

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ, СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ И НУЛЕВЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Б.В.Васильев
bv.vasiliev@narod.ru

Часть I. Развитие наук о физических сверх-явлениях в XX веке

1 Введение

Сверхтекучесть и сверхпроводимость, которую можно рассматривать как сверхтекучесть электронного газа, являются родственными явлениями.

Основную особенность этих явлений можно представить себе, если предположить, что в сверхпроводнике, также как в сверхтекучем гелии, образуется особый конденсат, частицы которого связаны между собой энергией притяжения. Это взаимное притяжение не позволяет отдельным частицам рассеиваться на дефектах и стенках, если энергия этого рассеяния меньше, чем энергия притяжения. В результате отсутствия рассеяния конденсат приобретает способность перемещаться без трения.

Сверхпроводимость была открыта более ста лет назад, а сверхтекучесть примерно на тридцать лет позже. Однако несмотря на большое внимание ученых к изучению этих явлений, они в теоретическом плане долгое время представлялись самыми таинственными в физике конденсированного состояния. И эта таинственность привлекала лучшие умы прошлого века к их изучению.

Таинственность явления сверхпроводимости начала рассеиваться в середине прошлого века после того, как было изучено явление квантования магнитного потока в сверхпроводящих цилиндрах. Это явление было предсказано братьями Лондонами. Из измерений этого эффекта стало ясно, что ответственными за сверхпроводимость являются пары электронов, формирующие бозоны с нулевым суммарным спином и импульсом.

Примерно в это же время была замечено, что замена одного изотопа сверхпроводящего элемента на другой приводит к изменению критической температуры сверхпроводников - так называемый изотоп-эффект. Этот

эффект был интерпретирован как однозначное указание на определяющую роль фононов в формировании сверхпроводящего состояния. Фононный механизм лег в основу теории Бардина-Шриффера-Купера (БКШ), которая получила всеобщее признание и фактически до сих пор служит единственной общепринятой теорией сверхпроводимости.

Однако при этом как бы разорвалась гипотетическая связь между сверхпроводимостью и сверхтекучестью - в жидком гелии нет фононов, объединяющих атомы.

Более чем пятидесятилетнее развитие БКШ показало, что эта теория успешно описывает общие закономерности явления, но ее нельзя назвать теорией сверхпроводников. Она объясняет такие закономерности как возникновение энергетической щели, специфику температурной зависимости теплоемкости, квантование потока и др., но не может предсказать главные параметры отдельных сверхпроводников - их критическую температуру и критическое магнитное поле. Точнее, формула для критической температуры сверхпроводников в БКШ имеет вид экспоненты, в показателе которой стоят множители, не поддающиеся точному измерению.

Нечто похожее произошло и с теорией сверхтекучести. Вскоре после ее открытия Л.Д.Ландау в своей первой работе показал, что это явление нужно рассматривать как следствие образования конденсата, состоящего из макроскопического числа атомов, находящихся в едином квантовом состоянии и подчиняющегося квантовым законам. Это позволило описать основные характерные черты этого явления - температурную зависимость плотности сверхтекучей фазы, скорость звука и т.д. - но при этом не был дан ответ на вопрос о том, какой физический механизм приводит к объединению атомов в сверхтекучий конденсат и какова должна быть критическая температура этого конденсата, т.е. почему для гелия-4 отношение температуры перехода в сверхтекучее состояние к температуре кипения почти точно равно $1/2$ (для гелия-3 оно примерно в тысячу раз меньше).

В целом описания явлений сверхпроводимости и сверхтекучести к началу XXI века оставляли чувство некой неудовлетворенности, в первую очередь тем, что не допускали общего механизма возникновения.

Цель написания данной статьи состоит в том, чтобы восполнить этот пробел и описать единый физический механизм, количественно объясняющий оба эти явления, который был первоначально рассмотрен в работах [22] - [27].

1.1 Сверхпроводимость и общество

Сверхпроводимость - красивейшее и уникальное явление природы. Ее уникальность происходит из того, что сверхпроводимость - это результат действия квантовых законов, управляющих макроскопическим ансамблем частиц как единым целым. Она привлекает своей необычностью и красотой, которая понятна не только кругу ученых-профессионалов и людей, интересующихся физикой, но и всему образованному сообществу.

Необыкновенный общественный интерес к этой проблеме проявился в реакции научного сообщества на сообщение об открытии высокотемпературной сверхпроводимости в 1986 году. Толпы ученых людей собирались послушать новости из лабораторий. На моей памяти не было другой научной проблемы, которая вызывала бы такой интерес у узких специалистов и широкой околонуточной публики.

Этот интерес отразился и в общественном признании, одним из признаков которого является присуждение Нобелевских премий. Пожалуй, нет другой области физической науки, за исследования в которой было бы присуждено столько Нобелевских премий. Вот их хронология:

Хейке Камерлинг-Оннес был удостоен Нобелевской премии по физике в 1913 году «за исследования свойств вещества при низких температурах, которые привели к получению жидкого гелия» (т.е. за открытие сверхпроводимости).

Лев Давидович Ландау был удостоен Нобелевской премии по физике в 1962 году «за пионерские теории конденсированной материи, в особенности жидкого гелия» (т.е. за объяснение явления сверхтекучести).

Джон Бардин, Леон Н. Купер, Дж. Роберт Шриффер разделили в 1972 году Нобелевскую премию по физике «за создание теории сверхпроводимости, обычно называемой БКШ теорией».

Брайан Д. Джозефсон был удостоен Нобелевской премии по физике в 1973 году «за теоретические предсказания свойств сверхпроводящего тока, проходящего через туннельный барьер, в частности явлений, общеизвестных ныне под названием эффектов Джозефсона»

Петр Леонидович Капица был удостоен Нобелевской премии по физике в 1978 году «за фундаментальные изобретения и открытия в области физики низких температур» (т.е. за открытие сверхтекучести).

Георг Беднорц и Алекс Мюллер получили Нобелевскую премию по физике в 1987 году «за важный прорыв в открытии сверхпроводимости в керамических материалах».

Алексей Алексеевич Абрикосов, Виталий Лазаревич Гинзбург и Энтони Легетт получили Нобелевскую премию по физике за 2003 году «за пионерский вклад в теорию сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей».

Однако конечно всеобщее внимание к сверхпроводимости вызвано не ее уникальной научной привлекательностью, а теми надеждами на огромный технический прогресс, который был бы возможен, если бы удалось создать

технологические условия для ее широкого применения в практической деятельности человеческого общества.

Может показаться, что фундаментальная сверхпроводимость не слишком нужна - самые важные открытия в сверхпроводимости уже вроде бы сделаны, хотя и более или менее случайным образом. Один из крупнейших советских физиков академик И.К.Кикоин, внесший весомый вклад в исследования сверхпроводимости еще на раннем их этапе¹, имея в виду сверхпроводимость, говорил, что многие великие научные открытия делаются методом Колумба, когда, образно говоря, открывается "Америка" исследователем, направлявшимся в "Индию". Подобным путем к своему открытию шел и Камерлинг-Оннес, и позже ряд других исследователей сверхпроводимости.

Теперь о сверхпроводимости теперь известно главное - это квантовое явление в макроскопическом проявлении, и кажется, что основным тормозом на пути ее применения на практике стоят не теоретические задачи ее углубленного изучения, а чисто технологические проблемы: работы с жидким гелием так и остаются слишком трудоемкими и дорогостоящими, а технологии сверхпроводников азотного уровня до сих пор не освоены.

И все-таки главная проблема до сих пор состоит в понимании физики сверхпроводимости. Конечно, справедливы слова Р.Кирхгофа о том, что нет ничего практичнее хорошей теории. Поэтому, несмотря на очевидную и исключительную важность вопросов, связанных с прикладными свойствами и технологическими проблемами сверхпроводников, ниже они рассматриваться не будут.

На сегодня сложилась парадоксальная ситуация. С одной стороны Нобелевские лауреаты Бардин-Шриффер-Купер создали теорию сверхпроводимости, которая предполагает, что это явление базируется на фононном механизме. Их точку зрения разделяли такие корифеи как академики Н.Н.Боголюбов, Л.Д.Ландау, В.Л.Гинзбург, И.М.Халатников и др., а также их многочисленные ученики вместе с еще более многочисленными учениками учеников. Однако неудовлетворенность от этого подхода к объяснению механизма сверхпроводимости остается. Конечно известно, что людям свойственно ошибаться. Высоко квалифицированные ученые ошибаются редко. Ну а ситуация когда все специалисты могут ошибаться кажется совсем не реалистичной. И тем не менее безошибочным критерием правильности теории является согласие ее результатов с данными измерений. В данном случае этого нет. Теория БКШ не берется предсказывать критические параметры конкретных сверхпроводников. Формула для критической температуры сверхпроводников в БКШ с экспонентой, в показателе которой стоят множители, не поддающиеся точному измерению, не представляет интереса.

Поэтому до сих пор самая важная задача фундаментальной сверхпроводимости сводится к преодолению того, что пока существующая теория сверхпроводимости не смогла сделать - объяснить почему тот или иной

¹ Кикоин в начале 30-х первым изучил гиромангнитный эффект в сверхпроводнике, определив присущий сверхпроводящим носителям гиромангнитный фактор.

сверхпроводник имеет наблюдаемые критическую температуру и критическое поле. Необходимо понимание физических механизмов, с помощью которых станет возможным нахождение зависимостей основных параметров сверхпроводников от других физических свойств металлов.

Именно это и определило подход к написанию данной статьи.

В ее первой части обращено внимание на те шаги, которые делались, чтобы понять суть явлений сверхпроводимости и сверхтекучести и на те трудности с которыми наука столкнулась на этом пути.

В последующих частях рассмотрен подход к объяснению сверх-явлений как результату упорядочения нулевых колебаний и получены теоретические предсказания для критических параметров сверхпроводников и сверхтекучего гелия, согласующиеся с данными измерений.

Первоначально роль упорядочения нулевых колебаний в образовании сверхпроводящего состояния была рассмотрена в статьях [22] - [27].

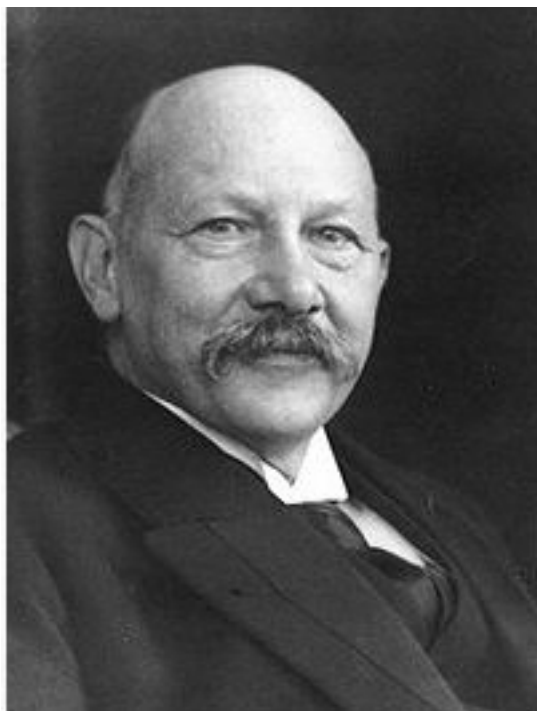


Fig. .1: Хейке Камерлинг Оннес

1.2 Открытие сверхпроводимости

В конце ноября 1911 года в печать поступила статья, написанная Хейке Камерлинг-Оннесом [1], руководителем первой в мире лаборатории для исследования физики низких температур, созданной им в Лейденском университете. В этой статье описано замечательное явление - полное исчезновение электрического сопротивления ртути, названное Х.Камерлинг-Оннесом сверхпроводимостью.

Х.Камерлинг-Оннес был первым ученым XX века новой формации, поставившим индустрию на службу физике. Его исследовательская лаборатория базировалась на настоящем заводе холода, собранном из разработанных им рефрижераторов. Этот промышленный подход дал ему на долгие годы (15 лет!) преимущества полной мировой "монополии" работы с низкими температурами. Главное, он получил возможность проводить твердотельные исследования вплоть до температур жидкого гелия. Он первым получил его жидким в 1908 г. и начал с его помощью планомерные исследования электрического сопротивления металлов. В то время было известно, что наименьшим электрическим сопротивлением обладают благородные металлы, но при этом их нужно было хорошо очистить. Ртуть не является благородным металлом и была выбрана несколько случайно. Это был единствен-

ный металл в те годы, который допускал очень высокую степень очистки путем многократной перегонки. Другая случайность в том, что сверхпроводящий переход в ртути происходит при 4.15К, чуть-чуть ниже температуры кипения гелия 4.18К, но это чуть-чуть создало вполне достаточные условия для открытия сверхпроводимости уже в первом эксперименте, проведенном учеником Камерлинг-Оннеса - Гиллом Холстом. Эти измерения показали, что электрическое сопротивление у ртути сначала монотонно уменьшается, а вблизи 4К пропадает полностью. Следует заметить, что в своих измерениях Х.Камерлинг-Оннес использовал откачку паров гелия, а с помощью откачки можно значительно понизить температуру гелия, достигнув температуры около 1К. Благодаря откачке вскоре Х.Камерлинг-Оннесом и его сотрудниками была несколько позже открыта сверхпроводимость в олове, а потом и в других металлах, причем необязательно очень чистых. Степень чистоты мало влияет на сверхпроводящий переход. Их открытием было также существование влияния на сверхпроводники магнитного поля. Они определили, таким образом, существование двух главных критериев сверхпроводников - критическую температуру и критическое магнитное поле.²

В наше время начатые Х.Камерлинг-Оннесом исследования по физике низких температур развиваются во многих лабораториях мира. Но и спустя 100 лет стиль работы, созданный Х.Камерлинг-Оннесом в Лейденской криогенной лаборатории, даже на много повидавших на своем веку специалистов производит очень сильное впечатление и по продуманности своей научной политики, и по мощности технической оснащенности.

2 Основные вехи в исследовании сверхпроводимости

Первые 22 года после открытия сверхпроводимости ее исследованиями занималась только Лейденская лаборатория Х.Камерлинг-Оннеса. Но к 30 годам прошлого века оживители гелия стали появляться и в других местах, и к исследованиям сверхпроводимости стали подключаться другие лаборатории. Значительной вехой на этом пути стало открытие абсолютного диамагнетизма сверхпроводников в 1933 г. До этого времени сверхпроводники рассматривались как идеальные проводники. Эффект, открытый Мейснером и Оксенфельдом [4], состоял в том, что при охлаждение сверхпроводника ниже критической температуры в постоянном и не очень сильном

² Замечательное описание событий, связанных с открытием сверхпроводимости, дает в своих воспоминаниях лауреат Нобелевской премии В.Л.Гинзбург. Он обратил внимание на особенный этический аспект, связанный с этим открытием. Гинзбург пишет [2]: "Сверхпроводящий скачок и вообще сверхпроводимость в явном виде впервые наблюдал проводивший измерения сопротивления ртути Г.Холст (Gilles Holst). Это был квалифицированный физик (в дальнейшем первый директор исследовательских лабораторий фирмы Филипс и профессор Лейденского университета). Однако его имя в соответствующей публикации Камерлинг-Оннеса даже не упоминается. Как указано в [3], сам Холст, по-видимому, не считал такое отношение Камерлинг-Оннеса несправедливым и необычным. Мне ситуация не ясна, для нашего времени она совершенно необычна; возможно, 90 лет назад нравы в научном сообществе были совсем иными."



Fig. .2: Братья Хайнц и Фриц Лондоны

магнитном поле происходит его выталкивание из объема сверхпроводника. Поле выталкивается незатухающими токами, которые текут по поверхности образца.³

2.1 Теория Ф. и Х.Лондонов

Большой вклад в развитие науки о сверхпроводниках внесли братья Фриц и Хайнц Лондоны, предложившие ее первую феноменологическую теорию. Они ввели представление о том, что энергетическая щель определяет сверхпроводящие свойства металлов, постулировали макроскопическую когерентность сверхпроводящего состояния для однородных сверхпроводников, предсказали квантование магнитного потока, ввели понятие глубины проникновения поля в сверхпроводник и вывели для нее уравнение. Следует отметить, что идея и методика получения сверхнизких температур с помощью растворения He-3 в He-4 принадлежит также Хайнцу Лондону.

До открытия явления абсолютного диамагнетизма сверхпроводников, они рассматривались как абсолютные проводники или просто металлы с нулевым сопротивлением. На первый взгляд разницы особенной нет: если мы идеальный проводник внесем в магнитное поле, то на его поверхности индуцируется ток, который вытолкнет это поле, т.е. проявится диамагнетизм. Но если сначала намагнитить образец, поместив его в поле, и только затем охлаждать, то никакого диамагнетизма проявиться не должно. Опыт Мейсснера и Оксенфельда показал, что результат не зависит от истории.

³ Интересно, что Камерлинг-Оннес искал этот эффект и проводил подобный эксперимент почти на двадцать лет раньше. Но тогда из-за вынужденной экономии жидкого гелия, который ожидался с очень большими трудностями, он использовал в своих измерениях полый тонкостенный свинцовый шар. В таком шаре магнитное поле легко "замораживается" и эффект Мейсснера маскируется.

Внутри сверхпроводника всегда равно нулю и сопротивление

$$\rho = 0, \quad (1)$$

и магнитная индукция:

$$B = 0. \quad (2)$$

Фактически теория Лондонов [5] представляет собой попытку наложение этих условий на уравнения Максвелла. Представим кратко вывод уравнений Лондонов примерно так, как это обычно делается в первых главах большинства курсов сверхпроводимости, например [6],[7].

В соответствии с законом Ньютона свободные электроны приобретут ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{e\mathbf{E}}{m_e}, \quad (3)$$

если на них подействовать электрическим полем с напряженностью $\mathbf{E}$.

Направленное движение электронов создаст в проводнике ток с плотностью:

$$\mathbf{j} = en_s \mathbf{v}, \quad (4)$$

здесь n_s - плотность "сверхпроводящего" электронного газа,

$\mathbf{v}$ - скорость его направленного движения.

Продифференцировав это уравнение по времени и подставив (3), Лондоны получили:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{j} = en_s \mathbf{a} = \frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{E}. \quad (5)$$

Это уравнение, называемое первым уравнением Лондонов, показывает, что приложение к сверхпроводнику электрического напряжения вызывает изменение электрического тока. В отличие от нормальных проводников, для протекания стационарных токов в сверхпроводнике прикладывать напряжение не нужно.

Применение операции *rot* к обеим частям этого равенства, использование закона электромагнитной индукции Фарадея $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{B}}{dt}$ приводит к соотношению между плотностью тока и магнитным полем

$$\frac{d}{dt} \left(\text{rot} \mathbf{j} + \frac{n_s e^2}{m_e c} \mathbf{B} \right) = 0. \quad (6)$$

Это соотношение совместно с уравнением Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (7)$$

определяет магнитные поля и плотности тока, которые могут существовать в идеальном проводнике.

Для учета эффекта Мейснера-Оксенфельда Лондоны выбрали из полного набора статических решений уравнения (6) решение:

$$\text{rot} \mathbf{j} + \frac{n_s e^2}{m_e c} \mathbf{B} = 0. \quad (8)$$

сверх- проводник	$\lambda_L, 10^{-6} \text{cm}$ измерено [8]	n_s по формуле (11)	n_e измерено	n_s/n_e
Tl	9.2	$3.3 \cdot 10^{21}$	$1.05 \cdot 10^{23}$	0.03
In	6.4	$6.9 \cdot 10^{21}$	$1.2 \cdot 10^{23}$	0.06
Sn	5.1	$1.1 \cdot 10^{22}$	$1.4 \cdot 10^{23}$	0.07
Hg	4.2	$1.6 \cdot 10^{22}$	$8.5 \cdot 10^{22}$	0.18
Pb	3.9	$1.9 \cdot 10^{22}$	$1.3 \cdot 10^{23}$	0.14

Tab. .1: Лондоновская глубина и плотность носителей

Оно носит название второго уравнения Лондонов. Смысл замены уравнения (6) более жестким уравнением Лондонов заключается в том, что из их уравнения непосредственно следует существование эффекта Мейснера. Действительно, из уравнений (7) и (8) получаем

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{4\pi n_s e^2}{m_e c^2} \mathbf{B} \quad (9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{j} = \frac{4\pi n_s e^2}{m_e c^2} \mathbf{j}. \quad (10)$$

Согласно этим уравнениям токи и магнитные поля в сверхпроводниках могут существовать только в приповерхностном слое толщиной

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_e c^2}{4\pi e^2 n_s}}, \quad (11)$$

которая называется лондоновской глубиной проникновения.

Лондоновская глубина проникновения - одна из измеримых характеристик сверхпроводников, и для многих из них она составляет несколько сотен Ангстрем [8]. В таблице (.1) измеренное значение λ_L приведено во втором столбце.

Однако плотность сверхпроводящих носителей n_s (см. средний столбец Таб.(.1)), рассчитанная в соответствии с формулой (11) с использованием этих экспериментальных данных, получается завышенной на несколько порядков.

Действительно, в сверхпроводящий конденсат может выпасть лишь малая доля электронов проводимости из тонкой полоски энергетического спектра вблизи $\mathcal{E}_F$. Расчет их плотности в зависимости от величины щели приводит к равенству (89). Поэтому можно ожидать, что концентрация сверхпроводящих носителей среди всех свободных электронов металла должна быть на уровне $\frac{n_s}{n_e} \simeq 10^{-5}$ (см.(86)). В то время как эта концентрация, получающаяся в результате расчета по формуле (11) на несколько порядка превышает эту величину (см. последний столбец таблицы).

Причина такого расхождения, по-видимому, в применении неэквивалентного преобразования, использованного при выводе лондоновской глубины. На первом этапе в равенстве (3) речь идет о прямолинейном ускорении под действием постоянного электрического поля. Рассматриваемый исходным уравнением (3) ток не имеет циркуляции, и поэтому применение на втором этапе операции rot в уравнении (6) к этому случаю не корректно. Оно ведет не к уравнению (8):

$$\frac{\text{rot } \mathbf{j}}{\frac{n_s e^2}{m_e c} \mathbf{B}} = -1, \quad (12)$$

а к паре равенств:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{j} &= 0 \\ \frac{n_s e^2}{m_e c} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

и неопределенности

$$\frac{\text{rot } \mathbf{j}}{\frac{n_s e^2}{m_e c} \mathbf{B}} = \frac{0}{0}. \quad (14)$$

Корректировка соотношения лондоновской глубины с плотностью сверхпроводящих носителей будет дана в разделе (7).

2.2 Теория Гинзбурга-Ландау

Феноменологическая теория сверхпроводимости Лондонов не учитывает квантовые эффекты. Теория [9], предложенная В.Л.Гинзбургом и Л.Д.Ландау в начале 50-х годов прошлого века, использует для описания сверхпроводников математический аппарат квантовой механики. Но тем не менее она является феноменологической, т.к. не занимается исследованием вопроса о природе возникновения сверхпроводимости, хотя качественно и количественно описывает многие стороны характерных для нее эффектов.

В квантовой механике для описания движения частиц используется волновая функция $\Psi(r, t)$, характеризующая положение частицы в пространстве и времени. В ГЛ-теории подобная функция вводится для описания всего ансамбля сверхпроводящих частиц и носит название параметра порядка, а ее квадрат определяет концентрацию сверхпроводящих частиц.

В своей основе ГЛ-теория использует аппарат, разработанный Ландау для описания переходов порядок-беспорядок (переходы второго рода по классификации Ландау). Согласно Ландау, переход системы в более упорядоченное должен сопровождаться уменьшением свободной энергии на величину:

$$\Delta W = -a \cdot n_s + \frac{b}{2} n_s^2. \quad (15)$$

Здесь a и b - параметры модели. Воспользовавшись принципом минимума свободной энергии системы, находящейся в устойчивом состоянии, можно найти соотношение между этими параметрами:

$$\frac{d(\Delta W)}{dn_s} = -a + b \cdot n_s = 0. \quad (16)$$

Откуда

$$b = \frac{a}{n_s} \quad (17)$$

и величина выигрыша энергии при переходе в упорядоченное состояние:

$$\Delta W = -\frac{a}{2} n_s. \quad (18)$$

Обратный переход из сверхпроводящего состояния в нормальное произойдет в магнитном поле с критической напряженностью H_c . При этом потребуются создать плотность магнитной энергии $\frac{H_c^2}{8\pi}$. В соответствии с этим получается равенство:

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{a}{2} n_s. \quad (19)$$

Для того чтобы выразить параметр ГЛ-теории a через физические характеристики образца, величину плотности "сверхпроводящих" носителей обычно берут из уравнения Лондонов (11).⁴

⁴ Следует отметить, что в связи с тем, что уравнение Лондонов некорректно определяет соотношение глубины проникновения с плотностью носителей, для нахождения a следует пользоваться уточненным равенством (115)

Важным шагом в ГЛ-теории является переход от концентрации "сверхпроводящих" носителей n_s к параметру порядка Ψ

$$|\Psi(x)|^2 = n_s, \quad (20)$$

при котором (в одномерном случае) стандартное уравнение Шредингера приобретает вид:

$$-\frac{\hbar}{2m} [\nabla \Psi(x)]^2 - a\Psi^2(x) + \frac{b}{2}\Psi^4(x) = \mathcal{E}. \quad (21)$$

Снова воспользовавшись условием минимума энергии

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Psi} = 0 \quad (22)$$

после несложных преобразований получается уравнение, которому удовлетворяет параметр порядка равновесной системы:

$$a\Psi + b\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m_e} \left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi = 0. \quad (23)$$

Это уравнение носит название первого уравнения Гинзбурга-Ландау. Оно нелинейно. И хотя аналитического решения у него не существует, при использовании разложений входящих в него параметров, удается с его помощью найти решения для многих задач, связанных с изменяющимся параметром порядка - с физикой тонких сверхпроводящих пленок, границами раздела сверхпроводник-металл, явлениям вблизи к критической температуре и т.д.

Вариация уравнения Шредингера (21) по вектор-потенциалу $\mathbf{A}$ дает второе уравнение ГЛ-теории:

$$\mathbf{j}_s = \frac{i\hbar e}{2m_e} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{m_e c} |\Psi|^2 \mathbf{A}, \quad (24)$$

определяющее плотность сверхпроводящего тока. Это уравнение позволяет получить ясную картину важного эффекта сверхпроводимости - квантования магнитного потока.

2.3 Экспериментальные данные, важные для построения теории сверхпроводимости

2.3.1 Особенности фазового перехода

Фазовые переходы могут происходить со скачком первых производных термодинамического потенциала и со скачком вторых производных при непрерывном изменении первых. По терминологии Л.Д.Ландау это фазовые переходы 1-го и 2-го родов. К фазовым переходам 1-го рода относятся явления с перестройкой кристаллической структуры вещества, переходы типа порядок-беспорядок относятся к переходам второго рода.

Измерения показывают, что при сверхпроводящем переходе отсутствуют изменения структуры, выделения скрытой теплоты и тому подобные явления, которые характерны для переходов первого рода. Наоборот, теплоемкость в точке этого перехода терпит разрыв (см.ниже). Все это однозначно указывает на то, что сверхпроводящий переход сопровождается изменением порядка. Полное отсутствие изменений в структуре кристаллической решетки, доказанное рентгеновскими измерениями, говорит о том, что этот переход есть установление порядка в системе электронов.

2.3.2 Энергетическая щель и теплоемкость сверхпроводника

Энергетическая щель в сверхпроводниках Наряду с рентгеновскими исследованиями, которые не обнаруживают изменения структуры в точке сверхпроводящего перехода, никаких изменений не видно тут и в оптическом диапазоне. "На глаз" здесь ничего не происходит. Однако, отражение радиоволн претерпевает заметное изменение в этом переходе. Детальные измерения показали, что существует резкая граница в диапазоне волн $1 \cdot 10^{11} \div 5 \cdot 10^{11}$ Герц, разная для различных сверхпроводников, ниже которой изменения в отражении радиоволн есть, а выше ее - нет. Это явление прямо указывает на существование пороговой энергии, которая необходима для перевода сверхпроводящего носителя в нормальное состояние, т.е. между этими двумя состояниями существует энергетическая щель.

Теплоемкость сверхпроводника

Законы термодинамики позволяют получить представление о сущности явления из общих рассуждений. Покажем, что простое применение термодинамических соотношений позволяет сделать вывод о том, что переход нормальный металл - сверхпроводник является переходом второго рода, т.е. он обусловлен упорядочением электронной системы.

Перевести сверхпроводник в нормальное состояние можно с помощью критического магнитного поля H_c . Такой переход означает, что разницу между свободной энергией массивного образца (единичного объема) в нормальном и в сверхпроводящем состоянии дополняет плотность энергии критического магнитного поля:

$$F_n - F_s = \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (25)$$

Свободная энергия, по определению, есть разница внутренней энергии U и тепловой энергии TS (S - энтропия состояния):

$$F = U - TS. \quad (26)$$

Поэтому приращение свободной энергии есть

$$\delta F = \delta U - T\delta S - S\delta T. \quad (27)$$

Согласно первому закону термодинамики в термодинамическом процессе приращение плотности тепловой энергии δQ есть сумма работы совершенной образцом над внешними телами δR и приращения его внутренней энергии δU :

$$\delta Q = \delta R + \delta F \quad (28)$$

Так как при обратимом процессе приращение тепловой энергии $\delta Q = T\delta S$, то

$$\delta F = -\delta R - S\delta T \quad (29)$$

и таким образом энтропия

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_R. \quad (30)$$

В соответствии с этим разность энтропий нормального и сверхпроводящего состояний (25) может быть записана в виде:

$$S_s - S_n = \frac{H_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)_R. \quad (31)$$

Так как при любой температуре критическое поле уменьшается с ее ростом:

$$\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right) < 0, \quad (32)$$

то из равенства (31) следует, что сверхпроводящее состояние является более упорядоченным - его энтропия меньше. Кроме того, так как при $T = 0$ производная от критического поля тоже равна нулю, то в этой точке энтропии нормального и сверхпроводящего состояний равны и какие-либо скачкообразные изменения первых производных термодинамического потенциала должны отсутствовать, т.е. это переход типа порядок-беспорядок.

Поскольку теплоемкость по определению $C = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)$, то разность удельных теплоемкостей сверхпроводящего и нормального состояний:

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 + H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} \right]. \quad (33)$$

Так как в критической точке $H_c = 0$, то из (33) прямо следует формула Рутгерса, определяющая величину скачка теплоемкости в точке перехода:

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)_{T_c}^2. \quad (34)$$

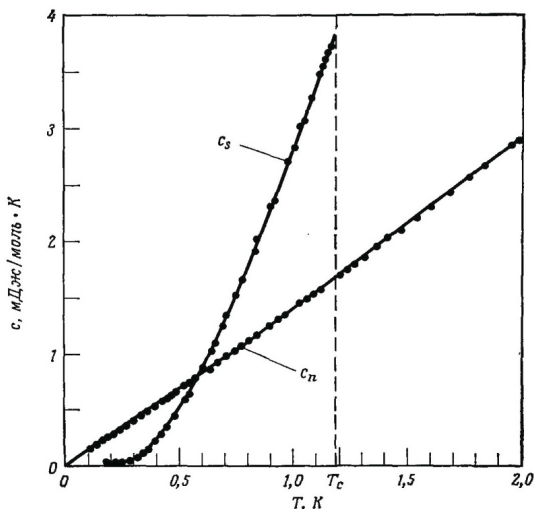


Fig. .3: Низкотемпературная теплоемкость нормального и сверхпроводящего алюминия [10].

Теория теплоемкости сверхпроводников хорошо подтверждается экспериментально. Для примера на рис.(.3) показана зависимость низкотемпературной теплоемкости алюминия в сверхпроводящем и нормальном состояниях. Теплоемкость нормального алюминия при этой температуре определяется только электронами и в соответствии с теорией Зоммерфельда линейна по температуре. Теплоемкость сверхпроводника при низкой температуре экспоненциально зависит от нее, что говорит о существовании двухуровневой системы в энергетическом распределении сверхпроводящих частиц. Данные измерений скачка теплоемкости при T_c хорошо описывается равенством Рутгерса (34).

2.3.3 Квантование магнитного потока в сверхпроводниках

Утверждение о том, что магнитный поток должен квантоваться в полых сверхпроводящих цилиндрах, первым высказал Ф.Лондон. Однако главный интерес в этой проблеме состоит не в самом явлении квантования, а в детали - какова должна быть величина кванта потока. Ф.Лондон при вычислении величины кванта магнитного потока еще не учитывал эффекта спаривания сверхпроводящих носителей и поэтому предсказал для него в два раза большую величину.

Запишем параметр порядка в виде:

$$\Psi(r) = \sqrt{n_s} e^{i\theta(r)}. \quad (35)$$

где n_s - плотность сверхпроводящих носителей, θ - фаза параметра порядка.

Учитывая, что в отсутствие магнитного поля плотность потока частиц описывается уравнением:

$$n_s \mathbf{v} = \frac{i\hbar}{2m_e} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi). \quad (36)$$

с использованием (35), получим $\hbar \nabla \theta = 2m_e \mathbf{v}_s$ и преобразуем уравнение Гинзбурга-Ландау (24) к виду:

$$\hbar \nabla \theta = 2m_e \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A}. \quad (37)$$

Если рассматривать замораживание магнитного потока в толстом сверхпроводящем кольце со стенкой, толщина которой много больше лондоновской глубины проникновения λ_L , то в глубине тела кольца плотность тока $\mathbf{j}$ равна нулю. Это значит, что уравнение (37) сведется к равенству:

$$\hbar \nabla \theta = \frac{2e}{c} \mathbf{A}. \quad (38)$$

Если от величин входящих в это равенство взять интегралы по контуру, проходящему в глубине кольца, нигде не подходя близко к поверхности:

$$\hbar \oint \nabla \theta ds = \frac{2e}{c} \oint \mathbf{A} ds, \quad (39)$$

то получится

$$\oint \nabla \theta ds = \frac{2e}{\hbar c} \Phi, \quad (40)$$

так как по определению магнитного потока через любую петлю

$$\Phi = \oint \mathbf{A} ds. \quad (41)$$

Контурный интеграл $\oint \nabla \theta ds$ должен быть кратен 2π , чтобы обеспечить однозначность параметра порядка при обходе по контуру. Таким образом магнитный поток, захваченный сверхпроводящим кольцом должен быть кратен кванту магнитного потока:

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{2e}, \quad (42)$$

что точно подтверждается соответствующими измерениями.

Это очень важный результат для понимания физики сверхпроводимости.

Таким образом, теоретические предсказания, подтверждающиеся измерениями, говорят, что сверхпроводимость осуществляется благодаря тому, что ее носители имеют заряд $2e$, т.е. представляют собой два спаренных электрона.

Следует отметить, что спаривание электронов является необходимым условием существования сверхпроводимости, однако явление спаривания

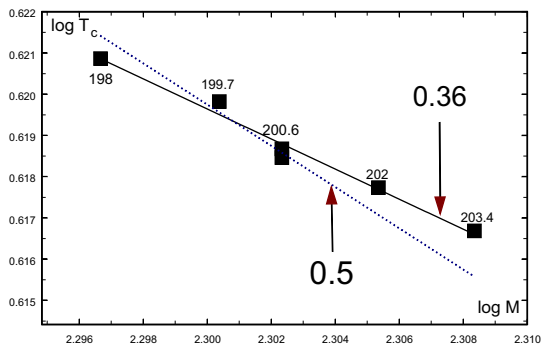


Fig. 4: Изотопический эффект в ртути [20], [21]. Сплошная линия проведена методом наименьших квадратов. В соответствии с электрон-фононным механизмом коэффициент ζ должен быть равен $1/2$ (пунктирная линия). Как это видно из рисунка, этот коэффициент для ртути близок к $1/3$.

электронов экспериментально обнаружено и при нормальном состоянии электронного газа металла. Так величина кванта (42) характеризует периодичность влияния магнитного поля на электронный газ Mg и Al в нормальном состоянии, т.е. при температурах значительно более высоких, чем критические [29],[30].

2.3.4 Изотопический эффект

По-видимому самую важную роль, и при том отрицательную, в развитии науки о сверхпроводимости сыграло открытие в 1950 году изотопического эффекта. Отрицательную роль, конечно сыграло не открытие этого эффекта, а его неверная трактовка. Первоначально было экспериментально обнаружено, что критические температуры образцов из различных изотопов ртути имеют различные критические температуры. Позже подобный эффект был обнаружен и в ряде других сверхпроводников.

Экспериментально было установлено, что критическая температура сверхпроводников зависит от массы изотопа M_i , из которого они состоят:

$$T_c \sim \frac{1}{M_i^\zeta}, \quad (43)$$

При этом было установлено, что для сверхпроводников I рода - Zn, Sn, In, Hg, Pb - величину изотоп-эффекта можно описать равенством (43) при константе $\zeta = \frac{1}{2}$.

Этот эффект навел исследователей на мысль, что само явление сверхпроводимости связано с колебаниями ионов в решетке, т.к. подобную (43) зависимость максимальной энергии от массы имеют распространяющиеся в решетке фононы.

В дальнейшем эта простая картина нарушилась - был измерен изотопический эффект для других металлов, для которых он имел другую величину, а в некоторых вообще отсутствовал. Такое различие изотопического эффекта в разных сверхпроводниках не удастся объяснить единым фононным механизмом.

Следует отметить, что и в трактовке изотоп-эффекта в "простых" металлах существовало, по-видимому, некое стремление подогнать результаты измерений под эффект влияния фононов, при котором $\zeta = 1/2$. Так анализ экспериментальных данных [20], [21] (см.рис.(.4)) говорит о том, что для ртути реально этот параметр ближе к $1/3$.



Fig. .5: Джон Бардин - дважды лауреат Нобелевской премии. В 1956 он получил премию за изобретение транзистора и в 1972 вместе с Л.Купером и Дж.Шриффером - за теорию БКШ.

2.4 БКШ

После обнаружения изотоп-эффекта в 1950 г. создалось впечатление, что, поскольку критические параметры сверхпроводника зависят от массы ионов, то это можно рассматривать как прямое доказательство того, ответственности фононов за возникновение сверхпроводимости. В этом же году Г.Фрелих впервые отметил, что при низких температурах взаимодействие с фононами может привести к возникновению сил притяжения между электронами несмотря на кулоновское отталкивание, а еще через несколько лет Л.Купер описал конкретный механизм, при котором сколь угодно слабое притяжение между электронами с фермиевской энергией должно приводить к возникновению их связанного состояния. На этой основе в 1956 году Бардиным, Купером и Шриффером была построена микроскопическая теория, опирающаяся на электрон-фононное взаимодействие как причину возникновения сил притяжения между электронами.

Считается, что теория БКШ получила следующие основные результаты:

1. Благодаря электрон-фононному взаимодействию, обуславливающему притяжение между электронами, возникает энергетическая щель, которая отделяет основное состояние электронной системы от возбужденных. Наличие этой щели объясняет поведение теплоемкости сверхпроводников, оптические опыты и т.д.

2. Глубина проникновения (как и длина когерентности) появляются как естественные следствия основного состояния теории БКШ. Уравнения Лондонов и диамагнетизм Мейснера получаются естественным путем.

3. Критерий существования сверхпроводимости и конечной температуры перехода включает в себя плотность электронных состояний на уровне Ферми $D(\mathcal{E}_F)$ и потенциал электрон-решеточного взаимодействия U , который может быть оценен из электрического сопротивления. Для случая

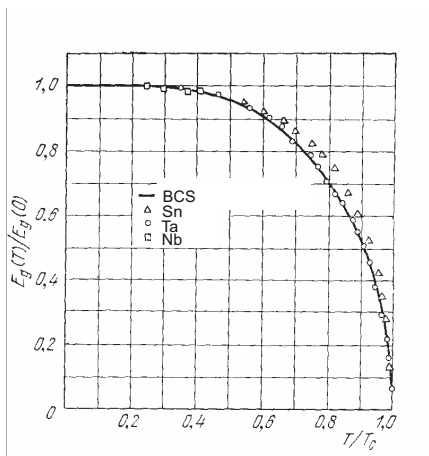


Fig. .6: Температурная зависимость величины щели в энергетическом спектре сверхпроводников, рассчитанная по уравнению (45).

$UD(\mathcal{E}_F) \ll 1$ теория БКШ выражает критическую температуру сверхпроводника через его температуру Дебая Θ_D :

$$T_c = 1.14 \cdot \Theta_D \cdot \exp \left[-\frac{1}{UD(\mathcal{E}_F)} \right]. \quad (44)$$

4. Участие решетки в электрон-электронном объединении обуславливает влияние изотопного замещения на критическую температуру сверхпроводника. При этом в связи с тем, что от массы изотопов зависит дебаевская температура $\Theta_D \propto M^{-1/2}$, то равенство (44) правильно описывает эту зависимость для целого ряда сверхпроводников.

5. Температурную зависимость величины энергетической щели Δ сверхпроводника теория БКШ описывает в неявном виде интегралом по спектру фононов от 0 до энергии Дебая:

$$1 = \frac{UD(\mathcal{E}_F)}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{th\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/2kT}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}. \quad (45)$$

Результат вычисления этой зависимости хорошо согласуется с данными измерений (Рис.(.6)).

6. Теория БКШ согласуется с данными измерений величины кванта магнитного потока, т.к. ее основное состояние составлено из пар одноэлектронных состояний.

Однако не все так хорошо с этой теорией.

Во-первых, она не дает главного - пользуясь ей нельзя априори получить информацию о том, каковы должны быть критические параметры того или

инного конкретного сверхпроводника. Поэтому она не может помочь в поисках стратегических путей развития сверхпроводников и тактике их исследования. Формула (44) содержит два трудно оцениваемых параметра - величину электрон-фононного взаимодействия и плотность электронных уровней вблизи уровня Ферми и потому не может служить для этой цели, а способна дать только качественную оценку.

Кроме того, все результаты БКШ-теории могут быть получены с помощью других, более простых, но вполне корректных методов.

К объединению электронов в пары приводит не только электрон-фононный механизм. Любое притяжение между электронами может привести к их спариванию. Для существования сверхпроводимости нужно с помощью энергии связи объединить в единый ансамбль пары электронов, располагающиеся на расстояниях порядка сотни межатомных. В теории БКШ нет никаких сил притяжения между парами и, тем более, между столь удаленными парами.

Квантование потока хорошо описывается в рамках теории Гинзбурга-Ландау (см.раздел (2.3.3)), если параметром порядка описывать плотность спаренных электронов.

С помощью двухуровневой системы с соответствующими параметрами нетрудно описать температурную зависимость теплоемкости сверхпроводников.

Поэтому успехом теории БКШ можно было бы считать вычисление температурной зависимости энергетической щели сверхпроводников (45). Однако эту зависимость проще и удобнее описывать как явление, сопровождающее переход порядок-беспорядок в двухуровневой системе конденсата нулевых колебаний. При этом подходе, который рассмотрен ниже в разделе (5.2), температурная зависимость щели получает такую же трактовку как и другие явления этого же класса - λ -переход в жидком гелии, изменение спонтанной намагниченности ферромагнетиков и т.п.

Поэтому, как и раньше, в 50-е годы прошлого века решающим оказывается существование изотопического эффекта. Однако, к настоящему времени накопились экспериментальные факты о том, что замещение изотопов приводит к изменению параметров кристаллической решетки металлов за счет влияния массы изотопа на нулевые колебания ионов [39]. Поэтому замещение изотопа в решетке металла должно приводить к изменению его энергии Ферми и влиять на все его электронные свойства. В связи с этим изменение критической температуры сверхпроводника при замене изотопа может быть прямым следствием изменения его энергии Ферми. Без какой-либо роли фононов.



Fig. .7: Карл Алекс Мюллер - родоначальник ВТСП.

2.5 Новая эра - ВТСП

За столетие, следовавшее после открытия сверхпроводимости, она была обнаружена у 40 чистых металлов. Оказалось, что среди них самая низкая критическая температура у магния - около 0.001К, а самая высокая у технеция - 11.3К.

Также свойством сверхпроводимости при низких температурах обладает несколько сотен соединений и сплавов. Среди них самая высокая критическая температура у интерметаллического соединения Nb_3Ge - 23.2К. Для получения сверхпроводящего состояния во всех этих соединениях необходимо использовать дорогостоящую технологию жидкого гелия.⁵ Теоретически кажется, что в некоторых случаях можно было бы использовать жидкий водород. Но это только теоретически - водород очень взрывоопасен.

Много десятилетий ученые лелеяли мечту создать сверхпроводник, сохраняющий свои свойства при температуре выше температуры кипения жидкого азота. Жидкий азот дешев, доступен, безопасен при соблюдении определенной культуры работы с ним (во всяком случае совершенно не взрывоопасен). Создание такого сверхпроводника сулило революционный прорыв во многих областях техники.

В 1986 году такие материалы были найдены. Сначала швейцарские исследователи Г.Беднорц и А.Мюллер обнаружили сверхпроводимость в медь-лантановой керамике, температура сверхпроводящего перехода была "лишь" на уровне 40К, но стало ясно, что это новый класс сверхпроводников (они названы высокотемпературными сверхпроводниками или ВТСП), и в их исследование включилось очень большое число лабораторий всего мира. Уже через год была обнаружена сверхпроводимость в керамике $Y - Ba - Cu - O$, температура перехода в которой выше 90К. Поскольку жидкий азот кипит при 78К, азотный рубеж был продолжен. В дальнейшем

⁵ Для сравнения можно сказать, что литр жидкого гелия стоит примерно как бутылка хорошего коньяку. А теплота испарения его так мала, что для его хранения нужны дорогостоящие криостаты, да и из них он все равно довольно быстро испаряется.

сверхпроводник	T_c, K	H_c, Oe
Hg	4.15	41
Pb	7.2	80
Nb	9.25	206
$NbTi$	9.5-10.5	120.000
Nb_3Sn	18.1-18.5	220.000
Nb_3Al	18.9	300.000
Nb_3Ge	23.2	370.000
MgB_2	40	150.000
$YBa_2Cu_3O_7$	92.4	600.000
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$	111	5.000.000
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$	133	>10.000.000

Tab. .2: Критические параметры сверхпроводников

были обнаружены ртутные керамики с температурами переходов порядка 140К. Появлялись сообщения об открытиях сверхпроводников с переходом в диапазоне комнатной температуры, но в дальнейшем эти данные не подтвердились.

Историю повышения критической температуры сверхпроводника интересно проследить по графику на рис.8. Из этого графика видно, что если бы создание новых сверхпроводников шло тем же темпом, что и до открытия ВТСП, то азотный уровень был бы преодолен лет через 150. Но наука развивается по своим законам, и открытие ВТСП позволило резко поднять критическую температуру.

Однако к революционному прорыву в технике и промышленности создание ВТСП не привело. Керамики оказались слишком нетехнологичны для создания тонких сверхпроводящих проводов, а без них применение ВТСП-керамик вынужденно ограничилось приборной слаботочной техникой, где к большим прорывам это тоже не привело (см.например [16]). После создания ВТСП новых принципиальных открытий такого масштаба сделано не было. Возможно причиной этого стало то, что теория сверхпроводимости БКШ, принятая большинством исследователей на сегодняшний день, не может предсказать параметры сверхпроводников *a priori* и не служит опорой в стратегии и тактике их исследования и разработки.

3 О сверхтекучести

Первые исследования свойств гелия-II начались в Лейденской лаборатории еще в 1911 году, в том же году когда была открыта сверхпроводимость. Несколько позже была открыта особенность в теплоемкости, названная λ -переходом. Однако до сверхтекучести жидкого гелия еще было далеко. Она была открыта П.Л.Капицей в 1938 году.

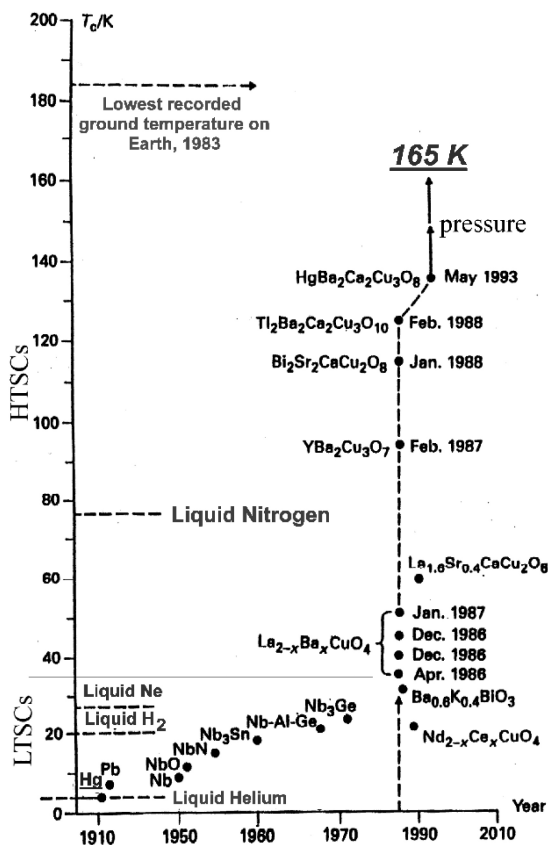


Fig. 8: История повышения критической температуры сверхпроводников. Горизонтальные линии показывают температуры кипения криогенных жидкостей (при нормальном давлении).



Fig. .9: Петр Леонидович Капица

Многие события, связанные с этим открытием, ставшим важной вехой мировой науки, широко известны, но одна история из его подоплеки, по-моему, никогда не публиковалась.

Я слышал эту историю, которую считаю возможным изложить здесь, от академика И.К.Кикоина в середине 60-х годов прошлого века. В то время я был его аспирантом. Он, будучи заместителем И.В.Курчатова по атомной проблеме, был плотно занят целые дни государственно важными делами. Однако вечерами он часто заходил в лаборатории к моим коллегам и в мою лабораторию обсудить научные новости. В эти научные беседы часто вплетались его рассказы на околофизические темы.

Исааку Константиновичу в 33-ем году исполнилось 25. Он только что приступил к задуманному им эксперименту по измерению гироманнитного эффекта в сверхпроводниках. Петр Леонидович был в курсе этого. Он даже дал шарик из сверхчистого свинца для этого эксперимента, привезя его из Мондовской лаборатории в Кембридже, которой он руководил в то время. Он регулярно приезжал в Советский Союз повидаться с матерью и отдохнуть, для чего летом обычно ехал на своей собственной машине с семьей в Крым. Полная фантастика для Советской России того времени! По пути он посещал физические лаборатории Москвы и Ленинграда (теперь опять С.Петербурга), читал лекции, беседовал с людьми, знакомился с тем, что кто делает.

Вот во время такого визита в 1933 году Кикоину удалось рассказать Капице о начале своих измерений. Тому это очень понравилось и он пригласил



Fig. .10: Исаак Константинович Кикоин

сил И.К. продолжить эксперименты в Кембридже. Договорились, что за год все формальности с приглашением из Англии будут выполнены и после следующего летнего отпуска они в Кембридж едут вместе. Но не получилось. Летом 34 года Капица действительно приехал в Россию, но когда он захотел выехать обратно в Англию, то ему в выездной визе было отказано. Никакие усилия не помогали, все было решено на самом верху.

Тестем Капицы был академик А.Н.Крылов, знаменитый кораблестроитель. И вот А.Н.Крылов вместе со своим другом академиком И.П.Павловым (Нобелевским лауреатом по физиологии еще дореволюционного времени) идут на прием к Сталину. Сталин их принимает и спрашивает:

-В чем проблема?

-Да, вот Капицу не выпускают.

-Да, не выпускают. Потому что русский соловей должен петь в России! Павлов (физиолог): Дык, соловей-то в клетке не поет!

- Ничего. У нас запоет!

Так страшно злой (не то слово) Капица оказался на короткое время заместителем директора ленинградского Физтеха, которым руководил А.Ф.Иоффе.

Молодые доктора этого института - Кикоин, Курчатов, Алиханов, Арцимович - идут к зам.директора. Кто на поклон, а кто знакомиться. Алиханов в дверях спрашивает у выходящего из кабинета Арцимовича:

-Ну, как он? Зверь или человек?

-Да, так. Кентавр!

Судя по всему, это прозвище к Капице прочно приклеилось.

Ученые старшего поколения так его называли даже десятилетия спустя. Сталин, безусловно, был преступником. В редкой семье в огромной стране его стараниями не был кто-нибудь совершенно безвинно расстрелян или посажен в тюрьму. Но в истории со сверхтекучестью он сыграл роль, которую можно считать положительной.

В России у Капицы все сложилось.

Если иметь в виду сверхтекучесть.

Уже через пару лет Л.Д.Ландау смог дать этому явлению теоретическое объяснение.⁶ Именно это открытие позволило взглянуть на гелий-II как на среду, где законы квантовой физики работают в макроскопическом масштабе.

Это явление родственно сверхпроводимости - сверхпроводимость можно рассматривать как сверхтекучесть электронной жидкости. В результате этого родства между явлениями существует много общего, ведь оба явления в макроскопических проявлениях описываются одними и теми же квантовыми законами. Эта общность, существующая в самой природе явлений, как следствие, проявляется и в наборе подобных физических явлений - одинаковых следствий квантовых законов, и в их физическом описании. Например, даже такое тонкое квантовое явление сверхпроводников, как туннельный эффект Джозефсона, обнаруживает себя и в случае сверхтекучести.

Однако есть и различия.

При нулевой температуре в сверхпроводниках сверхтекучую компоненту электронной жидкости образует только малое число от всех электронов проводимости. Концентрация этой компоненты представляет собой величину порядка $\frac{kT_c}{\epsilon_F} \approx 10^{-5}$, в то время как в жидком гелии при $T = 0$ вся жидкость становится сверхтекучей, т.е. концентрация сверхтекучей компоненты равна 1.

Существенно также то, что для взаимодействия с окружением у электронов есть электрический заряд и магнитный момент, в то время как для понимания образования сверхтекучего конденсата в гелии, на первый взгляд, не за что "зацепиться" - атомы гелия электрически нейтральны, не имеют спина и магнитного момента, а универсальная электрическая поляризуемость через взаимодействие Ван-дер-Ваальса в гелии "работает" при образовании жидкой фазы из паров.

При изучении свойств гелия-II рассмотрены, кажется, все основные аспекты характеризующие сверхтекучесть. Рассчитаны плотность сверхтекучей компоненты и ее зависимость от температуры, критические скорости сверхтекучей среды и звук в ней, поведение сверхтекучей жидкости вблизи

⁶ Перед этим Капице с помощью весьма рискованных усилий удалось вытащить Ландау из сталинской тюрьмы полуживым.

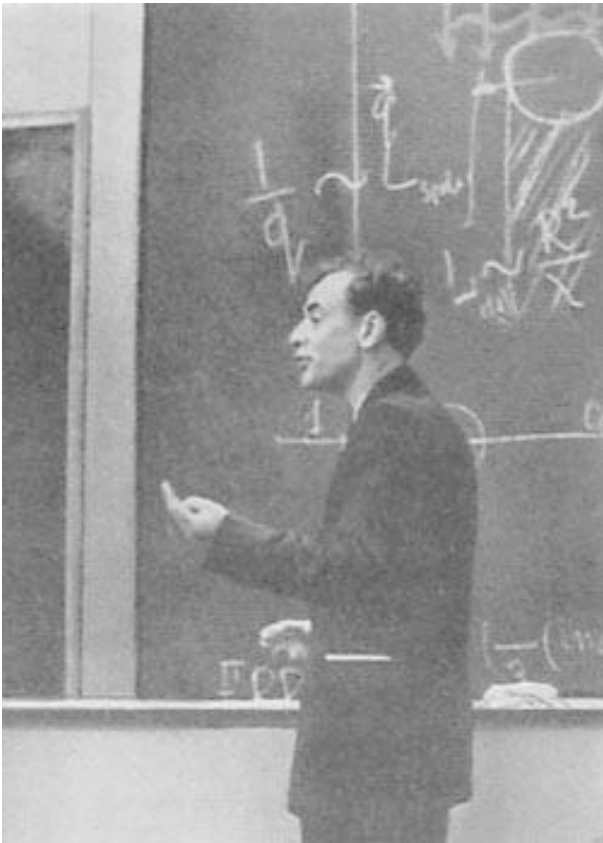


Fig. .11: Лев Давидович Ландау

твердой стенки и вблизи критической температуры и т.д. Этим вопросам, как и некоторым другим, посвящено значительное количество оригинальных работ и качественных обзоров [12]-[15]. Переписывать их содержание здесь они нет никакой необходимости.

Однако остается непонятным за счет какого электромагнитного механизма в гелии-4 переход в сверхтекучее состояние происходит при температуре порядка одного Кельвина, а в гелии-3 при температуре примерно в тысячу раз меньшей. А то, что в конечном итоге это должен быть электромагнитный механизм очевидно из масштаба энергии, при которой он происходит.

Часть II. Сверхпроводимость и нулевые колебания

4 Конденсат упорядоченных нулевых колебаний электронного газа

4.1 Механизм сверх-явлений

Подведем некоторые итоги

Прошло уже более ста лет после обнаружения явления сверхпроводимости, а история сверхтекучести также насчитывает несколько десятилетий, но до сих пор нет полной ясности с пониманием их физики. С середины прошлого века, после того как был открыт изотоп-эффект в сверхпроводниках, принято думать, что единственным механизмом, который может служить причиной возникновения сверхпроводимости, является электрон-фононное взаимодействие. Поэтому построенная на базе этого механизма теория Дж.Бардина, Л.Купера и Дж.Шриффера приобрела всеобщее признание.⁷ Эта теория верно рисует общую картину, но не может самого главного - она неспособна предсказать свойства конкретных сверхпроводников.

К тому же, такое объяснение механизма сверхпроводимости разрывало ее гипотетическую связь с родственным явлением - подобный механизм не может привести к сверхтекучему состоянию в гелии.

Более поздние исследования изотопических замещений показали, что нулевые колебания ионов в решетках металлов ангармоничны. Как следствие этого, изотопическое замещение влияет на межатомные расстояния в решетке, и тем самым прямо на энергию Ферми металла [39]. Поэтому существовавшее с середины прошлого века предположение о том, что электрон-

⁷ Подобное рассмотрение сверхпроводимости было несколько раньше было проведено Н.Н.Боголюбовым, так что, по-видимому, более справедливо эту теорию называть теорией Боголюбова-БКШ.

фононное взаимодействие является единственно возможным механизмом сверхпроводимости, оказалось неверным. Прямое воздействие изотопного замещения на энергию Ферми позволяет рассматривать сверхпроводимость без фононного механизма.

Кроме того, при ближайшем рассмотрении оказывается, что БКШ описывает механизм образования электронных пар, но в ней нет механизма объединения пар в единый сверхпроводящий ансамбль. А именно образование единого ансамбля частиц является необходимым условием существования сверхпроводимости. Спонтанно такое объединение произойти не может хотя бы потому, что пары не тождественны. Их различают друг от друга некоррелированные нулевые колебания.

Подойдем с другой стороны

Представляется, что объединение электронов в пары может происходить за счет магнитного взаимодействия электронных дипольных моментов. Но вообще говоря, конкретизация механизма, отвечающего за спаривание электронов - фононный или нефононный - не представляет первостепенного значения. Необходимо только, чтобы такой механизм работал во всем интервале температур, где существует сверхпроводимость. Работа механизма спаривания электронов и превращения их в бозонные пары - необходимое, но не достаточное условие для существования сверхпроводящего состояния.

Физической причиной существования сверхпроводимости является наличие энергии связи между бозонными парами, которая не позволяет отдельным частицам сверхпроводящего ансамбля рассеиваться на дефектах, теряя малые порции энергии. Без притяжения между парами процесс объединения электронов в пары не приводит к образованию сверхпроводящего конденсата.

Рассматривая механизм, объединяющей пары электронов в единый ансамбль, важно понимать то, что в этот ансамбль объединяется весьма малое количество электронов. Из измерений лондоновской глубины проникновения следует, что в ансамбль сверхпроводящих носителей объединяется примерно 10^{-5} часть от полного числа коллективизированных электронов. Таким образом, притяжение возникает между парами, разнесенными на почти сто межузельных расстояний. При этом другие электроны, разделяющие соседние "сверхпроводящие" пары, сил притяжения не испытывают и не мешают им испытывать тем парам, которые объединяются в сверхпроводящий ансамбль.

При низких температурах, при которых в металлах возникает сверхпроводимость, а в жидком гелии сверхтекучесть, вымершают все движения в этих средах кроме нулевых колебаний их частиц. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть возможность образования ансамблей сверхчастиц за счет взаимодействия их нулевых колебаний.

Электронная пара как всякий квантовый объект подвержена нулевым колебаниям. При нулевых осцилляциях электронной пары относительно близко расположенного иона должно возникать электрическое поле, характерное для осциллирующего дипольного момента.

Силы притяжения между парами будут отсутствовать пока их нулевые колебания неупорядочены.

В системе упорядоченно осциллирующих дипольных моментов может возникнуть притяжение. Так, притяжение и объединение в ансамбль возникнет, когда противофазно колеблющиеся пары располагаются на расстояниях, равных половине длины волны создаваемого их колебаниями электромагнитного поля.

В результате упорядочения нулевых колебаний электронных пар, при котором между ними возникают силы притяжения, достигается понижение энергии ансамбля и образование конденсата частиц на уровне с минимальной энергией.

Этот подход оказывается плодотворным - рассматривая сверх-явления как следствия упорядочения нулевых колебаний, удается построить теоретические механизмы, дающие возможность получить оценки для критических параметров рассматриваемых систем, удовлетворительно согласующиеся с данными измерений.

Так, оказывается, что критическая температура сверхпроводников (I рода) должна быть равна примерно 10^{-6} от температуры Ферми сверхпроводящего металла, что вполне согласуется с данными измерений.

В то же время оказывается, что разрушение сверхпроводимости магнитным полем происходит тогда, когда это поле разрушает когерентность нулевых колебаний электронных пар, что тоже хорошо согласуется с данными измерений.

Это обстоятельство позволяет предсказать основные свойства сверхпроводников, исходя из вычислений свойств конденсата упорядоченных нулевых колебаний. То совпадение, которое обнаруживается между характерными чертами такого конденсата и наблюдаемыми свойствами сверхпроводников, служит доказательством того, что явление сверхпроводимости действительно есть следствие упорядочения нулевых колебаний электронного газа.

В жидком гелии существует подобное взаимодействие между нулевыми колебаниями. Задача о взаимодействии нулевых колебаний электронных оболочек нейтральных атомов, находящихся в s-состоянии, была рассмотрена Ф.Лондоном еще перед войной. Им было показано, что именно это взаимодействие ответственно за сжижение гелия. Более внимательный анализ процесса упорядочения нулевых колебаний атомов гелия показывает, что сначала при температуре около 4К происходит упорядочение определенной моды нулевых колебаний. В результате между атомами возникают силы притяжения. Так как силы отталкивания в газе бозонов отсутствуют, то это приводит к его ожижению. Полное упорядочение нулевых колебаний оболочек атомов гелия-4 и дополнительная энергия их взаимного притяжения, которые необходимы для создания единого квантового ансамбля, возникают при вдвое меньшей температуре, т.е. примерно при 2К, что согласуется с температурой перехода его в сверхтекучее состояние. В гелии-3 для образования сверхтекучего квантового ансамбля необходимо дополнительно,

кроме нулевых колебаний, упорядочить магнитные моменты ядер, для чего необходимо понизить температуру ниже 0.001K, что также согласуется с опытом.

Таким образом рассмотрение моделей нулевых колебаний позволяет считать, что в основе как сверхпроводимости, так и сверхтекучести, лежит единый физический механизм.

Первоначально роль упорядочения нулевых колебаний в образовании сверхпроводящего и сверхтекучего состояний была рассмотрена в статьях [22] - [27].

4.2 Конденсат упорядоченных нулевых колебаний электронного газа

Следует отметить, что возможную связь сверхпроводимости и нулевых колебаний (атомов в решетке металла) предполагал еще Дж.Бардин [28].

Особая роль нулевых колебаний связана с тем, что при низких температурах в металлах кроме этих колебаний вымерзают все остальные виды движений.

Образование сверхпроводящего конденсата за счет взаимодействия нулевых колебаний в газе электронов проводимости имеет ту особенность, что требует работы двух механизмов: сначала электроны должны объединиться в бозонные пары и затем должно произойти упорядочение их нулевых колебаний (см. рис.12).

4.3 Спаривание электронов

Энергетически выгодное спаривание электронов в электронном газе должно произойти при температуре выше критической.

Механизмом для такого спаривания электронов может служить их магнитное диполь-дипольное взаимодействие.

Для того, чтобы это взаимодействие при температуре порядка 10K могло упорядочить спины в синглетном состоянии, расстояние между частицами в этой паре должно быть достаточно малым:

$$r < (\mu_B^2/kT_c)^{1/3} \simeq a_B, \quad (46)$$

здесь $a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ - радиус Бора, μ_B - магнетон Бора.

Т.е. два коллективизированных электрона должны быть локализованы в объеме одного ионного узла. Это согласуется с тем фактом, что сверхпроводимость реализуется только в металлах с двумя коллективизированными электронами на атом, и не наблюдается в одновалентных щелочных и благородных металлах.

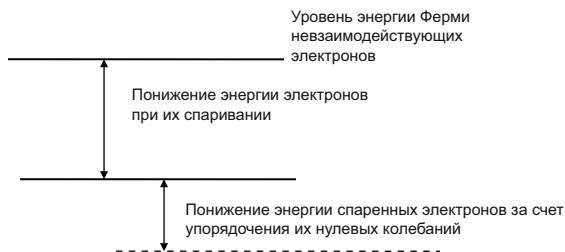


Fig. .12: Схематическое изображение уровней энергии коллективизированных электронов в сверхпроводящем металле

Нетрудно сообразить, что наличие магнитного момента у ионного узла, в окрестности которого локализованы объединяющиеся электроны, должно своим магнитным полем мешать этому объединению. Это подтверждается экспериментальным фактом: сильные магнетики не бывают сверхпроводниками и добавление, например, железа в сверхпроводящий сплав всегда ведет к понижению его критической температуры.

С другой стороны, такое магнитное спаривание не должно разрушаться при критической температуре. Энергия взаимодействия двух электронов, при их локализации вблизи одного узла решетки, может быть много большей. Это подтверждается измерениями квантования магнитного потока, которые не обнаруживают никаких изменений периода квантования при переходе сверхпроводника через критическую температуру [29], [30].

Эти эксперименты можно рассматривать как доказательство того, что существование механизма спаривания электронов является необходимым, но недостаточным условием для существования сверхпроводимости.

Предложенный выше механизм диполь-дипольного спаривания электронов в теоретическом плане можно рассматривать лишь как схему, нуждающуюся в более детальном рассмотрении и дальнейшей доработке.

Теперь нет смысла уделять особое внимание этому вопросу, поскольку природа механизма, вызывающего спаривание электронов, представляется несущественной. Важно, чтобы в интересующем нас температурном диапазоне (а также в некоторой области температур выше T_c) существовал любой механизм, превращающий электронный газ в ансамбль заряженных бозонов со спином равным нулю.

Пока температура недостаточно низка, нулевые колебания электронных пар остаются неупорядоченными. При достижении T_c взаимодействие между их нулевыми колебаниями должно вызвать упорядочение этих колебаний, и сверхпроводящее состояние явится его следствием.

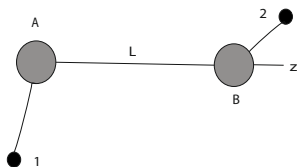


Fig. .13: Два иона, располагающиеся на расстоянии L , и центры электронных облаков коллективизированных электронов.

4.4 Образование конденсата нулевых колебаний

4.5 Взаимодействие нулевых колебания

Основная причина образования сверхпроводящего состояния - возникновение энергии притяжения между сверхпроводящими частицами. Для того, чтобы доказать, что энергия притяжения, объединяющая частицы в единый ансамбль, возникает за счет электромагнитного взаимодействия упорядоченных нулевых колебаний спаренных электронов, необходимо определить основные свойства конденсата нулевых колебаний и сравнить эти свойства со свойствами реальных сверхпроводников.

При образовании такого конденсата упорядочиваются амплитуды, частоты и фазы нулевых колебаний. Притяжения в ансамбле осциллирующих диполей можно объяснить следующим образом.

Пусть два (двухзарядных) иона A и B расположены на оси z на расстоянии L друг от друга. В окрестности каждого из них спаренные коллективизированные электроны создают облака с центрами в точках 1 и 2 (Рис..13). Обозначим r_1 радиус-вектор центра первого электронного облака относительно иона A и r_2 радиус-вектор второго относительно иона B .

Воспользовавшись приближением Борна-Оппенгеймера, медленно осциллирующие ионы будем считать неподвижными; температуру положим достаточно низкой ($T \rightarrow 0$), так чтобы для электронов можно было рассматривать только нулевые колебания.

В этом случае гамильтониан системы можем записать в виде:

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H' \\
 H_0 &= -\frac{\hbar^2}{4m_e} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) - \frac{4e^2}{r_1} - \frac{4e^2}{r_2} \\
 H' &= \frac{4e^2}{L} + \frac{4e^2}{r_{12}} - \frac{4e^2}{r_{1B}} - \frac{4e^2}{r_{2A}}
 \end{aligned} \tag{47}$$

Собственная функция невозмущенного гамильтониана описывает два иона, окруженных электронными облаками, но не взаимодействующих друг с другом. В связи с тем, что расстояние между ионами L велико по сравнению с размером их электронных облаков, член H' , характеризующий взаимодействие можно рассматривать как возмущение.

Интересуясь только главным членом в энергии взаимодействия при больших L , разложим H' в ряд по степеням $1/L$ и ограничимся первыми членами:

$$H' = \frac{4e^2}{L} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{2(z_2 - z_1)}{L} + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{L^2} \right]^{-1/2} - \left(1 - \frac{2z_1}{L} + \frac{r_1^2}{L^2} \right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{2z_2}{L} + \frac{r_2^2}{L^2} \right)^{-1/2} \right\}. \quad (48)$$

Комбинируя слагаемые в этом выражении, получаем:

$$H' \approx \frac{4e^2}{L^3} (x_1 x_2 + y_1 y_2 - 2z_1 z_2). \quad (49)$$

Это выражение описывает взаимодействие двух диполей d_1 и d_2 , образованных неподвижными ионами и электронными облаками с соответствующей мгновенной конфигурацией.

Выделим те значения смещений электронов, при которых в системе возникает притяжение.

Будем полагать, что нулевые колебания дипольных моментов, образованных ионами с их электронными облаками, происходят с частотой Ω_0 и каждый дипольный момент может быть разложен на три ортогональных проекции $d_x = ex$, $d_y = ey$ и $d_z = ez$. При этом колебания второго облака сдвинуты по фазе относительно колебаний первого на φ_x, φ_y и φ_z .

Из уравнения (49) следует, что взаимодействие z-компонент нулевых колебаний будет энергетически выгодным при синфазном колебании облаков, когда $\varphi_z = 2\pi$.

Так как взаимодействие колеблющихся электрических диполей происходит за счет порождаемого ими осциллирующего электрического поля, сдвиг на 2π означает, что притягивающиеся z-компонентами диполи должны отстоять по оси z друг от друга на расстояние L_z равное длине волны Λ_0 :

$$L_z = \Lambda_0 = \frac{c}{2\pi\Omega_0}. \quad (50)$$

Как следует из равенства (49), понижение энергии диполей при взаимодействии компонент, ориентированных по осям x и y , возникнет, если эти колебания будут противофазны, т.е. если диполи разнесены по этим осям на расстояние равное половине длины волны:

$$L_{x,y} = \frac{\Lambda_0}{2} = \frac{c}{4\pi\Omega_0}. \quad (51)$$

В этом случае имеем

$$H' = -4e^2 \left(\frac{x_1 x_2}{L_x^3} + \frac{y_1 y_2}{L_y^3} + 2 \frac{z_1 z_2}{L_z^3} \right). \quad (52)$$

Предполагая, что электронные облака совершают изотропные колебания с амплитудой a_0 по каждой оси

$$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = a_0 \quad (53)$$

получаем

$$H' = -576\pi^3 \frac{e^2}{c^3} \Omega_0^3 a_0^2. \quad (54)$$

4.6 Амплитуда нулевых колебаний.

В электронном газе с плотностью n_e , электрон, имеющий энергию $\mathcal{E}_F$, можно рассматривать размещающимся внутри ячейки с линейным размером λ_F :⁸

$$\lambda_F^3 = \frac{1}{n_e}, \quad (55)$$

соответствующей его де-бройлевской длине волны:

$$\lambda_F = \frac{2\pi\hbar}{p_F}. \quad (56)$$

С учетом (56) энергию Ферми электронного газа можно записать в виде

$$\mathcal{E}_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = 2\pi^2 \frac{e^2 a_B}{\lambda_F^2}. \quad (57)$$

Свободный электрон, совершающий нулевые колебания внутри ячейки с линейным размером λ_F , взаимодействует с ионом. Если считать положительный фон ионов равномерно размазанным по этой ячейке, то внутри нее электрон будет обладать потенциальной энергией:

$$\mathcal{E}_p \simeq -\frac{e^2}{2\lambda_F}. \quad (58)$$

При этом поскольку нулевые колебания электронной пары по определению квантованы, то их частота и амплитуда связаны соотношением:

$$2m_e a_0^2 \Omega_0 \simeq \hbar. \quad (59)$$

⁸ Конечно, электроны являются квантовыми частицами и нельзя слишком буквально понимать размещение коллективизированного электрона внутри определенной ячейки металла. Из-за действия кулоновских сил со стороны ионов, коллективизированные электроны имеют большую вероятность находиться возле ионов, экранируя их поля, но при этом они как бы размазаны по металлу. Неверно думать, что некий конкретный электрон фиксирован внутри ячейки возле конкретного иона. Но размазанность электронов не играет принципиального значения для нашего дальнейшего рассмотрения, так как в среднем возле данного узла решетки в двухвалентном металле в каждый момент времени находятся два электрона, которые можно рассматривать усреднено расположенными внутри рассматриваемой ячейки.

Поэтому кинетическую энергию электронной пары, совершающей нулевые колебания в ограниченной области пространства, можно представить в виде:

$$\mathcal{E}_k \simeq \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}. \quad (60)$$

В соответствии с теоремой вириала [33], кулоновская частица, совершающая финитное движение должна иметь потенциальную энергию $\mathcal{E}_p$, связанную с кинетической $\mathcal{E}_k$, простым соотношением $|\mathcal{E}_p| = 2\mathcal{E}_k$.

В связи с этим получаем, что амплитуда нулевых колебаний электрона в ячейке с учетом использованных допущений равна:

$$a_0 \simeq \sqrt{2\lambda_F a_B}. \quad (61)$$

4.7 Температура конденсации.

Отсюда энергия взаимодействия диполей, которая объединяет частицы в упорядоченном конденсате нулевых колебаний электронного газа,

$$\Delta_0 \equiv |H'| = 18\pi^3 \alpha^3 \frac{e^2 a_B}{\lambda_F^2}, \quad (62)$$

здесь $\alpha = \frac{1}{137}$ - постоянная тонкой структуры.

Сравнивая энергию связи с энергией Ферми (57), получаем

$$\frac{\Delta_0}{\mathcal{E}_F} = 9\pi\alpha^3 \simeq 1.1 \cdot 10^{-5}. \quad (63)$$

При этом критическая температура, ниже которой возможно существование такого конденсата, получается примерно равной:

$$T_c \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta_0}{k} \simeq \frac{9\pi\alpha^3}{2} T_F \simeq 5.5 \cdot 10^{-6} T_F \quad (64)$$

(коэффициент примерно равный $1/2$ соответствует экспериментальным данным, рассмотренным ниже в разделе (5.6)).

Данные измерений отношения $\frac{T_c}{T_F}$ для сверхпроводников I рода приведены в Табл(.3).

Графически отношения $\frac{T_c}{T_F}$ для сверхпроводников I рода показаны рис.14.

5 Критические параметры конденсата нулевых колебаний сверхпроводимость.

5.1 Критическая температура сверхпроводников I рода

Для того, чтобы сравнить критическую температуру конденсата нулевых колебаний с измеряемыми значениями критических температур сверхпроводников, оценим энергии Ферми сверхпроводников. Для этого воспользуемся экспериментальными значениями постоянной Зоммерфельда, которая

сверхпроводник	T_c, K	T_F, K Eq(66)	$\frac{T_c}{T_F}$
Cd	0.51	$1.81 \cdot 10^5$	$2.86 \cdot 10^{-6}$
Zn	0.85	$3.30 \cdot 10^5$	$2.58 \cdot 10^{-6}$
Ga	1.09	$1.65 \cdot 10^5$	$6.65 \cdot 10^{-6}$
Tl	2.39	$4.67 \cdot 10^5$	$5.09 \cdot 10^{-6}$
In	3.41	$7.22 \cdot 10^5$	$4.72 \cdot 10^{-6}$
Sn	3.72	$7.33 \cdot 10^5$	$5.08 \cdot 10^{-6}$
Hg	4.15	$1.05 \cdot 10^6$	$3.96 \cdot 10^{-6}$
Pb	7.19	$1.85 \cdot 10^6$	$3.90 \cdot 10^{-6}$

Tab. .3: Отношение T_c/T_F

выражается через энергию Ферми [32]:

$$\gamma = \frac{\pi^2 k^2 n_e}{4\mathcal{E}_F} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \left(\frac{k}{\hbar}\right)^2 m_e n_e^{1/3} \quad (65)$$

Так что исходя из равенств (57) и (65), получаем:

$$\mathcal{E}_F(\gamma) = \frac{p_F^2(\gamma)}{2m_e} \simeq \left(\frac{12}{k^2}\right)^2 \left(\frac{\hbar^2}{2m_e}\right)^3 \gamma^2. \quad (66)$$

Проведенные вычисления позволяют напрямую связать критическую температуру сверхпроводника с экспериментально измеримым твердотельным параметром - его электронной теплоемкостью.

Учитывая (64), имеем:

$$\Delta_0 \simeq \Theta \gamma^2, \quad (67)$$

здесь константа

$$\Theta \simeq 31 \frac{\pi^2}{k} \left[\frac{\alpha \hbar^2}{k m_e} \right]^3 \simeq 6.65 \cdot 10^{-22} \frac{K^4 cm^6}{erg}. \quad (68)$$

Сравнение результатов вычисленной параметров сверхпроводников I рода с данными измерений ([7],[17]) приведено в Табл.(.3),(.4) и на Рис.(.14),(.19).

5.2 Критические параметры сверхпроводников I рода

Явление конденсации нулевых колебаний в электронном газе имеет характерные черты.

Разрушить конденсат нулевых колебаний электронного газа можно разными путями.

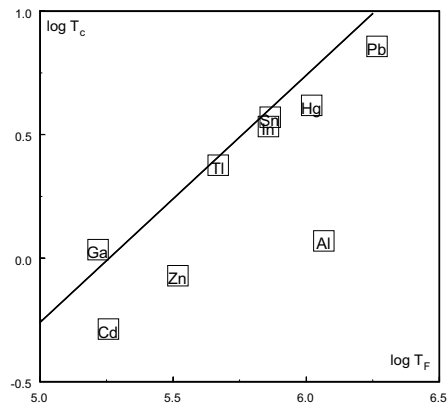


Fig. .14: Сравнение критической температуры T_c сверхпроводников I рода с их температурой Ферми T_F . Прямая линия соответствует равенству (64), которое как видно определяет для сверхпроводников I рода верхнюю границу их критической температуры.

superconductors	$T_c(\text{measur}),\text{K}$	$\gamma, \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{K}^2}$	$T_c(\text{calc}),\text{K}$ Eq.(67)	$\frac{T_c(\text{calc})}{T_c(\text{meas})}$
Cd	0.517	532	0.77	1.49
Zn	0.85	718	1.41	1.65
Ga	1.09	508	0.70	0.65
Tl	2.39	855	1.99	0.84
In	3.41	1062	3.08	0.90
Sn	3.72	1070	3.12	0.84
Hg	4.15	1280	4.48	1.07
Pb	7.19	1699	7.88	1.09

Tab. .4: Сравнение вычисленной критической температуры с данными измерений

Во-первых его можно испарить с помощью нагрева. При этом испарение конденсата должно обладать свойствами перехода порядок-беспорядок.

Во-вторых, из-за того, что колеблющиеся электроны несут электрический заряд, конденсат может быть разрушен приложением достаточно сильного магнитного поля.

Поэтому между критической температурой и критическим магнитным полем конденсата должна существовать взаимосвязь.

Она должна проявить себя во взаимосвязи критической температуры и критического поля сверхпроводников, если сверхпроводимость возникает за счет упорядочения нулевых колебаний.

Пусть при данной температуре ($T < T_c$) система колебательных уровней электронного газа состоит из двух уровней - основного, характеризующегося противofазным колебанием электронных пар, находящихся на расстоянии Λ_0 , и возбужденного, характеризующегося синфазным колебанием соседних пар. Пусть на основном уровне находится N_0 частиц, а в на возбужденном - N_1 . Синфазно колеблющиеся электронные пары на могут образовать конденсат. Конденсат могут образовать только частицы, составляющие разность заселенностей уровней $N_0 - N_1$. В безразмерном виде эта разность имеет смысл параметра порядка:

$$\Psi = \frac{N_0}{N_0 + N_1} - \frac{N_1}{N_0 + N_1}. \quad (69)$$

В теории сверхпроводимости, по определению, параметр порядка соответствует величине энергетической щели

$$\Psi = \Delta_T / \Delta_0. \quad (70)$$

Ведя отсчет энергии от уровня ε_0 , получаем

$$\frac{\Delta_T}{\Delta_0} = \frac{N_0 - N_1}{N_0 + N_1} \simeq \frac{e^{2\Delta_T/kT} - 1}{e^{2\Delta_T/kT} + 1} = th(2\Delta_T/kT). \quad (71)$$

или переходя к безразмерным переменным $\delta \equiv \frac{\Delta_T}{\Delta_0}$, $t \equiv \frac{kT}{kT_c}$ и $\beta \equiv \frac{2\Delta_0}{kT_c}$ имеем

$$\delta = \frac{e^{\beta\delta/t} - 1}{e^{\beta\delta/t} + 1} = th(\beta\delta/t). \quad (72)$$

Это уравнение описывает зависимость величины энергетической щели в спектре нулевых колебаний от температуры. Оно по форме совпадает с уравнениями, описывающими другие физические явления, которые также характеризуются существованием температурных зависимостей параметров порядка [31],[32]. Например, таких как концентрация сверхтекучей компоненты в жидком гелии или спонтанная намагниченность ферромагнетиков. Это уравнение является общим для всех фазовых переходов порядок-беспорядок (переходы II рода по классификации Ландау).

Решение этого уравнения, полученное методом итерации, показано на рис (.15).

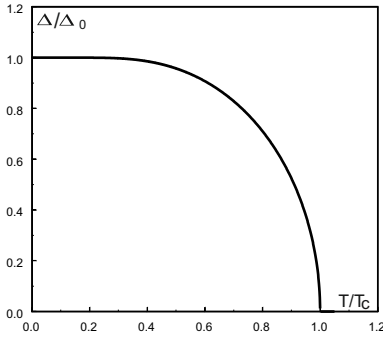


Fig. .15: Температурная зависимость величины щели в энергетическом спектре нулевых колебаний, рассчитанная по уравнению (72).

Это решение весьма точно совпадает с решением соответствующего интегрального уравнения БКШ, построенного на учете фононного спектра (см.рис.(.6)), и вполне удовлетворительно согласуется данными измерений.

Численно интегрируя полученную зависимость величины щели по температуре, получаем усредненную величину щели:

$$\langle \Delta \rangle = \Delta_0 \int_0^1 \delta dt = 0.852 \Delta_0 . \quad (73)$$

Чтобы перевести конденсат нулевых колебаний в нормальное состояние нужно перевести в возбужденное состояние половину его частиц (согласно (71) при этом условии щель схлопнется). Для этого с учетом (73) конденсату в единице объема нужно сообщить энергию:

$$\mathcal{E}_T \simeq \frac{1}{2} n_0 \langle \Delta_0 \rangle \simeq \frac{0.85}{2} \left(\frac{m_e}{2\pi^2 \alpha \hbar^2} \right)^{3/2} \Delta_0^{5/2} , \quad (74)$$

С другой стороны, получить нормальное состояние можно, приложив магнитное поле с плотностью энергии:

$$\mathcal{E}_H = \frac{H_c^2}{8\pi} . \quad (75)$$

Приравняв эти две энергии (отнесенные к единице объема)

$$\frac{1}{2} n_0 \langle \Delta_0 \rangle = \frac{H_c^2}{8\pi} , \quad (76)$$

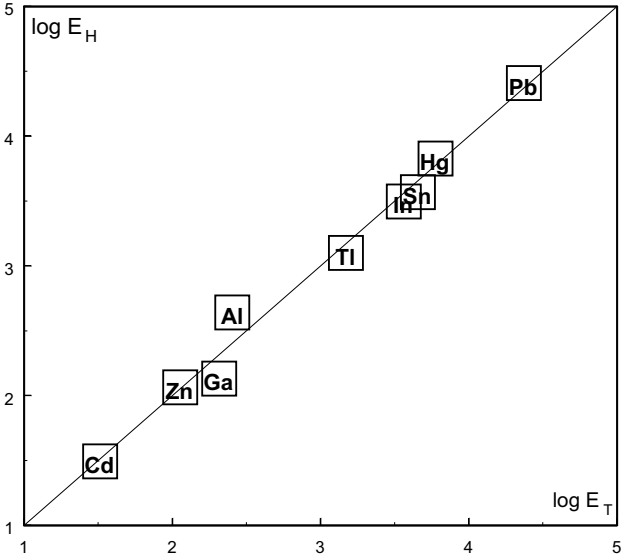


Fig. .16: Сравнение плотности критической энергии $\mathcal{E}_T$ (74) с плотностью магнитной энергией $\mathcal{E}_H$ (75) для сверхпроводников I рода.

получаем условие, связывающее критическую температуру с критическим полем конденсата нулевых колебаний заряженных бозонов. Сравнение плотностей критических энергий $\mathcal{E}_T$ и $\mathcal{E}_H$ для сверхпроводников I рода показаны на рис. (.16).

Как видно из этого рисунка согласие между критическими энергиями $\mathcal{E}_T$ и $\mathcal{E}_H$, вычисленными по (74) и (75) и данными, полученными для сверхпроводников I рода экспериментально [7],[17] можно считать вполне удовлетворительным. Для сверхпроводников II рода такое сравнение дает результат отличающийся в несколько раз. Причины для этого будут рассмотрены ниже. Однако вносить уточнения в этот расчет, по-видимому, не имеет смысла. Цель проведения этих вычислений состояла в том, чтобы показать, что описание конденсации нулевых колебаний электронных пар вполне согласуется с имеющимися экспериментальными данными для сверхпроводников. И в простом случае сверхпроводников I рода эту цель можно считать вполне достигнутой.

5.3 Нулевые колебания и критическое магнитное поле

Прямое влияние магнитного поля критической величины на магнитный момент электрона слишком слабо чтобы нарушить диполь-дипольное взаимодействие двух спаренных электронов:

$$\mu_B H_c \ll kT_c. \quad (77)$$

Для того чтобы магнитным полем разрушить сверхпроводимость, достаточно уничтожить упорядоченность нулевых колебаний электронов. Для этого достаточно воздействия не очень сильного магнитного поля.

Используя равенства (76), (74) и (61), величину щели можно представить произведением осциллирующего дипольного момента и критического магнитного поля:

$$\Delta_0 \simeq \frac{1}{2} e a_0 H_c. \quad (78)$$

Свойства нулевых колебаний электронов не должны зависеть от особенностей механизма объединения и существования электронных пар. Поэтому следует ожидать, что это равенство должно быть справедливым как для сверхпроводников I рода, так и для сверхпроводников II рода (с учетом того, что в случае сверхпроводников II рода в это равенство должно входить H_{c1} - первое критическое поле).

О том, как выполняется это условие, можно судить из рис.(.17).

5.4 Плотность сверхпроводящих носителей

Рассмотрим процесс нагрева электронного газа в металле. При нагреве металла электроны, занимавшие уровни вблизи уровня Ферми, переходят на более высокие. В результате уровни, ближайшие к уровню Ферми, из которых при низкой температуре формировались бозоны, становятся вакантными. Температура T_c , при которой электроны с уровнями из полосы энергий от $\mathcal{E}_F - \Delta$ до $\mathcal{E}_F$ перебрасываются на более высокие (и щель схлопывается), является критической. При этой температуре сверхпроводимость разрушается полностью.

Всего на этих уровнях находится N_Δ частиц:

$$N_\Delta = 2 \int_{\mathcal{E}_F - \Delta}^{\mathcal{E}_F} F(\mathcal{E}) D(\mathcal{E}) d\mathcal{E}. \quad (79)$$

Здесь $F(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{\frac{\mathcal{E}-\mu}{kT}} + 1}$ - функция Ферми-Дирака, $D(\mathcal{E})$ - число состояний на единичный энергетический интервал, двойка перед интегралом возникает из-за того, что на каждом уровне находится по два электрона.

Чтобы вычислить плотность состояний $D(\mathcal{E})$, нужно найти разность энергий системы при $T = 0$ и конечной температуре:

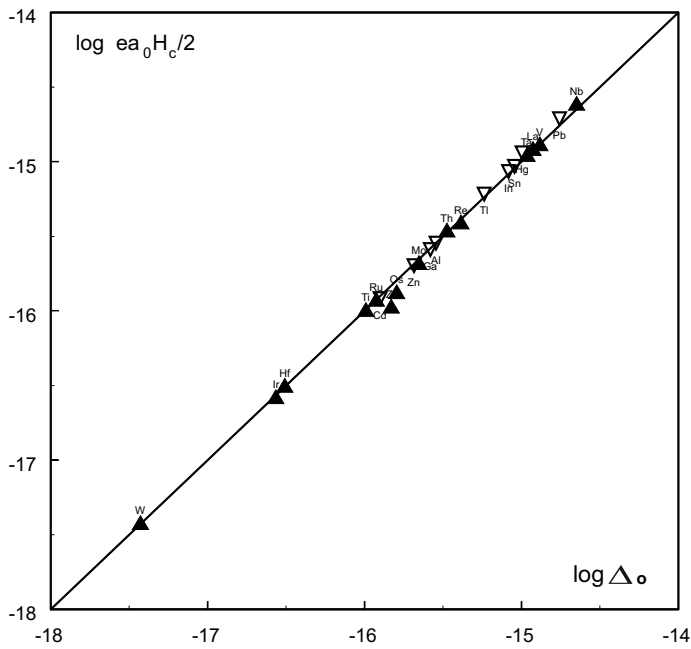


Fig. .17: Сравнение вычисленной энергии сверхпроводящей пары в критическом магнитном поле с измеренным значением величины щели в сверхпроводниках. Для наглядности на этом рисунке вместе отмечены параметры: заполненными треугольничками - сверхпроводников II рода, пустыми треугольничками - сверхпроводников I рода. По оси ординат - логарифм произведения величины вычисленного осциллирующего момента электрона на значение критического магнитного поля. По оси абсцисс - измеренное значение величины щели.

$$\Delta\mathcal{E} = \int_0^\infty F(\mathcal{E})\mathcal{E}D(\mathcal{E})d\mathcal{E} - \int_0^{\mathcal{E}_F} \mathcal{E}D(\mathcal{E})d\mathcal{E}. \quad (80)$$

Для вычисления плотности электронных уровней учтем, что на каждом из них может находиться по два электрона. Поэтому из выражения для энергии Ферми (57) получаем

$$D(E_F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dn_e}{d\mathcal{E}_F} = \frac{3n_e}{4\mathcal{E}_F} = \frac{3\gamma}{2k^2\pi^2}, \quad (81)$$

здесь γ - постоянная Зоммерфельда (65).⁹

Используя аналогичные рассуждения можно вычислить число электронов, которые заселяют уровни в интервале от $\mathcal{E}_F - \Delta$ до $\mathcal{E}_F$. Для единицы объема вещества равенство (79) может быть переписано в виде:

$$n_\Delta = 2kT \cdot D(\mathcal{E}_F) \int_{-\frac{\Delta_0}{kT_c}}^0 \frac{dx}{(e^x + 1)}. \quad (82)$$

Учитывая, что согласно (97), $\frac{\Delta_0}{kT_c} = 1.86$, в результате интегрирования получаем

$$\int_{-\frac{\Delta_0}{kT_c}}^0 \frac{dx}{(e^x + 1)} = [x - \ln(e^x + 1)]_{-1.86}^0 \simeq 1.22. \quad (83)$$

Таким образом, плотность электронов, забрасываемых теплом выше уровня Ферми при нагреве металла до температуры $T = T_c$ равна

$$n_e(T_c) \simeq 2.44 \left(\frac{3\gamma}{k^2\pi^2} \right) kT_c. \quad (84)$$

Здесь постоянная Зоммерфельда γ отнесена к единице объема металла.

Из равенства (51) следует, что

$$L_0 \simeq \frac{\lambda_F}{\pi\alpha} \quad (85)$$

и отношение плотности частиц конденсата к плотности ферми-газа, из которого он образуется:

$$\frac{n_0}{n_e} = \frac{\lambda_F^3}{L_0^3} \simeq (\pi\alpha)^3 \simeq 10^{-5}. \quad (86)$$

Используя эти равенства, можно найти линейный размер области локализации пары:

$$L_0 = \frac{\Lambda_0}{2} \simeq \frac{1}{\pi\alpha(n_e)^{1/3}}. \quad (87)$$

⁹ Следует отметить, что в связи с учетом того, что на каждом уровне может находиться два электрона, выражение для константы Зоммерфельда (65) содержит дополнительный коэффициент 1/2 по сравнению с обычно приводимым в литературе. [32]

сверхпроводник	λ_F, cm Eq(90)	L_0, cm Eq(51)	$\frac{n_0}{n_e} = \left(\frac{\lambda_F}{\Lambda_0}\right)^3$
Cd	$3.1 \cdot 10^{-8}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$
Zn	$2.3 \cdot 10^{-8}$	$0.92 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
Ga	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$0.81 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$
Tl	$1.9 \cdot 10^{-8}$	$0.55 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$
In	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$0.46 \cdot 10^{-6}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$
Sn	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$0.44 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$
Hg	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$0.42 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$
Pb	$1.0 \cdot 10^{-8}$	$0.32 \cdot 10^{-6}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$

Tab. .5: Концентрация сверхпроводящих носителей

или с учетом (61) получаем соотношение между плотностью частиц в конденсате и величиной щели:

$$\Delta_0 \simeq 2\pi^2 \alpha \frac{\hbar^2}{m_e} n_0^{2/3} \quad (88)$$

и

$$n_0 = \frac{1}{L_0^3} = \left(\frac{m_e}{2\pi^2 \alpha \hbar^2} \Delta_0 \right)^{3/2}. \quad (89)$$

Следует отметить, что полученные соотношения для конденсата нулевых колебаний бозе-частиц отличаются от соответствующих выражений для конденсата частиц, подчиняющихся статистике Бозе-Эйнштейна, которые приводятся во многих учебниках (см. например [31]). Различаются они коэффициентом α в правой части равенства (88).

Выраженные через константу Зоммерфельда значения де-бройлевской длины волны фермиевского электрона:

$$\lambda_F = \frac{2\pi\hbar}{p_F(\gamma)} \simeq \frac{\pi}{3} \cdot \frac{k^2 m_e}{\hbar^2 \gamma} \quad (90)$$

приведены в Таблице .5.

Для сравнения в этой таблице приведены значения де-бройлевской волны сверхпроводящей пары и отношение плотности сверхпроводящих носителей к плотности фермионов. Из этой таблицы видно, что отношение этих плотностей действительно по порядку величины близко к 10^{-5} в полном соответствии с полученным ранее равенством (86).

Исходя из проделанных вычислений, интересно сравнить плотность сверхпроводящих носителей n_0 при $T = 0$, описываемую равенством (89)

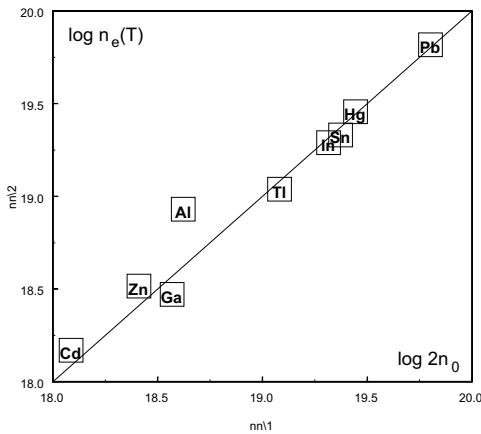


Fig. 18: Сравнение числа сверхпроводящих носителей при $T = 0$ с числом термически активированных электронов при $T = T_c$.

с плотностью нормальных носителей $n_e(T_c)$, испаренных на уровни выше $\mathcal{E}_F$ при температуре $T = T_c$, описываемой равенством (84). Это сравнение приведено в таблице .6 и на рис.18. (Необходимые данные для сверхпроводников взяты из таблиц [7],[17]).

Из полученных данных видно, что при нагреве условие разрушения сверхпроводимости для большинства сверхпроводников I рода действительно можно записать в виде равенства:

$$n_e(T_c) = 2n_0 \quad (91)$$

5.5 Скорость звука в конденсате нулевых колебаний.

Длина волны нулевых колебаний Λ_0 , по порядку величины равная 10^{-6} см, в данной модели является некоторой аналогией пипшардовской длины когерентности в БКШ. Согласно [7] длина когерентности $\xi = \frac{\hbar v_F}{4\Delta_0}$, и отношение этих длин с учетом (64) есть просто константа:

$$\frac{\Lambda_0}{\xi} \approx 10^{-3}. \quad (92)$$

Силы притяжения, возникающие между диполями, расположенными на расстоянии $\frac{\Lambda_0}{2}$ друг от друга и колеблющимися в противофазе, приводят к

сверхпроводник	n_0	$n_e(T_c)$	$2n_0/n_e(T_c)$
Cd	$6.11 \cdot 10^{17}$	$1.48 \cdot 10^{18}$	0.83
Zn	$1.29 \cdot 10^{18}$	$3.28 \cdot 10^{18}$	0.78
Ga	$1.85 \cdot 10^{18}$	$2.96 \cdot 10^{18}$	1.25
Al	$2.09 \cdot 10^{18}$	$8.53 \cdot 10^{18}$	0.49
Tl	$6.03 \cdot 10^{18}$	$1.09 \cdot 10^{19}$	1.10
In	$1.03 \cdot 10^{19}$	$1.94 \cdot 10^{19}$	1.06
Sn	$1.18 \cdot 10^{19}$	$2.14 \cdot 10^{19}$	1.10
Hg	$1.39 \cdot 10^{19}$	$2.86 \cdot 10^{19}$	0.97
Pb	$3.17 \cdot 10^{19}$	$6.58 \cdot 10^{19}$	0.96

Tab. .6: Сравнение плотности носителей

возникновению давления в системе:

$$P \simeq \frac{d\Delta_0}{dV} \simeq \frac{d_\Omega^2}{L_0^6}. \quad (93)$$

В связи с этим в образовавшемся конденсате звук должен распространяться со скоростью:

$$c_S \simeq \sqrt{\frac{1}{2m_e} \frac{dP}{dn_0}}. \quad (94)$$

Проведя соответствующие подстановки, скорость звука в конденсате можно выразить через скорость Ферми электронного газа:

$$c_S \simeq \sqrt{2\pi^2\alpha^3}v_F \simeq 10^{-2}v_F. \quad (95)$$

При этом кинетическая энергия частиц конденсата, движущихся со скоростью c_S :

$$2m_e c_S^2 \simeq \Delta_0. \quad (96)$$

Поэтому разрушения конденсата когерентных колебаний можно добиться, либо нагрев его до критической температуры и сообщив единице его объема энергию $\mathcal{E} \approx n_0\Delta_0$, либо возбудив ток его частиц со скоростью, превышающей c_S .

5.6 Отношение Δ_0/kT_c

Исходя из соотношения (91) с учетом равенств (67),(84) и (89) получаем

$$\frac{\Delta_0}{kT_c} \simeq 1.86. \quad (97)$$

Полученную оценку отношения Δ_0/kT_c можно считать удовлетворительно согласующейся с данными измерений, которые для сверхпроводников I рода приведены в Табл.(10) [17].¹⁰

¹⁰ Заметим, что в БКШ соотношение $\frac{\Delta_0}{kT_c} \simeq 1.76$.

сверхпроводник	T_c, K	Δ_0, meV	$\frac{\Delta_0}{kT_c}$
Cd	0.51	0.072	1.64
Zn	0.85	0.13	1.77
Ga	1.09	0.169	1.80
Tl	2.39	0.369	1.79
In	3.41	0.541	1.84
Sn	3.72	0.593	1.85
Hg	4.15	0.824	2.29
Pb	7.19	1.38	2.22

Tab. .7: Отношение Δ_0/kT_c

superconductors	electron shells
<i>Ti</i>	$3d^2 4s^2$
<i>V</i>	$3d^3 4s^2$
<i>Zr</i>	$4d^2 5s^2$
<i>Nb</i>	$4d^3 5s^2$
<i>Mo</i>	$4d^4 5s^2$
<i>Tc</i>	$4d^5 5s^2$
<i>Ru</i>	$4d^6 5s^2$
<i>La</i>	$5d^1 6s^2$
<i>Hf</i>	$5d^2 6s^2$
<i>Ta</i>	$5d^3 6s^2$
<i>W</i>	$5d^4 6s^2$
<i>Re</i>	$5d^5 6s^2$
<i>Os</i>	$5d^6 6s^2$
<i>Ir</i>	$5d^7 6s^2$

Tab. .8: Внешние электронные оболочки переходных металлов

6 Другие сверхпроводники

6.1 Оценка свойств сверхпроводников II рода

Несколько сложнее обстоит дело со сверхпроводниками II рода. Вычисления постоянной Зоммерфельда по формуле для свободного электронного газа дают значения примерно на порядок меньшие наблюдаемых для большинства этих металлов. Особенность этих металлов связана со спецификой строения их ионов - это переходные металлы, имеющие незаполненную внутреннюю d-оболочку (см. табл..8). Можно полагать, что увеличение электронной теплоемкости этих металлов должно быть связано с характерным взаимодействием коллективизированных электронов с электронами незаполненной d-оболочки.

Так как теплоемкость ионной решетки металлов при рассматриваемых низких температурах пренебрежимо мала, термически активной является электронная подсистема.

При $T = 0$ сверхпроводящие носители заселяют уровень $\mathcal{E}_F - \Delta_0$. При разрушении сверхпроводимости за счет нагрева каждый из носителей приобретает энергию порядка Δ_0 , которая идет на увеличение его кинетической энергии, т.е. на увеличение тепловых колебаний, амплитудное значение скорости которых v_t . Эта энергия:

$$\mathcal{E}_k = \frac{mv_t^2}{2} \simeq \Delta_0. \quad (98)$$

В переходных металлах на увеличение кинетической энергии электронного газа расходуется только часть энергии, переданной металлу. Другую часть энергии составит магнитное взаимодействие нагретых электронов.

При контакте с электроном d-оболочки электрон с тепловой скоростью v_t создаст на нем магнитное поле по порядку величины равно:

$$H \simeq \frac{e}{r_c^2} \frac{v_t}{c}. \quad (99)$$

Магнитный момент d-электрона примерно равен магнетону Бора $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$, $r_c = \frac{\hbar}{m_e c}$ - комптоновский радиус электрона. Поэтому энергия магнитного взаимодействия электрона проводимости с d-электроном окажется примерно равной:

$$\mathcal{E}_\mu \simeq \frac{e^2}{2r_c} \frac{v_t}{c}. \quad (100)$$

Эта энергия не связана с процессом разрушения сверхпроводимости.

В то время как в металлах с заполненными d-оболочками (сверхпроводниках I рода) вся энергия нагрева идет на повышение кинетической энергии электронов проводимости, в переходных металлах на это расходуется только небольшая ее часть:

$$\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_k} \simeq \frac{mv_t}{\hbar} a_B \simeq \frac{a_B}{\Lambda_0}. \quad (101)$$

Поэтому, в то время как в сверхпроводниках I рода зависимость величины щели от теплоемкости определяется соотношением (67), в сверхпроводниках II рода при определении величины щели необходимо принимать во внимание соотношение (101). В результате такого учета получим оценку:

$$\Delta_0 \simeq \Theta \gamma^2 \left(\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_k} \right) \simeq \Theta \gamma^2 \left(\frac{a_B}{\Lambda_0} \right) \frac{1}{2}, \quad (102)$$

здесь $1/2$ - подгоночный множитель.

Сравнение результатов этих вычислений с данными измерений (рис.(.19)) показывает, что для большинства сверхпроводников II рода полученную оценку можно считать вполне удовлетворительной.¹¹

¹¹ Из всех измеренных до настоящего времени сверхпроводников самую низкую крити-

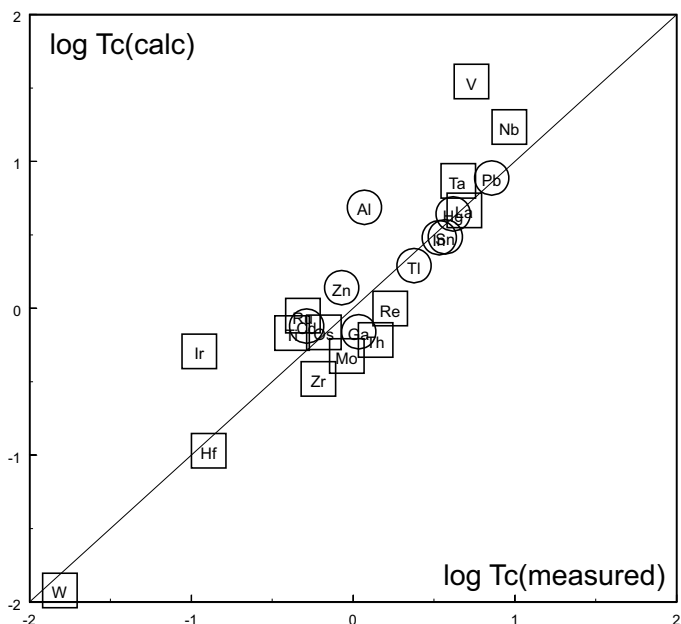


Fig. .19: Сравнение вычисленных значений критических температур сверхпроводников с данными измерений. Кружочками показаны значения параметров для сверхпроводников I рода, квадратиками - для сверхпроводников II рода. По оси абсцисс - измеренное значение критической температуры сверхпроводников, по оси ординат - вычисленная критическая температура. Вычисления критической температуры для сверхпроводников I рода проводились по формуле (67), оценка для сверхпроводников II рода - в соответствии с равенством (102).

6.2 Сплавы и высокотемпературные сверхпроводники

Для понимания механизма высокотемпературной сверхпроводимости важно установить являются ли ВТСП-соединения сверхпроводниками I или II рода, или это особый класс сверхпроводников.

Для решения этого вопроса можно воспользоваться установленной связью критических параметров с электронной теплоемкостью и тем обстоятельством, что теплоемкости сверхпроводников I и II родов значительно отличаются. В сверхпроводниках I рода энергия нагрева идет на увеличение кинетической энергии электронного газа, а в сверхпроводниках II рода дополнительно еще и на поляризацию неспаренных электронов d-оболочки.

На пути проведения соответствующих расчетов есть определенная трудность - достоверно неизвестна плотность электронного газа в ВТСП. Однако то обстоятельство, что плотности атомов в металлических кристаллах различаются не слишком сильно, для разграничения сверхпроводников I и II родов можно воспользоваться равенством (67). Для сверхпроводников I рода это позволяет получить вполне удовлетворительную оценку критической температуры (как это было сделано выше (рис.(.19)). Для сверхпроводников II рода такая оценка даст завышенное значение в силу того, что их теплоемкость содержит дополнительную добавку, связанную с поляризацией d-электронов.

Действительно, такой анализ, результаты которого показаны на рис.(.20), позволяет разделить все сверхпроводники на две группы как это видно из рисунка (.20), где представлена зависимость рассчитанных по формуле (67) значений параметра $\Theta\gamma^2$ от измеренной критической температуры сверхпроводников.

Сплавы Nb_3Sn и V_3Si можно считать сверхпроводниками II рода по определению. Поэтому то, что они располагаются в соответствующей области над Nb, представляется вполне нормальным. Некоторое превышение вычисленного значения критической температуры над экспериментально измеренным для керамики $Ta_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$ можно списать на то, что в измеренную величину теплоемкости, возможно, вносят вклад электроны других проводящих, но несверхпроводящих элементов (слоев) керамики. Не является новым и то, что эта керамика, также как и керамика $YBa_2Cu_3O_7$, относится к сверхпроводникам II рода. Однако керамики $(LaSr)_2CuO_4$,

ческую температуру, которая по порядку величины равна 1мК, имеет Mg. Атомы магния в металлическом состоянии отдают в электронный газ по два электрона. Это подтверждается тем, что спаривание этих электронов, проявляющееся в измеряемой величине кванта потока [30], наблюдается вплоть до температуры порядка 1К. Казалось бы в результате электронной оболочкой ионного остова в решетке металлического магния должна быть оболочка Ne. Поэтому критическую температуру магния логично рассчитывать по формуле для сверхпроводников I рода. Но реально оказывается, что для того, чтобы получить значение T_c , удовлетворительно согласующееся с измеренной величиной, критическую температуру магния следует вычислять по формуле (102), которая применима к описанию металлов с незаполненной внутренней оболочкой. Это говорит о том, что ионный остов металлического магния видимо не так прост, как полностью заполненная оболочка Ne.

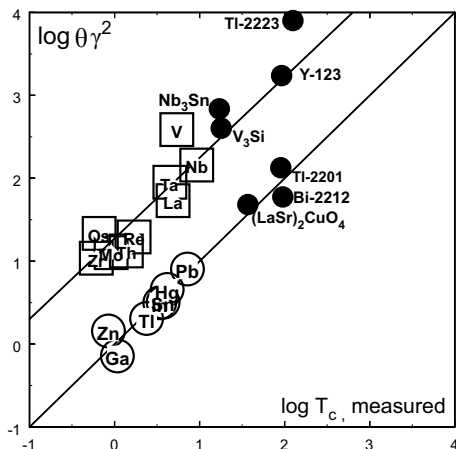


Fig. .20: Сравнение вычисленного значения параметра $\Theta\gamma^2$ сверхпроводников с данными измерений критической температуры. По оси абсцисс - измеренное значение критической температуры сверхпроводников, по оси ординат - логарифм параметра $\Theta\gamma^2$.

Bi – 2212 и *Tl* – 2201, согласно этому рисунку, следует считать сверхпроводниками I рода, что является несколько неожиданным.

7 Скорректированная оценка лондоновской глубины проникновения

7.1 Магнитная энергия движущегося электрона

Чтобы избежать некорректности при вычислении лондоновской глубины проникновения, можно провести рассмотрение баланса магнитной энергии в сверхпроводнике в магнитном поле. Эта магнитная энергия составляется из энергии проникающего в сверхпроводник внешнего поля и магнитной энергии движущихся электронов. Используя формулы [34], оценим отношение магнитной и кинетической энергий, которыми обладает электрон с зарядом e , массой m_e и движущийся прямолинейно со малой скоростью $v \ll c$.

Плотность импульса электромагнитного поля выражается равенством:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}[\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (103)$$

Учитывая, что движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ заряд создает магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{E}\mathbf{v}], \quad (104)$$

для плотности импульса поля (при $v \ll c$) получаем

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c^2} [\mathbf{E}[\mathbf{v}\mathbf{E}]] = \frac{1}{4\pi c^2} (\mathbf{v}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})) \quad (105)$$

В результате импульс электромагнитного поля движущегося электрона

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} dV = \frac{1}{4\pi c^2} \left(\mathbf{v} \int_V E^2 dV - \int_V \mathbf{E} E v \cos\vartheta dV \right). \quad (106)$$

Здесь интегралы берутся по всему пространству, занятому полем частицы, а ϑ угол между направлением скорости частицы и радиуса-вектора точки наблюдения. При вычислении последнего интеграла в условиях осевой симметрии относительно $\mathbf{v}$ вклады от составляющих вектора $\mathbf{E}$, перпендикулярных скорости, взаимно компенсируются для всех пар элементов пространства, расположенных диаметрально противоположно на магнитной силовой линии. Поэтому в уравнении (106) вместо вектора $\mathbf{E}$ можно взять его составляющую, коллинеарную $\mathbf{v}$ и равную

$$\frac{E \cos\vartheta \cdot \mathbf{v}}{v}. \quad (107)$$

С учетом этого, переходя к сферическим координатам и выполнив интегрирование по углам, получим

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{v}}{4\pi c^2} \int_r^\infty E^2 \cdot 4\pi r^2 dr. \quad (108)$$

Ограничивая интегрирование поля комптоновским радиусом электрона $r_C = \frac{\hbar}{m_e c}$,¹² то при $v \ll c$ получаем:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{v}}{4\pi c^2} \int_{r_C}^\infty E^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{e^2}{r_C}. \quad (109)$$

При этом электромагнитная энергия движущегося (медленно) электрона получается равной:

$$\mathcal{E} = \frac{vG}{2} = \frac{v^2}{c^2} \frac{e^2}{2r_C} = \alpha \frac{m_e v^2}{2}. \quad (110)$$

7.2 Магнитная энергия и лондоновская глубина

Энергия внешнего магнитного поля в объеме dv :

$$\mathcal{E} = \frac{H^2}{8\pi} dv. \quad (111)$$

¹² Такие эффекты как рождение пар заставляют считать радиус "квантового электрона" примерно равным комптоновскому радиусу [35].

При плотности сверхпроводящих носителей n_s , в соответствии с (110) их магнитная энергия в единице объема:

$$\mathcal{E}_H \simeq \alpha n_s \frac{m_2 v^2}{2} = \alpha \frac{m_e j_s^2}{2 n_s e}. \quad (112)$$

Здесь $j_s = 2en_s v_s$ - плотность тока сверхпроводящих носителей.

С учетом уравнения Максвелла

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s \quad (113)$$

магнитная энергия движущихся носителей приводится к виду

$$\mathcal{E}_H \simeq \frac{\tilde{\Lambda}^2}{8\pi} (\mathbf{rot} H)^2, \quad (114)$$

где введено обозначение

$$\tilde{\Lambda} = \sqrt{\alpha \frac{m_e c^2}{4\pi n_s e^2}} = \sqrt{\alpha} \Lambda_L. \quad (115)$$

В этом случае часть свободной энергии сверхпроводника, связанная с приложением магнитного поля

$$\mathcal{F}_H = \frac{1}{8\pi} \int_V \left(H^2 + \tilde{\Lambda}^2 (\mathbf{rot} H)^2 \right) dv. \quad (116)$$

Минимизируя свободную энергию, после несложных преобразований получаем

$$\mathbf{H} + \tilde{\Lambda}^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (117)$$

и таким образом $\tilde{\Lambda}$ есть глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

С учетом (89) из (115) получаем оценку для значений лондоновской глубины проникновения (см. таблицу (.9)). Согласие полученных значений с данными измерений можно считать вполне удовлетворительным.

superconductors	$\lambda_L, 10^{-6}\text{cm}$ measured [8]	$\tilde{\Lambda}, 10^{-6}\text{cm}$ calculated Eq.(115)	$\tilde{\Lambda}/\lambda_L$
Tl	9.2	11.0	1.2
In	6.4	8.4	1.3
Sn	5.1	7.9	1.5
Hg	4.2	7.2	1.7
Pb	3.9	4.8	1.2

Tab. .9: Уточненные значения лондоновской глубины

8 Три слова экспериментаторам

8.1 Почему создание комнатных сверхпроводников вряд ли возможно?

Понимание механизмов возникновения сверхпроводящего состояния должно открыть путь к решению более технологичной задачи, составлявшей, тем не менее, мечту последнего столетия - создать достаточно удобный для изготовления (в смысле ковкий) сверхпроводник с высокой критической температурой.

Чтобы двигаться к этой цели, во-первых, важно понять механизм ограничения сверхпроводящих свойств. Если по сверхпроводнику течет ток с большой плотностью, то предельный импульс, которым могут обладать сверхпроводящие носители, определяется размером ячеек, в которых они локализованы:

$$p_c = \frac{2\pi\hbar}{\Lambda_0}.$$

(118)

Поэтому с учетом равенства (96), получаем что критическая скорость сверхпроводящих носителей есть скорость звука в конденсате:

$$v_c = c_S$$

(119)

и примерно в сто раз меньше скорости Ферми.

Скорость звука в решетке металла v_s , в соответствии с соотношением Боме-Ставера [36], имеет примерно ту же величину:

$$v_s \simeq \frac{kT_D}{E_F} v_F \simeq 10^{-2} v_F.$$

(120)

Можно рассматривать разрушение сверхпроводимости как следствие того, что сверхпроводящие носители, двигавшиеся без трения при скоростях меньших скорости звука, после преодоления звукового барьера приобретают механизм трения. Поэтому можно думать, что если скорость звука в решетке металла будет меньше c_S , то она создаст ограничение на предельный ток в сверхпроводнике.

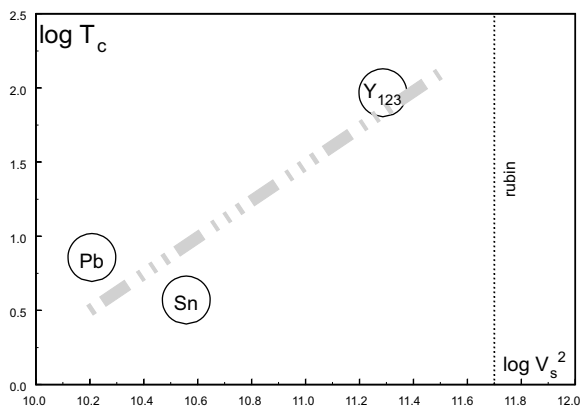


Fig. .21: Схематическое изображение зависимости критической температуры от скорости звука в сверхпроводнике. По оси ординат отложен логарифм критической температуры сверхпроводников. На оси абсцисс отложен логарифм квадрата скорости звука (для Sn и Pb - поперечная скорость звука, т.к. она меньше. Для иттриевой керамики использовалось значение скорости звука в пленке [37]). Пунктиром показано значение поперечной скорости звука в сапфире, как некая оценка предельного ее значения. Из рисунка видно, что такая оценка ведет к ограничению на критическую температуру в районе $0^\circ C$ - штрих-пунктирная линия.

Если это так, то для получения сверхпроводников с высокими критическими параметрами следует синтезировать соединения не только с высокой энергией Ферми электронного газа, но и с большой скоростью звука в решетке. Это согласуется с тем, что ВТСП-керамики, имеющие более высокие модули упругости по сравнению с металлами и сплавами, обладают более высокими критическими параметрами.

На рис. (.21) иллюстрируется такая зависимость критической температуры от квадрата скорости звука. Из этого рисунка, который из-за недостатка нужных экспериментальных данных можно рассматривать лишь как грубую оценку, видно, что для получения керамики с критической температурой близкой к комнатной, ее модуль упругости должен быть близок к модулю упругости сапфира, что представляется весьма трудно достижимым.

Кроме того такая керамика будет лишена другого важного качества - технологичности. Ведь для получения проволоки нужен пластичный сверх-

проводник. Проблему мог бы решить материал, обладающий приемлемой критической температурой (выше азотной), и испытывающий фазовое превращение при более высокой температуре термообработки. Вблизи фазовых переходов упругие константы обычно невелики, поэтому при температуре вблизи перехода из такого сверхпроводника можно было бы попытаться сделать тонкую проволоку и произвести ее намотку.

8.2 О магнитном спаривании электронов

Рассмотренный механизм образования сверхпроводящего состояния позволяет получить оценки критических параметров сверхпроводников, в большинстве случаев удовлетворительно согласующиеся с данными измерений. Для некоторых сверхпроводников это согласие лучше, а для таких как Hg , Al , V (см. рис. (.19)) целесообразно провести дополнительные теоретические и экспериментальные исследования для выяснения причин, вызывающих отклонения.

Значительный интерес представляет прояснение вопроса о магнитном механизме спаривания электронов. Как было обнаружено ранее в цилиндрах, изготовленных из некоторых сверхпроводящих металлов ($\text{Al}[29]$ и $\text{Mg}[30]$), выше T_c наблюдается квантование магнитного потока точно с тем же периодом, что и ниже T_c . Авторы этих работ объясняли это действием специального эффекта. Представляется более естественным, что такой период квантования получается в результате того, что спаривание электронов за счет магнитного диполь-дипольного взаимодействия продолжает существовать при температурах много выше T_c , несмотря на исчезновение сверхпроводящих свойств. При этой температуре разрушается когерентность нулевых колебаний, а вместе с ней и сверхпроводимость.

Спаривания за счет диполь-дипольного взаимодействия не должно быть в одновалентных металлах. В них электроны проводимости локализуются на узлах решетки на слишком больших расстояниях друг от друга.

Поэтому представляется интересным сравнить период квантования в двух случаях. В тонком цилиндре изготовленном из сверхпроводника, например из Mg , выше T_c период квантования равен $\frac{2\pi\hbar c}{2e}$. В таком же цилиндре из благородного металла, например из золота, период квантования должен быть в два раза больше.

8.3 Об влиянии изотопного замещения на конденсат нулевых колебаний

Кроме того хотелось бы привлечь внимание экспериментаторов к изотопическому эффекту в сверхпроводниках, послужившему отправным моментом для построения теории БКШ. В 50-е годы было экспериментально установлено, что существует зависимость критической температуры сверхпроводников от массы изотопа. Казалось бы, поскольку эффект зависит от массы ионов, то это можно считать прямым указанием на то, что в его основе лежит колебательный (фононный) процесс.

В ряде сверхпроводников I рода - Zn, Sn, In, Hg, Pb - изотоп-эффект можно описать соотношением:

$$\sqrt{M_i}T_c = const, \quad (121)$$

M_i - масса изотопа, T_c - критическая температура. В других сверхпроводниках он или описывается другой зависимостью, или вообще отсутствует.

Однако в последние десятилетия эффекты, связанные с замещением изотопов в решетках металлов, были изучены детально. Оказалось, что во многих металлах нулевые колебания ионов в решетке ангармоничны. Поэтому изотопическое замещение влияет непосредственно на параметры решетки, и в силу электронейтральности металла, на плотность электронного газа в металле, на его энергию Ферми и другие электронные свойства.

Прямых измерений влияния изотопного замещения на параметры решеток сверхпроводящих металлов не проводилось. Результаты измерений, проведенных на Ge, Si , алмазе и легких металлах, например Li [38], [39] (исследователи предпочитают кристаллы, где изотоп-эффекты велики и легче проводить соответствующие измерения), показывают, что полученная зависимость силовых постоянных от массы изотопа удовлетворительно согласуется с равенством (121). Такая же зависимость силовых констант от массы изотопа обнаружена и в олове [40]. К сожалению, прямых экспериментов по изучению влияния изотопного замещения на электронные свойства, такие как электронная теплоемкость и энергия Ферми, интересующих нас металлов до сих пор проведено не было.

Рассмотрим подробнее, чего следует ожидать при таких измерениях. Удобным сверхпроводником для этого является ртуть, у нее много изотопов и изотоп-эффект тщательно измерен еще в 50-х годах прошлого века.

Уже тогда было обнаружено, что изотопический эффект только в нескольких сверхпроводниках описывается равенством (121). В других он имеет другую величины, и поэтому его в общем виде можно описать, введя параметр α :

$$M_i^\alpha T_c = Const. \quad (122)$$

Учитывая (63), можем записать

$$T_c \sim \mathcal{E}_F \sim n_e^{2/3}. \quad (123)$$

Параметр l , характеризующий ионную решетку, при изотопном замещении приобретает приращение Δl :

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\Delta M_i}{M_i}, \quad (124)$$

здесь M_i и ΔM_i - масса изотопа и ее приращение при изотопном замещении.

Принято считать, что для ртути в соответствии с условиями, следующими из фононного механизма, параметр $\alpha \approx \frac{1}{2}$.

Однако анализ экспериментальных данных [20], [21] (см.рис.(.4)) говорит о том, что реально этот параметр ближе к $1/3$. В соответствии с этим

для ртути следует ожидать соотношения параметров:

$$\frac{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)}{\left(\frac{\Delta M_i}{M_i}\right)} \approx -\frac{1}{6}. \quad (125)$$

Таким образом, ожидаемое изменение параметров решетки получается не слишком малым и, по-видимому, может быть замечено с помощью стандартной измерительной техники.

Часть III. Сверхтекучесть как следствие упорядочения нулевых колебаний

9 Нулевые колебания атомов He и сверхтекучесть

Основные черты явления сверхтекучести в жидком гелии стали понятны уже несколько десятилетий назад [11]. Л.Д.Ландау увидел в сверхтекучести квантовый эффект в макроскопическом проявлении, что создало основу для понимания характерных черт этого явления и дальнейшего прогресса в его изучении [12],[15].

Современная теория сверхтекучести дает объяснение общим характеристикам этого явления: энергетическому спектру возбуждений, термодинамике сверхтекучего гелия, его теплоемкости и т.д.

Однако представляется важным, чтобы теория смогла объяснить количественно те характерные параметры, которые наблюдаются у данной среды. В первую очередь теория должна объяснить за счет какого механизма и почему переход в сверхтекучее состояние в гелии-4 происходит около 2К, т.е. при температуре почти точно в два раза меньшей температуры кипения гелия:

$$\frac{T_{boiling}}{T_\lambda} = \frac{4.215K}{2.172K} \approx 1.941. \quad (126)$$

При этом для гелия-3, ядра которого обладают магнитными моментами, отношение температуры перехода в сверхтекучее состояние к температуре кипения на несколько порядков меньше.

Особенность гелия-4 в том, что он не имеет ни суммарного заряда, ни дипольных моментов. Тем не менее за фазовые превращения в его конденсированном состоянии должен быть ответственен некий электромагнитный механизм (как и за подобные явления с тем же масштабом изменения энергии в других конденсированных веществах).

В 30-х годах прошлого века Ф.Лондон показал [41], что между нейтральными атомами действуют имеющее квантовую природу силы, вызванные взаимодействием Ван-дер-Ваальса. Ф.Лондон рассматривал атомы как трехмерные квантовые осцилляторы, находящиеся в основном состоянии. Для таких осцилляторов характерно наличие нулевых колебаний. Связь нейтральных атомов через создаваемые ими электромагнитные поля нулевых колебаний Ф.Лондон назвал дисперсионным взаимодействием.

10 Дисперсионный эффект во взаимодействии атомов гелия, находящихся в основном состоянии.

Следуя Ф.Лондону [41], рассмотрим два сферически симметричных атома без отличных от нуля усредненных дипольных моментов, каждый с поля-

ризуемостью a . Пусть в некоторый момент времени заряды этих атомов флуктуационно смещены из положений равновесия на расстояния:

$$r_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$r_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

Если атомы расположены вдоль оси Z на расстоянии L друг от друга, их потенциальную энергию можем записать в виде [41]:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{e^2 r_1^2}{2a} + \frac{e^2 r_2^2}{2a}}_{\text{elastic dipoles energy}} + \underbrace{\frac{e^2}{L^3}(x_1 x_2 + y_1 y_2 - 2z_1 z_2)}_{\text{elastic dipoles interaction}}. \quad (127)$$

Диагонализируем гамильтониан через нормальные координаты симметричных и антисимметричных смещений:

$$r_s \equiv \begin{cases} x_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ y_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \\ z_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2) \end{cases}$$

и

$$r_a \equiv \begin{cases} x_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ y_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) \\ z_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2) \end{cases}$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_s + x_a) \\ y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_s + y_a) \\ z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_s + z_a) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_s - x_a) \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_s - y_a) \\ z_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_s - z_a) \end{aligned}$$

В результате замены переменных получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{e^2}{2a}(r_s^2 + r_a^2) + \frac{e^2}{2L^3}(x_s^2 + y_s^2 - 2z_s^2 - x_a^2 - y_a^2 + 2z_a^2) = \\ &= \frac{e^2}{2a} \left[\left(1 + \frac{a}{L^3}\right)(x_s^2 + y_s^2) + \left(1 - \frac{a}{L^3}\right)(x_a^2 + y_a^2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - 2\frac{a}{L^3}\right)z_s^2 + \left(1 + 2\frac{a}{L^3}\right)z_a^2 \right]. \quad (128) \end{aligned}$$

Таким образом частоты этих осцилляторов зависят от их взаимной ориентации и определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \Omega_{0x}^s &= \Omega_{0y}^s = \Omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{a}{L^3}} \approx \\ &\approx \Omega_0 \left(1 \pm \frac{a}{L^3} - \frac{a^2}{8L^6} \pm \dots \right) \end{aligned} \quad (129)$$

и

$$\begin{aligned}\Omega_{0z}^s &= \Omega_0 \sqrt{1 \mp \frac{2a}{L^3}} \approx \\ &\approx \Omega_0 \left(1 \mp \frac{a}{L^3} - \frac{a^2}{2L^6} \mp \dots \right),\end{aligned}\tag{130}$$

здесь

$$\Omega_0 = \frac{2\pi e}{\sqrt{ma}}\tag{131}$$

- собственная частота колебаний электронной оболочки атома (при $L \rightarrow \infty$).

Энергия нулевых колебаний равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \hbar (\Omega_0^s + \Omega_0^a).\tag{132}$$

Нетрудно видеть, что взаимодействие нейтральных атомов не содержит членов, пропорциональных $\frac{1}{L^3}$ и характерных для взаимодействия нулевых колебаний в электронном газе (52), которые ответственны за возникновение сверхпроводимости. Во взаимодействии нейтральных атомов себя проявляют члены, пропорциональные $\frac{1}{L^6}$.

При этом важно, что энергии взаимодействия различных компонент нулевых осцилляций различаются между собой. Так взаимодействие нулевых колебаний, ориентированных вдоль направления, соединяющего атомы, приводит к их притяжению с энергией:

$$\mathcal{E}_z = -\frac{1}{2} \hbar \Omega_0 \frac{a^2}{L^6},\tag{133}$$

в то время как суммарная энергия притяжения осцилляций в перпендикулярных направлениях x и y в два раза меньше:

$$\mathcal{E}_{x+y} = -\frac{1}{4} \hbar \Omega_0 \frac{a^2}{L^6}\tag{134}$$

(знаком минус здесь учтено то, что при таком расположении энергетически выгодна встречная направленность взаимодействующих диполей).

11 Оценка основных характеристических параметров нулевых колебаний атомов в сверхтекучем гелии-4.

11.1 Основные параметры

В газе нейтральных бозонов отсутствует отталкивание между частицами. Поэтому ниже температуры

$$T_{boil} = \frac{2}{3k} \mathcal{E}_z\tag{135}$$

из-за возникшего притяжения между атомами, должно произойти схлопывание ансамбля и образование жидкости.

При вдвое более низкой температуре

$$T_\lambda = \frac{2}{3k} \mathcal{E}_{x+y} \quad (136)$$

все нулевые колебания упорядочиваются, за счет чего появляется дополнительное притяжение и образование единого квантового ансамбля.

Ограничением плотности образующегося бозонного конденсата служат нулевые колебания атомов. При своем образовании конденсат может сжиматься до тех пор, пока расстояния между атомами не станут примерно равными амплитуде их нулевых колебаний.

Исходя из этого, можно вычислить основные свойства ансамбля атомов с упорядоченными нулевыми колебаниями и сравнить их с данными измерений свойств сверхтекучего гелия.

Будем полагать, что радиус атомов равен боровскому радиусу a_B , как это следует из квантово-механических расчетов атома гелия. Поэтому величину энергии электронов на s -оболочке атома можно считать равной:

$$\hbar\Omega_0 = \frac{4e^2}{a_B}. \quad (137)$$

В связи с тем, что поляризуемость атома примерно равна его объему [42]

$$a \simeq a_B^3 \quad (138)$$

потенциальную энергию дисперсионного взаимодействия (134), вызывающую упорядочение нулевых колебаний в ансамбле атомов, можем представить равенством:

$$\mathcal{E}_{x+y} = -\frac{e^2}{a_B} a_B^6 n^2. \quad (139)$$

Здесь плотность атомов

$$n = \frac{1}{L^3} \quad (140)$$

11.2 Скорость нулевых колебаний атомов

Естественно предполагать, что квантованные нулевые колебания атомов гармоничны и для них характерно равенство кинетической и потенциальной энергии:

$$\frac{M_4 \hat{v}_0^2}{2} - \frac{e^2}{a_B} a_B^6 n^2 = 0, \quad (141)$$

здесь M_4 - масса атома гелия, $\hat{v}_0$ - средняя скорость атомов при гармонических колебаниях.

Отсюда после несложных преобразований получаем:

$$\hat{v}_0 = c\alpha^3 \left\{ \frac{n}{n_0} \right\}, \quad (142)$$

где введено обозначение

$$n_0 = \frac{\alpha^2}{a_B^3} \sqrt{\frac{M_4}{2m_e}}. \quad (143)$$

При равенстве единице выражения в фигурной скобке:

$$\frac{n}{n_0} = 1 \quad (144)$$

имеем

$$\hat{v}_0 = c\alpha^3 \cong 116.5 \text{ м/с}. \quad (145)$$

11.3 Плотность жидкого гелия

Условие (144) можно рассматривать как определение плотности атомов гелия в сверхтекучем состоянии:

$$n = n_0 = \frac{\alpha^2}{a_B^3} \sqrt{\frac{M_4}{2m_e}} \cong 2.172 \cdot 10^{22} \text{ atom/cm}^3. \quad (146)$$

Согласно этому определению плотность жидкого гелия-4 получается равной

$$\gamma_4 = nM_4 \cong 0.144 \text{ г/см}^3. \quad (147)$$

что хорошо согласуется с измеренной плотностью жидкого гелия равной 0.145 г/см^3 при $T \simeq T_\lambda$.

Аналогичные вычисления для жидкого He-3 дают плотность равную 0.094 г/см^3 , что можно считать согласующимся с имеющимися данными о его плотности равной 0.082 г/см^3 вблизи температуры кипения.

11.4 Диэлектрическая проницаемость жидкого гелия

Для оценки диэлектрической проницаемости гелия можно воспользоваться уравнением Клаузиуса-Моссотти [42]:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} nA. \quad (148)$$

Здесь A - поляризуемость.

Откуда, принимая во внимание (138), получаем

$$\varepsilon \approx 1.040, \quad (149)$$

что несколько отличается от величины диэлектрической проницаемости жидкого гелия, измеренной вблизи λ -точки [44]:

$$\varepsilon \approx 1.057. \quad (150)$$

11.5 Температура λ -перехода.

При температуре λ -перехода сверхтекучесть разрушается, потому что энергия теплового движения сравнивается с энергией ван-дер-ваальсовой связи атомов в сверхтекучем конденсате:

$$\frac{3}{2}kT_\lambda - \frac{e^2}{a_B}a_B^6n^2 = 0. \quad (151)$$

Отсюда с учетом (146)

$$T_\lambda = \frac{1}{3k} \frac{M_4}{m_e} \frac{\alpha^4 e^2}{a_B} \quad (152)$$

или после соответствующих подстановок:

$$T_\lambda = \frac{1}{3} \frac{M_4 c^2 \alpha^6}{k} = 2.177K, \quad (153)$$

что очень хорошо согласуется с измеренным значением $T_\lambda = 2.172K$.

11.6 Температура кипения жидкого гелия.

Сравнивая равенства (133)-(134), имеем

$$T_{boil} = 2T_\lambda = 4.35K \quad (154)$$

Это служит основой для предположения о том, что ожижение гелия происходит за счет сил притяжения между атомами, упорядочившими компоненты своих колебаний, ориентированные вдоль направлений, их соединяющих.

11.7 Скорость первого звука в жидком гелии

Из теории гармонического осциллятора известно, что амплитудное (максимальное) значение скорости такого осциллятора в два раза больше его средней скорости. В связи с этим, предполагая, что скорость первого звука c_{s1} ограничивается этой максимальной скоростью осциллятора, получаем

$$c_{s1} = 2\hat{v}_0 \simeq 233 \text{ m/s}, \quad (155)$$

что вполне согласуется с измеренным значением скорости первого звука в гелии, которая при $T \rightarrow 0$ имеет максимальную величину 238.3 m/s и понижается с ростом температуры до примерно 220 m/s при $T = T_\lambda$.

Полученные в этом разделе оценки для наглядности сведены в Таб.(.10). Данные измерений в этой таблице в основном цитируются по [43] и [44].

Точность, с которой модель нулевых колебаний позволяет вычислить некоторые экспериментально измеренные параметры сверхтекучего гелия,

параметр	определяющая формула	вычисленное значение	измеренное значение
средняя скорость нулевых колебаний атома гелия	$\hat{v}_0 = c\alpha^3$	116.5 m/s	
Плотность атомов жидкого гелия	$n = \sqrt{\frac{M_4}{2m_e}} \frac{\alpha^2}{a_B^3}$	$2.172 \cdot 10^{22}$ <i>atom/cm³</i>	
Плотность жидкого гелия-4 <i>g/l</i>	$\gamma = M_4 n$	144.3	$145_{T \simeq T_\lambda}$
Диэлектрическая проницаемость жидкого гелия-4	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{4\pi}{3} \alpha^2 \sqrt{\frac{M_4}{2m_e}}$	1.040	$1.048_{T \simeq 4.2}$ $1.057_{T \simeq T_\lambda}$
Температура λ -перехода, К	$T_\lambda \simeq \frac{M_4 c^2 \alpha^6}{3}$	2.177	2.172
Температура кипения гелия-4, К	$T_{boil} \simeq 2T_\lambda$	4.35	4.21
скорость первого звука в жидком гелии, <i>m/s</i>	$c_{s1} = 2\hat{v}_0$	233	$238.3_{T \rightarrow 0}$

Tab. .10: Сравнение вычисленных значений параметров жидкого гелия-4 с данными измерений

кажется удивительной для конденсированной среды. Температура λ -точки теоретически может быть легко оценена с еще большим числом значащих цифр, поскольку она выражается через мировые константы. Представляется, что расхождение в четвертой значащей цифре, которое сейчас существует, может быть вызвано неточностью калибровки термометра. Кажется, что было бы интересно экспериментально измерить температуру перехода гелия в сверхтекучее состояние с помощью термометра с более точной калибровкой, если это возможно.

12 Оценка свойств He-3

Результаты аналогичных вычислений для гелия-3 сведены в таблице (.11)

параметр	определяющая формула	вычисленное значение	измеренное значение
средняя скорость нулевых колебаний атома гелия	$\widehat{v}_0 = c\alpha^3$	116.5 m/s	
Плотность атомов жидкого гелия	$n_3 = \sqrt{\frac{M_3}{2m_e}} \frac{\alpha^2}{a_B^3}$	$1.88 \cdot 10^{22}$ atom/cm ³	
Плотность жидкого гелия-3, g/l	$\gamma = M_3 n_3$	93.7	82.3
Диэлектрическая проницаемость жидкого гелия-3	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{4\pi}{3} \alpha^2 \sqrt{\frac{M_3}{2m_e}}$	1.035	
Температура кипения гелия-3, К	$T_{boil} \simeq \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_{x+y}}{k}$	3.27	3.19
скорость звука в жидком гелии-3	$c_s = 2\widehat{v}_0$	233 m/s	

Tab. .11: Сравнение вычисленных значений параметров жидкого гелия-3 с данными измерений

Что касается перехода He-3 в сверхтекучее состояние, то здесь имеется коренное отличие от He-4, состоящее в том, что, кроме упорядочения нулевых колебаний, электромагнитное взаимодействие должно в этом случае упорядочить магнитные моменты ядер He-3. Оценим температуру, при которой произойдет такое упорядочение.

В связи с тем, что все характерные размеры в данной задаче - амплитуда нулевых колебаний, размер атома, расстояние между атомами в жидком гелии - по порядку величины равны радиусу Бора a_B , можно оценить порядок величины осциллирующего магнитного поля, которое колеблющаяся электронная оболочка создаст на "своем" ядре :

$$H_{\Omega} \approx \frac{e}{a_B^2} \frac{a_B \Omega_0}{c} \approx \frac{\mu_B}{A_3} \quad (156)$$

здесь $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$ - магнетон Бора, A_3 - поляризуемость атома гелия-3.

При этом упорядочение в системе магнитных моментов ядер He-3, величина которых примерно равна ядерному магнетону Бора $\mu_{n_B} = \frac{e\hbar}{2m_p c}$, должно наступить ниже критической температуры

$$T_c \approx \frac{\mu_{n_B} H_{\Omega}}{k} \approx 10^{-3} K. \quad (157)$$

То, что ядерные моменты могут быть упорядочены параллельно или антипараллельно друг другу согласуется с наличием соответствующих фаз сверхтекучего гелия-3.

Таким образом, рассмотрение явления сверхтекучести как следствия упорядочения нулевых колебаний атомов приводит к оценкам температуры λ -переходов и других параметров жидкого гелия, удовлетворительно согласующимся с результатами измерений.

Часть IV. Выводы

До настоящего времени было общепринято думать, что наличие изотопического эффекта в сверхпроводниках оставляет только один путь для объяснения явления сверхпроводимости - тот, который базируется на фононном механизме.

Однако более чем пятидесятилетнее развитие теории, базирующейся на фононном механизме, не привело к успеху - объяснить почему конкретный сверхпроводник имеет определенную критическую температуру (и критическое магнитное поле) так и не удалось.

Эта проблема еще более усугубилась с открытием высокотемпературных сверхпроводников. Как можно двигаться вперед в их изучении, если непонятен механизм, определяющий критическую температуру в элементарных сверхпроводниках?

В последние десятилетия экспериментаторы показали, что изотопное замещение в металлах ведет к изменению параметров их кристаллической решетки и тем самым влияет на энергию Ферми металла. Поскольку изотопное замещение прямо влияет на электронную систему, то в основе сверхпроводимости может лежать нефононный механизм.

Предложенная вашему вниманию теория сверхпроводимости предполагает, что специфика механизма объединения электронов в пары не имеет принципиального значения. Важно, чтобы такой механизм был работоспособным во всем рассматриваемом диапазоне температур. Природа механизма не играет роли потому, что объединение электронов в пары является необходимым, но недостаточным условием образования сверхпроводящего конденсата, поскольку после объединения электронов в бозонные пары, они не становятся тождественными частицами, способными образовать сверхпроводящий конденсат. Если температура недостаточно низка, электронные пары совершают некоррелированные нулевые колебания. Только после упорядочения нулевых колебаний электронных пар, которое происходит за счет их электромагнитного взаимодействия, может быть достигнуто понижение энергии системы и должно произойти образование конденсата на уровне с минимальной энергией.

Такой подход дает возможность рассматривать конденсацию нулевых колебаний в системе коллективизированных электронов как причину возникновения сверхпроводимости как I, так и II рода. При этом плотность сверхпроводящих носителей и критическая температура сверхпроводника определяются энергией Ферми металла, а величина критического магнитного поля сверхпроводника задается механизмом разрушения когерентности нулевых колебаний.

Таким образом, исходя из рассмотрения конденсации нулевых колебаний, удастся построить теорию сверхпроводимости, характерной особенностью которой является возможность получить оценки для критических параметров элементарных сверхпроводников, удовлетворительно согласующиеся с данными измерений.

Рассмотренный подход позволил найти объяснение механизму возникновения сверхтекучести в жидком гелии. Энергию взаимодействия нулевых колебаний электронных оболочек атомов в S-состоянии можно рассматривать как проявление действия так называемых дисперсионных сил Ван-дер-Ваальса. Таким путем удастся получить совпадающие с измерениями количественные оценки критических температурных точек как ожижения гелия, так и его перехода в сверхтекучее состояние.

Представляется важным то, что в результате оказывается, что в основе двух родственных явлений, как сверхпроводимости, так и сверхтекучести, лежит единый физический механизм - упорядочение нулевых колебаний.

Список литературы

- [1] Onnes H.K. : Comm.Phys.Lab.,Univ.Leiden, N119, 120,122 (1911)
- [2] Гинзбург В.Л. : УФН **170**,N6, 619-630 (2000)
- [3] de Nobel, J Phys.Today **49**, (9) 40 (1996)
- [4] W.Meissner, R.Ochsenfeld, Naturwiss., **21**, 787 (1933)
- [5] H.London, F.London: Proc.Roy. Soc., **A149**, 71 (1935)
Physica, **2**, 341 (1935)
- [6] de Gennes P.G. : Superconductivity of metals and alloys, New York, 787 (1966)
- [7] Ketterson J.B. and Song S.N.: Superconductivity, Cambridge (1999)
- [8] Линтон Э. Сверхпроводимость, М.: Мир, (1971)
- [9] Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д.: ЖЭТФ, **20**, 1064 (1950)
- [10] Phillips N.E.: Phys.Rev.B, **114**, 676 (1959).
- [11] Ландау Л.Д. : ЖЭТФ, **11**, 592 (1941)
- [12] Халатников И.М. : Введение в теорию сверхтекучести, Москва: Наука, (1965)
- [13] Фейнман Р., Статистическая механика, М., (1978)
- [14] Минеев В.П.: УФН, **139**, с.303, (1983)
- [15] Воловик Г.Е.: УФН, **143**, с.143, (1984)
- [16] Likhachev A.G., Polushkin V.N., Uchaikin, Vasiliev B.V.:
Magnetocardiometer based on a single-hole high-Tc SQUID,
Supercond. Sci. Technol. **3**, 148–151, (1990)
- [17] Pool Ch.P.Jr : Handbook of Superconductivity, Academic Press, (2000)
- [18] Бете Г., Зоммерфельд А. : Электронная теория металлов М.-Л.:ГТТЛ (1938).
- [19] Вильсон А. : Квантовая теория металлов,М.-Л.:ОГИЗ, (1941).
- [20] Maxwell E. : Phys.Rev.,**78**,p 477(1950).
- [21] Serin et al : Phys.Rev.B,**78**,p 813(1950).
- [22] Vasiliev B.V. : "Superconductivity as a consequence of an ordering of the electron gas zero-point oscillations" ,Physica C, **471**,277-284 (2011)

-
- [23] Vasiliev B.V. : "Superconductivity and condensation of ordered zero-point oscillations" , *Physica C*, **483**,233-246 (2012)
 - [24] Vasiliev B.V. : "Superconductivity, Superfluidity and Zero-Point Oscillations" in "Recent Advances in Superconductivity Research" ,pp.249-280, Nova Publisher,NY(2013)
 - [25] Vasiliev B.V. : "The development of the science of superconductivity and superfluidity in the 20th century" , *Universal Journal of Physics and Application* 1(4): 392-407, 2013
 - [26] Vasiliev B.V. : "Superconductivity as a Consequence of Ordering of Zero-point Oscillations in Electron Gas" , *Universal Journal of Physics and Application* 2(1): 22-35, 2014
 - [27] Vasiliev B.V. : "Superuidity as a consequence of ordering of zero-point oscillations" , *Universal Journal of Physics and Application*
 - [28] Bardeen J.: *Phys.Rev.*,**79**,p. 167-168(1950).
 - [29] Шабло А.А. и др.: Письма ЖЭТФ, т.19, вып.7,с.457-461 (1974)
 - [30] Шарвин Д.Ю. и Шарвин Ю.В.: Письма ЖЭТФ, т.34, вып.5,с.285-288 (1981)
 - [31] Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.: Статистическая физика,т.V, Наука, Москва (1976)
 - [32] Киттель Ч. : Введение в физику твердого тела, Москва: Наука, (1978)
 - [33] Vasiliev B.V. and Luboshits V.L.: *Physics-Uspekhi*, **37**, 345, (1994)
 - [34] Беккер Р. : Теория электричества, т.2 Электронная теория, гл.А, §8, Москва-Ленинград, ОНТИ, (1941)
 - [35] Мессиа А.: Квантовая механика, том 2, стр. 490, Москва: Наука, (1979)
 - [36] Ашкрофт Н. Мермин Н.: Физика твердого тела, том 2., Мир, (1979)
 - [37] Головашкин А.И. : Препринт ФИАНа, 10, Москва, 2005.
 - [38] Коган В.С.: УФН **78** 579 (1962)
 - [39] Инюшкин А.В.: Глава 12 в книге "Изотопы" под ред.В.Ю.Баранова, Физматлит, 2005.
 - [40] Wang D.T. et al : *Phys.Rev.B*,**56**,N 20,p. 13167(1997).
 - [41] Лондон Ф.: УФН, **17**, с.421, (1937)
 - [42] Fröhlich H. : Theory of dielectrics, Oxford, 1957.

- [43] Кикоин И.К и др: Таблицы физических величин, Москва, Атомиздат (1978)
- [44] Russel j.Donnelly and Carlo F.Barenghy: The Observed Properties of Liquid Helium, Journal of Physical and Chemical Data, **6**, N1, pp.51-104, (1977)