

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

# **ЗАДАЧИ по ФИЗИКЕ**

---

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Под редакцией  
О. Я. Савченко

Новосибирск  
2008

УДК 53(023)

ББК 22.3

3-13

*И. И. ВОРОБЬЕВ, П. И. ЗУБКОВ, Г. А. КУТУЗОВА, О. Я. САВЧЕНКО,  
А. М. ТРУБАЧЁВ, В. Г. ХАРИТОНОВ*

**Задачи по физике:** Учеб. пособие / И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова и др.; Под ред. О. Я. Савченко. 3-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999. — 370 с., ил.

ISBN 5-86134-024-2.

Содержит свыше 2000 задач по физике из числа предлагавшихся в физико-математической школе-интернате при Новосибирском государственном университете. Особое внимание уделено тем разделам, которые в школе изучаются недостаточно глубоко, но важны для успешного обучения в вузе. Включено много оригинальных задач, связанных с практикой научно-исследовательской работы. Задачи снабжены ответами, наиболее трудные — решениями. В новом издании улучшена структура расположения материала, переработаны формулировки и решения ряда задач.

Для слушателей подготовительных отделений вузов и студентов первых курсов этих вузов, учащихся и преподавателей средней школы, учащихся физико-математических школ, а также лиц, занимающихся самообразованием.

Ил. 973.

РЕЦЕНЗЕНТЫ: КАФЕДРА ФИЗИКИ СУНЦ НОВОСИБИРСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА;

ДОКТОР ФИЗ.-МАТ. НАУК ЛЕЖНИН С. И.

ДОКТОР ФИЗ.-МАТ. НАУК ЦВЕЛОДУБ О. Ю.

© Авторы, 1999

# Оглавление

Предисловие к третьему изданию		6
Предисловие к первому изданию		6
Физические постоянные		8
	<b>Задачи</b>	<b>Ответы</b>
<b>Глава 1. Кинематика</b>		
§ 1.1. Движение с постоянной скоростью	9	280
§ 1.2. Движение с переменной скоростью	13	282
§ 1.3. Движение в поле тяжести. Криволинейное движение	16	283
§ 1.4. Преобразование Галилея	19	284
§ 1.5. Движение со связями	22	285
<b>Глава 2. Динамика</b>		
§ 2.1. Законы Ньютона	25	285
§ 2.2. Импульс. Центр масс	33	287
§ 2.3. Кинетическая энергия. Работа. Потенциальная энергия	39	288
§ 2.4. Энергия системы. Передача энергии. Мощность	45	290
§ 2.5. Столкновения	51	291
§ 2.6. Сила тяготения. Законы Кеплера	56	292
§ 2.7. Вращение твердого тела	61	294
§ 2.8. Статика	67	295
<b>Глава 3. Колебания и волны</b>		
§ 3.1. Малые отклонения от равновесия	74	296
§ 3.2. Период и частота свободных колебаний	76	296
§ 3.3. Гармоническое движение	81	297
§ 3.4. Наложение колебаний	86	298
§ 3.5. Вынужденные и затухающие колебания	89	300
§ 3.6. Деформации и напряжения. Скорость волн	93	303
§ 3.7. Распространение волн	97	304
§ 3.8. Наложение и отражение волн	99	306
§ 3.9. Звук. Акустические резонаторы	102	307



**Глава 9. Постоянное магнитное поле**

§ 9.1. Индукция магнитного поля. Действие магнитного поля на ток	202	336
§ 9.2. Магнитное поле движущегося заряда. Индукция магнитного поля линейного тока	204	337
§ 9.3. Магнитное поле тока, распределенного по поверхности или пространству	207	338
§ 9.4. Магнитный поток	210	340

**Глава 10. Движение заряженных частиц в сложных полях**

§ 10.1. Движение в однородном магнитном поле	213	341
§ 10.2. Дрейфовое движение частиц	218	342

**Глава 11. Электромагнитная индукция**

§ 11.1. Движение проводников в постоянном магнитном поле. Электродвигатели	220	342
§ 11.2. Вихревое электрическое поле	225	343
§ 11.3. Взаимная индуктивность. Индуктивность проводников. Трансформаторы	228	344
§ 11.4. Электрические цепи переменного тока	231	345
§ 11.5. Сохранение магнитного потока. Сверхпроводники в магнитном поле	234	346
§ 11.6. Связь переменного электрического поля с магнитным	238	348

**Глава 12. Электромагнитные волны**

§ 12.1. Свойства, излучение и отражение электромагнитных волн	241	349
§ 12.2. Распространение электромагнитных волн	247	352

**Глава 13. Геометрическая оптика. Фотометрия.  
Квантовая природа света**

§ 13.1. Прямолинейное распространение и отражение света	250	352
§ 13.2. Преломление света. Формула линзы	252	353
§ 13.3. Оптические системы	254	354
§ 13.4. Фотометрия	257	356
§ 13.5. Квантовая природа света	260	356

**Глава 14. Специальная теория относительности**

§ 14.1. Постоянство скорости света. Сложение скоростей	262	357
§ 14.2. Замедление времени, сокращение размеров тел в движущихся системах. Преобразование Лоренца	267	363
§ 14.3. Преобразование электрического и магнитного полей	269	364
§ 14.4. Движение релятивистских частиц в электрическом и магнитном полях	273	366
§ 14.5. Закон сохранения массы и импульса	277	368

## *ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ*

Прошло десять лет со времени последнего издания этой книги на русском языке, и она, имевшая тираж 300 000 экземпляров, давно уже исчезла из продажи, так как широко использовалась в физико-математических школах и классах, на первых курсах многих вузов России и при подготовке к приемным экзаменам в эти вузы. Предлагаемое издание дополнено новой главой «Специальная теория относительности», поскольку она входит в школьную программу.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить В. П. Зубкова по инициативе и при поддержке которого выходит это издание.

*О. Я. Савченко*

## *ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ*

Авторы книги, преподаватели первой в стране специализированной физико-математической школы-интерната при Новосибирском государственном университете и научные сотрудники Сибирского отделения РАН, стремились создать не просто сборник задач, а учебное пособие, преследующее цель упрочения связи школьного образования с современной наукой.

В книге свыше двух тысяч задач различной сложности: от обычных школьных до олимпиадных, требующих сообразительности и нестандартного мышления. В отличие от аналогичных пособий, изданных за последнее время, в предлагаемом сборнике (за редким исключением) не приводятся решения задач, а даются лишь ответы. Такая форма более естественна для активного, творческого изучения физики. Ведь путь к ответу — это индивидуальный и увлекательный научный поиск. И этот творческий процесс нельзя заменить изучением рецептов решения задач.

Почти все включенные в книгу задачи взяты из сборников задач по физике этих же авторов, изданных в НГУ для учащихся физико-математической школы. Поэтому особое внимание уделялось темам, которые важны для успешного обучения в вузе. Так, значительно увеличена доля задач по колебаниям и волнам, молекулярной физике, движению заряженных частиц, электромагнитным волнам. Это первый опыт пособия подобного типа, поэтому многие задачи пришлось специально создавать для той или иной темы. Большую помощь в этой работе нам оказали сотрудники институтов СО АН СССР. В частности, сотрудники Института гидродинамики разработали тему — течение сложных струй (§ 4.3), предложили большинство задач, связанных с сохранением магнитного потока (§ 11.5). Сотрудники Института ядерной физики составили много задач о движении заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Кроме того, книга содержит много задач Всесибирских олимпиад и вступительных экзаменов в НГУ. В книгу включены также некоторые задачи, традиционно относимые к курсу общей физики в вузах, однако характер формулировок и порядок их следования позволяют найти их решение в рамках школьного курса. Ряд известных задач перешел из других сборников для школьников, но они составляют меньшую часть от общего числа задач.

Книга состоит из тринадцати глав, которые в свою очередь разбиты на параграфы. В каждом параграфе, насколько это соответствует логике развития темы, за задачами сравнительно элементарными следуют более трудные и чаще всего более интересные. Наибольшую пользу учащимся принесут задачи, которые вызывают живой интерес, побуждают задуматься над физическим явлением, развивают способность самостоятельно мыслить, приучают быть готовым к нестандартной постановке вопроса, к нестандартному решению. В книге много таких задач. Надеемся, что в случае, когда некоторые из них окажутся трудными для учащегося, это не лишит его веры в свои силы, а лишь побудит к более глубокому изучению физики. Такие задачи часто помечены звездочкой и иногда снабжены очень кратким решением. Для лучшего понимания условия многих задач иллюстрируются рисунками.

*О. Я. Савченко*

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

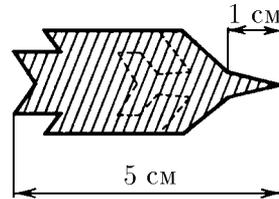
Скорость света в вакууме	$c$	$2,998 \cdot 10^8$ м/с
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = $1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1}$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Постоянная Планка	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц
Масса покоя электрона	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
протона	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
нейтрона	$m_n$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e$	1836,15
Элементарный заряд	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Отношение заряда электрона к его массе	$e/m_e$	$1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Магнитный момент электрона	$\mu_e$	$9,28 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Атомная единица массы	1 а.е.м.	$1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Фарадея	$F = N_A e$	$9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль
Универсальная газовая постоянная	$R$	8,31 Дж/(моль · К)
Нуль шкалы Цельсия	$T_0$	273,15 К
Нормальное давление	$p_0$	$1,01 \cdot 10^5$ Па
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_m = RT_0/p_0$	$22,41 \cdot 10^{-3}$ м <sup>3</sup> /моль
Постоянная Больцмана	$k = R/N_A$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м <sup>2</sup> · К <sup>4</sup> )
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м <sup>2</sup> /кг <sup>2</sup>
Нормальное ускорение свободного падения	$g_n$	9,8 м/с <sup>2</sup>

## Кинематика

### § 1.1. Движение с постоянной скоростью

◇ 1.1.1. На рисунке\*) приведена «смазанная фотография» летящего реактивного самолета. Длина самолета 30 м, длина его носовой части 10 м. Определите по этой «фотографии» скорость самолета. Время выдержки затвора 0,1 с. Форма самолета изображена на рисунке штриховой линией.

1.1.2. Радиолокатор определяет координаты летящего самолета, измеряя угол между направлением на Северный полюс и направлением на самолет и расстояние от радиолокатора до самолета. В некоторый момент времени положение самолета определялось координатами: угол  $\alpha_1 = 44^\circ$ , расстояние  $R_1 = 100$  км. Через промежуток времени 5 с после этого момента координаты самолета на радиолокаторе: угол  $\alpha_2 = 46^\circ$ , расстояние  $R_2 = 100$  км. Изобразите в декартовой системе координат с осью  $y$ , направленной на север, и с радиолокатором в начале координат положение самолета в оба момента времени; определите модуль и направление его скорости. Угол отсчитывайте по часовой стрелке.



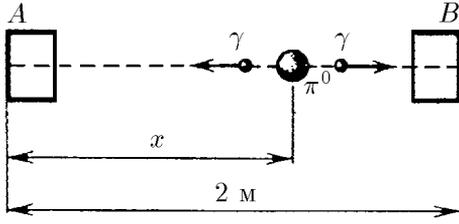
К задаче 1.1.1

1.1.3. Через открытое окно в комнату влетел жук. Расстояние от жука до потолка менялось со скоростью 1 м/с, расстояние до стены, противоположной окну, менялось со скоростью 2 м/с, до боковой стены — со скоростью 2 м/с. Через 1 с полета жук попал в угол между потолком и боковой стеной комнаты. Определите скорость полета жука и место в окне, через которое он влетел в комнату. Высота комнаты 2,5 м, ширина 4 м, длина 4 м.

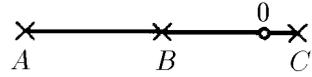
◇ 1.1.4. Счетчики  $A$  и  $B$ , регистрирующие момент прихода  $\gamma$ -кванта, расположены на расстоянии 2 м друг от друга. В некоторой точке между ними произошел распад  $\pi^0$ -мезона на два  $\gamma$ -кванта. Найдите положение этой точки, если счетчик  $A$  зарегистрировал  $\gamma$ -квант на  $10^{-9}$  с позднее, чем счетчик  $B$ . Скорость света  $3 \cdot 10^8$  м/с.

◇ 1.1.5\*. Три микрофона, расположенные на одной прямой в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , зарегистрировали последовательно в моменты времени  $t_A > t_B > t_C$  звук от взрыва, который произошел в точке  $O$ , лежащей на отрезке  $AC$ . Найдите отрезок  $AO$ , если  $AB = BC = L$ . В какой момент времени произошел взрыв?

\*) Условным знаком ◇ указаны задачи и ответы, снабженные рисунками.



К задаче 1.1.4

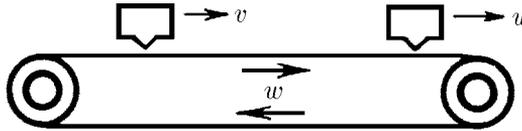


К задаче 1.1.5

1.1.6. Спортсмены бегут колонной длины  $l$  со скоростью  $v$ . Навстречу бежит тренер со скоростью  $u < v$ . Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, разворачивается и начинает бежать назад с той же по модулю скоростью. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

1.1.7. С подводной лодки, погружающейся вертикально и равномерно, испускаются звуковые импульсы длительности  $\tau_0$ . Длительность приема отраженного от дна импульса  $\tau$ . Скорость звука в воде  $c$ . С какой скоростью погружается подводная лодка?

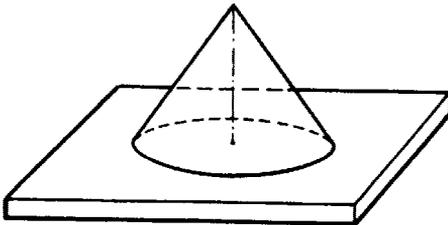
◇ 1.1.8. Лента транспортера имеет скорость  $w$ . Над лентой движется автомат, выбрасывающий  $\nu$  шариков в единицу времени. Шарики прилипают к ленте. Счетчик шариков с фотоэлементом считает только шарики, прошедшие непосредственно под ним. Сколько шариков сосчитает счетчик за единицу времени, если скорость автомата  $v < w$ , скорость счетчика  $u < w$ ?



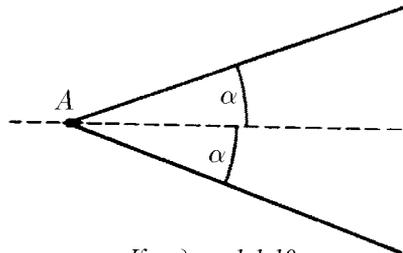
К задаче 1.1.8

1.1.9. а. Из взрывчатого вещества изготовлен стержень длины  $l$ . Скорость детонации (скорость вовлечения во взрыв новых участков взрывчатого вещества) равна  $v$ , а скорость разлета продуктов взрыва  $u < v$ . Как изменяется со временем область, занятая продуктами взрыва, если стержень подрывается с одного из концов? Сделайте рисунок.

◇ б\*. Из этого же взрывчатого вещества нужно изготовить такую тонкостенную коническую оболочку, чтобы при подрыве ее с вершины продукты взрыва одновременно ударили по плите. Какой угол между осью конуса и образующей нужно выбрать?



К задаче 1.1.9



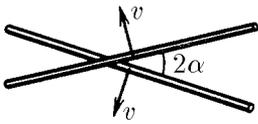
К задаче 1.1.10

◇ 1.1.10\*. По прямому шоссе идет автобус с постоянной скоростью  $v$ . Вы заметили автобус, когда тот находился в некоторой точке  $A$ . Из какой области около шоссе вы можете догнать этот автобус, если скорость вашего бега  $u < v$ ? Нарисуйте эту область для  $u = v/2$ .

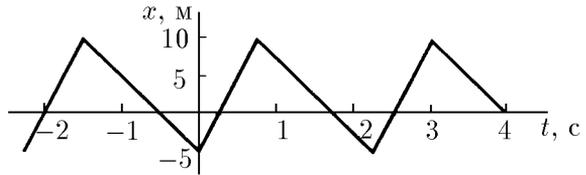
1.1.11\*. Сверхзвуковой самолет летит горизонтально. Два микрофона, находящиеся на одной вертикали на расстоянии  $l$  друг от друга, зарегистрировали приход звука от самолета, пролетающего над микрофонами, с запаздыванием времени  $\Delta t$ . Скорость звука в воздухе  $c$ . Какова скорость самолета?

◇ 1.1.12. Два стержня пересекаются под углом  $2\alpha$  и движутся с равными скоростями  $v$  перпендикулярно самим себе. Какова скорость точки пересечения стержней?

◇ 1.1.13. По графику зависимости координаты от времени постройте график зависимости скорости от времени.



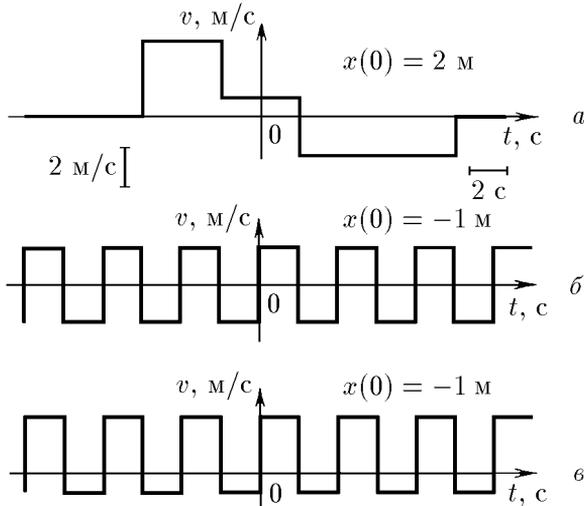
К задаче 1.1.12



К задаче 1.1.13

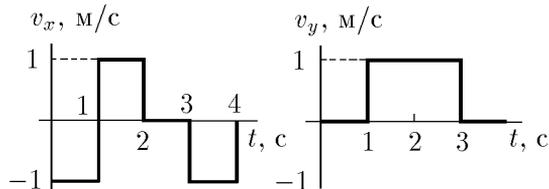
1.1.14. Найдите с помощью графиков зависимости координаты от времени момент времени и место соударения частиц, движущихся по одной прямой. Скорость первой частицы  $v$ , скорость второй  $v/2$ . Первая частица в момент времени  $t = 0$  имела координату  $x = 0$ , вторая в момент времени  $t_1$  — координату  $x = a$ .

◇ 1.1.15. По графикам зависимости скорости от времени постройте графики зависимости координаты от времени. Найдите в случаях б и в среднюю скорость за большое время.



К задаче 1.1.15

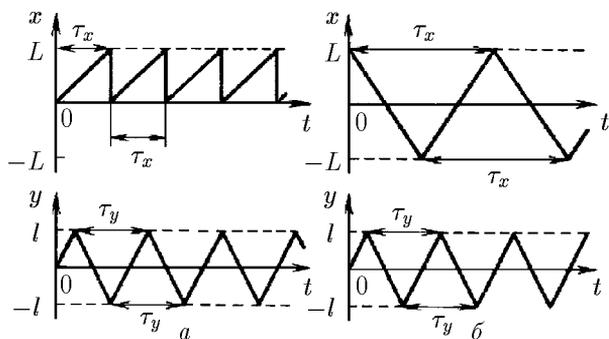
◇ 1.1.16. Частица движется в одной плоскости. По графикам зависимости от времени проекций  $v_x$  и  $v_y$  скорости постройте траекторию частицы, если  $x(0) = 2$  м,  $y(0) = 1$  м.



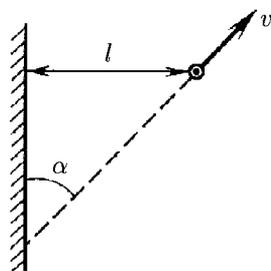
К задаче 1.1.16

◇ 1.1.17. Движение луча по экрану осциллографа описывается графиками зависимости координат  $x$  и  $y$  от времени. Какая картина возникнет на экране при  $\tau_y = \tau_x, \tau_x/3, 3\tau_x$ ? Рассмотрите два случая (см. рисунок). В случае  $a$  горизонтальные линии на экране почти не видны. Почему? При каком соотношении  $\tau_x$  и  $\tau_y$  в случае  $b$  траектория луча на экране будет замкнутой?

◇ 1.1.18\*. Автомобиль удаляется со скоростью  $v$  от длинной стены, двигаясь под углом  $\alpha$  к ней. В момент, когда расстояние до стены равно  $l$ , шофер подает короткий звуковой сигнал. Какое расстояние пройдет автомобиль до момента, когда шофер услышит эхо? Скорость звука в воздухе  $c$ .



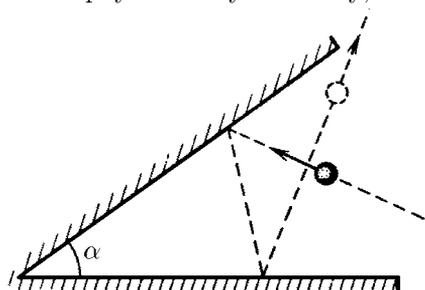
К задаче 1.1.17



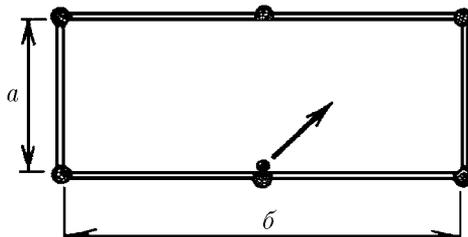
К задаче 1.1.18

◇ 1.1.19. На какой угол изменится направление скорости шара после двух упругих ударов о стенки, угол между которыми равен  $\alpha$ ? Как полетит шар, если угол  $\alpha = \pi/2$ ? Движение происходит в плоскости, перпендикулярной стенкам. При упругом ударе о гладкую неподвижную стенку угол падения шара равен углу отражения.

◇ 1.1.20\*. По бильярдному столу со сторонами  $a$  и  $b$  пускают шар от середины стороны  $b$ . Под каким углом к борту стола должен начать двигаться шар, чтобы вернуться в ту же точку, из которой он начал свое движение?



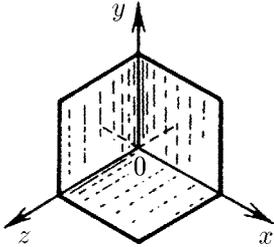
К задаче 1.1.19



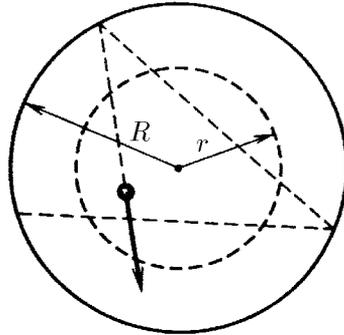
К задаче 1.1.20

◇ **1.1.21.** Угловый отражатель, установленный на луноходе, представляет собой три взаимно перпендикулярных зеркала. Если на отражатель падает свет, скорость которого  $c = (c_x, c_y, c_z)$ , то какие составляющие будет иметь скорость света после отражения от зеркала, находящегося в плоскости  $yOz$ ? после отражения от всех трех зеркал?

◇ **1.1.22.** Внутри закрепленного гладкостенного цилиндра радиуса  $R$  летает маленький шарик, упруго отражаясь от стенок так, что минимальное расстояние от него до оси цилиндра равно  $h$ . Какую долю времени он находится на расстоянии от оси цилиндра, меньшем  $r$ , но большем  $h$ ?

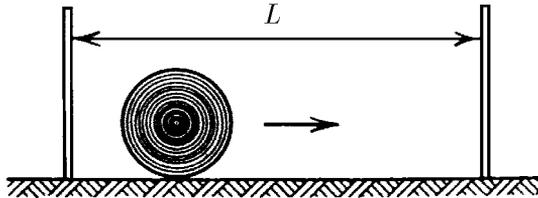


*К задаче 1.1.21*



*К задаче 1.1.22*

◇ **1.1.23\*.** Стрелок пытается попасть в диск радиуса  $R$ , который движется от одной стенки к другой с постоянной по модулю скоростью так быстро, что за ним нельзя уследить. Нарисуйте график зависимости вероятности попадания пули в диск от расстояния между точкой прицеливания и левой стенкой.



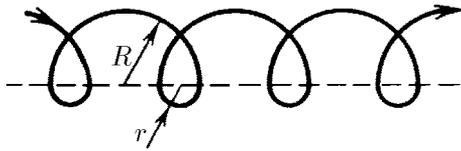
*К задаче 1.1.23*

Выстрелы производятся на высоте  $R$  от пола перпендикулярно направлению движения диска. В какой точке прицеливания вероятность попадания наименьшая? наибольшая? Чему они равны? Разберите случаи  $L > 4R$ ,  $4R > L > 2R$ , где  $L$  — расстояние между стенками.

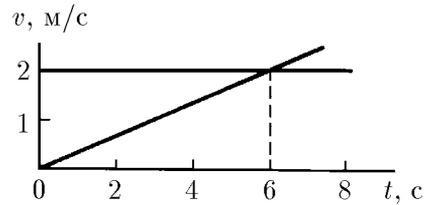
### § 1.2. Движение с переменной скоростью

◇ **1.2.1.** На рисунке изображена траектория электрона, который дрейфует вдоль плоскости раздела областей с различными магнитными полями. Его траектория состоит из чередующихся полуокружностей радиуса  $R$  и  $r$ . Скорость электрона постоянна по модулю и равна  $v$ . Найдите среднюю скорость электрона за большой промежуток времени.

◇ **1.2.2.** Две частицы в момент времени  $t = 0$  вышли из одной точки. По графикам зависимости скорости от времени определите координаты и время новой встречи частиц.



К задаче 1.2.1



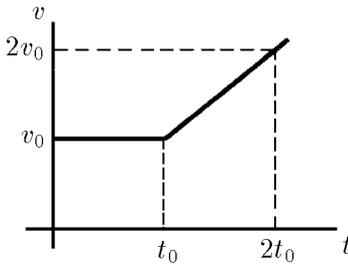
К задаче 1.2.2

◇ **1.2.3.** Тело в течение времени  $t_0$  движется с постоянной скоростью  $v_0$ . Затем скорость его линейно нарастает со временем так, что в момент времени  $2t_0$  она равна  $2v_0$ . Определите путь, пройденный телом за время  $t > t_0$ .

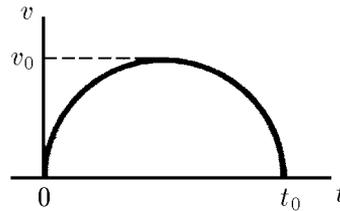
**1.2.4.** Нарисуйте график зависимости координаты от времени для прямолинейного движения, удовлетворяющего одновременно двум условиям: а) средняя скорость в промежутке времени от 2 до 6 с равна 5 м/с; б) максимальная скорость в том же промежутке равна 15 м/с.

**1.2.5** Въезжая на поврежденный участок шоссе, каждый автомобиль в колонне уменьшает скорость от  $v_1$  до  $v_2$ . Какой должна быть дистанция между автомобилями, чтобы они не сталкивались? Длина каждого автомобиля  $l$ .

◇ **1.2.6.** График зависимости скорости тела от времени имеет вид полуокружности. Максимальная скорость тела  $v_0$ , время движения  $t_0$ . Определите путь, пройденный телом.



К задаче 1.2.3



К задаче 1.2.6

**1.2.7.** Автобус движется в течение 20 с по прямой до остановки, проходя при этом расстояние 310 м. Его начальная скорость 15 м/с. Докажите, что ускорение автобуса меняется по направлению.

**1.2.8\*.** Частица, покинув источник, пролетает с постоянной скоростью расстояние  $L$ , а затем тормозится с ускорением  $a$ . При какой скорости частицы время движения от ее вылета до остановки будет наименьшим?

**1.2.9.** Мигрирующие рыбы, накопив в море запас жира, заходят в устья рек. В пресной воде они не питаются, поэтому им важно добраться до нерестилищ в верховьях реки с наименьшими потерями массы. Расход жира на поддержание основного обмена веществ в организме рыбы за единицу времени равен  $N$ , а добывочный расход  $bv^2$  тратится на движение со скоростью  $v$ . С какой скоростью должны двигаться рыбы, чтобы затраты жира на пути до нерестилища были минимальны? (Рыбы прекрасно чувствуют эту скорость.)

**1.2.10.** Из полусферического аквариума радиуса  $R$ , наполненного водой, с единицы поверхности воды в единицу времени испаряется объем жидкости  $q$ . Через какое время вода испарится?

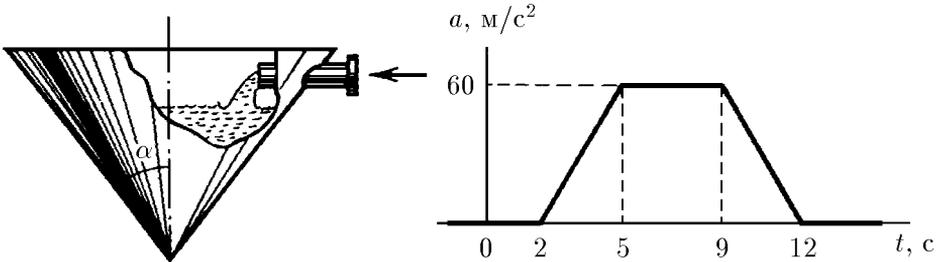
◇ 1.2.11\*. а. В коническом сосуде уровень воды поднимается с постоянной скоростью  $v_0$ . Как зависит от времени скорость поступления воды в сосуд через трубку сечения  $s$ ? В нулевой момент времени сосуд пуст.

б. Струя масла, попадающая на поверхность воды, растекается по ней круглым пятном толщины  $h$ . Как зависит от времени скорость движения границы пятна, если в единицу времени поступает объем масла  $q$ ? В начальный момент времени радиус пятна равен нулю.

1.2.12. Мальчик надувает воздушный шарик. При радиусе шарика 10 см скорость увеличения радиуса равна 1 мм/с. Какой объем воздуха ежесекундно выдыхает мальчик?

1.2.13. «Корабль шел на пределе, дальнейший разгон не предусматривался инструкциями космофлота. Через час скорость возросла на тысячу километров в секунду» (Кир Булычев. Агент КФ // Химия и жизнь. 1984. № 12. С. 111). Найдите ускорение корабля. Во сколько раз оно превосходит ускорение свободного падения на Земле?

◇ 1.2.14. По графику зависимости ускорения от времени установите скорость в моменты времени 4 и 15 с, если в момент времени 1 с скорость равна 3 м/с.



К задаче 1.2.11

К задаче 1.2.14

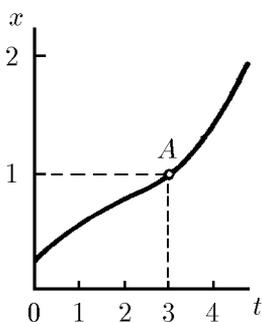
1.2.15. Ускорение ракетной тележки от старта до остановки в течение первых 6 с составляет  $100 \text{ м/с}^2$ , затем в течение 7 с она движется без ускорения, а последние 3 с тележка имеет отрицательное ускорение  $-200 \text{ м/с}^2$ . Постройте графики зависимости от времени ускорения, скорости и координаты. Какого наибольшего значения достигла скорость тележки? На каком отрезке пути происходило торможение? Какое полное расстояние прошла тележка? Как по графику зависимости ускорения от времени проверить, действительно ли тележка остановилась?

◇ 1.2.16. Графики зависимости координаты от времени, построенные в различном масштабе времени для двух частиц, оказались одинаковыми. Одно деление оси времени  $t$  для графика первой частицы отвечает 4 с, а для графика второй — 1 с. Найдите отношение скоростей и отношение ускорений частиц для точки А графика.

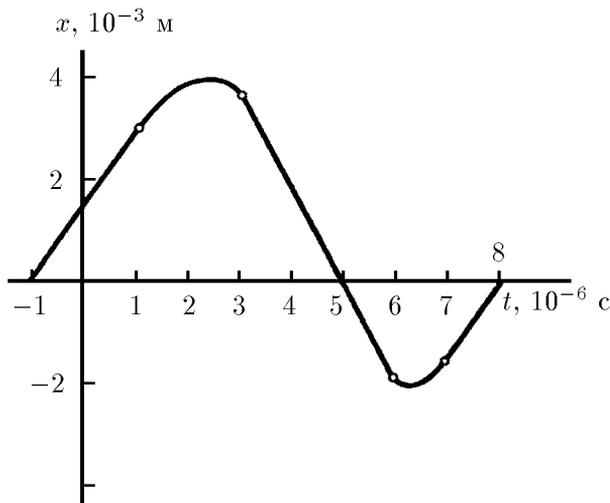
◇ 1.2.17. Часть графика зависимости координаты от времени, расположенная ниже оси  $t$ , подобна той части графика, которая выше этой оси. Постройте графики зависимости от времени скорости и ускорения. Сравните ускорения при наибольшем и наименьшем значениях  $x$ .

◇ 1.2.18. По графику зависимости скорости от времени постройте графики зависимости от времени координаты и ускорения, если  $x(0) = 0$ .

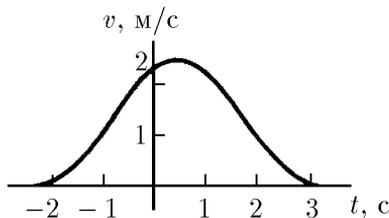
◇ 1.2.19. Длина шкалы спидометра 15 см; он измеряет скорость автомобиля в пределах от нуля до 150 км/ч. Найдите скорость указателя спидометра, если автомобиль движется с ускорением  $2 \text{ м/с}^2$ .



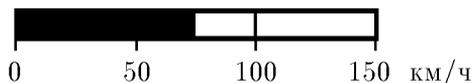
К задаче 1.2.16



К задаче 1.2.17



К задаче 1.2.18



К задаче 1.2.19

**1.2.20\*.** Тело начинает движение из точки  $A$  и движется сначала равноускоренно в течение времени  $t_0$ , затем с тем же по модулю ускорением — равнозамедленно. Через какое время от начала движения тело вернется в точку  $A$ ?

**1.2.21\*.** Время отправления электрички по расписанию 12.00. На ваших часах 12.00, но мимо вас уже начинает проезжать предпоследний вагон, который движется мимо вас в течение времени  $t_1$ . Последний вагон проходит мимо вас в течение  $t_2$ . Электричка отправилась вовремя и движется равноускоренно. На какое время отстают ваши часы?

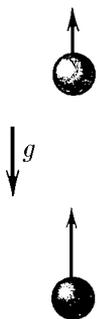
### § 1.3. Движение в поле тяжести<sup>\*)</sup>. Криволинейное движение

◇ **1.3.1.** Из одной и той же точки вертикально вверх с интервалом времени  $\Delta t$  выброшены два шарика со скоростью  $v$ . Через какое время после вылета второго шарика они столкнутся?

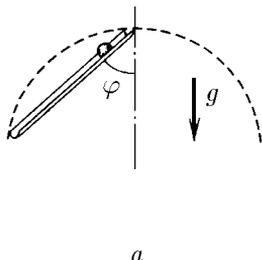
◇ **1.3.2. а.** Из верхней точки окружности по гладкому желобу под углом  $\varphi$  к вертикали начинает скользить шарик. За какое время он достигнет окружности, если ее диаметр  $D$ ?

◇ **б.** Из точки  $A$  по спицам с разным наклоном одновременно начинают скользить без трения маленькие бусинки. На какой кривой будут находиться бусинки в момент времени  $t$ ?

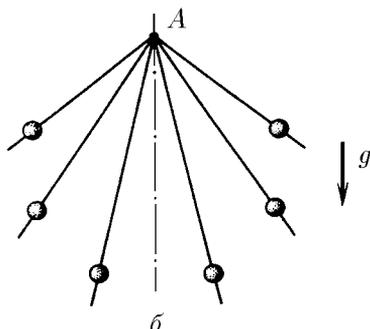
<sup>\*)</sup> Если на рисунке к задаче указано ускорение свободного падения  $g$ , необходим учет поля тяжести.



К задаче 1.3.1



а

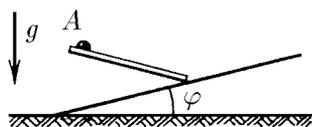


б

К задаче 1.3.2

◇ 1.3.3\*. Под каким углом к вертикали должен быть направлен из точки  $A$  гладкий желоб, чтобы шарик соскользнул по нему на наклонную плоскость за наименьшее время?

1.3.4. Свободно падающее тело пролетело мимо точки  $A$  со скоростью  $v_A$ . С какой скоростью оно пролетит мимо точки  $B$ , находящейся на  $h$  ниже  $A$ ?



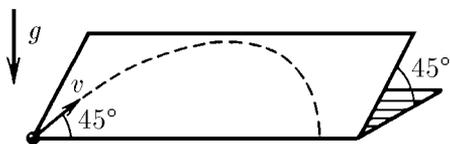
К задаче 1.3.3

1.3.5. Камень бросают со скоростью  $v$  под углом  $\varphi$  к горизонту. Через какое время скорость будет составлять угол  $\alpha$  с горизонтом?

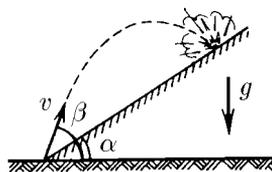
1.3.6. Из орудия произведен выстрел под углом  $\varphi$  к горизонту. Начальная скорость снаряда  $v$ . Поверхность земли горизонтальна. Найдите: а) горизонтальную и вертикальную проекции скорости как функции времени; б) зависимость координат  $x$  и  $y$  от времени; в) уравнение траектории, т. е. зависимость  $y$  от  $x$ ; г) время полета, наибольшую высоту и дальность полета снаряда.

◇ 1.3.7. По гладкой наклонной плоскости со скоростью  $v$  пускают шарик. Какое расстояние по горизонтали он пройдет, прежде чем скатится с плоскости? Плоскость наклонена к горизонту под углом  $45^\circ$ . Начальная скорость шарика образует угол  $45^\circ$  с горизонтальным краем плоскости.

◇ 1.3.8. Из миномета ведут стрельбу по объектам, расположенным на склоне горы. На каком расстоянии от миномета будут падать мины, если их начальная скорость  $v$ , угол наклона горы  $\alpha$  и угол стрельбы по отношению к горизонту  $\beta$ ?



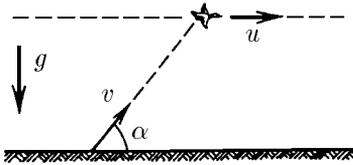
К задаче 1.3.7



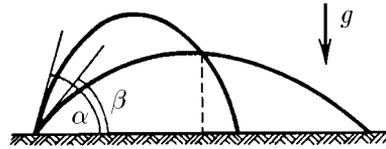
К задаче 1.3.8

1.3.9. С какой скоростью должен в момент старта ракеты вылететь снаряд из пушки, чтобы поразить ракету, стартующую вертикально с ускорением  $a$ ? Расстояние от пушки до места старта ракеты равно  $L$ , пушка стреляет под углом  $45^\circ$  к горизонту.

◇ 1.3.10. Утка летела по горизонтальной прямой с постоянной скоростью  $u$ . В нее бросил камень неопытный «охотник», причем бросок был сделан без упреждения, т. е. в момент броска скорость камня  $v$  была направлена как раз на утку под углом  $\alpha$  к горизонту. На какой высоте летела утка, если камень все же попал в нее?



К задаче 1.3.10



К задаче 1.3.11

◇ 1.3.11. Из отверстия шланга, прикрытого пальцем, бьют две струи под углом  $\alpha$  и  $\beta$  к горизонту с одинаковой начальной скоростью  $v$ . На каком расстоянии от отверстия по горизонтали струи пересекутся?

1.3.12\*. Из шланга, лежащего на земле, бьет под углом  $45^\circ$  к горизонту вода с начальной скоростью  $10$  м/с. Площадь сечения отверстия шланга  $5$  см<sup>2</sup>. Определите массу струи, находящейся в воздухе.

1.3.13\*. Снаряд, вылетев из орудия, попал в точку с координатами  $x$  по горизонтали и  $y$  по вертикали. Начальная скорость снаряда  $v$ . Найдите: а) тангенс угла, образуемого стволом орудия с горизонтом; б) границу области возможного попадания снаряда; в) наименьшую начальную скорость снаряда, при которой он может попасть в точку с координатами  $x, y$ .

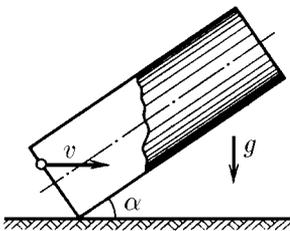
УКАЗАНИЕ. При решении воспользуйтесь тригонометрическим тождеством  $1/\cos^2 \varphi = \operatorname{tg}^2 \varphi + 1$ .

1.3.14. С одного и того же места с интервалом времени  $\Delta t$  брошены два тела с одной и той же начальной скоростью  $v$  под углом  $\varphi$  к горизонту. Как движется первое тело относительно второго? Почему относительная скорость зависит только от  $\Delta t$ ?

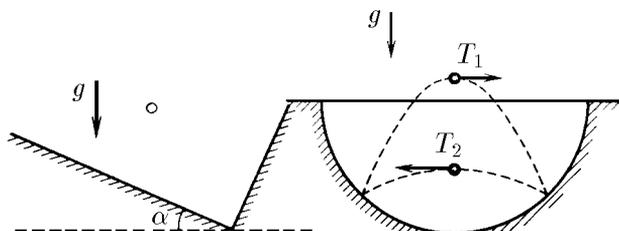
1.3.15. По внутренней поверхности гладкого вертикального цилиндра радиуса  $R$  под углом  $\alpha$  к вертикали пускают шарик. Какую начальную скорость ему надо сообщить, чтобы он вернулся в исходную точку?

◇ 1.3.16\*. В трубу длины  $l$ , наклоненную под углом  $\alpha$  к горизонту, влетает шарик с горизонтальной скоростью  $v$ . Определите время пребывания шарика в трубе, если удары шарика о ее стенки упругие.

◇ 1.3.17. В прямоугольной коробке, упруго ударяясь о дно и правую стенку, по одной траектории туда и обратно прыгает шарик. Промежуток времени между ударами о дно и стенку равен  $\Delta t$ . Дно коробки образует угол  $\alpha$  с горизонтом. Найдите скорости шарика сразу после ударов.



К задаче 1.3.16



К задаче 1.3.17

К задаче 1.3.18

◇ 1.3.18\*. В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь о ее стенки в двух точках, расположенных на одной горизонтали. Промежуток времени между ударами при движении шарика слева направо всегда равен  $T_1$ , а при движении справа налево —  $T_2 \neq T_1$ . Определите радиус лунки.

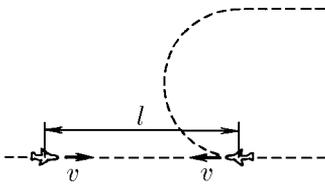
1.3.19\*. Какую минимальную скорость должен иметь камень, брошенный мальчиком, чтобы он перелетел дом высоты  $H$  и длины  $L$ , если бросок совершается с высоты  $h$  и для броска мальчик может выбрать любое место?

**1.3.20.** Определите скорость и ускорение, которыми обладают точки земной поверхности на экваторе и в Санкт-Петербурге из-за участия Земли в суточном вращении. Радиус Земли принять равным 6400 км. Широта Санкт-Петербурга  $60^\circ$ .

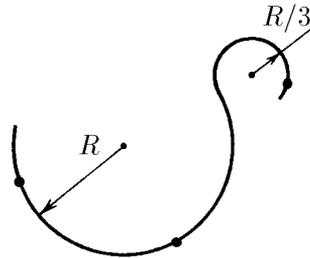
**1.3.21.** С какой скоростью должен лететь спутник, чтобы, все время «падая» на Землю с ускорением  $g$ , двигаться по окружности? Принять радиус орбиты  $R = 6400$  км, а  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

◇ **1.3.22\*.** Самолеты летят по одной прямой навстречу друг другу с одинаковой скоростью  $v$ . Предельная дальность обнаружения ими друг друга  $l$ . Один самолет после обнаружения другого совершает разворот, не меняя модуля скорости, и летит параллельно второму самолету. При каком постоянном ускорении самолеты потеряют друг друга из вида в конце разворота?

◇ **1.3.23.** Небольшое тело движется с постоянной скоростью  $v$  по траектории, состоящей из двух плавно соединенных дуг окружностей радиуса  $R$  и  $R/3$ . Постройте векторы ускорения в отмеченных точках траектории.



К задаче 1.3.22

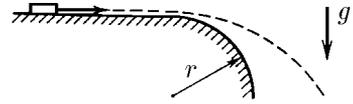


К задаче 1.3.23

**1.3.24.** В момент времени, когда скорость частицы равна  $10^6 \text{ м/с}$ , ее ускорение составляет  $10^4 \text{ м/с}^2$  и направлено под углом  $30^\circ$  к скорости. На сколько увеличится скорость за  $10^{-2} \text{ с}$ ? На какой угол изменится направление скорости? Какова в этот момент угловая скорость вращения вектора скорости?

**1.3.25.** Небольшое тело движется по окружности радиуса  $r$  со скоростью, которая линейно увеличивается во времени по закону  $v = kt$ . Найдите зависимость полного ускорения тела от времени.

◇ **1.3.26.** Край гладкого горизонтального стола скруглен по окружности радиуса  $r$ . С какой наименьшей скоростью нужно пустить по столу малое тело, чтобы оно, достигнув скругления, сразу полетело по параболе?



К задаче 1.3.26

**1.3.27\*.** Сферический резервуар, стоящий на земле, имеет радиус  $R$ . При какой наименьшей скорости брошенный с земли камень может перелететь через резервуар, лишь коснувшись его вершины?

**1.3.28.** Снаряды вылетают с начальной скоростью  $600 \text{ м/с}$  под углом  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  к горизонту. Определите радиус кривизны траектории снарядов в их наивысшей и начальной точках.

**1.3.29.** Для экономии места въезд на один из высочайших в Японии мостов устроен в виде винтовой линии, обвивающей цилиндр радиуса  $R$ . Полотно дороги составляет угол  $\alpha$  с горизонтальной плоскостью. Каково ускорение автомобиля, движущегося по ней с постоянной по модулю скоростью  $v$ ?

**1.3.30\*.** Снаряд вылетает из пушки со скоростью  $V$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Какое время снаряд приближается к пушке?

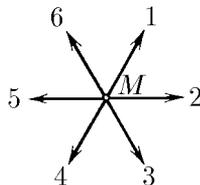
## § 1.4. Преобразование Галилея

◇ 1.4.1. Начальные положения и скорости двух кораблей заданы на рисунке. Корабли движутся без ускорения. Как найти наименьшее расстояние между ними?



К задаче 1.4.1

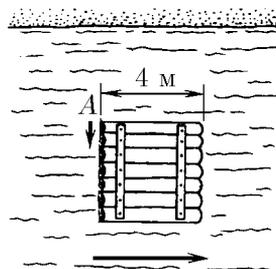
◇ 1.4.2. На рисунке скорости шести выпущенных старым Мазаем зайцев изображены в системе координат, неподвижной относительно Мазаю. Попробуйте нарисовать скорости Мазаю и остальных зайцев в системе координат, неподвижной относительно зайца 1.



К задаче 1.4.2

1.4.3. Одна из частиц пылевого облака (частица  $A$ ) покоится, а все остальные разлетаются от нее в разные стороны со скоростями, пропорциональными расстояниям от них до частицы  $A$ . Какую картину движения обнаружит наблюдатель, движущийся вместе с частицей  $B$ ?

◇ 1.4.4. С угла  $A$  квадратного плота прыгнул в воду и поплыл вокруг плота пес. Нарисуйте траекторию движения пса относительно берега, если он плывет вдоль сторон плота, а его скорость относительно воды составляет  $4/3$  скорости течения реки.

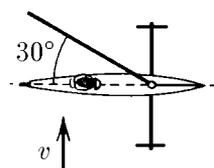


К задаче 1.4.4

1.4.5. а. Капли дождя из-за сопротивления воздуха падают с постоянной скоростью  $v$ , перпендикулярной поверхности земли. Как необходимо расположить цилиндрическое ведро, находящееся на движущейся со скоростью  $u$  платформе, чтобы капли не попадали на его стенки?

б. При скорости ветра  $10$  м/с капли дождя падают под углом  $30^\circ$  к вертикали. При какой скорости ветра капли будут падать под углом  $45^\circ$ ?

◇ 1.4.6\*. Буер представляет собой парусные сани. Он может двигаться лишь по линии, по которой направлены его коньки. Ветер дует со скоростью  $v$ , перпендикулярной направлению движения буера. Парус же составляет  $30^\circ$  с направлением движения. Какую скорость не может превысить буер при этом ветре?

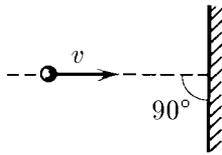


К задаче 1.4.6

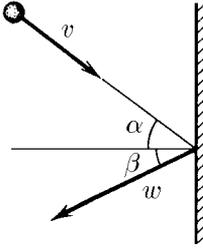
1.4.7\*. Какой будет продолжительность полета самолета из Новосибирска в Москву и обратно, происходящего по прямой, если в течение всего полета ветер дует под углом  $\alpha$  к трассе со скоростью  $u$ ? Скорость самолета относительно воздуха  $v$ , длина трассы  $L$ . При каком направлении ветра продолжительность полета максимальна?

◇ 1.4.8. При упругом ударе тела о неподвижную стенку его скорость  $v$  меняется лишь по направлению. Определите изменение после удара скорости этого тела, если стенка движется: а) со скоростью  $u$  навстречу телу; б) со скоростью  $w < v$  в направлении движения тела.

◇ 1.4.9. Тело налетает на стенку со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к линии, перпендикулярной стенке. Определите скорость тела после упругого удара, если стенка: а) неподвижна; б) движется перпендикулярно самой себе со скоростью  $w$  навстречу телу; в) движется под углом  $\beta$  к линии, перпендикулярной ей самой, со скоростью  $w$  навстречу телу.



К задаче 1.4.8

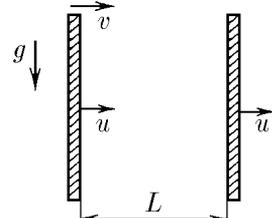


К задаче 1.4.9

**1.4.10.** Внутри сферы радиуса  $R$ , движущейся со скоростью  $u$ , находится шарик радиуса  $r$ , который в момент, когда он проходит через центр сферы, имеет скорость  $v$ , перпендикулярную скорости  $u$ . Масса сферы много больше массы шарика. Определите, с какой частотой шарик ударяется о стенку сферы. Удары абсолютно упругие.

**1.4.11.** Тело роняют над плитой на высоте  $h$  от нее. Плита движется вертикально вверх со скоростью  $u$ . Определите время между двумя последовательными ударами тела о плиту. Удары абсолютно упругие.

◇ **1.4.12.** Тело влетает горизонтально со скоростью  $v$  в пространство между двумя вертикальными стенками, которые перемещаются со скоростью  $u$ . Определите скорость тела после  $n$ -го удара о переднюю стенку. Расстояние между стенками  $L$ . Удары абсолютно упругие.



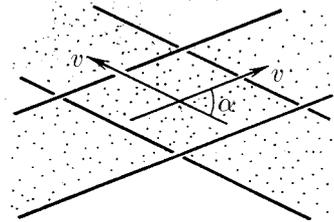
К задаче 1.4.12

**1.4.13.** Шестеренка радиуса  $R$  помещена между двумя параллельными зубчатыми рейками. Рейки движутся со скоростью  $v_1$  и  $v_2$  навстречу друг другу. Какова частота вращения шестеренки?

**1.4.14\*.** Ядро, летящее со скоростью  $v$ , распадается на два одинаковых осколка. Определите максимальный возможный угол  $\alpha$  между скоростями одного из осколков и вектором  $v$ , если при распаде покоящегося ядра осколки имеют скорость  $u < v$ .

**1.4.15\*.** Имеется пучок одинаковых ядер, движущихся со скоростью  $v$ . Ядра в пучке самопроизвольно делятся на пары одинаковых осколков. Скорость осколков, движущихся в направлении пучка, равна  $3v$ . Найдите скорость осколков, движущихся в направлении, перпендикулярном пучку.

◇ **1.4.16.** Два пучка частиц, движущихся с одинаковой по модулю скоростью  $v$ , пересекаются под углом  $\alpha$ . Соударения частиц происходят в ограниченной области. Перейдем к системе отсчета, где скорости частиц равны по модулю и противоположны по направлению. Казалось бы, теперь область пересечения — весь объем пучков, и поэтому число соударений в единицу времени должно быть больше. Объясните получившееся противоречие.



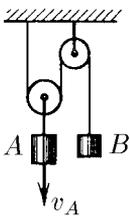
К задаче 1.4.16

1.4.17. Идет отвесный дождь. Скорость капель  $u$ . По асфальту со скоростью  $v$  скользит мяч. Во сколько раз за один и тот же промежуток времени на него попадает больше капель, чем на такой же, но неподвижный мяч? Изменится ли ответ, если мяч не круглый?

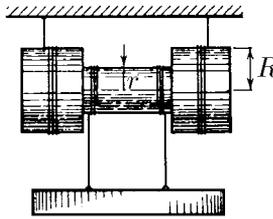
1.4.18\*. Мальчик, который может плавать со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки, хочет переплыть эту реку так, чтобы его как можно меньше снесло вниз по течению. Под каким углом к берегу он должен плыть? На какое расстояние его снесет, если ширина реки 200 м?

### § 1.5. Движение со связями

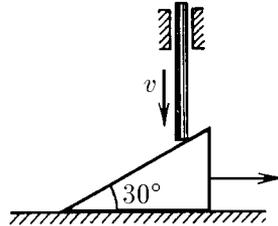
- ◇ 1.5.1. Скорость груза  $A$  равна  $v_A$ . Чему равна скорость груза  $B$ ?
- ◇ 1.5.2. Угловая скорость катушки равна  $\omega$ , радиус внутреннего цилиндра  $r$ , а радиус внешних цилиндров  $R$ . Каковы скорости оси катушки и груза относительно земли?
- ◇ 1.5.3. Клин, имеющий угол  $30^\circ$ , лежит на горизонтальной плоскости. Вертикальный стержень, опускающийся со скоростью  $v$ , заставляет клин скользить по этой плоскости. Какова скорость клина?



К задаче 1.5.1



К задаче 1.5.2



К задаче 1.5.3

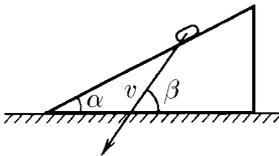
1.5.4. На клине с углом  $\alpha$  лежит монета. С каким наименьшим ускорением должен двигаться клин по горизонтальной плоскости, чтобы монета свободно падала вниз?

◇ 1.5.5\*. Скорость монеты, соскальзывающей с клина, изображена на рисунке. Графическим построением найдите скорость клина.

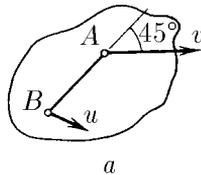
1.5.6. Плоское твердое тело вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости. Координаты начального положения точек  $A$  и  $B$  этого тела  $(-1, 2)$  и  $(3, 1)$ , а конечного —  $(-3, 1)$  и  $(-2, -3)$ . Графическим построением найдите координаты оси вращения.

◇ 1.5.7. а. Скорость точки  $A$  твердого тела равна  $v$  и образует угол  $45^\circ$  с направлением прямой  $AB$ . Скорость точки  $B$  этого тела равна  $u$ . Определите проекцию скорости точки  $B$  на направление  $AB$ .

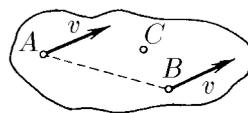
◇ б. Скорости точек  $A$  и  $B$  твердого тела равны  $v$ . Скорость точки  $C$ , находящейся в плоскости прямой  $AB$  и вектора  $v$ , равна  $u > v$ . Найдите проекцию скорости точки  $C$  на ось, перпендикулярную указанной плоскости.



К задаче 1.5.5



а

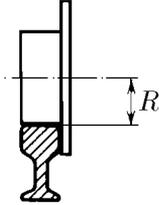


б

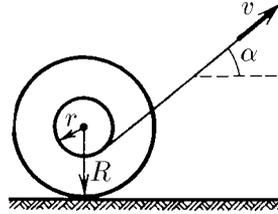
К задаче 1.5.7

◇ 1.5.8. Постройте траектории точек колеса, катящегося без проскальзывания по рельсу. Рассмотрите случаи, когда точки находятся от оси колеса на расстоянии:  $r > R$ ,  $r = R$ ,  $r < R$ . Найдите ускорение этих точек, если ось колеса движется с постоянной скоростью  $v$ . Найдите радиус кривизны траектории точки, находящейся в высшем и низшем положениях на расстоянии  $r \neq R$  от оси колеса.

◇ 1.5.9\*. Нить, намотанную на ось катушки, тянут со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Катушка катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Найдите скорость оси и угловую скорость вращения катушки. При каких углах  $\alpha$  ось движется вправо? влево? Нить так длинна, что угол  $\alpha$  не меняется при движении.



К задаче 1.5.8



К задаче 1.5.9

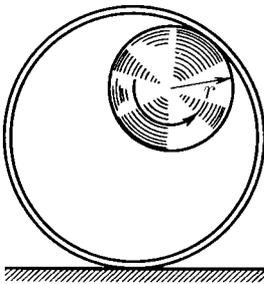
◇ 1.5.10. По внутренней поверхности закрепленного цилиндра радиуса  $2r$  катится без проскальзывания колесо радиуса  $r$ . Найдите траекторию точки обода колеса.

1.5.11. а. Луна обращена к Земле постоянно одной стороной. Сколько оборотов совершит она вокруг своей оси за время полного оборота вокруг Земли?

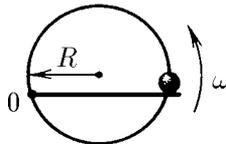
б. На сколько в среднем звездные сутки короче солнечных? Земля обходит Солнце за 365,25 солнечных суток.

◇ 1.5.12. Бусинка может двигаться по кольцу радиуса  $R$ , подталкиваемая спицей, равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  в плоскости кольца. Ось вращения спицы находится на кольце. Определите ускорение бусинки.

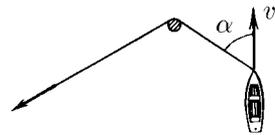
◇ 1.5.13. Веревку, привязанную к лодке, тянут за свободный конец таким образом, чтобы она не провисала. Лодка движется с постоянной скоростью  $v$ , образуя в некоторый момент времени угол  $\alpha$  с отрезком веревки, находящимся между столбом и лодкой. С какой скоростью нужно тянуть в этот момент времени свободный конец веревки?



К задаче 1.5.10



К задаче 1.5.12

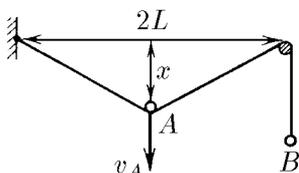


К задаче 1.5.13

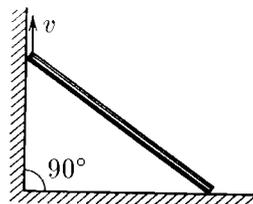
1.5.14\*. Четыре черепахи находятся в вершинах квадрата со стороной  $a$ . Они начинают двигаться одновременно с постоянной по модулю скоростью  $v$ . Каждая черепаха движется по направлению к своей соседке по часовой стрелке. Где встретятся черепахи и через какое время?

◇ **1.5.15.** Постройте примерный график зависимости скорости точки  $B$  от времени, если скорость  $v_A$  точки  $A$  постоянна. Найдите формулу этой зависимости, если  $x(0) = 0$ .

◇ **1.5.16.** Стержень упирается своими концами в стороны прямого угла. Верхний конец стержня поднимают со скоростью  $v$ . Найдите, как зависит от времени скорость его нижнего конца. За начало отсчета времени принять момент, когда верхний конец находится в вершине угла. Длина стержня  $L$ .

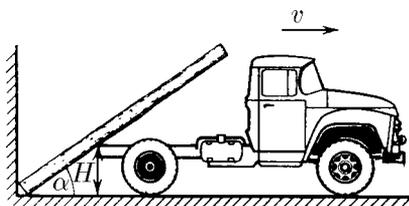


К задаче 1.5.15

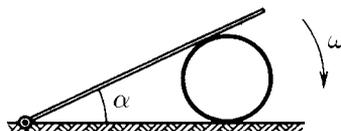


К задаче 1.5.16

◇ **1.5.17.** Бревно, упираясь нижним своим концом в угол между стеной и землей, касается дна грузовика на высоте  $H$  от земли. Найдите угловую скорость бревна в зависимости от угла  $\alpha$  между ним и горизонталью, если грузовик отъезжает от стены со скоростью  $v$ .



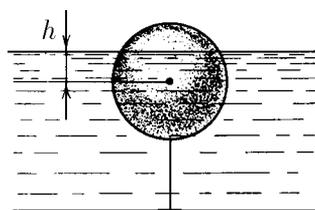
К задаче 1.5.17



К задаче 1.5.18

◇ **1.5.18\*.** Стержень, одним концом шарнирно закрепленный на горизонтальной плоскости, лежит на цилиндре. Угловая скорость стержня  $\omega$ . Проскальзывания между цилиндром и плоскостью нет. Найдите зависимость угловой скорости цилиндра от угла  $\alpha$  между стержнем и плоскостью.

◇ **1.5.19.** Сферический буй радиуса  $R$  привязан ко дну водоема. Уровень воды в водоеме поднимается со скоростью  $u$ . Какова скорость перемещения границы затопленной части буя по его поверхности в момент, когда уровень воды оказывается на  $h$  выше центра буя?



К задаче 1.5.19

**1.5.20.** Бобина магнитофонной пленки проигрывается в течение времени  $t$  при скорости протяжки пленки  $v$ . Начальный радиус бобины (с пленкой) равен  $R$ , а конечный (без пленки) —  $r$ . Какова толщина пленки?

## Динамика

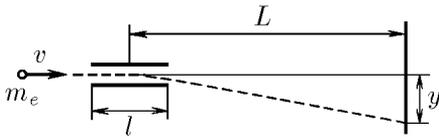
### § 2.1. Законы Ньютона

**2.1.1.** По достоверным сведениям, однажды барон Мюнхгаузен, увязнув в болоте, вытащил сам себя за волосы. Какие законы физики сумел нарушить барон?

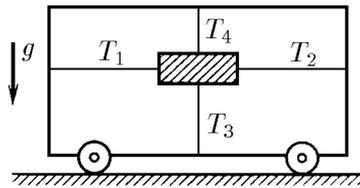
**2.1.2.** Шайба, скользящая по льду, остановилась через время  $t = 5$  с после удара о клюшку на расстоянии  $l = 20$  м от места удара. Масса шайбы  $m = 100$  г. Определите действовавшую на шайбу силу трения.

◇ **2.1.3.** В электронно-лучевой трубке электроны с начальной горизонтальной скоростью  $v$  влетают в область электрического поля протяженности  $l$ , где на них действует вертикальная сила со стороны заряженных отклоняющих пластин. Чему равна эта сила, если электроны, попадая на экран, смещаются на расстояние  $y$  по сравнению со случаем незаряженных пластин? Экран находится на расстоянии  $L$  от центра области действия электрической силы. Масса электрона  $m_e$ .

◇ **2.1.4.** Четырьмя натянутыми нитями груз закреплен на тележке. Сила натяжения горизонтальных нитей соответственно  $T_1$  и  $T_2$ , а вертикальных —  $T_3$  и  $T_4$ . С каким ускорением тележка движется по горизонтальной плоскости?



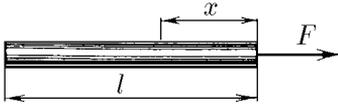
К задаче 2.1.3



К задаче 2.1.4

◇ **2.1.5.** Какая сила действует в поперечном сечении однородного стержня длины  $l$  на расстоянии  $x$  от того конца, к которому вдоль стержня приложена сила  $F$ ?

◇ **2.1.6.** Два тела массы  $m_1$  и  $m_2$  связаны нитью, выдерживающей силу натяжения  $T$ . К телам приложены силы  $F_1 = at$  и  $F_2 = 2at$ , где  $a$  — постоянный коэффициент,  $t$  — время действия силы. Определите, в какой момент времени нить порвется.



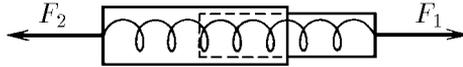
К задаче 2.1.5



К задаче 2.1.6

**2.1.7.** Для измерения массы космонавта на орбитальной станции используется подвижное сиденье известной массы  $m_0$ , прикрепленное к пружине. При одной и той же начальной деформации (сжатии) пружины пустое сиденье возвращается в исходное положение через время  $t_0$ , если же на сиденье находится космонавт — через время  $t > t_0$ . Какова масса космонавта?

◇ **2.1.8.** Динамометр состоит из двух цилиндров, соединенных легкой пружиной. Найдите отношение масс этих цилиндров, если при приложенных к ним силам  $F_1$  и  $F_2$  динамометр показывает силу  $F$ .



К задаче 2.1.8

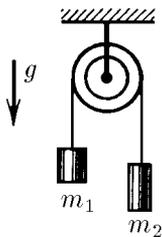
**2.1.9.** Для испытания оборудования в условиях невесомости контейнер подбрасывается вверх пневматическим поршневым устройством, находящимся на дне вакуумированной шахты. Поршень действует на контейнер в течение времени  $\Delta t$  с силой  $F = nmg$ , где  $m$  — масса контейнера с оборудованием. Через какое время контейнер упадет на дно шахты? В течение какого времени длится для оборудования состояние невесомости, если  $\Delta t = 0,04$  с, а  $n = 125$ ?

**2.1.10.** Для подготовки к работе в условиях невесомости одетые в скафандры космонавты тренируются в воде. При этом сила тяжести, действующая на них, уравновешивается выталкивающей силой. В чем отличие такой «невесомости» от настоящей?

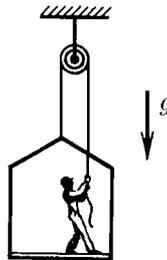
◇ **2.1.11.** Найдите ускорение грузов и силы натяжения нитей в системе, изображенной на рисунке. Блок и нити невесомы, трения нет.

◇ **2.1.12.** Маляр работает в подвесной люльке. Ему понадобилось срочно подняться вверх. Он принимается тянуть за веревку с такой силой, что сила его давления на пол люльки уменьшилась до 400 Н. Масса люльки 12 кг, масса маляра 72 кг. Чему равно ускорение люльки?

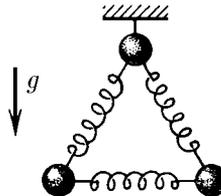
◇ **2.1.13.** Система из трех одинаковых шаров, связанных одинаковыми пружинами, подвешена на нити. Нить пережигают. Найдите ускорения шаров сразу после пережигания нити.



К задаче 2.1.11



К задаче 2.1.12

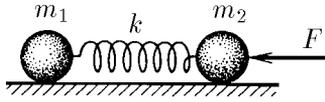


К задаче 2.1.13

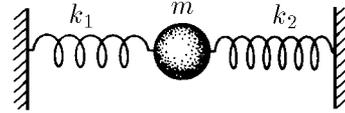
◇ **2.1.14.** Тела массы  $m_1$  и  $m_2$  соединены пружиной жесткости  $k$ . На тело массы  $m_2$  действует постоянная сила  $F$ , направленная вдоль пружины к телу массы  $m_1$ . Найдите, на сколько сжата пружина, если никаких других внешних

сил нет, а колебания уже прекратились. Каким будет ускорение тел сразу же после прекращения действия силы  $F$ ?

◇ **2.1.15.** Тело массы  $m$  соединено двумя пружинами жесткости  $k_1$  и  $k_2$  с неподвижными стенками, пружины первоначально не деформированы. При возникших колебаниях наибольшее ускорение тела равно  $a$ . Найдите максимальное отклонение тела от положения равновесия и максимальные силы, с которыми пружины действуют на стенки.

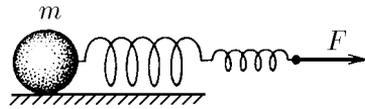


К задаче 2.1.14



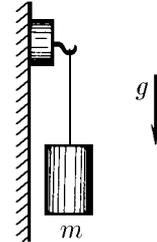
К задаче 2.1.15

◇ **2.1.16.** Тело массы  $m$  прикреплено к двум соединенным последовательно пружинам жесткости  $k_1$  и  $k_2$ . К свободному концу цепочки пружин приложена постоянная сила  $F$ . Каково суммарное удлинение пружин, если колебания уже прекратились?



К задаче 2.1.16

◇ **2.1.17.** Легкий магнит с крюком на вертикальной стальной плите остается неподвижным, пока подвешенный к нему груз не превосходит по массе  $m_0$ . Чему равна магнитная сила, если коэффициент трения магнита по стали равен  $\mu$ ? С каким ускорением скользит магнитная подвеска, если масса груза  $m > m_0$ ?



К задаче 2.1.17

**2.1.18.** Тело, находящееся на горизонтальной плоскости, тянут за нить в горизонтальном направлении. Нарисуйте график зависимости силы трения, действующей на тело со стороны плоскости, от силы натяжения нити. Первоначально тело неподвижно. Масса тела 10 кг, коэффициент трения 0,51.

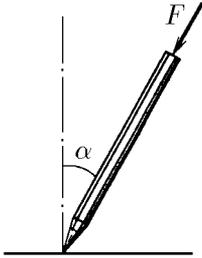
◇ **2.1.19.** Если нажимать пальцем на шариковую ручку, опирающуюся на твердую поверхность, одновременно наклоняя ее, то, пока ручка образует малый угол с перпендикуляром к поверхности, она будет послушно следовать за пальцем руки. Как только угол наклона ручки превысит некоторое максимальное значение  $\alpha_{\max}$ , она выскользнет из-под пальца, как бы сильно или слабо ни нажимать на нее. Поэкспериментируйте сами и оцените коэффициент трения между шариком ручки и поверхностью, на которую она опирается.

◇ **2.1.20.** На горизонтальной доске лежит брусок массы  $m$ . Доску медленно наклоняют. Определите зависимость силы трения, действующей на брусок, от угла наклона доски  $\alpha$ . Коэффициент трения  $\mu$ .

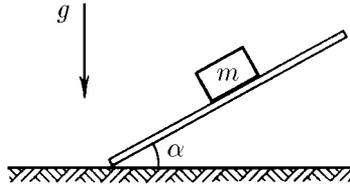
◇ **2.1.21.** Ленточный подъемник образует угол  $\alpha$  с горизонтом. С каким максимальным ускорением может подниматься ящик на таком подъемнике, если коэффициент трения равен  $\mu$ ? Лента не прогибается.

**2.1.22.** Через какое время скорость тела, которому сообщили вверх по наклонной плоскости скорость  $v$ , снова будет равна  $v$ ? Коэффициент трения  $\mu$ , угол между плоскостью и горизонтом  $\alpha$ ,  $\text{tg } \alpha > \mu$ .

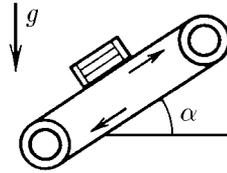
**2.1.23.** На тело массы  $m$ , лежащее на горизонтальной плоскости, действует сила  $F$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Коэффициент трения  $\mu$ . Найдите ускорение тела, если оно не отрывается от плоскости.



К задаче 2.1.19

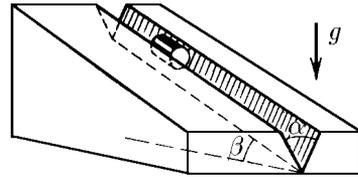


К задаче 2.1.20



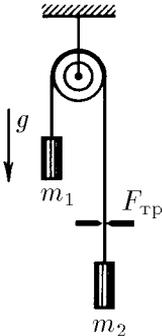
К задаче 2.1.21

◇ **2.1.24.** Цилиндр скользит по желобу, имеющему вид двугранного угла с раствором  $\alpha$ . Ребро двугранного угла наклонено под углом  $\beta$  к горизонту. Плоскости двугранного угла образуют одинаковые углы с горизонтом. Определите ускорение цилиндра. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью желоба  $\mu$ .

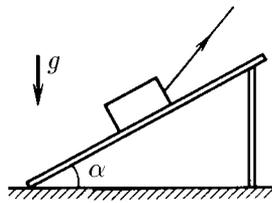


К задаче 2.1.24

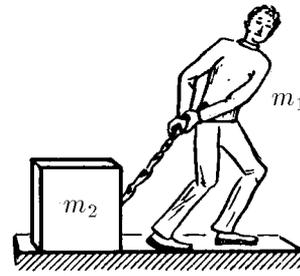
◇ **2.1.25.** Нить, перекинутая через блок с неподвижной осью, пропущена через щель. На концах нити подвешены грузы, масса которых  $m_1$  и  $m_2$ . Определите ускорения грузов, если при движении нити на нее со стороны щели действует постоянная сила трения  $F_{\text{тр}}$ .



К задаче 2.1.25



К задаче 2.1.26



К задаче 2.1.27

◇ **2.1.26\*.** По деревянным сходням, образующим угол  $\alpha$  с горизонтом, втаскивают за привязанную к нему веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни  $\mu$ . Под каким углом к горизонту следует тянуть веревку, чтобы с наименьшим усилием втащить ящик?

◇ **2.1.27\*.** Человек массы  $m_1$ , оставаясь на месте, тянет за веревку груз массы  $m_2$ . Коэффициент трения о горизонтальную плоскость равен  $\mu$ . При какой наименьшей силе натяжения веревки груз стронется с места? Под каким углом к горизонтальной плоскости должна быть направлена веревка?

**2.1.28.** На обледеневшем участке шоссе коэффициент трения между колесами и дорогой в десять раз меньше, чем на необледеневшем. Во сколько раз нужно уменьшить скорость автомобиля, чтобы тормозной путь на обледеневшем участке шоссе остался прежним?

**2.1.29.** Автомобиль с мощным двигателем, трогаясь с места, за 5 с набирает скорость 72 км/ч. Найдите коэффициент трения между колесами и дорогой. Каков наименьший тормозной путь автомобиля, набравшего эту скорость?

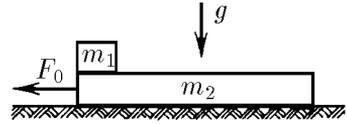
◇ **2.1.30\***. Тело массы  $m_1$  лежит на доске массы  $m_2$ , находящейся на гладкой горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между телом и доской  $\mu$ .

а. Какую силу надо приложить к доске, чтобы тело соскользнуло с нее? За какое время тело соскользнет, если к доске приложена сила  $F_0$ , а длина доски равна  $l$ ?

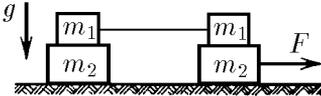
б. С каким ускорением движутся тело и доска, если сила  $F_0$  действует на тело массы  $m_1$ ?

◇ **2.1.31**. На гладком горизонтальном столе расположена система грузов, изображенная на рисунке. Правый нижний груз тянут вдоль стола с силой  $F$ , как указано на рисунке. Коэффициент трения между грузами массы  $m_1$  и  $m_2$  равен  $\mu$ . Найдите ускорение всех грузов системы.

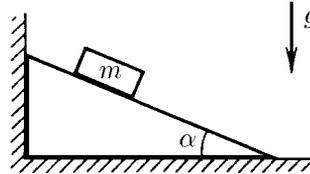
◇ **2.1.32**. Определите силу, действующую на вертикальную стенку со стороны клина, если на него положили груз массы  $m$ . Угол при основании клина  $\alpha$ . Коэффициент трения между грузом и поверхностью клина  $\mu$ . Трения между полом и клином нет.



К задаче 2.1.30



К задаче 2.1.31

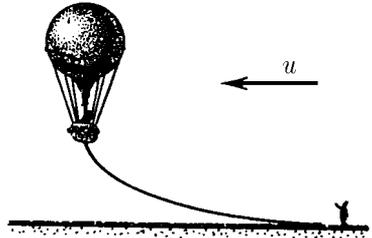


К задаче 2.1.32

**2.1.33**. Почему скорость дождевых капель не зависит от высоты туч и сильно зависит от размеров капель?

**2.1.34**. Сила сопротивления воздуха, действующая на велосипедиста, пропорциональна квадрату скорости велосипедиста:  $f = \alpha v^2$ . На горизонтальной дороге наибольшая скорость велосипедиста составляет примерно 20 м/с. Оцените коэффициент пропорциональности  $\alpha$ , если масса велосипедиста вместе с велосипедом 70 кг, а коэффициент трения между колесами и дорогой 0,4.

◇ **2.1.35\***. Масса воздушного шара вместе с канатом, волочащимся по земле, равен  $m$ ; выталкивающая сила, действующая на шар, равна  $F$ ; коэффициент трения каната о землю равен  $\mu$ . Сила сопротивления воздуха, действующая на воздушный шар, пропорциональна квадрату скорости шара относительно воздуха:  $f = \alpha v^2$ . Найдите скорость шара относительно земли, если дует горизонтальный ветер со скоростью  $u$ .



К задаче 2.1.35

**2.1.36\***. Скорость тела массы  $m$  в вязкой жидкости убывает с пройденным расстоянием  $l$  по закону  $v = v_0 - \beta l$ , где  $v_0$  — начальная скорость, а  $\beta$  — постоянный коэффициент. Как зависит сила вязкого трения, действующая на тело со стороны жидкости, от скорости тела?

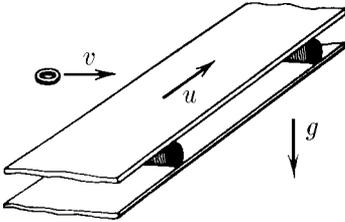
**2.1.37**. Сила сопротивления воздуха, действующая на капли дождя, пропорциональна произведению квадрата скорости капель на квадрат их радиуса:  $f = A \rho_0 r^2 v^2$ , где  $\rho_0 \approx 1,3 \text{ кг/м}^3$  — плотность воздуха, а безразмерный коэффициент  $A$  для круглых капель порядка 1. Какие капли, крупные или мелкие, падают на землю с большей скоростью? Оцените скорость капли радиуса  $r = 1 \text{ мм}$  при падении ее с большой высоты.

**2.1.38.** Сила сопротивления воздуха, действующая на капли тумана, пропорциональна произведению радиуса на скорость:  $f = \gamma r v$ . Капли радиуса  $r = 0,1$  мм, падая с большой высоты, у земли имеют скорость около 1 м/с. Какую скорость будут иметь капли, радиус которых в два раза меньше? в десять раз меньше?

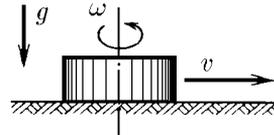
**2.1.39\*.** Сила сопротивления жидкости или газа, пропорциональная квадрату скорости движущегося тела, связана с образованием вихрей в среде вблизи поверхности этого тела. Сила сопротивления, пропорциональная скорости движущегося тела, связана с проскальзыванием слоев среды при обтекании ею этого тела. Оба явления происходят одновременно. Почему тем не менее в тех или иных условиях можно принимать во внимание только один какой-либо вид сопротивления? По данным двух предыдущих задач оцените, при каком значении произведения радиуса круглой капли на ее скорость оба вида сопротивления воздуха сравнимы по своему воздействию на движение капли.

◇ **2.1.40.** Лента горизонтального транспортера движется со скоростью  $u$ . На ленту по касательной к ней влетает шайба, начальная скорость  $v$  которой перпендикулярна краю ленты. Найдите максимальную ширину ленты, при которой шайба достигнет другого ее края, если коэффициент трения между шайбой и лентой  $\mu$ .

◇ **2.1.41.** Какая шайба, вращающаяся вокруг своей оси или не вращающаяся, пройдет больший путь до остановки на шероховатой горизонтальной поверхности? Начальная скорость центров шайб одинакова.



К задаче 2.1.40

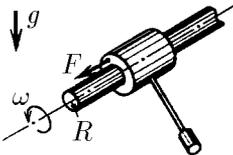


К задаче 2.1.41

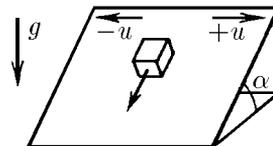
**2.1.42.** Почему крепко засевший в бревне гвоздь легче вытаскивать, если при вытаскивании одновременно вращать его вокруг собственной оси?

◇ **2.1.43\*.** Горизонтальную ось радиуса  $R$ , вращающуюся с угловой скоростью  $\omega$ , обжимает втулка, снабженная противовесом, чтобы, перемещаясь вдоль оси, она не вращалась. Определите установившуюся скорость втулки под действием силы  $F$ , приложенной к ней вдоль оси. Максимальная сила трения оси о втулку  $F_{\text{тр}} > F$ .

◇ **2.1.44\*.** Определите установившуюся скорость тела, находящегося на наклонной плоскости, которая с большой частотой меняет одно направление своей скорости  $u$  на противоположное. Направление движения плоскости показано на рисунке. Коэффициент трения  $\mu$ , угол наклона плоскости  $\alpha$ ,  $\text{tg } \alpha < \mu$ .



К задаче 2.1.43



К задаче 2.1.44

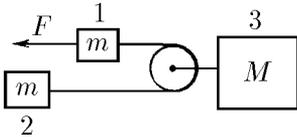
**2.1.45\*.** На плоскости, тангенс угла наклона которой равен коэффициенту

трения, лежит монета. В горизонтальном направлении вдоль плоскости монете сообщили скорость  $v$ . Найдите установившуюся скорость монеты.

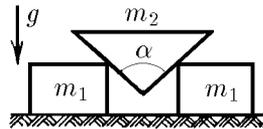
**2.1.46.** По наклонной плоскости скользят два тела одинаковой массы, связанные нитью. Сила натяжения нити  $T$ . Трения между одним телом и доской нет. Определите силу трения между доской и другим телом.

◇ **2.1.47\***. Найдите ускорение тел системы, изображенной на рисунке. Сила  $F$  приложена по направлению нити к одному из тел массы  $m$ . Участки нити по обе стороны от легкого блока, прикрепленного к телу массы  $M$ , параллельны.

◇ **2.1.48.** Между двумя одинаковыми гладкими брусками массы  $m_1$  каждый вставлен клин массы  $m_2$  с углом  $\alpha$ . Определите ускорение тел.



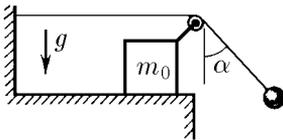
К задаче 2.1.47



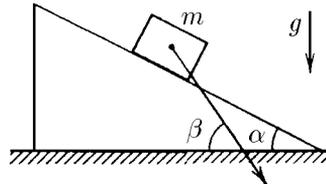
К задаче 2.1.48

◇ **2.1.49\***. К свободному концу нити, прикрепленной к стенке и переброшенной через ролик, подвешен груз. Ролик закреплен на бруске массы  $m_0$ , который может скользить по горизонтальной плоскости без трения. В начальный момент нить с грузом отклоняют от вертикали на угол  $\alpha$  и затем отпускают. Определите ускорение бруска, если угол, образованный нитью с вертикалью, не меняется при движении системы. Чему равна масса груза?

◇ **2.1.50.** На гладкой горизонтальной плоскости находится клин с углом  $\alpha$  при основании. Тело массы  $m$ , положенное на клин, опускается с ускорением, направленным под углом  $\beta > \alpha$  к горизонтали. Определите массу клина.

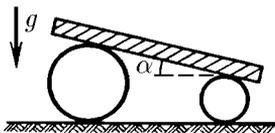


К задаче 2.1.49

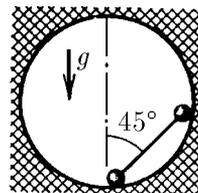


К задаче 2.1.50

◇ **2.1.51\***. На два катка разного радиуса положили тяжелую плиту. Она образует угол  $\alpha$  с горизонтом. Найдите ускорение этой плиты. Проскальзывания нет. Массой катков пренебречь.



К задаче 2.1.51



К задаче 2.1.53

**2.1.52.** Ускорение звезд, входящих в состав двойной звезды,  $a_1$  и  $a_2$ . Какова масса второй звезды, если масса первой  $m_1$ ?

◇ **2.1.53.** В сферическую полость поместили гантель (два шарика массы  $m$  каждый, соединенные невесомым стержнем) так, как это показано на рисунке. Определите силу давления шариков на стенки сразу же после того, как гантель отпустили. Радиус шариков гантели много меньше радиуса сферы.

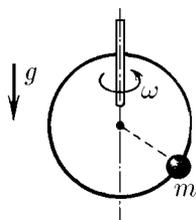
**2.1.54.** Электроны, движущиеся по окружности любого радиуса вокруг заряженной нити, имеют одну и ту же скорость  $v$ . Масса электрона  $m_e$ . Как зависит сила, действующая со стороны нити на электрон, от расстояния между электроном и нитью? Опишите качественно начальный отрезок траектории, по которой будет двигаться электрон, если скорость его при движении по окружности станет вдруг чуть меньше  $v$ ? чуть больше  $v$ ?

**2.1.55.** Два шарика массы  $m$  каждый, связанные нитью длины  $l$ , движутся со скоростью  $v$  по горизонтальному столу в направлении, перпендикулярном к связывающей их нити (нить не провисает). Середина нити налетает на гвоздь. Чему равна сразу после этого сила натяжения нити?

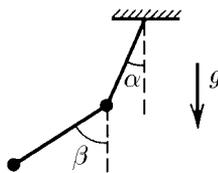
**2.1.56.** Тело массы  $M$  связано нитью длины  $l$  с осью, вокруг которой оно обращается с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите силу натяжения нити. Размеры тела малы, силой тяжести пренебречь. Замените нить однородной веревкой массы  $m$  и найдите силу ее натяжения на расстоянии  $x$  от оси вращения.

◇ **2.1.57.** На гладкое проволочное кольцо радиуса  $R$ , расположенное вертикально, надета маленькая бусинка. Кольцо вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей по диаметру кольца. Где находится бусинка?

◇ **2.1.58.** К тяжелому шарiku, подвешенному на нити длины  $l$ , подвешен второй тяжелый шарик на нити той же длины. При вращении шариков вокруг вертикальной оси, проходящей через верхнюю точку подвеса, обе нити лежат в одной плоскости и составляют с вертикалью постоянные углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Найдите угловую скорость вращения шариков.



К задаче 2.1.57



К задаче 2.1.58

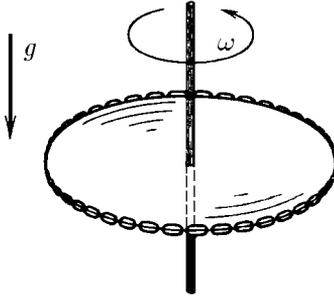
**2.1.59.** Груз массы  $m$ , прикрепленный пружиной жесткости  $k$  к оси, движется вокруг этой оси по окружности радиуса  $R$  с угловой скоростью  $\omega$ . Какова длина недеформированной пружины?

**2.1.60\*.** Из тонкого резинового жгута массы  $m$  и жесткости  $k$  сделали кольцо радиуса  $R_0$ . Это кольцо раскрутили вокруг его оси. Найдите новый радиус кольца, если угловая скорость его вращения равна  $\omega$ .

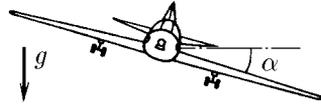
◇ **2.1.61\*.** Кольцевая цепочка массы  $m$  надета на горизонтальный диск радиуса  $R$ . Сила натяжения надетой цепочки  $T$ . Найдите коэффициент трения между диском и цепочкой, если при вращении диска с угловой скоростью, равной или превышающей  $\omega$ , цепочка с него спадает.

◇ **2.1.62.** Самолет совершает вираж, двигаясь по горизонтальной окружности радиуса  $R$  с постоянной скоростью  $v$ . Какой угол составляет плоскость крыльев самолета с горизонтом?

**2.1.63.** Горизонтальный диск начинают раскручивать вокруг его оси с линейно возрастающей во времени угловой скоростью  $\omega = \varepsilon t$ . При какой угловой скорости тело, расположенное на расстоянии  $r$  от оси диска, начнет соскальзывать с него, если коэффициент трения между ними равен  $\mu$ ?



К задаче 2.1.61

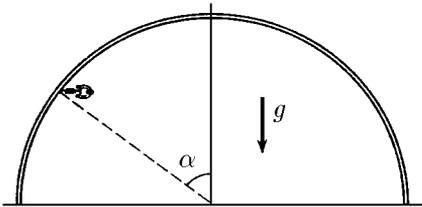


К задаче 2.1.62

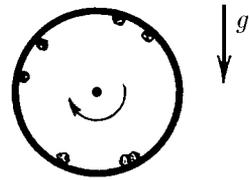
**2.1.64.** С какой максимальной скоростью может ехать по горизонтальной плоскости мотоциклист, описывая круг радиуса  $R$ , если коэффициент трения равен  $\mu$ ? На какой угол от вертикали он должен при этом отклониться? Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость мотоциклиста при движении по наклонному треку с углом наклона  $\alpha$  к горизонту по сравнению с максимальной допустимой скоростью при движении по горизонтальному треку при том же радиусе поворота и том же коэффициенте трения?

**2.1.65\*.** Конькобежец на ледяной дорожке старается пройти вираж как можно ближе к внутренней бровке. Велосипедист на велотреке, наоборот, проходит вираж возможно дальше от внутренней бровки. Как объяснить это различие в тактике прохождения виража? Профиль велотрека все круче по мере удаления от внутренней его бровки.

◇ **2.1.66\*.** В цирковом аттракционе мотоциклист движется по внутренней поверхности сферы радиуса  $R$ . Разогнавшись, он начинает описывать горизонтальную окружность в верхней полусфере. После этого для большего эффекта нижнюю полусферу убирают. Определите минимальную скорость мотоциклиста, если коэффициент трения шин о поверхность сферы равен  $\mu$ , а угол между вертикалью и направлением к мотоциклисту из центра сферы равен  $\alpha$ .



К задаче 2.1.66



К задаче 2.1.67

◇ **2.1.67\*.** С какой угловой скоростью должен вращаться вокруг своей оси горизонтально расположенный цилиндр, чтобы мелкие частицы внутри цилиндра не соскальзывали с его поверхности? Коэффициент трения между поверхностью цилиндра и частицами равен 1, внутренний радиус цилиндра  $R$ .

## § 2.2. Импульс. Центр масс

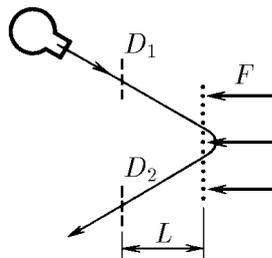
**2.2.1.** Частица массы  $t$  движется со скоростью  $v$ , а частица массы  $2t$  движется со скоростью  $2v$  в направлении, перпендикулярном направлению движения первой частицы. На каждую частицу начинают действовать одинаковые силы.

После прекращения действия сил первая частица движется со скоростью  $2v$  в направлении, обратном первоначальному. Определить скорость второй частицы.

**2.2.2.** Первоначально неподвижное тело, находящееся на горизонтальной плоскости, начали тянуть за привязанную к нему веревку с постоянной горизонтальной силой  $F$ . Через время  $\Delta t$  действие этой силы прекратилось. Какая сила трения действовала на тело во время его движения, если оно остановилось спустя время  $3\Delta t$  после начала движения?

**2.2.3.** Космический корабль должен, изменив курс, двигаться с прежним по модулю импульсом  $p$  под углом  $\alpha$  к первоначальному направлению. На какое наименьшее время нужно включить двигатель с силой тяги  $F$  и как при этом нужно ориентировать ось двигателя?

◇ **2.2.4\*.** В масс-пролетном спектрометре источник испускает сгусток заряженных частиц, которые сначала летят свободно и пролетают через первый датчик  $D_1$ , находящийся на расстоянии  $L$  от сетки. За сеткой по нормали к ней на частицы действует электрическая сила  $F$ . Частицы поворачиваются и вылетают через сетку назад, пролетая через второй датчик  $D_2$ , находящийся на том же расстоянии от сетки. От напряжения источника зависит скорость вылетающих частиц, но точное ее значение остается неизвестным. Меняя напряжение, измеряют время между срабатываниями датчиков и находят наименьшее его значение  $\Delta t$ . Какова масса частицы? Как можно найти массу частиц, если источник испускает несколько сортов частиц с разной массой?



К задаче 2.2.4

Какая сила трения действовала на тело во время его движения, если оно остановилось спустя время  $3\Delta t$  после начала движения?

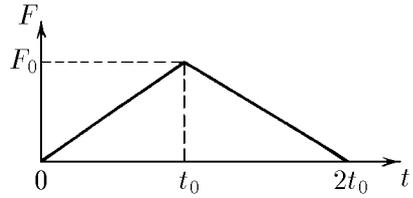
**2.2.5\*.** Ящик с песком массы  $M$  лежит на горизонтальной плоскости, коэффициент трения с которой равен  $\mu$ . Под углом  $\alpha$  к вертикали в ящик со скоростью  $v$  влетает пуля массы  $m$  и почти мгновенно застревает в песке. Через какое время после попадания пули в ящик, он, начав двигаться, остановится? При каком значении  $\alpha$  он вообще не сдвинется?

**2.2.6.** Сестры стоят на коньках на гладком льду. Старшая толкает младшую. Обе начинают катиться, но младшая с заметно большей скоростью, чем старшая. «Давай, теперь я тебя толкну», — говорит младшая. Вопреки ее ожиданиям, она снова откатывается с большей скоростью, чем старшая сестра, причем во столько же раз большей, что и прежде. Почему так происходит?

**2.2.7.** При наблюдениях с Земли удастся определить только радиальную скорость звезд-партнеров, входящих в состав двойной звезды (т. е. проекцию скорости на прямую Земля — звезда). При измерениях получены значения радиальной скорости  $v_1$  и  $u_1$  звезд-партнеров двойной звезды. При повторных измерениях, проведенных через год, значения этой скорости оказались равными  $v_2$  и  $u_2$ . Найдите отношение масс звезд-партнеров, входящих в состав этой двойной звезды. Почему нужно изменить расчеты, если повторное измерение проводится через месяц или полгода?

**2.2.8.** Человек решил бежать по резиновой ленте, натянутой на двух горизонтальных роликах, трения в осях которых нет. На первый взгляд кажется, что это невозможно: человек не может передать импульс ни ленте, ни роликам, так как их полный импульс равен нулю. Следует ли из этого, что человек останется на месте?

◇ **2.2.9\***. На покоящееся тело массы  $m_1$  налетает со скоростью  $v$  тело массы  $m_2$ . Сила, возникающая при взаимодействии тел, линейно зависящая от времени, растет от нуля до значения  $F_0$  за время  $t_0$ , а затем равномерно убывает до нуля за то же время  $t_0$ . Определите скорость тел после взаимодействия, считая, что все движения происходят по одной прямой.



К задаче 2.2.9

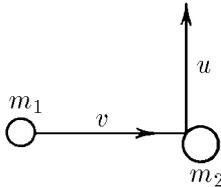
**2.2.10.** Космический корабль перед отделением последней ступени ракеты-носителя имел скорость  $v$ . После отбрасывания последней ступени его скорость стала равной  $1,01 v$ , при этом отделившаяся ступень удаляется относительно корабля со скоростью  $0,04 v$ . Какова масса последней ступени, если масса корабля  $m_0$ ?

**2.2.11.** Протон с начальной скоростью  $v$  летит прямо на первоначально покоящееся ядро гелия. Какова скорость частиц при наибольшем их сближении? Масса ядра гелия близка к учетверенной массе протона.

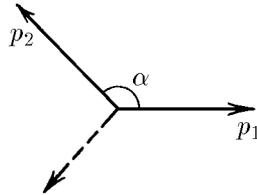
**2.2.12.** Снаряд разрывается в наивысшей точке траектории на расстоянии  $L$  по горизонтали от пушки на два одинаковых осколка. Один из них вернулся к пушке по первоначальной траектории снаряда. Где упал второй осколок?

**2.2.13.** Артиллерист стреляет из пушки ядром массы  $m$  так, чтобы оно упало в неприятельском лагере. На вылетевшее из пушки ядро садится барон Мюнхгаузен, масса которого  $5m$ . Какую часть пути до неприятельского лагеря ему придется идти пешком?

◇ **2.2.14.** Частица массы  $m_1$ , имеющая скорость  $v$ , налетела на покоящееся тело массы  $m_2$  и отскочила от него со скоростью  $u$  под прямым углом к направлению первоначального движения. Какова скорость тела массы  $m_2$ ?

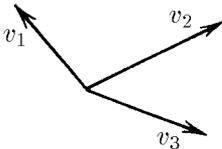


К задаче 2.2.14

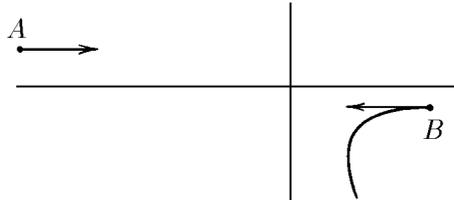


К задаче 2.2.15

◇ **2.2.16.** Радиоактивное ядро распалось на три осколка массы  $m_1, m_2, m_3$ , имеющих взаимно перпендикулярные скорости  $v_1, v_2, v_3$  соответственно. Какова была скорость ядра до распада?



К задаче 2.2.16



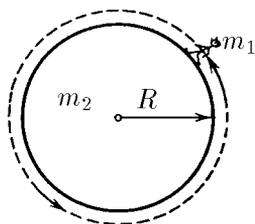
К задаче 2.2.18

**2.2.17.** Космонавт массы  $m_1$  приближается к космическому кораблю массы  $m_2$  с помощью легкого троса. Первоначально корабль и космонавт неподвижны, а расстояние между ними равно  $l$ . Какое расстояние пройдут корабль и космонавт до встречи?

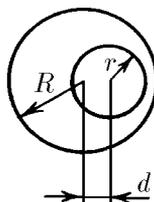
◇ **2.2.18.** Две заряженные частицы массы  $m$  и  $2m$ , имеющие равные по модулю импульсы, одновременно вылетают навстречу друг другу из точек  $A$  и  $B$ . Частицы взаимодействуют только друг с другом. По траектории частицы массы  $2m$ , приведенной на рисунке, восстановите траекторию другой частицы.

◇ **2.2.19.** Космическая станция представляет собой цилиндр радиуса  $R$  и массы  $m_2$ . Космонавт массы  $m_1$  начал круговой обход станции по ее поверхности. Определите траекторию космонавта и траекторию центра станции. Первоначально космонавт и станция неподвижны.

◇ **2.2.20.** Где находится центр масс: однородного прута, согнутого посередине под прямым углом? однородной треугольной пластинки? гардеробного номерка в виде диска с круглым отверстием?

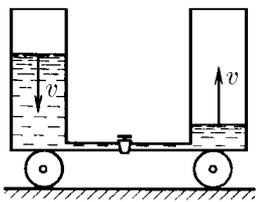


К задаче 2.2.19



К задаче 2.2.20

◇ **2.2.21.** На первоначально неподвижной тележке установлены два вертикальных цилиндрических сосуда, соединенных тонкой трубкой. Площадь сечения каждого сосуда  $S$ , расстояние между их осями  $l$ . Один из сосудов заполнен жидкостью плотности  $\rho$ . Кран на соединительной трубке открывают. Найдите скорость тележки в момент времени, когда скорость уровней жидкости равна  $v$ . Полная масса всей системы  $m$ .



К задаче 2.2.21

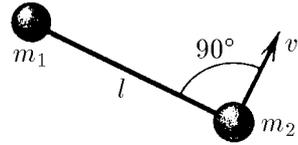


К задаче 2.2.22

◇ **2.2.22\*.** На гладком полу стоит сосуд, заполненный водой плотности  $\rho_0$ ; объем воды  $V_0$ . Оказавшийся на дне сосуда жук объема  $V$  и плотности  $\rho$  через некоторое время начинает ползти по дну сосуда со скоростью  $u$  относительно него. С какой скоростью станет двигаться сосуд по полу? Массой сосуда пренебречь, уровень воды все время остается горизонтальным.

**2.2.23.** Для создания искусственной силы тяжести два отсека орбитальной станции (отношение масс  $1 : 2$ ) развели на расстояние  $R$  друг от друга и раскрутили вокруг их общего центра масс. Определите время полного оборота отсеков, если в более массивном отсеке искусственная сила тяжести в два раза меньше силы тяжести на Земле.

◇ **2.2.24\***. Два тела массы  $m_1$  и  $m_2$  связаны натянутой нитью длины  $l$  и движутся по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени оказалось, что первое тело неподвижно, а скорость второго тела, равная  $v$ , перпендикулярна нити. Определите силу натяжения нити.



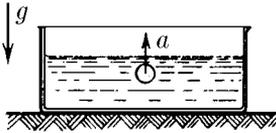
К задаче 2.2.24

**2.2.25\***. Космическая станция состоит из двух отсеков массы  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных длинным однородным тросом длины  $L$ . Станция вращается вокруг оси, перпендикулярной тросу. Какова угловая скорость вращения, если сила натяжения троса вблизи первого отсека равна  $T_1$ , а вблизи второго —  $T_2$ ? Какова масса троса?

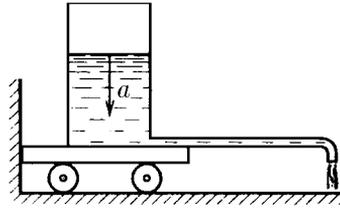
**2.2.26\***. Три точечные массы  $m_1, m_2, m_3$  связаны нитями длины  $l$  и вращаются с угловой скоростью  $\omega$  вокруг центра массы, сохраняя конфигурацию равностороннего треугольника. Найдите силу натяжения всех нитей.

◇ **2.2.27**. В сосуде, наполненном водой плотности  $\rho$ , с ускорением  $a$  всплывает пузырек воздуха, объем которого  $V$ . Найдите силу давления со стороны сосуда на опору. Масса сосуда вместе с водой равна  $m$ .

◇ **2.2.28\***. На тележке установлен цилиндрический сосуд с площадью сечения  $S$ , наполненный жидкостью плотности  $\rho$ . От сосуда параллельно полу отходит длинная и тонкая горизонтальная трубка, небольшой отрезок которой вблизи конца загнут по вертикали вниз. Расстояние от оси сосуда до отверстия трубки равно  $L$ . Уровень жидкости в сосуде опускается с ускорением  $a$ . Какой горизонтальной силой можно удержать тележку на месте?



К задаче 2.2.27



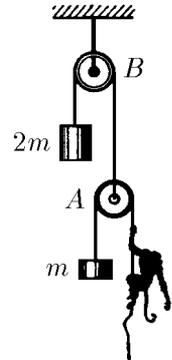
К задаче 2.2.28

◇ **2.2.29\***. Обезьяна массы  $m$  уравновешена противовесом на блоке  $A$ . Блок  $A$  уравновешен грузом массы  $2m$  на блоке  $B$ . Система неподвижна. Как будет двигаться груз, если обезьяна начнет равномерно выбирать веревку со скоростью  $u$  относительно себя? Массой блоков и трением пренебречь.

**2.2.30**. На тросе висит небольшой ящик с песком, в котором застревают пули, летящие горизонтально со скоростью  $v$ . Масса пули  $m_1$  много меньше массы ящика  $m_2$ . Трос отклоняется от вертикали на угол  $\alpha$ . Какое число пуль попадает в песок за единицу времени?

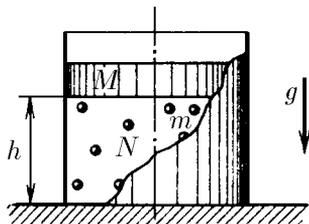
**2.2.31**. На чаше весов прыгает  $N$  шариков массы  $m$  каждый. Какова средняя сила, действующая на чашу весов, если скорость шариков по модулю не меняется? Увеличивается или уменьшается эта сила, если после удара скорость каждого шарика уменьшается?

◇ **2.2.32\***. В цилиндре под поршнем массы  $M$  прыгают, упруго ударяясь о поршень и дно цилиндра,  $N$  шариков массы  $m$  каждый. Сила тяжести, действующая на поршень, уравновешена ударами шариков. Расстояние между дном цилиндра и поршнем равно  $h$ . Полная энергия каждого шарика одинакова. На какую высоту будут подсакивать шарики, если поршень быстро убрать?  $N \gg 1$ .

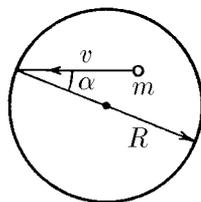


К задаче 2.2.29

◇ **2.2.33\***. Внутри сферы радиуса  $R$  со скоростью  $v$  движется частица массы  $m$ , упруго ударяясь о ее стенки. Скорость частицы образует угол  $\alpha$  с радиусом, проведенным в точку удара. Какова по модулю средняя сила, действующая со стороны стенок сферы на частицу? Какова средняя сила, действующая на единицу площади сферы, если в единице объема содержится  $N$  таких частиц? Частицы между собой не сталкиваются.



К задаче 2.2.32



К задаче 2.2.33

◇ **2.2.34**. Две тележки массы  $M$  каждая движутся параллельно с начальными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Груз массы  $m$ , сначала лежавший на первой тележке, с почти нулевой скоростью относительно этой тележки перебрасывают на вторую тележку. Затем с почти нулевой скоростью уже относительно второй тележки его перебрасывают обратно на первую. Какой станет разность скоростей тележек после  $N$  таких перебросов груза туда и обратно? Попробуйте качественно объяснить вязкое трение, возникающее при проскальзывании слоев газа относительно друг друга.



К задаче 2.2.34

**2.2.35**. Ракета сечения  $S$ , двигаясь в космическом пространстве со скоростью  $u$ , попадает в облако неподвижной пыли плотности  $\rho$ . Какую силу тяги должны разводить двигатели ракеты, чтобы та могла продолжать двигаться с той же постоянной скоростью? Удары пылинок о ракету считать абсолютно неупругими. Изменением массы ракеты пренебречь.

**2.2.36**. Ракета массы  $m$  зависла над поверхностью Земли. Сколько топлива в единицу времени она должна расходовать при этом, если скорость истечения газа  $u$ ? Как изменится результат, если ракета поднимается с ускорением  $a$ ?

**2.2.37**. Определите силу тяги воздушно-реактивного двигателя самолета, летящего со скоростью  $v$ . Массовый расход топлива и поступающего в двигатель воздуха равен  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. Скорость продуктов сгорания относительно самолета на выходе из двигателя  $u$ .

**2.2.38**. Водометный катер движется в спокойной воде. Сила сопротивления воды движению катера  $F = kv^2$ . Скорость выбрасываемой воды относительно катера  $u$ . Определите установившуюся скорость катера, если сечение потока захваченной двигателем воды  $S$ , плотность воды  $\rho$ .

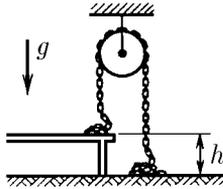
**2.2.39**. Труба радиуса  $r$  заполнена пористым веществом плотности  $\rho_0$ . Поршень, на который действует постоянная сила  $F$ , двигаясь в трубе, уплотняет вещество до плотности  $\rho$ . С какой скоростью движется поршень, если уплотнение вещества происходит скачком, т. е. в трубе перемещается с некоторой скоростью граница раздела, справа от которой плотность вещества  $\rho$ , а слева —  $\rho_0$ ? В начальный момент эта граница совпадает с поверхностью поршня.

**2.2.40**. На чаше весов стоят песочные часы. Когда песок внизу, показания весов  $2P_0$ . Вес песка равен  $P_0$ . Часы переворачивают. Нарисуйте график зависимости показания весов от времени. Время падения каждой песчинки  $\Delta t$ , время протекания песка  $T$ .

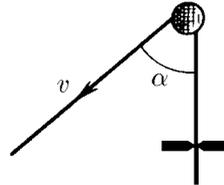
**2.2.41.** Однородная цепочка одним концом подвешена на нити так, что другим она касается поверхности стола. Нить пережигают. Определите зависимость силы давления цепочки на стол от длины еще не упавшей ее части. Удар звеньев о стол неупругий, масса цепочки  $m$ , ее длина  $l$ .

**2.2.42.** С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью  $v$ ? Масса змеи  $m$ , ее длина  $l$ .

◇ **2.2.43.** Цепь с неупругими звеньями перекинута через блок, причем часть ее лежит на столе, а часть — на полу. После того как цепь отпустили, она начала двигаться. Найдите скорость установившегося равномерного движения цепи. Высота стола  $h$ .



К задаче 2.2.43



К задаче 2.2.44

◇ **2.2.44\*.** Веревку, перекинутую через гладкий гвоздь, протаскивают со скоростью  $v$  сквозь щель. Сила трения в щели  $F$ , масса единицы длины веревки  $\rho$ . Определите силу, действующую на гвоздь, если участки веревки по разные стороны гвоздя образуют угол  $\alpha$ . При какой скорости веревка отойдет от гвоздя?

**2.2.45.** При изменении скорости космического корабля на  $v$  его масса уменьшилась в  $k$  раз. Во сколько раз при той же скорости истечения газа (относительно ракеты) уменьшилась бы его масса при изменении скорости на величину, в  $n$  раз большую  $v$ ?

**2.2.46\*.** Газ, вытекающий из сопла ракеты, имеет скорость  $v$  относительно нее. Определите изменения скорости ракеты после того, как ее масса из-за истечения газа уменьшилась в  $n$  раз.

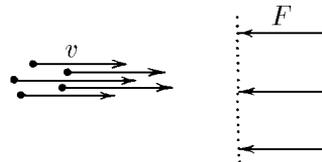
**2.2.47\*.** Скорость газа, выбрасываемого ракетой, относительно нее равна 2 км/с. Оцените начальную массу ракеты, которая может вывести на орбиту Земли спутник массы  $10^4$  кг. Как изменится результат при вдвое большей скорости истечения газа?

### § 2.3. Кинетическая энергия. Работа.

#### Потенциальная энергия

◇ **2.3.1.** Пучок заряженных частиц различной массы, имеющих одну и ту же скорость  $v$ , направили по нормали к двум сеточным электродам, между которыми на каждую частицу действует одна и та же сила  $F$ . При какой наименьшей массе частиц в пучке все они достигнут второй сетки, если ширина зазора между электродами равна  $l$ ?

**2.3.2.** Определите силу, действующую на частицу массы  $m$  в зазоре ширины  $l$  между сеточными электродами, если скорость ее изменилась от значения  $v_1$  у первого электрода до значения  $v_2$  у второго. Как по значению скорости частицы узнать направление действующей на нее силы?



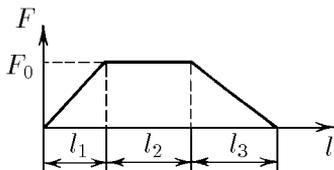
К задаче 2.3.1

**2.3.3.** Для испытания оборудования в условиях перегрузок и невесомости контейнер с ним подбрасывается на высоту 125 м пневматическим поршневым устройством, находящимся на дне вакуумной шахты. С какой силой действует поршень, подбрасывая контейнер, если при этом он выдвигается на длину  $h = 1$  м, а масса контейнера с оборудованием  $m = 2$  т?

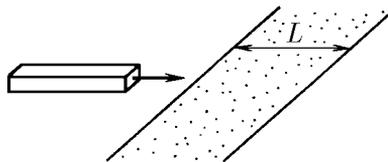
**2.3.4.** Оцените среднюю силу, развиваемую ногами человека при приземлении его после прыжка из окна второго этажа.

◇ **2.3.5.** Сила, действующая на снаряд массы  $m$  в стволе орудия, нарастает равномерно от нуля до  $F_0$  на участке ствола длины  $l_1$ , не меняется на участке ствола длины  $l_2$  и, наконец, равномерно уменьшается до нуля на участке ствола длины  $l_3$ . Какова скорость снаряда при вылете из ствола?

◇ **2.3.6.** Однородный брусок, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, попадает на шероховатый участок этой поверхности ширины  $L$ , коэффициент трения о который  $\mu$ . При какой начальной скорости он преодолет этот участок?



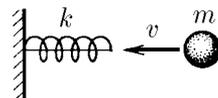
К задаче 2.3.5



К задаче 2.3.6

**2.3.7.** Оконную штору массы 1 кг и длины 2 м свертывают в тонкий валик над окном. Какова наименьшая затрачиваемая при этом работа? Трением пренебречь.

◇ **2.3.8.** Пружина жесткости  $k$  прикреплена одним концом к неподвижной стенке. На другой ее конец вдоль пружины с начальной скоростью  $v$  налетает шар массы  $m$ . Какова наибольшая деформация сжатия пружины? Ответьте на этот же вопрос для случая, когда пружина предварительно сжата и удерживается нерастяжимой нитью, связывающей ее концы (начальная деформация пружина равна  $x_0$ ).



К задаче 2.3.8

**2.3.9.** Из длинной полоски резины жесткости  $k$  сделали рогатку. Найдите кинетическую энергию «снаряда», выпущенного из этой рогатки, если резину растянули с силой  $F$  и затем отпустили.

**2.3.10.** Почему плохо стреляют и слишком туго натянутые, и слишком слабо натянутые луки? Как подобрать наиболее подходящий лук?

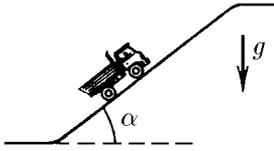
**2.3.11.** С верхнего конца доски длины  $l$ , образующей угол  $\alpha$  с вертикалью, начинает соскальзывать тело массы  $m$ . Какую кинетическую энергию оно приобретет, дойдя до нижнего конца доски? Рассмотрите случай отсутствия трения и случай, когда коэффициент трения между телом и доской  $\mu < \text{ctg } \alpha$ .

◇ **2.3.12.** Автомобиль с работающим двигателем въезжает на обледенелую гору, поверхность которой образует угол  $\alpha$  с горизонтом. Какой высоты гору может преодолеть автомобиль, если его начальная скорость при въезде на нее равна  $v$ , а коэффициент трения колес о лед  $\mu < \text{tg } \alpha$ ?

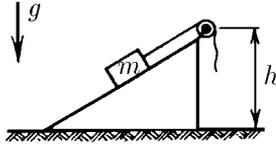
◇ **2.3.13.** Груз массы  $m$  медленно поднимают на высоту  $h$  по наклонной плоскости с помощью блока и троса. При этом совершается работа  $A$ . Затем трос отпускают, и груз скользит вниз. Какую скорость он наберет, опустившись до исходной точки?

◇ **2.3.14.** Средневековый поворотный молот имеет тяжелый боек массы  $m$  на конце легкого стержня длины  $l$ . Его приводят из горизонтального в почти вертикальное положение, поворачивая вокруг оси, проходящей через другой конец

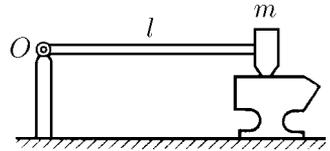
стержня. Какую наименьшую работу нужно совершить, чтобы поднять молот? Трением в оси пренебречь.



К задаче 2.3.12



К задаче 2.3.13

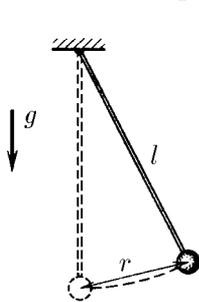


К задаче 2.3.14

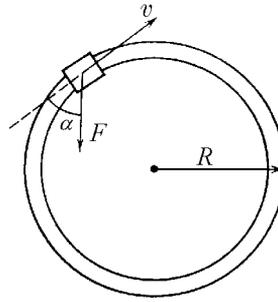
**2.3.15.** Какую наименьшую работу нужно совершить, чтобы лежащий на земле длинный однородный столб длины  $l$  и массы  $m$  поставить вертикально?

◇ **2.3.16.** Грузик, подвешенный на нити длины  $l$ , отклонили на расстояние  $r$  от точки равновесия и отпустили. Какова его наибольшая скорость?

◇ **2.3.17.** По рельсам, образующим горизонтальный круговой путь радиуса  $R$ , катится со скоростью  $v$  вагонетка массы  $m$ . Рабочий бежит за ней и начинает останавливать ее, натягивая привязанный к вагонетке трос с силой  $F$  под углом  $\pi - \alpha$  к направлению скорости вагонетки. Сколько оборотов по кругу совершит вагонетка до остановки? Трением пренебречь.

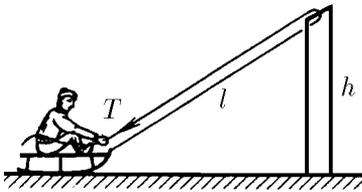


К задаче 2.3.16

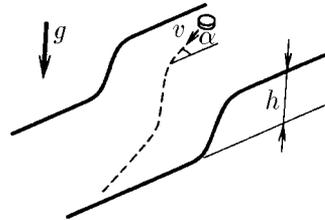


К задаче 2.3.17

◇ **2.3.18\*.** Веревка привязана к санкам и переброшена через перекладину ворот высоты  $h$ . Мальчик, сидящий на санках, начинает выбирать веревку, натягивая ее с силой  $T$ . Какую скорость он приобретет, проезжая под перекладиной? Начальная длина натянутой части веревки  $2l$ , масса мальчика с санками  $m$ . Трением пренебречь.



К задаче 2.3.18



К задаче 2.3.20

**2.3.19.** Двум одинаковым телам сообщают равные скорости, направленные под одним и тем же углом к горизонту. Одно тело находится после броска в свободном движении, а другое движется без трения по прямой трубе. Какое тело поднимется на бóльшую высоту?

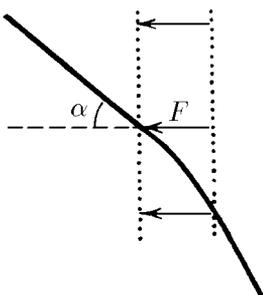
◇ **2.3.20.** Горизонтальные поверхности, отстоящие друг от друга по высоте на  $h$ , плавно соединяются. По верхней поверхности движется тело со скоростью  $v$ ,

составляющей угол  $\alpha$  с нормалью к линии сопряжения. Найдите угол между скоростью тела на нижней поверхности плоскости и нормалью к линии сопряжения. Трением пренебречь.

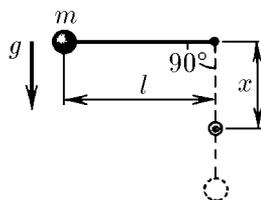
◇ **2.3.21.** Частица массы  $m$  со скоростью  $v$  влетает в область действия тормозящей силы  $F$  под углом  $\alpha$  к направлению этой силы. Под каким углом к направлению силы  $F$  она вылетит из этой области? Ширина области действия силы  $l$ . При каком условии частица не сможет пересечь эту область?

**2.3.22.** На нити подвешен шарик. Нить приводят в горизонтальное положение и затем отпускают шарик. В какой точке траектории его ускорение направлено вертикально вверх? вертикально вниз? горизонтально?

◇ **2.3.23.** Нить длины  $l$  с привязанным к ней шариком массы  $m$  отклонили на  $90^\circ$  от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии под точкой подвеса нужно поставить гвоздь, чтобы нить, налетев на него, порвалась? Нить выдерживает силу натяжения  $T$ .



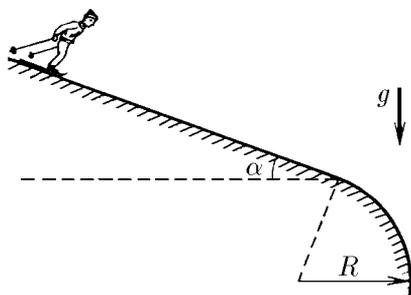
К задаче 2.3.21



К задаче 2.3.23

**2.3.24.** Шарик маятника массы  $m$  сообщили минимальную скорость, при которой он еще может описывать окружность в вертикальной плоскости. Какая сила действует на ось при прохождении маятником положения равновесия? Рассмотрите случаи подвеса шарика на легком стержне и на нити.

◇ **2.3.25.** На каком минимальном расстоянии от места закругления склона должна располагаться стартовая площадка лыжников, чтобы они, достигнув закругления, начали свободный полет? Угол склона  $\alpha$ , радиус его закругления  $R$ , коэффициент трения между лыжами и снегом  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ . Стартовой скоростью лыжников пренебречь.



К задаче 2.3.25

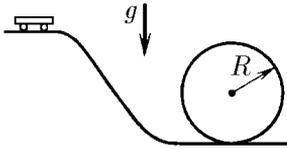
**2.3.26.** С вершины гладкой полусферы радиуса  $R$ , неподвижно стоящей на горизонтальной плоскости, соскальзывает небольшое тело. На какой высоте над этой плоскостью оно оторвется от полусферы?

◇ **2.3.27.** Тележка скатывается по гладким рельсам, образующим вертикальную петлю радиуса  $R$ . С какой минимальной высоты от нижней точки петли должна скатиться тележка для того, чтобы не покинуть рельсы по всей их длине?

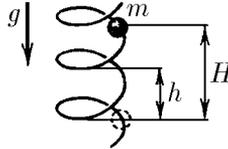
◇ **2.3.28\*** По вертикально стоящей гладкой и твердой спирали скользит бусинка массы  $m$ . Радиус петли спирали равен  $R$ , шаг спирали (расстояние по вертикали между соседними витками) —  $h$ . С какой силой бусинка действует на спираль в момент, когда она спустилась по вертикали на расстояние  $H$ ? Начальная скорость бусинки равна нулю.

**2.3.29\***. Бусинка массы  $m$  скользит по вертикально расположенному волнообразному участку гладкой проволоки. Длина волны много меньше длины участка и много больше размеров бусинки, а длина проволоки на участке в  $k$  раз больше его протяженности. С какой средней силой действует бусинка на этот участок проволоки?

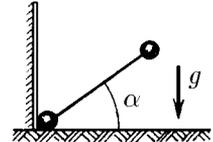
◇ **2.3.30**. Определите силу, действующую на вертикальную стенку со стороны падающей гантели, когда ось гантели составляет угол  $\alpha$  с горизонтом. Гантель начинает движение из вертикального положения без начальной скорости. Масса каждого шарика гантели  $m$ .



К задаче 2.3.27



К задаче 2.3.28

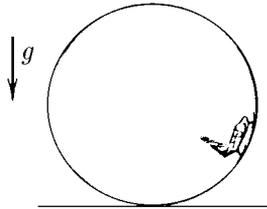


К задаче 2.3.30

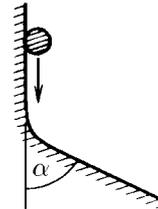
**2.3.31**. Гантель длины  $l$  с шариками одинаковой массы на концах установлена вертикально на гладкой горизонтальной плоскости. Затем гантель отпускают. Определите скорость верхнего шарика перед ударом о плоскость.

◇ **2.3.32\***. Какова работа силы трения за один оборот аэросаней, движущихся по вертикальной круговой дорожке? Скорость саней постоянна и равна  $v$ , масса саней  $m$ , коэффициент трения  $\mu$ .

◇ **2.3.33\***. Тело скользит по плоской поверхности, плавно переходящей в другую плоскую поверхность, расположенную под углом  $\alpha$  к первой. Коэффициент трения  $\mu$ . Определите кинетическую энергию в конце участка сопряжения поверхностей, если в начале она равна  $K_0$ .



К задаче 2.3.32



К задаче 2.3.33

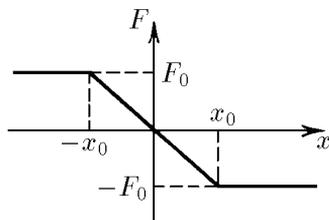
**2.3.34\***. Зависимость длины пробега ядер изотопов водорода в фотоэмульсии от начальной кинетической энергии приведена в таблице. Постройте по этим данным график зависимости тормозящей ядра силы от квадрата скорости и подтвердите или опровергните предположение, что эта сила не зависит от массы ядер. С хорошей точностью масса дейтрона  $m_d = 2m_p$ , масса тритона  $m_t = 3m_p$ ,  $m_p$  — масса протона.

Пробег, мкм	Энергия, МэВ			Пробег, мкм	Энергия, МэВ		
	протон	дейтрон	тритон		протон	дейтрон	тритон
5	0,47	0,58	0,63	30	1,66	2,10	2,40
10	0,78	0,98	1,10	40	2,00	2,55	2,89
20	1,26	1,60	1,82	50	2,32	2,97	3,37

**2.3.35.** Частица массы  $m$  влетает в область, где на нее действует тормозящая сила, зависящая только от расстояния между частицей и границей области. Найдите эту зависимость, если глубина проникновения частицы в область торможения пропорциональна ее начальному импульсу:  $l = \alpha p$ .

**2.3.36\*.** Длина пробега частицы массы  $m$  пропорциональна ее начальному импульсу, если тормозящая частицу сила пропорциональна ее скорости (см. предыдущую задачу). Убедитесь в этом и при заданном  $\alpha$  ( $l = \alpha p$ ), найдите работу тормозящей силы на пути  $x$  для частицы, масса которой  $m$ , а начальный импульс  $p$ .

◇ **2.3.37.** Зависимость силы, действующей на движущуюся прямолинейно частицу, от координаты последней приведена на графике. Найдите зависимость потенциальной энергии частицы от координаты. Какова область движения частицы, если наибольшая кинетическая энергия этой частицы равна  $K$ ?



К задаче 2.3.37

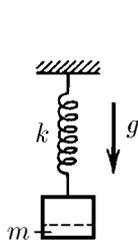
**2.3.38.** Потенциальная энергия электростатического взаимодействия точечных зарядов  $q$  и  $Q$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга,  $U = kqQ/r$ . Найдите электростатическую силу. Для каких зарядов имеет место отталкивание, а для каких притяжение?

**2.3.39.** В одном научно-исследовательском институте решили использовать выражение для потенциальной энергии точечных зарядов в виде  $U' = kqQ/r - kqQ/R$ , где  $R$  — постоянное расстояние, установленное раз и навсегда. Повлияет ли использование  $U'$  вместо  $U = kqQ/r$  на результаты расчетов движения частиц?

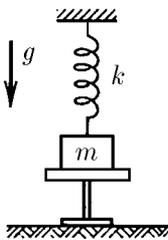
**2.3.40.** Потенциальная энергия взаимодействия частицы с неподвижным точечным источником  $U = V(l^2/r^2 - 2l/r)$ , где  $r$  — расстояние между частицей и источником,  $V$  и  $l$  — положительные постоянные величины, имеющие размерности энергии и расстояния соответственно. В какой области происходит прямолинейное движение частицы, если полная энергия системы равна  $E$ ?

◇ **2.3.41.** От груза, висящего на пружине жесткости  $k$ , отрывается часть массы  $m$ . На какую высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза?

◇ **2.3.42.** Груз массы  $m$ , подвешенный на пружине жесткости  $k$ , находится на подставке. Пружина при этом не деформирована. Подставку быстро убирают. Определите максимальное удлинение пружины и максимальную скорость груза.



К задаче 2.3.41



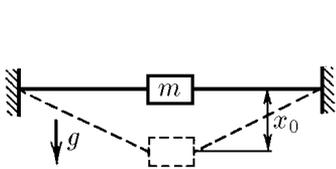
К задаче 2.3.42

**2.3.43.** К потолку привязан резиновый шнур, свободный конец которого находится на высоте  $h$  над полом. Если подвесить к нему небольшой тяжелый груз, который затем плавно опустить, то конец шнура с грузом опустится на расстояние  $h/3$ . На какую наименьшую высоту над полом надо затем поднять груз, чтобы после того, как его опустят, он ударился о пол? Как изменится ответ при замене резинового шнура пружиной?

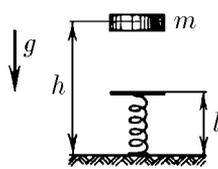
◇ **2.3.44.** Нерастянутый резиновый шнур длины  $2l$  своими концами прикреплен к стенкам. К середине шнура прицепили груз массы  $m$ , который затем без толчка отпустили. При возникших колебаниях наибольшее расстояние, на которое опускается груз, равно  $x_0$ . Какова жесткость этого шнура?

◇ **2.3.45.** Тело массы  $m$  падает с высоты  $h$  на стоящую вертикально на полу пружину жесткости  $k$  и длины  $l$ . Определите максимальную силу давления на пол. Объясните, почему при увеличении жесткости пружины эта сила возрастает.

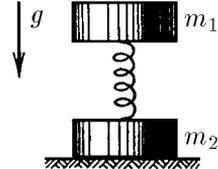
◇ **2.3.46.** С какой силой нужно надавить на верхний груз массы  $m_1$ , чтобы нижний груз массы  $m_2$ , соединенный с верхним пружиной, оторвался от пола после прекращения действия этой силы?



К задаче 2.3.44



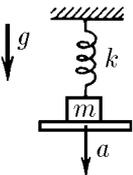
К задаче 2.3.45



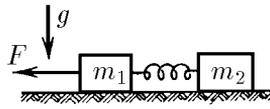
К задаче 2.3.46

◇ **2.3.47\*.** Тело массы  $m$ , подвешенное на пружине жесткости  $k$ , лежит на доске таким образом, что пружина не деформирована. Доску начинают опускать с ускорением  $a$ . Чему равно удлинение пружины в момент отрыва тела от доски? Каково максимальное удлинение пружины?

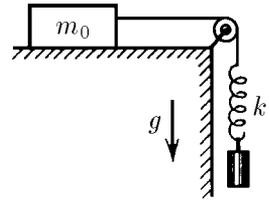
◇ **2.3.48\*.** На горизонтальной плоскости лежат два бруска массы  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных недеформированной пружиной. Определите, какую наименьшую постоянную силу нужно приложить к левому бруску, чтобы сдвинулся и правый, если коэффициент трения грузов о плоскость  $\mu$ .



К задаче 2.3.47



К задаче 2.3.48



К задаче 2.3.49

◇ **2.3.49.** На горизонтальном столе находится тело массы  $m_0$ . К телу привязана нерастяжимая нить, перекинутая через блок. К свободному концу нити привязана пружина. Какой массы груз нужно прицепить к пружине, чтобы, опускаясь, он мог сдвинуть тело массы  $m_0$  с места, если коэффициент трения тела о стол  $\mu$ ?

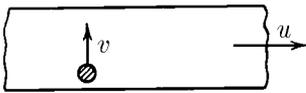
## § 2.4. Энергия системы. Передача энергии. Мощность

**2.4.1.** Шарики массы  $m$  каждый, связанные нитью, движутся по окружности с постоянной скоростью  $v$ . Кинетическая энергия каждого шарика, равная  $mv^2/2$ , не меняется. Если перейти в систему отсчета, в которой середина нити движется в плоскости вращения прямолинейно со скоростью  $v$ , энергия каждого из шариков меняется от нуля до  $4(mv^2/2)$ . Какая причина вызывает такое изменение энергии? Изменяется ли в указанной системе отсчета суммарная кинетическая энергия?

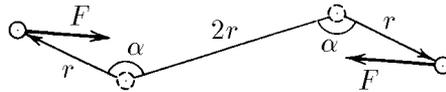
**2.4.2.** Посередине спицы массы  $m_1$  и длины  $2l$  находится шайба массы  $m_2$ . Спице ударом сообщают продольную скорость  $v$ . При этом шайба со спицы соскальзывает. Какова после этого суммарная кинетическая энергия шайбы и спицы, если сила трения равна  $F$ ?

**2.4.3\*.** Пружина жесткости  $k$  зажата между двумя телами. После того как оба тела одновременно освободили, они до момента полного распрямления пружины прошли расстояния  $x_1$  и  $x_2$ . Какую кинетическую энергию приобрело каждое из этих тел?

◇ **2.4.4\*.** Лента транспортера движется горизонтально со скоростью  $u$ . На ленту по касательной к ней летит тело, скорость которого перпендикулярна направлению движения ленты и в момент попадания тела на нее равна  $v$ . Тело скользит по ленте и затем останавливается. Найдите работу силы трения, приложенной к телу со стороны ленты и к ленте со стороны тела. Почему работа в этих случаях неодинакова?



К задаче 2.4.4

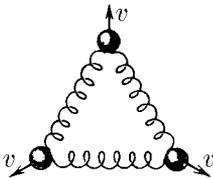


К задаче 2.4.5

◇ **2.4.5.** Частицы, между которыми действует постоянная сила взаимного притяжения  $F$ , удерживают на расстоянии  $2r$  друг от друга. Затем их начинают медленно перемещать в противоположных направлениях под углом  $\alpha$  к линии, первоначально соединявшей частицы. Какую работу надо совершать, чтобы переместить частицы на расстояние  $r$ ? При каком  $\alpha$  эта работа равна нулю?

**2.4.6\*.** Почему при центральном взаимодействии частиц изменение полной кинетической энергии зависит только от изменения расстояния между частицами, но не от смещения или поворота их как целого?

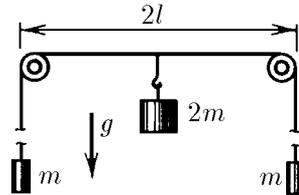
◇ **2.4.7.** Три шарика массы  $m$  каждый соединены друг с другом одинаковыми пружинами жесткости  $k$ . Одновременно всем шарикам сообщили скорость  $v$ , направленную от центра системы. На какое наибольшее расстояние сместятся шарики в этом направлении?



К задаче 2.4.7

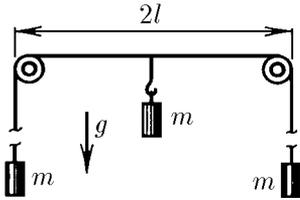
**2.4.8.** Два одинаковых заряда, удерживаемых на расстоянии  $l$  друг от друга, после того как их отпустили, разлетаются с равными скоростями, стремящимися при бесконечном удалении зарядов друг от друга к предельному значению  $v$ . Какова предельная скорость, если первоначально три таких же заряда удерживали в вершинах правильного треугольника со сторонами длины  $l$ ?

◇ **2.4.9\*.** На концах длинной нити подвешены грузы массы  $m$  каждый. Нить перекинута через два легких маленьких блока, расположенных на расстоянии  $2l$  друг от друга. К ней посередине между блоками прикрепляют груз массы  $2m$ , и система приходит в движение. Найдите скорость грузов по истечении достаточно большого промежутка времени.



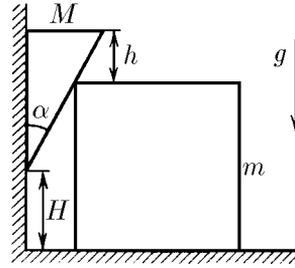
К задаче 2.4.9

◇ 2.4.10\*. Систему, изображенную на рисунке, приводит в движение центральный груз массы  $m$ . Определите максимальное удаление груза от его начального положения.



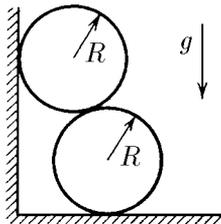
К задаче 2.4.10

◇ 2.4.11\*. Клин массы  $M$  с углом  $\alpha$  при вершине плотно прилегает к вертикальной стенке и опирается на брусок массы  $m$ , находящийся на горизонтальной плоскости. Вершина клина находится на высоте  $H$  над этой плоскостью, а торец клина на высоте  $h < H$  над верхней поверхностью бруска. Брусок сначала удерживают в этом положении, а затем его отпускают. Найдите его скорость в момент отрыва от клина. Трением пренебречь.



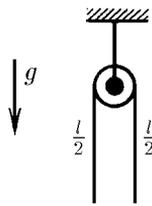
К задаче 2.4.11

◇ 2.4.12\*. Два гладких одинаковых цилиндра радиуса  $R$  прислонены к стенке. Из-за того, что нижний цилиндр чуть-чуть стронулся вправо по горизонтальной плоскости, верхний стал опускаться по вертикали, и система пришла в движение. Найдите конечную скорость нижнего цилиндра.



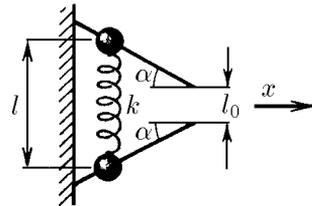
К задаче 2.4.12

◇ 2.4.13\*. Гладкая однородная веревка длины  $l$  и массы  $m$  переброшена через небольшой блок так, что вначале находится в равновесии. Веревку немного смещают и она начинает соскальзывать с блока. С какой силой действует она на блок в момент, когда длина веревки с одной стороны от него равна  $l/3$ ?



К задаче 2.4.13

2.4.14\*. На теннисный мяч с высоты 1 м падает стальной шарик и подскакивает снова почти на 1 м. Оцените, на какую высоту после удара подскочит мяч.



К задаче 2.4.16

2.4.15\*. Два летящих друг за другом с равными скоростями шарика соединены сжатой пружиной. Пружина связана нитью. После пережигания нити кинетическая энергия переднего шарика, имевшая значение  $K$ , увеличилась на 21%. Какую энергию приобрел бы этот шарик после пережигания нити, если бы до пережигания нити оба шарика были неподвижны? Почему при одном и том же изменении потенциальной энергии пружины получаются столь разные приращения кинетической энергии?

◇ 2.4.16. Две бусинки массы  $m$  каждая, связанные друг с другом пружиной жесткости  $k$ , удерживают на гладких жестко закрепленных в стене стержнях. Пружина растянута, и ее длина равна  $l$ . Расстояние между свободными концами

стержня равно длине недеформированной пружины. Бусинки отпускают. С какой скоростью будет двигаться пружина в направлении  $x$  после того, как бусинки соскочат со стержня? Какой будет наибольшая деформация сжатия пружины?

**2.4.17.** а. Назовем энергией движения центра масс системы величину  $MV^2/2$ , где  $M$  — масса системы, а  $V$  — скорость ее центра масс. В каком случае энергия движения центра масс совпадает с полной кинетической энергией системы?

б. Докажите, что приращение энергии движения центра масс равно работе суммарной внешней силы, если точку приложения взять в центре масс.

◇ **2.4.18.** Обруч, раскрученный в вертикальной плоскости и посланный по полу рукой гимнастки, через несколько секунд сам возвращается к ней. Объясните это явление. Определите коэффициент трения между обручем и полом, если начальная скорость центра обруча равна  $v$ , а расстояние, на которое откатывается обруч, равно  $l$ .

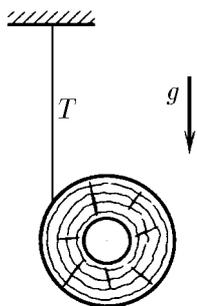


К задаче 2.4.18

◇ **2.4.19.** Свободный конец нити, намотанной на катушку массы  $m$ , закрепляют, а катушку отпускают. Какую скорость приобретает ось катушки, опустившись на расстояние  $h$ , если сила натяжения вертикального участка нити  $T < mg$ ? Чему равны в этот момент полная кинетическая энергия и кинетическая энергия вращения катушки вокруг собственной оси? Массой нити и трения пренебречь.

◇ **2.4.20\*.** Собака массы  $m$  привязана поводком длины  $L$  к саням массы  $M > m$ . В начальный момент собака находится рядом с санями. На какое наибольшее расстояние собака может сдвинуть сани за один рывок, если коэффициенты трения лап собаки и полозьев саней о горизонтальную поверхность одинаковы?

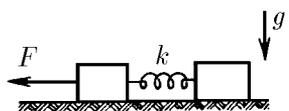
◇ **2.4.21.** На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых бруска, соединенных пружиной жесткости  $k$  и длины  $l_0$ . На левый брусок внезапно начинает действовать постоянная сила  $F$ , направленная вдоль пружины. Найдите минимальное и максимальное расстояния между брусками.



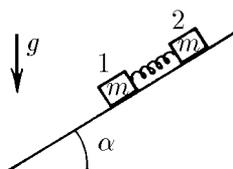
К задаче 2.4.19



К задаче 2.4.20



К задаче 2.4.21



К задаче 2.4.22

◇ **2.4.22\*.** С наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, начинают соскальзывать два тела массы  $m$  каждое, связанные первоначально недеформи-

рованной пружины жесткости  $k$ . Определите наибольшее удлинение пружины, если трением между нижним телом и плоскостью можно пренебречь, а коэффициент трения между верхним телом и плоскостью равен  $\mu$ .

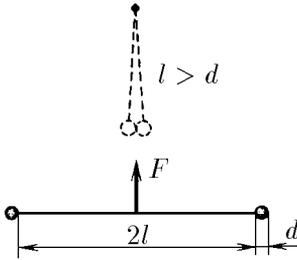
**2.4.23.** Полная кинетическая энергия системы частиц складывается из энергии движения центра масс и кинетической энергии движения частиц системы относительно центра масс (внутренней кинетической энергии). Докажите это.

**2.4.24.** Два тела массы  $m_1$  и  $m_2$  соединены недеформированной пружины жесткости  $k$ . Затем к телам одновременно приложили противоположно направленные силы  $F$ . Найдите максимальную кинетическую энергию тел и максимальную потенциальную энергию пружины. Какова наибольшая относительная скорость тел?

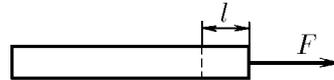
**2.4.25.** Внутренняя энергия системы — это потенциальная энергия взаимодействия ее частиц между собой плюс кинетическая энергия движения этих частиц относительно центра масс системы (внутреннего движения). В каком случае полная энергия системы сводится к внутренней? Докажите, что приращение внутренней энергии системы равно работе внешних сил, приложенных к частицам этой системы при их перемещении относительно центра масс.

◇ **2.4.26.** Два одинаковых шара связаны нитью длины  $2l$ , за середину которой стали тянуть с постоянной силой  $F$ . Найдите, используя результаты предыдущей задачи, приращение внутренней энергии к моменту первого удара.

◇ **2.4.27.** Вдоль неподвижного пластилинового бруска массы  $m$  приложили постоянную силу  $F$ . За время  $t$  действия силы конец бруска, к которому она приложена, сдвинулся в направлении силы на расстояние  $l$ . На сколько за время  $t$  возросла внутренняя энергия бруска?



К задаче 2.4.26



К задаче 2.4.27

**2.4.28\*.** Два тела массы  $m_1$  и  $m_2$  соединены недеформированной пружины жесткости  $k$ . К телу массы  $m_1$  приложили постоянную силу  $F$ . Из-за небольшого внутреннего трения в пружине возникшие колебания затухли. На сколько возросла внутренняя энергия системы? Какова конечная энергия пружины? Если к моменту затухания колебаний тело массы  $m_2$  прошло в направлении силы  $F$  расстояние  $l$ , то какова в этот момент кинетическая энергия системы?

**2.4.29.** Предлагается наполнять вагоны поезда углем на ходу. Найдите дополнительную работу, совершаемую двигателем локомотива при засыпке угля массы  $m$ , если скорость поезда постоянна и равна  $u$ . Сравните эту работу с кинетической энергией, которую получил погруженный уголь. Почему эти величины оказываются различными?

**2.4.30.** При медленном подъеме груза по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  и коэффициентом трения  $\mu$  затрачена работа  $A$ . Груз тянут вдоль плоскости. Определите, какая часть работы пошла на увеличение внутренней энергии груза и наклонной плоскости.

**2.4.31.** Два тела массы  $m_1$  и  $m_2$  имеют внутреннюю энергию  $W_1$  и  $W_2$  и скорость центров масс  $V_1$  и  $V_2$ . Какова внутренняя энергия системы этих двух тел,

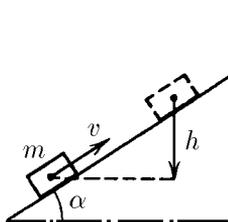
если потенциальной энергией взаимодействия их между собой можно пренебречь? Изменится ли эта энергия после столкновения их друг с другом и последующего разлета?

**2.4.32.** Докажите, что при абсолютно неупругом ударе происходит наибольшее увеличение суммарной внутренней энергии сталкивающихся тел. Предполагается, что в начальном и конечном состояниях потенциальной энергией взаимодействия тел между собой можно пренебречь.

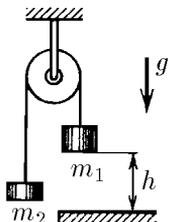
◇ **2.4.33.** Тело массы  $m$  толкнули вверх по наклонной плоскости, после чего оно двигалось с начальной скоростью  $v$  и затем остановилось, поднявшись на высоту  $h$ . Какое количество теплоты<sup>\*)</sup> выделилось при этом?

◇ **2.4.34.** Два груза массы  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) связаны нитью, переброшенной через неподвижный блок. В начальный момент груз массы  $m_1$  удерживают на высоте  $h$  над полом. Затем его без толчка отпускают. Какое количество теплоты выделится при ударе груза о пол? Удар абсолютно неупругий.

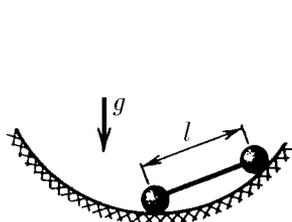
◇ **2.4.35.** В сферической чаше радиуса  $R$  удерживают гантель в положении, когда один из шариков находится на дне чаши, а затем отпускают. Какое количество теплоты выделится к моменту, когда гантель прекратит свое движение из-за малого трения между чашей и гантелью? Длина гантели  $l$ , масса каждого шарика  $m$ .



К задаче 2.4.33



К задаче 2.4.34



К задаче 2.4.35

**2.4.36.** Городской троллейбус следует по своему маршруту со скоростью примерно 36 км/ч, останавливаясь через каждые 500 м. Оцените затраты электроэнергии за 10 ч работы троллейбуса, если его масса равна 5 т.

**2.4.37.** Поднимаясь равномерно, как всегда, из окна Малыша к себе на крышу, Карлсон в тот день, когда его угостили вареньем, затратил на подъем на 4 с больше, чем обычно. Какова масса съеденного им варенья, если мощность мотора всегда равна 75 Вт, а высота подъема — 10 м?

**2.4.38.** Сила сопротивления, действующая на корабль в воде, пропорциональна квадрату его скорости. Во сколько раз нужно увеличить мощность двигателя того же корабля, чтобы скорость движения возросла вдвое?

**2.4.39\*.** Автомобиль массы  $m$  трогается с места. Коэффициент трения колес о дорогу  $\mu$ . Обе оси автомобиля ведущие. Найдите зависимость скорости автомобиля от времени. Мощность двигателя  $N$ .

◇ **2.4.40\*.** При равномерном подъеме груза массы  $m$  угловая скорость вала двигателя подъемника  $\omega = \omega_0(1 - m/m_0)$ , где  $\omega_0$  — угловая скорость вала при отсутствии груза, а  $m_0$  — масса наиболее тяжелого груза, который можно поднять на этом подъемнике. Как зависит полезная мощность подъемника от угловой скорости вала? Какими порциями нужно поднимать груз, чтобы за определенное время поднять на некоторую высоту груз наибольшей массы?

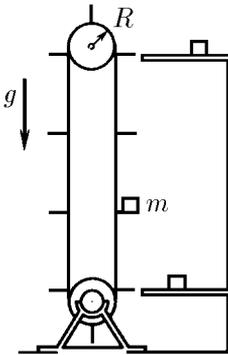
**2.4.41\*.** Подъемник из предыдущей задачи переоборудовали, присоединив вал двигателя к барабану не непосредственно, а через зубчатую передачу. Насаженная на вал двигателя шестерня имеет  $n_1$  зубцов; зубчатое колесо, жестко

<sup>\*)</sup> Приращение суммарной внутренней энергии тел при трении их друг о друга или при неупругих столкновениях обычно равно количеству выделившейся теплоты.

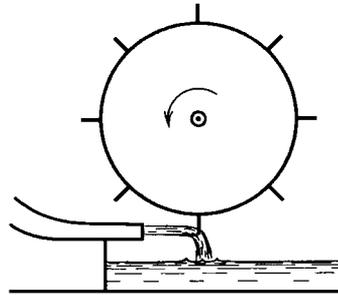
соединенное с барабаном, имеет  $n_2$  зубцов. При какой массе поднимаемого груза достигается максимальная полезная мощность подъемника? Потерями мощности в передаче пренебречь.

**2.4.42\***. Мощность автомобиля с электрическим двигателем зависит от угловой скорости вращения колес по закону  $N = (A - B\omega)\omega$ ,  $N \geq 0$ . Установившаяся скорость автомобиля на горизонтальном шоссе 70 км/ч. Без груза он может преодолевать подъемы с углом наклона шоссе вплоть до  $45^\circ$ . Какова установившаяся скорость автомобиля при подъеме с углом наклона шоссе  $30^\circ$ ? Какие подъемы он может преодолевать при массе груза, равной массе автомобиля?

◇ **2.4.43\***. Струя воды плотности  $\rho$  сечения  $S$  с горизонтальной скоростью  $v$  бьет в лопасти водяного колеса, после удара стекая по лопасти вниз. Найдите мощность этого водяного двигателя при угловой скорости вращения колеса  $\omega$ . Радиус колеса  $R$ . Число лопастей достаточно большое, так что воздействие струи можно считать непрерывным, пренебрегая изменениями его при входе лопасти в струю и при выходе из нее.



К задаче 2.4.40



К задаче 2.4.43

**2.4.44.** Водометный катер движется по спокойной воде с постоянной скоростью  $v$ . Скорость выбрасываемой воды относительно катера равна  $u$ . Определите КПД двигателя катера. Что нужно в этом случае считать полезной мощностью?

**2.4.45.** Вертолет массы  $m$ , неподвижно зависший над землей, направляет своими винтами вниз струю воздуха. Какова затрачиваемая двигателем вертолета мощность, если скорость струи воздуха равна  $u$ ?

## § 2.5. Столкновения

**2.5.1.** Два тела в результате столкновения обменялись скоростями, продолжая двигаться по одной и той же прямой. Каково отношение масс этих тел? Является ли их столкновение упругим?

**2.5.2\***. На покоящийся шар налетает шар такой же массы. Найдите угол разлета шаров после нецентрального упругого удара.

**2.5.3.** На неподвижный шар налетает со скоростью  $u$  шар, масса которого в  $k$  раз больше массы неподвижного шара. Найдите отношение скорости шаров после центрального упругого удара к скорости  $u$ . Постройте графики зависимости этих отношений от числа  $k$ .

**2.5.4.** И свинец, и тяжелая вода почти не поглощают нейтроны. Почему же в атомных реакторах для замедления быстрых нейтронов тяжелую воду используют, а свинец — нет?

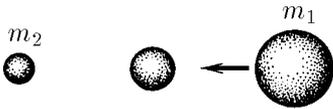
◇ **2.5.5.** Между неподвижным шаром массы  $m_1$  и налетающим на него шаром массы  $m_2$  находится неподвижный шар. Какова масса промежуточного шара, при которой шар массы  $m_2$  приобретает после соударения наибольшую скорость? Все удары центральные и упругие.

**2.5.6.** Две одинаковые частицы движутся под углом  $\alpha$  друг к другу с начальными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . После упругого взаимодействия у одной из частиц скорость стала равна  $u_1$ . Найдите угол разлета.

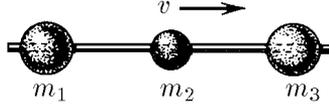
**2.5.7.** В момент наибольшего сближения тел при упругом столкновении их скорость одинакова и равна  $v$ . Какова скорость этих тел после разлета, если до столкновения их скорость была соответственно  $v_1$  и  $v_2$ ? Тела движутся по одной прямой.

**2.5.8.** Шарики массы  $m_1$  и  $m_2$  движутся в неподвижной кольцевой трубке с начальными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Каковы будут их скорости после 1987, 1988 столкновений? Удары упругие, трубка гладкая.

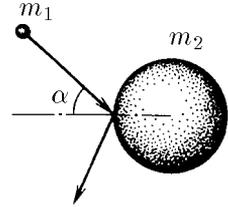
◇ **2.5.9\*.** Бусинки массы  $m_1, m_2, m_3$  могут скользить вдоль горизонтальной спицы без трения, причем  $m_1 \gg m_2$  и  $m_3 \gg m_2$ . Определить максимальные скорости крайних бусинок, если вначале они покоились, а средняя бусинка имела скорость  $v$ . Удары упругие.



К задаче 2.5.5



К задаче 2.5.9



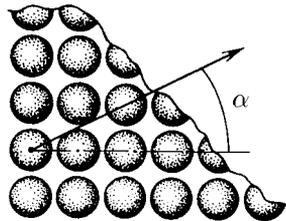
К задаче 2.5.10

◇ **2.5.10.** Частица массы  $m_1$  налетает на шар массы  $m_2$ . Направление ее движения составляет угол  $\alpha$  с нормалью к поверхности шара. Под каким углом к этой нормали отскочит от шара частица, если шар сначала покоился, а удар упругий?

◇ **2.5.11.** На два одинаковых неподвижных шара налетает такой же третий, центр которого движется по средней линии отрезка, соединяющего центры неподвижных шаров. После упругого удара налетающий шар останавливается. Каково расстояние между центрами первоначально неподвижных шаров, если радиус шаров  $R$ ?



К задаче 2.5.11



К задаче 2.5.13

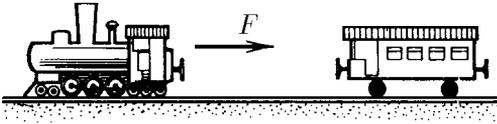
**2.5.12.** При облучении кристалла потоком нейтронов с его поверхности, противоположной бомбардируемой, вылетают атомы, причем направление вылета зависит только от ориентации кристалла и не зависит от направления потока нейтронов. Объясните это явление.

◇ **2.5.13.** Одинаковые шары расставлены на плоскости так, что их центры образуют узлы квадратной решетки. Зазоры между ближайшими шарами одинаковы и очень малы по сравнению с их радиусом. Одному из этих первоначально покоящихся шаров сообщили скорость  $v$  под углом  $\alpha$  к стороне квадратной ячейки. Каким будет дальнейшее движение шаров, если все удары упругие? Рассмотрите качественно случай решетки с ячейкой в форме правильного треугольника.

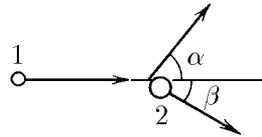
◇ **2.5.14.** Локомотив с постоянной силой тяги  $F$  начал двигаться к стоящему вагону и столкнулся с ним через время  $\Delta t$ . Найдите время между последующими соударениями локомотива с этим вагоном. Удар упругий. Трением в осях колес пренебречь. Массы вагона и локомотива не одинаковы.

**2.5.15.** Внутри однородной гладкой неподвижной сферы радиуса  $R$  находится шарик, скорость которого равна  $v$ . В некоторый начальный момент шарик упруго соударяется со сферой. Найдите промежуток времени между первым и последующим ударами шарика о сферу, если его скорость  $v$  образует угол  $\alpha$  с радиусом сферы, проведенным в точку первого удара.

◇ **2.5.16.** При упругом столкновении налетающей частицы с покоящейся первой полетела под углом  $\alpha$  к направлению первоначального движения, а вторая — под углом  $\beta$ . Найдите отношение масс этих частиц.



К задаче 2.5.14



К задаче 2.5.16

**2.5.17\*.** Тяжелая частица массы  $m_1$  сталкивается с покоящейся легкой частицей массы  $m_2$ . На какой наибольший угол может отклониться тяжелая частица в результате упругого удара?

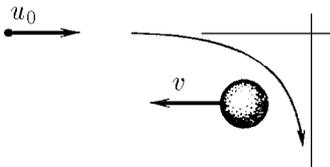
**2.5.18\*.** Частица массы  $m_1$  налетела со скоростью  $v$  на неподвижную частицу массы  $m_2$ , которая после упругого удара полетела под углом  $\alpha$  к первоначальному направлению движения налетающей частицы. Определите скорость частицы массы  $m_2$  после удара.

**2.5.19.** Космический корабль массы  $m_1$  пролетал с выключенными двигателями вблизи первоначально неподвижного космического тела. При этом импульс корабля, вначале равный  $p_0$ , стал равным  $p$ , а направление его движения изменилось на угол  $\alpha$ . Определите массу космического тела.

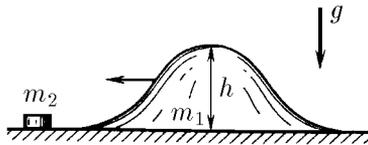
◇ **2.5.20.** Для изменения скорости и направления полета космического аппарата без затраты топлива можно воспользоваться «гравитационным ударом» при движении его вблизи какой-либо планеты. При начальной скорости аппарата  $u_0$  вдали от планеты, скорость которой  $v$  имеет встречное направление, аппарат пролетает в такой близости от планеты, что в системе отсчета этой планеты направление его движения изменяется на  $90^\circ$ \*) . Какова скорость аппарата после ухода от планеты? Как меняется направление полета аппарата относительно Солнца?

◇ **2.5.21\*.** По горизонтальной плоскости может скользить без трения гладкая «горка» высоты  $h$  и массы  $m_1$ . Горка плавно переходит в плоскость. При какой наименьшей скорости горки небольшое тело массы  $m_2$ , неподвижно лежащее вначале на ее пути, перевалит через вершину?

\*) Значения скорости космических тел, если это не оговорено, даются относительно Солнца.



К задаче 2.5.20



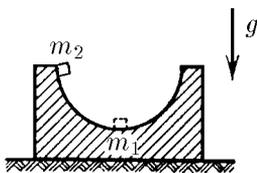
К задаче 2.5.21

**2.5.22.** Тело массы  $m_2$  наезжает со скоростью  $v$  на неподвижную первоначально горку, описанную в предыдущей задаче. Найдите скорость этого тела и горки, если оно снова окажется на горизонтальной плоскости.

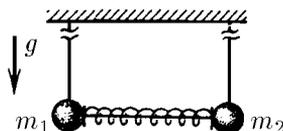
◇ **2.5.23\***. Подставка массы  $m_1$  с полусферической выемкой радиуса  $R$  стоит на гладком столе. Тело массы  $m_2$  кладут на край выемки и отпускают. Найдите скорость тела и подставки в момент, когда тело проходит нижнюю точку полусферы. С какой силой оно давит на подставку в этой точке? Трением пренебречь.

**2.5.24.** Тела массы  $m_1$  и  $m_2$  связаны недеформированной пружиной жесткости  $k$ . Определите наименьшую скорость, которую необходимо сообщить телу массы  $m_1$  чтобы пружина сжалась на величину  $x$ . Какими будут скорости тел, когда пружина снова окажется недеформированной?

◇ **2.5.25.** Два шарика массы  $m_1$  и  $m_2$  висят на длинных одинаковых нитях. Между ними находится сжатая пружина, которая удерживается в сжатом состоянии связывающей ее нитью. Потенциальная энергия деформации пружины  $U$ . Нить, связывающую пружину, пережигают. Найдите максимальную высоту, на которую поднимутся шарики.



К задаче 2.5.23



К задаче 2.5.25

◇ **2.5.26.** Частица массы  $2m$  налетает на неподвижную частицу массы  $m$ . После столкновения частицы разлетаются симметрично под углом  $45^\circ$  к направлению начальной скорости. Во сколько раз возросла суммарная кинетическая энергия после столкновения?

**2.5.27.** Нейтрон с энергией 250 кэВ налетает на ядро  ${}^6\text{Li}$ . При этом образуется возбужденное ядро  ${}^7\text{Li}$ . Найдите кинетическую энергию образовавшегося ядра.

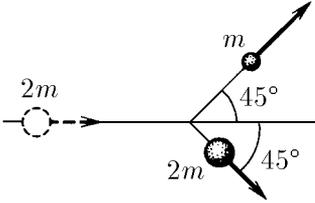
**2.5.28.** Атом массы  $m$  в возбужденном состоянии имеет внутреннюю энергию, большую чем в основном состоянии, на  $E$ . При какой наименьшей энергии электрон с массой  $m_e$  может возбудить первоначально покоящийся атом?

**2.5.29.** Электрон может ионизовать покоящийся атом водорода, обладая энергией, не меньшей 13,6 эВ. Какой минимальной энергией должен обладать протон, чтобы ионизовать также покоящийся атом водорода? Масса протона  $m_p = 1836m_e$ , где  $m_e$  — масса электрона.

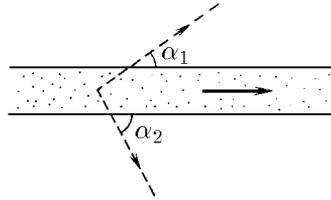
**2.5.30.** Неподвижное атомное ядро распадается на два осколка массы  $m_1$  и  $m_2$ . Определите скорость осколков, если при распаде ядра выделяется энергия  $E$ .

**2.5.31.** В результате распада движущегося ядра появились два осколка массы  $m_1$  и  $m_2$  с импульсами  $p_1$  и  $p_2$ , разлетающиеся под углом  $\theta$ . Определите выделившуюся при распаде ядра энергию.

◇ **2.5.32.** При двухчастичном распаде частиц с кинетической энергией  $K$  образуются частицы двух видов. Наибольший угол, под которым продукты распада вылетают из пучка первичных частиц, равен соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Какая энергия выделяется при распаде первичной частицы?



К задаче 2.5.26



К задаче 2.5.32

**2.5.33.** Реакцию слияния тяжелых изотопов водорода с образованием сверхтяжелого изотопа и протона ( ${}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{H} + {}^1\text{H}$ ) изучают, направляя ускоренные до энергии 1,8 МэВ ионы дейтерия на дейтериевую же мишень. Энергию образовавшихся ядер трития измерить затруднительно, и ее не измеряют. Измеряют только энергию протонов, вылетевших перпендикулярно пучку дейтронов, она равна 3,5 МэВ. Определите выделившуюся в реакции энергию.

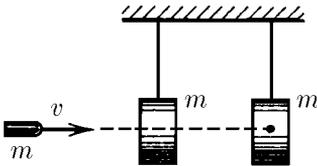
**2.5.34\*.** Частица массы  $m$  с импульсом  $p$  распадается на две одинаковые частицы. Каков максимальный угол разлета вторичных частиц, если при распаде выделяется энергия  $E$ ?

**2.5.35.** Два тела массы  $m_1$  и  $m_2$  прикреплены к нитям одинаковой длины с общей точкой подвеса и отклонены — одно влево, другое вправо — на один и тот же угол. Тела одновременно отпускают. При ударе друг о друга они слипаются. Определите отношение высоты, на которую тела поднимаются после слипания, к высоте, с которой они начали свое движение вниз.

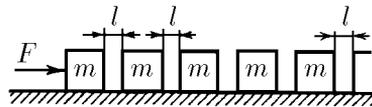
**2.5.36.** Пуля массы  $m_1$ , имеющая начальную скорость  $v$  пробивает подвешенный на нити свинцовый шар массы  $m_2$  и вылетает из него с половинной скоростью. Какая часть кинетической энергии пули перешла в тепло?

◇ **2.5.37.** Пуля массы  $m$ , имеющая начальную скорость  $v$ , пробивает подвешенный на нити груз той же массы  $m$  и застревает во втором таком же. Найдите выделившееся в первом грузе количество теплоты, если во втором грузе выделилось количество теплоты  $Q_2$ . Временем взаимодействия пули с грузом пренебречь.

◇ **2.5.38\*.** По одной прямой на гладкой горизонтальной плоскости с равными промежутками расположены бруски массы  $m$  каждый. К первому из брусков прикладывают постоянную горизонтальную силу  $F$ . Определите скорость брусков перед  $n$ -м соударением и сразу после него. Рассмотрите предельное значение скорости при  $n$ , стремящемся к бесконечности, если ширина промежутков между брусками равна  $l$ . Удары брусков абсолютно неупругие.



К задаче 2.5.37



К задаче 2.5.38

**2.5.39.** Тело налетает на неподвижную стенку под углом  $\alpha$  к нормали. Коэффициент трения о стенку  $\mu$ . Под каким углом тело отлетит от этой стенки?

## § 2.6. Сила тяготения. Законы Кеплера

**2.6.1.** Почему состояние невесомости на борту орбитальной станции свидетельствует о пропорциональности силы земного тяготения массе притягиваемых тел?

**2.6.2.** Некоторые планеты Солнечной системы имеют орбиту, близкую к круговой, с центром в Солнце, причем обращаются они вокруг Солнца почти равномерно. Как направлено ускорение этих планет? Как оно зависит от расстояния между ними и Солнцем, если установлено, что квадрат периода обращения планет пропорционален кубу радиуса их орбиты? (Представьте себе, что вы еще не знаете закона всемирного тяготения.)

**2.6.3.** При сферически симметричном распределении массы шар притягивает тела, находящиеся вне его так, будто вся его масса сосредоточена в его центре. На какой высоте над Землей сила тяжести составляет 81% от ее значения на поверхности Земли?

**2.6.4.** Ускорение Луны можно найти исходя из кинематических соображений, зная, что средний радиус ее орбиты 385 000 км, а период ее обращения вокруг Земли 27,3 сут. Сравните полученное таким образом значение ускорения с ускорением, создаваемым на лунной орбите земным тяготением. Радиус Земли 6370 км, ускорение свободного падения на ее поверхности  $9,8 \text{ м/с}^2$ .

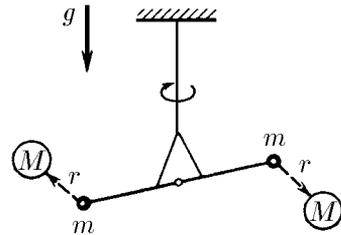
**2.6.5.** Предлагается метод определения гравитационной постоянной. По геологическим образцам пород и по распространенности этих пород на Земле находят среднюю плотность вещества. Умножая эту плотность на объем Земли, находят ее массу. Зная же радиус Земли и ускорение свободного падения на ее поверхности, находят гравитационную постоянную. В чем коренной недостаток этого метода?

◇ **2.6.6.** Рассмотрим установку Кавендиша для измерения гравитационной постоянной (так называемые крутильные весы). Легкий стержень (коромысло), на концах которого закреплены два одинаковых шара массы  $m$ , подвешен на тонкой и длинной нити. К шарам можно приблизить два шара массы  $M$ , значительно большей  $m$ . Коромысло снабжено зеркальцем, отбрасывающим световой «зайчик» на удаленную шкалу и потому позволяющим измерять очень малые углы поворота коромысла вокруг вертикальной оси. (При длине коромысла 10 см и расстоянии 40 м зеркала до шкалы смещение «зайчика» в 1600 раз превышает смещение шаров.)

Измерение проводят следующим образом. Шары массы  $M$  располагают симметрично возле шаров массы  $m$ . При этом коромысло поворачивается и нить закручивается на некоторый угол. Затем, когда после прекращения крутильных колебаний большие шары переводят в новое симметричное положение, измеряют угол поворота коромысла. Зная упругие свойства нити, определяют максимальное ускорение легких шариков.

Вычислите гравитационную постоянную на основе данных, полученных на установке Кавендиша (крутильные весы): расстояние между шарами массы  $m$  и  $M$  равно  $2r = 10 \text{ см}$ , масса тяжелых шаров  $M = 7,0 \text{ кг}$ , максимальное ускорение легких шариков  $a = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}^2$ .

**2.6.7.** Свой эксперимент по измерению гравитационной постоянной Кавендиш назвал «взвешиванием Земли». Определите массу Земли, если на ее поверхности ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ , а радиус Земли  $R = 6370 \text{ км}$ .



К задаче 2.6.6

**2.6.8.** Найдите массу Солнца. Радиус орбиты Земли равен  $1,5 \cdot 10^8$  км, в году содержится примерно  $3,14 \cdot 10^7$  с.

**2.6.9.** Найдите силу гравитационного притяжения, действующего на вас со стороны Земли, Луны, Солнца.

**2.6.10.** Спутник Марса Фобос обращается вокруг него по орбите радиуса 9400 км с периодом 7 ч 39 мин. Во сколько раз масса Марса меньше массы Земли?

**2.6.11.** Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Луны 1700 км. Во сколько раз ускорение свободного падения вблизи лунной поверхности меньше, чем вблизи земной?

**2.6.12.** Определите радиус круговой орбиты астероида, если угловая скорость обращения его вокруг Солнца  $\omega$ , а масса Солнца  $m_{\odot}$ .

**2.6.13.** Как изменилась бы продолжительность земного года, если бы масса Земли сравнилась с массой Солнца, а расстояние между ними осталось бы прежним?

**2.6.14\*.** Две звезды массы  $m_1$  и  $m_2$  образуют двойную систему с неизменным расстоянием между звездами  $R$ . Каков период обращения звезд вокруг общего центра масс?

**2.6.15.** В астрономии часто измеряют расстояние в радиусах земной орбиты, периоды — в земных годах, а массы звезд — в массах Солнца. Определите суммарную массу двойной системы, если в этих единицах расстояние между звездами постоянно и равно  $r$ , а период их обращения равен  $T$ .

**2.6.16.** Три звезды массы  $m$  каждая сохраняют в своем движении конфигурацию равностороннего треугольника со стороной  $L$ . С какой угловой скоростью вращается этот треугольник?

**2.6.17.** Найдите первую космическую скорость для Земли и Луны, а также и периоды обращения по околоземной и окололунной орбитам.

**2.6.18.** Спутник массы  $m_0$  движется по круговой орбите радиуса  $R$  вокруг планеты массы  $m$ . Какой импульс нужно мгновенно сообщить спутнику, чтобы плоскость его орбиты повернулась на угол  $\alpha$ , а радиус не изменился?

**2.6.19.** Космический корабль движется по круговой орбите радиуса  $R$  вокруг Земли со скоростью  $v$ , вдвое большей скорости свободного движения по той же орбите. Какую силу тяги развивают двигатели корабля, если его масса  $m$ ?

**2.6.20.** Два одинаковых поезда массы 1000 т каждый движутся по экватору навстречу друг другу со скоростями 30 м/с. На сколько отличаются силы, с которыми они давят на рельсы?

**2.6.21.** а. Каков радиус орбиты спутника, лежащей в экваториальной плоскости, если тот все время находится в зените над одной и той же точкой земной поверхности?

б. Опишите качественно трассу спутника, если при том же радиусе орбиты ее плоскость образует угол  $60^\circ$  с плоскостью экватора. (Трассой спутника называется линия, соединяющая точки на Земле, из которых спутник виден в зените.)

**2.6.22.** Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия небольшого тела массы  $m$  с Землей  $U = -\gamma Mm/r$ , где  $M$  — масса Земли,  $r$  — расстояние от тела до центра Земли. Найдите приращение потенциальной энергии  $\Delta U$  при подъеме тела на высоту  $h$  с поверхности Земли. Какая относительная ошибка возникает при использовании приближенного выражения  $mgh$  вместо  $\Delta U$ ? Ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g$ , радиус Земли  $R$ .

**2.6.23\*.** Тело запустили вдоль экватора с востока на запад с такой скоростью, что очень далеко от Земли его скорость стала равной нулю. Какую скорость относительно Земли будет иметь вдали от нее тело, запущенное с той же начальной скоростью вдоль экватора, но с запада на восток?

**2.6.24.** Метеорит на очень большом расстоянии от планеты имеет скорость  $v_0$ . Падая на планету, он приобретает вблизи ее поверхности скорость  $v$ . При какой наименьшей скорости вблизи поверхности этой планеты космический корабль покинет ее безвозвратно? (Такая скорость называется второй космической.)

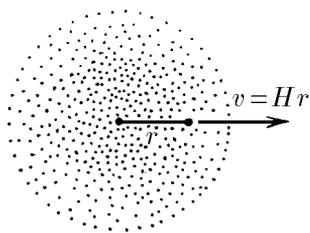
**2.6.25.** На поверхности планеты телу сообщили скорость, превышающую вторую космическую скорость на 0,5%. Во сколько раз скорость тела вдали от планеты будет меньше второй космической скорости?

**2.6.26.** Найдите вторую космическую скорость для Земли и Луны. Вращением планет вокруг собственной оси пренебречь.

**2.6.27.** Спутник движется со скоростью  $v$  по круговой орбите вокруг Земли. Какую наименьшую добавочную скорость надо сообщить спутнику, чтобы он мог безвозвратно уйти от Земли?

**2.6.28.** Космический корабль приближается к Луне. На большом расстоянии от Луны его скорость относительно нее была нулевая. На какой высоте нужно включить тормозной двигатель, создающий пятикратную перегрузку ( $5g$ ), чтобы посадка была мягкой? Изменением массы корабля пренебречь. Радиус Луны около 1700 км, ускорение свободного падения на ее поверхности в 6 раз меньше, чем на поверхности Земли.

◇ **2.6.29.** Скорость пылинок однородного шарового облака направлена радиально и пропорциональна расстоянию до центра:  $v = Hr$ ; это относится к начальному моменту. При какой наибольшей начальной плотности облако будет неограниченно расширяться? (Для тела внутри однородной сферической оболочки суммарная гравитационная сила со стороны оболочки нулевая.)



*К задаче 2.6.29*

**2.6.30\*.** Какую скорость нужно сообщить телу небольшой массы в центре астероида массы  $m$  и радиуса  $R$ , чтобы оно через радиальную шахту ушло от астероида бесконечно далеко? Астероид можно считать однородным.

**2.6.31.** Космический аппарат вдалеке от Земли находится на том же расстоянии от Солнца, что и Земля. При какой минимальной его скорости он покинет Солнечную систему?

**2.6.32\*.** Наименьшая скорость тела на поверхности Земли, обеспечивающая его выход за пределы Солнечной системы, называется третьей космической скоростью. Найдите ее, если известно, что скорость орбитального движения Земли 30 км/с.

**2.6.33\*.** В фантастическом рассказе описывается, как из-за небольшой ошибки в выборе начальной скорости при старте с поверхности Земли межпланетный корабль падает на Солнце. При какой наименьшей скорости на поверхности Земли это возможно?

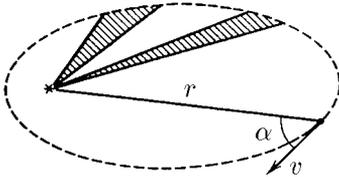
**2.6.34.** Кинетическая энергия спутника на круговой орбите равна  $K$ . Чему равна его потенциальная энергия?

**2.6.35\*.** Спускаясь по спирали с круговой орбиты на поверхность планеты в разреженных слоях атмосферы спутник совершает почти круговые витки уменьшающегося радиуса. При этом его скорость увеличивается так, будто сила сопротивления атмосферы толкает спутник вперед, в направлении его полета! Объясните качественно и количественно такое парадоксальное поведение спутника.

◇ **2.6.36\*.** В случае действия на тело центральной силы радиус-вектор, проведенный к нему из центра, описывает в равные промежутки времени равные площади. (В этом, собственно, и состоит по отношению к движению планет второй

закон Кеплера.) Какую площадь опишет за время  $t$  радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, если в начальный момент расстояние от нее до Солнца  $r$ , скорость  $v$ , а угол между скоростью планеты и радиус-вектором  $\alpha$ ?

◇ **2.6.37.** Спутник связи «Молния-1» имеет перигей над южным полушарием Земли на высоте около 500 км, а апогей — на высоте около 40 000 км над северным полушарием. Каково отношение угловых скоростей обращения этого спутника в перигее и апогее?

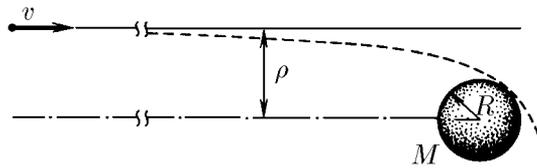


К задаче 2.6.36



К задаче 2.6.37

◇ **2.6.38\*.** К планете радиуса  $R$  и массы  $M$  издалека движется со скоростью  $v$  относительно нее космический зонд. При каком прицельном параметре  $\rho$  зонд пролетит ближе всего к планете, не разбившись?



К задаче 2.6.38

**2.6.39\*.** Скорость спутника в перигее равна  $v$  при расстоянии до центра Земли, равном  $r$ . Какова скорость спутника в апогее? Каково расстояние от него до центра Земли в апогее?

**2.6.40\*.** Космический зонд массы  $m$  движется вокруг планеты массы  $M$  по орбите с наибольшим удалением  $r_a$  от центра планеты (в апоцентре) и наименьшим —  $r_p$  (в перицентре). Какую минимальную энергию нужно сообщить зонду, чтобы он покинул планету?

**2.6.41\*.** С орбитальной станции, движущейся со скоростью  $u$  по круговой орбите вокруг планеты, запускают два зонда. Начальная скорость зондов относительно планеты равна  $v$  ( $\sqrt{2}u > v > u$ ). Один зонд движется по направлению радиуса планеты; начальная скорость другого зонда перпендикулярна ее радиусу. Найдите отношение максимально возможных расстояний от зондов до центра планеты.

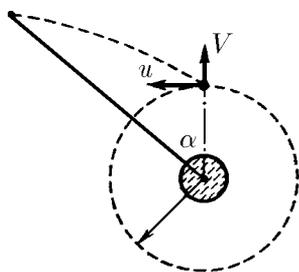
◇ **2.6.42\*.** Плоскость орбиты спутника разбита на секторы с общей вершиной в центре планеты массы  $M$  и одинаковыми малыми углами раствора  $d\varphi$ . Найдите изменение скорости спутника при прохождении каждого сектора, если его скорость в перицентре  $v_p$ , а расстояние от спутника до центра планеты в перицентре  $r_p$ .

◇ **2.6.43\*.** С орбитальной станции, имеющей круговую орбиту радиуса  $R$  и скорость  $u$ , запустили зонд, сообщив ему мгновенно в радиальном направлении дополнительную скорость  $V$ . Докажите, что когда зонд и станция видны из центра планеты под одинаковым углом к направлению на точку старта, их скорости отличаются по-прежнему на величину  $V$ . На каком расстоянии от центра планеты находится зонд, когда этот угол наблюдения равен  $\alpha$ ?

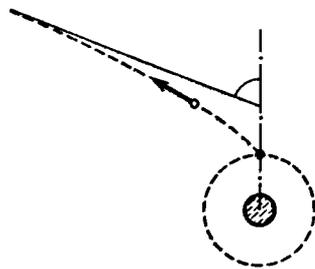
◇ **2.6.44\***. При какой скорости  $V$  орбита зонда из предыдущей задачи замкнута? Найдите ее перигеиум и апогеиум. В случае же незамкнутой орбиты найдите предельный угол с направлением от центра планеты к точке старта, который образует скорость зонда при его безграничном удалении от планеты.



К задаче 2.6.42



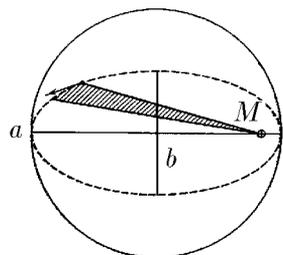
К задаче 2.6.43



К задаче 2.6.44

**2.6.45\***. Отрезок, соединяющий перигеиум и апогеиум эллиптической орбиты, называется большой осью. Относительно нее эллипс симметричен. Отрезок, соединяющий наиболее удаленные от большой оси точки орбиты, называется малой осью. Она перпендикулярна большой оси и тоже является осью симметрии эллипса. Используя условия задачи 2.6.43, найдите скорость зонда в вершинах малой оси. Выразите эту скорость через длину большой полуоси  $a$  и массу планеты  $M$ .

◇ **2.6.46\***. Спутник движется вокруг планеты массы  $M$  по эллипсу\*) с большой и малой полуосями  $a$  и  $b$ . Определите площадь, которую радиус-вектор, проведенный из центра планеты к спутнику, «заметает» в единицу времени. Найдите период обращения спутника.



К задаче 2.6.46

**2.6.47.** Наибольшее расстояние от Солнца до кометы Галлея составляет 35,4 радиуса земной орбиты, а наименьшее — 0,6. Прохождение ее вблизи Солнца наблюдалось в 1986 году; в каком году произошло ее предыдущее прохождение?

**2.6.48\***. Спутник, двигавшийся по круговой орбите радиуса  $R_c$  был мгновенно заторможен и стал двигаться по эллиптической орбите, касающейся начальной орбиты и поверхности планеты. Определите время падения спутника на планету. Радиус планеты  $R$ , ускорение свободного падения на поверхности  $g$ .

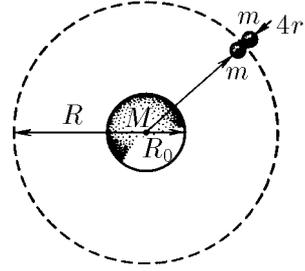
**2.6.49\***. Определите время падения Земли на Солнце, если ее внезапно остановить.

**2.6.50\***. Два богатыря на полюсе Земли бросают вертикально вверх булавы. Первая упала через неделю, вторая — через 30 дней. Оцените, на сколько различались их начальные скорости.

**2.6.51.** Определите силу натяжения троса, связывающего два спутника массы  $m$ , которые обращаются вокруг Земли на расстояниях  $R_1$  и  $R_2$  от ее центра так, что трос всегда направлен радиально. Масса Земли  $M$ .

\*) Эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  получается из окружности радиуса  $a$  уменьшением ее размеров в одном из направлений в  $k = a/b$  раз. Площадь эллипса  $S = \pi a^2/k = \pi ab$ .

◇ **2.6.52\***. Две соприкасающиеся шаровые глыбы массы  $m$  и радиуса  $r$  каждая движутся по круговой орбите вокруг планеты массы  $M$ . Центры глыбы находятся на одном радиусе, расстояние от точки их соприкосновения до центра планеты  $R$ . С какой силой давит одна глыба на другую? При каком радиусе орбиты взаимное притяжение глыб перестанет удерживать их вместе? Радиус планеты  $R_0 \gg r$ . Плотность глыб примите равной средней плотности планеты.



К задаче 2.6.52

**2.6.53\***. Известный физик Ф. Дайсон высказал предположение, что можно было бы полностью использовать энергию звезд, если бы космические цивилизации могли окружить звезды сферическими оболочками. Найдите напряжение в материале неподвижной однородной оболочки, которая окружила бы в соответствии с этим предположением Солнце, при ее радиусе, равном радиусу земной орбиты. Плотность материала оболочки  $\rho = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

## § 2.7. Вращение твердого тела

**2.7.1.** Два подобных маховика изготовлены из одного металла, причем линейные размеры второго вдвое больше линейных размеров первого. Как относятся кинетические энергии маховиков при одной и той же угловой скорости вращения вокруг оси?

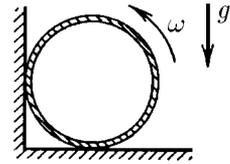
**2.7.2.** Определите кинетическую энергию тонкого кольца радиуса  $R$  и массы  $m$ , раскрученного до угловой скорости  $\omega$  вокруг его оси. Больше или меньше эта энергия в случае сплошного диска того же радиуса и массы?

**2.7.3.** Маховик в виде кольца массы  $m$  и радиуса  $R$  с невесомыми спицами раскрутили до угловой скорости  $\omega$ . Из-за трения он остановился. Найдите момент силы трения, если маховик остановился через время  $t$ ; если маховик до полной остановки сделал  $N$  оборотов.

**2.7.4.** Тонкий обруч радиуса  $R$  раскрутили вокруг его оси до угловой скорости  $\omega$  и положили плашмя на горизонтальный стол. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения между столом и обручем равен  $\mu$ ? Сколько оборотов делает обруч до полной остановки?

**2.7.5\***. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг оси, пропорциональна квадрату угловой скорости:  $K = J\omega^2/2$ . Коэффициент  $J$  называется моментом инерции относительно данной оси. Найдите момент инерции для гантели, представляющей собой точечные массы  $m_1$  и  $m_2$  на концах легкого стержня, если ось ее вращения перпендикулярна стержню и находится на расстоянии  $r_1$  и  $r_2$  от точечных масс.

◇ **2.7.6.** Тонкостенный цилиндр радиуса  $R$  раскрутили до угловой скорости  $\omega$  и поставили в угол, как показано на рисунке. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен  $\mu$ . Сколько оборотов цилиндр сделает до полной остановки?



К задаче 2.7.6

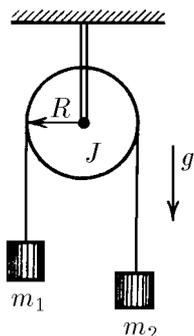
**2.7.7.** Решите задачу 2.7.6 в случае, если в угол поставили раскрученный сплошной однородный цилиндр. Момент инерции такого цилиндра  $J = mR^2/2$ , где  $m$  — его масса.

**2.7.8.** Момент сил, действующих на твердое тело относительно его оси вращения, равен  $M$ . Докажите, что работа этих сил равна  $M\varphi$ , а угловое ускорение тела равно  $M/J$ , где  $\varphi$  — угол поворота тела, а  $J$  — момент инерции тела относительно оси вращения.

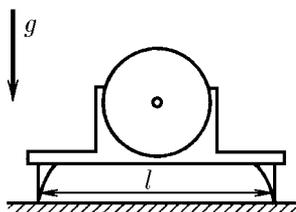
◇ **2.7.9\***. Определите угловое ускорение блока радиуса  $R$  с моментом инерции  $J$ , вызванное двумя грузами массы  $m_1$  и  $m_2$ , закрепленными на концах нити, перекинутой через блок, если нить не проскальзывает по блоку.

◇ **2.7.10**. Электродвигатель закреплен на подставке так, что его ось и общий центр масс находятся посередине между опорами, расстояние между которыми равно  $l$ . Его поставили на гладкую горизонтальную поверхность. Найдите силы давления опор подставки на поверхность, если после включения ротор двигателя раскручивается с угловым ускорением  $w$ , а его момент инерции равен  $J$ . Масса двигателя с подставкой  $m$ .

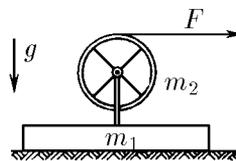
◇ **2.7.11**. На гладком горизонтальном столе находится брусок массы  $m_1$ . На нем укреплен тонкостенный цилиндр массы  $m_2$  и радиуса  $R$ , который может без трения вращаться вокруг своей оси. На цилиндр намотана невесомая тонкая нить, за конец которой тянут с горизонтальной силой  $F$ . Найдите ускорение бруска и угловое ускорение цилиндра.



К задаче 2.7.9



К задаче 2.7.10

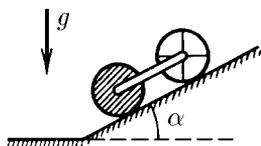


К задаче 2.7.11

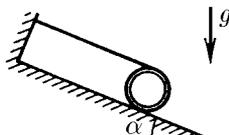
**2.7.12**. Найдите ускорение, с которым скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости с углом  $\alpha$  тонкостенный цилиндр. Какова сила трения, действующая на него?

◇ **2.7.13\***. Оси тонкостенного и сплошного цилиндров соединены невесомой штангой. Цилиндры скатываются без проскальзывания по наклонной плоскости с углом  $\alpha$ . Радиусы цилиндров одинаковы, масса каждого цилиндра  $m$ . Определите силу натяжения штанги.

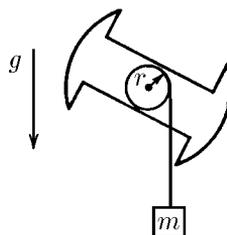
◇ **2.7.14\***. На тонкостенный цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке так, что при соскальзывании цилиндра с наклонной плоскости нить остается параллельной наклонной плоскости. Какую скорость приобрел цилиндр, если его ось прошла расстояние  $l$ ? Угол наклона плоскости  $\alpha$ , коэффициент трения между плоскостью и цилиндром  $\mu$ .



К задаче 2.7.13



К задаче 2.7.14



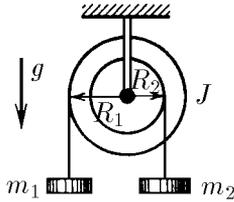
К задаче 2.7.16

**2.7.15.** Сплошной цилиндр массы  $m_1$  насажен на горизонтальную ось. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массы  $m_2$ . С каким ускорением станет опускаться гиря, если ее отпустить?

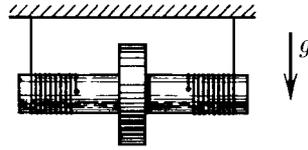
◇ **2.7.16.** Твердое тело насажено на горизонтальную ось, проходящую через его центр масс. На ту же ось насажен легкий блок радиуса  $r$ , жестко прикрепленный к телу. К свободному концу нити, намотанной на блок, подвешена гиря массы  $m$ . Гирию отпускают. Через время  $t$  она опускается на расстояние  $h$ . Найдите момент инерции тела.

◇ **2.7.17.** На ступенчатый цилиндрический блок намотаны в противоположных направлениях две нити с подвешенными к ним грузами массы  $m_1$  и  $m_2$ . Найдите ускорение грузов и силу натяжения нитей. Момент инерции блока  $J$ , радиус соответствующих участков блока  $R_1$  и  $R_2$ .

◇ **2.7.18.** На валик радиуса  $r$  плотно насажен сплошной диск. Момент инерции этой системы относительно оси  $J$ , масса  $m$ . На валик симметрично намотаны две нити, на которых система подвешена к неподвижному штативу. Нити вертикальны. Систему отпускают. Найдите ускорение оси диска и силу натяжения нитей.



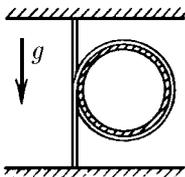
К задаче 2.7.17



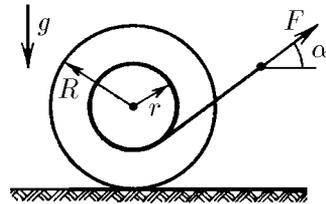
К задаче 2.7.18

◇ **2.7.19\*.** Однородная тяжелая веревка, концы которой закреплены на одной вертикали, охватывает невесомый обруч. С каким ускорением обруч падает, если его отпустить?

◇ **2.7.20\*.** На горизонтальной плоскости лежит катушка ниток. Катушку тянут за нитку. При каких углах  $\alpha$  между силой и горизонталью катушка начнет ускоряться в сторону натянутой нити?



К задаче 2.7.19



К задаче 2.7.20

**2.7.21\*.** Тонкое кольцо радиуса  $R$  и массы  $m$  раскрутили до угловой скорости  $\omega_0$  и поставили вертикально на горизонтальную плоскость. Как будет двигаться кольцо, если коэффициент трения кольца о плоскость равен  $\mu$ ? Определите зависимость от времени скорости оси и угловой скорости вращения. Через какое время прекратится проскальзывание? Какая часть начальной энергии перейдет в тепло?

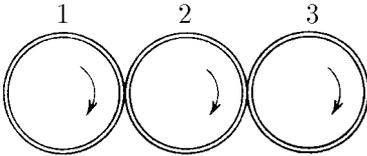
**2.7.22\*.** Однородный цилиндр радиуса  $R$  и массы  $m$  толкнули с начальной скоростью  $v_0$  без вращения вдоль горизонтальной плоскости. Через какое время прекратится проскальзывание, если коэффициент трения цилиндра о плоскость равен  $\mu$ ? Какая часть начальной энергии перейдет в тепло?

**2.7.23\***. По шероховатой горизонтальной поверхности катится без проскальзывания со скоростью  $v$  тонкое кольцо. Через какое время после упругого удара о гладкую вертикальную стенку кольцо остановится, если коэффициент трения кольца о поверхность равен  $\mu$ ? Опишите качественно движение сплошного диска после удара.

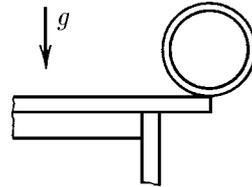
**2.7.24**. Ознакомьтесь с условиями задачи 2.4.18. При какой начальной угловой скорости обруч радиуса  $R$  вернется в исходную точку, двигаясь с постоянным ускорением по горизонтальному полу? Начальная скорость центра обруча  $v$ .

◇ **2.7.25**. Три одинаковых цилиндра раскрутили до угловой скорости  $\omega$  и привели в соприкосновение так, что левый и правый цилиндры оказались прижаты к центральному с одинаковой силой. Оси цилиндров параллельны и закреплены. Каким станут в конце концов угловые скорости вращения цилиндров?

◇ **2.7.26**. Центр тонкого кольца находится как раз над краем стола. Кольцо начинает скатываться со стола без проскальзывания из состояния покоя. На какой угол повернется кольцо до момента отрыва его от края стола? Больше или меньше будет этот угол в случае, если со стола скатывается шар?



К задаче 2.7.25

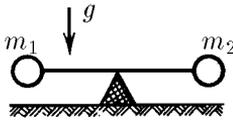


К задаче 2.7.26

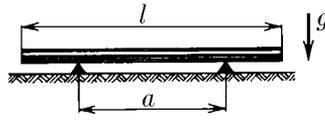
◇ **2.7.27\***. Легкий стержень с закрепленными на концах грузами массы  $m_1$  и  $m_2$  опирается серединой на жесткую подставку. В начальный момент стержень удерживают горизонтально, а затем отпускают. С какой силой он давит на подставку сразу после того, как его отпустили?

◇ **2.7.28\***. Тонкая однородная палочка длины  $l$  и массы  $m$  лежит симметрично на опорах, расстояние между которыми равно  $a$ . Одну из опор быстро убирают. Какова сразу после этого сила реакции оставшейся опоры?

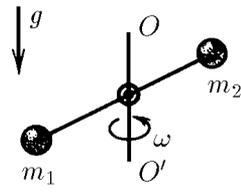
◇ **2.7.29**. Гантель с шариками массы  $m_1$  и  $m_2$ , соединенными невесомым стержнем длины  $l$ , вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр гантели, с угловой скоростью  $\omega$ . Определите угол, который образует ось гантели с осью вращения.



К задаче 2.7.27



К задаче 2.7.28

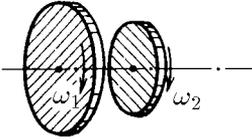


К задаче 2.7.29

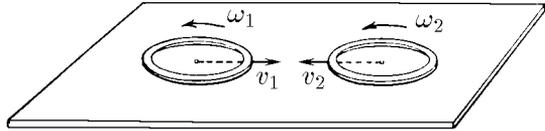
◇ **2.7.30**. Два диска с моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$  вращаются с угловой скоростью соответственно  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вокруг одной и той же оси без трения. Диски пришли в соприкосновение друг с другом. Из-за возникшего между дисками трения через некоторое время проскальзывание одного диска по другому прекращается. Какова станет тогда угловая скорость вращения дисков? Какое количество теплоты выделится?

**2.7.31\***. Вращающийся обруч радиуса  $R$  падает вертикально на горизонтальную плоскость и отскакивает от нее со скоростью  $v$  под углом  $30^\circ$ , уже не вращаясь. Какова угловая скорость обруча до удара?

◇ **2.7.32\***. По гладкой горизонтальной плоскости навстречу друг другу движутся два одинаковых тонких вращающихся кольца. Их скорости  $v_1$  и  $v_2$  направлены по прямой, соединяющей центры колец. Угловые скорости колец  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Определите угловую скорость колец после соударения, если проскальзывание их относительно друг друга исчезает в последний момент удара.

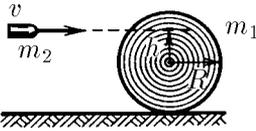


К задаче 2.7.30

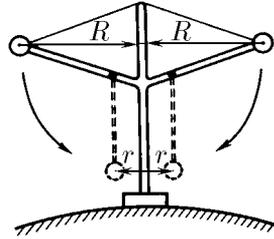


К задаче 2.7.32

◇ **2.7.33**. В цилиндр массы  $m_1$  и радиуса  $R$ , покоящийся на гладкой горизонтальной плоскости, попадает пуля массы  $m_2$ , летящая горизонтально на высоте  $h$  от оси цилиндра со скоростью  $v$ . Считая удар абсолютно неупругим и  $m_2 \ll m_1$ , найдите скорость оси и угловую скорость цилиндра.



К задаче 2.7.33



К задаче 2.7.36

**2.7.34**. На покоящемся однородном горизонтальном диске массы  $m_1$  и радиуса  $R$  стоит человек массы  $m_2$ . Диск может без трения вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. С какой угловой скоростью начнет вращаться диск, если человек пойдет по окружности радиуса  $r$  вокруг оси диска со скоростью  $v$  относительно него? Радиус диска много больше роста человека.

**2.7.35**. На краю свободно вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси диска, имеющего радиус  $R$  и момент инерции  $J$ , стоит человек массы  $m$ . Как изменится угловая скорость вращения диска, если человек перейдет от края диска к центру? Как изменится кинетическая энергия системы при этом? Размерами человека по сравнению с размерами диска пренебречь.

◇ **2.7.36**. В установке, находящейся на полюсе Земли, небольшие, но тяжелые грузы удерживаются с помощью нити на расстоянии  $R$  от вертикальной оси. Нить пережигают. Грузы опускаются и оказываются на расстоянии  $r = 0,1R$  от оси. Сколько оборотов за час совершает после этого установка, если вначале она относительно Земли не вращалась? Трением пренебречь.

**2.7.37**. Воздух из субтропического пояса повышенного давления переходит в экваториальный пояс пониженного давления. В какую сторону — на запад или восток — он будет отклоняться при своем движении?

**2.7.38\***. За последние 40 лет сутки возросли примерно на  $10^{-3}$  с. Некоторые геофизики считают основной причиной этого таяние полярной ледяной шапки в Антарктиде. Оцените, какая масса льда в Антарктиде растаяла, если это предположение верно, за 40 лет.

◇ **2.7.39\***. а. Известно, что приливная деформация самой Земли и приливы в океанах замедляют вращение Земли. Объясните, как возникает необходимый для этого момент сил.

б. Солнечный прилив в атмосфере Земли достигает максимума на два часа раньше прохождения Солнцем зенита. Способствует или препятствует этот прилив замедлению суточного вращения?

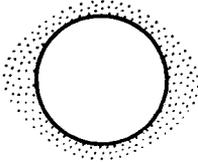
**2.7.40\***. Однородная спица длины  $l$ , стоящая на гладкой горизонтальной поверхности, начинает падать из вертикального положения. Определите скорость верхнего конца спицы перед ударом его о поверхность.

**2.7.41.** Тонкий стержень массы  $m$  и длины  $l$  лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Пластилиновый шарик массы  $m$  со скоростью  $v$ , перпендикулярной стержню, ударяется об один из его концов и прилипает к нему. Какое количество теплоты выделится при таком ударе?

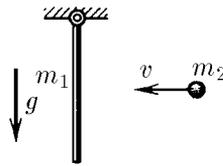
◇ **2.7.42.** Стержень массы  $m_1$  и длины  $l$  подвешен на шарнире. Небольшой кусок пластилина массы  $m_2$  прилипает к середине стержня, двигаясь до соударения с ним горизонтально со скоростью  $v$ . Найдите максимальный угол отклонения стержня от вертикали. Трением в шарнире пренебречь.

**2.7.43\***. Каким местом при фехтовании палками нужно ударять их друг о друга, чтобы не чувствовать отдачи? Палку держат одной рукой за ее конец.

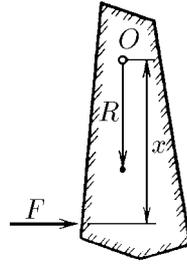
◇ **2.7.44.** Момент инерции твердого тела массы  $m$  относительно оси  $O$  равен  $J$ . Центр масс тела находится на расстоянии  $R$  от этой оси. Найдите силу, действующую на ось при кратковременном приложении к твердому телу силы  $F$ , перпендикулярной отрезку длины  $x$ , который соединяет точку приложения силы и ось. При каком  $x$  сила, действующая на ось, наименьшая?



К задаче 2.7.39



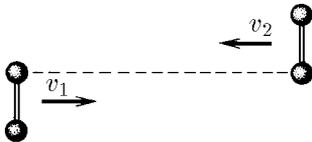
К задаче 2.7.42



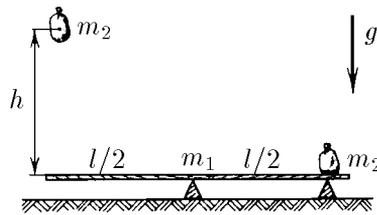
К задаче 2.7.44

◇ **2.7.45.** Две одинаковые гантели летят навстречу друг другу со скоростью  $v_1$  и  $v_2$  так, как изображено на рисунке. Расстояние между шариками гантели  $l$ . Как будут двигаться гантели после упругого соударения?

◇ **2.7.46\***. На какую высоту можно подбросить мешок с песком с помощью доски массы  $m_1$  и длины  $l$ , если на другой конец этой доски с высоты  $H$  падает такой же мешок с песком? Масса мешка с песком равна  $m_2$ .

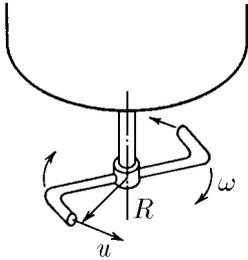


К задаче 2.7.45

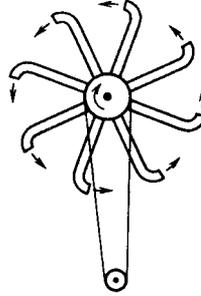


К задаче 2.7.46

◇ **2.7.47\***. На вертикальную трубу, выходящую из дна сосуда с жидкостью, герметично надета коленчато изогнутая насадка — сегнерово колесо. Если в сосуд подливать жидкость, чтобы уровень жидкости в нем не менялся при ее вытекании, сегнерово колесо вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определите момент сил трения, действующий на насадку, если относительно нее жидкость вытекает со скоростью  $u$  по касательной к окружности радиуса  $R$ . Расход массы жидкости в единицу времени  $\mu$ .



К задаче 2.7.47

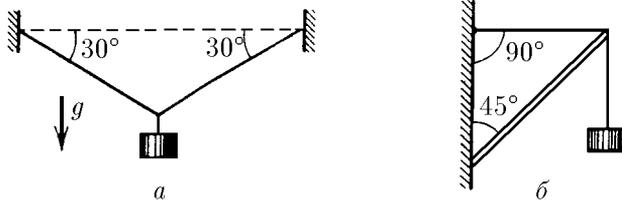


К задаче 2.7.48

◇ **2.7.48\***. Найдите, пренебрегая трением, полезную мощность турбины, устроенной по принципу сегнерова колеса. Данные возьмите из предыдущей задачи. Как зависит угловая скорость вращения турбины от момента сил нагрузки?

## § 2.8. Статика

◇ **2.8.1.** На рисунке изображены конструкции, которые удерживают груз массы 10 кг. Тросы изображены тонкими линиями, стержень — двойной линией. Определите силу натяжения тросов для случая *a* и силу, действующую на стержень со стороны переброшенного через него троса, для случая *б*.

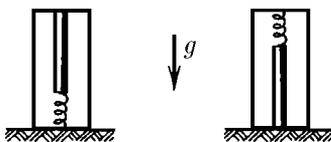


К задаче 2.8.1

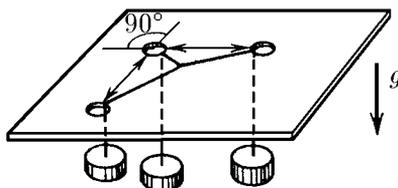
◇ **2.8.2.** Карандаш массы 0,01 кг стоит вертикально на пружине в закрытом пенале. Когда пенал перевернули, карандаш стал давить на крышку в 1,2 раза сильнее. С какой силой он давил на нее первоначально?

**2.8.3.** Определите наибольшую высоту стены, которую можно построить из кирпича, если предел прочности кирпича на сжатие равен  $10^7$  Па, а его плотность равна  $1,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

◇ **2.8.4.** Через три отверстия в крышке стола пропущены нити, связанные с одного конца общим узлом. К другому концу каждой нити прикреплены одинаковые грузы. Найдите углы между нитями. Трением пренебречь.



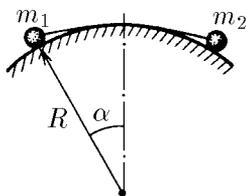
К задаче 2.8.2



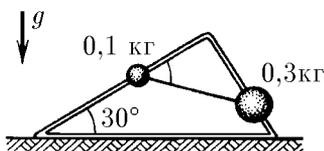
К задаче 2.8.4

◇ **2.8.5.** Два груза небольшого размера соединены нитью длины  $l$  и лежат на цилиндрической гладкой поверхности радиуса  $R$ . При равновесии грузов угол между вертикалью и радиусом, проведенным к грузу массы  $m_1$ , равен  $\alpha$ . Найдите массу второго груза.

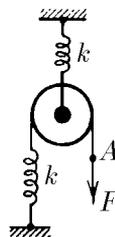
◇ **2.8.6.** Из проволоки изготовлена рама в форме прямоугольного треугольника, которая помещена в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке. По проволоке могут скользить без трения связанные нитью грузы массы  $m_1 = 0,1$  кг и  $m_2 = 0,3$  кг. Найдите силу натяжения нити и угол между нитью и длинным катетом треугольника при равновесии.



К задаче 2.8.5



К задаче 2.8.6



К задаче 2.8.7

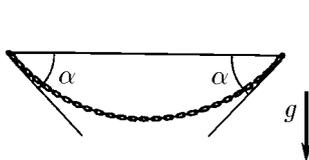
◇ **2.8.7.** На сколько переместится конец нити (точка  $A$ ), перекинутой через подвижной блок, если к нему приложить силу  $F$ ? Жесткость пружин равна  $k$ .

**2.8.8.** Если к нижнему концу вертикально висящей пружины прикрепить груз, то ее длина станет равной  $l_1$ . Если этот же груз прикрепить к середине пружины, то ее длина станет равной  $l_2$ . Найдите длину недеформированной пружины.

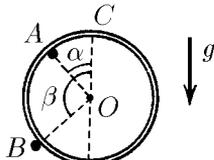
◇ **2.8.9.** Цепочка массы  $m$  подвешена за концы так, что вблизи точек подвеса она образует с горизонталью угол  $\alpha$ . Определите силу натяжения цепочки в ее нижней точке и в точках подвеса.

◇ **2.8.10.** Гладкий тонкий обруч массы  $m$  висит у стенки на одном гвозде ( $A$ ) и опирается на другой ( $B$ ). Радиус, проведенный к гвоздю  $A$  из центра обруча, образует угол  $\alpha$  с вертикалью. Радиус же, проведенный к гвоздю  $B$ , образует угол  $\beta$  с вертикалью. Найдите, с какой силой действует обруч на каждый гвоздь.

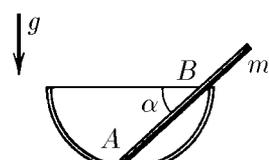
◇ **2.8.11.** В гладкой закрепленной полусфере свободно лежит палочка массы  $m$  так, что угол ее с горизонтом равен  $\alpha$ , а конец выходит за край полусферы. С какими силами действует палочка на полусферу в точках соприкосновения  $A$  и  $B$ ?



К задаче 2.8.9



К задаче 2.8.10

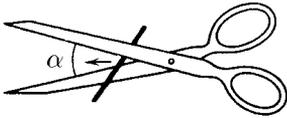


К задаче 2.8.11

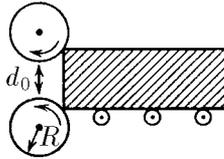
◇ **2.8.12.** Проволока, когда ее начинают резать ножницами, выскальзывает к их концам и только тогда, когда угол раствора ножниц по мере движения проволоки уменьшится до значения  $\alpha_{\text{мин}}$ , ножницы надрезают проволоку. Почему это происходит? Определите коэффициент трения проволоки о лезвие ножниц. Силой тяжести пренебречь. Проволока не закреплена.

◇ **2.8.13.** Валки прокатного стана имеют радиус  $R$ . Вращаясь, они втягивают заготовку, если ее толщина достаточно мала. Коэффициент трения между валками и заготовкой  $\mu$ , а зазор между валками  $d_0$ . Найдите максимальную толщину заготовки. Заготовку не подталкивают.

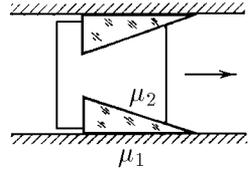
◇ **2.8.14\***. Тело с установленными в его вырезах клиньями расположено между двумя параллельными стенками так, как показано на рисунке. Найдите предельный угол при вершине клиньев, при котором тело может двигаться вправо и не может двигаться влево. Коэффициенты трения клиньев о стенки и тело равны  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно.



К задаче 2.8.12



К задаче 2.8.13

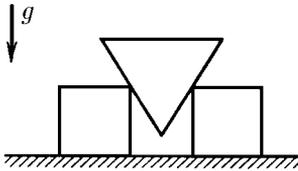


К задаче 2.8.14

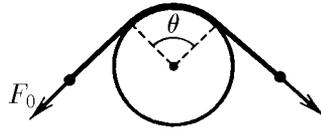
◇ **2.8.15.** Между одинаковыми брусками квадратного сечения, лежащими на горизонтальной плоскости, вставлен гладкий клин такой же массы с сечением в виде равностороннего треугольника. При каком коэффициенте трения брусков о плоскость они начнут разъезжаться?

**2.8.16\***. На цилиндрический столб намотан один виток каната. Чтобы канат не скользил по столбу, когда его за один из концов тянут с силой  $F$ , другой конец каната достаточно удерживать с силой  $f$ . Как изменится удерживающая сила, если на столб намотано  $n$  витков? Витки каната не соприкасаются друг с другом.

◇ **2.8.17\***. За один конец веревки, охватывающей столб по дуге с углом  $\theta$ , тянут с силой  $F_0$ . Какую минимальную силу нужно приложить к другому концу веревки, чтобы ее удержать, если коэффициент трения веревки о столб равен  $\mu$ ?

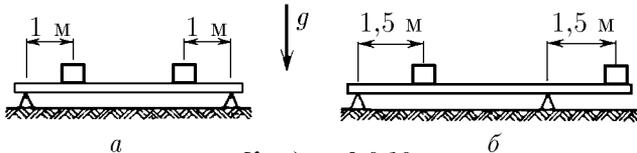


К задаче 2.8.15



К задаче 2.8.17

◇ **2.8.18.** На рисунке изображены балки, на которых находится по два груза массы 10 кг каждый. Расстояние между опорами балок 4 м. Найдите силу давления балок на опоры. Балки невесомы.

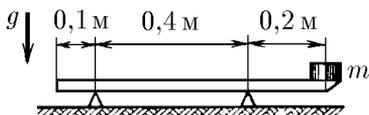


К задаче 2.8.18

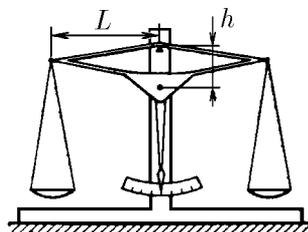
◇ **2.8.19.** Линейка массы 0,01 кг лежит на двух опорах так, как это показано на

рисунке. На один конец линейки положен груз. Какова масса груза, при которой возможно равновесие?

**2.8.20.** Неравноплечие весы находятся в равновесии. Если на левую их чашку положить груз, то он уравновешивается гирей массы  $m_1$  на правой чашке. Если этот же груз положить на правую чашку весов, то он уравновешивается гирей массы  $m_2$  на левой чашке. Какова масса груза?



К задаче 2.8.19



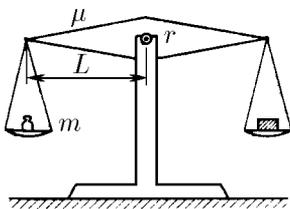
К задаче 2.8.21

◇ **2.8.21.** Центр масс коромысла равноплечих весов находится ниже точки подвеса на расстоянии  $h$  от нее, а масса коромысла равна  $m_0$ . На концах коромысла, расстояние между которыми равно  $2L$ , на нитях подвешены одинаковые чашки. На сколько отличаются массы грузов, положенных на чашки, если коромысло отклонилось от горизонтали на угол  $\alpha$ ?

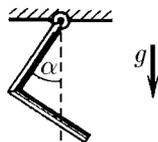
◇ **2.8.22.** Ось коромысла равноплечих весов, имеющая радиус  $r$ , вставлена в прорезь стойки. При гире массы  $m$  на одной чашке и грузе на другой коромысло остается в горизонтальном положении. Масса коромысла вместе с чашками равна  $M$ , а длина коромысла  $2L$ . На сколько может отличаться масса груза от массы гири, если коэффициент трения между осью и стойкой равен  $\mu$ ?

◇ **2.8.23.** Тяжелый стержень согнут посередине под прямым углом и подвешен свободно за один из концов. Какой угол с вертикалью образует верхняя половина стержня?

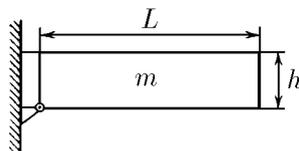
◇ **2.8.24.** Однородная балка массы  $m$  имеет длину  $L$  и высоту  $h$ . Нижний левый угол балки соединен со стенкой шарниром, а верхний левый угол прикреплен к стенке горизонтальным тросом. Балка горизонтальна. Определите силу натяжения троса и силу давления балки на ось шарнира.



К задаче 2.8.22



К задаче 2.8.23

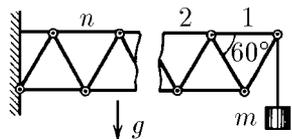


К задаче 2.8.24

◇ **2.8.25\*.** К системе из одинаковых стержней, соединенных шарнирами, подвешен груз массы  $m$ , как показано на рисунке. Определите силу, растягивающую  $n$ -й верхний горизонтальный стержень.

◇ **2.8.26.** С какой силой давит на стенки цилиндрического стакана палочка массы  $m$ , наполовину погруженная в воду? Угол наклона палочки к горизонтали  $\alpha$ . Трением пренебречь.

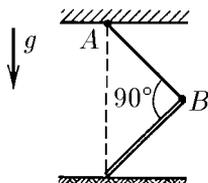
◇ **2.8.27.** Каким должен быть коэффициент трения однородного стержня о пол, чтобы он мог стоять так, как показано на рисунке? Длина нити  $AB$  равна длине стержня.



К задаче 2.8.25



К задаче 2.8.26

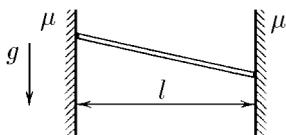


К задаче 2.8.27

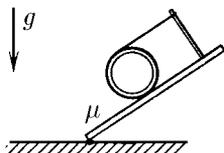
◇ **2.8.28.** Расстояние между вертикальными стенками равно  $l$ . Какой длины стержень, вставленный наискось между стенками, не будет опускаться, если коэффициент трения между стержнем и стенками равен  $\mu$ ?

◇ **2.8.29.** На цилиндр намотана нить, один конец которой закреплен на стойке в верхней точке наклонной плоскости. При каком угле наклона плоскости цилиндр не будет скатываться с нее, если коэффициент трения цилиндра о плоскость равен  $\mu$ ?

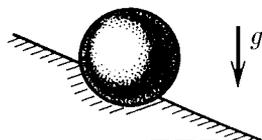
◇ **2.8.30.** Глубина лунки в доске, в которую вставлен шар, в два раза меньше радиуса шара. При каком угле наклона доски с горизонталью шарик выскочит из лунки?



К задаче 2.8.28



К задаче 2.8.29

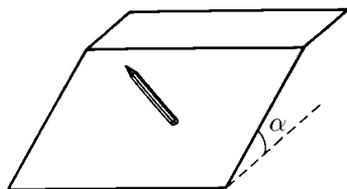


К задаче 2.8.30

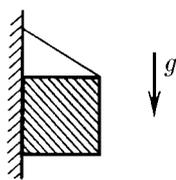
◇ **2.8.31\*.** На парту с углом наклона  $\alpha > 30^\circ$  кладут шестигранный карандаш так, чтобы он не скатывался вниз и не скользил. При каком наименьшем угле между карандашом и горизонтальным краем парты это возможно?

◇ **2.8.32.** Однородный куб с помощью веревки, привязанной в середине его ребра, подвешен к вертикальной стене. При каких значениях угла между веревкой и стенкой куб соприкасается со стенкой всей гранью, если коэффициент трения его о плоскость равен  $\mu$ ?

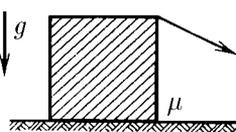
◇ **2.8.33\*.** На горизонтальной поверхности стоит куб массы  $m$ . С какой минимальной силой и под каким углом к горизонту надо тянуть куб за верхнее ребро, чтобы он начал опрокидываться без проскальзывания, если коэффициент трения куба о плоскость равен  $\mu$ ?



К задаче 2.8.31



К задаче 2.8.32

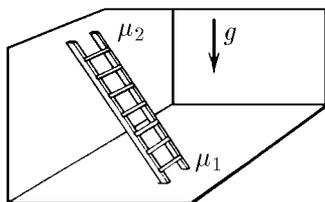


К задаче 2.8.33

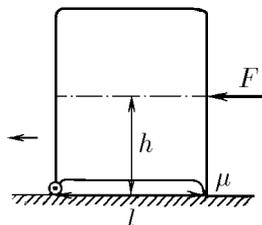
◇ **2.8.34.** Лестница опирается на вертикальную стену и пол. При каких значениях угла между лестницей и полом она может стоять, если коэффициенты трения лестницы о пол и о стену равны  $m_1$  и  $m_2$  соответственно?

◇ **2.8.35\*.** Центр масс холодильника находится на высоте  $h$  от пола посередине между опорами, расстояние между которыми равно  $l$ . Задние опоры — колесики с пренебрежимо малым трением в осях, передние опоры — неподвижные

выступы, коэффициент трения которых о пол равен  $\mu$ . Если к холодильнику на уровне его центра масс приложена горизонтальная сила  $F$ , то холодильник начинает сдвигаться назад, в сторону колесиков. Какую горизонтальную силу нужно приложить на том же уровне в противоположном направлении, чтобы сдвинуть холодильник вперед?



К задаче 2.8.34

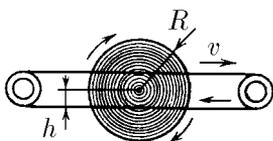


К задаче 2.8.35

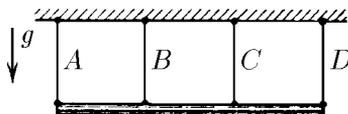
**2.8.36.** На вращающуюся горизонтальную ось радиуса  $R$  надета с малым зазором легкая втулка с прикрепленным к ней радиально легким стержнем длины  $l$ . На конце стержня закреплен тяжелый груз. Определите угол отклонения стержня при вращении втулки вместе с осью от радиального направления, если коэффициент трения между втулкой и осью  $\mu$ .

◇ **2.8.37\*.** Колесо радиуса  $R$  может свободно вращаться вокруг своей оси. К боковой поверхности колеса на расстоянии  $h$  от оси вращения прижимаются приводные ремни, движущиеся со скоростью  $v$ . Определите установившуюся угловую скорость колеса, если соприкосновение его с приводным ремнем происходит только по ободу.

◇ **2.8.38.** Однородная балка длины  $l$  висит на четырех одинаковых канатах, прикрепленных на расстоянии  $l/3$  друг от друга. Канат  $A$  удаляют. Для уменьшения опасности разрыва канатов предлагают удалить еще и канат  $D$ . Разумно ли это предложение?

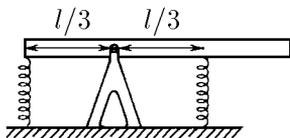


К задаче 2.8.37

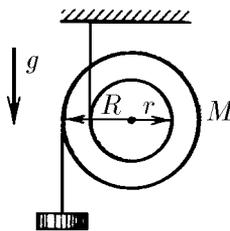


К задаче 2.8.38

◇ **2.8.39.** Однородная балка длины  $l$  и массы  $m$  на расстоянии  $l/3$  от конца имеет ось вращения. К концу балки присоединена пружина, прикрепленная к полу, и такая же пружина присоединена симметрично по другую сторону оси. При горизонтальном положении балки обе пружины не деформированы. Найдите силы, с которыми балка действует на ось и пружины. Деформации пружин малы, поэтому балка почти горизонтальна.



К задаче 2.8.39



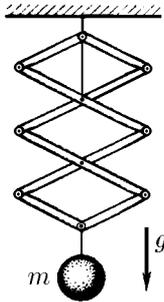
К задаче 2.8.40

◇ **2.8.40.** Катушка висит на нити, намотанной по малому радиусу  $r$  катушки. По большому радиусу катушки  $R$  тоже намотана нить, на конце которой висит груз. Какова масса груза, если система находится в равновесии? Масса катушки  $M$ .

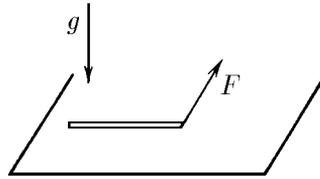
◇ **2.8.41.** Найдите силу натяжения нити, связывающей оси шарниров верхнего ромба легкой шарнирной подвески. Масса груза  $m$ .

**2.8.42\***. На крыше дома с углом наклона  $\varphi$  лежит свинцовый лист. Температура воздуха в течение суток повышается, достигая наивысшего значения  $t_2$ , а потом понижается до минимальной температуры  $t_1$ , при которой длина листа равна  $l$ . Найдите точки листа, неподвижные при нагревании; при остывании. На какое расстояние сползет лист за  $N$  суток устойчивой погоды? Коэффициент трения листа о крышу  $\mu > \operatorname{tg} \varphi$ . Температурный коэффициент линейного расширения свинца  $\alpha$ .

**2.8.43.** Муравей решил утащить к муравейнику соломинку. Как ему следует поступить, если сила, с которой он может тянуть соломинку, несколько меньше максимальной силы трения покоя?



К задаче 2.8.41



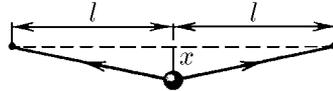
К задаче 2.8.44

◇ **2.8.44\***. Однородный тонкий брусок массы  $m$  лежит на горизонтальной плоскости. Какой наименьшей горизонтальной силой, приложенной к концу бруска по перпендикуляру к нему, его можно стронуть с места, если коэффициент трения между бруском и плоскостью равен  $\mu$ ?

## Колебания и волны

### § 3.1. Малые отклонения от равновесия

◇ **3.1.1.** Посередине натянутой струны длины  $2l$  закреплен шар. Какая суммарная сила действует на шар со стороны струны, если поперечное смещение его из положения равновесия  $x \ll l$ , а сила натяжения струны  $F$  не зависит от смещения? Почему при малых смещениях можно считать зависимость силы, действующей на шар, от  $x$  линейной? Как направлена эта сила по отношению к смещению? Найдите, как зависит потенциальная энергия шара от малого смещения  $x$ . Какова скорость шара при прохождении им положения равновесия, если его максимальное смещение равно  $x_0$ ? Масса шара  $m$ .



К задаче 3.1.1

**3.1.2.** Груз массы  $m$  подвешен на пружине жесткости  $k$ . Как зависит суммарная сила, действующая на груз, от смещения его на  $x$  из положения равновесия? Найдите зависимость потенциальной энергии груза от смещения  $x$ .

**3.1.3.** а. Тело массы  $m$ , подвешенное на пружине, совершает колебания так, что наибольшее значение скорости равно  $v_0$ , а наибольшее отклонение от положения равновесия равно  $x_0$ . Определите жесткость пружины.

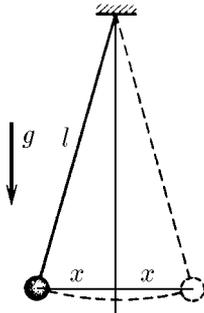
б. Скорость тела массы  $m$ , подвешенного на пружине и совершающего колебания, зависит от координаты тела  $x$  по закону  $v = v_0 \sqrt{1 - (x/x_0)^2}$ . Найдите зависимость силы, действующей на тело, и потенциальной энергии этого тела от координаты  $x$ . Зависит ли полученный результат от природы силы, заставляющей тело двигаться по приведенному закону?

**3.1.4.** Почему кажется, что быстро колеблющаяся на пружине лампочка вспыхивает в крайних точках своей траектории?

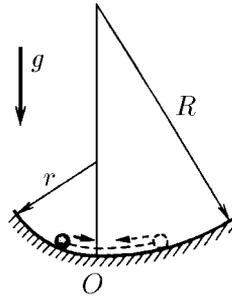
◇ **3.1.5.** Длина нити математического маятника  $l$ , масса шарика  $m$ . Определите силу, действующую на шарик, при отклонениях его от положения равновесия на  $x$  в случае, если  $x \ll l$ . Как зависит от  $x$  потенциальная энергия шарика?

**3.1.6.** Определите максимальную скорость шарика математического маятника длины  $l$ , движущегося в одной плоскости, если амплитуда смещения при малых колебаниях маятника равна  $x_0$ .

◇ **3.1.7.** Горизонтальный желоб слева от нижней линии выгнут по цилиндрической поверхности радиуса  $r$ , а справа — по поверхности радиуса  $R$ . Определите отношение наибольших отклонений влево и вправо при малых колебаниях тела в этом желобе.



К задаче 3.1.5



К задаче 3.1.7

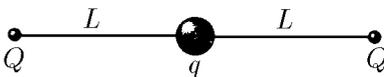
◇ **3.1.8\***. Два одинаковых шарика с зарядами  $\pm q$ , жестко связанные невесомым стержнем длины  $l$ , находятся в электрическом поле, которое действует на них с силой  $\pm qE$ . Определите массу шарика, если амплитуда малых поперечных колебаний шариков равна  $x_0$ , а максимальная скорость шариков  $v_0$ .

◇ **3.1.9**. Шарик массы  $m$  и радиуса  $r$  скользит по поверхности лунки, радиус кривизны которой  $R$ . Найдите зависимость потенциальной энергии шарика от малого смещения  $x$  из положения равновесия.

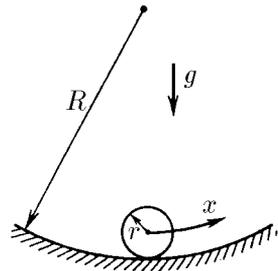
◇ **3.1.10\***. Бусинка с зарядом  $q$  может двигаться без трения по натянутой нити длины  $2L$ , на концах которой закреплены заряды  $Q$ . Найдите приращение потенциальной энергии при смещении бусинки на  $x$  вдоль нити из ее центра. Убедитесь, что при малых смещениях зависимость приращения потенциальной энергии от  $x$  квадратичная. Найдите, на сколько сместится бусинка массы  $m$ , если в положении равновесия ей сообщат небольшую скорость  $v$ .



К задаче 3.1.8



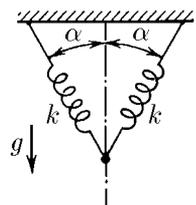
К задаче 3.1.10



К задаче 3.1.9

◇ **3.1.11**. Две пружины жесткости  $k$ , соединенные, как показано на рисунке, не деформированы. Какой массы груз следует подвесить к точке соединения пружин, чтобы он опустился на малое расстояние  $x$  в положение равновесия?

◇ **3.1.12**. а. Небольшое заряженное тело массы  $m$  может скользить по вертикальной спице, в нижней точке которой закреплен заряд, одноименный с зарядом тела. Положение равновесия тела находится на расстоянии  $R$  от этого заряда. Как зависит сила, действующая на тело, от малого его смещения  $x$  из положения равновесия?



К задаче 3.1.11

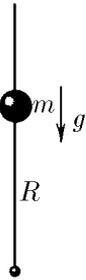
б. Массу тела увеличили втрое, оставив заряды неизменными. На каком теперь расстоянии от нижнего конца спицы находится положение равновесия тела?

Как зависит сила, действующая на тело, от малого его смещения из положения равновесия?

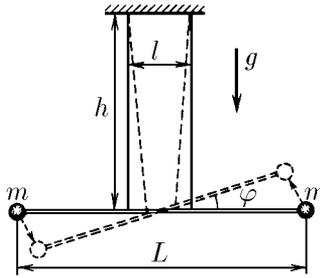
**3.1.13.** На тело массы  $m$  в задаче 3.1.12а положили небольшой грузик массы  $\Delta m$  и отпустили. Найдите максимальную скорость тела с грузиком.

◇ **3.1.14\*.** На нитях длины  $h$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга, висит невесомый стержень длины  $L > l$  с грузами массы  $m$  на концах. Стержень горизонтален. Покажите, что при повороте стержня вокруг его вертикальной оси симметрии на малый угол  $\varphi$  момент сил, действующих на грузы, пропорционален  $\varphi$ , а изменение потенциальной энергии грузов пропорционально  $\varphi^2$ . Найдите максимальную угловую скорость стержня, если его отпустили, повернув предварительно на угол  $\varphi_0$ .

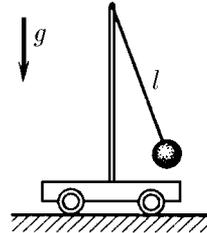
◇ **3.1.15.** Амплитуда малых колебаний математического маятника, стоящего на тележке, равна  $x_0$ , а амплитуда колебаний тележки  $y_0$ . Длина нити маятника  $l$ . Определите максимальную скорость маятника и тележки. Трением пренебречь.



К задаче 3.1.12



К задаче 3.1.14



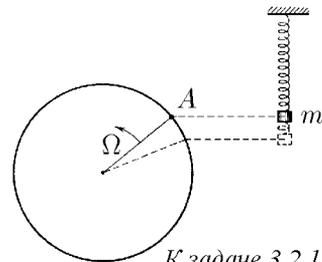
К задаче 3.1.15

**3.1.16.** Определите, в каких пределах меняется сила натяжения нити математического маятника, амплитуда колебаний которого  $x_0$  много меньше длины нити  $l$ , если масса маятника  $m$ .

**3.1.17.** Сила нормального давления небольшого тела при малых колебаниях его вблизи положения равновесия в лунке радиуса  $R$  меняется от  $N$  до  $N + \Delta$ ,  $\Delta \ll N$ . Определите амплитуду колебаний этого тела.

### § 3.2. Период и частота свободных колебаний

◇ **3.2.1.** а. Груз массы  $m$ , подвешенный на пружине и совершающий колебания, расположен рядом с вращающимся с угловой скоростью  $\Omega$  колесом, причем точка  $A$  колеса все время находится на одном уровне с центром масс груза. Где находится положение равновесия груза? Какая сила действует на груз, если смещение его из положения равновесия равно  $x$ ? Через какое наименьшее время  $T$  повторяются значения скорости и смещения груза? Как изменяются значения скорости и смещения через время  $T/2$ ?



К задаче 3.2.1

б. Используя результаты предыдущей задачи, сопоставьте колебательное движение груза массы  $m$  по прямой под действием силы  $F = -kx$  вращательному движению. Определите угловую скорость колеса, если известны величины  $k$  и  $m$ . На каком расстоянии от оси колеса находится точка  $A$ , если наибольшее отклонение груза от положения равновесия равно  $x_0$ ?

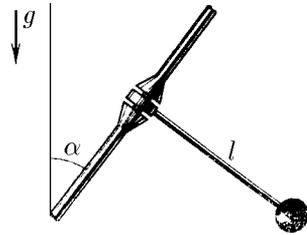
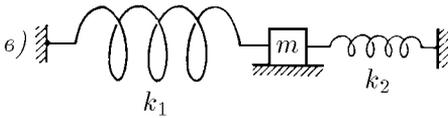
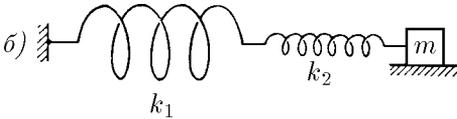
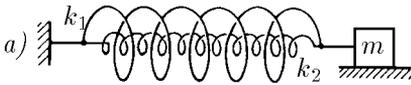
**3.2.2.** Неподвижный груз, подвешенный на пружине, растягивает ее, находясь в положении равновесия, на длину  $\Delta l$ . Каков период вертикальных колебаний груза?

**3.2.3.** Груз колеблется по вертикали на резиновом шнуре. Во сколько раз изменится период вертикальных колебаний груза, если его подвесить на том же шнуре, сложенном вдвое?

◇ **3.2.4.** Найдите период колебаний систем осцилляторов, изображенных на рисунке. Зависит ли период колебаний осциллятора на рисунке *в* от расстояния между стенками?  $k_1$  и  $k_2$  — жесткость пружин,  $m$  — масса тела.

**3.2.5.** Найдите длину математического маятника, период колебаний\*) которого 1 с.

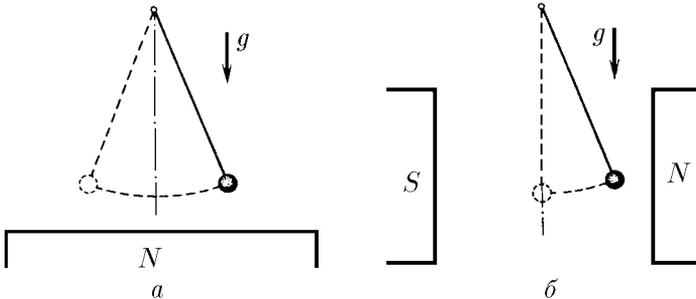
◇ **3.2.6.** Маятник представляет собой легкий и жесткий стержень длины  $l$  с грузом на конце. Чтобы сделать период колебаний маятника большим без чрезмерного увеличения размеров самого маятника, его ось устанавливают под углом  $\alpha$  к вертикали. Определите период колебаний.



*К задаче 3.2.4*

*К задаче 3.2.6*

◇ **3.2.7.** а. Математический маятник — железный шарик массы  $m$ , висающий на длинной нити, — имеет период  $T_0$ . В присутствии магнита, расположенного чуть ниже шарика, период колебаний стал равным  $T$ . Определите действующую на шарик магнитную силу.



*К задаче 3.2.7*

б. Железный шарик маятника поместили между полюсами магнита так, что на него действует горизонтальная магнитная сила. Найдите эту силу и новое

\*) Здесь и в дальнейшем, если не оговорено, рассматриваются малые колебания.

положение равновесия шарика, если период его колебаний после включения магнитного поля стал равным  $T$ .

**3.2.8.** Вблизи рудного месторождения период колебаний маятника изменился на 0,1%. Плотность руды в месторождении  $8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Оцените размеры месторождения, если средняя плотность Земли  $5,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , а ее радиус 6400 км.

**3.2.9.** На сколько отстанут за сутки маятниковые часы, поднятые на высоту Эвереста (8,9 км)? Останкинской башни (0,5 км)?

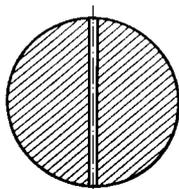
**3.2.10.** Измерения круговой частоты колебаний тела массы  $m$ , закрепленного посередине натянутой струны, длина которой  $2l$ , дали значение  $\omega^*$ ). Найдите силу натяжения струны.

**3.2.11.** Найдите частоту малых колебаний системы, описанной в задаче 3.1.10.

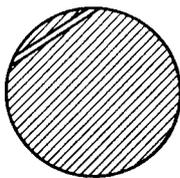
◇ **3.2.12.** Определите время полета камня от одного полюса Земли до другого по прямому тоннелю, прорытому через центр. Плотность Земли считать постоянной, ее радиус — равным 6400 км.

◇ **3.2.13.** В Земле прорыт прямой тоннель, не проходящий через ее центр. Определите время движения поезда с выключенными двигателями по такому тоннелю, если влиянием вращения Земли на движение поезда и трением пренебречь.

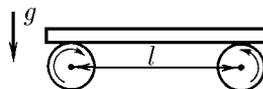
◇ **3.2.14.** Доска массы  $m$  лежит на двух катках, вращающихся с большой скоростью навстречу друг другу. Расстояние между осями катков  $L$ , коэффициент трения при скольжении доски по катку  $\mu$ . Найдите частоту продольных колебаний доски.



К задаче 3.2.12



К задаче 3.2.13



К задаче 3.2.14

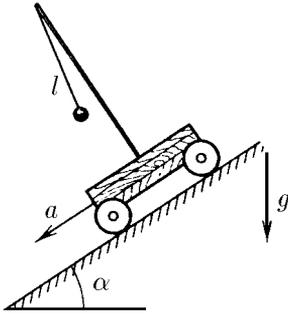
**3.2.15\*.** Подъемник поднимается или опускается в шахте, глубина которой 400 м, за 40 с. Сначала он разгоняется с постоянным ускорением, а затем с тем же по модулю ускорением замедляется. На сколько отстанут за сутки маятниковые часы подъемника по сравнению с неподвижными часами? Подъемник находится в движении в течение 5 ч ежедневно.

◇ **3.2.16\*.** Тяжелая тележка скатывается с ускорением  $a$  по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Найдите период колебаний маятника длины  $l$ , установленного на тележке.

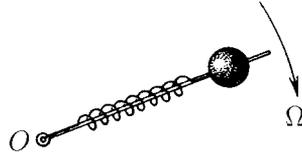
**3.2.17\*.** Космический корабль вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\Omega$ . Как зависит период колебаний маятника длины  $l$  от расстояния  $R$  точки подвеса до оси вращения? Плоскость колебаний проходит через ось вращения.

◇ **3.2.18.** Шарик массы  $m$ , насаженный на стержень, вращается с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $O$ , с которой он соединен пружиной жесткости  $k$ . Определите частоту колебаний шарика вдоль пружины, если  $\Omega^2 < k/m$ .

\*) В дальнейшем круговая частота  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ , где  $T$  — период колебания, если это не оговорено, называется частотой колебаний.



К задаче 3.2.16

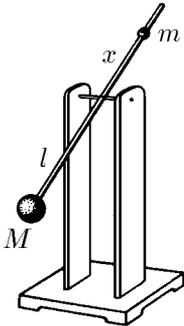


К задаче 3.2.18

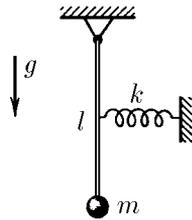
◇ **3.2.19.** Метроном представляет собой легкий стержень, на нижнем конце которого на расстоянии  $l$  от оси находится груз массы  $M$ . Выше оси подвижный грузик массы  $m$  можно закреплять на стержне на разных расстояниях  $x$  от оси, тем самым подбирая нужную частоту колебаний метронома. Считая массы точечными, найдите, как частота колебаний зависит от расстояния  $x$ .

◇ **3.2.20.** Как изменится частота колебаний маятника, представляющего собой груз на легком стержне, если к середине стержня прикрепить горизонтальную пружину жесткости  $k$ ? На рисунке изображено состояние равновесия.

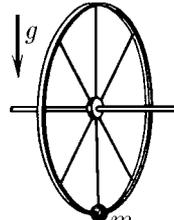
◇ **3.2.21.** К ободу колеса с горизонтально расположенной осью прикрепили грузик массы  $m$ . Найдите массу колеса, предполагая ее однородно распределенной по ободу, если частота колебаний колеса с грузиком вокруг оси равна  $\omega$ , а его радиус равен  $R$ ,  $R < g/\omega^2$ .



К задаче 3.2.19

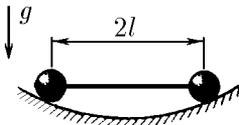


К задаче 3.2.20

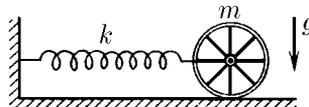


К задаче 3.2.21

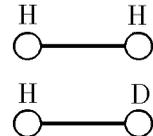
◇ **3.2.22.** В сферической лунке радиуса  $R$  находятся две точечные массы, соединенные невесомым стержнем длины  $2l$ . Определите частоту колебаний при движении в направлении: а) перпендикулярном плоскости рисунка; б\*) параллельном этой плоскости.



К задаче 3.2.22



К задаче 3.2.23



К задаче 3.2.26

◇ **3.2.23.** Пружина жесткости  $k$  одним концом присоединена к оси колеса массы  $m$ , которое способно катиться без проскальзывания, а другим прикреплена к

стенке. Какова частота колебаний системы? Масса колеса однородно распределена по ободу.

**3.2.24.** Найдите частоту колебаний тонкого обруча радиуса  $R$ , подвешенного на гвозде. Проскальзывания нет; колебания происходят в плоскости обруча.

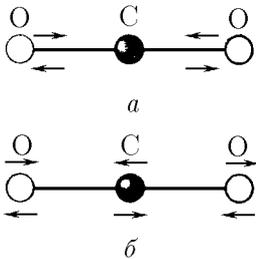
**3.2.25.** Два тела массы  $m_1$  и  $m_2$  связаны пружиной жесткости  $k$ . Какова частота свободных колебаний такой системы, если вращения нет?

◇ **3.2.26.** Найдите отношение частот колебаний молекулы  $\text{H}_2$  и молекулы  $\text{HD}$  ( $\text{D}$  — атом дейтерия).

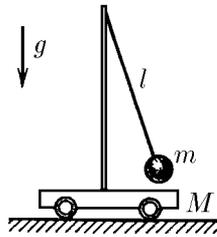
◇ **3.2.27\*.** Возможны два типа линейных колебаний молекулы углекислого газа: а) ядра кислорода движутся в противоположные стороны, а ядро углерода остается на месте; б) ядра кислорода движутся с одинаковыми скоростями в направлении, противоположном направлению движения ядра углерода. Определите отношение частот этих колебаний.

◇ **3.2.28.** На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массы  $M$  с установленным на ней математическим маятником длины  $l$  и массы  $m$ . Найдите период колебаний системы.

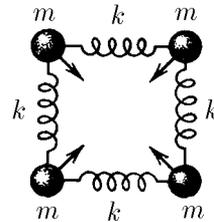
◇ **3.2.29.** Четыре одинаковых шарика массы  $m$  каждый, соединенные одинаковыми пружинами жесткости  $k$ , образуют квадрат. Одновременно всем четырем шарикам сообщили одинаковые по модулю скорости, направленные к центру квадрата. Через какое время после этого пружины будут: а) сильнее всего сжаты; б) сильнее всего растянуты?



К задаче 3.2.27



К задаче 3.2.28



К задаче 3.2.29

◇ **3.2.30.** Момент инерции чашки, подвешенной на проволоке, относительно оси кручения этой проволоки, равен  $I_0$ . Период крутильных колебаний системы равен  $T_0$ . На чашку положили груз. При этом период крутильных колебаний изменился и стал равным  $T$ . Каков момент инерции груза относительно той же оси кручения? Момент сил, возникающих при закручивании проволоки, пропорционален углу закручивания.

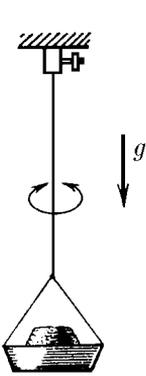
◇ **3.2.31\*.** Легкие стержни соединены шарнирами в виде ромба. Две противоположные вершины ромба связаны пружиной жесткости  $k$ , а к двум другим вершинам прикреплены шарики одинаковой массы  $m$ . Найдите частоту колебаний системы, если длина пружины в недеформированном состоянии совпадает с длиной стержня.

◇ **3.2.32\*.** К муфте массы  $m$ , надетой на гладкую горизонтальную неподвижную спицу, привязана нить, перекинутая через блок, находящийся на расстоянии  $l$  от спицы. На другом конце нити привязан груз массы  $M$ . При колебаниях муфты изменением натяжения нити из-за колебаний груза можно пренебречь. Найдите частоту колебаний муфты и частоту колебаний груза.

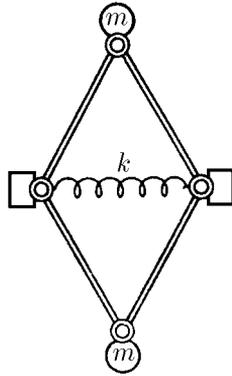
**3.2.33.** Найдите период колебаний жидкости в  $\cup$ -образном сосуде постоянного сечения. Общая длина части сосуда, занятого жидкостью, равна  $l$ .

◇ **3.2.34\*.** Вертикальная перегородка в высоком сосуде разделяет его на две сообщающиеся части с разными сечениями. Найдите период малых колебаний

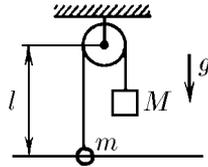
жидкости, считая, что свободная поверхность ее в каждой части сосуда остается горизонтальной. Глубина жидкости в состоянии равновесия равна  $H$ .



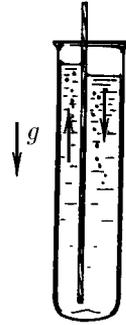
К задаче 3.2.30



К задаче 3.2.31



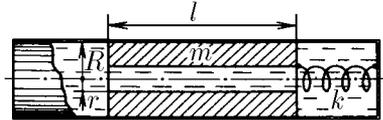
К задаче 3.2.32



К задаче 3.2.34

**3.2.35.** Определите частоту вертикальных колебаний длинного цилиндрического ареометра, погруженного в жидкость, налитую в цилиндрический стакан, если радиус стакана много меньше глубины  $H$ , на которой ареометр находится в состоянии равновесия.

◇ **3.2.36\*.** В цилиндрическом сосуде радиуса  $R$  находится поршень длины  $l$ , соединенный пружиной жесткости  $k$  со стенкой сосуда. По оси поршня имеется сквозной канал радиуса  $r$ . Все свободное пространство в сосуде заполнено жидкостью плотности  $\rho$ . Найдите частоту колебаний поршня, если  $l \gg R$  и масса поршня равна  $m$ .



К задаче 3.2.36

**3.2.37\*.** После загрузки корабля период колебаний его по вертикали увеличился с 7 до 7,5 с. Какова масса груза? Сечение по ватерлинии  $S = 500 \text{ м}^2$ . Характер вовлечения воды в движение считать не изменившимся при загрузке.

### § 3.3. Гармоническое движение

**3.3.1.** Тело массы  $m$ , прикрепленное к пружине, свободно колеблется. Смещение тела зависит от времени по закону  $x = A \cos \omega t$ . Как меняются со временем скорость и ускорение? Как зависит сила, действующая на тело, от его смещения и от времени? Чему равна жесткость пружины?

**3.3.2.** Амплитуда колебаний математического маятника 5 мм, длина его нити 1 м. Как зависит смещение шарика от времени? За начало отсчета времени принять: а) момент прохождения положения равновесия слева направо; б) момент прохождения крайнего правого положения.

**3.3.3.** Груз, свободно колеблющийся на пружине, за время 0,01 с сместился с расстояния 0,5 см от положения равновесия до наибольшего, равного 1 см. Каков период его колебаний?

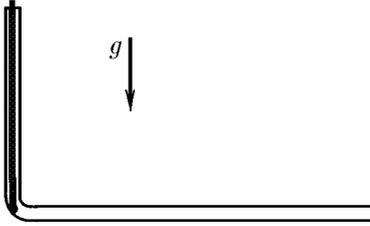
**3.3.4.** Частота свободных колебаний тела равна  $\omega$ . Через какое наименьшее время его кинетическая энергия уменьшается вдвое по сравнению со своим наибольшим значением?

**3.3.5.** Найдите период колебаний математического маятника длины  $l$ , если на пути нити на расстоянии  $l/2$  вниз по вертикали от точки подвеса вбит гвоздь.

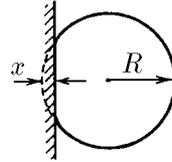
**3.3.6.** Найдите период колебаний тела в задаче 3.1.7.

◇ **3.3.7\***. Гладкую однородную веревку длины  $l$  удерживают в вертикальном колене изогнутой трубы так, что нижний конец ее касается горизонтальной части трубы. Веревку отпускают. Через какое время она полностью окажется в горизонтальном колене? Трением пренебречь. Как изменится это время, если вначале часть веревки уже находилась в горизонтальном колене?

◇ **3.3.8\***. Воздушный шарик при слабом ударе о стенку деформируется, как показано на рисунке. При этом максимальная деформация шарика  $x$  много меньше его радиуса  $R$ . Пренебрегая изменением избыточного давления  $\Delta p$  воздуха в шарике и упругостью оболочки, оцените время соударения со стенкой. Масса шарика  $m$ .



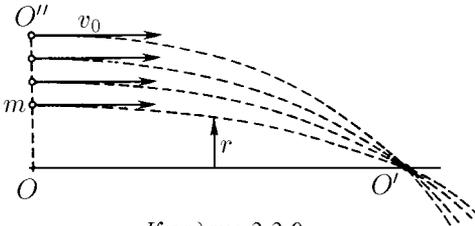
К задаче 3.3.7



К задаче 3.3.8

◇ **3.3.9.** Докажите, что пучок частиц будет собираться (фокусироваться) в некоторых определенных точках оси  $OO'$ , если скорость каждой частицы пучка в сечении  $OO''$  равна  $v_0$ , а сила, действующая на частицу,  $\mathbf{F} = -kr\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — расстояние от частицы до оси пучка. На каком расстоянии от сечения  $OO''$  фокусируются частицы, если масса каждой из них равна  $m$ ?

◇ **3.3.10.** Из нижней точки гладкого горизонтального цилиндрического желоба радиуса  $R$  под небольшим углом к его образующей выскальзывает со скоростью  $v_0$  маленький шарик. Сколько раз на длине  $l$  он пересечет нижнюю образующую желоба?



К задаче 3.3.9



К задаче 3.3.10

◇ **3.3.11.** К наклонной стене подвешен маятник длины  $l$ . Маятник отклонили от вертикали на малый угол, в два раза превышающий угол наклона стены к вертикали, и отпустили. Найдите период колебаний маятника, если удары о стену абсолютно упругие.

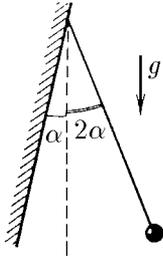
◇ **3.3.12.** Один конец пружины прикреплен к стене, на втором — шарик, колеблющийся с амплитудой  $A$  и периодом  $T_0$ . На каком расстоянии от положения равновесия шарика нужно поставить плиту, чтобы период его колебаний стал равным  $T$ ? Удары шарика о плиту абсолютно упругие.

◇ **3.3.13.** Груз массы  $m$  падает с высоты  $H$  на пружину жесткости  $k$  и длины  $h$ , нижний конец которой прикреплен к полу. Определите время контакта груза с пружиной, если  $mg < 2k(H - h)$ .

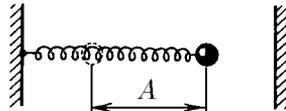
◇ **3.3.14.** По гладкой горизонтальной плоскости со скоростью  $v$  скользит тонкий однородный брусок длины  $l$ . Брусок наезжает на обширный шероховатый

участок плоскости. Через какое время брусок остановится, если коэффициент трения равен  $\mu$ ?

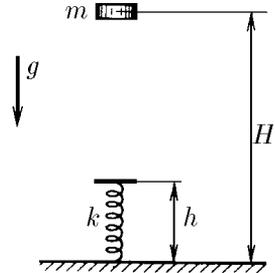
◇ **3.3.15\***. Стрелок пытается попасть в диск радиуса  $R$ , который колеблется гармонически так быстро, что стрелок не может за ним уследить. Тогда он целится в центр области движения диска. С какой вероятностью стрелок попадет в диск, если амплитуда колебаний диска  $a \gg R$ ? Если  $A = 2R$ ? Увеличится ли вероятность попадания, если стрелок будет целиться в точку на расстоянии  $R$  от края области?



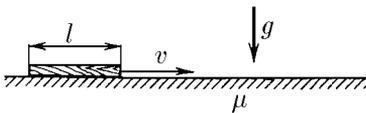
К задаче 3.3.11



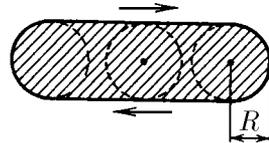
К задаче 3.3.12



К задаче 3.3.13

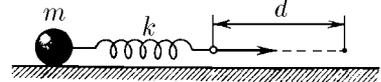


К задаче 3.3.14



К задаче 3.3.15

◇ **3.3.16.** К одному концу первоначально недеформированной и неподвижной пружины жесткости  $k$  прикреплен груз массы  $m$ . Свободный конец пружины стали тянуть с постоянной скоростью, как показано на рисунке, пока он не переместился на расстояние  $d$ . Затем его резко остановили. При какой скорости этого конца пружины груз после остановки не будет колебаться? Сформулируйте аналогичную задачу для математического маятника.



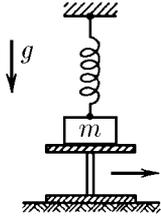
К задаче 3.3.16

**3.3.17.** Два одинаковых маятника имеют общую точку подвеса. Одному маятнику толчком сообщили некоторую скорость, затем через время  $\tau$  другому маятнику тоже толчком сообщили такую же скорость. Через какое время после начала движения первого маятника оба маятника встретятся, если период их колебаний равен  $T$ , а  $\tau < T/2$ ?

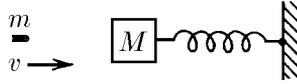
◇ **3.3.18.** Тело массы  $m$ , подвешенное на пружине жесткости  $k$ , лежит на подставке. Подставку мгновенно убирают. Опишите движение тела, если первоначально пружина: а) не деформирована; б) сжата и ее деформация равна  $l$ .

◇ **3.3.19.** Пуля массы  $m$ , летящая со скоростью  $v$ , попадает в тело массы  $M$ , связанное со стенкой пружиной жесткости  $k$ , и застревает в нем. Выбрав момент попадания пули за начало отсчета времени, найдите зависимость скорости и координаты тела от времени.

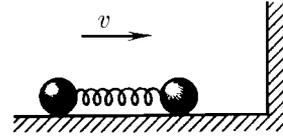
◇ **3.3.20.** По горизонтальной плоскости со скоростью  $v$  скользят два шарика одинаковой массы  $m$ , связанные недеформированной пружиной жесткости  $k$ . Шарик налетает на вертикальную упругую стенку. Опишите последующее движение шариков. Произойдет ли повторный удар их о стенку?



К задаче 3.3.18



К задаче 3.3.19



К задаче 3.3.20

**3.3.21\***. Тела массы  $m_1$  и  $m_2$  связаны первоначально недеформированной пружиной. Телу массы  $m_1$  сообщают ударом скорость  $v$ , направленную вдоль пружины. Как с течением времени станут меняться скорости этих тел, если частота свободных колебаний тел равна  $\omega$ ?

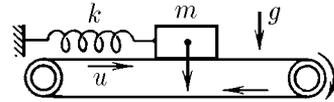
**3.3.22**. На тело, связанное со стенкой пружиной и находящееся в равновесии, начала действовать вдоль пружины постоянная сила  $F$ . Чему равно наибольшее значение силы натяжения пружины и через какое время после включения начала действия на тело силы  $F$  оно достигается? Период свободных колебаний тела  $T$ .

**3.3.23\***. В момент времени  $t_0$  координата тела, совершающего колебания с частотой  $\omega$ , равна  $x_0$ , а скорость равна  $v_0$ . Докажите, что зависимость координаты тела от времени можно представить в виде

$$x = x_0 \cos \omega(t - t_0) + (v_0/\omega) \sin \omega(t - t_0).$$

**3.3.24\***. Тело массы  $m$ , подвешенное на пружине, колеблется по закону  $x = A_0 \cos \omega t$ . С момента времени  $t_0$  на тело начинает действовать вдоль пружины постоянная сила  $F$ . Определите амплитуду колебаний относительно нового положения равновесия. При каком  $t_0$  эта амплитуда наибольшая? наименьшая?

◇ **3.3.25\***. На горизонтальной ленте транспортера, движущейся со скоростью  $u$ , находится груз массы  $m$ , связанный пружиной жесткости  $k$  с неподвижной стенкой. Пусть в начальный момент пружина не деформирована и груз из-за трения движется вместе с лентой. Определите амплитуду возникших колебаний.



К задаче 3.3.25

**3.3.26\***. Пусть в условии задачи 3.3.25\* начальная скорость груза нулевая, а коэффициент трения равен  $\mu$ . При какой скорости ленты движение груза будет гармоническим колебанием? Как зависит амплитуда установившихся колебаний от скорости ленты  $u$ ?

**3.3.27\***. На горизонтальной плоскости лежит тело массы  $M$ , связанное пружиной жесткости  $k$  с неподвижной стенкой. Тело оттянули на расстояние  $l$  от положения равновесия и отпустили. Совершив  $n$  колебаний, тело остановилось. Чему равен коэффициент трения между телом и плоскостью, если после остановки тела пружина оказалась недеформированной?

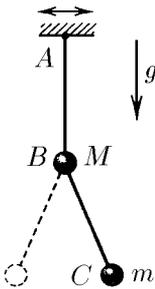
◇ **3.3.28**. К маятнику  $AB$  с шариком массы  $M$  подвешен маятник  $BC$  с шариком массы  $m$ . Точка  $A$  совершает гармонические колебания по горизонтали с частотой  $\omega$ . Найдите длину нити  $BC$ , если известно, что нить  $AB$  все время остается вертикальной.

**3.3.29**. Тело массы  $m$  колеблется по закону  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Найдите зависимость силы, действующей на тело, от времени. Чему равно ее наибольшее значение? В какие моменты сила принимает наибольшее по модулю значение?

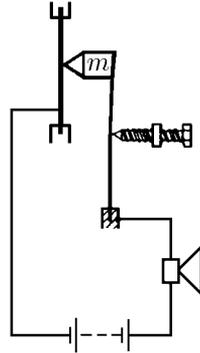
**3.3.30**. Горизонтальная мембрана совершает гармонические колебания по вертикали с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ . На мембране лежит маленький груз.

При каком условии он будет колебаться вместе с мембраной, а при каком — начнет отскакивать? Ниже или выше среднего положения мембраны происходит отрыв груза от ее поверхности?

◇ **3.3.31.** Для измерения малых амплитуд колебаний мембраны, совершающей гармонические колебания высокой частоты  $\omega$ , применяется «молоточек», включенный в электрическую цепь с мембраной и телефоном. Молоточек массы  $m$  прижимается к мембране с силой, которая регулируется микрометрическим винтом. Когда контакт молоточка с мембраной прерывается, прерывается ток в цепи и в телефоне слышно дребезжание. Определите амплитуду колебаний, если дребезжание началось с момента, когда сила, с которой молоточек прижимается к мембране, достигла значения  $F$ .



К задаче 3.3.28

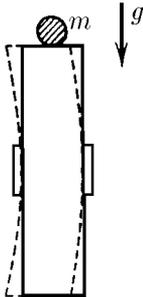


К задаче 3.3.31

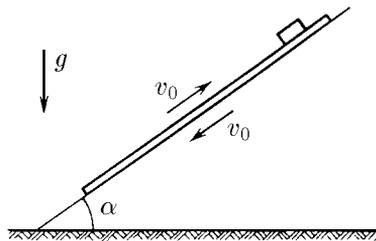
**3.3.32.** На горизонтальной плите лежит груз. Плита начинает двигаться вверх, совершая по вертикали гармонические колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ . На какую высоту от начального положения плиты подскочит груз после своего отрыва от ее поверхности?

**3.3.33\*.** С какой амплитудой должна колебаться плита (см. задачу 3.3.32), чтобы наступил своеобразный резонанс: груз, подбрасываемый плитой, после каждого удара увеличивал бы высоту своего подъема? Удары считать абсолютно упругими.

◇ **3.3.34\*.** Пьезокварцевая пластинка колеблется с частотой  $\omega = 10^7 \text{ с}^{-1}$ . На торец пластинки положили тело массы, сравнимой с массой пластинки. Коэффициент трения между телом и пластинкой  $\mu = 1$ . Оцените, при какой амплитуде колебаний наличие этого тела существенно влияет на частоту колебаний пластинки. Оцените наибольшую скорость тела в установившемся колебательном режиме в случае, когда амплитуда колебаний пластинки  $A = 10^{-6} \text{ см}$ .



К задаче 3.3.34



К задаче 3.3.36

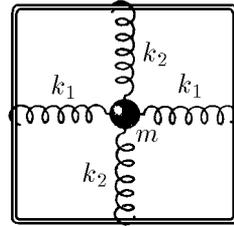
**3.3.35.** Поверхность тел, колеблющихся с ультразвуковой частотой, кажется скользкой на ощупь, а предметы, помещенные на эту поверхность, «плывут» по ней от малейшего приложенного к ним усилия. Объясните это.

◇ **3.3.36\*.** Наклонная плоскость совершает гармонические колебания с большой частотой вдоль своей поверхности. Каково установившееся движение тела, находящегося на ней? Какова средняя скорость этого тела за большое время, если  $\operatorname{tg} \alpha \ll \mu$ , где  $\alpha$  — угол наклона плоскости,  $\mu$  — коэффициент трения,  $v_0$  — амплитуда скорости наклонной плоскости?

### § 3.4. Наложение колебаний

◇ **3.4.1.** Концы пружин могут скользить без трения по неподвижной вертикальной рамке, другими концами они прикреплены к телу массы  $m$ . Какой характер носит движение тела в общем случае, когда  $k_1 \neq k_2$ ? В каких направлениях возможно прямолинейное движение и как его возбудить?

**3.4.2.** Пусть в условиях задачи 3.4.1  $k_1 = k_2 = k/2$ . Убедитесь, что в плоскости рамки возможны прямолинейные колебания в любом направлении. Каким способом нужно возбуждать колебания, чтобы движение тела происходило по окружности? Докажите, что при любом способе возбуждения траектория движения тела замкнутая. Найдите период движения тела.



К задаче 3.4.1

**3.4.3.** а. Математический маятник совершает малые колебания в одной плоскости. Амплитуда его колебаний  $A$ , частота  $\omega$ . В момент максимального отклонения шарик маятника сообщили небольшую скорость  $v$ , направленную перпендикулярно плоскости колебаний. По какой траектории будет двигаться шарик маятника после этого? В каких пределах будет изменяться расстояние от шарика до положения равновесия?

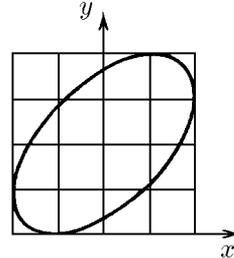
б\*. Ответьте на первый вопрос для случая, когда скорость  $v$  сообщена шарик в момент, когда он находится на расстоянии  $x$  от положения равновесия.

◇ **3.4.4.** Движение электронного луча по экрану осциллографа описывается уравнениями

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad y = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Для удобства измерений перед экраном помещена квадратная сетка. Определите по рисунку сдвиг фаз обоих колебаний.

**3.4.5\*.** В условиях задачи 3.4.4 определите, при каком сдвиге фаз на экране виден отрезок; окружность. За время  $2\pi/\omega$  след луча на экране не успевает погаснуть. Докажите, что в случае произвольного постоянного  $\varphi$  след луча на экране представляет собой эллипс с полуосями, лежащими на диагоналях квадрата. Найдите эти полуоси.



К задаче 3.4.4

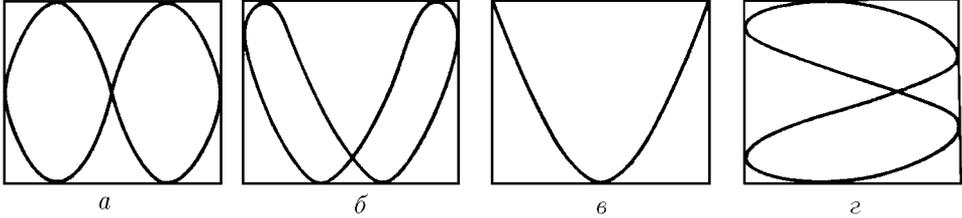
**3.4.6.** При изучении гармонических колебаний осциллятора электрическое напряжение, пропорциональное смещению осциллятора, подается на  $x$ -пластины осциллографа, а напряжение, пропорциональное скорости, — на  $y$ -пластины. Какую картину мы увидим на экране?

**3.4.7.** Отклонение луча осциллографа описывается уравнениями

$$x = A \cos[(\omega - \Omega/2)t], \quad y = A \cos[(\omega + \Omega/2)t],$$

где  $\Omega \ll \omega$ , причем след луча на экране гаснет за время, много меньшее  $2\pi/\Omega$ . Какую картину мы увидим на экране осциллографа?

◇ **3.4.8.** На  $x$ - и  $y$ -пластины осциллографа подают гармонические сигналы, и на экране появляются картины, изображенные на рисунке. Как относятся периоды колебаний по  $x$  и  $y$  в случаях  $a$ – $z$ ?

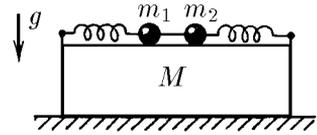


К задаче 3.4.8

**3.4.9.** Точка, совершающая гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях  $x$ ,  $y$ , движется по траектории, которая называется фигурой Лиссажу. Докажите, что если частоты колебаний относятся как целые числа, то эта фигура — замкнутая кривая. Какой вид имеет фигура Лиссажу при равных частотах?

**3.4.10.** Докажите, что если амплитуда гармонических колебаний точки по оси  $x$  равна  $A$ , а по оси  $y$  равна  $B$ , то фигура Лиссажу вписывается в прямоугольник со сторонами  $2A$  по оси  $x$  и  $2B$  по оси  $y$ . Пусть фигура касается горизонтальных сторон этого прямоугольника в  $p = 3$  точках, а вертикальных — в  $q = 4$  точках. Как относятся частоты этих колебаний?

◇ **3.4.11\*.** Два шарика массы  $m_1$  и  $m_2$ , прикрепленные к одинаковым пружинам, могут колебаться, скользя по бруску массы  $M$  без трения. Брусок лежит на горизонтальной плоскости. Шарiki связаны нитью, сила натяжения которой  $F$ . Нить пережигают. При каком наименьшем коэффициенте трения между плоскостью и бруском тот не сдвинется с места?



К задаче 3.4.11

**3.4.12\*.** Концы пружины жесткости  $k$  перемещают в продольном направлении по гармоническому закону:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2);$$

при этом средняя за период сила натяжения пружины равна нулю. Как меняется эта сила со временем? Определите наибольшую и среднюю за большое время энергию пружины. При какой разности фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  средняя энергия пружины наибольшая? наименьшая?

**3.4.13\*.** Пусть концы пружины (см. задачу 3.4.12) перемещаются с разной частотой:

$$x_1 = A \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A \cos \omega_2 t.$$

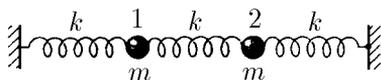
Как в этом случае меняется сила натяжения пружины со временем? Постройте график зависимости силы натяжения от времени в случае близких частот. Почему здесь можно говорить о биениях? Определите в случае неравных амплитуд и частот среднюю энергию пружины за большое время.

**3.4.14.** Частица при действии на нее силы  $F = F_0 \cos \omega t$  колеблется по закону  $x = A \cos(\omega t - \varphi)$ . Какова средняя мощность этой силы?

◇ **3.4.15.** а. Двум шарикам массы  $m$ , которые связаны друг с другом и стенками тремя пружинами жесткости  $k$ , одновременно сообщили одинаковую по модулю скорость, направленную вдоль пружин. Найдите частоту колебаний шариков, если их скорости противоположно направлены. Одинаково направлены.

б. Свободные колебания сложных систем являются суммой (наложением) нескольких гармонических колебаний с разными частотами. Если первому шарiku в задаче 3.4.15а сообщить вдоль пружины скорость  $v$ , то последующее движение шариков будет суммой двух движений: движения шариков, которым сообщили скорость  $v/2$  и  $-v/2$ , и движения шариков, которым сообщили скорость  $v/2$  и  $v/2$ . Определите, пользуясь этим, скорость шариков в последующие за началом колебаний моменты времени. Чему равно максимальное смещение первого шарика? второго? максимальное удлинение средней пружины?

в. Решите задачу 3.4.15б в случае, если первому шарiku сообщили скорость  $3v$ , а второму скорость  $v$ .



К задаче 3.4.15

**3.4.16\*.** Атому кислорода в молекуле углекислого газа сообщили небольшую скорость  $v$  в направлении к атому углерода. Определите, на сколько приблизится атом кислорода к атому углерода. Масса атома кислорода равна  $M$ , атома углерода  $m$ , а жесткость связи между атомами равна  $k$ .

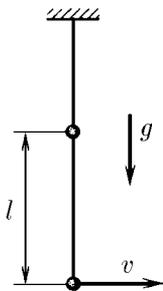
◇ **3.4.17\*.** Собственные частоты двойного маятника равны  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Длина нити, связывающей шарики маятника, равна  $l$ . В состоянии равновесия нижнему шарiku сообщили небольшую скорость  $v$ . Определите максимальное отклонение нижнего шарика от положения равновесия и длину нити, связывающей верхний шарик с потолком.

◇ **3.4.18.** Малые колебания маятников, связанных пружиной, происходят по закону

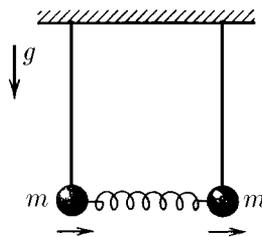
$$x_1 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + A \cos \omega t,$$

$$x_2 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) - A \cos \omega t.$$

Определите жесткость пружины, связывающей маятники. В положении равновесия маятники вертикальны, масса каждого шарика  $m$ .

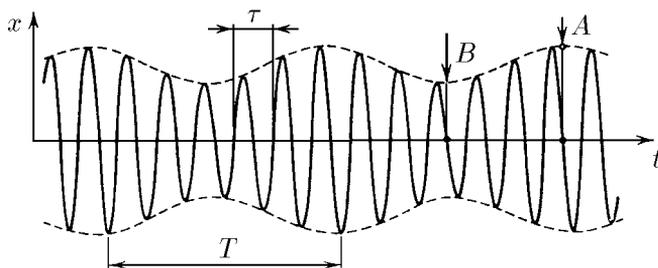


К задаче 3.4.17



К задаче 3.4.18

◇ **3.4.19.** На рисунке изображен график зависимости координаты от времени для движения, являющегося суммой двух гармонических колебаний. Определите по нему амплитуды и частоты этих колебаний.



К задаче 3.4.19

### § 3.5. Вынужденные и затухающие колебания

**3.5.1.** Маятник массы  $m$  подвергается кратковременным ударам, за каждый из которых ему передается импульс  $p_0$ . Постройте график движения маятника, если известно, что вначале он покоился, что затухания колебаний нет, а удары следуют друг за другом через промежутки времени  $T_0$  и  $T_0/2$  ( $T_0$  — период свободных колебаний маятника).

**3.5.2.** Гармоническому колебанию тела массы  $m$  можно сопоставить движение точки по окружности, радиус которой совпадает с амплитудой колебаний  $A$  тела, а угловая скорость — с частотой  $\omega$ . Координата  $x$  этой точки совпадает с координатой тела, а координата  $y$ , умноженная на  $m\omega$ , — с импульсом тела  $p$ . Кривые, описывающие движение тела в переменных  $p, x$ , называются фазовым портретом. Постройте фазовый портрет для маятника задачи 3.5.1.

**3.5.3\*.** В условиях задачи 3.5.1 маятник имел в нулевой момент скорость  $v_0$  и координату  $x_0$ . Какой будет амплитуда колебаний после  $n$  ударов, если первый из них произошел в нулевой момент? Постройте фазовый портрет.

**3.5.4.** Ваша приятельница сидит на качелях. Вы раскачиваете их кратковременными толчками. Как это нужно делать, чтобы раскачивание проходило наиболее успешно?

**3.5.5.** Через ручей переброшена длинная упругая доска. Когда мальчик стоит на ней неподвижно, она прогибается на 0,1 м. Когда же он идет со скоростью 3,6 км/ч, то доска начинает так раскачиваться, что он падает в воду. Какова длина шага мальчика?

**3.5.6.** Грузовики въезжают по грунтовой дороге на зерновой склад с одной стороны, разгружаются и выезжают со склада с той же скоростью, но с другой стороны. С одной стороны склада выбоины на дороге идут чаще, чем с другой. Как по состоянию дороги определить, с какой стороны склада въезд, а с какой выезд.

**3.5.7.** Катер, плывущий по морю, начинает сильно раскачиваться, хотя волны сравнительно невысокие. Капитан изменяет курс катера и его скорость. Удары волн о катер становятся при этом в два раза чаще, но тем не менее размах колебаний катера значительно уменьшается. Объясните это.

**3.5.8.** Казалось бы, стреляя из рогатки в мост в такт его собственным колебаниям и сделав очень много выстрелов, его можно сильно раскачать, однако это вряд ли удастся. Почему?

**3.5.9.** Сила сопротивления в жидкой или газообразной среде при небольших скоростях движения пропорциональна скорости тела и направлена против нее:  $f = -bv$ . Как зависит рассеиваемая при движении тела мощность от его скорости?

**3.5.10\*.** Пусть кинетическая энергия осциллятора  $K = mv^2/2$ , а потенциальная  $U = kx^2/2$ . Покажите, что наличие «потерь» мощности  $N_{\text{п}} = bv^2$

осциллятора эквивалентно наличию добавочной силы  $f = -bv$ , действующей на него.

**3.5.11.** Качественно опишите движение вначале покоившегося осциллятора под влиянием одиночного толчка и серии одинаковых толчков, следующих друг за другом через период, и постройте фазовый портрет этого осциллятора, если сила сопротивления движению пропорциональна его скорости.

**3.5.12\*.** Колебательную систему при наличии сопротивления называют осциллятором с затуханием, а его колебания в отсутствие силы, их поддерживающей, — затухающими. Покажите, что уравнения движения двух осцилляторов, сила сопротивления движению которых  $f_1 = -b_1v_1$ ,  $f_2 = -b_2v_2$ , при  $k_1/m_1 = k_2/m_2 = \omega_0^2$  и  $b_1/m_1 = b_2/m_2 = 2\gamma$  имеют одинаковое решение при одинаковых начальных координатах и скоростях ( $\omega_0$  — частота свободных колебаний в отсутствие трения,  $\gamma$  — коэффициент затухания,  $k_1, k_2$  — жесткость и  $m_1, m_2$  — масса осцилляторов).

**3.5.13.** Покажите, что если затухающие колебания осциллятора происходят по закону  $x_1 = x_1(t)$  и  $v_1 = v_1(t)$ , то колебания такого же осциллятора с начальными условиями  $x_2(0) = nx_1(0)$ ,  $v_2(0) = nv_1(0)$  происходят по закону  $x_2 = nx_1(t)$ ,  $v_2 = nv_1(t)$ .

**3.5.14.** Затухание осциллятора может быть столь велико, что движение его перестанет носить колебательный характер. Оцените по порядку величины, при каком соотношении величин  $\gamma$  и  $\omega_0$  это произойдет (см. задачу 3.5.12).

**3.5.15.** Пусть затухание достаточно слабое, так что осциллятор, выйдя из начального равновесного положения со скоростью  $v$ , через время  $T$  снова проходит положение равновесия со скоростью  $v/n$ ,  $n > 1$ . Что можно сказать про скорость осциллятора через время  $2T$ ,  $3T$ ?

**3.5.16.** Амплитуда затухающих колебаний осциллятора за время  $\tau$  уменьшилась вдвое. Как за это время изменилась механическая энергия осциллятора? За какое время его энергия уменьшилась вдвое?

**3.5.17.** На горизонтальные пластины осциллографа подается сигнал, пропорциональный смещению осциллятора, совершающего слабозатухающие колебания, а на вертикальные — сигнал, пропорциональный его скорости. Изобразите след луча на экране осциллографа.

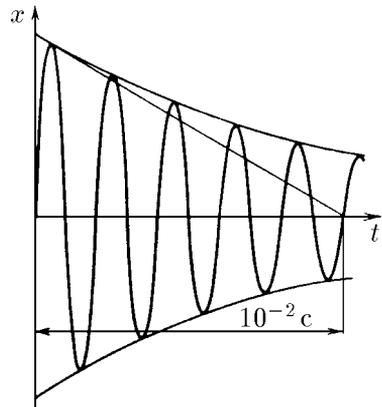
**3.5.18.** Если в момент  $t = 0$  осциллятор, колеблющийся с затуханием, находится в положении равновесия и его скорость равна  $v_0$ , то координата его в момент времени  $t \neq 0$  определяется формулой

$$x = \frac{v_0}{\omega} \exp(-\gamma t) \sin \omega t,$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ,  $\gamma < \omega_0 = \sqrt{k/m}$ ,  $k, m$  и  $\gamma$  — соответственно жесткость, масса и коэффициент затухания осциллятора. Покажите, что свойства осциллятора, описанные в задачах 3.5.12 и 3.5.15, не противоречат этому утверждению.

◇ **3.5.19.** По виду зависимости  $x$  от  $t$  для затухающих колебаний, полученному на экране осциллографа, определите величину  $\gamma$  и  $\omega$ . Почему при  $\gamma \ll \omega_0$  можно считать, что  $\omega \approx \omega_0$ ?

**3.5.20.** а. Два следующих друг за другом наибольших отклонения в одну сторону секундного маятника отличаются друг от друга на 1%. Каков коэффициент затухания этого маятника?



К задаче 3.5.19

б. Шарик этого маятника заменили шариком того же радиуса, но с массой в четыре раза большей. Как это скажется на затухании колебаний?

**3.5.21\***. а. Добротностью осциллятора называют отношение его начальной энергии к энергии, потерянной им за время изменения фазы на 1 рад. Выразите добротность через коэффициент затухания  $\gamma$  и частоту свободных колебаний  $\omega_0$  ( $\gamma \ll \omega_0$ ). Как связана добротность  $Q$  с числом колебаний, за которое энергия осциллятора уменьшится в  $e$  раз?

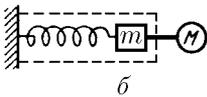
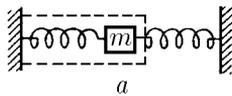
б. У монокристалла сапфира в вакууме при низкой температуре и соответствующей подвеске добротность  $Q = 10^8 - 10^9$ . Частота колебаний монокристалла  $\omega_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Оцените, во сколько раз изменится амплитуда колебаний кристалла за сутки.

**3.5.22\***. Каждый раз, когда осциллятор проходит в одном и том же направлении положение равновесия, ему в направлении скорости сообщается ударом дополнительный импульс  $p$ . Каким будет движение осциллятора и какая установится максимальная скорость? Характеристики осциллятора известны. Рассмотрите два предельных случая:  $2\pi\gamma/\omega \gg 1$  и  $2\pi\gamma/\omega \ll 1$ .

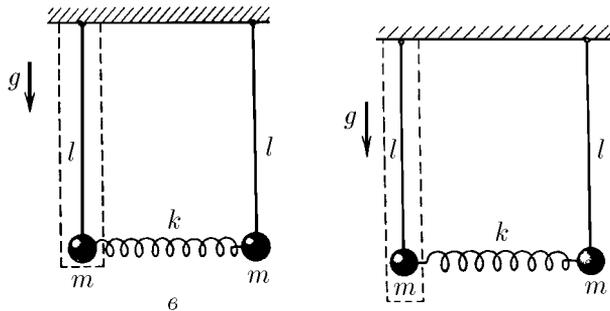
**3.5.23**. Приведите пример системы, в которой воздействие со стороны одной части ее на другую описывается силой, меняющейся со временем гармонически.

**3.5.24**. На частицу массы  $m$  действует сила  $F = F_0 \sin \omega t$ , вынуждающая частицу колебаться около положения равновесия. Представьте себе, что эту силу развивает пружина, прикрепленная к неподвижной стенке, и найдите в этом случае амплитуду колебаний частицы.

◇ **3.5.25\***. В системах, изображенных на рисунке, происходят свободные колебания без трения. Покажите, что сила, действующая на выделенный штриховой линией осциллятор, имеет гармонический характер.



К задаче 3.5.25



К задаче 3.5.27

**3.5.26**. а. Тело массы  $m$ , связанное с двух сторон пружинами со стенками, колеблется с частотой  $\omega$  (см. рисунок к задаче 3.5.25\*). Определите амплитуду колебаний тела, если известно, что жесткость левой пружины  $k$ , а со стороны правой пружины на тело действует сила  $F_0 \sin \omega t$ .

б. Тело массы  $m$ , слева связанное со стенкой пружиной жесткости  $k$ , а справа жестко соединенное с другим телом, колеблется с частотой  $\omega$  (см. рисунок к задаче 3.5.25\*). Определите амплитуду колебаний этого тела, если известно, что со стороны второго тела на тело массы  $m$  действует сила  $F_0 \cos \omega t$ .

◇ **3.5.27\***. Если одинаково отклонить грузики маятников в одну сторону и отпустить, то в системе возбудятся колебания с частотой  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . Если же отклонить их на равное расстояние в противоположные стороны, возникнут колебания с частотой  $\omega = \sqrt{g/l + 2k/m}$ . В общем случае движение грузиков есть результат наложения этих колебаний:

$$x_1 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) A \cos \omega t, \quad x_2 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) - A \cos \omega t.$$

Теперь, рассматривая силу  $F_0 \cos \omega t$ , действующую на левый грузик со стороны пружины как вынуждающую, определите величину  $A$  через параметры  $F_0$ ,  $m$ ,  $\omega_0$  и  $\omega$ . Слагаемое  $B \cos(\omega_0 t + \varphi)$  представляет собой свободное колебание выделенного осциллятора. Чем определяется выбор параметров  $B$  и  $\varphi$ ?

**3.5.28\***. Результат задачи 3.5.27\* очень важен: в общем случае движение осциллятора при наличии вынуждающей силы является суммой свободных и вынужденных колебаний. При каких начальных условиях будут происходить только вынужденные колебания?

**3.5.29\***. Почему при линейной зависимости вынуждающей силы от смещения и скорости осциллятора общее его движение является суммой свободных и вынужденных колебаний?

**3.5.30**. Почему при вынужденных колебаниях осциллятора с частотой, меньшей его собственной частоты, направления смещения и вынуждающей силы совпадают, а при частоте, большей собственной, противоположны?

**3.5.31**. При малых по сравнению с собственной частотой осциллятора частотах вынуждающей силы его смещение можно считать равным  $F(t)/k$ , где  $F(t)$  — вынуждающая сила,  $k$  — жесткость колебательной системы. При больших же частотах вынуждающей силы ускорение осциллятора можно считать равным  $F(t)/m$ , где  $m$  — масса осциллятора. Объясните это.

**3.5.32\***. В момент времени  $t = 0$  на покоящийся в положении равновесия осциллятор начинает действовать вынуждающая сила  $F = F_0 \cos \omega t$ . Масса осциллятора  $m$ , его собственная частота  $\omega_0$ . Найдите зависимость координаты осциллятора от времени и постройте ее график для  $|\omega - \omega_0| \ll \omega$ . При построении графика воспользуйтесь тождеством

$$\cos \alpha - \cos \beta \equiv 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

**3.5.33\***. Раскачка колебаний, как видно из решения задачи 3.5.32\*, сопровождается биениями. При  $\omega \rightarrow \omega_0$  размах биений неограниченно растет, но зато их период, а значит, и время нарастания неограниченно увеличиваются. Пусть время, прошедшее после начала воздействия вынуждающей силы, много меньше  $2\pi/|\omega - \omega_0|$ . Воспользуйтесь приближением  $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) и определите характер раскачки колебаний в этом случае.

**3.5.34\***. Выяснить характер раскачки колебаний при  $\omega = \omega_0$  можно, перейдя в выражении для координаты  $x(t)$  к пределу  $\omega \rightarrow \omega_0$  (см. ответ к задаче 3.5.32\*). Как объяснить, что амплитуда колебаний растет в этом случае пропорционально времени?

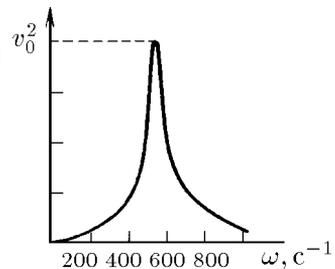
**3.5.35\***. Пусть имеются колебания со слабым затуханием: коэффициент затухания  $\gamma \ll \omega_0$ . Как оно скажется на раскачке колебаний осциллятора из состояния покоя в положении равновесия при  $|\omega - \omega_0| \ll \gamma$  и при  $\omega = \omega_0$ ? Почему в этих случаях уместно говорить об установлении вынужденных колебаний? Каково характерное время этого установления?

**3.5.36**. а. Какая нужна вынуждающая сила, чтобы осциллятор массы  $m$  с коэффициентом затухания  $\gamma$  начал совершать гармонические колебания с собственной частотой  $\omega_0$  по закону  $x = A \cos(\omega_0 t - \varphi)$ ?

б. Амплитуда вынуждающей силы равна  $F_0$ , ее частота  $\omega = \omega_0$ . Определите амплитуду вынужденных колебаний. Во сколько раз она больше отклонения осциллятора при действии постоянной силы  $F_0$ ?

**3.5.37**. Осциллятор движется по закону  $x = x_0 \sin \omega t$ , а вынуждающая сила, действующая на него,  $F = F_0 \cos \omega t$ . Каков коэффициент затухания у осциллятора? Масса осциллятора  $m$ .

◇ **3.5.38**. На рисунке приведена зависимость квадрата амплитуды скорости вынужденных колебаний



К задаче 3.5.38

от частоты вынуждающей силы, амплитуда которой постоянна. Определите собственную частоту осциллятора, его коэффициент затухания и добротность.

**3.5.39.** Для резонансного обнаружения малых вынуждающих сил можно использовать монокристалл сапфира с добротностью  $Q = 10^9$  и частотой собственных колебаний  $\omega_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Сколько времени (по порядку величины) нужно ждать, чтобы в монокристалле установились колебания?

**3.5.40.** Игла звукоснимателя движется по синусоидальной бороздке грампластинки. Частота собственных колебаний иглы  $\omega_0$ . При какой скорости иглы относительно пластинки она начнет выскакивать из бороздки? Изгибы бороздки повторяются через расстояние  $\lambda$ .

**3.5.41\*.** Частицы массы  $m$  каждая вылетают из источника в момент  $t = 0$  с почти нулевой начальной скоростью. Сразу после вылета на них начинает действовать сила  $F = F_0 \sin \omega t$ . Определите скорость частиц спустя время  $t$  после вылета. Какова средняя скорость этих частиц? На каком расстоянии от источника достигается наибольшая скорость? Ответьте на эти вопросы для частиц, испущенных в момент времени  $t = \pi/\omega, \pi/2\omega$ .

**3.5.42\*.** С момента времени  $t = 0$  на частицу массы  $m$  начинает в направлении оси  $x$  действовать сила  $F_x = F_0 \sin \omega t$ , а в направлении оси  $y$  — сила  $F_y = F_0 \cos \omega t$ . Найдите траекторию частицы, если в начальный момент она покоится. Чему равна средняя скорость частицы за большое время? Какую начальную скорость должна иметь частица, чтобы двигаться при наличии этих сил по окружности? Каков радиус этой окружности?

### § 3.6. Деформации и напряжения. Скорость волн

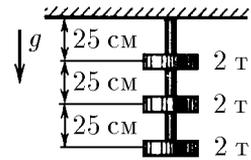
**3.6.1.** Длинную цепь шариков, связанных пружинами жесткости  $k$ , тянут за один конец с силой  $F$ . Другой конец цепи закреплен. Определите общее удлинение пружин и смещение  $N$ -го шарика при равновесии.

**3.6.2.** Проволоку длины 1 м растянули за концы на 0,1 мм. Как изменится расстояние между «соседними» атомами, если среднее межатомное расстояние в недеформированном материале равно  $10^{-10}$  м?

**3.6.3.** Модулем Юнга  $E$  материала называется жесткость куба единичного объема при усилии, приложенном перпендикулярно одной из его граней. Какова жесткость стержня длины  $L$  и сечения  $S$  при продольных растяжении и сжатии? Пусть стержень закреплен с одного конца. Какой силой, прикладываемой к другому концу, его можно растянуть на  $\Delta L$ ?

**3.6.4.** Оцените жесткость межатомной связи в веществе с модулем Юнга  $E$  и средним межатомным расстоянием  $a$ .

◇ **3.6.5.** На стальном стержне сечения  $0,5 \text{ см}^2$  и длины 75 см закрепили на расстоянии 25 см друг от друга три груза массы 2 т каждый. Нижний груз висит на конце стержня. Нарисуйте графики относительно удлинения (деформации) и смещения участков стержня. Модуль Юнга стали  $2 \cdot 10^{11}$  Па. Каково растяжение всего стержня?



К задаче 3.6.5

**3.6.6.** Рельсы для трамвая при укладке сваривают в стыках. Какие напряжения появятся в них при изменении температуры от  $-30^\circ\text{C}$  зимой до  $30^\circ\text{C}$  летом, если укладка проводилась при  $10^\circ\text{C}$ ? Температурный коэффициент линейного расширения стали  $1,25 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ .

**3.6.7.** Части стены по разные стороны трещины соединили раскаленной стальной полосой, которая, остыв, прижала их друг к другу. Пусть ширина трещины 1 см, длина полосы 2 м, а ее сечение  $2 \text{ см}^2$ . С какой силой стянуты части стены, если полоса первоначально нагрета на  $500^\circ\text{C}$ ?

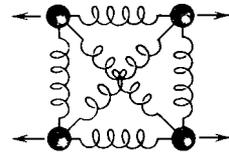
**3.6.8.** Колонна Исаакиевского собора в Санкт-Петербурге имеет высоту 30 м. На сколько она сжата под действием собственной тяжести? Плотность гранита  $2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , а его модуль Юнга  $10^{11} \text{ Па}$ .

**3.6.9.** Стержень массы  $m$ , длины  $l$  и сечения  $S$  тянут за один конец в продольном направлении с ускорением  $a$ . Модуль Юнга материала стержня  $E$ . Колебаний в стержне нет. На сколько удлинится стержень?

**3.6.10.** Относительное удлинение стержня равно  $\varepsilon$ . Найдите энергию упругой деформации на единицу объема, если модуль Юнга материала стержня равен  $E$ . Выразите полученную величину через силу, действующую на единицу площади сечения и через нормальное напряжение  $\sigma$ .

**3.6.11\*.** Какую наименьшую работу нужно совершить, чтобы согнуть в кольцо стержень, имеющий квадратное сечение  $a \times a$ ? Модуль Юнга материала  $E$ , длина стержня  $l \gg a$ .

◇ **3.6.12\*.** При действии продольных сил, растягивающих или сжимающих упругое тело, изменяются не только его продольные, но и поперечные размеры. Рассмотрите модель ячейки кристалла, в которой связи атомов представлены пружинами. Жесткость диагональных пружин  $k$ , остальных —  $k_0$ . Определите отношение сжатия поперечных пружин к удлинению продольных при малых деформациях.



К задаче 3.6.12

**3.6.13\*.** При продольном растяжении образца относительное уменьшение его поперечных размеров  $-\varepsilon'$  пропорционально относительному удлинению образца  $\varepsilon = \Delta l/l$ . Отношение  $\nu = -\varepsilon'/\varepsilon$  называется коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Определите коэффициент Пуассона для образца, отвечающего модели из задачи 3.6.12.

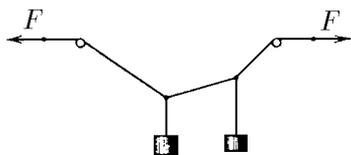
**3.6.14.** Коэффициент Пуассона для стали  $\nu = 0,3$ . Увеличивается или уменьшается объем стального стержня при растяжении? Объем резинового шнура при растяжении почти не меняется. Чему равен коэффициент Пуассона для резины?

**3.6.15.** Сжимаемость вещества показывает, на какую долю от первоначального объема уменьшается объем тела при единичном увеличении давления на его поверхность. Рассматривая всестороннее сжатие кубика вещества как сумму трех односторонних сжатий, выразите сжимаемость через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ .

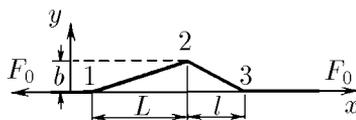
**3.6.16.** Сжимаемость воды  $5 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1}$ . Оцените изменение глубины океана в случае, если бы вода стала несжимаемой. Средняя глубина океана составляет 3–4 км. В океане встречаются впадины, глубина которых около 10 км. На сколько плотность воды на этой глубине больше, чем на поверхности? Какая упругая энергия запасена в единице объема воды?

◇ **3.6.17.** Невесомая нить переброшена через два гвоздя. К ней подвешены два груза. Сила натяжения горизонтальных участков нити  $F$ . Как по профилю нити найти массу грузов и силу реакции со стороны гвоздей?

◇ **3.6.18.** К концам струны приложены продольные силы  $F_0$ . При поперечном смещении отдельных участков струны возник профиль, изображенный на рисунке. Постройте график зависимости поперечной составляющей силы натяжения струны от координаты. Какие поперечные силы могут удерживать струну в таком виде?



К задаче 3.6.17

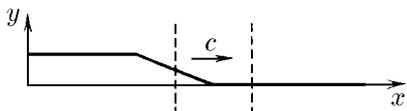


К задаче 3.6.18

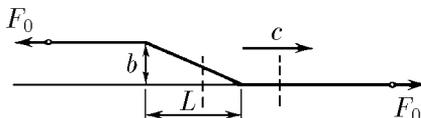
◇ **3.6.19.** Участки струны движутся в поперечном направлении так, что область изгиба смещается вправо со скоростью  $c$ , не меняя своего наклона. Как связаны деформация  $\varepsilon$  струны в области изгиба и скорость участков струны  $u$ ?

◇ **3.6.20.** а. Объясните, почему увеличивается импульс выделенного на рисунке участка струны. Определите скорость изменения этого импульса через массу единицы длины струны  $\rho$ , деформацию в области изгиба  $\varepsilon \ll 1$  и скорость смещения области изгиба  $c$ .

б. Какова сумма сил, действующих на выделенный на рисунке участок струны, если сила натяжения ее равна  $F_0$ ? Выразите скорость смещения области изгиба струны через  $F_0$  и  $\rho$ .



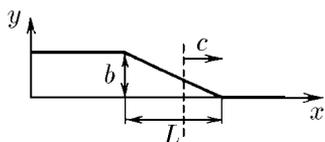
К задаче 3.6.19



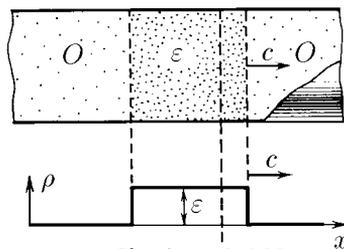
К задаче 3.6.20

◇ **3.6.21.** а. По графику продольных смещений участков стержня определите деформацию и упругую энергию, приходящуюся на единицу объема стержня, в области возмущения. Возмущение, сохраняя свой вид, перемещается вправо по стержню со скоростью  $c$ . Какова скорость частиц стержня в области возмущения? Модуль Юнга материала стержня  $E$ .

б. В движущейся области деформации (бегущей волне), сохраняющей свою форму при перемещении по стержню, кинетическая энергия частиц равна упругой. Определите скорость волны через модуль Юнга  $E$  и плотность  $\rho$  материала стержня.



К задаче 3.6.21



К задаче 3.6.22

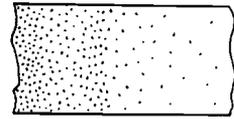
◇ **3.6.22.** а. Область продольной деформации  $\varepsilon$  движется по стержню со скоростью  $c$  вправо. Площадь сечения стержня  $S$ , плотность материала  $\rho$ . Какова скорость изменения импульса частиц стержня в области справа от выделенного сечения?

б. Импульс, переносимый за единицу времени через единицу площади поперечного сечения, называется плотностью потока импульса. Почему плотность потока импульса должна быть равна нормальному напряжению  $\sigma$  в этом сечении? Выразив  $\sigma$  через деформацию, определите отсюда  $c$  через  $\varepsilon$  и  $\rho$ .

**3.6.23.** Модуль Юнга стали  $2 \cdot 10^{11}$  Па, ее плотность  $7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Какова скорость продольных волн в стальном стержне? Скорость продольных волн в листовой стали больше, чем в тонких стальных стержнях. Почему?

**3.6.24.** Сжимаемость ртути, воды и воздуха равна соответственно  $3 \cdot 10^{-5}$ ,  $5 \cdot 10^{-5}$  и  $0,71$  атм<sup>-1</sup>, а их плотность — соответственно  $13,6 \cdot 10^3$ ,  $1 \cdot 10^3$  и  $1,2$  кг/м<sup>3</sup>. Определите скорость звука в этих средах.

◇ **3.6.25.** В газе распространяется ударная волна, в которой давление  $P$  и плотность  $\rho$  газа сильно превосходят давление  $P_0$  и плотность  $\rho_0$  невозмущенного газа. Найдите по этим данным скорость ударной волны.

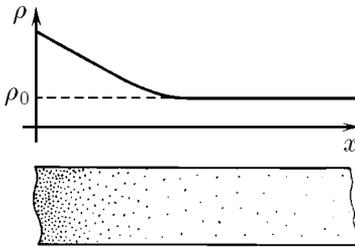


$P, \rho \xrightarrow{c} P_0, \rho_0$

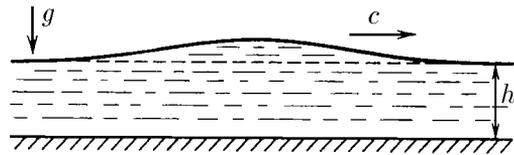
К задаче 3.6.25

◇ **3.6.26\***. В бегущей волне плотность  $\rho$  газа плавно убывает до значения  $\rho_0$  плотности невозмущенного газа. Давление газа  $P \sim \rho^\gamma$  ( $\gamma > 1$ ). Объясните, как из такой волны развивается ударная волна сжатия. Почему не образуется ударных волн разрежения?

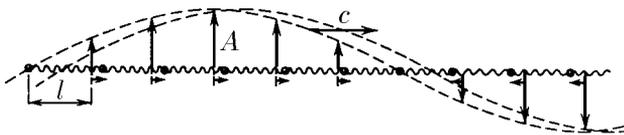
◇ **3.6.27\***. Определите скорость волн на «мелкой воде», т. е. волн, длина которых много больше глубины водоема  $h$ . Изменение уровня воды за счет возмущения малó по сравнению с  $h$ .



К задаче 3.6.26



К задаче 3.6.27



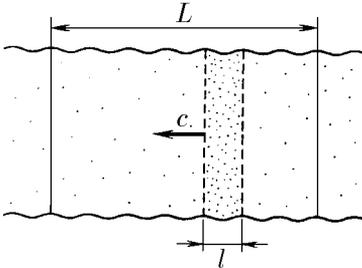
К задаче 3.6.28

◇ **3.6.28\***. По цепочке шариков массы  $m$  каждый, связанных пружинами длины  $l$  и жесткости  $k = m\omega_0^2$ , бежит продольная синусоидальная волна частоты  $\omega$ . Продольные смещения шариков отложены на рисунке по вертикали в увеличенном масштабе. Амплитуда смещений  $A$  много меньше  $l$ . Найдите скорость распространения этой волны. Получите скорость этой волны в низкочастотном пределе ( $\omega \ll \omega_0$ ) через  $l$  и  $k$ , а затем через модуль Юнга  $E$  и плотность вещества  $\rho$ , рассматривая шарики как аналоги атомов вещества. Оцените  $\omega_0$  для железа.

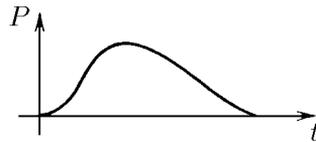
### § 3.7. Распространение волн

**3.7.1.** Середина стержня сечения  $S$  и плотности  $\rho$  сместилась после прохождения короткой волны продольного сжатия на расстояние  $b$  вправо. Скорость волны  $c$ . Определите импульс этой волны.

◇ **3.7.2.** а. В упругой среде плотности  $\rho$  движется со скоростью  $c$  плоская волна сжатия, амплитуда которой  $\Delta\rho$ . Чему равна плотность потока импульса в области сжатия?



К задаче 3.7.2



К задаче 3.7.3

б. Протяженность слоя среды в направлении распространения волны  $L$ , а самой волны  $l$ . С какой скоростью движется центр масс этого слоя? На сколько он сместится после того, как волна пройдет по всему слою?

◇ **3.7.3.** В трубе с газом идет волна со скоростью  $c$ . Неподвижный датчик при прохождении волны показывает давление, равное  $P(t)$ . Найдите зависимость давления в трубе от расстояния до датчика в момент времени  $t_0$ .

**3.7.4.** Скорость частиц стержня в волне сжатия, бегущей по нему вправо со скоростью  $c$ , в начальный момент определяется зависимостью  $u = u(x)$ , где  $x$  — расстояние от левого конца стержня до частицы. Найдите зависимость от времени плотности потока импульса через сечение стержня на расстоянии  $x_0$  от левого его конца.

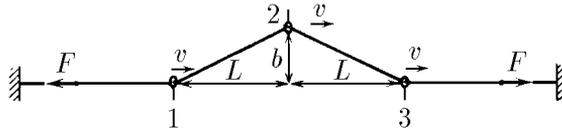
**3.7.5.** Воду, текущую по водопроводной трубе со скоростью 2 м/с, быстро перекрывают жесткой заслонкой. Определите силу, действующую на заслонку при остановке воды, если скорость звука в воде 1,4 км/с. Сечение трубы 5 см<sup>2</sup>.

**3.7.6.** На конец покоящегося полубесконечного стержня в течение времени  $\tau$  действует продольная сила  $F$ . Найдите скорость частиц стержня и его деформацию в области возникшей волны, если сечение стержня равно  $S$ , модуль Юнга его материала равен  $E$ , а плотность  $\rho$ . Какова плотность стержня в области волны? Найдите импульс и энергию смещающихся частиц стержня через время  $0,5\tau$  и  $1,5\tau$  от начала действия силы.

**3.7.7.** На торец цилиндрического стального снаряда сечения  $10^2$  см<sup>2</sup> и длины 0,5 м в течение  $5 \cdot 10^{-5}$  с действовала сила, равная  $10^7$  Н. Определите работу этой силы и отношение кинетической энергии снаряда к этой работе после того, как колебания в снаряде исчезнут.

**3.7.8.** Струна, состоящая из двух частей с линейными плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , натянута продольными силами  $F_{\parallel}$ . В точке соединения частей струну начинают тянуть поперечной силой  $F_{\perp}$ . Как меняется со временем форма струны?

◇ **3.7.9.** На натянутую с силой  $F$  струну, линейная плотность которой равна  $\rho$ , надеты три гладких колечка. Колечки движутся по струне со скоростью  $v$ , деформируя ее. С той же скоростью, не меняя своей формы, движется по струне и область изгиба, создаваемая колечками. Какие силы действуют на струну со стороны колечек? Что происходит при приближении  $v$  к  $\sqrt{F/\rho}$ ?



К задаче 3.7.9

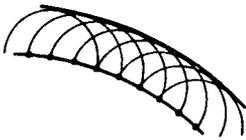
**3.7.10.** Скорость волны «изгиба» шины 160–200 км/ч. Что произойдет при приближении скорости автомобиля к этой величине?

**3.7.11.** В своей лекции «О корабельных волнах» лорд Кельвин рассказывал: «... Одно открытие фактически сделано лошадью, ежедневно тащившей лодку по каналу между Глазго и Ардросаном. Однажды лошадь испугалась и понесла, и возница, будучи наблюдательным человеком, заметил, что когда лошадь достигла определенной скорости, тянуть лодку стало явно легче и позади нее не оставалось волнового следа». Объясните это явление.

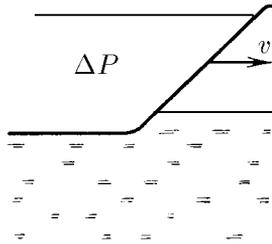
◇ **3.7.12.** Согласно принципу Гюйгенса каждый участок фронта волны является источником вторичных сферических волн. Огибающая вторичных волн дает новый фронт волны. Исходя из принципа Гюйгенса покажите, что в однородной среде плоский фронт звуковой волны перемещается со скоростью звука. Как распространяется цилиндрический фронт? сферический?

◇ **3.7.13.** Область повышенного давления на границе сред распространяется вправо со скоростью  $v$ , большей скорости звука  $c$  в среде. Каков фронт волны в среде? Каково направление его распространения?

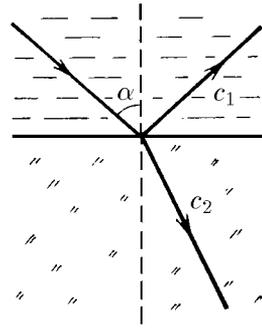
◇ **3.7.14.** На плоскую границу раздела двух сред со скоростью звука  $c_1$  под углом  $\alpha$  к нормали падает плоская волна. Найдите направление распространения отраженной и преломленной волны, если скорость распространения волны во второй среде равна  $c_2$ .



К задаче 3.7.12



К задаче 3.7.13



К задаче 3.7.14

**3.7.15.** Когда самолет летит с дозвуковой скоростью, на земле слышен шум его двигателей. Если же пролетает самолет со сверхзвуковой скоростью, то сначала слышен громкий хлопок, а затем уже шум двигателей. С чем это связано?

**3.7.16.** При достаточно пологом падении плоской звуковой волны на границу раздела двух сред из среды, в которой скорость звука больше, во второй среде не образуется преломленной волны. Это явление называется полным внутренним отражением. Найдите угол полного внутреннего отражения, если скорость звука в этих средах равна  $c_1$  и  $c_2$  ( $c_1 < c_2$ ).

**3.7.17.** Над поверхностью воды движется поток воздуха. Как это повлияет на направление распространения отраженной и преломленной звуковых волн?

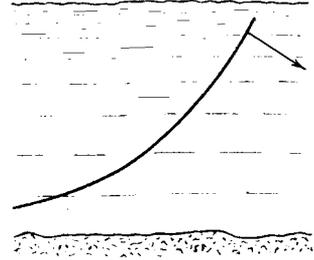
◇ **3.7.18.** а. Скорость волны на «мелкой воде» уменьшается с уменьшением глубины. Прямой фронт такой волны при приближении к берегу, полого уходящему в воду, искривляется вблизи него, повторяя его очертания. Почему?

б. Изобразите качественно, как меняется прямой фронт волны, встретившей на своем пути круглую и пологую отмель.

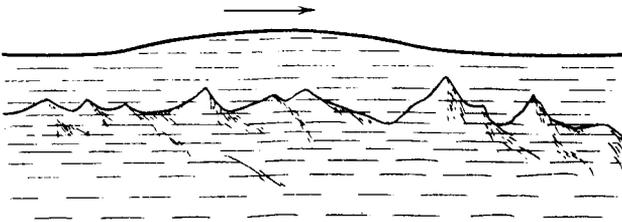
◇ **3.7.19.** При землетрясениях в океане возникают протяженные возмущения поверхности воды — волны цунами. Особенно далеко они распространяются вдоль подводных горных хребтов, почти не теряя своей разрушительной способности. Объясните это.

**3.7.20\*.** Почему звуковой сигнал, распространяющийся по ветру, слышен значительно лучше, чем против ветра? Скорость ветра заметно уменьшается при приближении к поверхности земли.

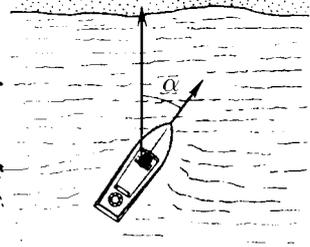
**3.7.21.** Частота собственных колебаний камертона равна  $\nu_0$ . Какой частоты звук мы услышим, если будем звучащий камертон приближать к уху со скоростью  $v$ ?



К задаче 3.7.18



К задаче 3.7.19

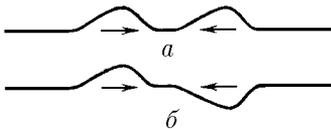


К задаче 3.7.22

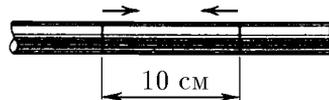
◇ **3.7.22.** Волны набегают на берег с частотой  $\nu_0$ . С какой частотой они ударяют о катер, движущийся со скоростью  $v$  от берега? к берегу? Скорость волн на воде  $c$ . Рассмотрите движение катера под углом  $\alpha$  к направлению распространения волн.

### § 3.8. Наложение и отражение волн

◇ **3.8.1.** По струне распространяются две одинаковые по форме встречные волны, несущие энергию  $E$  каждая. Какова будет кинетическая и потенциальная энергия в момент совпадения оснований волн, изображенных на рисунке?



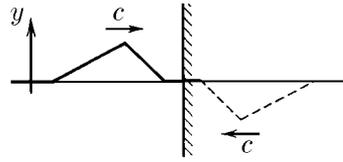
К задаче 3.8.1



К задаче 3.8.2

◇ **3.8.2.** Часть стального стержня, длина которого 10 см, сжали на тысячную долю его длины и отпустили. Какие бегущие волны возникнут в стержне? Нарисуйте графики распределения деформации стержня и скорости частиц в нем по его длине спустя  $5 \cdot 10^{-6}$  с после того, как эту часть стержня отпустили.

◇ **3.8.3.** При нормальном падении волны на жесткую стенку возникает возмущение, при котором смещение и скорость среды вблизи стенки нулевые. Если представить себе, что на падающую волну налагается идущая симметрично из-за стенки перевернутая волна смещений, то получится возмущение с нулевым смещением и требуемыми вблизи стенки свойствами. Постройте для изображенной на рисунке падающей волны распределение смещения и скорости среды, когда волна «войдет в стенку» на  $1/6$ ,  $1/2$ ,  $2/3$  своей длины.



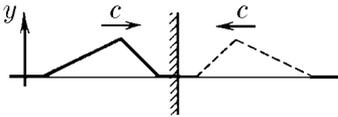
К задаче 3.8.3

**3.8.4.** Как зависит от времени давление на стенку при падении на нее синусоидальной звуковой волны с частотой  $\omega$  и амплитудой смещения  $A$ ? Плотность среды  $\rho$ , скорость звука  $c$ . На каких расстояниях от стенки находятся узлы и пучности скорости? узлы и пучности давления?

◇ **3.8.5.** На свободной границе среда не деформирована. Воспользуйтесь приемом решения задачи 3.8.3 и найдите возмущение, возникающее в среде при падении волны на ее свободную границу.

**3.8.6.** Скорость незакрепленного конца стержня из-за прихода волны продольного смещения с нулевого момента времени стала меняться по закону  $v = v_0 \sin \omega t$ . Какова амплитуда смещения? На каких расстояниях от конца стержня образуются узлы и пучности скорости? узлы и пучности давления?

◇ **3.8.7.** На внешней стороне стекла иллюминатора космического корабля имеются разрушения, вызванные попаданием микрометеоритов. Подобные же разрушения видны на внутренней стороне. Объясните их появление.

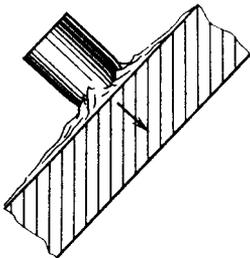


К задаче 3.8.5

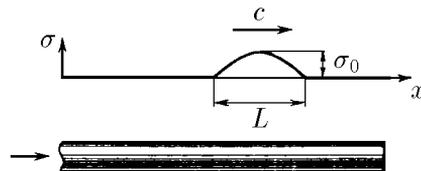


К задаче 3.8.7

◇ **3.8.8\*.** Для борьбы с танками применяют «пластиковые» снаряды. Взрывчатка во время удара такого снаряда о танк расплывается по броне, а затем взрывается. Волна, порожденная взрывом, проходит толщю брони и откалывает с внутренней стороны слой, отлетающий с большой скоростью. Найдите эту скорость и толщину отколотого слоя брони, если давление на броню при взрыве  $P = 5 \cdot 10^4$  атм и действует оно в течение времени  $\tau = 4 \cdot 10^{-6}$  с. Скорость звука в броне  $c = 5$  км/с, плотность брони  $\rho = 8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.



К задаче 3.8.8



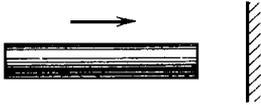
К задаче 3.8.9

◇ **3.8.9\*.** Предел прочности керамики и стекол на разрыв значительно меньше, чем на сжатие. Из-за удара по левому концу стеклянного стержня побежала

волна сжатия — «полуволна» синусоиды с амплитудой напряжения  $\sigma_0$  и протяженностью  $L$ . Какой участок стержня отколется, если предел прочности на разрыв  $\sigma < \sigma_0$ ? Рассмотрите случаи  $\sigma_0 \gg \sigma$  и  $\sigma_0 \approx \sigma$ .

◇ **3.8.10.** Стальной стержень длины 1 м ударяется торцом о жесткую неподвижную стенку. Его первоначальная скорость 100 м/с. Какое давление он оказывает на стенку? Какие волны побегут по стержню? Чему равно время контакта? Какова конечная скорость стержня?

◇ **3.8.11.** Два упругих стержня из одинакового материала и одинакового сечения, но разной длины  $l$  и  $L > l$  движутся навстречу друг другу со скоростью  $v$ . Определите скорость центров масс этих стержней после их столкновения.



К задаче 3.8.10



К задаче 3.8.11

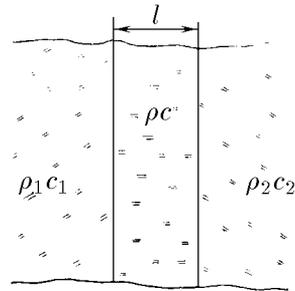
**3.8.12\*.** Происходит торцевое столкновение двух упругих стержней одинакового сечения. Рассмотрев волны сжатия, порожденные ударом, и отражение их от свободных концов, докажите, что результат соударения такой же, как и при лобовом абсолютно упругом ударе тел, если отношение длин стержней равно отношению скоростей звука в этих стержнях.

**3.8.13\*.** Упругий стержень длины  $l_1$ , летящий со скоростью  $v$ , сталкивается своим торцом с торцом неподвижного стержня длины  $l_2$ ,  $l_1/c_1 > l_2/c_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — скорости звука соответственно в одном и другом стержне. Сечение стержней и плотность их материала одинаковы. Определите скорость центров масс стержней после столкновения.

**3.8.14.** Длина волны, прошедшей через плоскую границу раздела из одной среды во вторую, сокращается во столько же раз, во сколько уменьшается во второй среде скорость распространения волны. Используя этот факт, а также закон сохранения энергии и импульса, определите, во сколько раз амплитуда отраженной волны и волны, прошедшей во вторую среду, меньше амплитуды падающей волны. Плотность и модуль упругости сред равны соответственно  $\rho_1$ ,  $E_1$  и  $\rho_2$ ,  $E_2$ .

**3.8.15.** Коэффициентом прохождения волны называют отношение энергии проходящей волны к энергии падающей. Найдите этот коэффициент для звуковой волны на границе сред вода—воздух.

◇ **3.8.16.** Чтобы увеличить коэффициент прохождения волны, принимаемой пьезодатчиком, его подсоединяют к исследуемой среде через специальную прокладку. Плотность и скорость звука в исследуемой среде равны соответственно  $\rho_1$  и  $c_1$ , плотность и скорость звука в прокладке и кристалле пьезодатчика равны соответственно  $\rho$ ,  $c$  и  $\rho_2$ ,  $c_2$ . Пусть  $\rho_1 c_1 / \rho c = \rho c / \rho_2 c_2 = 4$ . Сравните по мощности сигналы, поступающие к датчику с прокладкой и без нее, если длительность сигнала меньше времени прохождения им прокладки.



К задаче 3.8.16

**3.8.17.** На плоскую стенку толщины  $l$  перпендикулярно ее поверхности падает звуковой сигнал, протяженность которого много меньше  $l$ . Из-за многократных отражений сигнала от границ стенки появляется последовательность вторичных сигналов («эхо-сигналов»), амплитуда которых убывает в геометрической про-

грессии. Плотность среды, в которой находится стенка, и самой стенки — соответственно  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Скорость распространения звука в среде и стенке соответственно  $c_1$  и  $c_2$ . Определите отношение амплитуды двух следующих друг за другом «эхо-сигналов» в среде за стенкой, а также расстояние между ними.

**3.8.18\*.** На стенку (см. задачу 3.8.17) последовательно падают одинаковые звуковые сигналы. При каком расстоянии между ними амплитуда сигнала, прошедшего сквозь стенку, будет максимальной? Определите отношение максимальной амплитуды этого сигнала к амплитуде падающего сигнала. Изменится ли это отношение, если на стенку будет падать синусоидальная волна?

**3.8.19.** Ультразвуковая волна распространяется по воздуху в узком коридоре без заметного ослабления на большое расстояние. Коридор перегородили звукоизолирующим экраном некоторой толщины. При этом мощность проходящей волны уменьшилась во много раз. Затем вместо прежнего установили экран двойной толщины. Обнаружилось, что сквозь этот экран ультразвук проходит почти не ослабляясь. В чем тут дело? Частота волны 1 МГц, скорость звука в материале экрана 5 км/с. Найдите толщину звукоизолирующих экранов.

**3.8.20.** На границе раздела сред происходит почти полное отражение звука, если  $\rho_1 c_1 \gg \rho_0 c_0$ . Однако известно, что очень тонкие стенки не обеспечивают хорошей звукоизоляции. Почему?

### § 3.9. Звук. Акустические резонаторы

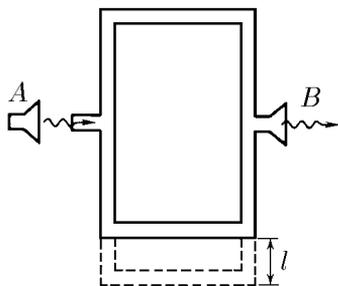
**3.9.1.** Скорость звука в воздухе равна  $c = 330$  м/с. Определите длину звуковой волны с частотой  $\nu = 50$  Гц.

◇ **3.9.2.** Прибор для демонстрации интерференции звука имеет сначала два одинаковых — верхний и нижний — звукопровода. На какое минимальное расстояние  $l$  нужно опустить нижний звукопровод, чтобы максимально ослабить звучание рупора  $B$  на частоте  $\nu = 100$  Гц?

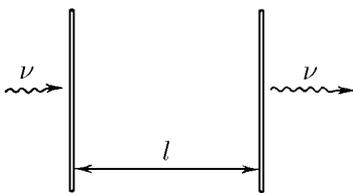
◇ **3.9.3.** Интенсивность звуковой волны частоты  $\nu$ , прошедшей через две тонкие параллельные пластины, раздвинутые на расстояние  $l$ , достигает максимума на расстоянии от второй пластины, кратном  $l$ . Объясните это явление и определите скорость звука в среде, в которой находятся пластины.

**3.9.4.** Определите амплитуду скорости, смещения и давления в звуковой волне частоты 1 кГц в области болевых ощущений (интенсивность волны  $1 \text{ Вт/м}^2$ ) и вблизи порога слышимости (интенсивность волны  $10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ ).

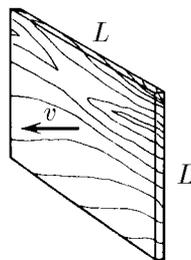
**3.9.5\*.** При какой интенсивности ультразвука в воде при атмосферном давлении начнут появляться вакуумные микрополости?



К задаче 3.9.2



К задаче 3.9.3



К задаче 3.9.6

◇ **3.9.6\*.** Пластинка размерами  $L \times L$  колеблется по гармоническому закону с частотой  $\omega \gg c/L$ , где  $c$  — скорость звука в воздухе. Оцените силу, действующую на пластинку со стороны воздуха, в момент, когда скорость пластинки равна  $v$ .

Плотность воздуха  $\rho$ . Как движется воздух, если  $\omega \ll c/L$ ? Почему в этом случае излучение звука слабое?

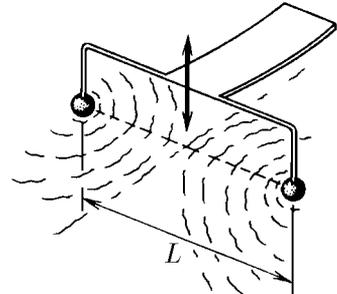
**3.9.7.** Шарик радиуса  $R$  совершает гармонические радиальные колебания («дышит») с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$  в жидкости, плотность которой  $\rho$ . С какой в среднем за период энергией излучается волна? Как меняется амплитуда колебаний давления в жидкости по мере удаления от шарика, если скорость волны в жидкости равна  $c$ ? Считать  $A \ll R$ .

**3.9.8\*.** а. На бесконечный стержень в некотором сечении действует внешняя продольная сила  $F = F_0 \cos \omega t$ . Какие волны скорости и деформации возникают в стержне? Сечение стержня  $S$ , плотность его материала  $\rho$ , скорость волны в стержне  $c$ .

б. В двух сечениях бесконечного стержня, расположенного на расстоянии  $l$  друг от друга, действует продольная внешняя сила  $F = F_0 \cos \omega t$ . Какие волны возникают в стержне? При каких значениях  $l$  мощность волны в стержне наибольшая? наименьшая? Почему энергия результирующей волны в стержне не равна сумме энергий волн, испускаемых каждым источником в отдельности?

**3.9.9\*.** В двух сечениях бесконечного стержня действуют две внешние продольные силы. Сила с левой стороны меняется по закону  $F_1 = F_0 \cos \omega t$ , а сила с правой — по закону  $F_2 = F_0 \sin \omega t$ . При каком расстоянии  $l$  между источниками силы бегущая волна будет распространяться только слева направо? только справа налево?

◇ **3.9.10.** К вибратору частоты  $\omega$  прикреплены два одинаковых маленьких шарика на расстоянии  $L$  друг от друга. Они возбуждают волны на поверхности воды. Оцените, используя рисунок, скорость волн на воде.



К задаче 3.9.10

**3.9.11\*.** а. В свободном стержне длины  $L$ , на конец которого действует с частотой  $\omega$  гармоническая сила, образуется стоячая волна с длиной волны  $\lambda$ . Где находятся узлы напряжений этой волны? Какова амплитуда вынуждающей силы, если амплитуда напряжений в стоячей волне равна  $\sigma_0$ , а сечение стержня равно  $S$ .

б. Постройте резонансную кривую — график зависимости величины  $\sigma_0 S/F_0$  от частоты вынуждающей силы. Определите частоты, при которых величина  $\sigma_0 S/F_0$  будет неограниченно возрастать. Можно ли утверждать, что эти частоты совпадают с собственными частотами колебаний стержня, когда на него не действуют внешние силы?

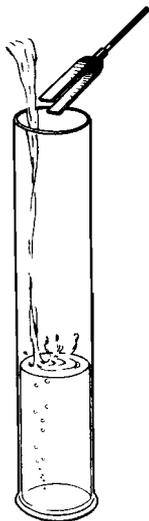
**3.9.12.** Найдите собственные частоты продольных колебаний стального стержня длины 1 м. За какие точки нужно повесить этот стержень, чтобы затухание колебаний второй резонансной частоты было минимальным?

**3.9.13.** Как изменятся собственные частоты колебаний стального шарика при увеличении его радиуса вдвое?

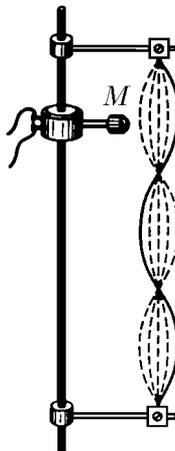
**3.9.14\*.** Между жесткими параллельными стенками находится воздух. Одна из стенок начинает поперечное гармоническое движение с амплитудой  $A_0$  и частотой  $\omega$ . Расстояние между стенками  $L \gg A_0$ . До какой амплитуды смещения в пучности «раскачает» воздух эта стенка? Оцените время раскачки, если скорость звука в воздухе равна  $c$ .

**3.9.15.** Определите первую резонансную частоту колебаний воздуха между двумя параллельными зданиями, находящимися на расстоянии  $L = 20$  м друг от друга. Высота зданий заметно больше этого расстояния. Скорость звука в воздухе  $c = 330$  м/с.

◇ **3.9.16.** Поднесем вибрирующий камертон к высокому цилиндрическому сосуду, в который понемногу наливается вода. Мы услышим то усиливающийся звук, то ослабевающий, то снова усиливающийся. Как это объяснить? Почему без сосуда камертон звучит слабо?



К задаче 3.9.16



К задаче 3.9.22

**3.9.17.** При какой глубине океана в нем могут «раскачаться» физиологически опасные инфразвуковые колебания с частотой 7 Гц?

**3.9.18.** Первая резонансная частота открытой с обеих сторон органной трубы равна 300 Гц. Чему равна первая резонансная частота такой же, но закрытой с обеих сторон органной трубы? закрытой с одной стороны?

**3.9.19.** Зачем полый корпус скрипки и виолончели делают фигурным? Как от его размеров зависит тон звучания?

**3.9.20.** В барокамере, наполненной смесью гелия и кислорода, скорость звука намного больше скорости звука в воздухе. Как изменится звучание голосов людей, разговаривающих в барокамере? Изменится ли там тон камертона?

**3.9.21.** С какой силой нужно натянуть гитарную струну длины  $l = 60$  см и линейной плотности  $\mu = 0,1$  г/см, чтобы она звучала с частотой  $\nu = 100$  Гц на первой гармонике, т. е. на первой резонансной частоте?

◇ **3.9.22.** Колебания в струне возбуждают, пропуская по ней переменный ток так, что магнитная сила со стороны небольшого магнита  $M$  меняется гармонически. Частота тока отвечает третьей гармонике струны. Длина струны  $l$ . Где нужно поместить магнит, чтобы амплитуда колебаний была наибольшей?

**3.9.23.** Если звучащий на первой гармонике стержень взять рукой, он почти сразу перестает звучать. Объясните почему. В каком месте нужно взять стержень, чтобы этот эффект проявился наиболее слабо? наиболее сильно?

**3.9.24\*.** У монокристалла сапфира при низких температурах и соответствующей подвеске потери энергии при колебаниях в вакууме за период на первой гармонике составляют  $10^{-8}$  от энергии колебаний. Во сколько раз увеличатся эти потери при колебаниях в воздухе? Плотность сапфира  $3 \cdot 10^3$  кг/см<sup>3</sup>, скорость звука в воздухе 330 м/с, плотность воздуха 1,3 кг/м<sup>3</sup>.

**3.9.25\***. Академик И. В. Обреимов так начал объяснение односторонней слышимости: «...Рыболовы терпеть не могут, когда к ним подходят и разговаривают. И они правы. Рыба в воде отлично слышит разговоры на берегу. А мы, на берегу, не слышим «рыбьего разговора». Дело в том, что при переходе из воздуха в воду и из воды в воздух энергия звукового потока...» (*Уильям Брэгг*. Мир звука. М.: Наука, 1965. С. 333). Продолжите объяснение и подкрепите его количественными оценками, приняв, что человек реагирует на колебания давления начиная примерно с той же амплитуды, что и рыбы.

**3.9.26\***. Определите массу тела, связанного через упругую подставку жесткости  $k$  и массы  $m$  с жестким полом, если первая резонансная частота продольных колебаний этой системы равна  $\omega$ .

## Механика жидкости

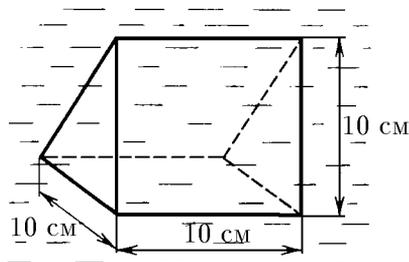
### § 4.1. Давление жидкости

4.1.1. Что такое давление жидкости? Придумайте способ измерения давления.

◇ 4.1.2. В жидкости находится прямоугольная призма, размеры которой показаны на рисунке. Найдите сумму сил, действующих на переднюю и нижнюю грани призмы, если давление жидкости равно  $2 \cdot 10^5$  Па. Чему равна сумма сил, действующих на призму?

4.1.3\*. Результирующая сила, действующая со стороны сжатой жидкости на три грани правильного тетраэдра, равна  $F$ . Длина ребра тетраэдра  $a$ . Определите давление жидкости.

◇ 4.1.4. В трубе находится поршень, продольное сечение которого показано на рисунке. Давление жидкости с обеих сторон поршня одинаково. Находится ли поршень в равновесии?



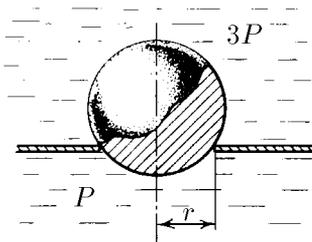
К задаче 4.1.2



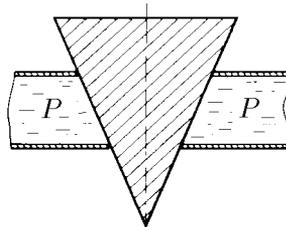
К задаче 4.1.4

◇ 4.1.5. Шар перекрывает отверстие радиуса  $r$  в плоской стенке, разделяющей жидкости, давление которых  $3P$  и  $P$ . С какой силой прижимается шар к отверстию?

◇ 4.1.6. Коническая пробка перекрывает сразу два отверстия в плоском сосуде, заполненном жидкостью при давлении  $P$ . Радиус отверстий  $r$  и  $R$ . Определите силу, действующую на пробку со стороны жидкости.



К задаче 4.1.5



К задаче 4.1.6

4.1.7\*. Сферический баллон радиуса  $R$  со стенками толщины  $\Delta$  разрывается внутренним давлением  $P$ . Определите предел прочности материала стенок.

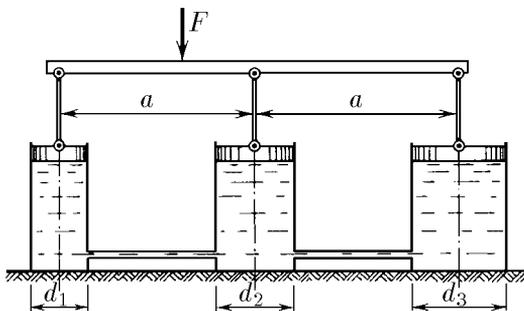
4.1.8\*. Почему сосиска в кипятке лопается вдоль, а не поперек?

◇ 4.1.9. Три сообщающихся сосуда с водой прикрыты поршнями. К поршням шарнирно прикреплены на вертикальных стержнях горизонтальная палка. В каком месте нужно приложить к палке силу  $F$ , чтобы она осталась горизонтальной? Диаметры сосудов и расстояния между ними указаны на рисунке.

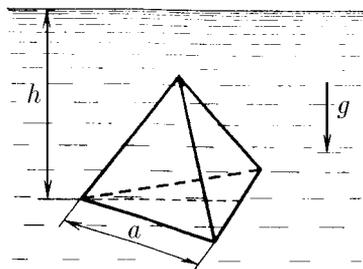
4.1.10. Гидравлический пресс, заполненный водой, имеет поршни, сечение которых 100 и 10 см<sup>2</sup>. На больший поршень ставят груз массы 80 кг. На какую высоту поднимется после этого малый поршень?

4.1.11. Куб, ребро которого 20 см, находится в воде. Нижняя грань куба удалена от поверхности воды на расстояние 1 м. Чему равна сила, действующая со стороны воды на нижнюю грань куба? верхнюю грань? Какая сила действует на боковую грань куба? Найдите векторную сумму сил, действующих со стороны воды на тело. Атмосферное давление  $10^5$  Па.

◇ 4.1.12\*. Нижняя грань правильного тетраэдра с ребром  $a$ , полностью погруженного в жидкость плотности  $\rho$ , находится на глубине  $h$ . Определите силу, действующую со стороны жидкости на боковую грань тетраэдра, если атмосферное давление равно  $P$ .



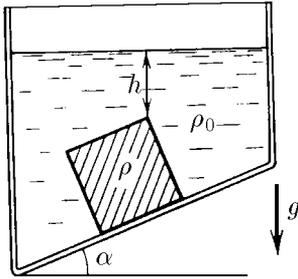
К задаче 4.1.9



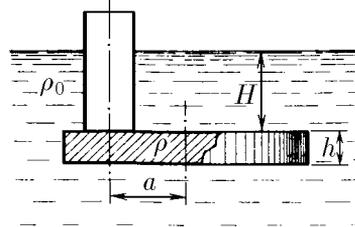
К задаче 4.1.12

◇ 4.1.13\*. В сосуде, дно которого образует угол  $\alpha$  с горизонтом, стоит куб с ребром  $a$ , сделанный из материала плотности  $\rho$ . Верхнее ребро куба находится на глубине  $h$ . Жидкость под основание куба не подтекает. Атмосферное давление  $P$ , плотность жидкости  $\rho_0$ . Найдите силу, с которой куб действует на дно сосуда.

◇ 4.1.14. Трубка радиуса  $r$  закрыта снизу металлическим диском и погружена в жидкость на глубину  $H$ . Радиус диска  $R$ , высота  $h$ . Ось диска отстоит от оси трубки на расстояние  $a$ . Плотность жидкости  $\rho_0$ , плотность металла  $\rho$ . До какой высоты нужно наливать жидкость в трубку, чтобы диск оторвался от трубки?



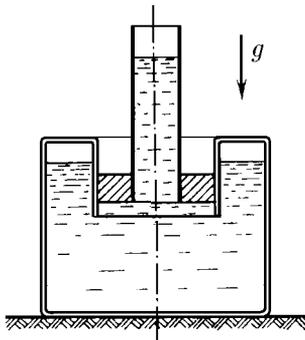
К задаче 4.1.13



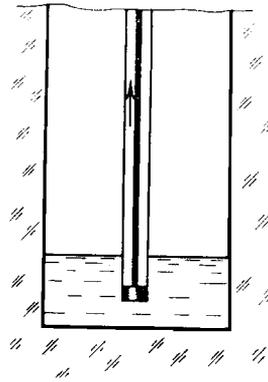
К задаче 4.1.14

◇ 4.1.15. В верхней части сосуда с водой имеется цилиндрическое отверстие, плотно закрытое подвижным поршнем. В поршень вделана вертикальная трубка. Радиус поршня 10 см, радиус трубки 5 см, масса поршня вместе с трубкой 20 кг. Определите высоту столба воды в трубке при равновесии системы.

◇ 4.1.16. Поршень, перекрывающий цилиндрическую трубку внутреннего радиуса 10 см, может перемещаться с помощью длинного вертикального штока. Трубка с поршнем, занимающим крайнее нижнее положение, опущена в цилиндрический сосуд радиуса 1 м на глубину 0,5 м. На какую высоту от первоначального уровня воды в сосуде можно поднять воду в трубке? Атмосферное давление  $10^5$  Па.

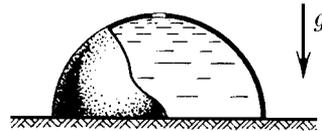


К задаче 4.1.15



К задаче 4.1.16

◇ 4.1.17\*. В полусферический колокол, края которого плотно прилегают к поверхности стола, наливают через отверстие сверху жидкость. Когда жидкость доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает из-под него течь. Найдите массу колокола, если его внутренний радиус равен  $R$ , а плотность жидкости  $\rho$ .



К задаче 4.1.17

4.1.18. Докажите, что в двух сообщающихся сосудах жидкость в поле тяжести имеет минимальную потенциальную энергию, когда уровни жидкости в обоих сосудах находятся на одной высоте.

◇ 4.1.19\*. В цилиндрическом сосуде радиуса  $R$ , частично наполненном жидкостью плотности  $\rho$ , в боковой стенке имеется отверстие, заткнутое пробкой. Какую работу нужно совершить, чтобы вдвинуть пробку на длину  $l$ ? Пробка имеет вид

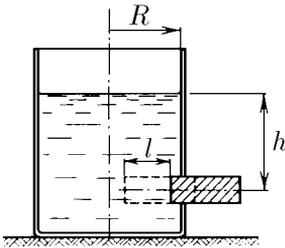
цилиндра радиуса  $r$ . Центр отверстия находится на глубине  $h$ . Сосуд достаточно высок, чтобы жидкость из него не выливалась. Трение не учитывать.

**4.1.20\***. Найдите давление на расстоянии  $r$  от центра жидкой планеты радиуса  $R$ , если жидкость имеет плотность  $\rho$ . Чему равно давление в центре планеты? Гравитационная постоянная  $\gamma$ .

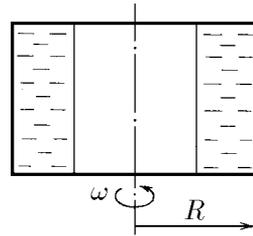
**4.1.21.** В сосуде с жидкостью находится газовый пузырь. Поля тяжести нет. Сосуд начинает двигаться с постоянным ускорением. Куда начнет двигаться пузырь?

**4.1.22.** Под каким углом к горизонту расположится поверхность жидкости в сосуде, скользящем по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, если коэффициент трения равен  $\mu$ ?

◇ **4.1.23\***. Закрытый цилиндр радиуса  $R$ , заполненный на три четверти своего объема жидкостью плотности  $\rho$ , вращается в невесомости вместе с жидкостью с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси. Как меняется давление в жидкости в зависимости от расстояния до стенок цилиндра?



К задаче 4.1.19



К задаче 4.1.23

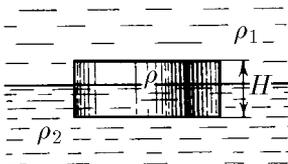
**4.1.24.** Найдите форму поверхности жидкости в вертикально расположенном цилиндрическом стакане, который вращается вместе с жидкостью вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ .

## § 4.2. Плавание. Закон Архимеда

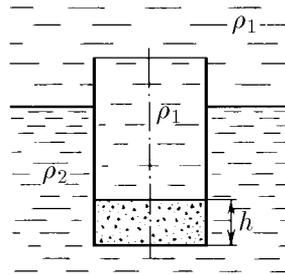
**4.2.1.** Определите давление жидкости на нижнюю поверхность плавающей шайбы сечения  $S$  и массы  $m$ , если атмосферное давление равно  $P_0$ .

◇ **4.2.2.** На границе раздела двух жидкостей плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$  плавает шайба плотности  $\rho$  ( $\rho_1 < \rho < \rho_2$ ). Высота шайбы  $H$ . Определите глубину ее погружения во вторую жидкость.

◇ **4.2.3.** Тонкостенный стакан массы  $m$  вертикально плавает на границе раздела жидкостей плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Определите глубину погружения стакана в нижнюю жидкость, если дно стакана имеет толщину  $h$  и площадь  $S$ , а сам стакан заполнен жидкостью плотности  $\rho_1$ .



К задаче 4.2.2



К задаче 4.2.3

4.2.4\*. В жидкости плотности  $\rho_0$  плавает прямоугольный параллелепипед из материала плотности  $\rho$ . Высота параллелепипеда  $b$ , ширина и длина  $a$ . При каком соотношении  $a$  и  $b$  его положение устойчиво?

4.2.5. Деревянный куб с ребром 0,5 м плавает в озере, на две трети своего объема погруженный в воду. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы полностью погрузить куб в воду?

4.2.6. Кусок железа весит в воде 9,8 Н. Определите его объем. Плотность железа  $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

4.2.7. Тело в воде весит в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела?

4.2.8. К коромыслу весов подвешены два груза равной массы. Если один из грузов поместить в жидкость плотности  $\rho_1$ , а другой в жидкость плотности  $\rho_2$ , то равновесие сохраняется. Найдите отношение плотностей грузов.

4.2.9\*. В сообщающиеся сосуды диаметра  $d_1$  и  $d_2$  налита жидкость плотности  $\rho$ . На сколько поднимется уровень жидкости в сосудах, если в один из сосудов положить тело массы  $m$  из материала, плотность которого меньше  $\rho$ ?

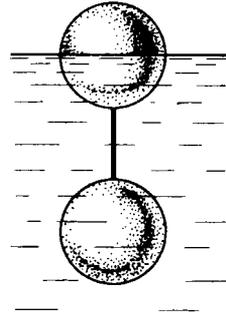
◇ 4.2.10. Определите силу натяжения нижней лески у поплавка, изображенного на рисунке, если поплавок погружен в воду на две трети своей длины. Масса поплавок 2 г.



К задаче 4.2.10



К задаче 4.2.11



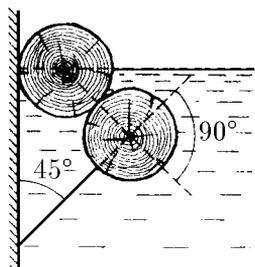
К задаче 4.2.12

◇ 4.2.13. Два одинаковых бревна расположены в воде так, как показано на рисунке. Нижнее бревно привязано к вертикальной стенке тросами, составляющими с ней угол  $45^\circ$ . Верхнее бревно наполовину погружено в воду. Определите плотность древесины.

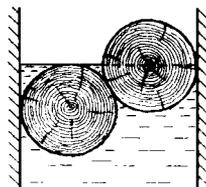
◇ 4.2.14. Определите силу давления бревен массы  $m$  на стенки канала. Верхнее бревно погружено в воду наполовину, а нижнее касается верхним участком поверхности воды. Бревна одинаковы.

◇ 4.2.15\*. Как зависит сила, прижимающая друг к другу два одинаковых полуцилиндра плавающего батискафа, от глубины его погружения  $H$ , если он плавает на поверхности жидкости так, как это показано на рисунках *a* и *b*? Радиус батискафа  $R$ , длина  $L$ , плотность жидкости  $\rho$ .

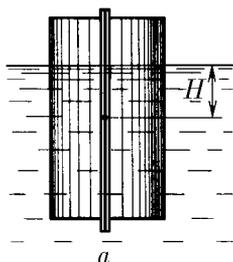
◇ 4.2.16\*. Докажите, что сила, с которой прижимаются половины плавающего батискафа друг к другу, не зависит от наклона плоскости соприкосновения полусфер батискафа, если он полностью погружен в воду.



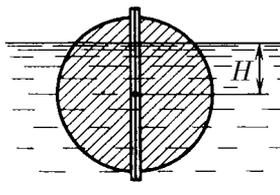
К задаче 4.2.13



К задаче 4.2.14

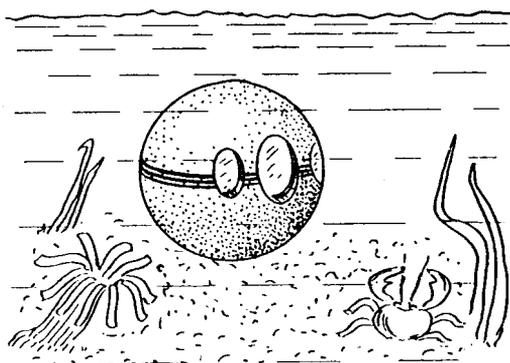


а



б

К задаче 4.2.15

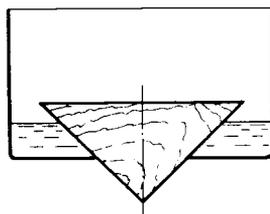


К задаче 4.2.16

◇ 4.2.17. Коническая пробка высоты 10 см с углом при вершине  $90^\circ$  перекрывает в сосуде отверстие радиуса 5 см. Чему должна быть равна масса этой пробки, чтобы она не всплывала при изменении уровня воды в сосуде?

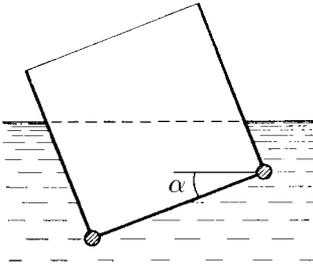
4.2.18\*. Решите задачу 4.2.17 при условии, что отверстие радиуса  $r$  перекрывается шаром радиуса  $R$ , а плотность жидкости равна  $\rho$ .

◇ 4.2.19\*. Наклон кубической коробки, наполненную погруженной в жидкость, равен  $\alpha$ . Определите массу каждого из двух противоположных ребер коробки. Массой остальных частей коробки пренебречь. Плотность жидкости  $\rho$ , длина ребер коробки  $a$ .

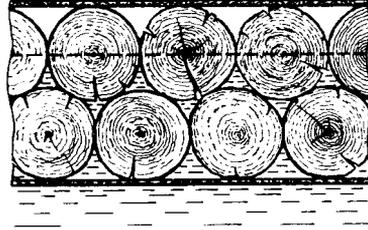


К задаче 4.2.17

◇ 4.2.20\*. Определите минимальную силу натяжения двух канатов, связывающих широкий плот, состоящий из двух слоев бревен. Масса каждого бревна  $m$ . Верхний слой бревен погружен в воду наполовину.



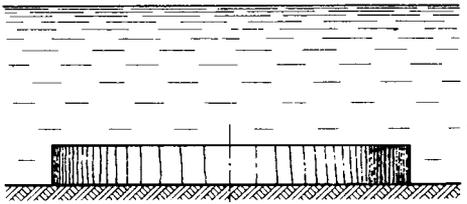
К задаче 4.2.19



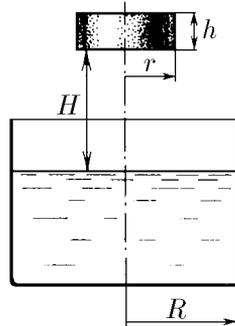
К задаче 4.2.20

◇ 4.2.21. а. В водоеме с глубины 1 м всплывает деревянный цилиндр радиуса 1 м и высоты 0,2 м. Плотность древесины  $0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Какое количество теплоты выделится к моменту окончания движения воды и цилиндра?

◇ б\*. В цилиндр радиуса  $R$ , частично заполненный жидкостью, падает цилиндрическая пробка радиуса  $r$  и высоты  $h$ . Начальная высота нижней поверхности пробки над уровнем жидкости  $H$ , начальная скорость равна нулю. Какое количество теплоты выделится к моменту окончания движения жидкости и пробки? Плотность пробки  $\rho$ , плотность жидкости  $\rho_0 > \rho$ .



а



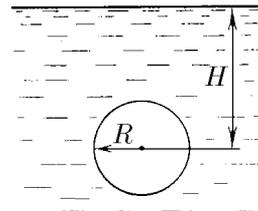
б

К задаче 4.2.21

◇ 4.2.22. Какое количество теплоты выделится в водоеме при всплывании в нем воздушного пузыря радиуса  $R = 0,1 \text{ м}$  с глубины  $H = 10 \text{ м}$ ?

4.2.23. Какую минимальную работу нужно произвести, чтобы поднять со дна моря на борт судна батисферу радиуса 2 м и массы 35 т? Глубина моря 100 м, высота борта судна 3 м, плотность морской воды  $1,02 \text{ кг/м}^3$ .

4.2.24\*. Цилиндрический космический корабль радиуса  $R$  вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Бассейн в корабле имеет глубину  $H$ , а дном бассейна служит боковая стенка корабля.

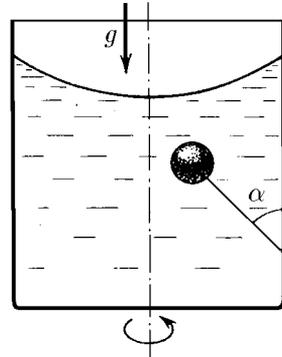


К задаче 4.2.22

а. Сможет ли космонавт плавать в этом бассейне? Опишите особенность космического бассейна. Определите плотность плавающей в бассейне палочки длины  $l < H$ , если из воды выступает ее верхняя часть длины  $\Delta$ .

б. В бассейне можно наблюдать следующее интересное явление: два шара разной плотности, связанные нитью, в зависимости от «глубины» движутся или к свободной поверхности, или к стенке космического корабля, если плотность одного шара больше, а другого меньше плотности воды. Объясните это явление.

**4.2.25\***. Цилиндрический сосуд радиуса  $R$ , заполненный жидкостью плотности  $\rho$ , вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси. В сосуде находится шарик радиуса  $r$  и плотности  $2\rho$ . Найдите силу, с которой шарик давит на боковую стенку сосуда.



К задаче 4.2.26

◇ **4.2.26.** Вертикальный цилиндрический сосуд радиуса  $R$ , частично заполненный жидкостью, вращается вместе с жидкостью вокруг своей оси. К боковой стенке сосуда на нити длины  $l$  привязан воздушный шарик радиуса  $r$ ; во время вращения нить образует со стенкой угол  $\alpha$ . Определите угловую скорость вращения сосуда.

**4.2.27.** Молекула жидкости состоит из двух слабо связанных между собой групп атомов. Объем этих групп одинаков, их массы равны  $m_1$  и  $m_2$ . При вращении жидкости в центрифуге радиуса  $R$  с угловой скоростью, большей  $\omega$ , молекулы начинают распадаться. Оцените силу связи групп атомов в молекуле.

### § 4.3. Движение идеальной жидкости

**4.3.1.** Насосная станция города поддерживает в водопроводе на уровне первого этажа давление 5 атм. Определите (пренебрегая трением при течении жидкости) скорость струи воды, вытекающей из крана на первом, втором и третьем этажах, если краны каждого последующего этажа расположены на 4 м выше кранов предыдущего. На какой этаж вода по водопроводу уже не поднимется?

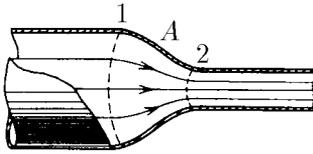
**4.3.2.** Сосуд с водой подвешен к потолку. Высота воды в сосуде  $h$ . На сколько изменится сила натяжения подвеса, если в дне сосуда открыть маленькое отверстие, из которого будет вытекать струя сечения  $S$ ? Плотность воды  $\rho$ .

**4.3.3.** Насос должен подавать каждую секунду объем воды  $V$  на высоту  $h$  по трубе постоянного сечения  $S$ . Какова должна быть мощность насоса? Плотность воды  $\rho$ .

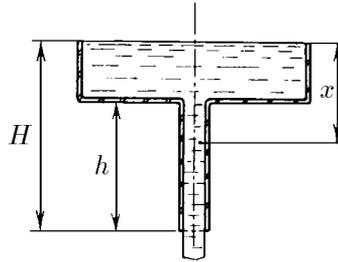
◇ **4.3.4. а.** Стационарный поток жидкости, протекающей по трубе переменного сечения, давит на участок трубы  $A$  между сечениями 1 и 2, который по третьему закону Ньютона давит на жидкость в противоположном направлении. Следовательно, сила, действующая на жидкость со стороны этого участка, направлена против движения жидкости. Почему же жидкость в области справа от сечения 2 имеет бóльшую скорость, чем в области слева от сечения 1?

б. Чему равна сила, действующая на жидкость со стороны участка трубы  $A$ ? Площадь сечений 1 и 2 равна соответственно  $S_1$  и  $S_2$ . Плотность жидкости  $\rho$ . В области справа от сечения 2 скорость жидкости равна  $v$ , а давление в ней равно нулю.

◇ **4.3.5.** Из широкого сосуда через узкую цилиндрическую трубку в его дне вытекает жидкость плотности  $\rho$ . Как распределены по вертикали давление и скорость жидкости в сосуде и трубке? Давление воздуха  $P_0$ .



К задаче 4.3.4



К задаче 4.3.5

**4.3.6.** По изогнутой под прямым углом трубе поперечного сечения  $S$  со скоростью  $v$  течет жидкость плотности  $\rho$ . С какой силой жидкость действует на трубу, если давление жидкости на выходе из трубы  $P$ ? Силой тяжести пренебречь.

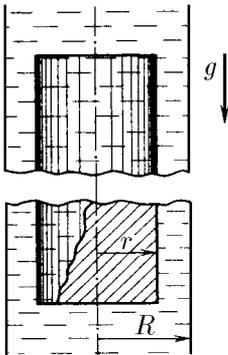
**4.3.7.** Насос представляет собой расположенный горизонтально цилиндр с поршнем площади  $S$  и выходным отверстием площади  $s$ , расположенным на оси цилиндра. Определите скорость истечения струи жидкости из насоса, если поршень под действием силы  $F$  перемещается с постоянной скоростью. Плотность жидкости  $\rho$ .

**4.3.8.** По длинной наклонной плоскости стекает широкий поток воды. На протяжении  $l$  по течению глубина потока уменьшается вдвое. На протяжении какого пути глубина потока уменьшится в четыре раза?

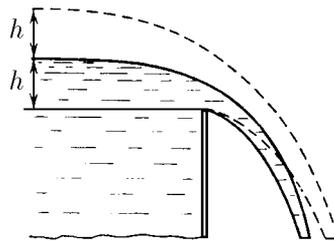
**4.3.9.** Плита массы  $m$  удерживается на месте в горизонтальном положении  $N$  струями жидкости плотности  $\rho$ , бьющими вертикально вверх. Площадь каждого отверстия  $S$ . Скорость жидкости на выходе из отверстий  $v$ . На какой высоте над отверстиями удерживается плита, если, достигнув плиты, жидкость разлетается от нее в горизонтальной плоскости?

◇ **4.3.10\***. С каким ускорением будет двигаться длинное цилиндрическое тело плотности  $\rho$  и радиуса  $r$  вдоль оси вертикального высокого цилиндрического сосуда радиуса  $R$ , заполненного жидкостью плотности  $\rho_0$ ? Чему равна разность давлений на верхнее и нижнее основания тела, если его длина равна  $h$ ?

◇ **4.3.11\***. Во сколько раз увеличится сброс воды через широкую плотину, если высота уровня воды над кромкой возрастает в два раза?



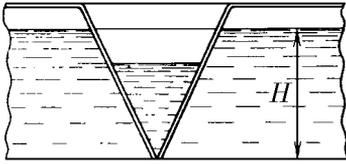
К задаче 4.3.10



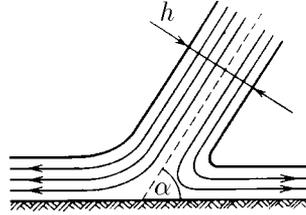
К задаче 4.3.11

◇ 4.3.12\*. Вода вытекает из широкого сосуда через треугольный вырез в его стенке. Во сколько раз уменьшится скорость понижения уровня воды при изменении высоты ее уровня от  $H$  до  $h$ ?

◇ 4.3.13. Широкая струя жидкости толщины  $h$  падает под углом  $\alpha$  со скоростью  $v$  на плоскость. На какие струи распадается падающая струя?



К задаче 4.3.12

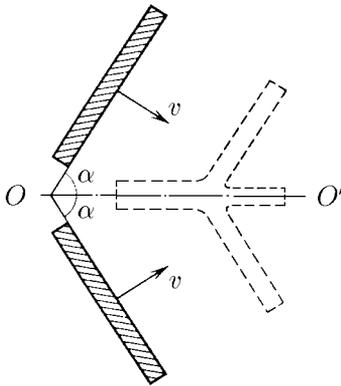


К задаче 4.3.13

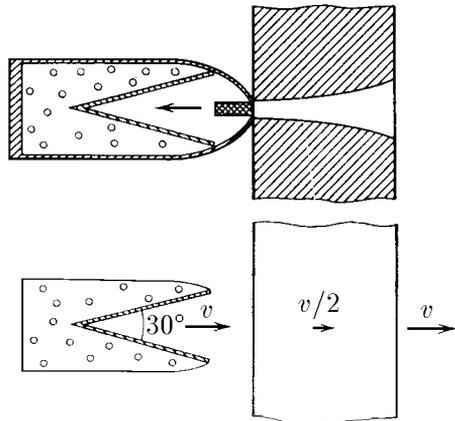
◇ 4.3.14\*. Две широкие металлические пластины, расположенные под углом  $2\alpha$  друг к другу, движутся со скоростью  $v$  по нормали к своей поверхности. Найдите скорость струй, возникающих при столкновении пластин, рассматривая движение металла как движение идеальной жидкости.

4.3.15\*. Определите форму стационарной струи, сформировавшейся после столкновения двух струй радиуса  $R$  и  $r$ , которые двигались навстречу друг другу с одинаковой скоростью.

◇ 4.3.16\*. «...В 1941 г. немцы придумали кумулятивный противотанковый снаряд. На конусе снаряда — запал. При ударе он вызывает детонацию и воспламеняет весь заряд. Снаряд пробивает всю броню. В 1944 г. такие немецкие снаряды попали в наши руки и в руки союзников. Начался широкий эксперимент. При этом обнаружили много дополнительных эффектов и парадоксов. Стали выяснять, что же летит, что пробивает? Сначала думали, что это бронепрожигающий снаряд, что броню пронзает струя горячего газа. Нет, оказалось, что летит металл, причем самым необъяснимым образом: перед плитой со скоростью 8 км/с, внутри плиты 4 км/с, за плитой снова 8 км/с» (из вступительного слова председателя Президиума СО АН СССР академика М. А. Лаврентьева перед учащимися Летней физико-математической школы в 1971 г.). Объясните это явление. Определите, с какой скоростью двигалась стенка металлической конической полости, перекрывающей заряд, если угол при вершине полости  $30^\circ$ .

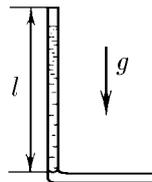


К задаче 4.3.14



К задаче 4.3.16

◇ 4.3.17\*. Жидкость в начальный момент заполняет вертикальную часть длины  $l$  в тонкой L-образной трубке. Плотность жидкости равна  $\rho$ . Найдите, как зависит от времени высота ее уровня. Найдите распределение давления в момент, когда высота столба жидкости уменьшится наполовину.



К задаче 4.3.17

4.3.18\*. Из отверстия в дне высокого сосуда вытекает вода. Сечение сосуда  $S$ , сечение струи  $s$ . Уровень воды в сосуде перемещается с постоянным ускорением. Найдите это ускорение.

4.3.19. В цилиндре с поршнем находится вода, внутри которой в начальный момент имеется полость объема  $V$ . Поршень оказывает на воду постоянное давление  $P$ . Какую энергию приобретает вода в момент, когда полость исчезнет?

4.3.20\*. В жидкости плотности  $\rho$  образовалась сферическая полость радиуса  $R$ . Давление в жидкости  $P$ . Определите скорость границы полости в момент, когда ее радиус уменьшится до значения  $r$ ?

4.3.21\*. Оцените, при какой скорости кромки винта катера в воде возникает полость.

#### § 4.4. Течение вязкой жидкости

4.4.1. Пространство между двумя параллельными плоскостями заполнено жидкостью вязкости  $\eta$ . Одна из плоскостей движется со скоростью  $v_0$ , другая покоится. Найдите распределение скорости жидкости между плоскостями и силу вязкого трения, действующую на единицу площади каждой из плоскостей. Расстояние между плоскостями  $h$ .

4.4.2. Найдите распределение скорости жидкости при установившемся ее течении между двумя плоскостями. Расстояние между плоскостями  $h$ , вязкость жидкости  $\eta$ . Найдите расход жидкости на единицу ширины потока, если перепад давления на единицу длины потока (в направлении движения жидкости) равен  $P$ .

4.4.3\*. а. Определите расход жидкости на единицу ширины потока, стекающего по наклонной плоскости под углом  $\alpha$  к горизонту. Вязкость и плотность жидкости равны соответственно  $\eta$  и  $\rho$ . Толщина потока  $h$ .

б. Оцените наклон ложа канала глубины 2 м, средняя скорость движения воды в котором равна 1 м/с. Вязкость воды  $10^{-3}$  Н·с/м<sup>2</sup>.

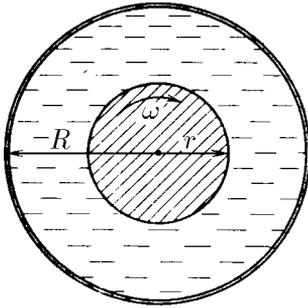
4.4.4\*. Определите установившуюся скорость движения шайбы массы  $m$  и радиуса  $R$  по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, в случае, когда между шайбой и плоскостью имеется слой смазки толщиной  $\Delta$  и вязкости  $\eta$ .

4.4.5. Жидкость перекачивается из одного сосуда в другой через длинную трубку радиуса  $R$  и длины  $l$ . Разность давлений на концах трубки  $P$ , вязкость жидкости  $\eta$ . Определите зависимость от расстояния до стенки трубки: а) градиента скорости жидкости; б\*) скорости жидкости. Определите объем жидкости, перетекающей через эту трубку в единицу времени.

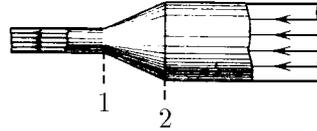
4.4.6. Из вертикально расположенной тонкой трубке, заполненной вязкой жидкостью, через время  $T$  вытекала половина жидкости. Через какое время вытечет оставшаяся часть жидкости?

4.4.7\*. Тонкая цилиндрическая трубка длины  $l$  и диаметра  $d$  целиком заполнена жидкостью плотности  $\rho$  и вязкости  $\eta$ . Определите время вытекания жидкости из трубки, если ее ось наклонена к горизонту под углом  $\alpha$ .

◇ 4.4.8. Пространство между валом радиуса  $r$ , вращающегося вокруг своей оси, и неподвижной соосной с валом трубой радиуса  $R$  заполнено жидкостью вязкости  $\eta$ . Момент сил, действующих на единицу длины вала, равен  $M$ . Определите зависимость от расстояния до оси вала: а) градиента угловой скорости жидкости; б\*) угловой скорости жидкости, а также угловую скорость вала.



К задаче 4.4.8



К задаче 4.4.9

◇ 4.4.9. В трубе переменного сечения поддерживается стационарное течение вязкой жидкости. В сечениях 1 и 2 скорость можно считать постоянной по сечению. Площади сечений 1 и 2 равны соответственно  $S_1$  и  $S_2$ , а давление жидкости в них — соответственно  $P_1$  и  $P_2$ . Скорость течения жидкости в сечении 1 равна  $v_1$ . Найдите силу, с которой жидкость действует на участок трубы между сечениями 1 и 2.

### § 4.5. Поверхностное натяжение жидкости

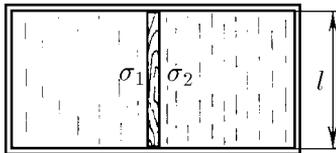
4.5.1. Что называется поверхностным натяжением? Приведите примеры проявления сил поверхностного натяжения.

4.5.2. Почему вода в кабине космического корабля «висит» в воздухе в форме шара? Чем мельче капельки ртути на полу, тем больше их форма похожа на шар. Почему?

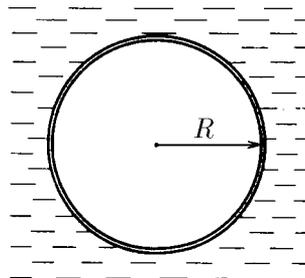
4.5.3. Оцените максимальный размер капель воды, которые могут висеть на потолке. Поверхностное натяжение воды  $0,073$  Н/м.

◇ 4.5.4. Пленки двух жидкостей разделены планкой длины  $l$ . Поверхностное натяжение жидкостей равно соответственно  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Какая сила действует на планку со стороны жидкостей?

◇ 4.5.5. Найдите поверхностное натяжение жидкости, если петля из резиновой нити длины  $l$  и жесткости  $k$ , положенная на пленку этой жидкости, растянулась по окружности радиуса  $R$ , после того как пленка была проколота внутри петли.



К задаче 4.5.4



К задаче 4.5.5

4.5.6. а. Какую работу нужно совершить, чтобы жидкость объема  $V$  с поверхностным натяжением  $\sigma$  растянуть в пленку, толщина которой  $\Delta \ll \sqrt[3]{V}$ ?

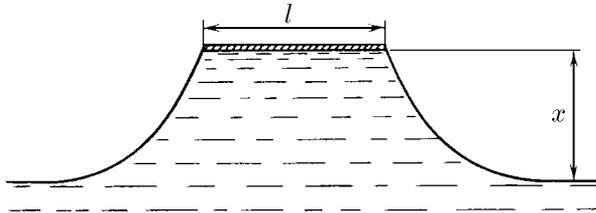
6\*. Оцените, во сколько раз работа по растяжению 1 г ртути в пленку, толщина которой близка к диаметру атома ртути, меньше удельной теплоты парообразования ртути, равной 290 Дж/г. Поверхностное натяжение и плотность ртути 0,465 Н/м и 13,6 г/см<sup>3</sup>.

4.5.7. Железный кубик, смазанный парафином, плавает в воде так, что его верхняя грань находится на уровне воды. Вода не смачивает парафин. Найдите длину ребра кубика.

4.5.8. На поверхности жидкости плавает погруженная на глубину  $h$  шайба радиуса  $r$  и высоты  $2h$ , не смачиваемая жидкостью. Плотность жидкости и шайбы равна  $\rho$ . Поверхность жидкости соприкасается с боковой поверхностью шайбы. Определите поверхностное натяжение жидкости.

4.5.9. Оцените, каким должно быть ускорение свободного падения на планете, чтобы человек мог ходить на ней по воде в обуви с несмачиваемыми водой подошвами.

◇ 4.5.10\*. Длинная пластина ширины  $l$  приведена в соприкосновение с поверхностью жидкости. Затем пластину стали поднимать. Как зависит сила, действующая на единицу длины пластины, от высоты ее подъема  $x$ ? Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ . Масса единицы длины пластины  $m$ .



К задаче 4.5.10

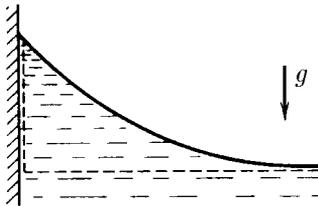
4.5.11. Большая и тонкая пластина не тонет, если ее осторожно положить на поверхность воды. Определите максимальную массу единицы ее площади. Пластина водой не смачивается.

◇ 4.5.12. а. Сумма сил, действующих на выделенный на рисунке объем жидкости, равна нулю. Пользуясь этим, определите высоту, на которую жидкость поднимается по вертикальной стенке. Краевой угол  $\theta$ . Поверхностное натяжение и плотность жидкости  $\sigma$  и  $\rho$ .

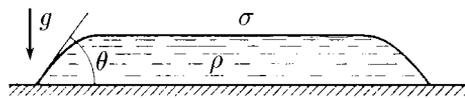
б. На какую высоту поднимется вода по вертикальной стенке, которую она полностью смачивает?

◇ 4.5.13. а. Определите толщину слоя жидкости, разлитой на горизонтальной плоскости. Краевой угол  $\theta$ , плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .

б. Определите толщину слоя воды, разлитой на горизонтальной плоскости, покрытой парафином.



К задаче 4.5.12



К задаче 4.5.13

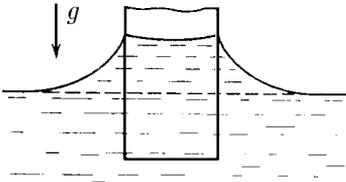
**4.5.14\***. а. Большой участок жидкости покрыт слоем масла. Поверхностное натяжение и плотность жидкости  $\sigma_{ж}$  и  $\rho_{ж}$ , поверхностное натяжение и плотность масла  $\sigma_{м}$  и  $\rho_{м}$ , поверхностное натяжение границы жидкость–масло  $\sigma_{ж.м.}$ . Определите толщину слоя масла.

б. В 1977 г. «Арго-Мерчент», танкер водоизмещением 28 691 т, напоролся на риф; корпус танкера развалился надвое, вышлеснув в море полный груз нефти. Черные пятна нефти расплзлись на тысячи квадратных миль. Определите общую площадь этих пятен. Поверхностное натяжение нефти 0,03 Н/м, плотность нефти  $0,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, нефть не смачивается водой. Массу нефти принять равной 0,8 водоизмещения танкера.

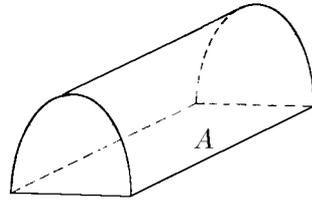
◇ **4.5.15\***. Докажите, что объем жидкости, который поднимется над ее общим уровнем (на рисунке этот объем отделен штриховой линией), зависит только от периметра поперечного сечения погруженной в жидкость палочки и не зависит от формы этого сечения.

◇ **4.5.16.** а. Докажите, что давление жидкости под ее цилиндрической поверхностью радиуса  $R$  равно  $\sigma/R$  ( $\sigma$  — поверхностное натяжение жидкости). Для доказательства воспользуйтесь условием равновесия объема жидкости, лежащего над плоскостью  $A$ .

б. Докажите, что давление жидкости под ее сферической поверхностью радиуса  $R$  равно  $2\sigma/R$ .

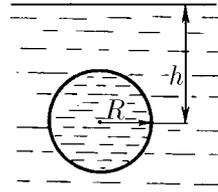


К задаче 4.5.15



К задаче 4.5.16

◇ **4.5.17.** Определите максимальное и минимальное давление внутри сферической капли жидкости, которая плавает в другой жидкости. Расстояние от центра капли до поверхности жидкости  $h$ , радиус капли  $R$ , плотность жидкостей  $\rho$ , поверхностное натяжение на границе раздела жидкостей  $\sigma$ .



К задаче 4.5.17

**4.5.18.** Жидкость смачивает вертикальную стенку (см. рисунок к задаче 4.5.12). Как зависит радиус кривизны поверхности жидкости от высоты  $x$ , на которую поднимается жидкость над своим уровнем? Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .

**4.5.19.** Внешний радиус мыльного пузыря равен  $R$ , толщина его стенки равна  $h$ . Найдите давление воздуха внутри пузыря. Давление воздуха вне пузыря равно  $P_0$ , поверхностное натяжение воды  $\sigma$ .

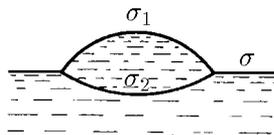
**4.5.20.** Оцените, сколько воды можно унести в решетке? Площадь решета и его ячейки равны соответственно  $0,1$  м<sup>2</sup> и  $1$  мм<sup>2</sup>. Решето водой не смачивается.

**4.5.21\***. Два легких тела, оба смачиваемые или оба не смачиваемые водой, плавая на поверхности воды, притягиваются друг к другу. Если же одно тело смачивается водой, а другое не смачивается, то тела будут отталкиваться. Объясните это явление.

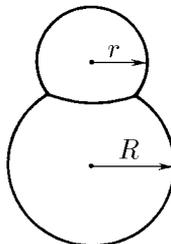
◇ **4.5.22\***. Маленькая капля жира плавает на поверхности жидкости, поверхностное натяжение которой  $\sigma$ . Поверхностное натяжение жира на границе

воздух–жир  $\sigma_1$ , на границе жир–жидкость  $\sigma_2$ . Определите толщину капли, если ее радиус равен  $r$ .

◇ 4.5.23. На мыльном пузыре радиуса  $R_0$  «сидит» еще один мыльный пузырь радиуса  $r$ . Какой радиус кривизны имеет пленка, их разделяющая? Какой угол образуют пленки в местах соприкосновения?



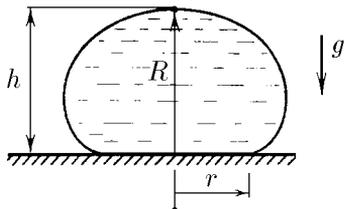
К задаче 4.5.22



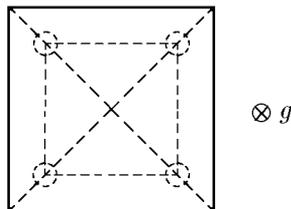
К задаче 4.5.23

◇ 4.5.24\*. Радиус кривизны капли в верхней ее точке  $R$ . Чему равна масса капли, если ее высота  $h$ , радиус соприкосновения капли с горизонтальной плоскостью, на которой она находится, равен  $r$ ? Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ , плоскость не смачивается жидкостью.

◇ 4.5.25. На четыре ртутных шарика, лежащих на горизонтальной плоскости, осторожно кладут квадратную пластинку так, как изображено на рисунке (вид сверху). Радиус каждого шарика 1 мм, масса пластины 80 г, поверхностное натяжение ртути 0,465 Н/м. Смачивания нет. На каком расстоянии от горизонтальной плоскости будет находиться нижняя поверхность пластины?



К задаче 4.5.24



К задаче 4.5.25

4.5.26. Какую работу против сил поверхностного натяжения нужно совершить, чтобы разделить сферическую каплю ртути радиуса 3 мм на две одинаковые капли?

4.5.27\*. Оцените, на каком расстоянии от крана радиус струи воды уменьшится в полтора раза. Скорость выходящей из крана воды 0,3 м/с, начальный радиус струи 2 мм.

## § 4.6. Капиллярные явления

4.6.1. а. При удалении с поверхности ткани жирового пятна рекомендуется смачивать пропитанной бензином ваткой края пятна, а не само пятно. Почему?

б. Для того чтобы мазь лучше впивывалась в лыжные ботинки, как их нужно нагревать: снаружи или изнутри?

**4.6.2.** Капилляр радиуса  $R$  опускают в смачивающую жидкость с поверхностным натяжением  $\sigma$  и плотностью  $\rho$ . Определите высоту, на которую поднимется жидкость. Определите работу, совершенную силами поверхностного натяжения, и потенциальную энергию жидкости в капилляре. Почему эти величины не совпадают?

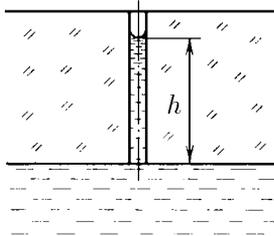
**4.6.3.** Определите максимальный радиус капилляров дерева на высоте 10 м. Вода полностью смачивает капилляры.

◇ **4.6.4\*.** а. Используя результат задачи 4.4.5, определите объем жидкости, протекающей в единицу времени через капилляр радиуса  $r$ , соединенный с жидкостью, если ее поверхность в капилляре установилась (из-за испарения) на расстоянии  $h$  от его основания. Вязкость жидкости  $\eta$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ , жидкость полностью смачивает капилляр. Действием силы тяжести пренебречь.

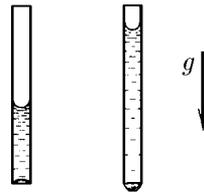
б. Оцените максимальный объем крови, который может подаваться к тканям в 1 с по капиллярам радиуса 10 мкм и длины 1 мм, полностью смачиваемых кровью, если число капилляров  $10^5$ , вязкость крови  $5 \cdot 10^{-3}$  Н·с/м<sup>2</sup>, поверхностное натяжение  $7 \cdot 10^{-2}$  Н/м.

**4.6.5.** Какую относительную погрешность мы допускаем при измерении атмосферного давления по высоте ртутного столба, если внутренний диаметр барометрической трубки, не смачиваемой ртутью, 5 мм, поверхностное натяжение 0,465 Н/м, плотность ртути 13,6 г/см<sup>3</sup>?

◇ **4.6.6.** В двух длинных открытых с обеих сторон капиллярах, расположенных вертикально, находятся столбики воды длины 2 и 4 см. Найдите радиус кривизны нижнего мениска в каждом из капилляров, если их внутренний диаметр равен 1 мм, а смачивание полное.

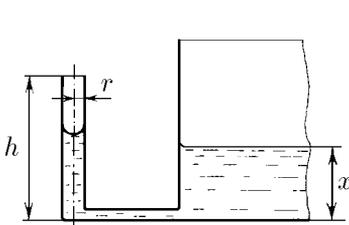


К задаче 4.6.4

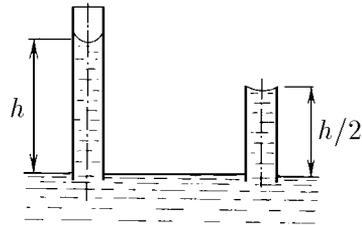


К задаче 4.6.6

◇ **4.6.7.** Вертикальный капилляр радиуса  $r$  и высоты  $h$  соединен с широким сосудом трубкой на уровне дна сосуда. Как зависит разность уровней жидкости в сосуде и капилляре от высоты  $x$  уровня жидкости в сосуде? При каком значении  $x$  жидкость начнет выливаться из капилляра? Поверхностное натяжение жидкости  $\sigma$ , ее плотность  $\rho$ . Жидкость полностью смачивает капилляр.



К задаче 4.6.7

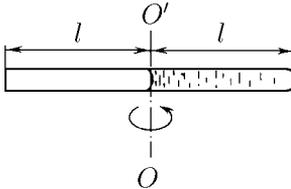


К задаче 4.6.8

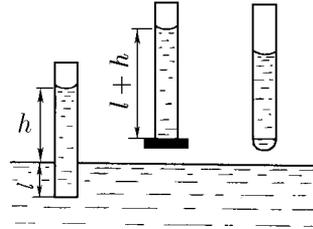
◇ 4.6.8. Жидкость в длинном капилляре поднимается на высоту  $h$ . Определите радиус кривизны мениска в коротком капилляре, длина которого  $h/2$ . Радиус обоих капилляров  $r$ , краевой угол  $\theta$ .

◇ 4.6.9\*. Капилляр, наполовину заполненный жидкостью, вращается вокруг оси  $OO'$ . Длина капилляра  $2l$ , его радиус  $r$ . Плотность жидкости  $\rho$ , а поверхностное натяжение  $\sigma$ . Жидкость полностью смачивает капилляр. При какой угловой скорости капилляра жидкость начнет из него вытекать?

◇ 4.6.10. В капилляре, опущенном вертикально в воду на глубину  $l$ , вода поднялась на высоту  $h$ . Нижний конец капилляра закрывают, вынимают капилляр из воды и вновь открывают. Определите длину столба воды, оставшейся в капилляре, если смачивание полное.

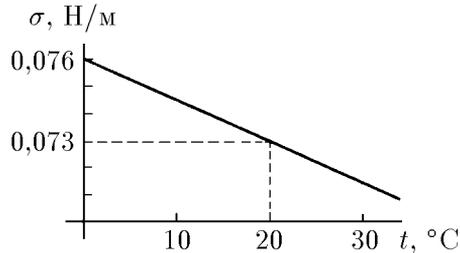
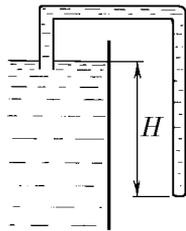


К задаче 4.6.9



К задаче 4.6.10

◇ 4.6.11\*. В сосуд с водой, температуру которой изменяют, опускают изогнутый стеклянный капилляр радиуса  $r = 0,1$  мм. График температурной зависимости поверхностного натяжения показан на рисунке. При какой температуре вода потечет из сосуда, если  $H = 15$  см?



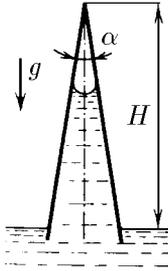
К задаче 4.6.11

4.6.12. Куда будет двигаться капля смачивающей и несмачивающей жидкости в горизонтально расположенном коническом капилляре?

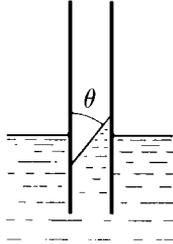
◇ 4.6.13\*. На какую высоту поднимется жидкость по вертикальному коническому капилляру с углом при вершине  $\alpha \ll 1$  рад? Плотность жидкости  $\rho$ , ее поверхностное натяжение  $\sigma$ , высота капилляра  $H$ . Жидкость полностью смачивает капилляр.

4.6.14. На какую высоту поднимется жидкость между двумя вертикальными пластинами, расстояние между которыми  $\Delta$ , если краевой угол у первой пластины  $\theta_1$ , у второй  $\theta_2$ ? Плотность жидкости  $\rho$ , ее поверхностное натяжение  $\sigma$ .

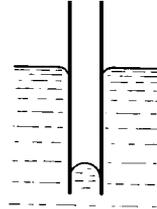
◇ 4.6.15. Какая сила действует на параллельные квадратные пластины со стороной  $a$ , частично погруженные в жидкость, если краевой угол у внешних их поверхностей  $90^\circ$ , а у внутренних —  $\theta$  и  $\pi - \theta$ ? Плотность жидкости  $\rho$ , ее поверхностное натяжение  $\sigma$ .



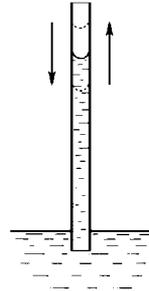
К задаче 4.6.13



К задаче 4.6.15



К задаче 4.6.16



К задаче 4.6.17

◇ **4.6.16\***. С какой силой притягиваются друг к другу две параллельные квадратные пластины со стороной  $a$ , частично погруженные в жидкость, если они не смачиваются жидкостью? Плотность жидкости  $\rho$ , расстояние между пластинами  $\Delta$ , поверхностное натяжение жидкости  $\sigma$ .

◇ **4.6.17\***. На какую высоту поднимется жидкость плотности  $\rho$  в полностью смачиваемом капилляре, если его поперечное сечение  $S$ , а периметр этого сечения  $l$ ? Как зависит период малых вертикальных колебаний жидкости в этом капилляре от высоты жидкости? Поверхностное натяжение жидкости  $\sigma$ .

## Молекулярная физика

### § 5.1. Тепловое движение частиц

**5.1.1.** Оцените среднюю кинетическую энергию и среднеквадратичную скорость частичек тумана диаметра 10 мкм, находящихся в воздухе при температуре 5 °С.

**5.1.2.** Во сколько раз различаются среднеквадратичные скорости двух частичек, совершающих броуновское движение в капле воды, если их массы различаются в четыре раза?

**5.1.3.** Оцените массу инфузории, на направленное движение которой со скоростью 1 мкм/с слабо влияет тепловое движение.

**5.1.4.** Определите среднеквадратичное отклонение маятника от положения равновесия, вызываемое тепловым движением шарика маятника. Температура воздуха 20 °С. Масса шарика 1 мг, длина нити маятника 10 м.

**5.1.5\*.** Зеркальце гальванометра подвешено на кварцевой нити. На зеркальце падает узкий параллельный луч света и, отражаясь от него, попадает на экран, расположенный на расстоянии 20 м от зеркальца. Температура воздуха 300 К. Оцените, на сколько увеличится радиус светового пятна на экране в результате теплового движения зеркальца, если при повороте зеркальца на угол  $\varphi$  на него со стороны нити действует момент сил  $M = -\kappa\varphi$ , где  $\kappa = 1,38 \cdot 10^{-15}$  Н·м. Как изменится ответ, если температуру воздуха понизить до 100 К?

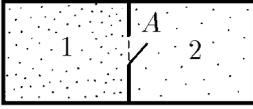
**5.1.6.** Сосуд разделен на две секции пористой перегородкой. В одной секции находится газ, состоящий из легких молекул, в другой — из тяжелых. Давление газа в обеих секциях сосуда в начальный момент одинаково. Через некоторое время давление в той секции сосуда, где находились тяжелые молекулы, увеличилось. Затем, через более длительный промежуток времени, давление в обеих секциях сосуда выравнялось. Объясните этот эффект.

◇ **5.1.7.** В секции сосуда находится смесь гелия с водородом. Давление водорода и гелия одинаково. В секции 2 сосуда вакуум. На короткое время в перегородке открывают отверстие А. Определите отношение давления гелия к давлению водорода в секции 2.

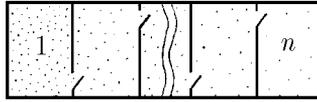
◇ **5.1.8\*.** Сосуд разделен перегородками на  $n$  изолированных секций. В начальный момент в секции 1 находится одинаковое число молекул с молярной массой  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . В остальных секциях вакуум. На короткое время в перегородках открывают небольшие отверстия, как показано на рисунке. Оцените отношение числа молекул с молярной массой  $\mu_1$  к числу молекул с молярной массой  $\mu_2$  в  $n$ -й секции сосуда.

**5.1.9\*.** Из сосуда через отверстие в стенке вытекает за время  $\tau$  половина разреженного газа. За какое время вытекла бы половина этого же газа, если бы все размеры сосуда (в том числе и размеры отверстия) были в  $n$  раз больше?

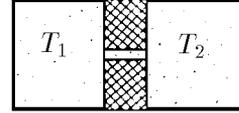
**5.1.10.** Оцените, во сколько раз поток газа, вытекающего из сосуда через цилиндрический канал радиуса  $R$  и длины  $L$ , меньше потока газа, вытекающего через отверстие радиуса  $R$ . Считать, что стенки канала поглощают молекулы.



К задаче 5.1.7



К задаче 5.1.8



К задаче 5.1.11

◇ **5.1.11\*.** Два сосуда одинакового объема  $V$  соединены узким каналом. В сосудах находится небольшое число частиц  $N$  (т. е. частиц так мало, что они почти не сталкиваются друг с другом). Сколько частиц окажется в каждом из сосудов, если температура газа в одном сосуде равна  $T_1$ , а во втором —  $T_2 > T_1$ ? В соединительный канал поместили легкий флажок. В какую сторону он отклонится?

## § 5.2. Распределение молекул газа по скоростям

**5.2.1.** В  $1 \text{ см}^3$  при давлении  $0,1 \text{ МПа}$  находится  $2,7 \cdot 10^{19}$  молекул азота. Число молекул, вертикальная составляющая скорости которых лежит в интервале от  $999$  до  $1001 \text{ м/с}$ , равно  $1,3 \cdot 10^{12}$ .

а. Какое число таких молекул содержится в  $1 \text{ л}$  азота?

б. Сколько молекул азота, имеющих вертикальную составляющую скорости в интервалах  $1000 \pm 0,1$  и  $1000 \pm 10 \text{ м/с}$ , содержится в  $1 \text{ м}^3$ ? Считать, что число молекул, обладающих скоростью, лежащей в некотором интервале скоростей, пропорционально этому интервалу.

**5.2.2.** Распределения молекул по проекциям  $v_i$  скорости на оси координат ( $i = x, y, z$ ) взаимно независимы. Пользуясь этим, определите в задаче 5.2.1 число молекул азота в  $1 \text{ см}^3$ , горизонтальные составляющие скоростей которых, так же как и вертикальные, лежат в интервале от  $999$  до  $1001 \text{ м/с}$ : число молекул, горизонтальные составляющие скоростей которых лежат в интервале  $1000 \pm 0,1 \text{ м/с}$ , а вертикальные — в интервале  $1000 \pm 2 \text{ м/с}$ .

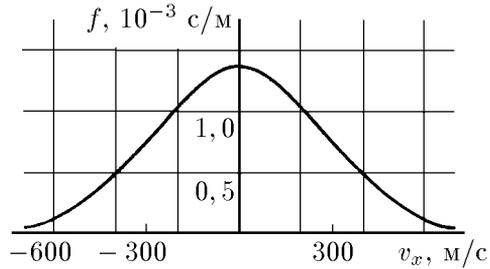
◇ **5.2.3.** Число молекул однородного идеального газа  $dN$ , скорость которых вдоль произвольной оси  $x$  лежит в интервале  $(v_x, v_x + dv_x)$ , из общего числа  $N$  его молекул при данной температуре  $T$  определяется распределением Максвелла:

$$dN = N \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x = N f(v_x) dv_x,$$

где  $m$  — масса молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана. Функция

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$$

называется функцией распределения. На рисунке приведена функция распределения молекул азота при комнатной температуре ( $T = 293 \text{ K}$ ). Используя график, найдите: а) сколько в  $1 \text{ см}^3$  воздуха содержится молекул азота, имеющих в некотором направлении скорость в интервале от 499 до 501 м/с, б) сколько в  $1 \text{ м}^3$  содержится молекул азота, имеющих в некотором направлении скорость в интервале от 498 до 502 м/с, если число молекул азота в  $1 \text{ см}^3$  равно  $2 \cdot 10^{19}$ .



К задаче 5.2.3

**5.2.4.** При какой температуре функция распределения по скоростям молекул водорода будет совпадать с функцией распределения по скоростям молекул азота при комнатной температуре.

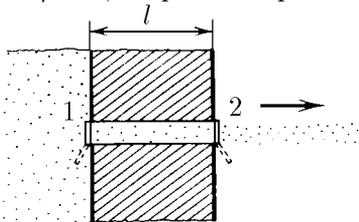
**5.2.5.** Найдите отношение числа молекул водорода, имеющих проекцию скорости на ось  $x$  в интервале от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул водорода, имеющих проекцию скорости на ту же ось в интервале от 1500 до 1505 м/с. Температура водорода 300 К.

**5.2.6.** Найдите отношение числа молекул водорода, имеющих проекцию скорости на ось  $x$  в интервале от 3000 до 3010 м/с, на ось  $y$  — в интервале от 3000 до 3010 м/с, на ось  $z$  — в интервале от 3000 до 3002 м/с, к числу молекул водорода, имеющих проекцию скорости на ось  $x$  в интервале от 1500 до 1505 м/с, на ось  $y$  — в интервале от 1500 до 1501 м/с, на ось  $z$  — в интервале от 1500 до 1502 м/с. Температура водорода 300 К.

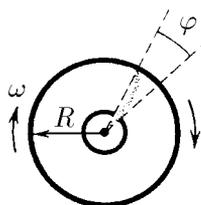
**5.2.7\*.** В стенке сосуда с разреженным газом сделано малое отверстие. Как будет изменяться температура газа при его вытекании?

◇ **5.2.8\*.** В толстой стенке сосуда, содержащего газ, сделан прямой канал длиной  $l$ , который соединяет сосуд с вакуумным пространством. Для формирования пучка молекул канал снабжен двумя затворами. Затвор 1 расположен на выходе канала в вакуумное пространство. Пучок молекул формируется следующим образом: сначала на время  $t_0$  открывают затвор 1, затем, после того как этот затвор закроется, через время  $t_0$  открывается на время  $\tau$  затвор 2. Молекулы, пролетевшие во время этого процесса канал, образуют в вакуумном пространстве пучок. Чему равна длина этого пучка через время  $t$  после закрытия затвора 2?

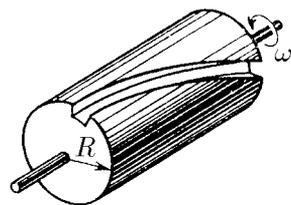
◇ **5.2.9.** Источник атомов серебра создает узкий ленточный пучок, который попадает на внутреннюю поверхность неподвижного цилиндра радиуса  $R = 30 \text{ см}$  и образует на ней пятно. Устройство начинает вращаться с угловой скоростью  $\omega = 100\pi \text{ рад/с}$ . Определите скорость атомов серебра, если пятно отклонилось на угол  $\varphi = 0,314 \text{ рад}$  от первоначального положения.



К задаче 5.2.8



К задаче 5.2.9



К задаче 5.2.10

◇ **5.2.10.** Отверстие в стенке перекрыто цилиндрической пробкой. На поверхности пробки прорезан узкий винтовой канал с шагом  $h$ . По одну сторону стенки

находится разреженный газ, по другую — вакуум. Молекулы газа легко поглощаются стенками канала. Пробка вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Какой скоростью будут обладать молекулы, прошедшие по каналу?

**5.2.11.** Представим, что удалось сфотографировать на кинолентку молекулы газа, функция распределения которых по скоростям  $f(v)$ .

а. Найдите функцию распределения «частицы» — изображений молекул газа на экране по скоростям, если увеличение, с которым изображение на кинолентке проецируется на экран, равно  $l$ .

б. Кинолентку при воспроизведении записи начали прокручивать в  $k$  раз быстрее, чем при съемке. Найдите функцию распределения «частиц» по скоростям в этом случае.

**5.2.12.** Скорости частиц, движущихся в потоке, имеют одно направление и лежат в интервале от  $v_0$  до  $2v_0$ . График функции распределения частиц по скоростям имеет вид прямоугольника. Чему равно значение функции распределения? Как изменяется функция распределения, если на частицы в течение времени  $\tau$  вдоль их скорости действует сила  $F$ ? Масса каждой частицы равна  $m$ .

**5.2.13\*.** Скорости частиц в пучке имеют одно направление и лежат в интервале от  $v$  до  $v + \Delta v$  ( $\Delta v \ll v$ ). В единице объема пучка находится  $n$  частиц, Масса каждой частицы  $m$ .

а. В течение времени  $\tau$  на частицы в направлении их движения действует сила  $F$ . Определите интервал скоростей и число частиц в единице объема после действия силы.

б. Определите интервал скоростей и число частиц в единице объема после прохождения области, где на расстоянии  $l$  вдоль направления движения на частицы действовала сила  $F$ .

**5.2.14\*.** а. Пусть создан пучок одинаковых молекул с функцией распределения

$$f(v_x) = 2\sqrt{\alpha/\pi} \exp(-\alpha v_x^2), \quad \alpha > 0.$$

Масса молекулы  $m$ . Как изменится число молекул в единице объема, если пучок пройдет область протяженности  $l$ , в которой на каждую молекулу действует тормозящая сила  $F$ ?

б. Плотность частиц вблизи поверхности Земли  $\rho_0$ , их температура  $T$ , а масса частиц  $m$ . Частицы имеют максвелловское распределение по скоростям. Определите плотность частиц и распределение частиц по скоростям на высоте  $h$  над Землей.

**5.2.15.** На высоте 3 км над поверхностью Земли в  $1 \text{ см}^3$  воздуха содержится примерно  $10^2$  пылинок, а у самой поверхности — примерно  $10^5$ . Определите среднюю массу пылинки и оцените ее размер, предполагая, что плотность пылинки  $1,5 \text{ г/см}^3$ . Температура воздуха  $27^\circ\text{C}$ .

**5.2.16.** У поверхности Земли молекул гелия почти в  $10^5$  раз, а водорода почти в  $10^6$  раз меньше, чем молекул азота. На какой высоте число молекул гелия будет равно числу молекул азота? водорода? Принять среднюю температуру атмосферы равной  $0^\circ\text{C}$ .

**5.2.17\*.** Испарение жидкости можно рассматривать как «уход» с ее поверхности быстрых молекул, т. е. тех молекул, кинетическая энергия которых больше энергии связи молекул в жидкости. Испарение жидкости прекращается, как только число уходящих молекул сравняется с числом молекул, которые приходят в жидкость из ее пара. Пар, состоящий из тех же молекул, что и жидкость, носит название «насыщенный пар», если он находится в равновесии с жидкостью.

а. Оцените число молекул в единице объема насыщенного пара при температуре  $T$ , если молярная теплота парообразования жидкости равна  $q$ , а число

молекул в единице объема жидкости равно  $n_0$ . Молекулы в жидкости и ее газовой фазе (в паре) имеют максвелловское распределение по скоростям.

б. При температуре  $100^\circ\text{C}$  молярная теплота парообразования воды — около  $4 \cdot 10^4$  Дж/моль. Оцените число молекул воды в насыщенном паре при  $100^\circ\text{C}$ .

### § 5.3. Столкновения молекул. Процессы переноса

**5.3.1.** При атмосферном давлении и температуре  $0^\circ\text{C}$  длина свободного пробега молекулы водорода равна  $0,1$  мкм. Оцените диаметр этой молекулы.

**5.3.2.** Оцените длину свободного пробега молекулы азота в воздухе при нормальных условиях. Радиус молекул азота и кислорода принять равным  $0,18$  нм.

**5.3.3.** Оцените, сколько раз за  $1$  с в  $1$  см<sup>3</sup> воздуха сталкиваются молекулы азота друг с другом и молекулы азота с молекулами кислорода.

**5.3.4.** Плотность газа увеличили в три раза, а температуру уменьшили в четыре раза. Как изменилось число столкновений молекул в единицу времени?

**5.3.5.** В сосуде находится смесь двух газов. В единице объема смеси содержится  $n_1$  молекул одного газа и  $n_2$  молекул другого газа. Радиус молекул соответственно  $R_1$  и  $R_2$ . Оцените длину свободного пробега молекул этих газов.

**5.3.6\*.** При нормальных условиях в  $1$  см<sup>3</sup> атомарного водорода содержится  $2,7 \cdot 10^{19}$  атомов. Оцените время, в течение которого  $0,1$  часть атомов водорода превращается в молекулы водорода. Считать, что каждое столкновение двух атомов водорода приводит к образованию молекулы. Радиус атома водорода  $0,06$  нм.

**5.3.7\*.** Определите отношение числа молекул вида  $A_2$ ,  $B_2$  к числу молекул вида  $AB$ , если в смеси при столкновениях происходят реакции



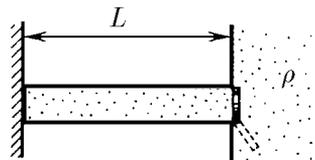
Число атомов  $A$  равно числу атомов  $B$ , радиус молекул  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $AB$  равен соответственно  $r_{A_2}$ ,  $r_{B_2}$ ,  $r_{AB}$ , масса молекул одинакова.

**5.3.8.** а. Относительное содержание радиоактивных атомов в газе невелико. Их число в единице объема линейно растёт с высотой:  $n = ah$ . Масса атома  $m$ , длина его свободного пробега  $\lambda$ , а температура  $T$ . Оцените плотность этих атомов на земле.

б. Оцените коэффициент диффузии водяного пара в воздухе при  $20^\circ\text{C}$ . Радиус молекул воды  $0,21$  нм. Радиус молекул азота и кислорода  $0,18$  нм.

**5.3.9.** Коэффициент диффузии молекул  $A$  в газах  $B_1$  и  $B_2$  равен соответственно  $D_1$  и  $D_2$ , если в единице объема этих газов содержится  $n$  частиц. Найдите коэффициент диффузии молекул  $A$  в смеси газов, в единице объема которой содержится  $n_1$  молекул газа  $B_1$  и  $n_2$  молекул газа  $B_2$ .

◇ **5.3.10\*.** В тонком сосуде длины  $L$  и сечения  $S$  находится сухой воздух, изолированный заслонкой от воздуха, содержащего насыщенный водяной пар. Температура дна сосуда поддерживается на постоянном уровне ниже  $0^\circ\text{C}$ . Заслонку убирают. Оцените время, за которое в сосуде установится стационарное состояние пара. Определите массу воды, замораживаемой в единицу времени, когда в сосуде установится стационарный поток пара. Коэффициент диффузии насыщенного пара  $D$ , его плотность  $\rho$ .



К задаче 5.3.10

**5.3.11.** а. Температура воздуха земной атмосферы линейно увеличивается с высотой  $h$ ,  $T = T_0 + \alpha h$ . При этом относительное изменение температуры  $\alpha h/T_0$  остается много меньше единицы. Длина свободного пробега молекул воздуха  $\lambda$ ,

масса каждой молекулы  $m$ , число молекул в единице объема воздуха  $n$ . Оцените плотность теплового потока на Землю. Изменится ли плотность этого потока, если число молекул в единице объема воздуха увеличится?

б. Во сколько раз теплопроводность водорода больше теплопроводности воздуха? Радиус молекул водорода  $0,14$  нм, радиус молекул азота и кислорода  $0,18$  нм. Температура газов одинакова.

**5.3.12.** Оцените тепловой поток из комнаты, размеры которой  $5 \times 5 \times 4$  м, наружу через два окна с рамами площади  $1,5 \times 2,0$  м, расположенными на расстоянии  $0,2$  м друг от друга, и время, в течение которого температура в комнате уменьшится на  $1^\circ\text{C}$ , если температура комнатного воздуха  $+20^\circ\text{C}$ , а наружного  $-20^\circ\text{C}$ . Почему тепловой поток через окна всегда значительно больше?

**5.3.13\*.** Теплопроводность газов  $A_1$  и  $A_2$  равна соответственно  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Определите теплопроводность смеси, в которой молекул газа  $A_1$  в  $\alpha$  раз больше, чем молекул газа  $A_2$ . Температура газов одинакова, газы одноатомные. Молярная масса газов соответственно  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

**5.3.14.** В разреженном газе нагретое тело остывает за время  $t$ . За какое время остынет тело из того же материала, если все его линейные размеры увеличить в  $n$  раз?

## § 5.4. Разреженные газы. Взаимодействие молекул с поверхностью твердого тела<sup>\*)</sup>

**5.4.1.** Оцените число молекул воздуха, попадающих на  $1 \text{ см}^2$  стены вашей комнаты в  $1$  с, и импульс, переданный ими стене.

**5.4.2.** Во сколько раз изменится давление газа, если  $k$ -я часть молекул, ударяющихся о стенку, вдруг начнет поглощаться ею?

**5.4.3.** В разреженном газе с постоянной скоростью  $v$  движется шар радиуса  $r$ . Число молекул в единице объема газа  $n$ , масса молекулы  $m$ , тепловые скорости молекул значительно меньше скорости шара. Оцените силу сопротивления, действующую на шар.

**5.4.4.** Почему метеориты раскаляются в атмосфере Земли?

**5.4.5.** В разреженном газе с молярной массой  $\mu$  движется диск радиуса  $r$  с постоянной скоростью  $v$ , направленной вдоль оси диска. Оцените силу сопротивления, действующую на диск. Скорость диска много меньше тепловой скорости молекул. Давление газа  $P$ , его температура  $T$ .

◇ **5.4.6.** В сосуде находится газ под давлением  $P$ . В стенке сосуда имеется отверстие площади  $s$ , размеры которого малы по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Определите реактивную силу, испытываемую сосудом при истечении газа в вакуумное пространство.

◇ **5.4.7.** В разреженном газе с молярной массой  $\mu$  движется пластина так, как показано на рисунке. Оцените, какую силу необходимо прикладывать к пластине, чтобы она двигалась с постоянной скоростью  $v$ . Площадь пластины  $S$ , давление газа  $P$ , его температура  $T$ . Скорость пластины мала по сравнению с тепловой скоростью молекул.

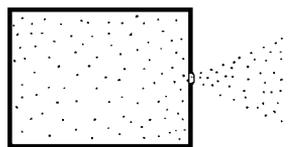
**5.4.8.** В сосуде с газом, давление которого можно менять, находятся два параллельных диска. Один диск висит на упругой нити, другой вращается с постоянной угловой скоростью. Угол закручивания первого диска при давлении  $P_1$

<sup>\*)</sup> В этом параграфе считать, что молекулы в разреженном газе (длина свободного пробега молекул много больше характерных размеров системы), уходящие с поверхности твердого тела, имеют среднеквадратичную скорость, соответствующую температуре твердого тела.

равен  $\varphi_1$ . При увеличении давления газа угол закручивания нити сначала увеличивается, а затем, достигнув величины  $\varphi_2$ , перестает зависеть от давления газа. Объясните этот эффект. Как зависит угол закручивания нити от давления газа при  $\varphi \ll \varphi_2$ ?

**5.4.9.** Между двумя длинными коаксиальными цилиндрами радиуса  $r_1$  и  $r_2$  находится разреженный газ. Внутренний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Оцените угловую скорость внешнего цилиндра.

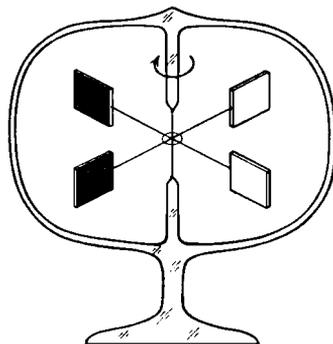
◇ **5.4.10\*.** Легкие слюдяные пластины с зеркальной поверхностью зачернили с одной стороны и закрепили на оси вращения так, как показано на рисунке. Затем эту систему поместили в стеклянный сосуд, из которого частично откачали воздух. Если теперь этот сосуд поставить в ярко освещенное помещение, то пластины начнут вращаться по часовой стрелке, причем тем быстрее, чем больше света в помещении. Снабдив это устройство измерительной шкалой, можно использовать его в качестве радиометра — прибора для измерения интенсивности светового излучения. Объясните принцип действия этого прибора.



К задаче 5.4.6



К задаче 5.4.7



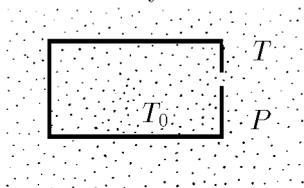
К задаче 5.4.10

**5.4.11\*.** Оцените подъемную силу пластины площадью  $1 \text{ м}^2$ , нижняя поверхность которой находится при температуре  $100^\circ\text{С}$ , а верхняя — при  $0^\circ\text{С}$ . Температура воздуха  $20^\circ\text{С}$ , давление  $0,1 \text{ Па}$ .

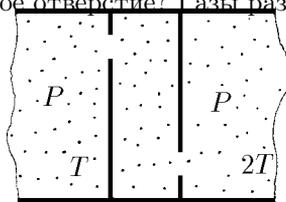
**5.4.12.** Оцените скорость, с которой будет двигаться в сильно разреженном воздухе плоский диск, одна из сторон которого нагрета до температуры  $310 \text{ К}$ , а другая — до  $300 \text{ К}$ . Температура воздуха  $300 \text{ К}$ .

**5.4.13\*.** Две одинаковые параллельные пластины площади  $S$  каждая расположены в сосуде близко друг к другу; их температура  $T_1$  и  $T_2$ , температура стенок сосуда  $T_1$ . Пластины отталкиваются друг от друга с силой  $F$ . Оцените давление разреженного газа в сосуде.

◇ **5.4.14\*.** В сосуде с газом поддерживается температура  $T_0$ . Вне его находится газ, давление которого  $P$ , а температура  $T$ . Чему равно давление газа внутри сосуда, если в стенке сосуда имеется небольшое отверстие? Газы разрежены.



К задаче 5.4.14



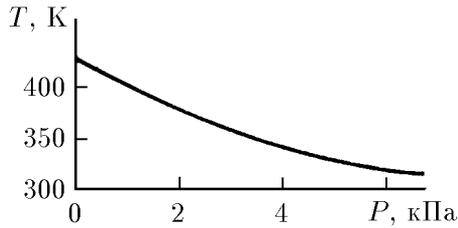
К задаче 5.4.15

◇ **5.4.15\*.** Теплоизолированная полость сообщается через небольшие одинаковые отверстия с двумя другими полостями, содержащими газообразный гелий,

давление которого поддерживается постоянным и равным  $P$ , а температура — равной  $T$  в одной полости и  $2T$  — в другой. Найдите давление и температуру, установившиеся внутри этой полости. Газы разрежены.

**5.4.16\***. Между двумя плоскими параллельными пластинами, расположенными на расстоянии  $\delta$  друг от друга, находится одноатомный газ (длина свободного пробега атомов много больше  $\delta$ ). Оцените плотность потока тепла, если температура пластин поддерживается равной  $T$  и  $T + \Delta T$  соответственно, а в единице объема газа содержится  $n$  атомов;  $\mu$  — масса атома.

◇ **5.4.17**. В тепловом манометре давление газа определяют по температуре теплового элемента, на котором в единицу времени выделяется всегда одно и то же количество теплоты. На рисунке приведен график зависимости температуры элемента от давления азота. Как, пользуясь этим графиком, получить аналогичную кривую для водорода?



К задаче 5.4.17

**5.4.18**. Оцените массу жидкого воздуха, испарившегося за час из плохо откачанного сосуда Дьюара, если давление воздуха (при температуре 293 К), оставшегося между стенками сосуда, равно 0,133 Па. Поверхность сосуда 600 см<sup>2</sup>, удельная теплота парообразования жидкого воздуха 0,2 МДж/кг, его температура 81 К. Зазор между стенками сосуда мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул.

**5.4.19\***. Из-за небольшой разницы температур двух параллельных пластин между ними в разреженном газе, в единице объема которого содержится  $n$  частиц, возник тепловой поток  $W_1$ . При увеличении давления газа тепловой поток сначала увеличивается, а затем, достигнув величины  $W_2$ , перестает зависеть от давления газа. Объясните этот эффект. Оцените радиус молекул газа. Расстояние между пластинами  $\delta$ .

**5.4.20**. Две параллельные пластины находятся на расстоянии  $\delta$  друг от друга, малом по сравнению с их размерами. Между пластинами на одинаковом расстоянии друг от друга помещают  $N$  тонких и хорошо проводящих тепло перегородок — экранов. Определите влияние экранов на теплопроводность между пластинами в двух случаях: а)  $\delta/N \gg \lambda$ ; б)  $\delta < \lambda$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега молекул газа, заполняющего пространство между пластинами.

## § 5.5. Уравнение состояния идеального газа

**5.5.1**. Объем газа уменьшили в два раза, а температуру увеличили в полтора раза. Во сколько раз увеличилось давление газа?

**5.5.2**. Для измерения собственного объема сыпучего материала его помещают в цилиндр, который герметически закрывают поршнем. Затем измеряют давление воздуха  $P_1$  и  $P_2$  при одной и той же температуре и двух положениях

поршня, когда суммарный объем воздуха и материала равен  $V_1$  и  $V_2$ . Каков объем материала по этим данным?

◇ **5.5.3.** Чтобы изотермически уменьшить объем газа в цилиндре с поршнем в  $n$  раз, на поршень поместили груз массы  $m$ . Какой массы груз следует добавить, чтобы объем газа изотермически уменьшился еще в  $k$  раз?

◇ **5.5.4\*.** На два длинных цилиндрических мешка радиуса  $r$  и длины  $L \gg r$ , сделанных из нерастяжимого материала и заполненных газом, положили плиту массы  $m$ , в результате чего они сплюснулись до толщины  $h \ll r$ . Внешнее давление  $P_0$ . Определите начальное давление в мешках, если температура газа в них не изменялась.

**5.5.5.** Баллон вместимости 50 л наполнили воздухом при  $27^\circ\text{C}$  до давления 10 МПа. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если вытеснение производится на глубине 40 м? Температура воздуха после расширения  $3^\circ\text{C}$ .

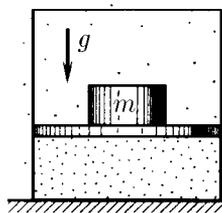
**5.5.6.** На какую глубину в жидкость плотности  $\rho$  надо погрузить открытую трубку длины  $L$ , чтобы, закрыв верхнее отверстие, вынуть столбик жидкости высоты  $L/2$ ? Атмосферное давление  $P$ .

**5.5.7.** Газ находится в сосуде при давлении 2 МПа и температуре  $27^\circ\text{C}$ . После нагревания на  $50^\circ\text{C}$  в сосуде осталась только половина газа (по массе). Определите установившееся давление.

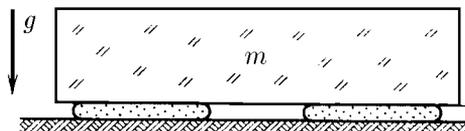
**5.5.8.** Давление воздуха внутри бутылки равно 0,1 МПа при температуре  $7^\circ\text{C}$ . На сколько нужно нагреть бутылку, чтобы пробка вылетела? Без нагревания пробку можно вынуть, прикладывая к ней силу 10 Н. Сечение пробки  $2\text{ см}^2$ .

**5.5.9.** Почему электрическая лампочка заполняется инертным газом при давлении, существенно меньшем атмосферного?

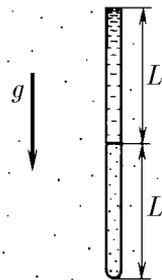
◇ **5.5.10\*.** Нижний конец вертикальной узкой трубки  $2L$  (в мм) запаян, а верхний открыт в атмосферу. В нижней половине трубки находится газ при температуре  $T_0$ , а верхняя ее половина заполнена ртутью. До какой минимальной температуры надо нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил всю ртуть? Внешнее давление в миллиметрах ртутного столба равно  $L$ .



К задаче 5.5.3



К задаче 5.5.4



К задаче 5.5.10

**5.5.11.** За сколько ходов поршневого насоса с рабочим объемом  $V$  можно повысить давление с атмосферного  $P_0$  до  $P$  в сосуде, вместимость которого  $V_0$ ? Нагревом газа пренебречь.

**5.5.12.** За сколько ходов поршневого насоса с рабочим объемом  $V$  можно понизить давление в сосуде вместимости  $V_0$  с атмосферного  $P_0$  до  $P$ ?

**5.5.13.** Зависит ли подъемная сила азростата от температуры окружающего воздуха?

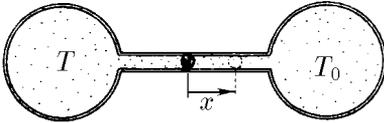
**5.5.14.** Пламя горелки коптит. Если поднести сверху вертикальную стеклянную трубку, копоть пропадает, однако появляется снова, если закрыть трубку сверху. Объясните это явление.

**5.5.15\***. Фабричная труба высоты 50 м выносит дым при температуре  $60^\circ\text{C}$ . Определите перепад давления в трубе, обеспечивающий тягу. Температура воздуха  $-10^\circ\text{C}$ , плотность воздуха  $1,29\text{ кг/м}^3$ .

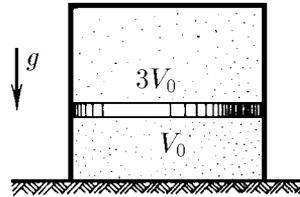
◇ **5.5.16**. Газовый термометр состоит из двух одинаковых сосудов вместимости  $V_0$  каждый, соединенных трубкой длины  $l$  и сечения  $S$ . Трубку перекрывает капля ртути. Сосуды наполнены газом. Если температура газа в обоих сосудах одинакова, ртуть находится посередине трубки. Один сосуд помещен в термостат с температурой  $T_0$ . Проградуируйте термометр, найдя зависимость температуры газа во втором сосуде от смещения ртути из положения равновесия.

**5.5.17**. Два сосуда вместимости 200 и  $100\text{ см}^3$  разделены подвижным поршнем, не проводящим тепло. Сначала температура газа в сосудах 300 К, а его давление 1013 гПа, затем меньший сосуд охладили льдом до 273 К, а больший нагрели паром до 373 К. Какое давление установится в сосудах?

◇ **5.5.18**. В цилиндрическом сосуде с газом находится в равновесии тяжелый поршень. Масса газа и его температура над поршнем и под ним одинакова. Отношение внутреннего объема верхней части сосуда к внутреннему объему нижней равно 3. Каким будет это соотношение, если температуру газа увеличить в два раза?



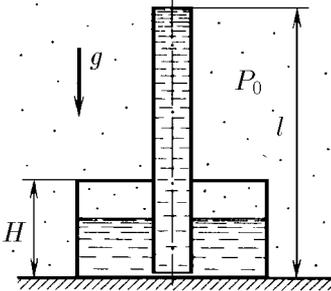
К задаче 5.5.16



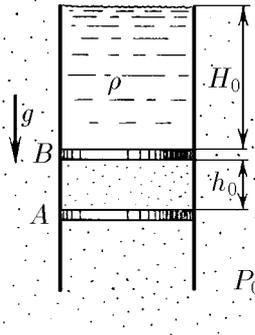
К задаче 5.5.18

◇ **5.5.19**. В цилиндрический сосуд высоты  $H$  через крышку вертикально вставлена немного не доходящая до дна сосуда тонкостенная трубка длины  $l$ . Соединение крышки с сосудом и трубкой герметично. В сосуд через трубку наливают жидкость. Найдите высоту уровня жидкости от дна сосуда, когда трубка заполняется жидкостью. Атмосферное давление  $P_0$ , плотность жидкости  $\rho$ .

◇ **5.5.20**. В вертикальном цилиндрическом сосуде над поршнем  $A$  находится газ, закрытый поршнем  $B$ , на который до верха цилиндра налита жидкость плоскости  $\rho$ . На какое расстояние  $x$  надо поднять поршень  $A$ , чтобы над поршнем  $B$  остался столб жидкости высоты  $H$ ? Массой поршня  $B$  и трением его о стенки пренебречь. Атмосферное давление  $P_0$ , начальная высота столба жидкости  $H_0$ , столба газа  $h_0$ . Температура газа при смещении поршня не меняется.



К задаче 5.5.19



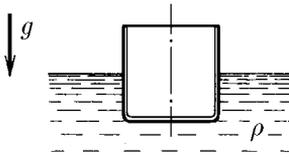
К задаче 5.5.20

◇ **5.5.21.** На поверхности жидкости плотности  $\rho$  плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость.

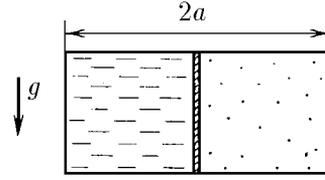
а. На сколько погрузится стакан в жидкость, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана  $h$ , давление воздуха  $P_0$ .

б. На какую глубину нужно погрузить перевернутый вверх дном стакан, чтобы он вместе с заключенным в нем воздухом пошел ко дну?

◇ **5.5.22.** В прямоугольном сосуде с непроницаемыми стенками находится слева тяжелая жидкость (например, ртуть), отделенная подвижным тонким поршнем от воздуха в правой части сосуда. В начальный момент поршень находится в равновесии и делит объем сосуда пополам. На сколько смещается поршень вправо, если температура системы уменьшается в три раза? Тепловым расширением ртути и стенок сосуда пренебречь. Трения нет. Длина сосуда  $2a$ .



К задаче 5.5.21



К задаче 5.5.22

**5.5.23\*.** Герметически закрытый бак заполнен жидкостью так, что на дне его имеется пузырек воздуха. Давление на дно бака  $P_0$ . Каким оно станет, если пузырек воздуха всплывет? Высота бака  $H$ , плотность жидкости  $\rho$ .

**5.5.24\*.** Герметически закрытый бак высоты 3 м заполнен водой так, что на дне его находятся два одинаковых пузырька воздуха. Давление на дно бака 0,15 МПа. Каким станет давление, если всплывет один пузырек? два пузырька?

**5.5.25.** Найдите формулу соединения азота с кислородом, если 1 г его в газообразном состоянии в объеме 1 л создает при температуре  $17^\circ\text{C}$  давление 0,314 атм.

**5.5.26\*.** Чтобы измерить массу воды в капельках тумана, пробу воздуха при давлении 100 кПа и температуре  $0^\circ\text{C}$  герметически закрывают в сосуде с прозрачными стенками, нагревают до температуры, при которой туман в пробе исчезает, и измеряют давление при этой температуре. Оцените массу тумана в  $1\text{ м}^3$  пробы, если температура исчезновения тумана  $82^\circ\text{C}$ , давление в сосуде при этой температуре 180 кПа.

**5.5.27.** Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если наполняющий его гелий заменить водородом? Весом оболочки шара пренебречь. Молярная масса воздуха 29 г/моль.

**5.5.28.** Водород заполняет только верхнюю часть оболочки стратостата. В нижней части находится воздух, свободно проникающий в оболочку через имеющееся снизу отверстие. При какой наибольшей массе стратостат станет подниматься, если масса водорода в оболочке равна  $m$ ?

**5.5.29.** При каком наименьшем радиусе станет подниматься воздушный шар, наполненный гелием, если поверхностная плотность материала оболочки  $50\text{ г/м}^2$ , давление воздуха  $10^5\text{ Па}$ , а температура  $27^\circ\text{C}$ ?

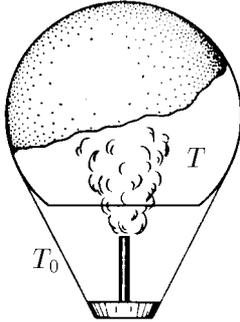
◇ **5.5.30.** Воздух внутри оболочки воздушного шара вместимости  $V$  нагревается газовой горелкой до температуры  $T$ , превышающей температуру  $T_0$  окружающего воздуха. Какова при атмосферном давлении  $P_0$  грузоподъемность этого воздушного шара? Молярная масса воздуха  $\mu$ .

**5.5.31.** Атмосфера Венеры почти полностью состоит из углекислого газа. Температура его у поверхности планеты около  $500^\circ\text{C}$ , а давление — примерно

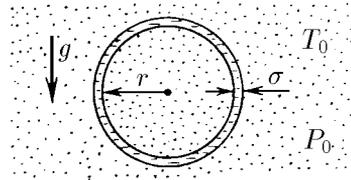
100 атм. Какой объем должен иметь исследовательский зонд массы 1 т, чтобы плавать в нижних слоях атмосферы Венеры?

**5.5.32.** При комнатной температуре четырехокись азота частично диссоциирует, превращаясь в двуокись азота:  $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$ . В откачанный сосуд вместимости  $250 \text{ см}^3$  вводится  $0,92 \text{ г}$  жидкости  $N_2O_4$  при  $0^\circ\text{C}$ . Когда температура в сосуде увеличивается до  $27^\circ\text{C}$ , жидкость целиком испаряется, а давление становится равным  $128 \text{ кПа}$ . Определите долю четырехоксида азота, которая диссоциировала.

◇ **5.5.33.** Мыльный пузырь, заполненный горячим воздухом, неподвижно висит в атмосфере. Атмосферное давление  $P_0$  и температура  $T_0$ . Плотность мыльной пленки  $\rho$ , ее толщина  $\delta$ , а радиус пузыря  $r$ . Найдите температуру воздуха внутри пузыря, если поверхностное натяжение мыльной воды равно  $\sigma$ . Молярная масса воздуха  $\mu$ .



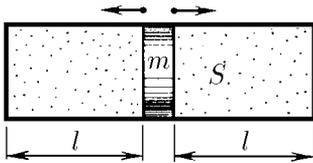
К задаче 5.5.30



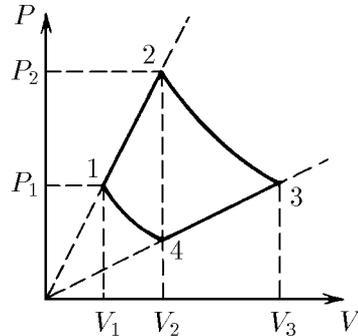
К задаче 5.5.33

**5.5.34.** Два мыльных пузыря радиуса  $r_1$  и  $r_2$  сливаются в один. Найдите поверхностное натяжение мыльной воды, если радиус образовавшегося пузыря равен  $r$ , а атмосферное давление равно  $P_0$ .

◇ **5.5.35.** Найдите период малых колебаний поршня массы  $m$ , разделяющего гладкий цилиндрический сосуд сечения  $S$  на две части длины  $l$  каждая. По обе стороны от поршня находится газ при давлении  $P_0$  и температуре  $T_0$ . При колебании поршня температура газа не меняется.



К задаче 5.5.35



К задаче 5.5.36

◇ **5.5.36.** Один моль газа участвует в процессе, график которого изображен на  $P, V$ -диаграмме. Участки 1-2 и 3-4 графика — отрезки прямых, продолжения которых проходят через начало координат, а кривые 1-4 и 2-3 — изотермы. Нарисуйте график этого процесса на  $T, V$ -диаграмме. Найдите объем  $V_3$ , если известны объемы  $V_1$  и  $V_2 = V_4$ .

## § 5.6. Первое начало термодинамики. Теплоемкость

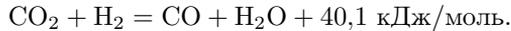
**5.6.1.** Средняя энергия одной молекулы газа в широком диапазоне температуры достаточно точно определяется формулой  $\bar{\varepsilon} = (i/2)kT$ , где  $i$  — число степеней свободы молекулы, равное числу координат, определяющих положение молекулы. Найдите, пользуясь этой формулой, среднюю энергию молекул  $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CH}_4$  при температуре  $T$ .

**5.6.2.** Чему равна внутренняя энергия (в джоулях) при нормальных условиях  $1 \text{ см}^3$  воздуха?  $1 \text{ кг}$  воздуха?

**5.6.3.** Воздух в комнате нагрели от температуры  $T_0$  до  $T$ . При этом давление не изменилось. Изменилась ли внутренняя энергия воздуха внутри комнаты?

**5.6.4.** В сосуде вместимости  $V_1$  находится одноатомный газ при давлении  $P_1$  и температуре  $T_1$ , а в сосуде вместимости  $V_2$  — одноатомный газ при давлении  $P_2$  и температуре  $T_2$ . Какое давление и какая температура окажутся в этих сосудах после их соединения? Сосуды теплоизолированы.

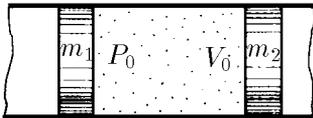
**5.6.5.** В теплоизолированном сосуде при температуре  $800 \text{ К}$  находится  $1 \text{ моль}$  углекислого газа ( $\text{CO}_2$ ) и  $1 \text{ моль}$  водорода ( $\text{H}_2$ ). Происходит химическая реакция



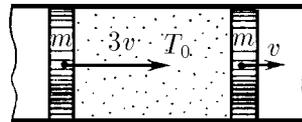
Во сколько раз возрастет давление в сосуде после окончания реакции?

◇ **5.6.6.** В длинной гладкой теплоизолированной трубе находятся теплоизолированные поршни массы  $m_1$  и  $m_2$ , между которыми в объеме  $V_0$  находится при давлении  $P_0$  одноатомный газ. Поршни отпускают. Определите их максимальные скорости, если масса газа много меньше массы каждого поршня.

◇ **5.6.7.** В длинной теплоизолированной трубе между двумя одинаковыми поршнями массы  $m$  каждый находится  $1 \text{ моль}$  одноатомного газа при температуре  $T_0$ . В начальный момент скорости поршней направлены в одну сторону и равны  $3v$  и  $v$ . До какой максимальной температуры нагреется газ? Поршни тепло не проводят. Массой газа по сравнению с массой поршней пренебречь.



К задаче 5.6.6



К задаче 5.6.7

**5.6.8.** Оцените скорость вылета пули из патрона, брошенного в костер.

**5.6.9.** Объясните, почему расширение газа при постоянной температуре (изотермическое расширение) возможно только при подведении к газу тепла.

**5.6.10.** Объем газа увеличился в два раза: один раз изотермически, другой раз изобарически. В каком из этих двух случаев газ совершит большую работу?

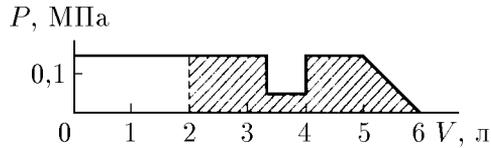
**5.6.11.** Почему нагревается насос при накачивании шины?

◇ **5.6.12.** В цилиндрическом сосуде подвижным поршнем перекрыт объем газа  $V$  при давлении  $P$ . По другую сторону поршня вакуум. Поршень отпускают. Какую работу совершит газ над поршнем, если объем газа при перемещении поршня увеличится в два раза, а его давление при этом будет: а) оставаться постоянным; б) возрастать с увеличением объема линейно до давления  $2P$ ?

◇ **5.6.13.** На рисунке дан график зависимости давления газа от объема. Найдите графически работу газа при расширении его от 2 до 6 л.

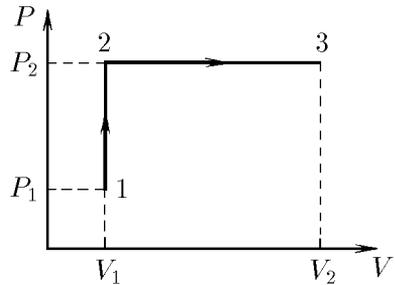


К задаче 5.6.12



К задаче 5.6.13

◇ **5.6.14.** Один моль газа, участвующий в процессе, график которого представлен на рисунке, проходит последовательно состояния 1, 2, 3. Внутренняя энергия газа пропорциональна температуре ( $U = cT$ ). Найдите количество теплоты, поглощенной газом в этом процессе.



К задаче 5.6.14

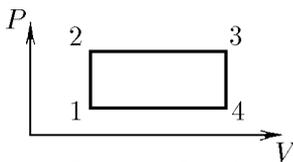
**5.6.15.** Воздух, занимавший объем 2 л при давлении 0,8 МПа, изотермически расширился до 10 л. Определите работу, совершенную воздухом.

**5.6.16.** Газ, занимавший объем 2 л при давлении 0,1 МПа, расширялся изотермически до 4 л. После этого, охлаждая газ изохорически (при постоянном объеме), уменьшили его давление в два раза. Далее газ изобарически расширился до 8 л. Найдите работу, совершенную газом. Начертите график зависимости давления от объема.

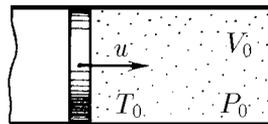
**5.6.17.** Один моль водорода, имевший температуру  $0^\circ\text{C}$ , нагревается при постоянном давлении. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его объем удвоился? Какая работа при этом будет совершена газом?

◇ **5.6.18.** Один моль газа участвует в циклическом процессе, график которого, состоящий из двух изохор и двух изобар, представлен на рисунке. Температура в точках 1 и 3 равна  $T_1$  и  $T_3$ . Определите работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

◇ **5.6.19.** Поршень массы  $M$ , закрывающий объем  $V_0$  одноатомного газа при давлении  $P_0$  и температуре  $T_0$ , движется со скоростью  $u$ . Определите температуру и объем газа при максимальном сжатии. Система теплоизолирована, теплоемкостями поршня и сосуда пренебречь.



К задаче 5.6.18



К задаче 5.6.19

**5.6.20.** Сжатый воздух поступает в цилиндр пневматического двигателя из магистрали постоянного давления при температуре  $T_1$ . Затем доступ в цилиндр воздуха из магистрали перекрывается. Оказавшийся в цилиндре воздух продолжает двигать поршень, расширяясь без теплообмена, пока давление не упадет до атмосферного, а температура — до  $T_2$ . Затем поршень движется назад и через открывшийся клапан вытесняет весь воздух из цилиндра. После этого весь цикл повторяется. Найдите работу двигателя при расходе им  $\nu$  моль сжатого воздуха.

**5.6.21.** Сухой воздух переносится слабым ветром через горный перевал высотой 1 км. Оцените, на сколько температура воздуха на перевале ниже, чем у подножья гор.

◇ **5.6.22\*.** В откачанном пространстве вертикально стоит цилиндрический сосуд, перекрытый сверху подвижным поршнем массы  $M$ . Под поршнем находится одноатомный газ при температуре  $T$  и давлении  $P$ . Внутреннее сечение цилиндра  $S$ , высота той части сосуда, внутри которой находится газ,  $H$ . Поршень отпустили. Он начал двигаться. Чему равна максимальная скорость, развиваемая поршнем, если газ сжимается изотермически? адиабатически?

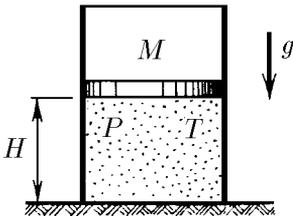
**5.6.23\*.** Два компрессора адиабатически сжимают двухатомный газ. Сначала работает один компрессор, сжимающий газ от объема  $V_0$  до промежуточного объема  $V_1$ . Затем сжатый газ охлаждается до начальной температуры, после чего в работу вступает второй компрессор, сжимающий газ до объема  $V_2$ . При каком объеме  $V_1$  полная работа обоих компрессоров минимальна и чему она равна? Объемы  $V_0$  и  $V_2$  считать заданными, начальное давление газа  $P_0$ . Работа какого компрессора при оптимальном значении  $V_1$  больше?

**5.6.24.** 1 м<sup>3</sup> водорода при 0 °С находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легко скользящим поршнем массы 1 т и сечения 0,5 м<sup>2</sup>. Атмосферное давление 973 гПа. Какое количество теплоты потребуется на нагревание водорода до 300 °С? Найдите изменение его внутренней энергии.

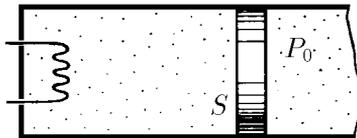
**5.6.25.** При нагревании 1 кг неизвестного газа на 1 К при постоянном давлении требуется 912 Дж, а при нагревании при постоянном объеме требуется 649 Дж. Что это за газ?

◇ **5.6.26\*.** Горизонтально расположенный цилиндр, содержащий 1 моль газа при начальной температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$ , закрыт поршнем сечения  $S$ . Справа от поршня постоянное атмосферное давление  $P_0$ . Газ нагревается спиралью. При движении поршня на него действует сила трения  $F$  со стороны стенок цилиндра. Половина тепла, выделяющегося при трении поршня о стенки цилиндра, идет в газ. Внутренняя энергия газа  $U = cT$ . Как зависит температура газа от количества теплоты, переданной газу спиралью? Постройте график этой зависимости.

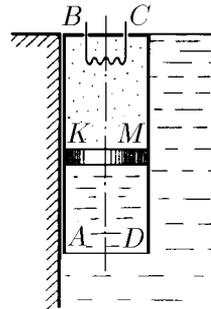
◇ **5.6.27.** Цилиндр  $ABCD$ , закрытый сверху и открытый снизу, прикреплен к стенке бассейна, заполненного водой. В верхней части цилиндра  $KBCM$  находится 1 моль гелия, отделенный от воды поршнем ( $BK = 2h$ ). Гелий нагревают, пропуская ток по спирали. Какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы поршень опустился на расстояние  $h$ ,  $AK > h$ ? Массой поршня, трением и теплопроводностью пренебречь. Бассейн широкий. Плотность воды  $\rho$ , сечение цилиндра  $S$ .



К задаче 5.6.22



К задаче 5.6.26

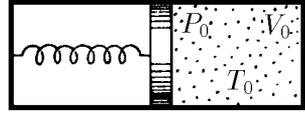


К задаче 5.6.27

**5.6.28\***. Найдите молярную теплоемкость одноатомного газа, расширяющегося по закону  $PV^n = \text{const}$ . При каких значениях  $n$  теплоемкость будет равна нулю? бесконечности?

**5.6.29**. Нагревается или охлаждается газ, расширяющийся по закону  $PV^2 = \text{const}$ ?

◇ **5.6.30\***. Найдите теплоемкость системы, состоящей из перекрытого поршнем сосуда с одноатомным газом (параметры газа  $P_0, V_0, T_0$ ). Поршень удерживается пружиной. Слева от поршня вакуум. Если газ откачать, поршень соприкоснется с правой стенкой сосуда, а пружина будет не деформирована. Теплоемкостями сосуда, поршня и пружины пренебречь.

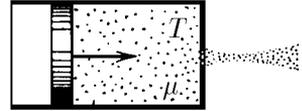


К задаче 5.6.30

**5.6.31\***. В вакуумном пространстве вертикально стоит цилиндрический сосуд, закрытый сверху подвижным поршнем массы  $M$ . Внутри сосуда находится одноатомный газ при давлении  $P$ . Внутреннее сечение цилиндра  $S$ , а поршень находится на высоте  $H$  над его дном. Поршень отпустили. После непродолжительных колебаний он останавливается. На каком расстоянии от начального положения остановится поршень, если теплоемкость газа при постоянном объеме много больше теплоемкости поршня и цилиндра? Вся система теплоизолирована.

### § 5.7. Истечение газа

◇ **5.7.1**. Газ вытекает адиабатически через малое отверстие из замкнутого сосуда в вакуумное пространство. Постоянное давление газа в сосуде поддерживается перемещением поршня. При этом температура газа в сосуде также не меняется, а его температура вне сосуда из-за адиабатического расширения снижается практически до 0 К. Оцените, пользуясь законом сохранения энергии, скорость газовой струи в вакууме. Температура газа в сосуде  $T$ , молярная масса газа  $\mu$ , молярная теплоемкость газа при постоянном давлении  $c_p$ .



К задаче 5.7.1

**5.7.2\***. Определите скорость адиабатического истечения смеси двухатомных газов с молярной массой  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Число молекул первого газа в  $k$  раз больше числа молекул второго газа. Температура смеси  $T$ .

**5.7.3\***. Экспериментатору нужен пучок атомов ксенона, скорость которых равна 1 км/с. Атомная масса ксенона 131.

а. При какой температуре газа, адиабатически истекающего в вакуум, можно получить такой пучок?

б. Какую скорость могут приобрести атомы ксенона, при истечении в вакуум смеси водорода и малого количества ксенона, находящихся при комнатной температуре?

**5.7.4**. Определите максимальную скорость истечения газа из сопла ракеты, если тяга ракеты создается в результате реакций:

- а)  $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O} + 483 \text{ кДж/моль}$ ;
- б)  $2\text{Al} + (3/2)\text{O}_2 = \text{Al}_2\text{O}_3 + 1,65 \text{ МДж/моль}$ ;
- в)  $\text{Be} + (1/2)\text{O}_2 = \text{BeO} + 610 \text{ кДж/моль}$ .

**5.7.5**. Температура горения химического топлива в ракетном двигателе  $T = 3000 \text{ К}$ , средняя молярная масса продуктов сгорания  $\mu = 30 \text{ г/моль}$ . Истечение продуктов сгорания происходит адиабатически. Молярная теплоемкость продуктов сгорания  $c_p = 33,4 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ . Давление газа на выходе из ракеты много меньше давления газа в ракете. Определите минимальный массовый расход топлива, обеспечивающий старт с Земли ракеты массы  $M = 1000 \text{ т}$ .

**5.7.6\***. Газ адиабатически вытекает из сосуда через трубку. Температура газа в сосуде  $T_1$ , давление  $P_1$ . На выходе из трубки давление газа  $P_2$ . Определите скорость газа на выходе из трубки. Молярная масса газа  $\mu$ , показатель адиабаты  $\gamma$ .

**5.7.7\***. Из баллона, содержащего гелий при давлении 1 МПа, вытекает струя, давление газа в которой 0,1 МПа. Температура газа в баллоне 300 К. Определите температуру и скорость гелия в струе.

**5.7.8\***. Воздух, сжатый в большом баллоне при температуре  $0^\circ\text{C}$ , вытекает при атмосферном давлении через трубку со скоростью 400 м/с. Найдите температуру воздуха в струе. Чему равно давление воздуха в баллоне?

**5.7.9\***. Газ при давлении  $P$  и температуре  $T$  протекает со скоростью  $v$  через гладкую трубку сечения  $S$ . Когда газ проходит сквозь проволочную сетку, перекрывающую трубку и оказывающую пренебрежимо малое сопротивление потоку, он нагревается. Приобретаемая газом мощность равна  $q$ . Определите скорость газа за проволочной сеткой. Чему равна сила давления газа на сетку? Молярная масса газа  $\mu$ , показатель адиабаты  $\gamma$ .

## § 5.8. Вероятность термодинамического состояния

**5.8.1. а.** Разделим сосуд вместимости  $V$  на две одинаковые части 1 и 2. Пусть в этом сосуде движется одна молекула. Будем наблюдать за ней в течение времени  $\tau$ . В среднем половину этого времени молекула будет находиться в части 1 сосуда, а половину — в части 2. В течение какого времени в части 1 вместе с первой будет находиться вторая молекула, если в сосуде движутся две молекулы?

б. В сосуде движутся три молекулы. В течение какого времени они будут находиться одновременно в части 1?

в. В сосуде движутся  $N$  молекул. В течение какого времени они будут находиться одновременно в части 1?

**5.8.2.** Долю времени, в течение которого частицы находятся в каком-либо состоянии, часто называют вероятностью этого состояния.

а. В сосуде находятся две молекулы. Чему равна вероятность того, что обе молекулы будут находиться в левой половине сосуда? в любой из половин?

б. Чему равна вероятность того, что молекулы будут находиться в разных половинах сосуда?

в. В сосуде находятся три молекулы. Чему равна вероятность того, что две молекулы будут находиться в левой половине сосуда и что в левой половине сосуда не будет ни одной молекулы?

**5.8.3.** В сосуде вместимостью  $V_0$  находятся  $N$  молекул.

а. Определите вероятность того, что в объеме  $V$ , который представляет собой часть объема  $V_0$ , не будет ни одной молекулы.

б. Чему должен быть равен этот объем, чтобы вероятность такого события была близка к  $10^{-2}$ ?

**5.8.4\***. Оцените вероятность того, что плотность воздуха в объеме  $0,1\text{ мм}^3$  какого-нибудь участка вашей комнаты будет в два раза больше, чем обычная плотность. Каким должен быть объем этого участка, чтобы эта вероятность была достаточно велика?

◇ **5.8.5.** Траектория атома, упруго отраженного от стенок куба, размеры которого  $a \times a \times a$ , — квадрат. Скорость атома  $v$ .

а. С какой средней скоростью станет перемещаться по каждой стенке место удара, если изменить угол падения в плоскости квадрата на  $\Delta \ll 1$ ? При каких значениях  $\Delta$  траектория атома окажется замкнутой? не замкнутой? Определите

расстояние между соседними параллельными участками траекторий в первом и во втором случаях.

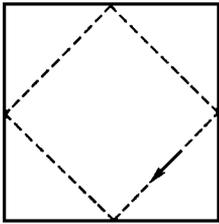
б. Почему можно считать, что траектория атома обычно не замкнута? Чему равна вероятность обнаружить атом в квадрате площади  $S$ , расположенном в плоскости, по которой движется атом в случае незамкнутой траектории?

в\*. Как будет двигаться атом, если изменить угол его падения перпендикулярно плоскости квадрата на  $\Delta \ll 1$ ? Чему будет равна вероятность обнаружить такой атом в области внутри куба, объем которой равен  $V$ ?

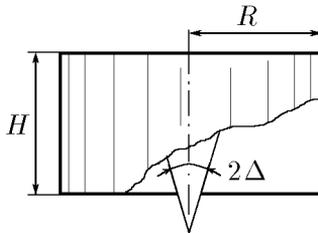
**5.8.6\***. Решите задачи 5.8.5 в случае, когда первоначально тангенс угла падения равен  $1/m$ , где  $m$  — целое число.

◇ **5.8.7.** Атомы, имеющие одинаковую по модулю скорость  $v$ , одновременно влетают в цилиндр через небольшое отверстие, расположенное в центре дна цилиндра. Направления скоростей атомов распределены равномерно внутри конуса с небольшим углом  $\Delta$  при вершине. Конус скоростей соосен с цилиндром. Радиус цилиндра  $R$ , его высота  $H$ . Оцените время равномерного заполнения атомами пространства внутри цилиндра в случае упругого отражения атомов от его стенки и в случае, когда через время  $\tau \gg R/v, H/v$  после попадания на стенку атом уходит внутрь цилиндра под любым углом к его стенке со скоростью  $v$ .

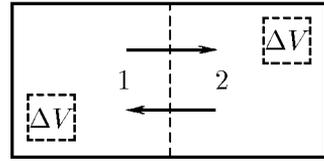
◇ **5.8.8\***. При переходе частиц из области 1 в область 2 на границе этих областей над частицами совершается работа  $A$ . Докажите, что вероятность обнаружить в объеме  $\Delta V$  частицу, имеющую скорость в интервале  $\Delta v$ , везде одинакова, если частицы в области 1 равномерно распределены по скоростям.



К задаче 5.8.5



К задаче 5.8.7



К задаче 5.8.8

◇ **5.8.9.** Знание вероятности состояния системы в молекулярной физике позволяет предсказать дальнейшее поведение этой системы.

Можно реализовать маловероятное событие. Например, в одной половине сосуда, разделенного на две одинаковые части перегородкой, находится газ. Перегородку очень быстро убирают. Осуществлено состояние газа, вероятность которого равна  $2^{-N}$ , где  $N$  — число частиц газа в сосуде. Этот результат можно получить, решив задачу 5.8.1в. В последующие моменты времени в сосуде будут осуществляться другие состояния. В начальное же состояние система не перейдет — слишком мала его вероятность! Следовательно, будет происходить необратимый переход в новые, более вероятные состояния, молекулы будут заполнять все пространство сосуда.

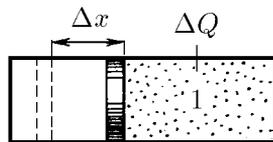
Этот пример показывает, что знание вероятности состояния новой системы является очень полезным.

А как вычислить вероятность состояния для других систем? Не слишком ли сложными будут вычисления? Оказывается — нет, не очень. Вычислять, во сколько раз вероятность одного состояния больше вероятности другого, нужно следующим образом. Если мы системе, находящейся в состоянии 1 при температуре  $T$ , сообщим количество теплоты  $Q$ , то она перейдет в другое состояние, вероятность которого в  $\exp(Q/kT)$  раз больше вероятности состояния 1 ( $k$  — постоянная Больцмана).

Приведем пример того, как проводятся такие вычисления. Найдем, во сколько раз вероятность состояния, в котором все  $N$  молекул газа находятся в одной половине сосуда (состояние 1), меньше вероятности состояния, в котором молекулы заполняют равномерно все пространство сосуда (состояние 2). Перегородим сосуд, в котором находятся молекулы, подвижным поршнем. При перемещении поршня влево на  $\Delta x$  газ совершает работу  $\Delta A$  и охлаждается. Для того чтобы сохранить температуру газа постоянной, мы должны сообщить молекулам газа количество теплоты  $\Delta Q = \Delta A$  (для восполнения энергетических потерь в газе). Следовательно, при перемещении поршня влево мы передадим газу при температуре  $T$  количество теплоты  $Q = A$ . При изотермическом расширении  $A = \nu RT \ln(V_k/V_n)$ , где  $\nu$  — количество газа (в молях),  $R = kN_A$  — газовая постоянная,  $N_A$  — постоянная Авогадро,  $V_n$  — начальный объем,  $V_k$  — конечный объем газа.

В нашем случае  $N = \nu N_A$ ,  $V_k/V_n = 2$ . Поэтому формулу для работы можно переписать в виде  $A = NkT \ln 2$ . Следовательно, вероятность состояния 2 в  $\exp(A/kT) = \exp(N \ln 2) = 2^N$  раз больше вероятности состояния 1. Мы получили решение задачи 5.8.1в, рассматривая термодинамический процесс.

Таким же способом определите вероятность того, что в области, имеющей объем  $V$  и являющейся частью пространства, объем которого  $V_0$ , соберутся все молекулы, движущиеся в этом пространстве. Используя термодинамический процесс, решите задачу 5.8.3. Можно ли таким способом решить задачу 5.8.1?



К задаче 5.8.9

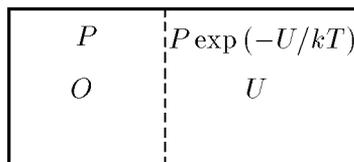
**5.8.10.** Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы при комнатной температуре увеличить концентрацию золота в 1 кг породы от  $10^{-6}$  до  $10^{-2}$ ?

**5.8.11\*.** Докажите, что на полупроницаемую перегородку, находящуюся в разбавленном растворе, действует при температуре  $T$  давление  $P = nkT$ , где  $n$  — число молекул растворенного вещества в единице объема раствора. Почему эта формула верна только для разбавленного раствора?

**5.8.12\*.** В пространстве объема  $2V_0$  движется  $2N$  молекул. Во сколько раз вероятность обнаружить  $N$  в области объема  $V_0 - V$  меньше вероятности обнаружить  $N$  молекул во всем пространстве  $V_0$ ?

**5.8.13\*.** В сосуд с водой при температуре  $20^\circ\text{C}$  поместили 1 г льда, находящегося при температуре  $0^\circ\text{C}$  в герметичной коробке. Определите, во сколько раз вероятность процесса превращения льда в воду больше вероятности обратного процесса — растаявшая вода в коробке вдруг начнет отдавать тепло окружающей воде и превратится в лед. Температура воды в сосуде при таянии льда практически не меняется.

◇ **5.8.14.** С помощью термодинамического процесса покажите, что при температуре  $T$ : а) давление идеального газа в ограниченной области в  $\exp(U/kT)$  раз меньше, чем в остальном пространстве, если эта область отделена от остального пространства энергетическим потенциальным барьером, равным для каждой частицы газа  $U$ ; б) концентрация молекул растворенного вещества в ограниченной области в  $\exp(U/kT)$  раз меньше, чем в остальном пространстве, занятом растворителем, если эта область отделена от остальной части растворителя энергетическим потенциальным барьером, равным для каждой молекулы растворенного вещества  $U$ , а взаимодействием этих молекул друг с другом можно пренебречь.



К задаче 5.8.14

**5.8.15.** Поршень первоначально делит цилиндрический сосуд на две равные части, в которых находится идеальный газ одинаковой массы с одной и той же температурой. Реален ли процесс, в котором при движении поршня температура одной части увеличивается в два раза, а другой — уменьшается в два раза? Теплоемкостью поршня и цилиндра можно пренебречь, система изолирована.

**5.8.16.** Газодинамическое ружье представляет собой цилиндр, наполненный одноатомным газом и закрытый подвижным поршнем. Газ, расширяясь, разгоняет поршень. Реален ли процесс, когда при увеличении объема газа в  $n$  раз его температура уменьшается в  $n$  раз? в  $\sqrt{n}$  раз? Система изолирована.

### § 5.9. Второе начало термодинамики

**5.9.1.** Два одинаковых тела, нагретых до разных температур, приводятся в тепловой контакт друг с другом. Температуры тел уравниваются. Покажите, что при этом процессе энтропия системы увеличивается.

**5.9.2.** Найдите приращение энтропии 1 кг льда при его плавлении.

**5.9.3.** На сколько возрастет энтропия 1 кг воды, находящейся при температуре 293 К, при превращении ее в пар?

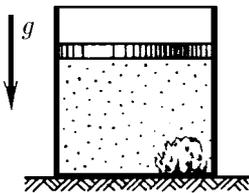
**5.9.4.** Найдите приращение энтропии водорода при расширении его от объема  $V$  до  $2V$ : а) в вакууме; б) при изотермическом процессе. Масса газа  $m$ .

**5.9.5.** Вычислите приращение энтропии водорода массы  $m$  при переходе его от объема  $V_1$  и температуры  $T_1$  к объему  $V_2$  и температуре  $T_2$ , если газ: а) нагревается при постоянном объеме  $V_1$ , а затем изотермически расширяется; б) расширяется при постоянной температуре  $T_1$  до объема  $V_2$ , затем нагревается при постоянном объеме; в) адиабатически расширяется до объема  $V_2$ , а затем нагревается при постоянном объеме.

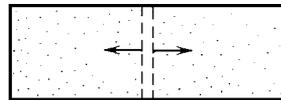
**5.9.6\*.** Кусок льда массы 0,1 кг при температуре  $0^\circ\text{C}$  бросают в теплоизолированный сосуд, содержащий 2 кг бензола при  $50^\circ\text{C}$ . Найдите приращение энтропии системы после установления равновесия. Удельная теплоемкость бензола  $1,75 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

◇ **5.9.7\*.** В теплоизолированном сосуде находится 0,5 кмоль гелия и 1 кг льда. В начальный момент температура льда  $273 \text{ К}$ , гелия  $303 \text{ К}$ . Сосуд закрыт подвижным поршнем. Найдите приращение энтропии системы при переходе к равновесию.

◇ **5.9.8.** Сосуд объема  $V$  разделен на две одинаковые части, в которых находятся разные газы, двумя перегородками. Перегородки проницаемы только для «своего» газа из той части сосуда, которую каждая из них изначально отделяет. Под действием газов перегородки движутся до стенок сосуда. Найдите приращение энтропии при этом движении, если первоначальное давление газов  $P$ , а температура  $T$ . Почему такой процесс невозможен, если газы с обеих сторон одинаковы или невозможно экспериментальным путем отличить один газ от другого (например, в прошлом веке невозможно было различить изотопы)?

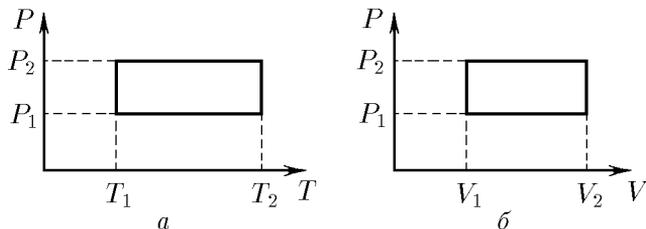


К задаче 5.9.7



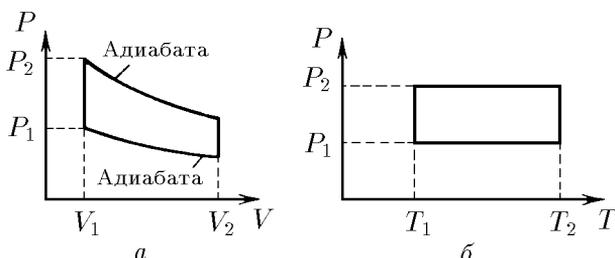
К задаче 5.9.8

◇ **5.9.9\***. Тепловая машина, рабочее тело которой 1 моль идеального одноатомного газа, работает по замкнутым циклам, изображенным на рисунке. Найдите приращение энтропии в машине за один цикл.



К задаче 5.9.9

◇ **5.9.10\***. Найдите КПД циклов, изображенных на рисунке, если рабочим телом тепловой машины является одноатомный идеальный газ.



К задаче 5.9.10

**5.9.11.** Существует ли циклический процесс, при котором все переданное телу от нагревателя тепло превращается в работу?

**5.9.12.** Можно ли практически всю внутреннюю энергию газа превратить в механическую работу?

**5.9.13.** Паровая машина мощности 14,7 кВт потребляет за 1 ч работы 8,1 кг угля с удельной теплотой сгорания  $3,3 \cdot 10^7$  Дж/кг. Температура котла  $200^\circ\text{C}$ , холодильника  $58^\circ\text{C}$ . Найдите КПД этой машины и сравните его с КПД идеальной тепловой машины.

**5.9.14.** Покажите, что КПД тепловой машины в циклическом процессе максимален, когда энтропия системы не меняется.

**5.9.15.** Почему КПД двигателя внутреннего сгорания резко падает при детонации (взрывном сгорании горючей смеси)?

**5.9.16.** В океане находится лодка с куском льда массы 1 кг при  $0^\circ\text{C}$  на борту. Определите максимальную работу, которую можно получить, используя процесс таяния льда. Температура воды  $27^\circ\text{C}$ .

**5.9.17.** Какую работу можно совершить, имея айсберг объема  $1 \text{ км}^3$  в качестве холодильника и океан в качестве нагревателя? Какое время понадобится Красноярской ГЭС, чтобы выработать такое же количество энергии? Мощность Красноярской ГЭС 6 ГВт.

**5.9.18\***. Нагретое тело с начальной температурой  $T$  используется в качестве нагревателя в тепловой машине. Теплоемкость тела не зависит от температуры и равна  $C$ . Холодильником служит неограниченная среда, температура которой постоянна и равна  $T_0$ . Найдите максимальную работу, которую можно получить за счет охлаждения тела.

**5.9.19\***. Имеются два тела с начальной температурой  $T_1$  и  $T_2$ . Теплоемкость этих тел равна  $C_1$  и  $C_2$  и не зависит от температуры. Одно тело используется как нагреватель, другое — как холодильник в тепловой машине. Найдите максимальную работу, которую можно получить таким образом. Провести расчет, когда первое тело — 1 кг кипящей воды, второе — 1 кг воды при температуре  $0^\circ\text{C}$ .

**5.9.20**. Как изменится температура в комнате, если дверцу работающего холодильника оставить открытой?

**5.9.21**. Идеальная тепловая машина с КПД  $\eta$  работает по обратному циклу. Какое максимальное количество теплоты можно забрать из холодильника, совершив механическую работу  $A$ ?

**5.9.22**. Абсолютная теплоизоляция невозможна. На первый взгляд, тепловая мощность 0,1 Вт, поступающая в холодильную камеру из-за несовершенства теплоизоляции, кажется незначительной. Рассчитайте минимальную мощность, которую в этом случае нужно затратить, чтобы поддерживать в камере температуру  $10^{-4}$  К при температуре окружающей среды  $20^\circ\text{C}$ . Проведите аналогичный расчет для бытового холодильника, в камере которого нужно поддерживать температуру  $-13^\circ\text{C}$ . (В установках для получения рекордно низких температур мощность такого «паразитного» притока тепла удается снизить до 0,01 Вт и ниже.)

**5.9.23**. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу, передает тепло от холодильника с водой при температуре  $0^\circ\text{C}$  кипятивнику с водой при температуре  $100^\circ\text{C}$ . Сколько воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар 1 кг воды в кипятивнике?

**5.9.24\***. С помощью электрической плитки мощностью 1 кВт в комнате поддерживается температура  $17^\circ\text{C}$  при температуре наружного воздуха  $-23^\circ\text{C}$ . Какая мощность потребовалась бы для поддержания в комнате той же температуры с помощью идеальной тепловой машины?

**5.9.25\***. Какую минимальную работу нужно затратить для того, чтобы заморозить 1 кг воды, находящейся при температуре окружающей среды 300 К?

**5.9.26**. Известно, что при растворении в воде некоторых веществ (например, гипосульфита) температура раствора понижается. Используя этот раствор в качестве холодильника, а окружающую среду в качестве нагревателя, мы можем получить некоторую работу. Затем, дождавшись высыхания раствора, повторяем цикл. Получим ли мы таким образом вечный двигатель второго рода?

## § 5.10. Фазовые переходы

**5.10.1**. В кастрюлю налили холодной воды (температура  $10^\circ\text{C}$ ) и поставили на плиту. Через 10 мин вода закипела. Через какое время она полностью испарится?

**5.10.2**. Смогли бы солнечные лучи на экваторе растопить за один солнечный день снежный покров толщиной 1 м? Максимальная плотность потока солнечной энергии близка к  $1 \text{ кВт}/\text{м}^2$ , а коэффициент отражения — к 0,9.

**5.10.3**. Почему вода в сосуде, закрытом крышкой, закипает быстрее, чем в открытом?

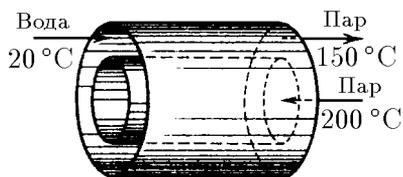
**5.10.4**. В цилиндрическом стакане при подводе к нему тепловой мощности 1 кВт тает лед. Диаметр стакана 10 см. Определите, как изменится давление смеси воды и льда на дно стакана из-за таяния льда.

**5.10.5**. В колбе находилась вода при  $0^\circ\text{C}$ . Откачиванием пара всю воду в колбе заморозили. Какая часть воды испарилась?

**5.10.6**. В 100 г воды при температуре  $10^\circ\text{C}$  опущено 40 г льда, имеющего температуру  $-10^\circ\text{C}$ . При каком соотношении воды и льда возникнет состояние

теплового равновесия в этой системе, если она теплоизолирована? Удельная теплоемкость льда  $2,5 \text{ кДж/кг}$ .

◇ **5.10.7.** Теплообменник состоит из двух длинных коаксиальных труб. По внутренней трубе медленно пропускается водяной пар, имеющий начальную температуру  $200^\circ\text{C}$ . Во внешнюю трубу противотоком поступает в единицу времени  $0,1 \text{ кг}$  воды при температуре  $20^\circ\text{C}$ . Вода выходит с противоположной стороны в виде пара с температурой  $150^\circ\text{C}$ . Какая масса пара поступает во внутреннюю трубу теплообменника в единицу времени? Давление пара в трубах атмосферное.



К задаче 5.10.7

**5.10.8\*.** Оцените толщину льда, образующегося за сутки на поверхности озера при температуре воздуха  $-10^\circ\text{C}$ . Теплопроводность льда  $2,2 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}$ , его плотность  $0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

**5.10.9.** а. Почему кастрюля прогорает лишь после того, как вода выкипит?  
б. Можно ли вскипятить воду в бумажном стаканчике?

**5.10.10.** «Твердая углекислота, несмотря на свою очень низкую температуру, может быть безопасно положена на кожу ... но если кусок снегообразной кислоты сжать между пальцами, то происходит сильное обмороживание» (Менделеев Д. И. Основы химии. Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 1). Объясните это явление.

**5.10.11.** Капли воды на раскаленной плите часто «живут» дольше, чем на просто горячей. Почему?

**5.10.12.** Почему сохраняется очень низкой температура жидкого воздуха ( $81 \text{ K}$ ) в сосуде Дьюара и низкая температура твердой углекислоты в ящике продавщицы мороженого в жаркий летний день? Почему твердая углекислота не тает, как растаял бы лед?

**5.10.13.** Иней на деревьях иногда исчезает без ветра и оттепели. Объясните, как это происходит.

**5.10.14.** На электрической плитке мощности  $1 \text{ кВт}$  кипит вода в чайнике. Найдите скорость истечения пара из носика чайника, если пар считать идеальным газом. Давление пара на конце носика  $1 \text{ атм}$ , сечение носика  $1 \text{ см}^2$ . Считать, что вся энергия плитки передается воде.

**5.10.15\*.** В стакан налиты две несмешивающиеся жидкости: четыреххлористый углерод ( $\text{CCl}_4$ ) и вода. При нормальном атмосферном давлении  $\text{CCl}_4$  кипит при  $76,7^\circ\text{C}$ , вода — при  $100^\circ\text{C}$ . При равномерном нагревании стакана со смесью в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре  $65,5^\circ\text{C}$ . Определите, какая из жидкостей быстрее (по массе) выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз. Давление насыщенного пара воды при  $65,5^\circ\text{C}$  составляет  $25,6 \text{ кПа}$ .

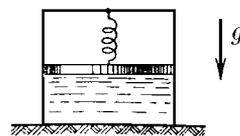
**5.10.16.** Почему в паровых котлах перегревают пар?

**5.10.17.** Можно ли всасывающим водяным насосом поднять кипящую воду?

**5.10.18.** При критической температуре теплота парообразования любой жидкости равна нулю. Почему?

**5.10.19.** На улице моросит холодный осенний дождь. В кухне развесили много выстиранного белья. Быстрее ли высохнет белье, если открыть форточку?

◇ **5.10.20.** Цилиндр сечения  $20 \text{ см}^2$  разделен поршнем массы  $5 \text{ кг}$  на две части. В нижней его части вначале находится вода, а верхняя часть откачана. Поршень соединен с цилиндром пружиной жесткости  $15 \text{ Н/м}$ . Вна-



К задаче 5.10.20

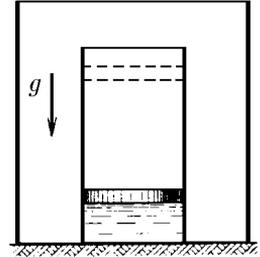
чале пружина не деформирована. Определите массу образовавшегося пара при нагревании воды от 0 до 100 °С. Трением можно пренебречь.

**5.10.21.** В цилиндре, закрытом поршнем, при температуре 20 °С находится воздух, на дне цилиндра — капелька воды. Чему будет равно давление в цилиндре после изотермического уменьшения объема под поршнем в два раза? Какую для этого нужно совершить работу? Первоначальный объем 0,5 м<sup>3</sup>, давление насыщенного пара при температуре 20 °С равно 1,73 кПа. Начальное давление 101,3 кПа.

**5.10.22.** В прочном закрытом сосуде находится азот при температуре 300 К и давлении  $P_0$ . В сосуд впрыскивается некоторое количество распыленного жидкого азота при температуре кипения 77,3 К, который быстро испаряется. Спустя продолжительное время, когда температура станет равна начальной, в сосуде устанавливается давление  $2P_0$ . Определите, каким было минимальное давление азота в сосуде после впрыскивания. Молярная теплоемкость азота  $c = (5/2)R$ , его молярная теплота парообразования 5,53 кДж/моль.

**5.10.23.** В достаточно большой откачанный цилиндр, закрытый поршнем, помещено немного воды со льдом. Масса льда  $m$ , температура 0 °С, давление насыщенного пара воды при 0 °С равно  $P_0$ . На сколько нужно изменить с помощью поршня перекрытый объем, чтобы весь лед растаял? Какую при этом нужно совершить работу? Удельная теплота парообразования  $q$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda$ , молекулярная масса воды  $\mu$ .

◇ **5.10.24\*** Цилиндр сечения 100 см<sup>2</sup> поставлен вертикально в сосуд, из которого откачан воздух. Цилиндр перекрывает подвижный поршень, под которым находится 100 см<sup>3</sup> воды. Цилиндр с поршнем и вода имеют температуру 100 °С. Поршень отпускают. Когда он остановился, оказалось, что под ним находятся лед при 0 °С и водяной пар. Давление насыщенного пара надо льдом при 0 °С равно 610 Па. Вся система теплоизолирована от окружающего пространства. Теплоемкость цилиндра с поршнем 42 Дж/К. На какую высоту поднялся поршень?



К задаче 5.10.24

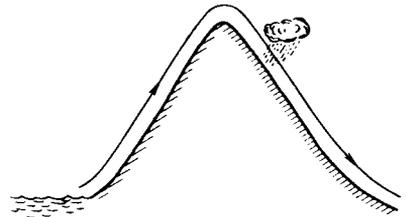
**5.10.25.** Какая часть переохлажденной до температуры -4 °С воды замерзнет, если бросить в нее кусочек льда и вызвать тем самым кристаллизацию?

**5.10.26.** Лед при температуре 0 °С заключен в теплонепроницаемую оболочку и подвергнут давлению 100 МПа. Какая часть льда расплавилась, если при повышении давления на 13,8 МПа температура плавления льда понижается на 1 °С? Удельная теплоемкость льда 2,5 кДж/(кг · К).

**5.10.27.** а. Во сколько раз давление насыщенного пара над поверхностью жидкости, поднявшейся по капилляру на высоту  $h$ , меньше давления насыщенного пара над плоской поверхностью? Молекулярная масса жидкости  $m$ , температура  $T$ . Определите это же отношение давлений через радиус кривизны жидкости  $r$ , поверхностное натяжение  $\sigma$  и плотность жидкости  $\rho$ .

б. В замкнутом сосуде в равновесии находятся при комнатной температуре две капли воды радиуса соответственно  $r_1 = 1$  мм и  $r_2 = 1,1$  мм. Как отличаются высоты, на которых они находятся?

◇ **5.10.28.** Влажный воздух, который переносится ветром с тихоокеанского побережья, поднимаясь по склонам Кордильер, расширяется и охлаждается. При этом содержащийся в воздухе водяной пар выпадает в виде осадков. Оце-



К задаче 5.10.28

ните, на сколько различаются значения температуры воздуха у подножья по обе стороны Кордильер, если его влажность у побережья  $\varphi = 60\%$ , а температура  $t_1 = 25^\circ\text{C}$ . При такой температуре давление насыщенного водяного пара  $P_n = 34$  кПа. Удельная теплота парообразования воды  $\lambda = 2,5 \cdot 10^6$  Дж/кг. Атмосферное давление у подножья гор  $P = 10^5$  Па.

**5.10.29.** Давление насыщенного пара над твердым телом равно  $P$ . Как изменится давление на поверхность этого тела, если пар полностью откачать, а температуру тела сохранить прежней?

**5.10.30.** В центре откачанного сосуда радиуса  $R$  находится жидкая капля радиуса  $r$ . Стенки сосуда полностью поглощают испаряющуюся с капли жидкость. Давление на стенку сосуда  $P_0$ . Определите давление на поверхность капли.

**5.10.31\*** Внутри откачанного сосуда (см. задачу 5.10.30) на расстоянии  $L$  от капли поставили другой сосуд с небольшим отверстием, обращенным в сторону этой капли. Какое давление пара жидкости установится в сосуде с отверстием?

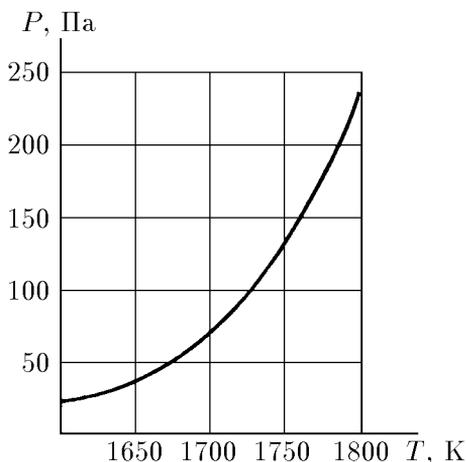
**5.10.32.** а. Во сколько раз увеличивается скорость испарения твердого вещества в вакууме при увеличении его температуры в  $n$  раз, если давление насыщенных паров при этом увеличивается в  $m$  раз?

б. При увеличении температуры твердого вещества с 300 до 600 К скорость его испарения увеличилась в 141 раз. Давление насыщенного пара при температуре 300 К равно  $P_0$ . Определите давление насыщенного пара при 600 К.

**5.10.33.** Определите максимальное ускорение водяной ракеты, тяга которой создается испарением воды при температуре  $100^\circ\text{C}$ . Масса ракеты 50 т, площадь испарения  $1 \text{ м}^2$ .

**5.10.34.** Оцените максимальную скорость испарения с поверхности  $1 \text{ м}^2$  льда при  $0^\circ\text{C}$  и с поверхности воды при  $100^\circ\text{C}$ .

◇ **5.10.35\*** Испаряющийся алюминиевый шарик диаметра 2 мм напыляет в течение 1 мин на холодную плоскую поверхность, обращенную в сторону шарика, алюминиевую пленку толщины 1 мкм. Плотность алюминия  $2,6 \text{ г/см}^3$ , напыляемая поверхность находится на расстоянии 1 см от шарика. Оцените, пользуясь рисунком, на котором изображена температурная зависимость давления насыщенного пара алюминия, температуру алюминиевого шарика.



К задаче 5.10.35

## § 5.11. Тепловое излучение

**5.11.1.** Тело, нагретое до температуры  $T$ , излучает с единицы площади своей поверхности в единицу времени энергию (плотность потока энергии), пропорциональную четвертой степени температуры:  $\varphi = \varepsilon\sigma T^4$ , где  $\varepsilon < 1$  — степень черноты тела,  $\sigma = 5,672 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$  — постоянная Стефана — Больцмана,  $T$  — температура.

а. Оцените, сколько тепловой энергии излучает в единицу времени ваше тело (поток энергии с поверхности плоскости вашего тела). Степень черноты тела принять равным 0,3.

б. Солнце излучает как абсолютно черное тело при температуре 6300 К. Определите, какова плотность потока энергии с поверхности Солнца.

**5.11.2.** Оцените температуру спирали электроплитки мощности 0,5 кВт и нити накала электролампы мощности 150 Вт. Принять, что теплопередача осуществляется только излучением.

**5.11.3\*.** Определите плотность энергии теплового излучения в полости тела с температурой  $T$ . Скорость света  $3 \cdot 10^8$  м/с.

**5.11.4.** Используя условие теплового равновесия двух тел, которые обмениваются энергией через тепловое излучение, докажите, что степень черноты тела равна коэффициенту поглощения излучения этим телом.

**5.11.5.** а. «Нагревая кусок стали, мы при температуре 800 °С будем наблюдать яркое вишнево-красное свечение, но прозрачный стерженек плавленного кварца при той же температуре совсем не светится» (*Ландсберг Г. С.* Оптика. М.: Наука, 1976). Объясните этот эффект.

б. Почему мел выглядит среди раскаленных углей темным?

**5.11.6\*.** а. Определите температуру металлического шара вблизи плоской черной поверхности, нагретой до температуры  $T_0$ .

б. Определите температуру шара, который находится между двумя параллельными черными плоскостями, нагретыми до температуры  $T_1$  и  $T_2$ .

**5.11.7.** а. Шар радиуса  $R$  нагрет до температуры  $T_0$ . Степень черноты поверхности шара  $\varepsilon$ . Определите температуру сферической пылинки, находящейся на расстоянии  $L$  от центра шара.

б. Оцените плотность энергии, приходящей с Солнца на Землю, если средняя температура поверхности Земли 20 °С.

**5.11.8.** Расстояния между Солнцем и планетами Земля, Меркурий, Венера и Марс равны  $1,5 \cdot 10^8$ ;  $5,8 \cdot 10^7$ ;  $1,1 \cdot 10^8$  и  $2,3 \cdot 10^8$  км. Средняя температура поверхности Земли 20 °С.

а. Оцените среднюю температуру поверхности Меркурия, Венеры и Марса.

б. Оцените поток энергии с поверхности Солнца.

в. Оцените температуру поверхности Луны в момент, когда солнечные лучи перпендикулярны ее поверхности. Почему при этом же условии такая температура не наблюдается на поверхности Земли?

**5.11.9.** Плотность потока излучения звездного неба около  $2 \cdot 10^{-6}$  Вт/м<sup>2</sup>. Оцените, пользуясь этой величиной, температуру внутригалактической пыли.

**5.11.10.** Какая температура установится внутри сферического спутника, который движется вокруг Земли, все время оставаясь освещенным Солнцем? Спутник не имеет внутренних источников энергии.

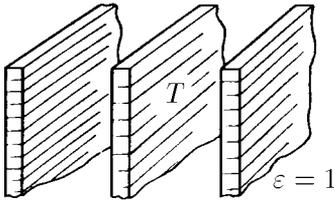
**5.11.11\*.** Определите тепловой поток (тепловую мощность), передаваемый от одной параллельной пластины к другой, если температура пластин  $T_1$  и  $T_2$ , а степень черноты соответственно  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Площадь каждой пластины  $S$ , зазор между пластинами много меньше их размеров.

◇ **5.11.12.** Температура  $T$  средней нагретой пластины поддерживается постоянной.

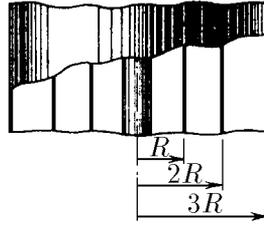
а. Чему равна температура внешних экранирующих пластин?

б. Сколько экранирующих пластин нужно поставить с обеих сторон средней пластины, чтобы уменьшить температуру внешней экранирующей пластины до  $T/2$ ?

◇ **5.11.13\*.** Накальная нить радиуса  $r$  экранируется тремя цилиндрами радиуса  $R$ ,  $2R$  и  $3R$ . Температура нити  $T_0$ . Определите температуру внешнего экрана. Материал нити и экрана одинаков, степень черноты  $\varepsilon = 1$ .



К задаче 5.11.12



К задаче 5.11.13

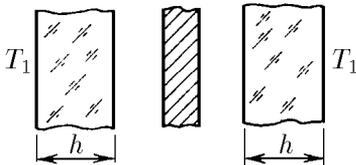
◇ 5.11.14\*. В вакуумной камере находится нагреваемая металлическая плоскость, которую с двух сторон экранируют металлические пластины толщиной  $h$ . Степень черноты плоскости и пластин  $\varepsilon$ , теплопроводность пластин  $\kappa$ . Температура пластин с внешних сторон  $T_1$ , температура вакуумной камеры  $T_2$ . Определите температуру металлической плоскости.

5.11.15. Энергия фотона  $E$  связана с его импульсом  $p$  соотношением  $p = E/c$ , где  $c$  — скорость фотона, равная скорости света. Докажите, что давление фотонного газа  $P$  связано с плотностью энергии  $w$  соотношением  $P = w/3$ .

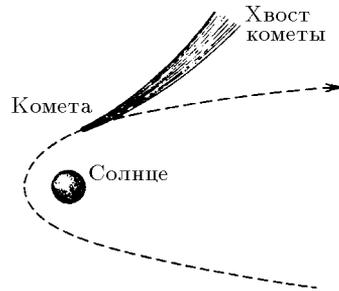
5.11.16. «... Космическая яхта представляет собой нечто вроде сферы, внешняя оболочка которой — необычайно тонкий и легкий парус — вздувалась и перемещалась в пространстве, улавливая давление световых лучей... Если бы этот кораблик остался без управления поблизости от какой-либо звезды... и сила притяжения была невелика, он устремился бы прочь от звезды по прямой линии» (Булль П. Планета обезьян // Библиотека современной фантастики. 1967. Т. 13. С. 27).

а. Какое максимальное ускорение может развить эта космическая яхта на расстоянии  $R$  от звезды, если поток излучения звезды  $\Phi$ , площадь паруса  $S$ , масса яхты  $m$ ?

б\*. Какую скорость приобрела бы яхта, пройдя под действием излучения расстояние по радиусу от  $R_1$  до  $R_2$ ? Парус полностью отражает излучение.



К задаче 5.11.14



К задаче 5.11.17

◇ 5.11.17. а. Объясните форму хвоста кометы, изображенного на рисунке. Штриховая линия, огибающая Солнце, — траектория кометы.

б. Оцените максимальный размер алюминиевых пылинок, которые в космическом пространстве под действием солнечного излучения удалялись бы от Солнца.

## Электростатика

### § 6.1. Закон Кулона.

#### Напряженность электрического поля<sup>\*)</sup>

**6.1.1.** а. Найдите силу взаимодействия зарядов 1 и 2 Кл на расстоянии 1 км друг от друга.

б. С какой силой взаимодействуют два электрона на расстоянии  $10^{-8}$  см? Во сколько раз эта сила больше силы их гравитационного притяжения?

**6.1.2.** Сила взаимодействия между двумя одинаковыми зарядами на расстоянии 1 м равна 1 Н. Определите эти заряды в СИ и в СГС.

**6.1.3.** а. Сила, действующая на заряд 1 Кл, равна 1 Н. Чему равна напряженность электрического поля, действующего на этот заряд, в СИ и СГС?

б. Сила, действующая на заряд 10 СГС, равна 100 дин. Чему равна напряженность электрического поля, действующего на этот заряд, в СИ и СГС?

**6.1.4.** Чему равна напряженность электрического поля, создаваемого зарядом 10 Кл, в СИ и СГС на расстоянии 1 и 20 м от него? С какой силой действуют эти электрические поля на заряд 0,001 Кл? на заряд 1000 СГС?

**6.1.5.** Предположим, что удалось бы разделить 1 см<sup>3</sup> воды на разноименные заряды, которые затем удалили друг от друга на расстояние 100 км. С какой силой притягивались бы эти заряды?

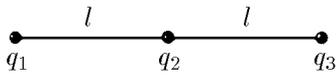
**6.1.6.** Какой заряд приобрел бы 1 см<sup>3</sup> железа, если бы удалось убрать 1% содержащихся в нем электронов?

◇ **6.1.7.** Три заряда  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  связаны друг с другом двумя нитями. Длина каждой нити  $l$ . Найдите их силу натяжения.

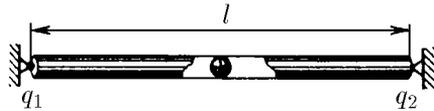
◇ **6.1.8.** На концах горизонтальной трубы длины  $l$  закреплены положительные заряды  $q_1$  и  $q_2$ . Найдите положение равновесия шарика с положительным зарядом  $q$ , который помещен внутрь трубы. Устойчиво ли это положение равновесия? Будет ли положение равновесия отрицательно заряженного шарика в трубе устойчивым?

---

<sup>\*)</sup> Если в задаче не приводится значение диэлектрической проницаемости вещества, считать ее равной единице.



К задаче 6.1.7

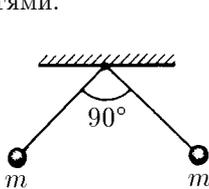


К задаче 6.1.8

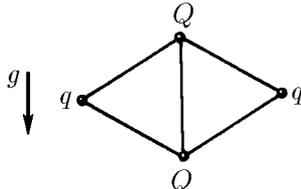
◇ **6.1.9.** Два одинаково заряженных шарика массы  $m$ , подвешенных в одной точке на нитях длины  $l$ , разошлись так, что угол между нитями стал прямым. Определите заряд шариков.

◇ **6.1.10.** Четыре положительных заряда  $q, Q, q, Q$  связаны пятью нитями так, как показано на рисунке. Длина каждой нити  $l$ . Определите силу натяжения нити, связывающей заряды  $Q > q$ .

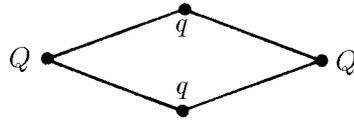
◇ **6.1.11.** Четыре положительных заряда  $Q, q, Q, q$  связаны четырьмя нитями так, как показано на рисунке. Длина каждой нити  $l$ . Определите углы между нитями.



К задаче 6.1.9



К задаче 6.1.10

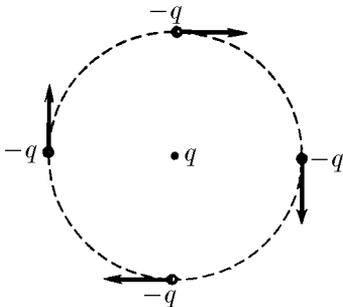


К задаче 6.1.11

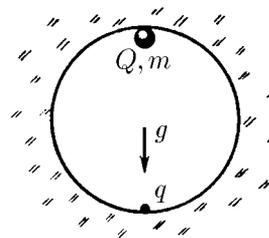
**6.1.12.** В атоме водорода электрон движется вокруг протона с угловой скоростью  $10^{16}$  рад/с. Найдите радиус орбиты.

◇ **6.1.13.** Вокруг заряда  $q$  вращаются по круговой орбите, располагаясь в углах квадрата со стороной  $l$ , четыре одинаковых частицы массы  $m$  и заряда  $-q$  каждая. Заряд  $q$  находится в центре этого квадрата. Определите угловую скорость движения частиц по орбите.

◇ **6.1.14\*.** Какой минимальный заряд  $q$  нужно закрепить в нижней точке сферической полости радиуса  $R$ , чтобы в поле тяжести небольшой шарик массы  $m$  и заряда  $Q$  находился в верхней точке полости в положении устойчивого равновесия?



К задаче 6.1.13

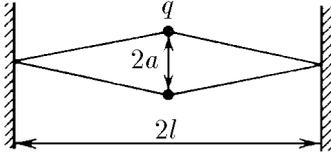


К задаче 6.1.14

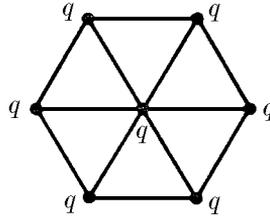
◇ **6.1.15.** Два заряда  $q$ , соединенных резиновыми шнурами с неподвижными стенками так, как показано на рисунке, находятся на расстоянии  $2a$  друг от друга. Расстояние между стенками  $2l$ , длина каждого недеформированного шнура  $l$ . Определите их жесткость.

◇ **6.1.16\*.** Семь одинаковых зарядов  $q$  связаны друг с другом одинаковыми упругими нитями так, как показано на рисунке. Расстояние между ближайшими зарядами  $l$ . Определите силу натяжения каждой нити.

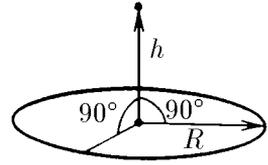
◇ **6.1.17.** Чему равна напряженность электрического поля в центре равномерно заряженного тонкого кольца радиуса  $R$ ? Чему она равна на оси кольца на расстоянии  $h$  от центра? Заряд кольца  $Q$ .



К задаче 6.1.15



К задаче 6.1.16



К задаче 6.1.17

**6.1.18\*.** Чему равна напряженность электрического поля равномерно заряженной нити длины  $l$  на прямой, которая является продолжением нити, на расстоянии  $x$  от ближайшего ее конца? Заряд единицы длины нити  $\rho$ .

◇ **6.1.19.** Докажите, что составляющая напряженности электрического поля, перпендикулярная поверхности равномерно заряженного участка плоскости, равна  $E_{\perp} = \sigma\Omega/(4\pi\epsilon_0)$ , где  $\Omega$  — телесный угол, под которым виден этот участок из рассматриваемой точки пространства,  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Определите, пользуясь этим, напряженность электрического поля:

а) в центре куба, пять граней которого равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , а одна грань не заряжена;

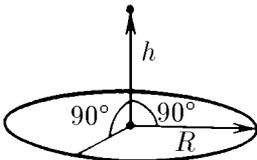
б) в центре правильного тетраэдра, три грани которого заряжены с поверхностной плотностью  $\sigma_1$ , а четвертая — с поверхностной плотностью заряда  $\sigma_2$ ;

в) равномерно заряженной плоскости, если поверхностная плотность заряда  $\sigma$ ;

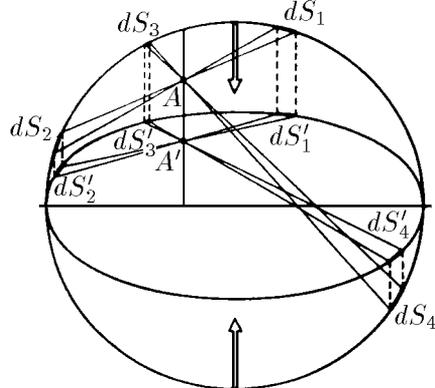
г) на оси длинной трубы с сечением в виде правильного треугольника, если поверхностная плотность заряда граней треугольника трубы равна соответственно  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ;

д\*) в вершине конуса с углом при вершине  $\alpha$  и высоты  $h$ , равномерно заряженного с объемной плотностью заряда  $\rho$ ;

е\*) на ребре длинного бруска, равномерно заряженного с объемной плотностью заряда  $\rho$ ; поперечное сечение бруска — правильный треугольник со стороной  $l$ .



К задаче 6.1.17



К задаче 6.1.20

◇ **6.1.20.** а. Равномерно заряженную сферу вместе с закрепленными на ее поверхности зарядами сжали в одном направлении в  $n$  раз, превратив ее в эллип-

соид. Докажите, что электрическое поле внутри такого эллипсоида равно нулю. Для доказательства разбейте поверхность эллипсоида на пары малых площадок так, как это изображено на рисунке.

б. Будет ли по-прежнему отсутствовать поле внутри длинной круглой трубы с равномерно заряженной поверхностью, если ее вместе с закрепленными поверхностными зарядами сжать в поперечном направлении?

**6.1.21.** а. Металлическое кольцо разорвалось кулоновскими силами, когда заряд кольца был равен  $Q$ . Сделали точно такое же новое кольцо, но из материала, прочность которого в десять раз больше. Какой заряд разорвет новое кольцо?

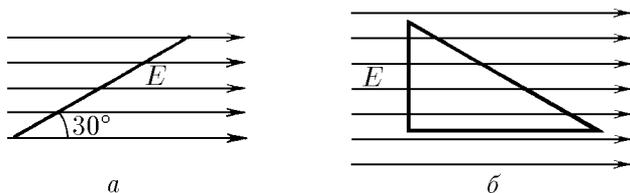
б. Какой заряд разорвет новое кольцо, сделанное из прежнего материала, если все размеры нового кольца в три раза больше размеров старого?

## § 6.2. Поток напряженности электрического поля. Теорема Гаусса

◇ **6.2.1.** а. Напряженность однородного электрического поля равна  $E$ . Чему равен поток напряженности электрического поля через квадрат со стороной  $l$ , плоскость которого расположена под углом  $30^\circ$  к направлению электрического поля?

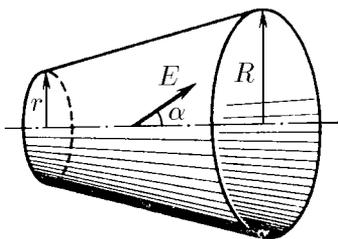
б. При расчете потока напряженности электрического поля через замкнутую поверхность потоки, входящие вовнутрь, берутся со знаком минус, выходящие вовне потоки берутся со знаком плюс. Используя это правило, найдите отрицательные и положительные потоки однородного электрического поля напряженности  $E$  через замкнутую поверхность прямой трехгранной призмы, высота которой  $h$ . Передняя грань призмы, ширина которой равна  $h$ , перпендикулярна  $E$ , нижняя грань параллельна  $E$ .

в\*. Докажите, что поток напряженности однородного электрического поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

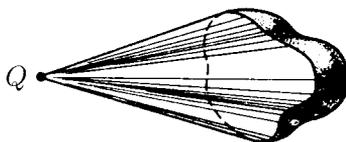


К задаче 6.2.1

◇ **6.2.2.** Чему равен поток напряженности однородного электрического поля через боковую поверхность усеченного конуса, радиусы сечения которого равны  $R$  и  $r$ ? Напряженность электрического поля  $E$  составляет угол  $\alpha$  с осью конуса.



К задаче 6.2.2



К задаче 6.2.3

◇ **6.2.3.** Докажите, что поток напряженности электрического поля точечного заряда  $Q$  через любую поверхность равен телесному углу, под которым видна эта поверхность, умноженному на  $Q/(4\pi\epsilon_0)$ .

**6.2.4.** Поток напряженности электрического поля через плоскую поверхность, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , равен  $\Phi$ . Чему равна электрическая сила, действующая на пластину в направлении, перпендикулярном ее плоскости?

**6.2.5.** а. С какой силой действует электрический заряд  $q$  на равномерно заряженную бесконечную плоскость? С какой силой действует эта плоскость на заряд? Чему равна напряженность электрического поля плоскости? Поверхностная плотность заряда  $\sigma$ .

б. С какой силой действует на каждую грань тетраэдра заряд  $q$ , помещенный в его центре? Поверхностная плотность заряда граней  $\sigma$ .

**6.2.6.** Используя теорему Гаусса, определите напряженность электрического поля:

а) внутри и вне равномерно заряженной сферы, если полный заряд сферы  $Q$ ;  
 б) равномерно заряженной бесконечной нити, если заряд единицы длины нити  $\rho$ ;

в) равномерно заряженной бесконечной плоскости, если поверхностная плотность заряда плоскости  $\sigma$ ;

г) внутри и вне равномерно заряженного шара радиуса  $R$ , если объемная плотность заряда  $\rho$ ; нарисуйте график зависимости напряженности электрического поля от расстояния до центра шара;

д) внутри и вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , если объемная плотность заряда внутри цилиндра равна  $\rho$ ; нарисуйте график зависимости напряженности электрического поля от расстояния до оси цилиндра;

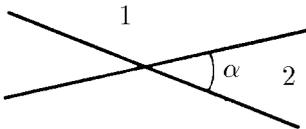
е) вне и внутри равномерно заряженной бесконечной пластины толщины  $h$ , если объемная плотность заряда в пластине равна  $\rho$ ; нарисуйте график зависимости напряженности электрического поля от расстояния до центральной плоскости пластины.

**6.2.7.** Найдите распределение объемной плотности электрического заряда: а) в шаре радиуса  $R$  (напряженность электрического поля  $E_0$  в шаре направлена вдоль его радиуса и не меняется по модулю); б) в бесконечном цилиндре радиуса  $R$  (напряженность электрического поля  $E_0$  в цилиндре направлена вдоль его радиуса и не меняется по модулю).

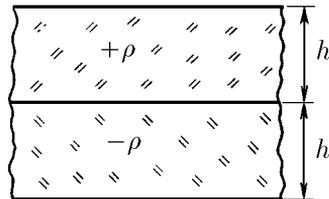
**6.2.8\*** С какой силой расталкиваются равномерно заряженные грани куба? тетраэдра? Поверхностная плотность заряда граней  $\sigma$ , длина ребра  $l$ .

**6.2.9.** Чему равна напряженность электрического поля между двумя параллельными бесконечными плоскостями с поверхностной плотностью заряда  $\pm\sigma$ ?  $\sigma$  и  $\sigma$ ? Чему равна напряженность поля вне плоскостей?

◇ **6.2.10.** Две пересекающиеся под углом  $\alpha$  бесконечные плоскости делят пространство на четыре области. Чему равна напряженность электрического поля в областях 1 и 2, если поверхностная плотность заряда плоскостей  $\pm\sigma$ ?



К задаче 6.2.10



К задаче 6.2.11

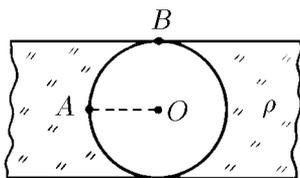
◇ **6.2.11.** Две бесконечные пластины толщины  $h$  заряжены равномерно по объему и сложены вместе. Объемная плотность заряда первой пластины  $\rho$ , а второй  $-\rho$ . Найдите максимальную напряженность электрического поля.

◇ **6.2.12.** В равномерно заряженной бесконечной пластине вырезали сферическую полость так, как показано на рисунке. Толщина пластины  $h$ , объемная плотность заряда  $\rho$ . Чему равна напряженность электрического поля в точке  $A$ ? в точке  $B$ ? Найдите зависимость напряженности электрического поля вдоль прямой  $OA$  от расстояния до точки  $O$ .

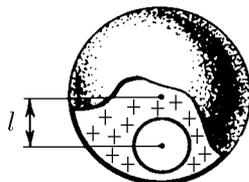
◇ **6.2.13\*.** В равномерно заряженном шаре радиуса  $R$  вырезали сферическую полость радиуса  $r$ , центр которой находится на расстоянии  $l$  от центра шара. Объемная плотность заряда  $\rho$ . Найдите напряженность электрического поля вдоль прямой, проходящей через центр полости и центр шара. Докажите, что электрическое поле в полости однородно.

◇ **6.2.14\*.** а. При пересечении двух шаров радиуса  $R$ , центры которых находятся на расстоянии  $l$  друг от друга, образуются два «полумесяца», равномерно заряженные разноименными электрическими зарядами. Объемная плотность электрического заряда слева  $-\rho$ , справа  $\rho$ . Докажите, что электрическое поле в области пересечения шаров однородно. Найдите напряженность этого поля.

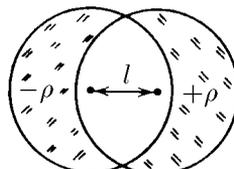
б. Используя результаты задачи 6.2.14\* а и применяя метод предельного перехода:  $l \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $l\rho = \text{const}$ , найдите распределение заряда на сфере радиуса  $R$ , которое даст внутри сферы однородное электрическое поле напряженности  $E$ . Как связана с напряженностью поля максимальная поверхностная плотность заряда?



К задаче 6.2.12



К задаче 6.2.13



К задаче 6.2.14

**6.2.15\*.** С помощью теоремы Гаусса докажите, что система электрически взаимодействующих частиц не может находиться в состоянии устойчивого равновесия.

### § 6.3. Потенциал электрического поля.

#### Проводники в постоянном электрическом поле

**6.3.1.** а. Потенциал заряженного проводника 300 В. Какой минимальной скоростью должен обладать электрон, чтобы улететь с поверхности проводника на бесконечно далекое от него расстояние?

б. Протон на большом расстоянии от проводника имел скорость  $10^8$  см/с. Потенциал проводника  $-10$  СГС. Траектория протона заканчивается на поверхности проводника. Какую скорость имел протон вблизи поверхности?

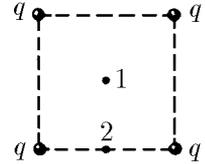
**6.3.2.** а. Определите разность потенциалов электрического поля между точками 1 и 2, если известно, что электрон, двигаясь в этом электрическом поле в отсутствие других сил, в точке 1 имел скорость  $10^9$  см/с, а в точке 2 — скорость  $2 \cdot 10^9$  см/с. Чему была бы равна скорость электрона в точке 2, если бы в точке 1 электрон имел нулевую скорость?

б. В электронной лампе электроны «ускоряются разностью потенциалов» 220 В. Чему равна скорость электронов при попадании их на анод?

**6.3.3.** Заряд 0,1 Кл удален от заряда 0,2 Кл на расстояние 20 м. Чему равен потенциал поля в середине отрезка, соединяющего заряды?

**6.3.4.** В вершинах квадрата со стороной  $l$  находятся четыре заряда  $q$ . Чему равен потенциал поля в центре квадрата?

◇ **6.3.5.** Заряды  $10^{-9}$  Кл каждый находятся в углах квадрата со стороной 10 см. Найдите разность потенциалов в поле этих зарядов между центром квадрата (1) и серединой одной из сторон квадрата (2).



К задаче 6.3.5

**6.3.6.** Заряды 100, 10, 1,  $-10$ ,  $-1$ ,  $-10$  СГС находятся в вершинах правильного шестиугольника со стороной 2 см. Чему равен потенциал поля в центре шестиугольника в СИ и СГС?

**6.3.7.** Сфера радиуса  $R$  имеет заряд  $Q$ . Чему равен потенциал поля в центре сферы? Зависит ли потенциал в центре сферы от распределения зарядов на сфере? Зависит ли потенциал поля на поверхности сферы от распределения заряда по сфере?

**6.3.8.** Почему электрическое поле внутри проводника равно нулю? Почему электрическое поле на поверхности проводника перпендикулярно к ней? Достаточно ли этих условий, чтобы потенциал в любой точке проводника был одинаков?

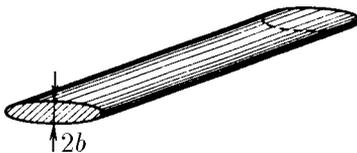
**6.3.9.** Используя теорему Гаусса, докажите, что объемная плотность электрического заряда внутри проводника равна нулю и что поверхностная плотность заряда  $\sigma$  связана с напряженностью электрического поля  $E$  вне проводника вблизи его поверхности соотношением  $E = \sigma/\epsilon_0$ .

**6.3.10.** а. Докажите, что внешнее электрическое поле эллипсоида из задачи 6.1.20а перпендикулярно его поверхности.

б. Проводящий эллипсоид получен из сферы уменьшением ее размеров в одном направлении в  $n$  раз. Длина большой полуоси эллипсоида  $R$ , его полный заряд  $Q$ . Определите максимальную и минимальную напряженность внешнего электрического поля вблизи поверхности эллипсоида.

◇ в. Определите максимальную напряженность электрического поля длинного металлического заряженного провода эллиптического сечения. Длина малой полуоси эллипса  $b$ , линейная плотность заряда провода  $\rho$ .

◇ **6.3.11.** Две бесконечные проводящие изолированные плиты заряжены так, что суммарная поверхностная плотность заряда обеих сторон первой плиты равна  $\sigma_1$ , а второй  $\sigma_2$ . Плиты параллельны друг другу. Найдите поверхностную плотность заряда на каждой стороне плит.



К задаче 6.3.10



К задаче 6.3.11

**6.3.12.** а. Две параллельные разноименно заряженные металлические пластины находятся друг от друга на расстоянии 1 см, много меньшем размеров пластин. Поверхностная плотность заряда пластин  $\pm 3$  СГС/см<sup>2</sup>. Определите разность потенциалов между пластинами в СГС и СИ.

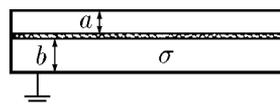
б. Две параллельные разноименно заряженные металлические пластины находятся друг от друга на расстоянии 5 см, много меньшем размеров пластин.

Поверхностная плотность заряда пластин  $\pm 10^{-10}$  Кл/см<sup>2</sup>. Определите разность потенциалов между пластинами в СГС и СИ.

**6.3.13.** Чему равна разность потенциалов между крайними пластинами в системе, состоящей из трех параллельных бесконечных пластин, заряженных одноименными зарядами с поверхностной плотностью заряда  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ? Средняя пластина находится на расстоянии  $h_1$  от первой и на расстоянии  $h_2$  от третьей пластины.

**6.3.14.** Найдите напряженность электрического поля между тремя пластинами в случае, если средняя пластина заземлена. Расстояния между средней пластиной и крайними  $a$  и  $b$ . Потенциал крайних пластин  $\varphi$ .

◇ **6.3.15.** а. Между двумя заземленными металлическими пластинами находится одинаковая с ним по размерам тонкая пленка с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Расстояние от нее до верхней пластины  $a$ , до нижней  $b$  ( $a$  и  $b$  много меньше линейных размеров пластин). Найдите напряженность электрического поля вблизи верхней и нижней пластин. Определите поверхностную плотность заряда, индуцируемого на них.

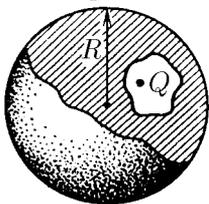


К задаче 6.3.15

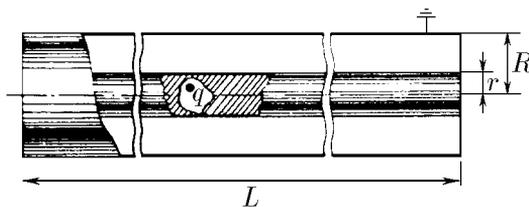
б\*. Между заземленными параллельными пластинами на расстоянии  $a$  и  $b$  от них находится заряд  $q$ . Линейные размеры пластин много больше расстояния между ними. Докажите, что заряды, индуцируемые на заземленных пластинах, не изменятся, если заряд  $q$  распределить по плоскости, лежащей между пластинами на том же расстоянии, что и заряд  $q$ . Определите заряд пластин.

◇ **6.3.16.** В полости металлического шара радиуса  $R$  находится заряд  $Q$ . Найдите заряд, индуцируемый этим зарядом на поверхности полости. Почему на поверхности шара заряд будет распределен с постоянной плотностью? Чему равна поверхностная плотность заряда шара, если его полный заряд равен нулю? Найдите напряженность электрического поля вне шара на расстоянии  $L$  от его центра в случае, если его полный заряд равен  $q$ . Зависит ли это поле от месторасположения полости в шаре? от ее формы?

◇ **6.3.17\*.** Внутри полости длинного незаряженного проводника, радиус которого  $r$ , находится заряд  $q$ . Проводник окружен цилиндрическим экраном радиуса  $R$ . Длина проводника  $L \gg R$ . Как зависит в средней части системы напряженность электрического поля вне полости от расстояния до оси этой системы?



К задаче 6.3.16



К задаче 6.3.17

**6.3.18.** В однородном электрическом поле находится проводник, суммарный заряд которого равен нулю. Изменится ли поверхностная плотность заряда, если все размеры проводника уменьшить в  $n$  раз?

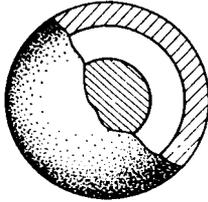
◇ **6.3.19.** Металлический шар радиуса 10 см помещен внутрь сферической металлической оболочки, имеющей внешний радиус 30 см и толщину 10 см, так, что их центры совпадают. На шаре находится заряд  $10^{-5}$  Кл, на оболочке — заряд  $8 \cdot 10^{-5}$  Кл. Постройте график зависимости потенциала электрического поля от расстояния до центра шара.

**6.3.20.** Три проводящие концентрические сферы радиуса  $r$ ,  $2r$  и  $3r$  имеют заряд соответственно  $q$ ,  $2q$  и  $-3q$ . Определите потенциал на каждой сфере.

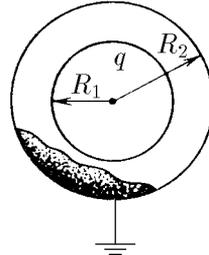
**6.3.21.** Потенциал внутренней сферы радиуса  $r$  равен нулю (сфера заземлена). Потенциал внешней сферы радиуса  $2r$  равен  $\varphi$ . Определите заряд сфер. Центры сфер совпадают.

**6.3.22.** Металлический шар радиуса  $R_1$ , заряженный до потенциала  $\varphi$ , окружают концентрической проводящей незаряженной оболочкой радиуса  $R_2$ . Чему станет равен потенциал шара, если заземлить оболочку? соединить шар с оболочкой проводником?

◇ **6.3.23.** Система состоит из двух концентрических проводящих сфер — внутренней радиуса  $R_1$  и внешней радиуса  $R_2$ . Внутренняя сфера имеет заряд  $q$ , а внешняя заземлена. Найдите напряженность и потенциал электрического поля в зависимости от расстояния до центра сфер.



К задаче 6.3.19



К задаче 6.3.23

**6.3.24.** Система состоит из двух концентрических проводящих сфер — внутренней радиуса  $R_1$  и внешней радиуса  $R_2$ . Внешняя сфера имеет заряд  $q$ , а внутренняя заземлена. Найдите напряженность и потенциал электрического поля в зависимости от расстояния до центра сфер.

**6.3.25.** Равномерно заряженный шар радиуса  $R$  имеет объемную плотность заряда  $\rho$ . Найдите напряженность поля и потенциал шара в зависимости от расстояния до его центра.

**6.3.26.** Чему равна разность потенциалов между центром и поверхностью равномерно заряженного шара радиуса  $R$ , имеющего объемную плотность заряда  $\rho$ ? Между осью и поверхностью равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса  $R$ , имеющего объемную плотность заряда  $\rho$ ? Между поверхностью равномерно заряженной пластины толщины  $h$ , имеющей объемную плотность заряда  $\rho$ , и серединой пластины?

**6.3.27.** Бесконечный заряженный цилиндр радиуса  $r$  имеет объемную плотность заряда  $\rho$  и окружен соосной с ним заземленной цилиндрической металлической поверхностью радиуса  $R$ . Найдите зависимость потенциала поля этой системы от расстояния до оси цилиндра.

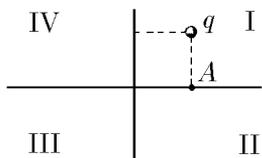
**6.3.28.** Точечный заряд  $Q$  находится на расстоянии  $h$  от бесконечной металлической плоскости. Какая сила действует на заряд со стороны плоскости?

**6.3.29.** По одну сторону от незаряженной металлической плоскости на расстоянии  $h$  от нее находятся два одинаковых заряда  $Q$ . Определите силу, действующую на каждый из зарядов, если расстояние между ними  $2h$ .

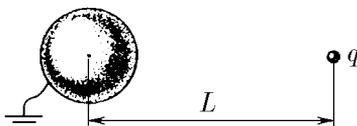
◇ **6.3.30.** Две бесконечные проводящие плоскости, пересекаясь под прямым углом, делят пространство на четыре области. В области I находится заряд  $q$  на одинаковом расстоянии  $l$  от обеих плоскостей. Есть ли электрическое поле в областях II–IV? Какая сила действует на заряд  $q$ ?

**6.3.31\*.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $L$  от центра изолированного металлического шара радиуса  $R < L$ . Полный заряд шара равен нулю. Чему равен потенциал шара?

◇ **6.3.32\***. Чему равен заряд, индуцируемый на поверхности заземленного металлического шара точечным зарядом  $q$ , расположенным на расстоянии  $L$  от центра шара? Радиус шара  $R < L$ .



К задаче 6.3.30

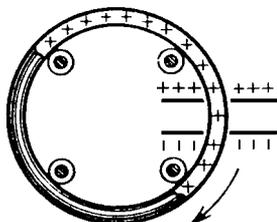
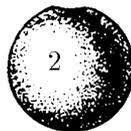
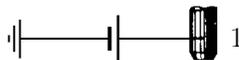


К задаче 6.3.32

**6.3.33.** Как изменится сила взаимодействия заряженной металлической сферы радиуса  $R$  с точечным зарядом  $q$ , который находится на расстоянии  $L$  от ее центра, если заряд сферы увеличить на  $Q$ ?

◇ **6.3.34.** Однородно заряженный положительным зарядом обруч опирается на четыре ролика и может вращаться. Один участок обруча проходит через отверстие, сделанное в параллельных разноименно заряженных пластинах. По мысли изобретателя, участок обруча, находящийся между пластинами, будет притягиваться к отрицательной пластине и отталкиваться от положительной. Вне пластин поля нет. Таким образом, будет поддерживаться вращение обруча даже при наличии сопротивления движению — получается вечный двигатель. В чем ошибка изобретателя? Докажите, что момент сил, действующий на такой обруч в любом электростатическом поле, равен нулю.

◇ **6.3.35.** Из капельницы 1 в полый изолированный металлический шар 2 радиуса  $R$  падают капли воды, каждой из которых сообщают заряд  $q$ . Какой должна быть наименьшая высота падения капель для того, чтобы шар заполнился водой? Радиус капли  $r \ll R$ .

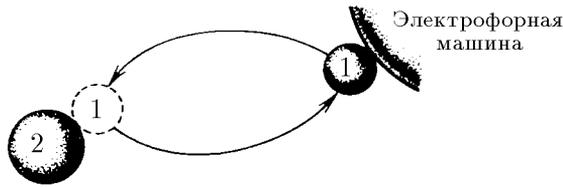


К задаче 6.3.34

К задаче 6.3.35

◇ **6.3.36.** С помощью электрофорной машины металлический шарик 1 можно зарядить до заряда  $Q$ . Затем, через соприкосновение с металлическим же шариком 2, можно передать тому часть заряда. При первом соприкосновении на шарик 2 перешел заряд  $q$ . Определите, до какого заряда, многократно повторяя процесс, можно зарядить шарик 2.

**6.3.37.** Как, имея металлический шарик с зарядом  $Q$ , зарядить другой проводник зарядом, большим  $Q$ ?



К задаче 6.3.36

**6.3.38.** Известно, что вблизи поверхности Земли существует электростатическое поле напряженности порядка  $100 \text{ В/м}$ . Предложите эксперименты для измерения этого поля.

**6.3.39.** Как изменится емкость уединенного проводника, если его размеры утроить?

**6.3.40.** Определите емкость уединенного проводящего шара.

### § 6.4. Конденсаторы

**6.4.1.** Что называется электрическим конденсатором? Что такое емкость конденсатора? Чем отличается определение емкости уединенного проводника от определения емкости конденсатора?

**6.4.2.** а. Размеры пластин плоского конденсатора увеличили в два раза. Как изменилась емкость конденсатора?

б. Как изменится емкость плоского конденсатора, если расстояние между пластинами удвоить? увеличить в  $n$  раз?

**6.4.3.** а. Определите емкость плоского конденсатора, если известна площадь пластин  $S$  и расстояние между ними  $d$ .

б. Площадь пластин плоского конденсатора  $20 \text{ см}^2$ , расстояние между пластинами  $3 \text{ мм}$ . Определите емкость конденсатора в СГС и СИ.

**6.4.4.** Площадь обкладок плоского конденсатора  $S$ , расстояние между ними  $d$ .

а. Как изменится емкость конденсатора, если между его обкладками поместить металлическую пластину толщины  $d/3$  и площади  $S'$ ?

б. Как изменится емкость конденсатора, если между его обкладками поместить металлическую пластину той же толщины  $d/3$ , но площади  $S' < S$ ?

в. Изменится ли емкость конденсатора, если эта пластина коснется одной из обкладок?

**6.4.5.** Определите емкость конденсатора, образованного двумя концентрическими сферами радиуса  $R_1$  и  $R_2$  (сферический конденсатор).

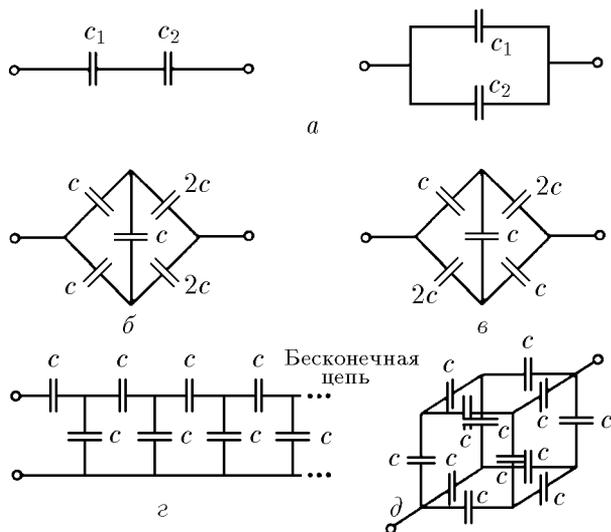
**6.4.6.** Определите емкость сферического конденсатора, если между его обкладками поместить проводящий сферический слой толщины  $d < R_1 - R_2$ . Радиус внешней поверхности этого слоя  $R_0$ .

**6.4.7\*.** Найдите емкость цилиндрического конденсатора, образованного двумя соосными цилиндрами радиуса  $R_1$  и  $R_2$ . Длина цилиндров  $l \gg R_1, R_2$ .

**6.4.8\*.** Плоский конденсатор изготовлен из двух лент ширины  $a$  и длины  $l$ . Расстояние между лентами  $d$ . Определите емкость конденсатора, если его свернуть в многовитковый рулон радиуса  $R \gg d$ .

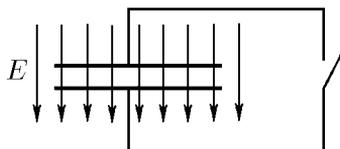
◇ **6.4.9.** Определите емкость систем конденсаторов, изображенных на рисунке.

◇ **6.4.10.** Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле напряженности  $E$ , перпендикулярном пластинам. Площадь пластин конденсатора  $S$ . Какой заряд окажется на каждой из пластин, если конденсатор замкнуть проводником накоротко?

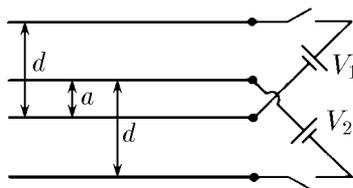


К задаче 6.4.9

◇ **6.4.11.** Два одинаковых плоских конденсатора вставлены друг в друга. Вначале все пластины не были заряжены, а затем к ним присоединили источники тока, поддерживающие разность потенциалов  $V_1$  и  $V_2$ . Найдите разность потенциалов между внутренними пластинами, разделенными расстоянием  $a$ . Расстояние между пластинами конденсаторов  $d$ .

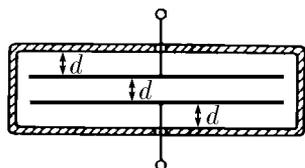


К задаче 6.4.10

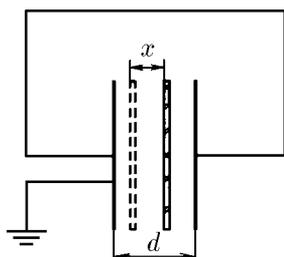


К задаче 6.4.11

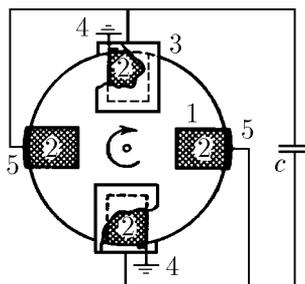
◇ **6.4.12\*.** а. Во сколько раз изменится емкость плоского конденсатора, если поместить его в металлическую коробку? Расстояние от обкладок до стенок коробки равно расстоянию между обкладками  $d$ .



К задаче 6.4.12



К задаче 6.4.13



К задаче 6.4.14

б. Во сколько раз изменится емкость, если коробку соединить с одной из обкладок?

◇ **6.4.13.** Расстояние между обкладками плоского конденсатора  $d$ . Обкладки соединены друг с другом и заземлены так, как это показано на рисунке. Между обкладками вставлена, параллельно им, пластинка с зарядом  $q$ . Какой заряд протечет по проводнику, соединяющему обкладки, если пластину передвинуть на расстояние  $x$ ?

◇ **6.4.14\*.** На непроводящий диск (1) наклеены четыре проводящих лепестка (2) площади  $S$  каждый. При вращении диска лепестки поочередно входят в промежуток между экранирующими обкладками (3), касаясь при этом скользящих заземленных контактов (4). Контакт прерывается, когда лепесток выходит из обкладок. Затем лепесток касается электрода (5), подсоединенного к конденсатору емкости  $C$ . После прерывания контакта с электродом лепесток входит в зазор второй пары обкладок и т. д. Во сколько раз напряжение на конденсаторе увеличится после  $n$  оборотов диска? Зазор между лепестком и экранирующими обкладками  $d$  мал по сравнению с размерами лепестка.

**6.4.15.** Определите силу, с которой притягиваются друг к другу пластины плоского конденсатора, если источник тока, зарядивший конденсатор до разности потенциалов 1000 В, отсоединен. Площадь пластин 100 см<sup>2</sup>, расстояние между пластинами 1 мм. Изменится ли сила взаимодействия пластин, если источник тока будет постоянно подсоединен к пластинам?

**6.4.16.** Как изменится энергия конденсатора, если при той же разности потенциалов между пластинами увеличить все его геометрические размеры в  $k$  раз? При тех же размерах увеличить заряд в  $n$  раз?

**6.4.17.** Найдите энергию электрического поля конденсаторов, заряженных до разности потенциалов  $V$ :

а) плоского конденсатора с площадью пластин  $S = 1$  м<sup>2</sup>, расположенных на расстоянии  $d = 1$  мм друг от друга при  $V = 1$  кВ;

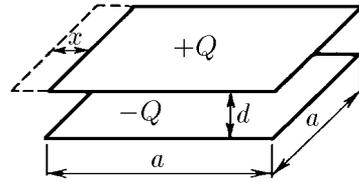
б) сферического конденсатора с радиусом сфер  $r_1$  и  $r_2$ ;

в) цилиндрического конденсатора длины  $l$  с радиусом обкладок  $r_1$  и  $r_2$ .

◇ **6.4.18.** На пластины плоского конденсатора помещен заряд  $Q$ . Площадь пластин  $S$ , расстояние между ними  $d$ .

а. Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами на  $d$ ?

б. Какую работу нужно совершить, чтобы сдвинуть пластины на расстояние  $x$  друг относительно друга так, как показано на рисунке? Пластины имеют форму квадрата с размерами  $a \times a$ .



К задаче 6.4.18

в. Какая совершается работа в обоих предыдущих случаях, если между пластинами конденсатора поддерживается батареей постоянная разность потенциалов? Почему эта работа будет другой?

## § 6.5. Электрическое давление.

### Энергия электрического поля

**6.5.1.** а. С какой силой притягиваются друг к другу две параллельные разноименно заряженные плоскости? Поверхностная плотность заряда плоскостей  $\pm\sigma$ . Площадь каждой плоскости  $S$ , расстояние между ними много меньше размеров плоскостей. Чему равна сила, действующая на единицу площади поверхности плоскости (электрическое давление)?

б. Напряженность электрического поля между параллельными плоскостями равна нулю, вне плоскостей равна  $E$ . Определите поверхностную плотность за-

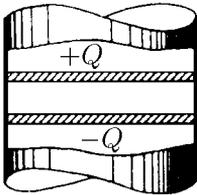
ряда на плоскостях. Чему равно электрическое давление на плоскости в СИ и в СГС?

в. Напряженность поля между параллельными плоскостями равна  $10^4$  В/см, вне плоскостей равна нулю. Определите электрическое давление на каждую плоскость и поверхностную плотность заряда.

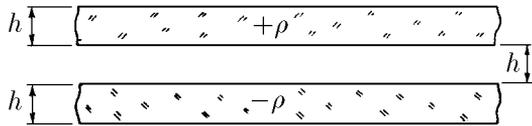
◇ **6.5.2.** Два проводящих поршня площади  $S$ , расположенные в трубе из диэлектрика, образуют плоский конденсатор, заполненный воздухом при атмосферном давлении  $P_0$ . Во сколько раз изменится расстояние между поршнями, если их зарядить разноименными зарядами? Система хорошо проводит тепло, трение отсутствует.

**6.5.3.** Чему равна поверхностная плотность заряда и электрическое давление на границе раздела двух полей напряженности  $E$  и  $2E$ ?  $E$  и  $-2E$ ? Поверхностная плотность заряда во втором случае в три раза больше. Почему же электрическое давление в обоих случаях одинаково?

◇ **6.5.4.** Расстояние между разноименно заряженными пластинами равно  $h$ . Толщина пластин тоже  $h$ , объемная плотность заряда на каждой из них  $\pm\rho$ . Определите силу, действующую на участок пластины единичной площади. Почему эта сила не зависит от толщины пластины, если  $\rho h = \text{const}$ ?



К задаче 6.5.2



К задаче 6.5.4

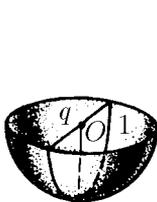
**6.5.5.** Определите силу, действующую на единицу площади поверхности равномерно заряженной сферы радиуса  $R$ , если заряд ее  $Q$ .

**6.5.6.** Найдите электрическое давление на внутреннюю поверхность сферического конденсатора, заряженного до разности потенциалов  $V$ . Радиус внешней обкладки конденсатора  $R$ , радиус внутренней  $r$ .

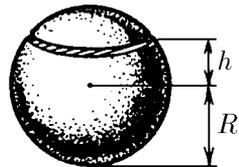
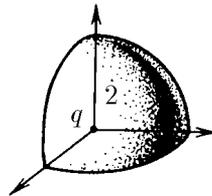
**6.5.7.** Какой заряд можно разместить на единице длины длинной цилиндрической оболочки радиуса  $R$ , если при накачивании ее газом она выдерживает давление  $P$ ?

◇ **6.5.8\***. а. В центр равномерно заряженной полусферы, поверхностная плотность заряда которой  $\sigma$ , поместили заряд  $q$ . С какой силой этот заряд действует на полусферу? на половину полусферы (1)? на четвертую ее часть (2)? Определите напряженность электрического поля от этих частей сфер в ее центре.

б. Определите напряженность электрического поля в центре равномерно заряженного полушария радиуса  $R$  с объемной плотностью заряда  $\rho$ .



К задаче 6.5.8



К задаче 6.5.9

◇ **6.5.9\***. Равномерно заряженная сфера радиуса  $R$  разрезана на две части по плоскости, отстоящей на расстоянии  $h$  от центра сферы. Найдите силу, с которой

отталкиваются друг от друга эти части. Полный заряд сферы  $Q$ . Какой минимальный заряд нужно поместить в центр сферы, чтобы ее части не разлетались?

**6.5.10.** Плоский конденсатор с площадью пластин  $S$  имеет заряд  $q$ . Докажите, что при раздвижении пластин на расстояние  $x$  нужно совершить работу, равную объему пространства, которое заполнит вновь созданное электрическое поле напряженности  $E$ , умноженному на плотность энергии  $\epsilon_0 E^2/2$ .

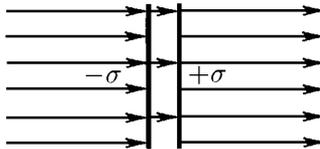
◇ **6.5.11.** В однородном электрическом поле напряженности  $E$  перпендикулярно направлению поля расположены две плоские разноименно заряженные пластины площади  $S$ . Поверхностная плотность заряда пластин  $\pm\sigma$ , расстояние между ними  $d$ . Какую работу нужно совершить, чтобы поменять пластины местами?

**6.5.12.** В однородное электрическое поле напряженности  $E$  внесли тонкую металлическую пластину. Плоскость пластины перпендикулярна направлению электрического поля.

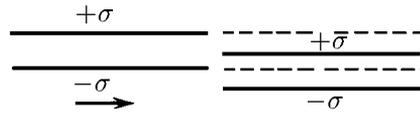
а. Чему равна поверхностная плотность заряда на разных сторонах пластины? Чему равно электрическое давление на поверхность пластины?

б. Толщина внесенной в поле пластины  $h$ , площадь  $S$ . Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы вынести пластину из электрического поля?

◇ **6.5.13.** Какую работу нужно совершить, чтобы вставить одну систему разноименно заряженных параллельных пластин в другую так, как показано на рисунке? Поверхностная плотность зарядов на пластинах  $\pm\sigma$ , площадь каждой пластины  $S$ , расстояние между пластинами  $h$  много меньше линейных размеров пластин.



К задаче 6.5.11



К задаче 6.5.13

**6.5.14.** В поле напряженности  $E_0$  перпендикулярно его направлению расположены две непроводящие плоские разноименно заряженные пластины. Напряженность поля между пластинами  $E$ . Какую работу нужно совершить, чтобы расположить эти пластины параллельно внешнему полю? Площадь каждой пластины  $S$ , расстояние между пластинами  $h$  много меньше размеров пластин.

**6.5.15.** Определите энергию поля равномерно заряженной сферы радиуса  $R$  в СИ и СГС. Заряд сферы  $Q$ .

**6.5.16.** Энергия  $W$  любой системы связана с массой этой системы соотношением Эйнштейна  $W = mc^2$ . Следовательно, электрическое поле обладает массой. Предположим, что вся масса электрона «электрическая». Определите «классический» радиус электрона, считая, что заряд электрона распределен по его поверхности.

**6.5.17.** В экспериментах на ускорителях проверено, что взаимодействие электронов вплоть до расстояний  $10^{-16}$  см подчиняется закону Кулона. Используя решение задачи 6.5.16, определите, во сколько раз масса электрического поля вне сферы радиуса  $10^{-16}$  см больше массы электрона.

**6.5.18\*.** Определите энергию электрического поля равномерно заряженного шара радиуса  $R$ . Полный заряд шара  $Q$ .

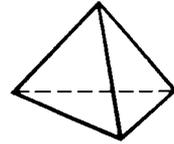
**6.5.19.** Какую работу против электрических сил нужно совершить, чтобы уменьшить в два раза радиус заряженной сферы? Первоначальный радиус сферы  $R$ , а ее заряд  $Q$ .

**6.5.20.** Какую минимальную работу против сил электрического поля нужно совершить, чтобы собрать каплю ртути радиуса  $R$  с зарядом  $Q$  из  $N$  одинаковых заряженных капель?

**6.5.21.** Заряженное тело сжали так, что все его линейные размеры уменьшились в  $n$  раз. Во сколько раз увеличилась энергия электрического поля этого тела?

**6.5.22.** Для того чтобы сложить вместе две одинаковые пластины с равными зарядами, которые были удалены друг от друга на большое расстояние, необходимо совершить работу  $A$ . Какую работу нужно совершить, чтобы сложить вместе три такие пластины?  $n$  пластин?

◇ **6.5.23\*.** Равномерно заряженные грани правильного тетраэдра имеют одинаковый заряд. Чтобы сложить две грани тетраэдра вместе, необходимо совершить работу  $A$ . Какую работу нужно совершить, чтобы сложить все грани тетраэдра в одну стопку?



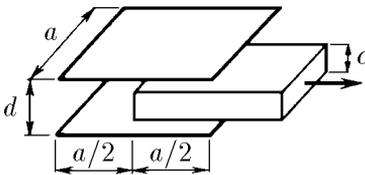
К задаче 6.5.23

**6.5.24\*.** Равномерно заряженный лист, имеющий форму прямоугольного равнобедренного треугольника, сложили вдвое. При этом была совершена работа  $A$  против сил электрического поля. Какую работу нужно совершить, чтобы еще раз так же сложить полученный треугольник?

**6.5.25.** На сколько увеличится энергия электрического поля двух точечных зарядов  $Q$ , удаленных друг от друга на большое расстояние, при сближении их на расстояние  $l$ ?

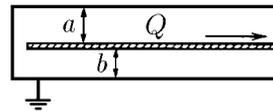
**6.5.26\*.** При медленном сближении двух заряженных проводников их потенциалы изменились соответственно на  $\Delta\varphi_1$  и  $\Delta\varphi_2$ . Определите, какая работа совершена при сближении проводников, если их заряд равен соответственно  $Q_1$  и  $Q_2$ .

◇ **6.5.27\*.** В плоский конденсатор с размерами обкладок  $a \times a$  и расстоянием между ними  $d$  помещают так, как изображено на рисунке, проводящую пластинку толщины  $c$  с размерами  $a \times a$ . Определите, какую силу нужно приложить к пластинке, чтобы удержать ее на месте, если: а) заряд обкладок равен  $\pm Q$ ; б) между обкладками поддерживается постоянная разность потенциалов  $V$ .



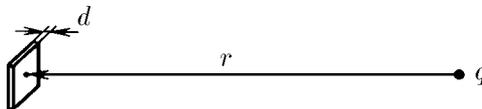
К задаче 6.5.27

◇ **6.5.28.** Оцените, какую работу нужно совершить, чтобы из системы двух параллельных заземленных пластин вытянуть наполовину находящуюся между ними проводящую пластину? Заряд вытягиваемой пластины  $Q$ , расстояние между ней и крайними пластинами  $a$  и  $b$ . Площадь каждой пластины  $S$ .



К задаче 6.5.28

◇ **6.5.29\*.** Металлическая незаряженная пластинка площади  $S$  и толщины  $d$  находится на расстоянии  $r$  от точечного заряда  $q$  и ориентирована перпендикулярно вектору  $r$ . Найдите силу, с которой пластинка притягивается к заряду. Толщина пластинки меньше, а расстояние  $r$  много больше линейных размеров пластинки.



К задаче 6.5.29

**6.5.30\***. Оцените силу, действующую на заряд  $q$ , расположенный в центре изолированной незаряженной металлической сферической оболочки радиуса  $R$ , если в ней имеется небольшое отверстие радиуса  $r$ . Толщина оболочки  $\Delta$  ( $\Delta \ll r \ll R$ ).

### § 6.6. Электрическое поле при наличии диэлектрика

**6.6.1.** а. Чем объясняется уменьшение напряженности электрического поля в веществе?

б. Что такое диэлектрическая проницаемость вещества?

в. Как зависит диэлектрическая проницаемость газа от его давления?

**6.6.2.** Диэлектрическая проницаемость гелия при температуре  $0^\circ\text{C}$  и давлении 1 атм равна 1,000074. Найдите дипольный момент атома гелия в однородном электрическом поле напряженности 300 В/см.

**6.6.3.** Давление насыщенного пара воды при  $18^\circ\text{C}$  равно  $2 \cdot 10^3$  Па, а его диэлектрическая проницаемость 1,0078. Из этих данных найдите средний дипольный момент молекулы воды в электрическом поле напряженности  $10^3$  В/м. В справочниках для дипольного момента воды приводится значение  $-0,61 \cdot 10^{-29}$  Кл·м. Как объяснить расхождение результатов?

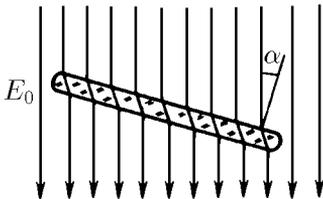
**6.6.4.** Две заряженные параллельные плоскости с поверхностной плотностью заряда  $\pm\sigma$  разнесены на расстояние  $d$  друг от друга и разделены прокладкой толщины  $h$ , диэлектрическая проницаемость которой  $\epsilon$ . Найдите поверхностную плотность индуцированного поляризованного заряда на прокладке, напряженность электрического поля в пространстве между пластинами и разность потенциалов между ними.

◇ **6.6.5.** Пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  помещена в однородное электрическое поле так, что ее нормаль составляет угол  $\alpha$  с напряженностью  $E_0$ . Найдите напряженность поля внутри пластины.

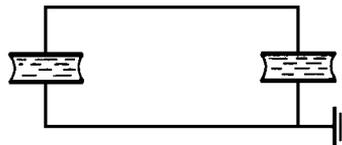
**6.6.6.** Во сколько раз изменится емкость конденсатора, если пространство между его обкладками заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

**6.6.7.** Разность потенциалов заряженного и отсоединенного от батареи конденсатора удвоилась, когда вытек наполнявший его диэлектрик. Определите диэлектрическую проницаемость этого диэлектрика.

**6.6.8.** Конденсатор емкости  $C$  присоединен к источнику тока, который поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов  $V$ . Какой заряд пройдет через источник при заполнении пространства между пластинами жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?



К задаче 6.6.5



К задаче 6.6.9

◇ **6.6.9.** Два одинаковых конденсатора заполнены жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Конденсаторы соединены друг с другом параллельно и заряжены до разности потенциалов  $V$ . Как изменится разность потенциалов, если из одного конденсатора вытечет диэлектрик? Как изменится разность

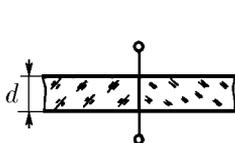
потенциалов в батарее из  $n$  одинаковых параллельно соединенных конденсаторов, заряженной до разности потенциалов  $V$ , если из одного конденсатора вытечет диэлектрик?

**6.6.10.** Батарея из  $n$  последовательно соединенных одинаковых конденсаторов заряжена до разности потенциалов  $V$ . Конденсаторы заполнены жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Как изменится разность потенциалов, если из  $k$  конденсаторов вытечет диэлектрик? Конденсаторы отсоединены от источника тока.

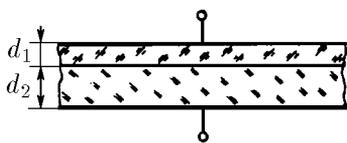
◇ **6.6.11.** Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено наполовину диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  и наполовину диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$ . Найдите емкость такого конденсатора. Площадь каждой обкладки  $S$ , расстояние между ними  $d$ .

◇ **6.6.12.** Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя слоями разных диэлектриков толщины  $d_1$  и  $d_2$ . Диэлектрическая проницаемость диэлектриков  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Площадь обкладок  $S$ . Найдите емкость конденсатора. Какой заряд будет индуцироваться на границе раздела диэлектриков, если на пластинах конденсатора разместить заряд  $\pm q$ ?

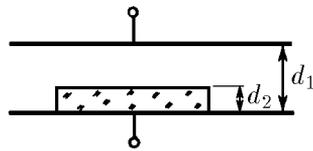
◇ **6.6.13.** В плоский конденсатор с площадью обкладок  $S_1$  и расстоянием между ними  $d_1$  помещена диэлектрическая пластинка площади  $S_2$  и толщины  $d_2$ . Диэлектрическая проницаемость пластинки  $\epsilon$ . Найдите емкость конденсатора.



К задаче 6.6.11



К задаче 6.6.12



К задаче 6.6.13

**6.6.14.** На обкладках плоского конденсатора размещены заряды  $\pm q$ . Зазор между обкладками заполнен веществом, диэлектрическая проницаемость которого изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении по закону  $\epsilon = \epsilon_0(1 + x/d)^{-1}$ , где  $x$  — расстояние до положительной пластины,  $d$  — расстояние между пластинами. Найдите объемную плотность заряда как функцию  $x$ . Площадь пластин  $S$ .

**6.6.15.** Электрофильтр состоит из длинной металлической трубы и нити, направленной вдоль оси. Между ними создается разность потенциалов  $V$ . По трубе пропускают воздух с пылью.

а. К какому электроду — к нити или к трубе — притягиваются пылинки?

б. Чему равна сила, действующая на пылинку с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$ , если сила, действующая на пылинку такого же радиуса, но с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , равна  $F_1$ ? Обе пылинки одинаково удалены от нити.

в. Как зависит сила притяжения от разности потенциалов? от расстояния до нити?

г\*. Во сколько раз сила, действующая на пылинку радиуса  $R$ , больше силы, действующей на пылинку радиуса  $r < R$ ? Диэлектрическая проницаемость пылинок одинакова, и они находятся на одинаковом расстоянии от нити.

**6.6.16.** Вдали от точечного заряда  $Q$  расположена диэлектрическая пластинка площади  $S$ , причем линейные размеры пластинки много меньше расстояния  $R$  между нею и зарядом. Плоскость пластинки перпендикулярна направлению на заряд. Толщина пластины  $\delta$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ . Найдите силу, с которой пластинка притягивается к заряду.

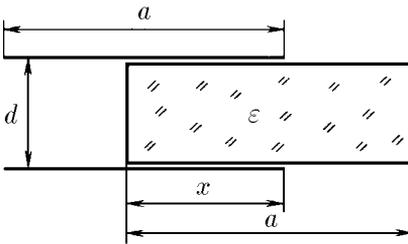
**6.6.17\***. В однородное электрическое поле напряженности  $E$  внесли тонкую пластинку с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Толщина пластинки  $d$ , ее площадь  $S$ . Найдите момент сил, действующий на пластинку, если нормаль к пластинке и направление поля составляют друг с другом угол  $\alpha$ . Какую работу нужно совершить, чтобы расположить пластинку перпендикулярно полю?

**6.6.18**. Проводящий шар радиуса  $r$  с зарядом  $Q$  окружен слоем диэлектрика, внешний радиус которого  $R$ . Диэлектрическая проницаемость слоя  $\varepsilon$ . Найдите поверхностную плотность заряда на внутренней и внешней поверхностях диэлектрического слоя. Нарисуйте линии напряженности электрического поля. Нарисуйте график зависимости напряженности и потенциала поля от расстояния до центра шара.

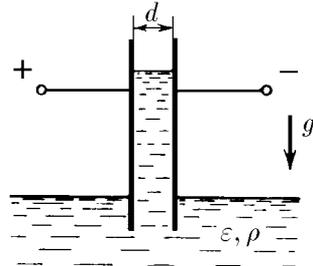
**6.6.19\***. Металлический шар радиуса  $r$  с зарядом  $Q$  окружен слоем жидкого диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Внешний радиус слоя диэлектрика  $R$ . Найдите давление диэлектрика на шар.

◇ **6.6.20\***. С какой силой втягивается диэлектрическая пластина в плоский конденсатор с зарядом  $Q$ , когда она входит в пространство между обкладками на длину  $x$ ? Диэлектрическая проницаемость пластины  $\varepsilon$ , а толщина ее немного меньше расстояния между обкладками  $d$ . Размеры обкладок, как и пластины,  $a \times b$ .

◇ **6.6.21**. В широкий сосуд с жидкостью ставится вертикально плоский конденсатор так, что нижняя часть пластин конденсатора погружается в жидкость. Конденсатор подключен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов  $V$ . Расстояние между пластинами конденсатора  $d$ , плотность жидкости  $\rho$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ . Жидкость несжимаема. На какую высоту поднимется жидкость? Поверхностным натяжением пренебречь.



К задаче 6.6.20



К задаче 6.6.21

◇ **6.6.22**. Одна из пластин незаряженного конденсатора сделана из частой сетки и лежит на поверхности с плотностью  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Площадь каждой пластины  $S$ . На какую высоту поднимется уровень жидкости в конденсаторе, если сообщить ему заряд  $Q$ ?

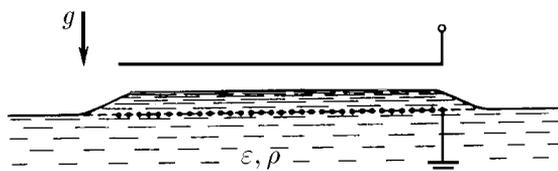
**6.6.23**. Конденсатор емкости  $C$  без диэлектрика имеет заряд  $q$ . Какое количество теплоты выделится в конденсаторе, если его заполнить веществом с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ ?

**6.6.24**. Конденсатор емкости  $C$  подключен к батарее. Какое количество теплоты выделится в конденсаторе, если его заполнить веществом с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ ? Батарея поддерживает на конденсаторе постоянную разность потенциалов  $V$ .

**6.6.25\***. Конденсатор емкости  $C$  подсоединен к источнику напряжения и заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ . При поглощении этим веществом количества теплоты  $W$  оно переходит в новое состояние с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . Какую разность потенциалов нужно создать на

обкладках конденсатора, чтобы вещество из первого состояния перешло во второе? Оцените, при какой напряженности электрического поля в плоском конденсаторе произойдет фазовый переход лед — вода. Диэлектрическая проницаемость льда 3,1, воды 88.

◇ **6.6.26.** Конденсатор заполнен диэлектриком и заряжен до разности потенциалов  $V$ . Обкладки соединяют друг с другом на очень короткое время. Когда разность потенциалов уменьшилась в три раза, обкладки разъединили. После этого разность потенциалов медленно возрастает до  $2/3$  своего первоначального значения. Как можно объяснить этот эффект? Найдите диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего конденсатор.



К задаче 6.6.22



К задаче 6.6.26

**6.6.27.** Конденсатор (см. задачу 6.6.26), заряженный до разности потенциалов  $V$ , разрядили, замкнув ключ до нуля за время, в течение которого состояние поляризации диэлектрика не изменилось, а затем ключ разомкнули.

а. Какая разность потенциалов установится на конденсаторе, если диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$ ?

б. Найдите, на сколько изменится температура диэлектрика ( $\varepsilon = 81$ ) при этом процессе. Удельная теплоемкость диэлектрика  $c = 4,18$  Дж/(кг·К), его плотность  $\rho = 1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, расстояние между пластинами конденсатора  $d = 1$  мм, разность потенциалов  $V = 300$  В. Считать, что диэлектрик не обменивается теплом с окружающей средой.

**6.6.28.** Диэлектрическая проницаемость аргона при температуре  $0^\circ\text{C}$  и давлении 1 атм равна 1,00056. Оцените радиус атома аргона, считая, что заряд электронов распределен равномерно по объему атома, а в центре атома находится его ядро.

**6.6.29.** Найдите дипольный момент проводящего шарика радиуса  $r$ , помещенного в однородное электрическое поле напряженности  $E$ . Воспользуйтесь решением задачи 6.2.14.

**6.6.30.** Среда составлена из проводящих шариков радиуса  $r$ . Шарики распределены равномерно по всей среде. Их число в единице объема  $n$ . Найдите диэлектрическую проницаемость такой среды.

## Движение заряженных частиц в электрическом поле

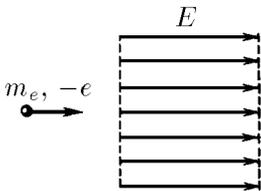
### § 7.1. Движение в постоянном электрическом поле

**7.1.1.** В каком случае заряженная частица в электрическом поле движется вдоль силовых линий?

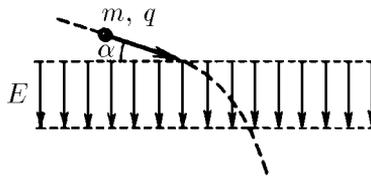
◇ **7.1.2.** Электрон влетает в область однородного электрического поля напряженности  $200 \text{ В/м}$  со скоростью  $10^7 \text{ м/с}$ . Скорость направлена вдоль электрического поля. В течение какого времени электрон будет находиться в области этого поля? Определите, на каком расстоянии от места входа в поле электрон выйдет из него, если он влетает под углом  $45^\circ$  к направлению поля.

**7.1.3.** Частица, заряд которой  $q$ , а масса  $m$ , пролетает область однородного электрического поля протяженности  $d$  за время  $t$ . Скорость  $v$  частицы на входе в поле направлена вдоль поля. Определите напряженность электрического поля.

◇ **7.1.4.** Частица массы  $m$  с зарядом  $q > 0$  влетает в плоский конденсатор, обкладками которого являются металлические сетки. Напряженность поля в конденсаторе  $E$ , расстояние между сетками  $d$ . Начальная скорость  $v$  частицы составляет угол  $\alpha$  с плоскостью первой сетки. С какой скоростью и под каким углом к плоскости второй сетки вылетит частица из конденсатора?



К задаче 7.1.2

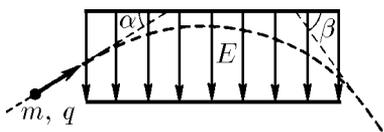


К задаче 7.1.4

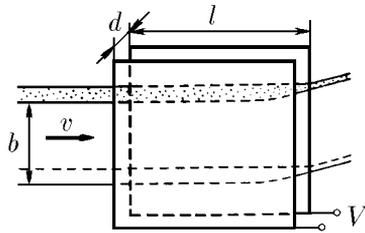
**7.1.5.** Протон и  $\alpha$ -частица, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора от прямолинейной траектории будет больше отклонения  $\alpha$ -частицы?

◇ **7.1.6.** Частицы массы  $m$  с зарядом  $q$  влетают в плоский конденсатор длины  $l$  под углом  $\alpha$  к плоскости пластин, а вылетают под углом  $\beta$ . Определите первоначальную кинетическую энергию частиц, если напряженность поля внутри конденсатора  $E$ .

◇ 7.1.7. Пучок электронов<sup>\*)</sup> входит со скоростью  $v$  в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Напряжение на конденсаторе  $V$ , длина пластин в направлении движения пучка  $l$ . Сколько электронов попадает на пластину конденсатора в единицу времени, если на входе в конденсатор пучок равномерно заполняет все расстояние между пластинами  $d$  и имеет ширину  $b$  в направлении, параллельном пластинам? Число электронов в единице объема пучка  $n$ .



К задаче 7.1.6

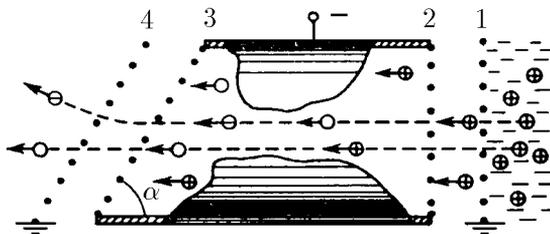


К задаче 7.1.7

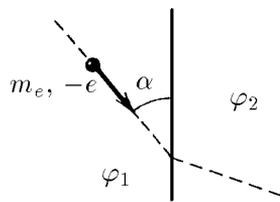
7.1.8. Пылинка массы  $10^{-12}$  кг падает между вертикальными пластинами плоского конденсатора на одинаковом расстоянии от них. Из-за сопротивления воздуха скорость пылинки постоянна и равна 1 мм/с. Конденсатор подключают к источнику напряжения 490 В, и через 10 с пылинка достигает одной из пластин. Определите заряд пылинки. Расстояние между пластинами конденсатора 0,1 м. Силу сопротивления считать пропорциональной скорости пылинки.

◇ 7.1.9. На рисунке изображена схема выделения из пучка частиц отрицательных ионов водорода. Сетки 1 и 4 заземлены. На трубку с сетками 2, 3 подан отрицательный потенциал. Сетка 2 вытягивает из водородной плазмы, которая находится за сеткой 1, протоны. В трубку напускается газ. Протоны, проходя сквозь газ, частично превращаются в нейтральные атомы водорода  $H^0$ , частично — в ионы  $H^-$ . Определите, под каким углом к оси трубки будут двигаться ионы  $H^-$  за сеткой 4, если угол между плоскостями сеток 3, 4 и осью трубки равен  $\alpha$ .

◇ 7.1.10\*. Электрон, движущийся со скоростью  $v_1$ , переходит из области поля с потенциалом  $\varphi_1$  в область с потенциалом  $\varphi_2$ . Под каким углом к границе раздела областей будет двигаться электрон, если он подлетел к ней под углом  $\alpha$ ?



К задаче 7.1.9



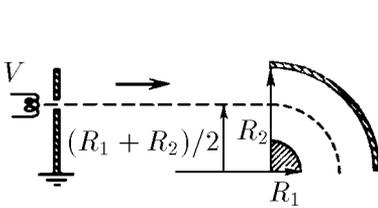
К задаче 7.1.10

7.1.11. Оцените, при какой разности потенциалов между плоскими электродами зажигается газовая лампа, если энергия ионизации атомов газа  $3 \cdot 10^{-16}$  Дж. Средняя длина пробега электронов в газе 1 мм, расстояние между пластинами 1 см.

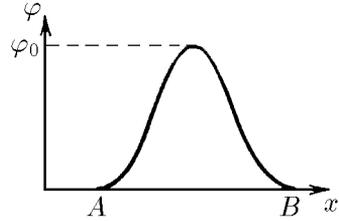
<sup>\*)</sup> Если в задаче не требуется числового ответа, обозначайте массу электрона  $m_e$ , а его заряд  $-e$ .

◇ **7.1.12\***. Определите, какова должна быть ускоряющая разность потенциалов  $V$ , чтобы электроны пошли по пути, указанному на рисунке. Радиусы пластин цилиндрического конденсатора  $R_1$  и  $R_2$ . Разность потенциалов между пластинами  $V_0$ .

◇ **7.1.13**. Электрон, двигаясь прямолинейно, попадает в электрическое поле, потенциал которого имеет вид, показанный на рисунке. В точке  $B$  электрон вылетает из поля. Изменится ли скорость частицы в точке  $B$  и время пролета расстояния  $AB$ , если вместо электрона полетит позитрон?



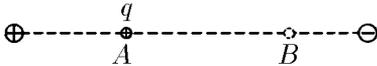
К задаче 7.1.12



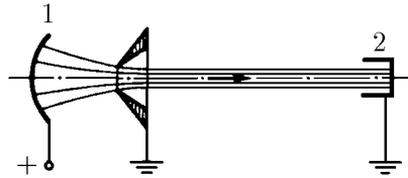
К задаче 7.1.13

◇ **7.1.14\***. Между двумя закрепленными зарядами в точке  $A$  отпускают частицу с зарядом  $q$ . Расстояние  $AB$  эта частица проходит за время  $t$ . За какое время пройдет это же расстояние частица с зарядом  $3q$ , если ее отпустить в точке  $A$ ? Массы частиц одинаковы.

◇ **7.1.15**. Начальная скорость ионов в эмиттере (1) равна нулю, а электрическое поле между эмиттером и коллектором (2) постоянно. Покажите, что траектория ионов не зависит от их массы. Как относятся времена пролета разных ионов по одинаковой траектории, если заряд ионов одинаков, а отношение их масс равно  $n$ ?



К задаче 7.1.14



К задаче 7.1.15

**7.1.16**. Две сферы радиуса  $R$  имеют одинаковый заряд  $Q$ , распределенный равномерно по ее поверхности. Какую минимальную энергию нужно сообщить электрону на поверхности одной из сфер, чтобы он достиг второй сферы? Расстояние между центрами сфер  $l$ .

**7.1.17\***. В тонкостенной непроводящей равномерно заряженной сфере массы  $M$  и радиуса  $R$  имеются два небольших диаметрально противоположных отверстия. Заряд сферы  $Q$ . В начальный момент сфера покоится. По прямой, соединяющей отверстия, из бесконечности движется со скоростью  $v$  частица массы  $m$  с зарядом  $q$ , одноименным с  $Q$ . Найдите время, в течение которого частица будет находиться внутри сферы.

**7.1.18**. В однородном электрическом поле напряженности  $E$  гантель совершает колебания так, что в момент, когда она расположена поперек поля, скорости шариков гантели равны нулю. Определите скорость шариков в момент, когда гантель расположена вдоль поля. Масса шариков  $m$ , заряд  $\pm q$ , расстояние между центрами  $l$ .

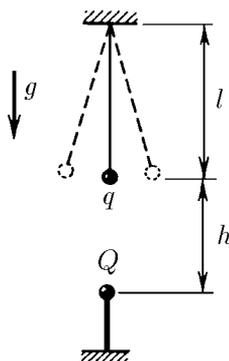
**7.1.19**. Найдите период малых колебаний гантели длины  $l$  с шариками массы  $m$ , расположенной вдоль однородного электрического поля напряженностью  $E$ . Заряд шариков гантели  $\pm q$ .

**7.1.20.** Найдите период малых колебаний маятника, состоящего из шарика массы  $m$ , имеющего заряд  $q$  и подвешенного на нити длины  $l$ , если маятник поместить в электрическое поле напряженности  $E$ , направленное вдоль поля тяжести и под углом  $\pi/2$  к направлению поля тяжести.

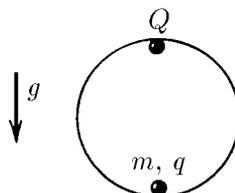
**7.1.21.** Тело массы  $m$ , заряд которого  $q$ , находится между двумя закрепленными зарядами  $Q, Qq > 0$ . Расстояние от тела до каждого из этих зарядов  $l$ . Определите частоту малых колебаний тела вдоль линии, соединяющей заряды  $Q$ .

◇ **7.1.22\*.** Найдите частоту малых колебаний математического маятника относительно его нижнего положения равновесия, если непосредственно под равновесным положением шарика на расстоянии  $h$  от него закреплен заряд  $Q$ . Длина нити  $l$ , масса шарика  $m$ , заряд  $q$ .

◇ **7.1.23\*.** Найдите период малых колебаний тела массы  $m$ , заряд которого  $q$ , внутри гладкой сферы радиуса  $R$ , если в верхней точке сферы закреплен заряд  $Q$ .

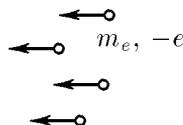
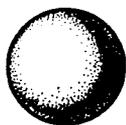


К задаче 7.1.22



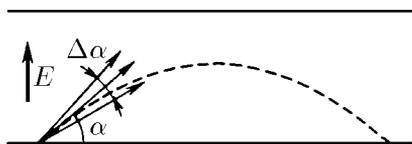
К задаче 7.1.23

◇ **7.1.24\*.** Электроны, обладающие на бесконечности скоростью  $v$ , падают на металлический изолированный шар радиуса  $R$ . На сколько повысится температура шара, если его теплоемкость равна  $C$ ?

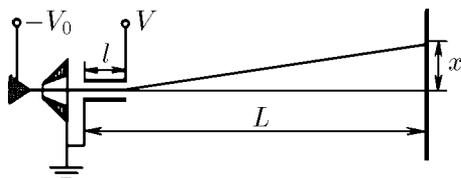


К задаче 7.1.24

◇ **7.1.25\*.** Одна из пластин плоского конденсатора испускает электроны с энергией  $K$  под углом  $\alpha$  к плоскости пластины (угловой разброс электронов  $\Delta\alpha$  мал). Электроны разворачиваются электрическим полем конденсатора и снова попадают на пластину. Каким должен быть угол  $\alpha$ , чтобы участок, на который попадают электроны, был минимальным? Оцените размер этого участка.



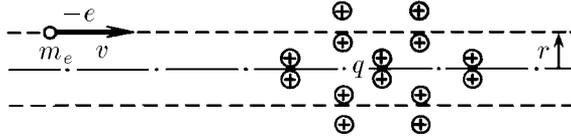
К задаче 7.1.25



К задаче 7.1.26

◇ **7.1.26.** Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $V_0$ , пролетает между пластинами плоского конденсатора и затем попадает на экран. Расстояние между пластинами  $d$  много меньше длины пластин  $l$ , а расстояние между конденсатором и экраном  $L$  много больше  $l$ . При разности потенциалов на пластинах конденсатора  $V \ll V_0$  отклонение электрона  $x$  на экране пропорционально произведению  $LV$  и обратно пропорционально  $V_0$ :  $x \approx k(V/V_0)L$ . Определите коэффициент  $k$ .

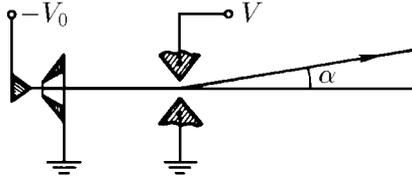
◇ **7.1.27.** а. Электрон влетает в осесимметричное электрическое поле, созданное неподвижными зарядами, и движется первоначально параллельно оси поля на расстоянии  $r$  от нее. Скорость электрона  $v$ . Если скорость электрона и расстояние от него до оси меняются при движении в поле незначительно, то импульс, приобретенный электроном, можно оценить по формуле  $p_{\perp} = eq/(2\pi\epsilon_0 vr)$ , где  $q$  — суммарный электрический заряд внутри цилиндрической области радиуса  $r$ . Выведите, используя теорему Гаусса, эту формулу.



К задаче 7.1.27

б. Определите поперечный импульс, приобретенный зарядом  $q_1$ , который пролетел мимо заряда  $q_2$ . Минимальное расстояние между зарядами  $r$ , скорость заряда  $q_1$  вначале была равна  $v$  и менялась незначительно.

в. Оцените минимальное расстояние от ядра атома азота, на котором пролетал ускоренный разностью потенциалов 100 кВ электрон, если он отклонился ядром на угол  $10^{-3}$  рад.



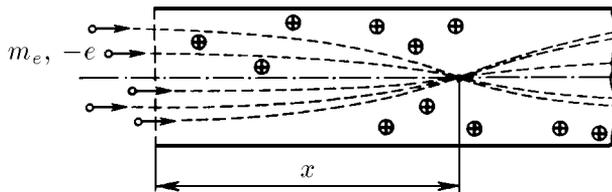
К задаче 7.1.28

◇ **7.1.28\*.** Через щель, на которую подана разность потенциалов  $V$ , пролетают электроны. Ёмкость единицы длины щели  $C$ . При малых значениях  $V$  угол отклонения электронов полем щели пропорционален произведению  $C$  на  $V$  и обратно пропорционален  $V_0$  ( $eV_0$  — начальная энергия электронов):  $\alpha \approx kCV/V_0$ . Определите коэффициент  $k$ .

## § 7.2. Фокусировка заряженных частиц

**7.2.1.** Параллельный пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов  $V_0$ , фокусируется на детали в случае, когда на электронную линзу подан потенциал  $V$ . Как нужно изменить потенциал линзы в случае, если энергия электронов в пучке увеличилась в два раза?

◇ **7.2.2.** Электронный пучок фокусируется положительным объемным зарядом прямого ионного пучка с круглым сечением. На каком расстоянии от входа в ионный пучок фокусируются электроны, если их скорость на входе  $v$ , а плотность заряда и длина ионного пучка  $\rho$  и  $l$ ?



К задаче 7.2.2

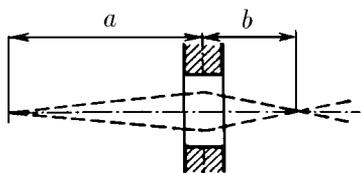
**7.2.3.** Во сколько раз изменится фокусное расстояние длиннофокусной тонкой одиночной линзы, если: а) энергию фокусируемых частиц увеличить в  $k$  раз? б) напряжение на линзе увеличить в  $k$  раз? При расчете тонких одиночных линз изменением траектории частиц в области линзы, связанным с действием на частицы поля линзы, пренебречь.

◇ **7.2.4.** Выведите формулу длиннофокусной тонкой линзы

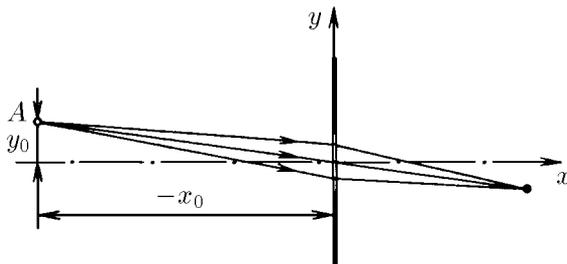
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{f},$$

где  $f$  — фокусное расстояние,  $a$  — расстояние от источника электронов до линзы,  $b$  — расстояние от места, где фокусируются электроны, до линзы.

◇ **7.2.5.** На каком расстоянии от оси линзы пучок электронов, исходящий из точки  $A$  с координатами  $-x_0$  и  $y_0$ , фокусируется длиннофокусной линзой с фокусным расстоянием  $f$ , расположенной в начале координат?  $y_0 \ll x_0, f$ .



К задаче 7.2.4



К задаче 7.2.5

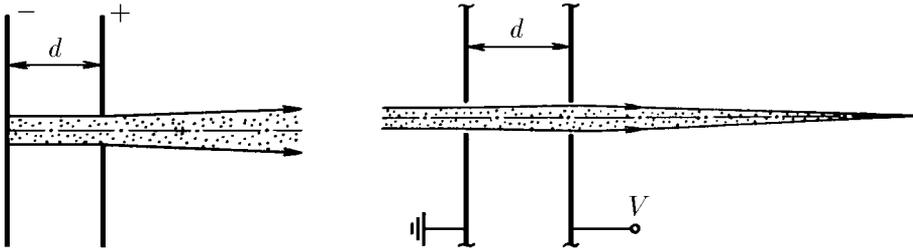
◇ **7.2.6.** Для электронов, испускаемых одной обкладкой конденсаторов, круглое отверстие во второй обкладке является одиночной линзой, если радиус отверстия много меньше расстояния между обкладками  $d$ .

а. Зависит ли фокусное расстояние этой линзы от разности потенциалов между обкладками?

б\*. Определите фокусное расстояние этой линзы, используя формулу, приведенную в задаче 7.1.27а. Начальной скоростью электронов пренебречь.

◇ **7.2.7\*.** Параллельный пучок протонов, ускоренных разностью потенциалов  $V_0$ , летит вдоль оси двух круглых небольших соосных отверстий в обкладках конденсатора. На каком расстоянии от второй обкладки сфокусируется этот пучок, если потенциал второй обкладки равен  $V$ ? Первая обкладка заземлена. Расстояние между обкладками  $d$ .

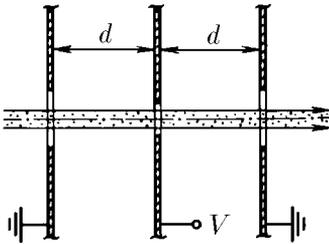
◇ **7.2.8\*.** Сложная линза состоит из трех параллельных металлических пластин, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, в которых сделаны небольшие круглые отверстия, имеющую общую ось. Крайние пластины заземлены,



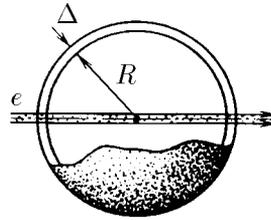
на центр. *К задаче 7.2.6* *К задаче 7.2.7*  
 эту линзу для электронов, ускоренных потенциалом  $V_0 \gg V$ .

**7.2.9.** Тонкий параллельный пучок заряженных частиц, ускоренных разностью потенциалов  $V_0$ , проходит через центр равномерно заряженной сферической полости. На каком расстоянии сфокусируется этот пучок, если потенциал в центре сферы  $V \ll V_0$ ?

◇ **7.2.10.** Где сфокусируется тонкий параллельный пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов  $V_0$ , электрическим полем, созданным двумя concentric сферами радиуса  $R$  и  $R - \Delta$ ,  $\Delta \ll R$ ? Внешняя сфера заземлена, потенциал внутренней сферы  $V \ll V_0$ , пучок проходит через центр сфер.



*К задаче 7.2.8*



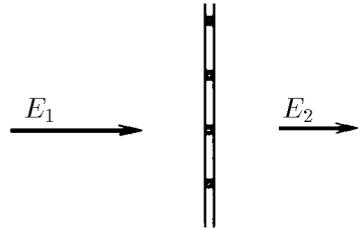
*К задаче 7.2.10*

**7.2.11\*.** Решите задачу 7.2.10 в случае, когда пучок электронов, испускаемых из точки, расположенной на расстоянии  $L \gg R$  от центра сфер, составляет малый угол с нормалью к ее поверхности.

**7.2.12.** Один электрод плоского конденсатора является эмиттером электронов, другой состоит из параллельных проволок, промежутки между которыми существенно меньше расстояния  $d$  между электродами. Разность потенциалов между электродами  $V$ . Определите разброс электронов, прошедших второй электрод, по «поперечной» энергии, если промежутки между проволоками  $a$ , а их толщина  $b$ . Начальной скоростью электронов пренебречь.

**7.2.13.** Определите разность потенциалов на обкладках конденсатора, если ленточный пучок протонов, перпендикулярный обкладкам и прошедший две узкие параллельные щели, сфокусировался на расстоянии  $l$  от второй обкладки. Протоны были ускорены разностью потенциалов  $V_0$ . Расстояние между обкладками конденсатора  $d$ . Первая обкладка заземлена,  $l \gg d$ .

◇ **7.2.14\*.** Докажите, что равномерно заряженные нити сетки с квадратными ячейками фокуси-



*К задаче 7.2.14*

руют параллельный пучок электронов, прошедший через ячейку в точку, если толщина нитей много меньше размеров ячейки и пучок падает перпендикулярно плоскости сетки. Чему равно фокусное расстояние такой ячейки, если электрическое поле вдали от плоскости сетки однородно и справа равно  $E_1$ , слева  $E_2$ , а энергия электронов равна  $eV$ ?

### § 7.3. Движение в переменном электрическом поле

**7.3.1.** Одна из пластин плоского конденсатора (катод) является источником электронов. Электрическое поле напряженности  $E$  между пластинами через равные короткие промежутки времени  $\tau$  меняет знак. За какое время электрон долетит до противоположной пластины (анода)? Расстояние между катодом и анодом  $l$ .

◇ **7.3.2.** На рисунке изображены электроды трехэлектродной плоской лампы. Электроны вылетают из катода 1 под действием поля плоской сетки 2, на которой поддерживается постоянное напряжение  $V$ . Напряжение  $\Delta V$  между сетками 2 и 3 через равные промежутки времени  $\tau$  меняет знак на противоположный. Расстояние между сетками 2 и 3 равно  $l$ . Определите, какой скоростью будут обладать электроны за второй сеткой, если время  $\tau$ : а) много меньше; б) много больше времени пролета электронами межсеточного промежутка.

**7.3.3.** В электронном генераторе используется триод, в котором расстояние между катодом и анодом равно 1 мм. Оцените максимальную частоту колебаний, которую можно получить, используя этот генератор, если напряжение между анодом и катодом 200 В.

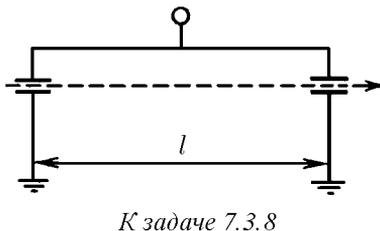
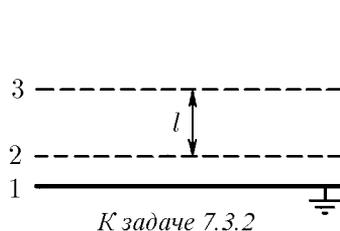
**7.3.4.** а. Вычислите чувствительность электронно-лучевой трубки осциллографа к напряжению, т. е. смещение пятна на экране, вызванное напряжением 1 В на управляющих пластинах. Длина пластин  $l$ , расстояние между ними  $d \ll l$ , расстояние от конца пластин до экрана  $L \gg l$ . Ускоряющее напряжение  $V$ .

б. Определите чувствительность электронно-лучевой трубки, если  $V = 10$  кВ,  $L = 30$  см,  $l = 3$  см,  $d = 5$  мм.

**7.3.5.** В осциллографе на горизонтальную пару пластин подано напряжение  $V_1 = V_0 \sin \omega t$ , а на вертикальную  $V_2 = V_0 \cos \omega t$ . Чувствительность осциллографа (в сантиметрах на вольт)  $5/V_0$ . Какое изображение возникает на экране осциллографа?

**7.3.6.** Длина пластин осциллографа  $l$ , ускоряющее напряжение  $V$ . При какой частоте электрического сигнала чувствительность осциллографа уменьшится?

**7.3.7.** При подаче на пластины осциллографа высокочастотного сигнала с частотой  $\nu \gg 1/\tau$  ( $\tau$  — время пролета электрона через пластины) на экране осциллографа получена полоса ширины  $\delta$ . Чувствительность осциллографа в обычном режиме работы  $S$ . Определите амплитуду сигнала.



◇ **7.3.8.** Тонкий пучок электронов, ускоренный напряжением  $V$ , проходит последовательно электрическое поле двух небольших конденсаторов, отстоящих

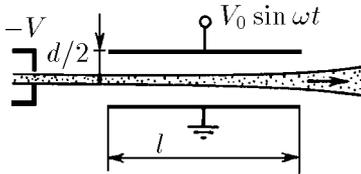
друг от друга на расстояние  $l$ . Конденсаторы соединены параллельно и присоединены к источнику переменного напряжения. При частоте  $f$  пучок после выхода из конденсаторов движется в первоначальном направлении. Определите возможные значения отношения заряда электрона к его массе.

◇ **7.3.9\***. Тонкий пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов  $V$ , входит в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Определите угловой разброс электронов, если на пластины конденсатора подается напряжение  $V_0 \sin \omega t$ . Расстояние между пластинами конденсатора  $d$  много меньше его длины  $l$ .

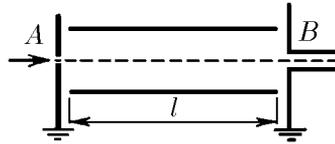
◇ **7.3.10**. Устройство для выделения из электронного пучка электронов с определенной скоростью состоит из плоского конденсатора длины  $l$ , перекрытого с двух сторон экранами с входным отверстием  $A$  и длинным выходным каналом  $B$ . На пластины конденсатора подается переменное напряжение с частотой  $\omega$  и амплитудой  $V_0$ . Расстояние между пластинами  $d$ .

а. Какова скорость электронов, выделяемых устройством из электронного пучка, влетающего параллельно пластинам?

б\*. На сколько отверстие  $A$  должно быть уже канала  $B$ , чтобы выделенная группа электронов прошла через канал?



К задаче 7.3.9



К задаче 7.3.10

**7.3.11**. На свободный электрон начиная с момента времени  $t = 0$  действует электрическое поле напряженности  $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$ . Найдите максимальную и среднюю скорость электрона.

**7.3.12\***. Какую энергию (в электрон-вольтах) могут приобрести электроны в электрическом поле лазерного пучка? Амплитуда напряженности поля  $10^{11}$  В/м, частота  $3 \cdot 10^{15}$  с $^{-1}$ .

**7.3.13\***. Разреженная плазма в высокочастотном электрическом поле напряженности  $E = E_0 \sin \omega t$  приобретает положительный потенциал. Определите этот потенциал, если масса ионов  $M \gg m_e$ .

**7.3.14\***. Упруго связанный в молекуле электрон имеет резонансную частоту колебаний  $\omega_0$ . Коэффициент затухания колебаний  $\gamma$ . Найдите установившуюся амплитуду вынужденных колебаний электрона в электрическом поле напряженности  $E = E_0 \sin \omega t$ .

**7.3.15\***. Определите диэлектрическую проницаемость среды, состоящей из электронов, упруго связанных в молекуле, в электрическом поле напряженности  $E = E_0 \sin \omega t$ . Резонансная частота  $\omega_0$ , коэффициент затухания  $\gamma \ll \omega_0$ , число электронов в единице объема среды  $n_e$ .

## § 7.4. Взаимодействие заряженных частиц

**7.4.1**. Чему будет равна скорость двух электронов на расстоянии  $\lambda r$  друг от друга, если они начали разлетаться, находясь на расстоянии  $r$  друг от друга?

**7.4.2**. В углах правильного квадрата со стороной  $a$  поместили четыре электрона. Под действием электрических сил электроны разлетаются. Определите их скорости на бесконечности.

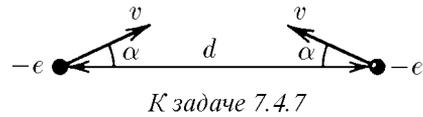
**7.4.3\*.** В углах правильного квадрата со стороной  $a$  по диагонали поместили два протона и два позитрона. Оцените отношение скоростей протонов и позитронов на бесконечности. Масса протона в 1840 раз больше массы позитрона, а заряды одинаковы.

**7.4.4.** Из бесконечности навстречу друг другу с одинаковой скоростью  $v$  движутся два электрона. Определите минимальное расстояние, на которое они сближаются.

**7.4.5.** С большого расстояния навстречу друг другу со скоростью соответственно  $v_1$  и  $v_2$  движутся два электрона. Определите минимальное расстояние, на которое они сближаются.

**7.4.6.** По направлению к центру первоначально неподвижно заряженного шара с большого расстояния движется второй заряженный шар. Заряды распределены по поверхности шаров равномерно. Какой скоростью должен обладать движущийся шар, чтобы столкнуться с первым? Масса, заряд, радиус первого шара  $m_1, q_1, R_1$ . Параметры второго шара  $m_2, q_2, R_2$ .

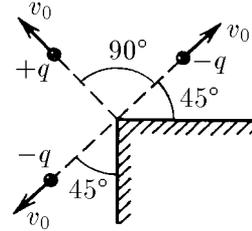
◇ **7.4.7.** Скорости двух электронов равны  $v$ , лежат в одной плоскости и при расстоянии  $d$  между электронами образуют угол  $\alpha$  с прямой, соединяющей электроны. На какое минимальное расстояние сближаются электроны?



**7.4.8\*.** Два электрона находятся на расстоянии  $r$  друг от друга, причем скорость одного из них равна нулю, а скорость другого направлена под острым углом к линии, соединяющей электроны. Каким будет угол между скоростями электронов, когда они вновь окажутся на расстоянии  $r$  друг от друга?

**7.4.9\*.** С большого расстояния к металлической плоскости движется тело массы  $m$ , имеющее заряд  $q$ . Определите скорость тела в тот момент, когда оно будет находиться на расстоянии  $d$  от плоскости. Начальная скорость тела равна нулю, его размеры много меньше  $d$ .

◇ **7.4.10\*.** Скорости трех заряженных частиц массы  $m$  изображены на рисунке. Расстояние от каждой частицы до ребра металлического двугранного угла  $d$ . Заряды первых двух частиц, летящих в противоположных направлениях, равны  $-q$ , заряд третьей частицы  $q$ . Определите скорость этих частиц на большом расстоянии друг от друга.



К задаче 7.4.10

**7.4.11.** В одной из моделей иона  $H_2^+$  электрон движется по круговой орбите, лежащей в плоскости симметрии иона. Расстояние между протонами  $R$ . Найдите скорость, с которой движется электрон по орбите радиуса  $r$ .

**7.4.12.** Вокруг тяжелого ядра с зарядом  $Ze$  на расстоянии  $r$  вращается по круговой орбите электрон. Какую минимальную энергию нужно сообщить электрону, чтобы он оторвался от ядра?

**7.4.13\*.** Расстояние между электроном и позитроном в позитронии  $r$ . Какую минимальную энергию нужно сообщить электрону, чтобы позитроний распался?

**7.4.14\*.** Две частицы массы  $m$  и  $M$  с противоположными зарядами под влиянием электрического притяжения движутся по окружности. Скорость частицы массы  $m$  мгновенно увеличивают в  $n$  раз, не изменяя ее направления. При каком минимальном  $n$  частицы после этого разлетятся?

**7.4.15\*.** На покоящийся позитроний налетает пучок таких же частиц. Какова должна быть минимальная скорость частиц в пучке, чтобы иногда происходил полный «развал» двух столкнувшихся позитрониев? Скорость орбитального движения электрона и позитрона в позитронии  $v$ .

**7.4.16.** Возможен ли безызлучательный захват свободным протоном электрона (образование атома водорода)?

**7.4.17\*.** На покоящийся протон налетает из бесконечности другой протон со скоростью  $v$ . Прицельный параметр  $\rho$ . Определите, на какое расстояние они сближаются.

◇ **7.4.18\*.** Две одинаковые частицы с зарядом  $q$  и скоростями  $u$  и  $v$ , лежащими в одной плоскости, составляющими соответственно углы  $\alpha$  и  $\beta$  с линией, их соединяющей, находятся на расстоянии  $l$  друг от друга. Определите массу частиц, если известно, что минимальное расстояние, на которое они сближаются, равно  $r$ .

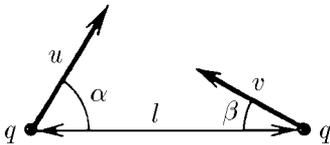
**7.4.19\*.** Два заряда поместили на расстоянии  $l$  друг от друга и отпустили. Через время  $t_0$  расстояние между зарядами удвоилось. Эти же заряды поместили на расстоянии  $3l$  и отпустили. Через какое время расстояние между зарядами удвоится?

**7.4.20.** Частица массы  $m$ , имеющая заряд  $q$ , движется с большого расстояния по направлению к центру равномерно заряженной незакрепленной сферы. Радиус сферы  $R$ , ее заряд  $Q$ , масса  $M$ . Какой скоростью должна обладать частица на большом расстоянии от сферы, чтобы через небольшие отверстия пролететь сквозь нее?  $qQ > 0$ .

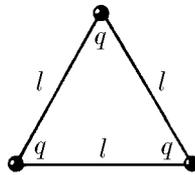
**7.4.21.** Частица массы  $m$ , имеющая заряд  $q$ , со скоростью  $v_0$  приближается с большого расстояния к заряженному незакрепленному кольцу, двигаясь по его оси. Радиус кольца  $R$ , заряд  $Q$ , масса  $M$ . Вначале кольцо покоится. Чему будет равна скорость частицы, когда она будет проходить через центр кольца?

**7.4.22\*.** Частица массы  $m$ , имеющая заряд  $q$ , приближается с большого расстояния к равномерно заряженному незакрепленному шару, двигаясь по направлению к центру шара. Радиус шара  $R$ , заряд  $Q$ , масса  $M$ . Вначале шар покоится. Какую наименьшую скорость должна иметь частица на большом расстоянии от шара, чтобы пройти через его центр?

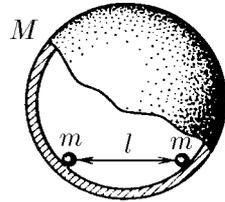
◇ **7.4.23\*.** Три одинаковых одноименно заряженных шарика, имеющие заряд  $q$  и массу  $m$ , соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длины  $l$ . Одну из нитей пережигают. Определите максимальную скорость шариков.



К задаче 7.4.18



К задаче 7.4.23

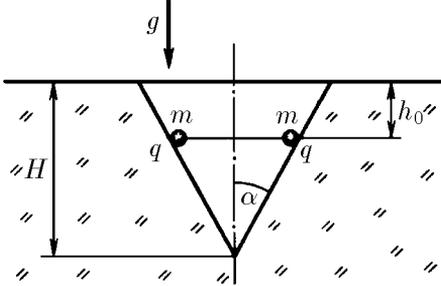


К задаче 7.4.24

◇ **7.4.24.** Внутри гладкой непроводящей сферы массы  $M$  и радиуса  $R$  находятся две одинаковые бусинки массы  $m$ , имеющие заряд  $q$ . Расстояние между бусинками  $l$ . Найдите максимальную скорость сферы, если бусинки освободить.

**7.4.25.** На горизонтальной плоскости на расстоянии  $R$  друг от друга поместили два тела массы  $m$ , имеющие заряд  $Q$ . В результате электрического взаимодействия тела начинают двигаться по плоскости. Какое расстояние пройдет каждое из тел, если коэффициент трения тел о плоскость равен  $\mu$ ? Какую максимальную скорость приобретут тела в процессе движения?

◇ 7.4.26\*. В конической лунке глубины  $H$  и с углом при вершине  $\alpha$  на  $h_0$  ниже плоскости основания лунки находятся два небольших заряженных тела, связанных нитью. Нить пережигают, и тела сначала скользят вверх по стенке лунки, а затем вылетают из нее. Коэффициент трения тел о стенку лунки  $\mu$ , масса и заряд каждого тела  $m$  и  $q$ . На какую высоту поднимутся тела, вылетевшие из лунки?



К задаче 7.4.26

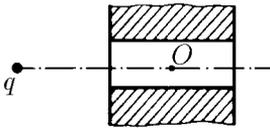
7.4.27. Два заряженных шара массы  $m$ , имеющих заряд  $q$ , соединяют недеформированной пружиной длины  $l$  и отпускают. Спустя некоторое время возникшие колебания шаров из-за трения в пружине прекратились и шары оказались на расстоянии  $2l$  друг от друга. Определите количество теплоты, которое выделилось в пружине.

7.4.28. При колебании двух заряженных шариков, связанных с пружиной, длина пружины меняется от  $l_1$  до  $l_2$ . Длина недеформированной пружины  $l_0$ , заряд каждого шарика  $q$ . Определите жесткость пружины.

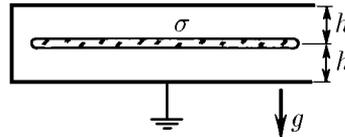
7.4.29. Сфера массы  $m$ , имеющая заряд  $q$ , в результате взрыва распадается на большое число одинаковых осколков, скорость которых в момент взрыва равна  $v$  и направлена вдоль радиуса сферы. Определите максимальную скорость осколков.

7.4.30. Две одинаковые капли ртути радиуса  $R$  летят навстречу друг другу, имея на большом расстоянии скорость  $v$ . Происходит столкновение, в результате которого капли сливаются в одну. Определите количество выделившейся при столкновении теплоты, если: а) капли имеют разноименные заряды  $Q$  и  $-Q$ ; б) одна капля имеет заряд  $-q$ , другая  $Q$ . Плотность ртути  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ .

◇ 7.4.31. На оси цилиндрического отверстия в металлической плите на некотором расстоянии от последней находится точечный заряд  $q$ . Заряд отпускают. Опишите качественно его движение.



К задаче 7.4.31



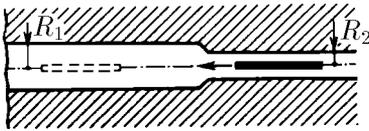
К задаче 7.4.32

◇ 7.4.32\*. Между двумя заземленными параллельными горизонтальными металлическими плоскостями на одинаковом расстоянии  $h$  от них находится заряженная тонкая пластинка. Площадь пластины  $S$ , ее масса  $m$ , поверхностная плотность заряда  $\sigma$ . Какую минимальную скорость нужно сообщить этой пластине, чтобы она долетела до верхней плоскости? Расстояние до плоскостей  $h$  много меньше линейных размеров пластины.

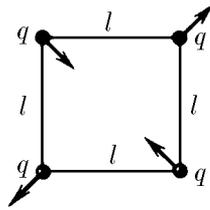
**7.4.33.** Внутри закрепленного проводящего незаряженного шара радиуса  $R$  имеется сферическая полость радиуса  $r$ , центр которой совпадает с центром шара. Какую минимальную скорость необходимо сообщить находящейся в центре частице массы  $m$ , имеющей заряд  $q$ , чтобы, пройдя через тонкий канал в шаре, она ушла на большое расстояние от него?

◇ **7.4.34\*.** Вдоль оси длинного цилиндрического канала, вырезанного в проводнике, пролетает тонкий стержень, линейная плотность заряда которого  $\rho$ . Длина стержня  $l$  много больше радиуса  $R_1$  и  $R_2$ . Вдали от области сужения канала справа скорость стержня  $v_0$ . Найдите скорость стержня вдали от области сужения канала слева. Масса стержня  $m$ .

◇ **7.4.35\*.** Чему равен период малых колебаний четырех заряженных тел, связанных одинаковыми нитями длины  $l$  и движущихся так, как показано на рисунке? Масса и заряд тела  $m$  и  $q$ .



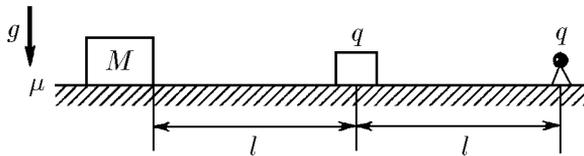
К задаче 7.4.34



К задаче 7.4.35

**7.4.36\*.** Плазма состоит из электронов и тяжелых положительно заряженных ионов. Число электронов и ионов в единице объема одинаково и равно  $n$ . В слое плазмы толщины  $h$  всем электронам сообщили одинаковую скорость  $v$  в направлении, перпендикулярном слою. Через какое время основная масса электронов остановится электрическими силами, если: а)  $v \gg he\sqrt{n/m_e}$ ; б)  $v \ll he\sqrt{n/m_e}$ , где  $e$ ,  $m_e$  — заряд и масса электрона? Оцените в обоих случаях частоту колебания электронов.

**7.4.37\*.** Три заряженных тела одинаковой массы, разлетаясь, образуют всегда равнобедренный треугольник с углами  $\alpha$  при вершине. Во сколько раз заряд тела, расположенного в вершине треугольника больше заряда тела в его основании.



К задаче 7.4.38

◇ **7.4.38\*.** Тело зарядом  $q$  удерживается на столе. Справа от него на расстоянии  $l$  закреплен одноименный точечный заряд  $q$ . Слева на таком же расстоянии покоится брусок массы  $M$ , который со столом имеет коэффициент трения  $\mu$ . Тело отпускают, и оно начинает без трения скользить по столу, упруго ударяясь о брусок, не передавая при ударах ему свой заряд. На какое расстояние брусок сдвинется в результате всех ударов тела?

## Электрический ток

### § 8.1. Ток. Плотность тока. Ток в вакууме

**8.1.1. а.** В синхротроне электроны движутся по приблизительно круговой орбите длины  $l = 240$  м. Во время цикла ускорения на орбите находится примерно  $n = 10^{11}$  электронов, их скорость практически равна скорости света. Чему равен ток?

б. Определите ток, создаваемый электроном, движущимся по орбите радиуса  $r = 0,5 \cdot 10^{-10}$  м в атоме водорода.

**8.1.2.** В проводе длины  $l$  полный движущийся заряд, равномерно распределенный по проводу, равен  $q$ . Определите среднюю скорость движения зарядов, если ток равен  $I$ .

**8.1.3.** В генераторе Ван де Граафа прорезиненная лента ширины  $a = 30$  см движется со скоростью  $v = 20$  м/с. Около нижнего шкива ленте сообщается заряд настолько большой, что по обе стороны ленты он создает поле напряженности  $E = 1,2 \cdot 10^6$  В/м. Чему равен ток?

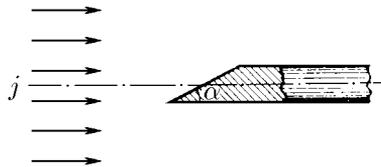
**8.1.4.** Ток в разреженном газе вызывает движение ионов. Докажите, что соударение одинаковых ионов между собой не меняет тока.

**8.1.5.** Если предположить, что число электронов проводимости в металле равно числу атомов, то какой будет средняя скорость электронов проводимости в серебряной проволоке диаметра 1 мм, по которой идет ток 30 А?

**8.1.6.** Листочек фольги, покрытый  $\beta$ -радиоактивным веществом, испускает с единицы площади  $\nu$  электронов в единицу времени. Их скорость равна  $v$ , любое направление скорости равновероятно. Найдите плотность тока. Почему она не зависит от  $v$ ?

**8.1.7.** В струе  $\beta$ -радиоактивных пылинок, имеющих скорость  $u$ , число электронов в единице объема равно  $n_e$ . Скорость электрона относительно испустившей его пылинки, равна  $v$ , а все направления скоростей равновероятны. Определите плотность электронного тока в струе.

◇ **8.1.8.** В рентгеновской трубке пучок электронов с плотностью тока  $j = 0,2$  А/мм<sup>2</sup> попадает на скошенный под углом  $30^\circ$  торец металлического стержня. Площадь этого торца  $s = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, а сам стержень расположен вдоль оси пучка. Определите ток в стержне.



К задаче 8.1.8

**8.1.9.** В протонный пучок с плотностью тока  $j = 1 \text{ мкА/см}^2$  поместили металлический шар радиуса  $r = 10 \text{ см}$ . Определите время, за которое шар зарядится до потенциала  $V = 220 \text{ В}$ . Действием поля шара на пучок пренебречь.

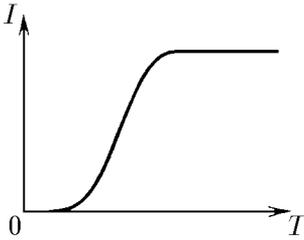
**8.1.10.** Плотность тока в пучке электронов  $j$ , скорость электронов  $v$ . Определите плотность заряда в пучке.

**8.1.11.** В электронном пучке создано круглого сечения с начальным радиусом  $r = 3 \text{ см}$  скорость электронов  $v = 10^8 \text{ м/с}$  при полном токе в пучке  $I = 100 \text{ А}$ . Оцените начальную напряженность электрического поля на поверхности пучка и расстояние, на котором радиус пучка под действием собственного электрического поля увеличится вдвое.

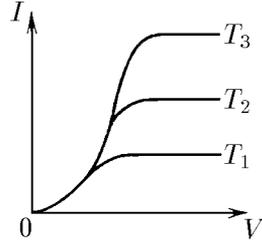
**8.1.12\*.** Между двумя параллельными сетками создано тормозящее электрическое поле напряженности  $E$ . По нормали к передней сетке падает широкий пучок электронов, у которого плотность заряда  $\rho_0$ , а скорость  $v_0$ . Пренебрегая взаимодействием самих электронов, найдите распределение плотности заряда между сетками в случае, если: а) скорость электронов настолько велика, что они проходят сквозь сетки и не возвращаются; б) электроны отражаются полем. Начиная с каких значений  $\rho_0$  во втором случае следует учитывать поле заряда между сетками?

◇ **8.1.13.** В вакуумном диоде два электрода: катод, с которого «испаряются» электроны (его специально подогревают), и анод, на который попадают вылетевшие с катода электроны. Объясните, почему диод можно использовать как выпрямитель. На рисунке показано, как при постоянном напряжении между анодом и катодом ток в цепи анода зависит от температуры катода. Объясните качественно эту зависимость.

◇ **8.1.14.** На рисунке приведены три графика зависимости тока в аноде от напряжения на электродах диода, снятые при разных значениях температуры катода. Какая кривая соответствует низкотемпературному катоду, а какая высокотемпературному?



К задаче 8.1.13



К задаче 8.1.14

**8.1.15.** Когда ток в диоде далек от насыщения, то вблизи поверхности катода образуется тонкий слой электронов, из которого большинство электронов возвращается на катод, притягиваясь к нему, а часть диффундирует в противоположную сторону и увлекается полем к аноду. Почему на внешней границе этого слоя поле можно считать нулевым?

**8.1.16\*.** Катод и анод в вакуумном диоде — две параллельные металлические пластины с зазором  $d = 0,5 \text{ см}$  между ними. Площадь каждой пластины  $S = 10 \text{ см}^2$ . При напряжении  $V = 5000 \text{ В}$  между катодом и анодом идет ток  $I = 1 \text{ А}$ . Считая электрическое поле между пластинами однородным, определите плотность заряда в зависимости от расстояния до катода. Примите начальную скорость электронов равной нулю. Можно ли в рассматриваемом случае пренебречь действием на электроны их пространственного заряда?

**8.1.17\*.** Для учета влияния пространственного заряда на работу плоского диода с межэлектродным расстоянием  $d$  нужно установить зависимость плотно-

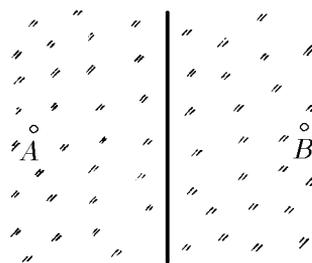
сти заряда  $\rho$ , потенциала  $\varphi$  и скорости электронов  $v$  от расстояния до катода  $x$ . Скорость электронов и напряженность поля на катоде при токах, далеких от насыщения, можно считать нулевыми. В случае, когда катод заземлен, потенциал можно представить в виде  $\varphi = V(x/d)^n$ . Определите отсюда  $\rho(x)$  и  $v(x)$ , а затем, используя условие стационарности тока, найдите показатель степени  $n$ . Получите точные выражения для плотности тока и тока через диод при заданном напряжении  $V$ . Площадь электродов  $S$ .

**8.1.18\***. Анод и катод диода имеют произвольную форму. Пусть при определенном напряжении на диоде в режиме, далеком от насыщения, между электродами установится пространственный заряд, плотность которого  $\rho(x, y, z)$ . Во сколько раз увеличится плотность этого заряда, если напряжение на диоде увеличить в  $n$  раз? Во сколько раз увеличится ток через диод?

**8.1.19.** Прямолинейный провод глубоко зарыт в однородном грунте. Ток утечки с единицы длины провода равен  $i$ . Определите плотность тока на расстоянии  $r$  от провода. Длина провода много больше  $r$ .

◇ **8.1.20.** а. К точке  $A$  среды подводится ток  $I$ , а от точки  $B$  отводится ток  $I$ . Считая, что каждая точка среды независимо от других точек создает стационарное сферически-симметрическое поле тока, определите поверхностную плотность тока в плоскости симметрии точек  $A$  и  $B$ . Каков полный ток через эту плоскость? Как изменится решение, если и к точке  $B$  подводится ток  $I$ ?

б\*. Определите распределение плотности тока по поверхности грунта, если на глубине  $h$  от его поверхности находится точечный источник с током  $I$ .



К задаче 8.1.20

**8.1.21\***. Параллельно поверхности идеального проводника на расстоянии  $l$  от нее движется со скоростью  $v$  точечный заряд  $q$ . Определите на расстоянии  $r$  от этого заряда линейную плотность «наведенного» поверхностного тока в проводнике;  $r > l$ .

## § 8.2. Проводимость. Сопротивление. Источники ЭДС

**8.2.1\***. а. Определите удельную проводимость металла, если число электронов проводимости в единице объема металла  $n_e$ , время между последовательными соударениями электрона с ионами кристаллической решетки  $\tau$ . Сразу после соударения любое направление скорости электрона равновероятно.

б. Оцените среднее время между последовательными соударениями электрона проводимости с ионами кристаллической решетки меди.

**8.2.2\***. Контейнер, наполненный воздухом при комнатной температуре и атмосферном давлении, облучается рентгеновским излучением, ионизирующим небольшую часть молекул. Отрицательными ионами являются молекулы  $O_2$ , «захватившие» электрон. Размер контейнера  $10 \times 10 \times 2$  см; две стенки  $10 \times 10$  см сделаны из металла, а остальные — из изолирующего материала. Между проводящими стенками приложено напряжение 1000 В, вызывающее ток 1,5 мкА. Считая число положительных и отрицательных однократно заряженных ионов одинаковым, оцените долю ионизированных молекул газа. Длина свободного пробега ионов  $10^{-7}$  м.

**8.2.3.** Под действием постоянного электрического поля в проводнике устанавливается постоянный ток, т. е. носители тока имеют постоянную среднюю скорость, а не ускорение. Это означает, что существует сила, действующая на носители тока со стороны вещества. Найдите среднюю силу, действующую на

носителем через удельную проводимость вещества  $\lambda$ , плотность носителей тока  $n$ , скорость их дрейфа  $v$  и заряд  $e$ .

**8.2.4.** Проволочное металлическое кольцо радиуса  $r = 0,1$  м вращается с угловой скоростью  $\Omega = 10^3$  рад/с. Определите, какой ток пойдет через кольцо при равномерном замедлении в течение времени  $\tau = 10^{-3}$  с его вращения до полной остановки. Сечение проволоки  $s = 0,5$  см<sup>2</sup>, удельная проводимость металла  $\lambda = 6 \cdot 10^7$  См/м.

**8.2.5.** Средняя скорость направленного движения зарядов в проводниках составляет не более нескольких сантиметров в секунду. Почему же настольная лампа зажигается сразу после нажатия кнопки выключателя?

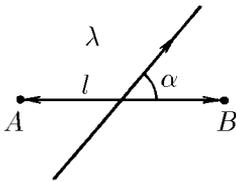
**8.2.6\*.** Определите отношение теплопроводности и удельной проводимости для ряда металлов при 0 °С, пользуясь приведенной таблицей. Чем объяснить полученный результат?

Металлы	$\kappa$ , Вт/(м·К)	$\lambda$ , $10^7$ См/м	Металлы	$\kappa$ , Вт/(м·К)	$\lambda$ , $10^7$ См/м
Медь	385	6,0	Железо	60	0,9
Цинк	111	1,7	Свинец	34	0,5

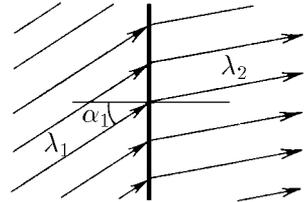
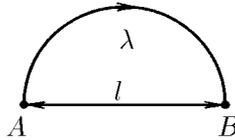
◇ **8.2.7.** Определите напряженность электрического поля и разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  проводника, если ток в нем идет под углом  $\alpha$  к направлению прямой  $AB$ . Найдите разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$ , если линия тока, соединяющая эти точки, является полуокружностью. Расстояние от  $A$  до  $B$  равно  $l$ . Плотность тока в проводнике  $j$ , его удельная проводимость  $\lambda$ .

**8.2.8.** Плотность тока  $j$  перпендикулярна плоскости раздела двух сред с удельной проводимостью  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Найдите поверхностную плотность заряда на этой плоскости.

◇ **8.2.9.** На плоскости раздела двух сред, удельная проводимость которых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , из первой среды идут линии тока, образуя угол  $\alpha_1$  с нормалью к плоскости. Какой угол образуют с этой нормалью линии тока во второй среде? Чему равна поверхностная плотность заряда на границе раздела сред? В первой среде плотность тока  $j$ .



К задаче 8.2.7



К задаче 8.2.9

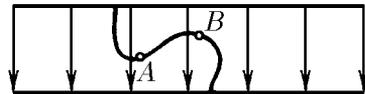
**8.2.10.** Удельная проводимость среды зависит от координаты  $x$ :  $\lambda = \lambda_0 a / (a + x)$ . Как зависит от  $x$  плотность заряда при стационарной плотности тока  $j$ , направленной вдоль оси  $x$ ?

**8.2.11.** В центре проводящего шара с удельным сопротивлением  $\rho$  оказался избыточный заряд  $Q_0$ .

а. Как зависит от  $Q_0$  ток, текущий из центра шара к его поверхности?

б\*. Как будет меняться заряд в центре шара со временем?

◇ **8.2.12.** Пластины заряженного конденсатора соединены тонким изогнутым проводником. Как направлен ток между точками  $A$  и  $B$ ? Как это согласовать с направлением поля в конденсаторе?

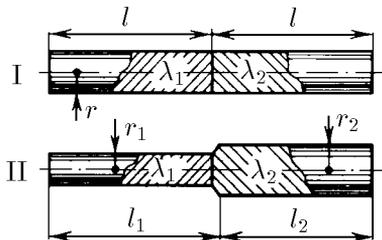


К задаче 8.2.12

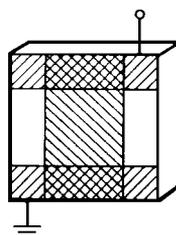
**8.2.13.** Цилиндр из проводящего вещества с удельной проводимостью  $\lambda$  имеет длину  $l$  и поперечное сечение  $S$ . Разность потенциалов между его торцами равна  $V$ . Определите ток через сечение цилиндра. Каково сопротивление этого цилиндра?

◇ **8.2.14.** Из металлов с удельной проводимостью  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  изготовили длинные стержни и соединили их так, как показано на рисунке. На крайних торцах поддерживается разность потенциалов  $V$ . Определите сопротивление соединенных стержней и токи в них.

◇ **8.2.15.** Экспериментатор хочет приготовить слой алюминия толщины 500 нм, напыляя его в вакууме на чистую поверхность стеклянной пластинки. Сначала он наносит два довольно толстых слоя алюминия, оставляя в центре пластинки полосу чистой поверхности, закрытую маской. Потом, используя другую маску, он напыляет на стекло в поперечном направлении полосу алюминия той же ширины, что и чистая полоска. При этом толстые слои используются как выводы для измерения сопротивления напыляемого слоя. При каком сопротивлении слоя напыление следует остановить, если удельное сопротивление алюминия при комнатной температуре равно  $2,83 \cdot 10^{-8}$  Ом·м?



К задаче 8.2.14



К задаче 8.2.15

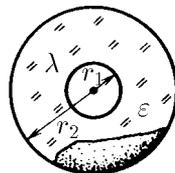
**8.2.16\*.** Длинная цилиндрическая трубка из изолятора покрыта тонким проводящим слоем. Сопротивление между торцами трубки  $R_0$ . Проводящий слой прорезают тонким резцом по винтовой линии, идущей под углом  $\alpha$  к образующей трубки. После этого подсоединяют контакты и наносят изолирующее покрытие. Определите сопротивление получившегося резистора.

**8.2.17\*.** В среде с малой удельной проводимостью  $\lambda$  находится металлический шар радиуса  $r$ . Определите ток, стекающий с шара, если его потенциал равен  $V$ . Если такой шар подсоединить изолированным проводом к громоотводу, то каким будет сопротивление заземления?

**8.2.18\*.** Два электрода — металлические шары диаметра 30 см — висят в море на изолированных кабелях на глубине 60 м. Расстояние между шарами 300 м. Удельная проводимость морской воды 4 См/м. Оцените сопротивление воды между шарами.

**8.2.19\*.** На медные электроды, погруженные в большой сосуд с подсоленной водой, подается постоянное напряжение. С помощью зонда, подсоединенного к высокоомному вольтметру, можно получить «карту» эквипотенциалей. Как по данным этой карты определить направление линий тока и плотность тока? Почему электрическое поле в воде такое же, как и для электродов в вакууме при том же напряжении между ними?

◇ **8.2.20.** Радиусы обкладок сферического конденсатора соответственно  $r_1$  и  $r_2$ , заряд  $\pm q$ . Найдите сопротивление и ток утечки в этом конденсаторе, если между обкладками находится вещество с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и удельной проводимостью  $\lambda$ .



К задаче 8.2.20

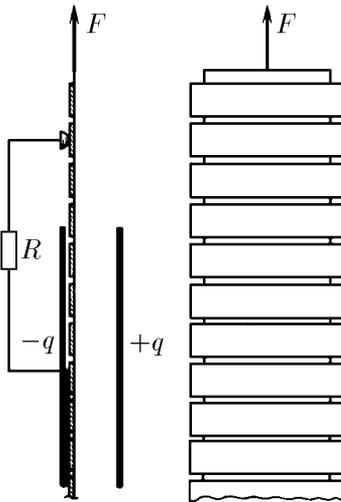
**8.2.21\***. После заполнения конденсатора средой с удельной проводимостью  $\lambda$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  сопротивление между его зажимами оказалось равным  $R$ . Найдите емкость конденсатора. Зависит ли результат от конструкции конденсатора?

**8.2.22\***. Где на нижней и верхней поверхностях круглой проводящей пластины нужно расположить электрические контакты, чтобы сопротивление между ними было минимальным?

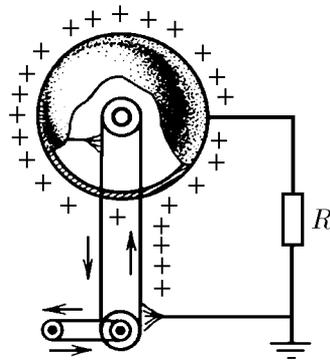
**8.2.23.** Почему при рассмотрении электрического тока в веществе кинетическую энергию носителей тока, связанную с их упорядоченным движением, не учитывают? Оцените кинетическую энергию одного электрона (в электрон-вольтах) при токе  $I = 100$  А в проволочке из натрия сечения  $S = 1$  мм<sup>2</sup>. Число электронов проводимости в единице объема проволочки  $n_e = 2,5 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup>.

◇ **8.2.24\***. Лента состоит из узких проводящих полосок с еще более узкими изолирующими зазорами. Она соприкасается с одной пластиной конденсатора и с небольшим контактом, между которыми включено сопротивление  $R$ . До этого лента не была заряжена, а заряд пластин конденсатора был  $\pm q$ . Длина пластин  $l$ , а их ширина совпадает с шириной ленты. Ленту вытягивают из конденсатора с силой  $F$ . Найдите ток через сопротивление и установившуюся скорость ленты. Расстояние от края пластин конденсатора до контакта много больше расстояния между ними и много меньше их длины.

◇ **8.2.25.** В генераторе Ван де Граафа носители заряда, «приклеившиеся» к непроводящей ленте, переносятся против поля. Внутри шара заряды снимаются с ленты сильным полем, локализованным на контактной щетке. Необходимую для движения ленты энергию может поставлять электродвигатель, бензиновый мотор или рука человека. Полный заряд на ленте  $q$ , ее длина  $l$ , сопротивление между шаром и землей  $R$ . Определите установившийся потенциал шара в двух случаях: а) лента движется с постоянной скоростью  $v$ ; б) ленту двигают, прикладывая к ней постоянную силу  $F$ .



К задаче 8.2.24



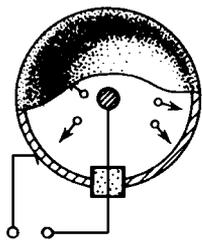
К задаче 8.2.25

◇ **8.2.26.** Электрическая «атомная» батарея представляет собой металлическую сферу с изолированным от нее кусочком  $\beta$ -радиоактивного вещества. Число атомов, распадающихся в единицу времени, равно  $\nu$ . Энергия вылетевших

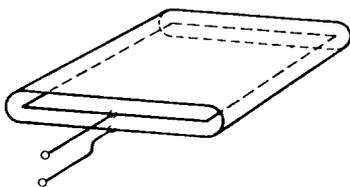
электронов  $W$ . Определите напряжение на разомкнутых клеммах батареи. Какой наибольший ток может давать эта батарея? При каком сопротивлении нагрузки батарею можно считать генератором тока?

◇ **8.2.27\***. Источник тока состоит из тонкой пластины радиоактивного вещества, окруженной проводящим корпусом. Ширина зазора между корпусом и пластиной много меньше линейных размеров пластины. Как зависит ток от напряжения между корпусом и радиоактивной пластиной, если ток при положительном напряжении равен  $I_0$ ? Энергия вылетающих из пластин электронов  $eV_0$ . Электроны вылетают во все стороны равномерно.

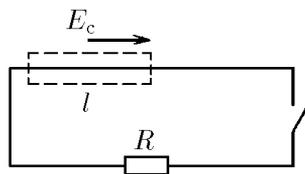
◇ **8.2.28**. Не углубляясь в вопрос о происхождении сторонних сил, постройте график потенциала разомкнутой и замкнутой цепи с сопротивлением  $R$ . На участке цепи длины  $l$  сторонняя сила, отнесенная к единице заряда, равна  $E_c$ , вне этого участка — нулю. Какую энергию на единицу заряда передает источник сторонних сил на участке  $l$ ?



К задаче 8.2.26



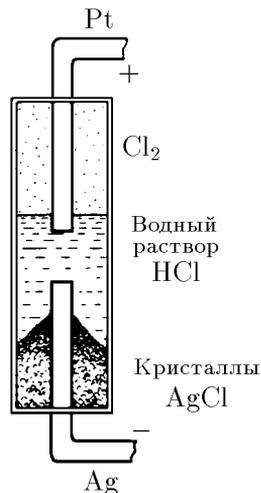
К задаче 8.2.27



К задаче 8.2.28

◇ **8.2.29**. В химическом элементе идут реакции:  $\text{Ag} + \text{Cl}^- = \text{AgCl} + e$  на отрицательном серебряном электроде (платина в реакцию не вступает). При очень малом токе на каждый моль образующегося  $\text{AgCl}$  внутри элемента выделяется 3280 кал тепла. При протекании реакции  $\text{Ag} + (1/2)\text{Cl}_2 = \text{AgCl}$  на каждый моль образующегося  $\text{AgCl}$  выделяется 29380 кал. Найдите ЭДС элемента, т. е. энергию, сообщаемую элементом единице прошедшего заряда ( $1 \text{ кал} \approx 2,6 \cdot 10^{19} \text{ эВ}$ ).

**8.2.30**. При растворении цинка в  $\text{H}_2\text{SO}_4$  выделяется  $4,40 \cdot 10^5$  Дж/моль тепла, на выделение меди из  $\text{CuSO}_4$  требуется затратить энергии  $2,34 \cdot 10^5$  Дж/моль. Казалось бы, ЭДС элемента Даниэля можно рассчитать, приравняв разность этих значений энергий протекшему заряду, умноженному на ЭДС. Вычислите ЭДС таким образом с точностью до 1%. Однако истинное значение ЭДС оказывается большим (при нормальной температуре оно равно 1,09 В.). В чем дело? Откуда берется энергия?



К задаче 8.2.29

**8.2.31**. Элемент Даниэля дает ток 0,1 А в течение 8 ч. Найдите расход цинка и медного купороса  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  (в молях).

**8.2.32\***. При разрядке конденсатора, заряд которого  $q$ , через электролитическую ванну с подкисленной водой выделяется масса  $m$  гремучего газа. Масса выделяющегося при электролизе вещества зависит только от прошедшего заряда. Значит, разрядив конденсатор через  $k$  последовательно соединенных ванн, получим массу  $km$  гремучего газа. Сжигая этот газ, получим много энергии.

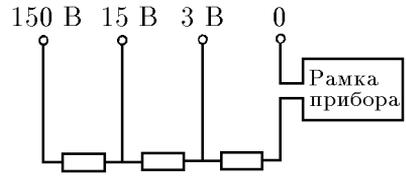
При достаточно большом  $k$  эта энергия превзойдет первоначальную энергию заряженного конденсатора! Следовательно, в чем-то наши рассуждения ошибочны. Найдите эту ошибку.

**8.2.33.** Полная плотность тока в электролитах является суммой плотности тока положительных ионов и плотности тока отрицательных ионов:  $j = e_+n_+v_+ + e_-n_-v_-$ , где  $e_{\pm}$ ,  $v_{\pm}$  и  $n_{\pm}$  — заряд, скорость положительных и отрицательных ионов и их число в единице объема. Почему масса вещества, выделившегося на катоде, пропорциональна полному току, а не току только положительных ионов?

**8.2.34\*.** Противо-ЭДС одной электролитической ванны  $\mathcal{E}$ . Имеется конденсатор, заряженный до напряжения  $V \gg \mathcal{E}$ . Сколько одинаковых ванн нужно соединить последовательно, чтобы, разрядив конденсатор, выделить на них максимальную массу металла из раствора соли?

### § 8.3. Электрические цепи

◇ **8.3.1.** Шкала вольтметра имеет 150 делений. Вольтметр имеет четыре клеммы, рассчитанные на измерение напряжения до 3, 15 и 150 В. Стрелка прибора отклоняется на 50 делений при прохождении через него тока 1 мА. Каково внутреннее сопротивление прибора при включении его на различные диапазоны?

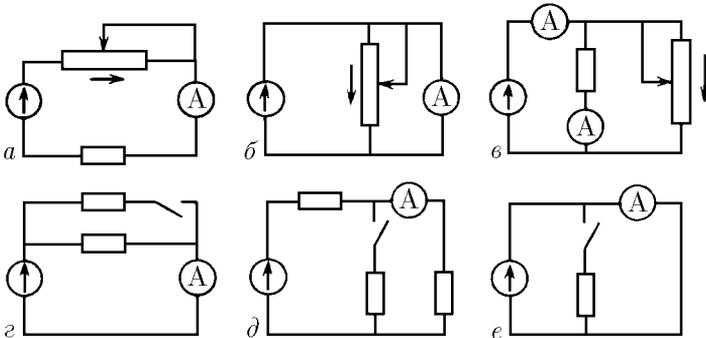


К задаче 8.3.1

**8.3.2.** Какой шунт нужно присоединить к гальванометру, имеющему шкалу на 100 делений с ценой деления 1 мкА и внутреннее сопротивление 180 Ом, чтобы им можно было измерять ток до 1 мА?

**8.3.3.** Вольтметр со шкалой на 100 В имеет внутреннее сопротивление 10 кОм. Какую наибольшую разность потенциалов можно измерить этим прибором, если присоединить к нему добавочное сопротивление 90 кОм?

◇ **8.3.4.** Как будут реагировать приборы на перемещение движка реостатов в направлении стрелок на схемах  $a$ – $в$  и на замыкание ключей в схеме  $г$ – $е$ ? Внутреннее сопротивление генератора очень мало\*).



К задаче 8.3.4

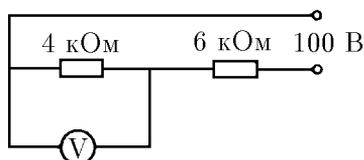
**8.3.5.** а. Требуется определить падение напряжения на сопротивлении  $R$ . Для этого к концам сопротивления подключают вольтметр. Какая относительная погрешность будет допущена при измерениях, если показания вольтметра

\*) Кружком со стрелкой на схемах обозначен генератор. Стрелка указывает направление тока генератора.

принять за то, которое имело место до его подключения? Сила тока в цепи поддерживается постоянной. Сопротивление вольтметра  $r$ .

б. Для измерения тока в цепи с сопротивлением  $R$  включен амперметр. Какая относительная ошибка будет допущена, если считать, что включение амперметра не изменило тока? Напряжение на концах цепи поддерживается постоянным. Сопротивление амперметра  $r$ .

◇ **8.3.6.** Вольтметр включен параллельно сопротивлению  $4\text{ кОм}$  и показывает  $36\text{ В}$ . Напряжение на клеммах источника тока поддерживается постоянным и равным  $100\text{ В}$ . Найдите отношение тока, идущего через вольтметр, к току, идущему через сопротивление  $6\text{ кОм}$ . Что покажет этот вольтметр, если заменить сопротивления соответственно на  $4$  и  $6\text{ Ом}$ ?

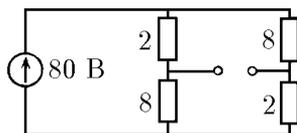


К задаче 8.3.6

**8.3.7.** Для нормальной работы прибора необходимо напряжение  $20\text{ В}$ , а напряжение в сети  $120\text{ В}$ . Экспериментатор подключил к цепи делитель напряжения с сопротивлением плеч  $5$  и  $1\text{ кОм}$  и до подключения прибора высокоомным вольтметром проверил, что на втором сопротивлении напряжение действительно  $20\text{ В}$ . Однако подключенный прибор не заработал. Экспериментатор сообразил в чем дело и добился нормальной работы прибора, подключив его к делителю напряжения с сопротивлением плеч  $250$  и  $100\text{ Ом}$ . Найдите сопротивление прибора, если и в этом случае он подключен ко второму сопротивлению делителя.

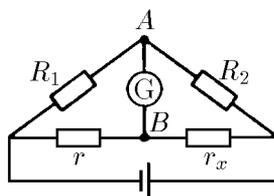
**8.3.8.** Переключая вольтметр на измерение вдвое большего диапазона напряжения (со  $100$  на  $200\text{ В}$ ), ожидали отклонения стрелки на вдвое меньшее число делений. Однако этого не произошло, хотя в остальной части цепи ничего не изменяли. Больше или меньше напряжение покажет вольтметр после переключения?

◇ **8.3.9.** Чему равна разность потенциалов между клеммами в схеме на рисунке? Что покажет амперметр, если его подключить к клеммам\*)?



К задаче 8.3.9

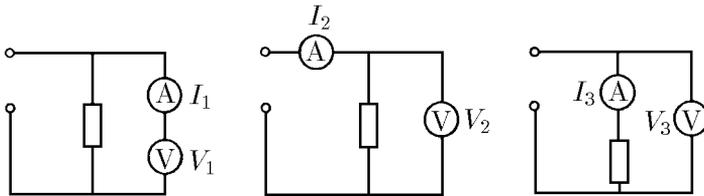
◇ **8.3.10.** В мосте Уитстона сопротивления подбирают таким образом, что чувствительный гальванометр, подключенный к точкам  $A$  и  $B$ , показывает нуль. Считая сопротивления  $R_1, R_2, r$  известными, определите сопротивление  $r_x$ . Если поменять местами батарею и гальванометр, то снова получится мостовая схема. Сохраняется ли баланс в новой схеме?



К задаче 8.3.10

◇ **8.3.11.** Одни и те же приборы при присоединении их по трем разным схемам дают следующие показания:  $V_1, I_1; V_2, I_2; V_3, I_3$ . Найдите сопротивление вольтметра, резистора и амперметра. Напряжение, подаваемое на эти схемы, не обязательно одинаково.

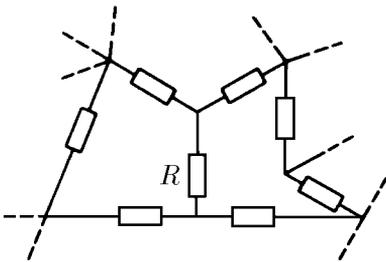
\*) Сопротивления на рисунках здесь и далее приведены в омах без указания единиц на схемах. Если характеристики измерительных приборов не упомянуты, то сопротивление амперметра считайте много меньшим сопротивлений схемы, а сопротивление вольтметра — много большим.



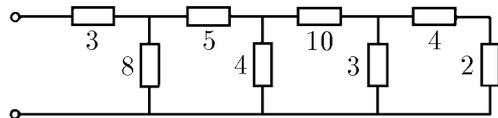
К задаче 8.3.11

◇ 8.3.12\*. Участок схемы состоит из неизвестных сопротивлений. Как, имея амперметры, вольтметр, батарею и соединительные провода, измерить сопротивление  $R$ , не разрывая ни одного контакта в схеме?

◇ 8.3.13. Чему равно сопротивление между клеммами в схеме, изображенной на рисунке?



К задаче 8.3.12

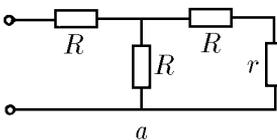


К задаче 8.3.13

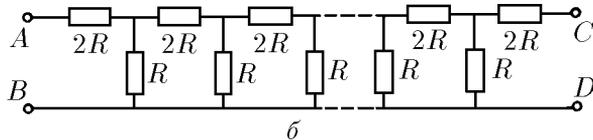
◇ 8.3.14. а. Каким должно быть сопротивление  $r$ , чтобы входное сопротивление между клеммами было равно тоже  $r$ ?

◇ б\*. Какое сопротивление  $r$  нужно присоединить к клеммам  $C$  и  $D$ , чтобы сопротивление всей цепочки между клеммами  $A$  и  $B$  не зависело от числа элементарных ячеек?

в. Полный ток в цепи равен  $I$ . Определите токи в  $n$ -й ячейке, если цепочка сопротивлений бесконечна. Чему равно сопротивление такой цепочки?



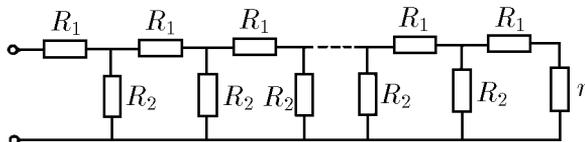
а



б

К задаче 8.3.14

◇ 8.3.15\*. Атенуатор представляет собой делитель напряжения, схема которого представлена на рисунке. Каковы должны быть сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , чтобы на каждом следующем сопротивлении  $R_1$  напряжение было в десять раз меньше, чем на предыдущем?

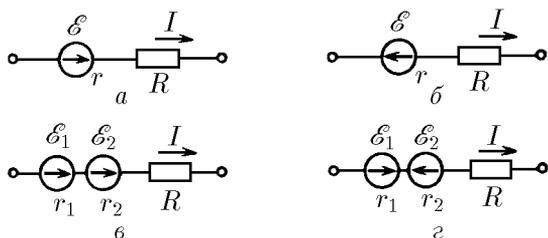


К задаче 8.3.15

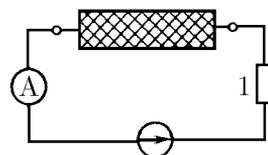
◇ **8.3.16.** В сопротивлении  $R$  на единицу прошедшего заряда рассеивается энергия  $IR$  независимо от направления тока  $I$ . Генератор на единицу прошедшего через него заряда передает в цепь энергию (ЭДС)  $\mathcal{E}$ , если направление тока совпадает с направлением напряженности сторонних сил (сторонней силы, отнесенной к единице заряда), и забирает энергию  $\mathcal{E}$ , если их направления противоположны. При прохождении тока через генератор на его внутреннем сопротивлении тоже происходит рассеяние энергии. Используя энергетические соображения, определите разность потенциалов на участках цепей, приведенных на рисунке.

**8.3.17.** Батарея, замкнутая на сопротивлении 10 Ом, дает ток 3 А; замкнутая на сопротивление 20 Ом, она дает ток 1,6 А. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

◇ **8.3.18.** К ящику с двумя клеммами подключили амперметр, сопротивление 1 Ом и источник постоянного напряжения 5 В. Амперметр показал ток 1 А. Когда включили другой источник напряжения 20 В, амперметр показал ток 2 А. Что находится внутри ящика?



К задаче 8.3.16



К задаче 8.3.18

**8.3.19.** Идеальным генератором напряжения называется такой генератор, напряжение на котором при любой нагрузке одинаково. Идеальным генератором тока называется генератор, создающий одинаковый ток при любой нагрузке. Какой смысл имеет утверждение: «У идеального генератора тока бесконечное сопротивление, а у идеального генератора напряжения сопротивление нулевое»? Реальный генератор напряжения теряет энергию на внутреннем сопротивлении, он эквивалентен идеальному генератору напряжения с последовательно присоединенным сопротивлением. Реальный генератор тока имеет конечное сопротивление утечки, он эквивалентен идеальному генератору тока с параллельно присоединенным сопротивлением (шунтом). Изобразите схему генератора тока с внутренним шунтом, эквивалентного генератору с напряжением 120 В и внутренним сопротивлением 20 Ом\*).

**8.3.20.** Генератор с одной нагрузкой дает ток 4 А при напряжении 120 В, а с другой нагрузкой — ток 2 А при напряжении 160 В. Найдите параметры эквивалентных схем генератора тока и генератора напряжения.

**8.3.21.** Через аккумулятор под конец его зарядки течет ток 4 А. При этом напряжение на его клеммах 12,6 В. При разрядке того же аккумулятора током 6 А напряжение составляет 11,1 В. Найдите ток короткого замыкания.

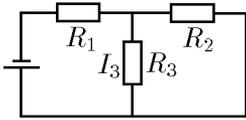
**8.3.22.** При исследовании зависимости тока фотоэлемента от его освещенности используют микроамперметр, шкалы которого для измерений не хватает. Чтобы увеличить вдвое пределы измерения токов, к микроамперметру подсоединяют соответствующий шунт. После этого при том же освещении фотоэлемента изменилось не только отклонение стрелки прибора, но и сама сила тока. Объясните почему, и подтвердите свое объяснение расчетом. Фотоэлемент при посто-

\*) Напряжением генератора называют разность потенциалов на разомкнутом выходе генератора.

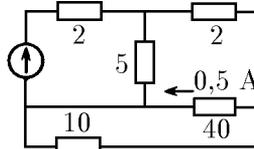
яном освещении можно считать генератором напряжения или генератором тока с фиксированными параметрами.

◇ **8.3.23.** Сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  в схеме, изображенной на рисунке, и ток  $I_3$ , протекающий через сопротивление  $R_3$ , известны. Определите токи через сопротивление  $R_1$  и  $R_2$  и напряжение на батарее.

◇ **8.3.24.** В схеме, изображенной на рисунке, указаны сопротивления и ток через одно из сопротивлений. Определите токи через все сопротивления и напряжение генератора.



К задаче 8.3.23



К задаче 8.3.24

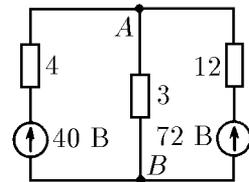
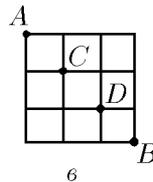
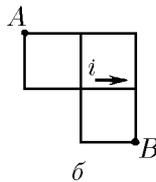
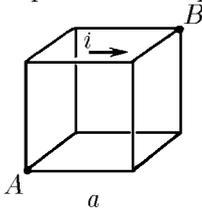
◇ **8.3.25.** Используя симметрию схем, решите следующие задачи.

а. Ребра проволочного куба имеют одинаковое сопротивление  $r$ . Ток в одном ребре  $i$ . Определите разность потенциалов между узлами  $A$  и  $B$ , сопротивление между этими узлами и полный ток от  $A$  к  $B$ .

б. Определите токи в каждой стороне ячейки, полный ток от узла  $A$  к узлу  $B$  и полное сопротивление между этими узлами. Сторона каждой ячейки имеет сопротивление  $r$ , и ток, протекающий по одной из сторон, равен  $i$ .

в. Каждая сторона квадрата имеет сопротивление  $r$ . Определите сопротивление между узлами  $A$  и  $B$ . Чему равно сопротивление между узлами  $C$  и  $D$ ?

◇ **8.3.26.** При решении задач с несколькими источниками ЭДС можно сначала рассчитать токи, создаваемые каждым источником ЭДС, потом найти полный ток как сумму этих токов. Этот способ вполне законен, если при расчетах принимать во внимание внутреннее сопротивление источников, и называется методом суперпозиции. Определите, используя этот метод, ток между узлами  $A$  и  $B$ .



К задаче 8.3.25

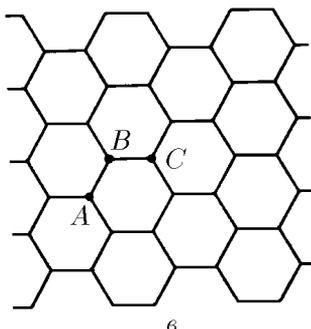
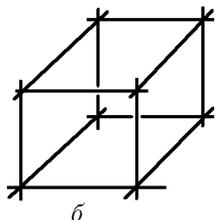
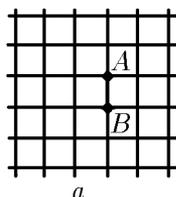
К задаче 8.3.26

◇ **8.3.27\*.** а. Если в бесконечной схеме, состоящей из квадратных ячеек, через один узел  $A$  подводят ток  $i$ , а через соседний узел  $B$  отводят ток  $i$ , то какой ток идет по сопротивлению, соединяющему узлы  $A$  и  $B$ ? Каково эквивалентное сопротивление цепи между этими узлами, если сопротивление стороны ячейки  $r$ ?

◇ б. Каково эквивалентное сопротивление между соседними узлами бесконечной кубической арматуры, если сопротивление ребра куба  $r$ ?

◇ в. Определите сопротивление между узлами  $A$  и  $B$  двумерной бесконечной сетки с ячейками в виде правильных шестиугольников и узлами  $C$  и  $A$ , расположенными через один соседний узел. Сторона каждой ячейки имеет сопротивление  $r$ .

**8.3.28.** Две батареи с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 20$  В,  $\mathcal{E}_2 = 30$  В и внутренними сопротивлениями соответственно  $r_1 = 4$  Ом,  $r_2 = 60$  Ом соединены параллельно. Каковы параметры  $\mathcal{E}$  и  $r$  генератора, которым можно заменить батареи без изменения тока в нагрузке?



К задаче 8.3.27

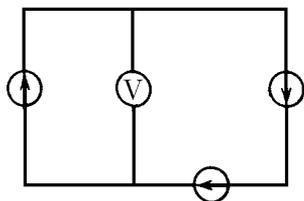
**8.3.29.** Две батареи с одинаковым внутренним сопротивлением соединены так, что ЭДС образовавшегося источника напряжения равна  $\mathcal{E}$ . ЭДС одной из батарей  $(3/2)\mathcal{E}$ . Нарисуйте все возможные схемы соединений. Для каждой из схем определите ЭДС второй батареи.

**8.3.30.** Три одинаковые батареи, соединенные параллельно, подключены к внешнему сопротивлению. Как изменится ток через это сопротивление, если переключить полярность одной из батарей?

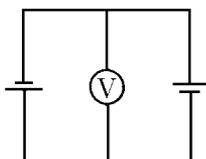
◇ **8.3.31.** Что покажет вольтметр, если генераторы одинаковы? Какой ток идет в цепи, если напряжение каждого генератора  $1,5\text{ В}$ , а внутреннее сопротивление  $2\text{ Ом}$ ?

◇ **8.3.32.** Найдите показания вольтметра, если внутреннее сопротивление одной батареи  $3\text{ Ом}$ , а другой  $1\text{ Ом}$ . ЭДС каждой батареи  $1,5\text{ В}$ .

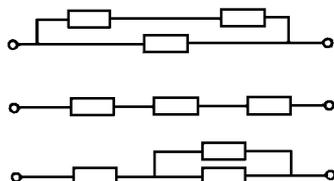
◇ **8.3.33.** Электроплитка имеет три секции с одинаковым сопротивлением. При параллельном их соединении вода в чайнике закипает через  $6\text{ мин}$ . Через какое время закипит вода той же массы и той же начальной температуры при соединении секций, как показано на рисунке?



К задаче 8.3.31



К задаче 8.3.32



К задаче 8.3.33

**8.3.34.** Имеется проволока с сопротивлением  $R$ , через которую можно без риска ее пережечь пропускать ток, не превышающий  $I$ . Какую наибольшую мощность может иметь электрический нагреватель, изготовленный из этой проволоки, при включении в сеть с напряжением  $V \ll IR$ ? Проволоку можно разрезать на куски и соединять последовательно и параллельно.

**8.3.35.** Две электроплитки, соединенные в цепь параллельно, потребляют мощность  $N$ . Какую мощность будут потреблять эти электроплитки, включенные последовательно, если одна из электроплиток потребляет мощность  $N_0$ ?

**8.3.36.** В старой аккумуляторной батарее, состоящей из  $n$  последовательно соединенных аккумуляторов с внутренним сопротивлением  $r$ , внутреннее сопротивление одного из аккумуляторов резко возросло до  $10r$ . Считая ЭДС всех аккумуляторов одинаковой, определите, при каком сопротивлении нагрузки мощ-

ность, выделяемая на ней, не изменится при коротком замыкании поврежденного аккумулятора.

**8.3.37.** Аккумулятор подключен один раз к внешней цепи с сопротивлением  $R_1$ , другой раз — с  $R_2$ . При этом количество теплоты, выделяющейся во внешней цепи в единицу времени, одинаково. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

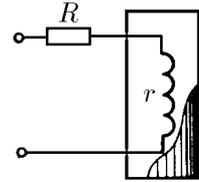
**8.3.38.** Сравните напряжение на клеммах, а также мощность, выделяемую во внешней цепи батарей из 50 элементов, соединенных последовательно и имеющих каждый сопротивление 0,2 Ом и ЭДС 2 В, если сопротивление внешней цепи 0,2 Ом, и электрофорной машиной, создающей на шаровых кондукторах разность потенциалов 100 кВ и обладающей внутренним сопротивлением  $10^8$  Ом, если сопротивлением внешней цепи  $10^5$  Ом. Как изменится ток и мощность во внешней цепи, если сопротивление ее удвоится?

**8.3.39.** От источника напряжения 10 кВ требуется передать на расстоянии 5 км мощность 500 кВт; допустимая потеря напряжения в проводах 1%. Каково минимальное сечение медного провода? Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы снизить потери мощности в 100 раз в той же линии при передаче той же мощности?

**8.3.40.** Как зависит мощность генератора, выделяемая на внутреннем сопротивлении, от тока  $I$ ? Напряжение генератора  $\mathcal{E}$ , внутреннее сопротивление  $r$ . Какому сопротивлению соответствует максимальная мощность?

**8.3.41.** Какую наибольшую мощность можно получить от генератора с напряжением 100 В и внутренним сопротивлением 20 Ом? Какую мощность можно получить от того же генератора при КПД 80%? Если максимальный допустимый ток через генератор составляет 0,1 от тока короткого замыкания, то какую наибольшую мощность можно получить от генератора, не опасаясь его порчи?

◇ **8.3.42\*.** В термостат нужно подводить тепло с постоянной скоростью. Во время опыта в нем изменяется температура, что вызывает изменение сопротивления нагревательной спирали. Нужно, чтобы выделяемая на сопротивлении спирали  $r$  мощность почти не менялась при малых изменениях  $r$ . Постройте график зависимости мощности от  $r$  и определите, используя этот график, при каком соотношении  $R$  и  $r$  достигается желаемая нечувствительность мощности к изменению  $r$ .



К задаче 8.3.42

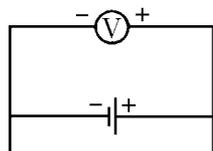
**8.3.43.** Зарядка аккумулятора с ЭДС  $\mathcal{E}$  осуществляется зарядной станцией, напряжение в сети которой  $V$ . Внутреннее сопротивление аккумулятора  $r$ . Определите полезную мощность, расходуемую на зарядку аккумулятора, и мощность, идущую на выделение тепла в нем. Превышает ли полезная мощность аккумулятора тепловую? Почему при быстрой зарядке аккумулятора нужно специально заботиться об отводе тепла?

◇ **8.3.44.** Батарея с ЭДС 4 В и внутренним сопротивлением 1 Ом входит в состав неизвестной цепи. К полюсам батареи подключен вольтметр, он показывает напряжение 6 В. Определите количество теплоты, выделяющейся в единицу времени на внутреннем сопротивлении батареи.

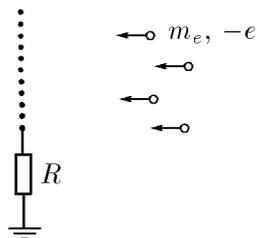
**8.3.45.** В сферическом конденсаторе емкости  $C$  поддерживается постоянное напряжение  $V$ . Определите количество теплоты, выделяющейся в единицу времени на конденсаторе, если удельная проводимость среды, заполняющей конденсатор,  $\lambda$ , а ее диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon \approx 1$ .

◇ **8.3.46.** Зонд, представляющий собой медную сетку, заземлен через сопротивление  $R$  и помещен в пучок электронов, скорость которых на большом расстоянии от зонда равна  $v$ . Определите количество теплоты, выделяющейся в единицу времени при бомбардировке зонда электронами, если ток заземления равен  $I$ .

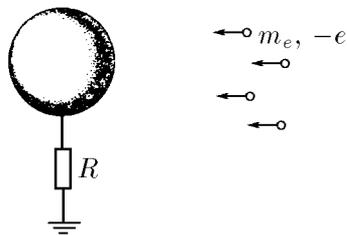
◇ **8.3.47.** Шар радиуса  $a$  через сопротивление  $R$  соединен с землей. Из бесконечности на него со скоростью  $v$  налетает пучок электронов, число частиц в единице объема которого  $n_e$ . Определите предельный заряд шара. Считать скорость частиц большой (подумайте, по сравнению с какой величиной).



К задаче 8.3.44



К задаче 8.3.46



К задаче 8.3.47

**8.3.48\*.** Тепловая мощность спирали электроплитки линейно зависит от разности температур спирали и комнатного воздуха:  $N = \kappa(T - T_0)$ . Сопротивление спирали тоже линейно зависит от этой разности:  $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ , где  $R_0$  — сопротивление спирали при комнатной температуре. До какой температуры нагреется спираль при пропускании через нее тока  $I$ ?

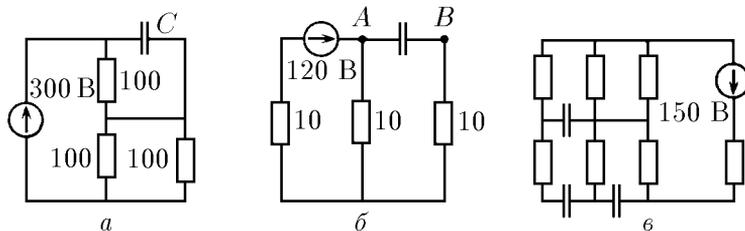
## § 8.4. Конденсаторы и нелинейные элементы в электрических цепях

◇ **8.4.1.** Схемы цепей постоянного тока с конденсаторами даны на рисунке.

а. Определите заряд конденсатора емкости 4 мкФ в стационарном режиме.

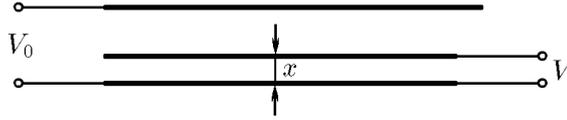
б. Чему равно напряжение между точками  $A$  и  $B$  в стационарном режиме? Что покажет вольтметр с внутренним сопротивлением 5 кОм, если его подключить к точкам  $A$  и  $B$ ?

в. Определите стационарное напряжение на всех конденсаторах, если все сопротивления одинаковы.



К задаче 8.4.1

◇ **8.4.2.** К закрепленным внешним пластинам подключен источник эталонного напряжения  $V_0$ . Измеряемое напряжение  $V$  подается на нижнюю внешнюю пластину и подвижную внутреннюю, имеющую ту же площадь, что и внешние пластины. Подвижную пластину перемещают в зазоре, пока действующая на нее электрическая сила не обратится в нуль, и измеряют расстояние  $x$  от нее до нижней внешней пластины. Найдите  $V$ , если расстояние между внешними пластинами  $l$ , а размеры пластин много больше этого расстояния. Как изменить схему подключения, чтобы измерять напряжения  $V > V_0$ ?

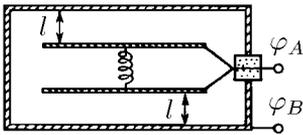


К задаче 8.4.2

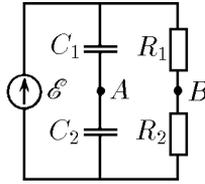
◇ 8.4.3. Для измерения напряжения применяются вольтметры двух типов: электромагнитные, измеряющие напряжение по току, проходящему через рамку прибора, и электростатические, грубая схема которых дана на рисунке. Через изолирующую пробку к двум параллельным пластинам подходит провод. Пластины удерживаются на месте пружиной жесткости  $k$ . Потенциал проводящей коробочки  $\varphi_B$ . Определите потенциал  $\varphi_A$ , если растяжение пружины равно  $x$ . В нерастянутом состоянии пружины расстояние от пластин до стенок коробочки  $l$ ; площадь пластин  $S \gg l^2, x^2$ .

◇ 8.4.4. Определите разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$ . Каким вольтметром ее следует измерять? Какие заряды будут на конденсаторах при присоединении электромагнитного вольтметра? Почему электромагнитный вольтметр тем лучше, чем больше его внутреннее сопротивление, а электростатический вольтметр — чем меньше его емкость?

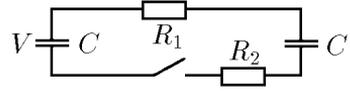
◇ 8.4.5\*. Найдите количество теплоты, выделившейся на каждом сопротивлении после замыкания ключа. Один конденсатор вначале был заряжен до напряжения  $V$ , а второй не был заряжен.



К задаче 8.4.3



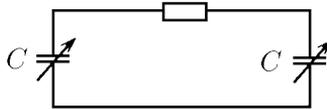
К задаче 8.4.4



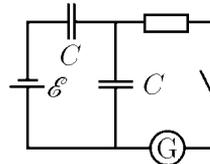
К задаче 8.4.5

◇ 8.4.6\*. Найдите количество теплоты, выделившейся на сопротивлении, если при поочередном изменении емкости конденсаторов от  $C$  до  $C/2$  затрачивается работа  $A$ . Первоначальный заряд каждого конденсатора  $q$ .

◇ 8.4.7. Какой заряд протечет через гальванометр после замыкания ключа? Какое количество теплоты выделится на сопротивлении?



К задаче 8.4.6

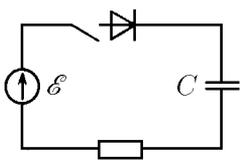


К задаче 8.4.7

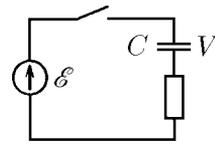
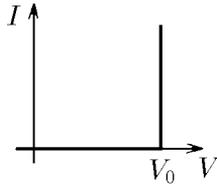
◇ 8.4.8. Диод имеет вольт-амперную характеристику, изображенную на рисунке. При напряжении  $V_0$  диод открывается. Конденсатор вначале не заряжен. Какое количество теплоты выделится на сопротивлении после замыкания ключа?

◇ 8.4.9. Какое количество химической энергии запасается в аккумуляторе после замыкания ключа в электрической цепи, изображенной на рисунке? Какое количество теплоты выделяется при этом?

8.4.10. Батарея с ЭДС  $\mathcal{E}$  состоит из  $n$  последовательно соединенных одинаковых элементов. Как нужно заряжать конденсатор емкости  $C$ , чтобы потери составляли наименьшую возможную долю запасенной энергии? Какова эта доля?



К задаче 8.4.8



К задаче 8.4.9

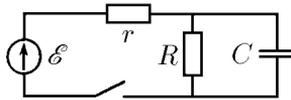
◇ 8.4.11\*. Начальные емкость и заряд конденсатора  $C$  и  $q$ . Емкость конденсатора начинают изменять со временем так, что ток в цепи остается постоянным и равным  $I$ . Вычислите мощность, потребляемую от генератора, и сравните ее с мощностью, поглощаемой конденсатором. Почему сравниваемые величины различны?

◇ 8.4.12. В цепи течет постоянный ток. Ключ размыкают. Через какое время заряд на конденсаторе изменится на  $1/1000$  первоначальной величины?

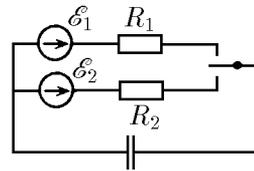
◇ 8.4.13\*. Ключ замыкают поочередно с каждым из контактов на очень малые одинаковые промежутки времени. Изменение заряда конденсатора, происходящее за время каждого включения, очень малó. Какой заряд окажется на конденсаторе после большого числа переключений? Определите заряд конденсатора в случае, когда время, в течение которого замкнута первая цепь, в  $k$  раз меньше времени, в течение которого замкнута вторая цепь.



К задаче 8.4.11

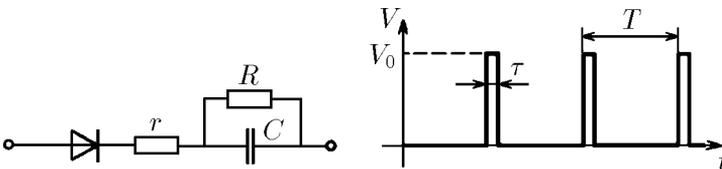


К задаче 8.4.12



К задаче 8.4.13

◇ 8.4.14\*. На вход схемы подаются периодически повторяющиеся прямоугольные импульсы напряжения  $V_0$ . Продолжительность импульса  $\tau$ , период повторения  $T$ . Импульсы подаются через диод, который можно считать идеальным ключом. Определите напряжение, установившееся на конденсаторе, если за каждый период напряжение на нем изменится очень мало.

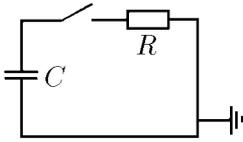


К задаче 8.4.14

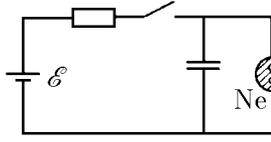
◇ 8.4.15\*. Конденсатор емкости  $C$ , заряженный до напряжения  $V_0$ , после замыкания ключа разряжается через сопротивление  $R$ . Как связана скорость изменения напряжения на конденсаторе  $dV/dt$  с напряжением на нем? Чему равны напряжение на конденсаторе и ток в цепи через время  $\tau$  после замыкания ключа?

◇ 8.4.16. Включение неоновой лампы осуществляется с помощью схемы, показанной на рисунке. После замыкания ключа конденсатор начнет заряжаться. Когда напряжение на конденсаторе достигнет некоторого значения  $V$ , лампа загорится. Минимальное напряжение на лампе, при котором она еще горит,  $80\text{ В}$ ; при этом ток через лампу  $1\text{ мА}$ . ЭДС батареи  $120\text{ В}$ ,  $80\text{ В} < V < 120\text{ В}$ . При каком сопротивлении лампа будет стационарно гореть (не будет гаснуть)?

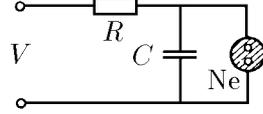
◇ 8.4.17\*. Как зависит частота генератора, изображенного на рисунке, от напряжения  $V$ ? Неоновая лампа загорается при напряжении  $V_1$  и гаснет при напряжении  $V_0 < V_1$ . Сопротивлением горячей лампы пренебречь.



К задаче 8.4.15



К задаче 8.4.16

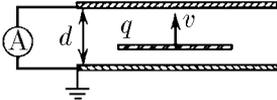


К задаче 8.4.17

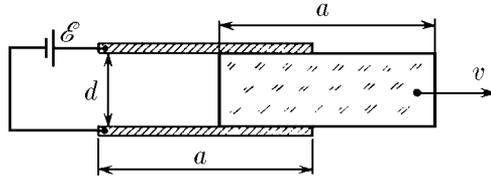
◇ 8.4.18. а. Между пластинами конденсатора с постоянной скоростью  $v$  движется равномерно заряженная тонкая пластина, заряд которой  $q$ . Определите ток в цепи, если конденсатор замкнут накоротко, а расстояние между пластинами  $d$ .

б. Изменится ли результат, если внутри конденсатора перпендикулярно пластинам со скоростью  $v$  движется точечная частица с зарядом  $q$ ?

◇ 8.4.19. Между обкладками плоского конденсатора, размеры которых  $a \times a$ , находится плоская пластина такого же размера, заполняющая весь объем между ними. Диэлектрическая проницаемость пластины  $\varepsilon$ , ее толщина  $d$ . Между обкладками поддерживается постоянное напряжение  $\mathcal{E}$ . Какой ток идет в цепи конденсатора, если пластину с постоянной скоростью  $v$ , направленной вдоль одной из сторон обкладок, вынимают из конденсатора?

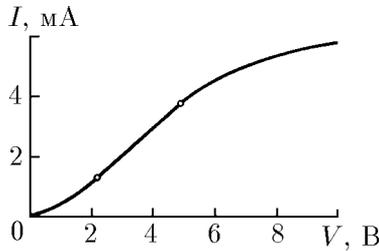


К задаче 8.4.18



К задаче 8.4.19

8.4.20. При положительном напряжении  $V$  на диоде ток через диод  $I = \alpha V^2$ ; при отрицательном напряжении ток через него равен нулю. Найдите ток в цепи, если этот диод через сопротивление  $R$  подключен к батарее с ЭДС  $\mathcal{E}$ .



К задаче 8.4.21

◇ 8.4.21. Диод с вольт-амперной характеристикой, изображенной на рисунке, подсоединен к батарее с ЭДС 6 В через сопротивление 1,5 кОм. Определите ток в цепи. При каком сопротивлении диод перестает работать на прямолинейном участке характеристики?

## Постоянное магнитное поле

### § 9.1. Индукция магнитного поля.

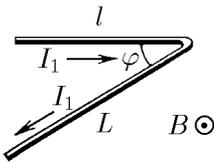
#### Действие магнитного поля на ток

**9.1.1.** На линейный проводник длины 10 см, расположенный перпендикулярно магнитному полю, действует сила 15 Н, если ток в проводнике равен 1,5 А. Найдите индукцию магнитного поля.

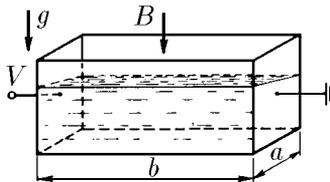
**9.1.2.** На заряд 1 Кл, движущийся со скоростью 1 м/с, в магнитном поле действует сила 10 Н. Заряд движется под углом  $30^\circ$  к направлению индукции магнитного поля. Чему равна индукция этого поля?

**9.1.3.** На линейный проводник длины  $l$ , расположенный перпендикулярно магнитному полю, действует сила  $F$ , если ток в проводнике равен  $I$ . С какой силой магнитное поле будет действовать на:  $\diamond$  а) изогнутый под углом  $\varphi$  проводник длины  $l + L$ , если плоскость изгиба перпендикулярна магнитному полю, а ток в проводнике равен  $I_1^*$ ; б\*) проводник в виде полуокружности радиуса  $R$ , по которому течет ток  $I_2$ , если плоскость полуокружности перпендикулярна магнитному полю?

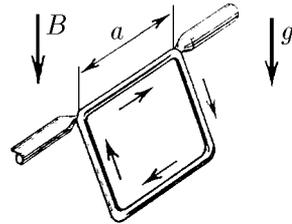
$\diamond$  **9.1.4\*.** В прямоугольную кювету, две противоположные стенки которой металлические, а остальные сделаны из изолятора, налит электролит, плотность которого  $\rho$ , удельная проводимость  $\lambda$ . К металлическим стенкам кюветы приложено напряжение  $V$ , и вся кювета помещена в однородное вертикальное магнитное поле индукции  $B$ . Определите разность уровней жидкости около немагнитических стенок кюветы. Длина кюветы  $a$ , ширина  $b$ .



К задаче 9.1.3



К задаче 9.1.4



К задаче 9.1.6

\*) На рисунках кружок с точкой означает, что индукция магнитного поля (или ток) направлена на нас, кружок с крестиком — от нас.

**9.1.5.** В вертикальном однородном магнитном поле на двух тонких нитях подвешен горизонтально проводник массы  $0,16 \text{ кг}$  и длины  $80 \text{ см}$ . Концы проводов при помощи гибких проводов, находящихся вне поля, подсоединены к источнику тока. Найдите угол, на который отклоняются от вертикали нити подвеса, если по проводнику течет ток  $2 \text{ А}$ , а индукция магнитного поля  $1 \text{ Тл}$ .

◇ **9.1.6.** Квадратная рамка с током закреплена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтально расположенной стороны. Рамка находится в вертикальном однородном магнитном поле индукции  $B$ . Угол наклона рамки к горизонту  $\alpha$ , ее масса  $m$ , длина стороны  $a$ . Найдите ток в рамке.

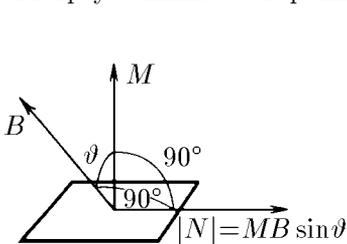
**9.1.7.** В однородном магнитном поле поместили прямоугольную рамку с током. Индукция магнитного поля  $B$  параллельна плоскости рамки. Площадь рамки  $S$ , ток в ней  $I$ .

а. Докажите, что момент сил, действующий на рамку,  $N = BM$ , где  $M = IS$  — магнитный момент рамки.

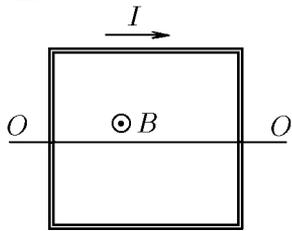
б. Докажите, что момент сил, действующий на рамку в случае, когда индукция магнитного поля направлена так, как изображено на рисунке, равен  $\vec{N} = [\vec{M} \times \vec{B}]$ , где  $\vec{M}$  — магнитный момент рамки, модуль которого равен  $IS$ , а направление перпендикулярно плоскости рамки.

◇ **9.1.8\***. В однородном магнитном поле индукции  $B$  находится квадратная рамка с током. Масса рамки  $m$ , ток в ней  $I$ . Определите частоту свободных колебаний рамки вокруг оси  $OO'$ .

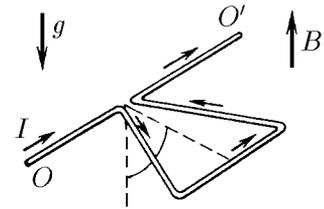
◇ **9.1.9.** Треугольная проволочная рамка с током может вращаться вокруг горизонтальной оси  $OO'$ , проходящей через вершину треугольника. Масса единицы длины проволоки  $\rho$ , ток в рамке  $I$ . Рамка находится в магнитном поле индукции  $B$ , направленном вдоль поля тяжести. Определите угол отклонения плоскости треугольника от вертикали.



К задаче 9.1.7



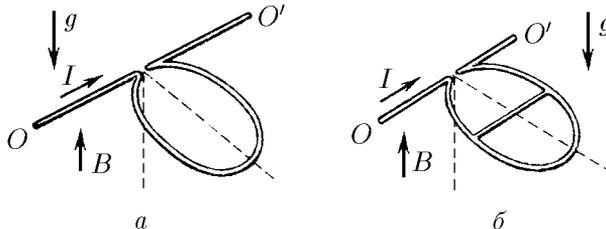
К задаче 9.1.8



К задаче 9.1.9

**9.1.10.** Докажите, что момент сил, действующий на любую плоскую рамку с током в однородном магнитном поле индукции  $B$ ,  $\vec{N} = [\vec{M} \times \vec{B}]$ .

◇ **9.1.11.** а. Проволочная рамка в виде окружности с током может вращаться вокруг горизонтальной оси  $OO'$ . Масса единицы длины проволоки  $\rho$ , ток в рамке  $I$ . Рамка находится в магнитном поле индукции  $B$ , направленном вдоль поля тяжести. Определите угол отклонения плоскости окружности от вертикали.



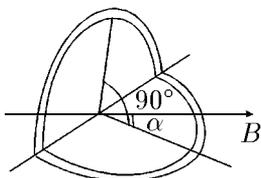
К задаче 9.1.11

б\*. Проволочная рамка в виде окружности имеет по диаметру проволочную перемычку, параллельную горизонтальной оси  $OO'$ , вокруг которой рамка может вращаться. Масса единицы длины рамки и перемычки одинакова и равна  $\rho$ . Ток, входящий в рамку, равен  $I$ . Рамка находится в магнитном поле индукции  $B$ , направленном параллельно полю тяжести. На какой угол от вертикали отклонится рамка?

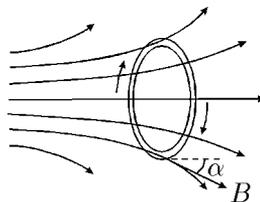
◇ 9.1.12. Виток радиуса  $R$  согнули по диаметру под прямым углом и поместили в однородное магнитное поле индукции  $B$  так, что одна из плоскостей витка оказалась расположенной под углом  $\alpha$ , другая — под углом  $\pi/2 - \alpha$  к направлению индукции  $B$ . Ток в витке  $I$ . Определите момент сил, действующих на виток.

9.1.13\*. Катушка, по виткам которой течет ток, вертикально стоит на плоскости. Общий вес катушки  $P$ , число витков  $n$ , радиус  $R$ , ток в витках  $I$ . При какой индукции однородного магнитного поля, направленного горизонтально, катушка под действием этого поля опрокинется?

◇ 9.1.14. Кольцо радиуса  $R$ , по которому циркулирует ток  $I$ , поместили в неоднородное аксиально-симметричное поле. Ось кольца совпадает с осью симметрии магнитного поля. Индукция магнитного поля  $B$ , действующего на ток, направлена под углом  $\alpha$  к оси симметрии поля. Масса кольца  $m$ . Определите ускорение кольца.



К задаче 9.1.12



К задаче 9.1.14

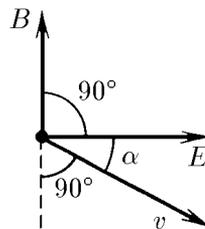
9.1.15\*. Проводящее кольцо поместили в магнитное поле, перпендикулярное его плоскости. По кольцу циркулирует ток  $I$ . Если проволока кольца выдерживает на разрыв нагрузку  $F$ , то при какой индукции магнитного поля кольцо разорвется? Радиус кольца  $R$ . Действием на кольцо магнитного поля, создаваемого током  $I$ , пренебречь.

## § 9.2. Магнитное поле движущегося заряда.

### Индукция магнитного поля линейного тока\*)

◇ 9.2.1. Электрическое поле напряженности  $\vec{E}$  зарядов, движущихся со скоростью  $v^{**}$ , создает магнитное поле, индукция которого  $\vec{B} = K[v \times \vec{E}]$ . Коэффициент  $K$  равен  $\mu_0 \epsilon_0$  в СИ и  $1/c$  в СГС, где  $c$  — скорость света. Докажите, что магнитное взаимодействие двух движущихся зарядов слабее их электрического взаимодействия.

9.2.2. Пользуясь формулой из предыдущей задачи, найдите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечной заряженной нити с линейной плотностью заряда  $\rho$ , если нить движется в продольном направлении со скоростью  $v$ .



К задаче 9.2.1

\*) Если в задаче не указано значение магнитной проницаемости среды, считайте ее равной единице.

\*\*) Если специально не оговорено в задаче, считайте  $v \ll c$ .

**9.2.3.** Найдите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечного прямого провода, по которому течет ток  $I$ .

**9.2.4.** На единицу длины прямого длинного провода с током со стороны второго провода с таким же током действует сила  $2,5 \cdot 10^{-7}$  Н. Расстояние между проводами 1 м, ток в проводах 1 А. Чему равна магнитная проницаемость этой среды?

**9.2.5.** По каждому из четырех длинных прямых параллельных проводников, проходящих через вершины квадрата (стороны квадрата 30 см) перпендикулярно его плоскости, течет ток 10 А, причем по трем проводникам ток течет в одном направлении, а по четвертому — в противоположном. Определите индукцию магнитного поля в центре квадрата.

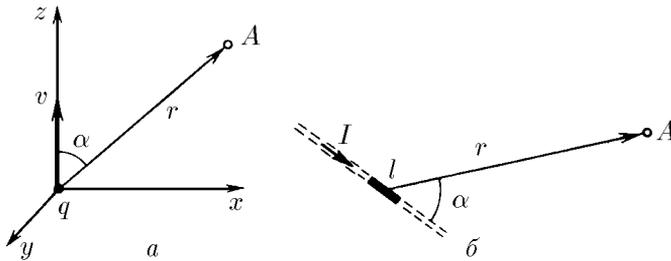
**9.2.6.** Длинные прямые провода с током пересекаются под прямым углом. Определите индукцию магнитного поля в точке с координатами  $x$  и  $y$ , если осями координат служат провода, а ток в проводах  $I$ .

**9.2.7.** Длинные прямые провода с током пересекаются под углом  $\alpha$ . Найдите индукцию магнитного поля на прямой, проходящей через точку пересечения проводов перпендикулярно им обоим. Ток в проводах  $I$ .

◇ **9.2.8.** а. Используя формулу, приведенную в задаче 9.2.1, определите индукцию магнитного поля, создаваемого зарядом  $q$ , движущимся со скоростью  $v$ , на расстоянии  $r$  от этого заряда. Радиус-вектор  $\vec{r}$  образует со скоростью  $v$  угол  $\alpha$ .

◇ б. Определите индукцию магнитного поля прямого провода длины  $l$ , по которому течет ток  $I$ , на расстоянии  $r$  от провода, если  $l \ll r$ . Радиус-вектор  $\vec{r}$  образует с проводом угол  $\alpha$ .

**9.2.9.** Докажите, что на больших расстояниях от двух последовательно соединенных участков провода  $l_1$  и  $l_2$ , по которым течет ток, магнитное поле близко к магнитному полю участка провода  $\vec{l} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ , по которому течет тот же ток.



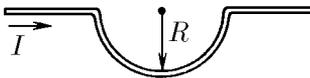
К задаче 9.2.8

**9.2.10.** По кольцу радиуса  $R$  течет ток  $I$ . Определите индукцию магнитного поля в центре кольца и на его оси на расстоянии  $h$  от центра кольца.

**9.2.11.** Во сколько раз уменьшится индукция магнитного поля в центре кольца с током, если его согнуть под углом  $\alpha$ ? Ток в кольце не меняется.

**9.2.12.** Провод, лежащий в одной плоскости, состоит из двух длинных прямых параллельных участков, связанных полуокружностью. По проводу течет ток  $I$ . Определите индукцию магнитного поля в центре полуокружности.

◇ **9.2.13.** Длинный прямой провод с током  $I$  имеет участок в виде полуокружности радиуса  $R$ . Определите индукцию магнитного поля в центре полуокружности.



К задаче 9.2.13



К задаче 9.2.14

◇ **9.2.14\***. Прямой провод имеет виток радиуса  $R$ . По проводу течет ток  $I$ . Определите индукцию магнитного поля в центре витка и на его оси на расстоянии  $h$  от его центра.

**9.2.15.** а. Металлическое кольцо разорвалось, когда ток в кольце был  $I_0$ . Сделали точно такое же кольцо, но из материала, предел прочности которого в десять раз больше. Какой ток разорвет новое кольцо?

б\*. Какой ток разорвет новое кольцо, сделанное из этого более прочного материала, если все размеры нового кольца в два раза больше размеров старого?

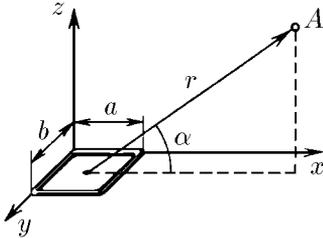
**9.2.16.** Определите индукцию магнитного поля на оси контура, магнитный момент которого  $M$ , на больших расстояниях  $h$  в случаях, когда контур представляет собой окружность, квадрат, правильный треугольник.

◇ **9.2.17\***. Определите индукцию магнитного поля прямоугольной рамки  $a \times a$  с током  $I$  в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $r$ , много большем линейных размеров рамки. Радиус-вектор  $\vec{r}$  образует с плоскостью рамки угол  $\alpha$ .

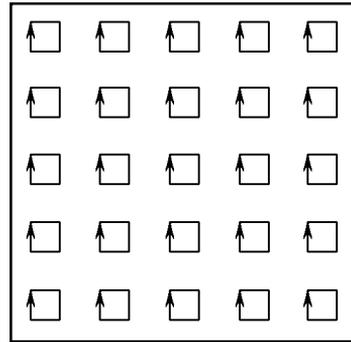
**9.2.18\***. Магнитное поле плоского контура с током на больших расстояниях от него определяется магнитным моментом контура и не зависит от его формы. Докажите это.

◇ **9.2.19\***. а. Внутри большого квадратного контура с током равномерно распределено много квадратных микроконтуров с током. Магнитный момент каждого микроконтура  $M_0$ . Докажите, что на расстоянии, много большем расстояния между микроконтурами, индукция их магнитного поля совпадает с индукцией магнитного поля большого контура, магнитный момент которого  $nM_0$ , где  $n$  — число микроконтуров внутри большого контура.

б. Тонкая квадратная пластина, размеры которой  $a \times a \times h$  ( $h \ll a$ ), намагничена в направлении, перпендикулярном ее плоскости. Индукция магнитного поля в центре пластины  $B$ . Определите магнитный момент единицы объема вещества пластины.



К задаче 9.2.17



К задаче 9.2.19

**9.2.20.** Из намагниченного железа вырезали плоский тонкий диск радиуса  $R$  и толщины  $h$ . Плоскость диска перпендикулярна направлению намагничивания. Магнитный момент единицы объема железа  $M$ . Определите индукцию магнитного поля на оси диска на расстоянии  $l$  от его центра.

**9.2.21.** Оцените индукцию магнитного поля в центре плоского железного кольца толщины 1 см с внутренним радиусом 10 см и внешним радиусом 20 см. Все атомы железа ориентированы вдоль оси кольца, магнитный момент атома железа равен  $2\mu_e = 1,85 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл.

**9.2.22.** Индукция магнитного поля в центре тонкого стального намагниченного вдоль своей оси диска радиуса  $R$  равна  $B$ . Этот диск помещают в однородное магнитное поле с индукцией  $B_0$ , которое не меняет магнитного момента диска.

Как нужно ориентировать диск в этом магнитном поле, чтобы момент сил, действующий на него, был максимальным? Чему равен этот момент?

**9.2.23.** Сила взаимодействия двух тонких намагниченных квадратных пластин, расположенных на расстоянии  $H$  друг над другом, равна  $F$ . Размеры пластин  $a \times a \times h$ . Оцените магнитный момент единицы объема пластины, если толщина пластины  $h \ll H$ , а  $H \ll a$ .

### § 9.3. Магнитное поле тока, распределенного по поверхности или пространству

**9.3.1.** Используя формулу, приведенную в задаче 9.2.1, определите индукцию магнитного поля вблизи равномерно заряженной пластины, которая движется со скоростью  $v$  вдоль своей плоскости. Поверхностная плотность заряда пластины  $\sigma$ .

**9.3.2.** Найдите индукцию магнитного поля внутри плоского конденсатора, движущегося со скоростью 9 м/с параллельно своим пластинам. Расстояние между пластинами 10 мм, напряжение на них 10 кВ.

**9.3.3.** Чему равна индукция магнитного поля бесконечной плоскости, по которой идет ток линейной плотности  $i$ ?

**9.3.4.** По двум параллельным плоскостям текут в одном направлении токи, линейная плотность которых  $i_1$  и  $i_2$ . Определите индукцию магнитного поля между плоскостями и вне их.

**9.3.5.** По двум параллельным шинам течет ток  $I$ . Ширина шин  $b$  много больше расстояния между ними. Чему равна сила, действующая на единицу длины шины?

**9.3.6.** а. Через пластину прямоугольного сечения  $a \times b$  ( $a \ll b$ ) пропустили ток  $I$ . Модуль продольной упругости пластины  $E$ . Определите, на сколько уменьшится размер  $a$  под действием магнитных сил.

б. Мягкая медь «течет» при давлении  $4 \cdot 10^7$  Па, а сталь — при давлении  $5 \cdot 10^8$  Па. Оцените минимальную индукцию магнитного поля, под действием которого будут «течь» медь и сталь.

◇ **9.3.7.** По плоской поверхности, изображенной на рисунке, течет ток линейной плотности  $i$ . Докажите, что составляющая индукции магнитного поля, параллельная поверхности и перпендикулярная направлению  $i$ , определяется формулой  $B_{\parallel} = \mu_0 i \Omega / 4\pi$  в СИ и  $B_{\parallel} = i \Omega / c$  в СГС, где  $\Omega$  — телесный угол, под которым видна поверхность.

**9.3.8.** Используя формулу  $B_{\parallel} = \mu_0 i \Omega / 4\pi$  из задачи 9.3.7, решите следующие задачи.

а. Определите индукцию магнитного поля бесконечно длинной полосы ширины  $2h$  в точке над средней линией полосы на расстоянии  $h$  от этой линии, если вдоль полосы течет ток линейной плотности  $i$ .

б. Определите индукцию магнитного поля по оси бесконечно длинного цилиндра, по поверхности которого течет поперечный ток линейной плотности  $i$ .

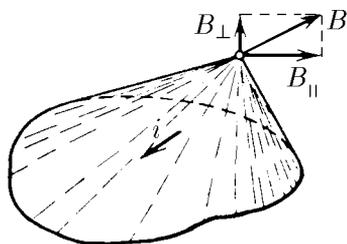
в\*. По прямому длинному проводнику, сечение которого — правильный треугольник со стороной  $a$ , течет ток плотности  $j$ . Определите индукцию магнитного поля на ребрах проводника.

**9.3.9.** Какую силу натяжения вызывает в витках длинного соленоида ток  $I$ ? Число витков на единицу длины соленоида  $n$ , его радиус  $R$ .

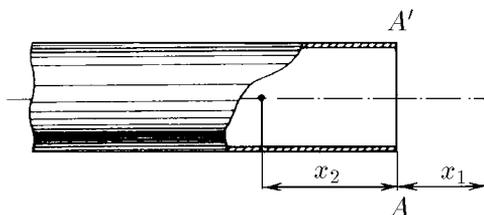
◇ **9.3.10\*.** По поверхности полубесконечного кругового цилиндра радиуса  $R$  течет поперечный ток линейной плотности  $i$ .

а. Определите составляющую индукции магнитного поля вдоль оси цилиндра в крайнем его сечении  $AA'$ .

б. Как зависит индукция магнитного поля на оси цилиндра от расстояний  $x_1$  и  $x_2$  до его конца? Чему равна эта индукция на больших расстояниях от цилиндра?



К задаче 9.3.7



К задаче 9.3.10

**9.3.11\***. а. Сплошной цилиндр вырезан из намагниченного до насыщения железа так, что его ось совпадает с направлением намагничивания. Докажите эквивалентность магнитного поля этого цилиндра полю поперечного тока, текущего по его поверхности, линейная плотность которого равна магнитному моменту единицы объема железа.

б. Из длинного стержня, намагниченного до насыщения вдоль оси, вырезали кубик так, что одно из ребер кубика было направлено вдоль направления намагничивания. Во сколько раз индукция магнитного поля в центре кубика будет меньше индукции в стержне?

в. Определите индукцию магнитного поля в центре цилиндра длины  $l$  и радиуса  $r$ . Магнитный момент единицы объема железа равен  $M$ . Чему равна эта индукция при  $r \ll l$ ? при  $r \gg l$ ?

г. Решите предыдущую задачу в случае, если по оси цилиндра просверлено отверстие малого радиуса.

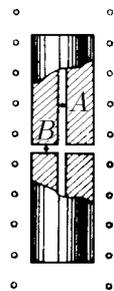
**9.3.12.** Тонкие квадратные пластины, размеры которых  $a \times a \times h$  ( $h \ll a$ ), намагничены до насыщения в направлении, перпендикулярном их плоскости. В центре каждой пластины индукция магнитного поля  $B_0$ . Чему будет равна индукция поля внутри длинного прямоугольного столба сечения  $a \times a$ , собранного из этих пластин?

◇ **9.3.13.** В длинный соленоид с током  $0,5$  А поместили цилиндрический ферромагнитный столбик с узкими полостями. Число витков на  $1$  см длины соленоида  $10$ , магнитная проницаемость ферромагнетика  $600$ . Определите индукцию магнитного поля в продольной и поперечной полостях (в точках  $A$  и  $B$ ).

**9.3.14.** Диск радиуса  $R$  и высоты  $h \ll R$ , сделанный из материала с магнитной проницаемостью  $\mu = 1 + \chi$ ,  $\chi \ll 1$ , поместили поперек однородного магнитного поля индукции  $B_0$ . На сколько индукция в центре диска будет отличаться от  $B_0$ ?

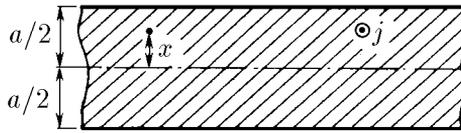
**9.3.15.** Циркуляция индукции постоянного магнитного поля по замкнутому контуру в вакууме равна току через поверхность, ограниченную этим контуром, умноженному на  $\mu_0$ . Приведите примеры, подтверждающие этот закон. Решите, используя его, следующие задачи.

а. По бесконечно длинному прямому проводу радиуса  $r$  течет ток  $I$ . Ток распределен равномерно по сечению провода. Найдите индукцию магнитного поля внутри и вне провода.



К задаче 9.3.13

◇ б. По длинной широкой шине с поперечным размером  $a$  течет ток, равномерно распределенный по сечению проводника. Плотность тока  $j$ . Как зависит индукция магнитного поля от расстояния  $x$  до средней плоскости шины?



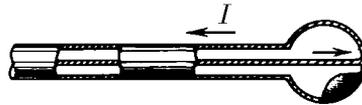
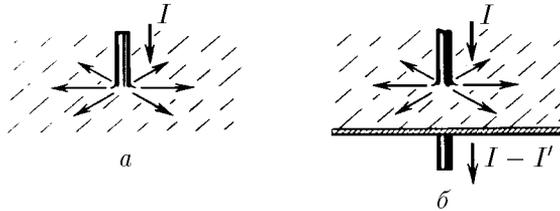
К задаче 9.3.15

**9.3.16.** Через тороидальный соленоид, имеющий  $N$  витков, протекает ток  $I$ . Внешний радиус тора  $R$ , внутренний  $r$ . Определите минимальную и максимальную индукцию магнитного поля внутри соленоида.

◇ **9.3.17.** а. Ток  $I$  идет по длинному прямому проводу, перпендикулярному проводящей плоскости, и растекается по ней. Определите распределение магнитного поля.

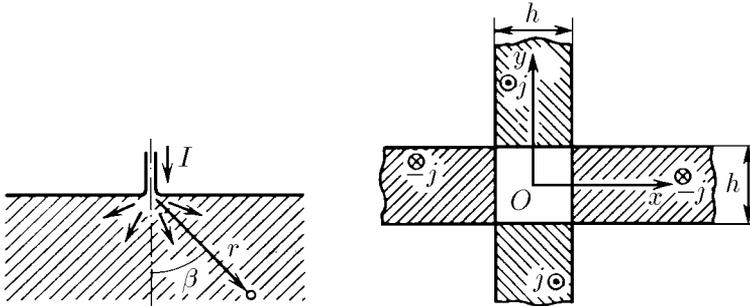
б. Длинный провод с током  $I$  пересекает проводящую плоскость в перпендикулярном ей направлении. Ток, уходящий на плоскость, равен  $I'$ . Определите распределение магнитного поля в этой системе.

в. Коаксиальный кабель входит в сферическую плоскость так, как изображено на рисунке. Найдите индукцию магнитного поля во всем пространстве.



К задаче 9.3.17

◇ **9.3.18\***. Ток  $I$  по длинному прямому проводу входит в проводник перпендикулярно его поверхности и равномерно растекается по нему. Как зависит индукция магнитного поля внутри проводника от угла  $\beta$  и расстояния  $r$ ?



К задаче 9.3.18

К задаче 9.3.19

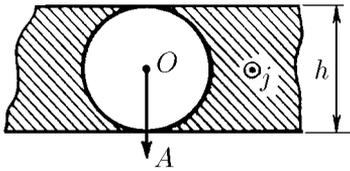
◇ **9.3.19.** Распределение тока в двух взаимно перпендикулярных пластинах толщины  $h$  показано на рисунке. В области пересечения пластин тока нет. Нарисуйте график зависимости индукции магнитного поля от  $x$ .

◇ **9.3.20.** В бесконечной пластине толщины  $h$  вырезали цилиндрическую полость радиуса  $h/2$ , ось которой параллельна поверхностям пластины. Во всем объеме пластины, за исключением полости, течет ток, направленный вдоль оси полости. Найдите распределение индукции магнитного поля вдоль прямой  $OA$ , которая проходит через ось полости и перпендикулярна поверхностям пластины. Плотность тока  $j$ .

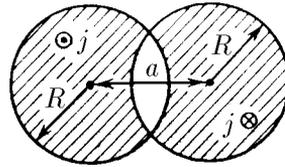
**9.3.21\*.** Определите индукцию магнитного поля в длинной цилиндрической полости, расположенной внутри цилиндрического проводника, если ось полости параллельна оси проводника и отстоит от нее на расстоянии  $d$ . Ток распределен равномерно по сечению проводника. Плотность тока  $j$ .

◇ **9.3.22\*.** а. Два цилиндра радиуса  $R$ , оси которых находятся на расстоянии  $a$  друг от друга, пересекаются, как показано на рисунке. Через заштрихованные области вдоль осей в противоположных направлениях текут токи, плотность которых  $\pm j$ . Найдите индукцию магнитного поля в области, лежащей между заштрихованными областями.

б. Используя результат предыдущей задачи и применяя метод предельного перехода, найдите при  $a \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$  распределение линейной плотности тока на поверхности цилиндра радиуса  $R$ , которое дает однородное внутри цилиндра магнитное поле индукции  $B_0$ . Как связана максимальная линейная плотность тока с индукцией поля  $B_0$ ?



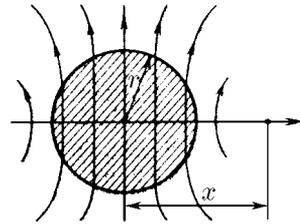
К задаче 9.3.20



К задаче 9.3.22

**9.3.23\*.** Плоскости витков круглого соленоида наклонены под углом  $\alpha$  к его оси. Ток соленоида  $I$ , число витков на единицу его длины  $n$ , радиус  $R$ . Определите индукцию магнитного поля внутри такого соленоида.

◇ **9.3.24\*.** Длинный цилиндрический железный стержень радиуса  $r$  намагничен в магнитном поле, перпендикулярном оси стержня. Магнитный момент единицы объема стержня  $M$ . Как зависит индукция магнитного поля от  $x$  на расстояниях, много меньших длины стержня?



К задаче 9.3.24

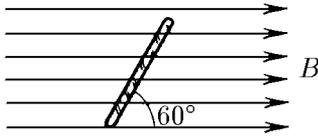
## § 9.4. Магнитный поток

◇ **9.4.1.** Индукция однородного магнитного поля равна  $B$ .

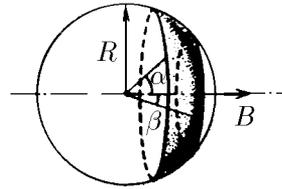
а. Чему равен магнитный поток через квадрат со стороной  $a$ , плоскость которого расположена под углом  $60^\circ$  к направлению магнитного поля?

б. Чему равен магнитный поток через плоскую поверхность площади  $S$ , которая расположена под углом  $\alpha$  к направлению магнитного поля?

◇ 9.4.2. Определите магнитный поток через выделенный на рисунке участок сферы радиуса  $R$ . Индукция магнитного поля  $B$  направлена вдоль оси симметрии этого участка.



К задаче 9.4.1



К задаче 9.4.2

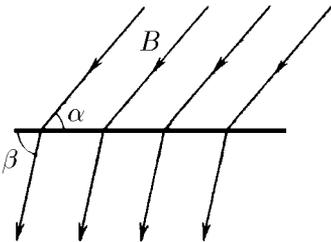
9.4.3. Покажите, что магнитный поток, создаваемый плоскостью с линейной плотностью тока  $i$ , через любую замкнутую поверхность равен нулю.

9.4.4\*. Докажите, что магнитный поток, создаваемый элементом тока, через любую замкнутую поверхность равен нулю.

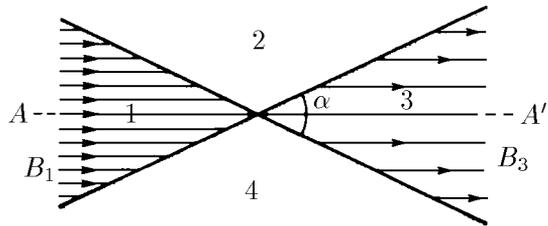
9.4.5. Плоская горизонтальная граница делит пространство на две части. В нижней части индукция магнитного поля равна нулю. Докажите, что однородное поле вблизи поверхности в верхней части направлено параллельно ей.

◇ 9.4.6. Индукция магнитного поля  $B$ , переходя через плоскую поверхность, меняет угол наклона к ней с  $\alpha$  на  $\beta$ . Во сколько раз изменится индукция поля? Чему равна линейная плотность тока на поверхности?

◇ 9.4.7\*. Плоскости, пересекающиеся под углом  $\alpha$ , делят пространство на четыре области. Магнитное поле в каждой области однородно. В областях 1 и 3 индукция поля параллельна плоскости симметрии  $AA'$ , направлена в одну сторону и равна соответственно  $B_1$  и  $B_3$ . Определите индукцию поля в областях 2 и 4.



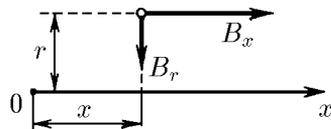
К задаче 9.4.6



К задаче 9.4.7

◇ 9.4.8. а. Составляющая индукции аксиально-симметричного магнитного поля, направленная вдоль оси симметрии поля, линейно зависит от  $x$ :  $B_x = B_0 x/x_0$ , где  $x_0$  и  $B_0$  — постоянные. Определите зависимость радиальной составляющей индукции поля от расстояния до оси. Как зависит угол наклона поля к его оси симметрии от  $x$  и  $r$ ? Нарисуйте линии индукции этого поля.

б. Составляющая индукции магнитного поля в предыдущей задаче меняется вдоль оси по закону  $B = B_0(x/x_0)^n$ . Определите радиальную составляющую индукции поля. Как определить  $B_r$  в общем случае, когда  $B_x = B_0 f(x)$ ?



К задаче 9.4.8

**9.4.9.** Составляющая индукции магнитного поля вдоль оси бесконечного цилиндра радиуса  $R$  меняется как  $B_0 x/x_0$  внутри цилиндра, а вне — эта составляющая равна нулю. Как вне цилиндра зависит радиальная составляющая индукции от расстояния до его оси?

**9.4.10\*.** а. Определите магнитный поток через поверхность полубесконечного цилиндра, по которому циркулирует поперечный ток с линейной плотностью  $i$ . Радиус цилиндра  $R$ .

б. С какой силой притягиваются половинки длинного соленоида с током  $I$ ? Радиус соленоида  $R$ , число витков на единицу длины соленоида  $n$ .

**9.4.11.** Два длинных стержня, намагниченных в продольном направлении, притянулись друг к другу своими торцами. Чтобы оторвать их друг от друга, нужно приложить в осевом направлении силу  $F$ . Сечение стержней одинаково, площадь сечения  $S$ . Определите индукцию магнитного поля в месте соединения стержней.

**9.4.12.** В неоднородном магнитном поле находится соленоид с током  $I$ . Число витков на единицу длины соленоида  $n$ . Магнитный поток, входящий и выходящий через торцы соленоида, равен соответственно  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Определите силу, действующую на соленоид вдоль его оси.

**9.4.13.** Взаимной индуктивностью двух контуров называется коэффициент пропорциональности между током в одном из контуров и создаваемым им магнитным потоком, пронизывающим второй контур. Определите взаимную индуктивность: а) двух круговых контуров радиуса  $r$  и  $R$ , расположенных на одной оси симметрии на расстоянии друг от друга  $l \gg r, R$ ; б) длинного соленоида радиуса  $r$ , содержащего  $n$  витков на единицу длины, и кругового контура, охватывающего этот соленоид.

## Движение заряженных частиц в сложных полях

### § 10.1. Движение в однородном магнитном поле

**10.1.1.** Протон, ускоренный напряжением 20 кВ, влетает в однородное магнитное поле индукции 0,1 Тл перпендикулярно полю. Найдите радиус окружности, по которой движется протон в магнитном поле.

**10.1.2.** Электрон, ускоренный напряжением 200 В, движется в магнитном поле Земли, индукция которого 70 мкТл. Найдите радиус окружности, по которой движется электрон, если скорость его перпендикулярна магнитному полю Земли.

**10.1.3.** а. Определите частоту обращения (циклотронную частоту) частицы массы  $m$  с зарядом  $q$  в магнитном поле индукции  $B$ .

б. Определите циклотронную частоту электрона в магнитном поле индукции 1 Тл.

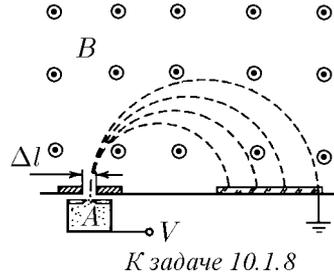
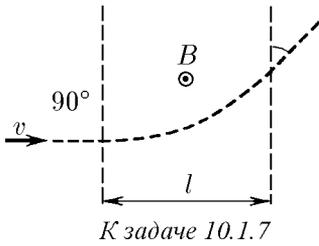
**10.1.4.** Как относятся радиусы траекторий двух электронов с кинетической энергией  $K_1$  и  $K_2$ , если однородное магнитное поле перпендикулярно их скорости?

**10.1.5.** Через какое время после первой встречи произойдет встреча двух заряженных частиц, движущихся перпендикулярно магнитному полю индукции  $B$ ? Заряд частиц  $q$ , масса  $m$ . Взаимодействием пренебречь.

**10.1.6.** С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле индукции  $B$ , наблюдают упругое рассеяние  $\alpha$ -частиц на ядрах дейтерия. Найдите начальную энергию  $\alpha$ -частицы, если радиус кривизны начальных участков траекторий ядра и  $\alpha$ -частицы после рассеяния оказался равным  $R$ . Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной индукции магнитного поля.

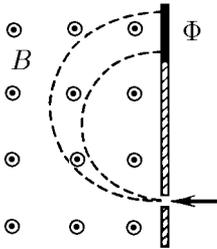
◇ **10.1.7.** Электрон влетает в область магнитного поля ширины  $l$ . Скорость электрона  $v$  перпендикулярна как индукции поля  $B$ , так и границам области. Под каким углом к границе области электрон вылетит из магнитного поля?

◇ **10.1.8.** На рисунке изображен простейший масс-спектрометр, индукция магнитного поля в котором 0,1 Тл. В ионизаторе  $A$  образуются ионы, которые ускоряются напряжением 10 кВ. После поворота в магнитном поле ионы попадают на фотопластинку и вызывают ее почернение. На каком расстоянии от щели будут находиться на фотопластинке полосы ионов  ${}^1\text{H}^+$ ,  ${}^2\text{H}^+$ ,  ${}^3\text{H}^+$ ,  ${}^4\text{He}^+$ ? Какой должна быть ширина щели, чтобы полосы ионов  ${}^{16}\text{O}^+$  и  ${}^{15}\text{N}^+$  разделились?

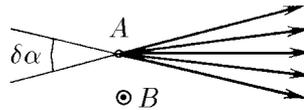


◇ **10.1.9.** В устройстве для определения изотопного состава ионы калия  $^{39}\text{K}^+$  и  $^{41}\text{K}^+$  сначала ускоряются в электрическом поле, а затем попадают в однородное магнитное поле индукции  $B$ , перпендикулярное направлению их движения. В процессе опыта из-за несовершенства аппаратуры ускоряющее напряжение меняется около своего среднего значения на величину  $\pm\Delta V$ . С какой относительной погрешностью  $\Delta V/V_0$  нужно поддерживать постоянным значение ускоряющего напряжения, чтобы следы пучков изотопов калия на фотопластинке  $\Phi$  не перекрывались?

◇ **10.1.10\*.** Из точки  $A$  со скоростью  $v$  вылетают частицы, имея малый угловой разброс  $\delta\alpha$ , и далее движутся в однородном магнитном поле индукции  $B$  перпендикулярно ему. Определите, на каком расстоянии от точки  $A$  соберется пучок, и оцените в этом месте его поперечный размер. Масса частиц  $m$ , заряд  $q$ .



К задаче 10.1.9



К задаче 10.1.10

**10.1.11.** В однородное магнитное поле индукции  $B$  влетает под углом  $\alpha$  к полю со скоростью  $v$  частица массы  $m$  с зарядом  $q$ . Найдите радиус и шаг винтовой линии, по которой движется частица.

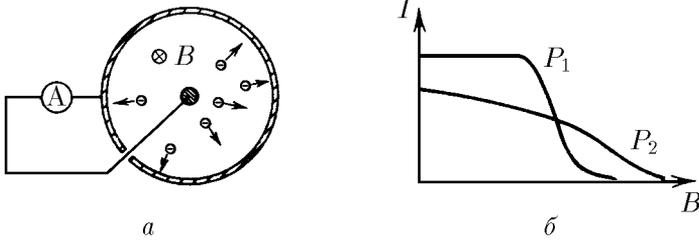
**10.1.12\*.** Вдоль однородного магнитного поля индукции  $B$  из одной точки со скоростью  $v$  вылетают электроны, имея малый угловой разброс  $\delta\alpha$ . Определите, на каком расстоянии от места вылета пучок будет иметь минимальный поперечный размер, и оцените его.

◇ **10.1.13.** а. Вакуумное устройство состоит из соосных цилиндра радиуса  $R$  и проволоочки, помещенных в продольное магнитное поле индукции  $B$ . При нагревании проволоочки с ее поверхности вылетают электроны с кинетической энергией  $K$ ; при этом во внешней цепи между цилиндром и проволоочкой протекает ток  $I$ . Нарисуйте зависимость  $I$  от  $B$ . Найдите значения  $B$ , при которых ток в вакууме равен нулю.

б. На рисунке изображены две зависимости  $I$  от  $B$  при различном давлении  $P_1$  и  $P_2$  остаточных газов. Какое давление больше?

**10.1.14.** Два электрона движутся с одинаковой по модулю скоростью  $v$  в однородном магнитном поле. В некоторый момент расстояние между ними равно  $2R$ , а скорости электронов перпендикулярны магнитному полю и прямой, со-

единяющей электроны. При какой индукции магнитного поля расстояние между электронами останется неизменным?



К задаче 10.1.13

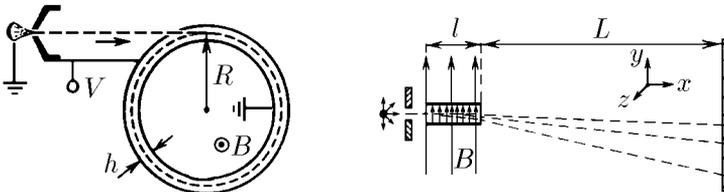
**10.1.15.** По орбите радиуса  $R$  вокруг протона вращается электрон. Как изменится частота обращения электрона по этой же орбите, если система будет помещена в слабое магнитное поле индукции  $B$ , направленное вдоль оси вращения?

◇ **10.1.16.** Какое напряжение нужно приложить между обкладками цилиндрического конденсатора, чтобы он «захватил на орбиту» электроны, прошедшие ускоряющую разность потенциалов  $V$ ? Конденсатор находится в однородном магнитном поле индукции  $B$ , направленном вдоль оси конденсатора. Расстояние между обкладками  $h$  много меньше среднего радиуса конденсатора  $R$ .

◇ **10.1.17.** а. В плоском конденсаторе длины  $l$  напряженность электрического поля равна  $E$ , а индукция магнитного поля, направленного вдоль  $E$ , равна  $B$ . У входа в конденсатор имеется радиоактивный источник, испускающий электроны с разными скоростями. Из них формируют тонкий пучок, который проходит через конденсатор, а затем попадает на фотопластинку, расположенную на расстоянии  $L \gg l$ . Какую линию-след «вычертят» электроны на фотопластинке, если отклонения их от прямолинейной траектории малы?

б. Найдите линию-след электронов на фотопластинке для  $B = 1$  Тл,  $E = 5 \cdot 10^5$  В/м,  $l = 5$  см,  $L = 50$  см.

в. При большой скорости электрона его масса заметно изменяется; согласно формуле Лоренца  $m = m_e / \sqrt{1 - \beta^2}$ , где  $\beta$  — отношение скорости электрона к скорости света,  $m_e$  — масса покоя электрона. Решите задачу 10.1.17а с учетом эффекта изменения массы электрона.



К задаче 10.1.16

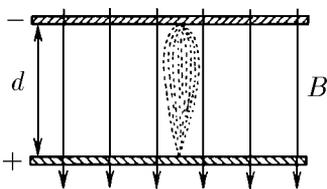
К задаче 10.1.17

**10.1.18.** Определите время ускорения протона, входящего в центр ускорителя с кинетической энергией  $K$ , если ускоряющее напряжение на дуантах циклотрона  $V$ , индукция магнитного поля ускорителя  $B$ , его радиус  $R$ . Временем движения протона между дуантами ускорителя пренебречь.

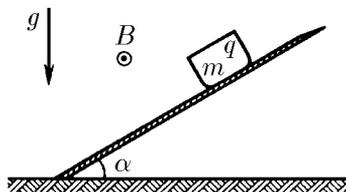
◇ **10.1.19.** Пластины плоского конденсатора с шириной зазора между ними  $d$  расположены перпендикулярно магнитному полю индукции  $B$ . Около катода расположен источник медленных электронов, вылетающих в разных направлениях

к пластинам. При каком напряжении на конденсаторе электроны будут фокусироваться на аноде? Чем определяется размер пятна?

◇ **10.1.20.** Определите, какую максимальную скорость разовьет заряженное тело, скользящее по наклонной плоскости в магнитном поле индукции  $B$  и в поле тяжести. Масса и заряд тела  $m$  и  $q$ . Магнитное поле параллельно наклонной плоскости и перпендикулярно полю тяжести. Угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha$ . Коэффициент трения о плоскость  $\mu$ .



К задаче 10.1.19



К задаче 10.1.20

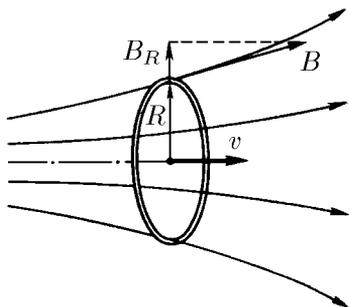
◇ **10.1.21.** Равномерно заряженное кольцо радиуса  $R$ , линейная плотность заряда которого  $\rho$ , движется соосно аксиально-симметричному магнитному полю со скоростью  $v$ . Радиальная составляющая индукции магнитного поля на расстоянии  $R$  от оси равна  $B_R$ . Определите момент сил, действующих на кольцо.

**10.1.22\*.** Докажите, что приращение момента импульса  $\Delta M$  кольца в задаче 10.1.21 пропорционально приращению потока магнитной индукции через кольцо  $\Delta\Phi$ :  $\Delta M = (1/2\pi)Q\Delta\Phi$ , где  $Q$  — электрический заряд кольца. Для доказательства воспользуйтесь тем, что поток магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра равен разности потоков через его торцы.

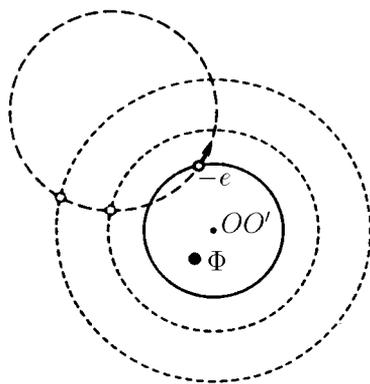
**10.1.23\*.** Какую минимальную скорость нужно сообщить равномерно заряженному непроводящему кольцу, расположенному соосно аксиально-симметричному полю, вдоль оси этого поля, чтобы кольцо переместилось из области однородного магнитного поля  $B_1$  в область однородного поля  $B_2$ ,  $B_2 > B_1$ ? Радиус кольца  $R$ , заряд  $Q$ , масса  $m$ .

◇ **10.1.24.** а. Электрон движется в однородном магнитном поле по окружности. Через него проводят любую другую окружность, ось  $OO'$  которой направлена вдоль магнитного поля. Покажите, что сумма  $M + (1/2\pi)e\Phi$ , где  $\Phi$  — поток магнитного поля через эту окружность, а  $M$  — момент импульса электрона относительно оси  $OO'$ , не зависит от положения электрона.

б. Покажите, что сумма  $M + (1/2\pi)e\Phi$  не меняется в случае движения электрона в однородном магнитном поле по винтовой линии.

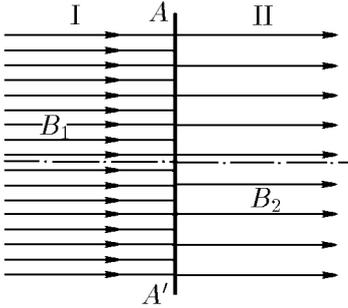


К задаче 10.1.21

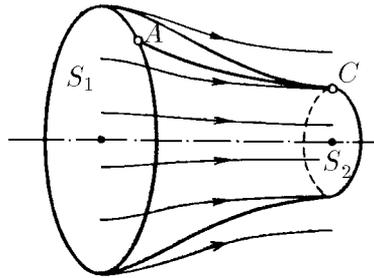


К задаче 10.1.24

- ◇ **10.1.25.** Области I и II двух однородных однонаправленных магнитных полей с индукцией  $B_1$  и  $B_2$  имеют осесимметричный тонкий переход  $AA'$ , в котором магнитное поле имеет большую радиальную составляющую. Электрон в области I движется вдоль магнитного поля на расстоянии  $R$  от оси симметрии перехода. Какой момент импульса относительно оси симметрии приобретает электрон при переходе из области I в область II? Сохраняется ли при движении этой частицы постоянная сумма  $M + (1/2\pi)e\Phi$  (см. обозначения в задаче 10.1.24)?
- ◇ **10.1.26\*.** Докажите, что изменение момента импульса электрона при движении его от точки  $A$  до точки  $C$  в аксиально-симметричном магнитном поле относительно оси поля равно разности магнитных потоков через сечения  $S_1$  и  $S_2$ , умноженной на  $e/2\pi$ .



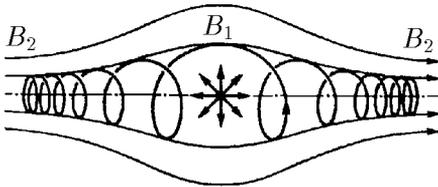
К задаче 10.1.25



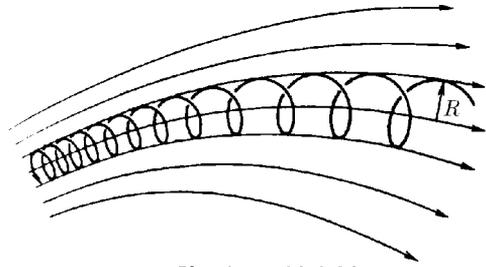
К задаче 10.1.26

- ◇ **10.1.27\*.** Какая часть электронов, испущенных во все стороны радиоактивной пылинкой, расположенной на оси магнитной ловушки, останется внутри этой ловушки? Индукция магнитного поля внутри ловушки  $B_1$ , вне ее  $B_2 > B_1$ .

**10.1.28\*.** Определите минимальный радиус, который может иметь пучок электронов при переходе из поля с индукцией  $B_1$  в поле с индукцией  $B_2$ . Оси симметрии переходного поля и пучка совпадают. Радиус пучка в поле  $B_1$  равен  $R$ , скорость пучка в поле  $B_1$  параллельна индукции.



К задаче 10.1.27



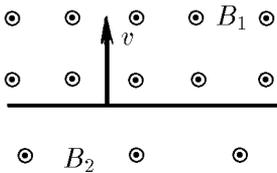
К задаче 10.1.29

- ◇ **10.1.29\*.** В сильных магнитных полях электрон движется по винтовой линии, «навитой» на линию магнитного поля. Докажите, что в случае, когда радиус винтовой линии настолько мал, что поле внутри нее можно считать однородным, произведение квадрата радиуса винтовой линии на индукцию магнитного поля не меняется.

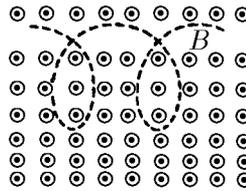
## § 10.2. Дрейфовое движение частиц

◇ **10.2.1.** Пространство разделено на две области плоскостью. В одной области создано магнитное поле индукции  $B_1$ , в другой — индукции  $B_2$ , причем поля однородны и параллельны друг другу. С плоскости раздела перпендикулярно ей стартует электрон со скоростью  $v$  в сторону области с индукцией поля  $B_1$ . Опишите дальнейшее движение электрона. Определите среднюю (дрейфовую) скорость перемещения электрона вдоль границы раздела магнитных полей, пронизываемой для него.

◇ **10.2.2\*.** Оцените скорость дрейфа электрона поперек неоднородного магнитного поля, компоненты индукции которого  $B_x = 0$ ,  $B_y = 0$ ,  $B_z = B_0(1 + \alpha x)$ . Скорость электрона  $v$ ,  $v \ll eB_0/(\alpha m_e)$ .



К задаче 10.2.1

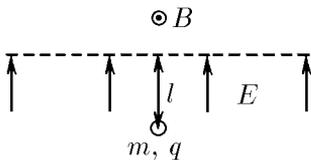


К задаче 10.2.2

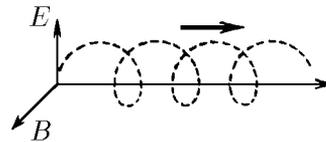
◇ **10.2.3.** Области однородных магнитного и электрического полей разделены границей — плоскостью. Магнитное поле индукции  $B$  параллельно плоскости раздела. Электрическое поле напряженности  $E$  перпендикулярно плоскости раздела. В электрическом поле на расстоянии  $l$  от границы помещается частица массы  $m$  с зарядом  $q$ . Нарисуйте траекторию этой частицы. Найдите скорость дрейфа частицы вдоль пронизываемой для нее границы раздела полей.

**10.2.4.** Взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля называются скрещенными. Какую начальную скорость должна иметь заряженная частица в направлении, перпендикулярном обоим полям, чтобы ее движение в скрещенных полях оставалось прямолинейным? Напряженность электрического поля  $E$ , индукция магнитного поля  $B$ .

◇ **10.2.5.** В скрещенных электрическом и магнитном полях  $E$  и  $B$  частица «дрейфует» поперек обоих полей. Чему равна дрейфовая скорость частицы?



К задаче 10.2.3



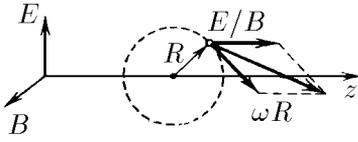
К задаче 10.2.5

**10.2.6.** Чему равна дрейфовая скорость заряженной частицы, движущейся поперек электрического и магнитного полей, если угол между  $E$  и  $B$  равен  $\alpha$ ?

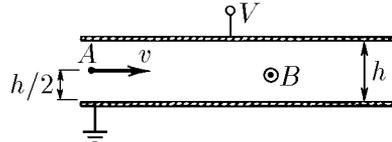
◇ **10.2.7.** Докажите, что заряженная частица в скрещенных электрическом и магнитном полях обращается с частотой  $\omega = qB/m$  вокруг центра, который движется с дрейфовой скоростью (и поэтому скорость частицы в любой момент времени равна векторной сумме линейной скорости вращения вокруг мгновенного центра и дрейфовой скорости).

◇ **10.2.8.** Плоский конденсатор помещен в однородное магнитное поле индукции  $B$ , параллельное пластинам. Из точки  $A$  вылетают электроны в направлении,

перпендикулярном магнитному полю. Напряжение, приложенное к пластинам, равно  $V$ . При каком условии электроны будут проходить через конденсатор?



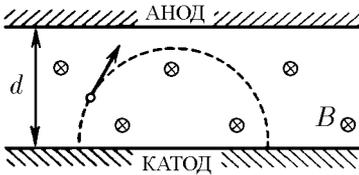
К задаче 10.2.7



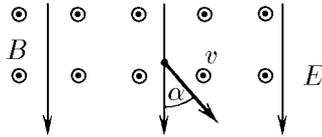
К задаче 10.2.8

◇ **10.2.9.** На плоские анод и катод, расстояние между которыми  $d$ , подается высокое напряжение. Система находится в магнитном поле индукции  $B$ , параллельном плоскости электродов. Определите, при каком напряжении электроны достигнут анода. Найдите это напряжение, если  $B = 0,1$  Тл,  $d = 2$  см.

◇ **10.2.10.** Электрон движется со скоростью  $v$  поперек однородного магнитного поля с индукцией  $B$ . Включается электрическое поле напряженности  $E$ , которое перпендикулярно магнитному полю и направлено под углом  $\alpha$  к скорости электрона. Определите дальнейшее движение электрона.



К задаче 10.2.9



К задаче 10.2.10

**10.2.11.** Найдите скорость дрейфа частицы с зарядом  $q$  в перпендикулярных друг другу магнитном поле индукции  $B$  и поле постоянной силы  $F$ .

**10.2.12.** Найдите дрейфовую скорость электрона и протона в поле тяжести и магнитном поле Земли, индукция которого равна  $0,7 \cdot 10^{-4}$  Тл. Магнитное поле перпендикулярно полю тяжести.

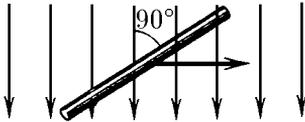
## Электромагнитная индукция

### § 11.1. Движение проводников в постоянном магнитном поле. Электродвигатели

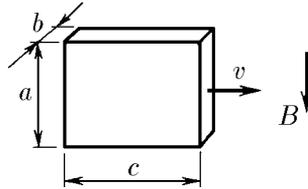
11.1.1. Между какими частями самолета возникает максимальное напряжение электрического поля из-за его движения в магнитном поле Земли?

◇ 11.1.2. Поперек магнитного поля индукции 0,1 Тл движется со скоростью 1 м/с прямой провод длиной 0,3 м. Чему равно напряжение электрического поля между концами проводника?

◇ 11.1.3. Металлический брусок, размеры которого  $a \times b \times c$  ( $b \ll a, c$ ), движется со скоростью  $v$  в магнитном поле индукции  $B$  так, как показано на рисунке. Найдите разность потенциалов между боковыми сторонами бруска и поверхностную плотность зарядов на них.



К задаче 11.1.2



К задаче 11.1.3

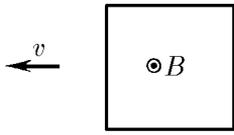
11.1.4\*. Предположим, что атом можно представить как шар радиуса  $r$  с равномерно распределенным отрицательным зарядом, в центре которого находится точечное ядро с положительным зарядом  $Ze$ . Найдите, с какой скоростью может, не распадаясь, двигаться такой атом поперек магнитного поля с индукцией  $B$ .

11.1.5\*. Отрицательные ионы водорода  $H^-$  влетают после ускорения их электрическим полем в поперечное магнитное поле индукции 40 Тл. Оцените, при какой разности потенциалов, ускоряющей эти ионы, они еще не разрушаются магнитным полем. Энергия связи внешнего электрона в отрицательном ионе водорода 0,72 эВ  $\approx 10^{-19}$  Дж.

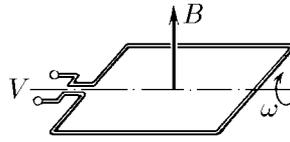
◇ 11.1.6. Магнитная индукция  $B$  перпендикулярна плоскости проволочной квадратной рамки. Найдите распределение напряженности электрического поля вдоль провода рамки, если она движется поперек поля с постоянной скоростью  $v$ .

◇ 11.1.7. Индукция постоянного магнитного поля измеряется с помощью квадратной рамки, размеры которой  $a \times a$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ . Ось

ее вращения перпендикулярна направлению магнитного поля. Амплитуда электрического напряжения, снимаемого с рамки, равна  $V$ . Найдите индукцию магнитного поля<sup>\*)</sup>.



К задаче 11.1.6



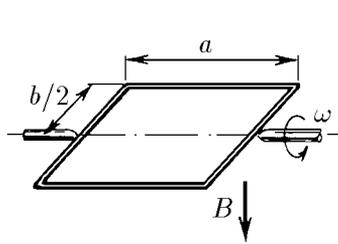
К задаче 11.1.7

◇ 11.1.8. Прямоугольная рамка, размеры которой  $a \times b$ , помещена в магнитное поле индукции  $B$ , причем в начальный момент времени плоскость рамки перпендикулярна линиям поля. Рамка вращается с угловой скоростью  $\omega$ .

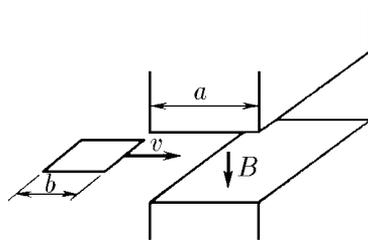
а. Постройте график зависимости тока, текущего в рамке, от времени. Сопротивление рамки  $R$ .

б. Как зависит от времени момент сил, необходимый для поддержания постоянной скорости вращения рамки?

◇ 11.1.9. Квадратный замкнутый виток проволоки, длина стороны которого  $b$ , а сопротивление единицы длины  $\rho$ , проходит с постоянной скоростью  $v$  зазор электромагнита. Магнитное поле в зазоре однородное, его индукция равна  $B$ . Считая поле вне этого зазора равным нулю, определите энергию, превратившуюся в тепло, для случаев, когда протяженность зазора  $a$  в направлении движения витка меньше  $b$  и больше  $b$ , а в перпендикулярном направлении — больше  $b$ .



К задаче 11.1.8



К задаче 11.1.9

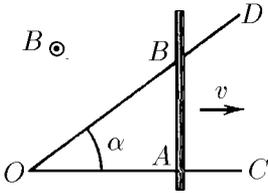
◇ 11.1.10\*. Металлический стержень  $AB$ , сопротивление единицы длины которого  $\rho$ , движется с постоянной скоростью  $v$ , перпендикулярной  $AB$ , замыкая два идеальных проводника  $OC$  и  $OD$ , образующих друг с другом угол  $\alpha$ . Длина  $OC$  равна  $l$  и  $AB \perp OC$ . Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле индукции  $B$ , перпендикулярном плоскости системы. Найдите полное количество теплоты, которое выделится в цепи за время движения прута от точки  $O$  до точки  $C$ .

11.1.11. В одном из фантастических романов предлагался проект электростанции, использующей энергию морских течений и магнитное поле Земли. В океан погружены две горизонтальные металлические пластины площади  $S = 1 \text{ км}^2$ , расположенные на расстоянии  $L = 100 \text{ м}$  одна над другой. Морская вода, обладающая удельным сопротивлением  $\rho = 0,25 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , течет с востока на запад со скоростью  $v = 1 \text{ м/с}$ . Магнитное поле Земли в данном месте однородно, направлено с юга на север, а индукция этого поля  $B = 10^{-4} \text{ Тл}$ . В результате между пластинами появляется напряжение, а если их соединить проводами с внешней

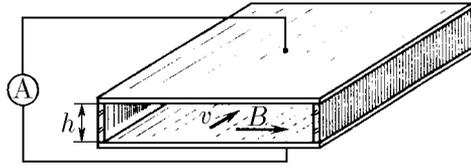
<sup>\*)</sup> В § 11.1, 11.2 индукцией магнитного поля тока в проводах пренебречь.

нагрузкой, то в ней выделяется мощность. Определите максимальную мощность, которую можно получить таким образом.

◇ **11.1.12\***. В магнитогидродинамическом генераторе между плоскими параллельными электродами, расположенными на расстоянии  $h = 10$  см друг от друга движется раскаленный газ, проводимость которого пропорциональна плотности. Площадь каждого электрода  $S = 1$  м<sup>2</sup>. Магнитное поле генератора параллельно пластинам и перпендикулярно газовому потоку, индукция этого поля  $B = 1$  Тл. При входе в генератор скорость газа  $v = 2000$  м/с, проводимость  $\lambda = 50$  См/м. Определите максимальный ток и максимальное напряжение генератора.



К задаче 11.1.10

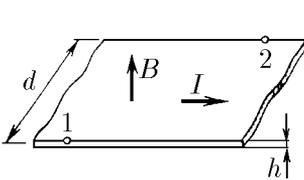


К задаче 11.1.12

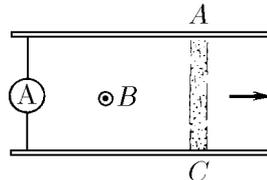
◇ **11.1.13.** По проводящей ленте ширины  $d$  течет ток  $I$ . Лента находится в магнитном поле индукции  $B$ . Направление поля перпендикулярно ее плоскости. Найдите разность потенциалов между точками 1 и 2 ленты, если ее толщина равна  $h$ , а объемная плотность заряда носителей тока на ней равна  $\rho$ .

◇ **11.1.14.** а. Ускоритель плазмы (рельсотрон) состоит из двух параллельных массивных проводников (рельсов), лежащих в плоскости, перпендикулярной магнитному полю индукции  $B$ . Между точками  $A$  и  $C$  в водороде поджигают электрический разряд. Ток  $I$  в разряде поддерживается постоянным. Под действием магнитного поля область разряда (плазменный сгусток) перемещается, разгоняясь к концам рельсов и срываясь с них. Чему равна скорость плазменного сгустка, если его масса  $m$ ? Расстояние между рельсами  $l$ . Длина участка, на котором происходит ускорение плазмы, равна  $L$ .

б. Решите задачу для случая  $B = 1$  Тл,  $l = 0,1$  м,  $L = 1$  м,  $I = 10$  А; в плазменном сгустке содержится  $10^{13}$  ионов водорода.



К задаче 11.1.13

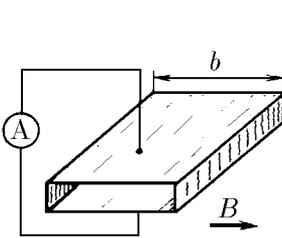


К задаче 11.1.14

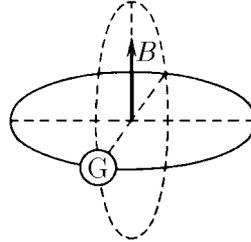
◇ **11.1.15.** В трубе прямоугольного сечения  $a \times b$  находится газ плотности  $\rho$ . Вертикальные стенки трубы — изоляторы, горизонтальные — электроды. В одном из концов трубы зажигают разряд, после чего ток  $I$  поддерживается постоянным. Возникшая область горения разряда магнитными силами вталкивается внутрь трубы, «сгребая» перед собой газ. Определите установившуюся скорость плазменной «пробки», считая, что она все время больше скорости звука в газе. Магнитное поле индукции  $B$  перпендикулярно вертикальным стенкам трубы.

**11.1.16.** Тонкое проводящее кольцо помещено в магнитное поле  $B$ , перпендикулярное плоскости кольца. Радиус кольца увеличивается с постоянной скоростью  $v$ . Определите зависимость тока в кольце от времени, если в начальный момент сопротивление кольца  $R_0$ , а радиус кольца  $r_0$ . Плотность и проводимость материала кольца при растяжении не меняются.

◇ 11.1.17. Виток площади  $S$  расположен перпендикулярно магнитному полю индукции  $B$ . Он замкнут через гальванометр с сопротивлением  $R$ . Какой заряд протечет через этот гальванометр, если виток повернуть параллельно полю?

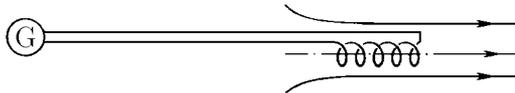


К задаче 11.1.15



К задаче 11.1.17

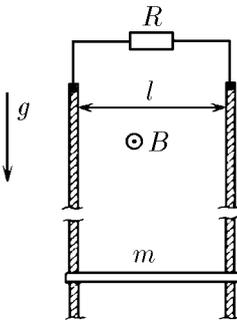
◇ 11.1.18\*. Катушка датчика магнитного поля изготовлена из медного провода диаметра 0,2 мм. Радиус катушки 1 см. Удельное сопротивление  $1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м. Датчик определяет индукцию магнитного поля по заряду, который протекает через катушку, замкнутую на гальванометр, когда ее вносят в магнитное поле так, что ось катушки совпадает с направлением поля. Определите индукцию магнитного поля, если через гальванометр, когда катушку внесли в поле, протек заряд  $10^{-4}$  Кл.



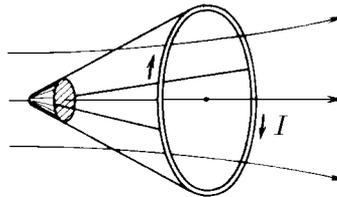
К задаче 11.1.18

◇ 11.1.19. В однородном магнитном поле индукции  $B$  находятся две вертикальные рейки, расположенные в плоскости, перпендикулярной линиям поля. По рейкам, расстояние между которыми равно  $l$ , может скользить проводник массы  $m$ . Определите установившуюся скорость этого проводника, если верхние концы реек замкнуты на сопротивление  $R$ . В какие виды энергии переходит работа силы тяжести?

11.1.20\*. Определите в задаче 11.1.19 зависимость скорости проводника от времени при нулевой начальной скорости в случае, когда верхние концы реек замкнуты: а) на сопротивление  $R$ ; б) на емкость  $C$ .



К задаче 11.1.19



К задаче 11.1.21

◇ 11.1.21. В осесимметричном магнитном поле тело можно ускорять, поддерживая в витке, связанном с телом и ориентированном перпендикулярно оси симметрии поля, постоянный ток  $I$ . Докажите, что приращение кинетической энер-

гии тела вместе с витком пропорционально приращению магнитного потока через виток, и найдите коэффициент пропорциональности.

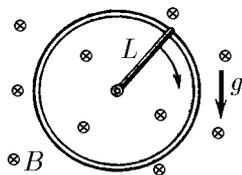
**11.1.22\*.** В магнитном поле с большой высоты падает кольцо радиуса  $a$  и массы  $m$ . Сопротивление кольца  $R$ . Плоскость кольца все время горизонтальна. Найдите установившуюся скорость падения кольца, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля изменяется с высотой по закону  $B = B_0(1+ah)$ .

◇ **11.1.23\*.** В поле тяжести помещено вертикально металлическое кольцо. Металлический стержень длины  $L$  и массы  $m$  шарнирно закреплен в центре кольца и касается его другим концом. Однородное магнитное поле индукции  $B$  перпендикулярно плоскости кольца. По какому закону надо менять ток в стержне, чтобы стержень вращался равномерно с угловой скоростью  $\omega$ , если в начальный момент стержень находился в верхнем положении? Трением пренебречь.

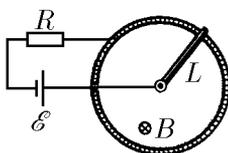
◇ **11.1.24.** На рисунке изображена модель двигателя постоянного тока. ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ , индукция магнитного поля  $B$ , сопротивление цепи  $R$ , длина перемычки  $L$ .

а. Определите установившуюся угловую скорость перемычки и ток в цепи, если сила трения в подвижном контакте  $F$ .

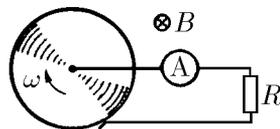
б\*. Найдите зависимость угловой скорости перемычки от времени, если ее начальная скорость равна нулю, а трением можно пренебречь.



К задаче 11.1.23



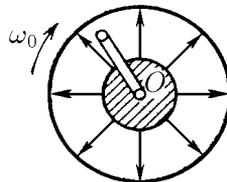
К задаче 11.1.24



К задаче 11.1.25

◇ **11.1.25\*.** Проводящий диск вращается с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле индукции  $B$ , перпендикулярном плоскости диска. Что покажет амперметр, включенный через сопротивление  $R$ ? Найдите ток, если  $R = 1$  Ом, радиус диска  $r = 0,05$  м,  $\omega = 2\pi \cdot 50$  рад/с,  $B = 1$  Тл.

◇ **11.1.26\*.** На оси  $O$  шарнирно закреплена одной стороной квадратная проволочная рамка, размеры которой  $a \times a$ . Вокруг этой же оси вращается с угловой скоростью  $\omega_0$  магнит, создающий в области, где расположена рамка, радиальное магнитное поле. Определите угловую скорость рамки, если сопротивление единицы ее длины  $\rho$ , момент силы трения  $M$ , а индукция магнитного поля у свободного края рамки  $B$ .



К задаче 11.1.26

**11.1.27.** Почему электродвигатель может сгореть, если остановить его ротор?

**11.1.28.** Частота ротора электродвигателя постоянного тока, включенного в цепь батареи с ЭДС 24 В, при полном сопротивлении цепи 20 Ом равна  $600 \text{ мин}^{-1}$  при токе в цепи 0,2 А. Какую ЭДС разовьет тот же двигатель, работая в качестве динамо-машины с частотой  $1200 \text{ мин}^{-1}$ ?

**11.1.29.** Какую частоту разовьет электродвигатель постоянного тока с постоянным магнитом, включенный в цепь с ЭДС  $\mathcal{E}$  при полном сопротивлении цепи  $R$ , если, работая в качестве динамо-машины, он развивает ЭДС  $\mathcal{E}_0$  при частоте  $f_0$ ? Момент силы трения на оси двигателя равен  $M$ .

**11.1.30.** Какую ЭДС развивает динамо-машина постоянного тока, если при сопротивлении цепи 300 Ом на вращение ротора затрачивается мощность 50 Вт,

а потери на трение составляют 4% по мощности? Какую мощность для поддержания той же частоты необходимо затрачивать при сопротивлении цепи 60 Ом?

**11.1.31\***. Якоря двух одинаковых электродвигателей постоянного тока соосны и жестко соединены друг с другом. К обмоткам якорей подключены одинаковые источники тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ . При этом угловая скорость вращения якорей без нагрузки равна  $\omega_0$ . Если двигатели затормозить, то ток в якорях будет равен  $I_0$ . Один из источников переключили так, что вращающие моменты двигателей стали противоположны. Какой момент нужно приложить к соединенным якорям для того, чтобы они вращались с заданной угловой скоростью  $\omega$ ? Трение в двигателях пренебрежимо мало, магнитное поле статора создается постоянным магнитом.

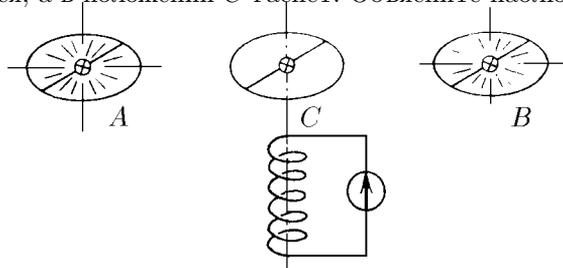
**11.1.32\***. Один конец провода трамвайной линии находится под постоянным напряжением  $V$  относительно земли. На каком расстоянии от этого конца линии находится трамвай, снабженный двумя одинаковыми двигателями, и с какой скоростью он движется, если при последовательном включении его двигателей ток в линии равен  $I_1$ , при параллельном —  $I_2$ , а скорость трамвая при таком переключении не изменяется? Сила трения  $F$ , сопротивление единицы длины провода  $\rho$ , сопротивление обмотки каждого двигателя  $R$ .

## § 11.2. Вихревое электрическое поле

**11.2.1.** Чему был равен магнитный поток через площадь, ограниченную замкнутым контуром, если при равномерном убывании этого потока в течение 1 с до нуля в контуре возникает ЭДС индукции 1 В? 100 В? 1 СГС?

**11.2.2.** Индукция однородного магнитного поля внутри цилиндра радиуса  $r = 0,1$  м линейно возрастает со временем:  $B = \alpha t$  (коэффициент  $\alpha = 10^{-3}$  Тл/с). Магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра. Чему равна напряженность вихревого электрического поля на расстоянии  $l = 0,2$  м от оси цилиндра?

◇ **11.2.3.** Проводящее кольцо, имеющее по диаметру переключку с электрической лампочкой, перемещают в магнитном поле соленоида с током так, что плоскость кольца перпендикулярна оси соленоида, а переключка с лампочкой перпендикулярна направлению скорости движения кольца. В положениях кольца  $A$  и  $B$  лампочка светится, а в положении  $C$  гаснет. Объясните наблюдаемый эффект.



К задаче 11.2.3

**11.2.4.** Индукция магнитного поля внутри цилиндра радиуса 8 см возрастает со временем по закону  $B = \alpha t^2$  (коэффициент  $\alpha = 10^{-4}$  Тл/с<sup>2</sup>). Магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра. Чему равна напряженность вихревого электрического поля на расстоянии  $l = 0,1$  м от оси цилиндра в момент времени  $t_1 = 1$  с?  $t_2 = 4$  с?

◇ **11.2.5.** По двум бесконечным параллельным плоскостям текут одинаковые по модулю и противоположные по направлению токи. Линейная плотность этих

токов изменяется по закону  $j = \alpha t$ . Найдите распределение напряженности вихревого электрического поля между этими плоскостями.

**11.2.6.** Через соленоид длины  $l_0 = 20$  см и радиуса  $r = 2$  см течет синусоидальный ток  $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$ , где  $I_0 = 10$  А,  $\nu = 50$  Гц. Число витков в соленоиде  $n_0 = 200$ . Найдите распределение напряженности вихревого электрического поля внутри соленоида. Какой амплитуды напряжение создает это поле в катушке длины  $l = 5$  см и радиуса  $r = 1$  см, помещенной внутрь соленоида вдоль его оси? Число витков в этой катушке  $n = 100$ .

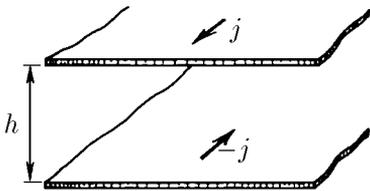
**11.2.7.** Скорость изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, равна  $\varphi$ .

а. Определите заряд на конденсаторе емкости  $C$ , который включен в этот контур.

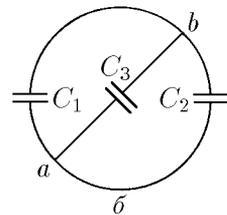
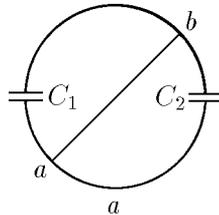
б. В контур включены два конденсатора емкости  $C_1$  и  $C_2$ . Определите заряд на обкладках конденсаторов.

◇ **11.2.8.** а. В контур, имеющий вид окружности и находящийся в однородном магнитном поле, включены два конденсатора емкости  $C_1$  и  $C_2$ . Контур соединяют по диаметру перемычкой — проводником  $ab$ . Определите заряд на обкладках конденсаторов, если скорость изменения магнитного потока через контур равна  $\varphi$ .

б\*. Чему был бы равен заряд на обкладках дополнительного конденсатора емкости  $C_3$ , включенного так, как изображено на рисунке?

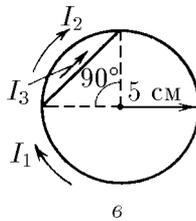
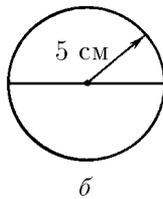
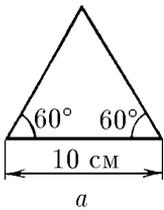


К задаче 11.2.5

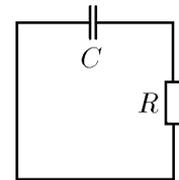


К задаче 11.2.8

◇ **11.2.9.** На рисунке изображены плоские фигуры, сделанные из проволоки, сопротивление единицы длины которой равно 1 Ом/м. Определите токи в них, если фигуры помещены в однородное магнитное поле, которое меняется во времени. Скорость изменения магнитного потока через единицу площади  $0,1$  Вб/(м<sup>2</sup>·с).



К задаче 11.2.9



К задаче 11.2.10

◇ **11.2.10.** В цепь электрического контура входит сопротивление  $R$  и незаряженный конденсатор емкости  $C$ .

а. Докажите, что заряд на конденсаторе в процессе появления, а затем исчезновения магнитного потока через контур не превышает величины  $\Phi T / (CR^2)$ , где  $T$  — время существования этого магнитного потока,  $\Phi$  — его максимальное значение.

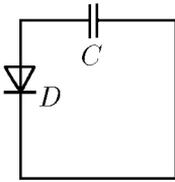
б\*. Для определения постоянного тока  $I$ , текущего в контуре в течение времени  $T$ , при наличии в этом же промежутке времени переменного тока, вызванного электромагнитной индукцией, измеряют потенциал емкости  $V$  после того, как все токи исчезнут, а затем оценивают постоянный ток по формуле  $I = CV/T$ . Определите максимальную погрешность такой оценки в случае, когда амплитуда переменного тока в  $k$  раз больше  $I$ .

◇ 11.2.11. В электрический контур входят конденсатор емкости  $C = 0,01$  мкФ и диод  $D$  с сопротивлением в прямом направлении  $R = 100$  Ом, в обратном — равном бесконечности. После кратковременного появления внутри контура магнитного поля конденсатор оказался заряженным до потенциала  $V = 0,5$  В. Определите максимальный поток магнитной индукции, который проходил через контур.

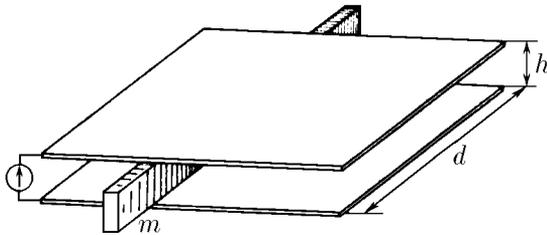
◇ 11.2.12. Электромагнитная пушка состоит из двух длинных пластин, которые замыкаются металлической поперечной планкой массы  $m$ , имеющей скользящие контакты с пластинами. Расстояние между пластинами  $h$ . Ширина пластин  $d$  меньше длины планки, но существенно больше  $h$ .

а. Как должно меняться во времени напряжение, подаваемое на пластины с левой стороны, чтобы планка двигалась вправо с постоянным ускорением  $a$ ? с ускорением  $bt^2$ ?

б. Как должно меняться напряжение, подаваемое на пластины ширины 10 см, расположенные на расстоянии 1 см, чтобы на длине 1 м ускорить планку массы 10 г до первой космической скорости при ее равномерном ускорении? при ускорении, которое пропорционально квадрату времени?



К задаче 11.2.11



К задаче 11.2.12

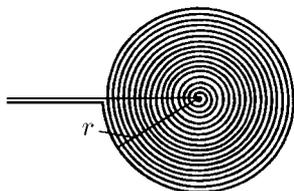
◇ 11.2.13\*. Плоская спираль с очень большим числом витков  $n$  и наружным радиусом  $r$  находится в однородном магнитном поле, индукция которого перпендикулярна плоскости спирали и изменяется по закону  $B = B_0 \cos \omega t$ . Найдите ЭДС индукции в спирали. Расстояние между витками спирали одно и то же.

11.2.14\*. На непроводящем кольце массы  $m$  и радиуса  $r$  равномерно распределен заряд  $q$ . Кольцо может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоится. В центральной области кольца радиуса  $l < r$  имеется перпендикулярное плоскости кольца магнитное поле, индукция которого равномерно уменьшается до нуля. Какую угловую скорость приобретет кольцо к моменту исчезновения поля? Изменится ли результат, если индукция  $B$  будет уменьшаться до нуля неравномерно? Индукцией магнитного поля, создаваемой вращающимся кольцом, пренебречь.

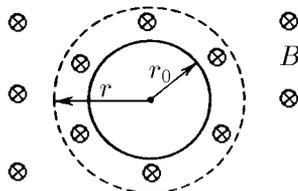
◇ 11.2.15\*. Вне цилиндра радиуса  $r_0$  индукция однородного магнитного поля нарастает линейно во времени:  $B = at$ . Как должна меняться во времени индукция однородного магнитного поля внутри цилиндра, чтобы электрон двигался по окружности радиуса  $r > r_0$ ? При  $t = 0$  электрон покоится.

11.2.16\*. В однородном магнитном поле электрон движется по окружности определенного радиуса. Уменьшается или увеличивается радиус кривизны траектории электрона при медленном возрастании индукции магнитного поля?

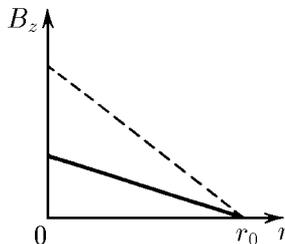
◇ **11.2.17\***. Индукция магнитного поля направлена вдоль оси  $z$  и зависит от расстояния до этой оси так, как изображено на рисунке. На каком расстоянии от оси  $z$  вращается электрон, который при возрастании поля остается на своей орбите? Во сколько раз увеличивается энергия этого электрона при десятикратном увеличении индукции поля? Как будут двигаться при возрастании поля электроны, которые двигались по другим круговым орбитам?



К задаче 11.2.13



К задаче 11.2.15



К задаче 11.2.17

**11.2.18\***. На поверхности длинного сплошного непроводящего цилиндра радиуса  $r$  равномерно распределен заряд, поверхностная плотность которого  $\sigma$ . Внешнее однородное магнитное поле индукции  $B$  направлено вдоль оси цилиндра. Определите угловую скорость вращения цилиндра после «выключения» внешнего поля. Плотность вещества цилиндра  $\rho$ .

**11.2.19\***. При ускорении зарядов возникают вихревые электрические поля, напряженность которых, если пренебречь излучением, пропорциональна ускорению. Поэтому на движущийся с ускорением  $a$  заряд со стороны этих электрических полей действует сила  $F = m_{эм}a$ . Коэффициент пропорциональности  $m_{эм}$  можно назвать электромагнитной массой заряда.

а. Во сколько раз электромагнитная масса электрона проводимости в длинном соленоиде радиуса  $0,1$  м с числом витков на единицу длины соленоида  $10^3 \text{ м}^{-1}$  больше массы свободного электрона? Сечение провода соленоида  $1 \text{ мм}^2$ , число электронов проводимости в единице объема материала соленоида  $10^{23} \text{ см}^{-3}$ .

б. Какими параметрами должен обладать соленоид, чтобы электромагнитная масса электрона в нем была равна массе свободного электрона? Число электронов проводимости в единице объема материала соленоида  $10^{23} \text{ см}^{-3}$ .

**11.2.20\***. Определите электромагнитную массу плоского конденсатора емкости  $C$ , заряженного до потенциала  $V$ , при равномерно ускоренном движении его вдоль пластин.

**11.2.21\***. Эксперименты на встречных электрон-электронных пучках показали, что заряд электрона распределен в области, размеры которой меньше  $10^{-18}$  м. Оцените верхний предел электромагнитной массы электрона.

### § 11.3. Взаимная индуктивность.

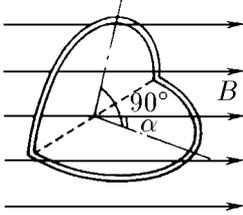
#### Индуктивность проводников. Трансформаторы

**11.3.1.** Внутри длинного соленоида с током  $I$  находится плоский замкнутый контур сечения  $S$ , плоскость которого расположена под углом  $\alpha$  к оси соленоида. Число витков на единицу длины соленоида  $n$ . Определите магнитный поток через этот контур и взаимную индуктивность контура и соленоида.

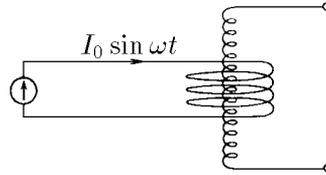
◇ **11.3.2.** Виток радиуса  $r$  согнули по диаметру под прямым углом и поместили внутрь длинного соленоида так, что одна из плоскостей оказалась расположенной к оси соленоида под углом  $\alpha$ , а другая — под углом  $\pi/2 - \alpha$ . Число витков на единицу длины соленоида  $n$ . Чему равна взаимная индуктивность согнутого витка и соленоида?

**11.3.3.** Внутри длинного соленоида соосно ему расположен соленоид радиуса  $r$ . Число витков внутреннего соленоида  $N$ . Число витков на единицу длины внешнего соленоида  $n$ . Чему равна взаимная индуктивность этих соленоидов?

◇ **11.3.4\*.** Короткий соленоид радиуса  $R$  расположен вокруг длинного соленоида радиуса  $r$ . Оси соленоидов совпадают. Число витков на единицу длины длинного соленоида  $n$ , число витков короткого соленоида  $N$ . Через короткий соленоид течет ток  $I = I_0 \sin \omega t$ . Определите напряжение на концах длинного соленоида.



К задаче 11.3.2



К задаче 11.3.4

**11.3.5.** а. Чему равна индуктивность соленоида радиуса  $r$  и длины  $l \gg r$ ? Число витков на единицу длины соленоида  $n$ .

б\*. Получите формулу для индуктивности соленоида, не пренебрегая влиянием на индуктивность массы электрона  $m_e$ . Сечение провода соленоида  $S$ , число электронов проводимости в единице объема проводника  $n_e$ . Можно ли пренебречь этим влиянием на индуктивность катушек, используемых в радиотехнике?

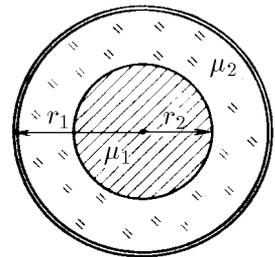
**11.3.6\*.** Внутренний радиус обмотки длинного соленоида  $r_1 = 0,05$  м, внешний радиус  $r_2 = 0,1$  м, число витков на единицу длины соленоида  $n = 10\,000$ . Определите индуктивность единицы длины соленоида.

**11.3.7.** Объем длинного тонкостенного соленоида  $v = 10$  л, индуктивность  $L = 0,01$  Гн. На соленоид подали напряжение  $V = 10$  В. Через какое время после подачи напряжения индукция магнитного поля в соленоиде станет равной  $B = 0,1$  Тл?

**11.3.8.** Определите индуктивность единицы длины двухпроводной линии, состоящей из двух тонких плоских шин ширины  $d = 0,1$  м, расположенных на расстоянии  $h = 5$  мм друг от друга. По шинам текут равные по модулю, но противоположно направленные токи.

**11.3.9\*.** Двухпроводная линия состоит из двух коаксиальных тонких цилиндрических оболочек радиуса  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ). Пространство между ними заполнено веществом с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найдите индуктивность линии на единицу длины. По оболочкам текут равные по модулю, но противоположно направленные токи.

◇ **11.3.10\*.** На оси тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса  $r_1$  расположен провод радиуса  $r_2$ , магнитная проницаемость которого  $\mu_1$ . Пространство между ними заполнено веществом с магнитной проницаемостью  $\mu_2$ . Найдите индуктивность линии на единицу длины. Ток в проводе равномерно распределен по сечению, равен по модулю и противоположен по направлению току цилиндрической оболочки.



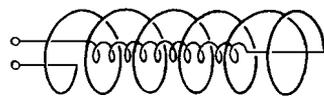
К задаче 11.3.10

**11.3.11\*.** Найдите индуктивность на единицу длины двухпроводной линии. Линия состоит из двух параллельных прямых проводов радиуса  $r$ , расстояние между

осевыми линиями которых  $h \gg r$ . По проводам текут равные по модулю, но противоположно направленные токи. Магнитного поля внутри проводов нет.

**11.3.12.** Все размеры проводника увеличили в  $k$  раз. Во сколько раз изменится индуктивность проводника?

◇ **11.3.13.** Чему равна индуктивность двух длинных соленоидов радиуса  $r_1$  и  $r_2$ , соединенных так, как показано на рисунке? Внутренний соленоид имеет длину  $l_1$ , внешний  $l_2$ . Число витков на единицу длины внутреннего соленоида  $n_1$ , внешнего  $n_2$ . Рассмотрите случаи, когда направления токов в витках обоих соленоидов одинаковы и противоположны.

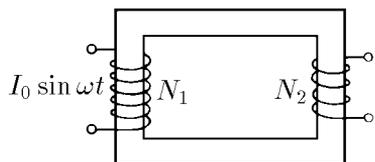


*K задаче 11.3.13*

**11.3.14.** Цепь состоит из двух последовательно соединенных катушек индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ . Взаимная индуктивность катушек  $L_{12}$ . Найдите полную индуктивность цепи.

**11.3.15\*.** На один сердечник намотаны две катушки. Индуктивность каждой из катушек в отдельности  $L_1$  и  $L_2$ . Чему равна их взаимная индуктивность? Рассеянием магнитного поля пренебречь.

◇ **11.3.16\*.** В первичной обмотке трансформатора течет ток  $I = I_0 \sin \omega t$ . Магнитный поток, создаваемый этим током, практически полностью проходит через железный сердечник трансформатора. Магнитная проницаемость сердечника  $\mu$ . Определите ЭДС индукции во вторичной разомкнутой обмотке, если число витков в первичной обмотке  $N_1$ , а во вторичной  $N_2$ . Какое напряжение подается на первичную обмотку? Сечение сердечника трансформатора  $S$ . Эффективная длина сердечника  $l$ .



*K задаче 11.3.16*

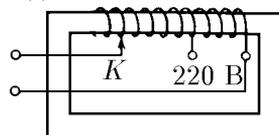
**11.3.17.** Ток в первичной обмотке трансформатора равномерно увеличивают. По какому закону меняется напряжение во вторичной обмотке?

**11.3.18.** Покажите, что в идеальном трансформаторе с замкнутой накоротко вторичной обмоткой имеет место соотношение  $I_1/I_2 = N_2/N_1$ , где  $I_1$  и  $I_2$  — токи, а  $N_1$  и  $N_2$  — число витков в обмотках.

**11.3.19\*.** а. Почему опасно замыкание хотя бы одного витка вторичной обмотки трансформатора?

б. Замыкание витка вторичной обмотки приводит иногда к выходу из строя первичной обмотки трансформатора. Почему это происходит?

◇ **11.3.20.** Объясните устройство лабораторного регулирующего трансформатора, изображенного на рисунке. Как меняется напряжение на выходе трансформатора при перемещении контакта  $K$  влево?



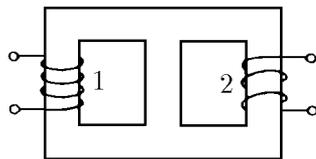
*K задаче 11.3.20*

**11.3.21.** Почему нагруженный трансформатор гудит? Какова основная частота звука, если трансформатор включен в промышленную сеть?

**11.3.22.** Зачем сердечник трансформатора собирают из отдельных пластин?

**11.3.23.** Для питания электрического звонка пользуются понижающим трансформатором. Почему обычно кнопка звонка включена во вторичную цепь, а первичная остается постоянно подключенной к сети?

◇ **11.3.24.** На железный сердечник намотаны две катушки. Магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника и делится поровну в его разветвлениях. При включении катушки 1 в цепь переменного тока с напря-



*K задаче 11.3.24*

жением 40 В напряжение на катушке 2 равно 10 В. Какое напряжение будет на разомкнутых зажимах катушки 1, если катушку 2 включить в цепь переменного тока с напряжением 10 В?

**11.3.25\*.** Имеются два одинаковых идеальных трансформатора с одинаковым коэффициентом трансформации  $1 : 3$ . Первичная обмотка одного из них соединена последовательно со вторичной второго, и свободные концы этих обмоток включены в сеть переменного тока с напряжением 100 В. Вторичная обмотка первого трансформатора последовательно соединена с первичной обмоткой второго. Определите амплитуду переменного напряжения между другими концами обмоток.

## § 11.4. Электрические цепи переменного тока

**11.4.1.** Батарея без внутреннего сопротивления подключена к соленоиду индуктивности  $L$ . Определите зависимость тока в цепи от времени, если ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ . Найдите работу батареи за время  $\tau$ . В какой вид энергии превращается эта работа?

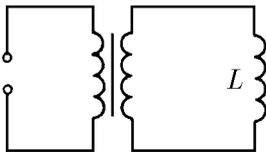
**11.4.2.** Как должно меняться напряжение в электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных катушки индуктивности  $L$  и сопротивления  $R$ , чтобы ток в ней: а) линейно возрастал:  $I = at$ ? б) менялся синусоидально:  $I = I_0 \sin \omega t$ ?

◇ **11.4.3\*.** При переходе вещества в сверхпроводящее состояние только небольшая часть электронов проводимости движется, не испытывая при этом сопротивления. Ток в сверхпроводящем соленоиде индуктивности  $L$  «запускают», подключая к соленоиду на время  $t$  постоянное напряжение. Максимальный ток в соленоиде  $I$ . Определите верхний предел количества теплоты, выделяющейся в соленоиде при запуске в нем тока. Перед переходом в сверхпроводящее состояние сопротивление соленоида было  $R$ .

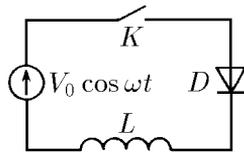
**11.4.4\*.** Генератор с ЭДС  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$  в момент  $t = 0$  подключают к катушке индуктивности  $L$ . Определите зависимость тока в цепи от времени. Активным сопротивлением цепи можно пренебречь. Объясните полученный результат.

◇ **11.4.5.** В схеме, показанной на рисунке, диод  $D$  и катушка индуктивности  $L$  при помощи ключа  $K$  подключаются к источнику переменного напряжения  $V = V_0 \cos \omega t$ . В момент времени  $t = 0$  ключ  $K$  замыкается. Определите силу тока в катушке как функцию времени. Постройте график этой функции. Диод и катушку считать идеальными. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

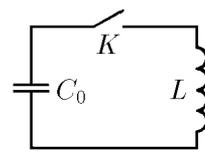
◇ **11.4.6.** В цепи, состоящей из заряженного конденсатора емкости  $C_0$  и катушки индуктивности  $L$ , замыкают ключ  $K$ . По какому закону должна изменяться во времени емкость конденсатора, чтобы ток в цепи нарастал прямо пропорционально времени?



*K задаче 11.4.3*



*K задаче 11.4.5*



*K задаче 11.4.6*

◇ **11.4.7.** В изображенной на рисунке цепи конденсатор емкости  $C$  заряжен до напряжения  $V_0$ . Сначала замыкают ключ  $K_1$ . В момент, когда ток через катушку

индуктивности  $L$  достигает своего максимального значения, замыкают ключ  $K_2$  и размыкают ключ  $K_1$ . Каким оказывается наибольшее значение напряжения на сопротивлении  $R$ ?

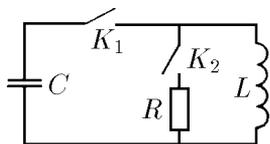
**11.4.8.** а. В какой момент искрит рубильник — при замыкании или при размыкании? Почему искрение прекращается, если параллельно рубильнику включить конденсатор?

б. Какой емкости конденсатор нужно подсоединить параллельно катушке индуктивности  $L$ , чтобы при размыкании ключа напряжение на ней не увеличилось более чем в  $N$  раз, если частота напряжения в цепи  $\nu$ ? Определите эту емкость в случае  $\nu = 50$  Гц,  $L = 0,1$  Гц,  $N = 10$ .

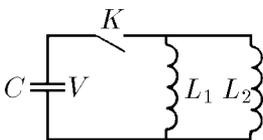
**11.4.9.** Источник с ЭДС  $\mathcal{E}$  и нулевым внутренним сопротивлением в момент времени  $t = 0$  подключают к последовательно соединенным катушке индуктивности  $L$  и конденсатору емкости  $C$ . Найдите максимальный ток в цепи и максимальный заряд конденсатора.

◇ **11.4.10.** Найдите максимальный ток в катушках индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  после замыкания ключа  $K$  в цепи, изображенной на рисунке. Емкость конденсатора  $C$ , начальное напряжение на нем  $V$ .

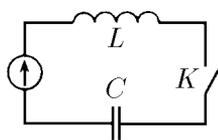
◇ **11.4.11\*.** В схеме, изображенной на рисунке, в момент времени  $t = 0$  замыкают ключ  $K$ . Определите ток в цепи, если источник дает: а) постоянное напряжение  $V_0$ ; б) косинусоидальное напряжение  $V_0 \cos \omega t$ . Определите максимальный ток, если  $V_0 = 100$  В,  $L = 10^{-2}$  Гн,  $C = 10^{-3}$  Ф,  $\nu = \omega/2\pi = 50$  Гц.



К задаче 11.4.7



К задаче 11.4.10

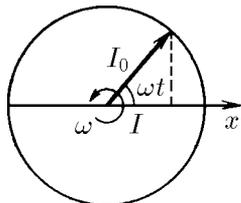


К задаче 11.4.11

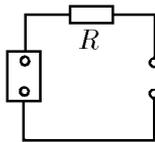
◇ **11.4.12.** а. На векторной диаграмме ток  $I = I_0 \cos \omega t$  определяется как проекция на ось  $x$  вектора  $I_0$ , который вращается вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ . Как расположены на этой же диаграмме векторы падения напряжения при протекании этого тока через сопротивление  $R$ , катушку индуктивности  $L$  и конденсатор емкости  $C$ ? Чему равны амплитуды векторов напряжения?

б. Используя векторную диаграмму, определите падение напряжения в цепи последовательно соединенных катушки индуктивности  $L$ , сопротивления  $R$  и конденсатора емкости  $C$  и сдвиг фаз между током и напряжением в цепи, если ток в цепи меняется косинусоидально:  $I = I_0 \cos \omega t$ .

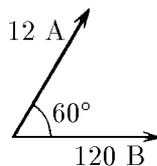
◇ **11.4.13.** Значения напряжения, тока и сдвига фаз между напряжением и током в цепи нагрузки показаны на векторной диаграмме. Определите амплитуду ЭДС источника, если  $R = 10$  Ом.



К задаче 11.4.12

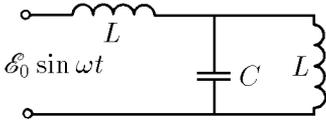


К задаче 11.4.13

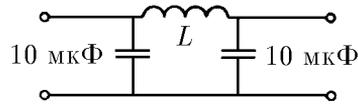


◇ **11.4.14.** Найдите установившийся ток в цепи, изображенной на рисунке.

◇ 11.4.15. Подберите индуктивность дросселя так, чтобы амплитуда напряжения на выходе фильтра при частоте 100 Гц была в 10 раз меньше амплитуды на входе.

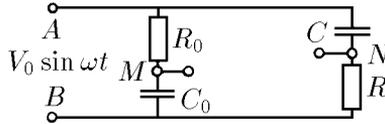


К задаче 11.4.14



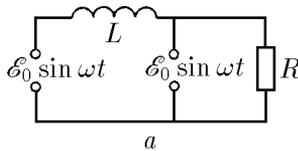
К задаче 11.4.15

◇ 11.4.16\*. Имеется фазовращательная цепь. К клеммам  $A$  и  $B$  подводится напряжение  $V = V_0 \sin \omega t$ . Какое напряжение снимается с клемм  $M$  и  $N$  при  $R_0 C_0 = RC$ ?

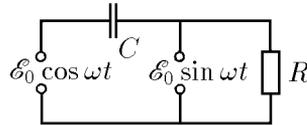


К задаче 11.4.16

◇ 11.4.17. Найдите установившиеся токи в электрических цепях, изображенных на рисунке. Внутреннее сопротивление источников напряжения равно нулю. Определите среднюю мощность, выделяющуюся в цепях, если  $\mathcal{E}_0 = 200$  В,  $R = 100$  Ом,  $C = 10^{-4}$  Ф,  $L = 1$  Гн. Частота напряжения источника  $\nu = \omega/2\pi = 50$  Гц.



а



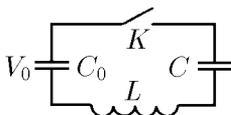
б

К задаче 11.4.17

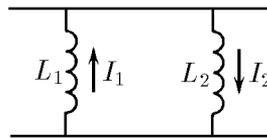
11.4.18. Последовательно с электроплиткой в городскую сеть подключили катушку индуктивности. При этом мощность плитки упала в два раза. Найдите индуктивность катушки, если активное сопротивление плитки 50 Ом.

11.4.19. Электрическая цепь, состоящая из двух катушек индуктивности и лампочки, подключена к генератору переменного напряжения. Если в одну из катушек вдвинуть железный сердечник, то свечение лампочки усиливается, если же сердечник вдвинуть во вторую катушку, то свечение лампочки ослабевает. Составьте схему возможной электрической цепи.

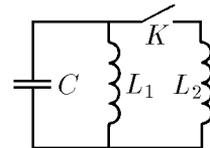
◇ 11.4.20\*. Начальное напряжение на конденсаторе емкости  $C_0$  равно  $V_0$ , а конденсатор емкости  $C$  не заряжен. Через какое время после замыкания ключа  $K$  пробьется конденсатор емкости  $C$ , если его пробой происходит при напряжении  $V$ ?



К задаче 11.4.20



а



б

К задаче 11.4.21

◇ 11.4.21. а. Докажите, что в двух параллельно соединенных катушках индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  сумма  $L_1 I_1 + L_2 I_2$  не меняется. Направление токов показано на рисунке.

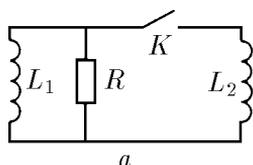
◇ б. Конденсатор емкости  $C$ , заряженный до напряжения  $V_0$ , разряжается через катушку индуктивности  $L_1$ . Какой максимальный ток можно получить в катушке индуктивности  $L_2$ , если замкнуть ключ  $K$  в момент, когда ток индуктивности  $L_1$  максимален?

◇ 11.4.22\*. а. В момент, когда ток в катушке индуктивности  $L_1$  был равен  $I$ , ключ  $K$  замкнули. Какое количество теплоты выделится на сопротивлении  $R$  после замыкания ключа?

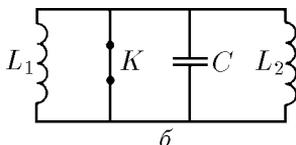
б. При замкнутом ключе  $K$  ток в катушке индуктивности  $L_1$  равен  $I_1$ , а в индуктивности  $L_2$  равен  $I_2$ . Определите, в каких пределах будет меняться ток в катушках индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  после размыкания ключа  $K$ .

11.4.23\*. Из-за наличия активного сопротивления проводов в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкости  $1 \text{ мкФ}$  и катушки индуктивности  $1 \text{ мкГн}$ , амплитуда тока за  $1 \text{ мс}$  уменьшилась в два раза. Определите сопротивление проводов.

◇ 11.4.24\*. В колебательном контуре, состоящем из последовательно соединенных сопротивления  $R$ , катушки индуктивности  $L$  и конденсатора емкости  $C$ , происходят затухающие колебания. За некоторое время амплитуда тока в контуре уменьшилась от значения  $I_1$  до значения  $I_2$ . Какое количество теплоты выделилось за это время на сопротивлении?

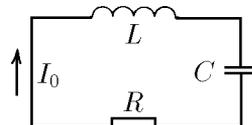


а

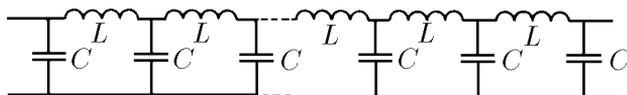


б

К задаче 11.4.22



К задаче 11.4.24



К задаче 11.4.25

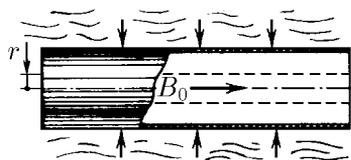
◇ 11.4.25\*. При распространении синусоидальных волн в бесконечной  $LC$ -цепочке фаза колебаний напряжения в каждом узле отстает на  $\varphi$  от фазы колебаний в предшествующем узле. Определите зависимость  $\varphi$  от  $\omega$ ,  $L$ ,  $C$ . Чему равна скорость распространения синусоидальной волны по  $LC$ -цепочке, если длина ячейки  $l$ ? Чему равна эта скорость при малых  $\omega$ ?

## § 11.5. Сохранение магнитного потока.

### Сверхпроводники в магнитном поле

11.5.1. Почему при деформации сверхпроводящего кольца с током полный магнитный поток через кольцо сохраняется?

◇ 11.5.2. Длинную цилиндрическую металлическую оболочку радиуса  $r_0$ , которая находилась в постоянном магнитном поле индукции  $B_0$ , сжали взрывом. Определите индукцию магнитного поля внутри сжатой оболочки, если ее радиус стал равным  $r$ . Активным сопротивлением оболочки пренебречь.



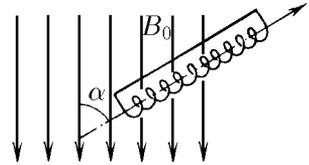
К задаче 11.5.2

**11.5.3.** Во сколько раз изменится ток в двух удаленных друг от друга тонких сверхпроводящих кольцах с однонаправленным током при их совмещении?

**11.5.4.** Когда в короткозамкнутый сверхпроводящий длинный соленоид с током вставили сверхпроводящий стержень, ток в соленоиде увеличился в три раза. Определите, во сколько раз сечение соленоида больше сечения стержня.

**11.5.5.** Короткозамкнутый длинный соленоид с током  $I$ , сделанный из сверхпроводника, сжали так, что его длина уменьшилась в три раза. Как изменится ток в соленоиде? Шаг витка соленоида много меньше его радиуса.

◇ **11.5.6\*.** Длинный короткозамкнутый сверхпроводящий соленоид вдвигают в магнитное поле индукции  $B_0$  под углом  $\alpha$  к направлению поля. Как распределится индукция магнитного поля в соленоиде, если он лишь наполовину войдет во внешнее поле?



К задаче 11.5.6

**11.5.7.** Сверхпроводящее кольцо индуктивности  $L$ , в котором течет ток  $I_0$ , вносят в однородное магнитное поле индукции  $B_0$ . Найдите ток, который будет протекать по кольцу. Нормаль к плоскости кольца составляет с направлением поля угол  $\alpha$ ; радиус кольца  $r$ .

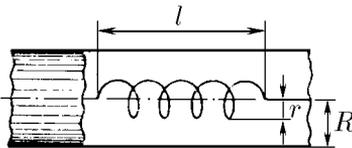
**11.5.8.** В постоянном однородном поле индукции  $B$  вокруг своего диаметра, ориентированного перпендикулярно полю, вращается сверхпроводящее кольцо. Индуктивность кольца  $L$ , его диаметр  $D$ . Определите амплитуду переменного тока в кольце.

**11.5.9.** Длинный короткозамкнутый сверхпроводящий соленоид соосно надели на еще более длинный стальной цилиндр, сечение которого в два раза меньше сечения соленоида. На сколько изменится индукция магнитного поля вне и внутри части стального цилиндра, находящейся внутри соленоида, если магнитное поле соленоида много больше магнитного поля насыщения стали  $B_0$ ?

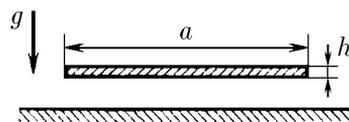
**11.5.10\*.** Сквозь катушку сечения  $S$  и длины  $h$ , изготовленную из сверхпроводящей проволоки, пролетает с постоянной скоростью сверхпроводящий стержень сечения  $\sigma$  и длины  $l$ . Начертите график зависимости тока в катушке от положения стержня, если катушка замкнута накоротко и начальный ток в ней  $I_0$ . Рассмотрите случаи: а)  $l > h$ ; б)  $l < h$ . Краевыми эффектами пренебречь.

◇ **11.5.11\*.** Вычислите индуктивность длинного соленоида радиуса  $r$  и длины  $l$ , помещенного внутрь длинной сверхпроводящей трубы радиуса  $R$  вдоль ее оси. Число витков соленоида  $N$ .

◇ **11.5.12.** Плоская медная шина, сечение которой  $a \times h = 100 \times 1$  мм, параллельна горизонтальной поверхности сверхпроводника. Какой ток нужно пропускать через шину, чтобы она не падала на сверхпроводник?



К задаче 11.5.11



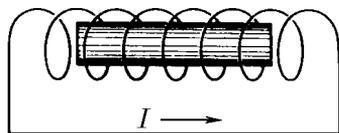
К задаче 11.5.12

**11.5.13\*.** Через длинный прямой провод, который находится на высоте  $h$  над сверхпроводящей плоскостью, пропустили ток  $I$ . Чему равно максимальное магнитное давление на поверхность сверхпроводника? С какой силой действует сверхпроводник на единицу длины провода?

**11.5.14.** Длинный соленоид с разомкнутыми концами расположен вдоль постоянного магнитного поля с индукцией  $B = 2$  Тл. Число витков на единицу длины соленоида  $n = 1000 \text{ м}^{-1}$ . С какой скоростью пролетел сквозь этот соленоид длинный металлический снаряд радиуса  $r = 9$  см, если максимальное напряжение, которое появилось на концах соленоида,  $V = 100$  кВ? Сопротивлением металла снаряда пренебречь.

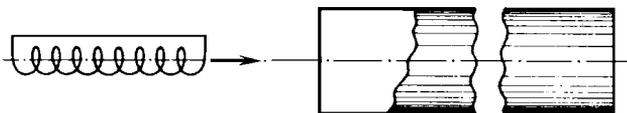
**11.5.15\*.** Почему ответ задачи 11.5.14 не зависит от формы концов снаряда?

◇ **11.5.16\*.** Когда цилиндрический металлический снаряд массы  $m$ , длины  $l$  и радиуса  $r$ , летящий со скоростью  $v_0$ , находился внутри соленоида с числом витков  $N$ , длиной  $L$  и радиусом  $R \ll l$ , в соленоиде создали ток  $I$ , а затем его цепь закоротили. На сколько увеличится скорость снаряда, вылетевшего из соленоида? Сопротивлением металла пренебречь.



К задаче 11.5.16

◇ **11.5.17\*.** На большом расстоянии от длинной сверхпроводящей круглой трубы радиуса  $r$  соосно с ней расположена короткозамкнутая сверхпроводящая катушка с током  $I$ . Число витков в катушке  $N$ , длина катушки  $l \gg r$ , радиус  $r/2$ , масса катушки  $m$ . Какую скорость нужно сообщить катушке, чтобы она пролетела сквозь закрепленную трубу?



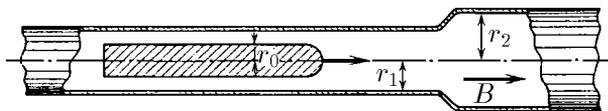
К задаче 11.5.17

◇ **11.5.18\*.** Какой минимальной скоростью должен обладать сверхпроводящий тонкий стержень сечения  $S$ , длины  $l$  и массы  $m$ , чтобы влететь в продольное магнитное поле индукции  $B$ ?



К задаче 11.5.18

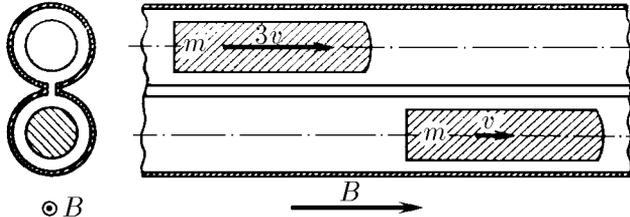
◇ **11.5.19.** Длинная металлическая трубка, имеющая участок радиуса  $r_1$  и участок радиуса  $r_2$ , помещена вдоль однородного магнитного поля индукции  $B$ . На сколько изменится энергия сверхпроводящего снаряда радиуса  $r_0$  и длины  $l \gg r_1, r_2$ , летящего по оси трубки, при пересечении им границы между участками трубки различного радиуса? Влиянием сопротивления металла на процесс взаимодействия снаряда с трубкой пренебречь.



К задаче 11.5.19

◇ **11.5.20.** Двухканальный магнитный перераспределитель энергии снарядов имеет следующую конструкцию. Две металлические трубы с прорезью соедине-

ны металлическими перемычками так, как изображено на рисунке. Однородное магнитное поле индукции  $B$  направлено вдоль оси труб. Вдоль оси каждой трубы движутся одинаковые длинные сверхпроводящие снаряды. Один из снарядов, имеющий скорость  $3v$ , догоняет второй снаряд, имеющий скорость  $v$ . Длина каждого снаряда  $l$ , сечение  $s$ , масса  $m$ . Сечение каждой трубы  $S$ . Определите скорость снарядов после их взаимодействия. Сопротивлением трубы пренебречь.



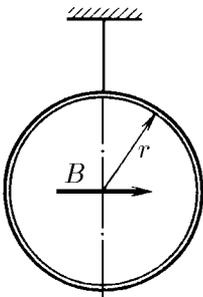
К задаче 11.5.20

**11.5.21.** Решите задачу 11.5.20 в случае, если масса первого снаряда  $m_1$ , а второго  $m_2$ , а скорость снарядов равна соответственно  $v_1$  и  $v_2$  ( $v_1 > v_2$ ).

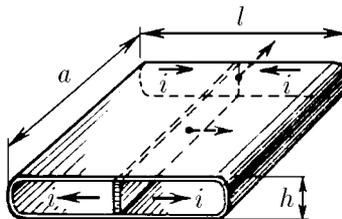
**11.5.22\*.** Докажите, что сверхпроводящее кольцо индуктивности  $L$ , налетающее со скоростью  $v$  на соосное ему магнитное поле, отразится этим полем, если кинетическая энергия кольца будет меньше  $\Phi^2/2L$ , где  $\Phi$  — максимальный поток магнитного поля через кольцо.

◇ **11.5.23\*.** Медное кольцо радиуса  $r$  и массы  $m$  висит на нити, совершая малые крутильные колебания с периодом  $T$ . Индуктивность кольца  $L$ . Как изменится период колебаний кольца, если его поместить в горизонтальное однородное магнитное поле индукции  $B$ , параллельное плоскости кольца в положении равновесия? Момент инерции кольца относительно оси, проходящей по диаметру, равен  $J$ . Сопротивлением кольца пренебречь.

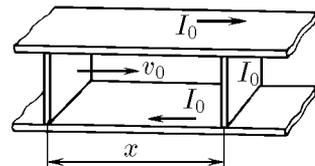
◇ **11.5.24\*.** Сверхпроводящая коробочка разделена на две равные части также сверхпроводящей перемычкой толщины  $d$ . Размеры коробочки показаны на рисунке ( $h \ll a, l$ ). По коробочке в направлении, перпендикулярном перемычке, циркулирует ток, линейная плотность которого  $i$ . С какой частотой будет колебаться перемычка, если ей сообщить небольшую скорость в направлении, показанном на рисунке? Масса перемычки  $m$ .



К задаче 11.5.23



К задаче 11.5.24



К задаче 11.5.25

◇ **11.5.25\*.** Между двумя сверхпроводящими шинами с постоянной скоростью  $v_0$  движется поршень по направлению к перемычке массы  $m$ , образуя сверхпроводящую цепь. Найдите максимальную скорость перемычки, если в начальный

момент она покоилась, ток в цепи был равен  $I_0$ , а расстояние между поршнем и перемычкой было равно  $x$ . Индуктивность на единицу длины шин  $L$ . Трением пренебречь.

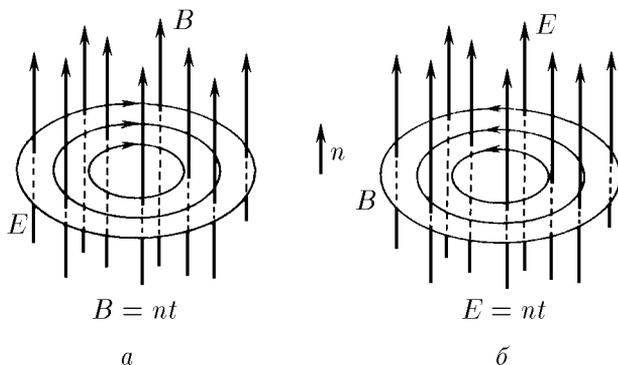
**11.5.26\***. Внутри проводящей цилиндрической оболочки создано магнитное поле. Оболочке сообщается скорость  $v$  таким образом, что она начинает сжиматься к оси, не теряя симметрии. Найдите максимальную индукцию магнитного поля, которая может быть получена таким способом, если начальная индукция  $B_0 = 10$  Тл,  $v = 3$  км/с, начальный радиус оболочки  $r_0 = 20$  см, ее толщина  $\Delta = 0,5$  см, плотность материала оболочки  $\rho = 8,9$  г/см<sup>3</sup>. Найдите максимальное магнитное давление, действующее на оболочку. Электрическим сопротивлением оболочки пренебречь.

**11.5.27\***. Внешнее магнитное поле индукции  $B$ , в котором находится длинная идеально проводящая трубка, полностью стенками трубки не экранируется из-за того, что масса электронов конечна. Поле частично проникает внутрь трубки. Ось трубки направлена вдоль магнитного поля, ее радиус  $r$  много больше толщины стенок  $h$ . Число электронов проводимости в единице объема материала трубки  $n_e$ . Рассчитайте индукцию поля, проникшего внутрь трубки, в случае  $B = 10$  Тл,  $r = 1$  мм,  $h = 0,1$  мм,  $n_e = 10^{20}$  см<sup>-3</sup>.

**11.5.28\***. Если длинный идеально проводящий тонкостенный цилиндр раскрутить вокруг своей оси, то внутри цилиндра возникает магнитное поле. Найдите его индукцию, если угловая скорость цилиндра  $\omega$ .

### § 11.6. Связь переменного электрического поля с магнитным

◇ **11.6.1.** Согласно закону электромагнитной индукции переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Точно так же переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле, но при изменении электрического поля направление вектора  $B$  образует правый винт с направлением вектора  $dE/dt$ . Коэффициент же пропорциональности в СГС, связывающий эти поля, в обоих явлениях одинаков. Пользуясь этим свойством электромагнитного поля, определите в СГС и в СИ зависимость циркуляции индукции магнитного поля по замкнутому контуру от скорости изменения потока электрического смещения через этот контур.



К задаче 11.6.1

◇ **11.6.2.** а. Плоский конденсатор движется со скоростью  $v$ , как показано на рисунке. Напряженность электрического поля между пластинами  $E$ . Определите

скорость изменения потока электрического поля через прямоугольный контур  $abcd$  и циркуляцию индукции магнитного поля по этому контуру. Как связаны друг с другом искомые величины в СИ? в СГС?

б. Приведите примеры, подтверждающие пропорциональность циркуляции индукции магнитного поля по контуру скорости изменения потока электрического поля через поверхность, ограниченную этим контуром.

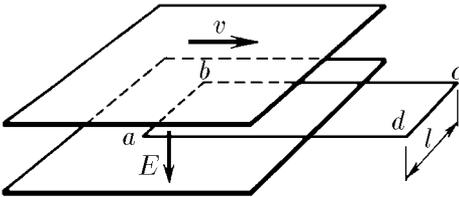
**11.6.3.** Чему равен поток электрического смещения через площадь, ограниченную замкнутым контуром, если при равномерном убывании этого потока до нуля в течение 1 мкс в контуре возникает циркуляция индукции магнитного поля  $0,001 \text{ Тл} \cdot \text{м}$ ?

**11.6.4\*.** Магнитное поле при разряде конденсатора создается не только током в проводнике, но и изменяющимся электрическим полем в пространстве между обкладками конденсатора, причем изменяющееся электрическое поле создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками существовал ток, равный току в проводнике. Докажите это.

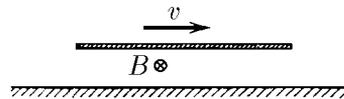
**11.6.5.** Напряженность однородного электрического поля внутри плоского конденсатора с обкладками радиуса 10 см линейно растет со временем:  $E = \alpha t$ , где  $\alpha = 9 \cdot 10^{10} \text{ В}/(\text{м} \cdot \text{с})$ . Чему равна индукция магнитного поля внутри конденсатора на расстоянии 5 см от его оси?

**11.6.6.** В колебательном контуре возбудили свободные колебания. Во сколько раз максимальная индукция магнитного поля внутри плоского конденсатора меньше максимальной индукции магнитного поля в катушке индуктивности? Радиус пластин конденсатора  $r$ , расстояние между ними  $h$ , длина катушки  $L$ , число витков  $N$ .

**11.6.7.** Плоский конденсатор, напряженность электрического поля внутри которого  $E$ , движется со скоростью  $v$ . Скорость образует угол  $\alpha$  с пластинами. Какова индукция магнитного поля внутри конденсатора?



К задаче 11.6.2



К задаче 11.6.8

◇ **11.6.8.** При движении параллельно поверхности металла равномерно заряженной пластины со скоростью  $v$  возникает магнитное поле индукции  $B$ . Определите поверхностную плотность заряда пластины.

**11.6.9.** Внутри плоского конденсатора параллельно его обкладкам движется со скоростью  $v$  проводящая пластина, толщина которой равна половине расстояния между обкладками конденсатора. На обкладках конденсатора поддерживается напряжение  $V$ , расстояние между ними  $h$ .

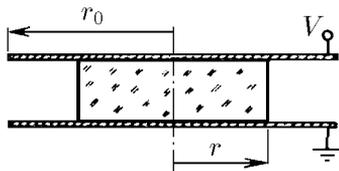
а. Чему равна индукция магнитного поля внутри проводника? между движущимся проводником и обкладками конденсатора?

б. Как изменится индукция магнитного поля в пластине, если проводник заменить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ?

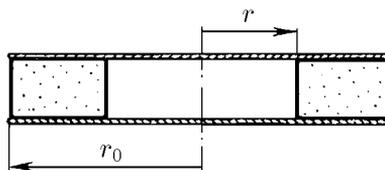
**11.6.10\*.** В неподвижной диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  движется параллельно своим пластинам плоский заряженный конденсатор. Как изменится индукция магнитного поля внутри конденсатора, если среда будет двигаться вместе с ним?

◇ **11.6.11\***. а. Напряженность электрического поля внутри круглого плоского конденсатора, заполненного веществом с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , линейно растет со временем:  $E = \alpha t$ . Определите индукцию магнитного поля внутри конденсатора на расстоянии  $r$  от его центра.

б. Напряжение на обкладках плоского конденсатора линейно растет со временем:  $V = \alpha t$ . Радиус обкладок  $r_0$ , расстояние между ними  $h$ . По оси конденсатора вставлен диэлектрический цилиндр радиуса  $r$  с диэлектрической непроницаемостью  $\varepsilon$ . Определите индукцию магнитного поля на боковой поверхности цилиндра и на краю конденсатора.



К задаче 11.6.11



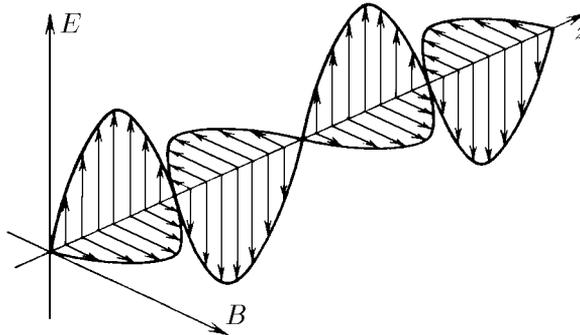
К задаче 11.6.12

◇ **11.6.12\***. Плоский изолированный конденсатор, пластины которого — параллельные металлические круги радиуса  $r_0$ , заполнен веществом, исключая центральную цилиндрическую область радиуса  $r$ . Конденсатор разряжается через это вещество. Ток разрядки равен  $I$ . Определите зависимость индукции магнитного поля внутри конденсатора от расстояния до оси конденсатора. Постройте график этой зависимости.

## Электромагнитные волны

### § 12.1. Свойства, излучение и отражение электромагнитных волн

◇ 12.1.1. На рисунке изображен «моментальный снимок» электромагнитной волны. Пользуясь правилом буравчика, определите, в каком направлении распространяется эта волна.



К задаче 12.1.1

12.1.2. Как изменится направление распространения электромагнитной волны, если в волне изменится на противоположное направление: а) индукция магнитного поля; б) напряженность электрического поля?

◇ 12.1.3. На рисунке изображено электрическое поле плоской синусоидальной волны в нулевой момент времени. Направление распространения волны указано стрелкой. Как зависит напряженность электрического поля от координаты  $z$  и времени  $t$ ?

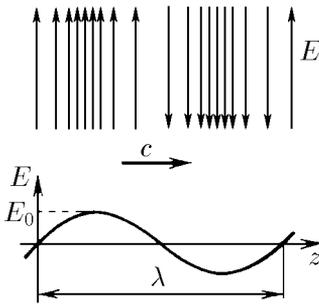
12.1.4. Две синусоидальные волны с одной поляризацией

$$E_1 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + \varphi_1 \right], \quad E_2 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + \varphi_2 \right]$$

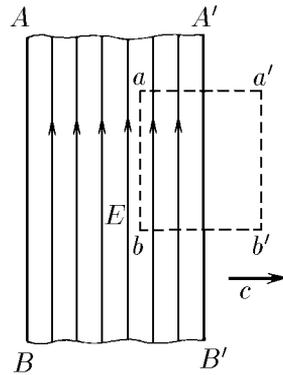
накладываются друг на друга. Чему равна амплитуда напряженности электрического поля результирующей волны? Чему равна фаза этой волны?

**12.1.5.** Две плоские синусоидальные волны, амплитуда которых  $E_0$ , имеют частоту соответственно  $\omega$  и  $\omega + \Delta$ ,  $\Delta \ll \omega$ , и распространяются в одном направлении, накладываясь друг на друга. Чему равна максимальная амплитуда результирующей волны? Определите распределение средней плотности энергии результирующей волны вдоль направления распространения волн.

◇ **12.1.6.** Электромагнитная волна занимает пространство между двумя параллельными бесконечными плоскостями  $AB$  и  $A'B'$ . Изображенный участок электромагнитного поля движется со скоростью света  $c$  в направлении, перпендикулярном плоскости  $AB$ . Напряженность электрического поля волны  $E$ . Применяя закон электромагнитной индукции к прямоугольному контуру  $baa'b'$ , определите индукцию магнитного поля волны в СИ и в СГС.



К задаче 12.1.3



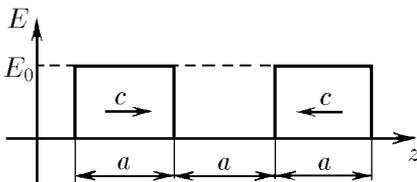
К задаче 12.1.6

**12.1.7\*.** Решите задачу 12.1.6 в случае, если волна распространяется в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Скорость волны в среде  $c/\sqrt{\epsilon}$ .

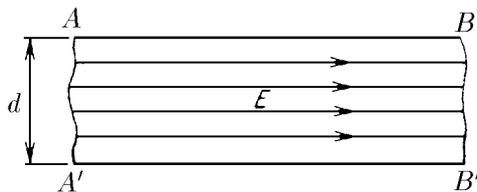
**12.1.8\*.** Используя закон электромагнитной индукции и связь переменного электрического поля с магнитным полем (см. задачу 11.6.1), докажите, что скорость распространения волны в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  равна  $c/\sqrt{\mu\epsilon}$ .

**12.1.9\*.** Как связана напряженность электрического поля волны  $E$  с магнитной индукцией  $B$  в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ ?

◇ **12.1.10.** На рисунке изображены электрические поля бегущих навстречу друг другу плоских электромагнитных волн в нулевой момент времени. Нарисуйте графики распределения напряженности  $E$  и индукции  $B$  полей этих волн в момент времени  $a/2c$ ,  $a/c$ ,  $3a/c$ . Чему равно отношение энергии электрического поля и энергии магнитного поля к общей энергии в эти моменты времени?



К задаче 12.1.10



К задаче 12.1.11

◇ **12.1.11.** а. Однородное электрическое поле напряженности  $E$  занимает пространство между бесконечными плоскостями  $AB$  и  $A'B'$ , расстояние между которыми  $d$ . Это поле образовалось при наложении двух плоских электромагнитных волн. Определите эти волны, если напряженность электрического поля  $E$  параллельна плоскостям.

б. На какие электромагнитные волны можно разложить магнитное поле индукции  $B$ , сосредоточенное между плоскостями  $AB$  и  $A'B'$ ? Индукция магнитного поля  $B$  параллельна плоскостям.

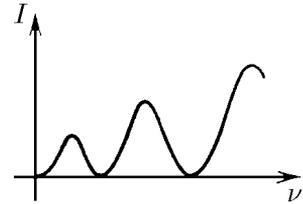
**12.1.12.** а. Вокруг движущегося заряженного тела возникает магнитное поле, а вокруг неподвижного — нет. Поэтому при мгновенной остановке движущегося тела магнитное поле станет «лишним». Оно превращается в электромагнитные волны. Таким образом, процесс излучения электромагнитных волн можно рассматривать как процесс появления «лишних» полей при изменении скорости заряженного тела. Особенно просто этот процесс описывается для случая плоского конденсатора. Если заряженный конденсатор движется со скоростью  $v$  параллельно своим пластинам, то индукция магнитного поля  $B$  в нем связана с напряженностью электрического поля  $E$  соотношением  $B = (v/c^2)E$ . При мгновенной остановке конденсатора это магнитное поле можно считать суммой двух электромагнитных волн с индукцией  $B/2$ , движущихся в противоположных направлениях перпендикулярно пластинам.

а. Определите напряженность электрического поля в каждой волне.

б\*. Какова энергия волны, испущенной зарядом  $Q$ , равномерно распределенным по движущейся сфере радиуса  $r$ , при ее мгновенной остановке? Скорость сферы до остановки  $v$ .

в. Напряжение, приложенное к двум проводам, разделенным воздушным промежутком, повышали до тех пор, пока между ними не проскочила искра, в результате чего в проводах возникли колебания тока, приведшие к появлению электромагнитных волн. Оцените, во сколько раз должна увеличиться мощность электромагнитных волн, если напряжение пробоя увеличить в два раза.

◇ **12.1.13.** Заряженный плоский конденсатор раскачивают, перемещая его параллельно пластинам. С увеличением частоты колебаний  $\nu$  средняя интенсивность  $I$  излучаемых конденсатором электромагнитных волн сначала увеличивается, потом уменьшается до нуля, затем опять увеличивается и т. д. Чем объясняется такое чередование интенсивности излучения? При каких частотах конденсатор не излучает энергию? Оцените частоту, при которой наблюдаются 1-й и  $k$ -й максимумы излучения.



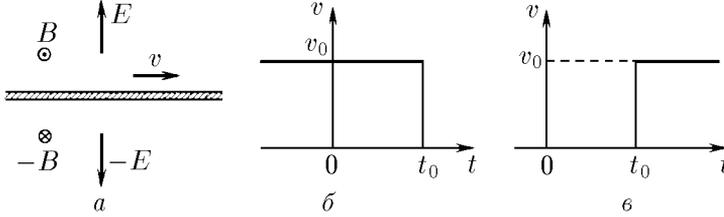
К задаче 12.1.13

◇ **12.1.14\*.** Заряженная пластина, напряженность электрического поля которой  $E$ , двигаясь параллельно самой себе со скоростью  $v$ , создает магнитное поле индукции  $B = (v/c^2)E$ . Поэтому при уменьшении скорости пластины на величину  $dv$  в окружающем ее пространстве возникает «лишнее» магнитное «микрополе» индукции  $dB = \pm(dv/c^2)E$ . Суммируясь, эти «микрополя» дают электромагнитную волну, напряженность электрического поля которой зависит лишь от скорости пластины:

$$E_{\text{изл}}(t, x) = cB_{\text{изл}}(t, x) = (cv_{t-x/c/c^2})E = (v_{t-x/c/c})E.$$

Индекс  $t - x/c$  означает, что при вычислении напряженности поля на расстоянии  $x$  от пластины значение ее скорости нужно брать в момент времени  $t - x/c$ . Например, напряженность электрического поля излучения пластины,

скорость которой равна  $v_0 \sin \omega t$ , на расстоянии  $x$  от пластины в момент времени  $t$  равна  $(v_0/c) \sin [\omega(t - x/c)]E$ , так как скорость пластины в момент времени  $t - x/c$  была равна  $v_0 \sin \omega(t - x/c)$ . Докажите справедливость формулы  $E_{\text{изл}}(t, x) = (v_{t-x/c}/c)E$  для случая, когда скорость  $v$  меняется так, как изображено на рисунках.



К задаче 12.1.14

**12.1.15\*.** Используя формулу  $E_{\text{изл}} = (v_{t-x/c}/c)E$ , приведенную в задаче 12.1.14, решите следующие задачи.

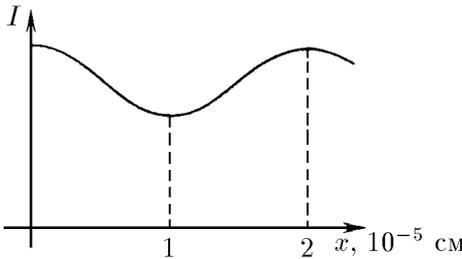
а. Определите напряженность электрического поля в плоской волне, излучаемой плоским конденсатором при его движении с постоянным ускорением  $a$ , направленным параллельно его пластинам. Расстояние между пластинами  $d$ , напряженность электрического поля внутри конденсатора  $E$ .

б. Линейная плотность тока на пластине меняется синусоидально с амплитудой  $i_0$ . Определите в СИ и в СГС амплитуду напряженности электрического поля в волне, излучаемой этой пластиной.

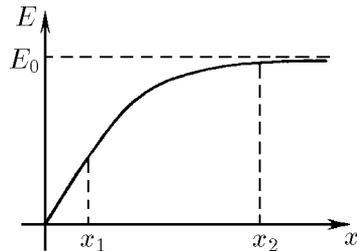
в. Определите коэффициент отражения электромагнитной волны, падающей на тонкую проводящую пленку перпендикулярно ее поверхности. Толщина пленки  $x$ , число электронов проводимости в единице объема  $n_e$ , частота волны  $\nu$ .

◇ **12.1.16.** При раздвижении двух параллельных полупрозрачных зеркальных пластин интенсивность электромагнитного излучения, прошедшего сквозь эти пластины, периодически меняется в зависимости от расстояния между ними. Объясните это явление и определите, пользуясь рисунком, длину волны падающего излучения. Излучение распространяется перпендикулярно пластинам.

◇ **12.1.17.** Амплитуда напряженности электрического поля электромагнитной волны, отраженной от проводящей пленки, тем больше, чем толще пленка. На рисунке приведена типичная зависимость амплитуды отраженной волны от толщины пленки. В начальный момент (в области  $x < x_1$ ) амплитуда линейно зависит от толщины пленки  $x$ , затем линейная зависимость нарушается, и в области  $x > x_2$  амплитуда отраженной волны мало отличается от амплитуды падающей волны  $E_0$ . Объясните эту зависимость.



К задаче 12.1.16



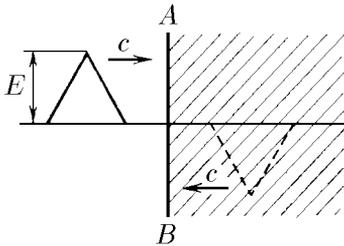
К задаче 12.1.17

**12.1.18\***. Оцените глубину проникновения в проводник перпендикулярно падающей на его поверхность электромагнитной волны. Частота волны  $\nu = 10^{15}$  Гц, число электронов проводимости в единице объема  $n_e = 10^{22}$  см $^{-3}$ .

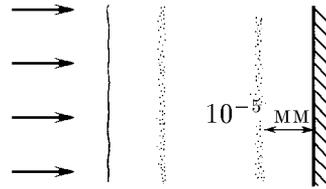
◇ **12.1.19**. При достаточно большом числе электронов проводимости в единице объема металла составляющая напряженности электрического поля волны, параллельная поверхности металла, ослабляется практически до нуля. Поэтому решение задачи о взаимодействии электромагнитной волны с металлом сводится к отысканию вблизи его поверхности двух таких бегущих волн, наложение которых дает нулевую составляющую напряженности электрического поля вдоль поверхности. Такими электромагнитными волнами являются при перпендикулярном падении на металлическую поверхность две волны: одна реально движется в пространстве вне металла, а другая, фиктивная, «перевернутая» волна движется навстречу первой внутри металла (на рисунке эта область вместе с фиктивной волной находится справа от плоскости  $AB$ ). Фиктивная волна становится реальной, как только она выходит за границу  $AB$ , где она накладывается на первую волну. Наложение этих волн слева от плоскости  $AB$  дает нулевую напряженность электрического поля вдоль  $AB$  и, следовательно, решает поставленную задачу.

Используя описанный прием, найдите напряженность электрического и индукцию магнитного поля вблизи металлической плоскости в момент, когда вершина падающей волны достигает плоскости  $AB$ .

◇ **12.1.20**. Слой фотоэмульсии нанесен на зеркальную металлическую подложку. При нормальном падении света на расстоянии  $10^{-5}$  мм от металлической поверхности происходит почернение эмульсии. Объясните этот эффект. Определите длину волны света, падающего на металлическую поверхность. На каком расстоянии от поверхности подложки будет находиться второй слой почерневшей эмульсии?



К задаче 12.1.19



К задаче 12.1.20

**12.1.21**. На металлическую стенку падает перпендикулярно ее поверхности плоская электромагнитная волна. Напряженность электрического поля волны  $E$ . Определите в СИ и в СГС линейную плотность тока в стенке и давление волны на нее.

**12.1.22**. Амплитуда напряженности электрического поля плоской синусоидальной волны равна  $E_0$ . Какое среднее давление оказывает эта волна на плоскую металлическую стенку при нормальном падении на нее?

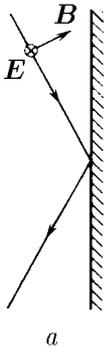
**12.1.23**. Чему равно давление солнечного излучения на зеркальную поверхность вблизи Земли при нормальном падении на зеркало? при падении излучения на зеркало под углом  $30^\circ$ ? Плотность потока энергии солнечного излучения равна  $600$  Вт/м $^2$ .

**12.1.24\***. Оцените максимальный размер алюминиевых пылинок, которые в космическом пространстве под давлением солнечного излучения удалялись бы от Солнца.

◇ **12.1.25.** Пользуясь методом, изложенным в задаче 12.1.19, докажите, что угол падения электромагнитной волны равен углу отражения. Рассмотрите случаи: а) вектор  $\mathbf{E}$  электромагнитной волны, падающей на металл, параллелен металлической поверхности; б) вектор  $\mathbf{B}$  электромагнитной волны параллелен металлической поверхности.

**12.1.26.** Среднее давление плоской синусоидальной волны, падающей под углом  $\alpha$  на металлическую поверхность, равно  $P$ . Определите амплитуду напряженности электрического поля этой волны.

◇ **12.1.27\*.** Метод фиктивных волн (см. задачу 12.1.19) можно использовать и для решения задачи об отражении электромагнитной волны от движущейся со скоростью  $v$  металлической поверхности. Для решения этой задачи нужно подобрать фиктивную волну таким образом, чтобы она, войдя в область вне металла и став реальной, при наложении на падающую волну давала бы в СГС напряженность электрического поля, в  $v/c$  раз меньшую индукции магнитного. Объясните это условие.

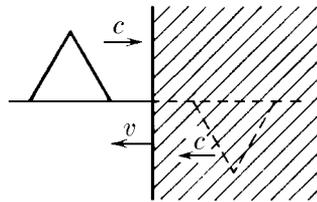


а



б

К задаче 12.1.25



К задаче 12.1.27

**12.1.28\*.** На движущуюся со скоростью  $v$  металлическую стенку падает перпендикулярно ее поверхности плоская электромагнитная волна. Напряженность электрического поля волны  $E$ . Какое давление в СИ и в СГС оказывает волна на стенку?

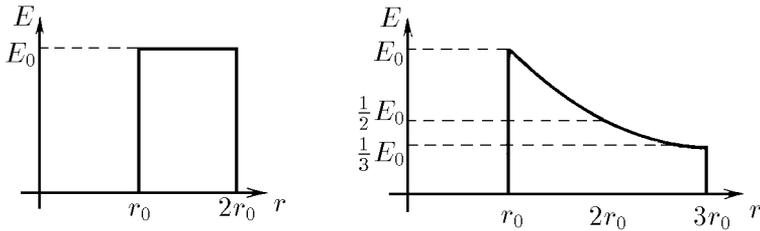
**12.1.29.** Частота синусоидальной волны, падающей на движущуюся металлическую стенку перпендикулярно ее поверхности, при отражении меняется на  $\Delta$ . Первоначальная частота волны  $\nu_0$ . Определите скорость стенки.

**12.1.30.** Амплитуда волны при отражении ее от движущейся навстречу металлической стенки увеличилась в  $k$  раз. Определите скорость стенки.

**12.1.31.** Почему при переходе электромагнитной волны через плоскую границу вакуум — непроводящая среда: а) перпендикулярная границе составляющая напряженности электрического поля уменьшается в  $\varepsilon$  раз, а параллельная не меняется; б) перпендикулярная границе составляющая индукции магнитного поля не меняется, а параллельная увеличивается в  $\mu$  раз?  $\varepsilon$  — диэлектрическая,  $\mu$  — магнитная проницаемость среды.

**12.1.32.** Как меняется фаза волны, отраженной от плоской границы раздела двух диэлектриков с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  в случае  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ? в случае  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ? Волна падает перпендикулярно плоскости раздела.

**12.1.33.** Покажите с помощью закона сохранения энергии, что в сферической волне, излучаемой точечным источником, амплитуда напряженности электрического поля и индукции магнитного поля волны убывает обратно пропорционально расстоянию от источника, если энергия волны не поглощается средой.



К задаче 12.1.34

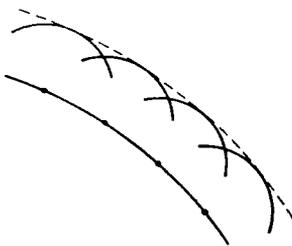
◇ 12.1.34. На рисунке изображено распределение электрического поля двух бегущих сферических волн в нулевой момент времени. Изобразите распределение электрического поля в момент времени  $r_0/c$ . Каким будет распределение электрического поля при  $t \rightarrow \infty$ ? Определите энергию этих полей.

### § 12.2. Распространение электромагнитных волн

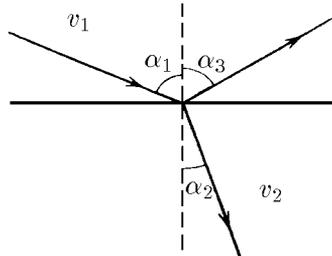
◇ 12.2.1. Согласно принципу Гюйгенса — Френеля каждый участок фронта волны является источником вторичной сферической волны. Огибающая этих волн дает новый фронт волны. Покажите, используя этот принцип, что: а) плоский фронт электромагнитной волны перемещается со скоростью света  $c$  в направлении, перпендикулярном плоскости фронта; б) радиус сферического фронта за время  $\tau$  возрастает на  $\tau c$ .

12.2.2. Как изменяются длина и скорость волны при переходе ее в среду с показателем преломления  $n$ ? Меняется ли частота волны?

◇ 12.2.3. С помощью принципа Гюйгенса — Френеля докажите, что при падении плоской волны на границу раздела двух сред: а) угол падения равен углу отражения ( $\alpha_1 = \alpha_3$ ); б) отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скорости волны в первой среде к скорости волны во второй среде ( $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1 / v_2$ ).



К задаче 12.2.1

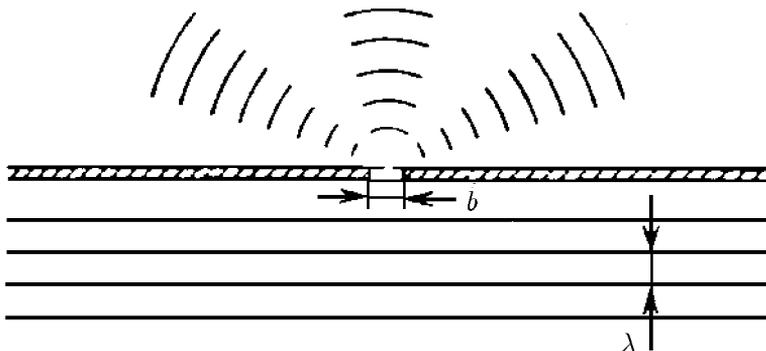


К задаче 12.2.3

◇ 12.2.4. Найдите углы, определяющие направления минимумов излучения, если плоская волна падает перпендикулярно на щель ширины  $b$ . Длина волны  $\lambda < b$ .

12.2.5. Ширина штрихов дифракционной решетки много меньше длины волны. Во сколько раз увеличится интенсивность излучения в направлении максимума излучения, если число штрихов дифракционной решетки увеличить в  $k$  раз?

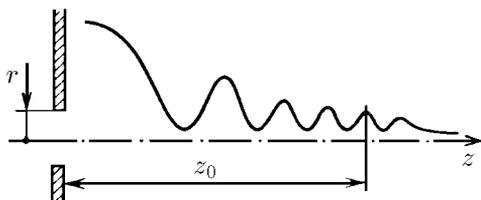
12.2.6. На стеклянную дифракционную решетку, имеющую 200 линий на 1 мм и покрытую тонким слоем золота, падает очень узкий пучок  $K_\alpha$ -излучения меди ( $\lambda = 1,541 \cdot 10^{-10}$  м) под углом  $20'$  к ее поверхности. Определите разность углов отражения между пучками первого и нулевого порядка.



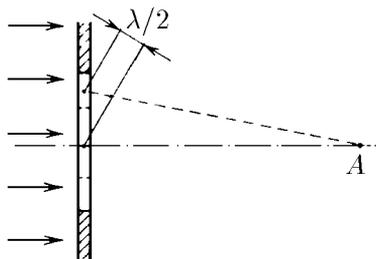
К задаче 12.2.4

◇ **12.2.7.** На отверстие радиуса  $r$  падает перпендикулярно его плоскости плоская синусоидальная волна. Длина волны  $\lambda \ll r$ . Интенсивность волны по оси отверстия периодически меняется. На каком расстоянии от его центра находится последний максимум? Определите расстояние между максимумами интенсивности на расстоянии  $z_0$  от центра отверстия, если  $r^2/\lambda \gg z_0 \gg r$ .

◇ **12.2.8.** Если круглое отверстие (например, присовая диафрагма) увеличивается таким образом, что радиус его, равнявшийся радиусу одной зоны Френеля, достигает радиуса двух зон, то в точке  $A$  интенсивность излучения значительно уменьшится, падая до нуля, хотя поток излучения через отверстие возрастает почти в два раза. Каким образом согласуются эти два факта?



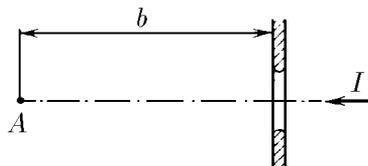
К задаче 12.2.7



К задаче 12.2.8

**12.2.9\*.** На экран, имеющий круглое отверстие, падает параллельный пучок света. Радиус отверстия совпадает с радиусом центральной зоны Френеля для точки  $A$  (см. рисунок к предыдущей задаче). Используя графический метод, определите, во сколько раз интенсивность света от центральной зоны больше интенсивности света, приходившего бы в эту же точку, если бы не было экрана.

◇ **12.2.10.** Изобразите на графике зависимость интенсивности света в точке  $A$  от радиуса отверстия, перекрывающего параллельный поток излучения с длиной волны  $\lambda$ . Расстояние от точки  $A$  до центра отверстия  $b$ . Интенсивность излучения в потоке  $I$ .

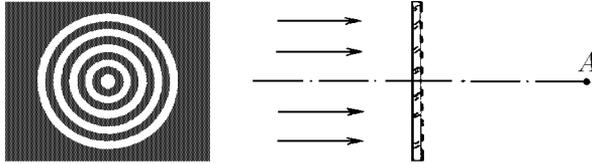


К задаче 12.2.10

◇ **12.2.11\*.** а. На рисунке изображена плоская стеклянная пластинка с зачерненными кольцевыми участками. Этой пластинкой перекрыли параллельный пучок монохроматиче-

ского света с длиной волны  $\lambda$ . Оказалось, что зачерненные кольца пластинки совпали с четными зонами Френеля для осевой точки  $A$ . Как изменилась интенсивность света в этой точке?

б. Параллельный пучок монохроматического света перекрыли пластинкой, в которой зачерненные кольцевые участки заменены слоями диэлектрика, изменяющего фазу проходящей волны на  $\pi$ . Как изменилась интенсивность света в точке  $A$  в этом случае?

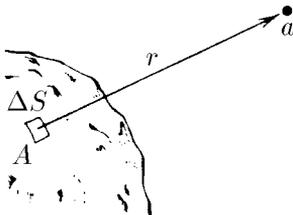


К задаче 12.2.11

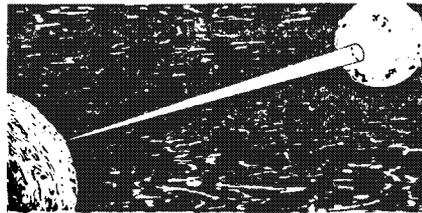
◇ 12.2.12\*. Рассчитайте амплитуду  $a$  элементарной вторичной волны Гюйгенса — Френеля. (Амплитуда  $a$  пропорциональна амплитуде  $A$  первичной волны, дошедшей от элемента  $\Delta S$ , площади этого элемента и обратно пропорциональна  $r$ , т. е.  $a = cA\Delta S/r$ . Для определения  $c$  сравните амплитуду плоской волны в какой-либо точке и амплитуду, рассчитанную по методу Френеля, в этой же точке, когда в качестве вспомогательной поверхности взят фронт плоской волны.)

◇ 12.2.13. а. Оцените размер светового пятна на Луне от лазерного луча. Лазер находится на Земле, радиус его луча 10 см, длина волны  $10^{-5}$  см. (Граница пятна оценивается из условия, что в области пятна лучи, идущие от отдельных участков волны, не гасят друг друга.)

б. Оцените размеры антенны радара, излучающего трехсантиметровые электромагнитные волны внутри угла 0,01 рад.



К задаче 12.2.12



К задаче 12.2.13

12.2.14. Оцените минимальный размер предмета на поверхности Земли, который можно сфотографировать со спутника, летящего на высоте 200 км, а также минимальный размер предметов на Луне и на Марсе, которые можно сфотографировать с околоземной орбиты. Разрешающая способность фотопленки не ограничивает четкости изображения.

12.2.15. а. Раскаленная нить накала электрической лампы имеет красный оттенок, если смотреть на нее через матовую поверхность плафона. Объясните это явление.

б. Почему красный свет меньше рассеивается туманом?

в. Почему дневное небо голубое?

## Геометрическая оптика. Фотометрия. Квантовая природа света

### § 13.1. Прямолинейное распространение и отражение света

**13.1.1.** Определите область полной тени от круглого карандаша, если источником света служит цилиндрическая газосветная лампа. Карандаш и лампа расположены параллельно друг другу.

**13.1.2.** Матовая электрическая лампочка в виде шара диаметром 6 см освещает глобус диаметра 26 см. Определите диаметр полной тени и полутени глобуса на стене. Расстояние от глобуса до лампочки 1 м, до стены 2 м.

**13.1.3.** «Комната, в которую вступил Иван Иванович, была совершенно темна, потому что ставни были закрыты, и солнечный луч, проходя в дыру, сделанную в ставне ... ударяясь в противоположную стену, рисовал на ней пестрый ландшафт из ... крыш, деревьев и развешенного платья, все только в обратном виде» (*Н. В. Гоголь*. Повесть о том, как поссорился Иван Иванович с Иваном Никифоровичем). Объясните это явление.

**13.1.4.** В шторах, затемняющих комнату, образовалось маленькое отверстие. В отверстие заглянуло солнце, и по стене пополз круглый «зайчик». Почему форма зайчика не зависит от формы отверстия (треугольное, квадратное)? В каком случае появится зависимость от формы отверстия? (Тот же эффект можно наблюдать при помощи маленького осколка зеркала.)

**13.1.5.** Постройте изображение предмета в плоском зеркале. Изображение оказывается перевернутым справа налево по отношению к предмету. Почему же зеркало не «переворачивает» изображение сверху вниз?

**13.1.6.** Высота человека  $h$ . Какой минимальной высоты нужно взять ему зеркало, чтобы увидеть свое изображение в полный рост?

**13.1.7.** Забывшая геометрическую оптику девушка рассматривает свое изображение в маленькое зеркальце. Чтобы разглядеть одновременно большую часть изображения, она то подносит зеркальце к самому лицу, то удаляет его. Объясните девушке, как меняется размер видимой части лица в зависимости от расстояния до зеркальца.

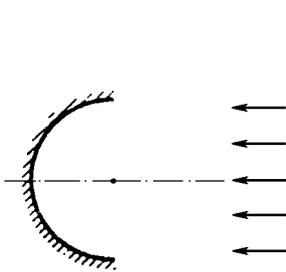
**13.1.8.** Постройте изображение предмета в двугранном зеркале с углом при вершине  $90^\circ$ . Чем отличается это изображение от изображения в плоском зеркале? Зеркало расположено в углу комнаты. Из каких точек комнаты можно видеть свое изображение?

**13.1.9.** Три прямоугольных зеркала одинакового размера сложены в трехгранную призму с отражающей внутренней поверхностью. Постройте изображение предмета, расположенного внутри призмы.

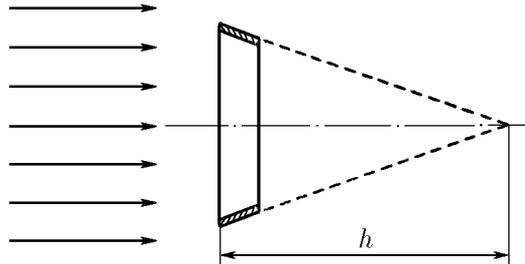
◇ **13.1.10\*.** Полуцилиндрическое зеркало поместили в широкий пучок света, идущий параллельно плоскости симметрии зеркала. Найдите максимальный угол между лучами в отраженном от зеркала пучке (угол расхождения).

**13.1.11.** Если между точечным источником и экраном поместить трубу с гладкой внутренней поверхностью, то на экране возникнет система концентрических колец. Объясните причину их возникновения.

◇ **13.1.12.** Со стороны основания пустотелого конуса высоты  $h$  с малым углом при вершине отрезали небольшое кольцо и поместили в параллельный пучок света, широкой частью в сторону пучка. На каком расстоянии от кольца сфокусируются отразившиеся от него лучи света?



К задаче 13.1.10



К задаче 13.1.12

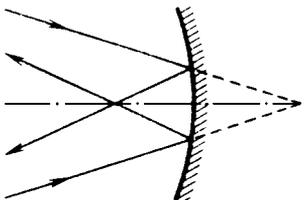
**13.1.13.** Определите фокусное расстояние сферического зеркала радиуса кривизны  $R$ .

**13.1.14.** Покажите, что если расстояния от предмета и изображения до фокуса вогнутого зеркала равны  $l_1$  и  $l_2$ , то  $l_1 l_2 = f^2$ , где  $f$  — фокусное расстояние зеркала.

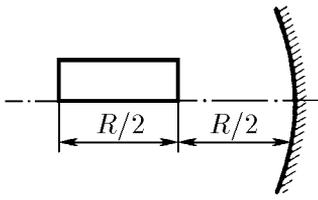
**13.1.15.** Предмет расположен на главной оптической оси вогнутого зеркала на расстоянии 60 см от полюса зеркала. Определите фокусное расстояние зеркала, если изображение предмета действительно и увеличено в полтора раза.

◇ **13.1.16.** На вогнутое зеркало падает сходящийся конический пучок световых лучей. На каком расстоянии от фокуса пересекутся отраженные лучи, если радиус зеркала 80 см, а продолжение лучей пересекает главную оптическую ось на расстоянии 40 см от зеркала.

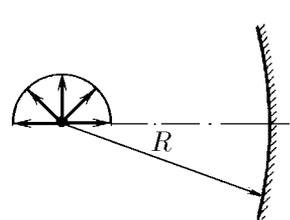
**13.1.17.** Действительное изображение предмета в вогнутом зеркале превышает по своим размерам предмет в три раза. После того как предмет отодвинули от зеркала на 80 см, его изображение стало в два раза меньше предмета. Найдите фокусное расстояние зеркала.



К задаче 13.1.16



К задаче 13.1.18



К задаче 13.1.19

◇ **13.1.18.** Постройте изображение прямоугольника с длинной стороной  $R/2$ , лежащей на оси сферического зеркала с радиусом кривизны  $R$ . Передняя сторона прямоугольника находится на расстоянии  $R/2$  от полюса зеркала.

◇ **13.1.19.** Постройте изображение пучка стрелок, выходящих из центра кривизны сферического зеркала. Концы стрелок лежат на полуокружности.

**13.1.20\*.** Какой формы должна быть отражающая поверхность, чтобы она собирала все параллельные лучи в одной точке независимо от ширины пучка?

### § 13.2. Преломление света. Формула линзы

**13.2.1.** Рыба видит Солнце под углом  $60^\circ$  к поверхности воды. Какова настоящая высота Солнца над горизонтом? Показатель преломления воды 1,33.

**13.2.2.** а. Кажущаяся глубина водоема, если смотреть вертикально вниз, 3 м. Какова его истинная глубина?

б. Самолет пролетает над погружившейся на небольшую глубину подводной лодкой на высоте 3 км. Какой покажется высота самолета при наблюдении с лодки?

**13.2.3.** Улитка сидит на дальней стенке прямоугольного аквариума ширины  $l$ . Во сколько раз изменится видимый угловой размер улитки, если из аквариума слить воду? Наблюдатель расположился на расстоянии  $L$  от аквариума.

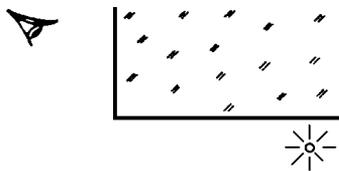
**13.2.4.** Относительный показатель преломления на границе воздух — стекло равен 1,5, а на границе воздух — вода 1,33. Чему он равен на границе вода — стекло?

**13.2.5.** а. Определите угол полного внутреннего отражения для алмаза ( $n_a = 2,4$ ), для воды ( $n_b = 1,33$ ) и для алмаза, погруженного в воду.

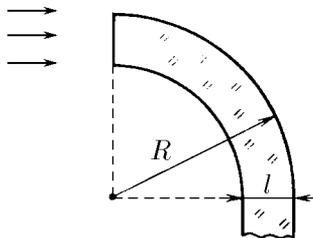
б. Почему небольшие пузырьки воздуха в воде серебристые?

◇ **13.2.6.** Можно ли увидеть что-нибудь через две смежные грани стеклянного куба? Показатель преломления стекла 1,5.

◇ **13.2.7.** Каким должен быть внешний радиус изгиба световода, сделанного из прозрачного вещества с показателем преломления  $n$ , чтобы при диаметре световода, равном  $l$ , свет, вошедший в световод перпендикулярно плоскости его поперечного сечения, распространялся, не выходя через боковую поверхность наружу?

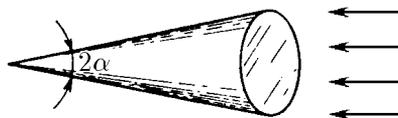


К задаче 13.2.6



К задаче 13.2.7

◇ **13.2.8.** Из плексигласа изготовлен конус с углом при вершине  $2\alpha$ . На основание конуса падает параллельный пучок света. Опишите поведение света. Показатель преломления плексигласа 1,5.



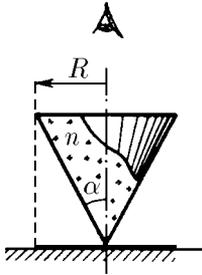
К задаче 13.2.8

◇ **13.2.9.** На горизонтальной плоскости зачернен круг радиуса  $R$ . В центре круга вертикально стоит, опираясь вершиной на его центр, стеклянный конус. Показатель преломления стекла  $n > 1,5$ . Угол раствора конуса  $2\alpha = 60^\circ$ , радиус

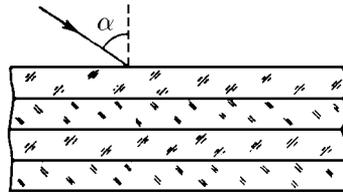
основания  $R$ . На круг смотрят с большого расстояния вдоль оси конуса. Каков его видимый радиус?

**13.2.10\***. Если смотреть на капиллярную трубку сбоку, то видимый внутренний радиус будет равен  $r$ . Каков истинный внутренний радиус? Показатель преломления стекла  $n$ .

◇ **13.2.11**. При каком минимальном угле падения луча света на стопку плоских прозрачных пластин, показатель преломления каждой из которых в  $k$  раз меньше, чем у вышележащей, луч не пройдет сквозь стопку? Показатель преломления верхней пластины  $n$ , число пластин  $N$ .



К задаче 13.2.9



К задаче 13.2.11

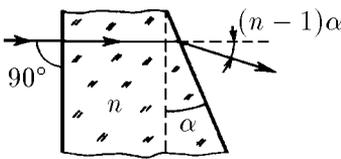
**13.2.12**. Показатель преломления атмосферы планеты уменьшается с высотой  $h$  над ее поверхностью по закону  $n = n_0 - \alpha h$  при  $h \ll n/\alpha$ . Радиус планеты  $R$ . Найдите, на какой высоте над поверхностью планеты луч, испущенный горизонтально, будет обходить планету, оставаясь все время на этой высоте.

**13.2.13**. Как выглядит окружающий мир с точки зрения рыбы в водоеме?

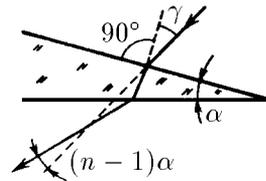
◇ **13.2.14**. а. Через клин с малым углом  $\alpha$  при вершине проходит луч света, который перпендикулярен передней грани клина. Докажите, что угол отклонения луча от первоначального направления приблизительно равен  $(n-1)\alpha$ . Показатель преломления клина  $n$ .

◇ б. Через клин с малым углом  $\alpha$  при вершине проходит луч света, который падает под малым углом  $\gamma$  к нормали к передней поверхности клина. Докажите, что угол отклонения луча от первоначального направления приблизительно равен  $(n-1)\alpha$ . Показатель преломления клина  $n$ .

в. Выведите формулу для фокусного расстояния тонкой линзы. Радиусы кривизны поверхности линзы  $R_1$  и  $R_2$ , показатель преломления материала линзы  $n$ .



а



б

К задаче 13.2.14

**13.2.15**. а. Найдите фокусное расстояние двояковыпуклой линзы с радиусом кривизны 30 см, изготовленной из стекла с показателем преломления 1,6. Чему равна оптическая сила линзы?

б. Одна поверхность линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления 1,6, плоская, другая — сферическая. Оптическая сила линзы 1 дптр. Определите радиус кривизны сферической поверхности линзы.

**13.2.16.** Из стекла с показателем преломления 1,61 изготовили двояковыпуклую линзу с одинаковым радиусом кривизны обеих поверхностей. Оптическая сила линзы в воде 1,6 дптр. Найдите радиус кривизны поверхностей линзы.

**13.2.17\*.** Линзу с фокусным расстоянием  $f$  и радиусами кривизны  $r$  встроили в стенку аквариума. Показатель преломления воды  $n$ . Определите, на каком расстоянии от линзы сфокусируется параллельный пучок света: а) входящий в аквариум; б) выходящий из аквариума.

**13.2.18.** Определите фокусное расстояние участка стеклянной тонкостенной сферы радиуса  $R$  и толщины  $\delta$ . Показатель преломления стекла  $n$ .

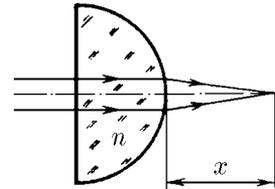
**13.2.19.** Плоскопараллельная пластинка составлена из двух стеклянных клиньев с малым углом  $\alpha$ . Показатель преломления клиньев  $n_1$  и  $n_2$ . На пластинку нормально к поверхности падает параллельный пучок света. За пластинкой расположена собирающая линза с фокусным расстоянием  $f$ . В фокальной плоскости линзы находится экран. На сколько сместится светлая точка на экране, если убрать пластинку?

**13.2.20\*.** На плоскую поверхность стеклянного полуцилиндра падают под углом  $45^\circ$  световые лучи, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Из какой части боковой поверхности полуцилиндра будут выходить лучи света? Показатель преломления стекла  $n$ .

**13.2.21\*.** Тонкий пучок света, проходящий через центр стеклянного шара радиуса  $R$ , фокусируется на расстоянии  $2R$  от его центра. Определите показатель преломления стекла.

**13.2.22.** На тонкостенную сферическую колбу, помещенную в жидкость, падает параллельный тонкий пучок света так, что ось пучка проходит через центр колбы. На противоположной стороне колбы пучок имеет диаметр, вдвое больший диаметра пучка света, падающего на колбу. Каков показатель преломления жидкости, в которую погружена колба?

◇ **13.2.23.** Тонкий пучок света, пройдя через полушарие из стекла с показателем преломления  $n$ , собирается на расстоянии  $x$  от выпуклой поверхности. На каком расстоянии от плоской поверхности полушария соберутся лучи, если пучок пустить с обратной стороны?



К задаче 13.2.23

### § 13.3. Оптические системы

◇ **13.3.1.** На рисунках показаны в определенном масштабе предметы и фокусы линз. Постройте изображения этих предметов. Чему равно увеличение в каждом случае?

◇ **13.3.2.** Постройте изображения стрелок.

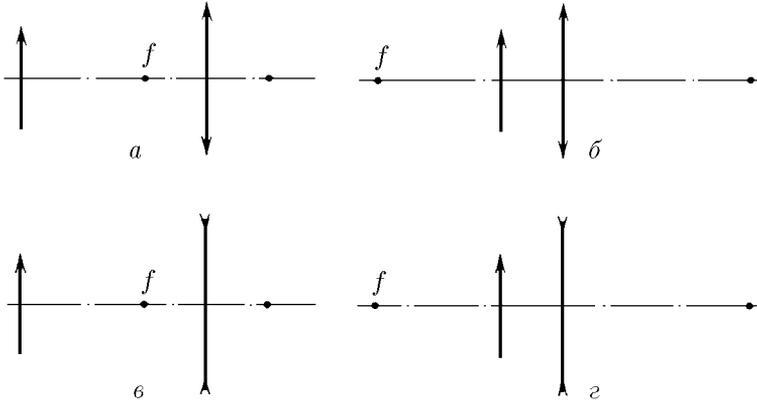
**13.3.3.** Источник света находится на расстоянии 90 см от экрана. Тонкая собирающая линза, расположенная между экраном и источником, дает четкое изображение источника на экране в двух положениях. Определите фокусное расстояние линзы, если расстояние между положениями линзы, дающими четкое изображение, 30 см.

**13.3.4.** На каком расстоянии от линзы расположен предмет, если расстояние между предметом и его действительным изображением минимально? Фокусное расстояние линзы  $f$ .

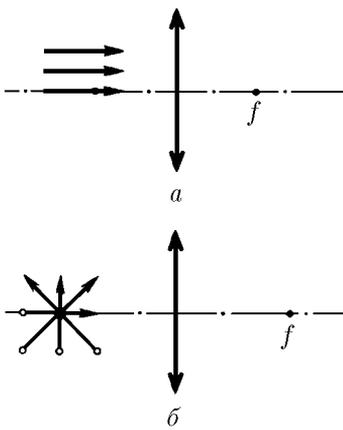
◇ **13.3.5.** На оптической оси  $AB$  собирающей линзы расположено плоское зеркальце, вращающееся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через точ-

ку  $A$  и перпендикулярной плоскости рисунка. На зеркальце падает параллельный пучок лучей, который после отражения фокусируется на экране. Фокусное расстояние линзы  $f$ . Найдите скорость светового пятна на экране в момент, когда оно пересекает оптическую ось. Плоскость экрана перпендикулярна оптической оси.

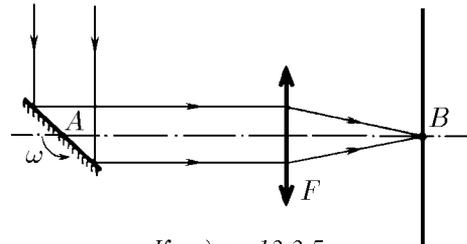
◇ **13.3.6.** Предмет в виде отрезка длины  $l$  расположен вдоль оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f$ , дающей действительное изображение всех его точек. Середина отрезка расположена на расстоянии  $a$  от линзы. Определите продольное увеличение предмета.



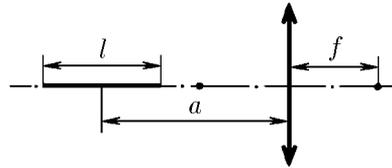
К задаче 13.3.1



К задаче 13.3.2



К задаче 13.3.5



К задаче 13.3.6

**13.3.7.** Изображение предмета на матовом стекле фотоаппарата при фотографировании с расстояния 15 м получилось высоты 30 мм, а с расстояния 9 м — высоты 51 мм. Найдите фокусное расстояние объектива.

**13.3.8.** В течение какого времени может быть открыт затвор фотоаппарата при съемке прыжка в воду с вышки? Фотографируется момент погружения в воду. Высота вышки 5 м, фотограф находится на расстоянии 10 м от прыгуна. Объектив аппарата имеет фокусное расстояние 10 см, на негативе допустимо размытие изображения 0,5 мм.

**13.3.9.** Объект съемки движется на кинокамеру со скоростью  $v$ . С какой скоростью нужно менять фокусное расстояние объектива и глубину кинокамеры, чтобы размер изображения оставался неизменным, если увеличение, даваемое кинокамерой, равно  $k$ ?

**13.3.10.** При фотографировании Луны получено размытое изображение в виде диска радиуса  $r_1$ . Резкое изображение Луны имело бы радиус  $r_2$ . Определите, на какое расстояние нужно сместить фотопластинку, чтобы изображение на ней получилось резким. Фокусное расстояние линзы  $f$ , диаметр  $D$ , при этом  $r_2 > D/2 > r_1$ . Областью изображения считать область попадания света на фотопластинку.

**13.3.11\*.** Изображение предметов, удаленных от фотоаппарата на расстояние от 2 до 4 м, получилось достаточно четким при диафрагме 4. Определите границу резкости (глубину резкости) при диафрагме 2 и 8.

**13.3.12.** Какие очки вы пропишите близорукому человеку, который может читать текст, расположенный от глаз не далее 20 см, а какие дальнозоркому, который может читать текст, расположенный от глаз не ближе 50 см?

**13.3.13.** Близоруким или дальнозорким является человек, нормально видящий в воде?

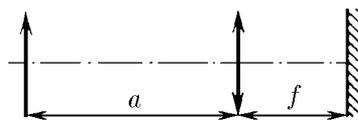
**13.3.14.** Известно, что если в листочке темной бумаги аккуратно проколоть маленькое отверстие, то через это отверстие можно рассматривать мелкие объекты с увеличением в несколько раз. Объясните это явление.

**13.3.15.** На ободке лупы имеется надпись « $\times 10$ », т. е. лупа увеличивает угловой размер рассматриваемого объекта в десять раз. Определите ее фокусное расстояние.

**13.3.16\*.** Острые конуса с углом  $2\alpha$  рассматривается через линзу с фокусным расстоянием  $f$ , расположенную на расстоянии  $a$  от вершины конуса ( $a < f$ ). Каким виден угол конуса через линзу? Ось линзы проходит через ось симметрии конуса.

**13.3.17.** Определите максимальное увеличение, с которым видна рыбка, плавающая в сферическом аквариуме.

◇ **13.3.18. а.** На фокусном расстоянии  $f$  от линзы расположено плоское зеркало. Найдите, на каком расстоянии от линзы будет находиться изображение предмета, расположенного на расстоянии  $a$  от линзы.



*К задаче 13.3.18*

б. Плоскую сторону плоско-выпуклой линзы, фокусное расстояние которой  $f$ , посеребрили. Найдите фокусное расстояние получившегося зеркала.

**13.3.19.** Фокусное расстояние двух тонких линз равно  $f_1$  и  $f_2$ . Чему равно фокусное расстояние системы из этих двух линз, собранных вместе? Чему равна оптическая сила этой системы?

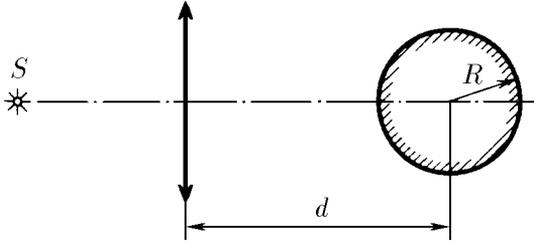
**13.3.20.** Система состоит из двух одинаковых линз с общей оптической осью. Расстояние между линзами  $l$ , фокусное расстояние линз  $f$ . Найдите фокусное расстояние системы, если  $l \ll f$ .

**13.3.21.** Две линзы с фокусным расстоянием 30 см находятся друг от друга на расстоянии 15 см. Найдите, при каких положениях предмета система дает действительное изображение.

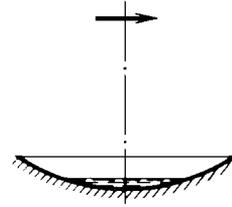
**13.3.22.** Рассеивающая линза с фокусным расстоянием 0,6 м расположена так, что один из ее фокусов совпадает с полюсом вогнутого зеркала. Определите фокусное расстояние зеркала, если известно, что система дает мнимое изображение предмета, помещенного на любом расстоянии перед линзой. Изображение создается лучами, вторично прошедшими через линзу после отражения их от зеркала.

◇ **13.3.23.** Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f$  и зеркального шарика радиуса  $R$ , центр которого находится на оптической оси линзы на расстоянии  $d$  от нее. Определите расстояние от линзы до точечного источника  $S$ , расположенного на оптической оси системы, при котором изображение источника совпадает с самим источником.

◇ **13.3.24\*.** Вогнутое сферическое зеркало радиуса  $R$  дает изображение источника, которое совпадает с самим источником. Когда в зеркало налили немного жидкости, между источником и зеркалом появилось второе изображение, расположенное на расстоянии  $l$  от источника,  $l < R$ . Найдите показатель преломления жидкости.



К задаче 13.3.23



К задаче 13.3.24

**13.3.25\*.** Две тонкие плоско-выпуклые линзы, фокусное расстояние каждой из которых в воздухе равно  $f$ , помещены в оправу так, что их выпуклые поверхности соприкасаются. Определите фокусное расстояние такой системы в жидкости с показателем преломления  $n$ . Считать, что внутрь оправы жидкость не попадает. Как изменится ответ, если жидкость попадет между линзами? Показатель преломления стекла, из которого сделаны линзы,  $n_0$ .

**13.3.26.** Изображение Луны, полученное с помощью телескопа, в первом случае фиксируется непосредственно на фотопленку, а в другом фотографируется с помощью камеры глубины  $l$ , объектив которой имеет фокусное расстояние  $f$ . Во сколько раз отличаются размеры изображения?

**13.3.27.** Фокусное расстояние объектива телескопа  $f$ . Во сколько раз изменится его угловое увеличение при наблюдении объектов, удаленных от телескопа на конечное расстояние  $a$ ?

**13.3.28.** Микроскоп имеет объектив и окуляр с фокусным расстоянием  $f_1$  и  $f_2$  соответственно. На сколько изменится увеличение микроскопа, если расстояние между объективом и окуляром увеличить на  $l$ ? Во сколько раз изменится увеличение микроскопа, если все его размеры, включая и размеры линз, изменить в  $k$  раз?

## § 13.4. Фотометрия

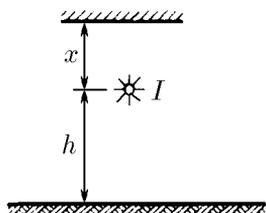
**13.4.1.** Согласно нормам освещенность рабочего места для тонких работ должна быть не менее 100 лк. На какой максимальной высоте от рабочего места должна быть помещена лампа, сила света которой 100 кд?

**13.4.2.** Освещенность плоской поверхности в точке, ближайшей к точечному источнику света, 200 лк. Какова освещенность в точках, где угол падения луча к нормали поверхности  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ?

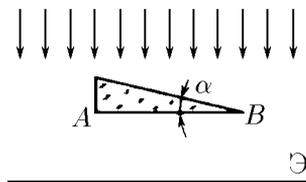
**13.4.3.** Над поверхностью на высоте 2 м расположен точечный источник, сила света которого 120 кд. На расстоянии 1 м от источника перпендикулярно поверхности находится плоское абсолютно отражающее зеркало. Определите освещенность поверхности непосредственно под источником.

◇ **13.4.4.** Точечный источник силы света  $I$  расположен на высоте  $h$  над горизонтальной поверхностью. Над источником находится плоское зеркало, параллельное поверхности. Как зависит освещенность поверхности непосредственно под источником от расстояния  $x$  между зеркалом и источником?

◇ **13.4.5.** Экран освещается параллельным пучком света. Как изменится освещенность экрана, если на пути лучей поставить призму с углом  $\alpha$  и стороной  $AB$ , параллельной экрану? Нарисуйте график изменения освещенности вдоль экрана.



К задаче 13.4.4



К задаче 13.4.5

**13.4.6.** Оцените, во сколько раз освещенность одной и той же поверхности в лунную ночь в полнолуние меньше, чем в солнечный день? Высота Луны и Солнца над горизонтом одинакова. Считать, что участки Луны рассеивают весь падающий на них свет во все стороны равномерно. Принять расстояние от Луны до Земли равным 400 000 км, радиус Луны — равным 2000 км.

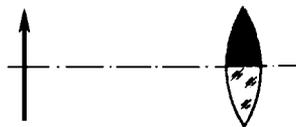
**13.4.7.** Пучок света интенсивности  $I$  падает на плоско-параллельную пластину по нормали к ее поверхности. Пренебрегая поглощением и считая, что коэффициент отражения света на каждой из поверхностей пластины в любую сторону равен  $k$ , определите интенсивность пучка, прошедшего сквозь нее.

**13.4.8\*.** Искусственный спутник Земли радиуса 1 м, освещенный Солнцем, виден с расстояния 300 км как рядовая звезда. Оцените расстояние до такой звезды.

**13.4.9.** Для локации поверхности Венеры с Земли и для приема сигнала с искусственного спутника Венеры используется один и тот же приемник, причем уровень принимаемого сигнала в том и другом случае одинаков. Оцените, во сколько раз мощность передатчика на спутнике меньше мощности излучателя локатора.

**13.4.10.** Сотрудник автоинспекции для определения скорости автомобиля использует излучатель электромагнитных волн и приемник.  $R$  — предельное расстояние до автомобиля, при котором приемник фиксирует отраженный сигнал. Любитель быстрой езды имеет точно такой же приемник. Оцените, с какого расстояния он обнаружит работу излучателя.

◇ **13.4.11.** Что произойдет с изображением, даваемым линзой, если верхнюю половину линзы закрасить черной краской?



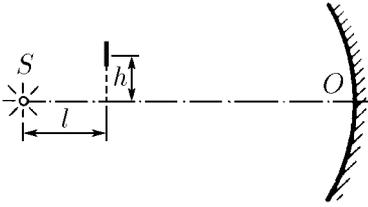
К задаче 13.4.11

**13.4.12.** Как изменится освещенность изображения Солнца, даваемого плоско-выпуклой линзой, если линзу разрезать по диаметру и сложить плоскими сторонами?

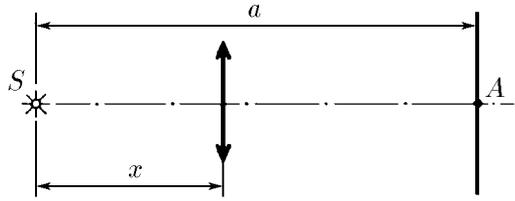
◇ **13.4.13.** Перед сферическим зеркалом радиуса кривизны  $R$ , в фокусе которого находится точечный источник света  $S$ , на высоте  $h$  над осью зеркала  $SO$  помещена небольшая пластинка, плоскость которой перпендикулярна оси. Найдите отношение освещенностей левой и правой сторон пластинки, если  $h \ll R, l$ .

◇ **13.4.14\*.** Точечный источник света  $S$  расположен на расстоянии  $a < 4f$  от плоского экрана. Как изменится освещенность экрана в точке  $A$ , если между ис-

точником и экраном поставить линзу с фокусным расстоянием  $f$ , на расстоянии  $x$  от источника? При каком  $x$  освещенность в точке  $A$  будет максимальной?



К задаче 13.4.13



К задаче 13.4.14

**13.4.15.** Точечный источник света с помощью телескопа, имеющего объектив диаметра  $D_0$ , может быть замечен с расстояния  $L_0$ . С какого расстояния можно рассмотреть этот источник в телескоп с объективом диаметра  $D$ ?

**13.4.16\*.** Можно ли с помощью линзы или зеркала получить такое изображение Солнца, яркость которого превышает яркость Солнца? Какую максимальную освещенность изображения Солнца можно получить с помощью вогнутого зеркала диаметра  $D$  и радиуса кривизны  $R$ ? Яркость поверхности Солнца  $B$ .

**13.4.17.** В фокусе сферического зеркала помещен сосуд, содержащий 100 г воды. Каков должен быть диаметр зеркала, чтобы вода выкипела через 1 мин, если зеркало направить прямо на Солнце? Плотность потока энергии от Солнца  $0,14 \text{ Вт/см}^2$ . Потери пренебречь.

**13.4.18\*.** По известной легенде жители Сиракуз под руководством Архимеда сожгли корабли римского флота, фокусируя на них свет Солнца с помощью плоских зеркальных щитов. Принимая, что диаметр щита  $d = 1 \text{ м}$ , расстояние до кораблей  $x = 500 \text{ м}$  и температура, при которой загорается дерево,  $T \approx 1000 \text{ К}$ , оцените необходимое число щитов.

**13.4.19.** В крышке закрытого ящика, высота которого 1 м, имеется круглое отверстие. Изменится ли освещенность дна под отверстием, если в отверстие вставить линзу, оптическая сила которой равна 1 дптр? Ящик стоит под открытым небом, равномерно затянутым пеленой облаков.

**13.4.20.** Почему при наблюдении в телескоп яркие звезды видны даже днем?

**13.4.21\*.** Жука фотографируют в двух масштабах, поднося аппарат на расстояние, равное сначала тройному, а затем пятикратному фокусному расстоянию объектива. Как нужно изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одинаковой? Диаметр диафрагмы в обоих случаях много меньше расстояния до жука.

**13.4.22\*.** Какая выдержка нужна при фотографировании чертежа с линейным увеличением  $k_1$ , если при фотографировании с увеличением  $k_2$  устанавливается выдержка  $t_2$ ?

**13.4.23\*.** Интенсивность света маяка на расстоянии  $L$  уменьшилась из-за тумана на 10%. Радиус капель тумана  $r$ . Оцените количество капель тумана в единице объема воздуха.

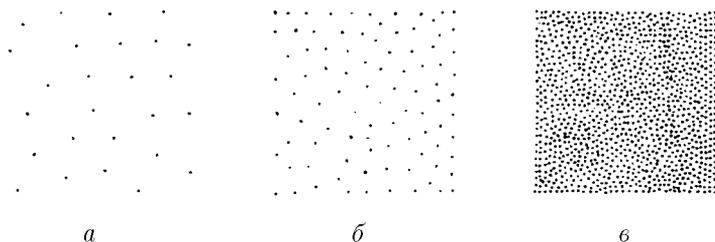
**13.4.24\*.** В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса 5 мкм при содержании 0,004 г вещества в  $1 \text{ м}^3$  воздуха видимость составляет 50 м. Сколько вещества в  $1 \text{ м}^3$  воздуха распыляется источником завесы, создающим частицы радиуса 10 мкм, если видимость при этом сокращается до 20 м?

**13.4.25\*.** В системе оптической связи луч лазера, передающий информацию, имеет вид конуса с углом при вершине  $10^{-4}$  рад (угол расходимости). В приемном устройстве световая энергия фокусируется на фотоэлемент с помощью линзы 1 м. Оказалось, что при изменении расстояния между передатчиком и приемником

с 5 до 10 км сигнал, принимаемый с фотоэлемента, уменьшился в два раза (из-за поглощения света в атмосфере). Во сколько раз изменится сигнал при увеличении расстояния с 10 до 20 км?

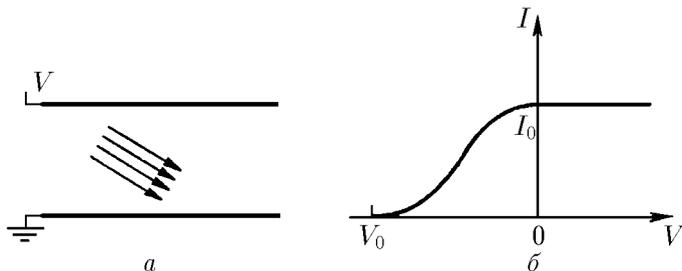
### § 13.5. Квантовая природа света

◇ **13.5.1.** Чувствительность фотопленки настолько велика, что каждый фотон вызывает на ней появление черного пятна. Три фотографии квадрата получены на длине волны  $5 \cdot 10^{-5}$  см. Размеры изображения  $10 \times 10$  см. Оцените, пользуясь формулой Планка  $\varepsilon = h\nu$  ( $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг·с — постоянная Планка), освещенность фотопластины в каждом случае. Время срабатывания затвора фотоаппарата  $10^{-9}$  с.



К задаче 13.5.1

◇ **13.5.2.** Две параллельные металлические пластины находятся в вакууме. На заземленную пластину падает поток ультрафиолетового излучения частоты  $\nu$ , которое выбивает с ее поверхности электроны. Ток этих электронов зависит от напряжения, подаваемого на вторую пластину так, как изображено на графике. Определите из графика работу выхода электронов из первой пластины.



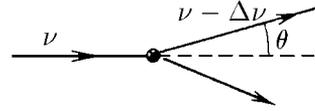
К задаче 13.5.2

**13.5.3.** При столкновении позитрона с электроном часто происходит аннигиляция этих частиц: они превращаются в два  $\gamma$ -кванта электромагнитного излучения. В каком случае энергия этих  $\gamma$ -квантов будет одинакова, а сами они будут двигаться в противоположных направлениях? Чему будет равна максимальная частота таких  $\gamma$ -квантов?

**13.5.4.** а. При распаде  $\pi$ -мезона образовалось два фотона с энергией  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , которые летят в противоположных направлениях. Определите скорость распавшегося мезона. Связь между энергией и импульсом для фотона имеет вид  $\varepsilon = pc$ , где  $c$  — скорость света.

б. При распаде нейтральной частицы обнаружено два фотона, летящих под углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$  к направлению движения частицы. Определите скорость распавшейся частицы.

◇ **13.5.5.** а.  $\gamma$ -Квант электромагнитного излучения частоты  $\nu$ , столкнувшись с неподвижной частицей, начал двигаться под углом  $\theta$  к первоначальному направлению. При этом частота кванта уменьшилась на  $\Delta\nu \ll \nu$ . Определите массу этой частицы.



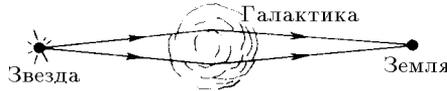
*К задаче 13.5.5*

б. Фотон частоты  $\nu$ , столкнувшись с неподвижным электроном, начинает двигаться под углом  $\theta$  к первоначальному направлению. Определите изменение частоты фотона, если  $h\nu \ll m_e c^2$ .

**13.5.6\*.** Атомы, летящие со скоростью  $v$ , испускают в направлении своего движения фотоны с частотой  $\nu$ . Какова частота фотонов, испускаемых в направлении: а) противоположном направлению движения атомов; б) перпендикулярном направлению движения атомов? Импульс фотона много меньше импульса атома.

**13.5.7.** Свет, излучаемый с поверхности звезды, приходит к наблюдателю с меньшей, чем при излучении, частотой. Изменение частоты тем больше, чем массивнее звезда и меньше ее радиус. Чем объясняется этот эффект? Почему его называют красным смещением?

**13.5.8.** Определите красное смещение для звезды массы  $M$  и радиуса  $R$ , если частота света на поверхности звезды равна  $\nu$ . Оцените красное смещение для Солнца в видимой области его излучения. Какие эффекты мешают обнаружить красное смещение в излучении Солнца?



*К задаче 13.5.9*

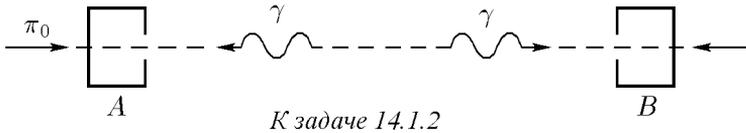
◇ **13.5.9\*.** Большие массы вещества во Вселенной могут фокусировать свет от удаленных объектов, образуя «гравитационную линзу». Оцените фокусное расстояние шаровой галактики радиуса  $R \approx 20\,000$  пк и массы  $M \approx 3 \cdot 10^{11} M_{\odot}$  (где  $M_{\odot}$  — масса Солнца), считая, что масса в галактике распределена равномерно.

## Специальная теория относительности

### § 14.1. Постоянство скорости света. Сложение скоростей

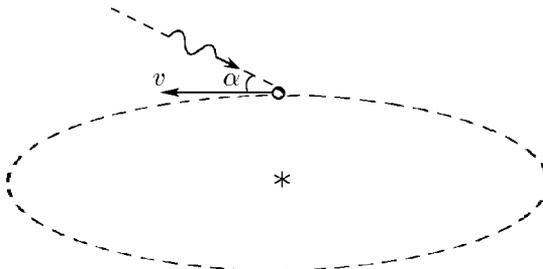
**14.1.1.** Отраженный от самолета радиосигнал вернулся к локатору через  $10^{-4}$  с. На каком расстоянии находился самолет от локатора в момент отражения радиосигнала?

◇ **14.1.2.** Через  $10^{-8}$  с после пролета  $\pi^0$ -мезона через счетчик  $A$  счетчики  $A$  и  $B$  зафиксировали  $\gamma$ -кванты, которые возникли при распаде  $\pi^0$ -мезона:  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . Расстояние между счетчиками 1 м. С какой скоростью двигался  $\pi^0$ -мезон?



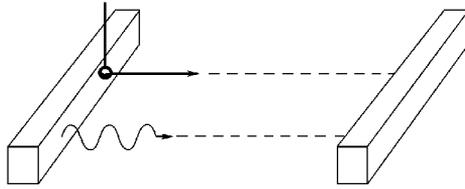
**14.1.3.** Под каким углом к горизонту виден светящийся предмет, движущийся горизонтально со скоростью  $\beta c$  в момент, когда находится над наблюдателем?

◇ **14.1.4\*** По наблюдениям с Земли свет далекой звезды падает на Землю под углом  $\alpha$  к направлению ее движения, когда Земля приближается к звезде с наибольшей скоростью. На сколько изменится этот угол, когда скорость Земли изменит свое направление на противоположное?



◇ **14.1.5.** С первой космической станции на вторую станцию, неподвижную относительно первой, были направлены одновременно испытательный зонд и свето-

вой сигнал. Отразившись от второй станции, затем от первой, световой сигнал вернулся на вторую станцию, когда на нее прибыл космический зонд. Какую скорость зонда относительно станции зафиксируют наблюдатели на станциях? Какую относительную скорость зафиксирует аппаратура зонда?



К задаче 14.1.5

**14.1.6\*.** Решите задачу 14.1.5 в случае, когда относительная скорость второй станции по наблюдениям с первой станции равна  $v$ . Какую относительную скорость имеет первая станция по наблюдениям со второй?

**14.1.7\*.** По линии, соединяющей две неподвижные друг относительно друга станции, со скоростью  $v$  относительно станций двигался космический корабль. «Станции находились на одинаковом расстоянии от нашего корабля, когда на них одновременно отразился наш световой сигнал, так как световые сигналы были отправлены одновременно на станции и вернулись они после отражения от станций тоже одновременно», — утверждает наблюдатель с корабля. Сотрудники же станций наблюдали, что сигналы отразились от станций в разное время. Как объяснить эти разногласия? Какую разницу во временах отражения наблюдали сотрудники станции, если расстояние между станциями (в их системе) равно  $l$ ? На каких расстояниях они фиксировали корабль в моменты отражений сигналов от станций?

**14.1.8.** Самолет и ракета движутся по одной прямой и в одном направлении. Скорость самолета  $\beta c$ . С самолета испускаются световые импульсы через равные интервалы, которые, отразившись от ракеты, приходят на самолет через интервалы, в  $K$  раз длиннее интервалов испускаемых импульсов. Определите скорость ракеты относительно самолета по наблюдениям с самолета и по наблюдениям с Земли.

**14.1.9.** «... Космический объект приближался к Земле. Навстречу ему мчалась самая быстрая космическая лаборатория. “Какова скорость сближения объекта и лаборатории?” — запросил с Земли генерал, руководитель встречи. “В системе Земли или нашей лаборатории?” — отозвался оператор лаборатории. “Какая разница”, — ответил генерал. “Эти скорости уже отличаются на 0,01 %, — неслось из космоса. — Сейчас мы достигли скорости сближения ровно 100 000 км/с в нашей системе и больше мы ее не меняем”. “Как измеряете скорость?” — спросил генерал. “Так же, как и вы, мы установили пассивную связь с объектом. Радарный импульс постоянно курсирует между нами и объектом, отражаясь попеременно то от нашей лаборатории, то от объекта. Скорость сближения определяется по изменению времени возвращения импульса”. “Это верно, когда радарный импульс и удаляется, и приближается к лаборатории со скоростью, равной скорости света, — подумал генерал. — Тогда скорость приближения объекта определяется только отношением двух соседних времен. Но у них не так. Когда они догоняют отраженный импульс, скорость импульса с уменьшается на величину скорости лаборатории и на столько же увеличивается, когда импульс летит навстречу”. Неожиданно для себя генерал спросил у оператора: “Какая скорость сближения получилась бы у вас, если бы мы сообщили с Земли наблюдаемые нами скорости импульса по отношению к лаборатории и вы воспользовались бы этими величинами для расчета скорости объекта по времени

возвращения импульса? Наверняка, ту же самую, что мы видели с Земли”. “Да, генерал,” — со скоростью света полетел ответ на Землю. У генерала мелькнула мысль: “Лукавят физики. Просто не могут измерить скорость импульса. Нет масштаба. И принимают ее равной скорости света. Отсюда — все несовпадения”». Этот отрывок из еще неопубликованного научно-фантастического рассказа вызвал следующие вопросы. Насколько прав генерал? Чему равна скорость объекта и лаборатории в системе «Земля»?

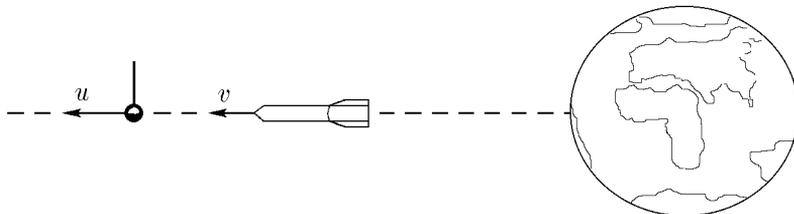
◇ 14.1.10\*. а. По наблюдениям с Земли скорости двух космических кораблей, летящих навстречу друг другу, равны  $v$  и  $u$ . Покажите, что относительная скорость одного корабля по наблюдениям с другого определяется формулой

$$v_1 = (v + u)/(1 + vu/c^2).$$

б. По наблюдениям с Земли космический корабль удаляется от нее со скоростью  $v$ . В направлении движения с корабля был выброшен зонд. По наблюдениям с корабля зонд движется относительно корабля со скоростью  $u$ . Докажите, что наблюдаемая с Земли скорость удаления зонда от Земли равна

$$(v + u)/(1 + vu/c^2).$$

При решении задач используйте постоянство величины скорости света в разных системах отсчета.

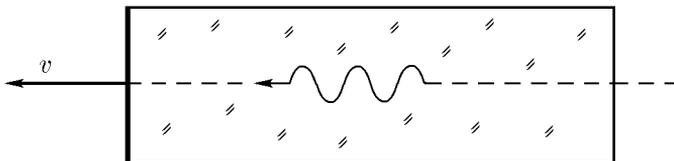


К задаче 14.1.10 б

14.1.11. На фотонной ракете, летящей со скоростью 225 000 км/с относительно Земли, установлен ускоритель, разгоняющий электроны до скорости 240 000 км/с относительно ракеты в направлении ее движения. Какова скорость этих электронов в системе «Земля»?

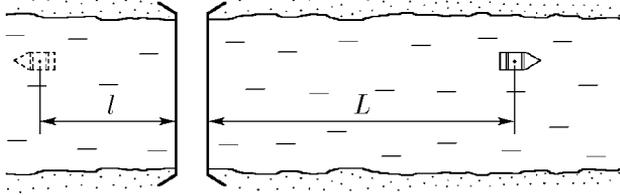
14.1.12. Найти скорость распространения света относительно покоящегося наблюдателя, если луч света движется в среде с показателем преломления  $n$ , которая, в свою очередь, движется относительно наблюдателя со скоростью  $v$  в направлении распространения света.

◇ 14.1.13. Стекланный брусок длины  $l$  движется в продольном направлении со скоростью  $v$ . Передний торец бруска посеребрен. Сколько времени по часам неподвижного наблюдателя потребуется свету, входящему в брусок через задний торец, чтобы пройти по бруску, отразиться от посеребренного торца и выйти из бруска? Коэффициент преломления стекла  $n$ .



К задаче 14.1.13

◇ 14.1.14\*. Лодочник под мостом уронил в воду багор. Через время  $\tau$ , находясь на расстоянии  $L$  от моста, он обнаружил потерю и, повернув назад, догнал багор на расстоянии  $l$  от моста. Время и расстояния приведены в системе «берег». Какова скорость реки? Получите релятивистский ответ и из него нерелятивистское приближение.

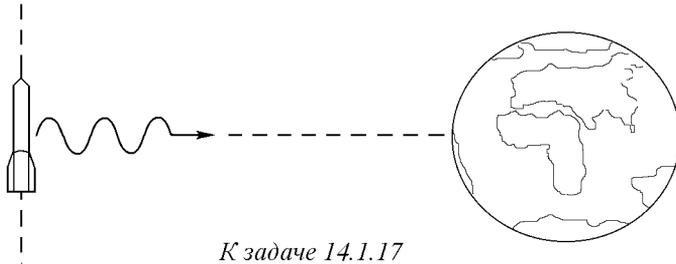


К задаче 14.1.14

14.1.15. Движущееся ядро распадается на два одинаковых осколка. Скорость осколка в направлении движения  $v$ , в противоположном направлении  $u$ . Определите скорость ядра.

14.1.16. Скорость заряженной частицы  $v$ . Определите, во сколько раз изменится скорость этой частицы после встречи с электрическим полем, движущимся навстречу частице со скоростью  $u$ , если после этой встречи частица отразилась в направлении движения поля?

◇ 14.1.17. Мимо Земли со скоростью  $v$  пролетает ракета. Посланный с Земли световой сигнал отразился от ракеты, когда она находилась от Земли на минимальном расстоянии  $l$ . Определите время возвращения сигнала на Землю по наблюдениям с Земли и с ракеты.



К задаче 14.1.17

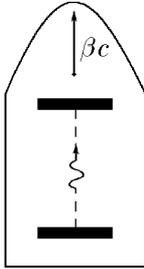
14.1.18. Если в какой-либо системе отсчета фиксируются события, например радиоактивный распад, рассеяние частиц, отражение света от зеркала, то эти явления будут фиксироваться в любой системе отсчета. Покажите, пользуясь этим, что отношение времен между событиями, происходящими в одном и том же месте для какой-либо системы, одинаково в любой системе отсчета.

14.1.19. Покажите, что в движущейся со скоростью  $\beta c$  ракете поперечные размеры не меняются.

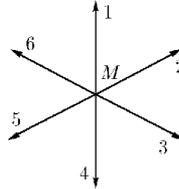
◇ 14.1.20. В ракете время измеряется световыми ходиками, состоящими из двух зеркал, расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга. Число колебаний светового зайчика между этими зеркалами отсчитывает время в этой ракете. Как изменится ход этих часов по наблюдениям на станции, относительно которой ракета движется со скоростью  $\beta c$ ? Покажите, что расстояние между зеркалами, если ось ходиков направлена вдоль скорости  $\beta c$ , уменьшится в  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз?

14.1.21. Во сколько раз изменится скорость частицы  $v$  при переходе в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $u$ , если  $v \perp u$ ?

◇ 14.1.22. На рисунке изображены векторы скоростей шести зайцев, выпущенных старым Мазаем, в системе отсчета, неподвижной относительно Мазая. Нарисуйте скорости зайцев и Мазая в системе отсчета, неподвижной относительно зайца 1, если зайцы разбегутся со скоростью света?



К задаче 14.1.20



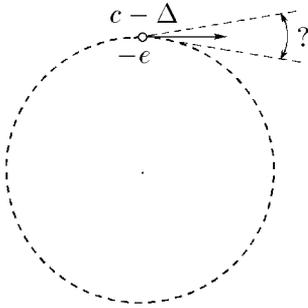
К задаче 14.1.22

14.1.23. Неподвижный радар испускает радиальные электромагнитные волны длиной  $\lambda$ . Изобразите эти волны для радара, движущегося со скоростью  $v = 4c/5$ . Как изменится длина волны в направлении движения радара? В противоположном направлении? Под углом  $\pi/2$  к направлению движения?

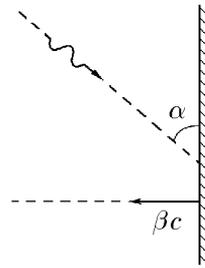
14.1.24\*.  $\pi^0$ -Мезоны, имеющие одинаковую скорость  $\beta c$ , распадаются на  $\gamma$ -кванты:  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . Какая часть  $\gamma$ -квантов движется под углами к скорости  $\beta c$ , меньшими  $\pi/2$ ?

◇ 14.1.25\*. Двигаясь по круговой дорожке накопителя со скоростью, близкой к скорости света, электрон испускает свет в основном в направлении движения в области малого угла. Оцените этот угол, если скорость электрона на  $\Delta$  меньше скорости света,  $\Delta \ll c$ .

◇ 14.1.26\*. Зеркало движется со скоростью  $\beta c$  перпендикулярно своей плоскости. Под каким углом отразится от этого зеркала фотон, падающий на зеркало под углом  $\alpha$ ?



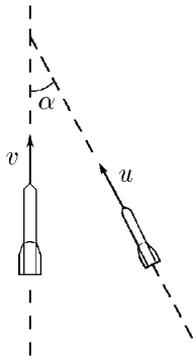
К задаче 14.1.25



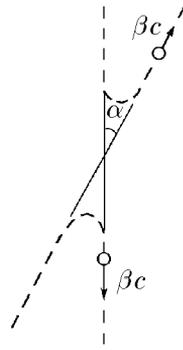
К задаче 14.1.26

◇ 14.1.27. Для встречи с космическим кораблем, летящим со скоростью  $v$ , под углом  $\alpha$  к направлению движения корабля запускается со скоростью  $u$  ракета связи. Определите скорость ракеты в системе отсчета корабля.

◇ 14.1.28\*. Угол отклонения протона, имеющего скорость  $\beta c$ , при столкновении с другим протоном, летящим ему навстречу с той же скоростью, равен  $\alpha$ . Определите угол отклонения первого протона в системе отсчета, в которой другой протон до столкновения неподвижен.



К задаче 14.1.27



К задаче 14.1.28

### § 14.2. Замедление времени, сокращение размеров тел в движущихся системах. Преобразование Лоренца

**14.2.1.** Во сколько раз замедлится ход времени в космическом корабле, летящем со скоростью  $240\,000$  км/с?

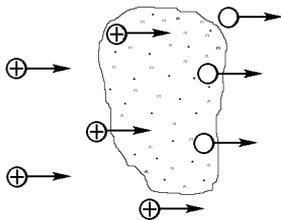
**14.2.2.** Время жизни неподвижной частицы  $\tau$ . С какой скоростью должна двигаться эта частица, чтобы пролететь расстояние  $l$ ?

**14.2.3.** Хотя время жизни неподвижного  $\mu$ -мезона мало — около  $2 \cdot 10^{-6}$  с,  $\mu$ -мезоны, рожденные космическими лучами на высоте  $30$  км, достигают поверхности Земли. Определите верхний предел разницы между скоростью света и скоростью  $\pi$ -мезонов.

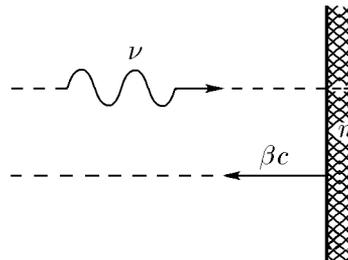
◇ **14.2.4.** Протоны ускоряются напряжением  $30$  кВ, а затем, проходя газовую мишень, частично превращаются (практически не тормозясь), захватывая электроны, в быстрые нейтральные атомы водорода. Частота неподвижных атомов водорода равна  $3,2 \cdot 10^{15}$  Гц. На сколько изменится частота электромагнитных волн, излучаемых движущимися атомами водорода перпендикулярно направлению их движения?

**14.2.5\*.** Как изменится частота плоской электромагнитной волны при нормальном отражении ее от зеркала, движущегося со скоростью  $\beta c$  навстречу волне? Частота падающей волны  $\nu$ .

◇ **14.2.6\*.** Определите разницу частот плоской волны вне и внутри диэлектрика, плоская граница которого движется навстречу волне со скоростью  $\beta c$ . Частота волны вне диэлектрика  $\nu$ , коэффициент преломления волны в диэлектрике  $n$ .



К задаче 14.2.4



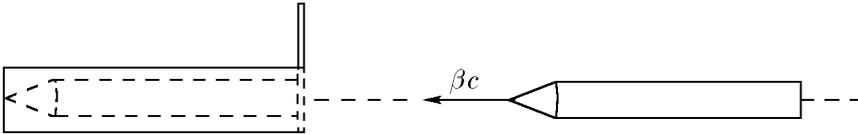
К задаче 14.2.6

**14.2.7.**  $\pi^0$ -Мезон пролетает со скоростью  $v$  от места своего рождения до места распада расстояние  $l$ . Сколько времени прошло между этими событиями в системе протона, летящего вслед за  $\pi^0$ -мезоном со скоростью  $u$ ?

**14.2.8.** Через какое время фотон перелетит галактику диаметром  $10^5$  световых лет по наблюдениям с космического корабля, движущегося вслед за фотоном со скоростью, равной 0,6 скорости света?

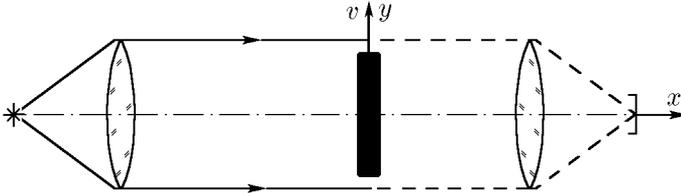
**14.2.9.** В центре стержня находится лампочка. В системе отсчета, в которой стержень покоится, свет от лампочки дойдет до концов стержня одновременно, а в системе отсчета, в которой стержень движется в продольном направлении со скоростью  $v$ , свет придет на дальний конец на  $lv/c^2\sqrt{1-v^2/c^2}$  позже, чем на ближний;  $l$  — собственная длина стержня (длина стержня в системе отсчета, в которой стержень неподвижен). Докажите это.

◇ **14.2.10.** При продольной скорости  $\beta c$  длина карандаша равна длине пенала  $l$ . Когда карандаш влетает в пенал, крышка пенала захлопывается, а карандаш мгновенно останавливается. Опишите этот процесс в системе карандаша.



К задаче 14.2.10

◇ **14.2.11\*.** Между двумя линзами сформирован пучок света с круглым сечением радиуса  $R$ , направленным вдоль оси  $x$ . Вдоль оси  $y$  движется диск того же радиуса со скоростью  $v$ . Плоскость диска перпендикулярна оси  $x$ . В лабораторной системе, в которой линзы неподвижны, движущийся диск сокращается в направлении движения и поэтому не может перекрыть пучок света. Для наблюдателя на диске сокращается сечение пучка и, казалось бы, должен наблюдаться момент полной экранировки света. Объясните этот парадокс.



К задаче 14.2.11

**14.2.12\*.** Параллельный полу стержень падает на пол со скоростью  $\beta c$ . Под каким углом к полу падает этот стержень в системе отсчета, которая движется параллельно полу со скоростью  $\beta_1 c$ ?

**14.2.13. а\*.** По наблюдениям с Земли в движущемся со скоростью  $v$  космическом корабле величина скорости света не изменилась, расстояния в направлении движения сократились в  $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$  раз, а в направлении, перпендикулярном движению, — не изменились. События, одновременные в неподвижном корабле, стали происходить в разные моменты времени. Разность времен  $\Delta t = \gamma xv/c^2$ , где  $x$  — разность координат в направлении движения корабля. Докажите, что все эти эффекты следуют из преобразования Лоренца

$$x' = (x - vt)\gamma, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = (t - vx/c^2)\gamma,$$

где  $x, y, z$  и  $t$  — координаты и время, описывающие явления в неподвижной системе;  $x', y', z'$  и  $t'$  — координаты и время, описывающие явление в системе, движущейся со скоростью  $v$ .

б. Получите обратное преобразование Лоренца: определите  $x, y, z, t$  через  $x', y', z', t'$  из преобразования Лоренца, которое приведено в п. а. Покажите, что полученное преобразование подтверждает принцип относительности Галилея.

**14.2.14.** Преобразование Лоренца дает возможность узнать, что произойдет, если мы будем наблюдать за каким-либо явлением, двигаясь относительно объекта, носителя явления, со скоростью  $v$ , или если объект движется относительно нас со скоростью  $v$ , при условии, что нам известно, как происходит явление, когда объект неподвижен. Поэтому в дальнейшем часто будет использоваться следующая постановка вопроса. В неподвижной системе описывается явление. Как будет происходить это явление, если объект, носитель явления, движется со скоростью  $v$ ? Ответ предполагает описание этого явления в системе отсчета, которая движется со скоростью  $-v$  относительно системы, в которой описано явление. Это эквивалентно описанию этого явления в случае движения объекта, носителя явления, со скоростью  $v$  относительно неподвижного наблюдателя. Второй вариант интересен тем, что его можно расширить на несколько изолированных объектов, движущихся с разными скоростями. Решите, используя это, следующую задачу. Наблюдательная станция зафиксировала световые сигналы от двух ракет, движущихся по направлению к станции по одной прямой. Частоты сигналов, зарегистрированных станцией,  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Частота сигналов неподвижных ракет равна  $\nu_0$ . С какой скоростью сближаются ракеты?

**14.2.15.** Используя преобразование Лоренца, решите задачи 14.2.5\* и 14.2.6\*.

**14.2.16.** От неподвижного атома свет распространяется под углом  $\alpha$  к оси  $z$ . Частота света  $\nu$ . Под каким углом будет распространяться свет при движении атома со скоростью  $\beta c$  вдоль оси  $z$ ? Как изменится частота света?

**14.2.17.** По направлению к Земле со скоростью  $v$  движется космический корабль. Когда измеренное с Земли расстояние до корабля было  $l$ , с Земли запустили ракету. Через какое время после запуска встретится ракета с кораблем по наблюдениям с Земли и с корабля, если ракета двигалась навстречу кораблю: а) со скоростью  $u$ ? б\*) с ускорением  $a$ ?

**14.2.18.** а. По наблюдениям космонавтов, тело внутри космического корабля совершает гармоническое движение с частотой  $\omega/(2\pi)$  и амплитудой  $A$  вдоль оси корабля  $z = A \sin \omega t$ . Как будет связана осевая координата этого тела со временем по наблюдениям с Земли, если корабль удаляется от Земли со скоростью  $\beta c$ ?

б. Решите задачу пункта а в случае, если тело внутри корабля, по наблюдениям космонавтов, совершало такое же гармоническое движение поперек оси корабля,  $y = A \sin \omega t$ .

### § 14.3. Преобразование электрического и магнитного полей\*)

**14.3.1.** Определите плотность поверхностного заряда, электрическое и магнитное поля в конденсаторе, движущемся со скоростью  $\beta c$  параллельно своим пластинам, если в системе отсчета, движущейся вместе с конденсатором, электрическая напряженность равна  $E$ . (Элементарный электрический заряд частиц при движении системы не меняется, но меняется расстояние между зарядами.)

**14.3.2\*.** Решите задачу 14.3.1 в случае, когда скорость  $\beta c$  направлена под углом  $\alpha$  к пластинам конденсатора. Как связаны между собой электрическая напряженность и магнитная индукция в этом конденсаторе?

\*) В этом параграфе используется система единиц СГС.

**14.3.3.** Найдите электрическое и магнитное поля равномерно заряженной нити, движущейся в продольном направлении со скоростью  $\vec{\beta}c$ , если в системе отсчета, в которой нить неподвижна, плотность заряда на единицу длины нити равна  $\rho$ .

**14.3.4.** а. В прямом неподвижном проводнике скорость электронов равна  $-\vec{\beta}c$ , а скорость протонов равна нулю. Плотности объемного заряда электронов и ионов равны  $\pm\rho$ . Как изменится плотность электронов и ионов при движении проводника со скоростью  $\beta c$ ?

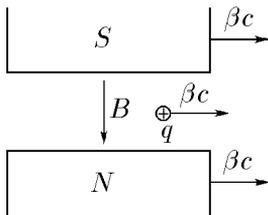
б. Во сколько раз изменится индукция магнитного поля в движущемся проводнике?

в. Как связаны между собой индукция магнитного поля в движущемся проводнике  $\vec{B}$  с электрической напряженностью  $\vec{E}$ ?

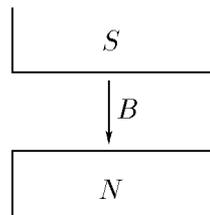
**14.3.5\*.** Решите задачу 14.3.4 в случае, если проводник будет двигаться со скоростью  $\vec{\beta}_1 c$ ,  $\beta_1 = k\beta$ .

◇ **14.3.6.** а. Пусть имеются неподвижный заряд и магнитное поле, которое на этот заряд не действует. При движении\*) этого состояния со скоростью  $\beta c$  заряд будет двигаться со скоростью  $\beta c$ . Сила, действующая на заряд в новом состоянии, равна нулю из-за того, что кроме магнитного поля на заряд действует возникающее при сносе электрическое поле. Определите, пользуясь условием равновесия сил, действующих на заряд, связь в новом состоянии индукции магнитного поля  $\vec{B}$  с электрической напряженностью  $\vec{E}$ .

б. Какое электрическое поле возникает при движении со скоростью  $\beta c$  магнитного поля с индукцией  $B$ , если  $\beta \ll 1$ ?



*K задаче 14.3.6 а*

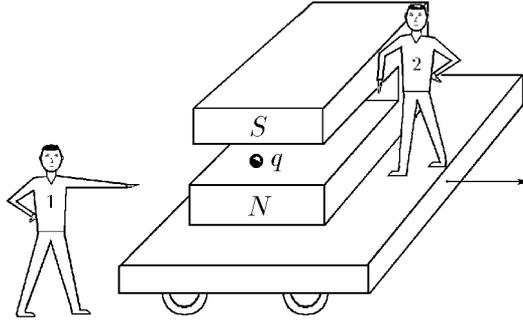


*K задаче 14.3.6 б*

в. На рисунке изображен постоянный магнит с магнитной индукцией  $\vec{B}$ , движущийся, как утверждает экспериментатор 1, мимо него со скоростью  $\vec{\beta}c$ , так как он обнаружил по действию на заряд  $q$  электрическое поле напряженности  $\vec{E} = -[\vec{\beta} \times \vec{B}]$ , которое должно возникнуть у движущегося магнита. Однако экспериментатор 2, сидящий на магните, утверждает, что у этого магнита нет никакого электрического поля и он неподвижен. Сила же, действующая на заряд  $q$ , связана не с электрическим, а с магнитным полем. «Экспериментатор 1, — утверждает экспериментатор 2, — вместе со своим зарядом движется в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  со скоростью  $-\vec{\beta}c$ . Поэтому на заряд действует сила не со стороны электрического поля напряженности  $\vec{E} = -[\vec{\beta} \times \vec{B}]$ , а со стороны магнитного поля индукции  $B$ ».

Кто из них прав?

\*) Движением состояния со скоростью  $\beta c$  называется новое состояние, которое в системе отсчета, движущейся со скоростью  $\beta c$  относительно первоначальной системы отсчета, совпадает с первоначальным состоянием.



К задаче 14.3.6 в

**14.3.7\*.** а. При движении со скоростью  $\vec{\beta}c$  состояния, в котором было только электрическое поле, возникает магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , связанное с новым электрическим полем  $\vec{E}$  соотношением  $\vec{B} = [\vec{\beta} \times \vec{E}]$ . Докажите это соотношение в случае, когда поле  $\vec{E}$  перпендикулярно скорости  $\vec{\beta}c$ .

б. Какое магнитное поле возникает при движении со скоростью  $\vec{\beta}c$  электрического поля напряженности  $\vec{E}$ , если  $\beta \ll 1$ ,  $\beta = 1$ ?

**14.3.8.** а. Формула преобразования полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  при движении их со скоростью  $\vec{\beta}c$  имеет следующий вид:

$$\vec{E}' = \vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{E}_{\perp} - [\vec{\beta} \times \vec{B}]), \quad \vec{B}' = \vec{B}_{\parallel} + \gamma(\vec{B}_{\perp} + (\vec{\beta} \times \vec{E})), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2},$$

где  $\vec{E}'$  и  $\vec{B}'$  — электрические и магнитные поля в носе;  $\vec{E}_{\parallel}$ ,  $\vec{E}_{\perp}$  и  $\vec{B}_{\parallel}$ ,  $\vec{B}_{\perp}$  — составляющие электрических и магнитных полей, параллельные и перпендикулярные  $c\vec{\beta}$  в начальной системе. Движение полей  $\vec{E}'$  и  $\vec{B}'$  со скоростью  $-c\beta$  возвращает прежнее состояние. Проверьте это.

в. Используя приведенные в пункте а формулы преобразования полей, решите задачи 14.3.1–14.3.3, 14.3.5\*.

г. Используя приведенные в пункте а формулы преобразований полей, решите задачи 14.3.6 а, б и 14.3.7.

д. Докажите, что при  $\beta \rightarrow 1$  поля  $\vec{E}'$  и  $B'$  перпендикулярны.

**14.3.9.** Во сколько раз изменится разность потенциалов и емкость плоского конденсатора при движении его со скоростью  $\beta c$ : а) вдоль пластин? б) перпендикулярно пластинам?

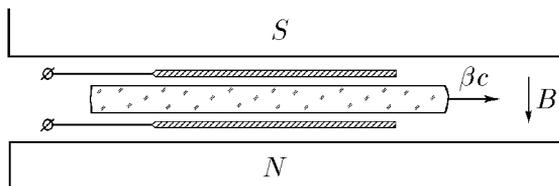
**14.3.10.** Во сколько раз изменится разность потенциалов и емкость длинного цилиндрического конденсатора при движении его со скоростью  $\beta c$  вдоль оси?

**14.3.11.** Неподвижной сфере радиуса  $R$  с равномерно распределенным поверхностным зарядом  $Q$  сообщили скорость  $\beta c$ . Определите максимальную электрическую напряженность и максимальную и минимальную плотности поверхностного заряда в новом состоянии.

**14.3.12\*.** Определите распределение электрической напряженности и магнитной индукции движущегося со скоростью  $\beta c$  заряда  $q$ .

**14.3.13\*.** Между неподвижными обкладками конденсатора со скоростью  $\beta c$  движется пластина из вещества с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Напряженность электрического поля между диэлектриком и пластинами  $E$ . Чему равна напряженность электрического поля и индукция магнитного поля внутри диэлектрика?

◇ 14.3.14\*. Диэлектрическая пластина толщины  $h$  движется со скоростью  $\beta c$  между обкладками конденсатора, который пронизывается внешним магнитным полем с индукцией  $B$ , перпендикулярной к обкладкам и пластине. Диэлектрическая проницаемость вещества пластины  $\varepsilon$ . Определите разность потенциалов между разомкнутыми обкладками конденсатора.



К задаче 14.3.14

14.3.15. Во сколько раз изменится амплитуда плоской электромагнитной волны при переходе в систему координат, движущуюся со скоростью  $\beta c$  в направлении распространения волны?

14.3.16\*. Решите задачу 14.3.15 при распространении плоской волны в диэлектрической среде с коэффициентом преломления  $n$ .

14.3.17. На движущуюся со скоростью  $\beta c$  металлическую стенку перпендикулярно падает плоская электромагнитная волна. Во сколько раз изменится амплитуда волны при отражении?

14.3.18\*. Решите задачу 14.3.17, когда электромагнитная волна падает на движущуюся стенку под углом  $\alpha$ .

14.3.19. Скорость электронов в параллельном пучке  $\beta c$ . Как изменится плотность электронов при движении относительно пучка со скоростью  $\beta_1 c$  в продольном направлении?

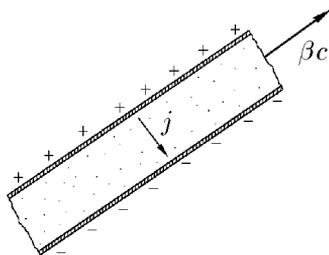
14.3.20. В прямом проводе плотность тока равна  $j$ . Как изменится эта плотность при движении провода со скоростью  $\beta_1 c$  в продольном направлении? Какой объемный заряд возникает в проводе?

14.3.21\*. Изменится ли плотность тока в проводнике при движении его перпендикулярно направлению тока?

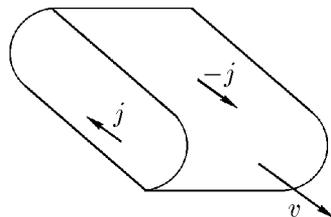
◇ 14.3.22. Толщина неподвижного плоского конденсатора  $h$ , плотность тока утечки  $j$ . Начальная плотность поверхностных зарядов  $\sigma$ . Как будет меняться электрическое поле внутри конденсатора при движении его со скоростью  $\beta c$  параллельно пластинам?

14.3.23\*. Решите задачу 14.3.21 в случае движения конденсатора со скоростью  $\beta c$  перпендикулярно пластинам.

◇ 14.3.24. Магнитный момент длинного плоского соленоида с током равен  $M$ . Какой электрический момент возникнет у этого соленоида при поперечном движении его со скоростью  $v$  параллельно плоским поверхностям?



К задаче 14.3.22

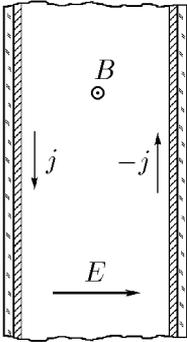


К задаче 14.3.24

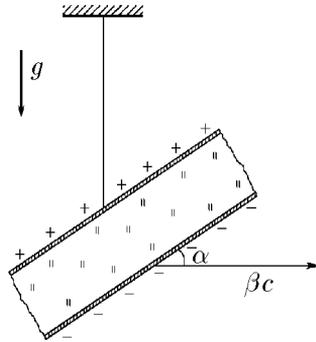
14.3.25\*. Решите задачу 14.3.24 в случае круглого длинного соленоида.

14.3.26. а. «...Для движущегося электрона электрическое поле  $E$  эквивалентно добавочному магнитному полю  $\vec{B} = [\vec{\beta} \times \vec{E}]$ » (Г. Бете, Э. Солитер. Квантовая механика с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960). Определите, используя это утверждение, силу действующую на магнитный момент электрона в атоме водорода, если электрон\*) движется по круговой орбите.

◇ 14.3.27. Когда-нибудь в космическом пространстве будут создаваться гигантские накопители электромагнитной энергии. Один из вариантов такого накопителя — магнитоэлектрический плоский конденсатор, в котором разноименные электрические заряды, расположенные на пластинах, создают электрическое поле напряженности  $E$ , а циркулярный ток сверхпроводящей подложки (изолированный от пластин) создает магнитное поле индукции  $B$ , равный по величине (в системе СГС)  $E$ . В таком конденсаторе магнитное поле, расталкивающее пластины, будет равно электрическому давлению, притягивающему пластины, и в целом конденсатор будет находиться в равновесии. Поэтому можно создавать такие накопители очень больших размеров, так как они не требуют дополнительного крепежа. Докажите, что равновесие в накопителе не изменится при их движении как вдоль, так и поперек пластин.



К задаче 14.3.27



К задаче 14.3.28

14.3.28\*. Заряженный конденсатор, подвешенный на нити, казалось бы, не может вместе с нитью и подвесом двигаться поступательно, если угол  $\alpha$  не прямой, так как магнитная сила взаимодействия двух совместно движущихся зарядов создает вращательный момент. Этот вращательный момент можно было бы обнаружить экспериментально, если считать, что конденсатор вместе с Землей движется со скоростью  $\beta c$ . Так ли это?

#### § 14.4. Движение релятивистских частиц в электрическом и магнитном полях

◇ 14.4.1. Электрон, влетающий со скоростью  $\beta c$  в протяженное неподвижное и однородное электрическое поле, вылетает из него через время  $\tau$ . Скорость электрона направлена вдоль поля. Как долго будет находиться в поле электрон, если, наоборот, на неподвижный электрон с такой же скоростью налетает поле? Решите эту задачу двумя способами, используя: а) эффект релятивистского замедления

\*) Если задача не требует численного ответа, обозначайте массу покоя электрона  $m_e$ , заряд  $e$ .

времени, б) формулу Лоренца, согласно которой масса частицы, движущейся со скоростью  $\beta c$ ,  $m = m_i / \sqrt{1 - \beta^2}$ , где  $m_i$  — масса покоя частицы.

**14.4.2\***. Электрон, влетающий со скоростью  $v$  в протяженное однородное электрическое поле, летящее ему навстречу со скоростью  $u$ , через время  $\tau$  вылетает из него. Электрическая напряженность направлена по скорости электрона. Определите ее величину.

**14.4.3.** Одна из пластин неподвижного плоского конденсатора испускает электроны, которые через время  $\tau$  после испускания попадают со скоростью  $v$  на вторую пластину. Определите напряженность электрического поля конденсатора. Пространственным зарядом и начальными скоростями электронов пренебречь.

**14.4.4.** Во сколько раз изменится время движения электрона в задаче 14.4.3, если конденсатор и испущенные электроны двигаются со скоростью  $u$ : а) поперек пластин? б) параллельно пластинам? Чему равны в случаях а) и б) скорости электронов на второй пластине?

**14.4.5.** Скорость электрона, пролетевшего неподвижный участок с электрическим полем напряженности  $E$ , направленной по движению электрона, изменилась с  $2v$  до  $v$ . Определите время пролета электрона через этот участок.

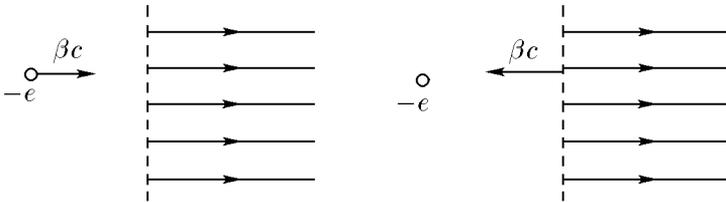
**14.4.6\***. На неподвижный электрон налетает со скоростью света продольное электрическое поле напряженности  $E$ . Как глубоко проникнет электрон в это поле, если оно действует на электрон в направлении своего движения?

**14.4.7.** Электрон, пролетая через поле неподвижного плоского конденсатора, получает поперечный импульс  $p$ . Скорость электрона на входе в конденсатор равна  $\beta c$  и направлена параллельно его пластинам. Какой поперечный импульс получит электрон, если, наоборот, конденсатор со скоростью  $-\beta c$  пролетает мимо первоначально неподвижного электрона? Во сколько раз поперечная скорость, приобретенная электроном в первый раз, будет меньше поперечной скорости, полученной электроном второй раз?

**14.4.8.** С какой скоростью движется электрон вокруг тяжелого ядра с зарядом  $ez$  по круговой орбите радиуса  $R$ ?

**14.4.9\***. Во сколько раз ускорение протона, движущегося перпендикулярно электрическому полю со скоростью  $\beta c$ , больше ускорения протона, движущегося с той же скоростью по полю? под углом  $\alpha$  к полю?

**14.4.10\***. Какую максимальную скорость может приобрести частица с массой покоя  $m$  и зарядом  $q$ , рожденная с нулевой скоростью в переменном синусоидальном электрическом поле с амплитудой напряженности  $E$  и частотой  $\omega/(2\pi)$ .



К задачам 14.4.1 и 14.4.11

**14.4.11.** Электрон, влетающий со скоростью  $\beta c$  в протяженное неподвижное и однородное электрическое поле, проникает внутрь этого поля на глубину  $l$ . Скорость электронов направлена вдоль поля. На какую глубину проникнут электроны, если, наоборот, на неподвижные электроны с такой же скоростью налетает электрическое поле? Решите эту задачу двумя способами, используя: а) эффект релятивистского сокращения расстояния, б) взаимосвязь работы  $A$  с изменением массы частицы  $\Delta m$ :  $A = c^2 \Delta m$ .

**14.4.12\*.** Электрон, влетающий со скоростью  $v$  в однородное электрическое поле, летящее ему навстречу со скоростью  $u$ , проникает в поле на глубину  $l$ . Определите напряженность поля, если оно направлено по скорости электрона.

**14.4.13.** За какое время электрон, родившийся без начальной скорости в электрическом поле с напряженностью  $E = 10^4$  В/см ( $1$  В/см =  $1/300$  ед СГС напряженности), пролетит в этом поле расстояние  $l = 1$  м?

**14.4.14.** Какой должна быть длина линейного ускорителя со средней напряженностью ускоряющего электрического поля  $E = 10^5$  В/см, предназначенного для ускорения  $\pi^+$ -мезонов до энергий  $\mathcal{E} = 10^{10}$  эВ ( $1$  эВ =  $1,6 \cdot 10^{-12}$  Эрг)? За какое время  $\pi^+$ -мезон с нулевой начальной скоростью ускорится до этой энергии? Энергия покоя  $\pi^+$ -мезона  $m^+c^2 = 10^8$  эВ, заряд  $e$ .

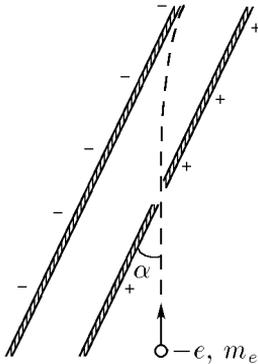
**14.4.15.** Для изучения поля электронов на малых расстояниях их ускоряют до энергий в  $N = 1000$  раз большей энергии покоя электрона  $m_e c^2$  и наблюдают встречное взаимодействие двух таких электронов. Во сколько раз нужно увеличить энергию электрона, чтобы получить такие же результаты, наблюдая взаимодействие между движущимся электроном и первоначально неподвижным электроном?

**14.4.16.** Пролетая через электростатический конденсатор, протон с кинетической энергией  $\mathcal{E} = 10^6$  эВ отклоняется на угол  $\alpha_p = 0,1$  рад. Оцените, на какой угол отклонится электрон с такой же кинетической энергией.

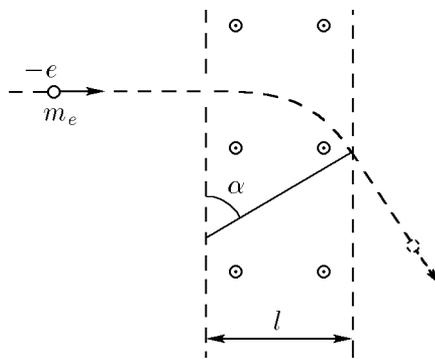
◇ **14.4.17.** При какой минимальной разности потенциалов в плоском конденсаторе электроны, ускоренные потенциалом  $U = 1$  МВ, влетающие в конденсатор через небольшое отверстие в нижней пластине под углом  $\alpha = 30^\circ$  к ней, не долетают до верхней пластины?

**14.4.18.** Определите кинетические энергии протонов и электронов, проходящих по дуге радиуса  $R = 0,3$  м через поворотный магнит с индукцией  $B = 1$  Тл.

◇ **14.4.19.** Магнитное поле в телевизионной трубке поворачивает электроны с энергией  $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^4$  эВ на угол  $\alpha = 60^\circ$ . Отклоняющая катушка создает магнитное поле на участке трубки длиной  $l = 10$  см. Определите индукцию магнитного поля. Какая ошибка совершается при расчете индукции, если пренебречь изменениями массы электрона при его движении?



К задаче 14.4.17



К задаче 14.4.19

**14.4.20.** Каким должен быть радиус кольцевого накопителя с магнитным полем индукции  $B = 1$  Тл, предназначенного для накопления протонов с энергией  $\mathcal{E} = 10^{11}$  эВ? для накопления электронов с энергией  $\mathcal{E} = 10^{11}$  эВ?

**14.4.21.** Определите циклотронную частоту электрона, ускоренного разностью потенциалов  $v = 2 \cdot 10^6$  В, в магнитном поле индукции  $B = 10$  Тл.

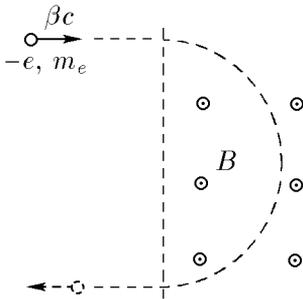
**14.4.22.** Чему равна индукция магнитного поля на накопительных дорожках радиуса  $R = 6$  м, если масса электронов, движущихся по этим дорожкам, в  $N = 1000$  раз больше  $m_e$ ?

◇ **14.4.23.** Электрон влетает со скоростью  $\beta c$  в магнитное поле перпендикулярно границе поля и вектору индукции  $B$ . Определите время пребывания электрона в магнитном поле.

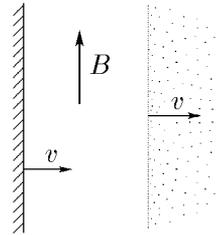
**14.4.24.** Решите задачу 14.4.23 в случае, если область, занятая магнитным полем, движется перпендикулярно своей границе со скоростью  $\beta_1 c$ .

**14.4.25.** Оцените, при какой минимальной энергии электроны, находящиеся на высоте  $h = 1000$  км, смогут достигнуть поверхности Земли в области экватора, если индукция магнитного поля Земли  $B = 30$  мкТл?

◇ **14.4.26.** Космический корабль входит в ионосферу Земли со скоростью  $v$ , которая много больше тепловых скоростей протонов ионосферы. Какой должна быть минимальная толщина магнитного экранного слоя, защищающая лобовую поверхность корабля от протонов, если магнитная индукция  $B$  направлена параллельно поверхности?



К задаче 14.4.23



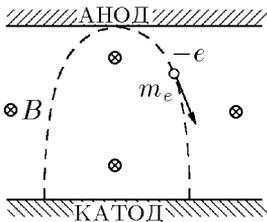
К задаче 14.4.26

**14.4.27.** Определите кинетическую энергию электрона, который движется в магнитном поле индукции  $B$  по винтовой линии радиуса  $R$  с шагом  $h$ .

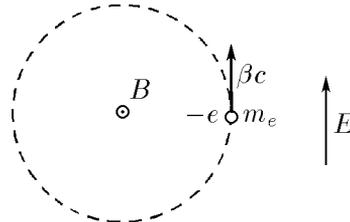
**14.4.28.** В скрещенном электрическом поле напряженности  $E$  и магнитном поле индукции  $B$  релятивистская заряженная частица «дрейфует» поперек полей. Чему равна дрейфовая скорость частицы?

**14.4.29\*.** Чему равна максимальная скорость заряженной частицы в скрещенном электрическом и магнитном полях  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  ( $\vec{E} \perp \vec{B}$ ), если минимальная скорость равна  $\beta c$ ?  $\beta > k = E/B$ ?

◇ **14.4.30\*.** Между плоским анодом и катодом подается высокое напряжение. Система находится в магнитном поле индукции  $B = 10$  Тл, которое параллельно электродам. Расстояние между анодом и катодом  $h = 10$  см. При каком минимальном напряжении электроны достигнут анода?



К задаче 14.4.30



К задаче 14.4.31

◇ 14.4.31\*. Электрон вращается в постоянном магнитном поле индукции  $B$ , имея скорость  $\vec{\beta}c$ . Включается электрическое поле  $\vec{E}$  параллельно вектору скорости  $\vec{\beta}c$ . Определите максимальную скорость электрона, которую он приобретает в скрещенном поле.

### § 14.5. Закон сохранения массы и импульса

14.5.1. Неподвижная частица массы  $M$  распадается на два  $\gamma$ -кванта. Определите массу каждого  $\gamma$ -кванта.

14.5.2. Мощность излучения Солнца  $W$  близка к  $4 \cdot 10^{26}$  Вт. Оцените массу, теряемую Солнцем из-за излучения в течение секунды.

14.5.3. Скорости двух частиц, образующихся при распаде неподвижного ядра массы  $M$ , одинаковы по величине и равны  $\beta c$ . Определите полную массу, массу покоя и кинетическую энергию каждой частицы.

14.5.4. При встречном столкновении протонов может рождаться частица с массой поля в  $k$  раз больше массы покоя протона  $m_p$ :

$$p = p + p \rightarrow p + p + M, \quad M = km_p.$$

Определите минимальную массу движущихся протонов, для которых возможна эта реакция. Чему равна минимальная скорость протонов?

14.5.5. При какой кинетической энергии электронов и позитронов (в МэВ) в экспериментах на встречных пучках наблюдается рождение протон-антипротонной пары:  $e^- + e^+ \rightarrow p + \bar{p}$ ? рождение  $\pi^0$ -мезона:  $e^+ + e^- \rightarrow \pi^0$ ?

14.5.6. Неподвижный атом массы  $M$  поглощает фотон массы  $m$ . Определите массу и импульс атома после поглощения фотона.

14.5.7\*. Определите скорость «отдачи» неподвижного атома массы  $M$  после испускания фотона массы  $m$ .

14.5.8. Фотонная ракета, стартующая с Земли, по наблюдениям с Земли теряет в единицу времени массу  $m$ . Начальная масса ракеты  $M$ . Как меняется от времени скорость и масса покоя ракеты? Действием на ракету гравитационного поля Земли пренебречь.

14.5.9. Две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , летящие со скоростью  $v_1$  и  $v_2$ , направленными друг к другу под углом  $\alpha$ , сливаются в одну частицу. Определите массу и скорость образовавшейся частицы.

14.5.10. В ядерной физике массы частиц измеряются в энергетических единицах, когда вместо массы  $m$  дается энергия массы  $mc^2$  ( $1 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ). Определите в МэВ массы электрона, протона,  $\pi^0$ -мезона и  $\psi$ -мезона, если массы этих частиц соответственно равны  $0,911 \cdot 10^{-27} \text{ г}$ ,  $1,673 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ ,  $2,4 \cdot 10^{-25} \text{ г}$ ,  $5 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ .

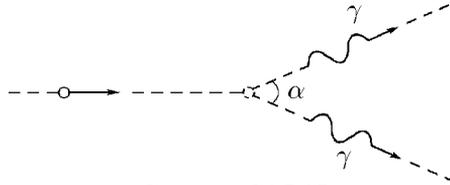
14.5.11.  $\pi^0$ -Мезон распадается на два  $\gamma$ -кванта:  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . Найдите кинетическую энергию  $\pi^0$ -мезона, если счетчик, расположенный по направлению его движения, регистрирует  $\gamma$ -квант с энергией 270 МэВ.

14.5.12\*. При каких кинетических энергиях  $\pi^0$ -мезона  $\gamma$ -квант, возникающий при распаде  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  и летящий назад, может родить электрон-позитронную пару при столкновении с тяжелым ядром?

14.5.13. Неподвижное ядро, распадаясь, испускает электрон с кинетической энергией  $\mathcal{E}_e = 1,73 \text{ МэВ}$  и перпендикулярно к направлению движения электрона нейтрино с энергией  $\mathcal{E}_\nu = 1 \text{ МэВ}$ . Масса покоя нейтрино равна нулю. Чему будет равна кинетическая энергия ядра, если оставшаяся масса ядра  $M = 3,9 \cdot 10^{-22} \text{ г}$ .

**14.5.14\*.** Масса и импульс состояния, которое получается при движении со скоростью  $v$  состояния с массой  $M$  и нулевым импульсом, равны  $\gamma M$  и  $\gamma M v_0$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ . Докажите это утверждение для состояния, в котором движутся две невзаимодействующие частицы.

◇ **14.5.15.** Движущаяся частица распадается на два  $\gamma$ -кванта с одинаковой массой, которые разлетаются под углом  $\alpha$  друг к другу. С какой скоростью двигалась частица?

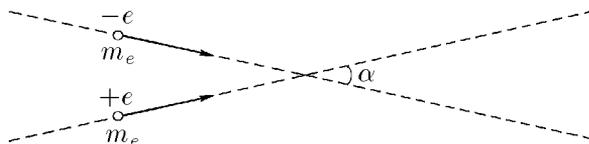


К задаче 14.5.15

**14.5.16.** Быстрые протоны сталкиваются с неподвижными протонами. При какой кинетической энергии быстрых протонов могут родиться  $\pi^0$ -мезоны:  $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$ ?  $\psi$ -мезоны:  $p + p \rightarrow p + p + \psi$ ? протон-мезонные пары:  $p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$ ?

**14.5.17.** При какой минимальной кинетической энергии позитрона его столкновение с неподвижным электроном может вызвать появление протон-антипротонной пары:  $e^+ + e^- \rightarrow p + \bar{p}$ ? Во сколько раз эта энергия больше минимальной кинетической энергии позитрона, который рождает протон-антипротонную пару при встречном столкновении с электроном?

◇ **14.5.18.** Определите минимальную энергию электрона и позитрона, которые, имея одинаковые скорости, направленные под углом  $\alpha$  друг к другу, могут родить протон-антипротонную пару:  $e^+ + e^- \rightarrow p + \bar{p}$ .



К задаче 14.5.18

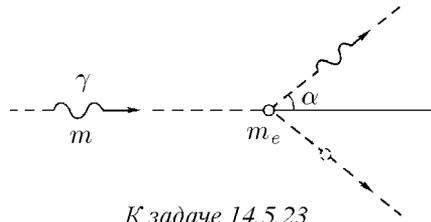
**14.5.19.** а. С какой скоростью двигалось возбуждающее ядро массы  $M$ , если после испускания  $\gamma$ -кванта массы  $m$  оно остановилось? На сколько отличается масса и энергия возбужденного и невозбужденного ядра?

б. В каком диапазоне скоростей возбужденного ядра из задачи пункта а возможно следующее событие. Испущенный возбужденным ядром  $\gamma$ -квант поглощается невозбужденным неподвижным ядром.

**14.5.20.** Определите минимальную и максимальную энергии нейтрино, образующихся при распаде  $\pi^0$ -мезона с энергией 6 ГэВ:  $\pi^0 \rightarrow \mu^+ + e + \nu$ .

**14.5.21.** В каком диапазоне энергий лежат кинетические энергии электронов и нейтрино, возникающих при распаде  $\mu^-$ -мезона:  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$ ?

**14.5.22.** Какую максимальную энергию могут приобрести фотоны с энергией  $\mathcal{E} = 10$  эВ при рассеянии на встречном пучке электронов с энергией  $\mathcal{E}_e = 10^{10}$  эВ?



*К задаче 14.5.23*

◇ **14.5.23.** Фотон массы  $m$  сталкивается с неподвижным электроном. Определите массу фотона и электрона после столкновения, при котором фотон изменил направление движения на угол  $\alpha$ .

**14.5.24.** Докажите, что свободный электрон не может ни поглотить, ни испустить фотон.

## ОТВЕТЫ

### ГЛАВА 1. КИНЕМАТИКА

#### § 1.1. Движение с постоянной скоростью

1.1.1.  $v = 200$  м/с.

1.1.2.  $v = 0,7$  км/с; на юго-восток.

1.1.3.  $v = 3$  м/с; в 1 м от потолка и 2 м от боковой стены.

1.1.4. На расстоянии 1,15 м от счетчика А.

1.1.5\*.  $AO = L \frac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A - t_B)}$ ,  $t_O = t_B - \frac{1}{2}(t_A - t_C)$ .

1.1.6.  $l' = l(v - u)/(v + u)$ .

1.1.7.  $v = c(\tau_0 - \tau)/(\tau_0 + \tau)$ .

1.1.8.  $v' = \nu(w - u)/(w - v)$ .

◇ 1.1.9. а. При  $t < l/v$  граница области — конус с вершиной, находящейся на расстоянии  $vt$  от конца стержня, переходящий в касающуюся его сферу радиуса  $ut$ . При  $t > l/v$  — сферы с центрами на концах стержня и радиусами  $ut$  и  $u(t - l/v)$  с касательной к ним конической поверхностью. б\*.  $\cos \alpha = u/v$ .

◇ 1.1.10\*. Из области, ограниченной углом  $\alpha = 2 \arcsin(u/v)$  с вершиной в точке А, биссектриса которого — шоссе.

1.1.11\*.  $v = cl/\sqrt{l^2 - c^2 \Delta t^2}$ .

1.1.12.  $u = v/\sin \alpha$ .

◇ 1.1.13. См. рис.

1.1.14. Ордината и абсцисса точки пересечения графиков  $x_1 = vt$  и  $x_2 = a + v(t - t_1)/2$  дают время и координату точки соударения частиц:  $t' = (2a - vt_1)/v$ ,  $x' = 2a - vt_1$ .

◇ 1.1.15. См. рис.; б)  $v_{cp} = 0$ , в)  $v_{cp} = 1$  м/с.

◇ 1.1.16. См. рис.

◇ 1.1.17. См. рис. а) возвращение луча по координате  $x$  занимает очень малое время, соответственно на единицу длины люминесцирующей поверхности экрана попадает мало электронов. См. рис. б) при  $\tau_y/\tau_x = m/n$ , где  $m$  и  $n$  — любые целые числа.

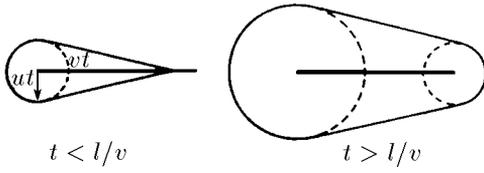
1.1.18\*.  $x = 2lv \frac{v \sin \alpha + \sqrt{c^2 - v^2 \cos^2 \alpha}}{c^2 - v^2}$ .

1.1.19.  $\beta = 2\alpha$ . В направлении, противоположном начальному.

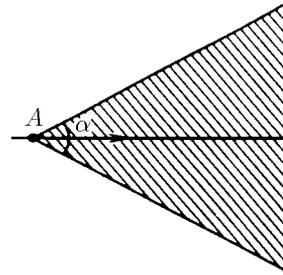
1.1.20\*.  $\operatorname{tg} \varphi = 2ma/(nb)$ , где  $m$  и  $n$  — любые целые числа.

1.1.21.  $(-c_x, c_y, c_z)$ ,  $(-c_x, -c_y, -c_z)$ .

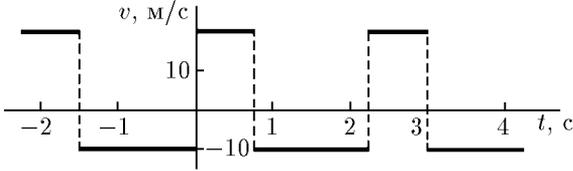
1.1.22.  $\Delta t/t = \sqrt{(r^2 - h^2)/(R^2 - h^2)}$ .



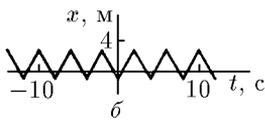
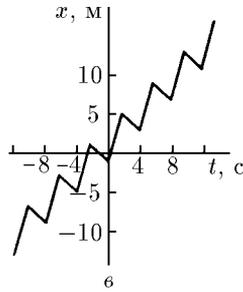
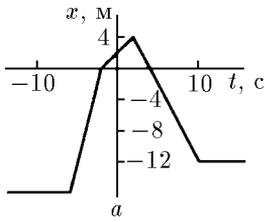
К ответу 1.1.9



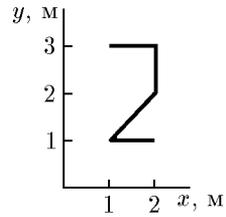
К ответу 1.1.10



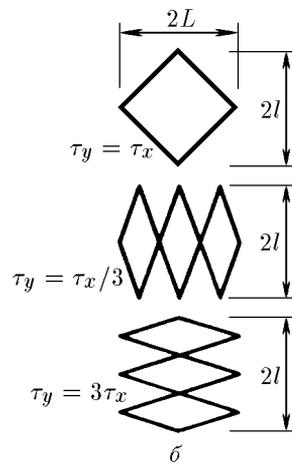
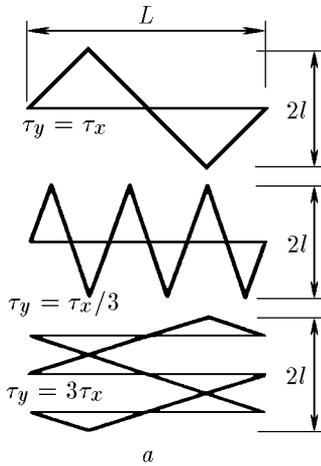
К ответу 1.1.13



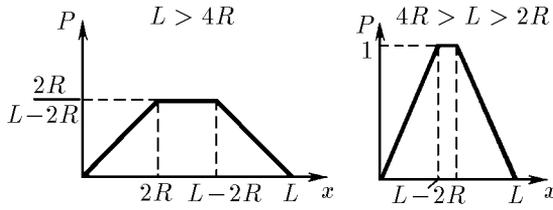
К ответу 1.1.15



К ответу 1.1.16



К ответу 1.1.17



К ответу 1.1.23

◇ 1.1.23\*. См. рис. Нулевая у стенок. Наибольшая в любом месте на расстоянии от стенок, большем  $2R$ , и равная  $2R/(L-2R)$  при  $L > 4R$ ; в любом месте на расстоянии от стенок, большем  $L-2R$ , и равная единице при  $4R > L > 2R$ .

### § 1.2. Движение с переменной скоростью

1.2.1.  $v_{cp} = \frac{2}{\pi} v \frac{R-r}{R+r}$ ; направлена по границе раздела.

1.2.2.  $t = 12$  с,  $x = 24$  м.

1.2.3.  $L = v_0 t + \frac{v_0(t-t_0)^2}{2t_0}$ .

1.2.4. Любой график с изменением координаты за указанное время на 20 м и с наибольшим «наклоном» касательной 15 м/с.

1.2.5.  $x > l(v_1/v_2 - 1)$ .

1.2.6.  $x = (\pi/4)v_0 t_0$ .

1.2.7. Средняя скорость больше начальной, а конечная скорость нулевая.

1.2.8\*.  $v = \sqrt{La}$ .

1.2.9.  $v = \sqrt{N/b}$ .

1.2.10.  $t = R/q$ .

1.2.11\*. а.  $v = \frac{\pi v_0^3 t^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{s}$ .

б.  $v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{\pi h t}}$ .

1.2.12.  $q = 126$  см<sup>3</sup>/с.

1.2.13.  $a = 277$  м/с<sup>2</sup>;  
в 28 раз.

1.2.14.  $v_1 = 43$  м/с;  
 $v_2 = 423$  м/с.

◇ 1.2.15. См. рис.;  $v = 600$  м/с.

От 6 до 6,9 км.  $x = 6,9$  км.

Проверьте равенство площадей на графике ускорения над и под осью  $t$ .

1.2.16. 4 и 16.

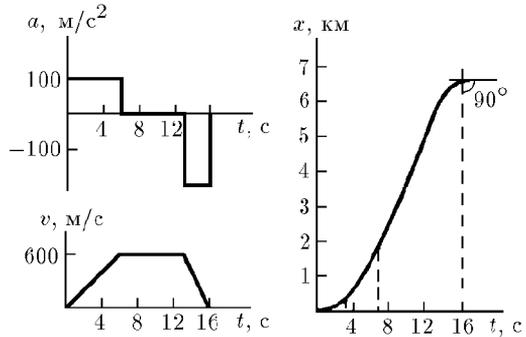
◇ 1.2.17. См. рис. Отношение модулей ускорения равно 2.

◇ 1.2.18. См. рис.

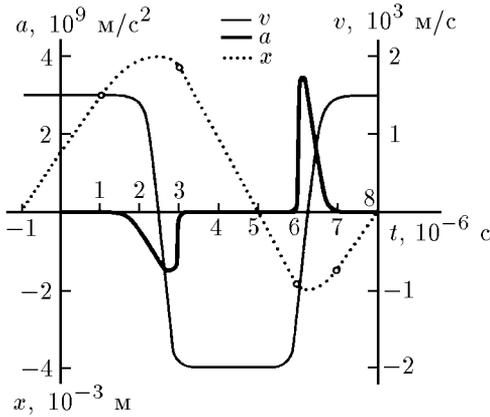
1.2.19.  $v = 0,72$  см/с.

1.2.20\*.  $t = (2 + \sqrt{2})t_0$ .

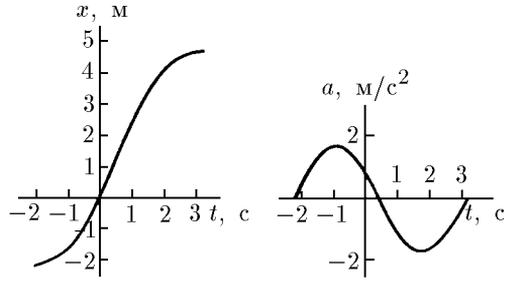
1.2.21\*.  $t = (2t_1 t_2 - t_1^2 + t_2^2) / [2(t_1 - t_2)]$ .



К ответу 1.2.15



К ответу 1.2.17



К ответу 1.2.18

### § 1.3. Движение в поле тяжести. Криволинейное движение

1.3.1.  $t = v/g - \Delta t/2$ .

1.3.2. а.  $t = \sqrt{2D/g}$ . б. На окружности диаметра  $gt^2/2$  с верхней точкой А.

1.3.3\*. Под углом  $\varphi/2$  к вертикали.

1.3.4.  $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$ .

1.3.5.  $t = \frac{v}{g}(\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha)$ .

1.3.6. а)  $v_x = v \cos \varphi$ ,  $v_y = v \sin \varphi - gt$ . б)  $x = (v \cos \varphi)t$ ,  $y = (v \sin \varphi)t - gt^2/2$ . в)  $y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \varphi} = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v^2}(\operatorname{tg}^2 \varphi + 1)$ . г)  $T = \frac{2v}{g} \sin \varphi$ ,  $H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \varphi$ ,  $L = \frac{v^2}{g} \sin 2\varphi$ .

1.3.7.  $L = \sqrt{2}v^2/g$ .

1.3.8.  $L = \frac{2v^2 \cos^2 \beta}{g \cos \alpha}(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)$ .

1.3.9.  $v = \sqrt{L(a+g)}$ .

1.3.10.  $H = \frac{2u}{g}(v \cos \alpha - u) \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

1.3.11.  $L = \frac{2v^2}{g(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)}$ .

1.3.12\*.  $m = 7$  кг.

1.3.13\*. а)  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - 2gv^2y - g^2x^2}}{gx}$ . б)  $y = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}$ .

в)  $v_{\min} = \sqrt{g(y + \sqrt{x^2 + y^2})}$ .

1.3.14.  $x_{\text{отн}} = (v \cos \varphi)\Delta t$ ;  $y_{\text{отн}} = (v \sin \varphi)\Delta t - g\Delta t^2/2 - g\Delta t \cdot t$ , где  $t$  — время, прошедшее после вылета второго тела. Относительная скорость постоянна, направлена вертикально вниз и равна по модулю  $g\Delta t$ .

1.3.15.  $v = \sqrt{2\pi Rgn/\sin 2\alpha}$ , где  $n$  — любое натуральное число; при  $\alpha = 0$  скорость может быть любой по модулю.

1.3.16\*.  $t = \frac{2v}{g} \operatorname{ctg} \alpha$  при  $v \cos \alpha < \sqrt{2gl \sin \alpha}$ ;

$t = \frac{v}{g} \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gl \operatorname{tg} \alpha}{v^2 \cos \alpha}}\right)$  при  $v \cos \alpha > \sqrt{2gl \sin \alpha}$ .

1.3.17.  $v_1 = g\Delta t \sin \alpha$ ,  $v_2 = g\Delta t \cos \alpha$ .

1.3.18\*.  $R = gT_1 T_2 / (2\sqrt{2})$ .

1.3.19\*.  $v = \sqrt{g[2(H-h) + L]}$ .

1.3.20.  $v_э = 1675$  км/ч,  $a_э = 0,034$  м/с<sup>2</sup>.

$v_{л} = 838$  км/ч,  $a_{л} = 0,017$  м/с<sup>2</sup>.

1.3.21.  $v = \sqrt{gR} = 8$  км/с.

1.3.22\*.  $a < (4 + \pi^2)v^2 / (2\pi l)$ .

◇ 1.3.23. См. рис.

1.3.24. На  $(\sqrt{3}/2) \cdot 10^2$  м/с; на  $5 \cdot 10^{-5}$  рад;

$\omega = 5 \cdot 10^{-3}$  с<sup>-1</sup>.

1.3.25.  $a = \sqrt{k^2 + k^4 t^4 / r^2}$ .

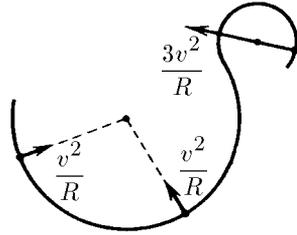
1.3.26.  $v = \sqrt{gr}$ .

1.3.27\*.  $v = \sqrt{5gR}$ .

1.3.28. 27,5 и 42,4 км; 18,3 и 52 км; 0,2 и 73,4 км.

1.3.29.  $a = (v^2/R) \cos^2 \alpha$ .

1.3.30.  $t = (V/g) \sqrt{9 \sin^2 \alpha - 8}$  при  $\sin \alpha > \sqrt{8/9}$ ;  $t = 0$  при  $\sin \alpha < \sqrt{8/9}$ .



К ответу 1.3.23

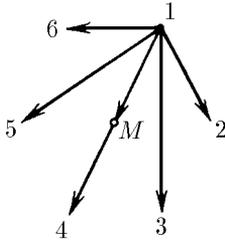
### § 1.4. Преобразование Галилея

1.4.1. В системе отсчета второго корабля первый движется по прямой вдоль вектора  $v_1 - v_2$ . Перпендикуляр, опущенный на эту прямую из местонахождения второго корабля, и будет наименьшим расстоянием.

◇ 1.4.2. См. рис.

1.4.3. Точно такую же, как и наблюдатель, движущийся с частицей А.

◇ 1.4.4. См. рис.



К ответу 1.4.2



К ответу 1.4.4

1.4.5. а. Ведро должно быть наклонено в сторону движения платформы под углом  $\varphi$  к вертикали:  $\text{tg } \varphi = u/v$ . б.  $u = 10\sqrt{3}$  м/с.

1.4.6.  $v_{\text{макс}} = v\sqrt{3}$ .

1.4.7\*.  $t = \frac{2L\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2 \alpha}}{v^2 - u^2}$ . Вдоль трассы.

1.4.8. а)  $\Delta v = -2(v + u)$ . б)  $\Delta v = -2(v - w)$ . (Проекция на направление начальной скорости считается положительной.)

1.4.9. а)  $u = v$ . б)  $u = \sqrt{v^2 + 4vw \cos \alpha + 4w^2}$ . в)  $u = \sqrt{v^2 + 4vw \cos \alpha \cos \beta + 4w^2 \cos^2 \beta}$ .

1.4.10.  $\nu = \frac{\sqrt{v^2 + u^2}}{2(R - r)}$ .

1.4.11.  $t = 2\sqrt{u^2/g^2 + 2h/g}$ .

1.4.12. Проекция скорости на горизонтальное направление  $v_x = v - 2u$ ; проекция скорости на вертикальное направление  $v_y = (2n - 1)Lg/(v - u)$ .

1.4.13.  $n = (v_1 + v_2)/(2R)$ .

1.4.14\*.  $\sin \alpha = u/v$ .

1.4.15\*.  $u = v\sqrt{3}$ .

1.4.16. В новой системе отсчета геометрия пучков, а значит, и область их пересечения те же, что и раньше. Скорость частиц не обязательно направлена вдоль пучка.

1.4.17. В  $\sqrt{1 + v^2/u^2}$  раз. Изменится.

1.4.18\*.  $\alpha = 60^\circ$ ,  $l = 200\sqrt{3} \approx 345$  м.

### § 1.5. Движение со связями

1.5.1.  $v_B = 2v_A$ .

1.5.2.  $v_k = \omega R$ ;  $v_r = \omega(R - r)$ .

1.5.3.  $u = v\sqrt{3}$ .

1.5.4.  $a = g \operatorname{ctg} \alpha$ .

◇ 1.5.5. См. рис.

1.5.6.  $(-2,8; 3,1)$ .

1.5.7. а.  $u_{AB} = v/\sqrt{2}$ . б.  $u_1 = \sqrt{u^2 - v^2}$ .

◇ 1.5.8. См. рис.;  $a = (v^2/R^2)r$ ;  $r_B = (R + r)^2/r$ ,  $r_H = (R - r)^2/r$ .

1.5.9\*.  $u = \frac{vR}{R \cos \alpha - r}$ ;  $\omega = \frac{v}{R \cos \alpha - r}$ ; вправо при  $\cos \alpha > r/R$ , влево при  $\cos \alpha < r/R$ .

1.5.10. Траектория точки обода колеса проходит по диаметру цилиндра.

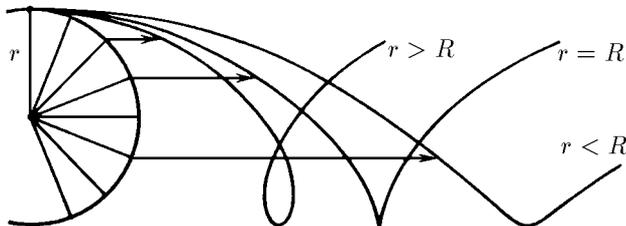
1.5.11. а. Один оборот. б. На 4 мин.

1.5.12.  $a = 4\omega^2 R$ .

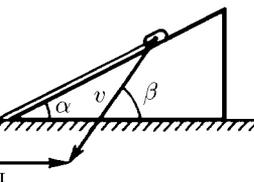
1.5.13.  $u = v \cos \alpha$ .

1.5.14\*. В центре квадрата через время  $t = a/v$ .

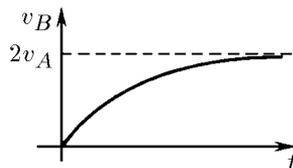
◇ 1.5.15. См. рис.;  $v_B = 2v_A t / \sqrt{L^2 + v_A^2 t^2}$ .



К ответу 1.5.8



К ответу 1.5.5



К ответу 1.5.15

1.5.16.  $u = v^2 t / \sqrt{L^2 - v^2 t^2}$ .

1.5.17.  $\omega = (v \sin^2 \alpha) / H$ .

1.5.18\*.  $\omega' = \omega / 2 \sin^2(\alpha/2)$ .

1.5.19.  $v = uR / \sqrt{R^2 - h^2}$ .

1.5.20.  $d = \pi(R^2 - r^2) / (vt)$ .

## ГЛАВА 2. ДИНАМИКА

### § 2.1. Законы Ньютона

2.1.2.  $F = 2ml/t^2 = 0,16$  Н.

2.1.3.  $F = m_e v^2 y / (lL)$ .

◇ 2.1.4.  $a = g(T_2 - T_1) / (T_4 - T_3)$ .

2.1.5.  $T = F(1 - x/l)$ .

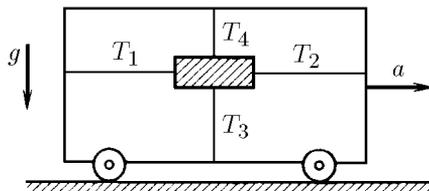
2.1.6.  $t = T(m_1 + m_2) / [\alpha(2m_1 + m_2)]$ .

2.1.7.  $m = m_0[(t/t_0)^2 - 1]$ .

2.1.8.  $m_2/m_1 = (F_2 - F) / (F - F_1)$ .

2.1.9.  $t = n\Delta t(1 + \sqrt{1 - 1/n})$ ;  $t_H \approx 10$  с.

2.1.11.  $a_1 = a_2 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $T_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$ ,  $T_2 = 2T_1$ . Положительное направление ускорений отвечает опусканию груза  $m_1$ .



К ответу 2.1.4

2.1.12.  $a = 3,5 \text{ м/с}^2$ ,  $T \approx 1,1 \cdot 10^3 \text{ Н}$ .

2.1.13. Ускорение верхнего шара равно  $3g$ , ускорение нижних — нулю.

2.1.14.  $x = -\frac{Fm_1}{k(m_1 + m_2)}$ ;  $a_1 = \frac{F}{m_2 + m_1}$ ,  $a_2 = \frac{Fm_1}{m_2(m_1 + m_2)}$ .

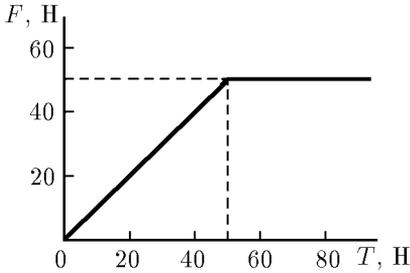
2.1.15.  $x_{\text{макс}} = ma/(k_1 + k_2)$ ;  $F_{1\text{макс}} = k_1 x_{\text{макс}}$ ,  $F_{2\text{макс}} = k_2 x_{\text{макс}}$ .

2.1.16.  $x = F(k_1 + k_2)/(k_1 k_2)$ .

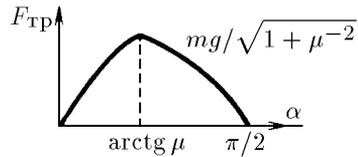
2.1.17.  $F = m_0 g/\mu$ ;  $a = g(m - m_0)/m$ .

◇ 2.1.18. См. рис.

◇ 2.1.20. См. рис.;  $F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha$  при  $\text{tg } \alpha \leq \mu$ ;  $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$  при  $\text{tg } \alpha \geq \mu$ .



К ответу 2.1.18



К ответу 2.1.20

2.1.21.  $a_{\text{макс}} = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$ .

2.1.22.  $t = 2v \sin \alpha / [g(\sin^2 \alpha - \mu^2 \cos^2 \alpha)]$ .

2.1.23.  $a = (F/m)(\cos \alpha + \mu \sin \varphi) - \mu g$ , если это выражение больше нуля, иначе  $a = 0$ .

2.1.24.  $a = g \left( \sin \beta - \frac{\mu \cos \beta}{\sin(\alpha/2)} \right)$  при  $\mu \leq \text{tg } \beta \sin \frac{\alpha}{2}$ ;  $a = 0$  при  $\mu \geq \text{tg } \beta \sin \frac{\alpha}{2}$ .

2.1.25.  $a = 0$  при  $|m_2 - m_1|g \leq F_{\text{тр}}$ ;  $|a| = \frac{|m_2 - m_1|g - F_{\text{тр}}}{m_1 + m_2}$  при  $|m_2 - m_1|g > F_{\text{тр}}$ .

2.1.26\*.  $\beta = \alpha + \arctg \mu$ .

2.1.27\*.  $T_{\text{мин}} = \frac{\mu m_2 g}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ ,  $\alpha = \arctg \mu$  при  $m_1 \geq m_2 \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$ ;

$T_{\text{мин}} = \mu g \sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2}{2}}$ ,  $\alpha = \arctg \frac{m_2 - m_1}{\mu(m_1 + m_2)}$  при  $m_1 < m_2 \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$ .

2.1.28. В  $\sqrt{10}$  раз.

2.1.29.  $\mu \approx 0,4$ ;  $l \approx 50 \text{ м}$ .

2.1.30\*. а.  $F > \mu(m_2 + m_1)g$ ;  $t = \sqrt{\frac{2lm_2}{F_0 - \mu(m_2 + m_1)g}}$ . б.  $a_1 = \frac{F_0 - \mu m_1 g}{m_1}$ ,  $a_2 = \mu g \frac{m_1}{m_2}$ .

2.1.31. При  $F \leq \frac{2\mu m_1 g(m_1 + m_2)}{m_2 + 2m_1} \equiv F_0$  получаем  $a_{1\text{лев}} = a_{1\text{прав}} = a_{2\text{прав}} = \frac{F}{2(m_1 + m_2)}$ ;

при  $F \geq F_0$  получаем  $a_{2\text{прав}} = \frac{F - \mu m_1 g}{m_2}$ ,  $a_{1\text{лев}} = a_{1\text{прав}} = a_{2\text{лев}} = \frac{\mu m_1 g}{m_2 + 2m_1}$ .

2.1.32.  $F = mg \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$  при  $\mu \leq \text{tg } \alpha$ ;  $F = 0$  при  $\mu \geq \text{tg } \alpha$ .

2.1.34.  $\alpha \approx 0,7 \text{ кг/м}$ .

2.1.35\*.  $v = u - \sqrt{(\mu/\alpha)(mg - F)}$  при  $\alpha u^2 \geq \mu(mg - F)$ , иначе  $v = 0$ .

2.1.36\*.  $F = \beta mv$ .

2.1.37. Крупные;  $v \approx 5,5 \text{ м/с}$ .

2.1.38.  $v_1 \approx 0,25 \text{ м/с}$ ;  $v_2 \approx 0,01 \text{ м/с}$ .

2.1.39\*. При  $Rv \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ .

2.1.40.  $d = \frac{v}{2\mu g} \sqrt{v^2 + u^2}$ .

2.1.41. Вращающаяся.

2.1.43\*.  $v = \omega RF / \sqrt{F_{\text{тр}}^2 - F^2}$ .

$$2.1.44^*. v = u \operatorname{tg} \alpha / \sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$2.1.45^*. u = v/2.$$

$$2.1.46. F = 2T.$$

$$2.1.47^*. \text{Ускорения грузов 1-3: } a_1 = \frac{F(M+4m)}{2m(M+2m)}; a_2 = \frac{FM}{2m(M+2m)}; a_3 = \frac{F}{M+2m}.$$

$$2.1.48. a_1 = \frac{m_2 g \operatorname{tg}(\alpha/2)}{m_2 + 2m_1 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}; a_2 = \frac{m_2 g}{m_2 + 2m_1 \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}.$$

$$2.1.49^*. a = g \operatorname{tg} \alpha; m = m_0 \sin \alpha / (1 - \sin \alpha)^2.$$

$$2.1.50. M = m \operatorname{tg} \alpha / (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha).$$

$$2.1.51^*. a = g \sin(\alpha/2).$$

$$2.1.52. m_2 = m_1 a_1 / a_2.$$

$$2.1.53. \text{Для верхнего шарика } N_1 = mg/2, \text{ для нижнего } N_2 = 3mg/2.$$

2.1.54.  $F = m_e v^2 / r$ . Близки к параболам, касающимся окружности изнутри; снаружи.

$$2.1.55. T = 2mv^2 / l.$$

$$2.1.56. T = M\omega^2 l; T_x = M\omega^2 l + m\omega^2(l^2 - x^2)/(2l).$$

◇ 2.1.57.  $\cos \alpha = g/(\omega^2 R)$  при  $g/(\omega^2 R) < 1$ ;  $\alpha = 0$  при  $g/(\omega^2 R) \geq 1$ .

$$2.1.58. \omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \beta}{l(\sin \beta + \sin \alpha)}}.$$

$$2.1.59. l = (1 - m\omega^2/k)R.$$

2.1.60\*.  $R = R_0/(1 - m\omega^2/4\pi^2 k)$  при  $\omega < 2\pi\sqrt{k/m}$ ; при  $\omega \geq 2\pi\sqrt{k/m}$  кольцо неограниченно растягивается.

$$2.1.61^*. \mu = mg/(2\pi T - m\omega^2 R).$$

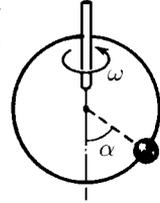
$$2.1.62. \alpha = \operatorname{arctg} \frac{v^2}{Rg}.$$

$$2.1.63. \omega_1 = 0 \text{ при } \varepsilon > \mu g/R; \omega_1 = (\mu^2 g^2/R^2 - \varepsilon^2)^{1/4} \text{ при } \varepsilon < \mu g/R.$$

$$2.1.64. v = \sqrt{\mu g R}; \beta = \operatorname{arctg} \mu; \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}}.$$

$$2.1.66^*. v_{\min} = \sqrt{\frac{Rg \sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \mu)}{\mu \operatorname{tg} \alpha - 1}}.$$

$$2.1.67^*. \omega > \sqrt{g\sqrt{2}/R}.$$



К ответу 2.1.57

## § 2.2. Импульс. Центр масс

$$2.2.1. u = 5v/2.$$

$$2.2.2. F_{\text{тр}} = F/3.$$

$$2.2.3. t = 2p \sin(\alpha/2)/F; \text{ под углом } \beta = (\pi + \alpha)/2 \text{ к начальной скорости.}$$

2.2.4\*.  $m = F\Delta t^2/(16L)$ . Нужно построить по экспериментальным данным график зависимости времени пролета от напряжения источника.

$$2.2.5^*. t = mv(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)/[\mu(m+M)g] \text{ при } \operatorname{tg} \alpha > \mu; \text{ при } \operatorname{tg} \alpha \leq \mu \text{ ящик не сдвинется.}$$

$$2.2.7. m_1/m_2 = (u_2 - u_1)/(v_1 - v_2). \text{ Нужно учесть изменение скорости Земли.}$$

$$2.2.9^*. u_1 = F_0 t_0/m_1; u_2 = v - F_0 t_0/m_2.$$

$$2.2.10. m = m_0/3.$$

$$2.2.11. u_1 = u_2 = 0,2v.$$

2.2.12. На расстоянии  $4L$  по горизонтали от пушки.

$$2.2.13. S/L = 35/36.$$

$$2.2.14. w = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{u^2 + v^2}.$$

$$2.2.15. p = \sqrt{p_1^2 + 2p_1 p_2 \cos \alpha + p_2^2}.$$

$$2.2.16. V = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + m_3^2 v_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

2.2.17.  $l_1 = lm_2/(m_1 + m_2)$ ;  $l_2 = lm_1/(m_1 + m_2)$ .

2.2.18. Траектория частицы получается растяжением с коэффициентом подобия 2 траектории частицы, масса которой  $2m$ .

2.2.19. Окружности, центр которых лежит в центре масс системы станция — космонавт. Радиусы окружностей:

$$R_1 = Rm_2/(m_1 + m_2), \quad R_2 = Rm_1/(m_1 + m_2).$$

2.2.20. На биссектрисе угла на расстоянии  $l = L\sqrt{2}/4$  от вершины, где  $L$  — длина половины прута; в точке пересечения медиан; на прямой, соединяющей центры диска и отверстия, на расстоянии  $l = dr^2/(R^2 - r^2)$  от центра диска.

2.2.21.  $u = \rho Svl/m$ .

2.2.22\*.  $v = uV(\rho_0 - \rho)/(\rho V + \rho_0 V_0)$ .

2.2.23.  $T = 2\pi\sqrt{2R/3g}$ .

2.2.24\*.  $F = \frac{m_1 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)l}$ .

2.2.25\*.  $\omega = \sqrt{\frac{m_2 T_1 + m_1 T_2}{L m_1 m_2}}$ ;  $m = \frac{2m_1 m_2 (T_1 - T_2)}{m_1 T_2 - m_2 T_1}$ .

2.2.26\*.  $T_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \omega^2$  для нити, соединяющей  $m_1$  и  $m_2$ ; выражения для других нитей аналогичны.

2.2.27.  $F = mg - \rho Va$ .

2.2.28\*.  $F = S\rho La$ .

2.2.29\*. Со скоростью  $u/4$  вверх.

2.2.30.  $n = (m_2 g \operatorname{tg} \alpha)/(m_1 v)$ .

2.2.31.  $F = Nmg$ . Увеличивается.

2.2.32\*.  $H = h \frac{(M + Nm)^2}{Nm(Nm + 2M)}$ .

2.2.33\*.  $F = mv^2/R$ ;  $p = F/S = Nmv^2/3$ .

2.2.34.  $\Delta v_N = \left(\frac{M}{M+m}\right)^{2N} (v_2 - v_1)$ .

2.2.35.  $F = \rho Su^2$ .

2.2.36.  $\mu = Mg/u$ ;  $\mu' = M(g+a)/u$ .

2.2.37.  $F = \mu_2(u-v) + \mu_1 u$ .

2.2.38.  $v = \rho Su/(\rho S + k)$ .

2.2.39.  $v = \sqrt{F(\rho - \rho_0)/(\pi r^2 \rho \rho_0)}$ .

◇ 2.2.40. См. рис.

2.2.41.  $F = 3mg(1 - x/l)$ .

2.2.42.  $F = m(v^2 + gl)/l$ .

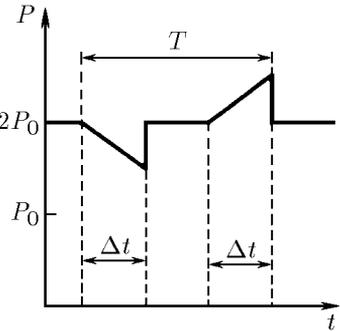
2.2.43.  $v = \sqrt{gh}$ .

2.2.44\*.  $N = 2(F - \rho v^2) \cos \frac{\alpha}{2}$ ; при  $v \geq \sqrt{F/\rho}$ .

2.2.45.  $K = k^n$ .

2.2.46\*.  $u = v \ln n$ .

2.2.47\*.  $m \approx 5,5 \cdot 10^5$  кг; в 7,4 раза меньше.



К ответу 2.2.40

### § 2.3. Кинетическая энергия. Работа. Потенциальная энергия

2.3.1. При  $m = 2Fl/v^2$ .

2.3.2.  $F = m(v_2^2 - v_1^2)/(2l)$ ; если  $F > 0$ , то направление силы совпадает с направлением движения частиц, а если  $F < 0$ , то направление этой силы противоположное.

2.3.3.  $F \approx 2,5 \cdot 10^6$  Н.

2.3.5.  $v = \sqrt{F_0(l_1 + 2l_2 + l_3)/m}$ .

2.3.6.  $v \geq \sqrt{2\mu gL}$ .

2.3.7.  $A \approx 0,8$  Дж.

- 2.3.8.**  $x = v\sqrt{m/k}$ ;  $x' = \sqrt{x_0^2 + mv^2/k}$ .
- 2.3.9.**  $E_k = F^2/(8k)$ .
- 2.3.10.** При наибольшей силе, которую мы можем развить, лук должен растянуться настолько, насколько позволяет размах рук. Для более тугого лука, как и для менее тугого, запасенная упругая энергия будет меньше.
- 2.3.11.**  $K = mgl \cos \alpha$ ;  $K' = mgl(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$ .
- 2.3.12.**  $h = v^2/[2g(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)]$ .
- 2.3.13.**  $v = \sqrt{4gh - 2A/m}$ .
- 2.3.14.**  $A_{\text{мин}} = mgl$ .
- 2.3.15.**  $A_{\text{мин}} = mgl/2$ .
- 2.3.16.**  $v = r\sqrt{g/l}$ .
- 2.3.17.**  $n = mv^2/(4\pi FR \cos \alpha)$ .
- 2.3.18.**  $v = 2\sqrt{(l-h)T/m}$ .
- 2.3.19.** Движущееся по трубе.
- 2.3.20.**  $\sin \beta = v \sin \alpha / \sqrt{v^2 + 2gh}$ .
- 2.3.21.**  $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - 2Fl/mv^2}}$  при  $Fl > \frac{mv^2}{2} \cos^2 \alpha$ .
- 2.3.22.** В нижней. В верхней. При угле  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$  между нитью и вертикалью.
- 2.3.23.**  $x = l \frac{T - 3mg}{T - mg}$ .
- 2.3.24.**  $F = 5mg$  для стержня;  $F = 6mg$  для нити.
- 2.3.25.**  $L_{\text{мин}} = \frac{R}{2(\operatorname{tg} \alpha - \mu)}$ .
- 2.3.26.**  $h = 2R/3$
- 2.3.27.**  $h = 2,5R$ .
- 2.3.28\*.**  $F = \frac{2\pi Rmg}{4\pi^2 R^2 + h^2} \sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2 + 16\pi^2 H^2}$ .
- 2.3.29\*.**  $F = mg(1 - 1/k^2)$ .
- 2.3.30.**  $F = mg \cos \alpha (3 \sin \alpha - 2)$  при  $\sin \alpha \geq 2/3$ ;  $F = 0$  при  $\sin \alpha \leq 2/3$ .
- 2.3.31.**  $v = \sqrt{2gl}$ .
- 2.3.32\*.**  $A = 2\pi \mu mv^2$ .
- 2.3.33\*.**  $K = K_0 e^{-2\mu \alpha}$ .
- 2.3.35.**  $F = l/(\mu \alpha^2)$ .
- 2.3.36\*.**  $A = x^2/(2m\alpha^2) - px/(\alpha m)$ .
- 2.3.37.**  $U = F_0 x^2/(2x_0)$  при  $|x| \leq x_0$ ;  $U = F_0(|x| - x_0/2)$  при  $|x| > x_0$ . Область движения:  $|x| \leq \sqrt{2Kx_0/F_0}$  при  $K \leq F_0 x_0/2$ ;  $|x| \leq (K/F_0 + x_0/2)$  при  $K > F_0 x_0/2$ .
- 2.3.38.**  $K = kqQ/r^2$ ; при  $qQ > 0$  — отталкивание, при  $qQ < 0$  — притяжение.
- 2.3.39.** Нет.
- 2.3.40.** При  $E > 0$  область движения  $r \geq l \frac{V}{E} (-1 + \sqrt{1 + E/V})$ ; при  $E < 0$   $r$  между  $r_{1,2} = l \frac{V}{E} (-1 \pm \sqrt{1 + E/V})$ .
- 2.3.41.**  $h = 2mg/k$ .
- 2.3.42.**  $h = 2mg/k$ ;  $v = g\sqrt{m/k}$ .
- 2.3.43.**  $H_1 = 3h/2$ ;  $H_2 = 4h/3$ .
- 2.3.44.**  $k = \frac{mgx_0}{2(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l)^2}$ .
- 2.3.45.**  $F = mg(1 + \sqrt{1 + 2k(h-l)/(mg)})$ .
- 2.3.46.**  $F = (m_1 + m_2)g$ .
- 2.3.47\*.**  $x = (m/k)(g - a)$ ;  $x_{\text{макс}} = (m/k)(g + \sqrt{2ga - a^2})$ .

2.3.48\*.  $F = \mu g(m_1 + m_2/2)$ .

2.3.49.  $m = \mu t_0/2$ .

### § 2.4. Энергия системы. Передача энергии. Мощность

2.4.1. В движущейся системе отсчета сила натяжения совершает работу. Нет.

2.4.2.  $K = m_1 v^2/2 - Fl$ .

2.4.3\*.  $K_1 = k(x_1 + x_2)x_1/2$ ;  $K_2 = k(x_1 + x_2)x_2/2$ .

2.4.4\*.  $A_1 = mu^2/2 - mv^2/2$ ;  $A_2 = -mu^2$ .

2.4.5.  $A = 2Fr(2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1)$ ;  $\alpha = 60^\circ$ .

2.4.6\*. Сумма работ взаимных сил зависит только от изменения расстояния между частицами.

2.4.7.  $x = v\sqrt{m/(3k)}$ .

2.4.8.  $v' = \sqrt{2}v$ .

2.4.9\*.  $v = \sqrt{gl}$ .

2.4.10\*.  $x_{\text{макс}} = 4l/3$ .

2.4.11\*.  $v_m = \text{tg } \alpha \sqrt{\frac{2Mgh}{M + m \text{tg}^2 \alpha}}$ ;  $v_M = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + m \text{tg}^2 \alpha} + 2g(H - h)}$ .

2.4.12\*.  $v = (4/3)\sqrt{gR/3}$ .

2.4.13\*.  $F = 7mg/9$ .

2.4.14\*.  $h \approx 0,25$  м.

2.4.15\*.  $K' = 0,01K$ .

2.4.16.  $v_x = (l - l_0)\sqrt{k/(2m)} \cos \alpha$ ;  $x = (l - l_0) \sin \alpha$ .

2.4.17. а. При поступательном движении. Ускорение центра масс и суммарная внешняя сила для системы связаны между собой так же, как и для отдельной частицы.

2.4.18.  $\mu = v^2/(2gl)$ .

2.4.19.  $v = \sqrt{2h(g - T/m)}$ ;  $K = mgh$ ,  $E_{\text{вращ}} = Th$ .

2.4.20\*.  $x = Lm^2/(M^2 - m^2)$ .

2.4.21.  $l_{\text{мин}} = l_0$ ;  $l_{\text{макс}} = l_0 + F/k$ .

2.4.22\*.  $x = \mu mg \cos \alpha/k$  при  $\mu \leq \text{tg } \alpha$ ;  $x = \frac{\mu mg \cos \alpha}{2k} \left[ 1 + \sqrt{1 - 2(1 - \text{tg } \alpha/\mu)^2} \right]$  при  $\text{tg } \alpha \leq \mu \leq 3 \text{tg } \alpha$ ;  $x = 2mg \sin \alpha/k$  при  $\mu \geq 3 \text{tg } \alpha$ .

2.4.23. Кинетическая энергия частицы  $K = m(\mathbf{u} + \mathbf{V})^2/2$ , где  $\mathbf{u}$  — ее скорость относительно центра масс, а  $\mathbf{V}$  — скорость центра масс. В сумме по всем частицам системы слагаемые  $m\mathbf{u}\mathbf{V}$  дают нуль.

2.4.24.  $K_{\text{макс}} = F^2/(2k)$ ;  $U_{\text{макс}} = 2F^2/k$ ;  $v_{\text{отн}} = F\sqrt{(m_1 + m_2)/(km_1m_2)}$ .

2.4.25. При скорости центра масс, равной нулю.

2.4.26.  $\Delta W = Fl$ .

2.4.27.  $\Delta W = F(l - Ft^2/2m)$ .

2.4.28\*.  $\Delta W = F^2 m_2^2/[k(m_1 + m_2)^2]$ ;  $U = \Delta W/2$ ;  $K = Fl + F^2 m_1 m_2/[k(m_1 + m_2)^2]$ .

2.4.29.  $A = mu^2$ . Половина работы идет на увеличение внутренней энергии.

2.4.30.  $\Delta W/A = \mu/(\text{tg } \alpha + \mu)$ .

2.4.31.  $W = W_1 + W_2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(V_1 - V_2)^2$ ; нет.

2.4.33.  $Q = m(v^2/2 - gh)$ .

2.4.34.  $Q = m_1 gh(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$ .

2.4.35.  $Q = 2mgR(1 - \sqrt{1 - l^2/(4R^2)})\sqrt{1 - l^2/(4R^2)}$ .

2.4.36.  $E \approx 200$  МДж.

2.4.37.  $m \approx 3$  кг.

2.4.38. В 8 раз.

2.4.39\*.  $v = \mu gt$  при  $t \leq t_0 \equiv \frac{N}{m\mu^2 g^2}$ ;  $v = \sqrt{\frac{2N}{m} \left( t - \frac{N}{2m\mu^2 g^2} \right)}$  при  $t > t_0$ .

2.4.40\*.  $N = m_0 g \omega(1 - \omega/\omega_0)$ ;  $m = m_0/2$ .

$$2.4.41^*. m = n_2 m_0 / (2n_1).$$

$$2.4.42^*. v \approx 20 \text{ км/ч}; \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$2.4.43^*. N = \rho S (v - \omega R)^2 \omega R.$$

$$2.4.44. \eta = 2v / (v + u).$$

$$2.4.45. N = mgu/2.$$

## § 2.5. Столкновения

$$2.5.1. m_1/m_2 = 1; \text{ да.}$$

$$2.5.2^*. \alpha = \pi/2.$$

$$2.5.3. u_1/u = (k-1)/(k+1); u_2/u = 2k/(k+1).$$

2.5.4. Масса нейтрона близка к массе дейтрона ( $m_n \approx m_d/2$ ), поэтому потери энергии при упругих столкновениях с дейтронами значительно больше, чем при столкновениях с тяжелыми ядрами свинца.

$$2.5.5. m = \sqrt{m_1 m_2}.$$

$$2.5.6. \cos \beta = v_1 v_2 \cos \alpha / (u_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - u_1^2}).$$

$$2.5.7. v'_1 = 2v - v_1; v'_2 = 2v - v_2.$$

2.5.8. После любого нечетного числа столкновений скорости

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

После любого четного — равны начальным.

$$2.5.9^*. v_1 = v \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_1(m_1 + m_3)}}; \quad v_3 = v \sqrt{\frac{m_2 m_1}{m_3(m_1 + m_3)}}.$$

$$2.5.10. \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}.$$

$$2.5.11. d = 2\sqrt{2} R.$$

2.5.13. Два ближайших шара получают скорости  $v_1 = v \cos \alpha$  и  $v_2 = v \sin \alpha$ , направленные по взаимно перпендикулярным сторонам ячейки, а первоначально двигавшийся шар остановится. В дальнейшем происходит передача этих скоростей следующим шарам, находящимся в соответствующих рядах.

$$2.5.14. t = t_n - t_{n-1} = 2\Delta t.$$

$$2.5.15. t = (2R \cos \alpha) / v.$$

2.5.16.  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}$ ;  $m_1$  — масса налетающей частицы,  $m_2$  — масса покоящейся частицы.

$$2.5.17^*. \sin \alpha = m_2 / m_1.$$

$$2.5.18^*. u = 2m_1 v \cos \alpha / (m_1 + m_2).$$

$$2.5.19. m_2 = m_1 (p^2 + p_0^2 - 2pp_0 \cos \alpha) / (p_0^2 - p^2).$$

$$2.5.20. u = \sqrt{v^2 + (v + u_0)^2}; \text{ угол поворота } \varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{v}{u_0 + v}.$$

$$2.5.21^*. v = \sqrt{2gh(1 + m_2/m_1)}.$$

$$2.5.22. v_1 = 0; v_2 = v \text{ при } v > v_0 \equiv \sqrt{2gh(1 + m_2/m_1)}; \quad v_1 = v \frac{2m_2}{m_1 + m_2};$$

$v_2 = v \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$  при  $v < v_0$ . Здесь  $v_1$  — скорость горки,  $v_2$  — скорость тела.

$$2.5.23^*. v_1 = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{2gRm_1/(m_1 + m_2)}; v_2 = \sqrt{2gRm_1/(m_1 + m_2)}; N = m_2 g (3 + 2m_2/m_1).$$

$$2.5.24. u = x \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}; \quad u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} x \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}};$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} x \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}; \text{ затем } u_1 = u; u_2 = 0 \text{ и т. д.}$$

$$2.5.25. h_{1\text{макс}} = \frac{m_2 U}{m_1 g(m_1 + m_2)}; \quad h_{2\text{макс}} = \frac{m_1 U}{m_2 g(m_1 + m_2)}.$$

2.5.26. В 1,5 раза.

2.5.27.  $K = 35,7$  кэВ.

2.5.28.  $E_{\text{мин}} = E(1 + m_e/m)$ .

2.5.29.  $E_{\text{мин}} \approx 27,2$  эВ.

$$2.5.30. v_1 = \sqrt{\frac{2Em_2}{m_1(m_1 + m_2)}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{2Em_1}{m_2(m_1 + m_2)}}.$$

$$2.5.31. E = \frac{p_1^2 m_2^2 + p_2^2 m_1^2 - 2p_1 p_2 m_1 m_2 \cos \theta}{2m_1 m_2 (m_1 + m_2)}.$$

2.5.32.  $E = K \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$ .

2.5.33.  $E = 4,1$  МэВ.

2.5.34\*.  $\cos \alpha = (p^2 - 2mE)/(p^2 + 2mE)$ , если  $2mE < p^2$ ;  $\alpha = \pi/2$ , если  $2mE > p^2$ .

2.5.35.  $h/h_0 = [(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)]^2$ .

2.5.36.  $Q/K = (3 - m_1/m_2)/4$ .

2.5.37.  $Q_1 = 2\sqrt{Q_2 m} (v - 2\sqrt{Q_2/m})$ .

$$2.5.38*. v_n = \sqrt{\frac{Fl}{m}(1 + 1/n)}; \quad u_n = \sqrt{\frac{Fl}{m(1 + 1/n)}}; \quad v_n \rightarrow \sqrt{\frac{Fl}{m}} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

2.5.39.  $\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha - 2\mu$  при  $\text{tg } \alpha > 2\mu$ ; в противном случае  $\beta = 0$ .

## § 2.6. Сила тяготения. Законы Кеплера

2.6.2.  $a = K/R^2$ , где  $R$  — расстояние от планеты до Солнца,  $K$  — постоянная.

2.6.3.  $h \approx 700$  км.

2.6.6. По приведенным данным  $\gamma = r^2 a / (2M) \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ , что сравнительно близко к результатам точных измерений.

2.6.7.  $M \approx 6 \cdot 10^{24}$  кг.

2.6.8.  $M \approx 2 \cdot 10^{30}$  кг.

2.6.10. В 0,3 раза.

2.6.11. В 6 раз.

2.6.12.  $R = (\gamma m_{\odot} / \omega^2)^{1/3}$ .

2.6.13.  $T_1 \approx 0,7$  года.

2.6.14\*.  $T = 2\pi \sqrt{R^3 / \gamma(m_1 + m_2)}$ .

2.6.15.  $m/m_{\odot} = \mu = r^3 / T^2$ .

2.6.16.  $\omega^2 = 3\gamma m / l^3$ .

2.6.17.  $v_1 \approx 7,9$  км/с;  $v_2 \approx 1,7$  км/с.  $T_1 = 84$  мин;

$T_2 \approx 105$  мин.

2.6.18.  $p = 2m_0 \sqrt{\gamma m / R} \sin \frac{\alpha}{2}$ .

2.6.19.  $F = 3mv^2 / (4R)$ .

2.6.20.  $\Delta N \approx 9 \cdot 10^3$  Н.

◇ 2.6.21. а.  $R \approx 42 \cdot 10^3$  км. б. «Восьмерка», «касающаяся» 60-х параллелей с точкой самопересечения на экваторе.

$$2.6.22. \Delta U = \gamma \frac{Mmh}{R(R+h)}; \quad \frac{mgh - \Delta U}{\Delta U} = \frac{h}{R}.$$

2.6.23\*.  $v = 4,6$  км/с.

2.6.24.  $u = \sqrt{v^2 - v_0^2}$ .

2.6.25. В 10 раз меньше.

2.6.26.  $v_1 \approx 11,2$  км/с;  $v_2 \approx 2,4$  км/с.

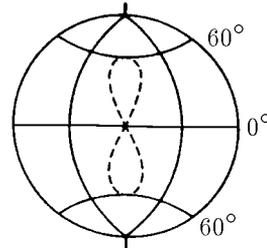
2.6.27.  $\Delta v = (\sqrt{2} - 1)v$ .

2.6.28.  $h = 59$  км.

2.6.29.  $\rho_{\text{макс}} = 3H^2 / (8\pi\gamma)$ .

2.6.30\*.  $v = \sqrt{3\gamma m / R}$ .

2.6.31.  $v \approx 42$  км/с.



К ответу 2.6.21

2.6.32\*.  $v \approx 16,7$  км/с.

2.6.33\*.  $v_{\text{мин}} = 29$  км/с.

2.6.34.  $U = -2K$ .

2.6.36\*.  $S = (1/2)vrt \sin \alpha$ .

2.6.37.  $\omega_{\text{п}}/\omega_{\text{а}} \approx 45$ .

2.6.38\*.  $\rho = R\sqrt{1 + 2\gamma M/(Rv^2)}$ .

2.6.39\*.  $V = v \left( \frac{2\gamma M}{rv^2} - 1 \right)$ ;  $R = \frac{r}{2\gamma M/rv^2 - 1}$ ,  $M$  — масса Земли.

2.6.40\*.  $E = \gamma Mm/(r_{\text{а}} + r_{\text{п}})$ .

2.6.41\*.  $R_1/R_2 = 2u^2/v^2$ .

2.6.42\*.  $dv = \gamma M d\varphi/(v_{\text{п}} r_{\text{п}})$ . Вектор  $dv$  направлен к центру планеты.

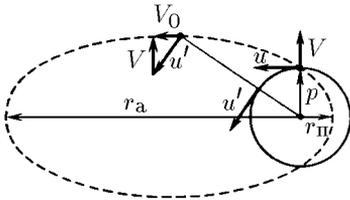
2.6.43\*. Момент скорости (векторное произведение скорости на радиус-вектор, проведенный из центра орбиты) зонда такой же, как и момент скорости станции; при повороте зонда и станции на одинаковый угол одинаково изменятся и векторы скоростей. Из неизменности момента скорости зонда:  $up = (v - V \sin \alpha)r$  следует, что  $r = p/(1 - \varepsilon \sin \alpha)$ , где  $\varepsilon = V/u$ . При  $\varepsilon < 1$  траектория зонда — эллипс, при  $\varepsilon = 1$  — парабола, при  $\varepsilon > 1$  — гипербола.

2.6.44\*. При  $V < u$ ;  $r_{\text{п}} = \frac{pu}{u + V}$ ,  $r_{\text{а}} = \frac{pu}{u - V}$ ;  $\alpha_{\text{пр}} = \arcsin \frac{u}{V}$ .

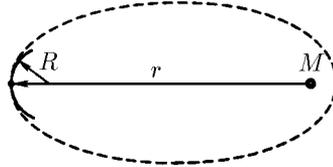
◇ 2.6.45\*. Эта скорость параллельна большой оси и перпендикулярна вектору  $V$ , поэтому  $V_0 = \sqrt{u^2 - V^2}$ . Так как

$$a = \frac{1}{2}(r_{\text{а}} + r_{\text{п}}) = \frac{pu^2}{u^2 - V^2},$$

то  $a = \gamma M/V_0^2$  (из уравнения  $u^2/p = \gamma M/p^2$  для круговой орбиты следует, что  $pu^2 = \gamma M$ ). Окончательно  $V_0 = \sqrt{\gamma M/a}$ .



*K* ответу 2.6.45



*K* ответу 2.6.46

◇ 2.6.46\*. Скорость «заметания» площади  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}bV_0 = \frac{1}{2}b\sqrt{\gamma M/a}$ . (См. решение задачи 2.6.45.) Период обращения спутника  $T = 2\pi ab/(bV_0) = 2\pi a^{3/2}/\sqrt{\gamma M}$ .

Можно решить эту задачу, не обращаясь к решению задачи 2.6.45. Радиус кривизны орбиты в вершине большой оси эллипса  $R = a/k^2 = b^2/a$ . Поэтому

$$\frac{v^2}{R} = \frac{v^2 a}{b^2} = \gamma \frac{M}{r^2} \rightarrow vr = \sqrt{\gamma \frac{Mb^2}{a}}, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}vr = \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{\gamma M}{a}}.$$

Период обращения спутника  $T = 2\pi \frac{ab}{dS/dt} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}}$ .

2.6.47. В 1910 г.

2.6.48\*.  $t = \pi\sqrt{R/g}[(1 + R_c/R)/2]^{3/2}$ .

2.6.49\*.  $t \approx 65$  суток.

2.6.50\*.  $\Delta v \approx 70$  м/с.

2.6.51.  $F = \frac{\gamma Mm(R_2^3 - R_1^3)}{(R_1 + R_2)R_1^2 R_2^2}$ .

2.6.52\*.  $N = \frac{\gamma m^2}{4r^2} - \frac{\gamma mM(3R^2 r + r^3)}{R(R^2 - r^2)^2}$ ;  $R = \sqrt[3]{12}R_0$ .

2.6.53\*.  $\sigma \approx 1,8 \cdot 10^{12}$  Па.

§ 2.7. Вращение твердого тела

2.7.1.  $K_2/K_1 = 32$ .

2.7.2.  $K = mR^2\omega^2/2$ . У диска энергия меньше.

2.7.3.  $M = mR^2\omega/t$ ;  $M = mR^2\omega^2/(4\pi N)$ .

2.7.4.  $t = \omega R/(\mu g)$ ,  $n = \omega^2 R/(4\pi\mu g)$ .

2.7.5\*.  $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$ .

2.7.6.  $n = \omega^2 R(1 + \mu^2)/[4\pi g\mu(1 + \mu)]$ .

2.7.7.  $n = \omega^2 R(1 + \mu^2)/[8\pi g\mu(1 + \mu)]$ .

2.7.9\*.  $w = |m_1 - m_2|gR/(J + m_1 R^2 + m_2 R^2)$ .

2.7.10.  $P_1 = mg/2 - Jw/l$ ;  $P_2 = mg/2 + Jw/l$ .

2.7.11.  $a = F/(m_1 + m_2)$ ;  $w = F/(m_2 R)$ .

2.7.12.  $a = (1/2)g \sin \alpha$ .  $F_{\text{тр}} = (1/2)mg \sin \alpha$ .

2.7.13\*.  $T = (1/7)mg \sin \alpha$ .

2.7.14\*.  $v = \sqrt{gl(\sin \alpha - 2\mu \cos \alpha)}$ .

2.7.15.  $a = 2m_2 g/(2m_2 + m_1)$ .

2.7.16.  $J = mr^2[gt^2/(2h) - 1]$ .

2.7.17.  $a_1 = g \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2) R_1}{J + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$ ,  $a_2 = -g \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2) R_2}{J + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$ ;

$T_1 = m_1 g \frac{J + m_2 R_2 (R_2 + R_1)}{J + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$   $T_2 = m_2 g \frac{J + m_1 R_1 (R_2 + R_1)}{J + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$ .

2.7.18.  $a = \frac{g}{1 + J/mr^2}$ ;  $T = \frac{1}{2} \frac{mg}{1 + mr^2/J}$ .

2.7.19\*.  $a = g/2$ .

2.7.20\*.  $\cos \alpha > r/R$ .

◇ 2.7.21\*. См. рис.  $t = \omega_0 R/(2\mu g)$ .

$Q/E = 1/2$ .

2.7.22\*.  $t = v_0/(3\mu g)$ .  $Q/E = 1/3$ .

2.7.23\*.  $t = v/(\mu g)$ .

2.7.24.  $\omega \geq 3v/R$ .

2.7.25.  $\omega_1 = \omega_3 = \omega/3$ ;  $\omega_2 = -\omega/3$ .

2.7.26.  $\alpha = 60^\circ$ . Меньше.

2.7.27\*.  $N = 4m_1 m_2 g/(m_1 + m_2)$ .

2.7.28\*.  $N = mgl^2/(l^2 + 3a^2)$ .

2.7.29.  $\cos \alpha = \frac{2g(m_1 - m_2)}{\omega^2 l(m_1 + m_2)}$  при  $\left| \frac{2g(m_1 - m_2)}{\omega^2 l(m_1 + m_2)} \right| < 1$ ;

в противном случае  $\alpha = 0$  или  $\pi$ .

2.7.30.  $\omega = \frac{J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2}{J_1 + J_2}$ .  $Q = \frac{J_1 J_2 (\omega_2 - \omega_1)^2}{2(J_1 + J_2)}$ .

2.7.31\*.  $\omega = v/(2R)$ .

2.7.32\*.  $\omega'_1 = (3\omega_1 - \omega_2)/4$ ;  $\omega'_2 = (3\omega_2 - \omega_1)/4$ .

2.7.33.  $u \approx m_2 v/m_1$ ;  $\omega = 2m_2 v h/(m_1 R^2)$ .

2.7.34.  $\omega = 2m_2 v r/(m_1 R^2 + 2m_2 r^2)$ .

2.7.35.  $\Delta\omega = \omega m R^2/J$ . Возрастает в  $(1 + mR^2/J)$  раз.

2.7.36.  $n = 33/8 \text{ ч}^{-1}$ .

2.7.37. На запад. Такой ветер в северном полушарии называется северо-восточным пассатом.

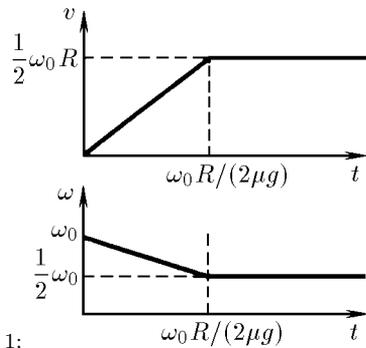
2.7.38\*.  $m \approx 4 \cdot 10^{16} \text{ кг}$ .

2.7.39\*. а. «Горбы» приливных деформаций Земли и приливов в ее океанах запаздывают относительно прохождения Луной или Солнцем зенита и «антизенита».

б. Прилив в атмосфере Земли приводит к появлению момента сил, ускоряющих суточное вращение.

2.7.40\*.  $v = \sqrt{3gL}$ .

2.7.41.  $Q = 1/10 m v^2$ .



К ответу 2.7.21

$$2.7.42. \cos \alpha = 1 - \frac{3m_2^2 v^2}{gl(4m_1 + 3m_2)(m_1 + m_2)}.$$

2.7.43\*. На расстоянии  $2l/3$  от руки.

$$2.7.44. F' = F(mRx/J - 1). \text{ При } x = J/(mR) \text{ } F' = 0.$$

2.7.45. После первого удара скорость центров гантелей равна  $(v_1 - v_2)/2$ , при этом они вращаются в противоположные стороны с угловой скоростью  $(v_1 + v_2)/l$ . Спустя время  $\pi l/2(v_1 + v_2)$  произойдет второй удар; вращение прекратится и гантели полетят с теми же скоростями, что и до первого удара.

$$2.7.46*. h = H \left( \frac{3m_2}{m_1 + 6m_2} \right)^2.$$

$$2.7.47*. M = \mu(u - \omega R)R.$$

$$2.7.48*. N = \mu(u - \omega R)R\omega. \quad \omega = u/R - M/(\mu R^2).$$

## § 2.8. Статика

$$2.8.1. T = 98 \text{ Н}, F = 138 \text{ Н}.$$

$$2.8.2. F = 0,98 \text{ Н}.$$

$$2.8.3. h \approx 700 \text{ м}.$$

2.8.4. Соседние нити образуют угол  $120^\circ$ .

$$2.8.5. m_2 = m_1 \sin \alpha / \sin(l/R - \alpha).$$

$$2.8.6. T \approx 2,6 \text{ Н}; \quad \alpha = \arctg(3\sqrt{3}).$$

$$2.8.7. x = 5F/k.$$

$$2.8.8. l_0 = 2l_2 - l_1.$$

$$2.8.9. T = mg/(2 \operatorname{tg} \alpha); \quad T' = mg/(2 \sin \alpha).$$

$$2.8.10. F_A = mg \sin \beta / \sin(\beta - \alpha); \quad F_B = mg \sin \alpha / \sin(\beta - \alpha).$$

$$2.8.11. F_A = mg \operatorname{tg} \alpha; \quad F_B = mg \cos 2\alpha / \cos \alpha.$$

$$2.8.12. \mu = \operatorname{tg}(\alpha_{\text{мин}}/2).$$

$$2.8.13. d_{\text{макс}} = d_0 + 2R(1 - 1/\sqrt{1 + \mu^2}).$$

$$2.8.14*. \operatorname{tg} \alpha = (\mu_1 - \mu_2)/(1 + \mu_1 \mu_2).$$

$$2.8.15. \mu = 1/\sqrt{3}.$$

$$2.8.16*. f_n = F(f/F)^n.$$

$$2.8.17*. F = F_0 e^{-\mu \theta}.$$

$$2.8.18. \text{ а. } F_1 = F_2 = 98 \text{ Н}; \quad \text{ б. } F_1 = 24,5 \text{ Н}, F_2 = 171,5 \text{ Н}.$$

$$2.8.19. m \leq 7,5 \text{ г}.$$

$$2.8.20. m = \sqrt{m_1 m_2}.$$

$$2.8.21. \Delta m = (h/L)m_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

2.8.22.  $\Delta m_{\pm} = \mu(M + 2m)r/(L \mp \mu r)$ , возможны «избыток» и «недостача».

$$2.8.23. \alpha = \arctg(1/3).$$

$$2.8.24. T = mgL/2h; \quad P = mg\sqrt{1 + (L/2h)^2}.$$

$$2.8.25*. T_n = (2n - 1)mg/\sqrt{3}.$$

$$2.8.26. P = (1/4)mg \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$2.8.27. \mu \geq 1/3.$$

$$2.8.28. l < L < l\sqrt{1 + \mu^2}.$$

$$2.8.29. \alpha \leq \arctg 2\mu.$$

$$2.8.30. \alpha > \pi/3.$$

$$2.8.31*. \cos \varphi = \operatorname{ctg} \alpha / \sqrt{3}, \text{ считаем } \mu > \operatorname{tg} \alpha.$$

$$2.8.32. \operatorname{tg} \alpha \leq 1/\mu.$$

$$2.8.33*. F = mg/2, \alpha = 0 \text{ при } \mu \geq 1/2; \quad F = \frac{mg}{2\mu} \sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - 2\mu}{\mu} \text{ при } \mu = 1/2.$$

$$2.8.34. \operatorname{tg} \alpha \geq (1 - \mu_1 \mu_2)/(2\mu_1).$$

$$2.8.35*. F' = F(l + \mu h)/(l - \mu h).$$

$$2.8.36. \sin \alpha = \frac{\mu R}{(l + R)\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

$$2.8.37*. \omega = vh/R^2.$$

2.8.38. Разумно.

2.8.39.  $F_{\text{ось}} = mg$ ;  $F_{\text{пр}} = mg/4$ , одна пружина сжата, другая растянута.

2.8.40.  $m = Mr/(R - r)$ .

2.8.41.  $T = 3mg$ .

2.8.42\*.  $\Delta S = (Nl/\mu)\alpha(t_2 - t_1)\text{tg } \varphi$ .

2.8.44.  $F = \mu mg(\sqrt{2} - 1)$ .

## ГЛАВА 3. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### § 3.1. Малые отклонения от равновесия

3.1.1.  $f = -2Fx/l$ .  $U = Fx^2/l$ .  $v = x_0\sqrt{2F/(ml)}$ .

3.1.2.  $F = -kx$ .  $U = kx^2/2$ .

3.1.3. а.  $k = mv_0^2/x_0^2$ . б.  $F = -kx$ ,  $U = kx^2/2$ ,  $k = m(v_0/x_0)^2$ . Нет, не зависит.

3.1.5.  $F = -mgx/l$ .  $U = mgx^2/(2l)$ .

3.1.6.  $v = x_0\sqrt{g/l}$ .

3.1.7.  $n = \sqrt{R/r}$ .

3.1.8\*.  $m = 2qEx_0^2/(lv_0^2)$ .

3.1.9.  $U = \frac{mg}{R-r} \frac{x^2}{2}$ .

3.1.10\*.  $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{qQ}{L+x} + \frac{qQ}{L-x} - \frac{2qQ}{L} \right) \approx \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 L^3} x^2$ .  $l = v\sqrt{\pi\epsilon_0 L^3 m/(qQ)}$ .

3.1.11.  $m = 2(k\cos^2\alpha)x/g$ .

3.1.12. а.  $F = -\frac{2mg}{R}x$ . б.  $R' = \frac{R}{\sqrt{3}}$ .  $F' = -\frac{6mg}{R'}x$ .

3.1.13.  $v = \frac{\Delta m}{m}\sqrt{gR/2}$ .

3.1.14\*.  $\Omega = \varphi_0 \frac{l}{L}\sqrt{g/h}$ .

3.1.15.  $v_1 = x_0\sqrt{(1+y_0/x_0)\frac{g}{l}}$ ,  $v_2 = y_0\sqrt{(1+x_0/y_0)\frac{g}{l}}$ .

3.1.16.  $mg(1+x_0^2/l^2) > F > mg(1-x_0^2/2l^2)$ .

3.1.17.  $x_0 = R\sqrt{2\Delta/(3N)}$ .

### § 3.2. Период и частота свободных колебаний

3.2.1. а. Положение равновесия груза находится на уровне центра колеса,  $F = -m\Omega^2x$ .  $T = 2\pi/\Omega$ . Скорость будет той же по модулю, но изменит направление на противоположное, смещение изменит знак. б.  $\Omega = \sqrt{k/m}$ ,  $R = x_0$ .

3.2.2.  $T = 2\pi\sqrt{\Delta l/g}$ .

3.2.3. Период уменьшится вдвое.

3.2.4. Для случаев а, в:  $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1+k_2)}$ ;

для б:  $T = 2\pi\sqrt{m(1/k_1+1/k_2)}$ . От расстояния между стенками не зависит.

3.2.5.  $l = 24,4$  см.

3.2.6.  $T = 2\pi\sqrt{l/(g\sin\alpha)}$ .

◇ 3.2.7. а.  $F = mg[(T_0/T)^2 - 1]$ . ◇ б.  $F = mg\sqrt{(T_0/T)^4 - 1}$ ,  $\cos \varphi = (T/T_0)^2$ , здесь  $\varphi$  — угол отклонения от вертикали нового положения равновесия.

3.2.8.  $r \approx 30$  км.

3.2.9.  $\Delta t_1 = 2$  мин;  $\Delta t_2 \approx 7$  с.

3.2.10.  $F = m\omega^2 l/2$ .

3.2.11.  $\omega = \sqrt{qQ/(\pi\epsilon_0 ml^3)}$ .

3.2.12.  $t = 42$  мин.

3.2.13.  $t = 42$  мин.

3.2.14.  $\omega = \sqrt{2\mu g/l}$ .

3.2.15\*.  $t = 22$  с.

3.2.16\*.  $T = 2\pi \left( \frac{l^2}{g^2 + a^2 - 2ag \cos \alpha} \right)^{1/4}$ .

3.2.17\*.  $T = \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{l/(R+l)}$ .

3.2.18.  $\omega = \sqrt{k/m - \Omega^2}$ .

3.2.19.  $\omega = \sqrt{g(Ml - mx)/(Ml^2 + mx^2)}$ .

3.2.20.  $\omega^2 = g/l + k/4m$ . Квадрат частоты возрастает на  $k/4m$ .

3.2.21.  $M = m(g/\omega^2 R - 1)$ .

3.2.22. а)  $\omega_{\perp}^2 = g/\sqrt{R^2 - l^2}$ , б\*).  $\omega_{\parallel}^2 = g\sqrt{R^2 - l^2}/R^2$ .

3.2.23.  $\omega = \sqrt{k/(2m)}$ .

3.2.24.  $\omega = \sqrt{g/(2R)}$ .

3.2.25.  $\omega = \sqrt{k/\mu}$ , где  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .

3.2.26.  $\omega_{HD}/\omega_{H_2} = \sqrt{3}/2$ .

3.2.27\*.  $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{11/3}$ .

3.2.28.  $T = 2\pi\sqrt{l(M+m)/(Mg)}$ .

3.2.29. а)  $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{m/(2k)}$ . б)  $t = \frac{3\pi}{2}\sqrt{m/(2k)}$ .

3.2.30.  $I = I_0[(T/T_0)^2 - 1]$ .

3.2.31\*.  $\omega = \sqrt{6k/m}$ .

3.2.32\*.  $\omega_1 = \sqrt{Mg/(ml)}$ ,  $\omega_2 = 2\omega_1 = 2\sqrt{Mg/(ml)}$ .

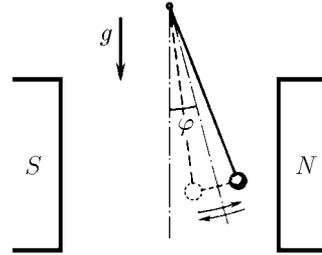
3.2.33.  $T = 2\pi\sqrt{l/(2g)}$ .

3.2.34\*.  $T = 2\pi\sqrt{H/g}$ .

3.2.35.  $\omega = \sqrt{g/H}$ .

3.2.36\*.  $\omega = \sqrt{k/[m + \pi\rho l R^4/r^2]}$ .

3.2.37\*.  $m \approx 900$  т.



К ответу 3.2.7

### § 3.3. Гармоническое движение

3.3.1.  $v = -A\omega \sin \omega t$ ,  $a = -A\omega^2 \cos \omega t$ ,  $F = -m\omega^2 x = -Am\omega^2 \cos \omega t$ ,  $k = m\omega^2$ .

3.3.2. а)  $x = 5 \sin(3,13t)$ . б)  $x = 5 \cos(3,13t)$ . Смещение измеряется в миллиметрах, время — в секундах.

3.3.3.  $T = 0,06$  с.

3.3.4.  $t = \pi/(4\omega)$ .

3.3.5.  $T = \pi\sqrt{l/g}(1 + 1/\sqrt{2})$ .

3.3.6.  $T = \pi(\sqrt{R/g} + \sqrt{r/g})$ .

3.3.7\*.  $t = \pi/2\sqrt{l/g}$ ; не изменится.

3.3.8\*.  $t = \pi\sqrt{m/(2\pi R\Delta p)}$ .

3.3.9. Фокусируются на расстояниях  $l = \pi(n + 1/2)v_0\sqrt{m/k}$ , где  $n$  — целое число.

**3.3.10.** Число пересечений равно целой части величины  $\frac{l}{\pi v_0} \sqrt{g/R}$ .

**3.3.11.**  $T = (4/3)\pi\sqrt{l/g}$ .

**3.3.12.**  $l = A \cos[\pi(1 - T/T_0)]$ .

**3.3.13.**  $t = \left[ \pi + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{mg}{2k(H-h)}} \right] \sqrt{m/k}$ .

**3.3.14.**  $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{l/(\mu g)}$  при  $v \leq \sqrt{\mu g l}$ ,  $t = \frac{v'}{\mu g} + \sqrt{l/(\mu g)} \arccos \frac{v'}{v}$  при  $v > \sqrt{\mu g l}$ , где  $v' = \sqrt{v^2 - \mu g l}$ .

**3.3.15\*.**  $w = 2R/(\pi A)$  при  $A \gg R$ ,  $w = 1/3$  при  $A = 2R$ . Увеличится.

**3.3.16.**  $u = \frac{d}{2\pi n} \sqrt{k/m}$ , где  $n$  — целое число.

**3.3.17.**  $t = T/4 + \tau/2$ .

**3.3.18.** а)  $x = \frac{mg}{k}(\cos \omega t - 1)$ . б)  $x = \left( \frac{mg}{k} + l \right) (\cos \omega t - 1)$ . Ось  $x$  направлена вертикально вверх, начало отсчета — в начальном положении.

**3.3.19.**  $v = \frac{mv}{m+M} \cos \sqrt{\frac{k}{m+M}} t$ ,  $x = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}} \sin \sqrt{\frac{k}{m+M}} t$ .

**3.3.20.** С момента первого удара шарика о стенку в течение полупериода происходит сжатие и возвращение пружины в недеформированное состояние. Затем происходит второй удар в момент, когда пружина не деформирована, после чего шарики начинают двигаться с постоянной скоростью  $v$ . Период  $T = 2\pi\sqrt{m/(2k)}$ .

**3.3.21\*.**  $v_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} v \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \cos \omega t \right)$ ,  $v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} v (1 - \cos \omega t)$ .

**3.3.22.**  $F_{\max} = 2F$ ;  $\tau = T/2$ .

**3.3.24\*.**  $A = \sqrt{A_0^2 + \frac{F^2}{k^2} - \frac{2A_0F}{k} \cos \omega t_0}$ . При  $t_0 = \pi(2n+1)\omega$ , где  $n$  — целое число, амплитуда наибольшая; при  $t = 2\pi n/\omega$  — наименьшая.

**3.3.25\*.**  $x_0 = u\sqrt{m/k}$ .

**3.3.26\*.** При  $u \geq \mu g \sqrt{m/k}$  сразу начнутся гармонические колебания с амплитудой  $A = \mu t g/k$ , при меньших  $u$  установятся колебания с амплитудой  $A = u\sqrt{m/k}$ .

**3.3.27\*.**  $\mu = kl/(4Mgn)$ .

**3.3.28.**  $BC = g(M+m)/(M\omega^2)$ .

**3.3.29.**  $F = -m\omega^2 x = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ , наибольшее по модулю значение силы  $m\omega^2 A$  достигается в момент времени  $t = (\pi n - \varphi)/\omega$ , где  $n$  — целое число.

**3.3.30.** При  $\omega^2 A > g$  груз подсакивает, а его отрыв от поверхности мембраны происходит выше ее среднего положения.

**3.3.31.**  $A = F/(m\omega^2)$ .

**3.3.32.**  $h = A + g/(2\omega^2) + \omega^2 A^2/(2g)$  при  $\omega^2 A > g$ .

**3.3.33\*.**  $A = (g/\omega^2)\sqrt{\pi^2 n^2 + 1}$ , где  $n$  — целое число.

**3.3.34\*.** При амплитуде  $A \gg 10^{-11}$  см ускорение торца пластинки много больше ускорения  $g = 0,8$  м/с, которое может обеспечить трение, поэтому груз практически остается на месте, почти не влияя на частоту. При амплитуде  $A < 10^{-11}$  см груз движется вместе с торцом и влияет на частоту заметным образом.  $v_{\max} = \pi g/(2\omega) \approx 1,57 \cdot 10^{-6}$  м/с.

**3.3.36\*.**  $u_{\text{ср}} = \pi v_0 \operatorname{tg} \alpha / (2\mu)$ .

### § 3.4. Наложение колебаний

**3.4.1.** Будет происходить наложение гармонических колебаний по горизонтали и вертикали с частотами  $\omega_1 = \sqrt{2k_1/m}$  и  $\omega_2 = \sqrt{2k_2/m}$ . При  $k_1 \neq k_2$  прямолинейное движение возможно только по вертикали и горизонтали.

**3.4.2.** Телу, отклоненному от положения равновесия на расстояние  $r$ , нужно в направлении, перпендикулярном направлению отклонения, сообщить скорость  $v = \omega r$ , где  $\omega = \sqrt{k/m}$ .  $T = 2\pi/\omega$ .

**3.4.3. а.** Траектория — эллипс с полуосями  $A$  и  $v/\omega$ . Пределы изменения расстояния от  $v/\omega$  до  $A$ .

б\*. Траектория — эллипс с полуосями

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left( A^2 + \frac{v^2}{\omega^2} \pm \sqrt{(A^2 + v^2/\omega^2)^2 - 4(xv/\omega)^2} \right)}.$$

**3.4.4.**  $2\varphi = \pi/6$ .

**3.4.5\*.** При  $2\varphi = \pi n$ , где  $n$  — целое число, на экране виден отрезок; при  $2\varphi = \pm\pi/2 + 2\pi n$  — окружность. Длина полуосей эллипса равна  $A\sqrt{2} \cos \varphi$  и  $A\sqrt{2} \sin \varphi$ .

**3.4.6.** Эллипс с осями по вертикали и горизонтали.

**3.4.7.** Отрезок, расположенный по диагонали экрана, превратится в вытянутый по этой диагонали эллипс, полуоси которого постепенно сравниваются по длине. Затем появится окружность, которая начнет превращаться в эллипс, вытянутый вдоль другой диагонали экрана, и т. д. Через время  $2\pi/\Omega$  весь цикл повторится.

**3.4.8.**  $T_x : T_y = 1 : 2$ , за исключением случая  $z$ , когда  $T_x : T_y = 2 : 1$ .

**3.4.9.** Если  $T_x : T_y = p : q$ , где  $p$  и  $q$  — целые числа, то за время  $pT_y = qT_x$  точка вернется в свое начальное положение. При  $T_y = T_x$  траектория точки — эллипс.

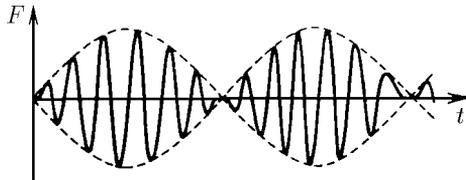
**3.4.10.**  $\omega_y : \omega_x = p : q = 3 : 4$ .

**3.4.11\*.**  $\mu_{\min} = 2F/(M + m_1 + m_2)$ , за исключением случая  $\sqrt{m_1/m_2} = p/q$ , где  $p$  и  $q$  — целые нечетные числа.

**3.4.12\*.**  $F = k[A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) - A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)]$ .  $E_{\max} = \frac{k}{2}[A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$ .

$E_{\text{ср}} = \frac{k}{4}[A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$ . При  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$  средняя энергия принимает наибольшее значение, при  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  — наименьшее.

◇ **3.4.13\*.**  $F = 2kA \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$ .  $E_{\text{ср}} = \frac{k}{4}(A_1^2 + A_2^2)$ .



*К ответу 3.4.13*

**3.4.14.**  $N = (1/2)\omega F_0 A \sin \varphi$ .

**3.4.15. а.**  $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{k/m}$ .

б.  $v_1 = v(\cos \omega_2 t + \cos \omega_1 t)/2$ ,  $v_2 = v(\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)/2$ ;  $x_1 = x_2 = v(1/\omega_1 + 1/\omega_2)/2$ ;  $\Delta x = v/\omega_1$ .

в.  $v_1 = v(2 \cos \omega_2 t + \cos \omega_1 t)$ ,  $v_2 = v(2 \cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)$ ;  $x_1 = x_2 = v(2/\omega_1 + 1/\omega_2)$ ;  $\Delta x = 2v/\omega_1$ .

**3.4.16\*.** Движение атомов будет суммой следующих движений: а) все атомы движутся поступательно со скоростью  $v_0$ ; б) атом углерода неподвижен, а скорости атомов кислорода равны по модулю и противоположно направлены:  $v_0^{(1)} = \pm v_1 \cos \omega_1 t$ ,  $\omega_1 = \sqrt{k/M}$ ; в) атомы кислорода движутся с одинаковой скоростью  $v_2 \cos \omega_2 t$  навстречу атому углерода, скорость которого равна

$$-v_2 \frac{2M}{m} \cos \omega_2 t, \quad \omega_2 = \sqrt{k(1/M + 2/m)}.$$

Смещение атома кислорода в сторону атома углерода

$$\Delta x = \frac{|v_1|}{\omega_1} + \left(1 + 2 \frac{M}{m}\right) \frac{|v_2|}{\omega_2} = \frac{1}{2}v \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right).$$

$$3.4.17^*. x_{\max} = \frac{v(\omega_1 + \omega_2)[l(\omega_1^2 - \omega_1\omega_2 + \omega_2^2) - g]}{\omega_1\omega_2[l(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2g]}, L = \frac{g^2}{l(\omega_1\omega_2)^2}.$$

$$3.4.18. k = m(\omega^2 - \omega_0^2)/2.$$

$$3.4.19. A_{1,2} = (A \pm B)/2; \quad \omega_{1,2} = 2\pi/\tau \pm \pi/T.$$

### § 3.5. Вынужденные и затухающие колебания

◇ 3.5.1. См. рис.

◇ 3.5.2. См. рис.

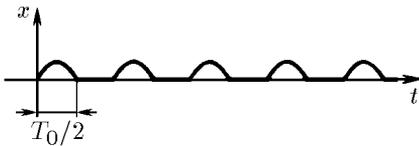
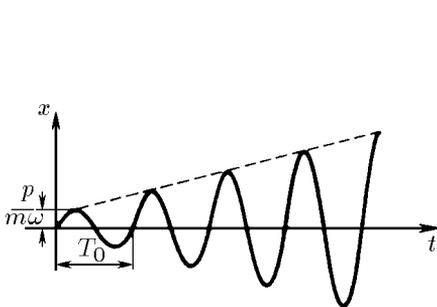
◇ 3.5.3\*. См. рис. Если удары следуют друг за другом через промежутки времени  $T_0$ , то амплитуда

$$A_n = \sqrt{[v_0/\omega + np/(m\omega)]^2 + x_0^2}.$$

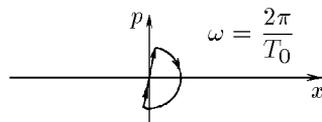
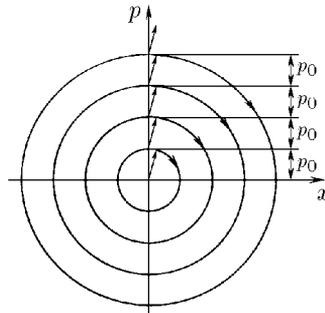
Если через промежутки  $T_0/2$ , то амплитуда

$$A_n = \sqrt{[v_0/\omega + p/(m\omega)]^2 + x_0^2} \quad \text{для нечетных } n,$$

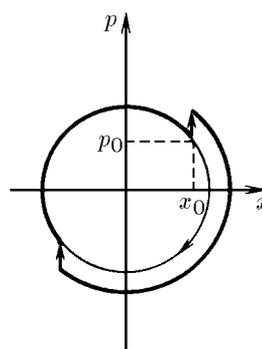
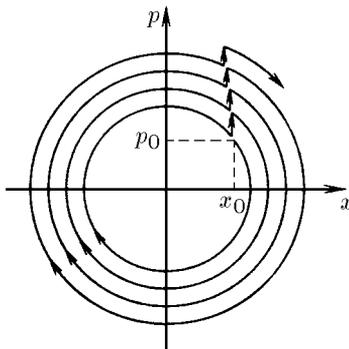
$$A_n = \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x_0^2} \quad \text{для четных } n, \quad \omega = 2\pi/T_0.$$



К ответу 3.5.1



К ответу 3.5.2



К ответу 3.5.3

3.5.5. Около 63 см.

3.5.6. Выбоины на дороге со стороны въезда расположены реже, чем со стороны выезда.

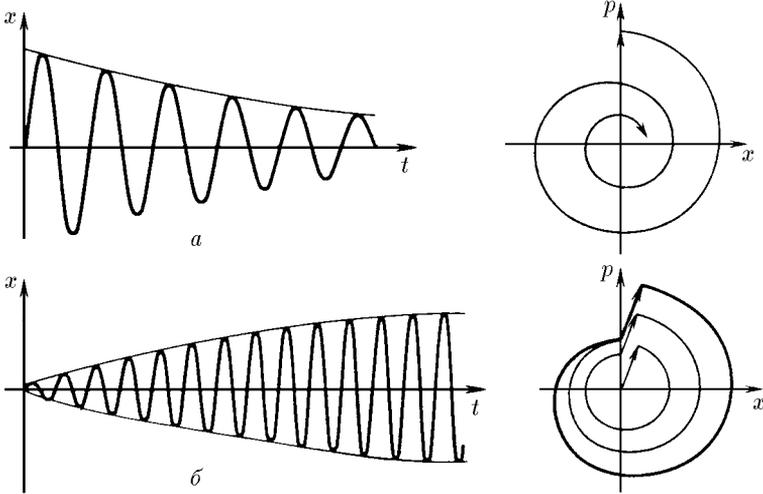
3.5.7. До изменения курса и скорости катера происходила резонансная раскачка.

3.5.8. С ростом амплитуды увеличиваются потери за период. Когда они сравниваются с приростом энергии из-за удара, дальнейшая раскачка прекратится.

3.5.9.  $N = bv^2$ .

3.5.10\*.  $\frac{d}{dt} \left( \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \right) = -bv^2$ , отсюда  $m \frac{dv}{dt} = -kx - bv$ .

◇ 3.5.11. См. рис. а: после одиночного толчка происходит постепенное затухание колебаний; рис. б: при периодических толчках первоначально происходит раскачка колебаний, а затем, когда прирост энергии порядка  $pv$  сравнивается с потерями за период, имеющими порядок  $bv^2T$ , колебания устанавливаются.



К ответу 3.5.11

3.5.14. При  $\gamma\omega_0 \approx 1$ .

3.5.15. Скорость осциллятора меньше в  $n^2$ ,  $n^3$  раз его начальной скорости.

3.5.16. За  $\tau_2$  энергия уменьшится вчетверо. За время  $\tau_2/2$  энергия уменьшится вдвое.

◇ 3.5.17. См. рис.

3.5.19.  $\gamma = 10^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega = \pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Погрешность при замене  $\omega$  на  $\omega_0$  квадратично зависит от малой величины  $\gamma/\omega_0$ .

3.5.20. а.  $\gamma \approx 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ . б.  $\gamma' = \gamma/4$ .

3.5.21\*. а.  $Q = \omega_0/(2\gamma)$ ,  $n = Q/(2\pi)$ . б. Примерно в 50 раз при  $Q = 10^8$  и только в 1,5 раза при  $Q = 10^9$ .

3.5.22\*.  $v_{\text{макс}} = \frac{p}{m} \frac{2}{1 - \exp(-2\pi\gamma/\omega)}$ .  $v_{\text{макс}} \approx 2p/m$  при  $2\pi\gamma/\omega \gg 1$ ;

$v_{\text{макс}} \approx 2\omega p/(2\pi\gamma m)$  при  $2\pi\gamma/\omega \ll 1$ .

3.5.24.  $A = F_0/(m\omega^2)$ .

3.5.26. а.  $A = F_0/[m(\omega^2 - \omega_0^2)]$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . б.  $A = F_0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

3.5.27\*.  $A = F_0/[m(\omega^2 - \omega_0^2)]$ . Величины  $B$  и  $\varphi$  подбираются так, чтобы в момент времени  $t = 0$  выполнялись начальные условия  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$ .

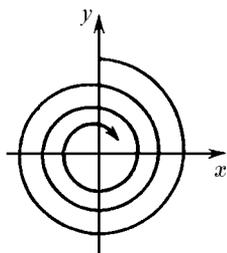
3.5.28\*.  $x_0 = F_0/[m(\omega_0^2 - \omega)]$ ,  $v_0 = 0$ , тогда  $B = 0$ .

3.5.29\*. Дополнительное ускорение, связанное со свободными колебаниями, умноженное на массу осциллятора, равно дополнительной внутренней силе.

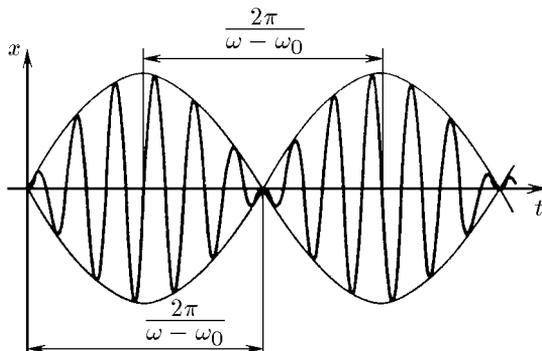
3.5.30. Проведем рассуждения на примере колебаний тела, прикрепленного к пружине. Вынужденные колебания этого тела с частотой, меньшей собственной частоты, можно представить себе как свободные колебания на той же пружине тела с добавочной массой. Силу со

стороны этой массы можно рассматривать как вынуждающую. Она направлена против упругой силы, а значит, в направлении смещения. Вынужденные колебания с частотой, большей собственной частоты, можно представить себе как свободные колебания того же тела с прикрепленной к нему добавочной пружиной. Силу упругости со стороны этой пружины можно рассматривать как вынуждающую. Она направлена против смещения.

◇ **3.5.32\***. См. рис.  $x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right)$ .



К ответу 3.5.17

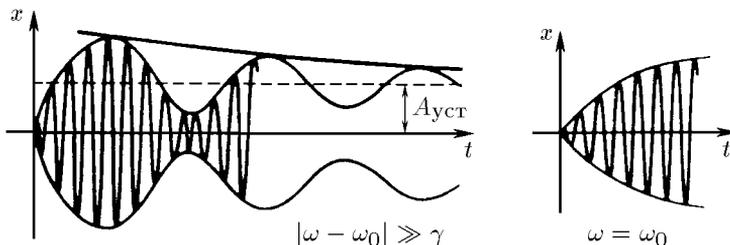


К ответу 3.5.32

**3.5.33\***.  $x(t) \approx \frac{F_0 t}{m(\omega + \omega_0)} \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}t\right)$ .

**3.5.34\***.  $x(t) \approx \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$ .

◇ **3.5.35\***. При  $|\omega - \omega_0| \ll \gamma$  первоначально возникшие биения постепенно переходят в вынужденные колебания из-за уменьшения по закону  $e^{-\gamma t}$  слагаемого, изменяющегося с частотой  $\omega_0$ . При  $\omega = \omega_0$  первоначальная раскачка колебаний с линейно возрастающей амплитудой плавно уменьшается и устанавливаются вынужденные колебания. Характерное время установления равно времени затухания свободных колебаний  $\tau = 1/\gamma$ , когда их амплитуда уменьшится в  $e$  раз.



К ответу 3.5.35

**3.5.36.** а.  $F = -2A\gamma m\omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi)$ . б.  $A = -F_0/(2\gamma m\omega_0)$ ; в  $\omega_0/(2\gamma)$  раз.

**3.5.37.**  $\gamma = F_0/(2x_0\omega m)$ .

**3.5.38.**  $\omega_0 = 550 \text{ c}^{-1}$ ,  $\gamma = 50 \text{ c}^{-1}$ ,  $Q = 5,5$ .

**3.5.39.** Около  $10^5 \text{ с}$ .

**3.5.40.**  $v = \omega_0 \lambda / (2\pi)$ .

**3.5.41\***. Скорость частиц спустя время  $t$  после вылета  $v = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t)$ ; их средняя скорость  $v_{\text{ср}} = \frac{F_0}{m\omega}$ ; наибольшая скорость  $V_{\text{макс}} = 2F_0/(m\omega)$  достигается этими частицами на расстоянии  $\frac{F_0}{m\omega^2} \pi(2n + 1)$  от источника, где  $n$  — целое число.

Скорость частиц, испущенных в момент времени  $t = \pi/\omega$ ,  $v = \frac{F_0}{m\omega}(\cos \omega t - 1)$ ; их средняя скорость  $v_{\text{ср}} = F_0/(m\omega)$ ; наибольшая скорость  $v_{\text{макс}} = 2F_0/(m\omega)$  достигается этими частицами по другую сторону от источника на том же расстоянии.

Скорость частиц, испущенных в момент  $t = \pi/(2\omega)$ ,  $v = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t$ ; их средняя скорость  $v_{\text{ср}} = 0$ ; наибольшая скорость этих частиц  $v_{\text{макс}} = F_0/(m\omega)$  достигается на расстоянии  $F_0/(m\omega^2)$  от источника.

**3.5.42\***. Циклоида; средняя скорость  $v_{\text{ср}} = F_0/(m\omega)$  направлена по оси  $x$ . Если при  $t = 0$   $v_x = -F_0/(m\omega)$ , а  $v_y = 0$ , то частица будет двигаться по окружности радиуса  $r = F_0/(m\omega^2)$ .

### § 3.6. Деформации и напряжения. Скорость волны

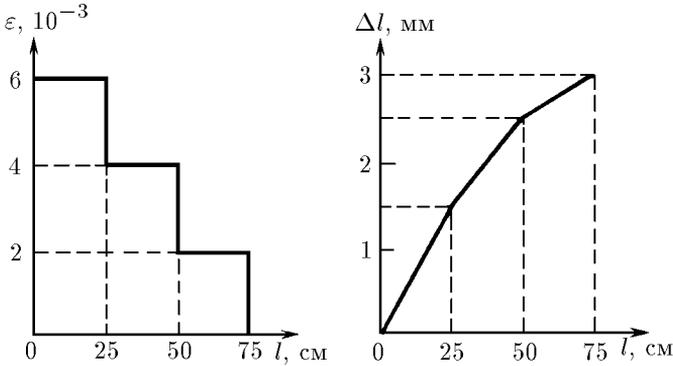
**3.6.1.**  $F/k$ ;  $(N - 1)F/k$ .

**3.6.2.** Увеличится на  $10^{-14}$  м.

**3.6.3.**  $k = ES/L$ ,  $F = ES(\Delta L/L)$ .

**3.6.4.**  $k = Ea$ .

◇ **3.6.5.** См. рис.  $l = 3$  мм.



К ответу 3.6.5

**3.6.6.** От  $10^8$  до  $-0,5 \cdot 10^8$  Па.

**3.6.7.**  $F = 5 \cdot 10^4$  Н.

**3.6.8.** На  $1,2 \cdot 10^{-4}$  м.

**3.6.9.**  $\Delta l = mal/(2ES)$ .

**3.6.10.**  $w = E\varepsilon^2/2 = \sigma^2/(2E)$ .

**3.6.11\***.  $A_{\text{мин}} = \frac{\pi^2}{6} \frac{Ea^4}{l}$ .

**3.6.12\***.  $\nu = k/(k + 2k_0)$ .

**3.6.13\***.  $\nu = k/(k + 2k_0)$ .

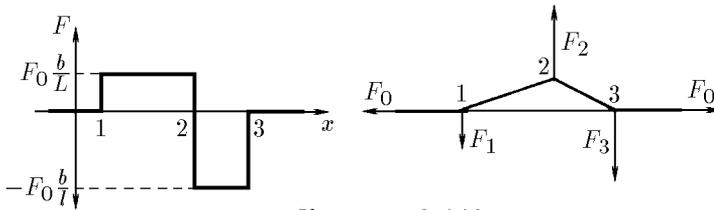
**3.6.14.** Увеличивается.  $\nu = 0,5$ .

**3.6.15.**  $\varkappa = 3(1 - 2\nu)/E$ .

**3.6.16.** Возрастает примерно на 30 м. Плотность воды больше на  $50 \text{ кг/м}^3$ . Энергия в единице объема  $2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3$ .

**3.6.17.** Горизонтальная составляющая силы натяжения нити равна  $F$ ; по наклону негоризонтального участка нити находятся вертикальные составляющие силы натяжения, по ним — требуемые силы.

◇ **3.6.18.** См. рис. Силы, приложенные к точкам изгиба 1, 2, 3:  $F_1 = -F_0 b/L$ ,  $F_2 = F_0(b/L + b/l)$ ,  $F_3 = -F_0 b/l$ .



К ответу 3.6.18

**3.6.19.**  $u = -c\varepsilon$ .

**3.6.20.** а.  $dp/dt = -\rho c^2 \varepsilon$ . б.  $F = F_0 \varepsilon$ ;  $c = \sqrt{F_0/\rho}$ .

**3.6.21.** а.  $\varepsilon = -b/L$ ,  $w = Eb^2/(2L^2)$ ;  $u = -c\varepsilon = cb/L$ . б.  $c = \sqrt{E/\rho}$ .

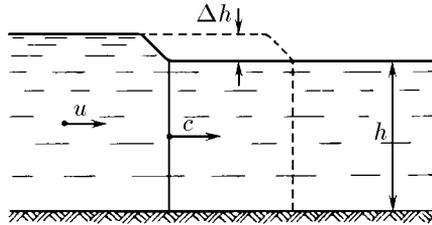
**3.6.22.** а.  $dp/dt = \rho c u S = -\rho c^2 \varepsilon S$ . б.  $\sigma = -E\varepsilon$ ,  $c = \sqrt{E/\rho}$ .

**3.6.23.** 5 км/с. Мысленно выделим тонкий стержень в листе стали. Его поперечным смещения «мешают» соседние участки листа. Жесткость такого стержня больше, чем стержня со свободной боковой поверхностью.

**3.6.24.** 550, 1400 и 340 м/с.

**3.6.25.**  $c^2 = \rho(P - P_0)/[\rho_0(\rho - \rho_0)]$ .

**3.6.26\*.** При сжатии, плавно убывающем к фронту волны, скорость звука больше у более удаленных участков, возмущения среды догоняют друг друга. В случае разрежения у дальних участков скорость звука меньше, они отстают, возмущение расплывается.



К ответу 3.6.27

◇ **3.6.27\*.** См. рис. Скорость частиц и высота подъема уровня воды в бегущей волне связаны соотношением  $u/c = \Delta h/h$ . Приравниваем скорость изменения импульса разности сил давления;  $\rho h c u = \rho g h \Delta h$ . Отсюда  $c = \sqrt{gh}$ .

**3.6.28.**  $c = \frac{\omega l}{2 \arcsin(\omega/2\omega_0)}$ . При  $\omega \ll \omega_0$   $c = \omega_0 l$ ,  $\omega_0 \approx 0,5 \cdot 10^{14}$  Гц.

### § 3.7. Распространение волн

**3.7.1.**  $p = \rho c b S$ .

**3.7.2.** а.  $q_p = \Delta \rho c^2$ . б.  $v = \frac{\Delta \rho c}{\rho} \frac{l}{L}$ ;  $x = \frac{\Delta \rho}{\rho} l$ .

**3.7.3.**  $P(t_0 - r/c)$ , где  $r$  — расстояние до датчика.

**3.7.4.** Плотность потока импульса  $q_p = \rho c u(x_0 - ct)$ .

**3.7.5.**  $F = 1400$  Н.

**3.7.6.**  $u = F/(S\sqrt{E\rho})$ ,  $\varepsilon = -F/(SE)$ ;  $\rho' = \rho[1 + F/(SE)]$ . Импульс  $p = 0,5F\tau$ ,  $p' = F\tau$ ; энергия  $W = 0,5F^2\tau/(S\sqrt{E\rho})$ ,  $W' = F^2\tau/(S\sqrt{E\rho})$ .

**3.7.7.**  $A = 12,5 \cdot 10^3$  Дж,  $K/A = 0,25$ .

◇ 3.7.8. См. рис.;  $u = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{F_{\perp}}{F_{\parallel}}$ ,  $c_1 = \sqrt{F_{\parallel}/\rho'_1}$ ,  $c_2 = \sqrt{F_{\parallel}/\rho'_2}$ .

3.7.9. Вертикальные силы  $F_{1,3} = (\rho v^2 - F)b/L$  и  $F_2 = 2(F - \rho v^2)b/L$ . При  $v \rightarrow \sqrt{F/\rho}$  силы, действующие на струну, стремятся к нулю — струна «не противится» изгибу. Если силы со стороны колечек тем или иным образом фиксированы, то при  $v \rightarrow \sqrt{F/\rho}$  неограниченно растут деформации струны.

3.7.10. Скорости волн «изгиба» и возмущения совпадут, что приведет к резкому увеличению амплитуды волн в шине. Это в свою очередь может привести к разрыву шины.

3.7.11. Скорость лодки и скорость волны, которую возбуждает лодка в реке, совпали.

3.7.13. Плоский фронт. Направление распространения образует угол  $\alpha$  с нормалью к границе раздела сред ( $\sin \alpha = c/v$ ).

3.7.14.  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\sin \alpha_2 = (c_2/c_1) \sin \alpha$ .

3.7.15. Шум двигателей распространяется медленнее фронта ударной волны, создаваемой сверхзвуковым самолетом.

3.7.16.  $\sin \alpha_0 = c_1/c_2$ .

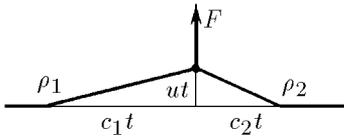
3.7.17. Изменится направление только преломленной волны:

$$\sin \alpha_2 = \frac{c_2 \sin \alpha_1}{c_1 + v \sin \alpha_1},$$

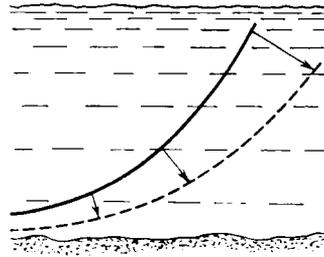
где  $c_1$  и  $c_2$  — скорости звука в неподвижном воздухе и воде,  $v$  — скорость потока воздуха,  $\alpha_1$  — угол падения.

3.7.18. а. Более удаленные от берега участки фронта волны движутся с большей скоростью, чем менее удаленные. Поэтому угол между фронтом волны и берегом вблизи самого берега уменьшается.

◇ б. См. рис.



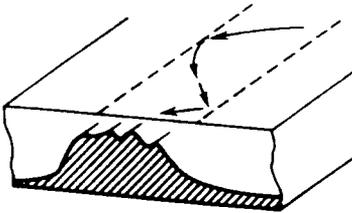
К ответу 3.7.8



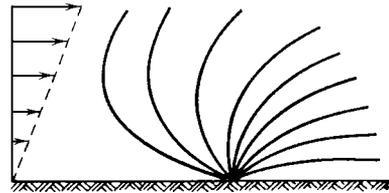
К ответу 3.7.18

◇ 3.7.19. На границе раздела глубин возможно полное внутреннее отражение.

◇ 3.7.20\*. См. рис., на котором показаны «звуковые лучи», которые ортогональны к волновым поверхностям; в направлении ветра звук идет почти вдоль поверхности Земли, а в противоположном направлении уходит от нее.



К ответу 3.7.19



К ответу 3.7.20

3.7.21.  $v = v_0/(1 - v/c)$ .

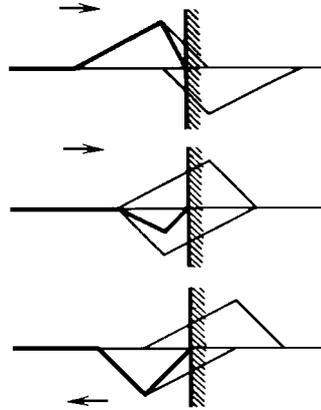
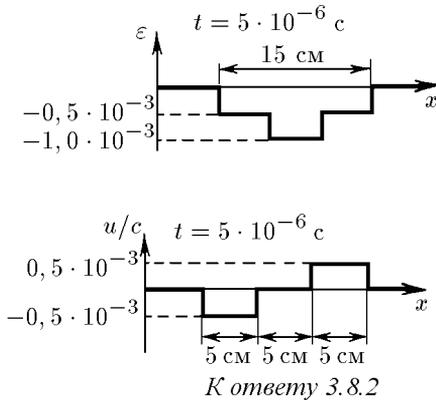
3.7.22.  $v_{1,2} = v_0(1 \pm v/c)$ ;  $v_3 = v_0[1 - (v/c) \cos \alpha]$ .

### § 3.8. Наложение и отражение волн

**3.8.1.** В первом случае (см. рис. *a* к задаче 3.8.1) кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия  $U = 2E$ . Во втором случае (см. рис. *б* к задаче 3.8.1) кинетическая энергия  $K = 2E$ , а потенциальная равна нулю.

◇ **3.8.2.** Разбегающиеся волны деформации с  $\varepsilon = -0,5 \cdot 10^{-3}$ .

◇ **3.8.3.** См. рис.



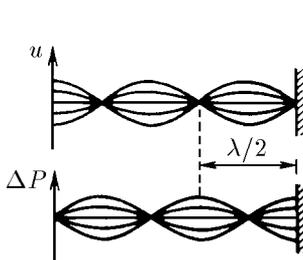
*К ответу 3.8.3*

◇ **3.8.4.** См. рис.  $P = 2\rho c\omega A \cos \omega t$ . Длина волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . Вблизи стенки — узел скорости и пучность давления. Первый узел давления отстоит от стенки на расстоянии  $\lambda/4$ .

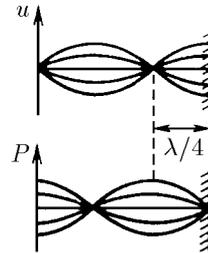
**3.8.5.** См. рис. в условии задачи. В «неперевёрнутой» волне смещений знак деформации противоположен знаку деформации падающей волны.

◇ **3.8.6.**  $A = v_0/2\omega$ . На конце стержня — пучность скорости и узел давления. Первый узел скорости отстоит от конца стержня на расстоянии  $\lambda/4$  (см. рис.).

**3.8.7.** При отражении волны от внутренней поверхности стекла в нем возникает область высокого напряжения (растяжения).



*К ответу 3.8.4*



*К ответу 3.8.6*

**3.8.8\*.**  $u = 2P/(\rho c) = 250$  м/с;  $l = c\tau/2 = 1$  см.

**3.8.9\*.**  $l = \frac{1}{2} \left( L - \frac{c}{\omega} \arcsin \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)$ .  $l = L/2$  при  $\sigma_0 \gg \sigma$ ,  $l = L/4$  при  $\sigma_0 \approx \sigma$ .

**3.8.10.**  $P = \rho c u = 3,9 \cdot 10^4$  атм. Сила, приложенная к торцу стержня со стороны стенки, порождает в нем волну сжатия. Доходя до свободного торца, она от него отражается. Отраженная волна является волной растяжения. При наложении друг на друга отраженной волны и волны, порождаемой действием силы со стороны стенки, деформация исчезает, а скорость участков стержня меняет знак. Когда фронт отраженной волны доходит до стенки, весь стержень оказывается недеформированным и контакт его со стенкой прекращается. Время контакта  $\tau = 2l/c = 4 \cdot 10^{-4}$  с.

$$3.8.11. v_l = v, v_L = v|1 - 2l/L|.$$

$$3.8.13^*. v_1 = 0, v_2 = vl_1/l_2.$$

$$3.8.14. \frac{u_{отр}}{u_{пад}} = \frac{\sqrt{\rho_1 E_1} - \sqrt{\rho_2 E_2}}{\sqrt{\rho_1 E_1} + \sqrt{\rho_2 E_2}}, \frac{u_{пр}}{u_{пад}} = \frac{2\sqrt{E_1 \rho_1}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}}.$$

$$3.8.15. D \approx 4\rho_1 c_1 / \rho_2 c_2 \approx 1,1 \cdot 10^{-3}.$$

3.8.16. При наличии прокладки коэффициент прохождения волны, принимаемой датчиком, увеличивается от 0,25 до 0,41. Появляются вторичные сигналы («эхо-сигналы»), следующие друг за другом с интервалом  $2l/c$ , мощность которых убывает в геометрической прогрессии. При высокой частоте следования сигналов «эхо-сигналы» налагаются друг на друга, тогда подбором толщины прокладки можно добиться почти полного прохождения или отражения сигнала.

$$3.8.17. n = \left( \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \right)^2, L = 2lc_1/c_2.$$

$$3.8.18^*. L = 2lc_1/c_2. n = 1. \text{ Нет.}$$

$$3.8.19. l_1 = 1,25 \text{ мм}, l_2 = 2,5 \text{ мм.}$$

### § 3.9. Звук. Акустические резонаторы

$$3.9.1. \lambda = c/\nu = 6,6 \text{ м.}$$

$$3.9.2. l = c/4\nu = 82,5 \text{ см.}$$

$$3.9.3. c = 2l/\nu.$$

$$3.9.4. v_1 = 6,8 \text{ см/с}, v_2 = 6,8 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}, x_1 = 0,11 \text{ мм}, x_2 = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ м}, P_1 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ атм}, P_2 = 3 \cdot 10^{-12} \text{ атм.}$$

$$3.9.5^*. I > 3 \text{ кВт/м}^2.$$

3.9.6\*.  $F = 2L^2 \rho c v$ . При  $\omega \ll c/L$  происходит почти полное выравнивание давления в струе воздуха, поэтому излучение звука слабое.

3.9.7.  $E = 2\pi R^2 \omega^2 A^2 \rho c$ . Амплитуда давления в волне обратно пропорциональна расстоянию до центра шарика.

3.9.8\*. а. Две разбегающиеся волны: скорости

$$u = \frac{F_0}{2S\rho c} \cos \omega \left( t \mp \frac{x}{c} \right)$$

(отсчет координаты  $x$  начинается в сечении, где расположен источник действия силы  $F$ ) и деформации  $\epsilon \mp u/c$ .

б. Между источниками силы возникает стоячая волна:

$$u = \frac{F_0}{S\rho c} \cos \omega \left( t - \frac{l}{2c} \right) \cos \frac{\omega x}{c};$$

вне источников — две разбегающиеся волны:

$$u = \frac{F_0}{S\rho c} \cos \frac{\omega l}{2c} \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

(отсчет координаты  $x$  начинается в точке, расположенной посередине между источниками силы  $F$ ). Если на расстоянии  $l$  уместается четное число полуволн — мощность результирующей волны максимальная, если уместается нечетное число полуволн — мощность результирующей волны равна нулю.

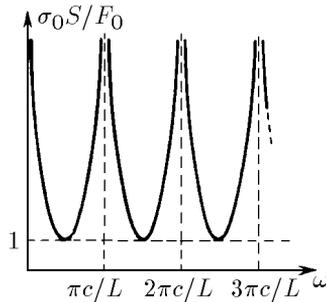
$$3.9.9^*. \text{ При } l = (1/4 + n)\lambda; \text{ при } l = (3/4 + n)\lambda, \lambda = 2\pi c/\omega.$$

$$3.9.10. L = 2\lambda, c = L\omega/4\pi.$$

3.9.11\*. а. Узлы напряжений находятся на расстояниях от свободного конца, кратных  $\lambda/2$ .

$$F_0 = \frac{\sigma_0 S}{\sin(2\pi L/\lambda)}.$$

◇ б. См. рис.;  $\omega = 2\pi nc/(2L)$ , где  $n$  — целое число,  $c = \omega\lambda/(2\pi)$  — скорость звука. Можно.



К ответу 3.9.11

**3.9.12.**  $\nu_n = n \cdot 2500$  Гц. На расстоянии 25 см от его концов.

**3.9.13.** Уменьшатся в два раза.

**3.9.14\*.**  $A = \frac{A_0}{|\sin(\omega L/c)|}$ .  $\tau = \frac{2\pi}{\omega |\sin(\omega L/c)|}$ .

**3.9.15.**  $\nu = c/(2L) = 8,25$  Гц.

**3.9.16.** При изменении высоты столба воздуха, находящегося в сосуде, меняются его резонансные частоты. Звук усиливается при уменьшении разности между частотой камертона и одной из резонансных частот столба воздуха.

**3.9.17.** 50, 250, 450 м и т. д.

**3.9.18.**  $\nu_0^{(1)} = 300$  Гц;  $\nu_0^{(2)} = 150$  Гц.

**3.9.19.** Чтобы набор собственных частот инструмента был как можно богаче. Тон понижается с увеличением размера.

**3.9.20.** В звучание голоса вносят вклад собственные колебания воздуха. Соответствующие длины волн в гелиево-кислородной среде будут неизменны, а частоты возрастут при росте скорости звука. Общий тон голоса повысится. Частота же колебаний камертона не изменится, той же частоты будет и звук.

**3.9.21.**  $F = 4l^2\nu^2\mu = 144$  Н.

**3.9.22.** Около пучностей смещений на расстоянии  $l/6$  или  $l/3$  от конца струны.

**3.9.23.** Из-за трения между рукой и стержнем возникнут большие потери энергии. Они наименьшие для середины стержня, где имеется узел скоростей, наибольшие — для его концов, где пучность скоростей.

**3.9.24\*.** Основные потери энергии связаны с переходом волны из одной среды (сапфир) в другую (воздух). Коэффициент прохождения

$$D = 4\rho_{\text{возд}}c_{\text{возд}}/\rho_{\text{сапф}}c_{\text{сапф}} = 0,7 \cdot 10^{-4}$$

(см. задачу 3.8.15). Потери увеличатся примерно в  $10^4$  раз.

**3.9.25\*.** Мощность проходящей волны составляет одну и ту же долю от мощности падающей независимо от того, идет звук из воздуха в воду или из воды в воздух, при этом доля эта весьма малая. Иное дело — давление. При отражении звуковой волны в воздухе на границе с водой образуется пучность давления, поэтому в проходящей в воду волне давление почти в два раза больше, чем давление в падающей звуковой волне. (Рассматриваем только нормальное падение волны на границу двух сред; в других случаях качественно картина та же.) Когда же звуковая волна падает на границу раздела из воды, то на этой границе образуется узел давления, и в проходящей в воздух волне давление почти равно нулю. Это приближенное объяснение основано на том, что  $\rho c$  для волны и воздуха отличаются во много раз (примерно в 330 раз). Можно точно рассчитать изменение давления. Давление в проходящей волне в первой среде

$$P_{\text{пр1}} = \frac{2\rho_1c_1}{\rho_1c_1 + \rho_2c_2} P_{\text{пад2}},$$

где  $P_{\text{пад2}}$  — давление падающей волны во второй среде. При переходе из воды в воздух давление уменьшается примерно в 150 раз.

$$3.9.26^*. M = \frac{\sqrt{mk}}{\omega} \operatorname{ctg} \omega \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

## ГЛАВА 4. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

### § 4.1. Давление в жидкости

$$4.1.2. F_1 = 2000\sqrt{2} \text{ Н. } F_2 = 0.$$

$$4.1.3^*. P = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{F}{a^2}.$$

4.1.4. Да.

$$4.1.5. F = 2\pi r^2 P.$$

$$4.1.6. F = \pi(R^2 - r^2)P.$$

$$4.1.7^*. \sigma = \frac{(R - \Delta)^2}{R^2 - (R - \Delta)^2} P.$$

◇ 4.1.8\*. Сила  $F_1$ , действующая на единицу длины окружности поперечного сечения сосиски, меньше силы  $F_2$ , действующей на единицу длины периметра ее продольного сечения.

$$4.1.9. \text{ На расстоянии } l = \frac{d_1^2 - d_3^2}{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} a \text{ влево от центра палки.}$$

$$4.1.10. h = 727 \text{ см.}$$

$$4.1.11. F_H = 4392 \text{ Н; } F_B = 4314 \text{ Н; } F_G = 4353 \text{ Н; } F = 78 \text{ Н.}$$

$$4.1.12^*. F = (1/12)\rho g a^2 (3\sqrt{3}h - \sqrt{2}a) + (1/4)Pa^2\sqrt{3}.$$

4.1.13\*. Составляющие силы, параллельная и перпендикулярная дну сосуда:

$$F_{\parallel} = a^3(\rho - \rho_0)g \sin \alpha, \quad F_{\perp} = a^3\rho_0g \left( \frac{\rho}{\rho_0} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{h}{a} \right) + Pa^2.$$

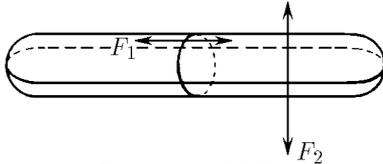
$$4.1.14. x = H - (R^2/r^2)(1 + a/r)(\rho/\rho_0 - 1)h.$$

$$4.1.15. h = 85 \text{ см.}$$

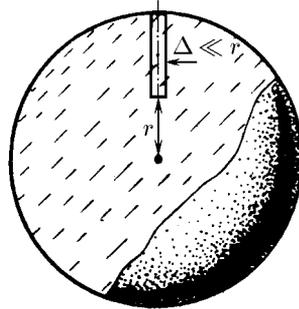
$$4.1.16. h = 10,1 \text{ м.}$$

$$4.1.17^*. m = \pi R^3 \rho / 3.$$

$$4.1.19^*. A = \pi r^2 \left( h + \frac{1}{2} l \frac{r^2}{R^2} \right) \rho g l.$$



К ответу 4.1.8



К ответу 4.1.20

◇ 4.1.20\*. Давление  $P_r$  можно найти из условия равновесия выделенного на рисунке тонкого цилиндрического объема: сила притяжения этого объема к центру планеты, равная произведению массы объема на ускорение поля тяжести в центре объема, уравновешивается силой давления, действующей на нижнее сечение,

$$P_r = \frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2(R^2 - r^2), \quad P_0 = \frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2R^2.$$

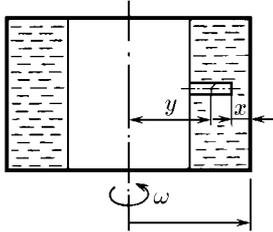
4.1.21. В направлении ускорения сосуда.

$$4.1.22. \beta = \alpha - \operatorname{arctg} \mu.$$

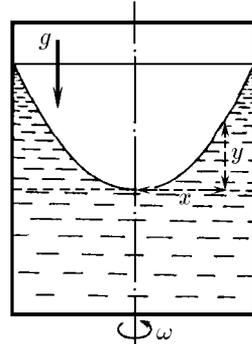
◇ 4.1.23\*. Давление  $P(x)$  можно найти из условия, что сила давления на внутреннее основание выделенного на рисунке тонкого цилиндрического объема равна  $m\omega^2 y$ , где  $y$  — расстояние от центра цилиндра до оси вращения,  $m$  — масса выделенного объема:

$$P(x) = \rho\omega^2[(R - x)^2 - R^2/4]/2.$$

$$◇ 4.1.24. y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2.$$



К ответу 4.1.23



К ответу 4.1.24

### § 4.2. Плавание. Закон Архимеда

4.2.1.  $P = mg/S + P_0$ .

4.2.2.  $h = H(\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ .

4.2.3.  $H = (m - \rho_1 h S)/[S(\rho_2 - \rho_1)]$ .

◇ 4.2.4\*. Если при малом повороте параллелепипеда вокруг оси, проходящей через точку  $O$ , момент сил, действующих на параллелепипед, будет направлен в сторону, противоположную направлению поворота, его положение устойчиво. Это условие выполняется при

$$\frac{a}{b} > \sqrt{6 \frac{\rho}{\rho_0} (1 - \rho/\rho_0)}$$

4.2.5.  $A = 34$ .

4.2.6.  $V = 147 \text{ см}^3$ .

4.2.7.  $\rho = 1,5 \text{ г/см}^3$ .

4.2.8.  $\rho'_1/\rho'_2 = \rho_1/\rho_2$ .

4.2.9\*.  $x = 4m/[\pi(d_1^2 + d_2^2)]$ .

4.2.10.  $F = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$ .

4.2.11.  $F = (2/3)\pi r^3 \rho g(1 + 2r/l)$ .

4.2.12.  $F = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$ .

4.2.13.  $\rho = 2/3 \text{ г/см}^3$ .

4.2.14.  $F = mg/\sqrt{3}$ .

4.2.15\*. а.  $F = \rho g R(H + L/2)^2$ . б.  $F = \rho g L(H + R)^2/2$ .

4.2.17.  $m = 520 \text{ г}$ .

4.2.18\*.  $m = (4/3)\pi(R^2 + r^2)^{3/2} \rho$ .

4.2.19\*.  $m_1 = \rho a^3(6 + 5 \text{tg } \alpha + \text{tg}^3 \alpha)/24$ ;  $m_2 = \rho a^3(6 - 5 \text{tg } \alpha - \text{tg}^3 \alpha)/24$ .

4.2.20\*.  $T = \sqrt{3} mg/72$ .

4.2.21. а.  $Q = 1 \text{ кДж}$ . б\*.  $Q = \pi r^2 \rho g h H \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{h}{H} \frac{\rho}{\rho_0} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]$ .

4.2.22.  $Q = (4/3)\pi R^3 \rho g H = 410 \text{ Дж}$ ,  $\rho$  — плотность воды.

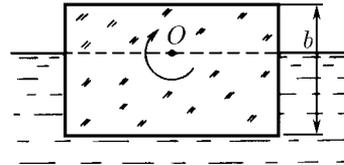
4.2.23.  $A = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ .

4.2.24\*. а. Сможет.  $\rho[\text{г/см}^3] = \left( 1 + \frac{\Delta}{2R - 2H - 2\Delta + l} \right) \left( 1 - \frac{\Delta}{l} \right)$ .

4.2.25\*.  $F = (4/3)\pi r^3 (R - r)\rho \omega^2$ .

4.2.26.  $\omega = \sqrt{(g \text{tg } \alpha)/[R - (l + r) \sin \alpha]}$ .

4.2.27.  $F \approx (m_1 - m_2)\omega^2 R/2$ .



К ответу 4.2.4

### § 4.3. Движение идеальной жидкости

4.3.1. 28,5; 27,0; 25,6 м/с. На двенадцатый этаж.

4.3.2.  $\Delta T = 2gh\rho S$ .

4.3.3.  $N = \rho V[gh + V^2/(2S^2)]$ .

4.3.4. а. Из-за разницы давлений в сечениях 1 и 2 на жидкость, находящуюся между этими сечениями, в направлении ее движения действует результирующая сила давления, большая силы, действующей со стороны участка А.

б.  $F = \rho v^2 S_1(1 - S_2/S_1)^2/2$ .

◇ 4.3.5. Давление в сосуде  $P_c = P_0 + \rho gx$ , давление в трубке  $P_T = P_0 + \rho g(x - H)$ .

4.3.6.  $F = \sqrt{2}(P + \rho v^2)S$ .

4.3.7.  $v = \sqrt{2FS/[\rho(S^2 - s^2)]}$ .

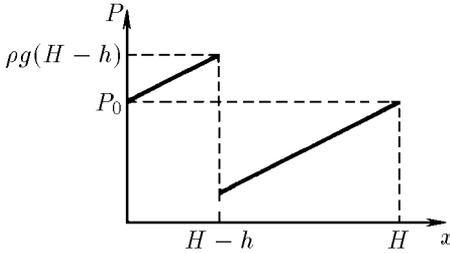
4.3.8.  $x = 5l$ .

4.3.9.  $h = \frac{1}{2g} \left[ v^2 - \left( \frac{mg}{\rho v S N} \right)^2 \right]$ .

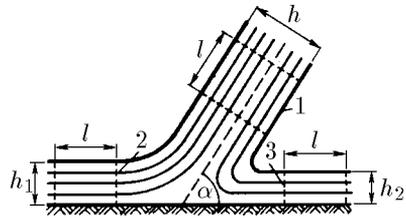
4.3.10\*.  $a = \frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0 r^2 / (R^2 - r^2)} g$ ,  $\Delta P = \frac{\rho R^2}{\rho(R^2 - r^2) + \rho_0 r^2} \rho_0 g h$ .

4.3.11\*. Размеры продольного сечения струи увеличатся в 2 раза. Скорость подобных участков в струе увеличится в  $\sqrt{2}$  раз. Поэтому сброс увеличится в  $2\sqrt{2}$  раза.

4.3.12\*. Струи будут подобны. Все размеры струи при понижении уровня воды уменьшатся в  $H/h$  раз, скорость подобных участков в струе уменьшится в  $\sqrt{H/h}$  раз. Поэтому скорость понижения уровня уменьшится в  $(H/h)^2 \sqrt{H/h} = (H/h)^{5/2}$  раз.



К ответу 4.3.5



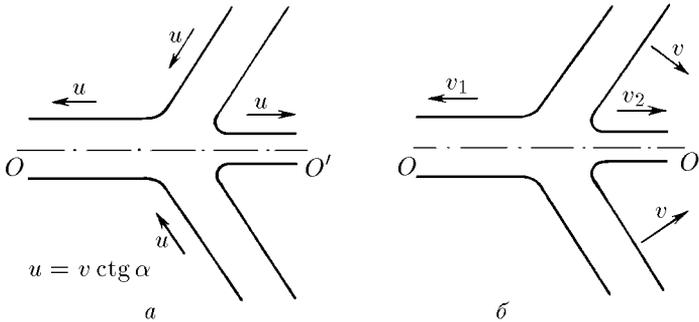
К ответу 4.3.13

◇ 4.3.13. Из закона сохранения энергии следует, что скорость выделенных на рисунке участков 2, 3 струи на плоскости будет равна скорости участка 1, а из закона сохранения импульса следует, что

$$h_1 = h(1 + \cos \alpha)/2, \quad h_2 = h(1 - \cos \alpha)/2.$$

◇ 4.3.14\*. Нужно перейти в систему отсчета, в которой пластины движутся вдоль своих плоскостей. В этой системе пластины будут двигаться как две встречные струи, изображенные на рисунке а. Их движение над и под плоскостью  $OO'$  повторяет движение струи, рассмотренной в задаче 4.3.13. Затем нужно вернуться в прежнюю систему отсчета (б).  $v_1 = v \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $v_2 =$

$v \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

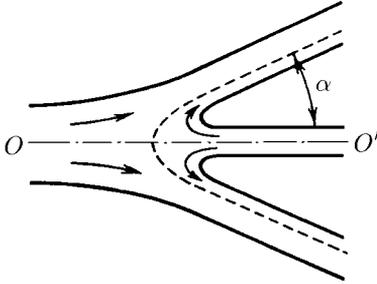


К ответу 4.3.14

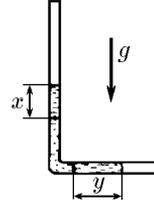
◇ 4.3.15\*. Конус;  $\cos \alpha = (R^2 - r^2)/(R^2 + r^2)$ .

4.3.16\*. Задача сводится к задаче 4.3.15, если перейти в систему отсчета, в которой встречные скорости брони и струи металла будут равны по модулю.  $v = 1$  км/с.

◇ 4.3.17\*.  $h = l \cos(t\sqrt{g/l})$ .  $P = x\rho g/2$  в вертикальной части трубки.  $P = y\rho g/2$  в горизонтальной части трубки.



К ответу 4.3.15



К ответу 4.3.17

4.3.18\*.  $a = g(s/S)^2$ .

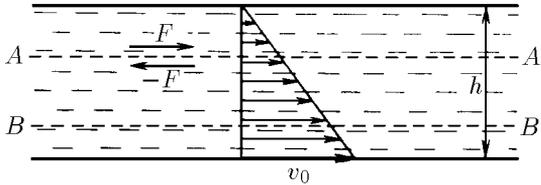
4.3.19.  $E = PV$ .

4.3.20\*.  $v = \sqrt{\frac{2P}{3\rho}(R^3/r^3 - 1)}$ ,  $\rho$  — плотность воды.

4.3.21\*. Если атмосферное давление не в состоянии сообщить воде скорость, равную скорости кромки винта  $v$ , то за кромкой может появиться полость;  $v > 14$  м/с.

#### § 4.4. Течение вязкой жидкости

◇ 4.4.1. Сила, с которой слои жидкости действуют друг на друга через единицу площади поверхности раздела  $AA'$ ,  $F = \eta \frac{dv}{dx}$ . При стационарном течении результирующая сила, действующая на слой жидкости между любыми поверхностями раздела  $AA'$  и  $BB'$ , равна нулю. Поэтому градиент скорости везде одинаков и равен  $v_0/h$ , а скорость на расстоянии  $x$  от неподвижной плоскости равна  $v_0x/h$ ,  $0 < x < h$ ,  $F = \eta v_0/h$ .



К ответу 4.4.1

4.4.2.  $v = \frac{P}{2\eta}x(h-x)$ ,  $0 < x < h$ ;  $Q = \frac{P}{12\eta}h^3$ .

4.4.3\*. а.  $Q = \frac{h^3\rho g}{3\eta} \sin \alpha$ . б.  $\alpha \approx 8 \cdot 10^{-8}$  рад.

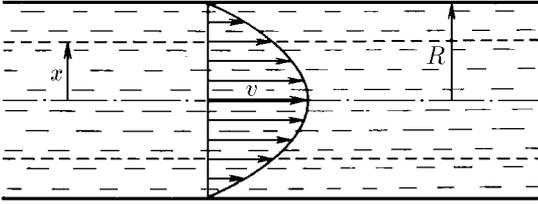
4.4.4\*.  $v = 2mg\Delta^2/(\pi r^2 h \eta)$ .

◇ 4.4.5. а) Результирующая сила давления на торцы выделенного цилиндрического объема жидкости  $P \cdot \pi x^2$  уравновешивается силой вязкого трения  $2\pi x l \eta \frac{dv}{dx}$ . Поэтому  $\frac{dv}{dx} = -\frac{xP}{2l\eta}$ ,  $0 <$

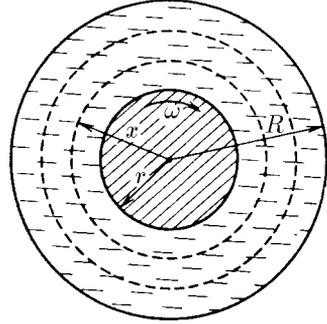
$x < R$ . б\*)  $v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - x^2)$ . Объем жидкости, перетекающей в единицу времени,  $Q = \pi R^4 P^2 / (8\eta l)$ .

4.4.6.  $t = T.$

4.4.7\*.  $t = 32\eta l / (\rho g d^2 \sin \alpha).$



*K ответу 4.4.5*



*K ответу 4.4.8*

◇ 4.4.8. а) Момент сил, действующих по цилиндрической границе раздела между слоями жидкости, не зависит от радиуса цилиндра  $x$ , так как только в этом случае результирующий момент сил, действующих на жидкость между двумя цилиндрическими поверхностями, равен нулю и жидкость движется стационарно. Поэтому

$$M_x = -x \cdot 2\pi x \cdot \eta x \frac{d\omega_{ж}}{dx} = M, \quad \frac{d\omega_{ж}}{dx} = -\frac{M}{2\pi\eta x^3}, \quad r < x < R.$$

$$\sigma^* \cdot \omega_{ж} \frac{M}{4\pi\eta} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right), \quad \omega \frac{M}{4\pi\eta} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right).$$

4.4.9.  $F = P_2 S_2 - P_1 S_1 - \rho v_1^2 S_1 (1 - S_1/S_2).$

§ 4.5. Поверхностное натяжение жидкости

4.5.3.  $r \approx 0,5$  см.

4.5.4.  $F = 2(\sigma_1 - \sigma_2)l.$

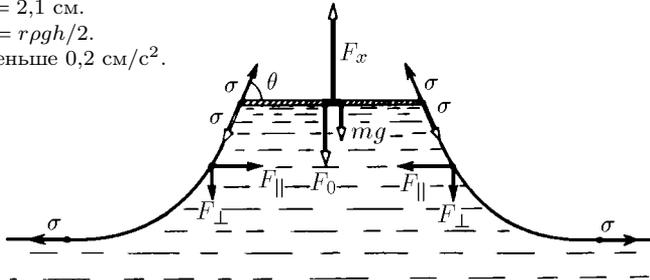
4.5.5.  $\sigma = k(2\pi R - l)/(2R).$

4.5.6. а.  $A \approx 2V\sigma/\Delta.$  б.  $n \approx 4.$

4.5.7.  $a = 2,1$  см.

4.5.8.  $\sigma = r\rho gh/2.$

4.5.9. Меньше  $0,2$  см/с<sup>2</sup>.



*K ответу 4.5.10*

◇ 4.5.10\*. На рисунке изображены силы, действующие на участок пластины единичной длины (двойные стрелки), и силы, действующие на участки боковой поверхности жидкости единичной длины (жирные стрелки):  $F_x$  — искомая сила,  $mg$  — сила тяжести, действующая на пластину,  $F_0 = \rho g x l$  и  $F_{||} = \rho g x^2/2$  — силы, вызываемые отрицательным давлением жидкости,  $\sigma$  — поверхностное натяжение. Из условия равновесия боковой поверхности жидкости следует, что

$$F_{||} = \rho g x^2/2 = \sigma - \sigma \cos \theta, \quad \cos \theta = 1 - \rho g x^2/(2\sigma).$$

Из условия равновесия пластины имеем

$$F_x = F_0 + mg + 2\sigma \sin \theta = mg + \rho g x(l + 2\sqrt{\sigma/\rho g - x^2/4}).$$

4.5.11.  $m = 0,55 \text{ г/см}^2$ .

4.5.12. а.  $h = \sqrt{2\sigma(1 - \sin \theta)/(\rho g)}$ . б.  $h = 3,9 \text{ мм}$ .

4.5.13. а.  $x = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\sigma/(\rho g)}$ . б.  $x = 5,4 \text{ мм}$ .

4.5.14\*. а.  $x = \sqrt{\frac{2\rho_{\text{ж}}(\sigma_{\text{м}} + \sigma_{\text{ж.м.}} - \sigma_{\text{ж}})}{\rho_{\text{м}}(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{м}})g}}$ , если  $\sigma_{\text{ж}} \leq \sigma_{\text{м}} + \sigma_{\text{ж.м.}}$ ;  $x = 0$ , если  $\sigma_{\text{ж}} \geq \sigma_{\text{м}} +$

$\sigma_{\text{ж.м.}}$ . Около  $2,5 \text{ км}^2$ .

4.5.15\*. Вертикальная составляющая силы поверхностного натяжения равна периметру поперечного сечения палочки, умноженному на  $\sigma \cos \vartheta$ . Поэтому объем жидкости, поднятой поверхностным натяжением, не зависит от формы поперечного сечения палочки, а зависит от его периметра.

4.5.17.  $P_{\text{макс}} = 2\sigma/R + \rho g(h + R)$ ,  $P_{\text{мин}} = 2\sigma/R + \rho g(h - R)$ .

4.5.18.  $R = \sigma/(\rho g x)$ .

4.5.19.  $P = P_0 + 2\sigma[1/R + 1/(R - h)]$ .

4.5.20. Около 3 л.

4.5.22\*.  $h = 2r \sqrt{\frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2}}$ .

4.5.23.  $R = rR_0/(R_0 - r)$ .  $\alpha = 120^\circ$ .

4.5.24\*.  $m = \pi r^2(\rho h + 2\sigma/Rg)$ .

4.5.25.  $h = 0,14 \text{ мм}$ .

4.5.26.  $A = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$ .

4.5.27\*. В тонкой струе сумма  $\rho v^2/2 + \rho gh + \sigma/r$  (здесь  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $v$  — плотность, поверхностное натяжение и скорость струи, а  $r$  и  $h$  — радиус струи и расстояние до крана) не изменяется.  $h \approx 2 \text{ см}$ .

## § 4.6. Капиллярные явления

4.6.1. б. Изнутри.

4.6.2.  $h = 2\sigma/(\rho g R)$ ;  $A = 4\pi\sigma^2/(\rho g)$ ;  $U = 2\pi\sigma^2/(\rho g)$ . Часть энергии переходит в тепло.

4.6.3.  $r = 1,5 \text{ мкм}$ .

4.6.4\*. а.  $V = \pi r^3 \sigma/(4\eta h)$ . б.  $V = 1,1 \text{ см}^3/\text{с}$ .

4.6.5.  $\Delta = 0,4\%$ .

4.6.6.  $r_2 = -1,5 \text{ мм}$ ,  $r_4 = 1,5 \text{ мм}$ .

4.6.7.  $\Delta x = 2\sigma/(\rho g r)$ , если  $0 < x < h - 2\sigma/(\rho g r)$ ;  $\Delta x = h - x$ , если  $h - 2\sigma/(\rho g r) < x < h + 2\sigma/(\rho g r)$ ;  $x_0 = h + 2\sigma/(\rho g r)$ .

4.6.8.  $r_x = 2r/\cos \theta$ .

4.6.9\*.  $\omega = \frac{2}{l} \sqrt{\sigma/(r\rho)}$ .

4.6.10.  $x = 2h$ , если  $l > h$ ;  $x = l + h$ , если  $l < h$ .

4.6.11\*.  $t = 17^\circ \text{ C}$ .

4.6.12. Смачивающая жидкость будет двигаться в сторону узкой части капилляра, несмачивающая — в сторону его широкой части.

4.6.13\*.  $x = \frac{1}{2}H \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{16\sigma}{\rho g \alpha H^2}} \right)$ ,  $\alpha > \frac{16\sigma}{\rho g H^2}$ ;  $x = H$ ,  $\alpha < \frac{16\sigma}{\rho g H^2}$ .

4.6.14.  $x = \frac{\sigma}{\rho g \Delta} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$ .

4.6.15.  $F = a\sigma(1 - \cos \theta)$ .

4.6.16\*.  $F = 2a\sigma^2/(\rho g \Delta^2)$ .

4.6.17\*.  $h = \sigma l/(S\rho g)$ ,  $T = 2\pi\sqrt{h/g}$ .

## ГЛАВА 5. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

### § 5.1. Тепловое движение частиц

5.1.1.  $K \approx 5,8 \cdot 10^{-21}$  Дж,  $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$  м/с.

5.1.2. В два раза.

5.1.3.  $m \geq 0,01$  мг.

5.1.4.  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} \approx 6,4 \cdot 10^{-8}$  м.

5.1.5\*.  $\Delta r \approx 7$  см. При  $T = 100$  К  $d \approx 4$  см.

5.1.6. Легкие, т. е. более подвижные частицы, быстрее проходят сквозь перегородку. Поэтому сначала выравнивается число легких частиц в единице объема, и давление в секции, где находились тяжелые частицы, увеличивается.

5.1.7.  $P_{\text{He}}/P_{\text{H}_2} = 1/\sqrt{2}$ .

5.1.8\*.  $N_1/N_2 = (\mu_2/\mu_1)^{(n-1)/2}$ .

5.1.9\*.  $\tau' = n\tau$ .

5.1.10. В  $L^2/R^2$  раз.

5.1.11\*.  $N_1 = N\sqrt{T_2}/(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})$ ,  $N_2 = N\sqrt{T_1}/(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1})$ . В сторону первого объема.

### § 5.2. Распределение молекул газа по скоростям

5.2.1. а.  $N = 1,3 \cdot 10^{15}$  л<sup>-1</sup>. б.  $N_1 = 1,3 \cdot 10^{17}$  м<sup>-3</sup>;  $N_2 = 1,3 \cdot 10^{19}$  м<sup>-3</sup>.

5.2.2.  $N_1 = 6,2 \cdot 10^4$  см<sup>-3</sup>;  $N_2 = 1,2 \cdot 10^4$  см<sup>-3</sup>.

5.2.3. а)  $N_1 \approx 10^{16}$  см<sup>-3</sup>, б)  $N_2 \approx 2 \cdot 10^{22}$  м<sup>-3</sup>.

5.2.4.  $T = 21$  К.

5.2.5.  $n = 0,13$ .

5.2.6.  $n = 6 \cdot 10^{-3}$ .

5.2.7\*. Температура будет уменьшаться.

5.2.8\*.  $L = l \frac{\tau}{t_0} \left( 1 + \frac{2t}{t_0 + 2\tau} \right)$ .

5.2.9.  $v = 300$  м/с.

5.2.10.  $v = h\omega/(2\pi)$ .

5.2.11. а.  $f' = \frac{1}{l} f\left(\frac{v}{l}\right)$ . б.  $f' = \frac{1}{kl} f\left(\frac{v}{kl}\right)$ .

5.2.12.  $f(v) = 1/v_0$  при  $v_0 \leq v \leq 2v_0$ ,  $f(v) = 0$  в остальной области значений  $v$ . Функция распределения  $f(v)$  сдвинется на  $\Delta v = F\tau/m$  в область больших скоростей.

5.2.13\*. а.  $v_{\text{мин}} = v + \frac{Fr}{m}$ ,  $v_{\text{макс}} = v + \frac{Fr}{m} + \Delta v$ ,  $n' = n$ . б.  $v_{\text{мин}} = v\sqrt{1 + 2\frac{Fl}{mv^2}}$ ,  
 $v_{\text{макс}} = (v + \Delta v)\sqrt{1 + 2\frac{Fl}{m(v + \Delta v)^2}} \approx v\sqrt{1 + \frac{Fl}{mv^2}} + \Delta v/\sqrt{1 + 2\frac{Fl}{mv^2}}$ ,  $n' = n/\sqrt{1 + 2\frac{Fl}{mv^2}}$ .

5.2.14\*. а. Уменьшится в  $\exp(2Fl\alpha/m)$  раз. б.  $\rho = \rho_0 \exp(-mgh/kT)$ ; не изменится.

5.2.15.  $m = 10^{-24}$  кг,  $r = 10^{-9}$  м.

5.2.16.  $h_1 \approx 111$  км,  $h_2 \approx 123$  км.

5.2.17\*. а.  $n \approx n_0 \exp(-q/kT)$ . б.  $n = 10^{15}$  см<sup>-3</sup>.

### § 5.3. Столкновения молекул. Процессы переноса

5.3.1.  $d \approx 0,3$  нм.

5.3.2.  $l \approx 60$  нм.

5.3.3.  $\nu_1 \approx 6 \cdot 10^{28}$  с<sup>-1</sup> · см<sup>-3</sup>;  $\nu_2 \approx 3 \cdot 10^{28}$  с<sup>-1</sup> · см<sup>-3</sup>.

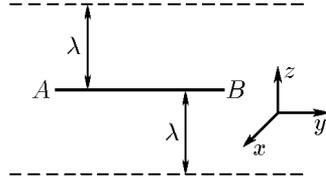
5.3.4. Увеличилось в 1,5 раза.

5.3.5.  $l_1 \sim \pi^{-1}[4R_1^2 n_1 + (R_1 + R_2)^2 n_2]^{-1}$ ;  $l_2 \sim \pi^{-1}[4R_2^2 n_2 + (R_1 + R_2)^2 n_1]^{-1}$ .

5.3.6\*.  $t \approx 30$  пс.

5.3.7\*.  $n = 2\sqrt{2}r_{AB}/(r_A + r_B)$ .

◇ **5.3.8.** а. Горизонтальную единичную площадку  $AB$ , находящуюся на высоте  $h$ , пересекает сверху вниз поток радиоактивных атомов, плотность которого оценивается по формуле  $W_1 \approx \bar{v}_z n_{h+\lambda}/2$ , где  $\bar{v}_z$  — скорость, близкая к среднеквадратичной  $\sqrt{\langle v_z^2 \rangle} = \sqrt{kT/m}$ , а  $n_{h+\lambda} = \alpha(h+\lambda)$  — число атомов в единице объема на высоте  $h+\lambda$ . Плотность же потока атомов, идущего снизу,  $W_2 = \bar{v}_z n_{h-\lambda}/2 \approx \sqrt{kT/m} \alpha(h-\lambda)/2$ . Результирующая плотность потока радиоактивных атомов на Землю  $W = W_1 - W_2 \approx \alpha \lambda \sqrt{kT/m}$ . б.  $D \approx 12$  мкм/с.



*К ответу 5.3.8*

**5.3.9.**  $D = nD_1 D_2 / (n_1 D_2 + n_2 D_1)$ .

**5.3.10\***.  $t \approx L/D$ ;  $m = DS\rho/L$ .

**5.3.11.** а. Решение аналогично решению задачи 5.3.8а:  $W \approx \alpha \lambda k \sqrt{kT_0/m}$ . Не изменится.

б. В 6,2 раза.

**5.3.12.**  $W \approx 12$  Вт,  $t \approx 2$  ч. Из-за конвекции воздуха.

**5.3.13\***.  $\varkappa = \frac{\varkappa_1}{1 + \frac{1}{4\alpha} \left[ 1 + \left( \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \sqrt{\mu_1/\mu_2} \right)^{1/2} \right]^2} + \frac{\varkappa_2}{1 + \frac{\alpha}{4} \left[ 1 + \left( \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \sqrt{\mu_2/\mu_1} \right)^{1/2} \right]^2}$ .

**5.3.14.**  $t' = nt$ .

### § 5.4. Разреженные газы.

#### Взаимодействие молекул с поверхностью твердого тела

**5.4.1.**  $\nu \approx 10^{24} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$ ,  $\Delta p/\Delta t \approx 10$  Н.

**5.4.2.** Уменьшится в  $1 - k/2$  раз.

**5.4.3.**  $F \approx \pi r^2 n m v^2$ .

**5.4.5.**  $F \approx 4\pi r^2 P v \sqrt{\mu/(RT)}$ , где  $R$  — газовая постоянная.

**5.4.6.**  $F = Ps/2$ .

**5.4.7.**  $F \approx P S v \sqrt{\mu/(RT)}$ .

**5.4.8.** Пока длина свободного пробега молекул газа больше расстояния между дисками, момент силы вязкого трения зависит от давления.  $\varphi = (\varphi_1/P_1)P$ .

**5.4.9.**  $\omega' = \omega(r_1/r_2)^2$ .

**5.4.10\***. При освещении пластин температура зачерненной поверхности становится выше, чем зеркальной. Поэтому в разреженном газе давление на нее несколько выше. Вертушка будет вращаться в сторону зеркальной поверхности.

**5.4.11\***.  $F \approx 10^{-2}$  Н.

**5.4.12.**  $v \approx 1$  м/с.

**5.4.13\***.  $P \approx FT_1/[S(T_2 - T_1)]$ .

**5.4.14\***.  $P_0 = P\sqrt{T_0/T}$ .

**5.4.15\***.  $P' = P(1 + \sqrt{2}) \cdot 2^{-5/4}$ ,  $T' = T\sqrt{2}$ .

**5.4.16\***.  $w = 1,5kn\Delta T \sqrt{3kT/\mu}$ .

**5.4.17.** Цену деления температурной шкалы нужно уменьшить в  $\sqrt{14}$  раз.

**5.4.18.**  $m \approx 0,1$  кг.

**5.4.19\***.  $r \approx (W_1/W_2 \pi n \delta)^{1/2}$ .

**5.4.20.** В случае *a* теплопроводность не меняется: в случае *б* — уменьшается в  $N$  раз.

### § 5.5. Уравнение состояния идеального газа

5.5.1. В три раза.

5.5.2.  $V = (P_2V_2 - P_1V_1)/(P_2 - P_1)$ .

5.5.3.  $\Delta m = m(k - 1)n/(n - 1)$ .

5.5.4\*.  $P = P_0 + mgh/(2\pi r^2L)$ .

5.5.5.  $V = 885$  л.

5.5.6.  $x = L(1 + \rho gL/2P)/2$ .

5.5.7.  $P = 1,166$  МПа.

5.5.8.  $\Delta t = 140$  °С.

5.5.9. В рабочем режиме, когда газ в баллоне нагрет, его давление не должно превышать атмосферное.

5.5.10\*.  $T = 9T_0/8$ .

5.5.11.  $n = (P - P_0)V_0/P_0V$ .

5.5.12.  $n = \frac{\ln(P_0/P)}{\ln(1 + V/V_0)}$ .

5.5.13. Не зависит.

5.5.14. Горелка коптит из-за недостатка кислорода. Вертикальная стеклянная трубка вызывает приток кислорода к пламени горелки.

5.5.15\*.  $\Delta P = 137$  Па.

5.5.16.  $T = T_0 \frac{2V_0 + S(l + 2x)}{2V_0 + S(l - 2x)}$ .

5.5.17.  $P = 1146$  гПа.

5.5.18.  $V_b/V_n = 1,9$ .

5.5.19.  $x = \frac{1}{2} \left\{ l + H + \frac{P_0}{\rho g} - \sqrt{\left( l + H + \frac{P_0}{\rho g} \right)^2 - 4lH} \right\}$ .

5.5.20.  $x = (H_0 - H) \left( 1 - \frac{\rho gh_0}{P_0 + \rho gH} \right)$ .

5.5.21. а.  $H = \frac{h}{2} \left( 1 + \frac{2\rho gh}{2P_0 + \rho gh} \right)$ . б.  $H = \frac{h}{2} + \frac{P_0}{\rho g}$ .

5.5.22.  $x = \frac{\sqrt{33} - 5}{2}$  а.

5.5.23\*.  $P = P_0 + \rho gH$ .

5.5.24\*.  $P_1 = 0,17$  МПа,  $P_2 = 0,18$  МПа.

5.5.25.  $N_2O_3$ .

5.5.26\*.  $m = 210$  г/м<sup>3</sup>.

5.5.27.  $F_{He}/F_{H_2} = 25/27$ .

5.5.28.  $M = 13,5m$

5.5.29.  $r = 15$  см.

5.5.30.  $m = \mu P_0 V (T - T_0)/(RTT_0)$ .

5.5.31.  $V = 15$  м<sup>3</sup>.

5.5.32.  $N = 0,28$ .

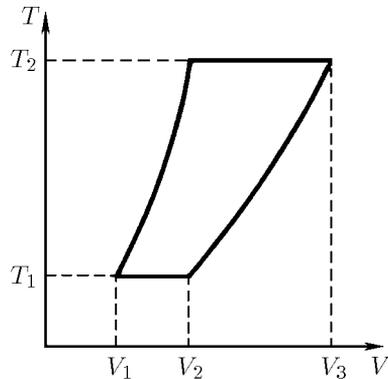
5.5.33.  $T = T_0 \frac{\mu(P_0 r + 4\sigma)}{\mu P_0 r - 3\delta RT_0 \rho}$ ,

где  $R$  — газовая постоянная.

5.5.34.  $\sigma = \frac{P r_1^3 + r_2^3 - r^3}{4 r^2 - r_1^2 - r_2^2}$ .

5.5.35.  $T = 2\pi \sqrt{ml/(2P_0S)}$ .

◇ 5.5.36.  $V_3 = V_2^2/V_1$ .



К ответу 5.5.36

### § 5.6. Первое начало термодинамики. Теплоемкость

5.6.1.  $\bar{\epsilon}_{H_2} = \bar{\epsilon}_{N_2} = (5/2)kT$ ,  $\bar{\epsilon}_{H_2O} = \epsilon_{CH_4} = 3kT$ .

5.6.2.  $U_1 = 0,25$  Дж,  $U_2 = 0,2$  МДж.

5.6.3. Не изменилась.

$$5.6.4. P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2}, T = T_1 T_2 \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{P_1 V_1 T_2 + P_2 V_2 T_1}.$$

5.6.5. В два раза.

$$5.6.6. v_{1\text{макс}} \approx \sqrt{\frac{3P_0 V_0 m_2}{m_1(m_1 + m_2)}}, v_{2\text{макс}} \approx \sqrt{\frac{3P_0 V_0 m_1}{m_2(m_1 + m_2)}}.$$

5.6.7.  $T_{\text{макс}} = T_0 + 2mv^2/(3R)$ , где  $R$  — газовая постоянная.

5.6.8.  $v \approx 10$  м/с.

5.6.9. При расширении без подведения тепла газ совершает работу и охлаждается.

5.6.10. При изобарическом расширении.

5.6.12. а)  $A = PV$ ; б)  $A = 3PV/2$ .

5.6.13.  $A = 460$  Дж.

5.6.14.  $Q = (c/R)(P_2 V_2 - P_1 V_1) + P_2(V_2 - V_1)$ , где  $R$  — газовая постоянная.

5.6.15.  $A = 2,6$  кДж.

5.6.16.  $A = 240$  Дж.

5.6.17.  $Q \approx 7,94$  кДж.  $A \approx 2,27$  кДж.

5.6.18.  $A \approx R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$ .

$$5.6.19. T = T_0 \left(1 + \frac{Mu^2}{3P_0 V_0}\right), V = V_0 \left(\frac{3P_0 V_0}{3P_0 V_0 + Mu^2}\right)^{3/2}.$$

5.6.20.  $A = 7\nu R(T_1 - T_2)/2$ .

5.6.21.  $\Delta t \approx 10^\circ\text{C}$ .

$$5.6.22^*. u_{\text{макс}} = \sqrt{2gH \left[1 - \frac{PS}{Mg} + \frac{PS}{Mg} \ln \frac{PS}{Mg}\right]};$$

$$u_{\text{макс}} = \sqrt{2gH \left[1 - \frac{5}{2} \left(\frac{PS}{Mg}\right)^{3/5} + \frac{3}{2} \frac{PS}{Mg}\right]}.$$

5.6.23\*.  $V_1 = \sqrt{V_0 V_2}$ ,  $A_{\text{мин}} = 5P_0 V_0 [(V_0/V_2)^{1/5} - 1]$ . Каждый компрессор совершает работу  $A_{\text{мин}}/2$ .

5.6.24.  $Q = 450$  кДж.  $\Delta U = 321$  кДж.

5.6.25. Кислород.

5.6.26\*.  $T = T_0 + Q/c$  при  $Q \leq Q_1 = cT_0 F/P_0 S$ ;

$$T = \frac{Q + cT_0 + RT_0(1 + F/2P_0 S)}{c(1 + F/P_0 S) + R(1 + F/2P_0 S)} \left(1 + \frac{F}{P_0 S}\right) \text{ при } Q \geq Q_1.$$

5.6.27.  $Q = 10\rho g S h^2$ .

5.6.28\*.  $c = (1/(1 - n) + 3/2)R$ ,  $n = 5/3$ ;  $n = 1$ .

5.6.29. Охлаждается.

5.6.30\*.  $c = 2P_0 V_0/T_0$ .

5.6.31\*.  $x = 3H(1 - PS/Mg)/5$ .

## § 5.7. Истечение газа

5.7.1.  $v = \sqrt{2c_p T/\mu}$ .

5.7.2\*.  $v = \sqrt{7(k+1)RT/(k\mu_1 + \mu_2)}$ .

5.7.3\*. а.  $T \approx 3150$  К. б.  $v \approx 3$  км/с.

5.7.4. а)  $v \approx 5,2$  км/с; б)  $v \approx 5,7$  км/с;  $v \approx 7$  км/с.

5.7.5.  $m = Mg/\sqrt{2c_p T/\mu} \approx 3,8$  т/с.

$$5.7.6^*. v = \left\{ \frac{2\gamma RT_1}{\mu(\gamma - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}.$$

5.7.7\*.  $T \approx 120$  К,  $v \approx 1370$  м/с.

5.7.8\*.  $T \approx 193$  К.  $P \approx 0,33$  МПа.

$$5.7.9^*. v' = v \frac{1}{1 + \gamma} \left[ 1 - \frac{P}{\rho v^2} + \sqrt{\left( \gamma + \frac{P}{\rho v^2} \right)^2 - \frac{2(\gamma^2 - 1)q}{\rho S v^3}} \right].$$

$F = \rho S v(v' - v)$ , где  $\rho = P\mu/(RT)$ .

§ 5.8. Вероятность термодинамического состояния

5.8.1. а.  $t = \tau/4$ . б.  $t = \tau/8$ . в.  $t = \tau/2^N$ .

5.8.2. а.  $p_1 = 1/4, p_2 = 1/2$ . б.  $p = 1/2$ . в.  $p_2 = 3/8, p_0 = 1/8$ .

5.8.3. а.  $p = (1 - V/V_0)^N$ . б.  $V = V_0(1 - 10^{-2/N})$ .

5.8.4\*.  $p \sim 10^{-10^{15}}, V \sim 10^{-17} - 10^{-18} \text{ см}^3$ .

◇ 5.8.5. а. На рисунке движение по траектории развернуто зеркальными отображениями в движение между двумя параллельными прямыми. Соответствующие точки траекторий отмечены одинаковыми буквами. Из этого рисунка следует:

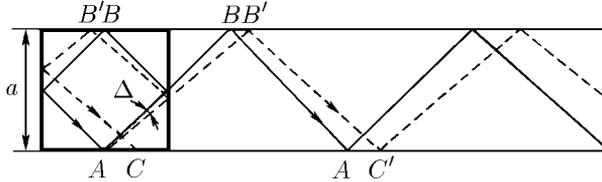
$$v' \approx \frac{x}{2A'B'}v \approx v\Delta\sqrt{2}; \quad \Delta \approx \frac{1}{2} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \Delta \right) - 1 \right] = \frac{k}{2n},$$

где  $k$  и  $n$  — целые числа, не имеющие общего делителя,

$$\operatorname{tg}(\pi/4 + \Delta) - 1 = k/n; \quad h_1 \approx 2a\Delta/k, \quad h_2 = 0.$$

б. Невероятно, чтобы  $\operatorname{tg}(\pi/4 + \Delta) - 1$  был точно равен простой дроби, например 0,03, так как вблизи этого числа может быть сколько угодно других чисел, например чисел типа  $0,03 + \sqrt{2}/n$ ,  $n$  — целое число, которые сколько угодно мало отличаются от 0,03. Эти числа называются иррациональными, и в математике доказывается, что множество этих чисел более мощно, чем множество простых дробей. Если число иррационально, то траектория не замкнута.  $p = S/a^2$ .

в\*.  $p = V/a^3$ .



К ответу 5.8.5

5.8.6\*. а.  $v' \approx v\Delta\sqrt{1 - 1/m^2}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = m$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha + \Delta) - 1 = k/n$ ,  $h_1 = 2\alpha\Delta/k$ ,  $h_2 = 0$ . б.  $p = S/a^2$ . в.  $p = V/a^3$ .

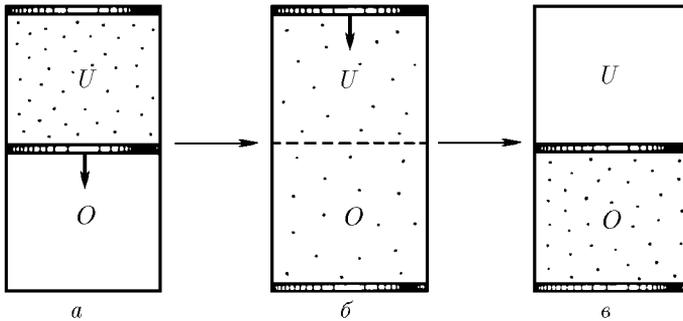
5.8.7.  $\tau \approx R/v\Delta$ ;  $\tau' \sim \tau H/R$  при  $H \gg R$ ,  $\tau' \sim \tau R/H$  при  $H \ll R$  и  $\tau' \sim \tau$  при  $H \sim R$ .

5.8.9.  $p = (V/V_0)^N$ .

5.8.10.  $A = 200 \text{ кДж}$ .

5.8.12\*. В  $(1 - V^2/V_0^2)^N$  раз.

5.8.13\*. В  $10^{4,8 \cdot 10^{22}}$  раз.



К ответу 5.8.14

◇ 5.8.14. а. Вероятность состояний, которые отличаются только потенциальной энергией, одинакова. На рис. а и в приведены два состояния идеального газа, наполовину заполняющего одинаковый объем и имеющие одинаковую вероятность. Перейдем из состояния а в состояние в

при постоянной температуре, пользуясь двумя поршнями так, как это изображено на рисунках. Изменением логарифма вероятности состояния при таком переходе  $\Delta S = NU/T + Nk \ln c$ , где  $N$  — число молекул газа,  $c$  — отношение значений давления газа над и под штриховой линией, разделяющей области с разным потенциалом. Но  $\Delta S$  равно нулю. Значит,  $c = \exp(-U/kT)$ .

**5.8.15.** Нереален.

**5.8.16.** Нереален. Реален.

### § 5.9. Второе начало термодинамики

**5.9.2.**  $\Delta S = 1,2$  кДж/К.

**5.9.3.**  $\Delta S = 7$  кДж/К.

**5.9.4.** а, б.  $\Delta S = (m/\mu)R \ln 2$ .

**5.9.5.** а-в.  $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \left\{ \frac{V_2}{V_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2} \right\}$ .

**5.9.6\***.  $\Delta S \approx 20$  Дж/К.

**5.9.7\***.  $\Delta S \approx 60$  Дж/К.

**5.9.8.**  $\Delta S = (PV/T) \ln 2$ .

**5.9.9\***. а.  $\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = \frac{5}{2} R \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}$ , где  $-Q_1$  и  $Q_2$  — количество теплоты, переданное нагревателю и холодильнику за один цикл.

б.  $\Delta S = \frac{R}{2} \left[ 3 \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} + 3 \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} + 2 \frac{V_2}{V_1} + 2 \frac{V_1}{V_2} - 10 \right]$ .

**5.9.10\***. а.  $\eta = 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{2/3}$ . б.  $\eta = \frac{2(T_2 - T_1) \ln(P_2/P_1)}{5(T_2 - T_1) + 2T_2 \ln(P_2/P_1)}$ .

**5.9.11.** Не существует.

**5.9.12.** Можно.

**5.9.13.**  $\eta \approx 10,8\%$ ,  $\eta = 30\%$ .

**5.9.14.** Для любого теплового циклического процесса

$$-Q_H/T_H + Q_X/T_X \geq 0, \quad Q_H - Q_X = A, \quad \eta = A/Q_H,$$

где  $T_H$  и  $T_X$  — температура соответственно нагревателя и холодильников,  $-Q_H$  и  $Q_X$  — количество теплоты, переданное нагревателю и холодильнику за один цикл,  $A$  — работа за один цикл. Из приведенных соотношений следует, что КПД  $\eta \leq (T_H - T_X)/T_X$ , причем знак равенства имеет место в случае  $Q_H/T_H - Q_X/T_X = 0$ , т. е. когда энтропия не меняется.

**5.9.15.** При детонации возрастает энтропия системы.

**5.9.16.**  $A \approx 33$  кДж.

**5.9.17.**  $A \approx 3 \cdot 10^{16}$  Дж,  $t \approx 60$  сут.

**5.9.18\***.  $A = C[T - T_0 - T_0 \ln(T/T_0)]$ .

**5.9.19\***.  $A = C_1 T_1 + C_2 T_2 - (C_1 + C_2) T_1^{C_1/(C_1+C_2)} T_2^{C_2/(C_1+C_2)} \approx 32$  кДж.

**5.9.20.** Повысится.

**5.9.21.**  $Q_{\max} = A(1 - \eta)/\eta$ .

**5.9.22.**  $N = 0,29$  МВт,  $N' = 0,11$  Вт.

**5.9.23.**  $m = 5$  кг.

**5.9.24\***.  $N = 138$  Вт.

**5.9.25\***.  $A = 46$  кДж.

**5.9.26.** Нет. Процесс длится до тех пор, пока не произойдет насыщение окружающей среды водяным паром.

### § 5.10. Фазовые переходы

**5.10.1.**  $t \approx 1$  ч.

**5.10.2.** Нет.

**5.10.3.** В сосуде без крышки вода с поверхности испаряется, для чего требуется дополнительное количество теплоты.

**5.10.4.**  $\Delta p \approx 10^{-8}$  Па.

- 5.10.5. 13% воды.
- 5.10.6. Смесь 100,5 г воды и 30,5 г льда при 0 °С.
- 5.10.7.  $m = 98$  г/с.
- 5.10.8\*.  $x \approx 0,11$  м.
- 5.10.9. а. Пока в кастрюле есть вода, температура дна порядка 100 °С. б. Можно.
- 5.10.11. Между поверхностью раскаленной плиты и каплей образуется прослойка пара, затрудняющая подвод тепла к воде.
- 5.10.12. Низкая температура воздуха в сосуде Дьюара поддерживается кипением воздуха, а низкая температура твердой углекислоты — сильным испарением ее с поверхности.
- 5.10.13. Происходит испарение льда в сухом воздухе.
- 5.10.14.  $v \approx 8$  м/с.
- 5.10.15\*. Четыреххлористый углерод выкипает в 25 раз быстрее.
- 5.10.16. Чтобы предотвратить конденсацию пара.
- 5.10.17. Нельзя.
- 5.10.18. При критической температуре жидкость и пар неразличимы.
- 5.10.19. Быстрее.
- 5.10.20.  $m = 11,7$  г.
- 5.10.21.  $P = 0,2$  МПа,  $A = 35$  кДж.
- 5.10.22.  $P = 0,37P_0$ .
- 5.10.23.  $\Delta v = m\lambda RT/[P_0(\mu q + RT)]$ .  $A = m\lambda RT/(\mu q + RT)$ .
- 5.10.24\*.  $h \approx 580$  м.
- 5.10.25. 5% воды.
- 5.10.26. 6% льда.
- 5.10.27. а.  $n = \exp(mgh/RT) = \exp(2m\sigma/\rho r)$ . б.  $\Delta h = 15$  см.
- 5.10.28.  $\Delta t = 2\varphi\lambda\mu_{\text{H}_2\text{O}}P_{\text{H}}/(7RP) = 23$  °С.
- 5.10.29. Уменьшится в два раза.
- 5.10.30.  $P = P_0(R/r)^2$ .
- 5.10.31\*.  $P = 2P_0(R/L)^2$ .
- 5.10.32. а. В  $m\sqrt{n}$  раз. б.  $P = 200P_0$ .
- 5.10.33.  $a = 1,0$  м/с<sup>2</sup>.
- 5.10.34.  $m_1 = 1,7$  кг/с,  $m_2 = 170$  кг/с.
- 5.10.35\*.  $T \approx 1720$  К.

### § 5.11. Тепловое излучение

- 5.11.1. а.  $\Phi \approx 0,2$  кВт. б.  $\varphi = 89$  МВт/м<sup>2</sup>.
- 5.11.2.  $T_1 \approx 600$  °С,  $T_2 \approx 2000$  °С.
- 5.11.3\*.  $w = 7,56 \cdot 10^{-16}$  Т<sup>4</sup> Дж/м<sup>3</sup>.
- 5.11.5. а. Кварц, в отличие от стали, почти не поглощает видимый свет, поэтому при нагревании он в видимой области излучает значительно слабее.  
б. В отличие от черного угля, почти полностью поглощающего видимый свет, белый мел этот свет отражает. Поэтому при нагревании мел излучает значительно меньше света и выглядит на фоне сильно излучающего угля темным.
- 5.11.6\*. а.  $T = T_0/\sqrt[4]{2}$ . б.  $T = \sqrt[4]{(T_1^4 + T_2^4)/2}$ .
- 5.11.7. а.  $T = T_0\sqrt{\varepsilon(R/2L)^2}$ . б.  $\varphi = 1,7$  кВт/м<sup>2</sup>.
- 5.11.8. а.  $T = 200, 70, -35$  °С. б.  $\Phi \approx 4 \cdot 10^{26}$  Вт. в.  $T = 140$  °С.
- 5.11.9.  $T = 2,4$  К.
- 5.11.10.  $T = 20$  °С.
- 5.11.11\*.  $\Phi = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2} \sigma S(T_1^4 - T_2^4)$ .
- 5.11.12. а.  $T' = T/\sqrt[4]{2}$ . б.  $n = 32$ .
- 5.11.13\*.  $T = \frac{T_0}{\sqrt[4]{6,5 + 4R/r}}$ .
- 5.11.14\*.  $T = \sqrt[4]{T_1^4 - T_2^4 + \left[ T_1 + \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} (T_1^4 - T_2^4) \frac{h}{\varkappa} \right]^4}$ .

5.11.16. а.  $a = \frac{S\Phi}{2\pi R^2 mc}$ . б\*.  $v = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \sqrt{\frac{S\Phi}{\pi mc}}$ .

5.11.17. а. На хвост кометы действует давление солнечных лучей. б.  $r \approx 1$  мкм.

## ГЛАВА 6. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### § 6.1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля

6.1.1. а.  $F = 1,8 \cdot 10^4$  Н. б.  $F = 2,3 \cdot 10^{-8}$  Н. в.  $4,17 \cdot 10^{42}$  раз.

6.1.2.  $q \approx 1,05 \cdot 10^{-5}$  Кл  $\approx 3,16 \cdot 10^4$  СГС.

6.1.3. а.  $E = 1$  В/м  $= 3,3 \cdot 10^{-5}$  СГС. б.  $E = 3 \cdot 10^5$  В/м  $= 10$  СГС.

6.1.4. На расстоянии 1 м  $E_1 = 9 \cdot 10^{10}$  В/м  $= 3 \cdot 10^6$  СГС; на расстоянии 20 м  $E_2 = 2,25 \cdot 10^8$  В/м  $= 7,5 \cdot 10^3$  СГС.

На заряд 0,001 Кл  $F_1 = 9 \cdot 10^7$  Н,  $F_2 = 2,25 \cdot 10^5$  Н;

на заряд 1000 СГС  $F_1 = 3 \cdot 10^9$  дин,  $F_2 = 7,5 \cdot 10^6$  дин.

6.1.5.  $F = 2,56 \cdot 10^9$  Н.

6.1.6.  $q = 3,5 \cdot 10^3$  Кл.

6.1.7.  $T_{12} = \frac{q_1(4q_2 + q_3)}{16\pi\epsilon_0 l^2}$ ,  $T_{23} = \frac{q_3(4q_2 + q_1)}{16\pi\epsilon_0 l^2}$ .

6.1.8. На расстоянии  $x = l\sqrt{q_1}/(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})$  от заряда  $q_1$ . Да. Нет.

6.1.9.  $q = l\sqrt{8\pi\epsilon_0 mg}$ .

6.1.10.  $T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left( Q^2 - \frac{q^2}{3\sqrt{3}} \right)$ .

6.1.11.  $\beta = 2 \arctg(q/Q)^{2/3}$ ,  $\alpha = \pi - \beta$ .

6.1.12.  $r = 1,4 \cdot 10^{-8}$  см.

6.1.13.  $\omega = q\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)/(8\pi\epsilon_0 ml^3)}$ .

6.1.14\*.  $q_{\min} = 32\pi\epsilon_0 mgR^2/Q$ .

6.1.15.  $k = \frac{q^2\sqrt{a^2 + l^2}}{32\pi\epsilon_0 a^3(\sqrt{a^2 + l^2} - l)}$ .

6.1.16\*.  $T = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 l^2} \left( \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ .

6.1.17.  $E_1 = 0$ ,  $E_2 = Qh/[(4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{3/2})]$ .

6.1.18\*.  $E = \rho l/[4\pi\epsilon_0 x(l + x)]$ .

6.1.19. а)  $E = \sigma/(6\epsilon_0)$ ; б)  $E = (\sigma_1 - \sigma_2)/(4\epsilon_0)$ ; в)  $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ ;

г)  $E = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}/(3\epsilon_0)$ ; д\*)  $E = \rho h(1 - \cos\alpha)/(2\epsilon_0)$ ;

е\*)  $E = \sqrt{3}l\rho/(12\epsilon_0)$ .

6.1.20. б. Да.

6.1.21. а.  $q = \sqrt{10}Q$ . б.  $q = 9Q$ .

### § 6.2. Поток напряженности электрического поля. Теорема Гаусса

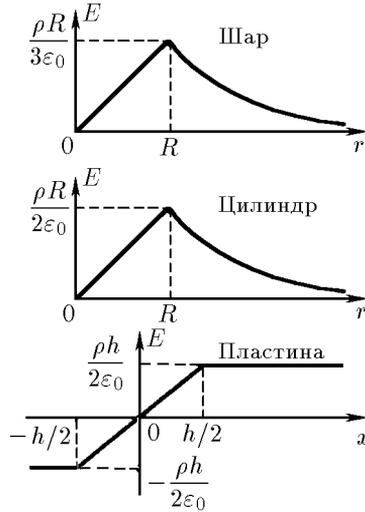
6.2.1. а.  $\Phi = El^2/2$ . б.  $\Phi = -Eh^2$ ,  $\Phi = Eh^2$ .

6.2.2.  $\Phi = E \cos\alpha \cdot \pi(R^2 - r^2)$ .

6.2.4.  $F = \sigma\Phi$ .

6.2.5. а.  $F_1 = F_2 = q\sigma/(2\epsilon_0)$ ,  $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ . б.  $F = \sigma q/(4\epsilon_0)$ .

◇ 6.2.6. а)  $E = 0$  при  $r < R$ ,  $E = Q/(4\epsilon_0 r^2)$  при  $r > R$ ; б)  $E = \rho/(2\pi\epsilon_0 r)$ ; в)  $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ ;  
г)  $E = \rho r/(3\epsilon_0)$  при  $r \leq R$ ;  $E = \rho R^3/(3\epsilon_0 r^2)$  при  $r \geq R$ ; д)  $E = \rho r/(2\epsilon_0)$  при  $r \leq R$ ;  $E = \rho R^2/(2\epsilon_0 r)$  при  $r \geq R$ ; е)  $E = \rho x/\epsilon_0$  при  $x \leq h/2$  ( $x$  — расстояние от центральной плоскости пластины);  $E = \rho h/(2\epsilon_0)$  при  $x \geq h/2$ .



К ответу 6.2.6

6.2.7. а)  $\rho = 2E_0\varepsilon_0/r$ ; б)  $\rho = E_0\varepsilon_0/r$ .

6.2.8\*. Сила, действующая на выделенную грань куба,  $F = \sigma \int E_n ds$ , где  $\int E_n ds$  — поток через эту грань напряженности электрического поля, создаваемый остальными пятью гранями. В качестве замкнутой поверхности построим куб, немного больший данного. Тогда все шесть заряженных граней дают поток напряженности электрического поля через все шесть сторон построенной поверхности  $\Phi = q/\varepsilon_0 = 6\sigma l^2/\varepsilon_0$ , а через одну грань  $\Phi' = \sigma l^2/\varepsilon_0$ . Но

$$\Phi' = \int E_n dS + \frac{\sigma l^2}{2\varepsilon_0},$$

от пяти граней      от выделенной грани

следовательно,

$$\int E_n ds = \frac{\sigma l^2}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma l^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma l^2}{2\varepsilon_0}.$$

Значит, сила  $F = \sigma^2 l^2 / (2\varepsilon_0)$ . Аналогично рассуждая, для тетраэдра получим

$$F = \sqrt{3} \sigma^2 l^2 / (8\varepsilon_0).$$

6.2.9. Между плоскостями  $E_1 = \sigma/\varepsilon_0$ ,  $E_2 = 0$ . Вне плоскостей  $E'_1 = 0$ ,  $E'_2 = \sigma/\varepsilon_0$ .

6.2.10.  $E_1 = (\sigma/\varepsilon_0) \sin(\alpha/2)$ ,  $E_2 = (\sigma/\varepsilon_0) \cos(\alpha/2)$ .

6.2.11.  $E_{\text{макс}} = \rho h/\varepsilon_0$ .

6.2.12.  $E_A = \rho h/(6\varepsilon_0)$ ,  $E_B = \rho h/(3\varepsilon_0)$ ,  $E(r) = \rho r/(3\varepsilon_0)$ .

6.2.13\*. В любой точке внутри полости напряженность поля направлена вдоль прямой, соединяющей центры шара и полости, и  $E = \rho l/(3\varepsilon_0)$ .

Вне полости  $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[ x + \frac{r^3}{(l-x)^2} \right]$  при  $0 < x < l-r$ ;  $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[ x - \frac{r^3}{(x-l)^2} \right]$  при  $l+r < x < R$ ;  $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[ \frac{R^2}{x^2} - \frac{r^2}{(x-l)^2} \right]$  при  $x > R$ .

6.2.14\*. а.  $E = \rho l/(3\varepsilon_0)$ . б.  $\sigma = 3\varepsilon_0 E \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между направлением поля и радиусом, проведенным в точку на сфере.  $\sigma_{\text{макс}} = 3\varepsilon_0 E$ .

### § 6.3. Потенциал электрического поля.

#### Проводники в постоянном электрическом поле

6.3.1. а.  $v = 10^7$  м/с. б.  $v = 1,25 \cdot 10^6$  м/с.

6.3.2. а.  $\Delta\varphi = 850$  В.  $v = \sqrt{3} \cdot 10^7$  м/с. б.  $v = 8,8 \cdot 10^6$  м/с.

6.3.3.  $\varphi = 2,7 \cdot 10^8$  В.

6.3.4.  $\varphi = \sqrt{2}q/(\pi\epsilon_0 l)$ .

6.3.5.  $\Delta\varphi \approx -11,9$  В.

6.3.6.  $\varphi = 13,5$  кВ = 45 ГГС.

6.3.7.  $\varphi = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ . Нет. Да.

6.3.10. б.  $E_{\text{макс}} = nQ/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ ,  $E_{\text{мин}} = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ . в.  $E = \rho(2\pi b)$ .

6.3.11.  $\sigma'_1 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ ,  $\sigma''_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ,  $\sigma'_2 = -(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ,  $\sigma''_2 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ .

6.3.12. а.  $\Delta\varphi = 37,7$  ГГС = 11,3 кВ. б.  $\varphi = 18,8$  ГГС = 5,65 кВ.

6.3.13.  $\varphi_3 - \varphi_1 = [(\sigma_3 - \sigma_1)(h_1 + h_2) + \sigma_2(h_1 - h_2)]/(2\epsilon_0)$ .

6.3.14.  $E_{12} = \varphi/a$ ;  $E_{23} = \varphi/b$ .

6.3.15. а. Напряженность поля вблизи верхней пластины  $E_b = \sigma b/[\epsilon_0(a+b)]$ , вблизи нижней  $E_n = \sigma a/[\epsilon_0(a+b)]$ . Соответственно поверхностная плотность  $\sigma_b = -\sigma b/(a+b)$ ,  $\sigma_n = -\sigma a/(a+b)$ .

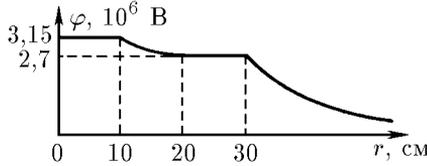
б.  $q_a = -qb/(a+b)$ ;  $q_b = -qa/(a+b)$ .

6.3.16.  $Q' = -Q$ ,  $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ ,  $E = (Q+q)/(4\pi\epsilon_0 L^2)$ . Нет. Нет.

6.3.17\*. Поверхность полости имеет заряд  $-q$ , а поверхность проводника имеет заряд  $q$ , который (за исключением области вблизи концов проводника) равномерно распределяется по поверхности проводника. Поэтому  $E = 0$  при  $0 < x < r$ ,  $E \approx q/(2\pi\epsilon_0 xL)$  при  $r < x < R$ ,  $E = 0$  при  $x > R$ ;  $x$  — расстояние от оси.

6.3.18. Поверхностная плотность заряда на соответствующих участках поверхности проводника останется прежней.

◇ 6.3.19. См. рис.



К ответу 6.3.19

6.3.20.  $\varphi_1 = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ ,  $\varphi_2 = q/(8\pi\epsilon_0 r)$ ,  $\varphi_3 = 0$ .

6.3.21.  $q_r = -8\pi\epsilon_0 r\varphi$ ,  $q_{2r} = 16\pi\epsilon_0 r\varphi$ .

6.3.22.  $\varphi_1 = \varphi(R_2 - R_1)/R_2$ ,  $\varphi_2 = \varphi R_1/R_2$ .

6.3.23.  $E = 0$ ,  $\varphi = 0$  при  $r > R_2$ ;  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ,  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$  при  $R_1 < r < R_2$ ;

$E = 0$ ,  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$  при  $r < R_1$ .

6.3.24.  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right)$ ,  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right)$  при  $r > R_2$ ;  $E = -\frac{qR_1}{4\pi R_2 r^2}$ ,

$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \left( 1 - \frac{R_1}{r} \right)$  при  $R_1 < r < R_2$ ;  $E = 0$ ,  $\varphi = 0$  при  $r < R_1$ .

6.3.25.  $E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ ,  $\varphi = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$  при  $0 < r < R$ ;  $E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ ,  $\varphi = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$  при  $r > R$ .

6.3.26.  $\Delta\varphi = \rho R^2/(6\epsilon_0)$ ,  $\Delta\varphi = \rho R^2/(4\epsilon_0)$ ,  $\Delta\varphi = \rho h^2/(8\epsilon_0)$ .

6.3.27.  $\varphi = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( r^2 \ln \frac{R}{r} + \frac{r^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right)$  при  $0 < x < R$ ;  $\varphi = \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{x}$  при  $r < x < R$ .

6.3.28.  $F = Q^2/(16\pi\epsilon_0 h^2)$ .

6.3.29.  $F = 3Q^2/(32\pi\epsilon_0 h^2)$ .

6.3.30. Нет.  $F = q^2(2\sqrt{2} - 1)/(32\pi\epsilon_0 l^2)$ .

6.3.31\*.  $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 L)$ .

6.3.32\*.  $Q = -qR/L$ .

6.3.33. Увеличится на  $F = Qq/(4\pi\varepsilon_0 L^2)$  при  $L > R$ ; не изменится при  $L < R$ .

6.3.35.  $h = 3q^2 R^2 / (16\pi^2 \varepsilon_0 \rho g r^6)$ , где  $h$  отсчитывается от центра шара.

6.3.36.  $Q' = qQ/(Q - q)$ .

6.3.39. Увеличится в три раза.

6.3.40.  $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ .

### § 6.4. Конденсаторы

6.4.2. а. Увеличилась в четыре раза. б. Уменьшится в два раза; уменьшится в  $n$  раз.

6.4.3. а.  $C = \varepsilon_0 S/d$ . б.  $C = 5,3$  см = 5,9 пФ.

6.4.4. а. Увеличится в полтора раза. б. Увеличится в  $1 + S'/(2S)$  раз. в. Не изменится.

6.4.5.  $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$ .

6.4.6.  $C = 4\pi\varepsilon_0 \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{d}{R_0(R_0 - d)} \right]^{-1}$ .

6.4.7\*.  $C = 2\pi\varepsilon_0 l / \ln(R_2/R_1)$ .

6.4.8\*.  $C = \frac{\varepsilon_0 a l}{d} \left( 1 + \frac{ld}{2\pi R^2} \right)$ .

6.4.9. а.  $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ ,  $C = C_1 + C_2$ . б.  $C' = 4C/3$ . в.  $C' = 7C/5$ .  
г.  $C' = (\sqrt{5} - 1)C/2$ . д.  $C' = 6C/5$ .

6.4.10.  $q = \pm \varepsilon_0 S E$ .

6.4.11.  $\Delta V = \frac{a}{d+a} (V_1 + V_2)$ .

6.4.12\*. а. Увеличится в полтора раза. б. Увеличится в два раза.

6.4.13.  $\Delta q = qx/d$ .

6.4.14\*.  $\frac{V}{V_0} = \left( \frac{Cd + 2\varepsilon_0 S}{Cd + \varepsilon_0 S} \right)^{4n}$ .

6.4.15.  $F = 4,4 \cdot 10^{-2}$  Н. Нет.

6.4.16. Увеличится в  $k$  раз. Увеличится в  $n^2$  раз.

6.4.17. а)  $W = 4,4$  мДж; б)  $W = 2\pi\varepsilon_0 r_1 r_2 V^2 / (r_2 - r_1)$ ; в)  $W = \pi\varepsilon_0 l V^2 / [\ln(r_2/r_1)]$ .

6.4.18. а.  $A = Q^2 d / (2\varepsilon_0 S)$ . б.  $A = Q^2 dx / [2\varepsilon_0 a^2 (a - x)]$ . в.  $A_a = Q^2 d / (4\varepsilon_0 A)$ ;  $A_b = Q^2 dx / (2\varepsilon_0 a^3)$ .

### § 6.5. Электрическое давление. Энергия электрического поля

6.5.1. а.  $F = \sigma^2 S / (2\varepsilon_0)$ .  $P = \sigma^2 / (2\varepsilon_0)$ . б.  $\sigma = \varepsilon_0 E$ .  $P = \varepsilon_0 E^2 / 2$  (в СИ),  $P = E^2 / (8\pi)$  (в СГС). в.  $P = 4,325$  Па,  $\sigma = 8,85$  мкКл/м<sup>2</sup>.

6.5.2. Уменьшится в  $1 + Q^2 / (2P_0 \varepsilon_0 S^2)$  раз.

6.5.3. По теореме Гаусса определим поверхностную плотность заряда на границе раздела полей:  $\sigma = \varepsilon_0 E$ . Используя принцип суперпозиции,

$$E' - \sigma / (2\varepsilon_0) = E, \quad E' + \sigma / (2\varepsilon_0) = 2E,$$

найдем напряженность внешнего поля:  $E' = 3E/2$ . Сила, которая действует на заряд, приходящийся на единицу площади поверхности раздела полей, т. е. давление со стороны внешнего поля  $P = E'\sigma = 3\varepsilon_0 E^2 / 2$ . Для полей  $E$  и  $-2E$ , аналогично рассуждая, получим  $\sigma = -3\varepsilon_0 E$  и  $E' = -E/2$ . Таким образом, во втором случае поверхностная плотность заряда в три раза больше, но напряженность внешнего поля в три раза меньше. Поэтому электрическое давление будет тем же:  $P = E'\sigma = 3\varepsilon_0 E^2 / 2$ .

6.5.4.  $P = \rho^2 h^2 / (2\varepsilon_0)$ .

6.5.5.  $P = Q^2 / (32\pi^2 \varepsilon_0 R^4)$  (см. решение задачи 6.5.3).

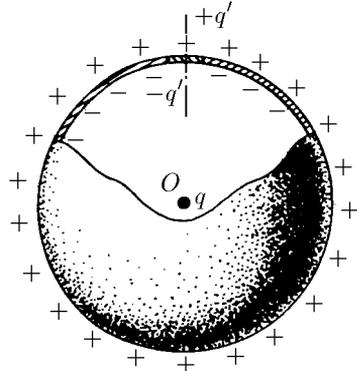
6.5.6.  $P = \varepsilon_0 R^2 V^2 / [2r^2 (R - r)^2]$ .

6.5.7.  $\rho = 2\pi R \sqrt{2\varepsilon_0 P}$ .

6.5.8\*. а.  $F_1 = q\sigma / (4\varepsilon_0)$ ,  $F_2 = \sqrt{2} q\sigma / (8\varepsilon_0)$ ,  $F_3 = \sqrt{3} q\sigma / (16\varepsilon_0)$ ;  $E_1 = \sigma / (4\varepsilon_0)$ ,  $E_2 = \sqrt{2} \sigma / (8\varepsilon_0)$ ,  $E_3 = \sqrt{3} \sigma / (16\varepsilon_0)$ . б.  $E = R\rho / (4\varepsilon_0)$ .

6.5.9\*.  $F = Q^2 (R^2 - h^2) / (32\pi\varepsilon_0 R^4)$ ;  $q = -Q/2$ .

- 6.5.11.  $A = 2E\sigma dS$ .  
 6.5.12. а.  $\sigma = \varepsilon_0 E$ ,  $P = \varepsilon_0 E^2/2$ . б.  $A = \varepsilon_0 E^2 hS/2$ .  
 6.5.13.  $A = \sigma^2 Sh/(2\varepsilon_0)$ .  
 6.5.14.  $A = \varepsilon_0 ShE_0(E_0 - E)$ .  
 6.5.15.  $W = Q^2/(8\pi\varepsilon_0 R)$  (в СИ);  $W = Q^2/(2R)$  (в СГС).  
 6.5.16.  $r = 1,4 \cdot 10^{-15}$  м.  
 6.5.17. В 1400 раз.  
 6.5.18\*.  $W = 3Q^2/(20\pi\varepsilon_0 R)$ .  
 6.5.19.  $A = Q^2/(8\pi\varepsilon_0 R)$ .  
 6.5.20.  $A = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}(1 - N^{-2/3})$ .  
 6.5.21. В  $n$  раз.  
 6.5.22.  $A_3 = 3A$ ;  $A_n = \frac{n(n-1)}{2}A$ .  
 6.5.23\*.  $A' = 6A$ .  
 6.5.24\*.  $A' = \sqrt{2}A$ .  
 6.5.25.  $\Delta W = Q^2/(4\pi\varepsilon_0 l)$ .  
 6.5.26\*.  $A = (Q_1\Delta\varphi_1 + Q_2\Delta\varphi_2)/2$ .  
 6.5.27\*. а)  $F = 2Q^2 dc(d-c)/[\varepsilon_0 a^3(2d-c)^2]$ ;  
 б)  $F = \varepsilon_0 acV^2/[2d(d-c)]$ .  
 6.5.28.  $A = Q^2 ab/[2S\varepsilon_0(a+b)]$ .  
 6.5.29\*.  $F = q^2 Sd/(8\pi^2\varepsilon_0 r^5)$ .



К ответу 6.5.30

◇ 6.5.30\*. Напряженность поля зарядов, распределенных по сферической оболочке, отверстие в которой закрыто пробкой, в центре сферы равна нулю и может быть представлена в виде

$$E(0) = E_{\text{пробки}} + E_{\text{сферы без пробки}} = 0.$$

При  $\Delta \ll r \ll R$  поле пробки является полем диполя, напряженность поля которого в точке  $O$  равна  $E_{\text{пробки}}(0) = q'\Delta/(2\pi\varepsilon_0 R^3)$ . После удаления пробки перераспределение зарядов на оставшейся части сферической оболочки при  $\Delta \ll r$ , будет незначительным, и для оценки можно считать, что

$$E(0) = E_{\text{сферы без пробки}} \approx -E_{\text{пробки}} = -q'\Delta/(2\pi\varepsilon_0 R^3).$$

По теореме Гаусса  $q' = -qr^2/(4R^2)$ . С учетом этого имеем

$$E(0) = q^2 r^2 \Delta / (8\pi_0 \varepsilon R^5).$$

## § 6.6. Электрическое поле при наличии диэлектрика

- 6.6.2.  $p = 7,4 \cdot 10^{-37}$  Кл·м.  
 6.6.3.  $p_{\text{ср}} = 1 \cdot 10^{-34}$  Кл·м.  
 6.6.4.  $\sigma_{\text{пр}} = \pm\sigma(\varepsilon - 1)/\varepsilon$ . Напряженность поля:  
 $E = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon)$  — в диэлектрике,  
 $E = \sigma/\varepsilon_0$  — в зазоре.

Разность потенциалов между пластинами  $V = (\sigma/\varepsilon_0)(d - h + h/\varepsilon)$ .

- 6.6.5.  $E = E_0 \sqrt{\sin^2 + (\cos^2 \alpha)/\varepsilon^2}$ .  
 6.6.6. Увеличится в  $\varepsilon$  раз.  
 6.6.7.  $\varepsilon = 2$ .  
 6.6.8.  $q = (\varepsilon - 1)CV$ .  
 6.6.9.  $\Delta V = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}V$ .  $\Delta V = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon(n - 1) + 1}V$ .  
 6.6.10.  $\Delta V = k(\varepsilon - 1)V/n$ .  
 6.6.11.  $C = \varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)S/(2d)$ .  
 6.6.12.  $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$ ;  $q_{\text{пол}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} q$ .  
 6.6.13.  $C = \frac{\varepsilon_0 d_2 (\varepsilon - 1) (S_2 - S_1) + \varepsilon_0 \varepsilon d_1 S_1}{d_1 (d_1 - d_2) + d_1 d_2}$ .

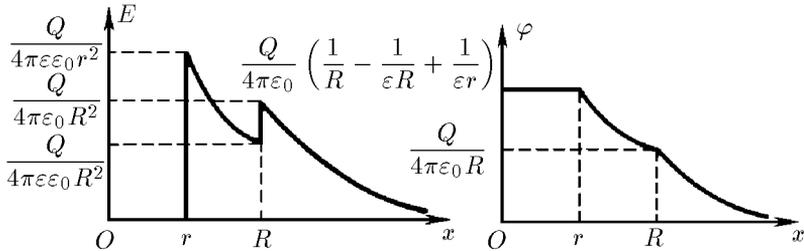
6.6.14.  $\rho = -q/(\varepsilon_1 S d)$ .

6.6.15. а. К нити. б.  $F_2 = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - 1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 - 1)} F_1$ . в.  $F \sim V^2, F \sim 1/r^3$ . г. В  $(R/r)^3$  раз.

6.6.16.  $F = \frac{(\varepsilon - 1) S Q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon R^5} \delta$ .

6.6.17\*.  $M = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) S d E^2 \sin 2\alpha}{2\varepsilon}$ ;  $A = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) S d E^2 \sin^2 \alpha}{2\varepsilon}$ .

◇ 6.6.18.  $\sigma_{\text{внутри}} = \frac{(\varepsilon - 1) Q}{4\pi \varepsilon r^2}$ ;  $\sigma_{\text{внеш}} = \frac{(\varepsilon - 1) Q}{4\pi \varepsilon R^2}$ . См. рис.



К ответу 6.6.18

6.6.19\*.  $P = \frac{(\varepsilon - 1) Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon} \left( \frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4} \right)$ .

6.6.20\*.  $F = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b} \frac{\varepsilon - 1}{[a + x(\varepsilon - 1)]^2}$ .

6.6.21.  $h = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) V^2 / (2\rho g d^2)$ .

6.6.22.  $h = (\varepsilon - 1) Q^2 / (2\varepsilon_0 \varepsilon \rho g S^2)$ .

6.6.23.  $W = \frac{q^2}{2C} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ .

6.6.24.  $W = \frac{V^2 C}{2} (\varepsilon - 1)$ .

6.6.25\*.  $V = \left[ \frac{2W}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) C} \right]^{1/2}$ .  $E \sim 10^9$  В/м.

6.6.26. Дипольные моменты в диэлектрике ориентируются в электрическом поле с запаздыванием;  $\varepsilon = 2$ .

6.6.27. а.  $V' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} V$ . б.  $\Delta T \sim 10^{-5}$  К.

6.6.28.  $r = 0,12$  нм.

6.6.29.  $p = 4\pi \varepsilon_0 r^3 E$ .

6.6.30.  $\varepsilon = 1 + 4\pi r^3 n$ .

## ГЛАВА 7. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### § 7.1. Движение в постоянном электрическом поле

7.1.1. Когда начальная скорость частицы направлена вдоль прямой силовой линии.

7.1.2.  $t = 0,56$  мкс;  $x = 2,8$  м.

7.1.3.  $E = 2(d - vt)m/(qt^2)$ .

7.1.4.  $u = v\sqrt{1 + 2qEd/(mv^2)}$ ,  $\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha\sqrt{1 + 2qEd/(mv^2 \sin^2 \alpha)}$ .

7.1.5. В два раза.

7.1.6.  $K = qEl/[2 \cos^2 \alpha (\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)]$ .

7.1.7.  $N = neUbl^2/(2m_evd)$ .

7.1.8.  $q = 10^{-17}$  Кл.

7.1.9.  $\beta = \alpha - \arctg \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha}$ ;  $\tg \beta = \frac{\cos \alpha \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha}$ .

7.1.10\*.  $\tg \beta = \tg \alpha \sqrt{1 + 2e(\varphi_2 - \varphi_1)/(m_e v^2 \sin^2 \alpha)}$ .

7.1.11.  $V = 19$  кВ.

7.1.12\*.  $V = (V_0/2)/\ln(R_2/R_1)$ .

7.1.13. Скорость не изменится, а время пролета позитрона будет больше. Позитрон может вообще не долететь до точки  $B$ , если его начальная кинетическая энергия  $K_0$  будет меньше  $e\varphi_0$ .

7.1.14\*.  $t' = t\sqrt{3}$ .

7.1.15.  $\sqrt{n}$ .

7.1.16.  $K \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow 2R$ ;  $K = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{l-R} - \frac{4}{l} \right)$  при  $l > 2R$ . Условие минимальности будет приход электрона в среднюю точку отрезка, соединяющего центры сфер, с нулевой скоростью.

7.1.17\*.  $t = \frac{2R}{v} \left[ 1 - \frac{qQ(m+M)}{2\pi\epsilon_0 RmMv^2} \right]^{-1/2}$ .

7.1.18.  $v = \sqrt{qEl/m}$ .

7.1.19.  $T = 2\pi\sqrt{ml/(2qE)}$ .

7.1.20.  $T = 2\pi\sqrt{ml/(mg + qE)}$  при  $mg + qE > 0$ ;  $T = 2\pi\sqrt{ml/\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}$ .

7.1.21.  $\omega = \sqrt{qQ/(2\pi\epsilon_0 ml^2)}$ .

7.1.22\*.  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{qQ(h+l)}{4\pi\epsilon_0 mh^3 l}}$  при  $\frac{qQ(h+l)}{4\pi\epsilon_0 h^3} < mg$ .

7.1.23\*.  $T = 2\pi \left( \frac{g}{R} + \frac{qQ}{32\pi\epsilon_0 mR^3} \right)^{-1/2}$  при  $\frac{qQ}{32\pi\epsilon_0 R^2} > -mg$ .

7.1.24\*.  $\Delta t = \pi\epsilon_0 R(m_e v^2)^2/(2e^2 C)$ .

7.1.25\*.  $\alpha = \pi/4$ ;  $\delta \approx 4K(\Delta\alpha)^2/(eE)$ .

7.1.26.  $k = l/(2d)$ .

7.1.27. б.  $p_1 = q_1 q_2 / (2\pi\epsilon_0 vr)$ . в.  $l = 3,4 \cdot 10^{-13}$  м.

7.1.28\*.  $k = 1/(2\epsilon_0)$ .

## § 7.2. Фокусировка заряженных частиц

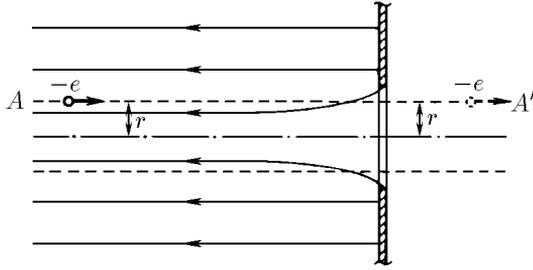
7.2.1. Увеличить в два раза.

7.2.2.  $x = v \frac{\pi}{2} \sqrt{m_e \epsilon_0 / (e\rho)}$  при  $x \leq l$ ;  $x = l + v \sqrt{\frac{2m_e \epsilon_0}{e\rho}} \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{v} \sqrt{\frac{e\rho}{2m_e \epsilon_0}} R \right)$  при  $x \geq l$ .

7.2.3. а. В  $k$  раз увеличится. б. В  $k$  раз уменьшится.

7.2.5.  $y = y_0 f / (x_0 - f)$ .

◇ 7.2.6. а. Не зависит. б\*. Если электрон движется по траектории, близкой к прямой  $AA'$ , то поперечный импульс, который получит электрон в области отверстия, близок к  $p_{\perp} = e\Phi/(2\pi r v)$ , где  $\Phi = \pi r^2 E$  — поток напряженности электрического поля через поверхность цилиндра радиуса  $r$  в области отверстия,  $v$  — скорость электрона в этой области. Фокусное расстояние  $f = -r \cdot m_e v / p_{\perp} = -2m_e v^2 / (eE) = -4d$ . (Знак минус у  $f$  означает, что происходит рассеяние электронов.)

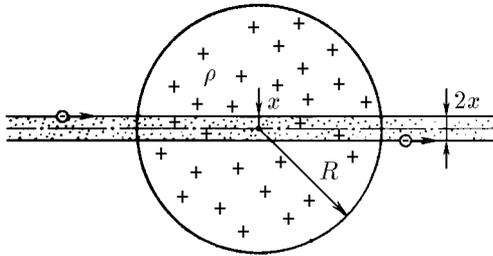


К ответу 7.2.6

7.2.7\*.  $f = \frac{4}{3}d \left[ \left(1 + \frac{V_0}{V}\right) \left(2\frac{V_0}{V} + 2\sqrt{\frac{V_0}{V} \left(\frac{V_0}{V} + 1\right)} - 1\right) \right]$  при  $V < 8V_0$ . На расстоянии  $8dV_0/V$  от первой обкладки при  $V > 8V_0$ .

7.2.8\*.  $f = d(4V_0/V)^2$ .

◇ 7.2.9. Частица массы  $m$ , имеющая заряд  $q$  и пролетающая со скоростью  $v$  через заряженный шар, получит от поля шара поперечный импульс  $p_{\perp} = q\Delta q / (2\pi\epsilon_0 vx)$ , где  $x \ll R$  — минимальное расстояние между частицей и центром шара,  $\Delta q \approx \pi x^2 \rho 2R$  — заряд участка шара, вырезанного цилиндром радиуса  $x$ ;  $f = \frac{mv}{p_{\perp}} \frac{1}{x} = \frac{R}{2} \frac{V_0}{V}$ .



К ответу 7.2.9

7.2.10. На расстоянии  $f = 2R(V_0/V)^2$  от центра сфер.

7.2.11\*.  $x \approx \frac{1}{(1/f - 1/L)}$ , где  $f = 2R \left(\frac{V_0}{V}\right)^2$ .

7.2.12.  $\Delta E_{\perp} = (a - b)^2 / (16d^2)$ .

7.2.13.  $V = V_0 \sqrt{2d/l}$ .

7.2.14\*.  $f = 4V(2E_2 - E_1) / (E_2 - E_1)^2$ .

### § 7.3. Движение в переменном электрическом токе

7.3.1.  $t = 2m_e l / (eE\tau)$ .

7.3.2. а)  $\sqrt{\frac{2eV}{m_e} - \frac{e\Delta V\tau}{m_e l}} \leq v \leq \sqrt{\frac{2eV}{m_e} + \frac{e\Delta V\tau}{m_e l}}$ ;

б)  $v_1 = \sqrt{\frac{2e(V + \Delta V)}{m_e}}$ ;  $v_2 = \sqrt{\frac{2e(V - \Delta V)}{m_e}}$  при  $\Delta V < V$ .

7.3.3.  $\nu_{\text{макс}} \approx 10^9$  Гц.

7.3.4. а.  $S = Ll / (2Vd)$ . б.  $S = 0,09$  мм/В.

7.3.5. Окружность радиуса 5 см.

7.3.6.  $\nu > l\sqrt{2eV/m_e}$ .

7.3.7.  $V = \pi\delta\nu\tau / (2S)$ .

7.3.8.  $\frac{e}{m_e} = \frac{l^2 f^2}{2V(n + 1/2)^2}$ , где  $n$  — целое число.

7.3.9\*.  $\Delta\alpha = \pm \operatorname{arctg} \left\{ \frac{V_0}{d\omega} \sqrt{\frac{2e}{m_e V}} \left[ 1 - \cos \left( \omega l \sqrt{\frac{m_e}{2eV}} \right) \right] \right\}$ .

7.3.10. а.  $v = \omega l / (2\pi n)$ . б\*.  $\Delta b = 4\pi e V_0 n / (m_e \omega^2 d)$ , где  $n$  — целое число.

7.3.11.  $|u_{\max}| = \frac{2eE_0}{m_e \omega} |\cos \varphi|$ ,  $v_{\text{ср}} = \frac{eE_0}{m_e \omega} \cos \varphi$ .

7.3.12\*.  $K = 0,4$  кэВ.

7.3.13\*. Из-за ухода из плазмы электронов, ускоренных высокочастотным электрическим полем, потенциал ее будет увеличиваться до тех пор, пока не перестанут выходить из нее даже самые быстрые электроны.  $V = \frac{2eE_0^2}{m_e \omega_0^2} \left( \frac{E_0}{\omega} \right)^2$ .

7.3.14\*.  $A = eE_0 / [m_e \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}]$ .

7.3.15\*.  $\varepsilon = 1 + 4\pi n_e e^2 / [m_e \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}]$ .

### § 7.4. Взаимодействие заряженных частиц

7.4.1.  $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}$ .

7.4.2.  $v = \sqrt{e^2(4 + \sqrt{2}) / (8\pi\varepsilon_0 m_e a)}$ .

7.4.3\*.  $v_p/v_e = \sqrt{(m_e/m_p)(4\sqrt{2} + 1)} \approx 0,01$ . Для оценки можно считать, что легкие позитроны успеют уйти далеко, прежде чем протоны сдвинутся с места.

7.4.4.  $r_{\min} = e^2 / (4\pi\varepsilon_0 m_e v^2)$ .

7.4.5.  $r_{\min} = e^2 / [\pi\varepsilon_0 m_e (v_1 + v_2)^2]$ .

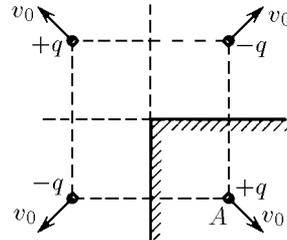
7.4.6.  $v = \sqrt{q_1 q_2 (m_1 + m_2) / [2\pi\varepsilon_0 m_1 m_2 (R_1 + R_2)]}$ .

7.4.7.  $r_{\min} = de^2 / (e^2 + 4\pi\varepsilon_0 m_e v^2 d \cos \alpha)$ .

7.4.8\*.  $\alpha = \pi/2$ .

7.4.9\*.  $v = \sqrt{q^2 / (8\pi\varepsilon_0 md)}$ .

◇ 7.4.10\*.  $v = v_0 \sqrt{1 - \frac{q^2(2\sqrt{2}-1)}{8\pi\varepsilon_0 m v_0^2 d}}$  при  $\frac{m v_0^2}{2} \geq \frac{q^2(2\sqrt{2}-1)}{16\pi\varepsilon_0}$ . Если вместо двугранного угла в точку  $A$  поместить заряд  $+q$ , то в области вне проводника электрическое поле, а следовательно, и силы не изменятся. Это позволяет рассмотреть движение системы из четырех зарядов, изображенной на рисунке.



7.4.11.  $v = \sqrt{4e^2 r^2 / [\pi\varepsilon_0 m_e (4r^2 + R^2)^{3/2}]}$ .

7.4.12.  $K_{\min} = Ze^2 / (8\pi\varepsilon_0 r)$ .

7.4.13\*.  $K_{\min} = e^2(2 - \sqrt{2}) / (4\pi\varepsilon_0 r)$ .

7.4.14\*.  $n_{\min} = (\sqrt{2} - 1)m/M + \sqrt{2}$ .

7.4.15\*.  $v_{\min} = 2v$ .

7.4.16. Невозможен.

7.4.17\*.  $r_{\min} = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 m_p v^2} + \sqrt{r^2 + \left( \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 m_p v^2} \right)^2}$ .

7.4.18\*.  $m = \frac{4q^2(l-r)}{rl \left[ u^2 + v^2 + 2uv \cos(\alpha + \beta) - \frac{l^2}{r^2} (u \sin \alpha - v \sin \beta)^2 \right]}$ .

7.4.19\*.  $t = 2\sqrt{2} t_0$ .

7.4.20.  $v \geq \sqrt{qQ(m+M) / (2\pi\varepsilon_0 RmM)}$  при  $qQ > 0$ ; любая при  $qQ < 0$ .

7.4.21.  $v = \frac{m v_0}{m + M} + \sqrt{\left( \frac{M V_0}{m + M} \right)^2 - \frac{Q q M}{2\pi\varepsilon_0 R m (m + M)}}$ .

7.4.22\*.  $v = \sqrt{3qQ(m+M)/(4\pi\epsilon_0 mMR)}$  при  $qQ > 0$ ;  $v = 0$  при  $qQ \leq 0$ .

7.4.23\*.  $v_{\text{н}} = \sqrt{q^2/(6\pi\epsilon_0 ml)}$ ;  $v_{\text{кр}} = \sqrt{q^2/(24\pi\epsilon_0 ml)}$ .

7.4.24.  $v = \sqrt{q^2 m(2R-l)/[2\pi\epsilon_0 RlM(M+2m)]}$ .

7.4.25.  $x = \frac{R}{2} \left( \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \mu mg R^2} - 1 \right)$ ,  $v_{\text{макс}} = \sqrt{\mu g R} \left( \frac{Q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 \mu mg R^2}} - 1 \right)$ .

7.4.26\*.  $h = \frac{h_0 \cos^2 \alpha}{mg} \left[ \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (H-h_0)H \sin \alpha} (1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha) - mg(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \right]$ .

7.4.27.  $W = 3q^2/(32\pi\epsilon_0 l)$ .

7.4.28.  $k = [q^2/(2\pi\epsilon_0 l_1 l_2)](l_1 + l_2 + 2l_0)$ .

7.4.29.  $v_{\text{макс}} = v\sqrt{1 + q^2/(4\pi\epsilon_0 Rmv^2)}$ .

7.4.30. а)  $W = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho v^2 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} + 4\pi R^2 \sigma(2 - 2^{2/3})$ .

б)  $W = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho v^2 + \frac{Q^2 + q^3}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{(Q-q)^2}{8\pi\epsilon_0 \sqrt[3]{2}R} + 4\pi R^2 \sigma(2 - 2^{2/3})$ .

7.4.31. Заряд будет колебаться вдоль оси цилиндрического отверстия. Его скорость максимальна в точке  $O$ .

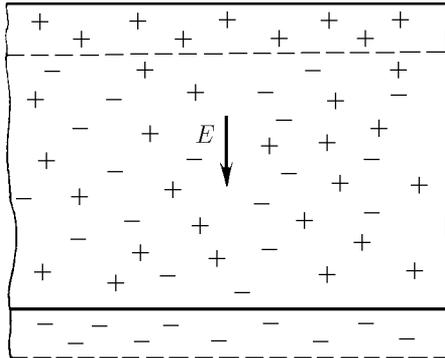
7.4.32\*.  $v = \sqrt{2gh[1 - S\sigma^2/(4\epsilon_0 mg)]}$  при  $mg > S\sigma^2/(2\epsilon_0)$ ;

$v = \sqrt{2\epsilon_0 mg^2 h/(\sigma^2 S)}$  при  $mg < S\sigma^2/(2\epsilon_0)$ .

7.4.33.  $v = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}$ .

7.4.34\*.  $v = v_0 \sqrt{1 - \frac{\rho^2 l}{2\pi\epsilon_0 mv^2} \ln \frac{R_1}{R_2}}$ .

7.4.35\*.  $T = 2\pi \sqrt{4\pi\epsilon_0 ml^3/(\sqrt{2} q^2)}$ .



К ответу 7.4.36

7.4.36\*. а) Электроны и ионы разделяются полностью. Электрическое поле ионов  $E_i = neh/(2\epsilon_0)$  остановит электроны через время

$$t \approx 2\epsilon_0 m_e v / (e^2 hn); \quad \nu \approx e^2 hn / (8\epsilon_0 m_e v).$$

б) Часть ионов и электронов образует на границах слоя заряженные области (см. рис.), электрическое поле которых вызывает гармоническое движение основной массы электронов с периодом  $T = 2\pi \sqrt{e^2 n / (\epsilon_0 m_e)}$ . Поэтому электроны остановятся через время  $t = T/4 = (\pi/2) \sqrt{e^2 n / (\epsilon_0 m_e)}$ ,  $\nu = 1/4t$ .

7.4.37\*.  $n = 8 \sin^2(\alpha/2)$ .

7.4.38\*.  $x = \sqrt{l^2 + l_0^2} - l + l_0$ , где  $l_0 = q^2/(8\pi\epsilon_0 \mu Mg)$ .

## ГЛАВА 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### § 8.1. Ток. Плотность тока. Ток в вакууме

8.1.1. а.  $I \approx nec/l = 0,02$  А. б.  $I = \sqrt{e^4/[16\varepsilon_0 m_e (\pi r)^3]} = 0,0012$  А.

8.1.2.  $v = Il/q$ .

8.1.3.  $I = 2\varepsilon_0 Eav = 1,3 \cdot 10^{-4}$  А.

8.1.5.  $v = 0,4$  см/с.

8.1.6.  $j = ev$ .

8.1.7.  $j = -en_e \mathbf{u}$ .

8.1.8.  $I = sj \sin \alpha = 10$  А.

8.1.9.  $t = 8 \cdot 10^{-6}$  с.

8.1.10.  $\rho = j/v$ .

8.1.11.  $E \approx I/(2\pi\varepsilon_0 vr) = 6 \cdot 10^5$  В/м;  $L \approx [8m_e r v^2/(3eE)]^{1/2} \approx 0,1$  м.

8.1.12\*. а)  $\rho = \frac{\rho_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2eEx/m_e}}$ , где  $x$  — расстояние до передней сетки. б)  $\rho_2 = 2\rho_1$

при  $x < x_0 = m_e v_0^2/(2eE)$ ;  $\rho = 0$  при  $x > x_0$ . По зависимости  $\rho_2$  от  $x$  находится наибольшая напряженность поля заряда между сетками:

$$E_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^{x_0} \rho_2 dx = \frac{\rho_0 m_e v_0^2}{\varepsilon_0 e E}.$$

Поле заряда пучка можно пренебречь, если  $E_1 \ll E$ . Когда  $E_1$  сравнимо с  $E$ , т. е.  $\rho_0 m_e v_0^2/(\varepsilon_0 e E) \approx E$ , необходимо его учитывать. Отсюда оценка  $\rho \approx e\varepsilon_0 E^2/(m_e v_0^2)$ .

8.1.14. Кривая  $T_1$  соответствует низкотемпературному катоду, а кривая  $T_3$  — высокотемпературному.

8.1.15. Если бы поле было не близко к нулю, то все электроны с этой границы уходили бы или в сторону анода, или в сторону катода в зависимости от знака поля.

8.1.16\*.  $\rho = \frac{I}{S} \sqrt{\frac{m_e d}{2eV}} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1,75 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{x}}$  Кл/м<sup>3</sup>.

При  $x \rightarrow 0$  плотность заряда  $\rho \rightarrow \infty$ , тем не менее заряд, приходящийся на единицу площади ( $\sigma = \int_0^d \rho dx$ ), ограничен:  $\sigma = 3,5 \cdot 10^{-6} \sqrt{d}$ . Ограничено поэтому и наибольшее значение напряженности поля пространственного заряда:  $E' = \sigma/(2\varepsilon_0)$ . В данном случае  $E' \ll V/d$  и действием пространственного заряда можно пренебречь.

8.1.17\*.  $n = \frac{4}{3}$ ;  $j = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{V^{3/2}}{d^2}$ ,  $I = jS$ .

8.1.18\*. Плотность заряда возрастает в  $n$  раз, а ток — в  $n^{3/2}$  раз.

8.1.19.  $j = i/(2\pi r)$ .

8.1.20. а.  $j_1 = \frac{2I}{4\pi r^2} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}$ ;  $j_2 = \frac{2I}{4\pi r^2} \frac{l}{r}$ , где  $l$  — расстояние от середины отрезка  $AB$  до

точки, в которой определяется  $j$ ;  $r$  — расстояние от  $A$  или  $B$  до этой точки. В первом случае ток перпендикулярен плоскости симметрии, во втором — лежит в ней. Полные токи через плоскость равны соответственно  $I$  и  $0$ .

б.  $j = \frac{2I}{4\pi r^2} \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}}$ , где  $r$  — расстояние от источника до точки, в которой определяется  $j$ .

8.1.21\*.  $j = qvl/(2\pi r^3)$ .

§ 8.2. Проводимость. Сопротивление. Источники ЭДС

8.2.1\*. а.  $\lambda = e^2 n_e \tau / m_e$ . б.  $\tau = 2,4 \cdot 10^{-15}$  с.

8.2.2\*.  $\Delta N / N = 1,5 \cdot 10^{-10}$ .

8.2.3.  $f = -ne^2 v / \lambda$ .

8.2.4.  $I = m_e \omega r \lambda s / (e\tau) = 1,7$  мА.

8.2.5. Изменение поля происходит со скоростью света.

8.2.6\*. Отношение  $\kappa / \lambda$  почти одинаково для этих металлов. Теоретическая оценка:  $\kappa / \lambda = \pi^2 k^2 T / (3e^2)$ , где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура,  $e$  — заряд носителей тока.

8.2.7.  $E = j / \lambda$ ;  $V_1 = (jl / \lambda) \cos \alpha$ ;  $V_2 = \pi jl / (2\lambda)$ .

8.2.8.  $\sigma = \varepsilon_0 j (1 / \lambda_1 - 1 / \lambda_2)$ .

8.2.9.  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha_1$ ;  $\sigma = \varepsilon_0 j \cos \alpha_1 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$ .

8.2.10.  $\rho = \varepsilon_0 j / (\lambda a)$ .

8.2.11. а.  $I = Q_0 / (\varepsilon_0 \rho)$ . б\*.  $Q = Q_0 \exp[-t / (\varepsilon_0 \rho)]$ .

8.2.13.  $I = \lambda SV / l$ ;  $R = l / (\lambda S)$ .

8.2.14.  $R_I = \frac{l}{\pi r^2} \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$ ,  $R_{II} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{l_1}{r_1^2 \lambda_1} + \frac{l_2}{r_2^2 \lambda_2} \right)$ ;  $I_I = V / R_I$ ,  $I_{II} = V / R_{II}$  при  $|r_2 - r_1| \ll l_1, l_2$ .

8.2.15.  $R = 0,0566$  Ом.

8.2.16\*.  $R = R_0 / \cos^2 \alpha$ .

8.2.17\*.  $I = 4\pi r \lambda V$ ;  $R = 1 / (4\pi r \lambda)$ .

8.2.18\*.  $R = 0,14$  Ом.

8.2.20.  $R = \frac{1}{4\pi \lambda} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ ;  $I = \frac{\lambda q}{\varepsilon \varepsilon_0}$ .

8.2.21\*.  $C = \varepsilon \varepsilon_0 / (\lambda R)$ ; нет.

◇ 8.2.22\*. Электроды должны касаться центра пластины с разных сторон.

8.2.23.  $K = \frac{1}{2} m_e \left( \frac{I}{en_e S} \right)^2 = 2 \cdot 10^{-15}$  ЭВ.

8.2.24\*.  $I = Fl / (qR)$ ;  $v = Fl^2 / (q^2 R)$ .

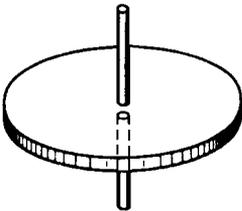
8.2.25. а.  $\varphi = qvR / l$ . б.  $\varphi = Fl / q$ .

8.2.26.  $V = W / e$ ;  $I_{\max} = ev$ . При  $R < W / e^2 v$  ток не меняется с изменением нагрузки.

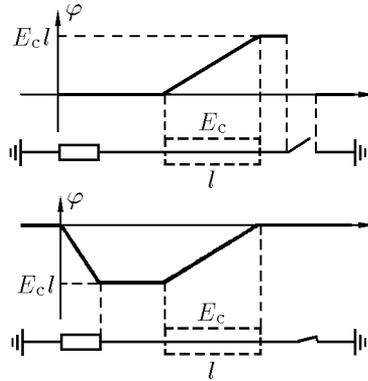
8.2.27\*.  $I = I_0 (1 - \sqrt{V / V_0})$ .

◇ 8.2.28. См. рис.  $W = Ecl$ .

8.2.29.  $\mathcal{E} = 1,13$  В.



К ответу 8.2.22



К ответу 8.2.28

8.2.30.  $\mathcal{E} = 1,07$  В. Есть приток тепла от окружающей среды.

8.2.31.  $\nu = 1,4 \cdot 10^{-2}$  моль.

8.2.32\*. Конденсатор не разрядится полностью из-за появления химической противо-ЭДС, возрастающей при увеличении числа ванн.

8.2.34\*.  $k = V / (2\mathcal{E})$ .

### § 8.3. Электрические цепи

8.3.1.  $r = 1,5$  и  $50$  кОм.

8.3.2.  $r = 20$  Ом.

8.3.3.  $V = 1$  кВ.

8.3.4. В схемах *a* и *d* приборы покажут уменьшение тока, в схеме *z* — возрастание тока, в схеме *b* и *e* ток не изменяется. В схеме *b* верхний амперметр покажет возрастание тока, нижний покажет уменьшение тока.

8.3.5. а.  $\Delta V/V = R/(R+r)$ . б.  $\Delta I/I = r/(R+r)$ .

8.3.6.  $I_V/I_6 = 10/64$ ,  $V \approx 40$  В.

8.3.7.  $100$  Ом.

8.3.8. Больше.

8.3.9.  $V = 48$  В;  $I = 15$  А.

8.3.10.  $r_x = rR_2/R_1$ ; сохраняется.

8.3.11.  $R_B = V_1/I_1$ ;  $R = V_2V_1/(I_2V_1 - I_1V_2)$ ;  
 $R_A = (V_1V_3I_2 - V_3V_2I_1 - V_2V_1I_3)/I_3(V_1I_2 - V_2I_1)$ .

◇ 8.3.12\*. Приведем часть схемы, включающую искомое сопротивление. К узлам *A* и *O* подключим батарею, а к узлам *C* и *O* — вольтметр, к узлам *C* и *A*, *C* и *B* — амперметры, а узлы *A* и *B* соединены проводом. Ток через сопротивление  $R$  равен  $I_{CA} + I_{CB}$ . Тогда  $R = V/(I_{CA} + I_{CB})$ , где  $V$  — показание вольтметра.

8.3.13.  $R = 7$  Ом.

8.3.14. а.  $r = \sqrt{3}R$ . б\*.  $r = (\sqrt{3} - 1)R$ . в.  $I_n = I(2 - \sqrt{3})^{n-1}$  через сопротивление  $2R$ ;  
 $I'_n = I(2 - \sqrt{3})^{n-1}(\sqrt{3} - 1)$  через сопротивление  $R$ ,  $n$  — номер ячейки,  $R_0 = (\sqrt{3} + 1)R$ .

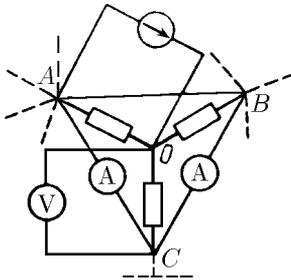
8.3.15\*.  $R_1 = 9r$ ;  $R_2 = 10r/9$ .

8.3.16. На участке *a*:  $V = \mathcal{E} - I(r+R)$ ; б:  $V = -\mathcal{E} - I(r+R)$ ; в:  $V + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - I(r_1 + r_2 + R)$ ;  
 z:  $V = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - I(r_1 + r_2 + R)$ .

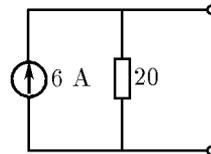
8.3.17.  $\mathcal{E} = 34,3$  В;  $r = 1,43$  Ом.

8.3.18. Батарея с ЭДС  $\mathcal{E} = 10$  В и внутренним сопротивлением  $r = 14$  Ом.

◇ 8.3.19. См. рис.



К ответу 8.3.12



К ответу 8.3.19

8.3.20.  $I = 10$  А,  $r = 20$  Ом;  $\mathcal{E} = 200$  В,  $r = 20$  Ом.

8.3.21.  $I = 80$  А.

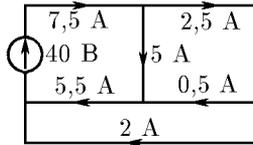
8.3.23.  $I_2 = I_3R_3/R_2$ ;  $I_1 = I_3(R_2 + R_3)/R_2$ ;  $V = I_3(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)/R_2$ .

◇ 8.3.24. См. рис.

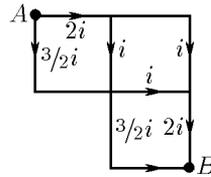
◇ 8.3.25. а.  $V = 5ir$ ;  $R = 5r/6$ ;  $I = 6i$ . ◇ б. См. рис.  $I = 7i/2$ ;  $R = 12r/7$ ;  
 в.  $R_{AB} = 13r/7$ ;  $R_{CD} = 5r/7$ .

8.3.26.  $I = 8$  А.

8.3.27\*. а.  $I = i/2$ ;  $R = r/2$ . б.  $R = r/3$ . в.  $R_{AB} = 2r/3$ ;  $R_{AC} = r$ .



К ответу 8.3.24



К ответу 8.3.25

- 8.3.28.  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1)/(r_1 + r_2) = 21$  В,  $r = r_1 r_2/(r_1 + r_2) = 3,75$  Ом.

◇ 8.3.29. См. рис.

8.3.30. Уменьшится в три раза.

8.3.31.  $V = 0$ ;  $I = 0,75$  А.

8.3.32.  $V = 0,75$  В.

8.3.33. Через 12, 54 и 27 мин.

8.3.34.  $N = I^2 R$ .

8.3.35.  $N' = N_0(N - N_0)/N$ .

8.3.36.  $R = 9(n - 1)r$ .

8.3.37.  $r = \sqrt{R_1 R_2}$ .

8.3.38. 2 и 100 В; 20 и 0,1 Вт. Ток почти не изменится, мощность же возрастает почти вдвое.

8.3.39.  $S = 42$  мм<sup>2</sup>; примерно в 10 раз.

8.3.40.  $N = (\mathcal{E} - Ir)I$ ;  $R = r$ .

8.3.41.  $N_1 = 125$  Вт;  $N_2 = 80$  Вт;  $N_3 = 45$  Вт.

8.3.42\*. При  $r = R$ .

8.3.43.  $N_{\text{II}} = (V - \mathcal{E})\mathcal{E}/r$ ;  $N_{\text{T}} = (V - \mathcal{E})^2/r$ .

Если  $\mathcal{E} > V/2$ , то полезная мощность больше тепловой.

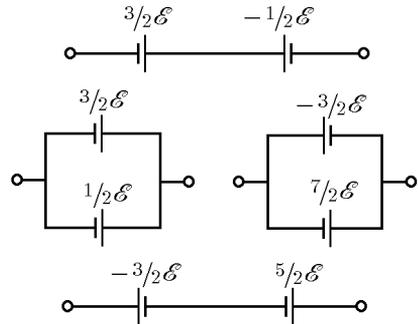
8.3.44.  $N = 4$  Вт.

8.3.45.  $N = \lambda CV^2/\varepsilon_0$ .

8.3.46.  $N = I(m_e v^2/2e - IR)$ .

8.3.47.  $q = 4\pi^2 \varepsilon_0 a^3 n_e R v$ ,  $v \gg a^2 e^2 n_e R/m_e$ .

8.3.48\*.  $T = T_0 + R_0 I^2/(\varkappa - I^2 R_0 \alpha)$ ,  $\varkappa > I^2 R_0 \alpha$ . При  $\varkappa < I^2 R_0 \alpha$  температура  $T$  неограниченно возрастает.



К ответу 8.3.29

#### § 8.4. Конденсаторы и нелинейные элементы в электрических цепях

8.4.1. а.  $q = 8 \cdot 10^{-4}$  Кл. б.  $V = 60$  в. в. 30, 30, 60 В.

8.4.2.  $V = V_0 x/(2x - l)$ ; поменять местами источники.

8.4.3.  $\varphi_A = \varphi_B + 2 \left( l - \frac{x}{2} \right) \sqrt{\frac{kx}{\varepsilon_0 S}}$ .

8.4.4.  $\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)$ . Измерять ее нужно электростатическим вольтметром,  $q_1 = C_1 R_1 \mathcal{E}/(R_1 + R_2)$ ;  $q_2 = C_2 R_2 \mathcal{E}/(R_1 + R_2)$ . В этом случае уменьшается влияние этих вольтметров на электрическую цепь.

8.4.5\*.  $W_1 = \frac{CV^2}{4} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ ;  $W_2 = \frac{CV^2}{4} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ .

8.4.6.  $W = A - q^2/C$ .

8.4.7\*.  $q = C\mathcal{E}$ ;  $W = C\mathcal{E}^2/4$ .

8.4.8.  $W = C(\mathcal{E} - V_0)^2/2$ ,  $\mathcal{E} > V_0$ ;  $W = 0$ ,  $\mathcal{E} < V_0$ .

8.4.9.  $W = C(V - \mathcal{E})\mathcal{E}$ ;  $W = C(V - \mathcal{E})^2/2$ .

8.4.10. Сначала конденсатор нужно заряжать от одного элемента, потом от двух последовательно соединенных и т. д. Тогда потери энергии составят  $1/n$  долю запасенной энергии.

8.4.11\*.  $N_{\Gamma} = Iq/C > N_{\text{к}} = Iq/(2C)$ . Эти величины отличаются друг от друга из-за работы, совершаемой при изменении емкости конденсатора.

8.4.12. Через  $\tau \approx 10^{-3} RC$ .

8.4.13\*.  $q = C \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}$ ;  $q = C \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + k\mathcal{E}_2 R_1}{kR_1 + R_2}$ .

8.4.14\*.  $V = V_0 R\tau / (rT + R\tau)$ .

8.4.15\*.  $\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{RC}$ ;  $V = V_0 \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)$ .

$I = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)$ .

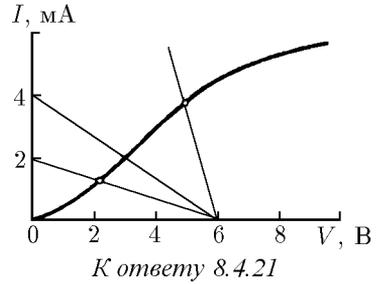
8.4.16.  $R < 40$  кОм.

8.4.17\*.  $\nu = \left(RC \ln \frac{V - V_0}{V - V_1}\right)^{-1}$ .

8.4.18. а.  $I = qv/d$ . б. Нет.

8.4.19.  $I = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathcal{E}av/d$ .

8.4.20.  $I = \frac{1}{2\alpha R^2} + \frac{\mathcal{E}}{R} - \left[\left(\frac{1}{2\alpha R^2} + \frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{R^2}\right]^{1/2}$ .



◇ 8.4.21. На вольт-амперной характеристике проводим прямую  $I = (\mathcal{E} - V)/R$ ; точка их пересечения дает ток 2 мА. Проводя соответствующие прямые через концы прямолинейного участка характеристики, находим, что при  $R > 0,3$  кОм и  $R > 3$  кОм диод перестает работать на прямолинейном участке вольт-амперной характеристики.

## ГЛАВА 9. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 9.1. Индукция магнитного поля. Действие магнитного поля на ток

9.1.1.  $B = 100$  Тл.

9.1.2.  $B = 20$  Тл.

9.1.3. а)  $F_1 = F \frac{I_1}{I} \sqrt{1 + \frac{L^2}{l^2} - 2\frac{L}{l} \cos \varphi}$ . б\*)  $F_2 = 2F \frac{RI_2}{lI}$ .

9.1.4\*.  $\Delta h = a\lambda VB / (b\rho g)$ .

9.1.5.  $\alpha = 45^\circ$ .

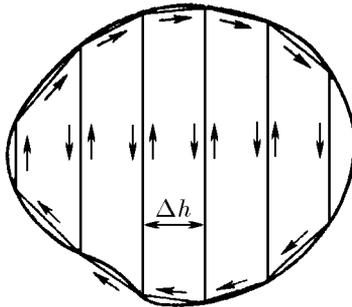
9.1.6.  $I = \frac{mg}{2aB} \operatorname{ctg} \alpha$ .

9.1.8\*.  $\omega = \sqrt{6BI/m}$ .

9.1.9.  $\operatorname{tg} \alpha = IB / (4\rho g)$ .

◇ 9.1.10. Рамку с током разобьем на трапециевидальные микроконтуры с током  $I$  так, как изображено на рисунке. Момент сил, действующий на все микроконтуры, при  $\Delta h \rightarrow 0$  совпадает с моментом сил, действующих на рамку с током:

$$\vec{N} \xrightarrow{\Delta h \rightarrow 0} \sum_i [\Delta M_i \times B] = \left[ \left( \sum_i \Delta M_i \times B \right) \right]_{\Delta h \rightarrow 0} \rightarrow [\vec{M} \times \vec{B}].$$



К ответу 9.1.10

9.1.11. а.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{IB}{2\rho g}$ . б\*.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi(4 + \pi)IB}{4(1 + \pi)(2 + \pi)\rho g}$ .

9.1.12.  $N = \pi R^2 IB(\sin \alpha + \cos \alpha)/2$ .

9.1.13\*.  $B = P/(\pi RIn)$ .

9.1.14.  $a = 2\pi RIB \sin \alpha/m$ .

9.1.15\*.  $B = F/(RI)$ .

§ 9.2. Магнитное поле движущегося заряда.

Индукция магнитного поля линейного тока

9.2.2.  $B = \mu_0 \rho v / (2\pi r)$ , где  $r$  — расстояние до нити.

9.2.3.  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ , где  $r$  — расстояние до провода.

9.2.4.  $\mu = 1,25$ .

9.2.5.  $B = 1,88 \cdot 10^{-5}$  Тл.

9.2.6.  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ .

9.2.7.  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \sin \frac{\alpha}{2}$ , где  $l$  — расстояние до точки пересечения проводов.

9.2.8. а.  $B = \frac{\mu_0 qv}{4\pi r^2} \sin \alpha$ . б.  $B = \frac{\mu_0 Il}{4\pi r^2} \sin \alpha$ .

9.2.10.  $B = \mu_0 I / (2R)$ ;  $B_h = \mu_0 IR^2 / [2(R^2 + h^2)^{3/2}]$ .

9.2.11.  $n = \sin(\alpha/2)$ .

9.2.12.  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right)$ .

9.2.13.  $B = \mu_0 I / (4R)$ .

9.2.14\*.  $B_0 = \frac{\mu_0 I(\pi + 1)}{2\pi R}$ ;

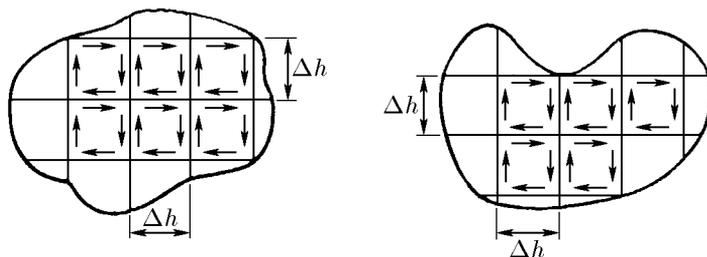
$$B_h = \frac{\mu_0 I}{2} \left[ \frac{1}{\pi^2(R^2 + h^2)} + \frac{R^4}{(R^2 + h^2)^3} + \frac{2R^3}{\pi(R^2 + h^2)^{5/2}} \right]^{1/2}$$

9.2.15. а.  $I = I_0 \sqrt{10}$ . б\*.  $I = 2I_0 \sqrt{10}$ .

9.2.16.  $B = \mu_0 M / (2\pi h^3)$ .

9.2.17\*.  $B = \mu_0 M \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha} / (4\pi r^3)$ ,  $M = Ia^2$ .

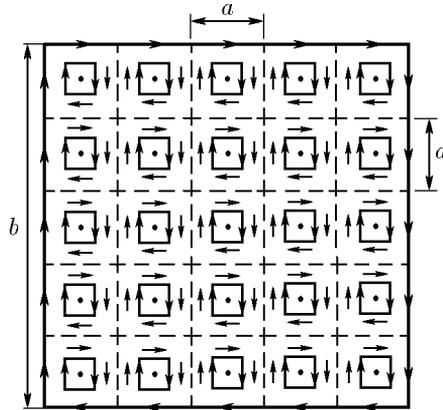
◇ 9.2.18\*. Два плоских контура с током  $I$ , имеющих разную форму, но одинаковую площадь, разобьем на квадратные микроконтуры с током так, как изображено на рисунке. Индукция магнитного поля, создаваемого этими микроконтурами, при  $\Delta h \rightarrow 0$  совпадает с индукцией контуров, внутри которых находятся микроконтуры. Магнитное поле рассматриваемых контуров на большом расстоянии близко к полю отдельного микроконтура, умноженному на число микроконтуров внутри каждого контура. Но это произведение при  $\Delta h \rightarrow 0$  у каждого контура стремится к одной и той же величине, так как число микроконтуров зависит лишь от площади контура.



К ответу 9.2.18

◇ **9.2.19\***. а. На рисунке каждый микроконтур с моментом  $M_0$  окружен контуром с током  $I = M_0/a^2$ . На расстояниях, много больших расстояния между соседними микроконтурами, поле микроконтуров стремится к полю окружающих их токов  $I$ , которое совпадает с полем тока  $I$ , текущего по большому контуру. Магнитный момент такого контура  $M = Ib^2 = M_0b^2/a^2 = nM_0$ .

б. Магнитное поле тонкой пластины близко к магнитному полю контурного тока  $I = hM$ , где  $M$  — магнитный момент единицы объема вещества пластины. Но индукция магнитного поля  $B$  связана с  $I$  соотношением  $B = \mu_0 I \sqrt{8}/(\pi a)$ . Поэтому  $M = \pi a I / (\mu_0 h \sqrt{8})$ .



*К ответу 9.2.19*

**9.2.20.**  $B = \mu_0 M R^2 h / [2(R^2 + l^2)^{3/2}]$ .

**9.2.21.**  $B = 4,9 \cdot 10^{-2}$  Тл.

**9.2.22.** Вектор  $B_0$  должен быть параллелен поверхности диска.  $N = 2\pi B B_0 R^3 / \mu_0$ .

**9.2.23.**  $M = \sqrt{\pi H F} / (2\mu_0 a h^2)$ .

**§ 9.3. Магнитное поле тока, распределенного по поверхности или пространству**

**9.3.1.**  $B = \mu_0 \sigma v / 2$ .

**9.3.2.**  $B = 10^{-10}$  Тл.

**9.3.3.**  $\mu_0 i / 2$ .

**9.3.4.** Между плоскостями  $B = \mu_0 (i_1 - i_2) / 2$ , вне плоскостей  $B = \pm \mu_0 (i_1 + i_2) / 2$ .

**9.3.5.**  $F = \mu_0 I^2 / (2b)$ .

**9.3.6.** а.  $\Delta = \mu_0 a I^2 / (8\epsilon b^2)$ . б.  $B_1 \approx 10$  Тл.  $B_2 \approx 35$  Тл.

**9.3.7.**  $B_{\parallel} = \mu_0 \epsilon_0 E_{\perp} v = \mu_0 i \Omega / (4\pi)$ , где  $E_{\perp} = \sigma \Omega / (4\pi \epsilon_0)$  — составляющая напряженности электрического поля носителей тока, перпендикулярная поверхности,  $\sigma$  — их поверхностная плотность,  $v$  — скорость.

**9.3.8.** а.  $B = \mu_0 i / 4$ . б.  $B = \mu_0 i$ ; не зависит. в\*.  $B = \mu_0 a j / (4\sqrt{3})$ .

**9.3.9.**  $T = \mu_0 n R I^2 / 2$ .

**9.3.10\***. а.  $B_{\parallel} = \mu_0 i \Omega / (4\pi)$ , где  $\Omega$  — телесный угол, под которым видна поверхность цилиндра (см. задачу 9.3.7). В сечении  $AA'$  телесный угол  $\Omega = 2\pi$ , поэтому  $B_{\parallel} = \mu_0 i / 2$ .

б.  $B = \frac{1}{2} \mu_0 i \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/x_1)^2}} \right)$ ,  $B = \xrightarrow{x_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \mu_0 i (R/x_1)^2$ .

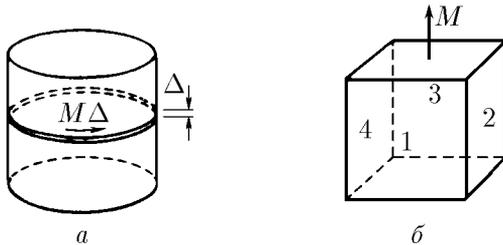
$B = \frac{1}{2} \mu_0 i \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (R/x_2)^2}} \right)$ ,  $B = \xrightarrow{x_2 \rightarrow \infty} \mu_0 i$ .

◇ **9.3.11\***. а. Магнитное поле цилиндра складывается из магнитных полей тонких дисков толщины  $\Delta$ , на которые можно разбить этот цилиндр. Магнитное же поле каждого диска совпадает с магнитным полем тока, текущего с линейной плотностью  $M$  ( $M$  — магнитный момент единицы объема железа); по внешней поверхности диска (см. решение задачи 9.2.19\*).

б. Направление индукции магнитного поля в центре кубика совпадает с направлением намагничивания. Модуль этого вектора будет во столько раз меньше модуля индукции магнитного поля внутри стержня, во сколько раз  $8\pi/3$  (телесный угол, под которым видны боковые грани кубика 1–4) меньше  $4\pi$ , т. е.  $n = 1,5$  раза.

$$в. B = \frac{\mu_0 M}{\sqrt{1 + 4(r/l)^2}}; \quad B \xrightarrow{(r/l) \rightarrow 0} \mu_0 M, \quad B \xrightarrow{(r/l) \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 M l}{2r}.$$

$$г. B = \mu_0 M \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4(r/l)^2}} \right); \quad B \xrightarrow{(r/l) \rightarrow 0} \frac{2\mu_0 M r^2}{l^2}, \quad B \xrightarrow{(r/l) \rightarrow \infty} \mu_0 M.$$



*К ответу 9.3.11*

**9.3.12.** Индукция магнитного поля внутри прямоугольного столба будет во столько раз больше  $B$ , во сколько раз  $4\pi$  больше телесного угла, под которым видны боковые грани пластины из ее центра.  $B = \pi a B_0 / (2\sqrt{2}h)$ .

**9.3.13.**  $B_{\parallel} = 6,28 \cdot 10^{-4}$  Тл,  $B_{\perp} = 0,377$  Тл.

**9.3.14.**  $\Delta B = B_0 \varkappa h / (2R)$ .

**9.3.15.** а.  $B = \mu_0 I x / (2\pi r^2)$ ,  $0 < x < r$ ;  $B = \mu_0 I / (2\pi x)$ ,  $x > r$ .

б.  $B = \mu_0 x j$ ,  $x = a/2$ ;  $B = \mu_0 a j / 2$ ,  $x < a/2$ .

**9.3.16.**  $B_{\text{макс}} = \mu_0 N I / (2\pi r)$ ,  $B_{\text{мин}} = \mu_0 N I / (2\pi R)$ .

**9.3.17.** а. Над плоскостью  $B = \mu_0 I / (2\pi x)$ , линии индукции магнитного поля совпадают с линиями индукции поля бесконечного прямого провода; под плоскостью  $B = 0$ .

б. Над плоскостью  $B = \mu_0 I / (2\pi x)$ , под плоскостью  $B = \mu_0 (I - I') / (2\pi x)$ .

в. Внутри кабеля  $B = \mu_0 I / (2\pi x)$ , вне кабеля  $B = 0$ .

**9.3.18\***.  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

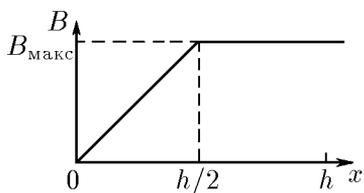
◇ **9.3.19.** См. рис.  $B_{\text{макс}} = \mu_0 h j / 2$ .

**9.3.20.**  $B = \frac{\mu_0}{2} j x$ ,  $0 < x < \frac{h}{2}$ ;  $B = \frac{\mu_0}{2} h j \left( 1 - \frac{h}{4x} \right)$ ,  $x > \frac{h}{2}$ , где  $x$  — расстояние до точки  $O$ .

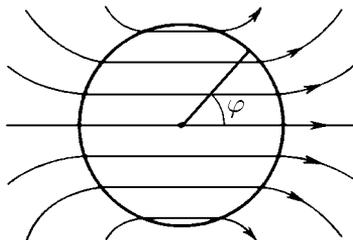
**9.3.21\***.  $B = \mu_0 j d / 2$ .

◇ **9.3.22\***. а.  $B = \mu_0 j a / 2$ . б.  $i = 2B_0 \sin \varphi / \mu_0$ ,  $i_{\text{макс}} = 2B_0 / \mu_0$ . См. рис.

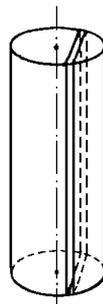
**9.3.23\***. Составляющая индукция магнитного поля вдоль оси соленоида  $B_{\parallel} = \mu_0 n I$ , а составляющая индукция магнитного поля перпендикулярна оси соленоида,  $B_{\perp} = \mu_0 n I \operatorname{tg} \alpha$ .



К ответу 9.3.19



К ответу 9.3.22



К ответу 9.3.24

◇ 9.3.24\*. Для определения эквивалентных поверхностных токов (см. решение задачи 9.3.11\*а) цилиндр нужно разбить на тонкие слои, один из которых изображен на рисунке. Плоскости слоев должны быть перпендикулярны направлению намагничивания.  $B = \mu_0 M/2$  при  $x < r$ ;  $B = (\mu_0 M/2)(r/x)^2$  при  $x > r$ .

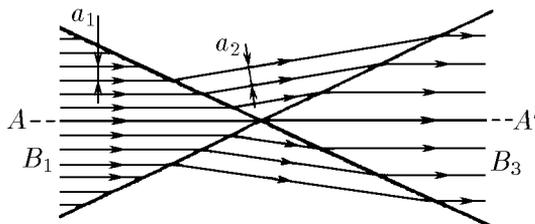
### § 9.4. Магнитный поток

9.4.1 а.  $\Phi = \sqrt{3} B a^2 / 2$  б.  $\Phi = B S \sin \alpha$ .

9.4.2  $\Phi = B \cdot \pi R^2 (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)$ .

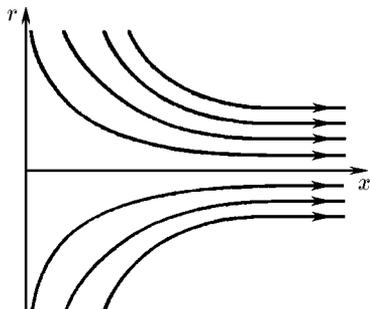
9.4.6  $n = \sin \alpha / \sin \beta$ ,  $i = (B/\mu_0) \cos \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta)$ .

◇ 9.4.7\*.  $B_2 = B_4 = B_1 \frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{B_1^2 + B_3^2 + 2B_1 B_3 \cos \alpha}{2 \cos(\alpha/2)}}$ .

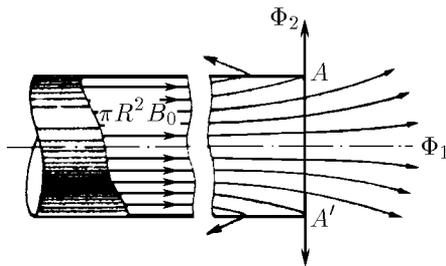


К ответу 9.4.7

◇ 9.4.8. а.  $B_r = \frac{1}{2} B_0 \frac{r}{x}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \frac{r}{x}$ ; см. рис. б.  $B_r = \frac{1}{2} n B_0 \frac{r}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1}$ ,  $B_r = \frac{1}{2} r B_0 \frac{\partial f}{\partial x}$ .



К ответу 9.4.8



К ответу 9.4.10

9.4.9. Так как магнитный поток радиальной составляющей индукции поля вне цилиндра сохраняется, индукция магнитного поля будет убывать как  $\alpha R/r$ , где  $r$  — расстояние до оси

цилиндра,  $\alpha = B_0 R / (2x_0)$  — радиальная составляющая индукции магнитного поля вблизи поверхности цилиндра.

◇ 9.4.10\*. а. На достаточно большом расстоянии от конца цилиндра индукция магнитного поля  $B_0 = \mu_0 i$ , а магнитный поток в сечении  $\pi R^2$  равен  $\pi R^2 B_0$ . Часть этого потока ( $\Phi_1$ ) выходит из цилиндра через сечение  $AA'$ , часть ( $\Phi_2$ ) — через боковую поверхность:  $\pi R^2 B_0 = \Phi_1 + \Phi_2$ . Отсюда  $\Phi_2 = \pi R^2 B_0 - \Phi_1$ . Так как в сечении  $AA'B_{||} = B_0/2$  (см. решение задачи 9.3.10\* а), то  $\Phi_1 = \pi R^2 B_{||} = \pi R^2 B_0/2$  и  $\Phi_2 = \pi R^2 B_0/2 = \mu_0 \pi i R^2/2$ .

б. Сила, действующая на выделенный участок одной половины соленоида в осевом направлении,  $\Delta F_{||} = B_{\perp} \Delta S \cdot nI = nI \Delta \Phi$ , где  $\Delta \Phi$  — магнитный поток от другой половины соленоида через этот участок. Поэтому полная осевая сила  $F_{||} = nI \cdot \Phi$ , где полный магнитный поток от второй половины соленоида через поверхность первой половины  $\Phi = \mu_0 \pi n I R^2/2$ . Значит,  $F_{||} = \mu_0 \pi (n I R)^2/2$ .

9.4.11.  $B = \sqrt{2\mu_0 F / (\pi R^2)}$ .

9.4.12.  $F = nI(\Phi_1 - \Phi_2)$ .

9.4.13. а.  $L = \mu_0 \pi (rR)^2 / l^3$ . б.  $L = \mu_0 n \pi r^2$ .

## ГЛАВА 10. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СЛОЖНЫХ ПОЛЯХ

### § 10.1. Движение в однородном магнитном поле

10.1.1.  $R = 0,2$  м.

10.1.2.  $R = 0,68$  м.

10.1.3. а.  $\omega = qB/m$ . б.  $\omega = 1,75 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ .

10.1.4.  $R_1/R_2 = \sqrt{K_1/K_2}$ .

10.1.5.  $t = 2\pi m / (qB)$ .

10.1.6.  $K = 3(eBR)^2 / (4m_p)$ .

10.1.7.  $\sin \alpha = eBl / (m_e v)$  при  $eB/m_e \leq v/l$ ;  $\alpha = \pi$  при  $eB/m_e > v/l$ .

10.1.8.  $x_1 = 0,29$  м,  $x_2 = 0,41$  м,  $x_3 = 0,5$  м,  $x_4 = 0,58$  м,  $\Delta l = 3,7$  мм.

10.1.9.  $\Delta V/V_0 < 0,025$ .

10.1.10\*.  $l = 2mv / (qB)$ ,  $\Delta z = mv(\delta\alpha)^2 / (4qB)$ .

10.1.11.  $R = mv \sin \alpha / (qB)$ ,  $h = 2\pi mv \cos \alpha / (qB)$ .

10.1.12\*.  $x = 2\pi m_e v / (eB)$ ,  $\Delta y = \pi m_e v (\delta\alpha)^3 / (4eB)$ .

◇ 10.1.13. а. См. рис.  $B \geq B_0 = 2\sqrt{2m_e k} / (eR)$ . б.  $P_2 > P_1$ .

10.1.14.  $B = m_e v / (eR) + e / (16\pi \epsilon_0 v R^2)$ .

10.1.15.  $\omega = \omega_0 - eB / (2m_e)$ .

10.1.16.  $V' = 2Vh/R - Bh\sqrt{2eV/m_e}$ .

10.1.17. а.  $y = \frac{m_e E}{eB^2 l L} z^2$ .

б.  $y[\text{М}] = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1} \cdot z^2$ .

в.  $y = \frac{m_e E}{eB^2 l L} z \sqrt{z^2 + \left(\frac{eBlL}{m_e c}\right)^2}$ .

10.1.18.  $t = \frac{\pi m_p}{e^2 BV} \left( \frac{e^2 B^2 R^2}{2m_p} - K \right)$ .

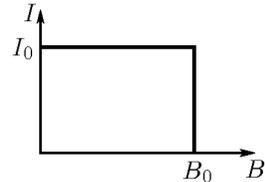
10.1.19.  $V = \frac{eB^2 d^2}{2\pi^2 m_e} \cdot \frac{1}{k^2}$ , где  $k = 1, 2, \dots$ . Размер пятна определяется начальной скоростью электронов.

10.1.20.  $v = \frac{mg}{qB\mu} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$  при  $\mu \leq \text{tg } \alpha$ ;  $v = 0$  при  $\mu > \text{tg } \alpha$ .

10.1.21.  $M = 2\pi R^2 \rho v B_R$ .

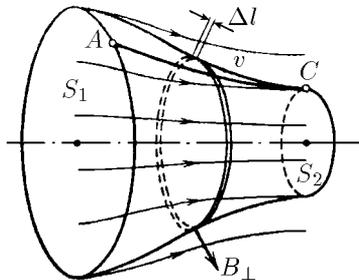
10.1.23\*.  $v = Q(B_2 - B_1)R / (2m)$ .

10.1.25.  $M = QR^2(B_1 - B_2)/2$ . Сохраняется.



К ответу 10.1.13

◇ **10.1.26\***. Время движения электрона через выделенный на рисунке участок  $t = \Delta l/v$ , где  $v$  — проекция скорости на плоскость, проходящую через него и ось. Изменение импульса в направлении, перпендикулярном этой плоскости,  $\Delta p_{\perp} = -eB_{\perp}v\Delta l/v = -eB_{\perp}\Delta l = -e\Delta\Phi/(2\pi R)$ , где  $\Delta\Phi$  — магнитный поток через участок. Изменение момента импульса  $\Delta M = R\Delta p_{\perp} = -(e/2\pi)\Delta\Phi$ . Поэтому  $M_2 - M_1 = (e/2\pi)(\Phi_1 - \Phi_2)$ .



К ответу 10.1.26

**10.1.27\***.  $n = (1 - \sqrt{B_1/B_2})/2$ .

**10.1.28\***.  $r = R\sqrt{B_2/B_1}$ .

**§ 10.2. Дрейфовое движение частиц**

**10.2.1.**  $v_{др} = 2v(B_1 - B_2)/[\pi(B_1 + B_2)]$ .

**10.2.2\***.  $v_{др} \approx \alpha m_e v^2 / (eB_0)$ .

◇ **10.2.3.** См. рис.  $R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mEl}{q}}$ ,

$$v_{др} = \frac{2\sqrt{q}lE}{2\sqrt{q}lB + \pi\sqrt{mE}}$$

**10.2.4.**  $v = E/B$ .

**10.2.5.**  $v_{др} = E/B$ .

**10.2.6.**  $v_{др} = (E/B) \sin \alpha$ .

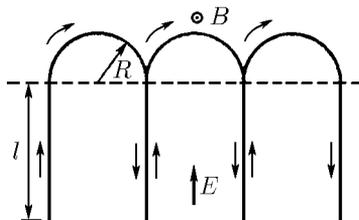
**10.2.8.**  $v \leq eBh/(4m_e)$  или  $v = V/(hB)$ .

**10.2.9.**  $V = eB^2d^2/(2m_e)$ ;  $V = 3,5 \cdot 10^5$  В.

**10.2.10.** В системе координат, движущейся с дрейфовой скоростью  $E/B$ , электрон движется по окружности радиуса  $\frac{m_e v'}{eB}$ , где  $v' = \left( v^2 + 2\frac{E}{B} \cos \alpha + \frac{E^2}{B^2} \right)^{1/2}$ .

**10.2.11.**  $v_{др} = F/(qB)$ .

**10.2.12.**  $v_e \approx 8 \cdot 10^{-7}$  м/с,  $v_p \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$  м/с.



К ответу 10.2.3

**ГЛАВА 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ**

**§ 11.1. Движение проводников в постоянном магнитном поле. Электродвигатели**

**11.1.1.** Между концами крыльев.

**11.1.2.**  $V = 0,03$  В.

**11.1.3.**  $V = vbB$ ;  $\sigma = \varepsilon_0 vB$ .

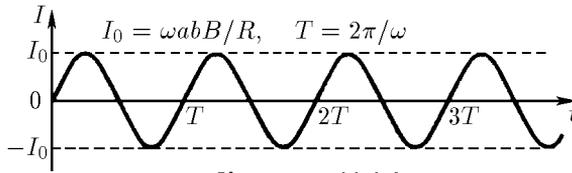
**11.1.4\***.  $v < Ze/(4\pi\varepsilon_0 Br^2)$ .

**11.1.5\***.  $V < 7$  МВ.

11.1.6.  $E = vB$ .

11.1.7.  $B = V/(a^2\omega)$ .

◇ 11.1.8. а. См. рис. б.  $M = (a^2b^2B^2\omega/R)\sin^2\omega t$ .



К ответу 11.1.8

11.1.9.  $W = B^2vab/(2\rho)$ ,  $a < b$ ;  $W = B^2vb^2/(2\rho)$ ,  $a > b$ .

11.1.10\*.  $W = B^2l^2v \operatorname{tg} \alpha/(2\rho)$ .

11.1.11.  $N = (vB)^2SL/(4\rho) = 1$  Вт.

11.1.12\*.  $I = \lambda BvS = 10$  кА,  $V = vBh = 200$  В.

11.1.13.  $V = IB/(\rho h)$ .

11.1.14. а.  $v = \sqrt{2BIL/m}$ . б.  $v \approx 1,1 \cdot 10^7$  м/с.

11.1.15.  $v = \sqrt{IB/(\rho b)}$ .

11.1.16.  $I_t = 2\pi r_0^2 Bv/[R_0(r_0 + vt)]$ .

11.1.17.  $Q = SB/R$ .

11.1.18.  $B = 1,1 \cdot 10^{-2}$  Тл.

11.1.19.  $v = gmR/(BL)^2$ . В тепло.

11.1.20\*.  $v(t) = g \frac{mR}{B^2l^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right) \right]$ ;  $v(t) = gtm/(m + CB^2l^2)$ .

11.1.21.  $k = I$ .

11.1.22\*.  $v = mgR/(B_0\pi a^2\alpha)^2$ .

11.1.23\*.  $I = (mg/BL)\cos\omega t$ .

11.1.24. а.  $\omega_{\text{уст}} = \frac{2\mathcal{E}}{BL^2} \left( 1 - \frac{2FR}{B\mathcal{E}L} \right)$ ,  $I = \frac{2F}{BL}$ . б\*.  $\omega(t) = \frac{2\mathcal{E}}{BL^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{3B^2L^2}{4mR}t\right) \right]$ .

11.1.25\*.  $I = \omega Br^2/(2R) = 0,4$  А.

11.1.26\*.  $\omega = \omega_0 - 4M\rho/(a^3B^2)$ .

11.1.27. При остановке ротора в цепи потечет максимальный ток, так как будет отсутствовать ЭДС индукции.

11.1.28.  $\mathcal{E} = 40$  В.

11.1.29.  $f = f_0 \left( \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} - \frac{2\pi MRf_0}{\mathcal{E}_0^2} \right)$ .

11.1.30.  $\mathcal{E} = 120$  В.  $N = 240$  Вт.

11.1.31.  $M = 2\mathcal{E}I_0\omega/\omega_0^2$ .

11.1.32\*.  $l = \frac{2V(I_1 - I_2) + R(4I_1^2 - I_2^2)}{2\rho(I_2^2 - I_1^2)}$ ,  $v = \frac{I_2}{2F}[2V - I_2(2\rho l + R)]$ .

## § 11.2. Вихревое электрическое поле

11.2.1.  $\Phi = 1$  Вб, 100 Вб, 300 Вб.

11.2.2.  $E = \alpha r^2/(2l) = 2,5 \cdot 10^{-5}$  В/м.

11.2.3. В положении  $C$  из-за аксиальной симметрии магнитного поля поток индукции через кольцо не меняется. Поэтому в кольце не возникает ЭДС.

11.2.4.  $E_1 = 6,4 \cdot 10^{-6}$  В/м,  $E_2 = 2,56 \cdot 10^{-5}$  В/м.

11.2.5.  $E = \mu_0\alpha x$ , где  $x$  — расстояние от средней линии.

11.2.6.  $E = (\mu_0\pi\nu n_0 I_0/l_0)x \cos(2\pi\nu t)$ , где  $x$  — расстояние от оси катушки;  $\mathcal{E} = 0,12$  В.

11.2.7. а.  $q = C\varphi$ . б.  $q_1 = q_2 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\varphi$ .

$$11.2.8. \text{ a. } q_1 = C_1 \frac{\varphi}{2}, q_2 = C_2 \frac{\varphi}{2}. \quad \text{б}^*. q_3 = \frac{C_3(C_2 - C_1)}{C_1 + C_2 + C_3} \frac{\varphi}{2}.$$

11.2.9. а.  $I = 1,44$  мА. б.  $I = 2,5$  мА, ток через переключку равен нулю. в.  $I_1 = 2,79$  мА,  $I_2 = 1,77$  мА,  $I_3 = 0,96$  мА.

$$11.2.10. \text{ б}^*. \Delta I = IkT/(RC).$$

$$11.2.11. \Phi_{\text{макс}} = VRC = 5 \cdot 10^{-7} \text{ Вб}.$$

$$11.2.12. \text{ а. } V_1 = t\sqrt{2\mu_0 m a^3/(hd)}, V_2 = t^3\sqrt{32\mu_0 m b^2/(9hd)}.$$

$$\text{б. } V_1 = (8,7 \cdot 10^8 \text{ В/с})t, V_2 = (1,2 \cdot 10^{14} \text{ В/с}^3)t^3.$$

$$11.2.13^*. \mathcal{E} = (\pi r^2/3)nB_0\omega \sin \omega t.$$

$$11.2.14^*. \omega = qBl^2/(2mr^2). \text{ Не изменится.}$$

$$11.2.15^*. B(t) = \alpha t(1 + r^2/r_0^2).$$

11.2.16\*. Уменьшается. С ростом индукции магнитного поля растут силы Лоренца и скорость электрона. Однако последняя — недостаточно быстро для того, чтобы электрон остался на окружности того же радиуса.

11.2.17\*.  $l = 3r_0/4$ . В 100 раз. Если начальный радиус  $r < l$ , электрон будет двигаться по сходящейся к центру спирали, при  $r > l$  — по расходящейся спирали.

$$11.2.18^*. \omega = 2\sigma B/[r(\rho + 2\mu_0\sigma^2)].$$

11.2.19\*. а. В  $2,6 \cdot 10^{12}$  раз. б.  $nSr \approx 7 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ , где  $n$  — число витков на единицу длины соленоида,  $r$  — радиус соленоида,  $S$  — сечение провода.

$$11.2.20^*. m_{\text{э.м.}} = \varepsilon_0\mu_0 CV^2 = CV^2/c^2, \text{ где } c \text{ — скорость света.}$$

$$11.2.21^*. m_{\text{э.м.}} \approx 10^{-27} \text{ кг}.$$

### § 11.3. Взаимная индуктивность. Индуктивность проводников. Трансформаторы

$$11.3.1. \Phi = \mu_0 ISn \sin \alpha, L_{12} = \mu_0 Sn \sin \alpha.$$

$$11.3.2. L_{12} = (\mu_0 \pi r^2 n/2)(\cos \alpha + \sin \alpha).$$

$$11.3.3. L_{12} = \mu_0 \pi r^2 nN.$$

$$11.3.4^*. V = \mu_0 \pi r^2 nN\omega I_0 \cos \omega t.$$

$$11.3.5. L = \mu_0 \pi r^2 n^2 l. \quad \text{б}^*. \text{ Уравнение движения электрона в соленоиде}$$

$$e \left( E - \frac{L}{l} \frac{dI}{dt} \right) = m_e \frac{dv}{dt}, \quad l = 2\pi rN.$$

Но  $e n_e S v = I$ . Поэтому первое уравнение можно переписать в виде

$$El = V = \left( L + \frac{m_e l}{e^2 n_e S} \right) \frac{dI}{dt}.$$

Значит,  $L_1 = L + m_e l/(e^2 n_e S)$ . Можно.

$$11.3.6^*. L = \mu_0 \pi (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) n^2 / 3 = 2,3 \text{ Гн/м}.$$

$$11.3.7. t = B\sqrt{v}/(V\sqrt{\mu_0}) = 8,9 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

$$11.3.8. \text{ При } h \ll dL = \mu_0 h/d = 6,3 \cdot 10^{-8} \text{ Гн/м}.$$

$$11.3.9^*. L = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

$$11.3.10^*. L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \mu_1 + 2\mu_2 \ln \frac{r_1}{r_2} \right).$$

$$11.3.11^*. L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{h}{r}.$$

$$11.3.12. \text{ Увеличится в } k \text{ раз.}$$

$$11.3.13. L_1 = \mu_0 \pi (n_1^2 r_1^2 l_1 + n_2^2 r_2^2 l_2 + 2n_1 n_2 r_1^2 l_2); \quad L_2 = \mu_0 \pi (n_1^2 r_1^2 l_1 + n_2^2 r_2^2 l_2 - 2n_1 n_2 r_1^2 l_2).$$

$$11.3.14. L = L_1 + L_2 + 2L_{12}.$$

$$11.3.15^*. L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

$$11.3.16^*. \mathcal{E}_2 = (\mu\mu_0 N_1 N_2 S/l) I_0 \omega \cos \omega t. \quad V_1 = (\mu\mu_0 N_1^2 S/l) I_0 \omega \cos \omega t.$$

$$11.3.17. V_2 = \text{const}.$$

$$11.3.21. \nu = 100 \text{ Гц}.$$

$$11.3.22. \text{ Чтобы уменьшить токи Фуко.}$$

$$11.3.24. V = 10 \text{ В}.$$

$$11.3.25^*. V = 60 \text{ В}.$$

§ 11.4. Электрические цепи переменного тока

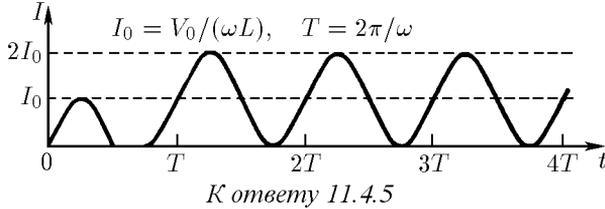
11.4.1.  $I(t) = \mathcal{E}t/L$ ,  $A = \mathcal{E}^2\tau^2/(2L)$ . В энергию магнитного поля.

11.4.2. а)  $V = \alpha(Rt + L)$ . б)  $V = I_0(R \sin \omega t + L\omega \cos \omega t)$ .

11.4.3\*.  $W_{\max} = (LI)^2/(RT)$ .

11.4.4\*.  $I(t) = (\mathcal{E}_0/\omega L)(1 - \cos \omega t)$ .

◇ 11.4.5. См. рис.



11.4.6.  $C(t) = C_0[1 - t^2/(2LC_0)]$ .

11.4.7.  $V_{\max} = V_0 R \sqrt{C/L}$ .

11.4.8. а. При размыкании. б.  $C = 1/[(2\pi\nu N)^2 L] \approx 1$  мкФ.

11.4.9.  $I_{\max} = \mathcal{E} \sqrt{C/L}$ ,  $q_{\max} = 2\mathcal{E}C$ .

11.4.10.  $I_{1\max} = V \sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1 + L_2)}}$ ,  $I_{2\max} = V \sqrt{\frac{CL_1}{L_2(L_1 + L_2)}}$ .

11.4.11\*. а.  $I = V_0 \sqrt{C/L} \sin \omega_0 t$ , где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

б.  $I = \frac{V_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}(\omega_0 \sin \omega_0 t - \omega \sin \omega t)$ ;  $I_{\max} = \frac{V_0}{L|\omega - \omega_0|} \approx 4,8$  кА.

◇ 11.4.12. а. См. рис.  $V_R = RI_0$ ,  $V_L = \omega LI_0$ ,  $V_C = I_0/(\omega C)$ .

б.  $V_0 = I_0 \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$ .

11.4.13.  $\mathcal{E}_0 = 208$  В.

11.4.14.  $I(t) = \frac{\mathcal{E}_0(\omega^2 LC - 1)}{\omega L(2 - \omega^2 LC)} \cos \omega t$ .

11.4.15.  $L = 2,8$  Гн.

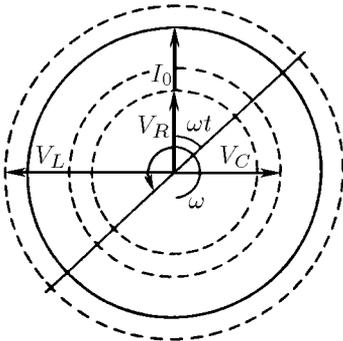
11.4.16\*.  $V = V_0 \sin(\omega t - \varphi)$ , где  $\varphi = \arctg \frac{2\omega C_0 R_0}{(\omega C R)^2 - 1}$ .

11.4.17. а.  $I_L = 0$ ,  $I_R = (\mathcal{E}_0/R) \sin \omega t$ ,  $N = 200$  Вт.

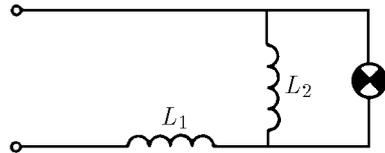
б.  $I_R = (\mathcal{E}_0/R) \sin \omega t$ ,  $I_C = -\mathcal{E}_0 \omega C (\sin \omega t + \cos \omega t)$ ,  $N = 200$  Вт.

11.4.18.  $L = 0,16$  Гн.

◇ 11.4.19. См. рис.



К ответу 11.4.12



К ответу 11.4.19

**11.4.20\***. Если  $V_{C_0}$  и  $V_C$  — разности потенциалов соответственно на конденсаторе  $C_0$  и  $C$ , а  $I$  — ток в контуре, тогда  $V_{C_0} - V_C = LdI/dt = V_0 \cos \omega t$ ,  $\omega = \sqrt{LCC_0/(C+C_0)}$ . Но  $(V_0 - V_{C_0})C_0 = V_C C$ . Из этих уравнений находим

$$V_C = (1 + C/C_0)^{-1} V_0 (1 - \cos \omega t).$$

Поэтому при  $V < 2V_0(1 + C/C_0)^{-1}$  пробой происходит через время

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arccos \left[ 1 - \left( 1 + \frac{C}{C_0} \right) \frac{V}{V_0} \right],$$

а при  $V > 2V_0(1 + C/C_0)^{-1}$  конденсатор емкости  $C$  не пробивается.

**11.4.21. б.** Если  $I_1$  и  $I_2$  — токи через катушки индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ , а  $\omega = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C}$  и  $I_0 = V_0/(\omega L_1)$ , тогда  $L_1 I_1 + L_2 I_2 = LI_0$ ,  $I_1 - I_2 = I_0 \cos \omega t$ . Из этих уравнений находим

$$I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} (1 + \cos \omega t) I_0, \quad I_{\max} = 2V_0 \sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2}}.$$

**11.4.22\***. а.  $L_1 I_1 + L_2 I_2 = L_1 I = (L_1 + L_2) I_0$ , где  $I_0$  — установившийся ток через катушки индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ .

$$W = \frac{1}{2} L_1 I^2 - \frac{1}{2} (L_1 + L_2) I_0^2 = \frac{L_1 L_2}{2(L_1 + L_2)} I^2.$$

б. От  $I_1$  до  $I_1 - 2(I_1 - I_2)/(1 + L_1/L_2)$ ; от  $I_2$  до  $I_2 + 2(I_1 - I_2)/(1 + L_2/L_1)$ .

**11.4.23\***.  $R = 1,4 \cdot 10^{-3}$  Ом.

**11.4.24\***.  $W = (L + CR^2)(I_1^2 - I_2^2)/2$ .

**11.4.25\***.  $\varphi = 2 \arcsin(\omega \sqrt{LC}/2)$ .  $v = \omega l/\varphi$  при  $\omega < 2/\sqrt{LC}$ ;  $v = l/\sqrt{LC}$  при  $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$ .

## § 11.5. Сохранение магнитного потока.

### Сверхпроводники в магнитном поле

**11.5.2.**  $B = B_0(r_0/r)^2$ .

**11.5.3.** Уменьшится в два раза.

**11.5.4.** В полтора раза.

**11.5.5.** Уменьшится в три раза.

**11.5.6\***. Меняется только осевая составляющая индукции магнитного поля. В области внешнего поля она равна  $(1/2)B_0 \cos \alpha$ , а вне этой области  $-(1/2)B_0 \cos \alpha$ .

**11.5.7.**  $I = I_0 - (\pi r^2/L)B_0 \cos \alpha$ .

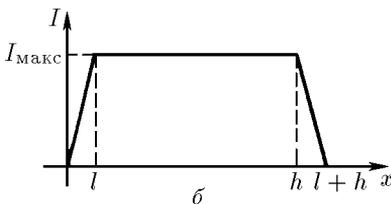
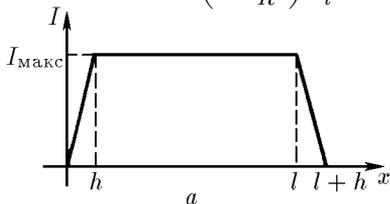
**11.5.8.**  $I_0 = \pi D^2 B/(4L)$ .

**11.5.9.** Вне стального цилиндра индукция уменьшится на  $B_0/2$ , внутри него увеличится на  $B_0/2$ .

◇ **11.5.10\***. См. рис.  $x$  — координата переднего торца стержня, отсчитываемая от начала катушки.

а.  $I_{\max} = \frac{I_0}{1 - \sigma/S}$ . б.  $I_{\max} = \frac{I_0}{1 - \sigma l/(Sh)}$ .

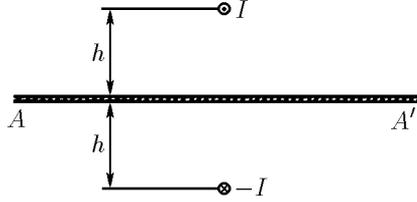
**11.5.11\***.  $L = \mu_0 \pi r^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{N^2}{l}$ .



К ответу 11.5.10

**11.5.12.**  $I = a\sqrt{2\rho_{Cu}gh/\mu_0} = 380$  А,  $\rho_{Cu}$  — плотность меди.

◇ **11.5.13\*.** Магнитное поле над сверхпроводящей плоскостью  $AA'$  совпадает с магнитным полем, которое является результатом наложения магнитных полей прямого провода с током  $I$  и провода с током  $(-I)$ , симметрично расположенного под плоскостью  $AA'$ . Магнитного поля над плоскостью  $AA'$  нет. Поэтому  $P = \mu_0 I^2 / [2(\pi h)^2]$ . Взаимодействие со сверхпроводящей плоскостью длинного провода с током  $I$  эквивалентно взаимодействию двух проводов, находящихся на расстоянии  $2h$  друг от друга, токи в которых текут в противоположные стороны. Поэтому  $f = \mu_0 I^2 / (4\pi h)$ .



*К ответу 11.5.13*

**11.5.14.**  $v = V/(\pi r^2 n B) = 2$  км/с.

**11.5.16\*.** Из законов сохранения энергии и магнитного потока в соленоиде следует

$$\frac{1}{2\mu_0} B_0^2 (W - w) + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 W + \frac{1}{2} m v^2, \quad B_0 (W - w) = B W,$$

где  $B_0 = \mu_0 N I / L$  и  $B$  — максимальная индукция магнитного поля в соленоиде до и после вылета снаряда,  $W = \pi R^2 L$  и  $w = \pi r^2 l$  — объем соленоида и снаряда. Из приведенных уравнений получаем

$$\Delta v = \sqrt{v_0^2 + \pi \mu_0 (N I / L)^2 r^2 l [1 - r^2 l / (R^2 L)]} - v_0.$$

**11.5.17\*.**  $v = N I r \sqrt{\pi \mu_0 / (12 l m)}$ .

**11.5.18\*.** При входе в магнитное поле в сверхпроводящем стержне возникает ток, создающий внутри стержня поле, индукция которого равна по модулю индукции внешнего поля и направлена противоположно ей. Работа по созданию этого тока  $A = B^2 S l / (2\mu_0)$  равна изменению кинетической энергии стержня. Отсюда  $v_{\min} = B \sqrt{S l / (\mu_0 m)}$ .

**11.5.19.** Магнитный поток в любом сечении трубки при пролете снаряда не изменяется:

$$\pi r_1^2 B = \pi (r_1^2 - r_0^2) B_1, \quad \pi r_2^2 B = \pi (r_2^2 - r_0^2) B_2.$$

Использование этих уравнений и закона сохранения энергии дает

$$\Delta K = (l B^2 / 2\mu_0) [r_1^4 / (r_1^2 - r_0^2) - r_2^4 / (r_2^2 - r_0^2)].$$

**11.5.20.**  $v_1 = v$ ,  $v_2 = 3v$ , если  $m v^2 < B^2 l S s^2 / [4\mu_0 (2S - s)(S - s)]$ ;  $v_1 = 3v$ ,  $v_2 = v$ , если  $m v^2 > B^2 l S s^2 / [4\mu_0 (2S - s)(S - s)]$ .

**11.5.21.**  $v'_1 = v_1$ ,  $v'_2 = v_2$ , если  $\frac{(v_2 - v_1)^2}{1/m_1 + 1/m_2} > \frac{B^2 l S s^2}{2\mu_0 (2S - s)(S - s)}$ ;  
 $v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}$ ,  $v'_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$ ,  
 если  $\frac{(v_2 - v_1)^2}{1/m_1 + 1/m_2} < \frac{B^2 S s^2}{2\mu_0 (2S - s)(S - s)}$ .

**11.5.23\*.**  $T' = T / \sqrt{1 + B^2 r^4 T^2 / (4 L J)}$ .

**11.5.24\*.**  $\omega = 2i \sqrt{\mu_0 a h / [m(l - d)]}$ .

**11.5.25\*.**  $v = v_0 (1 + \sqrt{1 + L x I_0^2 / (m v_0^2)})$ .

**11.5.26\*.**  $B = B_0 + 2\mu_0 \rho v^2 \Delta / (B r_0) \approx 500$  Тл,  $P = B^2 (2\mu_0) \approx 10^{11}$  Па.

**11.5.27\*.** Уравнение движения электрона в трубке

$$m_e \frac{dv}{dt} = e E = e \frac{r}{2} \frac{d(B - B')}{dt},$$

где  $B$  и  $B'$  — индукции внешнего магнитного поля и поля, создаваемого движущимися электронами. Поэтому  $m_e v = er(B - B')/2$ . С другой стороны,  $en_e v h = j$ ,  $B' = \mu_0 j$ , где  $j$  — линейная плотность тока. Из последних уравнений получаем  $j = e^2 h B / (2m_e + e^2 r \mu_0 n_e h)$ , а затем  $B - B' = \frac{m_e B}{m_e + e^2 r \mu_0 n_e h / 2} = 5,7 \cdot 10^{-5}$  Тл.

11.5.28\*.  $B = 2m_e \omega / e$ .

§ 11.6. Связь переменного электрического поля с магнитным

11.6.1.  $C_B = \frac{1}{c} \frac{dN}{dt}$  (в СГС);  $C_B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dN}{dt}$  (в СИ).  $C_B$  — циркуляция индукции магнитного поля,  $N$  — поток электрического смещения,  $c$  — скорость света,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные.

11.6.2. а.  $\frac{dN}{dt} = v l E$ ,  $C_B = \mu_0 \varepsilon_0 v l E$ ,  $C_B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dN}{dt}$  (в СИ),  $C_B = \frac{1}{c} \frac{dN}{dt}$  (в СГС).

11.6.3.  $N = 9 \cdot 10^5$  В·м.

11.6.4\*. По закону Гаусса поток электрического смещения внутри конденсатора  $N = Q/\varepsilon_0$ , где  $Q$  — заряд конденсатора, а скорость изменения потока  $\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} I$ , где  $I$  — ток в цепи. Поэтому циркуляция индукции магнитного поля  $C_B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dN}{dt} = \mu_0 I$  совпадает с циркуляцией индукции магнитного поля, которую бы создал ток  $I$ .

11.6.5.  $B = 2,5 \cdot 10^{-6}$  Тл.

11.6.6.  $n = 2\pi N r / L$ .

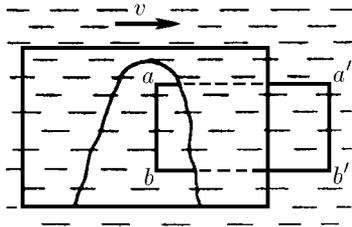
11.6.7.  $B = \mu_0 \varepsilon_0 E v \cos \alpha$ .

11.6.8.  $\sigma = B / (\mu_0 v)$ .

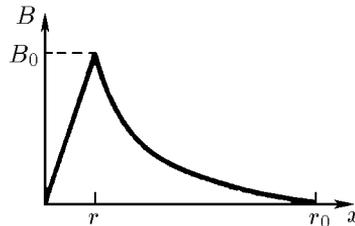
11.6.9. а.  $B = \mu_0 \varepsilon_0 v V / h$  внутри проводника,  $B = -\mu_0 \varepsilon_0 v V / h$  между проводником и обкладками конденсатора.

б. Уменьшится в  $(\varepsilon + 1)/(\varepsilon - 1)$  раз.

◇ 11.6.10\*. См. рис. В первом случае из-за тока поляризации, протекающего через контур  $abb'a'$ , циркуляция вектора индукции магнитного поля через этот контур будет в  $\varepsilon$  раз больше, чем во втором случае. Поэтому движение среды вместе с контуром уменьшает индукцию магнитного поля в  $\varepsilon$  раз.



К ответу 11.6.10



К ответу 11.6.12

11.6.11\*. а. Индукция магнитного поля, вызываемая переменным электрическим полем,

$$B_1 = \pi r^2 \alpha \mu_0 \varepsilon_0 / (2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \alpha r / 2.$$

Индукция магнитного поля, вызываемого током поляризации диэлектрика, в  $\varepsilon - 1$  раз больше:  $B_2 = (\varepsilon - 1) B_1$ . Поэтому  $B = B_1 + B_2 = \varepsilon B_1 = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \alpha r / 2$ .

б.  $B_1 = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \alpha V r}{2h}$ ,  $B_2 = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \alpha V}{2hr_0} [r^2(\varepsilon - 1) + r_0^2]$ .

◇ 11.6.12\*. См. рис.  $B_0 = \mu_0 I r / (2\pi r_0^2)$ . При  $x < r$  величина  $B = \frac{\mu_0 I x}{2\pi r_0^2}$ , при  $r_0 > r > r$

величина  $B = \frac{\mu_0 I r^2 (r_0^2 - x^2)}{2\pi x^2 r_0 (r_0 - r^2)}$ , при  $x > r_0$  величина  $B = 0$ .

## ГЛАВА 12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### § 12.1. Свойства, излучение и отражение электромагнитных волн

12.1.1. В направлении оси  $z$ .

12.1.2. а), б) Изменится на противоположное.

12.1.3.  $E = E_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right]$ .

12.1.4.  $E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ ,  
 $\varphi = \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + \arctg \frac{E_1 \sin \varphi_1 + E_2 \sin \varphi_2}{E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2}$ .

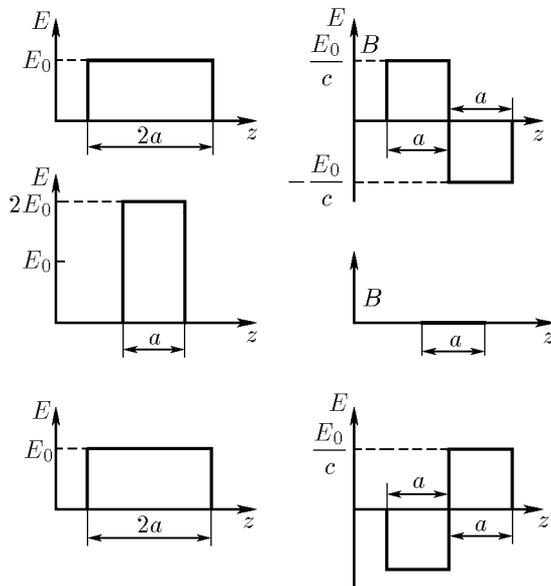
12.1.5.  $E = 2E_0$ ,  $w = \frac{1}{2\pi} E_0^2 \cos^2 \left[ \left( t - \frac{z}{c} \right) \Delta + \varphi \right]$ .

12.1.6.  $B = E/c$  (в СИ),  $B = E$  (в СГС).

12.1.7\*.  $B = E\sqrt{\epsilon}/c$  (в СИ),  $B = E\sqrt{\epsilon}$  (в СГС).

12.1.9\*.  $B = E\sqrt{\epsilon\mu}/c$  (в СИ),  $B = E\sqrt{\epsilon\mu}$  (в СГС).

◇ 12.1.10. См. рис. 1/2, 1/2; 1,0; 1/2, 1/2.



*К ответу 12.1.10*

12.1.11. а. Две плоские волны, бегущие в противоположных направлениях. Длина волн  $d$ , напряженность электрического поля в волне  $E/2$ .

б. На две плоские волны, распространяющиеся перпендикулярно плоскостям  $AB$  и  $A'B'$  в противоположных направлениях. Индукция электрического поля в волне  $cB/2$ .

12.1.12. а.  $E_{\text{изл}} = \frac{1}{2} \frac{v}{c} E$ .

◇ б\*. При остановке сферы в энергию излучения перейдет вся энергия магнитного поля. В любой точке индукция магнитного поля движущегося заряда равна в СГС напряженности электрического поля, умноженной на  $(v/c) \sin \theta$ . Поэтому энергия, перешедшая в излучение, была бы равна энергии электрического поля  $Q^2/(2r)$ , умноженной на  $(v/c)^2$ , если бы не было

множителя  $\sin \theta$ . Из-за этого множителя энергия магнитного поля уменьшается еще в полтора раза. Таким образом,

$$W = \frac{Q^2}{3r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (\text{в СГС}), \quad W = \frac{Q^2}{12\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (\text{в СИ}).$$

в. Напряженность «лишних» полей увеличится в два раза. Излучаемая энергия пропорциональна квадрату напряженности. Поэтому мощность излучения увеличится в четыре раза.

**12.1.13.** Интерференцией излучения от разных пластин.

$$\nu'_k = \frac{c}{d}k, \quad \nu''_k \approx \frac{c}{d} \left(k + \frac{1}{2}\right),$$

$k$  — целое число.

◇ **12.1.15\***. а. См. рис. В момент времени  $t$  в точке  $A$  напряженность электрического поля излучения  $E_{\text{изл}} = E_1 + E_2$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — напряженность поля в волне, излучаемой верхней и нижней пластинами:

$$E_1 = \frac{1}{2c} E v_{t-x/c} = \frac{1}{2c} E a \left(t - \frac{x}{c}\right), \quad E_2 = -\frac{1}{2c} E v_{t-(x+d)/c} = -\frac{1}{2c} E a \left(t - \frac{x+d}{c}\right).$$

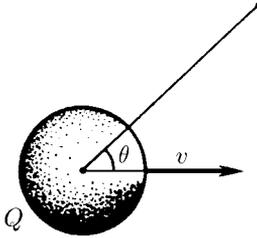
Значит,  $E_{\text{изл}} = E_1 + E_2 = adE/(2c^2)$ .

б.  $E_{\text{изл}} = \mu_0 c i_0 / 2 = i_0 / (2c\epsilon_0)$  (в СИ);  $E_{\text{изл}} = 2\pi i_0 / c$  (в СГС).

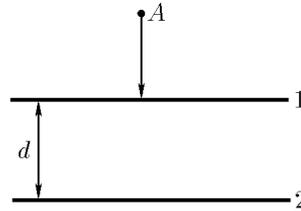
в. В электрическом поле волны  $E_0 \sin \omega t$  ( $\omega = 2\pi\lambda$ ) скорость электронов  $v = \frac{eE_0}{m_e\omega} \cos \omega t$ .

Амплитуда напряженности электрического поля в волне, излучаемой этими электронами,  $E_{\text{изл}} = \frac{eE_0}{m_e\omega} \frac{ne}{2c\epsilon_0}$ . Коэффициент отражения  $k = (E_{\text{изл}}/E_0)^2 = [ne e^2 x / (4\pi m_e \nu \epsilon_0 c)]^2$ .

Можно найти также коэффициент отражения, определив, на сколько ослабится волна после прохождения пленки. В этом случае следует учесть вторичное излучение электронов, вызываемое их взаимодействием с волной, уже испущенной этими же электронами при взаимодействии с падающей волной. Из-за наложения на волну, прошедшую пленку, вторичного излучения, идущего в противофазе, интенсивность волны уменьшается, а из-за наложения на нее первичного излучения, идущего со сдвигом фазы  $\pi/2$ , увеличивается. Первое влияние в два раз сильнее второго. Поэтому интенсивность волны после прохождения пленки уменьшится на величину, равную интенсивности отраженной волны.



К ответу 12.1.12



К ответу 12.1.15

**12.1.16.**  $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$  см.

**12.1.17.** По мере увеличения толщины пленки в отражение излучения вовлекается все большее число электронов и амплитуда отраженной волны линейно растет (область  $x < x_1$ ). Линейная зависимость амплитуды от толщины пленки нарушается в случае, когда доля отраженного излучения велика. Это имеет место при  $x > x_2$ .

**12.1.18\***.  $\Delta \approx 4\pi m_e \nu \epsilon_0 c / (n_e e^2) \approx 10^{-5}$  см.

**12.1.19.**  $E = 0, B = 2E/c$ .

**12.1.20.**  $\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$  см,  $x = 2 \cdot 10^{-5}$  см.

**12.1.21.**  $j = 2\epsilon_0 c E, P = 2\epsilon_0 E^2$  (в СИ);  $j = cE_0/(2\pi), P = E^2/(2\pi)$  (в СГС).

**12.1.22.**  $P = c_0 E_0^2$ .

**12.1.23.**  $P = 2$  мПа,  $P = 0,5$  мПа.

12.1.24\*.  $r \approx 1$  мкм.

◇ 12.1.25. См. рис. а)  $E' = -E$ ,  $B' = B$ . б)  $E' = E$ .

12.1.26.  $E = \sqrt{P\varepsilon_0 \cos^2 \alpha}$ .

12.1.27\*. Сила, действующая на электрон, движущийся вдоль металлической поверхности, равна в СГС  $F = e \left( E - \frac{v}{c} B \right) = 0$ . Поэтому  $E/B = v/c$ .

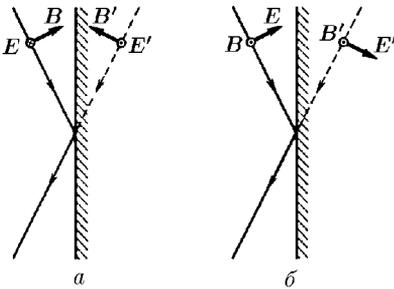
12.1.28\*.  $P = 2\varepsilon_0 E_0^2 \frac{c+v}{c-v}$  (в СИ);  $P = \frac{1}{8\pi} E_0^2 \frac{c+v}{c-v}$  (в СГС).

12.1.29.  $v = c\Delta/(2\nu_0 + \Delta)$ .

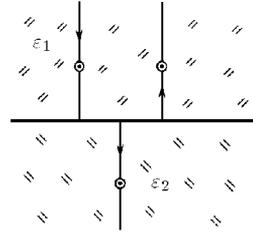
12.1.30.  $v = c \frac{k-1}{k+1}$ .

◇ 12.1.31. а. Наведенные на плоской границе заряды создают электрическое поле, перпендикулярное плоской границе. Поэтому в  $\varepsilon$  раз уменьшается лишь перпендикулярная составляющая напряженности электрического поля волны.

б. Наведенные поверхностные токи создают магнитное поле, индукция которого параллельна поверхности. Поэтому в  $\mu$  раз увеличивается лишь параллельная составляющая индукции магнитного поля волны.



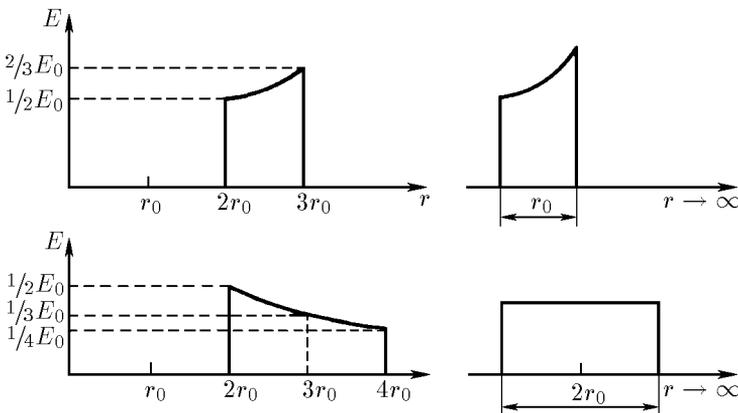
К ответу 12.1.25



К ответу 12.1.31

12.1.32. С разных сторон границы раздела напряженность электрического и индукция магнитного полей одинаковы:  $E - E_0 = E_n$ ,  $B + B_0 = B_n$ , а  $B = E\sqrt{\varepsilon_1}/c$ ,  $B_0 = E_0\sqrt{\varepsilon_1}/c$ ,  $B_n = E_n\sqrt{\varepsilon}/c$  (см. задачу 12.1.7\*). Из этих уравнений следует  $E_0/E = (\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1})/(\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1})$ . При  $\sqrt{\varepsilon_1} < \sqrt{\varepsilon_2}$  знаки  $E_0$  и  $E$  одинаковы, а при  $\sqrt{\varepsilon_1} > \sqrt{\varepsilon_2}$  противоположны. Это означает, что в первом случае фаза отраженной волны не меняется, а во втором случае меняется на  $\pi$ .

◇ 12.1.34. См. рис. В СГС  $W_1 = 7E_0^2 r_0^3/3$ ,  $W_2 = 2E_0^2 r_0^3$ .



К ответу 12.1.34

## § 12.2. Распространение электромагнитных волн

12.2.2. Длина волны и ее скорость уменьшаются в  $n$  раз, частота не меняется.

12.2.4.  $\sin \alpha_k = k\lambda/b$ , где  $k$  — целое число.

12.2.5. В  $k^2$  раз.

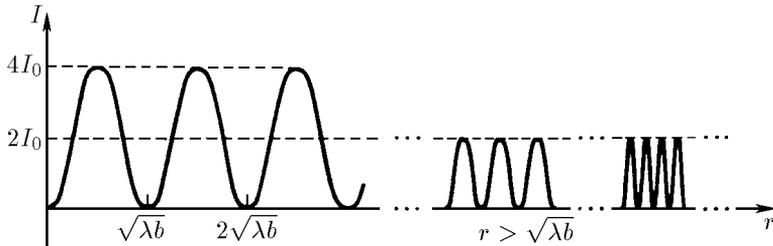
12.2.6.  $\Delta\alpha = 13,5'$ .

12.2.7.  $l = 2r^2/\lambda$ ,  $l_k = 2r^2/[\lambda(k+1)k]$ .

12.2.8. Увеличится интенсивность излучения в других точках.

12.2.9\*. В четыре раза.

◇ 12.2.10. См. рис.



К ответу 12.2.10

12.2.11\*. Увеличилась в 100 раз (а) и в 324 раза (б).

12.2.12\*.  $c = i/\lambda$ ,  $a = A\Delta Si/(r\lambda)$  (умножение на  $i$  означает сдвиг фазы вторичной волны на  $\pi/2$ ).

12.2.13. а.  $R \approx 1$  км. б.  $R \approx 1,5$  м.

12.2.14.  $l \approx 1$  м, 0,5 км, 150 км.

12.2.15. а. Голубая часть спектра излучения нити рассеивается на матовой поверхности сильнее.

в. Из-за флуктуации плотности атмосферного воздуха голубая часть спектра рассеивается сильнее.

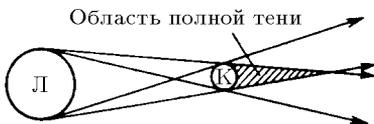
## ГЛАВА 13. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА. ФОТОМЕТРИЯ. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА

### § 13.1. Прямолинейное распространение и отражение света

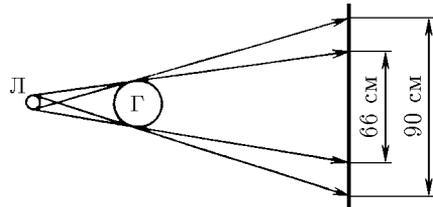
◇ 13.1.1. См. рис.

◇ 13.1.2. См. рис.

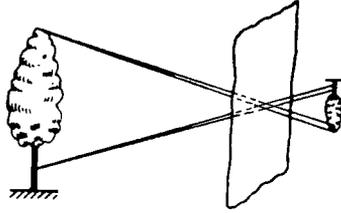
◇ 13.1.3. См. рис.



К ответу 13.1.1



К ответу 13.1.2



К ответу 13.1.3

13.1.4. На стене получается изображение Солнца. В случае, когда размер отверстия будет больше изображения Солнца на стене.

13.1.5. Зеркало не «переворачивает» изображение. Но непрозрачный предмет кажется нам перевернутым справа налево, так как обычно отраженную зеркалом сторону мы видим только в случае, если предмет развернуть на  $180^\circ$ .

13.1.6.  $H = h/2$ .

13.1.7. Не меняется.

13.1.8. В результате двойного отражения получается неперевернутое изображение. Из любой точки комнаты.

13.1.9. У к а з а н и е: посмотрите в калейдоскоп.

12.3.10\*.  $\alpha = 120^\circ$ .

◇ 13.1.11. Ход лучей показан на рисунке.

13.1.12.  $x = h/2$ .

13.1.13.  $f = R/2$ .

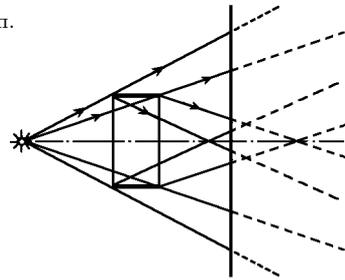
13.1.15.  $f = 36$  см.

13.1.16.  $l = 20$  см.

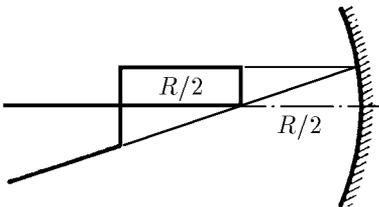
13.1.17.  $f = 48$  см.

◇ 13.1.18. См. рис.

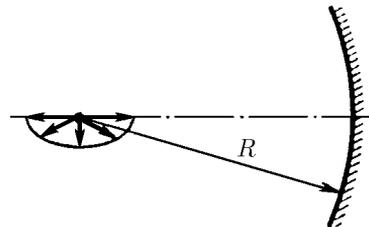
◇ 13.1.19. См. рис.



К ответу 13.1.11



К ответу 13.1.18



К ответу 13.1.19

12.3.20\*. Параболоид вращения, если его ось параллельна лучам.

### § 13.2. Преломление света. Формула линзы

13.2.1.  $\alpha = 48^\circ$ .

13.2.2. а.  $h = 4$  м. б.  $h = 4$  км.

13.2.3. Уменьшится в  $\frac{L+l}{L+l/n}$  раз.

13.2.4.  $n = 1,13$ .

13.2.5. а.  $\alpha_a = 24,6^\circ$ ,  $\alpha_b = 49^\circ$ ,  $\alpha_{a,b} = 33,7^\circ$ .

б. Из-за полного внутреннего отражения лучей от пузырей.

13.2.6. Нет.

13.2.7.  $R = ln/(n-1)$ .

**13.2.8.** При  $\alpha > \arccos(2/3)$  свет уже при первом отражении частично выйдет из конуса. При  $\alpha < \arccos(2/3)$  свет сначала будет целиком отражаться от боковой поверхности. После каждого отражения угол между лучом и нормалью к поверхности конуса будет уменьшаться на  $2\alpha$ , и через несколько отражений свет снова будет уходить из конуса через его поверхность.

**13.2.9.**  $r = R/2$ .

**13.2.10\***.  $r' = r/n$ .

**13.2.11.**  $\sin \alpha = n/k^{N-1}$ , если  $n/k^{N-1} < 1$ ; проходит всегда, если  $n/k^{N-1} > 1$ .

**13.2.12.**  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{n_0}{\alpha} - R \right)$ .

**13.2.14.** в.  $\frac{1}{F} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ .

**13.2.15.** а.  $F = 0,25$  м,  $D = 1/F = 4$  дптр. б.  $R = 0,6$  м.

**13.2.16.**  $R = 0,26$  м.

**13.2.17\***. а)  $\frac{1}{x} = \frac{1}{nf} - \frac{n-1}{nr}$ ; б)  $\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{n-1}{r}$ .

**13.2.18.**  $f = -\frac{1}{(n-1)} \frac{R^2}{\delta}$ .

**13.2.19.**  $\Delta = \alpha(n_1 - n_2)f$ .

**12.2.20\***. Из части боковой поверхности полуцилиндра, ограниченной углом  $\alpha = 2 \arcsin(1/n)$ .

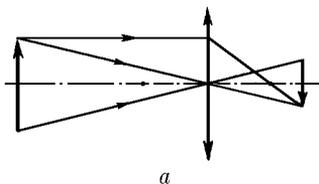
**12.2.21\***.  $n = 4/3$ .

**13.2.22.**  $n = 3/2$ .

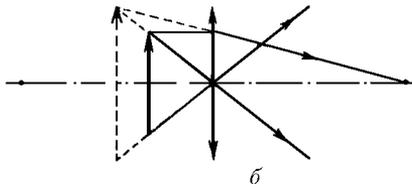
**13.2.23.**  $y = x/n$ .

**§ 13.3. Оптические системы**

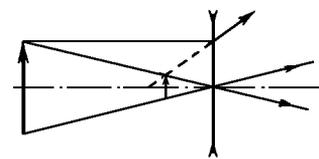
◇ **13.3.1.** См. рис.: а)  $k = 1/2$ ; б)  $k = 3/2$ ; в)  $k = 1/4$ ; г)  $k = 3/4$ .



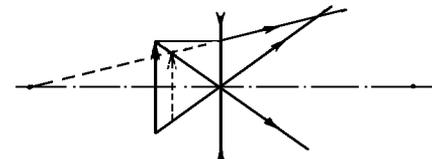
а



б



в



г

◇ **13.3.2.** См. рис.

**13.3.3.**  $f = 20$  см.

**13.3.4.**  $f = 2f$ .

**13.3.5.**  $v = 2\omega f$ .

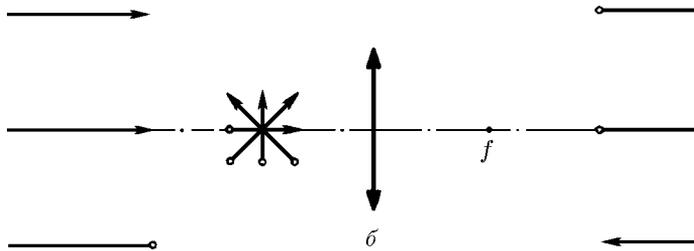
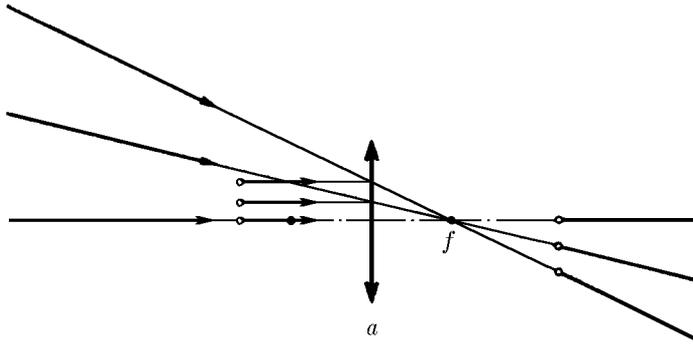
**13.3.6.**  $k = \frac{f^2}{(a-f)^2 - l^2/4}$ .

**13.3.7.**  $f = 3/7$  м.

**13.3.8.**  $t = 5$  мс.

**13.3.9.**  $\frac{df}{dt} = \frac{vk}{1+k}$ ,  $\frac{db}{dt} = vk$ .

*К ответу 13.3.1*



К ответу 13.3.2

13.3.10. К линзе на расстояние  $l = \frac{r_1 - r_2}{D/2 + r_2} f$ .

13.3.11\*.  $2,3 \text{ м} < l_1 < 3,2 \text{ м}$ ;  $1,6 \text{ м} < l_2 < 8 \text{ м}$ .

13.3.12.  $D_1 = -5$  дптр,  $D_2 = 2$  дптр.

13.3.13. Сильно близорукий.

13.3.14. Отверстие ограничивает рабочую площадь хрусталика и позволяет рассматривать предметы, удаленные от глаза менее чем на 25 см. Увеличение будет  $k = 25/x$ , где  $x$  — расстояние.

13.3.15.  $f = 2,5$  см.

13.3.16\*.  $\text{tg } \alpha' = (1 - \alpha/f) \text{tg } \alpha$ .

13.3.17.  $k = 2$ .

13.3.18. а.  $l_1 = f(a - 2f)/(a - f)$ ,  $l_2 = a - f$ . б.  $f' = f/2$ .

13.3.19.  $f' = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$ ;  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ .

13.3.20.  $f' \approx f/2 + 3l/4$  от первой линзы.

13.3.21. На расстоянии, превышающем 10 см от ближайшей линзы.

13.3.22.  $f > 0,6$  м.

13.3.23.  $x_1 = \frac{(d - R)f}{d - R - f}$ ,  $x_2 = \frac{df}{d - f}$  при  $d > R + f$ ;  $x = \frac{fd}{d - F}$  при  $f < d < R + f$ ; при

$d < F$  решения нет.

13.3.24\*.  $n = (R - l/2)/(R - l)$ .

13.3.25\*.  $f_1 = \frac{n}{2} f$ ;  $f_2 = \frac{n(n_0 - 1)}{2(n_0 - n)} f$ .

13.3.26.  $h_2/h_1 = (l - f)f$ .

13.3.27. Увеличится в  $a/(a - f)$  раз.

13.3.28. На  $25l/f_1 f_2$ ; уменьшится в  $k$  раз.

### § 13.4. Фотометрия

13.4.1.  $h = 1$  м.

13.4.2.  $E_1 = 130$  лк,  $E_2 = 71$  лк,  $E_3 = 25$  лк.

13.4.3.  $E = 41$  лк.

13.4.4.  $E = \frac{I[h^2 + (h + 2x)^2]}{h^2(h + 2x)^2}$ .

◇ 13.4.5. См. рис.

13.4.6. В 80 000 раз.

13.4.7.  $I' = I(1 - k)/(1 + k)$ .

13.4.8\*.  $x \sim 5$  св. лет.

13.4.9.  $N'/N \sim (R/r)^2$ , где  $R$  — радиус Венеры,

а  $r$  — расстояние от Земли до Венеры.

13.4.10.  $x \sim R^2/r$ , где  $r$  — характерный размер автомобиля.

13.4.11. Освещенность изображения уменьшится: верхней части стрелки-предмета — несколько больше чем в два раза, нижней — несколько меньше чем в два раза.

13.4.12. Увеличится в два раза.

13.4.13.  $E_{\text{лев}}/E_{\text{прав}} = (R/2l)^2$ .

13.4.14\*.  $E = E_0 \frac{a^2 f^2}{[xf - (a - x)(x - f)]^2}$ . При  $x = a/2$ .

13.4.15.  $L = L_0 D^2 / D_0^2$ .

13.4.16\*. Нет.  $E_{\text{макс}} = B\pi D^2 / R^2$ .

13.4.17.  $D = 1,85$  м.

13.4.18\*.  $N \approx \frac{4x^2}{d^2} \left( \frac{T}{T_C} \right)^4 \approx 770$ , где  $T_C \approx 6 \cdot 10^3$  К — температура поверхности Солнца.

13.4.19. Не изменится.

13.4.20. Резко увеличивается световой поток от звезды к глазу.

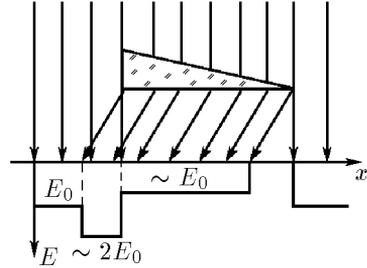
13.4.21\*.  $d_2 = 5d_1/6$ .

13.4.22\*.  $t_1 = t_2 \left( \frac{k_1 + 1}{k_2 + 1} \right)^2$ .

13.4.23\*.  $n \approx (10\pi r^2 L)^{-1}$ .

13.4.24\*.  $\rho = 0,2$  г/м<sup>3</sup>.

13.4.25\*. В восемь раз.



К ответу 13.4.5

### § 13.5. Квантовая природа света

13.5.1.  $E_1 \approx 10^{-6}$  Вт/м<sup>2</sup>,  $E_2 \approx 4 \cdot 10^{-6}$  Вт/м<sup>2</sup>,  $E_3 \approx 4 \cdot 10^{-5}$  Вт/м<sup>2</sup>.

13.5.2.  $W = h\nu - eV_0$ .

13.5.3. Скорости электрона и позитрона должны быть равны по модулю и противоположно направлены.  $\nu = 1,24 \cdot 10^{20}$  Гц.

13.5.4. а.  $v = c \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ . б.  $v = c \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}$ .

13.5.5. а.  $m = (1 - \cos \theta) \frac{h\nu^2}{c^2 \Delta\nu}$ . б.  $\Delta\nu = (1 - \cos \theta) \frac{h\nu'}{m_e c^2}$ .

13.5.6\*. а) При испускании фотона в направлении движения атома

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v - \Delta v)^2}{2} + h\nu + \varepsilon, \quad mv = m(v - \Delta v) + \frac{h\nu}{c}. \quad (1)$$

При испускании фотона в направлении, противоположном направлению движения атома,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v + \Delta'v)^2}{2} + h\nu + \varepsilon, \quad mv = m(v + \Delta'v) - \frac{h\nu'}{c}. \quad (2)$$

В (1) и (2)  $m$  — масса атома,  $\Delta v$  и  $\Delta'v$  — изменение скорости,  $\varepsilon$  — изменение внутренней энергии атома,  $\nu'$  — искомая частота фотона. При  $\Delta v, \Delta'v \ll v$  из (1) и (2) следует, что

$$\nu' = \nu \frac{1 - v/c}{1 + v/c}. \quad \text{б) } \nu' = \nu(1 - v/c).$$

13.5.7. Притяжением фотонов к звезде.

13.5.8.  $\Delta\nu = \nu\gamma M/(Rc^2)$ ,  $\gamma$  — гравитационная постоянная.  $\Delta\nu_C \approx 10^9$  Гц. Тепловое движение атомов на поверхности Солнца влияет на частоту излучаемых им фотонов в большей степени, чем гравитационное поле.

13.5.9\*.  $f \sim R^2 c^2 / (6\gamma M) \sim 10^9$  пк.

## ГЛАВА 14. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### § 14.1. Постоянство скорости света. Сложение скоростей

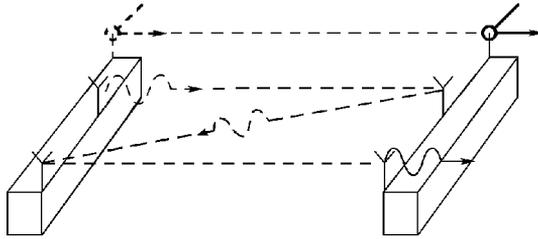
14.1.1.  $l = 15$  км.

14.1.2.  $v = 6 \cdot 10^7$  м/с.

14.1.3.  $\operatorname{tg} \alpha = v/c$ .

14.1.4\*.  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta = \sin \alpha / \left( \frac{c}{v} + \cos \alpha \right) \simeq \frac{v}{c} \sin \alpha = 10^{-4} \sin \alpha$ , где  $v = 30$  км/ч — скорость Земли относительно Солнца.

◇ 14.1.5. Для наблюдателей станции время движения светового сигнала, который три раза прошел расстояние  $l$  между станциями, равно  $3l/c$ , а время движения зонда  $l/v$ ,  $v$  — скорость зонда. Время движения зонда и сигнала совпадают:  $3l/c = l/v$ . Значит,  $v = c/3$ . Аппаратура зонда фиксирует световой сигнал, который удаляется от зонда со скоростью  $c$ . Навстречу зонду движется вторая станция со скоростью  $v$ . Поэтому время движения светового сигнала от первой станции до второй, измеренное аппаратурой зонда, равно  $l'/(c+u)$ ,  $l'$  — расстояние между станциями, измеренное аппаратурой зонда. Время движения светового сигнала от второй станции до первой равно  $l'/(c-u)$ , а полное время движения светового сигнала равно  $l'/(c+u) + l'/(c-u) + l'/(c+u)$ , и оно равно времени движения второй станции навстречу зонду  $l/u$ . Из уравнения  $l'/(c+u) + l'/(c-u) + l'/(c+u) = l'/u$  находим, что  $u = c/3$ . Таким образом, наблюдатели станции и аппаратура зонда зафиксируют одинаковую скорость сближения зонда со второй станцией, равную  $c/3$ .



К ответу 14.1.5

◇ 14.1.6\*. Для наблюдателя на первой станции время движения светового сигнала до второй будет равно  $L/(c+u)$ ,  $L$  — расстояние между станциями в момент испускания сигнала и зонда. Возвращаясь на первую станцию сигнал будет такое же время. Поэтому в момент отражения сигнала от первой станции вторая станция переместится на расстояние  $2 \frac{l}{c+u} \cdot u$

(рис. а) и расстояние между станциями будет равно  $l = L \frac{c-u}{c+u}$ . Поэтому третий раз сигнал будет находиться в пути время  $\frac{l}{c+u} = L \frac{c-u}{(c+u)^2}$ , и полное время движения сигнала будет равно

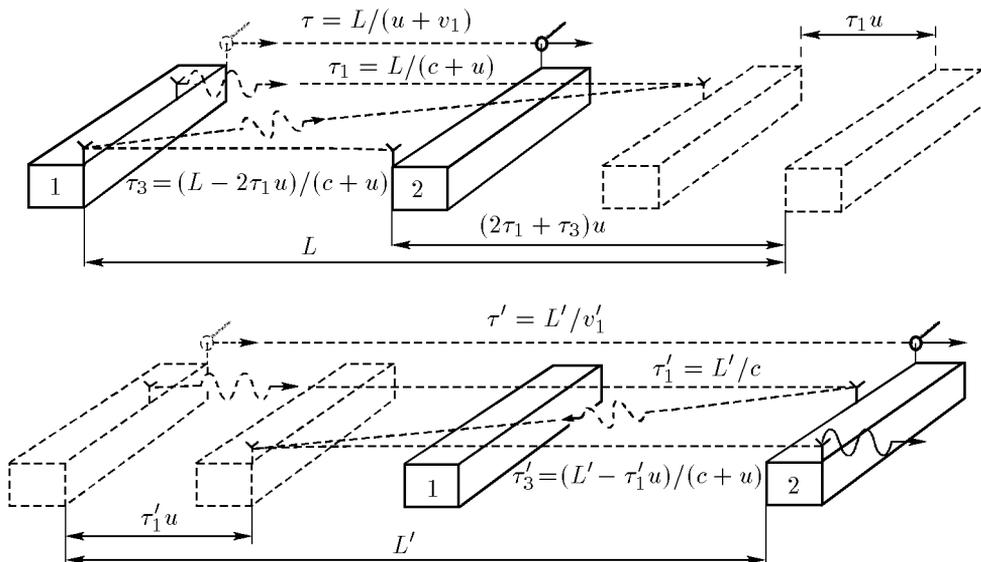
$L \frac{3c+u}{(c+u)^2}$ . Точно такое же время находится в пути зонд, время движения которого определя-

ется через искомую скорость зонда  $v_1$  по формуле  $\frac{L}{v_1+u}$ . Приравнявая эти времена, получаем

уравнение  $L \frac{3c+u}{(c+u)^2} = \frac{L}{v_1+u}$ , из которого и определяем  $v_1 = c \frac{c-u}{3c+u}$ .

Для наблюдателя второй станции время движения сигнала от первой станции до второй будет  $\frac{L'}{c}$ . За это время первая станция сместится на расстояние  $\frac{L'}{c}u$  (рис. б), и поэтому сигнал вернется на первую станцию через время  $\frac{L' - L'u/c}{c + u} = \frac{L' c - u}{c c + u}$ . После отражения от первой станции сигнал вернется на вторую станцию через это же время. Таким образом, полное время движения сигнала будет равно  $\frac{L'}{c} + 2 \frac{L' c - u}{c c + u} = \frac{L' 3c - u}{c c + u}$  и равно времени движения зонда, а скорость зонда равна расстоянию между станциями в момент пуска зонда, деленному на это время:  $v_1 \simeq L' / \left( \frac{3c - u}{c + u} \cdot \frac{L'}{c} \right) = c \frac{c + u}{3c - u}$ .

Точно такие же скорости зафиксирует и аппаратура зонда: первая станция будет удаляться от зонда со скоростью  $c \frac{c - u}{3c + u}$ , а вторая станция — приближаться со скоростью  $c \frac{c + u}{3c - u}$ .



### К ответу 14.1.6

◇ 14.1.7\*. Скорости обоих сигналов по наблюдениям с корабля одинаковы. Поэтому для наблюдателя космического корабля в момент отражения станции находились на одинаковом расстоянии, и сигнал от них отразился одновременно, так как в этом случае одновременно отосланные сигналы и вернутся после отражения одновременно. А что наблюдается со станций? Сигналы относительно корабля уже не равны скорости света, а равны или  $c + v$ , или  $c - v$ . Поэтому сигнал не может отразиться одновременно от станций в момент, когда корабль находился от них на одинаковом расстоянии. В этом случае сигнал прошел бы быстрее на корабль от той станции, к которой движется корабль. Более того, сигналы вообще не могут отражаться одновременно. Действительно, чтобы одновременно отраженные сигналы пришли на корабль тоже одновременно, корабль должен находиться от станции, к которой он приближается, на расстоянии в  $(c + v)/(c - v)$  большем, чем расстояние до станции, от которой он удаляется. Но тогда он должен был бы отправить сигналы на эти станции в разное время, так как только в этом случае они придут на эти станции одновременно. Поэтому на станциях обязательно наблюдается приход сигналов в разное время, а в момент отражения корабль обязательно наблюдается на разных расстояниях от станций. Для определения разницы времен отражений

сигналов от станций нужно найти расстояние корабля от станций  $x$  и  $l - x$  в момент подачи сигналов с корабля. Эти расстояния находятся из условия равенства времен движения сигналов:

$$\frac{x}{c} + \frac{x}{c-v} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{l-x}{c} + \frac{x}{c+v} \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

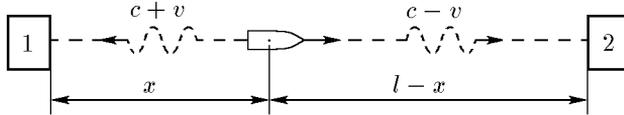
Из этого уравнения следует  $x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) l$ ,  $l - x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) l$ . Поэтому времена движения сигналов от корабля до станций определяются формулами

$$\tau_1 = \frac{x}{c} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \frac{l}{c}, \quad \tau_2 = \frac{l-x}{c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \frac{l}{c},$$

а разница времен отражений сигналов — формулой

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{v}{c^2} l.$$

Расстояние до станций в моменты отражений легко находится через  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $x$  и  $l - x$ :  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l$ .



К ответу 14.1.7

14.1.8.  $v_1 = \left(1 - \frac{1}{k}\right) c$ ,  $v_2 = \frac{(k-1)(1-\beta^2)}{(k-1)(1+\beta)+1} c$ .

◇ 14.1.9. На рис. а схематично изображены два следующих друг за другом отражения радарного импульса от объекта. Если  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — времена возвращения импульса, то  $(\tau_1 + \tau_2)/2$  — промежуток времени между первым и вторым отражением от объекта, а  $c(\tau_1 - \tau_2)/2$  — путь, пройденный объектом за это время. Значит, скорость объекта определяется через время возвращения импульса по формуле

$$v = \frac{c(\tau_1 - \tau_2)/2}{c(\tau_1 + \tau_2)/2} = c \frac{k-1}{k+1},$$

где  $k$  — отношение времен возвращения  $\tau_1/\tau_2$ . А какая скорость объекта получится, если послушать генерала? На рис. б показаны скорости радарного импульса и времена полетов импульса от отражения до отражения. В этом случае скорость сближения объекта со станцией определяется через приведенные на рис. б величины по формуле

$$v' = \frac{(c-u)\tau_1^+ + (c-u)\tau_2^-}{2(\tau_1^- + \tau_2^+)}.$$

В этой формуле надо  $\tau_{1,2}^+$  и  $\tau_{1,2}^-$  определить через наблюдаемые величины  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Для этого нужно воспользоваться следующими очевидными соотношениями:

$$\tau_{1,2}^+ + \tau_{1,2}^- = \tau_{1,2}, \quad \tau_{1,2}^+/\tau_{1,2}^- = (c-u)/(c+u),$$

из которых следует, что  $\tau_{1,2}^\pm = (1 \mp u/c)\tau_{1,2}/2$ , а скорость

$$v' = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) (k-1)c / \left[k + 1 - \frac{u}{c}(k-1)\right] = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) v / \left(1 - \frac{vu}{c^2}\right).$$

Эта скорость  $v'$  отличается от скорости  $v$  и определяется, как и предполагал генерал, не только отношением времен  $k$ , но и скоростью лаборатории  $u$  относительно Земли. Но совпадает ли

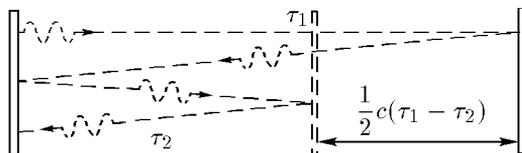
полученная таким образом скорость  $v'$  со скоростью сближения, наблюдаемой с Земли? Ведь  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — времена возвращения импульса в системе лаборатории — не совпадают с временами возвращения  $\tau'_1$  и  $\tau'_2$ , наблюдаемыми с Земли, лишь их отношения одинаковы:  $\tau_1 : \tau_2 = \tau'_1 : \tau'_2$ . Но равенства этих отношений уже достаточно, чтобы  $v'$  совпала со скоростью сближения, наблюдаемой с Земли. Этот результат означает, что разница в скоростях сближения, которые фиксируют наблюдатели лаборатории и Земли, связана с тем, что эти группы фиксируют разную скорость импульса света относительно лаборатории. Первые наблюдают эту скорость равной скорости света, вторые же, в зависимости от того, летит ли импульс от лаборатории или навстречу ей, — меньше или больше скорости света на величину  $u$ .

Скорость лаборатории  $u$  находится из уравнения

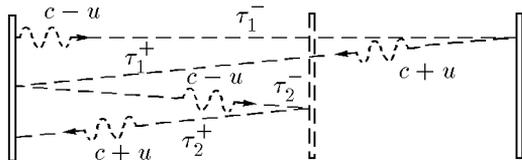
$$v' - v = \frac{v(1 - u^2/c^2)}{1 - uv/c^2} - v = \frac{vu(v - u)}{c^2 - uv} = \alpha v,$$

где  $\alpha = 10^{-4}$ . При таком малом  $\alpha$  скорость  $u \simeq \alpha c^2/v = 90$  км/с. Скорость объекта относительно Земли равна разности скорости сближения объекта с лабораторией и скорости лаборатории, наблюдаемых с Земли:

$$v_0 = v' = u = v \cdot \frac{c^2 - u^2}{c^2 - uv} - u = \frac{v - u}{1 - vu/c^2} \simeq 100\,000 \text{ км/с} - 90 \text{ км/с} = 99\,910 \text{ км/с}.$$



a



б

К ответу 14.1.9

14.1.11  $v = 2,9 \cdot 10^8$  км/с.

14.1.12  $u = (v + c/n)/(1 + v/nc)$ .

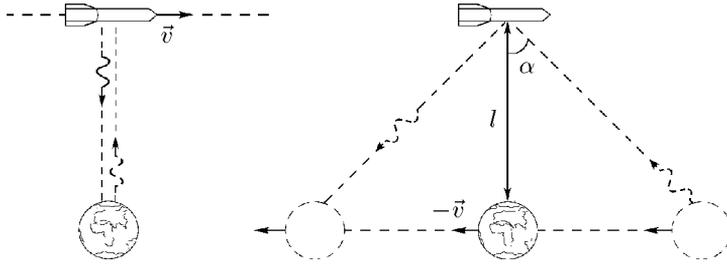
14.1.13  $T = \frac{2nl}{c(1 - v^2/c^2)}$ .

14.1.14\*.  $v = \frac{L\tau c^2}{l(l + 2L)} \left( \sqrt{1 + \frac{l^3(l + 2L)}{(L\tau c)^2}} - 1 \right)$ ; при  $l/\tau, L/\tau \ll c$  получаем  $v = l^2/(2L\tau)$ .

14.1.15  $v_0 = (c^2 - vu - \sqrt{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)})/(v - u)$ .

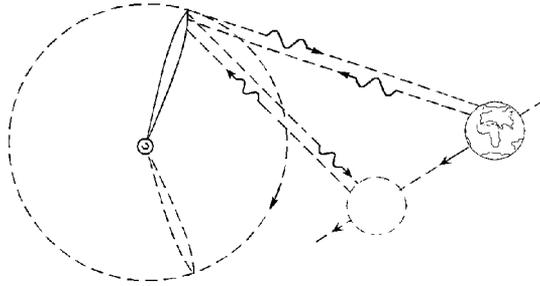
14.1.16  $N = \left( 1 + 2\frac{u}{v} + \frac{u^2}{c^2} \right) / \left( 1 + \frac{vu}{c^2} + \frac{u^2}{c^2} \right)$ .

◇ 14.1.17 На рисунке изображены траектории светового сигнала по наблюдениям с Земли и с ракеты. Минимальное расстояние между ракетой и Землей одинаково по обоим наблюдениям и равно  $l$ . Поэтому по наблюдениям с Земли время возвращения сигнала равно  $2l/c$ , а по наблюдениям с ракеты время возвращения равно  $(2l/c) \cdot 1/\cos \alpha = 2l/c\sqrt{1 - \beta^2}$ , где  $\beta = v/c = \sin \alpha$ . Таким образом, промежуток времени между уходом и приходом светового сигнала на Землю увеличивается при наблюдении с ракеты в  $1/\sqrt{1 - \beta^2}$  раз.



К ответу 14.1.17

◇ 14.1.18 Пусть происходит следующее. Несколько наблюдателей движутся около Земли с разными скоростями. На Землю вернулся отраженный от одного наблюдателя радарный импульс. Пока этот импульс путешествовал, стрелки часов на месте старта сделали три полных оборота, во время второго путешествия импульса стрелки сделали еще два оборота. И наблюдатель, от которого отразился импульс, и все остальные наблюдатели зафиксируют события: три оборота стрелок земных часов во время первого путешествия импульса и два оборота стрелок во время второго путешествия. Каждый оборот для любого наблюдателя длится одинаковое время. Поэтому для всех наблюдателей отношение длительности первого и второго путешествия импульса равно отношению числа оборотов стрелки часов 3 : 2. Приведенный пример иллюстрирует независимость отношения времен, характеризующих события, от скорости наблюдателей.



К ответу 14.1.18

◇ 14.1.20 Период колебаний световых ходиков независимо от их ориентации по наблюдениям со станции увеличится в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз, и поэтому ходики будут «идти» в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз медленнее. Для определения расстояния между зеркалами  $l'$ , которое наблюдается со станции у продольных ходиков, определим период колебаний ходиков через  $l'$ :

$$\tau_1 = \frac{l'}{c(1+\beta)} + \frac{l'}{c(1-\beta)} = \frac{2l'}{c(1-\beta^2)}.$$

Этот период в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз больше периода колебаний ходиков  $2l/c$ , измеренных в ракете. Значит,

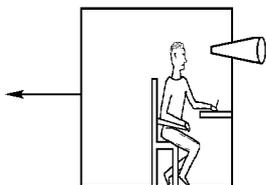
$$\tau_1 = \frac{2l'}{c(1-\beta^2)} = \frac{2l}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Из последнего уравнения следует, что  $l' = l\sqrt{1-\beta^2}$ . Это означает, что ходики и ракета, и люди в ней, по наблюдениям с Земли «сплющатся» в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз в направлении скорости  $\beta c$ . Точно также всё «сплющится» и на станции по наблюдениям с ракеты. Много изменений в наблюдаемую картину движения вносит относительное движение станции. И прежняя одновременность событий нарушается, и часы на станции идут медленнее в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз, и всё

сокращается в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз в направлении движения. Но «сплюснутые» люди на станции своими «сплюснутыми» приборами, используя «замедленное» время и неправильно определяя одновременность событий, получают, измеряя относительную скорость улетающего от них света, не скорость  $c - \beta c$ , а скорость  $c$ . Свет же, который летит им навстречу, приближается к ним не со скоростью  $c + \beta c$ , а, по их искаженным измерениям, со скоростью  $c$ . Так могли бы объяснить разницу измерений относительной скорости света наблюдатели с ракеты. Но точно так же могли бы объяснить и наблюдатели со станции, считая, что у них все нормально, а искажения наблюдаются у «ракетчиков».



а. Наблюдение со станции



б. Наблюдение с ракеты

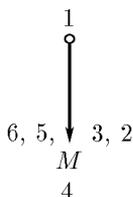


К ответу 14.1.20

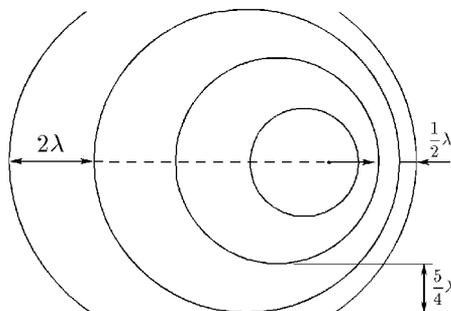
14.1.21. В  $\sqrt{1 - u^2/c^2 + u^2/v^2}$  раз.

◇ 14.1.22. Скорости зайцев и Мазаля равны прежней скорости четвертого зайца.

◇ 14.1.23. См. рис.  $\lambda_+ = \lambda/2$ ,  $\lambda_- = 2\lambda$ ,  $\lambda_\perp = 5\lambda/4$ .



К ответу 14.1.22



К ответу 14.1.23

14.1.24\*.  $N = (1 + \beta)/2$ .

14.1.25\*.  $\delta \simeq \sqrt{\Delta}/c$ .

14.1.26\*.  $\sin \alpha_1 = \frac{\sin \alpha + 2\beta + \beta^2 \sin \alpha}{1 + 2\beta \sin \alpha + \beta^2}$ .

14.1.27. В системе отсчета, которая движется со скоростью  $u \sin \alpha$  в направлении, противоположном движению корабля, скорость ракеты  $v_p$  перпендикулярна направлению движения

корабля  $v_k$ ;  $v_p$  и  $v_k$  определяются формулами

$$v_p = u \sin \alpha \sqrt{1 - (u/c)^2 \cos^2 \alpha}, \quad v_k = (v - u \cos \alpha) / \left(1 - \frac{vu \cos \alpha}{c^2}\right).$$

В системе отсчета, в которой скорость корабля равна нулю, составляющие скорости ракеты  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$ , перпендикулярные и параллельные прежней скорости корабля  $v_k$ , определяются формулами

$$v_{\perp} = v_p / \sqrt{1 - (v_k/c)^2}, \quad v_{\parallel} = v_k,$$

а полная скорость ракеты  $v_1$  формулой

$$v_1 = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \sqrt{u^2 + v^2 - 2vu \cos \alpha - (vu/c)^2 \sin^2 \alpha} / \left(1 - \frac{vu \cos \alpha}{c^2}\right).$$

**14.1.28\***.  $\operatorname{tg} \nu = \gamma \operatorname{tg}(\alpha/2)$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

**§ 14.2. Замедление времени, сокращение продольных размеров.  
Преобразование Лоренца**

**14.2.1.** В 2,5 раза.

**14.2.2.**  $v > c/\sqrt{1 + (\tau c/l)^2}$ .

**14.2.3.**  $\Delta v = 6 \cdot 10^4$  км/с.

**14.2.4.**  $\Delta \nu = 10^7$  Гц.

**14.2.5\***. В точке, движущейся со скоростью стенки, частоты электромагнитных колебаний падающей и отраженной волны совпадают. Поэтому частота падающей волны  $\nu$  связана с частотой отраженной волны  $\nu'$  равенством

$$\nu/(1 + \beta) = \nu'/(1 - \beta), \quad \nu' = \nu(1 - \beta)/(1 + \beta).$$

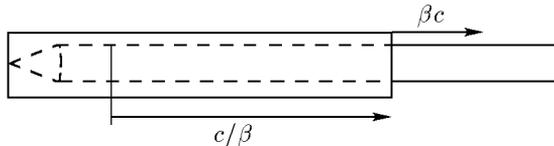
**14.2.6\***. В точках, движущихся со скоростью стенки, частота электромагнитных колебаний волны в диэлектрике и вне диэлектрика одинакова. Поэтому частота волны вне диэлектрика  $\nu$  связана с частотой волны внутри диэлектрика  $\nu'$  равенством

$$\nu/(1 + \beta) = \nu'/(1 + n\beta), \quad \nu - \nu' = (n - 1)\beta/(1 + n\beta).$$

**14.2.7.**  $\tau = l(1 - vu/c^2)/v\sqrt{1 - u^2/c^2}$ .

**14.2.8.** Через  $5 \cdot 10^4$  лет.

◇ **14.2.10.** Навстречу карандашу движется со скоростью  $\beta c$  пенал. Длина пенала  $l/\gamma$  ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ) в  $\gamma^2$  раз меньше длины карандаша  $\gamma l$ . В момент, когда дно пенала достигнет переднего конца карандаша, дно остановится. Однако открытый конец пенала будет двигаться со скоростью  $c\beta$  до тех пор, пока волна «остановок» участков пенала, идущая от его дна со скоростью  $c/\beta$ , не дойдет до открытого конца. В этот момент длина пенала равна длине карандаша и пенал захлопывается.



К ответу 14.2.10

**14.2.12\***.  $\operatorname{tg} \alpha = \beta\beta_1/\sqrt{1 - \beta_1^2}$ .

**14.2.14.**  $\Delta v = cv_0^2(\nu_1^2 - \nu_2^2)/(\nu_1^2 - \nu_0^2)(\nu_2^2 - \nu_0^2)$ .

**14.2.16.**  $\cos \theta = (\cos \alpha + \beta)/(1 + \beta \cos \alpha)$ ,  $\nu' = (1 + \beta \cos \alpha)/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

14.2.17. а)  $\tau = L/(v + u)$ ,  $\tau_2 = \tau_1(1 + vu)/\sqrt{1 - (u/c)^2}$ ;

$$\text{б*) } \tau_1 = \frac{v}{a} \left( \sqrt{1 + \frac{2al}{v^2}} - 1 \right), \tau_2 = \tau_1 \left( 1 + \frac{va\tau_1}{2c^2} \right) / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

14.2.18. Центр колебаний движется со скоростью  $\beta c$ . Координаты тела относительно центра связаны со временем  $t'$  соотношениями: а)  $z' = \frac{A}{\gamma} \sin \frac{\omega t'}{\gamma} \left( 1 + \frac{\beta z'}{\omega c} \right)$ ; б)  $y' = A \sin \frac{\omega t'}{\gamma}$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

### § 14.3. Преобразование электрического и магнитного полей

14.3.1. Расстояние между зарядами в пластинах уменьшится в  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  раз, что приведет к увеличению поверхностной плотности заряда каждой пластины в  $\gamma$  раз. Поэтому электрическая напряженность увеличится в  $\gamma$  раз:

$$E' = \gamma E, \quad B = \beta E' = \gamma \beta E.$$

14.3.2\*.  $E_{\perp} = \gamma \cdot E \cos \alpha$ ,  $E_{\parallel} = E \sin \alpha$ ,  $B = \gamma \beta E \cos \alpha = \beta E_{\perp}$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

14.3.3.  $E_r = 2\gamma\rho/r$ ,  $B_r = 2\gamma\beta\rho/r$ , где  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $r$  — расстояние до нити.

14.3.4. а.  $\rho_e = -\rho/\gamma$ ,  $\rho_i = \gamma\rho$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ .

б. Увеличится в  $\gamma$  раз.

в\*. Разное изменение плотности зарядов электронов и ионов при движении проводника приводит к появлению нескомпенсированной объемной плотности заряда  $\rho' = \gamma\rho - \rho/\gamma = \beta^2\gamma\rho$ . Электрическое поле этого заряда  $E = \beta^2\gamma\rho s/r$ , а магнитная индукция движущегося проводника  $B = \beta\gamma\rho s/r$ , где  $s$  — сечение проводника, а  $r$  — расстояние до его оси. Поэтому  $E = \beta B$ .

14.3.5\*. а.  $\rho_i = \gamma_1\rho$ , где  $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - \beta_1^2}$ . Для определения плотности электронов перейдем в состояние движения со скоростью  $\beta_1 c$  через промежуточное состояние движения со скоростью  $\beta c$ , в котором электроны неподвижны, а их плотность равна  $\rho'_e = -\rho/\gamma$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ . Затем, сообщая промежуточному состоянию скорость  $\beta_2 c = c(\beta_1 - \beta)/(1 - \beta_1\beta)$ , перейдем в нужное состояние, в котором плотность электронов определяется формулой  $\rho_e = \rho'_e/\sqrt{1 - \beta_2^2} = -\gamma_1(1 - \beta\beta_1)\rho$ .

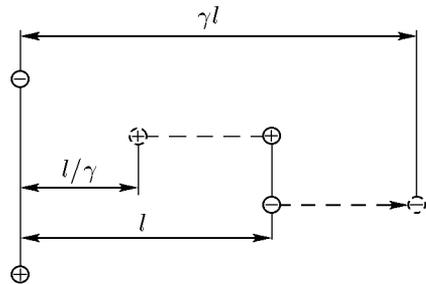
б. Увеличится в  $\gamma_1$  раз. в.  $E_1 = \beta_1 B_1$ .

14.3.6. а.  $\vec{E} = -[\vec{\beta} \times \vec{B}]$ .

б. В движущемся состоянии электрическое поле  $E$  определяется формулой  $E = -[\vec{\beta} \times \vec{B}]$ , где  $\vec{B}'$  — индукция магнитного поля в движущемся состоянии. При малых  $\beta$   $\vec{B}'$  близко к  $\vec{B}$ . Поэтому  $\vec{E} \simeq -[\vec{\beta} \times \vec{B}']$ .

в. Оба объяснения правомерны. Это означает, что определить абсолютное движение магнита нельзя.

◇ 14.3.7\*. а. В качестве пробного тела выберем прямой проводник, который неподвижен в начальном состоянии и в котором со скоростью  $\beta c$  движутся электроны проводимости. Плотность электронов на единицу длины проводника  $-\rho$ , а плотность ионов кристаллической решетки проводника  $+\rho$ . Поэтому проводник не заряжен и электрическое поле в начальном состоянии на него не действует. В движущемся со скоростью  $-\beta c$  состоянии электроны проводимости неподвижны, а ионы движутся со скоростью  $-\beta c$ . Плотность электронов в проводнике уменьшится в  $\gamma$  раз, а ионов — увеличится в  $\gamma$  раз. Поэтому проводник окажется после преобразования заряженным с плотностью  $\gamma\rho - \rho/\gamma = \beta^2\gamma\rho$ , и на единицу длины проводника в поперечном направлении со стороны электрического поля  $E$  будет действовать сила  $\beta^2\gamma\rho E$ .



К ответу 14.3.7

Но проводник движется без ускорения. Это означает, что сила со стороны электрического поля  $E$  компенсируется силой, действующей со стороны магнитного поля:  $IB/c + \beta^2 \gamma \rho E = 0$ ,  $I = -\gamma \rho \beta c$  — ток в проводнике после преобразования,  $B$  — магнитное поле, перпендикулярное как проводнику, так и напряженности электрического поля. Из последней формулы следует, что в преобразованной системе появляется магнитное поле  $B$ , связанное с электрическим полем соотношением  $\vec{B} = [\vec{\beta} \times \vec{E}]$ .

б. В преобразованной системе (см задачу а) магнитное поле определяется формулой  $\vec{B} = [\vec{\beta} \times \vec{E}']$ , где  $\vec{E}'$  — электрическое поле в преобразованной системе. При малых скоростях сноса  $\vec{E}'$  близко к  $\vec{E}$ . Поэтому  $\vec{B} \approx [\vec{\beta} \times \vec{E}]$ .

**14.3.9.** а) Увеличится в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз; б) уменьшится в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз.

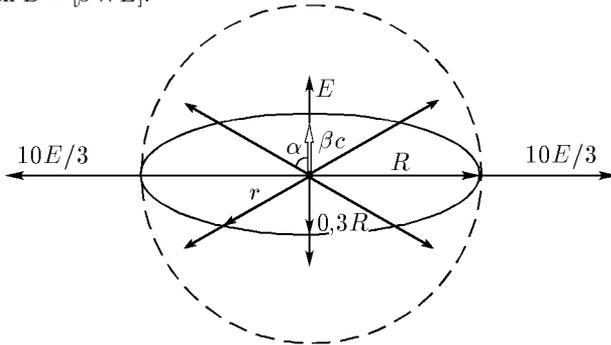
**14.3.10.** Увеличится в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз.

**14.3.11.**  $E_{\max} = Q/(R^2 \sqrt{1-\beta^2})$ ,  $\sigma_{\max} = Q/(4\pi R^2 \sqrt{1-\beta^2})$ ,  $\sigma_{\min} = Q/(4\pi R^2)$ .

◇ **14.3.12\*.** На рисунке изображена сфера вокруг неподвижного заряда и эллипсоид, возникший из этой сферы при снос ее вместе с зарядом со скоростью  $\beta c$ . Малая ось эллипсоида в  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз меньше сферы. На поверхности этого эллипсоида находится электрическое поле, которое раньше находилось на поверхности сферы. Поперечная составляющая этого поля  $E_{\perp}$  увеличивается в  $\gamma$  раз, продольная же составляющая  $E_{\parallel}$  не изменится. Поэтому тангенс угла между новой напряженностью поля и направлением сноса увеличится в  $\gamma$  раз. Во столько же раз увеличится и тангенс угла радиус-вектора. Поэтому электрическое поле по-прежнему будет направлено по радиус-вектору. Однако напряженность нового поля будет зависеть не только от расстояния до заряда  $r$ , но и от угла  $\alpha$  между направлением скорости  $\beta c$  и радиус-вектором  $r$ . Например, если сравнивать эту напряженность с напряженностью неподвижного заряда, она увеличится в поперечном направлении в  $\gamma^2$  раз, а в продольном направлении уменьшится в  $\gamma^3$  раз. Для других направлений напряженность будет определяться формулой

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \cdot \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \cdot \vec{r}.$$

В начальном состоянии магнитного поля не было. Поэтому индукция магнитного поля определяется формулой  $\vec{B} = [\vec{\beta} \times \vec{E}]$ .



К ответу 14.3.12

**14.3.13\*.** При движении системы со скоростью  $-\beta c$  диэлектрическая пластина остановится, а обкладки конденсатора будут двигаться со скоростью  $-\beta c$ . Плотности поверхностных зарядов на обкладках увеличатся в  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз и будут равны  $\pm \gamma \sigma$ , где  $\pm \sigma$  — плотности поверхностного заряда обкладок неподвижного конденсатора. Кроме того, появится ток с линейной плотностью  $\pm \gamma \sigma \beta c$ . Эти поверхностные заряды и токи создадут внутри неподвижного диэлектрика электрическую напряженность  $E' = 4\pi \gamma \sigma / \epsilon$  и магнитную индукцию  $B' = +4\pi \gamma \beta \sigma$ . Движение новой системы со скоростью  $\beta c$  возвращает ее в первоначальное состояние. Электрическое и магнитное поля внутри диэлектрика определяются по формулам преобразования полей, приведенным в условии задачи 14.3.8.а:

$$E = 4\pi \sigma \gamma^2 (1/\epsilon - \beta^2), \quad B = 4\pi \sigma \gamma^2 \beta (1 - 1/\epsilon).$$

**14.3.14\***. Движение состояния со скоростью  $-\beta c$  приводит к состоянию, в котором неподвижный диэлектрик находится в магнитном поле индукции  $\gamma B$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  и в электрическом поле напряженности  $\gamma\beta B$ . Магнитное поле на диэлектрик не действует, а электрическое поле, которое перпендикулярно пластине, ослабляется в  $\varepsilon$  раз:  $E' = \gamma\beta B/\varepsilon$ . Движение нового состояния со скоростью  $\beta c$  возвращает старое состояние, электрическое поле в котором находится по формуле преобразования электрического поля, приведенной в условии задачи 14.3.8.а:  $E = \gamma^2\beta(1-1/\varepsilon)B$ . Потенциал, вызываемый этим полем, равен  $U = Eh = \gamma^2\beta hB(1-1/\varepsilon)$ .

**14.3.15.** Увеличится в  $\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$  раз.

**14.3.16\***. Увеличится в  $(1+\beta/n)/\sqrt{1-\beta^2}$  раз.

**14.3.17.** Увеличится в  $(1+\beta)/(1-\beta)$  раз.

**14.3.18\***. Увеличится в  $(1+\beta\sin\alpha)/(1-\beta\sin\alpha)$  раз.

**14.3.19.** Увеличится в  $(1+\beta\beta_1)/\sqrt{1-\beta_1^2}$  раз.

**14.3.20.** Увеличится в  $1/\sqrt{1-\beta^2}$  раз;  $\rho = \beta\gamma j/c$ .

**14.3.21\***. Нет.

**14.3.22.**  $E = 4\pi\gamma[\sigma - j(t' - x'\beta/c)] = 4\pi[\gamma\sigma - jt' + l'\beta\gamma^2/c]$ .

**14.3.23\***. Продольное поле при движении не меняется. Меняется лишь место и время его появления. Электрическое поле в неподвижном конденсаторе  $E = 4\pi(\sigma - jt)$ . Электрическое поле в конденсаторе, движущемся со скоростью  $\beta c$ ,

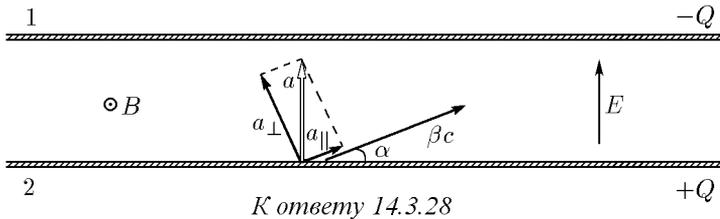
$$E' = 4\pi \left[ \sigma - j \left( t' - \frac{x'\beta}{c} \right) \right] = 4\pi \left( \sigma - \frac{j}{\gamma} t' + \frac{l'\beta\gamma}{c} \right),$$

где  $l$  — расстояние от передней пластины,  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ .

**14.3.24.**  $P = vM$ .

**14.3.25\***.  $P = vM$ .

**14.3.26.**  $F_{\pm} = 2\mu ev/R_{\pm}^3$ ,  $R_{\pm} = e^2/(2\gamma m_e v^2)$ .



*K ответу 14.3.28*

◇ **14.3.28\***. Нет. В движущемся конденсаторе составляющие силы  $F$ , действующей на первую пластину вдоль и поперек скорости, равны

$$F_{\parallel} = QE \cos \alpha, \quad F_{\perp} = QE \sin \alpha (1 - \beta^2),$$

а составляющие ускорения равны

$$a_{\parallel} = k \cos \alpha, \quad a_{\perp} = k \sin \alpha, \quad k = QE\sqrt{1-\beta^2}/M,$$

где  $Q$ ,  $M$ ,  $E$  — соответственно заряд, масса покоя и электрическое поле внутри конденсатора. Это ускорение перпендикулярно пластине, равно по величине ускорению второй пластины и противоположно ему направлено. Поэтому конденсатор не будет поворачиваться.

#### § 14.4. Движение релятивистских частиц в электрическом и магнитном полях

**14.4.1.** а) В движущейся со скоростью  $\beta c$  системе промежуток времени между двумя событиями — пересечением электроном границы поля — будет в  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  длиннее:  $T = \gamma\tau$ .

б) В первом случае за время  $\tau$  импульс электрона изменился на величину  $2\gamma m_e c\beta$ , поэтому  $\tau = 2\gamma m_e c\beta / (eE)$ , где  $E$  — электрическая напряженность. Во втором случае за время движения  $T$  импульс электрона изменился на величину  $\gamma_1 m_e c\beta / (eE)$ , где  $\beta_1 c = 2\beta c(1 + \beta^2)$  — скорость электрона после действия на него поля. Поэтому  $T = \gamma\tau$ .

**14.4.2\***. В системе отсчета, в которой поле неподвижно,

$$\tau_1 = \frac{2m_e v_1}{eE\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \tau\sqrt{1 - u^2/c^2},$$

а скорость электрона  $v_1 = (v + u)/(1 + vu/c^2)$ . Поэтому

$$E = 2m_e(v + u)/[e\tau(1 - u^2/c^2)\sqrt{1 - v^2/c^2}].$$

**14.4.3.**  $E = m_e v / (e\tau\sqrt{1 - v^2/c^2})$ .

**14.4.4.** а) Увеличится в  $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$  раз.

$$v' = \sqrt{v^2 + u^2 - v^2 u^2 / c^2}.$$

б) Увеличится в  $\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[ 1 + \frac{u}{v}(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) \right]$  раз.

$$v' = (v + u)/(1 + vu/c^2).$$

**14.4.5.**  $\tau = \frac{m_e v}{e E} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 4v^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$ .

**14.4.6.\***  $x = \frac{m_e c^2}{eE}$ .

**14.4.7.**  $p' = p$ . В  $1/\sqrt{1 - \beta^2}$  раз.

**14.4.8.**  $v = c/\sqrt{1 + \left(\frac{m_e c^2 R}{e^2 z}\right)^2}$ .

**14.4.9\***. В  $1/(1 - \beta^2)$  раз. В  $\sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{(1 - \beta^2)^2}}$  раз.

**14.4.10\***.  $v = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc\omega/2qE)^2}}$ .

**14.4.11.** а) В движущейся со скоростью  $\beta c$  системе расстояния сокращаются в  $1/\sqrt{1 - \beta^2}$  раз.  $l' = l\sqrt{1 - \beta^2}$ .

б) В первом случае

$$c^2 \Delta m = \left( \frac{m_e}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_e \right) c^2 = eEl, \quad l = \frac{m_e}{eE} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Во втором случае первоначально неподвижный электрон, набирая скорость  $\beta c$ , проходит расстояние

$$l_1 = \frac{m_e c^2}{eE} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right),$$

двигаясь в направлении поля. За это время поле перемещается на расстояние  $\Delta l = c\beta\tau$ , где  $\tau = m_e c\beta / (eE\sqrt{1 - \beta^2})$  — время набора электроном скорости  $\beta c$ . Поэтому

$$l' = l_1 + \Delta l = \frac{m_e}{eE} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) = l\sqrt{1 - \beta^2}.$$

$$14.4.12^*. E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left( \frac{1+uv/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \sqrt{1-u^2/c^2} \right).$$

$$14.4.13. \tau = \sqrt{(2-lEl/m_e c^2)m_e l/eE}.$$

$$14.4.14. l = \frac{\mathcal{E}}{eE} = 1 \text{ км. } \tau = \frac{1}{eE} \sqrt{m_{\pi^0} \mathcal{E} (2 + \mathcal{E}/m_{\pi^0} c^2)} = 0,34 \text{ мс.}$$

14.4.15. В  $2N^2 = 1 = 2 \cdot 10^6$  раз больше  $m_e c^2$ . В  $k = 2N - (1/N) \simeq 2000$  раз больше энергии электронов при встречных столкновениях.

$$14.4.16. \text{tg } \alpha_e = \frac{m_e c^2 + \mathcal{E}}{2m_e c^2 + \mathcal{E}} \cdot \frac{2m_p c^2 + \mathcal{E}}{m_p c^2 + \mathcal{E}} \text{ tg } \alpha_p \text{ при } \alpha_p \ll 1, \alpha_e \simeq \frac{m_e c^2 + \mathcal{E}}{2m_e c^2 + \mathcal{E}} \cdot \frac{2m_p c^2 + \mathcal{E}}{m_p c^2 + \mathcal{E}} \alpha_p = 0,075 \text{ рад.}$$

$$14.4.17. v_1 = \frac{v}{\sin^2 \alpha} + \sqrt{\frac{v^2 \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} + \left( \frac{m_e c^2}{l} \right)^2} - \frac{m_e c^2}{e}.$$

$$14.4.18. \mathcal{E} = \sqrt{(m_p c^2)^2 + (eBR)^2} - m_p c^2 = 4,3 \text{ МэВ. } \mathcal{E}_e = 80,5 \text{ МэВ.}$$

$$14.4.19. B = \frac{\sin \alpha}{el} \mathcal{E} (\mathcal{E} - m_e c^2) = 0,04 \text{ Тл, } N \simeq 4\%.$$

$$14.4.20. R_p = \frac{1}{eB} \sqrt{\mathcal{E}^2 - (m_p c^2)^2} = \frac{1}{3} \text{ км; } R_e = \frac{1}{3} \text{ км.}$$

$$14.4.21. \omega = \frac{eB}{m_e c(1 + eU/m_e c^2)}.$$

$$14.4.22. B = m_e c^2 / (eR\sqrt{N^2 - 1}) = 0,28 \text{ Тл.}$$

$$14.4.23. T = \pi m_e c^2 / (eB\sqrt{1 - \beta^2}).$$

$$14.4.24. T = \frac{\pi m_e c^2 (1 + \beta\beta_1)}{eB(1 + \beta_1^2)\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

$$14.4.25. \mathcal{E} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (eBh)^2} - m_e c^2 = 8,5 \text{ МэВ.}$$

$$14.4.26. l = \frac{m_e v c}{eB\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

$$14.4.27. \mathcal{E} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (eBR)^2 [1 + (h/2\pi R)^2]} - m_e c^2.$$

$$14.4.28. v_{др} = c \frac{E}{B}.$$

14.4.29\*. Если постоянное однородное магнитное поле с индукцией  $B = \sqrt{1 - k^2}$ ,  $k = E/B$ , в котором вращается электрон, будет двигаться со скоростью дрейфа  $kc$ , то получим скрещенное поле с магнитной индукцией  $B$  и электрической напряженностью  $E$ , в котором электрон совершает дрейфовое движение. Максимальная и минимальная скорости электрона определяются формулами

$$v_{\max} = c \frac{\beta_1 + k}{1 + \beta_1 k}, \quad v_{\min} = \beta c = c \frac{\beta_1 - k}{1 - \beta_1 k},$$

где  $\beta_1 c$  — скорость электрона в первоначальном состоянии. Из приведенных уравнений находим  $v_{\max} = c[2k + (1 + k^2)\beta]/(1 + k^2 + 2k\beta)$ .

$$14.4.30^*. ev = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (hH)^2} - m_e c^2.$$

14.4.31\*. Скорость электрона  $\beta c$  в момент включения поля перпендикулярна  $E$  и является суммой вращательной скорости  $\beta_1 c$  и скорости дрейфа  $kc$ .  $k = E/B$  (см. решение задачи 14.4.12). Поэтому  $\beta_1 = \sqrt{\beta^2(1 - k^2) + k^2}$ , а  $v_{\max} = c(\beta_1 + k)/(1 + \beta_1 k)$ .

## § 14.5. Закон сохранения массы и импульса

$$14.5.1. m = M/2.$$

$$14.5.2. m = W/c^2 = 4,4 \text{ т/с.}$$

$$14.5.3. m_1 = m/2, m_0 = m\sqrt{1 - \beta^2}/2, \mathcal{E} = mc^2(1 - \sqrt{1 - \beta^2})/2.$$

- 14.5.4.  $m = (k + 1)m_p$ ,  $v = c\sqrt{1 - 1/k^2}$ .
- 14.5.5.  $\mathcal{E}_1 = c^2(m_p - m_e) = 938 \text{ МэВ}$ ,  $\mathcal{E}_2 = c^2(m_{\pi^0} - m_e)/2 = 67 \text{ МэВ}$ .
- 14.5.6.  $M_1 = M + m$ ,  $p = mc$ .
- 14.5.7\*.  $v = cm/(M - m)$ .
- 14.5.8.  $v = c\dot{m}t/(M - \dot{m}t)$ ,  $m_0 = \sqrt{\dot{m}t(M - 2\dot{m}t)}$ ,  $t < M/(2m)$ .
- 14.5.9.  $M = m_1 + m_2$ ,  $v = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \alpha} / (m_1 + m_2)$ .
- 14.5.10.  $m_e = 0,51 \text{ МэВ}$ ,  $m_p = 939 \text{ МэВ}$ ,  $m_{\pi^0} = 135 \text{ МэВ}$ ,  $m_\psi = 2820 \text{ МэВ}$ .
- 14.5.11.  $\mathcal{E}_K = (\mathcal{E} - m_{\pi^0} c^2/2)/\mathcal{E} = 152 \text{ МэВ}$ .
- 14.5.12\*.  $\mathcal{E}_K < 2m_e c^2 \left( \frac{m_{\pi^0}}{4m_e} - 1 \right)^2$ .
- 14.5.13.  $\mathcal{E}_K = Mc^2 - \sqrt{(Mc^2)^2 - \mathcal{E}_e(\mathcal{E}_e + 2m_e c^2) - \mathcal{E}_\nu^2}$ .
- 14.5.15.  $v = c \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$ .
- 14.5.16.  $\mathcal{E}_1 = c^2 m_{\pi^0} (m_{\pi^0} + 4m_p)/(2m_p)$ ,  $\mathcal{E}_2 = c^2 m_\psi (m_\psi + 4m_p)/(2m_p \mathcal{E}_3) = 6m_p c^2$ .
- 14.5.17.  $\mathcal{E} = 2c^2(m_p^2 - m_e^2)/m_e$ ,  $N = 2(m_p/m_e - 1) = 3,7 \cdot 10^3$ .
- 14.5.18.  $\mathcal{E} = m_p c^2 \sqrt{1 + (1 - m_e^2/m_p^2) \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ .
- 14.5.19. а.  $v = \frac{m}{M}c$ ,  $\Delta m = m$ . б.  $u > \frac{m}{M}c$ .
- 14.5.20.  $\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E} \left[ 1 - \frac{(m_\mu + m_e)^2}{m_{\pi^0}^2} \right] \left[ 1 + \sqrt{1 - (m_{\pi^0} c^2/\mathcal{E})^2} \right] = 4,4 \text{ ГэВ}$ ;  $\mathcal{E}_{\min} = 0$ .
- 14.5.21. Диапазон энергий нейтрино от нуля до  $\frac{1}{2} \left( m_\mu - \frac{2m_e^2}{m_\mu} \right) c^2$ , диапазон кинетических энергий электрона от нуля до  $(m_\mu - m_e)^2 c^2 / (2m_\mu)$ .
- 14.5.22.  $\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E} \frac{\mathcal{E} + \sqrt{\mathcal{E}_e^2 + (m_e c^2)^2}}{2\mathcal{E} + \mathcal{E}_e - \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - (m_e c^2)^2}}$ .
- 14.5.23.  $m_\gamma = \frac{m}{1 + \frac{m}{m_e}(1 - \cos \alpha)}$ ,  $m'_e = m_e + m - m_\gamma$ .

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

**ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ**

Воробьев Иван Игнатьевич  
Зубков Павел Иванович  
Кутузова Галина Александровна  
Савченко Оливер Яковлевич  
Трубачёв Анатолий Михайлович  
Харитонов Владимир Григорьевич

---

Подписано в печать 25.11.2007 г.  
Заказ №

Формат 70 × 100/16  
Усл. печ. л. 30,4  
Уч.-изд. л. 32,4  
Тираж 100 экз.

---

Редакционно-издательский центр НГУ  
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2