V_1 — инвариантное подпространство оператора A . Поэтому, мы можем рассматривать оператор A в подпространстве V_1 . Ясно, что в V_1 оператор A будет самосопряженным. По теореме 5.34 у оператора A , действующего в V_1 , имеется вещественное собственное значение λ_2 , которому отвечает собственный вектор $e_2 \in V_1$ оператора A , удовлетворяющий условию $\|e_2\| = 1$.

Обращаясь далее к $(n-2)$ -мерному подпространству V_2 , ортогональному векторам e_1 и e_2 и повторяя только что описанные рассуждения, мы построим собственный вектор e_3 оператора A , ортогональный векторам e_1 и e_2 и удовлетворяющий условию $\|e_3\| = 1$.

Рассуждая и дальше таким же образом, мы в результате найдем n взаимно ортогональных собственных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ оператора A , удовлетворяющих условию $\|e_k\| = 1, k = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, векторы $\{e_k\}$ образуют базис в V . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в n -мерном евклидовом пространстве V , состоящий из собственных векторов самосопряженного оператора A , т. е. $Ae_k = \lambda_k e_k$. Тогда матрица оператора A в базисе $\{e_k\}$ является диагональной, причем диагональные элементы имеют вид $a_k^k = \lambda_k$.

Отметим, что если $\{e_k\}$ — произвольный ортонормированный базис в вещественном евклидовом пространстве V , то матрица самосопряженного оператора A будет симметричной, т. е. $A' = A$. Верно и обратное утверждение, т. е. если в некотором ортонормированном базисе $\{e_k\}$ матрица оператора является симметричной, то оператор A — самосопряженный.

Этим вещественный случай отличается от комплексного, поскольку в комплексном случае оператор A является самосопряженным тогда и только тогда, когда матрица A этого оператора в ортонормированном базисе является эрмитовой, т. е. элементы a_k^i матрицы A удовлетворяют условию $a_k^i = \bar{a}_i^k$ (черта означает комплексное сопряжение).

Указанное утверждение непосредственно следует из того, что если (a_k^i) — матрица оператора A , то матрица сопряженного оператора в вещественном случае равна (a_i^k) , а в комплексном случае — $(\bar{a}_i^k)$, что легко проверяется прямым вычислением.

2. Ортогональные операторы. В комплексном евклидовом пространстве важную роль играют унитарные операторы, введенные в § 7. Аналогом унитарных операторов в вещественном евклидовом пространстве являются ортогональные операторы.

Определение 1. Линейный оператор P , действующий в вещественном евклидовом пространстве V , называется ортогональным, если для любых x и y из V выполняется равенство

$$(Px, Py) = (x, y). \quad (5.119)$$

Таким образом, ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение. Отсюда непосредственно следует, что если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства V , то $Pe_1, Pe_2, \dots, Pe_n$ также является ортонормированным базисом. В дальнейшем условии (5.119) будем называть условием ортогональности оператора P .

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.36. Для того чтобы линейный оператор P был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор P^{-1} и было выполнено равенство

$$P^* = P^{-1}, \quad (5.120)$$

где P^* — оператор, сопряженный к P , а P^{-1} — оператор, обратный к P .

Доказательство. 1) **Необходимость.** Пусть P — ортогональный оператор, т. е. выполняется условие (5.119). Применяя сопряженный оператор P^* , это условие можно записать в виде $(P^*Px, y) = (x, y)$.

Таким образом, для любых x и y выполняется равенство $((P^*P - I)x, y) = 0$.

Фиксируя в этом равенстве любой элемент x , считая y произвольным, получим, что линейный оператор $P^*P - I$ действует по правилу $(P^*P - I)x = 0$.

Следовательно, $P^*P = I$; совершенно аналогично можно убедиться, что $PP^* = I$. Таким образом, операторы P^* и P взаимно обратны, т. е. условие (5.120) выполнено.

2) **Достаточность.** Пусть выполнено условие (5.120). Тогда, очевидно, $PP^* = P^*P = I$.

Обращаясь к определению сопряженного оператора и используя только что написанные соотношения, получим для любых x и y равенства $(Px, Py) = (x, P^*Py) = (x, Iy) = (x, y)$.

Мы видим, что условие (5.119) выполнено, следовательно, оператор P ортогональный. Теорема доказана.

Введем теперь понятие ортогональной матрицы P .

Определение 2. Матрица P называется ортогональной, если

$$P'P = PP' = I, \quad (5.121)$$

где P' — транспонированная матрица, а I — единичная матрица.

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве V , то оператор P является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в базисе $\{e_k\}$ ортогональна.

Непосредственно из равенства (5.121) следует, что если матрица $P = (p_{ik}^*)$ является ортогональной, то

$$\sum_{i=1}^n p_{ik}^* p_{il}^* = \begin{cases} 1 & \text{при } k=l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

В комплексном евклидовом пространстве аналогом ортогональной матрицы является унитарная матрица. Именно, матрица U называется унитарной, если выполняется соотношение

$$U^*U = UU^* = I, \quad (5.122)$$

в котором U^* — эрмитово сопряженная матрица, т. е. $U^* = \bar{U}'$, где штрих означает транспонирование, а черта — комплексное сопряжение.

Нетрудно показать, что в ортонормированном базисе матрица линейного оператора U является унитарной тогда и только тогда, когда оператор U является унитарным.

В заключение рассмотрим для примера ортогональные преобразования в одномерном и двумерном пространствах.

В одномерном случае каждый вектор x имеет вид $x = \alpha e$, где α — вещественное число, и e — вектор, порождающий данное пространство. Тогда $Pe = \lambda e$, и так как $(Pe, Pe) = \lambda^2 (e, e) = (e, e)$, то $\lambda = \pm 1$.

Таким образом, в одномерном случае существуют два ортогональных преобразования: $P_+x = x$ и $P_-x = -x$.

В двумерном случае каждое ортогональное преобразование определяется в произвольном ортонормированном базисе ортогональной матрицей порядка 2, т. е. матрицей $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Из условия $PP' = P^*P = I$ следует

$$a^2 + b^2 = 1, \quad a^2 = d^2, \quad b^2 = c^2, \quad ac + db = 0, \quad ab + cd = 0.$$

Полагая $a = \cos \varphi$, $b = -\sin \varphi$, получаем, что каждая ортогональная матрица порядка 2 имеет вид

$$P_{\pm} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \pm \sin \varphi & \pm \cos \varphi \end{pmatrix},$$

причем во второй строке в обоих случаях следует брать либо знак $+$, либо знак $-$.

Отметим, что $\det P_{\pm} = \pm 1$. Ортогональная матрица P_{+} называется *собственной*, а ортогональная матрица P_{-} — *несобственной*.

Оператор P_{+} с матрицей P_{+} в ортонормированном базисе e_1, e_2 осуществляет поворот в плоскости e_1, e_2 на угол φ .

Для того чтобы выяснить, как действует оператор P_{-} с матрицей P_{-} , введем матрицу $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, совпадающую с P_{-} при $\varphi = 0$, и заметим, что $P_{-} = QP_{+}$. Матрица Q отвечает отражению плоскости относительно оси e_1 , следовательно, действие оператора P_{-} заключается в повороте на угол φ и последующем отражении.

Заметим, что векторы $P_{+}e_1, P_{+}e_2$ образуют в силу ортогональности P_{+} ортонормированный базис и в этом базисе матрица оператора P_{-} совпадает с Q , т. е. является диагональной.

В общем случае, когда ортогональный оператор P действует в n -мерном евклидовом пространстве, существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, в котором матрица оператора P имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \\ & & -i & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 & & & & \\ & & & & \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 & & & & \\ & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & \cos \varphi_k - \sin \varphi_k & & \\ & & & & & & \sin \varphi_k - \cos \varphi_k & & \end{pmatrix}.$$

В этой матрице все элементы, кроме выписанных, равны нулю.

Таким образом, в некотором ортонормированном базисе действие ортогонального оператора сводится к последовательным поворотам и отражениям относительно координатных осей.

ГЛАВА 6

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В настоящей главе изучаются различные методы решения системы линейных уравнений с вещественными коэффициентами относительно неизвестных, также принимающих вещественные значения.

Все используемые на практике методы решения систем линейных уравнений можно разделить на две большие группы: точные методы и итерационные методы.

Под точным методом решения понимается метод, теоретически позволяющий получить точные значения неизвестных в результате проведения конечного числа арифметических операций. Примером точного метода может служить изложенный в главе 3 метод, основанный на применении формул Крамера *).

Итерационные методы позволяют получить искомое решение лишь в виде предела последовательности векторов, построение которых производится с помощью единообразного процесса, называемого процессом итераций (последовательных приближений). Итерационные методы весьма удобны для использования современной вычислительной техники.

Изложению наиболее употребительных итерационных методов решения линейных систем посвящен § 1 настоящей главы.

Итерационные методы находят широкое применение и при решении другой важной вычислительной задачи линейной алгебры — так называемой полной проблемы собственных значений (так называют проблему отыскания всех собственных значений и отвечающих им собственных векторов заданной матрицы **)). В итерационных методах соб-

*) Практически метод, основанный на формулах Крамера, обычно не применяется, ибо он требует проведения очень большого числа арифметических операций и записей. Более удобным является точный метод, основанный на последовательном исключении неизвестных и называемый методом Гаусса (его изложение можно найти, например, в книге Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой «Вычислительные методы линейной алгебры», Гостехиздат, 1963, гл. 2).

**) В отличие от этой проблемы, задачу отыскания некоторых (например, наибольших по модулю) собственных значений заданной матрицы называют частичной проблемой собственных значений.

ственные значения вычисляются как пределы некоторых числовых последовательностей без предварительного определения коэффициентов характеристического многочлена.

В § 2 настоящей главы разбирается один из самых важных и наиболее употребительных на ЭВМ итерационных методов решения полной проблемы собственных значений — так называемый метод вращений (или метод Якоби). Этот метод применим ко всякой симметричной (или к эрмитовой) матрице, легко реализуется на ЭВМ и всегда сходится. Он устойчив по отношению к ошибкам округления результатов промежуточных вычислений и обладает тем замечательным свойством, что наличие кратных и близких друг к другу собственных значений не только не замедляет его сходимости, а, напротив, ускоряет ее. Метод вращений, предложенный Якоби и известный еще с середины прошлого века, долгое время не находил практического применения из-за большого объема вычислений, необходимых для его реализации. И лишь появление быстродействующих электронных вычислительных машин сделало его самым эффективным методом решения полной проблемы собственных значений симметричных и эрмитовых матриц.

§ 1. Итерационные методы решения линейных систем

1. Метод простой итерации (метод Якоби). Рассмотрим квадратную систему линейных уравнений с вещественными коэффициентами (3.10) (см. п. 1 § 2 гл. 3), которую запишем в матричном виде

$$AX = F, \quad (6.1)$$

понимая под A основную матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

а под X и F векторы-столбцы вида $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$, пер-

вый из которых подлежит определению, а второй задан.

Предполагая однозначную разрешимость системы (6.1), заменим матричное уравнение (6.1) эквивалентным ему матричным уравнением $X = X - \tau AX + \tau F$, в котором через τ обозначено вещественное число, обычно называемое стационарным параметром.

С помощью этого последнего уравнения составим итерационную последовательность векторов $\{X_k\}$, определив ее рекуррентным соотношением

$$X_{k+1} = X_k - \tau A X_k + \tau F \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (6.3)$$

при произвольном выборе «нулевого» приближения X_0 .

Метод простой итерации заключается в замене точного решения X системы (6.1) k -й итерацией X_k с достаточно большим номером k . Оценим погрешность $Z_k = X_k - X$ метода простой итерации.

Из соотношений (6.3) и (6.1) сразу же вытекает следующее матричное уравнение для погрешности Z_k :

$$Z_{k+1} = (E - \tau A) Z_k, \quad (6.4)$$

где E — единичная матрица порядка n .

Введем в рассмотрение норму вектора в пространстве E^n и операторную норму квадратной матрицы порядка n . Как обычно, назовем нормой вектора X число $\|X\|$, равное корню квадратному из суммы квадратов координат этого вектора. Назовем операторной нормой произвольной матрицы A число $\|A\|$, равное либо точной верхней грани отношения $\|AX\|/\|X\|$ на множестве всех ненулевых векторов X , либо (что то же самое) точной верхней грани норм $\|AX\|$ на множестве всех векторов X , имеющих норму, равную единице.

Итак, по определению

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}. \quad (6.5)$$

Напомним, что для любой симметричной матрицы A *) операторная норма этой матрицы равна наибольшему по модулю собственному значению этой матрицы (см. п. 4 § 5 гл. 5), т. е.

$$\|A\| = \max_s |\lambda_s|. \quad (6.6)$$

Из (6.5) вытекает следующее неравенство, справедливое для любой матрицы A и любого вектора X :

$$\|AX\| \leq \|A\| \|X\|. \quad (6.7)$$

Из матричного уравнения для погрешности (6.4) и из неравенства (6.7) мы получим, что для любого номера k

$$\|Z_{k+1}\| \leq \|E - \tau A\| \|Z_k\|. \quad (6.8)$$

Докажем теперь следующую простую, но важную теорему.

*) Матрица A называется симметричной, если $A = A'$.

Теорема 6.1. Для того чтобы итерационная последовательность (6.3) при любом выборе нулевого приближения X_0 и при данном значении параметра τ сходилась к точному решению X системы (6.1), достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\rho = \|E - \tau A\| < 1. \quad (6.9)$$

При этом последовательность (6.3) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем ρ .

В случае, если матрица A является симметричной, условие (6.9) является и необходимым условием сходимости итерационной последовательности (6.3) при любом выборе нулевого приближения X_0 .

Доказательство. Для установления достаточности условия (6.9) заметим, что из неравенства (6.8) вытекает следующее соотношение:

$$\|Z_k\| \leq \|E - \tau A\|^k \|Z_0\|. \quad (6.10)$$

Из (6.10) очевидно, что условие (6.9) обеспечивает сходимость последовательности погрешностей Z_k к нулю со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем ρ .

В случае, если матрица A является симметричной, будет симметричной и матрица $E - \tau A$, а поэтому в силу (6.6) условие (6.9) можно переписать в эквивалентном виде

$$\rho = \max_s |1 - \tau \lambda_s| < 1 \quad (6.11)$$

(здесь через $\{\lambda_s\}$ обозначены собственные значения матрицы A).

Убедимся в том, что условие (6.11) является необходимым условием сходимости к нулю последовательности $\{Z_k\}$ при любом выборе нулевого приближения X_0 . Предположим, что условие (6.11) не выполнено. Тогда существует собственное значение λ_s , удовлетворяющее неравенству $|1 - \tau \lambda_s| \geq 1$. Обозначим через $X^{(s)}$ отвечающий этому собственному значению собственный вектор матрицы A и выберем нулевое приближение X_0 так, чтобы Z_0 совпало с $X^{(s)}$. Тогда, последовательно записывая соотношение (6.4) для номеров 1, 2, ..., k , мы получим, что $Z_k = (1 - \tau \lambda_s)^k Z_0$. Из последнего соотношения в силу неравенства $|1 - \tau \lambda_s| \geq 1$ вытекает, что $\|Z_k\|$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Теорема 6.1 доказана.

Сразу же заметим, что для практических целей недостаточно установить только факт сходимости последовательности итераций. Центральной задачей численных методов является оценка скорости сходимости. Очень важно знать, как наилучшим способом распорядиться стационарным параметром τ для того, чтобы получить наиболее быструю сходимость. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Пусть задана ε -точность, с которой нам требуется получить точное решение системы (6.1). Требуется найти итерацию X_k с таким номером k , для которого

$$\|Z_k\| \leq \varepsilon \|Z_0\|. \quad (6.12)$$

Из (6.9) и (6.10) вытекает, что $\|Z_k\| \leq \rho^k \|Z_0\|$, и, стало быть, (6.12) выполняется при $\rho^k \leq \varepsilon$, т. е. при $k \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho)}$.

Отсюда видно, что для уменьшения числа итераций k , достаточных для достижения требуемой ε -точности, следует выбрать параметр τ так, чтобы получить минимум функции $\rho = \rho(\tau) = \|E - \tau A\|$.

Считая матрицу A симметричной и положительно определенной, мы приходим к следующей задаче оптимизации: найти минимум функции

$$\min_{\tau} \rho(\tau) = \min_{\tau} \|E - \tau A\| = \min_{\tau} \{ \max_i |1 - \tau \lambda_i| \}.$$

Решение этой и несколько более общей задачи, предложенное А. А. Самарским, излагается в следующем пункте. Там будет доказано, что указанный минимум функции $\rho = \rho(\tau)$ достигается для значения $\tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$, где γ_1 и γ_2 — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы A , причем минимальное значение функции $\rho(\tau)$ равно

$$\frac{1 - \gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}.$$

2. Общий неявный метод простой итерации. Снова обратимся к решению линейной системы (6.1), но на этот раз заменим итерационную последовательность (6.3) более общей итерационной последовательностью, определяемой соотношением

$$B \frac{X_{k+1} - X_k}{\tau} + AX_k = F, \quad (6.13)$$

в котором B представляет собой некоторую «легко обратимую» квадратную матрицу n -го порядка, а τ — стационарный параметр. Такой метод составления итерационной последовательности и называется не я в н ы м м е т о д о м п р о с т о й и т е р а ц и и . Рассмотренный в предыдущем пункте явный метод простой итерации получается из неявного метода в частном случае $B = E$, где E — единичная матрица порядка n .

Для того чтобы сформулировать в удобной для приложений форме условие сходимости общего неявного метода простой итерации, напомним некоторые понятия, введенные в предыдущей главе.

Напомним, что матрица A называется **положительно определенной**, если $(AX, X) > 0$ для любого ненулевого вектора X . В главе 5 было доказано, что необходимым и достаточным условием положительной определенности симметричной матрицы A (или, что то же самое, самосопряженного линейного оператора A) является положительность всех собственных значений этой матрицы (этого оператора).

Если матрица A является положительно определенной, то мы договоримся писать неравенство $A > 0$. Далее договоримся писать неравенство $B > A$ (или $A < B$) в случае, если $B - A > 0$ (т. е. если матрица $B - A$ является положительно определенной).

Докажем следующую замечательную теорему *).

Теорема 6.2 (теорема А. А. Самарского). Пусть матрица A является симметричной и выполнены условия $A > 0$, $B > 0$ (симметричность матрицы B , вообще говоря, не предполагается).

Тогда для того чтобы итерационная последовательность, определяемая соотношением

$$B \frac{X_{k+1} - X_k}{\tau} + AX_k = F, \quad (6.13)$$

при любом выборе нулевого приближения X_0 сходилась к точному решению X системы $AX = F$ достаточно, чтобы были выполнены условия

$$2B > \tau A, \quad \tau A > 0. \quad (6.14)$$

При дополнительном предположении о том, что матрица B является симметричной, условия (6.14) не только достаточны, но и необходимы для сходимости указанной итерационной последовательности при любом выборе нулевого приближения X_0 .

Доказательство. 1) Достаточность. Прежде всего оценим погрешность $Z_k = X_k - X$. Так как X удовлетворяет уравнению $AX = F$, а X_k соотношению (6.13), то для Z_k получим соотношение

$$B \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau} + AZ_k = 0. \quad (6.15)$$

Установим для погрешности Z_k так называемое основное энергетическое соотношение.

*) Эта теорема является частным случаем доказанного известным советским математиком А. А. Самарским значительно более общего утверждения. (А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.)

Умножая (6.15) скалярно на вектор

$$2(Z_{k+1} - Z_k) = 2\tau \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau}.$$

получим равенство

$$2\tau \left(B \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau}, \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau} \right) + 2\tau \left(AZ_k, \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau} \right) = 0. \quad (6.16)$$

Если воспользоваться обозначением $C = 2B - \tau A$ и соотношением

$$Z_k = \frac{Z_{k+1} + Z_k}{2} - \frac{Z_{k+1} - Z_k}{2} = \frac{Z_{k+1} + Z_k}{2} - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau},$$

то равенство (6.16) можно переписать в виде

$$\tau \left(C \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau}, \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau} \right) + (A(Z_{k+1} + Z_k), Z_{k+1} - Z_k) = 0. \quad (6.17)$$

Далее заметим, что в силу симметрии матрицы A второе слагаемое в (6.17) равно $(AZ_{k+1}, Z_{k+1}) - (AZ_k, Z_k)$. Это приводит нас к основному энергетическому соотношению и ю:

$$\tau \left(C \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau}, \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau} \right) + (AZ_{k+1}, Z_{k+1}) = (AZ_k, Z_k). \quad (6.18)$$

Для доказательства достаточности условий (6.14) остается с помощью основного энергетического соотношения доказать сходимость к нулю последовательности $\{ \|Z_k\| \}$.

Из основного энергетического соотношения и из положительной определенности матрицы $C = 2B - \tau A$ вытекает, что $(AZ_{k+1}, Z_k) \leq (AZ_k, Z_k)$, т. е. вытекает невозрастание последовательности $\{(AZ_k, Z_k)\}$. Из условия $A > 0$ вытекает, кроме того, что эта последовательность ограничена снизу нулем, а поэтому сходится.

Но тогда из основного энергетического соотношения следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(C \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau}, \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau} \right) = 0. \quad (6.19)$$

Напомним, что для положительно определенной матрицы C всегда найдется $\delta > 0$ такое, что $(CX, X) \geq \delta (X, X)$ для любого вектора X или, что то же самое, $\|X\|^2 \leq \frac{1}{\delta} (CX, X)$. Последнее неравенство позволяет заключить, что из равенства нулю указанного выше предела (6.19) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Z_{k+1} - Z_k\| = 0. \quad (6.20)$$

Для завершения доказательства достаточности следует воспользоваться соотношением

$$B \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau} + AZ_k = 0,$$

из которого в силу существования для положительно определенной матрицы A ограниченной обратной матрицы A^{-1} вытекает, что

$$Z_k = -A^{-1} \cdot \frac{B}{\tau} (Z_{k+1} - Z_k).$$

Последнее равенство и соотношение (6.20) дают право заключить, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Z_k\| = 0$. Достаточность доказана.

Для доказательства необходимости условий (6.14) при дополнительном предположении о том, что матрица B симметрична, привлечем следующую лемму.

Лемма. Пусть C — некоторая симметричная матрица, а B — симметричная положительно определенная матрица. Тогда матрица C является положительно определенной в том и только в том случае, когда являются положительными все собственные значения задачи $CX = \lambda BX$.

Для доказательства леммы заметим, что так как матрица B является симметричной и положительно определенной, то (в силу теоремы 5.24 из п. 6 § 5 гл. 5) существует самосопряженный положительно определенный оператор $B^{1/2}$ такой, что для соответствующей ему матрицы $B^{1/2}$ справедливо равенство $B^{1/2} \times B^{1/2} = B$. Так как матрица $B^{1/2}$ является положительно определенной и симметричной, то для нее существует ограниченная и симметричная обратная матрица, которую мы обозначим через $B^{-1/2}$.

Заметим далее, что с помощью замены $X = B^{-1/2} \cdot Y$ и умножения слева на матрицу $B^{-1/2}$ задача на собственные значения $CX = \lambda BX$ переходит в эквивалентную задачу на собственные значения $B^{-1/2} \cdot C \cdot B^{-1/2} Y = \lambda Y$, так что для доказательства леммы остается убедиться в том, что заведомо симметричная матрица $B^{-1/2} \cdot C \cdot B^{-1/2}$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда является положительно определенной матрица C . Это последнее сразу вытекает из того, что для любых двух ненулевых векторов X и Y , связанных соотношением $Y = B^{-1/2} \cdot X$ справедливо равенство

$$(B^{-1/2} \cdot C \cdot B^{-1/2} X, X) = (C \cdot B^{-1/2} X, B^{-1/2} \cdot X) = (CY, Y).$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем перейти к доказательству необходимости условий (6.14) теоремы 6.2 при дополнительном предположении о том, что матрица B является симметричной.

2) **Необходимость.** Будем опираться на следующее утверждение из доказанной выше леммы: *если матрица B является*

симметричной и положительно определенной, а матрица C является симметричной и не является положительно определенной, то задача на собственные значения $CX = \lambda BX$ имеет хотя бы одно неположительное собственное значение λ_s .

Предположим, что не выполнено первое из условий (6.14), т. е. не выполнено требование $2B - \tau A > 0$.

Полагая в проведенных выше рассуждениях $C = 2B - \tau A$, мы получим, что задача на собственные значения $(2B - \tau A)X = \lambda BX$ имеет хотя бы одно неположительное собственное значение λ_s . Обозначим через $X^{(s)}$ отвечающий λ_s собственный вектор и выберем нулевое приближение X_0 так, чтобы было выполнено условие $Z_0 = X^{(s)}$.

Тогда, переписав уравнение для погрешности (6.15) в виде $BZ_{k+1} = -BZ_k + (2B - \tau A)Z_k$, мы получим, последовательно полагая k равным $0, 1, \dots$,

$$Z_1 = (-1 + \lambda_s)X^{(s)}, \quad Z_2 = (-1 + \lambda_s)^2 X^{(s)}, \dots, \\ Z_k = (-1 + \lambda_s)^k X^{(s)},$$

Поскольку $-1 + \lambda_s < -1$, то очевидно, что $\|Z_k\|$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Аналогично рассматривается случай невыполнения второго условия (6.14), т. е. условия $\tau A > 0$. В этом случае в проведенных выше рассуждениях следует положить $C = \tau A$. Мы получим при этом, что задача $\tau AX = \lambda BX$ имеет хотя бы одно неположительное собственное значение λ_s с собственным вектором $X^{(s)}$. Выбирая нулевое приближение X_0 так, чтобы было справедливо равенство $Z_0 = X^{(s)}$ и переписывая (6.15) в эквивалентном виде $BZ_{k+1} = BZ_k - \tau AZ_k$, мы получим, что

$$Z_1 = (1 - \lambda_s)X^{(s)}, \quad Z_2 = (1 - \lambda_s)^2 X^{(s)}, \dots, Z_k = (1 - \lambda_s)^k X^{(s)}, \dots$$

Так как $\lambda_s \leq 0$, то очевидно, что $\|Z_k\|$ на стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Теорема 6.2 полностью доказана.

Перейдем теперь к оценке скорости сходимости общего неявного метода простой итерации. Следуя А. А. Самарскому *), выясним вопрос о выборе такого значения параметра τ , которое обеспечивает наиболее быструю сходимость.

Предположим, что матрица B является симметричной и положительно определенной. С помощью такой матрицы естественно ввести так называемое «энергетическое» скалярное произведение двух произвольных векторов X и Y , положив его равным $(BX, Y) = (X, BY)$. Такое скалярное произведение будем обозначать символом $(X, Y)_B$.

*) А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.

А. А. Самарский, А. В. Гулин. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.

С помощью матрицы $B^{1/2}$ это скалярное произведение можно записать в виде $(X, Y)_B = (B^{1/2}B^{1/2}X, Y) = (B^{1/2}X, B^{1/2}Y)$. С помощью последнего равенства легко проверяется справедливость для введенного нами скалярного произведения четырех аксиом скалярного произведения (см. п. 1 § 1, гл. 4).

Далее естественно ввести энергетическую норму вектора X , положив ее равной $\sqrt{(X, X)_B} = \sqrt{(BX, X)}$. Эту энергетическую норму мы обозначим символом $\|X\|_B$.

Две различные нормы одной и той же совокупности векторов $\|X\|_I$ и $\|X\|_B$ называют эквивалентными, если существуют такие положительные постоянные γ_1 и γ_2 , что справедливы неравенства

$$\gamma_1 \|X\|_I \leq \|X\|_B \leq \gamma_2 \|X\|_I.$$

Заметим, что энергетическая норма вектора X и обычная его норма являются эквивалентными. В самом деле, справедливость неравенства $\gamma_1 \|X\| \leq \|X\|_B$, т. е. неравенства $\gamma_1^2 (X, X) \leq (BX, X)$ вытекает из положительной определенности матрицы B , а справедливость неравенства $\|X\|_B \leq \gamma_2 \|X\|$, т. е. неравенства $(BX, X) \leq \gamma_2^2 \|X\|^2$ вытекает из неравенства Коши—Буняковского и оценки (6.7) (достаточно положить $\gamma_2^2 = \|B\|$).

Установленная эквивалентность обычной и энергетической норм позволяет утверждать, что последовательность $\|X_k\|$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда сходится к нулю последовательность $\|X_k\|_B$.

Для дальнейших рассуждений энергетическая норма является более удобной, чем обычная норма.

Докажем следующую фундаментальную теорему.

Теорема 6.3 (теорема А. А. Самарского). Пусть матрицы A и B симметричны и положительно определены, Z_k обозначает погрешность общего неявного метода простой итерации. Тогда, для того чтобы при $\rho < 1$ было справедливо неравенство $\|Z_k\|_B \leq \rho^k \|Z_0\|_B$, достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau} B. \quad (6.21)$$

З а м е ч а н и е. А. А. Самарским доказано, что условие (6.21) не только достаточно, но и необходимо для справедливости неравенства $\|Z_k\|_B \leq \rho^k \|Z_0\|_B$, но мы на этом останавливаться не будем.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6.3. Для удобства разобьем доказательство на два шага.

1°. Сначала докажем, что если симметричные и положительно определенные матрицы A и B удовлетворяют условиям Самарского (6.14), то $(BZ_{k+1}, Z_{k+1}) \leq (BZ_k, Z_k)$.

Умножая равенство (6.15) скалярно на $2\tau Z_{k+1} = \tau(Z_{k+1} + Z_k) + \tau(Z_{k+1} - Z_k)$, получим

$$(B(Z_{k+1} - Z_k), Z_{k+1} + Z_k) + (B(Z_{k+1} - Z_k), Z_{k+1} - Z_k) + \\ + \tau(AZ_{k+1}, Z_{k+1} + Z_k) + \tau(AZ_k, Z_{k+1} - Z_k) = 0.$$

В последнем равенстве заменим AZ_k на разность

$$\frac{1}{2} A(Z_{k+1} + Z_k) - \frac{1}{2} A(Z_{k+1} - Z_k).$$

Тогда, учитывая вытекающее из симметрии матрицы A равенство $(A(Z_{k+1} - Z_k), Z_{k+1} + Z_k) = (Z_{k+1} - Z_k, A(Z_{k+1} + Z_k))$, мы получим тождество

$$(B(Z_{k+1} - Z_k), Z_{k+1} + Z_k) + \left(\left(B - \frac{\tau}{2} A \right) (Z_{k+1} - Z_k), Z_{k+1} + Z_k \right) + \\ + \frac{1}{2} (\tau A(Z_{k+1} + Z_k), Z_{k+1} + Z_k) = 0.$$

Учитывая, что (в силу условий Самарского (6.14)) операторы τA и $B - \frac{\tau}{2} A$ являются положительно определенными, мы получим из последнего тождества следующее неравенство:

$$(B(Z_{k+1} - Z_k), Z_{k+1} + Z_k) \leq 0.$$

Это неравенство эквивалентно доказываемому неравенству $(BZ_{k+1}, Z_{k+1}) \leq (BZ_k, Z_k)$ (в силу вытекающего из симметрии оператора B тождества $(BZ_{k+1}, Z_k) = (Z_{k+1}, BZ_k)$).

2°. Пусть теперь при $\rho < 1$ выполнены условия Самарского (6.21). Докажем справедливость неравенства $\|Z_k\|_B \leq \rho^k \|Z_0\|_B$.

Положим $Z_k = \rho^k V_k$. Тогда, очевидно,

$$Z_{k+1} - Z_k = \rho^{k+1} V_{k+1} - \rho^k V_k = \rho^{k+1} (V_{k+1} - V_k) - (1 - \rho) \rho^k V_k.$$

Подставляя эти значения Z_k и $Z_{k+1} - Z_k$ в равенство (6.15) и производя сокращение на ρ^k , получим для величин V_k следующее соотношение:

$$\tilde{B} \frac{V_{k+1} - V_k}{\tau} + \tilde{A} V_k = 0, \quad (6.22)$$

в котором $\tilde{B} = \rho B$, $\tilde{A} = A - \frac{1-\rho}{\tau} B$.

В силу условий (6.21) операторы $\tilde{B}$ и $\tilde{A}$ удовлетворяют условиям $\tau \tilde{A} > 0$, $2\tilde{B} > \tau \tilde{A}$. Из этих условий и из того, что уравнение (6.22) для V_k совершенно идентично уравнению (6.15) для Z_k , в силу первого шага для V_k вытекает следующая оценка:

$(\tilde{B}V_{k+1}, V_{k+1}) \leq (\tilde{B}V_k, V_k)$. Из этой оценки в свою очередь, учитывая, что $\tilde{B} = \rho B$, получим неравенство $(BV_{k+1}, V_{k+1}) \leq (BV_k, V_k)$.

Последовательное применение указанного неравенства для номеров $k = 0, 1, \dots$ приводит нас к соотношению $(BV_k, V_k) \leq (BV_0, V_0)$, а умножение последнего соотношения на ρ^{2k} приводит к окончательной оценке *) $(BZ_k, Z_k) \leq \rho^{2k} (BZ_0, Z_0)$.

Тем самым неравенство $\|Z_k\|_B \leq \rho^k \|Z_0\|_B$ доказано. Доказательство теоремы 6.3 завершено.

В заключение применим теорему Самарского 6.3 для выяснения вопроса о выборе такого значения параметра τ , при котором скорость сходимости является максимальной. Из доказанной в теореме 6.3 оценки $\|Z_k\|_B \leq \rho^k \|Z_0\|_B$ вытекает, что эта задача сводится к нахождению такого значения τ , при котором достигается минимальное значение функции $\rho = \rho(\tau)$.

Так как обе матрицы A и B симметричны и положительно определены, то существуют положительные постоянные γ_1 и γ_2 такие, что справедливы неравенства $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$. Будем считать, что постоянные γ_1 и γ_2 в этих неравенствах нам заданы**). Сопоставляя только что написанные неравенства с условиями (6.21), мы получим, что минимальное значение ρ достигается при условии $(1 - \rho)/\tau = \gamma_1$, $(1 + \rho)/\tau = \gamma_2$, откуда получаем оптимальное значение $\tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ и минимальное значение ρ , равное $(\gamma_2 - \gamma_1)/(\gamma_2 + \gamma_1)$.

Частным случаем проведенного нами рассмотрения является явный метод простой итерации, изученный в п. 1. Для этого метода справедливы все полученные нами результаты.

В следующих трех пунктах с помощью общего неявного метода простой итерации и теоремы Самарского 6.2 мы рассмотрим несколько наиболее употребительных итерационных методов и установим условия их сходимости.

3. Модифицированный метод простой итерации. Этот метод получается из общего неявного метода простой итерации в том частном случае, когда стационарный параметр τ равен единице, а матрица B представляет собой диагональную матрицу D , состоящую из элементов матрицы A , лежащих на главной диагонали, т. е. $B = D$, где

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.23)$$

*) Мы учитываем, что $Z_k = \rho^k V_k$, $Z_0 = V_0$.

**) Постоянные γ_1 и γ_2 естественно назвать константами эквивалентности матриц A и B . Для коммутирующих матриц A и B постоянные γ_1 и γ_2 соответственно равны наименьшему и наибольшему собственным значениям задачи $AX = \lambda BX$.

При этом, конечно, предполагается, что матрица A является симметричной и что все ее диагональные элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ являются положительными (последнее требование необходимо и достаточно для положительной определенности диагональной матрицы $B = D$).

Из теоремы 6.2 сразу же вытекает, что для сходимости модифицированного метода простой итерации при любом выборе нулевого приближения достаточно, чтобы были выполнены два условия $2D > A$, $A > 0$.

Теорема 6.1 позволяет выразить достаточное условие сходимости модифицированного метода простой итерации и в другой форме:

$$\|E - D^{-1}A\| < 1^* \quad (6.24)$$

(под нормой матрицы, как и выше, понимается операторная норма).

Так как $\|E - D^{-1}A\| = \|D^{-1}(D - A)\| = \|D^{-1}(A - D)\|$, то достаточное условие сходимости (6.24) можно переписать в эквивалентном виде

$$\|D^{-1}(A - D)\| < 1. \quad (6.25)$$

Неравенство (6.25) позволяет получить различные достаточные условия сходимости модифицированного метода простой итерации.

Прежде всего заметим, что если наряду с операторной нормой матрицы (6.2) (которую мы, как и выше, будем обозначать символом $\|A\|$) ввести так называемую сферическую норму этой матрицы, обозначаемую символом $\|A\|_{\text{сф}}$ и определяемую равенством $\|A\|_{\text{сф}} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right]^{1/2}$, то, как доказано в § 4 гл. 4 (см. формулу (4.28)), для любого вектора X пространства E^n будет справедливо неравенство **)

$$\|AX\| \leq \|A\|_{\text{сф}} \|X\|. \quad (6.26)$$

Из (6.26) и (6.5) сразу же вытекает, что операторная и сферическая нормы матрицы связаны соотношением $\|A\| \leq \|A\|_{\text{сф}}$.

Таким образом, в силу (6.25) достаточное условие сходимости модифицированного метода простой итерации выражается нера-

*) Мы учитываем, что в рассматриваемом случае вместо матрицы A следует взять матрицу $\tilde{A}$, определяемую формулой $\tilde{A} = B^{-1}A$ и положить $B = D$, $\tau = 1$.

**) В этом неравенстве под нормой вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ понимается так называемая сферическая норма $\|X\| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}$

венством $\|D^{-1}(A - D)\|_{\text{сф}} < 1$, которое в развернутой записи имеет вид $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} < 1$.

Заметим далее, что при определении операторной нормы (6.5) матрицы A мы исходили из обычной (так называемой сферической) нормы вектора $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, равной $\|X\| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}$.

Часто вводят еще две нормы вектора X : так называемую кубическую норму, определяемую равенством $\|X\|_{\text{куб}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, и так называемую октаэдрическую норму, определяемую равенством $\|X\|_{\text{окт}} = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Если в определении (6.5) операторной нормы матрицы A понимать под нормой вектора соответственно его кубическую или октаэдрическую норму, то соотношение (6.5) приведет нас к определению соответственно кубической и октаэдрической операторных норм матрицы A .

Можно доказать, что кубическая и октаэдрическая операторные нормы матрицы (6.2) следующим образом выражаются через элементы этой матрицы *):

$$\|A\|_{\text{куб}} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_{\text{окт}} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Дословное повторение проведенных выше рассуждений с заменой сферических норм соответственно кубическими и октаэдрическими приведет нас к достаточному условию сходимости модифицированного метода простой итерации, выраженному соотношением (6.25), в котором под нормой матрицы следует понимать соответственно ее кубическую или октаэдрическую операторные нормы.

Это приводит нас к следующим двум условиям, каждое из которых является достаточным для сходимости модифицированного метода простой итерации

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad (\text{для } i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad (\text{для } j = 1, 2, \dots, n).$$

*) См., например, книгу:

В. И. Крылов, В. В. Бобков и П. И. Монастырский. Вычислительные методы высшей математики, том 1. — Минск: Высшая школа, 1972, с. 111—112.

4. Метод Зейделя. Представим симметричную матрицу (6.2) в виде суммы трех матриц $A = D + L + U$, где D — диагональная матрица (6.23), а L и U соответственно строго левая и строго правая матрицы, имеющие вид

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и удовлетворяющие условию $L' = U$.

Метод Зейделя получается из общего неявного метода простой итерации в том частном случае, когда стационарный параметр τ равен единице, а матрица B равна сумме $D + L$. Таким образом, последовательные итерации в методе Зейделя определяются соотношением

$$(D + L)(X_{k+1} - X_k) + AX_k = F.$$

Докажем, что *метод Зейделя сходится для любой симметричной и положительно определенной матрицы A .*

В силу теоремы 6.2 достаточно доказать, что для любой такой матрицы A выполнено условие

$$2(D + L) > A. \quad (6.27)$$

Для доказательства (6.27) заметим, что для любого вектора X

$$\begin{aligned} (2(D + L)X, X) &= (DX, X) + (DX, X) + (LX, X) + (LX, X) = \\ &= (DX, X) + (DX, X) + (LX, X) + (X, UX) = \\ &= (DX, X) + (AX, X). \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства неравенства (6.27) достаточно убедиться в положительной определенности матрицы D , но она сразу вытекает из того, что у положительно определенной и симметричной матрицы A все элементы, лежащие на главной диагонали, являющиеся положительными *). Сходимость метода Зейделя доказана.

5. Метод верхней релаксации. Этот метод получается из общего неявного метода простой итерации в том частном случае, когда $\tau = \omega$, $B = D + \omega L$, а параметр ω выбран так, чтобы являлось наименьшим наибольшее по модулю собственное значение матрицы $E - \omega(D + \omega L)^{-1}A$, осуществляющей переход от k -й итерации к $(k + 1)$ -й.

Докажем, что *если матрица A является симметричной и положительно определенной, то для сходимости метода верхней релаксации достаточно, чтобы было выполнено условие $0 < \omega < 2$.*

В силу теоремы 6.2 для сходимости достаточно выполнение условий $\omega > 0$, $2(D + \omega L) > \omega A$.

*) Достаточно заметить, что если у вектора X k -я координата равна единице, а все остальные нулю, то $(AX, X) = a_{kk} > 0$.

Второе из этих условий для любого вектора X приводит к неравенству

$$(2(D + \omega L)X, X) > (\omega AX, X). \quad (6.28)$$

Последнее неравенство эквивалентно каждому из неравенств в следующей цепочке:

$$\begin{aligned} (2DX, X) + (\omega LX, X) + (\omega LX, X) &> (\omega AX, X), \\ (2 - \omega)(DX, X) + (\omega DX, X) + (\omega LX, X) + \\ &+ (X, \omega UX) > (\omega AX, X), \\ (2 - \omega)(DX, X) &> 0. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и из положительной определенности D заключаем, что (6.28) справедливо при $2 - \omega > 0$, т. е. при $\omega < 2$. Итак, доказано, что условия $0 < \omega < 2$ обеспечивают сходимость метода верхней релаксации.

6. Случай несимметричной матрицы A . В случае несимметричной матрицы A мы можем умножить матричное уравнение (6.1) слева на матрицу A' и заменить уравнение (6.1) уравнением $\tilde{A}X = \tilde{F}$, в котором $\tilde{F} = A'F$, $\tilde{A} = A'A$, так что матрица $\tilde{A}$ является симметричной и (как легко убедиться) положительно определенной.

7. Итерационный метод П. Л. Чебышева *). Всюду выше при рассмотрении общего неявного метода простой итерации мы предполагали, что итерационный параметр τ принимает одно и то же постоянное значение. Естественно возникает идея рассмотреть более общий случай, когда в указанном методе значения итерационного параметра зависят от номера k итерации. В таком случае последовательность итераций будет определяться не соотношением

$$B \frac{X_{k+1} - X_k}{\tau} + AX_k = F, \quad (6.13)$$

а более общим соотношением

$$B \frac{X_{k+1} - X_k}{\tau_{k+1}} + AX_k = F.$$

При этом, как и выше, B — некоторая легко обратимая квадратная матрица порядка n . При таком выборе итерационной последовательности для погрешности $Z_k = X_k - X$ итерационной схемы получится соотношение

$$B \frac{Z_{k+1} - Z_k}{\tau_{k+1}} + AZ_k = 0. \quad (6.15^*)$$

*) Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) — великий русский математик и механик.

Предположим, что обе матрицы A и B симметричны и положительно определены. Тогда, как уже отмечалось выше, найдутся положительные постоянные γ_1 и γ_2 такие, что $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$. Будем считать, что эти постоянные γ_1 и γ_2 нам заданы и еще раз напомним, что эти постоянные равны соответственно наименьшему и наибольшему собственным значениям задачи $AX = \lambda BX$. Оценим энергетическую норму погрешности $\|Z_k\|_B$.

Напомним еще раз, что для симметричной и положительно определенной матрицы B существует симметричная и положительно определенная матрица $B^{1/2}$ такая, что $B^{1/2} \cdot B^{1/2} = B$. Как и выше, договоримся обозначать символом $B^{-1/2}$ матрицу, обратную к матрице $B^{1/2}$.

Для оценки нормы погрешности Z_k сделаем замену, положив $Z_k = B^{-1/2} \cdot V_k$. При такой замене соотношение для погрешности Z_k переходит в следующее соотношение для V_k :

$$V_{k+1} = (E - \tau_{k+1}C) \cdot V_k \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

где через C обозначена матрица вида $C = B^{-1/2} \cdot A \cdot B^{-1/2}$. Убедимся в том, что квадрат обычной нормы вектора V_k равен квадрату энергетической нормы вектора Z_k . В самом деле,

$$\|V_k\|^2 = (V_k, V_k) = (B^{1/2}Z, B^{1/2}Z) = (BZ_k, Z_k) = \|Z_k\|_B^2.$$

Таким образом, для оценки энергетической нормы Z_k достаточно оценить обычную норму V_k .

Оценим норму $\|V_k\|$. Прежде всего заметим, что из неравенств $\gamma_1 (BX, X) \leq (AX, X) \leq \gamma_2 (BX, X)$ с помощью замены $X = B^{-1/2} \cdot Y$ получаются неравенства $\gamma_1 (Y, Y) \leq (CY, Y) \leq \gamma_2 (Y, Y)$. Последние неравенства эквивалентны тому, что $\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E$. Поскольку кроме того матрица $C = B^{-1/2} \cdot A \cdot B^{-1/2}$ симметрична, то все собственные значения этой матрицы вещественны и расположены на отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$. Последовательно записывая соотношение $V_{k+1} = (E - \tau_{k+1} \cdot C) V_k$ для номеров $k = 0, 1, \dots$, мы придем к следующему равенству:

$$V_k = \prod_{j=1}^k (E - \tau_j C) \cdot V_0,$$

из которого сразу же вытекает, что

$$\|V_k\| \leq \left\| \prod_{j=1}^k (E - \tau_j C) \right\| \cdot \|V_0\|.$$

Но тогда из равенства $\|V_k\| = \|Z_k\|_B$ вытекает, что $\|Z_k\|_B \leq q^k \|Z_0\|_B$, где $q_k = \left\| \prod_{j=1}^k (E - \tau_j C) \right\|$. Следовательно, итерационный процесс сходится при условии, что последовательность $\{q_k\}$ стремится к нулю, причем тем быстрее, чем меньше величины q_k .

Поскольку каждое значение q_k является функцией параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, возникает задача построения оптимального набора итерационных параметров из условия минимума q_k для фиксированного k . Перейдем к решению этой задачи.

Предположим, что все собственные значения λ_s матрицы C лежат на заданном сегменте $[\gamma_1, \gamma_2]$. Учитывая симметрию матрицы C , мы приходим к следующей задаче оптимизации: найти

$$\begin{aligned} \min_{\{\tau_j\}} q_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) &= \min_{\{\tau_j\}} \left\| \prod_{j=1}^k (E - \tau_j C) \right\| = \\ &= \min_{\{\tau_j\}} \left\{ \max_s \left| \prod_{j=1}^k (1 - \tau_j \lambda_s) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку все λ_s лежат на отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$, то расширяя область по которой берется максимум, мы получим, что

$$\min_{\{\tau_j\}} q_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \leq \min_{\{\tau_j\}} \left\{ \max_{\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2} \left| \prod_{j=1}^k (1 - \tau_j t) \right| \right\}.$$

Полученная огрубленная задача имеет более простое решение. Кроме того, при решении такой задачи не используется информация о конкретном расположении собственных значений λ_s на отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$, а учитываются лишь границы этого отрезка. Такой подход позволяет построить набор оптимальных параметров для матриц произвольной структуры.

Перейдем к решению указанной огрубленной задачи оптимизации. Положим $P(t) = \prod_{j=1}^k (1 - \tau_j t)$ и заметим, что полином $P(t)$ удовлетворяет условию нормировки $P(0) = 1$. С помощью замены переменной

$$t = \frac{1}{2} [\gamma_2 + \gamma_1 - S(\gamma_2 - \gamma_1)] = \frac{\gamma_2 + \gamma_1}{2} \left(1 - S \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right) = \frac{1 - S\rho_0}{\tau_0},$$

где $\rho_0 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}$, $\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, мы отобразим отрезок $\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2$ в отрезок $-1 \leq S \leq 1$, причем точка $t = 0$ переходит в точку $S = S_0 = \frac{1}{\rho_0} > 1$.

При такой замене рассматриваемая задача оптимизации переходит в следующую задачу: *среди всех полиномов $\bar{P}_k(S)$ степени k , удовлетворяющих условию нормировки $\bar{P}_k\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = 1$, найти такую, для которого $\max_{|S| \leq 1} |\bar{P}(S)|$ минимален.*

Таким полиномом, как известно, является полином Чебышева $P_k(S) = T_k(S) \cdot [T_k(S_0)]^{-1}$, где

$$T_k(S) = \begin{cases} \cos(k \arccos S) & \text{при } |S| \leq 1, \\ \frac{1}{2} [(S + \sqrt{S^2 - 1})^k + (S - \sqrt{S^2 - 1})^k] & \text{при } |S| > 1. \end{cases}$$

Так как $\max_{|S| \leq 1} |T_k(S)| = 1$, то

$$\min_{\{\tau_j\}} \max_{\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2} |P_k(t)| = \frac{1}{T_k(S_0)},$$

причем $\frac{1}{T_k(S_0)} = q_k = \frac{2\rho_1^k}{1 + \rho_1^{2k}}$, где $\rho_1 = \frac{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2} + \sqrt{\gamma_1}}$.

Для вычисления оптимального набора параметров будем исходить из равенства

$$P_k(t) = \prod_{j=1}^k (1 - \tau_j t) = q_k T_k\left(\frac{1 - \tau_0 t}{\rho_0}\right)$$

(мы учли, что $S = \frac{1 - \tau_0 t}{\rho_0}$). Приравняем корни полиномов, стоящих в левой и в правой частях этого равенства. Так как полином $P_k(t)$ имеет корни $t_j = 1/\tau_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$), а полином $T_k(S)$ имеет корни $S_j = \cos \frac{2j-1}{2k} \pi$ ($j = 1, 2, \dots, k$), то учитывая, что $t = \frac{1 - \rho_0 S}{\tau_0}$, получим $\frac{1}{\tau_j} = \frac{1 - S_j \rho_0}{\tau_0}$ ($j = 1, 2, \dots, k$; S_j определены выше).

Итак, оптимальными значениями итерационных параметров будут значения $\tau_j = \frac{\tau_0}{1 + S_0 S_j}$, где $S_j = \cos \frac{2j-1}{2k} \pi$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Итерационный процесс с указанным оптимальным набором параметров называется *чебышевским*.

Мы приходим к следующей теореме:

Теорема 6.4. Если матрицы A и B симметричны и положительно определены и если $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$, то чебышевский итерационный процесс сходится, и для погрешности Z_k после выполнения k итераций справедлива оценка

$$\|Z_k\|_B \leq q_k \|Z_0\|_B,$$

где $q_k = \frac{2\rho_1^k}{1 + \rho_1^{2k}}$ при $\rho_1 = \frac{\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2} + \sqrt{\gamma_1}}$.

Если в качестве условия окончания процесса взять для заранее заданной ε -точности требование $\|Z_k\|_B < \varepsilon \|Z_0\|_B$, то из теоремы 6.4 получается для числа итераций k следующая оценка:

$$k \geq k_0(\varepsilon) = \frac{\ln(\varepsilon/2)}{\ln \rho_1}. \text{ Сравнивая эту оценку с установленной выше оценкой}$$

$$k \geq \bar{k}_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho_0}, \text{ мы получим при условии, что величина}$$

$$\xi = \gamma_2/\gamma_1 \text{ мала, что } k_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}}, \quad \bar{k}_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi}. \text{ Сравнение}$$

этих оценок указывает на преимущество чебышевского метода (в случае, когда величина $\xi = \gamma_1/\gamma_2$ мала).

Описанный нами чебышевский метод известен еще с начала 50-х годов. Иногда его называют *методом Ричардсона*.

Следует отметить, что мы изучили этот метод для идеального вычислительного процесса с бесконечным числом знаков, в то время как на ЭВМ вычисления ведутся с конечным числом знаков, в связи с чем имеются числа, являющиеся машинной бесконечностью M_∞ и машинным нулем. Если в процессе вычислений на ЭВМ появляется число M , превосходящее M_∞ , то происходит аварийный останов машины (авост).

С точки зрения идеального вычислительного процесса значения итерационных параметров τ , можно упорядочить как угодно (любым из $k!$ способов). Любые две последовательности итерационных параметров $\{\tau_j\}$ с точки зрения идеального вычислительного процесса эквивалентны, ибо для них требуемая ε -точность достигается за одно и то же число итераций.

Но при вычислении на ЭВМ различные последовательности параметров $\{\tau_j\}$ не эквивалентны. Для одних последовательностей значений $\{\tau_j\}$ может произойти аварийный останов машины вследствие роста промежуточных значений. Для других последовательностей значений $\{\tau_j\}$ аварийного останова машины не происходит, но в связи с немонотонным характером стремления к нулю погрешности Z_k , т. е. вследствие того, что норма матрицы $E - \tau_j C$ перехода от $(j-1)$ -й итерации к j -й может быть больше единицы, для этой погрешности не справедлива установленная нами для идеальной ситуации оценка.

Вследствие указанных обстоятельств возникает теоретическая проблема — указать такой наилучший закон упорядочения значений $\{\tau_j\}$, при котором для чебышевского метода было бы наименьшим влияние ошибок округления.

Исчерпывающее решение этой проблемы можно найти в книге А. А. Самарского «Теория разностных схем», М., «Наука», 1977 год (с. 572 и далее).

§ 2. Решение полной проблемы собственных значений методом вращений

Ради простоты сначала будем рассматривать вещественную симметричную матрицу A , определяемую равенством (6.2). Заметим, что отыскание всех собственных значений и собственных векторов этой матрицы сводится к отысканию такой ортогональной матрицы T , для которой произведение

$$D = T'AT \quad (6.29)$$

представляет собой диагональную матрицу. В самом деле, если такая ортогональная матрица T будет найдена, то диагональные элементы матрицы D будут являться собственными значениями матрицы A , а столбцы матрицы T будут являться соответствующими собственными векторами матрицы A *).

Введем в рассмотрение сферическую норму матрицы A :

$$\|A\|_{\text{сф}} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right]^{1/2}$$

Тогда, очевидно, для диагональных элементов матрицы A будет справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \leq \|A\|_{\text{сф}}^2, \quad (6.30)$$

причем это неравенство переходит в точное равенство только в случае, когда матрица A является диагональной.

Заметим теперь, что при ортогональном преобразовании матрицы A (т. е. при преобразовании вида $\tilde{A} = UAR$, где U и R — ортогональные матрицы) сферическая норма этой матрицы не изменяется **). Отсюда следует, что от всех ортогональных преобразований матрицы A преобразование (6.29) отличается тем, что это преобразование делает максимальной сумму квадратов диагональных элементов преобразованной матрицы и минимальной — сумму квадратов всех внедиагональных элементов этой матрицы.

*) Для доказательства этого обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ диагональные элементы матрицы D и положим $e_k = \|e_k^i\|$, где элементы e_k^i столбца e_k удовлетворяют условию: $e_k^i = 0$ при $k \neq i$ и $e_k^k = 1$. Тогда, очевидно, $De_k = \lambda_k e_k$, т. е. $T'ATE_k = \lambda_k e_k$, и так как $T' = T^{-1}$, то $ATE_k = \lambda_k Te_k$. Следовательно, Te_k являются собственными векторами матрицы A .

**) В самом деле, если $\tilde{A} = UAR$, а символ $\text{tr } C$ обозначает сумму всех элементов матрицы C , лежащих на ее главной диагонали, то $\|\tilde{A}\|_{\text{сф}}^2 = \text{tr } (\tilde{A}' \tilde{A}) = \text{tr } (R'A'U'UAR) = \text{tr } (R'A'AR) = \|AR\|_{\text{сф}}^2 = \|(AR)'\|_{\text{сф}}^2 = \|R'A'\|_{\text{сф}}^2 = \text{tr } (ARR'A') = \text{tr } (AA') = \|A'\|_{\text{сф}}^2 = \|A\|_{\text{сф}}^2$.

Методом вращения называется итерационный метод, при котором указанная выше матрица T находится как предел бесконечного произведения элементарных матриц вращения, каждая из которых имеет вид

$$T_{ij}(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos \varphi & \dots & -\sin \varphi & \dots & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & \sin \varphi & \dots & & \cos \varphi & \dots & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (i\text{-я строка}), \\ \\ \\ (j\text{-я строка}), \\ \end{matrix} \quad (6.31)$$

В целом метод вращений состоит в построении последовательности матриц

$$A, A_1, A_2, \dots, A_v, A_{v+1}, \dots, \quad (6.32)$$

каждая последующая из которых получается из предыдущей при помощи элементарного шага вида $A_{v+1} = T'_{ij} A_v T_{ij}$.

Если для упрощения записи опустить индекс v и рассмотреть один такой шаг $\tilde{A} = T'_{ij} A T_{ij}$, осуществляемый с помощью матрицы (6.31), то для элементов $\tilde{a}_{ij}$ преобразованной матрицы $\tilde{A}$ мы получим следующие выражения через элементы a_{ij} матрицы A :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{kl} &= a_{kl} \quad \text{при } k \neq i, j, \quad l \neq i, j, \\ \tilde{a}_{ii} &= a_{ii} \cos \varphi + a_{ji} \sin \varphi \quad \text{при } l \neq i, j, \\ \tilde{a}_{ji} &= -a_{ii} \sin \varphi + a_{ji} \cos \varphi \quad \text{при } l \neq i, j, \\ \tilde{a}_{il} &= a_{il} \cos \varphi + a_{ij} \sin \varphi \quad \text{при } l \neq i, j, \\ \tilde{a}_{lj} &= -a_{il} \sin \varphi + a_{ij} \cos \varphi \quad \text{при } l \neq i, j, \\ \tilde{a}_{ii} &= (a_{ii} \cos \varphi + a_{ji} \sin \varphi) \cos \varphi + (a_{ij} \cos \varphi + a_{jj} \sin \varphi) \sin \varphi, \\ \tilde{a}_{ji} &= (-a_{ii} \sin \varphi + a_{ji} \cos \varphi) \cos \varphi + (-a_{ij} \sin \varphi + a_{jj} \cos \varphi) \sin \varphi, \\ \tilde{a}_{jj} &= -(-a_{ii} \sin \varphi + a_{ji} \cos \varphi) \sin \varphi + (-a_{ij} \sin \varphi + a_{jj} \cos \varphi) \cos \varphi, \\ \tilde{a}_{ij} &= -(a_{ii} \cos \varphi + a_{ji} \sin \varphi) \sin \varphi + (a_{ij} \cos \varphi + a_{jj} \sin \varphi) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Из соотношений (6.33) и из условия симметричности матрицы A вытекает следующее легко проверяемое равенство:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \tilde{a}_{kl}^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}^2 - 2a_{ij}^2 + \frac{1}{2} [(a_{jj} - a_{ii}) \sin 2\varphi + 2a_{ij} \cos 2\varphi]^2. \quad (6.34)$$

Из этого равенства вытекает, что для максимального уменьшения суммы квадратов всех внедиагональных элементов необходимо матрицу (6.31) выбрать так, чтобы были выполнены д в а т р е б о в а н и я:

1) номера i и j выбрать так, чтобы квадрат элемента a_{ij}^2 был наибольшим среди квадратов всех недиагональных элементов матрицы A , т. е. выбор номеров i и j подчинить условию

$$a_{ij}^2 = \max_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n \\ k \neq l}} a_{kl}^2;$$

2) угол поворота φ в матрице (6.31) выбрать так, чтобы было справедливо равенство

$$(a_{jj} - a_{ii}) \sin 2\varphi + 2a_{ij} \cos 2\varphi = 0. \quad (6.35)$$

Равенство (6.35) однозначно определяет угол φ , удовлетворяющий условиям

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}. \quad (6.36)$$

Это равенство позволяет вычислять $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ по формулам

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \left\{ \frac{1}{2} [1 + (1 + p^2)^{-1/2}] \right\}^{1/2}, \\ \sin \varphi &= \operatorname{sgn} p \left\{ \frac{1}{2} [1 - (1 + p^2)^{-1/2}] \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $p = 2a_{ij}/(a_{ii} - a_{jj})$.

Заметим, что если матрица (6.31) выбрана так, что выполнены указанные выше требования 1) и 2), то равенство (6.34) переходит в следующее соотношение:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \tilde{a}_{kl}^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}^2 - 2a_{ij}^2, \quad (6.37)$$

в котором a_{ij} представляет собой наибольший по модулю внедиагональный элемент матрицы.

Теперь мы можем более точно сказать, что метод вращений состоит в построении последовательности матриц (6.32), каждая последующая из которых получается из предыдущей посредством ортогонального преобразования $A_{v+1} = T_{ij} \cdot A_v \cdot T_{ij}$, в котором матрица $T_{ij} = T_{ij}(\varphi)$ выбирается так, чтобы были выполнены указанные выше два требования *).

Докажем сходимость метода вращений. Обозначим символом S_v^2 сумму квадратов всех внедиагональных элементов матрицы A_v , а символом $a_{i_v j_v}^{(v)}$ наибольший по модулю внедиагональный элемент этой матрицы.

Тогда в силу (6.37) справедливо равенство

$$S_{v+1}^2 = S_v^2 - 2 [a_{i_v j_v}^{(v)}]^2. \quad (6.38)$$

Далее, поскольку общее число внедиагональных элементов матрицы A_v равно $n(n-1)$, а $a_{i_v j_v}^{(v)}$ — наибольший по модулю из этих элементов, то справедливо неравенство

$$[a_{i_v j_v}^{(v)}]^2 \geq \frac{S_v^2}{n(n-1)}. \quad (6.39)$$

Из (6.38) и (6.39) вытекает неравенство

$$S_{v+1}^2 \leq S_v^2 \left[1 - \frac{2}{n(n-1)} \right]. \quad (6.40)$$

Последовательно используя неравенство (6.40), записанное для номеров $0, 1, \dots, v$, и обозначая через $S_0^2 = S_0^2(A)$ сумму квадратов всех внедиагональных элементов основной матрицы A , мы получим, что

$$S_{v+1}^2 \leq S_0^2(A) \left[1 - \frac{2}{n(n-1)} \right]^{v+1} \quad (6.41)$$

Из неравенства (6.41) сразу же следует, что $\lim_{v \rightarrow \infty} S_{v+1}^2 = 0$, что и доказывает сходимость метода вращений.

В качестве приближенных значений собственных чисел матрицы A берутся диагональные элементы матрицы A_v , а в качестве приближенных собственных векторов матрицы A берутся столбцы матрицы $T_{i_1 j_1} \cdot T_{i_2 j_2} \dots T_{i_v j_v}$.

Более точные результаты получены В. В. Воеводиным **). Для случая, когда произвольная (не обязательно симметричная) матрица A не имеет жорда-

*) Номера i и j на каждом шаге выбираются такими, чтобы наибольшим по модулю являлся внедиагональный элемент матрицы A_v с этими номерами.

**) В. В. Воеводин, Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1966.

новых клеток и все ее внедиагональные элементы являются величинами порядка ϵ и малы по сравнению с числом $\rho = \min_{\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j|$, В. В. Воеводин получил

следующие оценки:

$$\text{а) для собственных значений оценку } \lambda_i = a_{ii} + \sum_{p=1}^n \frac{a_{ip}a_{pi}}{a_{ii} - a_{pp}} + O(\epsilon^2)$$

(из указанной суммы исключаются значения p , принадлежащие множеству R_i тех чисел $j = 1, 2, \dots, n$, для которых $\lambda_j = \lambda_i$);

б) если T — матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы A и $T = E + H$, где E — единичная матрица, то для элементов h_{ij} матрицы H справедливы оценки

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_i = \lambda_j, \\ \frac{a_{ij}}{a_{jj} - a_{ii}} + O(\epsilon^2), & \text{если } \lambda_i \neq \lambda_j. \end{cases}$$

Если A — комплексная эрмитова матрица, то вместо матрицы (6.31) следует взять унитарную матрицу

$$T_{ij}(\varphi, \psi) = \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ 0 \end{array} & \begin{array}{cc} & \\ \cos \varphi_i & -\sin \varphi e^{i\psi} \\ \sin \varphi e^{-i\psi} & \cos \varphi_i \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ 1 \end{array} \\ & & \begin{array}{l} (i\text{-я строка}), \\ \\ (j\text{-я строка}). \end{array} \end{array} \quad (6.42)$$

При этом вместо равенства (6.34) мы придем к равенству

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^n |\tilde{a}_{kl}|^2 &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^n |a_{kl}|^2 - 2|a_{ij}|^2 + \\ &+ 2|a_{ij}| \cdot |\cos^2 \varphi \cdot e^{i\alpha} - \sin^2 \varphi \cdot e^{i(2\psi - \alpha)} + (a_{jj} - a_{ii}) \cos \varphi \sin \varphi e^{i\psi}|^2, \end{aligned}$$

в котором через α обозначен аргумент комплексного числа a_{ij} .

Для максимального уменьшения суммы квадратов модулей внедиагональных элементов следует у матрицы (6.42) выбрать такие номера i и j , чтобы элемент a_{ij} был наибольшим по модулю внедиагональным элементом матрицы A , а выбор углов φ и ψ подчинить условию

$$|a_{ij}|(\cos^2 \varphi \cdot e^{i\alpha} - \sin^2 \varphi \cdot e^{i(2\psi - \alpha)}) + (a_{jj} - a_{ii}) \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot e^{i\psi} = 0.$$

Последнее условие приводит к соотношениям

$$\psi = \arg a_{ij}, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2|a_{ij}|}{a_{ii} - a_{jj}}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Доказательство сходимости метода вращений проводится точно так же, как и для случая вещественной матрицы.

ГЛАВА 7

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

В этой главе изучаются **билинейные формы**, определенные в вещественном линейном пространстве, т. е. числовые функции двух векторных аргументов, линейные по каждому из этих аргументов. Подробно исследуются так называемые **квадратичные формы**, представляющие собой билинейные формы, определенные для совпадающих значений их аргументов. Рассматриваются также некоторые приложения теории билинейных и квадратичных форм.

§ 1. Билинейные формы

1. Понятие билинейной формы. Понятие билинейной формы в произвольном линейном пространстве было введено нами ранее в главе 5. Однако для удобства изложения в этом пункте мы напомним некоторые определения и простейшие утверждения.

Определение 1. Числовая функция $A(x, y)$, аргументами которой являются всевозможные векторы x и y вещественного линейного пространства L , называется **билинейной формой**, если для любых векторов x, y и z из L и любого вещественного числа λ выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} A(x + z, y) &= A(x, y) + A(z, y), \\ A(x, y + z) &= A(x, y) + A(x, z), \\ A(\lambda x, y) &= \lambda A(x, y), \\ A(x, \lambda y) &= \lambda A(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Иными словами, билинейная форма представляет собой числовую функцию $A(x, y)$ двух векторных аргументов x и y , определенную на всевозможных векторах x и y вещественного линейного пространства L и линейную по каждому из этих аргументов *).

Простейшим примером билинейной формы может служить произведение двух линейных форм $f(x)$ и $g(y)$, определенных на векторах x и y линейного пространства L .

*) При этом часто говорят, что билинейная форма $A(x, y)$ задана на линейном пространстве L .

Определение 2. Билинейная форма $A(x, y)$ называется *симметричной* (или *кососимметричной*), если для любых векторов x и y линейного пространства L выполняются соотношения

$$A(x, y) = A(y, x) \quad (A(x, y) = -A(y, x)). \quad (7.2)$$

Справедливо следующее утверждение: любую билинейную форму можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейных форм (см. п. 1 § 9 гл. 5).

2. Представление билинейной формы в конечномерном линейном пространстве. Пусть в n -мерном линейном пространстве L задана билинейная форма $B(x, y)$. Выясним вопрос о представлении формы $B(x, y)$ в случае, когда в L задан определенный базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.1. Билинейная форма $B(x, y)$ при заданном в n -мерном линейном пространстве базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ может быть однозначно представлена в следующем виде:

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \xi_i \eta_j, \quad (7.3)$$

где

$$b_{ij} = B(e_i, e_j), \quad (7.4)$$

а ξ_i и η_j — координаты в базисе e векторов x и y соответственно.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ и $y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$ — разложения векторов x и y по базису e . Так как форма $B(x, y)$ линейна по каждому из аргументов x и y (см. (7.1)), то

$$B(x, y) = B\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n B(e_i, e_j) \xi_i \eta_j.$$

Таким образом, для формы $B(x, y)$ справедливо представление (7.3) с выражениями (7.4) для коэффициентов b_{ij} .

Чтобы доказать однозначность этого представления, предположим, что для $B(x, y)$ справедливо представление (7.3) с некоторыми коэффициентами b_{ij} . Беря в (7.3) $x = e_i$, $y = e_j$, мы сразу же получим выражения (7.4) для коэффициентов b_{ij} . Теорема доказана.

Определение. Матрица

$$B(e) = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

элементы b_{ij} , которой определены с помощью соотношений (7.4), называется матрицей билинейной формы $B(x, y)$ в данном базисе e .

З а м е ч а н и е 1. Обратимся к вопросу о построении всех билинейных форм в данном конечномерном вещественном пространстве L . Ответ на этот вопрос следующий: любая квадратная матрица (b_{ij}) является в данном базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ матрицей некоторой билинейной формы.

Убедимся в справедливости этого утверждения.

Определим в линейном пространстве L с данным базисом $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ с помощью матрицы (b_{ij}) числовую функцию $B(x, y)$ двух векторных аргументов $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ и $y =$

$$= \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \text{ вида } B(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \xi_i \eta_j.$$

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет всем условиям определения билинейной формы. Но тогда, согласно теореме 7.1, элементы b_{ij} заданной матрицы равны $B(e_i, e_j)$, а написанная выше формула есть представление этой формы в виде (7.3).

Согласно сделанному замечанию естественно называть представление (7.3) билинейной формы $B(x, y)$ общим видом билинейной формы в n -мерном линейном пространстве.

З а м е ч а н и е 2. Если $B(x, y)$ — симметричная (кососимметричная) билинейная форма, то матрица (7.5) этой формы в базисе e является симметричной (кососимметричной). Справедливо и обратное — если матрица (7.5) билинейной формы $B(x, y)$ симметрична (кососимметрична), то и билинейная форма является симметричной (кососимметричной).

Убедимся в справедливости этого замечания.

Пусть $B(x, y)$ — симметричная (кососимметричная) билинейная форма. Полагая в соотношениях (7.2) $x = e_i$, $y = e_j$, получим, согласно (7.4),

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad (b_{ij} = -b_{ji}), \quad (7.6)$$

т. е. матрица (7.5) является симметричной (кососимметричной).

Пусть теперь матрица (7.5) билинейной формы $B(x, y)$ симметрична (кососимметрична), т. е. ее элементы удовлетворяют соотношениям (7.6). Тогда из соотношения (7.3) и соотношения

$$B(y, x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ji} \xi_i \eta_j \text{ следует, что } B(x, y) = B(y, x), \quad (B(x, y) = -B(y, x)), \text{ т. е. форма } B(x, y) \text{ является симметричной (кососимметричной).}$$

3. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису. Ранг билинейной формы. Рассмотрим в линейном пространстве L два базиса $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $f =$

$= (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Пусть $A(e) = (a_{ij})$ и $A(f) = (b_{ij})$ — матрицы данной билинейной формы в указанных базисах.

Выясним вопрос о связи этих матриц, т. е. выясним вопрос о преобразовании матрицы a_{ij} билинейной формы при переходе от базиса e к новому базису f .

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.2. Матрицы $A(e)$ и $A(f)$ билинейной формы $A(x, y)$ в базисах $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ связаны соотношением

$$A(f) = C' A(e) C, \quad (7.7)$$

где $C = (c_{pq})$ — матрица перехода от базиса e к базису f , а C' — транспонированная матрица C .

Доказательство. Элементы f_q нового базиса f выражаются через элементы e_p старого базиса e с помощью матрицы $C = (c_{pq})$ по формулам

$$f_q = \sum_{p=1}^n c_{pq} e_p. \quad (7.8)$$

Так как $b_{ik} = A(f_i, f_k)$, то, согласно (7.8), получим

$$\begin{aligned} b_{ik} &= A(f_i, f_k) = A\left(\sum_{l=1}^n c_{il} e_l, \sum_{j=1}^n c_{jk} e_j\right) = \\ &= \sum_{l,j=1}^n A(e_l, e_j) c_{il} c_{jk} = \sum_{l,j=1}^n a_{lj} c_{il} c_{jk}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Напомним, что элементы c'_{il} транспонированной матрицы C' связаны с элементами c_{il} матрицы C соотношениями $c'_{il} = c_{li}$.

Подставляя эти соотношения в правую часть (7.9), получим для b_{ik} следующее выражение:

$$b_{ik} = \sum_{l,j=1}^n a_{lj} c'_{il} c_{jk} = \sum_{l=1}^n c'_{il} \left(\sum_{j=1}^n a_{lj} c_{jk} \right). \quad (7.10)$$

Сумма $\sum_{j=1}^n a_{lj} c_{jk}$ (по определению произведения матриц) представляет собой элемент матрицы $A(e)C$. Отсюда следует, что выражение в правой части (7.10) является элементом матрицы $C' A(e)C$. Но в левой части (7.10) стоит элемент матрицы $A(f)$. Поэтому $A(f) = C' A(e)C$. Теорема доказана.

Следствие. Ранг матрицы $A(f)$ равен рангу матрицы $A(e)$.

Это сразу вытекает из соотношения (7.7), из того, что матрица C и, стало быть, матрица C' являются невырожденными, и из теоремы о том, что ранг матрицы не изменяется при умножении ее на невырожденную матрицу.

Это следствие позволяет ввести важный числовой инвариант билинейной формы — так называемый ранг билинейной формы.

Определение 1. Рангом билинейной формы, заданной в конечномерном линейном пространстве L , называется ранг матрицы этой формы в произвольном базисе пространства L .

Определение 2. Билинейная форма $A(x, y)$, заданная в конечномерном линейном пространстве L , называется невырожденной (вырожденной), если ее ранг равен (меньше) размерности пространства L .

§ 2. Квадратичные формы

Пусть $A(x, y)$ — симметричная билинейная форма, заданная на линейном пространстве L .

Определение 1. Квадратичной формой называется числовая функция $A(x, x)$ одного векторного аргумента x , которая получается из билинейной формы $A(x, y)$ при $x = y$.

Симметричная билинейная форма $A(x, y)$ называется полярной к квадратичной форме $A(x, x)$.

Полярная билинейная форма $A(x, y)$ и квадратичная форма $A(x, x)$ связаны следующим соотношением:

$$A(x, y) = \frac{1}{2} [A(x + y, x + y) - A(x, x) - A(y, y)],$$

которое вытекает из очевидного равенства

$$A(x + y, x + y) = A(x, x) + A(x, y) + A(y, x) + A(y, y)$$

и свойства симметрии формы $A(x, y)$.

Пусть в конечномерном линейном пространстве L задана симметричная билинейная форма $A(x, y)$, полярная к квадратичной форме $A(x, x)$. Пусть, кроме того, в L указан базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

Согласно теореме 7.1 форму $A(x, y)$ можно представить в виде (7.3)

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \eta_j, \quad (7.3)$$

где ξ_i и η_j — координаты в базисе e векторов x и y соответственно. При этом в силу симметрии $A(x, y)$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (7.11)$$

(см. замечание 2 п. 2 предыдущего параграфа).

Полагая в (7.3) $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (т. е. $\eta_j = \xi_j$), мы получим следующее представление для квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в конечномерном пространстве L с заданным базисом $\mathbf{e}$:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (7.12)$$

Матрица (a_{ij}) называется матрицей квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в заданном базисе $\mathbf{e}$.

Согласно (7.11) матрица (a_{ij}) является симметричной. Очевидно, каждой симметричной матрице (a_{ij}) отвечает с помощью соотношения (7.12) квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, причем (7.12) будет представлением $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в пространстве L с заданным базисом $\mathbf{e}$ (см. также замечание 3 п. 2 предыдущего параграфа).

Отметим, что матрица квадратичной формы при переходе к новому базису преобразуется по формуле (7.7). Поэтому ранг этой матрицы не меняется при переходе к новому базису.

Обычно ранг матрицы квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ называется рангом квадратичной формы.

Если ранг матрицы квадратичной формы равен размерности пространства L , то форма называется невырожденной, а в противном случае — вырожденной.

В дальнейшем мы будем использовать следующую терминологию.

Определение 2. Квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ называется:

1) положительно (отрицательно) определенной, если для любого ненулевого $\mathbf{x}$ выполняется неравенство

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \quad (A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0)$$

(такие формы называются также знакоопределенными);

2) знакопеременной, если существуют такие $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, что

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0, \quad A(\mathbf{y}, \mathbf{y}) < 0;$$

3) квази знакоопределенной, если для всех $\mathbf{x}$

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \text{ или } A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq 0,$$

но имеется отличный от нуля вектор $\mathbf{x}$, для которого

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0.$$

В дальнейшем мы укажем признаки, по которым можно судить о принадлежности формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ к одному из указанных типов.

Отметим следующее важное утверждение.

Если $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ представляет собой билинейную форму, полярную положительно определенной квадратичной форме $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, то $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения векторов в евклидовом пространстве.

Обратимся к четырем аксиомам скалярного произведения (см. п. 1 § 1 гл. 4).

Если число, называемое скалярным произведением векторов x и y , обозначить символом $A(x, y)$, то эти аксиомы запишутся следующим образом:

$$1^\circ. A(x, y) = A(y, x).$$

$$2^\circ. A(x + z, y) = A(x, y) + A(z, y).$$

$$3^\circ. A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y).$$

$$4^\circ. A(x, x) \geq 0 \text{ и } A(x, x) > 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Так как билинейная форма $A(x, y)$ полярная квадратичной форме $A(x, x)$ симметрична, то аксиома 1° выполняется. Аксиомы 2° и 3° в сочетании с требованием симметрии выполнены в силу определения билинейной формы (см. п. 1 § 1 этой главы). Аксиома 4° выполняется, так как квадратичная форма $A(x, x)$ положительно определена.

З а м е ч а н и е. Очевидно, аксиомы скалярного произведения можно рассматривать как совокупность требований, определяющих билинейную форму, полярную положительно определенной квадратичной форме. Поэтому скалярное произведение в линейных пространствах может быть задано с помощью такого вида билинейной формы.

§ 3. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов

В этом параграфе указаны различные методы приведения квадратичной формы к сумме квадратов, т. е. будут указаны методы выбора такого базиса $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ в линейном пространстве L , по отношению к которому квадратичная форма представляется в следующем каноническом виде:

$$A(x, x) = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \dots + \lambda_n \eta_n^2, \quad (7.13)$$

$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ — координаты x в базисе f .

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в выражении (7.13) называются каноническими коэффициентами.

Подчеркнем, что мы рассматриваем квадратичные формы в произвольном вещественном линейном пространстве. В § 6 будут изучены квадратичные формы в евклидовом пространстве и будет доказана возможность приведения каждой квадратичной формы к каноническому виду даже в ортонормированном базисе. Исходя из результатов главы 5 в том же § 6 настоящей главы будет получено новое доказательство теоремы о приведении квадратичной формы к каноническому виду в произвольном (не обязательно евклидовом) вещественном линейном пространстве.

Настоящий же параграф посвящен не только доказательству возможности приведения квадратичной формы к каноническому

виду, но и описанию двух методов такого приведения, имеющих большую практическую ценность и широко встречающихся в приложениях.

Так как каждому преобразованию базиса отвечает невырожденное линейное преобразование координат, а невырожденному преобразованию координат — преобразование базиса, то вопрос о приведении формы к каноническому виду можно решать путем выбора соответствующего невырожденного преобразования координат.

1. Метод Лагранжа. Докажем следующую теорему.

Теорема 7.3. *Любая квадратичная форма $A(x, x)$, заданная в n -мерном линейном пространстве L , с помощью невырожденного линейного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду (7.13).*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы методом Лагранжа. Основная идея этого метода заключается в последовательном дополнении квадратного трехчлена по каждому аргументу до полного квадрата.

Будем считать, что $A(x, x) \neq 0^*)$ и в данном базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ имеет вид

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (7.14)$$

Убедимся, во-первых, что с помощью невырожденного преобразования координат форму $A(x, x)$ можно преобразовать так, что коэффициент при квадрате первой координаты вектора x будет отличен от нуля.

Если в данном базисе этот коэффициент отличен от нуля, то нужное невырожденное преобразование является тождественным.

В случае, если $a_{11} = 0$, но отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-либо другой координаты, то с помощью перенумерации базисных векторов можно добиться требуемого результата. Ясно, что перенумерация является невырожденным преобразованием.

Если же все коэффициенты при квадратах координат равны нулю, то нужное преобразование можно получить следующим способом. Пусть, например, $a_{12} \neq 0^{**})$. Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат $***)$:

$$\xi'_1 = \xi_1 - \xi_2, \quad \xi'_2 = \xi_1 + \xi_2, \quad \xi'_i = \xi_i, \quad i = 3, 4, \dots, n.$$

*) Если форма $A(x, x) \equiv 0$, то ее матрица в любом базисе состоит из нулевых элементов, и поэтому такая форма по определению имеет канонический вид в любом базисе.

***) Напомним, что $A(x, x) \neq 0$, и поэтому хотя бы один коэффициент a_{ij} отличен от нуля.

***) Определитель матрицы этого преобразования равен 2, и потому это преобразование невырожденное.

После этого преобразования коэффициент при ξ_1^2 будет равен $2a_{11}$ и поэтому отличен от нуля.

Итак, будем считать, что в соотношении (7.14) $a_{11} \neq 0$.

Выделим в выражении (7.14) ту группу слагаемых, которые содержат ξ_1 . Получим

$$A(x, x) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \dots + 2a_{1n}\xi_1\xi_n + \sum_{i,j=2}^n a_{ij}\xi_i\xi_j. \quad (7.15)$$

Преобразуем выделенную группу слагаемых следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \dots + 2a_{1n}\xi_1\xi_n &= a_{11} \left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\xi_n \right)^2 - \\ &- \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\xi_2^2 - \dots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}\xi_n^2 - 2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}\xi_2\xi_3 - \dots - 2\frac{a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}\xi_{n-1}\xi_n. \end{aligned}$$

Очевидно, выражение (7.15) можно теперь переписать так:

$$A(x, x) = a_{11} \left(\xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\xi_n \right)^2 + \sum_{i,j=2}^n a_{ij}^*\xi_i\xi_j, \quad (7.16)$$

где a_{ij}^* — коэффициенты при $\xi_i\xi_j$, полученные после преобразования.

Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат:

$$\eta_1 = \xi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\xi_n,$$

$$\eta_2 = \xi_2,$$

$$\eta_n = \xi_n.$$

С помощью этого преобразования и представления (7.16) для $A(x, x)$ получим

$$A(x, x) = a_{11}\eta_1^2 + \sum_{i,j=2}^n a_{ij}^*\eta_i\eta_j. \quad (7.17)$$

Итак, если форма $A(x, x) \neq 0$, то с помощью невырожденного преобразования координат эту форму можно привести к виду (7.17).

Обратимся теперь к квадратичной форме $\sum_{i,j=2}^n a_{ij}^*\eta_i\eta_j$. Если эта форма тождественно равна нулю, то вопрос о приведении $A(x, x)$ к каноническому виду решен. Если же форма $\sum_{i,j=2}^n a_{ij}^*\eta_i\eta_j \neq 0$, то мы можем повторить рассуждения, рассматривая преобразование координат $\eta_2, \dots, \eta_n$, аналогичные описанным выше, и не

меняя при этом координату η_1 . Очевидно, такого типа преобразования координат $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ будут невырожденными.

Ясно, что за конечное число шагов мы приведем квадратичную форму $A(x, x)$ к каноническому виду (7.13)

Отметим, что нужное преобразование исходных координат $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ можно получить путем перемножения найденных в процессе рассуждений невырожденных преобразований. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется к а н о н и ч е с к и м. Отметим, что канонический базис определен неоднозначно.

З а м е ч а н и е 2. Если форма $A(x, x)$ приведена к каноническому виду (7.13), то, вообще говоря, не все канонические коэффициенты λ_i отличны от нуля. Оставляя в (7.13) лишь отличные от нуля λ_i и перенумеровывая их заново, получим следующее выражение для $A(x, x)$:

$$A(x, x) = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \dots + \lambda_k \eta_k^2. \quad (7.18)$$

Ясно, что $k \leq n$. Так как ранг квадратичной формы по определению равен рангу ее матрицы в любом базисе, то из (7.18) и условия $\lambda_i \neq 0$ при $i = 1, 2, \dots, k$ вытекает, что ранг формы равен k . Таким образом, *число отличных от нуля канонических коэффициентов равно рангу квадратичной формы.*

2. Метод Якоби. При некоторых дополнительных предположениях о квадратичной форме $A(x, x)$ можно указать явные формулы перехода от данного базиса $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ к каноническому базису $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ и формулы для канонических коэффициентов λ_i .

Предварительно мы введем понятие **треугольного преобразования** базисных векторов.

Преобразование базисных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется **треугольным**, если оно имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= e_1, \\ f_2 &= \alpha_{21}e_1 + e_2, \\ f_3 &= \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + e_3, \\ &\vdots \\ f_n &= \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \dots + e_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

З а м е ч а н и е. Так как определитель матрицы треугольного преобразования (7.19) отличен от нуля (равен 1), то векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$ образуют базис.

Введем в рассмотрение угловые миноры матрицы $A(e) = (a_{ij})$ коэффициентов формы $A(x, x)$ в базисе e , обозначив их символами $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1, n-1} \\ & \ddots & \\ a_{n-1, 1} & \dots & a_{n-1, n-1} \end{vmatrix}. \quad (7.20)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.4. Пусть миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ матрицы (a_{ij}) квадратичной формы $A(x, x)$ отличны от нуля. Тогда существует единственное треугольное преобразование базисных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, с помощью которого форму $A(x, x)$ можно привести к каноническому виду.

Доказательство. Напомним, что коэффициенты b_{ij} формы $A(x, x)$ в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ вычисляются по формулам $b_{ij} = A(f_i, f_j)$.

Если форма $A(x, x)$ в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ имеет канонический вид, то $b_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно построить с помощью треугольного преобразования (7.19) такой базис $f_1, f_2, \dots, f_n$, в котором будут выполняться соотношения

$$A(f_i, f_j) = 0 \text{ при } i \neq j, \text{ или, что то же, при } i < j \quad (7.21)$$

(при этом, конечно, надо убедиться, что искомое преобразование единственно).

Если обратиться к формулам (7.19) для f_i , то, используя линейное свойство квадратичной формы $A(x, x)$ по каждому аргументу, легко заметить, что соотношения (7.21) будут выполнены, если будут выполнены соотношения *)

$$A(e_1, f_j) = 0, A(e_2, f_j) = 0, \dots, A(e_{j-1}, f_j) = 0, \quad (7.22) \\ j = 2, 3, \dots, n.$$

Запишем формулы (7.22) в развернутом виде. Для этого подставим в левые части этих формул выражение

$$f_j = \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + \dots + \alpha_{j, j-1}e_{j-1} + e_j \quad (7.23)$$

для f_j из соотношений (7.19). Используя далее свойство линейности $A(x, x)$ по каждому аргументу и обозначение $A(e_i, e_j) = a_{ij}$, получим в результате следующую линейную систему уравнений для неизвестных коэффициентов α_{jk} :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{j1}a_{11} + \alpha_{j2}a_{12} + \dots + \alpha_{j, j-1}a_{1, j-1} + a_{1j} &= 0, \\ \alpha_{j1}a_{j-1, 1} + \alpha_{j2}a_{j-1, 2} + \dots + \alpha_{j, j-1}a_{j-1, j-1} + a_{j-1, j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Определитель этой системы равен Δ_{j-1} . По условию $\Delta_{j-1} \neq 0$. Следовательно, система (7.24) имеет *единственное* решение. Таким

*) Нетрудно убедиться, что из соотношений (7.21) следуют соотношения (7.22).

образом, можно построить единственное треугольное преобразование базисных векторов, с помощью которого форма $A(x, x)$ приводится к каноническому виду. Теорема доказана.

Приведем формулы, по которым можно вычислить коэффициенты α_{ji} искомого треугольного преобразования, и формулы для канонических коэффициентов λ_j .

Обозначим символом $\Delta_{j-1, i}$ минор матрицы (a_{ij}) , расположенный на пересечении строк этой матрицы с номерами $1, 2, \dots, j-1$ и столбцов с номерами $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j$. Тогда, обращаясь к системе (7.24) и используя формулы Крамера, получим следующее выражение для α_{ji} :

$$\alpha_{ji} = (-1)^{j+i} \frac{\Delta_{j-1, i}}{\Delta_{j-1, j-1}}. \quad (7.25)$$

Займемся вычислением канонических коэффициентов λ_j .

Так как $\lambda_j = b_{jj} = A(f_j, f_j)$, то из выражения (7.23) для f_j и формул (7.22) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_j &= A(f_j, f_j) = A(\alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + \dots + \alpha_{j, j-1}e_{j-1} + e_j, f_j) = \\ &= A(e_j, f_j) = A(e_j, \alpha_{j1}e_1 + \alpha_{j2}e_2 + \dots + \alpha_{j, j-1}e_{j-1} + e_j) = \\ &= \alpha_{j1}a_{1j} + \alpha_{j2}a_{2j} + \dots + \alpha_{j, j-1}a_{j-1, j} + a_{jj}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (7.25) для α_{ji} в правую часть последнего соотношения, найдем

$$\lambda_j = ((-1)^{j+1}a_{1j}\Delta_{j-1, 1} + (-1)^{j+2}a_{2j}\Delta_{j-1, 2} + \dots + (-1)^{2j-1}a_{j-1, j}\Delta_{j-1, j-1} + a_{jj}\Delta_{j-1, j-1})\Delta_{j-1, j-1}^{-1}.$$

Числитель последнего соотношения представляет собой сумму произведений элементов строки с номером j в определителе Δ_j на алгебраические дополнения этих элементов в указанном определителе. Следовательно, этот числитель равен Δ_j . Поэтому

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, n. \quad (7.26)$$

Так как $\lambda_1 = A(f_1, f_1) = A(e_1, e_1) = a_{11} = \Delta_1$, то отсюда и из (7.26) получаем следующие формулы для канонических коэффициентов:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \quad (7.27)$$

§ 4. Закон инерции квадратичных форм. Классификация квадратичных форм

1. Закон инерции квадратичных форм. Мы уже отмечали (см. замечание 2 п. 1 предыдущего параграфа), что ранг квадратичной формы равен числу отличных от нуля канонических коэффициентов. Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов не зависит от выбора невырожденного преобразования, с помощью которого форма $A(x, x)$ приводится к каноническому виду. На самом деле при любом способе приведения формы $A(x, x)$ к каноническому виду не меняется число положительных и отрицательных канонических коэффициентов. Это свойство называется *законом инерции* квадратичных форм.

Прежде чем перейти к обоснованию закона инерции, сделаем некоторые замечания.

Пусть форма $A(x, x)$ в базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ определяется матрицей $A(e) = (a_{ij})$:

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (7.28)$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — координаты вектора x в базисе e . Допустим, что эта форма с помощью невырожденного преобразования координат приведена к каноническому виду

$$A(x, x) = \lambda_1 \mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2^2 + \dots + \lambda_k \mu_k^2, \quad (7.29)$$

причем $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — отличные от нуля канонические коэффициенты, занумерованные так, что первые q из этих коэффициентов положительные, а следующие коэффициенты — отрицательные:

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_q > 0, \lambda_{q+1} < 0, \dots, \lambda_k < 0.$$

Рассмотрим следующее невырожденное преобразование координат μ_i^*):

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \mu_1, & \eta_2 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \mu_2, & \eta_q &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_q}} \mu_q, \\ \eta_{q+1} &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{q+1}}} \mu_{q+1}, \dots, & \eta_k &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \mu_k, \\ \eta_{k+1} &= \mu_{k+1}, \dots, & \eta_n &= \mu_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

В результате этого преобразования форма $A(x, x)$ примет вид

$$A(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_q^2 - \eta_{q+1}^2 - \dots - \eta_k^2, \quad (7.31)$$

называемый *нормальным видом* квадратичной формы.

*) Легко видеть, что определитель этого преобразования отличен от нуля.

Итак, с помощью некоторого невырожденного преобразования координат $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ вектора x в базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$$\eta_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \dots + \alpha_{in}\xi_n, \quad (7.32)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \det (\alpha_{ij}) \neq 0$$

(это преобразование представляет собой произведение преобразований ξ в μ и μ в η по формулам (7.30)) квадратичная форма может быть приведена к нормальному виду (7.31).

Докажем следующее утверждение:

Теорема 7.5 (закон инерции квадратичных форм). Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами в нормальном виде квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.

Д о к а з а т е л ь н о. Пусть форма $A(x, x)$ с помощью невырожденного преобразования координат (7.32) приведена к нормальному виду (7.31) и с помощью другого невырожденного преобразования координат приведена к нормальному виду

$$A(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_r^2 - \xi_{r+1}^2 - \dots - \xi_k^2. \quad (7.33)$$

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости равенства $p = q$.

Пусть $p > q$. Убедимся, что в этом случае имеется ненулевой вектор x такой, что по отношению к базисам, в которых форма $A(x, x)$ имеет вид (7.31) и (7.33) координаты $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$ и $\xi_{p+1}, \dots, \xi_n$ этого вектора равны нулю:

$$\eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \dots, \eta_q = 0, \xi_{p+1} = 0, \dots, \xi_n = 0. \quad (7.34)$$

Так как координаты η_i получены путем невырожденного преобразования (7.32) координат $\xi_1, \dots, \xi_n$, а координаты ξ_i — с помощью аналогичного невырожденного преобразования этих же координат $\xi_1, \dots, \xi_n$, то соотношения (7.34) можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно координат $\xi_1, \dots, \xi_n$ искомого вектора x в базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ (например, в развернутом виде соотношение $\eta_1 = 0$ имеет, согласно (7.32), вид $\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = 0$). Так как $p > q$, то число однородных уравнений (7.34) меньше n , и поэтому система (7.34) имеет ненулевое решение относительно координат $\xi_1, \dots, \xi_n$ искомого вектора x . Следовательно, если $p > q$, то существует ненулевой вектор x , для которого выполняются соотношения (7.34).

Подсчитаем значение формы $A(x, x)$ для этого вектора x . Обращаясь к соотношениям (7.31) и (7.33), получим

$$A(x, x) = -\eta_{q+1}^2 - \dots - \eta_k^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_p^2.$$

Последнее равенство может иметь место лишь в случае $\eta_{q+1} = \dots = \eta_k = 0$ и $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_p = 0$. Таким образом, в некотором базисе все координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ненулевого вектора $\mathbf{x}$ равны нулю (см. последние равенства и соотношения (7.34)), т. е. вектор $\mathbf{x}$ равен нулю. Следовательно, предположение $p > q$ ведет к противоречию. По аналогичным соображениям ведет к противоречию и предположение $p < q$.

Итак, $p = q$. Теорема доказана.

2. Классификация квадратичных форм. В п. 1 § 2 этой главы (см. определение 2) были введены понятия положительно определенной, отрицательно определенной, знакопеременной и квази-знакоопределенной квадратичных форм.

В этом пункте с помощью понятий индекса инерции, положительного и отрицательного индексов инерции квадратичной формы мы укажем, каким образом можно выяснить принадлежность квадратичной формы к тому или иному из перечисленных выше типов. При этом *индексом инерции* квадратичной формы мы будем называть число отличных от нуля канонических коэффициентов этой формы (т. е. ее ранг), *положительным индексом инерции* — число положительных канонических коэффициентов, *отрицательным индексом инерции* — число отрицательных канонических коэффициентов. Ясно, что сумма положительного и отрицательного индексов инерции равна индексу инерции.

Итак, пусть индекс инерции, положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ соответственно равны k , p и q ($k = p + q$). В предыдущем пункте было доказано, что в любом каноническом базисе $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ эта форма может быть приведена к следующему нормальному виду:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_k^2, \quad (7.35)$$

где $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе f .

1°. Необходимое и достаточное условие знакоопределенности квадратичной формы.

Справедливо следующее утверждение:

Для того чтобы квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, заданная в n -мерном линейном пространстве L , была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы либо положительный индекс инерции p , либо отрицательный индекс инерции q был равен размерности n пространства L .

При этом, если $p = n$, то форма положительно определенная, если же $q = n$, то форма отрицательно определенная.

Доказательство. Так как случаи положительно определенной формы и отрицательно определенной формы рассматриваются аналогично, то доказательство утверждения проведем для положительно определенных форм.

1) **Необходимость.** Пусть форма $A(x, x)$ положительно определена. Тогда выражение (7.35) примет вид

$$A(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_p^2.$$

Если при этом $p < n$, то из последнего выражения следует, что для ненулевого вектора x с координатами

$$\eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \dots, \eta_p = 0, \eta_{p+1} \neq 0, \dots, \eta_n \neq 0$$

форма $A(x, x)$ обращается в нуль, а это противоречит определению положительно определенной квадратичной формы. Следовательно, $p = n$.

2) **Достаточность.** Пусть $p = n$. Тогда соотношение (7.35) имеет вид $A(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2$. Ясно, что $A(x, x) \geq 0$, причем, если $A = 0$, то $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n = 0$, т. е. вектор x нулевой. Следовательно, $A(x, x)$ — положительно определенная форма.

З а м е ч а н и е. Для выяснения вопроса о знакоопределенности квадратичной формы с помощью указанного признака мы должны привести эту форму к каноническому виду.

В следующем пункте мы докажем *критерий Сильвестра* знакоопределенности квадратичной формы, с помощью которого можно выяснить вопрос о знакоопределенности формы, заданной в любом базисе без приведения к каноническому виду.

2°. *Необходимое и достаточное условие знакопеременности квадратичной формы.*

Докажем следующее утверждение:

Для того чтобы квадратичная форма была знакопеременной, необходимо и достаточно, чтобы как положительный, так и отрицательный индексы инерции этой формы были отличны от нуля.

Доказательство. 1) **Необходимость.** Так как знакопеременная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то ее представление (7.35) в нормальном виде должно содержать как положительные, так и отрицательные слагаемые (в противном случае эта форма принимала бы либо неотрицательные, либо неположительные значения). Следовательно, как положительный, так и отрицательный индексы инерции отличны от нуля.

2) **Достаточность.** Пусть $p \neq 0$ и $q \neq 0$. Тогда для вектора x_1 с координатами $\eta_1 \neq 0, \dots, \eta_p \neq 0, \eta_{p+1} = 0, \dots, \eta_n = 0$ имеем $A(x_1, x_1) > 0$, а для вектора x_2 с координатами $\eta_1 = 0, \dots, \eta_p = 0, \eta_{p+1} \neq 0, \dots, \eta_n \neq 0$ имеем $A(x_2, x_2) < 0$. Следовательно, форма $A(x, x)$ является знакопеременной.

3°. *Необходимое и достаточное условие квази знакоопределенности квадратичной формы.*

Справедливо следующее утверждение:

Для того чтобы форма $A(x, x)$ была квазизнакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения: либо $p < n$, $q = 0$, либо $p = 0$, $q < n$.

Доказательство. Мы рассмотрим случай положительно квазизнакоопределенной формы. Случай отрицательно квазизнакоопределенной формы рассматривается аналогично.

1) **Необходимость.** Пусть форма $A(x, x)$ положительно квазизнакоопределенная. Тогда, очевидно, $q = 0$ и $p < n$ (если бы $p = n$, то форма была бы положительно определенной).

2) **Достаточность.** Если $p < n$, $q = 0$, то $A(x, x) \geq 0$ и для ненулевого вектора x с координатами $\eta_1 = 0, \dots, \eta_p = 0$, $\eta_{p+1} \neq 0, \dots, \eta_n \neq 0$ имеем $A(x, x) = 0$, т. е. $A(x, x)$ — положительно квазизнакоопределенная форма.

3. **Критерий Сильвестра*)** знакоопределенности квадратичной формы. Пусть форма $A(x, x)$ в базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ определяется матрицей $A(e) = (a_{ij})$:

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j,$$

и пусть $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\dots$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ — угловые миноры и определитель матрицы (a_{ij}) . Справедливо следующее утверждение:

Теорема 7.6 (критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма $A(x, x)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\dots$, $\Delta_n > 0$.

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, причем $\Delta_1 < 0$.

Доказательство. 1) **Необходимость.** Докажем сначала, что из условия знакоопределенности квадратичной формы $A(x, x)$ следует $\Delta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Убедимся, что предположение $\Delta_k = 0$ ведет к противоречию — при этом предположении существует ненулевой вектор x , для которого $A(x, x) = 0$, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, пусть $\Delta_k = 0$. Рассмотрим следующую квадратную однородную систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1k}\xi_k &= 0, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \dots + a_{2k}\xi_k &= 0, \\ \vdots & \\ a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + \dots + a_{kk}\xi_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

*) Джемс Джозеф Сильвестр (1814 — 1897) — английский математик.

Так как Δ_k — определитель этой системы и $\Delta_k = 0$, то система (7.36) имеет ненулевое решение $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ (не все ξ_i равны нулю). Умножим первое из уравнений (7.36) на ξ_1 , второе на $\xi_2, \dots$, последнее на ξ_k и сложим полученные соотношения. В результате

получим равенство $\sum_{i=1}^k a_{i1} \xi_i \xi_1 = 0$, левая часть которого представляет собой значение квадратичной формы $A(x, x)$ для ненулевого вектора x с координатами $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)$. Это значение равно нулю, что противоречит знакоопределенности формы.

Итак, мы убедились, что $\Delta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому мы можем применить метод Якоби приведения формы $A(x, x)$ к сумме квадратов (см. теорему 7.4) и воспользоваться формулами (7.27) для канонических коэффициентов λ_i . Если $A(x, x)$ — положительно определенная форма, то все канонические коэффициенты положительны. Но тогда из соотношений (7.27) следует, что $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$. Если же $A(x, x)$ — отрицательно определенная форма, то все канонические коэффициенты отрицательны. Но тогда из формул (7.27) следует, что знаки угловых миноров чередуются, причем $\Delta_1 < 0$.

2) **Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть выполнены условия, наложенные на угловые миноры Δ_i в формулировке теоремы. Так как $\Delta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то форму A можно привести к сумме квадратов методом Якоби (см. теорему 7.4), причем канонические коэффициенты λ_i могут быть найдены по формулам (7.27). Если $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, то из соотношений (7.27) следует, что все $\lambda_i > 0$, т. е. форма $A(x, x)$ положительно определенная. Если же знаки Δ_i чередуются и $\Delta_1 < 0$, то из соотношений (7.27) следует, что форма $A(x, x)$ отрицательно определенная. Теорема доказана.

§ 5. Полилинейные формы

Определение. Полилинейной формой $A(x_1, x_2, \dots, x_p)$ p векторных аргументов называется числовая функция, определенная на всевозможных векторах $x_1, x_2, \dots, x_p$, линейного пространства L и линейная по каждому из аргументов, при фиксированных значениях остальных аргументов.

Простейшим примером полилинейной формы может служить произведение линейных форм $A(x_1) A(x_2) \dots A(x_p)$.

Полилинейная форма $A(x_1, x_2, \dots, x_p)$ называется *симметричной* (кососимметричной), если для каждых двух ее аргументов x_k и x_l и для любых значений этих аргументов выполняется соотношение

$$A(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_p) = A(x_1, \dots, x_l, \dots, x_k, \dots, x_p)$$

$$(A(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_p) = -A(x_1, \dots, x_l, \dots, x_k, \dots, x_p)).$$

Пусть полилинейная форма $A(x_1, x_2, \dots, x_p)$ задана в конечномерном линейном пространстве L , и пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в L . Обратимся к разложению каждого вектора x_i по базисным векторам $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$x_i = \xi_{i1}e_1 + \xi_{i2}e_2 + \dots + \xi_{in}e_n = \sum_{j=1}^n \xi_{ij}e_j, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (7.37)$$

Подставляя выражения для x_i по формулам (7.37) в полилинейную форму $A(x_1, x_2, \dots, x_p)$ и используя свойство линейности этой формы по каждому аргументу, получим

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \dots, x_p) &= A\left(\sum_{j_1=1}^n \xi_{1j_1}e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n \xi_{2j_2}e_{j_2}, \dots, \sum_{j_p=1}^n \xi_{pj_p}e_{j_p}\right) = \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_p=1}^n \xi_{1j_1}\xi_{2j_2} \dots \xi_{pj_p} A(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Таким образом, значения полилинейной формы $A(x_1, x_2, \dots, x_p)$ в конечномерном пространстве с выделенным базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ определяются всевозможными значениями $A(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p})$ этой формы на векторах $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}$.

Докажем следующее утверждение:

Теорема 7.7. Любая полилинейная кососимметричная форма $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ заданная в n -мерном линейном пространстве L с выделенным базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ может быть представлена в виде

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix}, \quad (7.39)$$

где $a = A(e_1, e_2, \dots, e_n)$, $a(\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{1n})$ — координаты вектора x_1 в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Доказательство. Так как форма $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является кососимметричной, то для произвольной перестановки $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ индексов $(1, 2, \dots, n)$ имеем

$$\begin{aligned} A(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) &= (-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_n)} A(e_1, e_2, \dots, e_n) = \\ &= (-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_n)} a, \end{aligned} \quad (7.40)$$

где $N(j_1, j_2, \dots, j_n)$ — число беспорядков в перестановке $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

В силу кососимметричности формы для двух одинаковых индексов j_k и j_l ($j_k = j_l$) значение $A(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}, \dots, e_{j_l}, \dots, e_{j_n})$ равно нулю. Отсюда и из соотношения (7.40) следует, что для рассматриваемого случая соотношение (7.38) примет вид

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n (-1)^{N(i_1, i_2, \dots, i_n)} \xi_{1j_1} \xi_{2j_2} \dots \xi_{nj_n}. \quad (7.41)$$

Сравнивая формулу (7.41) с формулой (1.28) гл. 1 для определителя порядка n , мы убедимся в справедливости соотношения (7.39). Теорема доказана.

§ 6. Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве

В предыдущих параграфах мы изучали билинейные и квадратичные формы в произвольном (не обязательно евклидовом) вещественном линейном пространстве L . В этом параграфе мы получим ряд сведений о билинейных и квадратичных формах, заданных в вещественном евклидовом пространстве. При этом мы будем широко пользоваться результатами § 9 гл. 5, посвященного линейным операторам.

В п. 3 настоящего параграфа будет показано, каким образом теория евклидовых пространств может быть применена для получения содержательных результатов в произвольных линейных пространствах. В частности, нами будет получено независимое доказательство теоремы о том, что каждая квадратичная форма в линейном пространстве может быть приведена к каноническому виду.

1. Предварительные замечания. В этом пункте мы напомним некоторые понятия теории линейных операторов.

Пусть V — n -мерное вещественное евклидово пространство и A — линейный оператор, действующий из V в V . Оператор A^* называется сопряженным к A , если для всех $x \in V$ и $y \in V$ выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \quad (7.42)$$

Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$, т. е. если для всех $x \in V$ и $y \in V$

$$(Ax, y) = (x, Ay). \quad (7.43)$$

Рассмотрим билинейную форму $B(x, y)$, заданную в евклидовом пространстве V . В главе 5 было установлено, что каждой такой форме $B(x, y)$ однозначно соответствует линейный оператор такой, что справедливо равенство

$$B(x, y) = (Ax, y). \quad (7.44)$$

Кроме того, в теореме 5.33 было доказано, что билинейная форма $B(x, y)$ является симметричной тогда и только тогда, когда оператор A , фигурирующий в (7.44), является самосопряженным.

Напомним также, что в теореме 5.35 для любого самосопряженного оператора A было доказано существование ортонормированного базиса из собственных векторов. Это означает, что существуют ортонормированная система $e_1, e_2, \dots, e_n$ и вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что

$$Ae_k = \lambda_k e_k. \quad (7.45)$$

Отметим, что в базисе $\{e_k\}$ матрица оператора A имеет диагональный вид.

2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов в ортогональном базисе. Пусть $B(x, y)$ — симметричная билинейная форма, заданная в вещественном евклидовом пространстве V , а $B(x, x)$ — определяемая ею квадратичная форма.

Докажем следующую теорему о приведении квадратичной формы $B(x, x)$ к сумме квадратов.

Теорема 7.8. Пусть $B(x, y)$ — симметричная билинейная форма, заданная в евклидовом пространстве V . Тогда в пространстве V существует такой ортонормированный базис $\{e_k\}$ и можно указать такие вещественные числа λ_k , что для любого $x \in V$ квадратичная форма $B(x, x)$ может быть представлена в виде следующей суммы квадратов координат ξ_k вектора x в базисе $\{e_k\}$:

$$B(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2. \quad (7.46)$$

Доказательство. Так как $B(x, y)$ — симметричная билинейная форма, то существует самосопряженный оператор A такой, что

$$B(x, y) = (Ax, y). \quad (7.47)$$

По теореме 5.35 для оператора A можно указать ортонормированный базис $\{e_k\}$ из собственных векторов этого оператора; пусть λ_k — собственные значения, отвечающие e_k .

Пусть вектор x имеет в базисе e_k координаты ξ_k :

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k. \quad (7.48)$$

Тогда, очевидно, поскольку e_k — собственные векторы оператора A :

$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k e_k. \quad (7.49)$$

Из соотношений (7.48) и (7.49) вследствие ортонормированности базиса $\{e_k\}$ получаем следующее выражение для скалярного произведения (Ax, x) :

$$(Ax, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2. \quad (7.50)$$

Отсюда и из соотношения (7.47) получаем (7.46). Теорема доказана.

3. Одновременное приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов в линейном пространстве.

Докажем теперь важную теорему об одновременном приведении двух квадратичных форм к сумме квадратов в произвольном (не обязательно евклидовом) вещественном линейном пространстве.

Теорема 7.9. Пусть $A(x, y)$ и $B(x, y)$ — симметричные билинейные формы, определенные в вещественном линейном пространстве V . Допустим далее, что для всех $x \in V, x \neq 0$, справедливо неравенство $B(x, x) > 0$ (т. е. квадратичная форма $B(x, x)$ — положительно определенная). Тогда в пространстве V можно указать базис $\{e_k\}$ такой, что квадратичные формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ могут быть представлены в виде

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2, \quad (7.51)$$

$$B(x, x) = \sum_{k=1}^n \xi_k^2, \quad (7.52)$$

где ξ_k — координаты вектора x в базисе $\{e_k\}$.

Доказательство. Согласно замечанию в конце § 2 этой главы скалярное произведение в конечномерном вещественном пространстве может быть задано с помощью билинейной формы $B(x, y)$, полярной к положительно определенной квадратичной форме $B(x, x)$.

Поэтому мы можем ввести в линейном пространстве V скалярное произведение (x, y) векторов x и y , полагая

$$(x, y) = B(x, y) \quad (7.53)$$

Таким образом, V представляет собой евклидово пространство со скалярным произведением (7.53). По теореме 7.11 можно указать такой ортонормированный базис $\{e_k\}$ и такие вещественные числа λ_k , что в этом базисе квадратичная форма $A(x, x)$ представляется в виде (7.51).

С другой стороны, в любом ортонормированном базисе скалярное произведение (x, x) , равное, согласно (7.53), $B(x, x)$, представляется в виде суммы квадратов координат вектора x . Таким образом, представление $B(x, x)$ в виде (7.52) в базисе $\{e_k\}$ также обоснованно. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказанной нами теоремы непосредственно следует, что любую квадратичную форму в произвольном вещественном линейном пространстве можно привести к каноническому виду. Однако способ такого приведения является, вообще говоря, более сложным, чем способы, изложенные выше в § 3, поскольку он требует нахождения всех собственных векторов некоторого самосопряженного оператора (см. по этому поводу гл. 6).

4. Экстремальные свойства квадратичной формы. Рассмотрим произвольную дифференцируемую функцию f , определенную на некоторой гладкой поверхности S (см. определение гладкой поверхности в гл. 5 части 2 «Основ математического анализа»). Будем говорить, что точка x_0 поверхности S является **с т а ц и о н а р н о й т о ч к о й** функции f , если в точке x_0 производная функции f по любому направлению на поверхности S равна нулю. В частности, точки экстремума функции f являются ее стационарными точками.

Значение $f(x_0)$ функции f в стационарной точке x_0 называется **с т а ц и о н а р н ы м з н а ч е н и е м**. Иногда стационарную точку x_0 функции f называют ее **к р и т и ч е с к о й т о ч к о й**, а величину $f(x_0)$ — **к р и т и ч е с к и м з н а ч е н и е м**. В этом пункте мы исследуем вопрос о стационарных и, в частности, экстремальных значениях квадратичной формы $B(x, x)$ на сфере единичного радиуса в евклидовом пространстве V и о связи этих значений с собственными значениями самосопряженного оператора A , с помощью которого симметричная билинейная форма $B(x, y)$, полярная квадратичной форме $B(x, x)$, представляется в виде

$$B(x, y) = (Ax, y). \quad (7.54)$$

При этом **единичной сферой** в V мы будем называть множество тех векторов $x \in V$, которые удовлетворяют уравнению

$$(x, x) = 1 \text{ или } \|x\| = 1. \quad (7.55)$$

Для упрощения рассуждений мы воспользуемся выводами предыдущего пункта о приведении квадратичной формы к сумме квадратов.

Итак, пусть $B(x, x)$ — квадратичная форма, $B(x, y)$ — полярная этой форме билинейная форма, A — самосопряженный оператор, связанный с $B(x, y)$ соотношением (7.54).

По теореме 7.8 в ортонормированном базисе $\{e_k\}$, состоящем из собственных векторов оператора A , квадратичная форма $B(x, x)$ имеет вид

$$B(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2, \quad (7.56)$$

где ξ_k — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_k\}$, а λ_k — собственные значения оператора A . Мы договоримся нумеровать эти собственные значения в порядке убывания:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n. \quad (7.57)$$

Заметим, что в выбранном базисе единичная сфера, определяемая уравнением (7.55), в координатах вектора $\mathbf{x}$ задается уравнением

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^2 - 1 = 0, \quad (7.58)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 7.10. *Стационарные значения квадратичной формы $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ на единичной сфере (7.55) равны собственным значениям λ_k оператора A . Эти стационарные значения достигаются, в частности, на единичных собственных векторах $\mathbf{e}_k$ оператора A .*

Доказательство. Так как речь идет о стационарных значениях функции $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ при условии $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$, т. е. об условном экстремуме этой функции, то мы можем воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа (см. «Основы математического анализа» часть I, п. 2, § 5, гл. 15). Составим для функции $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, используя ее выражение (7.56) в данном базисе $\{\mathbf{e}_k\}$, функцию Лагранжа $\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, учитывая при этом, что уравнение связи имеет вид (7.58). Получим

$$\Psi = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^2 - \lambda \left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 - 1 \right), \quad (7.59)$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Напомним, что если λ в (7.59) выбрано так, что при условии (7.58) выполняются соотношения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.60)$$

то в точках сферы (7.58), отвечающих этим значениям λ , функция $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ (квадратичная форма $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$) имеет стационарное значение.

Таким образом, вопрос о стационарных значениях $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ на сфере $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ редуцируется к исследованию системы уравнений (7.58), (7.60) относительно неизвестных λ и координат $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ вектора $\mathbf{x}$. Отметим, что при этом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ будут координатами того вектора $\mathbf{x}$, на котором $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ будет иметь стационарное значение.

Так как $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_k} = 2(\lambda_k - \lambda) \xi_k$, то интересующая нас система (7.58), (7.60) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \xi_k^2 &= 1, \\ (\lambda_k - \lambda) \xi_k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Пусть система (7.61) имеет решение

$$\lambda = \tilde{\lambda}, \quad \tilde{x} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n).$$

Умножая каждое из соотношений $(\lambda_k - \tilde{\lambda}) \tilde{\xi}_k = 0$ на $\tilde{\xi}_k$, суммируя затем полученные соотношения и учитывая, что $\sum_{k=1}^n \tilde{\xi}_k^2 = 1$, получим, согласно (7.56), следующее значение для $\tilde{\lambda}$:

$$\tilde{\lambda} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{\xi}_k^2 = B(\tilde{x}, \tilde{x}).$$

Таким образом, если $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{x} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n)$ — решение системы (7.61), то $\tilde{\lambda}$ равно значению квадратичной формы $B(x, x)$ на векторе $\tilde{x} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n)$, на котором эта форма имеет стационарное значение.

Легко видеть, что решениями системы (7.61) служат следующие значения неизвестных λ и ξ_i :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_k; \quad \xi_1 = 0, \dots, \xi_{k-1} = 0, \xi_k = 1, \xi_{k+1} = 0, \dots, \xi_n = 0, \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Очевидно, эти решения являются собственными значениями λ_k и координатами соответствующих собственных векторов e_k . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Мы только что выяснили, что собственные значения λ_k являются стационарными значениями квадратичной формы $B(x, x)$ на сфере $(x, x) = 1$.

Оказывается, числа λ_1 и λ_n (при условии (7.57)) являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями $B(x, x)$ на сфере $(x, x) = 1$ (то, что эти значения достигаются, установлено выше).

Чтобы убедиться в справедливости замечания, достаточно заменить в (7.56) все λ_k сначала на λ_n , а затем на λ_1 и воспользоваться соотношениями (7.57) и (7.58).

Очевидно, получим неравенства $\lambda_n \leq B(x, x) \leq \lambda_1$.

§ 7. Гиперповерхности второго порядка

В этом параграфе мы познакомимся с понятием и основными типами гиперповерхностей второго порядка. Кроме того, будут указаны способы исследования таких поверхностей.

1. Понятие гиперповерхности второго порядка. Пусть V — n -мерное вещественное евклидово пространство.

Ради геометрической наглядности будем называть векторы x этого пространства **точками**.

Гиперповерхностью S второго порядка будем называть геометрическое место точек x , удовлетворяющих уравнению вида

$$A(x, x) + 2B(x) + c = 0, \quad (7.62)$$

где $A(x, x)$ — не равная тождественно нулю квадратичная форма, $B(x)$ — линейная форма, а c — вещественное число.

Уравнение (7.62) будем называть **общим уравнением гиперповерхности второго порядка**.

Выделим в пространстве V какой-либо ортонормированный базис $\{e_k\}$. Координаты вектора x (точки x) в этом базисе обозначим через $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда (см. п. 2. § 1 этой главы) квадратичная форма $A(x, x)$ может быть представлена в виде

$$A(x, x) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k, \quad (7.63)$$

где

$$a_{jk} = A(e_j, e_k) \quad (7.64)$$

и $A(e_j, e_k)$ — значение на векторах e_j и e_k симметричной билинейной формы $A(x, y)$, полярной квадратичной форме $A(x, x)$.

Линейная форма $B(x)$ в указанном базисе $\{e_k\}$ представляется в виде *)

$$B(x) = \sum_{k=1}^n b_k x_k. \quad (7.65)$$

Таким образом, *общее уравнение гиперповерхности второго порядка в евклидовом пространстве V с выделенным базисом $\{e_k\}$ может быть представлено в следующей форме:*

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k + 2 \sum_{k=1}^n b_k x_k + c = 0. \quad (7.66)$$

Договоримся о следующей терминологии.

*) Согласно лемме п. 1 § 4 гл. 5 линейная форма $B(x)$ может быть представлена в виде $B(x) = (x, b)$, где b — постоянный вектор. Обозначая $b_1, b_2, \dots, b_n$ координаты вектора b и учитывая ортонормированность базиса $\{e_k\}$, мы получим представление $B(x)$ в виде (7.65).

Слагаемое $A(x, x) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}x_jx_k$ будем называть группой старших членов уравнения (7.62) или (7.66).

Группу слагаемых $B(x) + c = \sum_{k=1}^n b_kx_k + c$ будем называть линейной частью уравнения (7.62) или (7.66).

Мы будем рассматривать в дальнейшем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ & & & c \end{pmatrix} \quad (7.67)$$

и определители $\det A$ и $\det B$ этих матриц.

Исследование гиперповерхностей второго порядка мы будем проводить с помощью метода, сходного с методом, применяемым в аналитической геометрии при исследовании кривых и поверхностей второго порядка, заданных общими уравнениями.

Идея этого метода заключается в том, что путем выбора специальной декартовой системы координат на плоскости (для кривых второго порядка) или в пространстве (для поверхностей второго порядка) достигается максимальное упрощение уравнения кривой или поверхности. Затем путем исследования этого уравнения выясняются геометрические свойства кривой или поверхности. Кроме того, перечисление всех возможных типов простейших (канонических) уравнений кривых или поверхностей второго порядка позволяет дать их классификацию.

Чтобы использовать этот метод в многомерном случае, мы сначала должны изучить такие преобразования (отображения) n -мерного евклидова пространства, которые представляют собой аналоги преобразований декартовых прямоугольных координат в случае двух и трех измерений.

Таковыми преобразованиями в n -мерном случае будут параллельные переносы и такие преобразования базисов, при которых ортонормированный базис переходит в новый ортонормированный базис. Точные определения этих преобразований будут даны в следующем пункте.

Очевидно, гиперповерхность второго порядка, рассматриваемая как геометрический объект пространства V , не изменяется, если производится преобразование указанного выше вида. Ниже мы убедимся, что для каждого уравнения вида (7.62) (или (7.66)) можно выбрать такое начало координат и выбрать такой ортонормированный базис в V , что это уравнение, записанное в координатах относительно нового базиса, будет максимально простого вида, и поэтому, как и в случае двух и трех измерений, можно будет указать геометрические характеристики таких поверхностей и дать им классификацию.

2. Параллельные переносы в евклидовом пространстве. Преобразования ортонормированных базисов в ортонормированные. Параллельным переносом в евклидовом пространстве V мы будем называть преобразование, задаваемое формулами

$$x = x' + \overset{\circ}{x}, \quad (7.68)$$

где x — фиксированная точка, называемая новым началом координат.

Пусть точки x, x' и $\overset{\circ}{x}$ имеют координаты, соответственно равные $(x_1, x_2, \dots, x_n), (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ и $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Тогда в координатах параллельный перенос определяется формулами

$$x_k = x'_k + \overset{\circ}{x}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.69)$$

Отметим, что при параллельном переносе любой фиксированный базис не изменяется.

Перейдем теперь к выяснению характеристики преобразования ортонормированного базиса в ортонормированный.

Допустим, что ортонормированный базис $\{e_k\}$ преобразуется в новый ортонормированный базис $\{e'_k\}$. Разложим каждый вектор e'_k по векторам $\{e_k\}$. Получим

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \dots + p_{n1}e_n, \\ e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{n2}e_n, \\ e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \dots + p_{nn}e_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

Обозначим буквой P матрицу преобразования (7.70):

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}. \quad (7.71)$$

Так как базисы $\{e_k\}$ и $\{e'_k\}$ ортонормированные, то из (7.70) путем скалярного умножения e'_j на e'_k получим

$$(e'_j, e'_k) = \sum_{m=1}^n p_{mj}p_{mk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases} \quad (7.72)$$

Рассмотрим теперь транспонированную матрицу P' , т. е. матрицу, полученную из P перестановкой строк и столбцов.

Очевидно, согласно (7.72),

$$PP' = P'P = I, \quad (7.73)$$

где I — единичная матрица.

Равенства (7.73) показывают, что матрица P' является обратной для матрицы P , т. е.

$$P^{-1} = P'. \quad (7.74)$$

Допустим теперь, что мы рассматриваем преобразование ортонормированного базиса $\{e_k\}$ по формулам (7.70), причем матрица P этого преобразования удовлетворяет условию (7.73) (или, что то же, (7.74)).

Тогда очевидно, элементы p_{jk} матрицы P удовлетворяют условию (7.72), что согласно этим же соотношениям (7.72), эквивалентно условию ортонормированности базиса $\{e_k\}$.

Напомним, что в § 9 гл. 5 матрицу P , удовлетворяющую условию (7.73), мы назвали ортогональной.

Итак, для того чтобы преобразование (7.70) было преобразованием ортонормированного базиса в ортонормированный, необходимо и достаточно, чтобы матрица P этого преобразования была ортогональной.

З а м е ч а н и е. Обращаясь к формулам (5.14) преобразования координат вектора при преобразовании базиса (см п 1, § 2, гл. 5) и учитывая, что обратная матрица для ортогональной матрицы P есть матрица P' , получим следующие формулы преобразования координат точки x при переходе от ортонормированного базиса к ортонормированному:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \dots + p_{1n}x'_n, \\ x_2 &= p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \dots + p_{2n}x'_n, \\ &\vdots \\ x_n &= p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \dots + p_{nn}x'_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.75)$$

3. Преобразование общего уравнения гиперповерхности второго порядка при параллельном переносе. Рассмотрим параллельный перенос, который определяется как преобразование пространства V по формуле (7.68) (или в координатах по формуле (7.69)).

Левая часть (7.62) после подстановки вместо x его выражения по формуле (7.68) в силу линейности квадратичной формы по первому и второму аргументу *) и свойств линейной формы примет следующий вид:

$$A(x', x') + 2[A(x', \check{x}) + B(x')] + [A(\check{x}, \check{x}) + 2B(\check{x}) + c] = 0.$$

*) Квадратичная форма $A(x, x)$ связана с симметричной билинейной формой $A(x, y)$, полярной к форме $A(x, x)$. Билинейная форма $A(x, y)$ линейна по аргументам x и y . Фигурирующее в дальнейшем тексте выражение $A(x', \check{x})$ представляет собой значение формы $A(x, y)$ на векторах x' и $\check{x}$.

Итак, общее уравнение (7.62) гиперповерхности S при параллельном переносе (7.68) запишется в форме

$$A(x', x') + 2B(x') + c' = 0, \quad (7.76)$$

где линейная форма $B'(x')$ и постоянное число c' определяются соотношениями

$$B'(x') = A(x', \check{x}) + B(x'), \quad (7.77)$$

$$c' = A(\check{x}, \check{x}) + 2B(\check{x}) + c. \quad (7.78)$$

Запишем полученные формулы в координатах.

Пусть координаты точек x' и $\check{x}$ равны соответственно $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ и $\check{x}_1, \check{x}_2, \dots, \check{x}_n$. Так как при параллельном переносе базис $\{e_k\}$ не меняется, то квадратичная форма $A(x', x')$ запишется следующим образом:

$$A(x', x') = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x'_j x'_k \quad (7.79)$$

(отметим, что коэффициенты $a_{jk} = A(e_j, e_k)$ не меняются, так как не меняются базисные векторы e_k).

Следовательно, мы можем сделать важный вывод: *при параллельном переносе группа старших членов сохраняет свой вид.*

Займемся теперь формулами (7.77) и (7.78). Так как

$$A(x', \check{x}) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} \check{x}_j \right) x'_k,$$

$$B(x') = \sum_{k=1}^n b_k x'_k,$$

$$A(\check{x}, \check{x}) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \check{x}_j \check{x}_k,$$

$$B(\check{x}) = \sum_{k=1}^n b_k \check{x}_k,$$

то формула (7.77) примет вид

$$B'(x') = \sum_{k=1}^n b'_k x'_k = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{jk} \check{x}_j + b_k \right] x'_k, \quad (7.80)$$

а формула (7.78) запишется следующим образом:

$$c' = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \check{x}_j \check{x}_k + 2 \sum_{k=1}^n b_k \check{x}_k + c. \quad (7.81)$$

Таким образом, уравнение (7.76) в координатах будет иметь следующий вид:

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x'_j x'_k + 2 \sum_{k=1}^n b'_k x'_k + c' = 0. \quad (7.82)$$

Нам понадобится несколько иное, чем (7.81), выражение для c' . Запишем (7.81) в следующей форме:

$$c' = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{jk} \dot{x}_j + b_k \right] \dot{x}_k + \sum_{k=1}^n b_k \dot{x}_k + c. \quad (7.83)$$

Учитывая, что коэффициенты b'_k выражаются, как это следует из (7.80), по формулам

$$b'_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} \dot{x}_j + b_k, \quad (7.84)$$

мы получим из (7.83) нужное нам выражение для c' :

$$c' = \sum_{k=1}^n (b_k + b_k) \dot{x}_k + c. \quad (7.85)$$

4. Преобразование общего уравнения гиперповерхности второго порядка при переходе от ортонормированного базиса к ортонормированному. Пусть ортонормированный базис $\{e_k\}$ преобразуется в новый ортонормированный базис $\{e'_k\}$ по формулам (7.70) и P — ортогональная матрица этого преобразования (см. (7.71)). Тогда, согласно замечанию в п. 2 этого параграфа, координаты x_k и x'_k точки в базисах $\{e_k\}$ и $\{e'_k\}$ связаны соотношениями (7.75). Подставляя выражение для x_k из (7.75) в левую часть уравнения (7.66) и учитывая, что вследствие однородности соотношений (7.75) группа старших членов и линейная часть уравнения (7.66) преобразуются автономно, получим следующее выражение для общего уравнения гиперповерхности второго порядка в координатах x'_k точек в преобразованном базисе $\{e'_k\}$:

$$\sum_{j,k=1}^n a'_{jk} x'_j x'_k + 2 \sum_{k=1}^n b'_k x'_k + c' = 0. \quad (7.86)$$

Согласно отмеченной выше автономности преобразования группы старших членов, справедливы равенства

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n a'_{jk} x'_j x'_k &= \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k, \\ \sum_{k=1}^n b'_k x'_k &= \sum_{k=1}^n b_k x_k, \\ c' &= c. \end{aligned} \right\} \quad (7.87)$$

Обращаясь к первой из формул (7.87), мы видим, что для определения коэффициентов a'_{jk} можно воспользоваться правилом преобразования коэффициентов квадратичной формы при переходе к новому базису. Именно, если обозначим буквой A' матрицу квадратичной формы $A(x, x)$ в базисе $\{e'_k\}$, то, согласно теореме 7.2 и соотношению $P' = P^{-1}$, получим следующую связь между матрицами A и A' формы $A(x, x)$ в базисах $\{e_k\}$ и $\{e'_k\}$:

$$A' = P^{-1}AP \quad (7.88)$$

(напомним, что P — матрица ортогонального преобразования).

Будем рассматривать теперь матрицу A' как матрицу некоторого линейного оператора A в базисе $\{e'_k\}$ *, а матрицу P^{-1} как матрицу перехода от базиса $\{e'_k\}$ к базису $\{e_k\}$. Тогда, согласно теореме 5.7 (см. п. 2 § 2 гл. 5) матрицу A можно рассматривать как матрицу этого линейного оператора A в базисе $\{e_k\}$.

Иными словами, матрица квадратичной формы при преобразовании ортонормированного базиса в ортонормированной изменяется как матрица некоторого линейного оператора.

Этот вывод мы используем в следующем пункте.

З а м е ч а н и е. Отметим, что оператор A , матрица которого в ортонормированном базисе совпадает с матрицей квадратичной формы $A(x, x)$, самосопряженный.

Для доказательства проведем следующие рассуждения.

Пусть $A(x, x)$ — квадратичная форма и $A(x, y)$ — симметричная билинейная форма, полярная форме $A(x, x)$. Согласно теореме 7.8 билинейная форма $A(x, y)$ может быть представлена в виде

$$A(x, y) = (Ax, y),$$

где A — самосопряженный оператор.

Поэтому квадратичная форма $A(x, x)$ может быть представлена в виде

$$A(x, x) = (Ax, x).$$

Докажем, что в ортонормированном базисе $\{e_k\}$ матрицы оператора A и квадратичной формы совпадают. Этим будет доказано утверждение замечания.

Пусть a_{jk} — элементы матрицы формы $A(x, x)$ и $\tilde{a}_{jk}$ — элементы матрицы оператора A в базисе $\{e_k\}$. Согласно п. 2 § 1 этой главы $a_{jk} = A(e_j, e_k)$, а элементы $\tilde{a}_{jk}$, согласно п. 1 § 2 гл. 5, формуле (5.13), могут быть найдены из равенств $Ae_j = \sum_{p=1}^n \tilde{a}_{jp}e_p$.

*) Согласно теореме 5.5 (см. п. 1 § 2 гл. 5) любая квадратная матрица из n строк и n столбцов может рассматриваться как матрица некоторого линейного оператора, действующего в n -мерном пространстве.

Умножим обе части последнего соотношения скалярно на e_k . Тогда, учитывая ортонормированность базиса $\{e_k\}$, получим $(Ae_j, e_k) = \bar{a}_{jk}$. Так как $A(e_j, e_k) = (Ae_j, e_k)$, то $a_{jk} = \bar{a}_{jk}$. Утверждение замечания доказано.

5. Инварианты общего уравнения гиперповерхности второго порядка. Назовем и н в а р и а н т о м общего уравнения (7.62) (или (7.66)) гиперповерхности второго порядка относительно параллельных переносов и преобразований ортогональных базисов в ортогональные такую функцию $f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, b_1, \dots, b_n, c)$ коэффициентов этого уравнения, значение которой не меняется при указанных преобразованиях пространства.

Докажем следующее утверждение:

Теорема 7.11. *Инвариантами общего уравнения (7.62) (или (7.66)) гиперповерхности второго порядка являются коэффициенты характеристического многочлена матрицы A квадратичной формы $A(x, x)$ и определитель $\det B$ матрицы B в соотношении (7.67). В частности, инвариантами являются $\det A$ и след $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ матрицы A .*

Доказательство. Очевидно, инвариантность перечисленных в условии теоремы величин достаточно доказать отдельно для параллельного переноса и преобразования ортонормированного базиса в ортонормированный.

Рассмотрим сначала *параллельный перенос*. В п. 3 этого параграфа мы установили, что при этом преобразовании группа старших членов сохраняет свой вид (см. формулу (7.79)). Поэтому не меняется матрица A , а следовательно, и характеристический многочлен этой матрицы.

Докажем инвариантность $\det B$.

При параллельном переносе (7.68) (или (7.69)) матрица преобразуется в матрицу B' , определитель которой, согласно (7.82), имеет вид

$$\det B' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} & b'_1 \\ a_{n1} & a_{nn} & b'_n \\ b'_1 & b'_n & c' \end{vmatrix}, \quad (7.89)$$

где величины b'_k и c' определяются по формулам (7.84) и (7.85).

Вычтем из элементов последней $(n+1)$ -й строки определителя (7.89) элементы первой строки, умноженные на $\dot{x}_1$, затем элементы второй строки, умноженные на $\dot{x}_2$, и т. д., наконец, элементы n -й строки, умноженные на $\dot{x}_n$. Так как при таких преобразованиях определитель не меняется, то, используя (7.84) и (7.85), получим

соотношение

$$\det B' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} & b'_1 \\ a_{n1} & a_{nn} & b'_n \\ b_1 & b_n & \left(\sum_{k=1}^n b_k x_k^2 + c \right) \end{vmatrix}. \quad (7.90)$$

Вычтем теперь из элементов последнего $(n+1)$ -го столбца определителя (7.90) элементы первого столбца, умноженные на $\dot{x}_1$, затем элементы второго столбца, умноженные на $\dot{x}_2$, и т. д., наконец, элементы n -го столбца, умноженные на $\dot{x}_n$. Так как при таких преобразованиях определитель не меняется, то, используя соотношение $a_{jk} = a_{kj}$, вытекающее из симметричности формы $A(x, y)$, и формулу (7.84), мы получим в результате $\det B$. Итак, равенство $\det B' = \det B$ доказано. Следовательно, $\det B$ инвариантен относительно параллельных переносов.

Рассмотрим теперь преобразование ортонормированного базиса в ортонормированный.

Во-первых, убедимся, что коэффициенты характеристического многочлена матрицы A квадратичной формы являются инвариантами рассматриваемого преобразования.

В предыдущем пункте мы установили, что при переходе к новому ортонормированному базису матрица A изменяется как матрица некоторого линейного оператора. Но в таком случае, как следует из замечания 1 п. 3, § 2, гл. 5, коэффициенты характеристического многочлена этой матрицы не меняются при переходе к другому базису.

В частности, определитель $\det A$ и след $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ матрицы A , как коэффициенты характеристического многочлена, являются инвариантами.

Нам останется доказать инвариантность определителя $\det B$ при преобразовании ортонормированного базиса в ортонормированный.

Приступим к этому доказательству.

Применим следующий прием. Введем обозначения $b_k = a_{k, n+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $c = a_{n+1, n+1}$. Тогда уравнение (7.66) гиперповерхности можно записать следующим образом:

$$\sum_{j, k=1}^{n+1} a_{jk} x_j x_k = 0, \quad (7.91)$$

где $x_{n+1} = 1$.

Рассмотрим преобразование переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ в переменные $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, x'_{n+1}$, при котором первые n переменных преобразуются по формулам (7.75), а переменная x_{n+1} преобразуется по формуле $x_{n+1} = x'_{n+1}$.

Ясно, что это преобразование переменных можно рассматривать как преобразование координат при преобразовании ортонормированного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$ $(n+1)$ -мерного евклидова пространства, причем матрица $\tilde{P}$ этого преобразования имеет вид

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{n1} & 0 \\ p_{1n} & p_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.92)$$

Легко видеть, что матрица $\tilde{P}$ удовлетворяет условию $\tilde{P}' = \tilde{P}^{-1}$ и поэтому является ортогональной. Но тогда, согласно п. 2 этого параграфа, ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$ преобразуется с помощью матрицы $\tilde{P}$ в ортонормированный базис. Выше было выяснено, что при таком преобразовании матрицы B квадратичной формы определитель $\det B$ этой матрицы представляет собой инвариант. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из рассуждений в доказательстве теоремы следует, что инвариантами общего уравнения гиперповерхности второго порядка будут также величины $\text{rang } A$ и $\text{rang } B$.

6. Центр гиперповерхности второго порядка. Попытаемся найти такой параллельный перенос, при котором общее уравнение (7.76) не содержало бы слагаемого $2B'(x')$ (или, если обратиться к уравнению (7.82), то слагаемых $2 \sum_{k=1}^n b'_k x'_k$).

Иными словами, будем искать параллельный перенос (т. е. координаты $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ точки $\dot{x}$), при котором обратятся в нуль все коэффициенты b'_k . Обращаясь к формулам (7.84), найдем, что искомые координаты $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ точки $\dot{x}$ представляют собой решение следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} \dot{x}_j + b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.93)$$

Уравнения (7.93) называются *уравнениями центра гиперповерхности второго порядка*, а точка $\dot{x}$ с координатами $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$, где $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ — решение системы (7.93), называется *центром* этой поверхности.

Поясним наименование «центр» гиперповерхности. Пусть начало координат помещено в центр $\dot{x}$, т. е. произведен искомый параллельный перенос. Тогда уравнение поверхности S примет вид

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x'_j x'_k + c' = 0. \quad (7.94)$$

Пусть точка $\mathbf{x}$ с координатами $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ расположена на S . Это означает, что ее координаты удовлетворяют уравнению (7.94). Очевидно, точка $-\mathbf{x}$ с координатами $(-x'_1, -x'_2, \dots, -x'_n)$, симметричная с точкой $\mathbf{x}$ относительно точки $\mathbf{x}$, также расположена на S , ибо ее координаты тоже удовлетворяют уравнению (7.94).

Таким образом, если у гиперповерхности S есть центр, то *относительно центра точки S располагаются симметрично парами*.

З а м е ч а н и е 1. Если гиперповерхность S второго порядка имеет центр, то инварианты $\det A$, $\det B$ и свободный член c' в уравнении (7.94) связаны соотношением

$$\det B = c' \det A. \quad (7.95)$$

Действительно, для уравнения (7.94) получим

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c' \end{vmatrix}.$$

Из последней формулы и вытекает (7.95).

Наличие центра у гиперповерхности второго порядка связано с разрешимостью уравнений центра (7.93).

Если уравнения центра имеют единственное решение, то гиперповерхность S будем называть центральной.

Так как определитель системы (7.93) равен $\det A$, а необходимым и достаточным условием существования единственного решения этой системы является отличие от нуля ее определителя, то мы можем сделать следующий вывод: *для того чтобы гиперповерхность S была центральной, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.*

З а м е ч а н и е 2. Если начало координат перенесено в центр центральной гиперповерхности S , то уравнение этой гиперповерхности будет иметь вид

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k + \frac{\det B}{\det A} = 0. \quad (7.96)$$

Действительно, после переноса начала в центр уравнение гиперповерхности примет вид (7.94). Так как для центральной гиперповерхности $\det A \neq 0$, то из формулы (7.95) найдем $c' = \det B / \det A$. Подставляя это выражение для c' в формулу (7.94), мы и получим уравнение (7.96).

7. Стандартное упрощение любого уравнения гиперповерхности второго порядка путем преобразования ортонормированного базиса. По теореме 7.8 существует такой ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ записывается в виде суммы квадратов. Обозначим этот базис через $\{\mathbf{e}'_k\}$, а координаты

точки x в этом базисе обозначим через $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$. Кроме того, буквами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ обозначим собственные значения самосопряженного оператора A , матрица которого в ортонормированном базисе совпадает с матрицей квадратичной формы $A(x, x)$ (см. замечание в п. 4 этого параграфа).

Используя теперь выводы теоремы 7.8, запишем квадратичную форму $A(x, x)$ в координатах $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ точки x в базисе $\{e'_k\}$ следующим образом:

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k'^2. \quad (7.97)$$

Итак, перейдем от базиса $\{e_k\}$ к базису $\{e'_k\}$. Так как формулы преобразования координат точек при таком преобразовании линейны и однородны (см. замечание п. 2 этого параграфа, формулы (7.75)), то группа старших членов и линейная часть уравнения гиперповерхности S преобразуются автономно. На основании этого и в силу (7.97) уравнение гиперповерхности S в базисе $\{e'_k\}$ будет иметь следующий вид *):

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k'^2 + 2 \sum_{k=1}^n b'_k x_k + c = 0. \quad (7.98)$$

Приведение любого уравнения гиперповерхности S второго порядка к виду (7.98) будем называть *стандартным упрощением этого уравнения (путем преобразования ортонормированного базиса)*.

8. Упрощение уравнения центральной гиперповерхности второго порядка. Классификация центральных гиперповерхностей. Выводы, сделанные в предыдущих двух пунктах, позволяют решить вопрос о классификации всех центральных гиперповерхностей второго порядка. Решение этого вопроса мы проведем по следующей схеме. Во-первых, путем переноса начала координат в центр гиперповерхности (7.66) мы приведем ее уравнение к виду (7.96). После этого произведем стандартное упрощение уравнения (7.96). В результате, очевидно, мы получим, согласно (7.98), следующее уравнение центральной поверхности второго порядка:

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2 + \frac{\det B}{\det A} = 0, \quad (7.99)$$

в котором λ_k — собственные числа матрицы A квадратичной формы $A(x, x)$ в уравнении (7.62), а x'_k — координаты точки x в окончательном ортонормированном базисе $\{e'_k\}$.

Отметим, во-первых, что *все собственные числа λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, отличны от нуля*.

*) Напомним, что при переходе от ортонормированного базиса к ортонормированному свободный член c в уравнении поверхности S не меняется (см. третью из формул (7.87)).

Действительно, подсчитывая $\det A$ для уравнения (7.99), получим $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$, а так как для центральной поверхности $\det A \neq 0$, то, очевидно, что все $\lambda_k \neq 0$.

Договоримся далее все положительные собственные числа матрицы A нумеровать первыми индексами, а отрицательные — последующими. Таким образом, найдется такой номер p , что

$$\begin{aligned} \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \dots, \quad \lambda_p > 0, \\ \lambda_{p+1} < 0, \quad \lambda_{p+2} < 0, \quad \dots, \quad \lambda_n < 0. \end{aligned}$$

Введем теперь следующие обозначения:

если $\operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A} \neq 0$, то положим

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\det A}{\det B} \right| \lambda_k &= \frac{1}{a_k^2} && \text{при } k = 1, 2, \dots, p, \\ \left| \frac{\det A}{\det B} \right| \lambda_k &= -\frac{1}{a_k^2} && \text{при } k = p+1, \dots, n; \end{aligned} \right\} \quad (7.100)$$

если $\operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A} = 0$, то положим

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= \frac{1}{a_k^2} && \text{при } k = 1, 2, \dots, p, \\ \lambda_k &= -\frac{1}{a_k^2} && \text{при } k = p+1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (7.101)$$

Тогда очевидно, уравнение (7.99) может быть переписано следующим образом (при этом мы заменим обозначение координат x_k'' на x_k):

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \frac{x_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} + \operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A} = 0. \quad (7.102)$$

Уравнение (7.102) называется *каноническим уравнением центральной гиперповерхности второго порядка*.

Величины a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, называются *полуосями центральной гиперповерхности второго порядка*. Они могут быть вычислены по формулам (7.100) и (7.101).

С помощью канонического уравнения (7.102) дадим следующую классификацию центральных гиперповерхностей.

1°. $p = n$, $\operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A} = -1$. В этом случае гиперповерхность S называется *($n-1$)-мерным эллипсоидом*.

Каноническое уравнение такого эллипсоида обычно записывают в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1. \quad (7.103)$$

Если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = R$, то $(n - 1)$ -мерный эллипсоид представляет собой сферу радиуса R в n -мерном пространстве.

З а м е ч а н и е 1. В случае $p = 0$, $\operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A} = 1$ мы также получаем $(n - 1)$ -мерный эллипсоид. Очевидно, в этом случае уравнение (7.102) может быть записано в виде (7.103).

2°. $p = n$, $\operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A} = 1$. Гиперповерхность является мнимой и называется м н и м ы м э л л и п с о и д о м.

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, в случае $p = 0$, $\operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A} = -1$ мы также получаем мнимый эллипсоид.

3°. $0 < p < n$, $\operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A} \neq 0$. Центральные гиперповерхности называются в этом случае г и п е р б о л о и д а м и.

Геометрические характеристики гиперboloида зависят от соотношений чисел p и n и значения $\operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A}$.

4°. $\operatorname{sgn} \frac{\det B}{\det A} = 0$. Центральные гиперповерхности называются в этом случае в ы р о ж д е н н ы м и. Среди вырожденных гиперповерхностей отметим так называемый в ы р о ж д е н н ы й э л л и п с о и д, отвечающий значениям $p = 0$ и $p = n$.

9. Упрощение уравнения нецентральной гиперповерхности второго порядка. Классификация нецентральных гиперповерхностей. Пусть гиперповерхность S , заданная уравнением (7.62), не является центральной, т. е.

$$\det A = 0. \quad (7.104)$$

Произведем стандартное упрощение уравнения (7.62). В результате это уравнение примет вид (7.98). Подсчитаем $\det A$, используя (7.98) (это возможно, так как $\det A$ — инвариант). Получим, учитывая (7.104),

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 0.$$

Таким образом, по крайней мере одно собственное значение λ_k матрицы A равно нулю. Подчеркнем, что не все собственные значения равны нулю, ибо иначе квадратичная форма $A(x, x)$ была бы тождественно равной нулю, мы же предполагаем (см. п. 1 § 1 этой главы), что эта форма ненулевая.

Оставим в выражении (7.98) лишь те слагаемые в первой сумме, которые отвечают ненулевым собственным значениям, а затем произведем такую перенумерацию базисных векторов, чтобы первым p базисным векторам $e'_1, \dots, e'_p$ отвечали все ненулевые собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (отметим, что $p = \operatorname{rang} A$). Очевидно, после этого уравнение (7.98) может быть переписано следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k'^2 + 2 \sum_{k=1}^p b'_k x_k' + 2 \sum_{k=p+1}^n b'_k x_k' + c = 0 \quad (7.105)$$

(здесь $0 < p < n$, $\lambda_1 \neq 0$, ..., $\lambda_p \neq 0$; кроме того, мы специально выделили первые p слагаемых второй суммы в уравнении (7.98)).

Проведем теперь следующие преобразования.

1°. Для каждого номера k , $1 \leq k \leq p$, объединим слагаемые с этим номером из первой и второй суммы в (7.105) и затем проделаем следующие преобразования (при этом мы учитываем, что $\lambda_k \neq 0$):

$$\begin{aligned} \lambda_k x_k'^2 + 2b_k' x_k' &= \lambda_k \left(x_k'^2 + 2 \frac{b_k'}{\lambda_k} x_k' + \frac{b_k'^2}{\lambda_k^2} \right) - \frac{b_k'^2}{\lambda_k} = \\ &= \lambda_k \left(x_k' + \frac{b_k'}{\lambda_k} \right)^2 - \frac{b_k'^2}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Очевидно, после этих преобразований (7.105) запишется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \left(x_k' + \frac{b_k'}{\lambda_k} \right)^2 + 2 \sum_{k=p+1}^n b_k' x_k' + c' = 0, \quad (7.106)$$

где постоянная c' определяется равенством

$$c' = c - \sum_{k=1}^p \frac{b_k'^2}{\lambda_k}. \quad (7.107)$$

Осуществим теперь параллельный перенос по формулам

$$x_k'' = x_k' + \frac{b_k'}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, p; \quad x_k'' = x_k', \quad k = p+1, \dots, n$$

В результате уравнение (7.106) перейдет в уравнение

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k''^2 + 2 \sum_{k=p+1}^n b_k' x_k'' + c' = 0, \quad (7.108)$$

причем c' определяется по формуле (7.107).

2°. Будем искать теперь такое преобразование ортонормированного базиса $\{e_i'\}$, при котором первые p базисных векторов e_1' , ..., e_p' не меняются, за счет же изменения базисных векторов

e_{p+1}' , ..., e_n' попытаемся преобразовать слагаемое $2 \sum_{k=p+1}^n b_k' x_k''$ к виду

$2\mu x_n''$, где x_n'' — n -я координата в новом базисе. Отметим, что при такого вида преобразованиях свободный член c' не меняется.

Заметим, во-первых, что если все коэффициенты b_k' в (7.108) равны нулю, то цель преобразования п. 2° достигнута — слагаемое

$2 \sum_{k=p+1}^n b_k' x_k''$ имеет вид $2\mu x_n''$, где $\mu = 0$.

Итак, будем считать, что по крайней мере один из коэффициентов b_k' в сумме $\sum_{k=p+1}^n b_k' x_k''$ отличен от нуля. Тогда мы можем рассматривать эту сумму как некоторую линейную форму $B''(x)$,

заданную в подпространстве V'' , которое представляет собой линейную оболочку векторов $e'_{p+1}, \dots, e'_n$. Согласно лемме п. 1 § 4 гл. 5 эта форма в указанном подпространстве может быть представлена в виде $B''(x) = (h, x)$, где h — некоторый вектор подпространства V'' . Если мы теперь в подпространстве V'' направим единичный вектор e''_n по вектору h , так что $h = \mu e''_n$, а векторы $e''_{p+1}, \dots, e''_{n-1}$ выберем так, чтобы система $e''_{p+1}, \dots, e''_{n-1}, e''_n$ была базисом в V'' , то, очевидно, в этом базисе $B''(x) = (h, x) = \mu (e''_n, x) = \mu x''_n$, поскольку $(e''_n, x) = x''_n$. Таким образом, выбирая в V'' базис описанным выше способом, мы преобразуем $\sum_{k=p+1}^n b'_k x''_k$ к виду $\mu x''_n$.

Итак, можно указать такое преобразование базиса $e'_1, \dots, e'_n$ в ортонормированный базис $e''_1, \dots, e''_n$ (при этом преобразовании векторы $e'_1, \dots, e'_p$ остаются неизменными), что уравнение (7.108) примет вид (при этом мы заменим обозначение координат x''_k на x_k)

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k^2 + 2\mu x_n + c' = 0. \quad (7.109)$$

Отметим, что в уравнении (7.109) не исключается случай $\mu = 0$.

Уравнение (7.109) называется *каноническим уравнением* и *есть нецентральной гиперповерхности второго порядка*.

С помощью канонического уравнения (7.109) дадим следующую классификацию нецентральных гиперповерхностей. Возможны следующие случаи.

1° $\mu \neq 0$, $p = \text{rang } A = n - 1$.

В этом случае последние два слагаемых в уравнении (7.109) запишем в виде $2\mu x_n + c' = 2\mu \left(x_n + \frac{c'}{2\mu} \right)$ и сделаем параллельный перенос по направлению оси x_n на величину $-c'/2\mu$. Чтобы не усложнять запись, не будем при этом менять обозначение координат. В результате каноническое уравнение (7.109) примет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2 + 2\mu x_n = 0. \quad (7.110)$$

Гиперповерхности второго порядка, каноническое уравнение которых имеет вид (7.110), называются *параболами*.

2° $\mu = 0$, $p = \text{rang } A < n$.

В этом случае каноническое уравнение (7.109) переписывается так:

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 + c' = 0. \quad (7.111)$$

Очевидно, в подпространстве, являющемся линейной оболочкой векторов $e'_1, \dots, e'_p$, уравнение (7.111) представляет собой каноническое уравнение центральной поверхности S' второго порядка. Чтобы получить представление о гиперповерхности S во всем пространстве, нужно в каждой точке поверхности S' поместить плоскость, параллельную плоскости V'' (линейная оболочка

векторов $e'_{p+1}, \dots, e'_n$). Геометрическое место таких плоскостей образует поверхность S . Таким образом, поверхность S представляет собой центральный цилиндр с направляющей поверхностью S' , определяемой уравнением (7.111), и образующими плоскостями, параллельными плоскости V'' .

3° $\mu \neq 0$, $p = \text{rang } A < n - 1$.

Поступая так же, как и в случае 1°, мы приведем каноническое уравнение (7.109) к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 + 2\mu x_n = 0. \quad (7.112)$$

Очевидно, в подпространстве, представляющем собой линейную оболочку векторов $e'_1, \dots, e'_p, e'_n$, уравнение (7.112) определяет параболоид S' (см. случай 1°). Чтобы получить представление о строении гиперповерхности S во всем пространстве, нужно в каждой точке S' поместить плоскость, параллельную плоскости V'' (линейная оболочка векторов $e'_{p+1}, \dots, e'_{n-1}$). Геометрическое место таких плоскостей образует поверхность S . Таким образом, поверхность S представляет собой параболоидальный цилиндр с направляющей поверхностью S' , определяемой уравнением (7.112), и образующими плоскостями, параллельными плоскости V'' .

Г Л А В А 8

ТЕНЗОРЫ

В этой главе рассматриваются важные объекты, называемые тензорами и характеризующиеся в каждом базисе совокупностью координат, специальным образом преобразующихся при переходе от одного базиса к другому. Тензоры широко используются в геометрии, физике и механике. Понятие тензора возникает при изучении различных анизотропных явлений (например, при изучении распределения скоростей распространения света в кристалле в зависимости от направления его распространения)

§ 1. Преобразование базисов и координат

В данном параграфе, носящем вспомогательный характер, мы рассмотрим законы преобразования координат в произвольном вещественном евклидовом пространстве E^n . Возникающие при этом наводящие соображения делают более прозрачным понятие тензора, вводимого в следующем параграфе.

1. Определители Грама *). В этом пункте мы укажем способ, с помощью которого можно выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$ в евклидовом пространстве.

Введем для этого так называемый определитель Грама указанной системы векторов.

О п р е д е л и т е л е м Г р а м а системы векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$ называется следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_k) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \dots & (e_2, e_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_k, e_1) & (e_k, e_2) & \dots & (e_k, e_k) \end{vmatrix}. \quad (8.1)$$

Справедливо утверждение

Теорема 8.1. Для того чтобы система векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$ евклидова пространства E^n была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама (8.1) этой системы был равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) **Необходимость.** Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ линейно зависимы. Тогда один из них,

*) Иорген Грам (1850 — 1916) — датский математик.

например e_k , является линейной комбинацией остальных.

$$e_k = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{k-1} e_{k-1}.$$

Умножая написанное соотношение скалярно на e_i , $i = 1, 2, \dots, k$, мы получим, что последняя строка определителя Грама (8.1) является линейной комбинацией первых $k - 1$ строк. По теореме 1.7 этот определитель равен нулю. Необходимость условия доказана.

2) **Достаточность.** Предположим, что определитель Грама (8.1) равен нулю. Тогда его столбцы линейно зависимы, т. е. существуют не все равные нулю числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ такие, что для $i = 1, 2, \dots, k$ выполняются соотношения

$$\beta_1(e_i, e_1) + \beta_2(e_i, e_2) + \dots + \beta_k(e_i, e_k) = 0.$$

Переписывая эти соотношения в виде

$$(e_i, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_k e_k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

убеждаемся, что вектор $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_k e_k$ ортогонален всем векторам $e_1, e_2, \dots, e_k$, т. е. ортогонален линейной оболочке L этих векторов. Так как этот вектор принадлежит L , то он равен нулю. Поскольку не все β_i равны нулю, то это означает, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ линейно зависимы. Теорема доказана.

Следствие. Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ линейно независимы, то определитель Грама этих векторов отличен от нуля.

Докажем, что в указанном случае определитель Грама положителен. Пусть L — линейная оболочка векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$. Очевидно, $e_1, e_2, \dots, e_k$ — базис в L . Рассмотрим билинейную симметричную форму $A(x, y)$, представляющую собой скалярное произведение (x, y) : $A(x, y) = (x, y)$. Соответствующая квадратичная форма $A(x, x) = (x, x)$ будет, очевидно, знакоопределенной, и поэтому, согласно теореме 7.6 (критерию Сильвестра), определитель $\det(a_{ij})$ ее матрицы (a_{ij}) в базисе $e_1, e_2, \dots, e_k$ положителен. Но этот определитель и представляет собой определитель Грама (8.1) системы $e_1, e_2, \dots, e_k$, ибо $a_{ij} = (e_i, e_j)$.

2. **Взаимные базисы.** Ковариантные и контравариантные координаты векторов. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в евклидовом пространстве E^n . Базис $e^1, e^2, \dots, e^n$ называется **взаимным** для базиса e_i , $i = 1, 2, \dots, n$, если выполняются соотношения

$$(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (8.2)$$

при $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Символ δ_i^j называется **символом Кронекера**.

Возникает вопрос о существовании и единственности взаимного базиса. Ответ на этот вопрос утвердительный: для любого данного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ существует единственный взаимный

базис. Для доказательства поступим следующим образом. Пусть $x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j$ — координаты искомого вектора e^j в базисе e_i :

$$e^j = x_1^j e_1 + x_2^j e_2 + \dots + x_n^j e_n, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8.3)$$

Умножая скалярно обе части последних равенств на e_i , получим, используя (8.2),

$$x_1^j(e_i, e_1) + x_2^j(e_i, e_2) + \dots + x_n^j(e_i, e_n) = \delta_i^j, \quad (8.4)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

Соотношения (8.4) при фиксированном j можно рассматривать как квадратную систему линейных уравнений относительно неизвестных координат $x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j$ вектора e^j в базисе e_i . Так как определитель системы (8.4) представляет собой определитель Грама базисных векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, он, согласно следствию из теоремы 8.1, отличен от нуля, и поэтому система (8.4) имеет единственное решение $x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j$, которое будет ненулевым, поскольку эта система неоднородная. Затем с помощью соотношений (8.3) строятся векторы e^j , которые, очевидно, удовлетворяют соотношениям (8.2).

Мы должны еще убедиться, что векторы $e^1, e^2, \dots, e^n$ образуют базис

Пусть некоторая линейная комбинация этих векторов равна нулю $\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \dots + \alpha_n e^n = 0$.

Умножая скалярно последнее равенство последовательно на $e_1, e_2, \dots, e_n$ и используя (8.2), получим $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. Следовательно, векторы $e^1, e^2, \dots, e^n$ линейно независимы, т. е. образуют базис.

Итак, взаимный базис e^j и для базиса e_i существует и определяется единственным образом.

З а м е ч а н и е 1. В силу симметрии соотношений (8.2) относительно e_i и e^j , взаимным базисом для базиса e^j будет базис e_i . Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о взаимных базисах e_i, e^j .

З а м е ч а н и е 2. Если базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ ортонормированный, то взаимный базис e^j совпадает с данным базисом. Действительно, полагая в этом случае $e^j = e_j$, мы убедимся, что соотношения (8.2) выполняются. Используя свойство единственности взаимного базиса, мы убедимся в справедливости замечания.

Пусть e_i, e^j — взаимные базисы, а x — произвольный вектор пространства. Разлагая вектор x по базисным векторам e_i и e^j , получим

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 e^1 + x_2 e^2 + \dots + x_n e^n, \\ x &= x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Координаты $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вектора x в базисе e^j называются ковариантными координатами вектора x , а координаты $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ этого вектора в базисе e_i называются контравариантными координатами вектора x . Эти наименования будут разъяснены в следующем пункте.

Для сокращения записи формул, в которых фигурируют однотипные слагаемые (примерами таких формул могут служить соотношения (8.5)), мы будем пользоваться в дальнейшем соглашением о суммировании. Это соглашение заключается в следующем. Пусть имеется выражение, составленное из сомножителей, которые снабжены конечным числом индексов, часть из которых нижние, а другая часть — верхние. При этом договариваются все нижние индексы обозначать различными символами. Верхние индексы также договариваются обозначать различными символами. Если в этом выражении встречаются два одинаковых индекса, из которых один верхний, а другой нижний, то считают, что по этим индексам производится суммирование, т. е. индексам последовательно даются значения $1, 2, \dots, n$, а затем складываются полученные слагаемые.

Например,

$$\begin{aligned} x_i e^i &= x_1 e^1 + x_2 e^2 + \dots + x_n e^n, & \delta_i^i &= \delta_1^1 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^n, \\ g_{ij} x^i x^j &= (g_{1j} x^1 x^j) + (g_{2j} x^2 x^j) + \dots + (g_{nj} x^n x^j) = \\ &= (g_{11} x^1 x^1 + g_{12} x^1 x^2 + \dots + g_{1n} x^1 x^n) + \\ &+ (g_{21} x^2 x^1 + g_{22} x^2 x^2 + \dots + g_{2n} x^2 x^n) + \\ &+ (g_{n1} x^n x^1 + g_{n2} x^n x^2 + \dots + g_{nn} x^n x^n). \end{aligned}$$

С помощью соглашения о суммировании формулы (8.5) записываются следующим компактным образом:

$$x = x_i e^i, \quad x = x^i e_i \quad (8.6)$$

З а м е ч а н и е 3. Верхние и нижние одинаковые индексы, о которых говорилось в соглашении о суммировании, обычно называются *индексами суммирования*. Ясно, что индексы суммирования могут обозначаться любыми одинаковыми символами. При этом не изменится выражение, в которых они фигурируют. Например, $x_i e^i$ и $x_j e^j$ представляют собой одно и то же выражение.

Получим теперь явное выражение для ковариантных и контравариантных координат вектора x .

Для этого умножим скалярно первое из равенств (8.6) на e_j , а второе на e^i . Учитывая затем соотношения (8.2), найдем

$$(x, e_j) = x_i (e^i, e_j) = x_i \delta_j^i = x_j, \quad (x, e^i) = x^j (e_j, e^i) = x^j \delta_j^i = x^i.$$

Итак,

$$x_j = (x, e_j), \quad x^i = (x, e^i). \quad (8.7)$$

С помощью соотношений (8.7) запишем формулы (8.6) в следующем виде:

$$x = (x, e_i) e^i, \quad x = (x, e^i) e_i \quad (8.8)$$

Соотношения (8.8) называются *формулами Гиббса**. Обратимся еще раз к вопросу о построении взаимных базисов. С помощью формул (8.8) имеем

$$e^i = (e^i, e_j) e_j, \quad e_i = (e_i, e_j) e^j. \quad (8.9)$$

Введем обозначения

$$g_{ij} = (e_i, e_j), \quad g^{ij} = (e^i, e^j). \quad (8.10)$$

С помощью этих обозначений перепишем соотношения (8.9) следующим образом:

$$e^i = g^{ij} e_j, \quad e_i = g_{ij} e^j \quad (8.11)$$

Итак, для построения базиса e^i по базису e_i достаточно знать матрицу (g^{ij}) , а для построения базиса e_i по базису e^i достаточно знать матрицу (g_{ij}) .

Докажем, что указанные матрицы взаимно обратны. Отметим, что так как элементы обратной матрицы могут быть вычислены через элементы данной матрицы, то ясно, что с помощью соотношений (8.11) решается вопрос о построении взаимных базисов.

Итак, установим, что матрицы (g^{ij}) и (g_{ij}) взаимно обратны.

Умножая первое из равенств (8.11) скалярно на e_k , получим $(e^i, e_k) = g^{ij} (e_j, e_k)$. Из этого соотношения, учитывая (8.2) и (8.10), найдем

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, произведение матриц (g^{ij}) и (g_{ij}) представляет собой единичную матрицу. Следовательно, матрицы (g^{ij}) и (g_{ij}) взаимно обратны.

3. Преобразования базиса и координат. Пусть e_i и e^i — заданные взаимные базисы, а $e_{i'}$ и $e^{i'}$ — некоторые новые взаимные базисы, элементы которых мы обозначим штрихованными индексами. Фактически это означает, что мы вводим новый натуральный ряд $1', 2', 3', \dots$ и считаем, что индекс i' принимает значения $1', 2', \dots, n'$. Таким образом, индексы i и i' независимо принимают различные значения:

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad i' = 1', 2', \dots, n'$$

Используя введенное в предыдущем пункте соглашение о суммировании, запишем формулы преобразования базисных векторов. В результате получим:

*) Д. У. Гиббс (1839—1903) — американский физик-теоретик

1) формулы перехода от старого базиса e_i к новому базису $e_{i'}$ и формулы обратного перехода

$$e_{i'} = b_{i'}^i e_i, e_i = b_i^{i'} e_{i'}, i = 1, 2, \dots, n, i' = 1', 2', \dots, n', \quad (8.12)$$

2) формулы перехода от старого базиса e^i к новому $e^{i'}$ и формулы обратного перехода

$$e^i = b_i^{i'} e^{i'}, e^{i'} = b_{i'}^i e^i \quad i = 1, 2, \dots, n, i' = 1', 2', \dots, n' \quad (8.13)$$

Так как преобразования (8.12) (равно как и преобразования (8.13)) взаимно обратны, то матрицы $(b_{i'}^i)$ и $(b_i^{i'})$ (равно как и матрицы (b_i^i) и $(b_{i'}^{i'})$) взаимно обратны

Докажем, что матрицы $(b_{i'}^i)$ $(b_i^{i'})$ тождественны. Тем самым будет доказана тождественность и матриц $(b_{i'}^{i'})$ и (b_i^i) . Для доказательства умножим скалярно первое из равенств (8.12) на e^k , а второе из равенств (8.13) — на e_k . Учитывая соотношения (8.2), получим

$$(e_{i'}, e^k) = b_{i'}^i (e_i, e^k) = b_{i'}^i \delta_i^k = b_{i'}^k, \\ (e^i, e_k) = b_i^{i'} (e^{i'}, e_k) = b_i^{i'} \delta_k^{i'} = b_k^i.$$

Из этих соотношений при $k = i$, $k' = i'$ получим

$$b_{i'}^i = (e_{i'}, e^i), \quad (8.14)$$

$$b_i^{i'} = (e_i, e^{i'}). \quad (8.15)$$

Поскольку правые части соотношений (8.14) и (8.15) равны, то равны и левые части. Иными словами, $b_{i'}^i = b_i^{i'}$, а это и означает тождественность матриц $(b_{i'}^i)$ и $(b_i^{i'})$. Отметим, что элементы $b_{i'}^i$ матрицы $(b_{i'}^i)$ могут быть вычислены по формулам (8.14).

Итак, справедливо утверждение:

Для перехода от базиса e_i, e^i к базису $e_{i'}, e^{i'}$ достаточно знать лишь матрицу $(b_{i'}^i)$ перехода от базиса e_i к базису $e_{i'}$ (матрица $(b_i^{i'})$ вычисляется по матрице $(b_{i'}^i)$).

Приведем полную сводку формул преобразований базисных векторов:

$$\left. \begin{aligned} e_{i'} &= b_{i'}^i e_i, & e_i &= b_i^{i'} e_{i'}, \\ e^{i'} &= b_i^{i'} e^i, & e^i &= b_{i'}^i e^{i'} \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Перейдем к выводу формул преобразования координат вектора x при переходе к новому базису

Пусть $x_{i'}$ — ковариантные координаты x в базисе $e_{i'}, e^{i'}$. Тогда, согласно (8.7), имеем $x_{i'} = (x, e_{i'})$. Подставляя в правую часть этого соотношения выражение для $e_{i'}$ из формул (8.16), найдем $x_{i'} = (x, b_{i'}^i e_i) = b_{i'}^i (x, e_i) = b_{i'}^i x_i$.

Мы приходим к следующему выводу: формулы преобразования ковариантных координат вектора x при переходе к новому базису имеют вид

$$x_{i'} = b_{i'}^i x_i. \quad (8.17)$$

Следовательно, при переходе к новому базису ковариантные координаты вектора x преобразуются с помощью матрицы $(b_{i'}^i)$ прямого перехода от старого базиса к новому.

Это согласование преобразований и объясняет наименование ковариантные *) координаты вектора.

Рассмотрим теперь преобразование контравариантных координат вектора x

Подставляя в правую часть соотношения $x^{i'} = (x, e^{i'})$ выражение для $e^{i'}$ из формул (8.16), получим после преобразований

$$x^{i'} = b_i^{i'} x^i. \quad (8.18)$$

Мы видим, что при переходе к новому базису контравариантные координаты вектора x преобразуются с помощью матрицы $(b_i^{i'})$ обратного перехода от нового базиса к старому.

Это несогласование преобразований и объясняет термин контравариантные **) координаты вектора.

§ 2. Понятие тензора. Основные операции над тензорами

1. Понятие тензора. В этом параграфе мы рассматриваем произвольное (не обязательно евклидово) вещественное n -мерное линейное пространство L^n .

Определение. Тензор A типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) называется геометрический объект, который 1) в каждом базисе e_i линейного пространства L^n определяется n^{p+q} координатами $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ (индексы $i_1, \dots, i_p, k_1, \dots, k_q$ независимо принимают значения 1, 2, ..., n , 2) обладает тем свойством, что его координаты $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ в базисе $e_{i'}$ связаны с координатами $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ в базисе e_i соотношениями

$$A_{i_1' \dots i_p'}^{k_1' \dots k_q'} = b_{i_1}^{i_1'} \dots b_{i_p}^{i_p'} b_{k_1}^{k_1'} \dots b_{k_q}^{k_q'} A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}, \quad (8.19)$$

в которых $b_{i'}^i$ — элементы матрицы $(b_{i'}^i)$ перехода от базиса e_i к базису $e_{i'}$, а $b_k^{k'}$ — элементы матрицы обратного перехода от $e_{i'}$ к e_i .

*) Ковариантный — согласованно изменяющийся.

**) Контравариантный — противоположно изменяющийся.

Число $r = p + q$ называется *рангом тензора*.

З а м е ч а н и е 1. Формулы (8.19) называют формулами преобразования координат тензора при преобразовании базиса.

Отметим, что ковариантные и контравариантные координаты вектора преобразуются по формулам (8.19) (при $p = 1$ и $q = 0$ в первом случае и при $p = 0$ и $q = 1$ во втором, см. п. 3 § 1 этой главы). Поэтому *вектор представляет собой тензор ранга 1* (1 раз ковариантный, либо 1 раз контравариантный — в зависимости от выбора типа координат этого вектора).

Отметим, что рассматривают также *тензоры ранга 0*. Это тензоры, имеющие лишь одну координату, причем эта координата не снабжена индексами и имеет одно и то же значение во всех системах координат. Тензоры ранга 0 обычно называются *инвариантами*.

З а м е ч а н и е 2. Индексы $i_1, \dots, i_p$ называются ковариантными, а $k_1, \dots, k_q$ — контравариантными. Наименование объясняется тем, что по каждому из упомянутых индексов преобразование координат тензора производится в полной аналогии с преобразованиями ковариантных и контравариантных координат вектора (см. формулы (8.17) и (8.18)).

Для того чтобы определение тензора было корректным, нужно убедиться, что последовательные переходы от базиса e_i к базису $e_{i'}$, а затем от базиса $e_{i'}$ к базису $e_{i''}$ приводят к такому же преобразованию координат тензора, что и при непосредственном переходе от e_i к $e_{i''}$.

Пусть $(b_i^{t'})$, $(b_i^{t''})$ и $(b_i^{t'''})$ — соответственно матрицы перехода от базиса e_i к базису $e_{i'}$, от базиса $e_{i'}$ к $e_{i''}$ и от базиса e_i к $e_{i''}$. Так как при последовательных переходах матрицы преобразований перемножаются, то очевидны соотношения

$$b_i^{t''} = b_i^{t'} b_i^{t'''}, \quad b_i^{t'''} = b_i^{t''} b_i^{t'}. \quad (8.20)$$

После сделанных замечаний убедимся в корректности определения тензора. Пусть $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$, $A_{i_1' \dots i_p'}^{k_1' \dots k_q'}$, $A_{i_1'' \dots i_p''}^{k_1'' \dots k_q''}$ — координаты тензора A в базисах e_i , $e_{i'}$ и $e_{i''}$ соответственно. По формулам (8.19), переходя последовательно от e_i к $e_{i'}$, а затем к $e_{i''}$ получим

$$A_{i_1' \dots i_p'}^{k_1' \dots k_q'} = b_{i_1'}^{t_1'} \dots b_{i_p'}^{t_p'} b_{k_1'}^{k_1'} \dots b_{k_q'}^{k_q'} A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}, \quad (8.21)$$

$$A_{i_1'' \dots i_p''}^{k_1'' \dots k_q''} = b_{i_1''}^{t_1''} \dots b_{i_p''}^{t_p''} b_{k_1''}^{k_1''} \dots b_{k_q''}^{k_q''} A_{i_1' \dots i_p'}^{k_1' \dots k_q'}. \quad (8.22)$$

Подставляя в правую часть (8.22) выражения координат $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ из (8.21) и учитывая соотношения (8.20), получим

$$A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = \left(b_{i_1}^{i_1'} b_{i_1'}^{i_1} \right) \dots \left(b_{i_p}^{i_p'} b_{i_p'}^{i_p} \right) \left(b_{k_1}^{k_1'} b_{k_1'}^{k_1} \right) \dots \\ \dots \left(b_{k_q}^{k_q'} b_{k_q'}^{k_q} \right) A_{i_1' \dots i_p'}^{k_1' \dots k_q'} = b_{i_1}^{i_1'} \dots b_{i_p}^{i_p'} b_{k_1'}^{k_1} \dots b_{k_q'}^{k_q} A_{i_1' \dots i_p'}^{k_1' \dots k_q'}.$$

Таким образом, последовательные переходы от базиса e_i к базису $e_{i'}$, а затем к базису $e_{i''}$ приводят к такому же преобразованию координат тензора, как и при непосредственном переходе от e_i к $e_{i''}$. Корректность определения тензора установлена

З а м е ч а н и е 3. Любая система n^{p+q} чисел $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ может рассматриваться в данном базисе e_i как координаты некоторого тензора A типа (p, q) . Чтобы убедиться в этом, определим в произвольном базисе $e_{i'}$ с помощью формул (8.19) систему чисел

$A_{i_1' \dots i_p'}^{k_1' \dots k_q'}$, которые будем рассматривать как координаты искомого тензора A в базисе $e_{i'}$. Очевидно, при переходе от базиса e_i к базису $e_{i'}$ эти координаты преобразуются по формулам (8.19). Как и выше, легко убедиться, что последовательные переходы от базиса e_i к базису $e_{i'}$, а затем к базису $e_{i''}$ приводят к такому же преобразованию полученных координат, как и при непосредственном переходе от e_i к $e_{i''}$. Следовательно система чисел $A_{i_1' \dots i_p'}^{k_1' \dots k_q'}$ действительно представляет собой координаты некоторого тензора A типа (p, q) .

2. Примеры тензоров.

1° Нуль-тензор. Среди тензоров типа (p, q) следует выделить так называемый *нуль-тензор*. Это тензор, координаты которого в любом базисе равны нулю. Очевидно, соотношения (8.19) выполняются.

Отметим, что если координаты тензора A равны нулю в каком-либо базисе, то, согласно (8.19), они равны нулю в любом базисе, и, следовательно, A — нуль-тензор.

2° С и м в о л К р о н е к е р а. Убедимся, что тензор A типа $(1, 1)$, имеющий в базисе e_i координаты δ_i^k , будет иметь в базисе $e_{i'}$ координаты $\delta_{i'}^k$.

Итак, пусть A — тензор, имеющий в данном базисе e_i координаты δ_i^k . Для того чтобы найти координаты этого тензора в базисе $e_{i'}$, надо воспользоваться формулами (8.19), т. е. координаты тензора A в базисе $e_{i'}$ равны $b_k^{k'} b_{i'}^{i} \delta_i^k$. Используя свойства символа Кронекера, получим $b_k^{k'} b_{i'}^{i} \delta_i^k = b_k^{k'} b_{i'}^k = \delta_{i'}^{k'}$.

Итак, в новом базисе $e_{i'}$ координаты тензора A действительно равны $\delta_{i'}^{k'}$. Поэтому символ Кронекера можно рассматривать как тензор типа (1, 1).

3° Пусть $A(x, y)$ — билинейная форма, заданная в конечномерном евклидовом пространстве E^n , а $e_1, e_2, \dots, e_n$ — какой-либо базис в этом пространстве. Тогда векторы x и y могут быть представлены в виде $x = x^i e_i, y = y^j e_j$.

Используя линейное свойство формы $A(x, y)$ по каждому аргументу, мы можем записать

$$A(x, y) = A(x^i e_i, y^j e_j) = A(e_i, e_j) x^i y^j.$$

Обозначим $A(e_i, e_j)$ через a_{ij} :

$$a_{ij} = A(e_i, e_j). \quad (8.23)$$

Тогда форма $A(x, y)$ может быть записана следующим образом:

$$A(x, y) = a_{ij} x^i y^j. \quad (8.24)$$

Убедимся, что коэффициенты a_{ij} матрицы формы $A(x, y)$ при переходе к новому базису преобразуются по закону (8.19) преобразования координат тензора типа (2, 0), т. е. представляют собой тензор типа (2, 0).

Рассмотрим произвольный базис $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$. Запишем в этом базисе форму $A(x, y)$ в виде (8.24) $A(x, y) = a_{i'j'} x^{i'} y^{j'}$ причем

$$a_{i'j'} = A(e_{i'}, e_{j'}). \quad (8.25)$$

Перейдем от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к новому базису $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$. Обозначая матрицу перехода от базиса e_i к базису $e_{i'}$ через $b_{i'}^i$, получим $e_{i'} = b_{i'}^i e_i, e_{j'} = b_{j'}^j e_j$.

Подставляя эти выражения для $e_{i'}$ и $e_{j'}$ в правую часть (8.25) и используя линейное свойство формы $A(x, y)$ по каждому аргументу, найдем $a_{i'j'} = A(b_{i'}^i e_i, b_{j'}^j e_j) = b_{i'}^i b_{j'}^j A(e_i, e_j)$.

Согласно формуле (8.23) последнее соотношение можно переписать в виде $a_{i'j'} = b_{i'}^i b_{j'}^j a_{ij}$.

Следовательно коэффициенты a_{ij} матрицы билинейной формы преобразуются по закону (8.19) преобразования координат тензора типа (2, 0) и поэтому могут рассматриваться как координаты тензора такого типа.

4° Каждому линейному оператору, заданному в конечномерном евклидовом пространстве E^n и действующему в то же пространство, можно поставить в соответствие некоторый тензор типа (1, 1), причем этот тензор будет вполне определять указанный оператор.

Пусть $y = Lx$ — линейный оператор, заданный в E^n и $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в E^n . Так как $x = x^i e_i$, а $y = y^j e_j$ и L — линейный оператор, то

$$y^j e_j = x^i L(e_i). \quad (8.26)$$

Разложим вектор $L(e_i)$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$L(e_i) = a_i^j e_j.$$

Подставляя полученное выражение для $L(e_i)$ в (8.26) и используя единственность разложения по базису, получим

$$y^j = a_i^j x^i, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.27)$$

Напомним, что соотношения (8.27) можно рассматривать как координатный способ задания линейного оператора. При этом матрицу (a_i^j) коэффициентов a_i^j называют матрицей линейного оператора.

Убедимся, что коэффициенты этой матрицы при переходе к новому базису преобразуются по закону (8.19) преобразования координат тензора типа $(1, 1)$ и поэтому представляют собой тензор типа $(1, 1)$.

Рассмотрим произвольный базис $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$. Запишем в этом базисе линейный оператор L в виде (8.27)

$$y^{j'} = a_{i'}^{j'} x^{i'} \quad j' = 1', 2', \dots, n'. \quad (8.28)$$

Перейдем теперь от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$. Обозначая матрицу перехода $(b_{i'}^i)$ (или, что то же самое, $(b_{j'}^j)$), получим *) (см. п. 3 § 1 этой главы)

$$x^i = b_{i'}^i x^{i'} \quad y^j = b_{k'}^j y^{j'}.$$

Подставим эти выражения для x^i и y^j в (8.27). Получим следующие соотношения:

$$y^{k'} b_{k'}^j = a_i^j b_{i'}^i x^{i'} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.29)$$

Нам нужно получить из (8.29) выражение для $y^{j'}$. Для этой цели умножим обе части (8.29) на $b_j^{j'}$ и просуммируем по j от 1 до n . Учитывая, что $b_{k'}^j b_j^{j'} = \delta_{k'}^{j'}$, получим $y^{k'} \delta_{k'}^{j'} = (b_{i'}^i b_j^{j'} a_i^j) x^{i'}$. Заметим, что $y^{k'} \delta_{k'}^{j'} = y^{j'}$. Поэтому $y^{j'} = (b_{i'}^i b_j^{j'} a_i^j) x^{i'}$. Сравнивая это выражение для $y^{j'}$ с выражением для $y^{j'}$ по формуле (8.28), получим следующее тождество, справедливое для любых векторов x (для любых координат $x^{i'}$):

$$a_{i'}^{j'} x^{i'} = (b_{i'}^i b_j^{j'} a_i^j) x^{i'}.$$

*) В формуле для $y^{j'}$ индекс суммирования мы обозначим через k' .

Отсюда и из произвольности $x^{i'}$ следует, что коэффициенты $a_i^{i'}$ матрицы линейного оператора преобразуются по закону $a_i^{i'} = b_{i'}^{j'} b_j^{i'} a_i^{j'}$.

Итак, коэффициенты $a_i^{i'}$ преобразуются по закону (8.19) преобразования координат тензора типа (1.1) и поэтому представляют такой тензор.

3. Основные операции над тензорами. Основными операциями над тензорами называются *операции сложения и вычитания тензоров, операция умножения тензора на число, операция умножения тензоров, операция свертывания тензоров, операция перестановки индексов, операции симметрирования и альтернирования тензоров.*

Перейдем к определению этих операций.

1°. Сложение и вычитание тензоров. Операции сложения и вычитания определяются для тензоров одинакового типа.

Пусть A и B — два тензора типа (p, q) , $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ и $B_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ — одноименные координаты этих тензоров в базисе e_i .

Суммой $A + B$ (разностью $A - B$) этих тензоров называется тензор, имеющий в базисе e_i координаты

$$A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} + B_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} \quad (A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} - B_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}).$$

Чтобы данное определение операций сложения и вычитания тензоров было корректным, необходимо проверить, преобразуются ли координаты суммы (разности) тензоров по закону (8.19) преобразования координат тензора. Для этого представим себе, что наряду с формулами (8.19) преобразования координат тензора A записаны аналогичные формулы преобразования координат тензора B . Тогда путем сложения (вычитания) таких двух формул преобразования координат тензоров A и B мы убедимся, что координаты суммы (разности) преобразуются по закону преобразования координат тензора.

2°. Умножение тензора на число. Пусть A — тензор типа (p, q) , имеющий в базисе e_i координаты $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$, и α — произвольное вещественное число.

Произведением αA тензора A на число α называется тензор, имеющий в базисе e_i координаты $\alpha A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$.

То, что координаты $\alpha A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ преобразуются по тензорному закону, непосредственно усматривается из формул (8.19).

3°. Умножение тензоров. Операция умножения тензоров определяется для тензоров произвольного типа.

Пусть A — тензор типа (p, q) , имеющий в данном базисе e_i координаты $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$, а B — тензор типа (r, s) , имеющий в этом же базисе координаты $B_{i_1 \dots i_r}^{m_1 \dots m_s}$.

Для определения произведения $D = AB$ тензоров A и B составляются всевозможные произведения координат тензора A на координаты тензора B . В каждом таком произведении индексы $l_1, \dots, l_r$ и $m_1, \dots, m_s$ у координат тензора B заменяются новыми индексами. Именно, полагают $l_1 = i_{p+1}, \dots, l_r = i_{p+r}$ и $m_1 = k_{q+1}, \dots, m_s = k_{q+s}$.

Произведением $D = AB$ тензоров A и B называется тензор типа $(p + r, q + s)$, имеющий в базисе e_i координаты

$$D_{i_1 \dots i_{p+r}}^{k_1 \dots k_{q+s}} = A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} B_{i_{p+1} \dots i_{p+r}}^{k_{q+1} \dots k_{q+s}}. \quad (8.30)$$

Чтобы убедиться, что координаты $D_{i_1 \dots i_{p+r}}^{k_1 \dots k_{q+s}}$, определенные соотношением (8.30), преобразуются при переходе к другому базису по закону преобразования координат тензора, т. е. действительно представляют собой координаты тензора, достаточно записать формулы преобразования (8.19) для координат $A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$ и $B_{i_{p+1} \dots i_{p+r}}^{k_{q+1} \dots k_{q+s}}$ тензоров A и B и перемножить правые и левые части этих формул. В результате, обращаясь к соотношению (8.30), легко получаются нужные формулы преобразования для координат $D_{i_1 \dots i_{p+r}}^{k_1 \dots k_{q+s}}$.

З а м е ч а н и е Операция умножения тензоров не обладает свойством перестановочности: вообще говоря, $AB \neq BA$. Это объясняется тем, что порядок следования индексов у координат тензора определяет «номер» этой координаты.

Таким образом, хотя численное значение выражений

$$A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} B_{i_{p+1} \dots i_{p+r}}^{k_{q+1} \dots k_{q+s}} \quad \text{и} \quad B_{i_{p+1} \dots i_{p+r}}^{k_{q+1} \dots k_{q+s}} A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}$$

одинаково, порядок следования индексов у этих выражений различен, и поэтому они отвечают координатам с различными «номерами». Это и означает, что $AB \neq BA$.

4°. Свертывание тензора. Операция свертывания применяется к тензору типа (p, q) , у которого $p \neq 0$ и $q \neq 0$ (т. е. к тензору, у которого имеется по крайней мере один верхний и один нижний индекс).

Пусть A — тензор указанного выше типа. Перейдем к описанию операции свертывания.

Свертывание тензора A производится по каким-либо отмеченным верхнему и нижнему индексам. При этом в результате свертывания получается тензор типа $(p - 1, q - 1)$.

Пусть, например, у каждой координаты тензора A отмечен верхний индекс с номером m и нижний индекс с номером n :

$$A_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_m} \dots k_q.$$

Произведем суммирование (свертывание) координат тензора с одинаковыми выделенными индексами. Эта операция и дает следующие координаты тензора, полученного свертыванием по верхнему и нижнему индексам с номерами m и n :

$$A_{i_1}^{k_1} \underset{\alpha}{\overset{\alpha}{\cdot}} \underset{i_p}{\overset{k_q}{\cdot}} \quad (8.31)$$

(в выражении (8.31) мы использовали соглашение о суммировании).

Проверим, что величины (8.31) действительно образуют координаты тензора типа $(p-1, q-1)$. Для этого обратимся к формулам (8.19). Перепишем эти формулы в следующем виде, выделив интересующие нас индексы (эти индексы мы подчеркнем квадратными скобками):

$$\begin{aligned} A_{i_1}^{k_1} \cdot \underset{i_n}{\overset{k_m}{\cdot}} \underset{i_p}{\overset{k_q}{\cdot}} = \\ = b_{k_1}^{i_1} \dots b_{\underset{i_n}{k_m}}^{\overset{k_m}{i_n}} \dots b_{k_q}^{i_p} b_{i_p}^{i_1} \cdot \underset{i_n}{b_{i_p}^{i_n}} \cdot \underset{i_p}{b_{i_p}^{i_1}} A_{i_1}^{k_1} \cdot \underset{i_n}{\overset{k_m}{\cdot}} \underset{i_p}{\overset{k_q}{\cdot}} \end{aligned} \quad (8.32)$$

Произведем теперь суммирование в правой и левой частях (8.32) по выделенным индексам k_m и i_n . Для этого достаточно положить эти индексы равными α и воспользоваться соглашением о суммировании. В результате мы получим некоторое равенство. Найдем выражения в левой и правой частях этого равенства. В левой части мы получим, очевидно, выражение

$$A_{i_1 \dots \alpha' \dots i_p}^{k_1 \dots \alpha \dots k_q} \quad (8.33)$$

В правой же части произведение $b_{k_m}^{\alpha'}$ на $b_{\alpha'}^{i_n}$ равно $\delta_{k_m}^{i_n}$, т. е. равно единице при $k_m = i_n = \alpha$ и равно нулю при $k_m \neq i_n$. Таким образом, в правой части мы получим следующее выражение:

$$b_{k_1}^{i_1} \dots b_{k_q}^{i_p} b_{i_1}^{i_1} \dots b_{i_p}^{i_p} A_{i_1}^{k_1} \cdot \underset{i_n}{\overset{k_m}{\cdot}} \underset{i_p}{\overset{k_q}{\cdot}} \quad (8.34)$$

Сравнив выражения (8.33) и (8.34), мы убедимся, что величины $A_{i_1}^{k_1} \underset{\alpha}{\overset{\alpha}{\cdot}} \underset{i_p}{\overset{k_q}{\cdot}}$ преобразуются при переходе к новому базису по закону преобразования координат тензора. Очевидно, этот тензор будет типа $(p-1, q-1)$.

З а м е ч а н и е Термин «свертывание тензоров» употребляется еще и в следующем смысле.

Рассмотрим два тензора A и B , у координат первого из которых имеется по крайней мере один верхний индекс k , а у координат второго — по крайней мере один нижний индекс i .

Составим произведение AB этих тензоров и затем проведем операцию свертывания тензора AB по верхнему индексу k и нижнему индексу i . Для этой операции обычно употребляется терминология: «свертывание тензоров A и B по индексам k и i ».

5°. **Перестановка индексов** Эта операция заключается в том, что в любом базисе индексы у каждой координаты тензора подвергаются одной и той же перестановке. Это означает, что мы иным образом «нумеруем» координаты данного тензора. Читателю предлагается проверить, что в результате получается тензор (отличный, вообще говоря, от данного).

6°. **Симметрирование и альтернирование**. Предварительно введем понятия симметричного и кососимметричного тензоров.

Тензор A с координатами

$$A_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} \quad (8.35)$$

называется **симметричным** по нижним индексам i_m и i_n , если при перестановке этих индексов *) координаты тензора A не меняют своего значения, т. е.

$$A_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = A_{i_1 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}. \quad (8.36)$$

Соотношение (8.36) называется **условием симметрии** тензора A по нижним индексам с номерами m и n .

Тензор A называется **кососимметричным** по нижним индексам i_m и i_n , если при перестановке этих индексов справедливо соотношение

$$A_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} = -A_{i_1 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}. \quad (8.37)$$

Соотношение (8.37) называется **условием кососимметрии** тензора A по нижним индексам с номерами m и n .

Аналогично вводится понятие симметрии и кососимметрии тензора по двум верхним индексам.

З а м е ч а н и е. Если условие симметрии (кососимметрии) по нижним индексам i_m и i_n выполняется для тензора A в данной системе координат, то оно выполняется и в любой другой системе координат.

Перейдем теперь к описанию операции симметрирования.

Пусть A — тензор типа (p, q) с координатами (8.35). Переставим у каждой координаты нижние индексы с номерами m и n и затем построим тензор $A_{(m, n)}$ с координатами

$$\frac{1}{2} (A_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} + A_{i_1 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}). \quad (8.38)$$

*) Напомним, что при перестановке индексов у координат тензора мы получаем координаты, вообще говоря, другого тензора.

Операция построения тензора $A_{(m, n)}$ называется операцией симметрирования тензора A по нижним индексам с номерами m и n .

Отметим, что координаты (8.38) тензора $A_{(m, n)}$ обычно обозначаются символами

$$A_{i_1 \dots i_m \dots i_n}^{k_1 \dots k_q} \dots i_j, \quad (8.39)$$

Очевидно, для тензора $A_{(m, n)}$ выполняется условие симметрии (8.36) по нижним индексам с номерами m и n .

Операция симметрирования тензора по верхним индексам с номерами m и n определяется аналогично. Построенный тензор обозначается символом $A^{(m, n)}$. Для координат тензора $A^{(m, n)}$ используется обозначение, аналогичное обозначению (8.39) координат тензора $A_{(m, n)}$

Операция альтернирования тензора A по нижним индексам с номерами m и n производится следующим образом.

У каждой координаты тензора A переставляются нижние индексы с номерами m и n и затем строится тензор $A_{[m, n]}$ с координатами

$$\frac{1}{2} (A_{i_1 \dots i_m \dots i_n \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} - A_{i_1 \dots i_n \dots i_m \dots i_p}^{k_1 \dots k_q}). \quad (8.40)$$

Операция построения тензора $A_{[m, n]}$ называется операцией альтернирования тензора A по нижним индексам с номерами m и n . Координаты (8.40) тензора $A_{[m, n]}$ обычно обозначаются символами

$$A_{i_1 \dots i_m \dots i_n}^{k_1 \dots k_q} \dots i_p. \quad (8.41)$$

Очевидно, для тензора $A_{[m, n]}$ выполняется условие кососимметрии (8.37) по нижним индексам i_m и i_n .

Операция альтернирования тензора по верхним индексам i_m и i_n определяется аналогично. Построенный тензор обозначается символом $A^{[m, n]}$. Для координат тензора $A^{[m, n]}$ используется обозначение, аналогичное обозначению (8.41) координат тензора $A_{[m, n]}$.

В заключение отметим очевидное равенство

$$A = A_{(m, n)} + A_{[m, n]}.$$

§ 3. Метрический тензор. Основные операции векторной алгебры в тензорных обозначениях

1. Понятие метрического тензора в евклидовом пространстве. В § 2 гл. 7 говорилось о том, что скалярное произведение в конечномерном линейном пространстве может быть задано с помощью

билинейной формы, полярной некоторой положительно определенной квадратичной форме. В этом параграфе мы будем считать, что в рассматриваемом конечномерном евклидовом пространстве E^n скалярное произведение задано такого типа билинейной формой $A(x, y)$.

В п 2 предыдущего параграфа (пример 3) мы убедились, что коэффициенты матрицы билинейной формы могут рассматриваться как координаты тензора. Эти коэффициенты для билинейной формы $A(x, y)$, с помощью которой задается скалярное умножение в E^n , мы обозначим через g_{ij} . Таким образом, g_{ij} — координаты некоторого тензора G в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Этот тензор типа $(2, 0)$ называется метрическим тензором пространства E^n . Напомним, что координаты g_{ij} тензора G определяются соотношениями

$$g_{ij} = A(e_i, e_j) \quad (8.42)$$

(см. формулу (8.23)).

Заметим также, что так как форма $A(x, y)$ симметрична ($A(x, y) = A(y, x)$), то, согласно (8.42), $g_{ij} = g_{ji}$, т. е. метрический тензор G симметричен по нижним индексам i и j .

Пусть x и y — произвольные векторы в E^n , x^i и y^j — координаты этих векторов в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Скалярное произведение (x, y) векторов x и y равно $A(x, y)$. Обращаясь к выражению (8.24) для билинейной формы в данном базисе и используя равенство $(x, y) = A(x, y)$, получим следующую формулу для скалярного произведения (x, y) векторов x и y :

$$(x, y) = g_{ij}x^i y^j. \quad (8.43)$$

В частности, скалярные произведения (e_i, e_j) базисных векторов e_i и e_j равны g_{ij} :

$$(e_i, e_j) = g_{ij} \quad (8.44)$$

(это следует из равенства $(e_i, e_j) = A(e_i, e_j)$ и из формулы (8.42); впрочем, формулу (8.44) легко получить и непосредственно из (8.43)).

Рассмотрим теперь наряду с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ взаимный базис $e^1, e^2, \dots, e^n$. Пусть $x = x_i e^i$ и $y = y_j e^j$ — разложения векторов x и y по векторам взаимного базиса. Тогда для скалярного произведения (x, y) получим следующую формулу:

$$(x, y) = A(x, y) = A(x_i e^i, y_j e^j) = A(e^i, e^j) x_i y_j.$$

Обозначая

$$g^{ij} = A(e^i, e^j), \quad (8.45)$$

получим следующее выражение для (x, y) :

$$(x, y) = g^{ij} x_i y_j \quad (8.46)$$

Как и в п. 2 предыдущего параграфа (см. пример 3), легко убедиться, что g^{ij} представляют собой координаты тензора типа (0, 2) симметричного по индексам i и j . Этот тензор типа (0, 2) также называется метрическим тензором пространства E^n .

Мы будем обозначать его тем же символом G , что и введенный выше метрический тензор типа (2, 0): в следующем пункте мы выясним, что координаты g_{ij} и g^{ij} можно рассматривать как ковариантные и контравариантные координаты одного и того же тензора. В дальнейшем эти координаты g_{ij} и g^{ij} мы так и будем называть ковариантными и контравариантными координатами тензора G .

В конце п. 2 § 1 этой главы, исследуя вопрос о построении взаимных базисов, мы ввели величины g_{ij} и g^{ij} по формулам (8.10). Сравнивая эти формулы с формулами (8.42) и (8.45), мы приходим к выводу, что эти величины представляют собой ковариантные и контравариантные координаты метрического тензора G .

В этом же п. 2 § 1 мы доказали, что матрицы, элементами которых являются координаты g_{ij} и g^{ij} , взаимно обратные. Это означает, что справедливо соотношение

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i. \quad (8.47)$$

Таким образом, координаты g^{ij} тензора G могут быть построены по координатам g_{ij} и наоборот (для этого надо обратиться к известному способу построения элементов обратной матрицы).

2. Операция поднятия и опускания индексов с помощью метрического тензора. Метрический тензор G используется для операции поднятия и опускания индексов у координат данного тензора A .

Эта операция заключается в следующем.

Пусть A — тензор типа (p, q) с координатами $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$. Для примера покажем, каким образом проводится операция поднятия индекса i_1 . Свернем тензоры G и A по верхнему индексу j у первого тензора и по нижнему индексу i_1 у второго тензора, т. е. построим тензор с координатами $g^{i_1 \alpha} A_{\alpha i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}$ и у координат полученного тензора индекс i обозначим через i_1 . Затем эти координаты обозначим символами $A_{i_2 \dots i_p}^{i_1 k_1 k_2 \dots k_q}$. Таким образом,

$$A_{i_2 \dots i_p}^{i_1 k_1 k_2 \dots k_q} = g^{i_1 \alpha} A_{\alpha i_2 \dots i_p}^{k_1 k_2 \dots k_q}. \quad (8.48)$$

З а м е ч а н и е 1. Так как порядок расположения индексов у координат тензора определяет «нумерацию» его координат, то, вообще говоря, при поднятии индекса нужно отмечать место среди верхних индексов, на которое будет поднят данный нижний

индекс. Иногда в ряду нижних индексов нужно отметить место поднимаемого нижнего индекса. Это делается с помощью точки, которая ставится на место поднятого индекса. Поэтому координаты тензора в левой части (8.48) следовало бы записать следующим образом: $A_{i_2 \dots i_p}^{i_1 k_1 k_2 \dots k_q}$

К примеру, если *первый* нижний индекс поднимается на *второе* место среди верхних индексов, то в результате мы получим тензор с координатами $A_{i_2 \dots i_q}^{k_1 i_1 k_2 \dots k_q}$

З а м е ч а н и е 2. Операция опускания индекса с помощью метрического тензора G определяется аналогично. Например, координаты тензора, полученного путем опускания у тензора A индекса k_q на последнее место в ряду нижних индексов, имеют следующий вид:

$$A_{i_1, \dots, i_{q-1}}^{k_1 \dots k_{q-1}} = g_{k_q \alpha} A_{i_1, \dots, i_{q-1}}^{k_1 \dots k_{q-1} \alpha}$$

З а м е ч а н и е 3. Операцию поднятия или опускания индекса можно применять несколько раз, причем каждый раз по отношению к различным индексам данного тензора.

Рассмотрим примеры поднятия и опускания индексов у тензоров

Пусть x — вектор, x_i и x^i — соответственно его ковариантные и контравариантные координаты (напомним, что вектор представляет собой тензор ранга 1).

Поднимем у координат x_i индекс i с помощью метрического тензора G . В результате получим тензор с координатами $g^{i\alpha} x_\alpha$. Так как $x_\alpha = (x, e_\alpha)$, то $g^{i\alpha} x_\alpha = g^{i\alpha} (x, e_\alpha) = (x, g^{i\alpha} e_\alpha)$.

Согласно (8.11) $g^{i\alpha} e_\alpha = e^i$, а $(x, e^i) = x^i$. Поэтому $g^{i\alpha} x_\alpha = x^i$.

Таким образом, контравариантные координаты x^i вектора x можно получить как результат операции поднятия индекса у ковариантных координат x_i этого вектора.

Ковариантные координаты x_i могут быть получены как результат операции опускания индекса у контравариантных координат x^i

Выясним результат двукратного применения операции поднятия индекса у ковариантных координат g_{ij} метрического тензора G с помощью контравариантных координат g^{ij} этого же тензора. Иными словами, выясним, что представляет собой тензор с координатами

$$g^{i\alpha} g^{j\beta} g_{\alpha\beta}. \quad (8.49)$$

Используя симметрию тензора G по нижним индексам и соотношение (8.47), найдем $g^{i\beta} g_{\alpha\beta} = g^{i\beta} g_{\beta\alpha} = \delta_\alpha^i$. Подставляя найденное выражение для $g^{i\beta} g_{\alpha\beta}$ в (8.49) и используя свойства символа Кронекера δ_α^i , получим

$$g^{i\alpha} g^{j\beta} g_{\alpha\beta} = g^{ij}.$$

Совершенно аналогично можно убедиться в справедливости равенства

$$g_{ia}g_{jb}g^{ab} = g_{ij}.$$

Последние две формулы еще раз подчеркивают, что g_{ij} и g^{ij} естественно рассматривать как ковариантные и контравариантные координаты метрического тензора G .

3. **Ортонормированные базисы в E^n .** Мы уже выяснили, что скалярное произведение (x, y) в E^n может быть задано с помощью метрического тензора G , координаты g_{ij} которого представляют собой элементы симметричной положительно определенной матрицы (g_{ij}) . Именно, согласно (8.43),

$$(x, y) = g_{ij}x^iy^j.$$

Известно, что с помощью преобразования базиса матрицу билинейной формы $g_{ij}x^iy^j$ можно привести к диагональному виду. При этом, в силу положительной определенности матрицы, после приведения матрицы (g_{ij}) к диагональному виду координаты метрического тензора будут равны нулю при $i \neq j$ и единице при $i = j$. Обозначая эти координаты прежним символом g_{ij} , получим

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (8.50)$$

Базис e_i , в котором координаты g_{ij} метрического тензора удовлетворяют условию (8.50), является ортонормированным. Действительно, так как $(e_i, e_j) = g_{ij}$ (см. (8.44)), то согласно (8.50),

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

а это и означает, что e_i — ортонормированный базис.

В гл. 4 мы выяснили, что в ортонормированном базисе скалярное произведение (x, y) векторов x и y с координатами x^i и y^j может быть вычислено по формуле

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x^iy^i, \quad (8.51)$$

а квадрат длины (x, x) вектора x — по формуле

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2. \quad (8.52)$$

Обратимся к так называемым *ортонормальным линейным преобразованиям*, т. е. к таким линейным преобразованиям,

при которых ортонормированный базис переходит в ортонормированный. Иными словами, если L — ортогональное преобразование и e_i — ортонормированный базис, то Le_i также образует ортонормированный базис

Исследуем действие преобразования L на произвольный вектор $x = x^i e_i$. Обозначим через X результат действия L на x :

$$X = Lx$$

Используя свойство линейности L , найдем

$$X = Lx^i e_i = x^i Le_i$$

Так как Le_i — базис, то из последнего соотношения вытекает, что вектор X имеет в базисе Le_i такие же координаты, как и вектор x в базисе e_i , т. е. при ортогональном преобразовании сохраняют свое значение координаты вектора.

Поскольку Le_i — ортонормированный базис, то скалярное произведение (X, Y) векторов $X = Lx$ и $Y = Ly$ может быть найдено по формуле (8.51), а квадрат длины (X, X) вектора $X = Lx$ — по формуле (8.52). Мы выяснили, что при ортогональных преобразованиях сохраняют свое значение координаты векторов. Отсюда и из соотношений (8.51) и (8.52) получаем

$$(X, Y) = (x, y), \quad (X, X) = (x, x).$$

Таким образом, при ортогональных преобразованиях не меняются длины векторов и их скалярные произведения.

Как известно, ортогональные преобразования L могут быть заданы с помощью ортогональной матрицы. Определитель $\det L$ такой матрицы удовлетворяет условию $\det L = \pm 1$.

Выберем один из ортонормированных базисов и договоримся называть этот базис *правым*. В этом случае будем говорить, что евклидово пространство E^n *ориентировано*. Все базисы в E^n , получающиеся из данного ортогональными преобразованиями с определителем, равным $+1$, назовем *правыми*, а все базисы, которые получаются из данного ортогональными преобразованиями с определителем, равным -1 , — *левыми*. Легко убедиться, что преобразование правого базиса в правый характеризуется равенством $+1$ определителя преобразования, а левого в левый — равенством -1 этого определителя.

Обозначим через $O(n)$ — множество всех ортогональных преобразований в E^n , а через $O_+(n)$ — множество ортогональных преобразований правых базисов.

Эти множества будут рассмотрены в следующей главе.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем мы будем называть произвольный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ *правым (левым)*, если определитель матрицы перехода от выбранного ортонормированного базиса к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ положителен (отрицателен).

4. Дискриминантный тензор. Рассмотрим так называемый в полне косо симметрический тензор $e_{i_1 i_2 \dots i_p}$

типа $(p, 0)$, т. е. такой тензор, который кососимметричен по любым двум нижним индексам.

Для того чтобы этот тензор не был нулевым, необходимо, чтобы число p не превышало n , т. е. удовлетворяло условию $p \leq n$, ибо, если $p > n$, то любая координата будет иметь по меньшей мере два одинаковых индекса, при перестановке которых эта координата одновременно должна и изменить знак, и остаться неизменной. Это может быть лишь в том случае, когда указанная координата равна нулю. Следовательно, при $p > n$ любая координата тензора равна нулю, т. е. тензор является нулевым.

Особый интерес представляет вполне кососимметрический тензор, ранг p которого равен размерности n пространства.

Любая координата $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ такого тензора может быть найдена по формуле

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 0, & \text{если среди индексов } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ хотя} \\ & \text{бы два совпадают,} \\ (-1)^{\text{sign } \sigma} \varepsilon_{12 \dots n} & \text{если все индексы различны.} \end{cases} \quad (8.53)$$

В формуле (8.53) $\text{sign } \sigma$ равно 0 или $+1$ в зависимости от четности или нечетности перестановки $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ ($\text{sign } \sigma$ называют также *знаком* этой перестановки).

Рассмотрим какую-либо правую ортонормированную систему координат и положим в ней

$$\varepsilon_{12 \dots n} = 1. \quad (8.54)$$

С помощью соотношения (8.53) в данной системе координат определяются все координаты $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ вполне кососимметрического тензора, а следовательно, и сам тензор, который в дальнейшем мы будем называть *дискриминантным тензором*. Координаты этого тензора в произвольном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ обозначим через $c_{i_1 i_2 \dots i_n}$.

Обозначим символом B матрицу перехода от выбранного правого ортонормированного базиса к некоторому базису $e_1', e_2', \dots, e_n'$, а через b_i^j — элементы этой матрицы.

Согласно (8.53) для вычисления координат $c_{i_1' i_2' \dots i_n'}$ дискриминантного тензора в базисе $e_1', e_2', \dots, e_n'$ достаточно знать значение координаты $c_{1' 2' \dots n'}$.

Используя формулу (8.19) преобразования координат тензора и соотношение (8.54), получим, переходя от выбранного ортонормированного базиса к базису $e_1', e_2', \dots, e_n'$,

$$\begin{aligned} c_{1' 2' \dots n'} &= b_1^{1'} b_2^{2'} \dots b_n^{n'} \varepsilon_{1 2 \dots n} = \\ &= \varepsilon_{12 \dots n} \sum_{\sigma=(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\text{sign } \sigma} b_1^{i_1'} b_2^{i_2'} \dots b_n^{i_n'} = \\ &= \det(b_i^{j'}) = \det B. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Пусть $g_{i'j'}$ — координаты метрического тензора в базисе $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$. Так как матрица $\tilde{G} = (g_{i'j'})$ есть матрица билинейной формы $g_{i'j'}x^{i'}x^{j'}$, представляющей собой скалярное произведение векторов x и y с координатами $x^{i'}$ и $y^{j'}$, то при переходе от данного ортонормированного базиса (в котором матрица E рассматриваемой билинейной формы является единичной) к базису $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$ справедлива формула $\tilde{G} = B'EB$. Отсюда следует, что $\det \tilde{G} = \det B' \det E \det B = (\det B)^2$.

Обозначая $\det \tilde{G}$ через g , получим из последнего соотношения $\det B = \pm \sqrt{g}$. Обращаясь к соотношениям (8.55), мы получим, что $c_{1'2' \dots n'} = \pm \sqrt{g}$. Таким образом, в произвольном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ выражение для координаты $c_{1'2' \dots n'}$ дискриминантного тензора имеет вид

$$c_{1'2' \dots n'} = \pm \sqrt{g}, \quad (8.56)$$

где g — определитель матрицы (g_{ij}) метрического тензора в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Отметим, что в формуле (8.56) знак плюс соответствует правому базису, а знак минус — левому.

5. Ориентированный объем. Введем в ориентированном евклидовом пространстве E^n так называемую аффинную систему координат, определив ее как совокупность фиксированной точки O с координатами $(0, 0, \dots, 0)$ и базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$. Координаты любой точки M в E^n определяются в этом случае как координаты в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ вектора $\overline{OM}$.

Рассмотрим в E^n занумерованную систему из n векторов

$$\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \dots, \overset{n}{x} \quad (8.57)$$

и рассмотрим всевозможные векторы $\overline{OM}$, определяемые соотношениями

$$\overline{OM} = \alpha_1 \overset{1}{x} + \alpha_2 \overset{2}{x} + \dots + \alpha_n \overset{n}{x}, \quad (8.58)$$

при всевозможных α_i , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Множество всех точек M пространства E^n , определяемое соотношениями (8.58), образует так называемый n -мерный параллелепипед в E^n , натянутый на векторы (8.57).

Ориентированным объемом $V(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \dots, \overset{n}{x})$ этого параллелепипеда называется число

$$V(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \dots, \overset{n}{x}) = c_{i_1 i_2 \dots i_n} \overset{1}{x}^{i_1} \overset{2}{x}^{i_2} \dots \overset{n}{x}^{i_n}. \quad (8.59)$$

При этом $c_{i_1 i_2 \dots i_n}$ — координаты дискриминантного тензора в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, а $x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_n}$ — контравариантные координаты векторов $x, x, \dots, x$ в этом же базисе

Термин «ориентированный объем» объясняется тем, что в случае, если векторы (8.57) образуют правый базис, ориентированный объем положителен ($V > 0$), а в случае левого базиса — отрицателен ($V < 0$)

Отметим, что при $n = 3$ ориентированный объем, вычисляемый для $n = 3$ по формуле (8.59), представляет собой обычный объем параллелепипеда, натянутого на векторы x, x, x , взятый со знаком $+$, если тройка x, x, x правая, и со знаком $-$, если эта тройка левая.

6. Векторное произведение. С помощью дискриминантного тензора можно записать в трехмерном пространстве E^3 в тензорном виде векторное произведение. Такая запись широко используется при различных вычислениях в так называемых криволинейных координатах

Пусть c_{ijk} — координаты дискриминантного тензора в данном базисе e_1, e_2, e_3 пространства E^3 . Поднимем у этого тензора первый индекс i с помощью метрического тензора g^{im} , т. е. рассмотрим тензор c^i_{jk} . Тогда координаты z^i вектора $z = [xy]$ (т. е. векторного произведения векторов x и y) в базисе e_1, e_2, e_3 имеют вид

$$z^i = c^i_{jk} x^j y^k. \quad (8.60)$$

Так как $c^i_{jk} x^j y^k$ представляет собой тензор типа $(0, 1)$, то z^i можно рассматривать как контравариантные координаты вектора. Поэтому, чтобы убедиться, что z^i действительно представляют собой координаты векторного произведения, достаточно обратиться к какой-либо определенной системе координат и непосредственно провести проверку. Эта проверка элементарна для ортонормированного базиса и предоставляется читателю.

Соотношение (8.60) может служить основой для введения векторного произведения $n - 1$ вектора в E^n

Пусть $x, x, \dots, x$ — какие-либо $n - 1$ вектор в E^n . Определим координаты z^i векторного произведения $z = [x x \dots x]$ с помощью соотношений

$$z^i = c^i_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_{n-1}}. \quad (8.61)$$

В соотношениях (8.61) $c^i_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$ — координаты дискриминантного тензора с поднятым первым индексом, а $x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_{n-1}}$ — контравариантные координаты векторов $x, x, \dots, x$.

7. Двойное векторное произведение. Из векторной алгебры известна следующая формула для двойного векторного произведения $[a [bd]]$ векторов a, b и d

$$[a [bd]] = b \, ad - d \, (ab). \quad (8.62)$$

Используя соотношение (8.60) и формулу (8.43) для скалярного произведения векторов, перепишем (8.62) следующим образом:

$$c_{kl}^i a^k c_{mn}^l b^m d^n = b^l g_{kl} a^k d^l - d^l g_{kl} a^k b^l. \quad (8.63)$$

С помощью (8.63) мы получим формулу, связывающую тензоры c_{kl}^i и g_{ik} , которую в свою очередь используем для записи координат двойного векторного произведения.

Проведем следующие преобразования в формуле (8.63). В первом слагаемом $b^l g_{kl} a^k d^l$ в правой части (8.63) заменим b^l на $b^m \delta_m^l$ и индекс суммирования l заменим на n . Во втором слагаемом в правой части (8.63) положим $d^l = d^n \delta_n^l$ и индекс суммирования l заменим на m . После этих преобразований формула (8.63) примет вид

$$(c_{kl}^i c_{mn}^l) a^k b^m d^n = (g_{kn} \delta_m^l - g_{km} \delta_n^l) a^k b^m d^n. \quad (8.64)$$

Так как соотношение (8.64) справедливо для любых векторов a, b и d , то оно представляет собой тождество относительно координат a^k, b^m и d^n этих векторов, и поэтому для любых индексов i, k, m, n имеет место равенство

$$c_{kl}^i c_{mn}^l = g_{kn} \delta_m^l - g_{km} \delta_n^l. \quad (8.65)$$

Обозначим через z^i координаты двойного векторного произведения $[a [bd]]$. Тогда, согласно (8.63), $z^i = c_{kl}^i c_{mn}^l a^k b^m d^n$. Отсюда и из (8.65) получаем следующее выражение для координат z^i двойного векторного произведения $[a [bd]]$:

$$z^i = (g_{kn} \delta_m^l - g_{km} \delta_n^l) a^k b^m d^n. \quad (8.66)$$

Формула (8.66) удобна для различных приложений.

§ 4. Метрический тензор псевдоевклидова пространства

1. Понятие псевдоевклидова пространства и метрического тензора псевдоевклидова пространства. Рассмотрим n -мерное линейное пространство L , в котором задана невырожденная, симметричная билинейная форма $A(x, y)$, полярная знакопеременной квадратичной форме.

Будем называть с к а л я р н ы м п р о и з в е д е н и е м (x, y) векторов x и y значение $A(x, y)$ билинейной формы. Наименование

*) Соотношение $b^l = b^m \delta_m^l$ следует из свойств символа Кронекера.

«скалярное произведение» условно, поскольку в рассматриваемом случае не выполняется четвертая аксиома скалярного произведения. Именно, в случае, когда билинейная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ полярна знакопеременной квадратичной форме, выражение $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в зависимости от выбора $\mathbf{x}$ может иметь как положительное, так и отрицательное значение и обращаться в нуль для ненулевых векторов $\mathbf{x}$. Все же мы будем пользоваться термином «скалярное произведение», так как это общепринято.

Сформулируем определение псевдоевклидова пространства.

Определение. Псевдоевклидовым пространством называется n -мерное линейное пространство L , в котором задано скалярное произведение посредством невырожденной симметричной билинейной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, полярной знакопеременной квадратичной форме.

Число n называется размерностью псевдоевклидова пространства.

Выделим в линейном пространстве L базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и обозначим через (g_{ij}) матрицу билинейной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в этом базисе (напомним, что $g_{ij} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$). Если x^i и y^j — контравариантные координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ij}x^iy^j. \quad (8.67)$$

В полной аналогии с рассуждениями п. 2 § 2 этой главы доказывается, что (g_{ij}) представляют собой координаты тензора G типа $(2,0)$. Этот тензор мы будем в дальнейшем называть метрическим тензором псевдоевклидова пространства.

Так как скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ равно $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, то, согласно (8.67), имеем $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ij}x^iy^j$.

Известно, что матрицу (g_{ij}) билинейной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно привести к диагональному виду. При этом в силу невырожденности формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ координаты g_{ij} метрического тензора после приведения к диагональному виду будут равны нулю при $i \neq j$ и единице или минус единице при $i = j$. Число p положительных и число q отрицательных диагональных элементов не зависит от способа приведения к диагональному виду, причем, в силу невырожденности формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $p + q = n$.

Приведенные рассуждения поясняют обозначение $E_{(p,q)}^n$ для n -мерного псевдоевклидова пространства.

Естественно поставить вопрос об измерении длин векторов в псевдоевклидовом пространстве.

В евклидовом пространстве с метрическим тензором g_{ij} квадрат длины вектора $\mathbf{x}$ с координатами x^i считается равным $g_{ij}x^ix^j$. Если определить квадрат длины $s^2(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{x}$ с помощью соотношения

$$s^2(\mathbf{x}) = g_{ij}x^ix^j, \quad (8.68)$$

то, очевидно (поскольку форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ знакопеременная), можно указать ненулевые векторы с положительным квадратом длины, с отрицательным квадратом длины и с нулевым квадратом длины. Поэтому, чтобы получить в качестве меры длины векторов лишь действительные числа, обычно за длину вектора принимают

$$\sigma(\mathbf{x}) = (\operatorname{sgn} s^2(\mathbf{x})) \sqrt{|s^2(\mathbf{x})|}. \quad (8.69)$$

В дальнейшем мы будем использовать следующую терминологию, заимствованную из специальной теории относительности: мы будем называть ненулевой вектор $\mathbf{x}$ *времениподобным*, если для этого вектора $\sigma(\mathbf{x}) > 0$, *пространственноподобным*, если $\sigma(\mathbf{x}) < 0$, и *изотропным*, если $\sigma(\mathbf{x}) = 0$.

Справедливо следующее утверждение:

Множество концов всех времениподобных (пространственноподобных, изотропных) векторов, начала которых совпадают с произвольной фиксированной точкой M псевдоевклидова пространства, образует конус.

Для определенности докажем утверждение, рассматривая времениподобные векторы. Очевидно, достаточно доказать, что если $\mathbf{x}$ — времениподобный вектор, то при любом вещественном $\lambda \neq 0$ вектор $\lambda\mathbf{x}$ также времениподобен.

Так как координаты вектора $\lambda\mathbf{x}$ равны λx^i , то, согласно (8.68), $s^2(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2 s^2(\mathbf{x})$, т. е. $\operatorname{sgn} s^2(\lambda\mathbf{x}) = \operatorname{sgn} s^2(\mathbf{x})$. Отсюда и из (8.69) следует, что вектор $\lambda\mathbf{x}$ будет времениподобным.

Для случая времениподобных векторов утверждение доказано. Рассуждая аналогично, убедимся в справедливости утверждения для случая пространственноподобных и изотропных векторов.

Конус времениподобных векторов обозначается часто символом T (от англ. time — время), а конус пространственноподобных векторов — символом S (от англ. space — пространство).

2. Галилеевы координаты. Преобразования Лоренца *). В теории псевдоевклидовых пространств важную роль играют те системы координат, в которых *квадрат интервала* (так обычно называют квадрат длины вектора $s^2(\mathbf{x})$) *имеет вид*

$$s^2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p (x^i)^2 - \sum_{i=p+1}^n (x^i)^2. \quad (8.70)$$

По терминологии, заимствованной из физики, *такие системы координат называются галилеевыми*.

Преобразования координат, которые сохраняют для $s^2(\mathbf{x})$ выражение (8.70), называются *преобразованиями Лоренца*.

В следующем пункте мы рассмотрим вопрос о преобразованиях Лоренца пространства $E_{(1,3)}^4$, называемого *пространством*

*) Гендрик Антон Лоренц (1853 — 1928) — нидерландский математик

Минковского*). Это пространство представляет особый интерес для физики, ибо является пространством событий специальной теории относительности.

Отметим, что обычно в пространстве Минковского нумерация координат вектора начинается с нуля. Таким образом, согласно (8.70), квадрат $s^2(\mathbf{x})$ интервала в пространстве $E_{(1,3)}^4$ записывается следующим образом:

$$s^2(\mathbf{x}) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (8.71)$$

Для удобства в физике координата x^0 отождествляется с выражением ct , где c — скорость света, а t — временная переменная; x^1 , x^2 , x^3 называются пространственными переменными.

В пространстве Минковского конус T времениподобных векторов распадается на две различные связные открытые компоненты T^+ (конус будущего) и T^- (конус прошлого); конус S пространственноподобных векторов образует связное множество.

Поясним структуру связных компонент T^+ и T^- . Для этого обратимся к физической интерпретации вектора $\mathbf{x}$ с координатами x^i , $i = 0, 1, 2, 3$, в пространстве $E_{(1,3)}^4$: этот вектор характеризуется величиной $\Delta t = x^0/c$ и вектором $\Delta \mathbf{r} = \{x^1, x^2, x^3\}$. Таким образом, рассматривая $\mathbf{x}$ как перемещение в $E_{(1,3)}^4$, можно считать, что это перемещение характеризуется временным Δt и пространственным $\Delta \mathbf{r}$ перемещениями.

Времениподобные векторы $\mathbf{x}$ определяются условием $s(\mathbf{x}) > 0$. В этом случае, очевидно, $|\Delta \mathbf{r}|/|\Delta t| < c$. Если при этом $\Delta t > 0$, то для перемещения $\mathbf{x}$ получим неравенство $0 < |\Delta \mathbf{r}|/|\Delta t| < c$. Такое перемещение $\mathbf{x}$ принадлежит по определению T^+ и может рассматриваться как перемещение материальной частицы «в будущее». Если $\Delta t < 0$, то перемещение $\mathbf{x}$ принадлежит T^- и может рассматриваться как перемещение частицы «в прошлое» (в физике так интерпретируется движение античастиц).

Очевидно, T^+ и T^- представляют собой две связные открытые компоненты конуса T . Проведенные рассуждения поясняют их наименования — конус будущего и конус прошлого.

3. Преобразования Лоренца пространства $E_{(1,3)}^4$. Рассмотрим в псевдоевклидовом пространстве $E_{(1,3)}^4$ галилееву систему координат с базисом $\mathbf{e}_i$. В такой системе координат квадрат интервала $s^2(\mathbf{x})$ имеет вид (8.71), а матрица (g_{ij}) метрического тензора имеет вид

$$J = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.72)$$

*) Герман Минковский (1864 — 1909) — немецкий математик и физик.

Перейдем к новой галилеевой системе координат с базисом e_i' и выясним условия, которым должны удовлетворять коэффициенты b_i^j матрицы B преобразования базисных векторов. Так как

$$e_i = b_i^{j'} e_{j'} \quad (8.73)$$

и так как матрица $(g_{i'j'})$ метрического тензора в базисе $e_{i'}$ также имеет вид (8.72), то используя формулы $g_{i'j'} = b_i^{j'} b_{j'}^i g_i$ преобразования координат метрического тензора, получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов b_i^j матрицы B преобразования базисных векторов (см (8.73)); при этом индексы i и i' пробегают значения 0, 1, 2, 3 (см (8.71)):

$$\left. \begin{aligned} (b_0^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^3 b_0^\alpha b_0^\alpha &= 1, \\ b_0^0 b_\beta^0 - \sum_{\alpha=1}^3 b_0^\alpha b_\beta^\alpha &= 0, \\ b_\gamma^0 b_\beta^0 - \sum_{\alpha=1}^3 b_\gamma^\alpha b_\beta^\alpha &= \begin{cases} -1 & \text{при } \gamma' = \beta', \\ 0 & \text{при } \gamma' \neq \beta', \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (8.74)$$

Соотношения (8.74) можно записать в матричной форме. Для этой цели рассмотрим наряду с матрицей B матрицу B^* , которая получается из B путем изменения знака у элементов последних трех столбцов и последующего транспонирования. Очевидно, соотношения (8.74) можно записать в следующей форме:

$$B^* B = J, \quad (8.75)$$

где матрица J определяется соотношением (8.72) (для сравнения напомним, что матрица C ортогональных преобразований евклидова пространства удовлетворяет соотношению $C' C = I$, где I — единичная матрица).

Так как $\det B^* = -\det B$, а $\det J = -1$, то из соотношения (8.75) следует, что $\det B^* B = \det B^* \det B = -(\det B)^2 = -1$, т. е.

$$\det B = \pm 1. \quad (8.76)$$

Обозначим через L совокупность всех общих преобразований Лоренца пространства Минковского. Из этих общих преобразований выделим те преобразования, которые переводят каждый вектор из T^+ в вектор, также принадлежащий T^+ . Совокупность таких преобразований обычно называется преобразованиями Лоренца пространства $E_{(1,3)}^4$ и обозначается символом L_+ .

Общие преобразования Лоренца, для которых $\det B = +1$, образуют класс L_+ так называемых собственных преобразований Лоренца.

Класс L_- несобственных преобразований Лоренца характеризуется соотношением $\det B = -1$. Примером такого преобразования может служить отражение относительно трех пространственных осей: $x^{1'} = -x^1$, $x^{2'} = -x^2$, $x^{3'} = -x^3$.

Пусть B — матрица произвольного несобственного преобразования Лоренца, а P — матрица только что рассмотренного отражения. Очевидно, произведение произвольного несобственного преобразования и рассмотренного отражения будет собственным преобразованием с матрицей $B' = PB$.

Так как $P^2 = P P = I$, где I — единичная матрица, то

$$B = P^2 B = P (PB) = P B'$$

Таким образом, *всякое несобственное преобразование Лоренца является произведением некоторого собственного преобразования с матрицей B' и отражения с матрицей P .*

Пересечение множеств L_+ и L_- обозначают символом $L_{\uparrow}$. Некоторые групповые свойства множеств L , L_+ , L_- и $L_{\uparrow}$ будут рассмотрены в следующей главе.

В заключение найдем те преобразования $L_{\uparrow}$, которые не меняют координат x^2 и x^3 . Ясно, что это будут преобразования $L_{\uparrow}$ двумерного псевдоевклидова подпространства с координатами x^0 и x^1 , в котором квадрат интервала вычисляется по формуле $(x^0)^2 - (x^1)^2$.

Запишем для рассматриваемого случая формулы (8.74). Получим

$$\left. \begin{aligned} (b_{0'}^0)^2 - (b_{0'}^1)^2 &= 1, \\ b_{0'}^0 b_{1'}^0 - b_{0'}^1 b_{1'}^1 &= 0, \\ (b_{1'}^0)^2 - (b_{1'}^1)^2 &= -1. \end{aligned} \right\} \quad (8.77)$$

Полагая $b_{0'}^1/b_{0'}^0 = \beta$, найдем из (8.77) следующие выражения для коэффициентов $b_{i'}^j$ матрицы преобразования B базисных векторов e , e_1 , e_2 , e_3 в базисные векторы $e_{0'}$, $e_{1'}$, $e_{2'}$, $e_{3'}$:

$$b_{0'}^0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b_{1'}^0 = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b_{1'}^1 = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b_{1'}^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

В этих формулах знак выбирается из условия принадлежности преобразования Лоренца классу $L_{\uparrow}$. Не вникая в детали вычислений, запишем окончательные формулы преобразования координат:

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^{1'} = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^2 = x^2, \quad x^3 = x^3. \quad (8.78)$$

Положим в соотношениях (8.78) $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^{0'} = ct'$, $x^{1'} = x'$, $x^{2'} = y'$, $x^{3'} = z'$. Тогда формулы (8.78) переписутся следующим образом:

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (8.79)$$

Выясним теперь физический смысл константы β . Допустим, что точка P неподвижна в системе координат (t', x', y', z') . Это означает, что время t' меняется, а пространственные координаты x' , y' , z' этой точки постоянны. Исследуем вопрос о поведении точки P относительно системы (t, x, y, z) . Дифференцируя последние три уравнения (8.79) и учитывая, что $dx' = dy' = dz' = 0$, получим $0 = \frac{-\beta c dt + dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $0 = dy$, $0 = dz$. Поэтому $\frac{dx}{dt} = \beta c$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$.

Следовательно, всякая точка P , неподвижная в системе координат (t', x', y', z') (а следовательно, и вся эта система координат), движется относительно системы (t, x, y, z) с постоянной скоростью $v = \beta c$ в направлении оси Ox .

Итак, $\beta = v/c$, где v — скорость движения системы (t', x', y', z') относительно системы (t, x, y, z) . Отметим, что так как $0 < v < c$, то $0 < \beta < 1$.

Перепишем теперь следующим образом формулы (8.79):

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (8.80)$$

Формулы (8.80) представляют собой формулы перехода от инерциальной системы (t, x, y, z) к другой инерциальной системе (t', x', y', z') . Эти формулы называются **формулами Лоренца**.

§ 5. Тензор момента инерции

Рассмотрим твердое тело, закрепленное в точке O . Пусть $\mathbf{r} = \overline{OM}$ — радиус-вектор точки M этого тела, $\mathbf{v}$ — скорость точки M .

Как известно, момент импульса $\mathbf{N}$ определяется соотношением $\mathbf{N} = \int_V [\mathbf{r} \mathbf{v}] dm$, где V — объем тела, $dm = \rho dV$ (ρ — плотность тела).

Обозначая через N^i — контравариантные координаты вектора $\mathbf{N}$ и используя формулу (8.60) для векторного произведения, получим

$$N^i = \int_V c_{ki}^t r^k v^t dm \quad (8.81)$$

(напомним, что $c_{kl}^i = g^{is} c_{skl}$, где c_{skl} — координаты дискриминантного тензора в данном базисе пространства E^3 , см п 6 § 3 этой главы).

По теореме Эйлера существует мгновенная ось вращения тела. Обозначая через ω вектор мгновенной угловой скорости, получим $\mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}]$. Снова обращаясь к формуле (8.60) для векторного произведения, найдем

$$v^i = c_{pn}^i \omega^p r^n. \quad (8.82)$$

Подставляя найденное выражение v^i в правую часть (8.81) и учитывая независимость ω^p от переменных интегрирования, получим следующее выражение для N^i :

$$N^i = \int_V c_k^i c_{pn}^l r^k r^n \omega^p dm = \omega^p \int_V c_{kl}^i c_{pn}^l r^k r^n dm = \omega^p J_p^i. \quad (8.83)$$

Тензор

$$J_p^i = \int_V c_{kl}^i c_{pn}^l r^k r^n dm, \quad (8.84)$$

фигурирующий в правой части соотношений (8.83), называется тензором момента инерции.

Преобразуем выражение (8.84) для тензора момента инерции. Для этой цели обратимся к формуле (8.65). По этой формуле имеем $c_{kl}^i c_{pn}^l = g_{kn} \delta_p^i - g_{kp} \delta_n^i$. Поэтому

$$J_p^i = \int_V (g_{kn} \delta_p^i - g_{kp} \delta_n^i) r^n r^k dm. \quad (8.85)$$

Если в выражении (8.85) опустить индекс i с помощью метрического тензора, то в результате получим часто используемую формулу для координат дважды ковариантного тензора момента инерции:

$$J_{ip} = \int_V (r^2 g_{ip} - r_i r_p) dm. \quad (8.86)$$

Тензор момента инерции широко используется в механике твердого тела. Для примера запишем с помощью этого тензора выражение для кинетической энергии T . Имеем

$$T = \frac{1}{2} \int_V v^2 dm = \frac{1}{2} \int_V g_{ij} v^i v^j dm.$$

Но поскольку $v^i = c_{pn}^i \omega^p r^n$, выражение для T примет вид

$$T = \frac{1}{2} \int_V g_{ij} c_{pn}^i c_{kl}^j \omega^p r^n \omega^k r^l dm = \frac{1}{2} \omega^p \omega^k \int_V g_{ij} c_{pn}^i c_{kl}^j r^n r^l dm.$$

Отсюда, согласно (8.84), найдем $T = \frac{1}{2} \omega^p \omega^k J_{pk}$.

ГЛАВА 9

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

В этой главе будут изложены основные понятия теории групп и указаны некоторые приложения этой теории.

Важность теории групп определяется многочисленными ее приложениями в физике.

§ 1. Понятие группы. Основные свойства групп

1. Законы композиции. Будем говорить, что в множестве A определен закон композиции, если задано отображение T упорядоченных пар элементов из A в множество A . При этом элемент c из A , поставленный с помощью отображения T в соответствие элементам a, b из A , называется композицией этих элементов.

Композиция c элементов a и b обозначается символом aTb :

$$c = aTb.$$

Для композиции элементов a, b множества A используются и другие формы записи. Наиболее употребительными являются аддитивная форма записи $c = a + b$ и мультипликативная форма записи $c = ab$.

В случае аддитивной формы записи композиции соответствующий закон композиции обычно называется сложением, а при мультипликативной форме — умножением. Закон композиции называется ассоциативным, если для любых элементов a, b, c множества A выполняется соотношение

$$aT(bTc) = (aTb)Tc$$

Закон композиции называется коммутативным, если для любой пары $a, b \in A$ выполняется соотношение $aTb = bTa$.

Элемент e множества A называется нейтральным относительно закона T , если для любого элемента a множества A выполняется соотношение $aTe = a$.

Примерами законов композиции могут служить обычные сложение и умножение в множестве вещественных чисел. Оба эти закона коммутативны. Нейтральным элементом для сложения является нуль, для умножения — единица.

2. Понятие группы. Некоторые свойства групп. Сформулируем следующее определение.

Определение 1. Множество A , в котором определен закон композиции T , называется *г р у п п о й* G , если этот закон ассоциативен, существует нейтральный элемент e относительно закона T и для каждого элемента a множества A существует обратный элемент a^{-1} , т. е. такой элемент, для которого $aTa^{-1} = e$.

Если использовать мультипликативную форму записи композиции элементов, то определению 1 можно придать следующую форму.

Определение 2. Множество A элементов $a, b, c, \dots$, в котором определен закон композиции, называемый умножением и ставящий в соответствие каждой паре элементов a, b множества A определенный элемент $c = ab$ этого множества, называется *г р у п п о й* G , если этот закон удовлетворяет следующим требованиям:

1°. $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность).

2°. Существует элемент e множества A такой, что для любого элемента a этого множества $ae = a$ (существование нейтрального элемента).

3°. Для любого элемента a множества A существует обратный элемент a^{-1} такой, что $aa^{-1} = e$.

Обычно нейтральный элемент e называется *единицей* группы G .

Если закон композиции T , действующий в группе G , является коммутативным, то группа G называется *к о м м у т а т и в н о й* или *а б е л е в о й*. Для абелевых групп часто используется аддитивная форма записи композиции элементов. В этом случае нейтральный элемент абелевой группы называется *н у л е м*.

Рассмотрим примеры групп.

1) Множество Z целых чисел образует абелеву группу относительно сложения.

Действительно, операция сложения целых чисел представляет собой, очевидно, закон композиции. Ясно, что этот закон ассоциативен и коммутативен. Нейтральным элементом (нулем) является целое число нуль. Обратным элементом для целого числа a служит целое число $-a$.

2) Множество положительных вещественных чисел образует абелеву группу относительно умножения. Эта операция представляет собой закон композиции. Очевидно, этот закон ассоциативен и коммутативен. Нейтральным элементом является вещественное число единица. Обратным элементом для числа $a > 0$ служит число $1/a$.

3) Линейное пространство образует абелеву группу относительно сложения элементов. Эта операция представляет собой закон композиции. Согласно аксиомам линейного пространства

этот закон ассоциативен и коммутативен. Нейтральным элементом является нулевой элемент пространства, обратным элементом для элемента x — элемент $-x$.

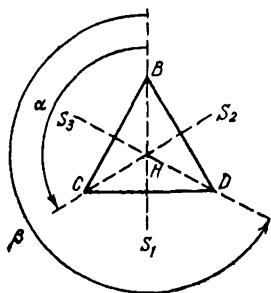


Рис. 9.1.

4) Пусть BCD — равносторонний треугольник (см. рис. 9.1). Рассмотрим следующее множество A операций, совмещающих треугольник с самим собой

1°. Поворот α на $2\pi/3$ вокруг центра H , переводящий B в C .

2°. Поворот β на $4\pi/3$, переводящий B в D .

3°. Симметрия S_1 , переводящая C в D .

4°. Симметрия S_2 , переводящая D в B .

5°. Симметрия S_3 , переводящая B в C .

6°. Тожественная операция 1.

Следующая таблица представляет закон композиции элементов множества A :

	1	α	β	S_1	S_2	S_3
1	1	α	β	S_1	S_2	S_3
α	α	β	1	S_3	S_1	S_2
β	β	1	α	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_3	S_2	1	β	α
S_2	S_2	S_1	S_3	α	1	β
S_3	S_3	S_2	S_1	β	α	1

(Правило пользования этой таблицей легко усматривается на примере последовательного проведения операций S_1 , а затем S_2 : $S_2 S_1 = \beta$.)

Приведенный закон композиции ассоциативен, но не коммутативен, существует нейтральный элемент — тождественная операция 1. Каждая операция имеет обратную (в каждой строке и столбце таблицы имеется тождественная операция).

Таким образом, множество A операций с указанным законом композиции представляет собой группу, очевидно, не коммутативную.

5) Группы перестановок.

Взаимно однозначное отображение f произвольного множества E на себя называется перестановкой множества E . При

этом всякий элемент a множества E переходит в элемент $f(a)$, обратная перестановка f^{-1} переводит $f(a)$ в a . Перестановка $f(a) = a$ для любого a множества E называется тождественной перестановкой.

Если множество E состоит из элементов $a, b, c, \dots$, то перестановку f этого множества записывают следующим образом:

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{pmatrix}.$$

В множестве P перестановок множества E естественным образом определяется закон композиции: если f_1 и f_2 — перестановки E , то последовательное проведение $f_2 \circ f_1$ этих перестановок представляет собой некоторую перестановку множества E . Легко видеть, что композиция ассоциативна.

Если множество P содержит тождественную перестановку, обратную перестановку для каждой своей перестановки f и вместе с любыми двумя перестановками f_1, f_2 их композицию $f_2 \circ f_1$, то, очевидно, P представляет собой группу.

Все перестановки множества E образуют группу. Для конечного множества E из n элементов эта группа называется симметрической группой S_n .

Обратимся к примеру 4), в котором были рассмотрены операции совмещения равностороннего треугольника BCD с самим собой. Обозначим через E множество вершин этого треугольника: $E = (BCD)$.

Очевидно, группу операций, рассмотренную в примере 4), можно получить, обращаясь к следующей группе перестановок:

$$1 = \begin{pmatrix} B & C & D \\ B & C & D \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} B & C & D \\ C & D & B \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} B & C & D \\ D & B & C \end{pmatrix},$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} B & C & D \\ B & D & C \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} B & C & D \\ D & C & B \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} B & C & D \\ C & B & D \end{pmatrix}.$$

6) Рассмотрим группу Z_2 , состоящую из двух элементов 0 и 1, в которой умножение определено по правилу

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot 0 = 1, \quad 1 \cdot 1 = 0. \quad (9.1)$$

Единицей группы является элемент 0.

Эту группу называют группой вычетов по модулю 2.

7) Рассмотрим группу, состоящую из двух элементов: 1) тождественное преобразование евклидова пространства (обозначим этот элемент 0); 2) отражение евклидова пространства относительно начала координат (обозначим этот элемент 1).

Очевидно, умножение (т. е. последовательное проведение операций 1) и 2)) элементов 0 и 1 будет проводиться по правилу (9.1). Мы видим, что рассматриваемая группа отличается от группы Z_2 (пример 6) лишь природой элементов. Групповые свойства этих двух групп одинаковы.

Отметим следующие свойства групп (мы будем использовать мультипликативную форму записи композиции).

Теорема 9.1. Если $aa^{-1} = e$, то $a^{-1}a = e$.

Доказательство. Пусть x — обратный элемент для элемента a^{-1} :

$$a^{-1}x = e.$$

Тогда $a = ae = a(a^{-1}x) = (aa^{-1})x = ex$, т. е. $a = ex$. Следовательно, $a^{-1}a = a^{-1}(ex) = (a^{-1}e)x = a^{-1}x = e$, т. е. $a^{-1}a = e$. Теорема доказана.

Теорема 9.2. Для любого элемента a группы справедливо соотношение $ea = a$.

Доказательство. По теореме 9.1 $a^{-1}a = e$ и, кроме того, $aa^{-1} = e$. Поэтому $ea = (aa^{-1})a = a(a^{-1}a) = a$, т. е. $ea = a$. Теорема доказана.

Теорема 9.3. Если $ax = e$ и $ay = e$, то $x = y$.

Доказательство. Так как $ay = e$, то y — обратный элемент для a , и поэтому, согласно теореме 9.1, $ya = e$. Имеем далее $y = ye = y(ax) = (ya)x = ex = x$. Теорема доказана.

Из доказанных теорем вытекают следующие важные следствия:

Следствие 1. Обратным элементом для элемента a^{-1} служит элемент a . Или, иначе, элемент a^{-1} является как правым, так и левым обратным элементом для элемента a (т. е. $aa^{-1} = e$ и $a^{-1}a = e$).

Следствие 2. В любой группе уравнения $ax = b$ и $ya = b$ однозначно разрешимы. Решениями этих уравнений служат соответственно элементы $x = a^{-1}b$ и $y = ba^{-1}$.

Следствие 3. В группе имеется единственный нейтральный элемент (единица группы) (если $ae = a$ и $ae^* = a$, то $e = e^*$).

Замечание. Отметим, что обратным элементом $(ab)^{-1}$ для произведения ab служит элемент $b^{-1}a^{-1}$.

Действительно, используя ассоциативное свойство умножения, получим $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$.

3. Изоморфизм групп. Подгруппы. Примеры, рассмотренные в предыдущем пункте (см. примеры 4 и 5, примеры 6 и 7) показывают, что существуют группы, отличающиеся природой своих элементов, но обладающие одинаковыми групповыми свойствами. Такие группы естественно назвать **и з о м о р ф н ы м и**.

Сформулируем точное определение этого понятия.

Определение 1. Две группы G_1 и G_2 называются **и з о м о р ф н ы м и**, если существует взаимно однозначное отображение f группы G_1 на группу G_2 такое, что для любых элементов a и b из G_1 выполняется условие $f(ab) = f(a)f(b)$.

Заметим, что если e_1 — единица группы G_1 , а e_2 — единица группы G_2 , то $f(e_1) = e_2$. Действительно, $f(e_1) = f(e_1e_1) = f(e_1) \cdot f(e_1)$ и умножение на элемент, обратный к $f(e_1)$, показывает, что $e_2 = f(e_1)$.

Отметим также, что обратное отображение f^{-1} группы G_2 на группу G_1 для любых элементов x и y из G_2 удовлетворяет условию

$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) f^{-1}(y).$$

Кроме того, для любого a из G_1 из равенства $e_2 = f(e_1) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1})$ следует, что обратным к элементу $f(a)$ является элемент $f(a^{-1})$.

Таким образом, изоморфные группы, рассматриваемые абстрактно, без указания природы их элементов, с точки зрения групповых свойств неразличимы.

З а м е ч а н и е 1. Обычно соответствие между изоморфными группами G_1 и G_2 называется изоморфизмом или изоморфным отображением одной группы на другую (конечно, при этом обе группы равноправны).

З а м е ч а н и е 2. Изоморфное отображение группы G на себя называется автоморфизмом.

Аutomорфизмы группы определенным образом характеризуют ее симметрию.

Если отдельные автоморфизмы группы рассматривать как некоторые элементы, а последовательное проведение автоморфизмов — как произведение соответствующих элементов, то автоморфизмы сами образуют группу (единичным элементом будет тождественный автоморфизм).

Эта группа называется группой автоморфизмов данной группы.

Легко убедиться, что группа автоморфизмов группы Z_2 (см. пример 6 предыдущего пункта) изоморфна этой же группе.

Важную роль в теории групп играет понятие подгруппы.

Определение 2. Подмножество G_1 элементов группы G называется подгруппой этой группы, если выполнены условия: 1) если элементы a и b принадлежат G_1 , то и ab принадлежит G_1 , 2) если элемент a принадлежит G_1 , то и обратный элемент a^{-1} также принадлежит G_1 .

Подгруппа G_1 группы G , рассматриваемая как самостоятельное множество, в котором определена операция умножения по закону композиции из объемлющей группы G , представляет собой группу.

Проверка этого утверждения не представляет затруднений.

Простейшей подгруппой любой группы является ее единичный элемент. Другим примером может служить подгруппа G_1 всех четных чисел в группе G относительно сложения всех целых чисел.

4. Смежные классы. Нормальные делители. Пусть H_1 и H_2 — произвольные подмножества группы G .

Произведением подмножеств H_1 и H_2 назовем подмножество H_3 , состоящее из всех элементов вида h_1h_2 , где $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$.

Для произведения подмножеств используется обозначение

$$H_3 = H_1 H_2. \quad (9.2)$$

Рассмотрим случай, когда H_1 состоит из одного элемента h . Тогда, согласно (9.2), произведение H_1 и H_2 можно записать в виде hH_2 . Отметим, что если подмножества H_1 и H_2 являются подгруппами группы G , то их произведение $H_1 H_2$, вообще говоря, не является подгруппой.

Пусть H — подгруппа группы G , a — элемент группы G . Множество aH называется левым смежным классом, а множество Ha — правым смежным классом подгруппы H в G .

Конечно при выборе другого элемента вместо a правые и левые классы подгруппы H в G , вообще говоря, изменяются.

Отметим следующие свойства смежных классов (эти свойства формулируются лишь для левых смежных классов; для правых смежных классов они формулируются аналогично):

1°. Если $a \in H$, то $aH \equiv H$.

2°. Смежные классы aH и bH совпадают, если $a^{-1}b \in H$.

3°. Два смежных класса одной подгруппы H либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

4°. Если aH — смежный класс, то $a \in aH$.

Первое из отмеченных свойств очевидно. Убедимся в справедливости свойства 2°. Так как, согласно 1°, $a^{-1}bH \equiv H$, то, поскольку $aa^{-1} = e$, имеем $bH = (aa^{-1})bH = a(a^{-1}b)H = aH$. Тем самым свойство 2° установлено.

Перейдем к доказательству третьего свойства. Очевидно, достаточно доказать, что если смежные классы aH и bH имеют общий элемент, то они совпадают.

Пусть элементы $h_1 \in H$ и $h_2 \in H$ такие, что

$$ah_1 = bh_2 \quad (9.3)$$

(равенство (9.3) означает, что классы aH и bH имеют общий элемент). Поскольку H — подгруппа группы G , то элемент $h_1 h_2^{-1}$ принадлежит H . Отсюда и из (9.3) получаем

$$a^{-1}b = h_1 h_2^{-1} \in H.$$

Следовательно, согласно свойству 2°, $aH = bH$. Свойство 3° доказано.

Свойство 4° следует из того, что подгруппа H содержит единственный элемент e , и поэтому $ae = a \in aH$.

Пусть H — подгруппа G , для которой все левые смежные классы одновременно являются правыми смежными классами. В этом случае для любого элемента a должно иметь место соотношение

$$aH = Ha. \quad (9.4)$$

Действительно, согласно свойству 4°, элемент $a \in aH$. С другой стороны, класс aH является одновременно некоторым классом Hb , который, очевидно (в силу того, что $a \in Hb$), совпадает с множеством Ha .

Подгруппа H , для которой все левые смежные классы являются правыми смежными классами, называется *нормальным делителем группы G* .

Справедливо следующее утверждение:

Если H — нормальный делитель группы G , то произведение смежных классов представляет собой также смежный класс.

Действительно, пусть aH и bH — смежные классы. Тогда по определению произведения смежных классов как подмножеств группы G с учетом (9.4), получим

$$aHbH = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = (ab)H,$$

т. е. произведение смежных классов $aHbH$ есть смежный класс $(ab)H$.

5. Гомоморфизмы. Фактор-группы.

Пусть G — группа с элементами $a, b, c, \dots$ и $\bar{G}$ — некоторое множество, в котором определен закон композиции его элементов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$. Мы будем использовать мультипликативную форму записи композиции: $\bar{c} = \bar{a}\bar{b}$, а элемент $\bar{c}$ будем называть произведением элементов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Определение 1. *Образование f группы G на множество $\bar{G}$ *):*

$$f: G \rightarrow \bar{G} \quad (9.5)$$

называется гомоморфизмом, если для любых элементов $a \in G$ и $b \in G$ выполняется соотношение

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad (9.6)$$

где $f(a)$, $f(b)$ и $f(ab)$ — образы элементов a , b и ab при отображении f .

При этом $\bar{G}$ называется *гомоморфным образом G* .

В случае, если $\bar{G}$ является подмножеством G , то для гомоморфизма (9.5) употребляется наименование *эндоморфизм*.

З а м е ч а н и е. Если задано гомоморфное отображение (гомоморфизм) группы G на множество $\bar{G}$, то все элементы группы разбиваются на непересекающиеся классы: в один класс объединяются все те элементы G , которые отображаются в один и тот же элемент множества $\bar{G}$.

* Под отображением f группы G на множество $\bar{G}$ понимается такое соответствие между элементами множеств G и $\bar{G}$, при котором каждому элементу $a \in G$ ставится в соответствие лишь один элемент $\bar{a} \in \bar{G}$ и каждый элемент $\bar{a} \in \bar{G}$ является образом по крайней мере одного элемента из G . Символически отображение G на $\bar{G}$ записывается с помощью соотношения (9.5)

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 9.4. *Гомоморфный образ группы является группой.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, — элементы гомоморфного образа $\bar{G}$ группы G при гомоморфизме f . Это означает, что в группе G можно указать такие элементы a , b , c , что $\bar{a} = f(a)$, $\bar{b} = f(b)$, $\bar{c} = f(c)$,

Тогда в множестве $\bar{G}$ умножение элементов согласовано с правилом (9.6).

Проверим, что эта операция умножения удовлетворяет требованиям 1°, 2° и 3° определения 2 группы (см. п. 2 этого параграфа).

1°. *Ассоциативность умножения.* Составим два произведения $\bar{a}(\bar{b}\bar{c})$ и $(\bar{a}\bar{b})\bar{c}$. Имеем, согласно правилу (9.6),

$$\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = f(a)(f(b)f(c)) = f(a)f(bc) = f(abc),$$

$$(\bar{a}\bar{b})\bar{c} = (f(a)f(b))f(c) = f(ab)f(c) = f(abc).$$

Сопоставляя эти соотношения, получим $\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$. Следовательно, ассоциативность умножения элементов выполняется.

2°. *Существование единицы.* Обозначим символом $\bar{e}$ элемент $f(e)$, где e — единица группы G :

$$\bar{e} = f(e).$$

Для любого элемента $\bar{a}$ множества $\bar{G}$ имеем, согласно правилу (9.6), $\bar{a}\bar{e} = f(a)f(e) = f(ae) = f(a) = \bar{a}$.

Следовательно, элемент $\bar{e}$ действительно играет роль единицы.

3°. *Существование обратного элемента.* Обозначим символом $\bar{a}^{-1}$ элемент $f(a^{-1})$, где a^{-1} — обратный элемент для элемента a в группе G .

Имеем, согласно (9.6), $\bar{a}\bar{a}^{-1} = f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = \bar{e}$.

Следовательно, элемент $\bar{a}^{-1}$ играет роль обратного элемента для элемента $\bar{a}$.

Итак, для операции умножения элементов $\bar{G}$ выполнены требования 1°, 2°, 3° определения 2 группы. Поэтому $\bar{G}$ — группа. Теорема доказана.

Пусть H — нормальный делитель группы G . Определим следующее отображение f группы G на множество $\bar{G}$ смежных классов по нормальному делителю H : если a принадлежит G , то этому элементу поставим в соответствие тот класс смежности, которому принадлежит указанный элемент. Согласно свойству 3° смежных классов (см. предыдущий пункт) каждому элементу группы G при таком отображении отвечает только один класс, т. е. налицо действительно отображение f группы G на множество классов смежности по нормальному делителю H .

Докажем следующую теорему.

Теорема 9.5. Указанное выше отображение f группы G на смежные классы по нормальному делителю H , при определении умножения классов смежности как подмножеств группы G , представляет собой гомоморфизм.

Доказательство. В конце предыдущего пункта мы доказали утверждение о том, что если aH и bH — смежные классы, то произведение $aHbH$ этих классов как подмножеств G есть смежный класс $(ab)H$. Следовательно, с помощью рассматриваемого отображения f произведению элементов ab ставится в соответствие смежный класс $(ab)H$, равный произведению смежных классов aH и bH . Поэтому f — гомоморфизм. Теорема доказана.

Следствие. Множество смежных классов группы G по нормальному делителю H с операцией умножения этих классов как подмножеств G образует группу.

Эта группа называется фактор-группой группы G по нормальному делителю H и обозначается символом G/H .

Справедливость следствия вытекает из теоремы 9.4.

З а м е ч а н и е. Очевидно, отображение f группы G на множество смежных классов по нормальному делителю H представляет собой гомоморфизм этой группы на фактор-группу G/H .

Рассмотрим следующий п р и м е р.

Пусть R^n — n -мерное линейное координатное пространство, которое, как отмечалось в примере 3 п. 2 этого параграфа, является абелевой (т. е. коммутативной) группой относительно сложения элементов (напомним, что точками x этого пространства являются упорядоченные совокупности из n вещественных чисел $(x_1, \dots, x_n)$, причем сложение элементов $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ производится по правилу $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$).

По определению прямого произведения, R^n представляет собой прямое произведение одномерных пространств:

$$R^n = R_{(1)}^1 \times R_{(2)}^1 \times \dots \times R_{(n)}^1.$$

Так как, например, $R_{(n)}^1$ представляет собой абелеву подгруппу, то, очевидно, $R_{(n)}^1$ — нормальный делитель группы R^n . Смежным классом элемента a из R^n служит прямая, проходящая через точку a параллельно прямой $R_{(n)}^1$, а фактор-группа $R^n/R_{(n)}^1$ изоморфна $(n-1)$ -мерному подпространству R^{n-1} :

$$R^{n-1} = R_{(1)}^1 \times R_{(2)}^1 \times \dots \times R_{(n-1)}^1. \quad (9.7)$$

Отметим, что обозначение фактор-группы $R^n/R_{(n)}^1$ определенным образом объясняется с помощью соотношения

$$R^n/R_{(n)}^1 = R_{(1)}^1 \times \dots \times R_{(n)}^1/R_{(n)}^1 = R_{(1)}^1 \times \dots \times R_{(n-1)}^1, \quad (9.8)$$

которое следует из (9.7). Отметим, что в формуле (9.8) последний знак равенства нужно рассматривать как изоморфизм между соответствующими группами.

Мы доказали, что по нормальному делителю H определяется гомоморфизм группы G на фактор-группу G/H . Справедливо обратное утверждение: если задан гомоморфизм группы G на множество $\bar{G}$, то по этому гомоморфизму определяется такой нормальный делитель H , что группа $\bar{G}$ *) и фактор-группа G/H изоморфны.

Докажем две теоремы, относящиеся к этому утверждению.

Теорема 9.6. Пусть f — гомоморфизм группы G на $\bar{G}$, и пусть H — множество тех элементов группы G , которое при гомоморфизме f отображается в элемент $f(e)$, где e — единица группы G . Тогда H — нормальный делитель группы G .

Доказательство. Достаточно доказать, что H — подгруппа группы G и каждый левый смежный класс по этой подгруппе является одновременно и правым смежным классом.

Убедимся, во-первых, что H — подгруппа группы G . Для этого следует доказать, что если $a \in H$ и $b \in H$, то $ab \in H$, а также что если $a \in H$, то и $a^{-1} \in H$.

Пусть $a \in H$ и $b \in H$. Так как f — гомоморфизм, то $f(ab) = f(a)f(b) = f(e)f(e)$.

Но $f(e)$ играет роль единицы в группе $\bar{G}$ (см. теорему 9.4). Поэтому $f(e)f(e) = f(e)$, т. е. $f(ab) = f(e)$. Следовательно, $ab \in H$.

Далее пусть $a \in H$, т. е. $f(a) = f(e)$. Тогда, если a^{-1} — обратный элемент для a , то $aa^{-1} = e$, т. е. $aa^{-1} \in H$. Так как f — гомоморфизм, то $f(e) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) = f(e)f(a^{-1}) = f(a^{-1})$. Поэтому $f(a^{-1}) = f(e)$ и, следовательно, $a^{-1} \in H$.

Докажем теперь, что каждый левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Пусть a — произвольный элемент группы G . Докажем, что множество A элементов группы G , отображающихся при гомоморфизме f в элемент $f(a)$, есть одновременно левый и правый смежные классы aH и Ha . Этим и будет завершено доказательство теоремы.

Пусть $a' \in A$. Рассмотрим уравнение **)

$$ax = a'. \quad (9.9)$$

Так как f — гомоморфизм и $f(a') = f(a)$, то из этого уравнения получаем $f(ax) = f(a)f(x) = f(a') = f(a)$, т. е. $f(x) = f(e)$. Поэтому $x \in H$. Но тогда, согласно (9.9), $a' = ax$, т. е. $a' \in aH$.

*) Согласно теореме 9.4 гомоморфный образ группы представляет собой группу.

**) В силу следствия 2 из теоремы 9.3 это уравнение разрешимо. Решением будет элемент $x = a^{-1}a'$.

Обращаясь далее к уравнению $xa = a'$ и проводя аналогичные рассуждения, мы убедимся, что $x \in H$. Но тогда $a' = xa$, т. е. $a' \in Ha$. Таким образом, $A = aH = Ha$. Теорема доказана.

Теорема 9.7 (теорема о гомоморфизмах групп). Пусть f — гомоморфизм группы G на $\bar{G}$ и H — тот нормальный делитель группы G , элементам которого соответствуют при гомоморфизме f единица группы $\bar{G}$ (*). Тогда группа $\bar{G}$ и фактор-группа G/H изоморфны.

Доказательство. Установим взаимно однозначное соответствие между элементами группы $\bar{G}$ и смежными классами по нормальному делителю H : элементу $\bar{a}$ группы $\bar{G}$ поставим в соответствие тот смежный класс, который с помощью f отображается в $\bar{a}$. Очевидно, это соответствие взаимно однозначно, ибо, согласно свойству 3° смежных классов (см. п. 4 этого параграфа), эти классы не пересекаются. Если определить умножение этих классов как подмножеств группы G и воспользоваться утверждением, доказанным в конце предыдущего пункта, то легко видеть, что установленное только что взаимно однозначное соответствие есть изоморфизм. Но классы смежности и есть элементы фактор-группы. Теорема доказана.

§ 2. Группы преобразований

В этом параграфе изучаются группы невырожденных линейных преобразований линейного и, в частности, евклидова пространства.

1. Невырожденные линейные преобразования. В п. 1 § 1 гл. 5 было введено понятие линейного оператора. Напомним, что линейным оператором A называлось такое отображение линейного пространства V в линейное пространство W , при котором образ суммы элементов равен сумме их образов и образ произведения элемента на число равен произведению этого числа на образ элемента.

Мы будем рассматривать так называемые *невырожденные линейные операторы*, отображающие данное конечномерное линейное пространство V в это же пространство. При этом линейный оператор A называется *невырожденным*, если $\det A \neq 0$ (**).

Отметим следующее *важное свойство невырожденных операторов*: *каждый такой оператор отображает пространство V на себя взаимно однозначно.*

*) По теореме 9.4 $\bar{G}$ представляет собой группу.

**) Напомним, что $\det A$ был введен в п. 2 § 2 гл. 5 как определитель матрицы линейного оператора в данном базисе. Там же было доказано, что значение $\det A$ не зависит от выбора базиса.

Иными словами, если A — невырожденный оператор, то каждому элементу $x \in V$ соответствует только один элемент $y \in V$, который может быть найден по формуле

$$y = Ax, \quad (9.10)$$

и если y — любой фиксированный элемент пространства V , то существует только один элемент x такой, что $y = Ax$.

Для доказательства второй части сформулированного утверждения обратимся к матричной записи действия линейного оператора. Итак, если $A = (a_{ik}^1)$ — матрица оператора A в данном базисе и элементы x и y имеют соответственно координаты $x^1, \dots, x^n$ и $y^1, \dots, y^n$, то, согласно формуле (5.14) (см. п. 1 § 2 гл. 5), соотношение (9.10) перепишется в виде

$$y^j = \sum_{k=1}^n a_{ik}^1 x^k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.11)$$

и поэтому координаты x^k можно рассматривать как неизвестные при заданных координатах y^j . Так как оператор A невырожденный, т. е. $\det A \neq 0$, система уравнений (9.11) имеет единственное решение для неизвестных x^k . Это и означает, что для каждого фиксированного элемента $y \in V$ существует только один элемент x такой, что $y = Ax$.

Итак, результат действия невырожденного линейного оператора можно рассматривать как отображение линейного пространства V на себя.

Поэтому при заданном невырожденном операторе мы можем говорить о невырожденном линейном преобразовании пространства V , или, короче, о линейном преобразовании пространства V .

2. Группа линейных преобразований. Пусть V — n -мерное линейное пространство с элементами $x, y, z, \dots$ и $GL(n)$ — множество всех невырожденных линейных преобразований этого пространства.

Определим в $GL(n)$ закон композиции, который в дальнейшем будем называть умножением. Мы определим умножение линейных преобразований из $GL(n)$ так же, как было определено в п. 2 § 1 гл. 5 умножение линейных операторов.

Именно, произведением AB линейных преобразований A и B из множества $GL(n)$ мы назовем линейный оператор, действующий по правилу

$$(AB)x = A(Bx). \quad (9.12)$$

Отметим, что, вообще говоря, $AB \neq BA$.

Для того чтобы указанное произведение действительно было законом композиции (см. п. 1 § 1 этой главы), достаточно доказать, что преобразование AB является невырожденным, а это следует из того, что матрица линейного преобразования AB равна

произведению матриц преобразований A и B , а следовательно, $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$, ибо $\det A \neq 0$ и $\det B \neq 0$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 9.8. Множество $GL(n)$ невырожденных линейных преобразований линейного n -мерного пространства V с введенной выше операцией умножения представляет собой группу (называемую группой линейных преобразований линейного пространства V).

Доказательство. Проверим требования 1°, 2°, 3° определения 2 группы (см. п. 2 § 1 этой главы).

1°. Ассоциативность умножения, т. е. равенство

$$A(BC) = (AB)C$$

справедливо, поскольку, согласно (9.12), произведение линейных преобразований заключается в их последовательном действии, и поэтому линейные преобразования $A(BC)$ и $(AB)C$ совпадают с линейным преобразованием ABC и, следовательно, тождественны.

2°. *Существование единицы.* Обозначим символом I тождественное преобразование. Это преобразование невырожденное, так как $\det I = 1$. Очевидно, для любого преобразования A из $GL(n)$ справедливо равенство $AI = IA = A$.

Следовательно, линейное преобразование I играет роль единицы.

3°. *Существование обратного элемента.* Пусть A — любое фиксированное невырожденное линейное преобразование. Обратимся к координатной записи (9.11) этого преобразования. Так как $\det A \neq 0$, то из системы (9.11) можно по заданному y (по заданным координатам y^i) единственным образом определить x (координаты x^k). Следовательно, определено обратное преобразование A^{-1} , которое, очевидно, будет линейным (это следует из (9.11)); кроме того, по самому определению $A^{-1}A = I$. Поэтому линейный оператор A^{-1} играет роль обратного элемента для A .

Итак, для операции умножения элементов из $GL(n)$ выполнены требования 1°, 2°, 3° определения 2 группы. Поэтому $GL(n)$ — группа. Теорема доказана.

3. *Сходимость элементов в группе $GL(n)$.* Подгруппы группы $GL(n)$. В этом и дальнейших пунктах этого параграфа мы будем рассматривать группу $GL(n)$ в n -мерном евклидовом пространстве V .

Введем понятие сходимости в группе $GL(n)$.

Определение. Последовательность элементов $\{A_n\}$ из $GL(n)$ называется сходящейся к элементу $A \in GL(n)$, если для любого x из V последовательность $\{A_n x\}$ сходится к Ax^* .

*) Последовательность $\{A_n x\}$ представляет собой последовательность точек пространства V . Поэтому сходимость последовательности $\{A_n x\}$ понимается в обычном смысле.

Понятие сходимости в $GL(n)$ мы используем ниже при введении так называемых *компактных* групп.

Рассматривают следующие типы подгрупп группы $GL(n)$.

1°. *Конечные подгруппы*, т. е. подгруппы, содержащие конечное число элементов.

Примером конечной подгруппы может служить подгруппа отражений относительно начала координат, содержащая два элемента — тождественное преобразование и отражение относительно начала (см. пример 7 п. 2 § 1 этой главы).

2°. *Дискретные подгруппы*, т. е. подгруппы, содержащие счетное число элементов.

Примером такой подгруппы может служить подгруппа поворотов плоскости около начала координат на углы $k\varphi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где φ — угол, несоизмеримый с π .

3°. *Непрерывные подгруппы*, т. е. подгруппы, содержащие более чем счетное число элементов.

Подгруппа всех поворотов трехмерного пространства вокруг фиксированной оси представляет собой пример непрерывной подгруппы.

Среди непрерывных подгрупп группы $GL(n)$ выделяются так называемые *компактные подгруппы*, т. е. подгруппы, у которых из любого бесконечного множества ее элементов можно выделить последовательность, сходящуюся к элементу этой подгруппы.

4. *Группа ортогональных преобразований*. В группе $GL(n)$ выделяется специальная подгруппа так называемых *ортогональных преобразований*. Эти преобразования, рассматриваемые как отдельное множество, образуют группу, называемую ортогональной группой.

Введем понятие ортогональных преобразований.

Напомним, что мы рассматриваем невырожденные линейные преобразования. Понятие такого преобразования равнозначно понятию невырожденного оператора, т. е. оператора A , для которого $\det A \neq 0$.

Напомним теперь введенное в § 9 гл. 5 понятие ортогонального оператора, действующего в вещественном евклидовом пространстве V .

Именно, линейный оператор P мы называли ортогональным, если для любых x и y из V справедливо соотношение

$$(Px, Py) = (x, y). \quad (9.13)$$

Результат действия ортогонального оператора P будем называть ортогональным преобразованием P .

В теореме 5.36 было доказано, что оператор P является ортогональным тогда и только тогда, когда существует обратный оператор P^{-1} и выполняется равенство

$$P^{-1} = P^*. \quad (9.14)$$

В этом равенстве P^* — оператор, сопряженный к P .

Таким образом, если преобразование P является ортогональным, то у этого преобразования есть обратное P^{-1} . Отсюда следует, что *каждое ортогональное преобразование является невырожденным*. Действительно, поскольку $PP^{-1} = I$, где I — тождественное преобразование, то

$$\det P \cdot \det P^{-1} = \det I = 1,$$

т. е. $\det P \neq 0$. Следовательно, ортогональное преобразование P невырожденное.

Отметим следующее важное свойство ортогональных преобразований.

Теорема 9.9. *Множество всех ортогональных преобразований евклидова пространства V с обычной операцией умножения линейных преобразований, образует группу (называемую ортогональной группой и обозначаемую символом $O(n)$).*

Доказательство. Достаточно доказать, что произведение ортогональных преобразований представляет собой ортогональное преобразование. Существование обратного преобразования (обратного элемента) для данного ортогонального преобразования доказано в теореме 5.36 (см. также только что сделанное замечание).

Итак, пусть P_1 и P_2 — ортогональные преобразования. Рассмотрим произведение $P_1 P_2$. Согласно теореме 5.36 нам достаточно доказать соотношение

$$(P_1 P_2)(P_1 P_2)^* = I. \quad (9.15)$$

В п. 1 § 5 гл. 5 (см. свойство 5° сопряженных операторов) мы установили, что $(P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^*$. Используя это соотношение и ортогональность преобразований P_1 и P_2 , получим

$$(P_1 P_2)(P_1 P_2)^* = (P_1 P_2)(P_2^* P_1^*) = P_1(P_2 P_2^*)P_1^* = P_1 I P_1^* = P_1 P_1^* = I.$$

Таким образом, соотношение (9.15) доказано. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, ортогональная группа является подгруппой группы $GL(n)$.

З а м е ч а н и е 2. Значение определителя $\det P$ ортогонального преобразования P удовлетворяет соотношению

$$(\det P)^2 = 1. \quad (9.16)$$

Таким образом,

$$\det P = \pm 1. \quad (9.17)$$

Для доказательства (9.16) заметим, что для матрицы P преобразования P справедливо соотношение

$$PP' = I, \quad (9.18)$$

где P' — транспонированная матрица, полученная из P перестановкой строк и столбцов, а I — единичная матрица.

Так как $\det P = \det P'$ (при перестановке строк и столбцов определитель не меняется) и $\det I = 1$, то из соотношения (9.18) следует, что $(\det P)^2 = 1$, т. е. $\det P = \pm 1$. Поскольку, по определению, $\det P$ вводится как определитель матрицы P в любом базисе, то соотношения (9.16) и (9.17) доказаны.

Соотношение (9.17) для определителя ортогонального преобразования служит основой для разделения всех таких преобразований на два класса.

В первый класс мы отнесем все ортогональные преобразования, для которых $\det P = +1$. Эти преобразования в дальнейшем будем называть **собственными**.

Во второй класс отнесем все ортогональные преобразования, для которых $\det P = -1$. Такие преобразования будем называть **несобственными**.

Множество всех собственных ортогональных преобразований образует группу, называемую **собственной ортогональной группой**. Эта группа обозначается символом $SO(n)$.

Можно доказать, что каждая группа $SO(n)$ компактна.

5. Некоторые дискретные и конечные подгруппы ортогональной группы. В этом пункте мы не будем стремиться к полноте изложения. На отдельных примерах мы постараемся выяснить характеристики некоторых подгрупп ортогональной группы.

Отметим, что конечные и дискретные подгруппы группы $O(3)$ имеют важное значение в кристаллографии.

1°. Рассмотрим двумерную ортогональную группу $O(2)$. В этой группе можно выделить дискретную подгруппу поворотов на угол $k\varphi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Обозначим буквой a элемент этой подгруппы, отвечающий значению $k = +1$. Тогда, очевидно, элемент a_k , отвечающий повороту на угол $k\varphi$ при $k > 0$ равен $a_k = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{k \text{ раз}}$. Это соотношение можно сокращенно записать в следующей форме:

$$a_k = a^k, \quad k = 1, 2,$$

Если обозначить символом a^{-1} элемент, обратный элементу a (a^{-1} — элемент, отвечающий повороту на угол $-\varphi$) и единицу рассматриваемой подгруппы обозначить a^0 , то, очевидно, любой элемент a_k при отрицательном, положительном и нулевом значении k можно записать в виде

$$a_k = a^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.19)$$

Группы, элементы a_k которых могут быть представлены в виде (9.19), называются **циклическими**.

Очевидно, **циклические группы являются дискретными**.

Отметим два типа циклических подгрупп поворотов:

1) Если $\varphi \neq 2\pi p/q$, где p и q — целые числа (т. е. угол несоизмерим с π), то все элементы a_k различны.

2) Если $\varphi = 2\pi p/q$, где p и q — взаимно простые числа, то справедливо соотношение $a_{k+q} = a_k$, то есть $a^q = a^0$.

Группы, для которых выполняется последнее соотношение, называются **циклическими группами** порядка q .

2°. Обратимся теперь к так называемым подгруппам **зеркальной симметрии**.

Каждая подгруппа зеркальной симметрии состоит из двух элементов: единица (тождественное преобразование) и отражение либо относительно какой-либо плоскости, либо относительно начала координат.

Убедиться в том, что тождественное преобразование и отражение образуют группу, весьма просто — достаточно заметить, что два последовательных отражения дают тождественное преобразование (см. пример 7 п. 2 § 1 этой главы).

Рассмотрим, например, подгруппу $\{I, P\}$ группы $O(3)$, состоящую из единицы I и отражения P трехмерного пространства относительно начала координат. В ортонормированном базисе

матрица P этого преобразования имеет вид $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Так как определитель $\det P = -1$, то подгруппа $\{I, P\}$ является несобственной. В примере 7 п. 2 § 1 этой главы отмечалось, что подгруппа $\{I, P\}$ изоморфна группе Z_2 вычетов по модулю 2.

Докажем следующее утверждение:

Рассматриваемая подгруппа $\{I, P\}$ представляет собой нормальный делитель группы $O(3)$.

Нам требуется доказать, что для любого элемента a из $O(3)$ справедливы соотношения

$$aI = Ia, \quad aP = Pa \quad (9.20)$$

(эти соотношения показывают, что левый и правый смежные классы подгруппы $\{I, P\}$ совпадают, что является признаком нормального делителя).

Первое из соотношений (9.20) очевидно.

Для доказательства второго соотношения воспользуемся следующими очевидными свойствами отражения P :

$$PP = I \quad PaP = a, \quad a \in O(3).$$

Умножая соотношение PaP слева на P и пользуясь равенством $PP = I$, получим второе соотношение (9.20).

Докажем теперь следующее утверждение

Подгруппа $SO(3)$ собственных ортогональных преобразований группы $O(3)$ изоморфна фактор-группе группы $O(3)$ по нормальному делителю $\{I, P\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Смежный класс элемента $a \in SO(3)$ по подгруппе $\{I, P\}$ имеет вид $\{a, Pa\}$, причем Pa — несобственное преобразование (произведение собственного преобразования a и несобственного преобразования P дает несобственное преобразование).

Если a' — несобственное преобразование, то смежный класс $\{a', Pa'\}$ приводится к виду $\{a, Pa\}$, где $a = Pa'$ — собственное преобразование и $Pa = P(Pa') = (PP)a' = a'$.

Таким образом, фактор-группа $O(3)/\{I, P\}$ состоит из смежных классов вида $\{a, Pa\}$, где a — собственное преобразование. Очевидно, соответствие $a \leftrightarrow \{a, Pa\}$ есть изоморфизм между группами $SO(3)$ и $O(3)/\{I, P\}$. Утверждение доказано.

6. Группа Лоренца. В п. 1 § 4 гл. 8 мы ввели понятие псевдоевклидова пространства $E_{(p, q)}^n$, т. е. линейного пространства, в котором задано скалярное произведение (x, y) , равное невырожденной симметричной билинейной форме $A(x, y)$, полярной знакопеременной квадратичной форме $A(x, x)$:

$$(x, y) = A(x, y). \quad (9.21)$$

В п. 2 § 4 гл. 8 было отмечено, что в так называемой галилеевой системе координат квадрат интервала

$$s^2(x) = (x, x) \quad (9.22)$$

(так обычно называется квадрат длины вектора x с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$) имеет вид

$$s^2(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^n x_i^2. \quad (9.23)$$

Введем понятие преобразования Лоренца псевдоевклидова пространства $E_{(p, q)}^n$.

Определение. Линейное преобразование P псевдоевклидова пространства $E_{(p, q)}^n$ называется преобразованием Лоренца, если для любых x и y из $E_{(p, q)}^n$ справедливо соотношение

$$(Px, Py) = (x, y), \quad (9.24)$$

где (x, y) — скалярное произведение, определенное соотношением (9.21).

Равенство (9.24) называется условием лоренцовости преобразования.

Отметим, что при преобразовании Лоренца сохраняется квадрат интервала $s^2(x)$, определенный соотношением (9.22) (или 9.23)).

Так же как в п. 4 этого параграфа, можно доказать, что определитель $\det P$ преобразования Лоренца отличен от нуля, и поэтому для каждого преобразования Лоренца P существует обратное преобразование P^{-1} .

Кроме того, по самому смыслу определения преобразования Лоренца, произведение таких преобразований дает в результате преобразование Лоренца. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Множество всех преобразований Лоренца псевдоевклидова пространства $E_{(p,q)}^n$ с обычной операцией умножения линейных преобразований (линейных операторов) образует группу, называемую общей группой Лоренца псевдоевклидова пространства $E_{(p,q)}^n$ и обозначаемую символом $L(n; p, q)$.

Мы выделим специальный класс псевдоевклидовых пространств $E_{(1,n-1)}^n$ (сюда включается интересное с физической точки зрения пространство $E_{(1,3)}^4$).

Группа Лоренца для пространств $E_{(1,n-1)}^n$ обозначается через $L(n)$.

В п. 1 § 4 гл. 8 (формула (8.69)) было введено понятие длины $\sigma(x)$ вектора x , которая вычисляется по формуле

$$\sigma(x) = (\operatorname{sgn} s^2(x)) \sqrt{|s^2(x)|}.$$

С помощью этой формулы все ненулевые векторы псевдоевклидова пространства разделяются на временноподобные ($\sigma(x) > 0$), пространственноподобные ($\sigma(x) < 0$) и изотропные ($\sigma(x) = 0$). Было доказано, что множество концов временноподобных (пространственноподобных, изотропных) векторов, начала которых совпадают с произвольной фиксированной точкой, образует конус T (конус пространственноподобных векторов обозначается буквой S). Конус T по соглашению *) разделяется на две связанные компоненты T^+ и T^- (конус будущего и конус прошлого) так, что каждая из этих компонент вместе с вектором x содержит любой вектор λx , где $\lambda > 0$.

Описанное разделение векторов в псевдоевклидовом пространстве дает возможность выделить из группы Лоренца $L(n)$ некоторые подгруппы.

Именно, подгруппа группы $L(n)$, преобразования которой переводят любой временноподобный вектор снова во временноподобный вектор, называется *полной группой Лоренца*. Для нее используется обозначение $L_{\uparrow}(n)$.

*) В п. 2 § 4 гл. 8 для пространства Минковского $E_{(1,3)}^4$ указано, как разделяется конус T на связанные компоненты T^+ и T^- и дается физическая интерпретация этих компонент.

Выделяется еще одна подгруппа группы $L(n)$. В эту подгруппу входят преобразования, определитель матрицы которых положителен. Эта подгруппа обозначается $L_+(n)$ и называется собственной группой Лоренца.

Собственные преобразования Лоренца, которые принадлежат подгруппе $L_+(n)$, также образуют подгруппу. Ее часто называют группой Лоренца и обозначают символом $L_\uparrow(n)$.

В заключение этого пункта мы отметим, что группы Лоренца, в отличие от ортогональных групп, некомпактны *).

Для примера докажем некомпактность группы $L_\uparrow(2)$.

В п. 3 § 4 гл. 8 мы полностью описали эту группу. Напомним, что если в $E^2_{(1,1)}$ введена система координат (x, y) так, что квадрат интервала задается формулой

$$s^2 = x^2 - y^2, \quad (9.25)$$

то преобразования Лоренца из группы $L_\uparrow(2)$ пространства $E^2_{(1,1)}$ задаются формулами

$$x' = \frac{x - \beta y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = \frac{y - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.26)$$

Рассмотрим в плоскости (x, y) вектор x с координатами $(0, 1)$. По формуле (9.26) этот вектор перейдет в вектор x_β с координатами

$$\left(\frac{-\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right). \quad (9.27)$$

Обратимся теперь к последовательности преобразований Лоренца (9.26), определяемой значениями β_n из соотношения

$$1 - \beta_n^2 = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.28)$$

Согласно (9.27) и (9.28) вектор x перейдет при действии указанной последовательности преобразований Лоренца в следующую последовательность векторов $\{x_n\}$ с координатами

$$(-\sqrt{n-1}, \sqrt{n}). \quad (9.29)$$

*) В п. 3 этого параграфа было введено понятие сходимости элементов в группу $GL(n)$ в n -мерном евклидовом пространстве и связанное с понятием сходимости понятие компактной группы.

Эти понятия легко переносятся на случай группы в произвольном конечно-мерном линейном пространстве V . Сначала вводится понятие сходимости точек в V (например, можно выбрать в V систему координат и рассматривать сходимость последовательности векторов $\{x_m\}$ как сходимость последовательностей координат этих векторов). После этого в полной аналогии с определением сходимости в случае группы $GL(n)$ в евклидовом пространстве вводится понятие сходимости в группе, заданной в линейном пространстве, и определяется понятие компактной группы в таком пространстве.

Таким образом, из бесконечной последовательности преобразований Лоренца в группе $L_{\uparrow}(2)$, определенной соотношениями (9.26), для значений β из равенств (9.28) нельзя выделить сходящуюся последовательность (напомним, что последовательность элементов A_n группы называется сходящейся к элементу A , если для любого x последовательность $\{A_n x\}$ сходится к Ax), ибо последовательность (9.29) неограниченная.

Геометрическая иллюстрация некомпактности группы $L_{\uparrow}(2)$ заключается в следующем.

Согласно (9.25) окружность радиуса единица в псевдоевклидовой плоскости будет гиперболой $x^2 - y^2 = 1$, являющейся некомпактным множеством. При действии рассмотренной выше последовательности преобразований из группы $L_{\uparrow}(2)$ заданная точка на этой окружности преобразуется в бесконечно большую последовательность точек на указанной выше гиперболе, а из бесконечно большой последовательности точек нельзя выделить сходящуюся последовательность.

7. Унитарные группы. В этом пункте мы обратимся к комплексному линейному пространству. В полной аналогии с п. 2 этого параграфа можно рассматривать группы линейных преобразований такого пространства. Так как комплексное число определяется двумя вещественными числами (действительной и мнимой частью), то полная линейная группа $GL(n)$ преобразований n -мерного комплексного линейного пространства изоморфна полной линейной группе преобразований вещественного $2n$ -мерного пространства $GL(2n)$ (вместо этого символа часто пишут $GL(2n, R)$, подчеркивая тем самым, что речь идет о группе преобразований вещественного пространства).

В полной линейной группе преобразований комплексного евклидова пространства по аналогии с вещественным евклидовым пространством рассматриваются так называемые унитарные группы $U(n)$, являющиеся аналогом ортогональных групп (напомним, что в § 7 гл. 5 унитарные преобразования (унитарные операторы) определялись как линейные преобразования, сохраняющие скалярное произведение; таким же образом в вещественном случае определялись и ортогональные преобразования).

Как и в вещественном случае, в группе $U(n)$ унитарных преобразований выделяется подгруппа $SU(n)$, для которой определители унитарных преобразований равны единице.

§ 3. Представления групп

В предыдущем параграфе мы рассматривали группы линейных преобразований линейного пространства. Таким образом, линейные преобразования исследовались с точки зрения их групповых

свойств. При этом не игнорируются геометрические и другие свойства линейных преобразований.

В этом параграфе нас будет интересовать в определенном смысле обратный вопрос — в какой мере свойства абстрактно заданной группы могут быть охарактеризованы посредством групп линейных преобразований.

Один из способов решения этого вопроса заключается в гомоморфном (и, в частности, изоморфном) отображении абстрактной группы на подгруппу (или на всю группу) линейных преобразований.

Таким образом, возникает понятие представления данной группы с помощью подгруппы группы линейных преобразований *).

Изучение различных представлений данной группы позволяет выявить важные свойства группы, нужные для различных приложений.

Во многих разделах физики (кристаллография, теория относительности, квантовая механика и т. д.) требуется построение представлений различных групп (конечных и дискретных подгрупп группы $GL(3)$, групп $O(3)$, $L(3)$, $U(3)$, $SU(3)$ и т. д.). Эти построения выходят далеко за рамки начальных понятий теории групп и не могут рассматриваться в данном руководстве.

Мы ограничимся некоторыми понятиями, используемыми в теории представлений и примерами.

1. Линейные представления групп. Терминология.

Определение. *Линейным представлением группы G в конечномерном евклидовом пространстве E^n называется такое отображение f , посредством которого каждому элементу a этой группы ставится в соответствие линейное преобразование T_a пространства E^n так, что для любых a_1 и a_2 из G выполняется соотношение $T_{(a_1 a_2)} = T_{a_1} T_{a_2}$.*

Таким образом, линейное представление группы G в конечномерном евклидовом пространстве E^n есть гомоморфизм этой группы на некоторое подмножество линейных преобразований этого пространства.

Используется следующая терминология: пространство E^n называется пространством представления, размерность n этого пространства называется размерностью представления, базис в пространстве E^n называется базисом представления.

Заметим, что гомоморфный образ $f(G)$ группы G также называется представлением этой группы в пространстве представлений.

В дальнейшем для краткости n -мерные линейные представления группы мы будем называть просто представлениями этой группы.

*) Конечно, можно рассматривать и более общий вопрос о представлении данной группы путем отображения ее на какую-либо группу преобразований.

Для обозначения представления группы G используется символ $D(G)$; различные представления данной группы отмечаются индексом (например, $D^{(\mu)}(G)$). Символом $D^{(\mu)}(g)$ будем обозначать линейное преобразование (линейный оператор), отвечающее элементу $g \in G$ в представлении $D^{(\mu)}(G)$.

Тривиальным представлением группы G называется гомоморфное отображение G в единичный элемент группы $GL(n)$.

Если отображение f группы G на подгруппу $GL(n)$ является изоморфизмом, то представление называется точным.

Очевидно, не у всякой группы есть точное n -мерное представление для заданного n . Например, у группы $O(10)$, конечно, не может быть точного одномерного представления (это следует, в частности, из того, что группа $O(1)$ абелева, а группа $O(10)$ не абелева).

Отметим, что при гомоморфном отображении f группы G в $GL(n)$ получающееся представление группы изоморфно факторгруппе $G/\text{kern } f$, где $\text{kern } f$ — так называемое ядро гомоморфизма f , т. е. то множество элементов G , которое при гомоморфизме f отображается в единицу группы $GL(n)$.

2. Матрицы линейных представлений. Эквивалентные представления. Рассмотрим представление $D^{(\mu)}(G)$ группы G . В этом представлении каждому элементу g из G отвечает линейное преобразование $D^{(\mu)}(g)$. Матрицу этого линейного преобразования в базисе представления $D^{(\mu)}(G)$ мы будем обозначать $D^{(\mu)}_i(g)$ или $D^{(\mu)}_{ij}(g)$.

В зависимости от выбора базиса в пространстве представлений будет меняться и матрица $D^{(\mu)}_{ij}(g)$, отвечающая элементу g . Естественно поэтому возникает вопрос об эквивалентных представлениях группы в одном и том же пространстве.

Сформулируем определение эквивалентности представлений:

Определение. Представления $D^{(\mu_1)}(G)$ и $D^{(\mu_2)}(G)$ группы G в одном и том же пространстве E^n называются эквивалентными, если существует такое невырожденное линейное преобразование C пространства E^n , что для каждого элемента $g \in G$ справедливо соотношение $D^{(\mu_1)}(g) = C^{-1}D^{(\mu_2)}(g)C$.

Понятие эквивалентности играет важную роль в теории представлений, главным образом в перечислении и классификации представлений.

Выбор базиса в пространстве представлений важен еще и потому, что в каком-либо базисе матрицы, отвечающие элементам группы, могут иметь стандартный, достаточно простой вид, который позволяет сделать важные заключения об исследуемом представлении. В следующем пункте мы дадим некоторую классификацию представлений, опираясь на специальный вид матриц.

3. Приводимые и неприводимые представления. В этом пункте мы обсудим вопрос о том, при каких условиях данное представление $D(G)$, заданное в пространстве E^n , индуцирует в подпространстве E' этого пространства представление $\tilde{D}(G)$.

Этот вопрос тесно связан с вопросом об описании данного представления с помощью более простых представлений, которые имеют меньшую размерность, чем заданное.

С решением поставленного вопроса тесно связано понятие инвариантного подпространства линейного преобразования (линейного оператора).

Напомним, что подпространство E' называется инвариантным подпространством линейного оператора A , если для каждого элемента x из E' элемент Ax принадлежит E' (см § 3 гл. 5). Иными словами, подпространство E' инвариантно, если действие оператора A на элементы этого подпространства не выводит их из этого подпространства. Отметим, что само пространство E^n и нулевой элемент пространства являются инвариантными подпространствами любого линейного оператора.

Можно ввести понятие инвариантного подпространства для представления $D(G)$. Именно, *подпространство E' называется инвариантным для представления $D(G)$, если оно инвариантно для всякого оператора из $D(G)$.*

Очевидно, что на инвариантном подпространстве представления $D(G)$ индуцируется некоторое представление $\tilde{D}(G)$. Следует отметить, что представление $\tilde{D}(G)$ не сводится к представлению $D(G)$, если инвариантное подпространство E' не совпадает с E^n .

Поясним теперь понятие *приводимого* представления.

Пусть, например, все матрицы некоторого трехмерного представления $D(G)$ имеют вид

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline 0 & 0 & a_{33} \end{array} \right), \quad (9.30)$$

где A_1 , A_2 , A_3 и O соответственно обозначают матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}$, $(0, 0)$. Легко проверить, что произведение матриц вида (9.30) подчиняется закону

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A'_1 & A'_2 \\ \hline 0 & A'_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A'_1 A_1 & A'_2 A_1 + A'_3 A_2 \\ \hline 0 & A'_3 A_3 \end{array} \right),$$

т. е. произведение матриц вида (9.30) есть матрица вида (9.30). Более того, при умножении матриц этого вида изолированно перемножаются матрицы A'_1 и A'_2 и матрицы A'_3 и A'_3 .

Таким образом, мы видим, что матрица $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ образует двумерное представление рассматриваемой группы, а матрица $A_3 = (a_{33})$ образует одномерное представление этой же группы.

В таких случаях говорят, что представление $D(G)$ **п р и в о д и м о**.

Если все матрицы (речь идет о квадратных матрицах порядка n) операторов представления имеют вид

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array} \right), \quad (9.31)$$

где A_1 и A_2 — квадратные матрицы, вообще говоря, разных порядков, то ясно, что матрицы A_1 и A_2 образуют представления, сумма размерностей которых равна n .

В этом случае представление называется **в п о л н е п р и в о д и м ы м**. Отметим, что операторы, матрицы которых имеют вид (9.31), фактически редуцируются к двум операторам, действующим независимо в двух инвариантных подпространствах.

Заметим также, что представление, индуцируемое на инвариантном подпространстве данным представлением $D(G)$, называется **ч а с т ь ю** представления $D(G)$.

В заключение этого пункта сформулируем понятие **н е п р и в о д и м о г о** представления.

*Представление $D(G)$ группы G называется **н е п р и в о д и м ы м**, если у этого представления существуют лишь два инвариантных подпространства: E^n и O .*

В противном случае представление называется **п р и в о д и м ы м**.

Роль неприводимых представлений заключается в том, что любое представление может быть выражено через неприводимые.

4. Характеры. В теории представлений групп и в особенности в теории представлений конечных групп полезную роль играют инварианты линейных преобразований, образующих представление. Важность инвариантов ясна еще и потому, что они не зависят от выбора базиса представления и поэтому в определенном смысле характеризуют представление.

Пусть $D(G)$ — n -мерное представление группы G и $D_i^j(g)$ — матрица оператора, отвечающего элементу g из G .

Х а р а к т е р о м элемента $g \in G$ в представлении $D(G)$ называется число

$$\chi(g) = D_i^i(g) = D_1^1(g) + D_2^2(g) + \dots + D_n^n(g).$$

Таким образом, *характер элемента g есть след матрицы оператора $D(g)$.*

Так как след матрицы линейного оператора представляет собой инвариант (см. п. 3 § 2 гл. 5), то *характер любого элемента*

не зависит от базиса представления и поэтому является инвариантом.

Итак, каждому элементу $g \in G$ представления $D(G)$ отвечает число — характер этого элемента.

Поскольку у различных элементов могут быть одинаковые характеры, то следует выяснить вопрос о том, каким элементам группы отвечают одинаковые характеры. Для решения этого вопроса введем понятие сопряженных элементов и классов сопряженных элементов в данной группе G .

Элемент $b \in G$ называется сопряженным элементу $a \in G$, если существует такой элемент $u \in G$, что

$$b = uau^{-1}. \quad (9.32)$$

Отметим следующие свойства сопряженных элементов:

1) Каждый элемент a сопряжен самому себе. Действительно, если e — единица группы, то, очевидно, справедливо соотношение $ea e^{-1} = a$, которое и означает, что a — элемент, сопряженный a .

2) Если элемент b сопряжен элементу a , то элемент a сопряжен элементу b . Это свойство сразу же вытекает из (9.32). Действительно, умножая обе части (9.32) слева на u^{-1} и справа на u , получим $u^{-1}bu = a$. Замечая, что обратным элементом для элемента u^{-1} является элемент u , мы убедимся в справедливости сформулированного свойства.

3) Если b — сопряженный элемент для a и c — сопряженный элемент для b , то c — сопряженный элемент для a .

Действительно, так как $c = vbu^{-1}$ и $b = uau^{-1}$, то, очевидно,

$$c = vuau^{-1}v^{-1}. \quad (9.33)$$

Так как обратным элементом для элемента vu является элемент $u^{-1}v^{-1}$, то из (9.33) следует, что элемент c сопряжен элементу a .

Объединим в один класс все те элементы группы, которые сопряжены данному элементу a . Таким образом, согласно свойству 3), каждый элемент класса сопряжен любому элементу этого класса. Очевидно, два таких класса либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

Вернемся теперь к представлениям групп.

Пусть a и b — сопряженные элементы, т. е. справедливо соотношение (9.32):

$$b = uau^{-1}. \quad (9.32)$$

Обратимся к операторам $D(a)$, $D(b)$, $D(u)$ и $D(u^{-1})$. Согласно определению представления группы оператор $D(u^{-1})$ является обратным для оператора $D(u)$, т. е. $D(u^{-1}) = (D(u))^{-1}$.

Обращаясь опять к определению представления, получим, согласно (9.32), соотношение $D(b) = D(u) D(a) (D(u))^{-1}$.

Перейдем теперь к матрицам операторов, фигурирующих в последнем соотношении. Мы видим, что матрицу оператора $D(b)$

можно рассматривать как матрицу оператора $D(a)$ при переходе к новому базису с матрицей перехода $D(u)$ (см. п. 2 § 2 гл. 5). Поскольку при таких преобразованиях след матрицы инвариантен и по определению равен характеру элемента, мы можем заключить, что $\chi(a) = \chi(b)$.

Итак, характеры всех элементов, принадлежащих одному классу сопряженных элементов, равны друг другу.

Очевидно также, что характеры элементов для эквивалентных представлений совпадают.

Понятие характера в теории представлений используется обычно следующим образом.

Пусть данная группа G может быть разбита на конечное число различных классов сопряженных элементов $K_1, K_2, \dots, K_v$. Тогда каждому элементу класса K_i в данном представлении $D(G)$ (и в любом эквивалентном ему представлении) отвечает один и тот же характер χ_i . Поэтому представление $D(G)$ можно описать с помощью набора характеров $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_v$, который можно рассматривать как координаты вектора в евклидовом пространстве размерности v . Таким образом, различным представлениям будут отвечать различные векторы.

Указанный геометрический подход позволяет во многих случаях решать важные вопросы теории представлений групп.

5. Примеры представлений групп.

Пример 1. Пусть G — группа симметрии трехмерного пространства, состоящая из двух элементов: тождественного преобразования I (единица группы) и отражения P относительно начала координат. Таким образом, $G = \{I, P\}$.

Умножение элементов группы задается следующей таблицей:

	I	P
I	I	P
P	P	I

(9.34)

1) Одномерное представление группы G .

Выберем в пространстве E^1 базис e_1 и рассмотрим матрицу $A^{(1)}$ линейного невырожденного преобразования $A^{(1)}$ в этом пространстве: $A^{(1)} = (1)$. Очевидно, преобразование $A^{(1)}$ образует подгруппу в группе $GL(1)$ линейных преобразований пространства E^1 , причем умножение в этой подгруппе задается таблицей

	$A^{(1)}$
$A^{(1)}$	$A^{(1)}$

.

Очевидно, мы получим одномерное представление $D^{(1)}(G)$ группы G

с помощью соотношений $D^{(1)}(I) = A^{(1)}$, $D^{(1)}(P) = A^{(1)}$ (эти соотношения задают гомоморфизм группы G в $GL(1)$, а следовательно, и ее представление).

2) *Двумерное представление группы G .*

Выберем в E^2 какой-либо базис e_1, e_2 и рассмотрим в этом базисе матрицы $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$ линейных невырожденных преобразований $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(так как $\det A^{(2)} = 1$ и $\det B^{(2)} = -1$, то $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$ — невырожденные преобразования)

Преобразования $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$ образуют подгруппу в группе $GL(2)$. Непосредственной проверкой (путем перемножения матриц $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$) убеждаемся, что умножение операторов $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$ задается таблицей

	$A^{(2)}$	$B^{(2)}$
$A^{(2)}$	$A^{(2)}$	$B^{(2)}$
$B^{(2)}$	$B^{(2)}$	$A^{(2)}$

(9.35)

Мы получим двумерное представление $D^{(2)}(G)$ группы G с помощью соотношений

$$D^{(2)}(I) = A^{(2)}, \quad D^{(2)}(P) = B^{(2)}. \quad (9.36)$$

Действительно, сравнивая таблицы (9.34) и (9.35), мы видим, что (9.36) определяет изоморфизм группы G на подгруппу $\{A^{(2)}, B^{(2)}\}$ группы $GL(2)$, а следовательно, и представление этой группы.

3) *Трехмерное представление группы G .*

Рассмотрим в E^3 линейное преобразование $A^{(3)}$, задаваемое матрицей

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это преобразование образует подгруппу в группе $GL(3)$ с законом умножения $A^{(3)}A^{(3)} = A^{(3)}$.

Как и в случае одномерного представления, мы получаем трехмерное представление $D^{(3)}G$ с помощью соотношений:

$$D^{(3)}(I) = A^{(3)}, \quad D^{(3)}(P) = A^{(3)}.$$

4) *Четырехмерное представление группы G .*

Рассмотрим в E^4 линейные преобразования $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$, задаваемые матрицами

$$A^{(4)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad B^{(4)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Преобразования $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$ образуют подгруппу в группе $GL(4)$ с законом умножения, задаваемым таблицей, аналогичной таблице (9.35) (с заменой индекса 2 на индекс 4). Очевидно, мы получаем четырехмерное представление $D^{(4)}(G)$ группы G с помощью соотношений

$$D^{(4)}(I) = A^{(4)}, \quad D^{(4)}(P) = B^{(4)}.$$

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что матрицы $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$ можно записать в виде

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} A^{(2)} & 0 \\ 0 & A^{(2)} \end{pmatrix}, \quad B^{(4)} = \begin{pmatrix} B^{(2)} & 0 \\ 0 & B^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Поэтому представление $D^{(4)}(G)$ можно условно записать в виде $D^{(4)}(G) = D^{(2)}(G) + D^{(2)}(G) = 2D^{(2)}(G)$. Совершенно аналогично можно условно записать $D^{(3)}(G)$ в виде $D^{(3)}(G) = 3D^{(1)}(G)$.

Используя это замечание, читатель без труда построит представление группы G любой конечной размерности.

П р и м е р 2. В п. 5 § 2 этой главы мы доказали, что только что рассмотренная группа симметрии $G = \{I, P\}$ трехмерного пространства представляет собой нормальный делитель группы $O(3)$ (группа ортогональных преобразований пространства E^3). В том же пункте мы доказали, что подгруппа $SO(3)$ собственных ортогональных преобразований группы $O(3)$ изоморфна фактор-группе группы $O(3)$ по нормальному делителю $\{I, P\}$.

Так как группа гомоморфно отображается на каждую свою фактор-группу, то $O(3)$ гомоморфно отображается на группу $SO(3)$. Как мы видели в п. 5 § 3 этой главы, указанный гомоморфизм осуществляется следующим образом.

Если a — собственное преобразование из $O(3)$, то ему из $SO(3)$ ставится в соответствие это же самое преобразование.

Если a' — несобственное преобразование, то ему ставится в соответствие собственное преобразование Pa' .

Таким образом, мы получаем трехмерное представление $DO(3)$ группы ортогональных преобразований посредством группы $SO(3)$ собственных ортогональных преобразований.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоморфизм групп 265
- Алгебраическое дополнение 29
- Альтернирование тензора 243
- Ассоциативный закон композиции 260
- Аффинная система координат 250
- Аффинное пространство 41

- Базис 48
 - взаимный 229
 - представления 282
- Базисные столбцы 39
- строки 39
- Базисный минор 39
- Бесконечномерное линейное пространство 50
 - Беспорядок 23
 - Билинейная форма 152, 186
 - — вырожденная 191
 - — кососимметричная 153, 188
 - — невырожденная 191
 - — симметричная 153, 188
- Блок матрицы 15
- Блочная матрица 15
- Буняковского — Коши неравенство 85, 98

- Вандермонда определитель 33
- Вектор 44
- Верхней релаксации метод 174
- Вещественное евклидово пространство 82
- Временеподобный вектор 254

- Галилеевы системы 254
- Гамильтона — Кэли теорема 138
- Гиббса формулы 232
- Гиперболоид 224
- Гиперповерхность второго порядка 211
 - — — центральная 221
- Главная диагональ 11
- Гомоморфизм групп 267
- Грама определитель 228
- Группа 261
 - абелева 261
 - коммутативная 261
- Группа линейных преобразований 273
 - Лоренца 278, 279
 - ортогональных преобразований 275
 - перестановок 262
 - симметрическая 263
 - собственных ортогональных преобразований 276
 - Группы унитарные 281
 - циклические 277
- Диагональ матрицы главная 11
 - — побочная 11
- Диагональная матрица 14
- Дополнительный минор 25

- Евклидово пространство вещественное 82
 - — комплексное 96
- Единица группы 261
- Единичная матрица 14
- Единичный оператор 108

- Жорданова клетка 148
 - форма матрицы 148

- Закон инерции квадратичной формы 199
 - композиции 260
- Зейделя метод 174

- Изоморфизм групп 264
 - евклидовых пространств 94
 - линейных пространств 52
- Инвариант 235
 - уравнения гиперповерхности 218
- Инвариантное подпространство оператора 120
- Индекс инерции 200
 - — отрицательный 200
 - — положительный 200
- Инерции закон 199

- Канонические коэффициенты 192
- Канонический базис 195
 - вид квадратичной формы 192, 193

- Каноническое уравнение нецентральной гиперповерхности второго порядка 226
 — — центральной гиперповерхности второго порядка 223
 Капелли — Кронекера теорема 68
 Квадратичная форма 141, 190
 — — вырожденная 191
 — — знакоопределенная 191
 — — знакопеременная 191
 — — квазизнакоопределенная 191
 — — невырожденная 191
 — — отрицательно определенная 191
 — — положительно определенная 191
 Квадратная матрица 10
 — система 65, 69
 Коммутативный закон композиции 260
 Коммутирующие матрицы 13
 — операторы 128
 Комплексное евклидово пространство 96
 Композиция 260
 Координаты ковариантные 231
 — контравариантные 231
 Корень из оператора 139
 Кососимметричная билинейная форма 153, 188
 Коши — Буняковского неравенство 85, 98
 Коэффициенты линейной системы 65
 Крамера формулы 70
 Критерий Сильвестра 202
 Критическая точка 208
 Критическое значение 208
 Кронекер 68, 229
 Кронекера символ 229
 Кронекера — Капелли теорема 68
 Кубическая норма 173
 Кэли — Гамильтона теорема 138
- Лагранжа метод 193
 Лаплас 24
 Лапласа теорема 25
 Линейная зависимость строк 37
 — — элементов линейного пространства 46
 — комбинация строк 28
 — — элементов линейного пространства 46
 — независимость строк 38
 — — элементов линейного пространства 46
 — оболочка 54
 — система 64
 — форма 107
 Линейное представление группы 282
- Линейное пространство вещественное 41, 44
 — — комплексное 44
 Линейные пространства изоморфные 52
 Линейный оператор 105, 152
 — функционал 107
 Лоренца группа 278, 279
 — преобразования 256, 278
 — формулы 258
- Матрица 10
 — билинейной формы 187, 188
 — блочная 15
 — диагональная 14
 — единичная 14
 — квадратичной формы 191
 — квадратная 10
 — линейного оператора 115
 — невырожденная 37
 — нулевая 14
 — обратная 36, 37
 — ортогональная 158
 — — несобственная 159
 — — собственная 159
 — полуторалинейной формы 126
 — транспонированная 27
 — унитарная 158
 Матрицы коммутирующие 13
 — порядок 10
 Метод верхней релаксации 174
 — Зейделя 174
 — Лагранжа 193
 — регуляризации Тихонова 100
 — Якоби 161, 195
 Метрический тензор евклидова пространства 244
 — — псевдоевклидова пространства 253
 Минимаксное свойство собственных значений 135
 Минковского неравенство 86
 — пространство 255
 Минор 18, 25
 — базисный 39
 — второго типа 25
 — дополнительный 25
 — первого типа 25
 Многочлен характеристический 119, 154
- Невырожденная матрица 37
 Нейтральный закон композиции 260
 Неоднородная система 65
 Неопределенная система 65
 Неравенство Коши — Буняковского 85, 98
 — Минковского 86

- Неравенство треугольника 86, 99
 Несобственное подпространство 53
 Несовместная система 65
 Нетривиально совместная система 67
 Норма 86
 — кубическая 173
 — линейного оператора 130
 — матрицы операторная 162, 173
 — октаэдрическая 173
 — сферическая 101, 173
 — энергетическая 169
 Нормальная фундаментальная совокупность решений 77
 Нормальное решение 102
 Нормальный делитель группы 267
 — оператор 144
 Нормированное пространство 86, 99
 Нормы эквивалентные 169
 Нулевая матрица 14
 Нулевой оператор 108
- Образ оператора 111
 Обратная матрица 36, 37
 Обратный оператор 109
 Однородная система 65, 67, 75
 Октаэдрическая норма 173
 Оператор линейный 105, 152
 — нормальный 144
 — нулевой 108
 — обратный 109
 — ортогональный 157
 — положительно определенный 139
 — положительный 138
 — противоположный 108
 — самосопряженный 128
 — сопряженный 126
 — тождественный 108
 — унитарный 143
 Операторная норма матрицы 162, 173
 Операторы коммутирующие 128
 Определенная система 65
 Определитель 17
 — Вандермонда 33
 — Грама 228
 — линейного оператора 119
 — произведения матриц 34, 35
 — треугольный 32
 Определителя свойство антисимметрии
 — — линейное 28
 — — равноправности строк и столбцов 27
 Ориентированный объем 250
 Ортогонализации процесс 91
 Ортогональная матрица 158
 — — несобственная 159
 — — — собственная 159
 Ортогональное дополнение 94
- Ортогональные элементы 87, 99
 Ортогональный оператор 157
 Ортонормированный базис 89, 99
 Основная матрица линейной системы 66
- Параболоид 226
 Параболоидальный цилиндр 227
 Параллельный перенос 213
 Перемножение матриц 12
 Пересечение подпространств 56
 Перестановка 23, 262
 Пифагора теорема 87
 Побочная диагональ 11
 Погрешность метода итераций 162, 165
 Подгруппа 265
 — дискретная 274
 — компактная 274
 — конечная 274
 — непрерывная 274
 Подпространство 53
 Полилинейная форма 203
 Положительно определенный оператор 139
 Положительный оператор 138
 Полуоси центральной гиперповерхности второго порядка 223
 Полуторалинейная форма 124
 Порядок матрицы 10
 Представление группы 281
 — — вполне приводимое 285
 — — линейное 282
 — — неприводимое 285
 — — приводимое 284, 285
 — — точное 283
 — — тривиальное 283
 Представления групп эквивалентные 283
 Преобразования Лоренца 256, 278
 Присоединенный элемент 147
 Проектор 137
 Произведение матриц 12
 — матрицы на число 11, 12
 — оператора на число 108
 — операторов 108
 — тензора на число 239
 — тензоров 239, 240
 Простой итерации метод 161
 — — — модифицированный 171
 — — — общий неявный 164
 Пространственноподобный вектор 254
 Пространство аффинное 41
 — евклидово вещественное 82
 — — комплексное 96
 — линейное 41, 44
 — нормированное 86, 99
 — представления 282
 Противоположный элемент 41, 45

- Процесс ортогонализации 91
 Прямая сумма квадратных матриц 16
 — — подпространств 58, 59
 Псевдоевклидово пространство 253
- Разложение определителя по столбцу 21, 22
 — — — строкам 25
 — — — строке 19
 Размерность представления 282
 — пространства линейного 49
 — — псевдоевклидова 253
 Ранг матрицы 39, 56
 — оператора 112
 — формы билинейной 190
 — — квадратичной 191
 Расширенная матрица линейной системы 68
 Регуляризации метод Тихонова 100
 Решение системы 65
 — — нетривиальное 67
 — — тривиальное 67
 Ричардсона метод 179
- Самарского теорема 165, 169
 Самосопряженный оператор 128
 Свертывание тензора 240
 Свободные члены линейной системы 65
 Сильвестра критерий 202
 Симметрирование тензора 242
 Симметричная билинейная форма 153, 188
 Система координат аффинная 254
 — — — линейная 64
 — — — неоднородная 65
 — — — неопределенная 65
 — — — несовместная 65
 — — — нетривиально совместная 67
 — — — однородная 65, 67, 75
 — — — определенная 65
 — — — совместная 64, 65
 — — — уравнений квадратная 65
 Скалярное произведение 82, 96
 След оператора 120
 Сложение матриц 11
 Смежный класс подгруппы 266
 Собственное значение 120
 Собственный вектор 120
 Совместная система 65
 Сопряженный оператор 126
 — элемент группы 286
 Спектральное разложение оператора 138
 Стационарная точка 208
 Стационарное значение 208
 Столбцы базисные 39
 Строки базисные 39
- Сумма матриц 11
 — операторов 108
 — прямая квадратных матриц 16
 — — подпространств 58, 59
 — тензоров 239
 Сферическая норма 101, 173
- Тензор 234
 — вполне кососимметричный 248, 249
 — кососимметричный 242
 — метрический 244, 253
 — момента инерции 259
 — симметричный 242
- Теорема Гамильтона — Кэли 138
 — Кронекера — Капелли 68
 — Лапласа 25
 — о базисном миноре 39
 — Пифагора 87
 — Самарского 165, 169
 — Тихонова 103
 Тождественный оператор 108
 Транспонированная матрица 27
 Треугольное преобразование 195
 Треугольный определитель 32
 Тривиальное решение 67
- Унитарная матрица 158
 Унитарные группы 281
 Унитарный оператор 143
 Уравнение гиперповерхности второго порядка 211
 — характеристическое 120, 154
 — центра гиперповерхности второго порядка 220
- Фактор-группа 269
 Форма билинейная 152, 186
 — — вырожденная 191
 — — кососимметричная 153, 188
 — — невырожденная 191
 — — симметричная 153, 188
 — — квадратичная 141, 190
 — — линейная 107
 — — полилинейная 203
 — — полуторалинейная 124
 — — эрмитова 140
 Формулы Крамера 70
 — Лоренца 258
 Фундаментальная совокупность решений 77
- Характер 285
 Характеристический многочлен 119, 154

- Характеристическое уравнение 120,
 154
- Центр гиперповерхности второго по-
 рядка 220
 Центральная гиперповерхность 221
 — — вырожденная 224
- Циклическая группа 277
- Цилиндр параболоидальный 227
 — центральный 227
- Чебышева метод 175
- Эквивалентные нормы 169
- Элементы матрицы 10
- Эллипсоид 223
 — вырожденный 224
 — мнимый 224
- Эндоморфизм 267
- Энергетическая норма 169
- Энергетическое скалярное произведе-
 ние 168
- Эрмитова форма 140
- Ядро оператора 110
- Якоби метод 161, 195

ISBN 5-02-015235-8



Учебное издание

***ИЛЬИН Владимир Александрович,
ПОЗНЯК Эдуард Генрихович***

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Серия «Курс высшей математики и математической физики»

**Редакторы *М. М. Горячая, И. М. Овчинникова*
Корректор *И. Я. Кришталь***

ЛР № 020297 от 23.06.97

Подписано в печать с готовых диапозитивов 20.06.98

Формат 60×90¹/₁₆ Бумага типографская. Печать офсетная

Усл. печ. л. 19 Уч.-изд. л. 19,46 Тираж 5000 экз

Заказ 459. С-026

Издательская фирма

«Физико-математическая литература» РАН.

117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

При участии ООО «Харвест» Лицензия ЛВ № 32 от 27.08.97

220013, Минск, ул. Я. Коласа, 35 — 305

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика

в типографии издательства «Белорусский Дом печати».

220013, Минск, пр. Ф. Скорины, 79

Издательская фирма
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА
Академиздатцентра «Наука» РАН
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Выходят из печати в серии
«Курс высшей математики и математической физики»

ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: В 2 ч. Часть I: Учеб.: Для вузов. 5-е изд. М.: Наука. Физматлит. II полугодие 1998, поз. 166. В пер. 616 с. (Вып.1).

ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: В 2 ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. 3-е изд. М.: Наука. Физматлит. II полугодие 1998, поз. 167. В пер. 448 с. (Вып.2).

ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Аналитическая геометрия: Учеб.: Для вузов. 5-е изд. М.: Наука. Физматлит. II полугодие 1998, поз. 168. В пер. 224 с. (Вып.3).

ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. 4-е изд. М.: Наука. Физматлит. II полугодие 1998, поз. 169. В пер. 296 с. (Вып.4).

СВЕШНИКОВ А. Г., ТИХОНОВ А. Н. Теория функций комплексной переменной: Учеб.: Для вузов. 5-е изд. М.: Наука. Физматлит. II полугодие 1998, поз. 193. В пер. 320 с. (Вып.5).

ТИХОНОВ А. Н., ВАСИЛЬЕВА А. Б., СВЕШНИКОВ А. Г. Дифференциальные уравнения: Учеб.: Для вузов. 3-е изд. М.: Наука. Физматлит. II полугодие 1998, поз. 196. В пер. 232 с. (Вып.6).

Планируемые к выпуску издания объявляются в полугодовых аннотированных тематических планах Академиздатцентра «Наука» РАН (Наука Физматлит).

Заказывайте и приобретайте учебную и справочную литературу Издательской фирмы «Физматлит» РАН в магазинах книжоторгов, распространяющих литературу данной тематики (номера объявленных позиций по вышеприведенному списку указаны).

Заказы принимаются по телефонам:
(095) 974-18-05, (095) 955-03-30.